ГЕОФИЗИКА

М.Ю. Белевич

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ЖИДКОСТИ

M.Yu. Belevich

GROUP ANALYSIS OF THE FLUID MODELS

Рассматриваются групповые свойства различных моделей жидкости, как четырехмерных причинно-обусловленных, так и стандартных трехмерных, и изучается связь свойств симметрии системы уравнений с допущениями, положенными в ее основу. В качестве базовой используется причинно-зависимая модель сжимаемой вязкой бароклинной жидкости, с уравнением диффузии плотности. Все остальные исследуемые здесь модели, в том числе и стандартные, являются ее частными случаями. Полученные результаты сравниваются с известными свойствами симметрии для уравнений Навье-Стокса и Эйлера.

Ключевые слова: групповой анализ, симметрии, модели жидкости.

Symmetry properties of different three and four-dimensional causal fluid models are considered and the connection between symmetries of the system of equations and general assumptions is studied. The causal compressible viscous baroclinic fluid model with the mass density diffusion equation is used as the most general one. All the rest of the models, the standard model including, are particular cases. The results obtained are compared with known symmetry properties of the Navier-Stokes and Euler equations.

Keywords: group analysis, symmetries, fluid models.

1. Введение

Наряду с причинной обусловленностью явлений в физике существует ряд фундаментальных представлений о пространстве, времени, мерах и пр. Так, в соответствии с современной точкой зрения физическое пространство однородно и изотропно, а время однородно. Абсолютные значения мер в природе отсутствуют и для оценки свойств изучаемого объекта его нужно сопоставить с другим объектом, выбранным в качестве эталона. Эти представления отражаются на тех математических моделях, которые строятся для описания физического мира. Так, однородность пространства и времени позволяет выбирать в качестве начала отсчета любое событие – пару (момент времени, точка пространства), а изотропность пространства и равноправие сторон – произвольную ориентацию координатных осей. Указанный произвол является вместе с тем и предписанием модели объекта, претендующей на адекватность, оставаться справедливой в любой системе координат. Аналогично, отсутствие абсолютных значений мер позволяет выбирать произвольную систему единиц, а значит, и модель должна допускать подобный произвол.

Все сказанное означает, что модель явления может считаться удовлетворительной в том случае, если она причинно-обусловлена, а также является инвариантной по отношению к выбору:

1) отсчетного (нулевого) момента времени и единицы измерения времени;
2) начала координат и единицы измерения расстояний;
3) ориентации системы координат.

Если эти требования удовлетворяются, то любое решение уравнений модели, полученное в рамках некоторой системы координат и выбранной системы единиц, остается решением тех же уравнений при замене координат и/или системы единиц. В противном случае адекватного описания явления природы с помощью модели получить нельзя, хотя при этом она еще может быть вполне работоспособным вычислительным средством.

Указанная инвариантность означает, что если функция $f(t, \mathbf{x})$, где t – время, а $\mathbf{x}$ – радиус-вектор точки тела, есть решение уравнения модели, то решениями также являются функции, инвариантные по отношению к выбору

1) начала отсчета времени $f(\alpha t + t_0, \mathbf{x})$,
2) начала пространственных координат $f(t, \beta\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)$,
3) ориентации осей пространственных координат $f(t, R\mathbf{x})$.

Здесь α, β, t_0 – произвольные вещественные константы, $\mathbf{x}_0$ – произвольный радиус-вектор, а R – произвольная ортогональная 3×3 матрица. Помимо указанной инвариантности, модель должна быть нечувствительна к выбору движущейся системы координат, т.е. должна удовлетворять принципу относительности, предпочтительно Эйнштейна, но хотя бы Галилея.

Свойства инвариантности моделей могут быть получены в результате анализа симметрий соответствующих дифференциальных уравнений. Ниже это делается для различных моделей механики жидкости. Для классических моделей подобные исследования проводились в [Lloyd, 1981] (система уравнений Навье-Стокса) и в [Овсянников, 1978; Olver, 1986] (система уравнений Эйлера).

Работа имеет следующую структуру. В параграфе 2 приводятся необходимые сведения об анализируемых далее моделях механики жидкости. Пункт 3.2 посвящен результатам вычислений допустимых групп преобразований исследуемых уравнений. Последний параграф содержит заключительные замечания.

