

*А.М. Кокорин*

**МОДИФИКАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ СВЕТА  
НА ДВУХСЛОЙНОЙ ПРОСВЕТЛЕННОЙ СФЕРЕ И ЕГО  
ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ АТМОСФЕРНОЙ ОПТИКИ**

*A.M. Kokorin*

**THE MODIFIED DECISION OF A PROBLEM OF DISPERSION  
OF LIGHT ON THE TWO-LAYER ANTIREFLECTION SPHERE  
AND ITS APPLICATION IN PROBLEMS  
OF ATMOSPHERIC OPTICS**

*В работе предложен алгоритм расчета амплитудных коэффициентов Ми, используемых при вычислении основных характеристик рассеяния сферических частиц атмосферного аэрозоля с плавной радиальной неоднородностью показателя преломления. С помощью этого алгоритма оценено влияние влажности воздуха на элементы матрицы рассеяния радиально-неоднородными частицами пограничного слоя океанского аэрозоля.*

*Ключевые слова: коэффициенты Ми, радиально-неоднородных сферы, матрица рассеяния, океанский аэрозоль, пограничный слой.*

*Algorithm for calculation Mie amplitude coefficients is proposed. These coefficients are necessary for calculation the characteristics scattering features of spherical atmosphere aerosol particles with smooth radial inhomogeneity of the refraction index. С the help of this algorithm estimates influence effect of humidity on elements of the scattering matrix of the boundary layer of ocean aerosol.*

*Key words: Mie coefficients, radially inhomogeneous spheres, scattering matrix, ocean spray, boundary layer.*

**Решения задачи рассеяния на двухслойной радиально-неоднородной сфере.** Для моделирования оптических свойств частиц морского аэрозоля наряду с однородными и двухслойными частицами используется модель просветленной сферы (ПС). Последняя представляет собой двухслойную сферическую частицу, внутренняя часть которой является однородным ядром с показателем преломления  $n_1 > 0$ , а наружная – неоднородный сферический слой, показатель преломления в котором непрерывно изменялся от  $n_1$  до  $n_2$ .

Пусть  $r$  – расстояние от центра частицы,  $r_1, r_2$  радиус ядра и оболочки, а  $\lambda$  – длина волны излучения во внешней. Оптическая структура ПС определяется зависимостью показателя преломления  $n$  от параметра  $\rho$ :

$$n(\rho) = \begin{cases} n_1 > 0, & 0 \leq \rho < \alpha, \\ n_3 A \rho^m, & \alpha \leq \rho < \beta, \\ n_2, & \rho = \beta, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\rho = kr$ ;  $k = 2\pi\lambda^{-1}$ ;  $\beta = kr_2$ ;  $\alpha = kr_1$ ;  $n = \rho_2/\rho_1$ ;  $A$  и  $m$  – вещественные или комплексные константы; показатель преломления внешней среды  $n_3 = 1$ . Величины  $n_1$  и  $n_2$  соответственно показатели преломления сухого аэрозольного вещества и оболочки частицы.

Решение задачи дифракции в дальней зоне для частиц ПС рассмотрено в [Kerker, 1966]. Формулы для расчета коэффициентов  $M_{\mu}$   $a_n$  и  $b_n$  представлены в виде частного от деления определителей матриц:

$$D_{p+1}(z) = \frac{2(p+1)}{z} - \frac{1}{D_p(z)}; \tag{2}$$

$$b_l = \frac{\begin{vmatrix} J_{\mu}(X_{\alpha}) & J_{-\mu}(X_{\alpha}) & -n_1^{-0,5} J_{l+0,5}(n_1\alpha) & 0 \\ J_{\mu}(X_{\beta}) & J_{-\mu}(X_{\beta}) & 0 & J_{l+0,5}(\beta) \\ Q_l(\alpha) & \widehat{Q}_l(\alpha) & -f_l'(\alpha) & 0 \\ Q_l(\beta) & \widehat{Q}_l(\beta) & 0 & g_l'(\beta) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} J_{\mu}(X_{\alpha}) & J_{-\mu}(X_{\alpha}) & n_1^{-0,5} J_{l+0,5}(n_1\alpha) & 0 \\ J_{\mu}(X_{\beta}) & J_{-\mu}(X_{\beta}) & 0 & H_{l+0,5}^{(2)}(\beta) \\ Q_l(\alpha) & \widehat{Q}_l(\alpha) & -f_l'(\alpha) & 0 \\ Q_l(\beta) & \widehat{Q}_l(\beta) & 0 & h_l'(\beta) \end{vmatrix}}, \tag{3}$$

