Б.Д. Панин, Р.П. Репинская, Е.А. Румянцева, О.Г. Анискина

ОБ УЧЕТЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОЛЯ ГРАВИТАЦИИ В ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

B.D. Panin, R.L. Repinskaya, E.A. Rumyantseva, O.G. Aniskina

ON THE ACCOUNT OF GRAVITATION FIELD HETEROGENEITY IN HYDRODYNAMIC MODELS

В работе получена система уравнений гидротермодинамики для моделирования атмосферных процессов с учетом неоднородности поля силы тяжести (СТ); рассмотрены связь завихренности гравитационного ветра с циклонами и антициклонами и влияние поля СТ на структуру моделируемых полей. Разработана конечно-разностная модель в вариациях и с помощью численных экспериментов исследована чувствительность составляющих используемого вектора состояния системы к аномалиям силы тяжести и к другим составляющим вектора параметров. Дан анализ полученных результатов.

The paper presents a system of hydrothermodynamic equations for simulation of atmospheric processes taking into account heterogeneity of the field of gravitational force (GF); considers connection of the gravitational wind vorticity with cyclones and anticyclones, and the GF field effect on structure of the fields being modeled. A finite-difference model with variations is designed; sensitivity of the components of the used vector of the system conditions to gravity anomalies and to other components of the parameter vector is studied with the help of numerical experiments. An analysis of the results obtained is given.

Введение

В литературе уже давно указывалось на необходимость учета неоднородности поля гравитации при моделировании атмосферных процессов [3, 7]. Специальные исследования (см. обзор в [7]) показали, что связь полей метеовеличин и силы тяжести (СТ) имеет место [7]; выбор отсчетной поверхности в значительной мере определяет структуру получаемых полей, возможности их дальнейшего анализа и использования [7, 12]. Например, переход от сферы к эллипсоиду приводит к уменьшению средней квадратической ошибки прогнозов высоты H_{500} на 1,2 м [7]; вариации поля СТ влияют на интенсивность и траектории перемещения циркуляционных систем атмосферы [7, 11], причем влияние оказывают в основном тангенциальные составляющие, изменяющие рельеф изобарических поверхностей, а роль вертикальной составляющей менее существенна; наблюдается повышенная повторяемость антициклонической (циклонической) циркуляции (в том числе тропических циклонов) в районах положительных (отрицательных) аномалий силы тяжести (АСТ) [11], что свидетельствует об их определенной роли в формировании центров действия атмосферы; учет неоднородности поля СТ приводит к улучшению качества прогнозов H_{500} на 12% [11]; ошибками в описании динамики атмосферы вследствие неучета неоднородности поля СТ в среднеаномальных районах[1] можно пренебречь, если размеры области расчета по широте не превышают 330 км [7] и т.д. Однако вопрос о влиянии вариаций СТ на атмосферные процессы и явления изучен ещё слабо, а в современных гидродинамических прогностических моделях эти эффекты вовсе не учитываются [2], несмотря на то что в уравнениях движения СТ является доминирующей [7]. Так, в сферических координатах порядок тангенциальных составляющих сил в аномальном поле гравитации близок к порядку градиента давления и ускорения Кориолиса [4, 11]. Сказанное подчеркивает необходимость тщательного выбора и корректного задания основной отсчетной поверхности в гидродинамических моделях атмосферы и, кроме того, хорошего освещения всех районов Земли данными гравиметрических измерений.

Параметры общеземельного эллипсоида. Система уравнений атмосферной модели

В качестве наиболее приемлемой фигуры Земли в задачах геодезии, геофизики и метеорологии используют модельную поверхность общеземного эллипсоида вращения [7, 9, 12]. Он определяется совпадением центра эллипсоида (ОЗЭ) с центром масс Земли, плоскости экватора с плоскостью земного эллипсоида и минимумом суммы квадратов отклонений по высоте квазигеоида во всех его точках от поверхности эллипсоида. Указанные условия определяют требования к размерам и форме ОЗЭ, к его расположению в теле Земли [5, 7, 13]. Форму эллипсоида вращения определяют экваториальной a и полярной b полуосями, его полярным сжатием $\alpha_e = (a_e - b)/a_e$ или первым эксцентриситетом меридианного эллипса $e = [(a_e^2 + b^2)/b^2]^{1/2}$.

Обычно из элементов реальной фигуры Земли и ее поля гравитации выделяют «нормальную часть», для которой создана строгая теория решения указанных задач. В качестве «нормальной» Земли принимают ОЗЭ – уровенный эллипсоид вращения, центр которого совпадает с центром масс Земли, полярная ось инерции – с осью её вращения, а внешняя поверхность является эквипотенциальной поверхностью нормального поля СТ [7, 9, 12, 13]. Затем находят поправки к решениям для ОЗЭ [7, 12, 13]. Таким образом, «нормальная» Земля – это система фундаментальных постоянных, наилучшим образом характеризующих фигуру и поле гравитации реальной Земли.

