ГЕОФИЗИКА

М.Ю. Белевич

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ ПРИНЦИПУ ПРИЧИННОСТИ

M.U. Belevich

SYMMETRY PROPERTIES OF THE CAUSAL HEAT EQUATIONS

Изучаются групповые свойства причинно-зависимых уравнений теплопроводности (гиперболических уравнений переноса тепла). Вычисляются допустимые группы преобразований двух вариантов гиперболических уравнений. Проводится сравнительный анализ полученных результатов, и сопоставление их с известными свойствами классического уравнения теплопроводности. Результаты работы могут рассматриваться как аргумент в пользу одной из причинно-зависимых моделей явления.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение теплопроводности, причинность, симметрии.

Symmetry properties of the causal (hyperbolic) heat equations are studied. Symmetry groups of two variants of hyperbolic equations are calculated. The results obtained are analyzed and compared with known properties of the classical heat equation. These findings may be considered as possible arguments in favour of one of the causal heat conduction models.

Keywords: Hyperbolic heat equation, causality, symmetries.

1. Введение

Для описания явлений тепло- и массопереноса предложено несколько моделей (см. обзоры Joseph and Preziosi, 1989, с. 41–73. Joseph and Preziosi, 1990, с. 375–379). Помимо стандартного уравнения теплопроводности [обозначаемого далее через (A)] существуют альтернативные модели переноса тепла. Это связано с тем, что по ряду причин классическое уравнение не может рассматриваться как адекватный способ описания явления. Во-первых, существует ряд наблюдений плохо описываемых решениями этого уравнения. В основном это касается короткопериодного лазерного и микроволнового нагрева (см., например, Tang and Araki, 1996, с. 1585–1590. Vedavarz, Kumar and Moallemi, 1994, с. 116–224), а также экспериментальных исследований скорости распространения тепловых сигналов при низких температурах [Jackson and Walker, 1971, с. 1428–1439; Naraganamurti and Dynes, с. 1461–1465; Peshkov, 1991, с. 381–386].

Во-вторых, классическое уравнение, будучи параболическим, допускает бесконечную скорость распространения возмущений, и его решения, тем самым, не являются причинно обусловленными.

Для преодоления последнего затруднения полвека назад Cattaneo [Cattaneo, 1948, с. 83–101; Cattaneo, 1958, с. 431–433] и Vernotte [Vernotte, 1958, с. 3154–3155] было предложено гиперболическое уравнение [будем обозначать его через (C)], которое является наиболее простым и очевидным обобщением закона теплопроводности Фурье, приводящим к конечной скорости распространения. При выводе этого уравнения учитывалось время термической релаксации среды, чем и обеспечивалась гиперболичность уравнений и причинная обусловленность теплопереноса. Между тем, время релаксации – еще один феноменологический параметр, являющийся, вообще говоря, функцией места и времени. В случае сильно разреженных сред результаты расчетов по уравнению (C) не всегда согласуются с решениями уравнения Больцмана [Chen, 2001, с. 2297–2300], описывающего ту же среду.

Наконец, в [Belevich, 2004] предложен вариант причинно обусловленного описания явлений переноса (обозначим его буквой (B)), не требующий модификации закона Фурье и введения дополнительных искусственных феноменологических параметров. Степень свободы, позволяющая получить модифицированное уравнение тепломассопереноса, возникает при учете скорости сигнала, переносящего информацию от объекта наблюдения к наблюдателю.

На сегодняшний день ни одна из причинно обусловленных моделей тепломассопереноса [(B) и (C)] не является общепризнанной, так что изучение их должно продолжаться. Настоящее исследование – это попытка найти весомые аргументы в пользу одной из упомянутых теорий путем анализа симметрий соответствующих дифференциальных уравнений. Рассматриваются наиболее простые нерелятивистские обобщения классического уравнения теплопроводности.

Любое исследование в своих оценках руководствуется каким-либо критерием. Помимо совпадения с данными наблюдений, нам видятся два основных критерия. Первый – назовем его «мировоззренческим» – заключается в отсутствии противоречий с основополагающими принципами. Второй – его можно назвать «инженерным» – состоит в удобстве использования рассматриваемой модели (здесь тепломассопереноса).

Проще всего пользоваться, по-видимому, первым критерием, поскольку он чаще дает объективную и однозначную оценку модели: либо противоречия есть, либо их нет. Второй критерий в значительной степени субъективен. Часто более удобным оказывается то, что привычнее. Кроме того, даже высокоточные расчеты – не то же самое, что адекватное описание природы. Во-первых, они всегда дают лишь фрагментарную картину явления, а во-вторых, принципиально приближенный характер вычислений и их конечность допускают использование средств, неприемлемых, вообще говоря, для адекватного описания, таких, например, как расходящиеся интегралы и ряды и т.п.

В настоящей работе мы будем использовать первый критерий. Именно с этих позиций классическая модель тепломассопереноса оказывается неудовлетворительной. Два других уравнения выводились специально для преодоления врожденного порока параболического уравнения. Однако предпосылки при выводе каждого из них были разными, что отразилось и на совокупности их свойств.

Наряду с причинной обусловленностью явлений в физике существует ряд фундаментальных представлений о пространстве, времени, мерах и тому подобном. Так, в соответствии с современной точкой зрения физическое пространство однородно и изотропно, а время однородно. Абсолютные значения мер в природе отсутствуют и для оценки свойств изучаемого объекта его нужно сопоставить с другим объектом, выбранным в качестве эталона.