где  $\mu = (2l + 1) / 2 / (m + 1);$  (4)

$$v = [1 / (m + 1)] [l(l + 1) + (m + 0,5)^2]^{0,5}; \tag{5}$$

$$X_{\rho} = [A / (m + 1)] \rho^{m+1}; \tag{6}$$

$$V_l(\rho) = \frac{d}{dr} [\rho^{m+1} (\pi / 2 / \rho)^{0,5} J_v(X_{\rho})]; \tag{7}$$

$$\widehat{V}_l(\rho) = \frac{d}{d\rho} [\rho^{m+1} (\pi / 2 / \rho)^{0,5} J_{-v}(X_{\rho})]; \tag{8}$$

$$Q_l(\rho) = \frac{d}{d\rho} [\rho(\pi\rho/2)^{0,5} J_{\mu}(X_{\rho})]; \tag{9}$$

$$\widehat{Q}_l(\rho) = \frac{d}{d\rho} [\rho(\pi\rho/2)^{0,5} J_{-\mu}(X_{\rho})]; \tag{10}$$

$$f'_l(\rho) = \frac{d}{d\rho}[\rho z_l^{(1)}(n_1\rho)]; \quad (11)$$

$$g'_l(\rho) = \frac{d}{d\rho}[\rho z_l^{(1)}(\rho)]; \quad (12)$$

$$h'_l(\rho) = \frac{d}{d\rho}[\rho z_l^{(3)}(\rho)]; \quad (13)$$

$$z_l^{(1)}(\rho) = (\pi/2/\rho)^{0,5} J_{l+0,5}(\rho); \quad (14)$$

$$z_l^{(3)}(\rho) = (\pi/2/\rho)^{0,5} H_{l+0,5}^{(2)}(\rho), \quad (15)$$

Здесь  $J_p(z)$  и  $H_p^{(2)}(z)$  соответственно цилиндрические функции Бесселя и Ханкеля второго рода порядка  $p$ , а  $l = 1, 2, \dots, \infty$  – номер парциальной волны.

Как показал численный эксперимент, использование формул (2), (3) для расчета светорассеивающих характеристик атмосферных частиц ПС для больших частиц ( $\rho > 100$ ) приводит к нарастанию вычислительной ошибки и потере точности вычислений. Кроме того, использование стандартных рекуррентных соотношений для цилиндрических функций  $J_p(z)$  и  $H_p^{(2)}(z)$  с комплексными аргументом представляет собой сложную вычислительную проблему [Ватсон Г., Воронцов]. Таким образом, встаёт задача ввести такие специальные комбинации цилиндрических функций, использование которых позволило бы при проведении численных расчетов полностью исключить расчет обычных цилиндрических функций. Эффективность использования такого подхода была, например, проиллюстрирована в работе [Воронцов] на примере моделирования рассеяния на диэлектрических протяженных телах цилиндрической формы.

Для решения этой задачи введём следующие комбинации цилиндрических функций:

$$\begin{aligned} G_m(z) &= \frac{J_m(z)}{N_m(z)}; \quad P_m(z, w) = \frac{J_m(z)}{J_m(w)}; \quad D_m(z) = \frac{N_{m+1}(z)}{N_m(z)}; \\ V_m(p) &= \frac{J'_m(z)}{J_m(z)}; \quad R_m(z, w) = \frac{J_{m+1}(z)}{J_m(w)}; \quad F_m(z) = \frac{J_{m+1}(z)}{J_m(z)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Используя для производных (7)–(13) рекуррентное соотношение

$$Z'_m(z) = Z_m(z)(m/z) - Z_{m+1}(z), \quad (17)$$

и выполнив элементарные преобразования определителей матриц (2), (3), можно привести выражения для коэффициентов  $M_i$  и  $b_i$  к виду:

$$a_l = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{те же элементы,} & 0 \\ \text{что и в} & a_{24}^* \\ \text{определителе} & 0 \\ \text{числителя} & a_{44}^* \end{vmatrix}}; \quad (18)$$

$$b_l = \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & a_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & a_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 \\ b_{41} & b_{42} & 0 & a_{44} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{те же элементы,} & 0 \\ \text{что и в} & a_{24}^* \\ \text{определителе} & 0 \\ \text{числителя} & a_{44}^* \end{vmatrix}}. \quad (19)$$

