Ю.И. Гагарин, К.Ю. Гагарин, В.И. Соколов

ОБОБЩЁННОЕ БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УОЛША-ХААРА

U.I. Gagarin, K.U. Gagarin, V.I. Sokolov

GENERALIZED FAST WALSH-HAAR TRANSFORM

Представлены математические модели синтеза быстрых ортогональных преобразований в базисах, совмещающих свойства Уолша и Хаара-функций.

Ключевые слова: ортогональные преобразования, базисные функции, математические модели, матрица преобразования, сжатие цифровых изображений.

Presented mathematic models of synthesis of fast orthogonal transforms in bases with combined Walsh and Haar functions properties.

Keywords: fast orthogonal transforms, mathematic models, functions of basis, matrix of transform, picture compression

Преобразование Хаара [1] по сравнению с известными ортогональными преобразованиями обладает той особенностью, что анализирующая часть его базисных функций является изменяемой и по длине, и по величине масштабирующего коэффициента. Получение посредством преобразования Хаара как глобальных, так и локальных спектральных оценок, а также наличие быстрых вычислительных алгоритмов нашли применение для сжатия и спектрально-временного анализа одномерных и двумерных цифровых сигналов, включая гидрометеорологические системы наблюдения и прогноза.

Особенности построения преобразования Хаара затрудняло теоретическое обобщение и применение его с другими ортогональными преобразованиями.

В настоящей публикации представлены результаты исследований методов синтеза быстрых алгоритмов и применений ортогональных преобразований, совмещающих свойства Уолша и Хаара-преобразований.

1. Векторно-матричные модели обобщённого дискретного преобразования Хаара.

Известно, что непрерывные базисные функции преобразования Хаара могут быть заданы [2] в виде

$$h(0,0,t)=1, \quad t\in[0,1)$$

$$h(r,m,t)=\begin{vmatrix} 2^{r/2}, & при\ \dfrac{m-1}{2^r}\le t<\dfrac{m-1/2}{2^r} \\ -2^{r/2}, & при\ \dfrac{m-1/2}{2^r}\le t<\dfrac{m}{2^r} \\ 0, & для\, всех\, остальных\, значений\, t, \end{vmatrix} \qquad (1)$$

$$где\, 0\le r<\log_2 N, \quad 1\le m\le 2^r.$$

Посредством дискретизации функций (1) строятся матрицы преобразования Хаара (ПХ). Например, ортогональная матрица ПХ для $N = 8$ имеет вид

$$\chi_8^{(h)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Обобщим функции Хаара (1) следующим образом [3]:

$$\chi(r,m,t) = \left| \begin{matrix} a^{r/k} \\ -a^{r/k} \\ 0 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{при ограничениях на} \\ \text{значения } t, r, m, \text{ указанных} \\ \text{для функций Хаара,} \end{matrix} \qquad (2)$$

$\chi(0,0,t) = 1$; k – целое число,

$a \in R$ либо C ; R – поле вещественных чисел,

C – поле комплексных чисел.

Выполнив переход от функций (2) к дискретным функциям, можно строить матрицы вновь полученного обобщённого преобразования.

В качестве примера приведем ортогональную матрицу обобщённого преобразования Хаара с параметрами $a = 3$, $k = 2$, $N = 8$, полученную на основании выражения (2):

$$\chi_8^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & -\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Для получения ортонормированного векторного пространства строк полученную матрицу домножим на диагональную матрицу нормирующих коэффициентов:

$$D_8^{(1)} = diag(\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{18}}, ..., \frac{1}{\sqrt{18}}).$$

Заметим, что в практике матричных вычислений (например, в компьютерных системах математического моделирования) нормирующий коэффициент используется совместно только с обратной матрицей. Для матриц $\chi_8^{(h)}, \left(\chi_8^{(h)}\right)^{-1}$ преобразования Хаара нормирующим коэффициентом может являться либо $N_0 = \frac{1}{8}$ – для одной из матриц, либо $N_0 = \frac{1}{\sqrt{8}}$ – для обеих матриц.

Ненулевые элементы, одинаковые в каждой из строк матриц преобразования Хаара в поле вещественных чисел, часто называют масштабирующими коэффициентами.

