

ГИДРОЛОГИЯ

В.В. Коваленко

ВЫБРОСЫ РАЗМЕРНОСТИ ФАЗОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ПРОГНОСТИЧЕСКИХ И ДИАГНОСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РАЗВИТИЯ ПРОЦЕССОВ КАТАСТРОФИЧЕСКОГО ФОРМИРОВАНИЯ МНОГОЛЕТНЕГО РЕЧНОГО СТОКА

V.V. Kovalenko

EMISSIONS OF DIMENSION OF PHASE SPACES OF FORECAST AND DIAGNOSTIC MODELS OF DEVELOPMENT OF PROCESSES OF CATASTROPHIC FORMATION OF A LONG-TERM RIVER FLOW

Введено новое для гидрологии понятие «выброс размерности» фазового пространства моделей формирования стока. Гносеологически, учет новых фазовых переменных обеспечивает статистическую устойчивость прогнозирования стоковых характеристик. Выявлено географическое распределение на ЕТР зон с неустойчивым формированием стока и испарения при использовании модели линейного формирующего фильтра, приводящей к одномодальным распределениям К. Пирсона. С помощью двумерного логистического отображения дано теоретическое обоснование механизма рассматриваемых выбросов в зонах неустойчивости.

Ключевые слова: многолетний речной сток, фазовая размерность, неустойчивость статистических моментов, выбросы размерности фазовых пространств.

The concept, new to a hydrology, «emission of dimension» of phase space of models of formation of a flow is entered. The account new phase variable provides statistical stability of forecasting of the flow characteristics. The geographical distribution on the European territory of Russia of zones with unstable formation of a flow and evaporation is revealed at use of model of the linear forming filter resulting in one-modal distributions of Pirson. With the help of two-dimensional logistic display the theoretical substantiation of the mechanism of considered emissions in zones of instability is given.

Key words: long-term river flow, phase dimension, instability of the statistical moments, emissions of dimension of phase spaces.

Введение

Обычно слово «катастрофа» ассоциируется с чисто бытовым взглядом на ситуацию: повышается уровень воды в реке, затопляются населенные пункты и т. п. С точки же зрения статистической гидрологии за этим явлением (бытовой

катастрофой) может и не быть катастрофы в более строгом научном понимании этого термина. Если имеются ряды многолетних наблюдений, которые вполне приемлемо (на требуемом уровне статистической значимости) описываются устойчивыми распределениями и происходящие события (наводнения) вполне укладываются (по повторяемости и высоте стояния уровня малой обеспеченности) в имеющиеся статистические описания, то в этих наводнениях нет никакой непредсказуемости. Они статистически предсказуемы (например, раз в 10 лет). Хотя мы подчас не можем указать конкретную траекторию случайного процесса изменения расхода воды Q (его ординату и дату наступления нежелательного явления), но статистически не происходит ничего необычного. Решая задачу о выбросах ординат случайного процесса за критический уровень обеспеченности, можно найти частоту и продолжительность подобных выбросов, т.е. дать практически полное статистическое описание случайного процесса [Румянцев, 1985]. Проблемы начинаются, если имеющийся ряд наблюдений не дает статистически устойчивого описания процесса. Обычно используют одномодальные асимметричные распределения плотности вероятности p (например из семейства кривых Пирсона или их модификации Крицкого–Менкеля). Однако в реальности эмпирические кривые могут и не соответствовать такой идеализации. Если процесс формирования стока неустойчив (имеется в виду физическая неустойчивость [Коваленко, 2008], а не неустойчивость моментов из-за недостаточной продолжительности наблюдений), «хвосты» распределений меняются не по экспоненте ($p \sim \exp(-Q^2) \rightarrow 0$), а по степенному закону ($p \sim \text{const} / Q^{(1+\alpha)} \rightarrow 0$

при $0 \leq \alpha \leq 1$). Довольно часто (в южных регионах России) на гистограммах наблюдаются вторые (а то и третьи) моды, которые естественно поднимают хвост аппроксимирующих одномодальных распределений, делая их неустойчивыми по дисперсии.

Именно такие неустойчивости в статье интерпретируются как катастрофы. Естественно, они также приводят к бытовым бедствиям, но дело еще усугубляется и тем, что это еще и катастрофы статистические – невозможность статистически устойчивого (как в предыдущем случае) описания процесса. Цель статьи – предложить методику диагностирования появления таких неустойчивостей, а также прогностические модели развития процессов катастрофического формирования многолетнего стока.

Мотивация и постановка задачи исследования

Диагностировать появление статистической неустойчивости или прогнозировать эволюцию вероятностных распределений, опираясь только на существующие ряды наблюдений невозможно. По фактическим рядам можно, например, констатировать факт неоднородности (связанный, возможно, с возникшей за период наблюдений неустойчивостью), но нельзя ее прогнозировать или диагностировать исходя из факторов формирования стока (нужна математическая

модель, куда эти факторы входят и при определенном сочетании вызывают неустойчивость решения модели).