Здесь  $a_{11} = \alpha^m$ ;  $a_{12} = \alpha^m$ ;  $a_{13} = -n_1^{-0.5}$ ;  $a_{21} = \beta^m P_v(X_\beta, X_\alpha)$ ;  $a_{22} = \beta^m P_{-v}(X_\beta, X_\alpha)$ ;  
 $a_{24} = G_{l+0,5}(\beta)$ ;  
 $a_{31} = n^{-2}(\alpha)\alpha^{m-0,5} \{ (m+0,5) + (m+1)[v - X_\alpha F_v(X_\alpha)] \}$ ;  
 $a_{32} = n^{-2}(\alpha)\alpha^{m-0,5} \{ (m+0,5) + (m+1)[-v - X_\alpha F_{-v}(X_\alpha)] \}$ ;  
 $a_{33} = (\alpha n_1)^{-0,5} n_1^{-2} [\alpha n_1 F_l(\alpha n_1) - (v+0,5)]$ ;  
 $a_{41} = n^{-2}(\beta)\beta^{m-0,5} \{ [(m+0,5) + (m+1)v]P_v(X_\beta, X_\alpha) - (m+1)X_\beta R_v(X_\beta, X_\alpha) \}$ ;  
 $a_{42} = n^{-2}(\beta)\beta^{m-0,5} \{ [(m+0,5) - (m+1)v]P_{-v}(X_\beta, X_\alpha) - (m+1)X_\beta R_{-v}(X_\beta, X_\alpha) \}$ ;  
 $a_{44} = \beta^{-0,5} G_{l+0,5}(\beta)[(l+0,5) - \beta F_{l+0,5}(\beta)]$ ;  
 $a_{24}^* = G_{l+0,5}(\beta) - I$ ;  $b_{11} = 1$ ;  $b_{12} = 1$ ;  
 $b_{21} = P_\mu(X_\beta, X_\alpha)$ ;  $b_{22} = P_{-\mu}(X_\beta, X_\alpha)$ ;

$$\begin{aligned}
 b_{31} &= \alpha^{-0,5} \{0,5 + (m+1)[\mu - X_\alpha F_\mu(X_\alpha)]\}; \\
 b_{32} &= \alpha^{-0,5} \{0,5 - (m+1)[\mu + X_\alpha F_{-\mu}(X_\alpha)]\}; \\
 b_{33} &= (\alpha n_1)^{-0,5} [\alpha n_1 F_l(\alpha n_1) - (v+0,5)]; \\
 b_{41} &= \beta^{-0,5} \{[0,5 + \mu(m+1)]P_\mu(X_\beta, X_\alpha) - (m+1)X_\beta R_\mu(X_\beta, X_\alpha)\}; \\
 b_{42} &= \beta^{-0,5} \{[0,5 - \mu(m+1)]P_{-\mu}(X_\beta, X_\alpha) - (m+1)X_\beta R_{-\mu}(X_\beta, X_\alpha)\}. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Таким образом, амплитудные коэффициенты  $Mu$   $a_l$  и  $b_l$  выражены не через цилиндрические функции  $J_p(z)$  и  $H_p^{(2)}(z)$ , а через их комбинации (16). Рекуррентные формулы для последних имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 G_{p+1}(z) &= G_p(z) \frac{F_p(z)}{D_p(z)}; D_{p+1}(z) = \frac{2(p+1)}{z} - \frac{1}{D_p(z)}; \\
 F_{p+1}(z) &= \frac{2(p+1)}{z} - \frac{1}{F_p(z)}; V_{p+1}(z) = \frac{p+1}{z} - F_{p+1}(z); \\
 R_{p+1}(z, w) &= R_p(z, w) \frac{F_{p+1}(z)}{F_p(w)}; P_{p+1}(z, w) = P_p(z, w) \frac{F_p(z)}{F_p(w)}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Как показали результаты численного эксперимента, многократное использование рекуррентных формул (21) вычисление комбинаций цилиндрических функций (16) с комплексными значениями переменных  $z, w$  от малых порядков к большому не сопровождаются быстрым накоплением относительных погрешностей. Это обстоятельство позволяет обеспечить сходимость и устойчивость амплитудных коэффициентов (18, 19) при вычислении характеристик светорассеяния ПС для больших дифракционных параметров  $\rho$ .