Однако в быстрых алгоритмах умножения вектора на матрицу масштабирующие объединены с нормирующими коэффициентами.

Тогда ортонормированную матрицу χ_8 в поле R можно записать в блочном виде:

$$\chi_8 = D_8 \cdot \hat{\chi}_8 = D_8 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline \multicolumn{8}{c}{diag\{(1-1)\}} \end{pmatrix},$$

$$D_8 = D_8^{(1)} \cdot D_8^{(2)} = diag\left\{\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_4\right\},$$

где $D_8^{(2)} = diag(1,1,\sqrt{3},\sqrt{3},(3)_4)$ *– диагональная матрица маситабирующих коэффициентов;* $(y)_m$ *– повторение в записи m раз элемента y.*

Полученная форма матрицы χ_8 легко может быть обобщена на любые ранее указанные значения параметров a, k и $N = 2^n$. При этом диагональная матрица нормирующих коэффициентов в поле R примет общий вид

$$D_N = diag\left\{\frac{1}{\sqrt{2^n}}, \frac{1}{\sqrt{2^n}}, \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}, \frac{1}{\sqrt{2^{n-1}}}, \left(\frac{1}{\sqrt{2^{n-2}}}\right)_4, \left(\frac{1}{\sqrt{2^{n-3}}}\right)_8, ..., \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)_{2^{n-1}}\right\}, \quad (3)$$

т.е. значения элементов матрицы D_N не зависят от значений параметров a и k.

Тогда матрицу обобщённого дискретного преобразования можно представить в виде произведения двух матриц:

$$\chi_N = D_N \cdot \hat{\chi}_N,$$

где $\hat{\chi}_N$ – ортогональная матрица, элементами которой являются $0, 1, -1$.

2. Матрично-рекурсивные и факторизованные формы быстрых алгоритмов обобщённого преобразования Хаара

Для построения быстрых алгоритмов воспользуемся [3] блочно-матричной рекурсивной формой

$$\tilde{\chi}_{2N} = \begin{pmatrix} \chi_N & \chi_N \\ I_N \cdot a^{n/k} & -I_N \cdot a^{n/k} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $n = \log_2 N$, I_N – единичная матрица.

Блочно-матричная рекурсия (4) является обобщением блочно-матричной рекурсии ДПХ [2] и связана с матрицей χ_N следующим выражением:

$$\chi_N = \left(\tilde{J}_N^{(0)}\right)' \tilde{\chi}_N \, \tilde{J}_N{}', \tag{5}$$

где $\tilde{J}_N^{(0)} = diag(\tilde{J}\ , \tilde{J}_4, ..., \tilde{J}_{N/4}, \tilde{J}_{N/2})$ – блочная матрица инверсных перестановок; $\tilde{J}_N$ – матрица двоично-инверсных перестановок.

Блочно матричную форму [4] приведем к факторизованной форме:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{2N} &= \begin{pmatrix} \chi_N & \chi_N \\ I_N \cdot a^{n/k} & -I_N \cdot a^{n/k} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} I_{N/2} & 0 \\ 0 & I_{N/2}\, a^{\frac{n-1}{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_N & 0 \\ 0 & I_{N/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{N/2} & I_{N/2} \\ I_{N/2} & -I_{N/2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6}$$

Подставляя матричную форму (6) и введя матрицу нормирующих коэффициентов D_N, из выражения (5) получим:

$$\chi_N = D_N \cdot \tilde{J}_N^{(0)\prime} \cdot \tilde{\chi}_N^{(1)} \cdot \tilde{J}'_N, \tag{7}$$

где

$$\tilde{\chi}_N^{(1)} = \begin{pmatrix} \chi_N & \chi_N \\ I_N & -I_N \end{pmatrix}, \quad \tilde{\chi}_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

D_N – матрица нормирующих коэффициентов, определенных выражением (3).