Эти фундаментальные представления отражаются на нашем способе описания объектов и явлений физического мира, т.е. на тех математических моделях, которые строятся для такого описания. Так, однородность пространства и времени позволяет нам выбрать в качестве начала отсчета любое событие – пару (момент времени, точка пространства), а изотропность пространства и равноправие сторон – произвольную ориентацию координатных осей. Указанный произвол является, вместе с тем, и предписанием модели объекта, претендующей на адекватность, оставаться справедливой в любой системе координат. Требование естественное, ибо системы координат – всего лишь средство для описания объекта, существующего (как мы полагаем) независимо от координат. Аналогично, отсутствие абсолютных значений мер позволяет нам выбрать произвольную систему единиц, а значит, и модель должна допускать подобный произвол.

Все сказанное означает, что модель переноса тепла может считаться удовлетворительной с точки зрения используемого здесь критерия в том случае, если она причинно обусловлена, а также является инвариантной по отношению к выбору:

1) отсчетного (нулевого) момента времени и единицы измерения времени,
2) начала координат и единицы измерения расстояний,
3) ориентации системы координат,
4) отсчетного (нулевого) значения температуры и единицы измерения температуры.

Если эти требования удовлетворяются, то любое решение уравнений модели, полученное в рамках некоторой системы координат и выбранной системы единиц, остается решением тех же уравнений при замене координат и/или системы единиц. В противном случае адекватного описания явления природы с помощью данной модели получить нельзя, хотя при этом модель еще может быть вполне работоспособным вычислительным средством, как это имеет место в случае с классической моделью тепломассопереноса.

В нашем случае указанная инвариантность означает, что если функция $T(t, \mathbf{x})$, где T – температура, t – время, а $\mathbf{x}$ – радиус-вектор точки тела является решением уравнения модели, то решениями также являются функции, инвариантные по отношению к выбору

1. начала отсчета $T(\alpha t + t_0, \mathbf{x})$,
2. начала координат $T(t, \beta\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)$,
3. ориентации осей пространственных координат $T(t, R\mathbf{x})$,
4. нулевого значения температуры и единицы ее измерения $\gamma T(t, \mathbf{x}) + T_0$.

Здесь $\alpha, \beta, \gamma, t_0, T_0$ — произвольные вещественные константы, $\mathbf{x}_0$ — произвольный радиус-вектор, R — произвольная ортогональная (3×3) матрица. Помимо указанной инвариантности, модель должна быть нечувствительна к выбору движущейся системы координат, т.е. должна удовлетворять принципу относительности Эйнштейна (предпочтительно) или хотя бы Галилея.

Свойства инвариантности моделей могут быть получены в результате анализа симметрий соответствующих дифференциальных уравнений. Ниже это делается для уравнений (B) и (C), а для сравнения в ряде случаев приводятся известные аналогичные результаты для стандартного уравнения теплопроводности. Задачи настоящего исследования, таким образом, сводятся к следующему:

• вычислению однопараметрических групп преобразований, допускаемых изучаемыми уравнениями,

• сравнительному анализу найденных групп преобразований,

• выбору и рекомендации.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 приводятся необходимые сведения об анализируемых далее моделях теплопереноса. Раздел 3 посвящен сравнительному анализу этих моделей. Здесь собраны результаты вычислений допустимых групп преобразований исследуемых уравнений. Обсуждаются преобразования, которые должно допускать уравнение, адекватно описывающее процесс тепломассопереноса. Последний четвертый раздел содержит заключительные замечания.

2. Уравнения теплопроводности

2.1. Исходные уравнения

Исходным пунктом для вывода уравнения теплопроводности является уравнение баланса внутренней энергии ε, которое с помощью соотношения $d_t\varepsilon = C_p d_t T$, где C_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, записывается в терминах температуры T:

$$r d_t T = -(\nabla, \vec{h}). \tag{1}$$

Здесь $r \equiv \rho C_p$ – теплоемкость среды, ρ – плотность массы, а $\vec{h}$ – вектор плотности потока тепла.

Классическое уравнение теплопроводности **(A)**. В классическом случае вектор $\vec{h}$, в соответствии с законом Фурье, полагается пропорциональным градиенту температуры

$$\vec{h} = -\lambda \nabla T, \tag{2}$$

где λ – коэффициент теплопроводности.

Подставляя это выражение в уравнение (1), получим уравнение теплопроводности:

$$r d_t T = (\nabla, \lambda \nabla T). \tag{3}$$

Уравнение Cattaneo-Vernotte **(C)**. Если вместо закона Фурье (2) воспользоваться выражением, учитывающим время термической релаксации среды t_*:

$$t_* \partial_t \vec{h} + \vec{h} = -\lambda \nabla T, \tag{4}$$

то из уравнения (1) можно получить гиперболическое уравнение теплопроводности. Действительно, продифференцируем (1) по t:

$$\partial_t \left(r d_t T \right) = -(\nabla, \partial_t \vec{h}),$$

результат умножим на t_* и сложим с уравнением (1)

$$t_* \partial_t \left(r d_t T \right) + r d_t T = -t_* (\nabla, \partial_t \vec{h}) - (\nabla, \vec{h}).$$

Для того чтобы воспользоваться далее законом (4), требуется положить t_* независящим от пространственных координат. В этом случае уравнение записывается в виде

$$t_* \partial_t \left(r d_t T \right) + r d_t T = (\nabla, \lambda \nabla T). \tag{5}$$

Если ввести обозначения $t_* = \frac{\lambda}{c^2 r}$, где c — скорость распространения тепловых волн, то уравнение (5) можно переписать так

$$\frac{\lambda}{c^2 r} \partial_t \left(r d_t T \right) + r d_t T = (\nabla, \lambda \nabla T). \tag{6}$$

Это есть уравнение Cattaneo-Vernotte, обобщенное на случай движущейся среды.