**Влияние влажности воздуха на элементы матрицы рассеяния радиально-неоднородных частиц морского аэрозоля в приводном слое над морем.**

Используя разработанный нами алгоритм, сравним элементы  $f_{33}$  и  $f_{43}$  приведенной матрицы рассеяния (ПМР) частиц ПС и двухслойными частицами (ДЧ), моделирующих мелкодисперсную составляющую океанского аэрозоля.

Реальные частицы этого типа аэрозоля, как правило, гигроскопичны, и поэтому существенное воздействие на их внутреннюю структуру оказывает влажность воздуха. При этом индивидуальные особенности частиц (форма, ориентация частиц) размываются и, вследствие этого, можно для описания их оптических характеристик использовать относительно простые модели.

В атмосферной оптике широко используются модели однородных и двух-слойных частиц. Расчеты показали, что индикатрисы рассеяния этих моделей в большой степени зависят от микроструктурных параметров среды, а большие вариации этих параметров в свою очередь обусловлены, прежде всего, взаимодействием рассеивающих частиц с водяным паром.

В морском аэрозоле, наряду с однородными частицами (ОЧ) и ДЧ, в большом количестве встречаются частицы с плавной радиальной неоднородностью в переходном слое "ядро–оболочка" типа ПС (1). Примером таких частиц, например, могут служить ядра конденсации морских аэрозолей.

Как показано в теоретических работах [Кокорин, 2000, 2003, 2005] при определенных условиях характеристики светорассеяния ПСЧ просветленных сфер могут существенным образом отличаться от аналогичных характеристик ПСЧ, состоящих из ОЧ или ДЧ. Эти различия в зависимости от вариации микрофизических параметров среды могут иногда достигать порядков. Поэтому вполне очевидно, что для объективной интерпретации данных оптического зондирования дисперсных сред необходим учет внутренней структуры таких частиц. Изменение внутренней структуры частиц рассматривается как результат изменения влажности воздуха.

Вопрос о поведении характеристик рассеяния важен для задач атмосферной оптики и некоторых технических приложений. Отметим, что исследование влияния внутренней структуры частиц реального морского аэрозоля на ПМР в приближении полидисперсных систем ПС, насколько нам известно, ранее никем не проводилось.

Примем ряд предположений, упрощающих проведение анализа. Будем рассматривать два наиболее типичных механизма обводнения гигроскопичных частиц морского аэрозоля во влажном воздухе:

- а) укрупнение частиц с частичным растворением сухого ядра (модель ПС);
- б) укрупнение частиц с частичным растворением первоначально сухого ядра (модель ДЧ).

Спектр размеров частиц аэрозоля по размерам будем описывать зависимостью типа Юнге, характерной для естественных аэро- и гидрозолей:

$$f(r) = dN(r) / d(\log r) = c_1 r^{-\nu},$$
$$c_1 = \nu (r_{\min} r_{\max})^{\nu} \left( r_{\max}^{\nu} - r_{\min}^{\nu} \right)^{-1}, \quad (23)$$

где  $r$  – радиус частицы;  $dN(r)$  – число частиц;  $r_{\min}$ ,  $r_{\max}$  – минимальный и максимальный радиусы частиц в системе;  $\nu$  – параметр распределения.

Для заданной относительной влажности  $q$  параметр  $h$  в расчетах принимался постоянным, не зависящим от внешних размеров обводненных частиц. Радиусы ядра  $r_1$ , оболочки  $r_2$ , показатели преломления ядра  $n_1$  ДЧ и ПС принимались равными по величине. При вычислении характеристик ПМС систем ДЧ и

ПС параметр  $n_2$  для последней задавался так, чтобы при заданных геометрических размерах частиц средний по объему показатель преломления  $\bar{n} = \int n dV / V$

ПС был равен показателю преломления ДЧ. Мнимая часть показателя преломления полагалась равной нулю. Это допущение вполне оправдано, так как на рассматриваемой длине волны ( $\lambda = 0,55 \mu\text{m}$ ) поглощение веществ, образующих атмосферных аэрозоль, весьма незначительно.