Матрицу обратного обобщенного преобразования можно записать в виде:

$$\tilde{\chi}_N^{-1} = \tilde{J}_N \cdot \tilde{\chi}_N^{(1)'} \cdot \tilde{J}_N^{(0)'} \cdot D_N .$$

На основе блочно-матричной рекурсивной формы (8) строится матрично-факторизованная форма, соответствующая быстрому алгоритму обобщённого преобразования

$$\begin{aligned}\chi_N^{(\phi)} = D_N \left(\tilde{J}_N^{(0)}\right)' diag\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, I_{N-2}\right\}\times\ldots\\ \times diag\left\{\begin{pmatrix}I_{N/4} & I_{N/4}\\ I_{N/4} & -I_{N/4}\end{pmatrix}, I_{N/2}\right\}\times\begin{pmatrix}I_{N/2} & I_{N/2}\\ I_{N/2} & -I_{N/2}\end{pmatrix}\left(\tilde{J}_N\right)'\end{aligned} \qquad (9)$$

По сути, форма (9) соответствует известным быстрым алгоритмам ПХ [2]. Из данной формы легко можно получить быстрые алгоритмы ПХ по Эндрюсу без матриц двоично-инверсных перестановок, если воспользоваться известной [3] пошаговой их заменой четно-нечетных перестановок. На рис. 2 приведен пример векторного ориентированного графа для быстрого алгоритма ПХ длины N = 16.

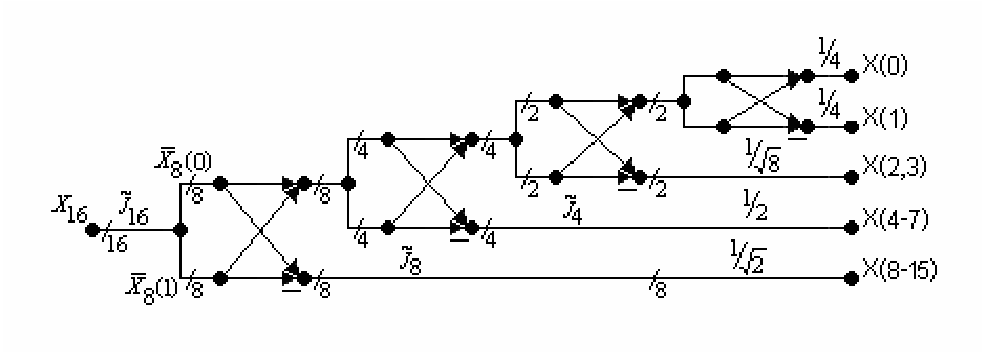

Рис. 1. Векторный граф быстрого прямого преобразования Хаара $N = 16$

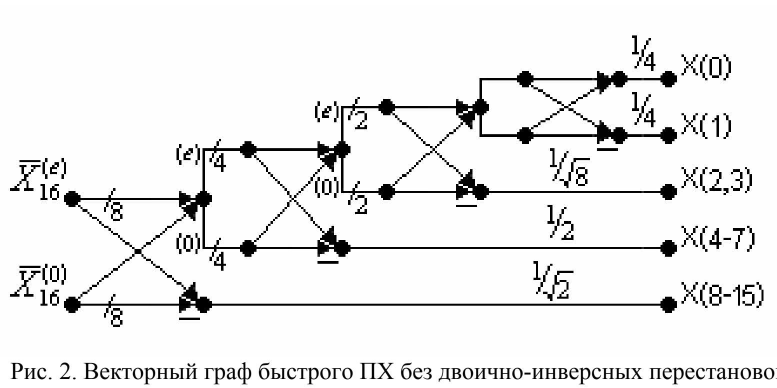

Рис. 2. Векторный граф быстрого ПХ без двоично-инверсных перестановок

Рассматривая матрично-факторизованную форму (9) с позиции сходства с быстрыми алгоритмами дискретных преобразований по прямоугольным функциям Уолша [2], несложно перейти к следующей более обобщённой форме:

$$\chi_N^{(\phi)} = D_N \left(\tilde{\tilde{J}}_N^{(\mu_0)} \right)' diag\left\{A_\mu, I_{N-\mu}\right\} \times \ldots \times \left(A_\mu \otimes I_{N/\mu}\right) \left(\tilde{\tilde{J}}_N^{(\mu)} \right)', \qquad (10)$$

где $A_\mu = A_2^{[\log_2 \mu]}$ – матрица Адамара, $\tilde{J}_N^{(\mu_0)}$ – блоковая матрица μ-ично-инверсных перестановок, $\tilde{J}_N^{(\mu)}$ – матрица μ-ично-инверсной перестановки.