Нормальную СТ вычисляют (с учетом современных параметров Земли [9, 12]) по формуле: $\gamma = 9{,}8062(1 - 2{,}649\cdot10^{-3}\cos2\varphi)\times(1 - 3{,}1466\ 10^{-7}H)$ м/с. Здесь φ [рад] – геоцентрическая широта, H [м] – геодезическая высота. Отклонение измеренного значения ускорения свободного падения g от γ есть аномалия силы тяжести (АСТ) g_a.

[1] Здесь тангенциальные компоненты поля СТ $g_x = g_y = 20$ мГал, при составляющих скорости ветра $U = V = 10$ м/с уровень их допустимых ошибок $\delta U = \delta V = 0{,}1$ м/с, а промежуток времени, за который эти ошибки накапливаются, $\Delta t = 10^5$ с [7].

Таким образом, согласно практике объективного анализа, гидродинамического и синоптического прогнозов атмосферных полей, в качестве основной отсчетной поверхности использовалась поверхность ОЗЭ, по вертикали – координата $\sigma = P/P_S$ (P_S и P – давление на уровне рельефа и в произвольной частице воздуха), по горизонтали – эллипсоидальные координаты. В этом случае начало координат помещают в центр эллипсоида и вводят координаты: $x^1 = \Phi = (W_0 - W_{ОЗЭ})$ – относительный нормальный геопотенциал в рассматриваемой точке (где W_0 – нормальный потенциал СТ; $W_{ОЗЭ} = \text{const} = W_0$ на поверхности ОЗЭ); $x^2 = \theta = (\pi/2 - B)$ – дополнение до геодезической широты B; $x^3 = \lambda$ – геоцентрическая долгота; $dx^1 = d\Phi$, $dx^2 = d\theta$, $dx^3 = d\lambda$. На поверхности ОЗЭ вектор $\boldsymbol{g}$ будет иметь тангенциальные (g_θ, g_λ) и вертикальную (g_Φ) компоненты. Радиусы кривизны сечения ОЗЭ по азимуту α в плоскости меридиана ($\alpha = 0$) и первого вертикала ($\alpha = \pi/2$) равны: $r_{МЭ} = a_e\left(1-e^2\right)\left(1-e^2\sin^2 B\right)^{-1/2}$; $r_{ВЭ} = a_e\left(1-e^2\sin^2 B\right)^{-1/2}$, а приращения дуги dS, соответствующие приращениям координат $d\Phi$, $d\varphi$, $d\lambda$, таковы: $dS_\Phi =$ $= d\Phi$, $dS_\theta = R_M\, d\theta$, $dS_\lambda = R_B \sin\theta\, d\lambda$. Здесь R_M и $R_B \sin\vartheta$ – радиусы кривизны уровенной поверхности в направлении геоидальных координат, $R_M = r_{МЭ} + H$, $R_B = r_{ВЭ}/\sin\theta + H$; $H = \Phi/\gamma$. Отсюда $h_r = 1$, $h_\theta = R_M$, $h_\lambda =$ $= R_B \sin\vartheta$ – коэффициенты Ламэ, характеризующие изменения радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$ вдоль осей координат. Обозначим: $\omega_r = \omega\cdot\cos\theta$, $\omega_\theta = -\omega\cdot\sin\theta$, $\omega_\lambda = 0$ – проекции вектора угловой скорости вращения Земли $\boldsymbol{\omega}$ на оси координат, а $V_1 = W$, $V_2 = V$, $V_3 = U$ – компоненты вектора скорости $\boldsymbol{V}$. Далее, трансформируя геоид в ОЗЭ и учитывая, что

$$\frac{\partial R_M}{\partial \Phi} = \frac{\partial R_B}{\gamma\,\partial \Phi};\ \frac{\partial R_M}{\partial \lambda} + \frac{\partial R_B}{\partial \lambda} = 0;\ \frac{\partial R_M}{\partial \theta} = -\frac{r_M^3\, e^2 \sin(\pi - 2\theta)}{2a_e^2\left(1-e^2\right)^2} \approx r_{МЭ}^3 E;$$

$$\frac{\partial R_B}{\partial \theta} = r_{ВЭ}^3 E;\ E = e^2 \big/ 2a_e^2 \sin(\pi - 2\theta),$$

$r_M = -\,g_z/W_{xx}$ – радиус кривизны поверхности геоида $W(x, y, z) = C$ в плоскости меридиана [13], и получаем систему уравнений гидродинамики с учетом неоднородности поля СТ.