Рассчитанные для модели ПС характеристики ПМС сравнивались с аналогичными характеристиками для ДЧ. Близость  $f_{33}$  и  $f_{43}$  рассматриваемых моделей оценивалась по величине отношений:

$$\Delta_1(\gamma) = \frac{f_{33}^{\text{ДЧ}}}{f_{33}^{\text{ПС}}}, \Delta_2(\gamma) = \frac{f_{43}^{\text{ДЧ}}}{f_{43}^{\text{ПС}}}. \quad (24)$$

Здесь  $f_{33}^{\text{ПС}}$ ,  $f_{33}^{\text{ДЧ}}$ ,  $f_{43}^{\text{ПС}}$  и  $f_{43}^{\text{ДЧ}}$  – элементы матрицы рассеяния соответственно для моделей ПС и ДЧ частиц.

Для оценки влияния внутренней структуры частиц на ПМС ансамбля гигроскопичных частиц, для двух выше указанных механизмов их обводнения, нами был проведен численный эксперимент. Расчеты проводились в приближении полидисперсных систем двух близких по внутренней структуре частиц ПС и ДЧ.

Значения относительной влажности менялись в следующем диапазоне:

$$q = 0,1 \ (0,01) \ 0,95;$$

$$\nu = 1 \ (0,1) \ 4. \quad (25)$$

Здесь в скобках обозначен шаг для указанного параметра. В расчетах показатель преломления  $n_1$  задавался равным 1,55 и 1,65.

В работе рассматривалась мелкодисперсная фракция аэрозольных частиц ( $a_{\text{min}} = 0,05 \mu\text{m}$  и  $a_{\text{max}} = 8 \mu\text{m}$ ). Она в большинстве случаев определяет оптические характеристики аэрозоля в приводном слое над морем для видимой области спектра.

Как показал анализ данных расчетов, зависимость  $f_{33}^{\text{ПС}}(\gamma)$  при  $\gamma < 130^\circ$  слабо чувствительна к механизму обводнения частиц аэрозоля. При различных условиях расчета рассматриваемых моделей для диапазона параметров (25) характеристика  $f_{33}^{\text{ПС}}(\gamma)$  с погрешностью, не превышающей 6–10 %, может быть аппроксимирована с помощью модели ДЧ со средним по объему показателем преломления.

Вместе с тем, в области углов рассеяния  $135 < \gamma < 170^\circ$  для любого  $\nu$  из (5) различия для  $f_{33}$  весьма существенны.

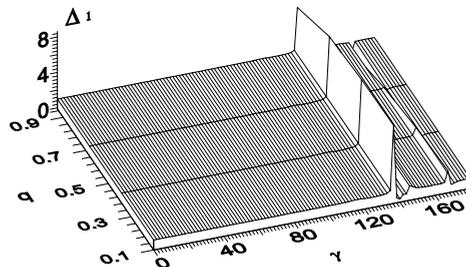


Рис. 1. Угловые зависимости характеристики  $\Delta_1(\gamma, q)$  для полидисперсных систем просветленных и двухслойных сфер, моделирующих фракцию морского аэрозоля:  $n_1 = 1,55$ ,  $\alpha_{\min} = 0,05 \mu m$ ,  $\alpha_{\max} = 8 \mu m$ ,  $v = 4$  при  $\lambda = 0,6328 \mu m$

На рис. 1 представлена характеристика  $\Delta_1$  для случая  $v = 4$ . В интервале углов рассеяния  $\gamma \approx 132-140^\circ$  зависимость  $\Delta_1(\gamma, q)$  имеет узкий максимум ( $5 < \Delta_1 < 8,5$ ), а при  $\gamma \approx 162-170^\circ$  двойной минимум–максимум ( $0,2 < \Delta_1 < 1,8$ ). Характерно, что при увеличении в атмосфере доли крупных аэрозольных частиц типа ПС первый экстремум исчезает. Второй (при  $v \leq 2$ ) превращается в большой максимум ( $6 < \Delta_1 < 10$ ). Отметим также, что с ростом влажности и изменением внутренней структуры аэрозольных частиц величина этого максимума уменьшается.

Угловые зависимости элемента  $f_{43}$  для моделей ПС и ДЧ имеют значительные количественные и качественные различия.