2. Основная модель жидкости

2.1. Базовые уравнения

Базовой служит причинно-зависимая модель бароклинной вязкой жидкости

$$\rho d_t v^\alpha + \delta^{\alpha\beta} \left(p - \rho\nu \mathrm{div}\vec{v}\right)_{;\beta} = \left(\rho\nu\delta^{\beta\gamma} v^\alpha_{;\gamma}\right)_{;\beta}, \tag{1}$$

включающая вместо уравнения неразрывности уравнение диффузии плотности массы

$$d_t\rho + \rho \mathrm{div}\vec{v} = \mathrm{div}(\nu_\rho \nabla\rho). \tag{2}$$

Здесь $(\cdot)_{;\beta}$ – ковариантная производная по направлению базисного вектора $\vec{e}_\beta$, $\vec{v} = v^\alpha \vec{e}_\alpha$ – вектор скорости, а $\delta^{\alpha\beta}$ – компонента единичного тензора (символ Кронекера). Кроме того, ρ – плотность массы, p – давление, ν – кинематический коэффициент диффузии, ν_ρ – коэффициент диффузии плотности массы.

Используя далее декартовы координаты, запишем базовую модель в виде:

$$\begin{aligned}
c\partial_\tau\rho + v^k\partial_k\rho + \rho(\partial_\tau c + \partial_k v^k) &= \nu_\rho(-\partial_{\tau\tau}\rho + \Delta\rho), \\
c\partial_\tau c + v^k\partial_k c - \frac{1}{\rho}\partial_\tau\left(p - \rho\nu(\partial_\tau c + \partial_k v^k)\right) &= \nu(-\partial_{\tau\tau}c + \Delta c), \\
c\partial_\tau v^j + v^k\partial_k v^j + \frac{1}{\rho}\partial_j\left(p - \rho\nu(\partial_\tau c + \partial_k v^k)\right) &= \nu(-\partial_{\tau\tau}v^j + \Delta v^j),
\end{aligned}$$

где $\partial_\alpha \equiv \partial_{x^\alpha}$, $x^0 \equiv i\tau$, $d\tau \equiv c dt$, $v^0 \equiv ic$, а c – скорость сигнала, с помощью которого проводятся наблюдения движения среды.

2.2. Варианты модели

В качестве вариантов рассматривается ряд упрощений базовой модели. В первую очередь, это касается учета вязкости. В одном случае полагается $\nu_\rho = 0$, т.е. вместо уравнения диффузии плотности используется уравнение неразрывности:

$$c\partial_\tau\rho + v^k\partial_k\rho + \rho(\partial_\tau c + \partial_k v^k) = 0.$$

В другом случае рассматривается идеальная жидкость, $\nu_\rho = \nu = 0$ и уравнения движения записываются в виде:

$$\begin{aligned}
c\partial_\tau c + v^k\partial_k c - \frac{1}{\rho}\partial_\tau p &= 0, \\
c\partial_\tau v^j + v^k\partial_k v^j + \frac{1}{\rho}\partial_j p &= 0.
\end{aligned}$$

Помимо общих случаев исследуются также следующие допущения:

1) скорость распространения сигнала постоянна $c = \mathrm{const}$:

$$\begin{aligned}
c\partial_\tau\rho + v^k\partial_k\rho + \rho\partial_k v^k &= \nu_\rho(-\partial_{\tau\tau}\rho + \Delta\rho),\\
-\frac{1}{\rho}\partial_\tau\left(p - \rho\nu\partial_k v^k\right) &= 0,\\
c\partial_\tau v^j + v^k\partial_k v^j + \frac{1}{\rho}\partial_j\left(p - \rho\nu\partial_k v^k\right) &= \nu(-\partial_{\tau\tau}v^j + \Delta v^j),
\end{aligned}$$

2) скорость распространения сигнала бесконечна:

$$\begin{aligned}
\partial_t\rho + v^k\partial_k\rho + \rho\partial_k v^k &= \nu_\rho\Delta\rho,\\
0 &= 0,\\
\partial_t v^j + v^k\partial_k v^j + \frac{1}{\rho}\partial_j\left(p - \rho\nu\partial_k v^k\right) &= \nu\Delta v^j,
\end{aligned}$$