Итак, мы используем правую систему эллипсоидальных координат $\Phi\theta\lambda$. В них квазистатичность учитывается при определении тенденции аналога вертикальной скорости $\partial\dot{\sigma}\big/\partial t$, а уравнение для P_S описывает влияние гравитационных эффектов. В уравнениях движения учтено, что в низких широтах из-за больших значений $\dot{\sigma}$ гидростатическое приближение ($\mu = -\,g_\sigma + g_\sigma^2\,\rho\partial h/\partial\sigma = 0$) имеет величину $\mu \neq 0$, в которой g_σ– АСТ по вертикали, ρ – плотность воздуха, h – высота σ-уровней. После подстановки μ в уравнения эффект негидростатичности учитывается с помощью множителя $G = 2 - g_\sigma \rho \partial h / \partial\sigma$. Если $\mu = 0$, $G = 1$, то негидростатичность не учитывается.

Запишем полученную систему уравнений атмосферной модели:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \dot{\sigma}\frac{\partial U}{\partial \sigma} + \frac{V}{R_M}\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{U}{R_B \sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{U\dot{\sigma}}{R_B\gamma} + \frac{UV}{R_M} ctg\theta + 2\left(V\omega\cos\theta + \dot{\sigma}\omega\sin\theta\right) +$$

$$+\frac{UV}{R_M R_B} r_{BЭ}^3 E = F_\lambda + g_\lambda - g_\sigma\left(1 - \frac{\mu}{g_\sigma}\right)\frac{1}{R_B\sin\theta}\frac{\sigma}{P_S}\frac{\partial h}{\partial\sigma}\frac{\partial P_S}{\partial\lambda} + g_\sigma\left(1 - \frac{\mu}{g_\sigma}\right)\frac{1}{R_B\sin\theta}\frac{\partial h}{\partial\lambda}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \dot{\sigma}\frac{\partial V}{\partial \sigma} + \frac{V}{R_M}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{U}{R_B \sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \lambda} - \frac{U^2}{R_M} ctg\theta + \frac{\dot{\sigma}V}{R_M\gamma} - 2U\omega\cos\theta - \frac{U^2}{R_M R_B} r_{BЭ}^3 E =$$

$$= F_\theta + g_\theta - g_\sigma\left(1 - \frac{\mu}{g_\sigma}\right)\frac{1}{R_M}\frac{\sigma}{P_S}\frac{\partial h}{\partial\sigma}\frac{\partial P_S}{\partial\theta} + g_\sigma\left(1 - \frac{\mu}{g_\sigma}\right)\frac{1}{R_M}\frac{\partial h}{\partial\theta}; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial t} + \dot{\sigma}\frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} + \frac{V}{R_M}\frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \theta} + \frac{U}{R_B \sin\theta}\frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \lambda} - 2U\omega\sin\theta - \frac{V^2}{R_M\gamma} - \frac{U^2}{R_B\gamma} = F_\sigma - g_\sigma\left(1 - g_\sigma\rho\frac{\partial h}{\partial\sigma}\right); \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{R_M R_B}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\rho\dot{\sigma}R_M R_B\right) + \frac{1}{R_M\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho V\sin\theta\right) +$$

$$\frac{1}{R_B\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\rho U\right) + \frac{\rho U}{R_M R_B} r_{BЭ}^3 E = 0; \quad (4)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{\sigma}{P_S}\int_0^1\left(\frac{1}{R_B\sin\theta}\frac{\partial(UP_S)}{\partial\lambda} + \frac{1}{R_M}\frac{\partial(VP_S)}{\partial\theta}\right)d\sigma - \frac{1}{P_S}\int_0^\sigma\left(\frac{1}{R_B\sin\theta}\frac{\partial(UP_S)}{\partial\lambda} + \frac{1}{R_M}\frac{\partial(VP_S)}{\partial\theta}\right)d\sigma; \quad (5)$$

$$\frac{\partial P_S}{\partial t} = -\int_0^1\left(\frac{1}{R_B\sin\theta}\frac{\partial(UP_S)}{\partial\lambda} + \frac{1}{R_M}\frac{\partial(VP_S)}{\partial\theta}\right)d\sigma + P_S\int_0^1\frac{1}{\bar{\gamma}}\left(\frac{1}{R_B\sin\theta}U_г\frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial\lambda} + \frac{1}{R_M}V_г\frac{\partial\bar{\gamma}}{\partial\theta}\right)d\sigma; \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \dot{\sigma}\frac{\partial T}{\partial \sigma} + \frac{V}{R_M}\frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{U}{R_B \sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \lambda} - \frac{\gamma_a}{\gamma\rho}\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{c_p\rho}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{U}{R_B \sin\theta}\frac{\partial q}{\partial \lambda} + \frac{V}{R_M}\frac{\partial q}{\partial \theta} + \dot{\sigma}\frac{\partial q}{\partial \sigma} = -m + E + \left(\frac{\gamma}{R\overline{T}}\right)^2\frac{\partial}{\partial\sigma}k_Z\frac{\partial q}{\partial\sigma} +$$