На рис. 1 представлены варианты возможных изменений гидрологических процессов. Обычно прогнозы (сценарные оценки) гидрологических последствий изменения климата предполагают переход от одной равновесной ситуации (ряд 0 на интервале ОА) к другой такой же равновесной (ряд 3 на интервале БВ). Но кто доказал, что климатическая система, выведенная из равновесия, должна снова быстро стабилизироваться? Учитывая, что она содержит такие инерционные составляющие, как океан, надеяться на это не приходится. Ситуация может, например, развиваться в соответствии с процессом 4 на интервале БВ (или что-то в подобном духе).

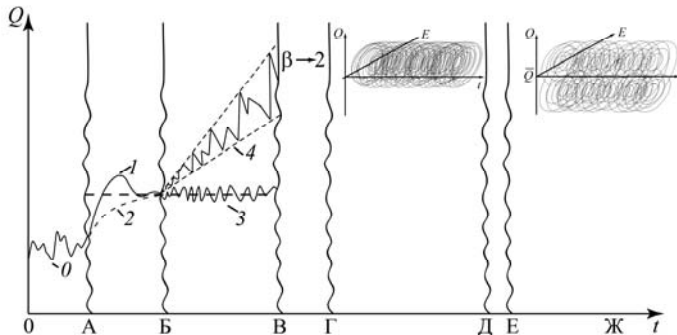


Рис. 1. Некоторые варианты изменения гидрологических процессов: ОА – стационарный ряд 0; АБ – переходные режимы (1 – колебательный, 2 – аperiodический); БВ – режимы в новом климате (3 – при равновесном сценарии, 4 – неустановившийся режим); ВГ – зарождение второй фазовой переменной; ГД – двухфазный режим; ДЕ – зарождение второй «моды» в двухфазном режиме; ЕЖ – двухфазный «двухмодальный» случайный процесс (реализация)

Важно обратить внимание на то, что обычно сценарные задачи, связанные с изменением климата, игнорируют переходные режимы (интервал АБ), которые могут быть как аperiodическими (2), так и колебательными (1); по крайней мере, этот вопрос не изучался.

Наличие трендов (ряд 4 на интервале БВ) может привести к росту параметра устойчивости β (о нем – ниже) на интервале ВГ и к появлению статистически значимой второй фазовой переменной (например, испарения E , интервал ГД). Возможно дальнейшее усложнение процесса, например появление второго центра притяжения–отталкивания (второй «моды», интервал ЕЖ), а также другие варианты, включая регрессивные упрощения.

Таким образом, могут происходить не только выбросы ординат случайного процесса за критический уровень обеспеченности; эволюционировать могут сами моменты распределений, а «выбросы» может иметь и размерность фазового пространства.

Если опираться на обычные одномодальные асимметричные кривые распределения используемые в инженерной гидрологии, то прогностической моде-

лью, работоспособной на интервале ОВ может служить линейный формирующий фильтр

$$dQ = [-(\bar{c} + \tilde{c})Q + \bar{N} + \tilde{N}]dt, \quad (1)$$

где $c = \bar{c} + \tilde{c} = 1/k\tau$; $N = \bar{N} + \tilde{N} = \dot{X}/\tau$ (здесь k – коэффициент стока, τ – время релаксации бассейна, \dot{X} – осадки; \bar{N} , \bar{c} – статистические нормы; \tilde{N} , \tilde{c} – коррелированные белые шумы с интенсивностями $G_{\tilde{N}}$, $G_{\tilde{c}}$ и взаимной интенсивностью $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$).

Уравнение (1) статистически эквивалентно уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК), которое и является прогностической моделью для эволюции плотности вероятности $p(Q)$:

$$\frac{\partial p(Q,t)}{\partial t} = -\frac{\partial(A(Q,t)p(Q,t))}{\partial Q} + 0,5\frac{\partial^2(B(Q,t)p(Q,t))}{\partial Q^2}, \quad (2)$$

где A , B – коэффициенты сноса и диффузии, определяемые физико-географическими параметрами, входящими в (1).

Заметим, что на практике ограничиваются (из-за коротких рядов наблюдений) несколькими начальными моментами m_i . Поэтому аппроксимируем уравнение ФПК для $p(Q)$ системой уравнений для моментов. В теории случайных процессов подобная процедура известна, и в нашем случае она приводит к следующей системе дифференциальных уравнений для моментов:

$$\begin{aligned} dm_1/dt &= (\bar{c} - 0,5G_{\tilde{c}})m_1 - 0,5G_{\tilde{c}\tilde{N}} + \bar{N}; \\ dm_2/dt &= -2(\bar{c} - G_{\tilde{c}})m_2 + 2\bar{N}m_1 - 3G_{\tilde{c}\tilde{N}}m_1 + G_{\tilde{N}}; \\ dm_3/dt &= -3(\bar{c} - 1,5G_{\tilde{c}})m_3 + 3\bar{N}m_2 - 7,5G_{\tilde{c}\tilde{N}}m_2 + 3G_{\tilde{N}}m_1; \\ dm_4/dt &= -4(\bar{c} - 2G_{\tilde{c}})m_4 + 4\bar{N}m_3 - 14G_{\tilde{c}\tilde{N}}m_3 + 6G_{\tilde{N}}m_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Предполагается, что решение системы (3) устойчиво, т. е. $\text{div } m_i = \sum_{i=1}^4 dm_i/dm_i < 0$ ($\bar{c} > 2G_{\tilde{c}}$). С помощью подобной модели (ее можно упростить, отбросив последнее уравнение, так как эксцесс, для вычисления которого нужен четвертый момент, в практической гидрологии не используется) можно решать задачи на любом из интервалов участка ОВ (рис. 1).