3) приближение баротропной жидкости с постоянной скоростью звука c_s, $dp = c_s^2 d\rho$; в этом случае уравнения движения принимают вид:

$$\begin{aligned}
c\partial_\tau c + v^k\partial_k c - \frac{1}{\rho}\partial_\tau\left(c_s^2\rho - \rho\nu(\partial_\tau c + \partial_k v^k)\right) &= \nu(-\partial_{\tau\tau}c + \Delta c),\\
c\partial_\tau v^j + v^k\partial_k v^j + \frac{1}{\rho}\partial_j\left(c_s^2\rho - \rho\nu(\partial_\tau c + \partial_k v^k)\right) &= \nu(-\partial_{\tau\tau}v^j + \Delta v^j),
\end{aligned}$$

4) поле скорости бездивергентно ($\partial_\tau c + \partial_k v^k = 0$); при $\nu_\rho = 0$ допущение бездивергентности поля скорости равносильно допущению несжимаемости среды (п. 5):

$$\begin{aligned}
c\partial_\tau\rho + v^k\partial_k\rho &= \nu_\rho(-\partial_{\tau\tau}\rho + \Delta\rho),\\
c\partial_\tau c + v^k\partial_k c - \frac{1}{\rho}\partial_\tau p &= \nu(-\partial_{\tau\tau}c + \Delta c),\\
c\partial_\tau v^j + v^k\partial_k v^j + \frac{1}{\rho}\partial_j p &= \nu(-\partial_{\tau\tau}v^j + \Delta v^j),
\end{aligned}$$

5) несжимаемость среды ($d_t\rho = c\partial_\tau\rho + v^k\partial_k\rho = 0$); при этом уравнение диффузии плотности имеет вид:

$$\rho(\partial_\tau c + \partial_k v^k) = \nu_\rho(-\partial_{\tau\tau}\rho + \Delta\rho),$$

6) постоянство плотности массы ρ; при этом уравнение неразрывности записывается в виде:

$$\partial_\tau c + \partial_k v^k = 0,$$

а также их комбинации.

3. Группы симметрий уравнений механики жидкости

3.1. Симметрии

Группой симметрий дифференциального уравнения называется (см., например, [Olver, 1986]) локальная группа преобразований G, действующая на подмножестве пространства $X \times U$ независимых X и зависимых U переменных и переводящая решения уравнения в решения же. Другими словами, если $u = u(t, \mathbf{x})$ – решение дифференциального уравнения, а $g \in G$ – некоторое преобразование из группы и действие этого преобразования на решение gu определено, то gu также является решением того же уравнения. Каждый элемент g в окрестности единичного элемента группы можно записать как экспоненту $g = \exp(\mathbf{v})$ для некоторого вектора $\mathbf{v}$ из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Последнюю можно отождествить с касательным пространством к G в единичном элементе e, замкнутым относительно операции коммутирования. Проходящий через единицу группы поток $g^\sigma = \exp(\sigma\mathbf{v})e$, порождает однопараметрическую подгруппу группы G, а вектор $\mathbf{v}$ оказывается, таким образом, генератором этой подгруппы или ее инфинитезимальной образующей.

Любой элемент $g \in G$ всегда может быть записан как произведение экспонент $g = \exp(\mathbf{v})\ldots\exp(\mathbf{w})$ для конечного числа векторов $\mathbf{v}, \ldots, \mathbf{w} \in \mathfrak{g}$. Если же n – размерность алгебры и $\{V_i\}_{i=1}^n$ – ее базис, то $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i V_i$, где v^i – компоненты вектора $\mathbf{v}$ в базисе $\{V_i\}$ и $g = \prod_{i=1}^n \exp(v^i V_i)$. Таким образом, группа преобразований G будет группой симметрий дифференциального уравнения, если симметрией будет каждая ее однопараметрическая подгруппа $g_i^\sigma = \exp(\sigma V_i)e$.

Для отыскания максимальной группы симметрий требуется найти и решить переопределенную систему определяющих уравнений и вычислить коэффициенты η^k и φ^a инфинитезимальной образующей $\mathbf{v}$ однопараметрической группы

$$\mathbf{v} = \eta^k \partial_{x_k} + \varphi^a \partial_{u_a}.$$

Здесь $(x_1, \ldots, x_k, \ldots) \in X$ – независимые и $(u_1, \ldots, u_a, \ldots) \in U$ – зависимые переменные задачи. Выражения для коэффициентов η^k и φ^a обычно содержат набор произвольных констант и функций. Количество констант задает размерность соответствующей конечномерной алгебры Ли, а функции определяют бесконечномерные подалгебры. Детали вычислений можно найти, например, в [Olver, 1986].