$$+k'\left\{\left(\frac{1}{R_B\sin\theta}\right)^2\frac{\partial^2 q}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{R_M^2}\frac{\partial^2 q}{\partial\theta^2}\right\}; \tag{8}$$

$$\Phi=\Phi_S+R\int_\sigma^1\frac{T}{\sigma}d\sigma. \tag{9}$$

Здесь: l – параметр Кориолиса; c_P – удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении; R – удельная газовая постоянная сухого воздуха; U, V и g_λ, g_ϑ– составляющие скорости ветра и АСТ вдоль параллели и меридиана; F_λ, F_ϑ и F_σ – силы горизонтальной и вертикальной вихревой вязкости; T и γ_a – температура воздуха и её сухоадиабатический градиент; ε – все виды притоков тепла; q – массовая доля водяного пара, а m – скорость его конденсации в единице объема воздуха; $\bar{\gamma}=\dot{W}+\gamma+g_\sigma-2\omega\cos\theta$, где $\dot{W}=\partial\left(-RT\left(P+\sigma\cdot\partial P_S/\partial t\right)/P\gamma\right)/\partial t$ – вертикальная скорость; k_Z и k' – вертикальный и горизонтальный коэффициенты турбулентности; Φ и Φ_s– относительный геопотенциал на высотах и на поверхности;

$$U_r=-\left(g_\theta\cdot\partial\bar{\gamma}/\partial\theta\right)/R_M l,\ V_r=\left(g_\lambda\cdot\partial\bar{\gamma}/\partial\theta\right)/R_e l\sin\theta \tag{10}$$

– составляющие скорости гравитационного ветра вдоль параллели и меридиана.

Система (1) – (9) замыкается с помощью начальных и граничных условий задачи, схем параметризации горизонтальной и вертикальной вихревой вязкости, лучистого и турбулентного теплообмена, турбулентного и конвективного тепло- и влагообмена, потоков скрытого и явного тепла, конвективного переноса импульсов, процессов взаимодействия атмосферы с деятельным слоем поверхности, процессов облакообразования и осадков. Для численного моделирования она представлялась в сеточном виде [2, 10] на C-сетке Аракавы. По вертикали расчетная сетка содержит 16 σ-уровней, по горизонтали – 96×25 узлов с шагом 3,75°. На боковых границах области построения решения задавались фиктивные условия, а $\dot{\sigma}\,|_{\sigma=0;1}=0$. Шаг интегрирования модели по времени равен 600 с.

Связь завихренности гравитационного ветра с барическими системами

Наличие постоянно действующего возмущающего фактора, обусловленного неоднородностью поля СТ и его существенной флуктуативностью, приводит к вариациям ускорения движения атмосферы [7]. Очевидно, эти возмущения должны проявляться и в вариациях скорости ветра.

Вариации гравитационного ветра, его завихренность ($\Omega_{gz} = \partial V_r / \partial x - \partial U_r / \partial y$, $O(\Omega_{gz}) \approx 10^{-2}$ с$^{-1}$), дивергенция и кинетическая энергия рассмотрены в [7]. Нами исследовано влияние АСТ на атмосферные поля. В первом варианте экспериментов поля АСТ получены с использованием аномальных компонент СТ по данным гравиметрических измерений [7, 12]; во втором варианте математическая модель гравитационного поля строилась посредством аппроксимации полей АСТ рядами сферических функций [8]; в третьем варианте АСТ не учитывались. Модельные метеорологические поля сравнивались с данными, снятыми с карт погоды через 24 ч после начала прогноза.

Рассмотрим расчет АСТ с помощью разложения в ряд по СФ [7, 8]. Известно, что физическая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа $\nabla U = 0$ (где U – потенциал поля гравитации Земли вне поверхности, охватывающей гравитирующие массы), представима в виде линейной комбинации функций $r^n S_{nk}(\theta, \lambda)$ и $r^{-(n+1)} S_{nk}(\theta, \lambda)$ при условиях на поверхности: $U|_{r \to \infty} \to 0$, $\partial T/\partial r + 2T/r|_{r \to R} = -\Delta g$. Здесь $\boldsymbol{R}$ – радиус-вектор поверхности ОЗЭ; Δg – АСТ на поверхности Земли; T – возмущающий потенциал СТ; n – число различных сферических функций, $n = 0, \overline{1, \infty}$; $k = -n, n$.