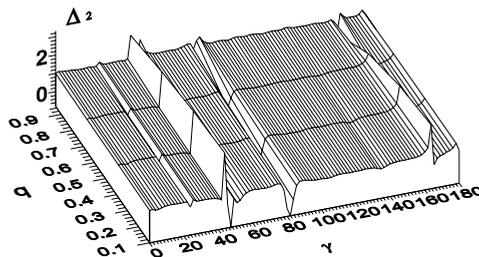


Рис. 2. Угловые зависимости характеристики  $\Delta_2(\gamma, q)$ . Остальные обозначения те же, что и на рис. 1

На рис. 2 представлено типичное для рассматриваемого диапазона параметров (5) поведение зависимости  $\Delta_2(\gamma, q)$ . Как видно из рисунка, даже для узкого распределения, в котором преобладающую роль играют мелкие частицы, можно выделить характерные диапазоны  $\gamma$ , в которых  $\Delta_2(\gamma, q)$  имеет экстремальные значения. Это наиболее глубокий минимум и максимум ( $-0,8 < \Delta_2 < 3,3$ ) в районе углов рассеивания  $\gamma \approx 40-52^\circ$ , а также максимум ( $\Delta_2 \approx 2,3$ ) при  $\gamma \approx 165-178^\circ$ . В диапазоне углов  $\gamma \approx 20-25^\circ$  и  $\gamma \approx 78-85^\circ$  имеются ещё соответственно два характерных минимума ( $\Delta_2 \approx 0,7$  и  $\Delta_2 \approx -0,79$ ). При этом с уменьшением па-

раметра  $\nu$  увеличивается первый и уменьшается второй минимум. Соответственно до  $\Delta_2 \approx -0,9$  и  $\Delta_2 \approx 0,7$  при  $\nu = 2$ .

Таким образом, выше указанные особенности (положение и глубина экстремумов) в поведении зависимостей  $\Delta_1(\gamma, q)$  и  $\Delta_2(\gamma, q)$  могут служить отличительным признаком для рассеяния света ПСЧ с внутренней структурой типа ПС от аналогичных систем с ДЧ.

### Выводы

А. Использование комбинаций цилиндрических функций позволяет упростить решение задачи дифракции света на двухслойной частицы с неоднородным слоем и свести к минимуму накопление ошибок округления. Обеспечивает быструю сходимость и устойчивость амплитудных коэффициентов (18, 19) при вычислении характеристик светорассеяния ПС для больших дифракционных параметров  $\rho$ .

В. Предложенная нами модель ПС является примером возможного получения необходимых сведений о внутренней структуре реальных частиц прибрежного морского аэрозоля в пограничном слое атмосферы, при использовании натуральных измерений характеристик  $f_{33}$  и  $f_{43}$ .

С. Рассмотренные механизмы обводнения гигроскопичных частиц аэрозоля позволили выявить ряд особенностей в поведении ПМС ансамбля ПС. Установлено:

1) неучет радиальной неоднородности структуры аэрозольных частиц может привести при оценке в отдельных диапазонах углов рассеяния характеристик  $f_{33}$  к существенным (более 100 %) погрешностям при интерпретации данных измерений;

2) характеристика  $f_{33}^{\text{ПС}}(\gamma)$  при  $\gamma < 130^\circ$  слабо чувствительна к механизму обводнения частиц аэрозоля.

### Литература

1. *Ватсон Г.* Теория бесселевых функций / Пер. с англ. – М.: ИЛ, 1949. – 893 с.
2. *Воронцов А.А., Мировицкая С.Д.* Новые функции для численного решения электродинамических задач в цилиндрической и сферической системе координат // Радиотехника и электроника, 1989, № 11, с. 2294–2299.
3. *Кокорин А.М., Шифрин К.С.* Влияние влажности на характеристики рассеяния света радиально-неоднородными частицами аэрозоля над морем // Оптический журнал, 2000, т. 67, № 1, с. 55–60.
4. *Кокорин А.М., Шифрин К.С.* Влияние влажности на локационное рассеяние ансамбля малых гигроскопичных неоднородных частиц // Оптический журнал, 2003, т. 70 № 5, с. 62–67.
5. *Кокорин А.М.* Влияние влажности на показатель и коэффициент асимметрии индикатрисы рассеяния света радиально-неоднородными частицами аэрозоля в пограничном слое над морем // Оптический журнал, 2005, т. 72, № 2, с. 14–18.
6. *Kerker M., Kauffman L. H., Farone W.A.* Scattering of electromagnetic waves from two concentric spheres when the outer shell has a variable refractive index // J. Opt. Soc. Amer. 1966, vol. 56, № 8, p. 1053–1056.