«Стационарный интервал» ОА, на котором $dm_i/dt = 0$, можно использовать для идентификации параметров $G_{\tilde{c}}$, $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$, \bar{c} (\bar{N} и $G_{\tilde{N}}$ – задаваемые внешние воздействия при фактическом или «сценарном» климате). На интервале БВ

вычисляется изменение моментов [а значит, и эволюция плотности вероятности $p(Q)$] при неравновесном (кривая 4) или равновесном (кривая 3) климате.

Основное допущение, которое на сегодняшний день приходится делать, заключается в «замораживании» интенсивности шумов: $G_{\bar{c}}^{OA} = G_{\bar{c}}^{BB}$, $G_{\bar{c}\tilde{N}}^{OA} = G_{\bar{c}\tilde{N}}^{BB}$ (каких-либо попыток их размораживания автору неизвестно). Однако и при этом допущении (как показали расчеты на ретроспективном материале) по большинству статистических критериев согласия в 70–80 % случаев результаты оказываются удовлетворительными на приемлемом уровне значимости (см. [Коваленко, 2006]).

Модель, представленная системой (3), является одновременно и диагностической так как позволяет выявлять условия, при которых происходит потеря устойчивости входящих в нее начальных моментов. Из уравнений видно, что при $\bar{c} < 0,5iG_{\bar{c}}$ (здесь i – порядок момента) $dm_i / dt > 0$, т. е. $m_i \rightarrow \infty$. Это и есть формальный признак неустойчивости. Если обозначить $\beta = G_{\bar{c}} / \bar{c}$, то неустойчивость для момента i -го порядка возникает при $\beta > 2/i$ (чем старше момент, тем меньшая относительная интенсивность шума $G_{\bar{c}} / \bar{c}$ требуется для неустойчивости; по старшим моментам речной сток практически всегда неустойчив). Ранее [Коваленко, 1998] была получена (как следствие одного из решений уравнения ФПК) сравнительно простая диагностическая модель для вычисления β :

$$\beta = 2k \ln r + 2, \quad (4)$$

где k – коэффициент стока; r – коэффициент автокорреляции стока смежных лет.

По этой формуле были диагностированы зоны неустойчивости по трем начальным моментам территории России (см. ниже).

Таким образом, на сегодняшний день есть апробированная модель для прогнозирования вероятностных устойчивых распределений, которая одновременно диагностирует статистическую неустойчивость, приводящую к катастрофам в том смысле, который изложен во введении, а именно к невозможности описывать редкие катастрофические явления даже в статистическом смысле. Неустойчивость указывает, по крайней мере, на то, что не срабатывает линейный формирующий фильтр (1), на основе которого построена («молчаливо» и в большинстве случаев без понимания этого факта) практически вся инженерная гидрология, кодифицированная в нормативном документе [СП 33-101-2003]. Неустойчивость указывает на невозможность оперировать одной фазовой переменной – расходом воды. Необходимо менять размерность модели, с помощью которой описывается (прогнозируется) формирование гидрологического режима бассейна.

Под «выбросами размерности» мы понимаем появление (или исчезновение) новых фазовых переменных, которые в совокупности со старыми фазовыми пе-

ременными устойчиво описывают процесс эволюции (деградации) рассматриваемой системы. На рис. 1 это соответствует переходу от интервала БВ к интервалу ГД. Для развивающихся систем подобная эволюция происходит через потерю устойчивости «старой» системы (интервал ВГ).

Этот же процесс можно изобразить еще нагляднее (рис. 2). На интервале (1) «проволока» расположена в плоскости (xt). Затем появляется новое измерение (y) и на интервале (2) «проволока» закручивается в пружину, «осваивая» пространство (xyt). На интервале (3) «проволока» снова занимает плоскость, но уже другую (yt). Для освоения новых фазовых переменных системе нужны ресурсы, и она их получает из инфинитного окружения (эта терминология из частично инфинитной гидрологии [Коваленко, 2007; 2009]).

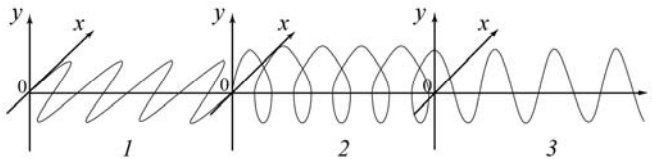


Рис. 2. Переход от плоскости (1) к пространству (2) и снова к плоскости (3)

На длительном интервале своего развития гидрологические системы могут неоднократно менять размерность своего фазового пространства, которая не ограничивается тремя, как в примере с «провоолокой», в котором имелось в виду геометрическое пространство. По существу, частично инфинитная гидрология была создана для того, чтобы в какой-то мере рационализировать механизм расширения фазовых пространств, что на более спокойном «жаргоне» интерпретируется как процесс развития.