Согласно [7, 8], аппроксимации потенциала притяжения Земли U, потенциала притяжения нормальной Земли U_0, нормального потенциала СТ W_0, возмущающего потенциала СТ T и проекции силы притяжения g_σ, g_φ, g_λ, обусловленной им, имеют вид:

$$U = \frac{fM}{r}\left[1 + \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n}\left(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda\right)\right]P_{nm}(\sin\varphi), \qquad (11)$$

$$U_0 = \frac{fM}{r}\left[1 + C_{20}\left(\frac{a_e}{r}\right)^2 P_{20}(\sin\varphi) + C_{40}\left(\frac{a_e}{r}\right)^4 P_{40}(\sin\varphi)\right],$$

$$W_0 = \frac{fM}{r}\left[1 + C_{20}\left(\frac{a_e}{r}\right)^2 P_{20}(\sin\varphi) + C_{40}\left(\frac{a_e}{r}\right)^4 P_{40}(\sin\varphi)\right] + \frac{\omega^2 r^2}{2}\cos^2\varphi, \qquad (12)$$

$$T = \frac{fM}{r}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n}\left(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda\right)P_{nm}(\sin\varphi), \qquad (13)$$

$$g_\sigma = -\frac{fM}{a_e r}\sum_{n=2}^{N}(n+1)\left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{n}\left(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda\right)P_{nm}(\sin\varphi), \qquad (14)$$

$$g_\varphi = -\frac{fM}{a_e r}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}\left(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda\right)P'_{nm}(\sin\varphi), \tag{15}$$

$$g_\lambda = \frac{fM}{a_e r\cos\varphi}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}\left(-C_{nm}\sin m\lambda + S_{nm}\cos m\lambda\right)mP_{nm}(\sin\varphi). \tag{16}$$

Здесь $fM = 398600{,}44\cdot10^9$ м^3/с^2 – геоцентрическая гравитационная постоянная; a_e – большая полуось ОЗЭ; C_{nm}, S_{nm} – гармонические коэффициенты, характеризующие отличие реального гравитационного поля от центрального [7, 8]; $C_{20} = -484165{,}0\cdot10^{-9}$, $C_{40} = 790{,}3\cdot10^{-9}$; $P'_{nm}(\sin\varphi) = -\left\{m\,\mathrm{tg}\varphi\, P_{nm}(\sin\varphi) - \left[\delta_m\left(n-m\right)\left(n+m+1\right)\right]^{1/2} P_{n,m+1}(\sin\varphi)\right\}$; присоединенный полином Лежандра m-го порядка, n-й степени

$$P_{nm}(\sin\varphi) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad n<m, \quad 1 \quad \text{при} \quad n=m=0, \\ P_{n-1,m-1}(\sin\varphi)\cos\varphi\left[\dfrac{2n+1}{2n\delta_{m-1}}\right]^{1/2} \quad \text{при} \quad n=m\neq0, \\ P_{n-1,m}(\sin\varphi)\sin\varphi\left[\dfrac{4n^2-1}{n^2-m^2}\right]^{1/2} - P_{n-2,m}(\sin\varphi)\left[\dfrac{\left((n-1)^2-m^2\right)(2n+1)}{\left(n^2-m^2\right)(2n-3)}\right]^{1/2}, \\ \text{при} \quad n>m \end{cases}$$

$\delta_m = 1/2$ при $m = 0$, $\delta_m = 1$ при $m \neq 0$.

Согласованность поля гравитации со структурой моделируемых полей определялась путем сопоставления реальных и вычисленных с учетом АСТ полей Ω_{gz}. Выявлено, что имеется четкая связь между Ω_{gz} и характером поля давления: мощные положительные центры Ω_{gz} в Северном полушарии соответствуют циклонам, а отрицательные – антициклонам. С высотой области Ω_{gz} приобретают менее выраженный характер, густота изолиний заметно уменьшается. Эта тенденция прослеживается для величин Ω_{gz}, вычисленных с использованием АСТ, полученных по результатам расчетов гравиметрических измерений, публикуемых в печати [12].

Разложение полей по СФ сглаживает некоторые зарождающиеся образования Ω_{gz}, что ведет к некорректной оценке синоптической ситуации. Лучшие результаты аппроксимации полей метеовеличин достигаются при использовании 30 членов разложения. Подчеркнем, что, например, разложение 36-го порядка требует задания осреднённых значений силы тяжести в узлах широтно-долготных боксов 5×5°(на экваторе) [7, 13]. Анализ полей Ω_{gz}, построенных при помощи АСТ, рассчитанных первым способом, показал, что барические образования получаются мощнее, чем при использовании разложения по СФ. Указанный факт связан с учетом различных полей АСТ, и, значит, можно утверждать, что существует заметное влияние АСТ на эволюцию поля массы, возникновение циклонов и антициклонов.

Влияние поля гравитации на структуру моделируемых полей

Анализ модельных полей величин U, V, P, H, T показал, что учет АСТ, полученных разными способами, даёт одинаковые результаты, поэтому в дальнейшем речь будет идти только об учете АСТ первым способом.