В работе [13] предложен вариант гиперболического уравнения теплопроводности **(B)**, следующий из причинно обусловленного уравнения баланса энергии вязкой жидкости. Причинная обусловленность и связанная с ней гиперболичность модели среды возникает при учете процесса наблюдения и включении наблюдателя в модель. Движущаяся среда представляется четырехмерным многообразием в пространственно временном континууме, а скорость движения точки среды описывается четырехмерным вектором, где в качестве нулевой компоненты c выступает скорость распространения сигнала, несущего к наблюдателю информациию об эволюции изучаемого объекта.

Замена дискретных по природе физических тел континуумом точек приводит к необходимости неявного параметрического описания мелкомасштабных процессов. Роль такого параметра играет внутренняя энергия с плотностью ε или связанная с ней температура T.

В отличие широко распространенного подхода, основанного на делении сил, источников тепла и т.п. на объемные и поверхностные, в работе [Belevich, 2004, с. 3053–3069] уравнение баланса внутренней энергии получается путем осреднения исходных уравнений модели. Указанное деление в достаточной мере искусственно, поскольку и те и другие причины (силы, источники и проч.) действуют во всех точках среды. Такое деление и различные названия выделенных частей вызывают лишь путаницу. Действительно, если объемные причины действуют в каждой точке среды по определению, то поверхностные причины должны, судя из названия, проявляться лишь на поверхности (границе) изучаемого тела. Однако для корректного описания динамики, помимо внешней границы, необходимо рассматривать также границы всех мыслимых частей тела. Таким образом, действие поверхностных причин переносится вглубь тела, в каждую его точку.

Между тем, вязкие взаимодействия имеют масштабы не описываемых явно процессов и потому их появление, на наш взгляд, гораздо естественнее связывать с проводимым осреднением. Применение к получающимся ковариациям различных градиентных гипотез хорошо себя зарекомендовало и широко используется. В классических терминах используемый здесь подход эквивалентен введению поверхностного нагрева с четырехмерной плотностью потока тепла $\vec{h}_4$, который в соответствии с законом Фурье полагается пропорциональным четырехмерному градиенту температуры $\nabla_4 T$. В результате имеем следующее уравнение:

$$\frac{1}{c}\partial_t\left(\frac{\lambda}{c}\partial_t T\right) + r d_t T = (\nabla, \lambda\nabla T). \tag{7}$$

Как уже было сказано, величина c имеет смысл скорости распространения информации о состоянии среды, т.е. скорость того сигнала, который используется наблюдателем при проведении измерений. Это дополнительный параметр, который, однако, всегда известен.

В декартовой системе координат $(t,\ x^1, x^2, x^3)$ все упомянутые уравнения записываются в виде

$$r\Big(\partial_t T + v^i \partial_{x^i} T\Big) = \sum_i \partial_{x^i}(\lambda \partial_{x^i} T), \tag{A}$$

$$\frac{\lambda}{c^2 r}\partial_t\left(r\Big(\partial_t T + v^i \partial_{x^i} T\Big)\right) + r\Big(\partial_t T + v^i \partial_{x^i} T\Big) = \sum_i \partial_{x^i}(\lambda \partial_{x^i} T), \tag{C}$$

$$\frac{1}{c}\partial_t\left(\frac{\lambda}{c}\partial_t T\right) + r\Big(\partial_t T + v^i \partial_{x^i} T\Big) = \sum_i \partial_{x^i}(\lambda \partial_{x^i} T). \tag{B}$$

Числа $(v^1,\ v^2,\ v^3) = \vec{v}$ суть компоненты скорости относительно декартова базиса. Они полагаются постоянными. Здесь и далее используется правило суммирования по повторяющемуся индексу.

Легко видеть, что уравнение (A) является частным случаем более общих уравнений (B) и (C). Действительно, если считать, что информация о состоянии среды достигает наблюдателя мгновенно, т.е. $c \to \infty$, тогда первые слагаемые в уравнениях (B) (C) исчезают, и все три уравнения совпадают друг с другом, как и должно быть, поскольку классическое уравнение теплопроводности получено именно для случая бесконечной скорости распространения информации. Кроме того, в случае неподвижной среды с постоянными λ, r и c уравнения (B) и (C) формально совпадают. Различие сохраняется лишь в интерпретации величины c.

Очевидно также, что уравнение (C) является частным случаем уравнения (B). Действительно, при выводе уравнения (C) параметр релаксации $t_* = \frac{\lambda}{c^2 r}$ полагался независящим от пространственных координат. Такое допущение приводит к тому, что пространственная зависимость c^2 полностью определяется коэффициентом температуропроводности $\kappa \equiv \frac{\lambda}{r}$. В то же время, при выводе уравнения (B) никаких дополнительных ограничений не накладывалось. Если отношение $\frac{\lambda}{cr}$ не зависит от времени, то уравнение (B) совпадает с уравнением (C).