Механизм выбросов в рамках корреляционного анализа

Проиллюстрируем особенности этого механизма на простом и наглядном примере в рамках корреляционного анализа систем с параметрическими шумами.

В частично инфинитной гидрологии (да и вообще в нелинейной динамике) считается возможным (а с практической точки зрения – необходимым) аппроксимировать бесконечномерные модели конечномерными в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений [например, (3)]. В достаточно общем случае подобная система имеет вид:

$$dY_i = \left(\sum_{j=1}^n (\bar{c}_{ij} + \tilde{c}_{ij}) \varphi_{ij}(\bar{Y}) + \bar{N}_i + \tilde{N}_i \right) dt \quad (i, j = \overline{1, n}), \tag{5}$$

где \bar{Y} – вектор состояния системы («набор» фазовых переменных, например, расход Q , испарение E и т. д.); остальные обозначения нами уже использовались ($c_{ij} < 0$).

Переходя от (5) к уравнению ФПК и аппроксимируя последнее системой дифференциальных уравнений для моментов, мы получаем (из-за нелинейности

функции $\varphi_{ij}(\bar{Y})$ незамкнутую систему уравнений, в которой младшие моменты зависят от старших. Ситуация существенно упрощается, если $\varphi_{ij}(\bar{Y}) = Y_j$. В этом случае можно получить (процедуры подобного «получения» в теории случайных процессов известны уже несколько десятилетий) «развязанную» систему для первых ($m_i = M[\bar{Y}]$) и вторых ($\alpha_{ij} = M[\bar{Y}\bar{Y}']$) начальных моментов:

$$\dot{m}_i = \sum_{p,q=1}^n (\bar{c}_{ip} + 0,5G_{\bar{c}_{iqpp}}) m_p + 0,5 \sum_{p=1}^n G_{(\bar{c}\bar{N})_{ipp}} + \bar{N}_i; \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{ij} = & \sum_{p,q=1}^n (\bar{c}_{ip} + 0,5G_{\bar{c}_{iqpp}}) \alpha_{pj} + \left(0,5 \sum_{p=1}^n G_{(\bar{c}\bar{N})_{ipp}} + \bar{N}_j \right) m_j + \\ & + \sum_{p,q=1}^n (\bar{c}_{ip} + 0,5G_{\bar{c}_{iqpp}}) \alpha_{ip} + \left(0,5 \sum_{p=1}^n G_{(\bar{c}\bar{N})_{jpp}} + \bar{N}_j \right) m_i + \\ & + \sum_{p,q=1}^n G_{\bar{c}_{ipjq}} \alpha_{pq} + \sum_{p=1}^n \left(G_{(\bar{c}\bar{N})_{ipj}} + G_{(\bar{c}\bar{N})_{jpi}} \right) m_p + G_{\bar{N}_{ij}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Смысл «развязанности» в том, что уравнение (6) никак не зависит от уравнения (7) (в нелинейном случае такой «развязки» нет).

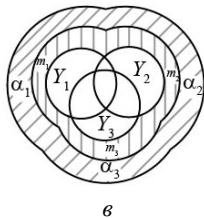
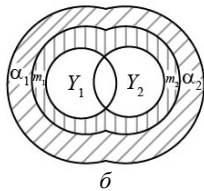
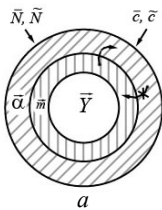


Рис. 3. Иллюстрация «выброса размерности»

Для уяснения ситуации имеет смысл визуализировать объект, описываемый системой (6), (7) (рис. 3). При переходе от исходной динамической модели (при $c = \bar{c} + \tilde{c}$; $N = \bar{N} + \tilde{N}$) к стохастическому уравнению (5), а затем к уравнению ФПК и его аппроксимации системой (6), (7) мы вектор фазовых переменных \bar{Y} как бы делаем уязвимым для внешней среды, допуская взаимодействия с ней через шумы \tilde{N} и \tilde{c} . При $G_{\tilde{c}} = \bar{c}$ внешняя среда начинает разваливать «двухслойную броню» в виде оболочек из \tilde{m} и $\tilde{\alpha}$ (исходная динамическая модель при $c < 0$ всегда устойчива; это и хорошо, и плохо, так как она не способна описывать процессы развития). При этом, во-первых, внешний слой $\tilde{\alpha}$ (а в более общем случае – слой) менее устойчив, чем внутренний \tilde{m} , а во-вторых – зависит от свойств внутреннего (но не наоборот).