Вычисления, связанные с групповым анализом, как правило, достаточно трудоемки (нередко требуется решать системы из сотен линейных дифференциальных уравнений в частных производных), но часто могут быть выполнены с помощью специализированных программ, работающих в среде той или иной системы аналитических вычислений. В настоящей работе необходимые вычисления проводились с помощью программы Desolv (release 5, June 2000, авторы K.T.Vu и J.Carminati), работающей в среде Maple V release 5.

3.2. Симметрии моделей жидкости

Здесь используются следующие обозначения инфинитезимальных операторов:

трансляции:	$P_\alpha = \partial_{x^\alpha}, \quad P_i = \partial_{x^i},$
	$P_t = \partial_t, \quad P_p = \partial_p,$
пространственные повороты:	$J_i = \varepsilon_{ijk}\left(x^j \partial_{x^k} + v^j \partial_{v^k}\right),$
преобразования Галилея:	$G_i = t\partial_{x^i} + \partial_{v^i},$
преобразования Лоренца:	$L_i = x^i \partial_{x^0} - x^0 \partial_{x^i} + v^i \partial_{v^0} - v^0 \partial_{v^i},$
растяжения:	$D_\alpha = x^\alpha \partial_{x^\alpha}, \quad D_v = v^\alpha \partial_{v^\alpha},$
	$D_\rho = \rho\partial_\rho, \quad D_p = p\partial_p,$
	$D_t = t\partial_t, \quad D_x = x^k \partial_{x^k},$
	$D_u = v^k \partial_{v^k}.$

При этом $\alpha \in \{0,1,2,3\}$, $i,j,k \in \{1,2,3\}$, а ε_{ijk} – символ Леви-Чивиты. Рассматриваются следующие варианты модели среды:

вариант I – общий вязкий случай;

вариант II – отсутствие диффузии плотности ($\nu_\rho = 0$);

вариант III – невязкая жидкость ($\nu = 0$).

В табл. 1, 2, 3 и 4 приводятся группы симметрий и их генераторы, вычисленные для различных моделей жидкости. Соответствующие уравнения выписаны в предыдущем разделе.

Для сравнения в табл. 5 приводятся группы симметрий и их генераторы, вычисленные для классических вариантов уравнений идеальной жидкости (уравнения Эйлера) и вязкой жидкости (уравнения Навье-Стокса). Эти результаты совпадают с уже известными и опубликованными.

Таблица 1

Генераторы симметрий четырех мерных (4D) и трехмерных (3D) моделей жидкости

Вариант	а. 4D общий	б. баротропный	в. 4D ($c = \mathrm{const}$)	г. 3D ($c = \infty$)
I.1. общий	$P_p,\ P_\alpha,\ J_k,\ L_j,$ $-D_\alpha + D_v + 2D_p$	$P_\alpha,\ J_k,\ L_j$	$P_p,\ P_\alpha,\ J_k$	$f(t)\partial_p,\ P_t,\ P_i,\ J_k,\ G_j,$ $-2D_t - D_x + D_u + 2D_p$
I.2. бездивергентный	$P_p,\ P_\alpha,\ J_k,\ L_j,$ $-D_\alpha + D_v + 2D_p$	$P_\alpha,\ J_k,\ L_j$	$P_p,\ P_\alpha,\ J_k$	$f(t)\partial_p,\ P_t,\ P_i,\ J_k,\ G_j,$ $-2D_t - D_x + D_u + 2D_p$
I.3. несжимаемый	$P_p,\ P_\alpha,\ J_k,\ L_j,$ $-D_\alpha + D_v + 2D_p$	$P_\alpha,\ J_k,\ L_j$	$P_p,\ P_\alpha,\ J_k$	$f(t)\partial_p,\ P_t,\ P_i,\ J_k,\ G_j,$ $-2D_t - D_x + D_u + 2D_p$
I.4. баротроп.	см. 1.б	—	$P_\alpha,\ J_k$	$P_t,\ P_i,\ J_k,\ G_j$