Основной интерес представляют уравнения (C) и (B), так как именно они претендуют на роль моделей, адекватно описывающих процесс теплопереноса. Результаты, относящиеся к уравнению (A), далее приводятся для сравнения.

2.2. Замена переменных

Во всех трех случаях можно уменьшить число параметров уравнений, переопределяя временную и пространственные координаты. Пусть новое время τ и пространственные координаты ξ^i таковы, что $cdt \equiv \lambda d\tau$ и $dx^i \equiv \lambda d\xi^i$. Здесь c имеет смысл либо скорости распространения тепловых возмущений [в случае уравнений (A) и (C)], либо скорости измеряющего сигнала [случай уравнения (B)]. В результате такого преобразования координат получаем:

$$rc\Big(\partial_\tau T + \beta^i \partial_{\xi^i} T\Big) = \Delta T, \qquad (\mathrm{A}')$$

$$\partial_{\tau\tau} T \quad + \quad rc\Big(\partial_\tau T + \beta^i \partial_{\xi^i} T\Big) = \Delta T, \qquad (\mathrm{B}')$$

$$\partial_\tau\Big(\partial_\tau T + \beta^i \partial_{\xi^i} T\Big) \quad + \quad Rc\Big(\partial_\tau T + \beta^i \partial_{\xi^i} T\Big) = \Delta T. \qquad (\mathrm{C}')$$

Здесь $Rc = \big(\partial_\tau \ln \frac{rc}{\lambda} + rc\big)$, $\beta^i = \frac{v^i}{c}$ а Δ – оператор Лапласа. По всей видимости, величина $\frac{1}{rc}\partial_\tau \ln \frac{rc}{\lambda} \ll 1$ мала, так что $R \approx r$.

Если положить $T = \Theta\theta$, где Θ – масштаб температуры, через V и L обозначить масштаб скорости и пространственный масштаб, а масштаб переменных τ, ξ^i (величину с размерностью обратной размерности коэффициента теплоотдачи α) обозначить через Ξ, то все три уравнения можно записать в безразмерной форме:

$$rc\Xi\Big(\partial_\tau\theta+\beta^i\partial_{\xi^i}\theta\Big)=\Delta\theta, \qquad (\mathrm{A}'')$$

$$\partial_{\tau\tau}\theta \quad + \quad rc\Xi\Big(\partial_\tau\theta+\beta^i\partial_{\xi^i}\theta\Big)=\Delta\theta, \qquad (\mathrm{B}'')$$

$$\partial_\tau\Big(\partial_\tau\theta+\beta^i\partial_{\xi^i}\theta\Big) \quad + \quad Rc\Xi\Big(\partial_\tau\theta+\beta^i\partial_{\xi^i}\theta\Big)=\Delta\theta. \qquad (\mathrm{C}'')$$

Величина θ – безразмерная температура, а τ и $\{\xi^i\}$ – безразмерные аналоги независимых переменных. Безразмерный комплекс $rc\Xi$ имеет смысл числа Пекле Pe и равен ему в случае $V=c$.

Для больших значений Pe основную роль играет конвективный перенос температуры. Все три уравнения обладают этим свойством. При $rc\Xi\to\infty$ все они превращаются в уравнение переноса $\partial_\tau\theta+\beta^i\partial_{\xi^i}\theta=0$. Напротив, при малых Pe конвективный перенос сравнительно мал и основную роль играет теплопроводность. Этим свойством обладают только два уравнения (A) и (B). Что же касается уравнения (C), то в него входит динамическое слагаемое $\partial_\tau\Big(\beta^i\partial_{\xi^i}\theta\Big)$ того же порядка, что и теплопроводящий член $\Delta\theta$. Таким образом, в пределе $rc\Xi\to 0$ все три уравнения принимают вид:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta\theta, && (\mathrm{A}''')\\ \partial_{\tau\tau}\theta &= \Delta\theta, && (\mathrm{B}''')\\ \partial_{\tau\tau}\theta+\partial_\tau\Big(\beta^i\partial_{\xi^i}\theta\Big) &= \Delta\theta. && (\mathrm{C}''') \end{aligned}$$

3. Группы симметрий уравнений теплопроводности

Группой симметрий дифференциального уравнения называется (см., например, [Olver, 1986]) локальная группа преобразований G, действующая на подмножестве пространства $X\times U$ независимых X и зависимых U переменных и переводящая решения уравнения в то же решение. Другими словами, если $u=u(t,\mathbf{x})$ – решение дифференциального уравнения, а $g\in G$ – некоторое преобразование из группы и действие этого преобразования на решение gu определено, то gu также является решением того же уравнения. Каждый элемент g в окрестности единичного элемента группы можно записать как экспоненту $g=\exp(\mathbf{v})$ для некоторого вектора $\mathbf{v}$ из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Последнюю можно отождествить с касательным пространством к G в единичном элементе e, замкнутым относительно операции коммутирования. Проходящий через единицу группы поток $g^\sigma=\exp(\sigma\mathbf{v})e$, порождает однопараметрическую подгруппу группы G, а вектор $\mathbf{v}$ оказывается, таким образом, генератором этой подгруппы или ее инфинитезимальной образующей.