Если оба слоя «пробиты» внешней средой ($G_{\tilde{c}} > 2\bar{c}$), то у системы есть две возможности: либо погибнуть, либо промутировать, объединившись с «пробившимися» элементами инфинитной реальности

в расширенную систему (рис. 3, б). Это и есть «выброс размерности» (появление нового компонента у вектора состояния \vec{Y} , а именно – Y_2). Предположим, что первая оболочка $\vec{\alpha}$ «пробита». Рассмотрим механизм «пробивания» второй оболочки и ее «заклеивания» с помощью введения новой фазовой переменной. Систему уравнений (6) запишем для одной переменной (математического ожидания):

$$\dot{m}_Q = -(\bar{c}_Q - 0,5G_{\tilde{c}Q})m_Q - 0,5G_{\tilde{c}\tilde{N}Q} + \bar{N}_Q. \quad (8)$$

Если $G_{\tilde{c}Q} > 2\bar{c}_Q$, то последний заслон для распределения $p(Q)$ пробивается: расходы воды не представляют собой больше статистическую совокупность (по крайней мере, в рамках распределений Пирсона). Но ведь расходы воды никуда не делись, река осталась. Разрушился только «карточный домик» наших представлений о том, как живет (в статистическом смысле) река (ее режим стока). Давайте построим еще один «карточный домик», чтобы он не «пугался» больших значений интенсивности шума $G_{\tilde{c}Q}$.

Вспомним, как получается динамическое уравнение для расхода. Балансовое соотношение $Q + E - \dot{X} = 0$ заменяется на $Q/k - \dot{X} = 0$ и вводится динамическая составляющая для возможности описания неравновесной ситуации $\dot{Q} = -cQ + N$, где $c = 1/k\tau$; $N = \dot{X}/\tau$. Далее мы «разрешаем» величинам c и N «шуметь» ($c = \bar{c} + \tilde{c}$, $N = \bar{N} + \tilde{N}$) с интенсивностями $G_{\tilde{c}}$, $G_{\tilde{N}}$, $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$. Если параметр c «шумит» сильно ($G_{\tilde{c}} > 2\bar{c}$), то уравнение (8) теряет устойчивость.

Давайте разберемся «кто шумит»? Параметром c так или иначе учитываются потери на испарение, которым «управляет» в основном температура воздуха, т. е. что-то инфинитное для речного бассейна. Поэтому можно включить испарение в состав вектора \vec{Y} . Но тогда система (6) примет вид:

$$\dot{m}_Q = -c_Q m_Q - c_Q m_E + \bar{N}_Q; \quad (9)$$

$$\dot{m}_E = -c_E m_E - c_E m_Q + \bar{N}_E, \quad (10)$$

где $c_Q = 1/\tau_Q$; $c_E = 1/\tau_E$; $\bar{N}_Q = \dot{X}/\tau_Q$; $\bar{N}_E = \dot{X}/\tau_E$ (здесь τ_Q, τ_E – время релаксации расхода и испарения соответственно). Если τ_Q и τ_E считать не случайными параметрами, то всякие основания для неустойчивости вообще исчезают; имеем «термостат» по мультипликативным шумам \tilde{c} (но не по аддитивным \tilde{N}). Закон распределения $p(Q, E)$ стал устойчивым (по крайней мере, в отношении математического ожидания), но произошел «выброс размерности». Разумеется, реальная картина может быть (и практически всегда бывает) более сложной: и $\Delta U \neq 0$, и τ может иметь свое статистическое распределение.

Мы упростили систему (6) до одного уравнения (8), перегрузив (говоря языком C++) коэффициенты \bar{c}_Q и $G_{\bar{c}_Q}$. Пока оставшиеся «в тени» остальные уравнения ведут себя «тихо» (например, $\dot{m}_E \approx 0$), то подобная идеализация срабатывает. В противном случае переменная m_E «выходит на сцену» и «говорит», что без нее нельзя. Правда, обычно мы не знаем, что реально остается в тени, хотя методами фрактальной диагностики можно определить, сколько потенциальных фазовых переменных «затаилось в тени».

Проиллюстрируем ситуацию на наглядных картинках. Пусть имеем исходную модель для математического ожидания расхода

$$\dot{m}_Q = -cm_Q + \bar{N}_Q, \quad (11)$$

где c включает в себя как среднее значение \bar{c} , так и интенсивность шума $G_{\bar{c}}$ ($c = \bar{c} - 0,5G_{\bar{c}}$); взаимную интенсивность шума $G_{\bar{c}\bar{N}}$ примем нулевой (в данном контексте это не существенно).

Будем считать, что такое же по структуре уравнение (теневое) справедливо для матожидания испарения m_E (оба уравнения «не знают» друг о друге). В зависимости от знака коэффициента c в уравнении (11) получаются устойчивые ($c > 0$) или неустойчивые ($c < 0$) решения, см. рис. 4, а. Неустойчивость по матожиданию m_Q можно проиллюстрировать более наглядно, если ввести в коэффициенты и внешние воздействия уравнений для m_Q и m_E периодические составляющие (см. рис. 4, б – режим для m_E периодический, но устойчивый, в отличие от решения для m_Q , которое нарастает из-за отрицательного значения $c : G_{\bar{c}} > 2\bar{c}$).

Обращаю внимание читателя на то обстоятельство, что рис. 4, б есть просто «иллюзия»: на нем совмещены в одной фазовой плоскости две независимые переменные m_Q и m_E (они независимы, пока мы не перейдем к системе (9), (10). Сама по себе неустойчивость решения модели для m_Q просто индикатор: что-то не так, есть какое-то влияние, выводящее ситуацию за рамки предметной области, зафиксированной моделью (11). Природу этого влияния в самой модели не «выловить», нужны не формализуемые моделью творческие действия познающего субъекта.