Таблица 2

Генераторы симметрий четырех мерных (4D) и трехмерных (3D) моделей жидкости (продолжение)

Вариант	а. 4D общий	б. баротропный	в. 4D ($c = \mathrm{const}$)	г. 3D ($c = \infty$)
II.1. общий	$P_p,\ P_\alpha,\ J_k,\ L_j,$ $D_\alpha - D_\rho - D_p,$ $-D_\alpha + D_v + 2D_p$	$P_\alpha,\ J_k,\ L_j,$ $D_\alpha - D_\rho$	$P_p,\ P_\alpha,\ J_k,$ $D_\alpha - D_\rho - D_p$	$f(t)\partial_p,\ P_t,\ P_i,\ J_k,\ G_j,$ $D_t + D_x - D_\rho - D_p,$ $-2D_t - D_x + D_u + 2D_p$
II.2. бездивергентный (несжимаемый)	$P_p,\ P_\alpha,\ J_k,\ L_j,$ $D_\alpha - D_\rho - D_p,$ $-D_\alpha + D_v + 2D_p$	$P_\alpha,\ J_k,\ L_j,$ $D_\alpha - D_\rho$	$P_p,\ P_\alpha,\ J_k,$ $D_\alpha - D_\rho - D_p$	$f(t)\partial_p,\ P_t,\ P_i,\ J_k,\ G_j,$ $D_t + D_x - D_\rho - D_p,$ $-2D_t - D_x + D_u + 2D_p$
II.3. $\rho = \mathrm{const}$	$P_p,\ P_\alpha,\ J_k,\ L_j,$ $-D_\alpha + D_v + 2D_p$	$P_\alpha,\ J_k,\ L_j,$ $-D_\alpha + D_v$	$P_p,\ P_\alpha,\ J_k,$ $D_\alpha - D_\rho - D_p$	$f(t)\partial_p,\ P_t,\ J_k,$ $-2D_t - D_x + D_u + 2D_p$ $\tilde{G}_j = h_j(t)\partial_{x^j} + h'_j(t)\partial_{v^j} -$ $-\rho x^j h''_j(t)\partial_p,$
II.4. баротроп.	см. 1.б	—	$P_\alpha,\ J_k,\ D_\alpha - D_\rho$	$P_t,\ P_i,\ J_k,\ G_j,$ $-D_t - D_x + D_\rho$

Таблица 3

Генераторы симметрий четырех мерных (4D) и трехмерных (3D) моделей жидкости (продолжение)

Вариант	а. 4D общий	б. баротропный	в. 4D ($c = \mathrm{const}$)	г. 3D ($c = \infty$)
III.1. общий	$P_p,\ P_\alpha,\ J_k,\ L_j,$ $D_\alpha,\ D_\rho + D_p,$ $D_v + 2D_p$	$P_\alpha,\ J_k,\ L_j,$ $D_\alpha,\ D_\rho$	$P_p,\ P_\alpha,\ J_k,$ $D_\alpha,\ D_\rho + D_p,$ $D_x + D_u - 2D_\rho$	$f(t)\partial_p,\ P_t,\ P_i,\ J_k,\ G_j,$ $D_t + D_x,\ D_x - D_u + 2D_p,\ D_\rho + D_p,$ $t(-D_t - D_x + D_u + 5D_p + 3D_\rho)$ $-\sum_i x^i \partial_{v^i}$
III.2. бездивергентный (несжимаемый)	$P_p,\ P_\alpha,\ J_k,\ L_j,$ $D_\alpha,\ D_\rho + D_p,$ $D_v + 2D_p$	$P_\alpha,\ J_k,\ L_j,\ D_\alpha,$ $2f(\rho)\partial_\rho +$ $(\rho f'(\rho) - f(\rho))D_\rho$	$P_p,\ P_\alpha,\ J_k,$ $D_\alpha,\ D_\rho + D_p,$ $D_x + D_u - 2D_\rho$	$f(t)\partial_p,\ P_t,\ P_i,\ J_k,\ G_j,$ $D_t + D_x,\ D_\rho + D_p,$ $D_x + D_u - 2D_p$
III.3. $\rho = \mathrm{const}$	$P_p,\ P_\alpha,\ J_k,\ L_j,$ $D_\alpha,\ D_v + 2D_p$	$P_\alpha,\ J_k,\ L_j,$ $-D_\alpha + D_v$	$P_p,\ P_\alpha,\ J_k,\ D_\alpha,$ $D_x + D_u + 2D_p$	$f(t)\partial_p,\ P_t,\ J_k,$ $D_t + D_x,\ D_x + D_v + 2D_p,$ $\tilde{G}_j = h_j(t)\partial_{x^j} + h'_j(t)\partial_{v^j}$ $-\rho x^j h''_j(t)\partial_p,$
III.4. баротроп.	см. 1.б	—	$P_\alpha,\ J_k,\ D_x,\ D_\rho$	$P_t,\ P_i,\ J_k,\ G_j,\ D_t + D_x,\ D_\rho$