Любой элемент $g \in G$ всегда может быть записан как произведение экспонент $g = \exp(\mathbf{v}) \ldots \exp(\mathbf{w})$ для конечного числа векторов $\mathbf{v}, \ldots, \mathbf{w} \in \mathfrak{g}$. Если же n – размерность алгебры и $\{V_i\}_{i=1}^n$ – ее базис, то $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i V_i$, где v^i – компоненты вектора $\mathbf{v}$ в базисе $\{V_i\}$ и $g = \prod_{i=1}^n \exp(v^i V_i)$. Таким образом, группа преобразований G будет группой симметрий дифференциального уравнения, если симметрией будет каждая ее однопараметрическая подгруппа $g_i^\sigma = \exp(\sigma V_i) e$.

Для отыскания максимальной группы симметрий требуется найти и решить переопределенную систему определяющих уравнений и вычислить коэффициенты η^k и φ^a инфинитезимальной образующей $\mathbf{v}$ однопараметрической группы

$$\mathbf{v} = \eta^k \partial_{x_k} + \varphi^a \partial_{u_a}.$$

Здесь $(x_1, \ldots, x_k, \ldots) \in X$ – независимые и $(u_1, \ldots, u_a, \ldots) \in U$ – зависимые переменные задачи. Выражения для коэффициентов η^k и φ^a обычно содержат набор произвольных констант и функций. Количество констант задает размерность соответствующей конечномерной алгебры Ли, а функции определяют бесконечномерные подалгебры. Детали вычислений можно найти, например, в [Butcher, Carminati and Vu, 2003 с. 117–122].

Вычисления, связанные с групповым анализом, как правило, достаточно трудоемки (нередко требуется решать системы из сотен линейных дифференциальных уравнений в частных производных), но часто могут быть выполнены с помощью специализированных программ, работающих в среде той или иной системы аналитических вычислений. В настоящей работе на разных ее этапах необходимые вычисления проводились с помощью следующих программ:

программа	автор	среда
dimsym (ver.2.3, 12 October 1999)	J.Sherring, G.Prince	Reduce 3.6
LIE (ver.5.3, 2000)	A.K.Head	muMath
Desolv (release 5, June 2000)	K.T.Vu, J.Carminati	Maple V release 5
MathLie (ver.3.0, 2003)	G.Baumann	*Mathematica* 3.0

Сравнение результатов их работы на ряде тестовых примеров можно найти в [Butcher, Carminati and Vu, 2003 с. 117–122].

3.1. Классическое уравнение теплопроводности (A′′)

Классическое уравнение теплопроводности допускает 13-типараметрическую группу симметрий. Вычисленные генераторы симметрий имеют вид:

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \partial_\tau, \\
V_i &= \partial_{\xi^i}, \\
V_{3+i} &= 2\varepsilon_{ijk}\Big(\xi^j\partial_{\xi^k} - rc\beta^j\xi^k\theta\partial_\theta\Big), \\
V_{6+i} &= 2\tau\partial_{\xi^i} + rc(\beta^i\tau - \xi^i)\theta\partial_\theta, \\
V_{10} &= 4\tau\partial_\tau + 2\xi^k\partial_{\xi^k} + rc\beta^k\Big(\xi^k - \beta^k c\tau\Big)\theta\partial_\theta, \\
V_{11} &= \theta\partial_\theta, \\
V_{12} &= -4\tau\Big(\tau\partial_\tau + \xi^k\partial_{\xi^k}\Big) + \Big(rc\big(\tau\beta^k - \xi^k\big)^2 + 6\tau\Big)\theta\partial_\theta.
\end{aligned}
$$

Здесь и далее $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, а ε_{ijk} – символ Леви-Чивиты.

Последнее векторное поле

$$V_{13} = f(\tau, \xi^1, \xi^2, \xi^3)\partial_\theta$$

генерирует бесконечномерную алгебру. Функция f – произвольное решение уравнения. Линейные комбинации этих генераторов V_i

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \partial_\tau + \beta^k\partial_{\xi^k}, \\
P_i &= \partial_{\xi^i}, \\
J_i &= \varepsilon_{ijk}\big(\xi^j - \tau\beta^j\big)\partial_{\xi^k}, \\
D &= 2\tau\partial_\tau + \big(\xi^k + \tau\beta^k\big)\partial_{\xi^k} - \frac{3}{2}\theta\partial_\theta, \\
D_\theta &= \frac{1}{2}rc\theta\partial_\theta, \\
G_i &= \tau\partial_{\xi^i} - \frac{1}{2}rc\big(\xi^i - \tau\beta^i\big)\theta\partial_\theta, \\
A &= \tau\big(\tau\partial_\tau + \xi^i\partial_{\xi^i}\big) - \frac{1}{4}\Big(rc\big(\tau\beta^i - \xi^i\big)^2 + 6\tau\Big)\theta\partial_\theta
\end{aligned}
$$

реализуют алгебру Ли расширенной группы Шредингера $\overline{\mathrm{Sch}}(1, 3)$, которая определяется следующими ненулевыми коммутаторами (см. [Goff, 1927, с. 117–122; Niederer, 1972, с. 802–810])

$$
\begin{array}{lll}
[J_i, J_j] = \varepsilon_{ijk}J_k, & [P_i, J_j] = -\varepsilon_{ijk}P_k, & [G_i, P_0] = -P_i, \\
[J_i, G_j] = -\varepsilon_{ijk}G_k, & [D, P_i] = -P_i, & [D, P_0] = -2P_0, \\
[D, G_i] = G_i, & [A, P_0] = -D, & [A, P_i] = -G_i, \\
[A, D] = 2A. & &
\end{array}
$$

Оператор D_θ коммутирует со всеми остальными операторами.