Неустойчивость – индикатор «выброса размерности», проявление действия второй фазовой переменной (появления «флюса» на рис. 3, б). Объединив разрозненные уравнения типа (11) для m_Q и m_E в единую систему (9) и (10), мы ликвидировали мультипликативные шумы. Процесс стал устойчивым (рис. 4, в и 4, г), но двумерным. (По физическому смыслу переменных m_Q и m_E они не

могут быть отрицательными.) Поэтому в модель (9), (10) для членов ct необходимо вводить либо знаковую функцию $\left(f(m) = \begin{cases} 0, & m \leq 0, \\ 1, & m > 0 \end{cases} \right)$, либо множитель $\exp(-a|m|)\exp(am)$, где значение постоянной a должно согласовываться с шагами численного интегрирования.)

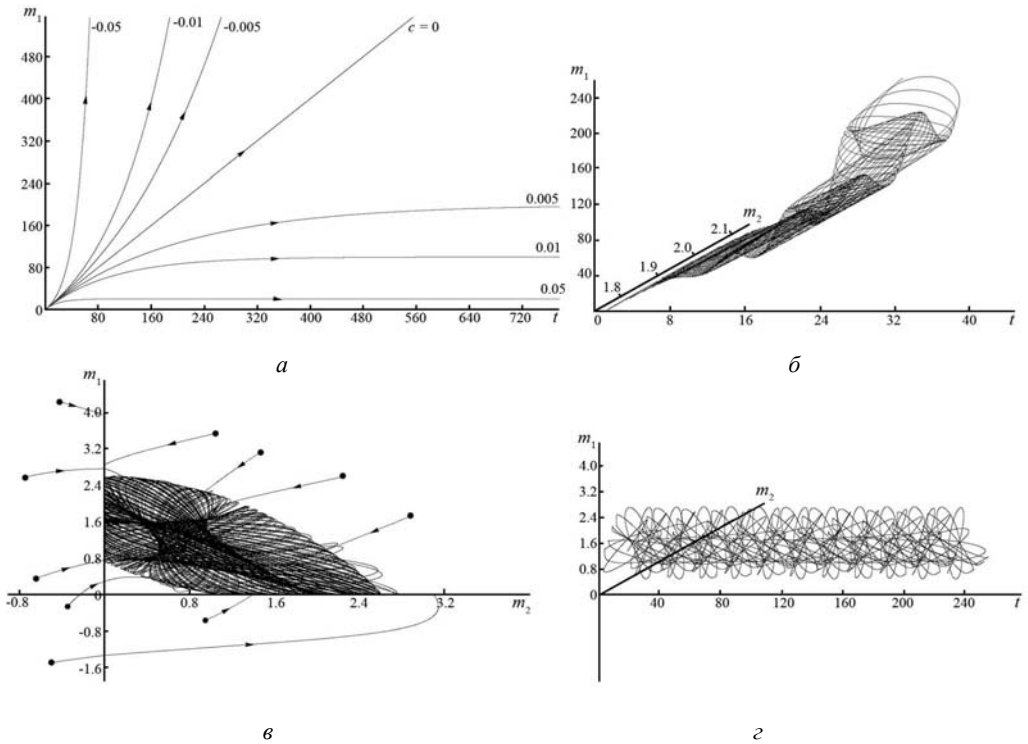


Рис. 4. Превращение неустойчивого (за счет «выброса размерности») одномерного процесса в устойчивый двумерный: *а* – влияние параметра c в модели (11) на поведение решения; *б* – двумерная траектория, устойчивая по фазовой переменной m_2 и неустойчивая по переменной m_1 ; *в* – пример появления аттрактора при переходе от неустойчивой одномерной модели с сильным шумом к двумерной модели, в которой «ответственность» за шумы из инфинитной реальности «взяла на себя» вновь введенная фазовая переменная; *г* – временная развертка аттрактора, изображенного на рис. 4, *в*

Географическое распределение зон с возможными неустойчивостями статистических моментов и выбросами размерности фазовых пространств

Формула (4) содержит величины, которые сравнительно легко определяют на основе сетевых наблюдений. Аналогичная формула применяется и для испарения, моделируемого также линейным формирующим фильтром (о гене-

рировании рядов испарений см. [Коваленко..., 2009]). На рис. 5 приведены карты распределения зон неустойчивости начальных моментов для годового стока и испарения, полученные по фактическим рядам наблюдений (при $\beta > 0,67$ процесс неустойчив по третьему моменту, при $\beta > 1$ – по второму, при $\beta \approx 2$ – по первому).