Таблица 4

Группы симметрий моделей жидкости: $\mathrm{Eu}(1,3)$ – группа Евклида, $\mathrm{G}(1,3)$ – группа Галилея, $\mathrm{P}(1,3)$ – группа Пуанкаре. Надчеркивание обозначает расширение группы за счет растяжений.

Вариант I	а. 4D общий	б. баро-тропный	в. 4D ($c = \mathrm{const}$)	г. 3D ($c = \infty$)
1. общий	$\overline{\mathrm{P}}(1,3)$	$\mathrm{P}(1,3)$	$\mathrm{Eu}(1,3)$	$\overline{\mathrm{G}}(1,3)$
2. бездивергентный	$\overline{\mathrm{P}}(1,3)$	$\mathrm{P}(1,3)$	$\mathrm{Eu}(1,3)$	$\overline{\mathrm{G}}(1,3)$
3. несжимаемый	$\overline{\mathrm{P}}(1,3)$	$\mathrm{P}(1,3)$	$\mathrm{Eu}(1,3)$	$\overline{\mathrm{G}}(1,3)$
4. баротропный	см. 1.б	—	$\mathrm{Eu}(1,3)$	$\mathrm{G}(1,3)$
Вариант II				
1. общий	$\overline{\mathrm{P}}(1,3)$	$\overline{\mathrm{P}}(1,3)$	$\overline{\mathrm{Eu}}(1,3)$	$\overline{\mathrm{G}}(1,3)$
2. бездив. (несжим.)	$\overline{\mathrm{P}}(1,3)$	$\overline{\mathrm{P}}(1,3)$	$\overline{\mathrm{Eu}}(1,3)$	$\overline{\mathrm{G}}(1,3)$
3. $\rho = \mathrm{const}$	$\overline{\mathrm{P}}(1,3)$	$\overline{\mathrm{P}}(1,3)$	$\overline{\mathrm{Eu}}(1,3)$	$\overline{\mathrm{G}}(1,3)$
4. баротропный	см. 1.б	—	$\overline{\mathrm{Eu}}(1,3)$	$\overline{\mathrm{G}}(1,3)$
Вариант III				
1. общий	$\overline{\mathrm{P}}(1,3)$	$\overline{\mathrm{P}}(1,3)$	$\overline{\mathrm{Eu}}(1,3)$	$\overline{\mathrm{G}}(1,3)$
2. бездив. (несжим.)	$\overline{\mathrm{P}}(1,3)$	$\overline{\mathrm{P}}(1,3)$	$\overline{\mathrm{Eu}}(1,3)$	$\overline{\mathrm{G}}(1,3)$
3. $\rho = \mathrm{const}$	$\overline{\mathrm{P}}(1,3)$	$\overline{\mathrm{P}}(1,3)$	$\overline{\mathrm{Eu}}(1,3)$	$\overline{\mathrm{G}}(1,3)$
4. баротропный	см. 1.б	—	$\overline{\mathrm{Eu}}(1,3)$	$\overline{\mathrm{G}}(1,3)$

Таблица 5

Генераторы симметрий классических уравнений гидромеханики. Здесь $f(t)$ и $h_j(t)$ – произвольные функции времени.