По результатам интегрирования разработанной модели атмосферы оценивались ошибки качества прогнозов (ОКП) при учете АСТ способами j = 1, 2, 3. Вычислялись: δ – средняя абсолютная и $\sigma_{п}$ – средняя квадратическая ошибки (для полей P и H – в гПа; для U, V – в м/с; для T – в K); ε – средняя относительная и ε_1 – средняя квадратическая относительная ошибки; $r_{ф,\,п}$ – коэффициент корреляции между прогностическими и фактическими изменениями величины. Вявлено, что учет АСТ для полей P, H, U, V приводит к уменьшению ошибок прогноза. Фактические и прогностические поля меридиональной компоненты вектора ветра на всех счетных уровнях модели связаны значительно теснее, чем поля зональной компоненты. Сказанное относится и к приземным полям H и P_S. Модельные поля T с учетом АСТ имеют такие же ошибки, как и без учета АСТ. Однако во втором случае поля оказываются более гладкими, чем фактические, и лучше воспроизводят структуру последних.

Таким образом, учет АСТ при прогнозе полей P, T, H, U, V позволяет воспроизвести их структуру точнее, чем без учета АСТ. Поэтому не вызывает сомнения наличие связи между АСТ и полями основных атмосферных величин.

Методы теории чувствительности

В целях детального исследования значимости влияния СТ на циклогенетические процессы нами использовались методы теории управления (теории чувствительности) [1, 7], позволяющие избежать многократного интегрирования нелинейных уравнений для варьируемых компонент вектора параметров модели Y и, привлекая климатическую информацию, получить их статистически значимые оценки. При этом оценивается отклик моделируемой среды на единичные вариации Y, т.е. определяются функции чувствительности (ФЧ), представляющие собой по сути функции Грина. Пространственно-временные масштабы, на которых вычисляются ФЧ, определяются временем интегрирования модели в вариациях, её разрешающей способностью, областью построения решения и способом задания невозмущенных значений вектора состояния ψ. Для получения полей ФЧ интегрируются линейные уравнения модели в вариациях. Ввиду громоздкости названные уравнения здесь не приводятся. Однако отметим, что в них принято: невозмущенные компоненты вектора ψ (U, V, Φ, P, q, ω) не зависят от времени. Оценка чувствительности переменных ψ к вариациям Y определяется путем умножения ФЧ на значения заданных вариаций Y. Составляющие вектора Y определяются исходя из постановки задачи.

Для получения ФЧ запишем дискретные аналоги уравнений модели атмосферы в операторной форме:

$$B\Delta_t \Psi^h + G^h\left(\Psi^h, Y^h\right) = 0. \quad (17)$$

Здесь Δ_t – сеточный аналог производной по времени, а B – диагональная матрица коэффициентов при ней; индекс h означает дискретный аналог оператора G и сеточность значений векторов ψ и Y; $G^h\left(\psi^h, Y^h\right)$ – аналог нелинейного матричного дифференциального оператора в пространстве сеточных функций составляющих вектора состояния ψ^h, удовлетворяющих граничным условиям модели; Y^h – вектор параметров, компоненты сеточных значений которого определены в области их допустимых значений. Для вывода уравнений в вариациях векторы ψ и Y представляются в окрестности невозмущенных значений (Y_0^h, ψ_0^h) в виде сумм [1, 7]

$$Y^h = Y_0^h + \eta\delta Y^h, \; \Psi^h = \Psi_0^h + \eta\delta\Psi^h, \quad (18)$$

в которых η – вещественный параметр; $\delta Y^h, \delta\Psi^h$ – вариации сеточных компонент векторов Y и ψ. Подставляя (18) в (17) и дифференцируя результат по η при $\eta \to 0$, получаем операторное уравнение в вариациях:

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[B\Delta_t\left(\Psi_0^h + \eta\delta\Psi^h\right) + G^h\left(\Psi_0^h + \eta\delta\Psi^h, Y_0^h + \eta\delta Y^h\right)\right] = 0. \quad (19)$$

При интегрировании слагаемых операторного уравнения, построенного после реализации системы уравнений (19), получаются поля ФЧ, соответствующие единичным вариациям компонент вектора Y. Если в качестве невозмущенного вектора ψ используются средние климатические значения, то получаемые оценки ФЧ вектора ψ к вариациям вектора Y могут интерпретироваться в климатическом смысле и, очевидно, иметь статистическую значимость.

Системы уравнений в вариациях интегрируются с помощью тех же схем, что и при интегрировании обычных уравнений. При определении ФЧ нами применялся алгоритм интегрирования по времени уравнений в вариациях, согласно которому компонента вектора Y, к которому определяется чувствительность, полагалась равной единице, а вариации остальных компонент – равными нулю. Полученные результаты представляют собой ФЧ всех компонент вектора ψ модели к единичным вариациям данного параметра Y на рассматриваемом интервале времени.

В качестве невозмущенного поля гравитации нами использовалось нормальное поле силы тяжести ОЗЭ. Строились функции чувствительности составляющих вектора ψ к таким составляющим вектора Y, как γ, g_λ, g_θ, g_σ, R_M, R_B. Оценка чувствительности переменных Y к вариациям ψ определялась умножением ФЧ на значения вычисленных вариаций Y. Экстремальные значения полей ФЧ, полученные по результатам многочисленных экспериментов, даны в табл. 2. Видно, что в зависимости от конкретной синоптической ситуации имеет место широкий диапазон значений ФЧ составляющих вектора состояния к единичным вариациям составляющих вектора параметров. Выявлено следующее.