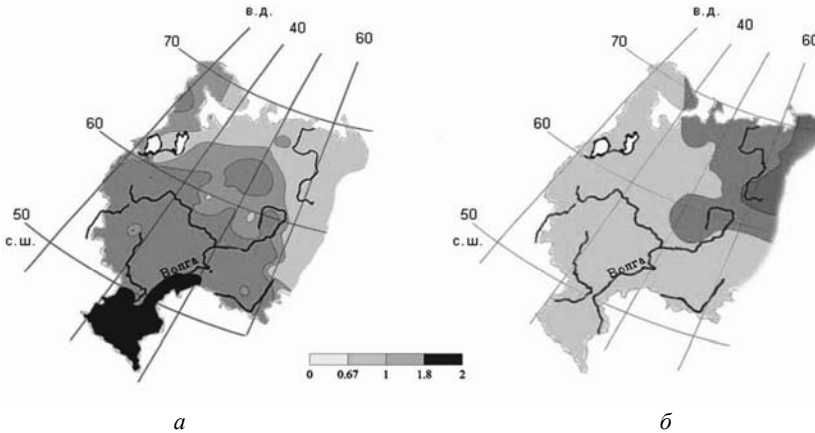


Рис. 5. Распределение зон неустойчивости по стоку (а) и испарению (б)

Обращает на себя внимание относительная симметричность изменения критериев устойчивости для стока β_Q и испарения β_E . По стоку неустойчивость растет к югу, по испарению – к северу. На что реально указывает неустойчивость? Только на то, что в зонах неустойчивости ставится под сомнение модель формирования стока (испарения) в виде линейного формирующего фильтра (приводящая к семейству кривых Пирсона). Самое простое усложнение подобной модели сводится к «размораживанию» параметра релаксации $\tau_Q = W_Q/Q$ (здесь W_Q – константа, определяющая стоковую емкость бассейна; аналогичная формула используется и для модели испарения: $\tau_E = W_E/E$). С учетом этой формулы получается система нелинейных уравнений:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{(Q+E)Q}{W_Q} + \frac{Q\dot{X}}{W_Q}; \quad (12)$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{(Q+E)E}{W_E} + \frac{E\dot{X}}{W_E}. \quad (13)$$

Система (12), (13) содержит главные элементы многолетних водных балансов речных бассейнов; в случае необходимости учета изменения запасов воды в почво-грунтах, надо записать еще одно уравнение [Коваленко, 2008] или ввести коэффициент перед отрицательными членами в правых частях. Фазовые переменные этой системы тормозят рост друг друга ($\partial\dot{Q}/\partial E = -Q/W_Q < 0$,

$\partial \dot{E} / \partial Q = -E / W_E < 0$), т. е. имеет место конкурентный тип взаимодействия (за ресурс – осадки). Если, например, ограничиться одним уравнением (12), убрав E введением коэффициента стока, то получим нелинейное уравнение для расхода, дающее также одномодальное распределение плотности вероятности [Коваленко, 2007], не входящее, однако, в семейство кривых Пирсона.

Переходя к дискретному аналогу системы (12), (13) (при $dt \approx \Delta t = T = 1$ году), мы получим двумерное обобщение логистического отображения:

$$Q_{i+1} = -(Q_i + E_i)Q_i / Q_0 + \dot{X}Q_i / Q_0 + Q_i;$$

$$E_{i+1} = -(Q_i + E_i)E_i / E_0 + \dot{X}E_i / E_0 + E_i,$$

где $Q_0 = W_Q / T$; $E_0 = W_E / T$.

Бифуркационные параметры $(\dot{X} - E_i) / Q_0$ и $(\dot{X} - Q_i) / E_0$ в данном случае сами зависят от текущих значений фазовых переменных. Бифуркационная диаграмма представлена на рис. 6, а.

Она согласуется с рис. 5 (потеря устойчивости для испарения на севере и для расхода – на юге). В средней части диаграммы срабатывает линейная модель, не имеющая бифуркаций (между стоком и испарением происходит «взаимодействие» по типу нейтрализма, исключающего выбросы фазовых переменных). Если бы эта зона отсутствовала, то бифуркационная диаграмма имела бы вид, показанный на рис. 6, б. Она соответствует многомодальному двумерному распределению.

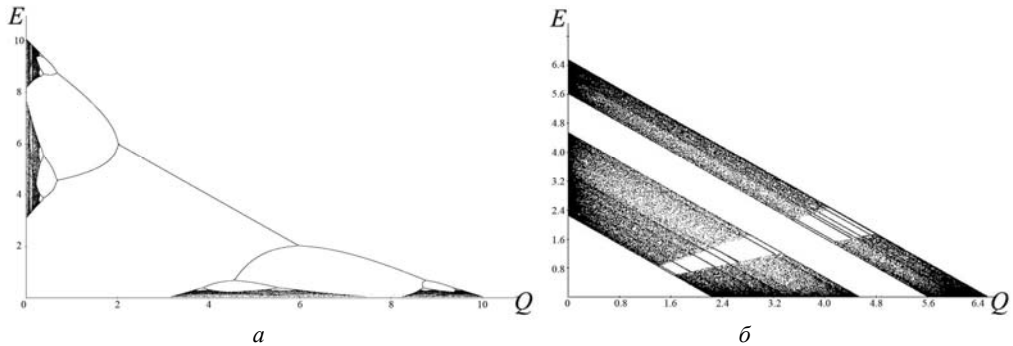


Рис. 6. Бифуркационные диаграммы для различных вариантов задания емкостей стоковой и испарительной предметных областей: а) $Q_0 \geq E_0$; б) $E_0 \approx Q_0$.