Группа Шредингера Sch(1,3) содержит в качестве подгрупп пространственно-временные переносы $P_\alpha, \alpha = 0, \ldots, 3,$ пространственные вращения $J_i, i = 1, 2, 3,$ преобразования Галилея G_i, проективную группу A. Расширенная группа Шредингера $\overline{\mathrm{Sch}}(1, 3)$, кроме того, включает растяжения D и D_θ.

Группа симметрии задает принцип относительности, определяя тот тип результатов, который не зависит от выбора системы отсчета из класса эквивалентных. Для уравнения (A), очевидно, это принцип относительности Галилея. Таким образом, классическое уравнение теплопроводности удовлетворяет всем перечисленным выше требованиям, кроме принципа причинности. Все эти хорошо известные результаты можно найти, например, в [Olver, 1986; Goff, 1927, с. 117–122].

3.2. Симметрии уравнения типа (B′)

Уравнение (B′) допускает 11-типараметрическую группу симметрий. Инфинитезимальные операторы соответствующей алгебры Ли имеют вид:

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \partial_\tau, \\
V_i &= \partial_{\xi^i}, \\
V_{3+i} &= \varepsilon_{ijk}\left(\xi^j\partial_{\xi^k} - \frac{1}{2}rc\beta^j\xi^k\theta\partial_\theta\right), \\
V_{6+i} &= \xi^i\partial_\tau + \tau\partial_{\xi^i} + \frac{1}{2}rc(\beta^i\tau - \xi^i)\theta\partial_\theta, \\
V_{10} &= \theta\partial_\theta.
\end{aligned}
$$

Оператор V_{11}

$$V_{11} = F(\tau, \xi^1, \xi^2, \xi^3)\partial_\theta$$

генерирует бесконечномерную алгебру. Функция F – произвольное решение рассматриваемого уравнения теплопроводности. Линейные комбинации

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \partial_\tau - \frac{1}{2}rc\theta\partial_\theta, \\
P_i &= \partial_{\xi^i} + \frac{1}{2}rc\beta^i\theta\partial_\theta, \\
J_i &= \varepsilon_{ijk}\xi^j\left(\partial_{\xi^k} + \frac{1}{2}rc\beta^k\theta\partial_\theta\right), \\
L_i &= \xi^i\partial_\tau + \tau\partial_{\xi^i} + \frac{1}{2}rc(\tau\beta^i - \xi^i)\theta\partial_\theta.
\end{aligned}
$$

реализуют алгебру Ли расширенной группы Пуанкаре $\overline{\mathrm{P}}(1,3)$, которая задается следующими ненулевыми коммутационными соотношениями

$$
\begin{aligned}
&[J_i,\, J_j] = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad [P_i,\, J_j] = -\varepsilon_{ijk} P_k, \quad [L_i,\, P_0] = -P_i,\\
&[L_i,\, P_i] = -P_0, \quad [J_i,\, L_k] = -\varepsilon_{ikr} L_r, \quad [L_i,\, L_j] = \varepsilon_{ijk} J_k.
\end{aligned}
$$

В качестве подгрупп группа Пуанкаре $\mathrm{P}(1,3)$ включает пространственно временные переносы $P_\alpha, \alpha = 0, \ldots, 3$, группу трехмерных пространственных вращений $J_i, i = 1, 2, 3$ и группу преобразований Лоренца L_i. Расширенная группа Пуанкаре $\overline{\mathrm{P}}(1,3)$ дополнительно включает группу растяжений $D_\theta = V_{10}$. Нетрудно видеть, что уравнение (B) удовлетворяет всем перечисленным требованиям, включая причинную обусловленность. Для этой модели переноса тепла выполняется принцип относительности Эйнштейна.

3.3. Симметрии уравнения типа (C′)

Уравнение (C′) допускает 12-типараметрическую группу симметрий, генераторами которой являются:

$$
\begin{aligned}
V_0 &= \partial_\tau,\\
V_i &= \partial_{\xi^i},\\
V_{3+i} &= \varepsilon_{ijk}\Big(\xi^j \beta^k \big(\partial_\tau + \beta^n \partial_{\xi^n}\big) - 2(\beta^j \tau - \xi^j)\partial_{\xi^k}\Big),\\
V_{6+i} &= (\beta^i \tau - \xi^i)\partial_\theta,\\
V_{10} &= \theta \partial_\theta,\\
V_{11} &= \partial_\theta.
\end{aligned}
$$

Индекс n принимает значения $1, 2$ и 3. Линейные комбинации перечисленных инфинитезимальных операторов

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \partial_\tau + \beta^k \partial_{\xi^k},\\
P_i &= \frac{1}{2}\beta^i \Big(\partial_\tau + \beta^k \partial_{\xi^k}\Big) + \partial_{\xi^i},\\
P_\theta &= \partial_\theta\\
J_i &= \varepsilon_{ijk}\left(\frac{1}{2}\xi^j \beta^k \Big(\partial_\tau + \beta^n \partial_{\xi^n}\Big) + (\tau\beta^k - \xi^k)\partial_{\xi^j}\right),\\
C_i &= (\xi^i - \tau\beta^i)\partial_\theta,\\
D_\theta &= \theta \partial_\theta,
\end{aligned}
$$