а) К вариациям практически всех составляющих вектора параметров особенно чувствительны компоненты вектора ветра (U, V) и гравитационного ветра ($U_г$, $V_г$); со временем чувствительность модели к вариациям Y увеличивается; с высотой значения чувствительности U, V и T к γ возрастают, а структура полей U, V приобретает распределение, сходное с полем АСТ g_λ и g_θ соответственно, что свидетельствует о суммарном влиянии γ и g_λ на U, а γ и g_θ на V; поле АСТ g_λ оказывает большое влияние на составляющую U; поле ФЧ U к составляющей g_λ повторяет распределение g_λ; с высотой влияние АСТ g_λ становится меньше, исчезают некоторые очаги чувствительности U к g_λ; чувствительность V к g_θ с высотой растет, а поле чувствительности V к g_θ повторяет структуру поля g_θ; с высотой поля ФЧ составляющих U и V к вариация g_σ приобретают значения на три порядка больше, чем у поверхности.

б) Поле температуры T чувствительно к нормальной СТ, что определенным образом согласуется с выводом, вытекающим из [6].

в) Поле давления P чувствительно к вариациям нормальной СТ в низких широтах, а также к g_θ и повторяет структуру поля g_θ; по сравнению со значениями функции чувствительности P к γ, значения чувствительности P к g_θ на два порядка меньше; поле P чувствительно и к g_λ; по сравнению со значениями ФЧ P к γ, значения чувствительности P к g_λ на два порядка меньше; а в структуре поля P прослеживается тенденция к повторению структуры поля g_λ; аномалии СТ g_σ имеют небольшое влияние на поле P; значения чувствительности P к g_σ на два порядка меньше, чем P к γ, при этом максимальные значения ФЧ P к g_σ находятся почти в тех же местах, где и центры g_σ.

Из данного анализа следует, что нормальная СТ и АСТ оказывают значительное воздействие на поля массы, движения и температуры. Поле P наиболее чувствительно к изменениям нормальной СТ (значения чувствительности P к γ на два порядка больше значения чувствительности P к АСТ). Компоненты вектора ветра U и V имеют большую чувствительность к АСТ g_λ и g_θ соответственно. Поле T чувствительно только к нормальной СТ.

Уточнение параметров модели

При реализации гидродинамических прогнозов с учетом АСТ существует проблема задания поля СТ [6, 7, 12]. Это связано с тем, что детальное задание СТ может восприниматься моделью как шум и приводить к возникновению ложных возмущений и нелинейной вычислительной неустойчивости; грубое задание поля гравитации может быть недостаточным для правильной идентификации значимости АСТ, т.е. ведет к невозможности корректного описания гравитационных эффектов. Задача задания поля СТ представляет собой обратную задачу теории чувствительности, т.е. задачу уточнения параметров модели [1, 7]. Если имеются данные измерений, то, сравнивая их с модельными результатами, можно уточнить параметры так, чтобы согласие между измеренными и прогнозируемыми величинами было наилучшим. Критерии качества моделирования представляются в виде функционалов, характеризующих отличия между измеренными и модельными значениями составляющих вектора ψ. В этом случае задачи уточнения параметров Y сводятся к минимизации функционалов на множестве параметров модели и составляющих вектора состояния ψ [1, 7].

Рассмотрим пример уточнения компонент поля СТ, в котором уточняющие поправки (ΔY_i), обеспечивающие минимум функционала качества моделирования вектора ψ, определяются на множестве точек M области моделирования, на интервале времени $t_0 \div t_0+\Delta T$, где ΔT – заблаговременность прогноза. В качестве функционала качества используем суммарный (по компонентам вектора ψ) квадрат относительной ошибки моделирования [1, 7]

$$\varepsilon(\psi) = \sum_{l=1}^{L} \left[\frac{\psi_{ml}(t_0+\Delta T, Y_{i0}+\Delta Y_i) - \psi_{ml}^{C}(t_0+\Delta T)}{\psi_{ml}^{C}(t_0+\Delta T)} \right]^2, \qquad (20)$$

в котором $\psi_{ml}(t_0+\Delta T, Y_{i0}+\Delta Y_i)$ и $\psi_{ml}^{C}(t_0+\Delta T)$ – модельные и измеренные значения составляющих вектора ψ в момент $t_0+\Delta T$; Y_{i0} – априори заданные значения составляющих вектора Y; ΔY_i – искомые поправки к компонентам поля СТ, $i = 1, I$; L – число составляющих вектора состояния.