В реальности конкурентный тип взаимодействия приводит к тому, что каждая из фазовых переменных «отодвигает» наступление бифуркации для другой переменной, так как в бифуркационные параметры они входят со знаком минус. Причем этот эффект остается в силе, если даже в системе (12), (13) одно из уравнений будет линейным. (В соответствии с рис. 5, в зоне неустойчивости по

стоку испарение практически всегда устойчиво и может быть описано линейной моделью; и наоборот.)

Таким образом, учет новых фазовых переменных может не только кардинально усложнить ситуацию, требуя двухмодального описания, но и в определенных географических зонах стабилизировать ситуацию, зафиксировав ее на одномодальных распределениях (правда выходящих за пределы семейства кривых Пирсона, которыми оперируют, в основном, гидрологи). Однако эта стабилизация носит географически локальный характер, так как уменьшение нормы стока по мере перемещения на юг (или испарения – на север) рано или поздно приведет к бифуркациям.

Выводы

В статье введено новое для гидрологии (и видимо для науки вообще) понятие «выброс размерности фазовых пространств моделей формирования многолетнего стока». С его помощью удастся по-новому взглянуть на понятие «катастрофа» дополнив чисто утилитарное («бытовое») его содержание математическим смыслом, отличающимся от такового, принятого в известной теории катастроф. Можно говорить о катастрофах по статистическим моментам, сначала старших, а затем и младших (по мере увеличения интенсивности шумов), приводящих к неустойчивости всего вероятностного распределения в целом. Это ведет к невозможности статистически описывать экстремальные явления, в первую очередь наводнения. Возвратиться к такой возможности можно только введя в модель дополнительную переменную, характеризующую изучаемую систему (расширив фазовое пространство ее модели).

Получено несколько конкретных новых научных результатов:

1. Предложены стохастические модели формирования многолетнего речного стока, на основе которых можно как диагностировать возникновение статистических неустойчивостей, так и подавлять их путем увеличения размерности фазовых пространств. Этим способом удастся восстановить предсказуемость «бытовых катастроф», которые перестают быть катастрофами в статистическом смысле.

2. Разработана и реализована практически методика диагностирования зон на европейской территории России, в которых формирование многолетнего стока и испарения с поверхности речных бассейнов происходит неустойчиво. С использованием ГИС-технологий получены соответствующие карты, из которых следует зеркальная симметрия этих зон для стока и испарения: степень неустойчивости формирования стока растет к югу, а испарения – к северу.

3. Предложена и реализована модель в виде двумерного логистического отображения, подтверждающая эмпирический вывод п. 2. Регионы одномодального формирования одновременно как стока, так и испарения возможны только в центральных широтах ЕТР при умеренных (не малых) значениях коэффициентов стока и испарения, неявно входящих в выражения для бифурка-

ционных параметров (например, в случае стока: $(\dot{X} - E_i)/Q_0 = \dot{X}/Q_0 - E_i/Q_0 = 1/k_Q - E_i/Q_0$). При малых значениях этих коэффициентов (юг для стока, север для испарения) значения бифуркационных параметров увеличиваются, что ведет к каскаду бифуркаций, приводящих к многомодальности.

4. Установлено, что конкурентный (за осадки) тип взаимодействия расхода и испарения ведет к уменьшению зоны действия бифуркационных механизмов, т. е. введение дополнительных фазовых переменных расширяет зоны устойчивого одномодального моделирования и прогнозирования гидрометеорологических процессов на бассейнах. Для других типов взаимодействия фазовых переменных это может быть и не так.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № 2.1.1/3355).

Литература

1. Коваленко В.В. Частично инфинитная гидрология. – СПб.: изд. РГМУ, 2007. – 230 с.
2. Коваленко В.В. Теория катастроф и эволюция дифференцируемых многообразий в частично инфинитной гидрологии. – СПб.: изд. РГМУ, 2008. – 178 с.
3. Коваленко В.В. Гидрологическое обеспечение надежности строительных проектов при изменении климата. – СПб.: изд. РГМУ, 2009. – 101 с.
4. Коваленко В.В., Хаустов В.А. Критерии устойчивого развития гидрологических процессов и картирование зон ожидаемых аномалий параметров годового стока рек СНГ при антропогенном изменении климата // Метеорология и гидрология, 1998, № 12, с. 96–102.
5. Коваленко В.В., Гайдукова Е.В., Соловьев Ф.Л. Идентификация статистических характеристик годового испарения на ЕТР для формирования диагностических моделей в задачах частично инфинитной гидрологии // Естественные и технические науки № 2. – М.: Компания Спутник+, 2009, с. 200–208.
6. Коваленко В.В., Викторова Н.В., Гайдукова Е.В. Моделирование гидрологических процессов. Изд. 2-е, исп. и доп. Учебник. – СПб.: изд. РГМУ, 2006. – 559 с.
7. Румянцев В.А., Бovyкин И.В. Пространственно-временные закономерности колебания стока рек Евразии. – Л.: Наука, 1985. – 148 с.
8. СП 33-101-2003. Определение основных расчетных гидрологических характеристик / Госстрой России. – М.: ФГУП ЦПП, 2004.