система Навье-Стокса: $\overline{G}(1,3)$		
общая	$\rho = \mathrm{const}$	баротропная
$f(t)\partial_p,\ P_t,\ P_i,\ J_k,\ G_j,$ $D_t + D_x - D_\rho - D_p,$ $-2D_t - D_x + D_u + 2D_p$	$f(t)\partial_p,\ P_t,\ J_k,$ $\tilde{G}_j =$ $= h_j(t)\partial_{x^j} + h'_j(t)\partial_{v^j} - \rho x^j h''_j(t)\partial_p,$ $-2D_t - D_x + D_u + 2D_p$	$P_t,\ P_i,\ J_k,\ G_j,$ $-D_t - D_x + D_\rho$
система Эйлера: $\overline{G}(1,3)$		
общая	$\rho = \mathrm{const}$	баротропная
$f(t)\partial_p,\ P_t,\ P_i,\ J_k,\ G_j,$ $D_t + D_x,\ D_\rho + D_p,$ $D_x + D_u + 2D_p$	$f(t)\partial_p,\ P_t,\ J_k,$ $\tilde{G}_j = h_j(t)\ c_s^2\partial_{x^j} +$ $+ h'_j(t)\ c_s^2\partial_{v^j} - \rho x^j h''_j(t)\partial_\rho,$ $D_t + D_x,\ D_x + D_v + 2\rho\ln\rho D_\rho$	$f(t)\partial_p,\ P_t,\ J_k,$ $\tilde{G}_j = h_j(t)\ c_s^2\partial_{x^j} +$ $+ h'_j(t)\ c_s^2\partial_{v^j} - \rho x^j h''_j(t)\partial_\rho,$ $D_t + D_x,\ D_x + D_v + 2\rho\ln\rho D_\rho$

4. Обсуждение результатов

Как было отмечено выше, результаты, полученные для уравнений Навье-Стокса и Эйлера, совпадают с известными (см. [Овсянников, 1978; Lloyd, 1981]). Кроме того, обнаружено, что подгруппа, появляющаяся в уравнениях Эйлера в случае политропного газа при показателе политропы, равном $\frac{5}{3}$ [Овсянников, 1981], допускается и в общем случае сжимаемого газа при произвольном уравнении состояния. В баротропном случае по понятной причине пропадают все симметрии, связанные с давлением. Появление бесконечномерных алгебр связано исключительно с бесконечной скоростью распространения сигнала. Они связаны с симметриями по давлению (сдвиг по давлению на произвольную функцию t) и не проявляются лишь в баротропных моделях. Уменьшение числа вязких уравнений (варианты I, II и III) приводит к увеличению числа групп растяжений (их дроблению).

В отличие от стандартного случая (см., например, [Olver, 1981]), где уравнения модели вязкой жидкости и уравнение теплопроводности (уравнение переноса тепла в жидкости) имеют различные группы симметрии, в общем причинно-зависимом случае и уравнения модели движущейся среды, и уравнение переноса в среде тепла имеют близкие группы симметрий.

Тип группы определяется гипотезами, принятыми относительно скорости сигнала, которые определяют наличие или отсутствие того или иного принципа относительности. Так, если c – величина переменная и является функцией события (т.е. считается функцией времени и простанственных координат), система уравнений допускает группу Лоренца, определяющую принцип относительности Эйнштейна и, как следствие, группу Пуанкаре или расширенную (за счет растяжений) группу Пуанкаре $\overline{P}(1,3)$. Если $c = const,$ принцип относительности отсутствует и допускается лишь группа Евклида (расширенная группа Евклида). Наконец, если $c = \infty$ вместо группы Лоренца допускается группа Галилея (расширенная группа Галилея), определяющая соответствующий принцип относительности Галилея. Последний результат совпадает с известным (см. [Lloyd, 1981] для системы Навье-Стокса и [Овсянников, 1978; Olver, 1986] для системы Эйлера). Легко видеть, что ни вязкость, ни (не)сжимаемость и/или (без)дивергентность поля скорости не оказывает влияния на тип допустимой группы симметрии, хотя и меняет вид отдельных инфинитезимальных операторов.

Литература

1. *Belevich M.* Causal description of non-relativistic dissipative fluid motion // Acta Mechanica. 2003. Vol. 161. Pp. 65–80.
2. *Belevich M.* On the continuity equation // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. Vol. 42. 375502 doi:10.1088/1751-8113/42/37/375502.
3. *Lloyd S. P.* The infinitesimal group of the Navier-Stokes equations // Acta Mechanica. 1981. Vol. 38. Pp. 85–98.
4. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.
5. *Olver P.J.* Applications of Lie groups to differential equations. Springer-Verlag, 1986. (В перев. Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989.).