взятые в качестве базисных векторов реализуют алгебру Ли группы, определяемой следующими коммутационными соотношениями:

$$[J_i,\, J_j] = \varepsilon_{ijk} J_k, \quad [P_i,\, J_j] = -\varepsilon_{ijk} P_k, \quad [P_i, C_i] = P_\theta,$$
$$[P_\theta, D_\theta] = P_\theta, \quad [C_i, D_\theta] = C_i, \quad [C_i,\, J_j] = -\varepsilon_{ijk} C_k.$$

В качестве подгрупп эта группа включает пространственно временные трансляции $P_\alpha, \alpha = 0, \ldots, 3$, температурный перенос P_θ, группу пространственных вращений $J_i, i = 1, 2, 3$, подгруппу масштабных преобразований температуры D_θ и подгруппу конформных преобразований C_i. Никакому принципу относительности это уравнение не удовлетворяет.

4. Заключительные замечания

1. Из двух изучавшихся гиперболических уравнений переноса тепла (B) и (C) только уравнение (B) удовлетворяет всем требованиям, перечисленным во Введении. Несмотря на то что гипотезы, на которых основан вывод уравнения (C) кажутся физически оправданными, эта модель переноса тепла оказывается неадекватной, поскольку ее группа симметрий не определяет никакого принципа относительности. Классическая модель [уравнение (A)], основанная на законе теплопроводности Фурье, удовлетворяет принципу относительности Галилея и потому выглядит более физичной. Однако она допускает совпадение причины и следствия, в силу чего может рассматриваться лишь как приближенное описание в случае достаточно быстрых сигналов.

2. В приведенных таблицах перечислены однопараметрические группы g_k, которые генерируются инфинитезимальными векторными полями V_k уравнения (B′). Образы независимых и зависимых переменных относительно преобразования $e^{\sigma V_k}$ выписаны вместе с новыми решениями T_k, полученными из произвольного решения $F(\tau, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ под действием соответствующих преобразований. Здесь $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – произвольные вещественные константы, а верхний индекс T означает транспонирование.

ПЕРЕНОСЫ И РАСТЯЖЕНИЯ

$g_0:$	$\tau \to \tau + \sigma,$
	$T_0 = F(\tau - \sigma, \xi^1, \xi^2, \xi^3),$
$g_i:$	$\xi^i \to \xi^i + \sigma_i,$
	$T_i = F(\tau, \xi^1 - \sigma_1, \xi^2 - \sigma_2, \xi^3 - \sigma_3),$
$g_{10}:$	$T \to T e^\sigma,$
	$T_{10} = e^\sigma F(\tau, \xi^1, \xi^2, \xi^3).$

ВРАЩЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОРЕНЦА

$g_4:$

$$\begin{pmatrix} \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\sigma & \sin\sigma \\ -\sin\sigma & \cos\sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix},$$

$$T \to T\exp\left(\tfrac{1}{2}rc \begin{pmatrix} \beta^2 \\ \beta^3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -1+\cos\sigma & \sin\sigma \\ -\sin\sigma & -1+\cos\sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix}\right),$$

$$T_4 = \exp\left(\tfrac{1}{2}rc \begin{pmatrix} \beta^2 \\ \beta^3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1-\cos\sigma & \sin\sigma \\ -\sin\sigma & 1-\cos\sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^2 \\ \xi^3 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times F(\tau, \xi^1, (\xi^2, \xi^3) \cdot \begin{pmatrix} \cos\sigma & -\sin\sigma \\ \sin\sigma & \cos\sigma \end{pmatrix}),$$

$g_5:$

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\sigma & -\sin\sigma \\ \sin\sigma & \cos\sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^3 \end{pmatrix},$$

$$T \to T\exp\left(\tfrac{1}{2}rc \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -1+\cos\sigma & -\sin\sigma \\ \sin\sigma & -1+\cos\sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^3 \end{pmatrix}\right),$$

$$T_5 = \exp\left(\tfrac{1}{2}rc \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1-\cos\sigma & -\sin\sigma \\ \sin\sigma & 1-\cos\sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^3 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times F(\tau, (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \cdot \begin{pmatrix} \cos\sigma & 0 & \sin\sigma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\sigma & 0 & \cos\sigma \end{pmatrix}),$$

$g_6:$

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cos\sigma & \sin\sigma \\ -\sin\sigma & \cos\sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix},$$

$$T \to T\exp\left(\tfrac{1}{2}rc \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -1+\cos\sigma & \sin\sigma \\ -\sin\sigma & -1+\cos\sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}\right),$$

$$T_6 = \exp\left(\tfrac{1}{2}rc \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \beta^2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1-\cos\sigma & \sin\sigma \\ -\sin\sigma & 1-\cos\sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times F(\tau, (\xi^1, \xi^2) \cdot \begin{pmatrix} \cos\sigma & -\sin\sigma \\ \sin\sigma & \cos\sigma \end{pmatrix}, \xi^3),$$