Учитывая, что $\Delta Y_i \ll Y_{i0}$, а зависимые переменные $\psi(\overline{X}, Y_{io})$ – функции времени и координат ($\overline{X}$), соответствующие невозмущенным значениям параметров Y_{i0}, достаточно гладкие, представим первый член в числителе формулы (20) рядом Тейлора, ограничиваясь линейными членами:

$$\psi_{ml}(t_0+\Delta T, Y_{i0}+\Delta Y_i) = \Psi_{ml}(t_0+\Delta T, Y_{i0}) + \left(\left.\frac{\partial \psi_l}{\partial Y_i}\right|_{Y_m} \Delta Y_i \right)_m, \ (m=\overline{1,M},\ \ l=\overline{1,L}) \ . (21)$$

Подставив ряды (21) в соотношение (20), запишем выражение для критерия качества в виде квадрата относительной ошибки моделирования:

$$\varepsilon(\psi)=\sum_{l=1}^{L}\left\{\left[\Delta\psi_{ml}(Y_{io})+(\frac{\partial\psi_l}{\partial Y_i}\bigg|_{Y_{io}}\Delta Y_i)_m\right]\Big/\psi_{mi}^{И}(t_0+\Delta T)\right\}^2, \qquad (22)$$

в которой $\Delta\psi_{ml}(Y_{i0})=\psi_{ml}(t_0+\Delta T,Y_{i0})-\psi_{ml}^{И}(t_0+\Delta T);\Delta\psi_{ml}(t_0+\Delta T,Y_{i0})$ – моделируемые значения компонент вектора ψ, полученные с использованием невозмущенных (заранее заданных) компонент вектора Y. Минимизируя выражение (22) относительно ΔY_i (дифференцируя по ΔY_i), получим систему линейных (нормальных) уравнений первого порядка относительно искомых поправок к параметрам ΔY_i:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial(\Delta Y_i)}=\sum_{l=1}^{L}\left\{\left[\Delta\psi_{ml}+\Delta Y_i\left(\frac{\partial\psi_l}{\partial Y_i}\bigg|_{Y_{i0}}\right)_m\right]\Big/\left(\psi_{ml}^{И}\right)^2\right\}\times\left(\frac{\partial\psi_l}{\partial Y_i}\bigg|_{Y_{i0}}\right)_m=0\,. \qquad (23)$$

Функции чувствительности $\partial\psi_l/\partial Y_i$ в уравнениях (23) определяются заранее для каждой компоненты вектора ψ по описанному алгоритму. Аналогично уточняются компоненты проекций g_φ, g_λ, g_σ. При прогнозе используются уточненные (согласованные) значения всех составляющих вектора параметров.

Литература

1. *Анискина О.Г., Панин Б.Д.* Исследование чувствительности дискретной прогностической модели с помощью уравнений в вариациях. // Труды РГГМИ, 1992, вып. 114, с. 4–11.
2. *Белов П.Н., Борисенков Е.П., Панин Б.Д.* Численные методы прогноза погоды. – Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 376 с.
3. *Борисенков Е.П., Панин Б.Д.* Теория гравитации и ее приложение к задачам геофизической гидродинамики. // Вестник СПб. ГУ, 1999, сер. 7, вып. 4, с. 45–54.
4. *Гилл А.* Динамика атмосферы и океана. Том 1. – М.: Мир, 1986. 400 с.
5. *Грушинский Н.П.* Основы гравиметрии. – М.: Наука, 1983, 351 с.
6. *Макоско А.А., Лугин В.Г.* Оценка влияния точности представления гравитационного поля Земли на формирование планетарного поля температуры. // Труды ЦАГИ, 1990, вып. 4755, с. 37–43.
7. *Макоско А.А., Панин Б.Д.* Динамика атмосферы в неоднородном поле силы тяжести. – СПб.: изд. РГГМУ, 2002. 245 с.
8. Математические модели гравитационного поля Земли. // Геофизические условия полета. – М.: ВА им. Ф.Э. Дзержинского, 1993. 115 с.
9. Параметры общего земного эллипсоида и гравитационного поля Земли (параметры Земли 1990 г.). – М.: ВТУ ГШ, 1991. 68 с.
10. *Репинская Р.П., Анискина О.Г.* Конечно-разностные методы в гидродинамическом моделировании атмосферных процессов. – СПб.: изд. РГГМУ, 2002. 173 с.
11. *Рудяев Ф.И.* Влияние аномального гравитационного поля Земли на циркуляционные системы атмосферы. // ДАН, 1990, т. 310, № 6, с. 1345–1348.
12. *Солопов Н.Н.* Приближенные формулы различной точности для вычисления нормальной силы тяжести в системе геодезических координат. // Сб.: Моделирование и определение геофизических полей. – СПб.: РГГМИ, 1996, с. 113–119.
13. *Шимбирев Б.П.* Теория фигуры Земли. – М.: Недра, 1975. 432 с.