$g_{6+i}:$

$$\begin{pmatrix} \tau \\ \xi^i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \cosh\sigma & \sinh\sigma \\ \sinh\sigma & \cosh\sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau \\ \xi^i \end{pmatrix},$$

$$T \to T\exp\left(\tfrac{1}{4}rc \begin{pmatrix} 1 \\ \beta^i \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1-\cosh\sigma & -\sinh\sigma \\ \sinh\sigma & -1+\cosh\sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau \\ \xi^i \end{pmatrix}\right),$$

$$T_7 = \exp\left(\tfrac{1}{8}rc \begin{pmatrix} 1 \\ \beta^1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -1+\cosh\sigma & -\sinh\sigma \\ \sinh\sigma & 1-\cosh\sigma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau \\ \xi^1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\times F((\tau, \xi^1) \cdot \begin{pmatrix} \cosh\sigma & -\sinh\sigma \\ -\sinh\sigma & \cosh\sigma \end{pmatrix}, \xi^2, \xi^3),$$

T_8 и T_9 записываются аналогично,

3. В терминах исходных размерных переменных алгебра Ли расширенной группы Пуанкаре $\overline{\mathrm{P}}(1,3)$ уравнения (B) реализуется следующими операторами:

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \frac{\lambda}{c}\partial_t - \frac{1}{2}\rho C_p c T \partial_T, \\
P_i &= \lambda \partial_{x^i} + \frac{1}{2}\rho C_p v^i T \partial_T, \\
J_i &= \varepsilon_{ijk} x^j \left(\partial_{x^k} + \frac{1}{2}\ \frac{\rho C_p}{\lambda}\ v^k T \partial_T\right), \\
L_i &= \frac{1}{c} x^i \partial_t + ct\partial_{x^i} + \frac{1}{2}\ \frac{\rho C_p}{\lambda}\ c(tv^i - x^i) T \partial_T, \\
D &= T\partial_T.
\end{aligned}
$$

4. Несмотря на то что природа тепло и массопереноса различна (см. обсуждение этой темы в [Belevich, 2004, с. 3053–3069]), результирующие уравнения совпадают с точностью до обозначений. По этой причине все результаты, полученные для уравнения теплопроводности, равно приложимы и к уравнению диффузии.

Таким образом, учитывая все сказанное выше, из двух причинно-зависимых моделей тепломассопереноса, связанных с уравнениями (B) и (C), предпочтение следует отдать модели, реализуемой уравнением (B). Это, разумеется, не окончательный вывод, поскольку таковым, видимо, можно считать лишь сравнение с экспериментом. Однако в рамках настоящего исследования, вывод, основанный на исследовании групповых свойств, представляется весомым аргументом.

Литература

1. *Joseph D. D., Preziosi L.* Heat waves // Rev. Mod. Phys. 1989. Vol. 61. No. 1. P. 41-73.
2. *Joseph D. D., Preziosi L.* Addendum to the paper "Heat waves" // Rev. Mod. Phys. 1990. Vol. 62. No. 2. P. 375-391.
3. *Tang D. W., Araki N.* Non-Fourier heat conduction in a finite medium under periodic surface thermal disturbance // Int. J. Heat Mass Transfer. 1996. Vol. 39. No. 8. P. 1585-1590.
4. *Vedavarz A., Kumar S. Moallemi M. K.* Significance of non-Fourier heat waves in continuum // J. Heat Transfer. 1994. Vol. 116. P. 116-224.
5. *Jackson H.E., Walker C.T.* Thermal conductivity, second sound, and phonon-phonon interactions in NaF // Physical Review B. 1971. Vol. 3. P. 1428-1439.
6. *Narayanamurti V., Dynes R.C.* Observation of second sound in bismuth // Physical Review Lett. 1972. Vol. 28. P. 1461-1465.
7. *Пешков В. П.* Второй звук в гелии II // Докл. АН СССР. 1944. Т. 45, с. 385.
8. *Yang H.Q.* Non-Fourier effect on heat conduction during welding // Int. J. Heat Mass Transfer. 1991. Vol. 34. No. 11. P. 2921-2924.
9. *Cattaneo C.* Sulla conduzione del calore // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. 1948. Vol. 3. P. 83-101.
10. *Cattaneo C.* Sur une forme de l'equation de la chaleur eliminant le paradoxe d'une propagation instantanee // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. 1958. Vol. 247. P.431-433.

11. *Vernotte P.* Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. 1958. Vol. 246. P. 3154-3155.
12. *Chen G.* Ballistic-diffusive heat conduction equation // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 86. P. 2297-2300.
13. *Belevich M.* Causal description of heat and mass transfer // J. Phys. A: Math. Gen. 2004. Vol. 37, № 8. P. 3053-3069.
14. *Olver P.J.* Applications of Lie groups to differential equations. Springer-Verlag, 1986. (В перев. П. Олвер. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989.)
15. *Butcher J., Carminati J., Vu K. T.* A comparative study of some computer algebra packages which determine the Lie point symmetries of differential equations // Comp. Phys. Comm. 2003. Vol. 155. P. 92-114.
16. *Goff J.A.* Transformations leaving invariant the heat equation of physics // Amer. J. Math. 1927. Vol. 49. P. 117-122.
17. *Niederer U.* The maximal kinematical invariance group of the free Schrodinger equation // Helv. Phys. Acta. 1972. Vol. 45. No. 5. P. 802-810.