В результате получили (с учётом факторизации A_μ) матрично-факторизованную форму быстрых алгоритмов преобразования Уолша-Хаара по основанию μ. На рис. 3 представлен сигнальный граф быстрого преобразования Уолша-Хаара по основанию четыре для $N = 16$.

Из формул (9) и (10) можно построить псевдогнездовые быстрые алгоритмы двумерного прямого и обратного преобразований:

$$\chi_{N^2}^{(\phi)} = \left(\chi_N^{(\phi)} \otimes \chi_N^{(\phi)}\right) = \left(D_N \otimes D_N\right) \left(\tilde{J}_N^{(0)} \otimes \tilde{J}_N^{(0)} \right) \left(\tilde{\chi}_N^{(\phi)} \otimes \tilde{\chi}_N^{(\phi)} \right) \left(\tilde{J}_N \otimes \tilde{J}_N \right)$$

$$\left(\chi_{N^2}^{(\phi)}\right)^{-1} = \left(\tilde{J}_N \otimes \tilde{J}_N \right)' \left(\tilde{\chi}_N^{(\phi)} \otimes \tilde{\chi}_N^{(\phi)} \right)' \left(\tilde{J}_N^{(0)} \otimes \tilde{J}_N^{(0)} \right)' \left(D_N \otimes D_N\right)'.$$

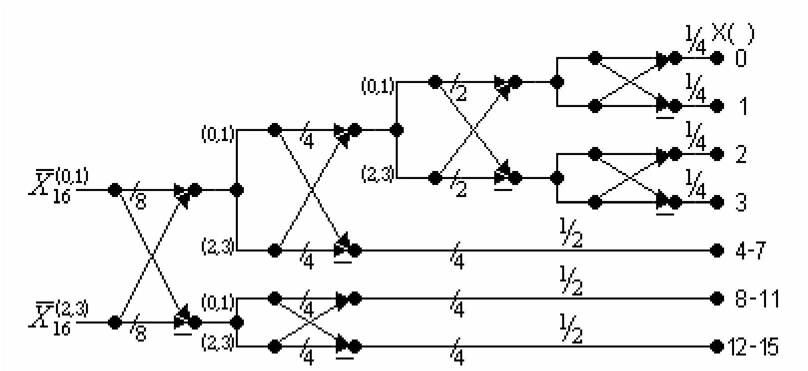

Рис. 3. Векторный граф быстрого Уолша-Хаара преобразования

3. Результаты экспериментальных исследований

Полученный новый тип ортогональных преобразований был исследован в технологиях одноитерационного пофрагментного 8×8 сжатия полутонового неподвижного 256×256 изображения, представленного BMP файлом типа «Лена» (рис. 4).

T1

а

T20+128

б

Рис. 4. *а* – исходное изображение; *б* – восстановленное изображение

Ниже в таблице приведены сравнительные качественные характеристики для различных быстрых ортогональных преобразований: К – коэффициент сжатия; А – количество сложений / пкс; М – количество умножений /пкс; Δ и Δ^2 – средняя и среднеквадратичная ошибки соответственно.

Тип и размер изображения	Алгоритм быстрого преобразования	Коэффициент сжатия К	Кол-во арифметических операций/пикс.		Погрешности восст. изображения	
			А	М	Δ	Δ^2
ВМРфайл «Lena», 256×256	Хаара 8×8	10,5	1,8	2 сдв	2,5	10,5
–«–	Уолша-Хаара по осн.4	10,4	2	1 сдв	2,5	11
–«–	Уолша 8×8	10,5	3	3сдв	2,5	11
–«–	БКП 8×8	13,5	7,25	2,2	2,4	10

Заключение

1. Обобщение блочно-матричных рекурсий, известных для дискретного пребразования Хаара, позволило получить новый тип быстрых преобразований, совмещающих свойства Уолша и Хаара-пребразований.

2. Преимущества применения быстрых Уолша-Хаара-преобразований для сжатия фотографического изображения, продемонстрированного в примере, несложно обобщить на другие виды сигналов, особенно при их обработке в больших объёмах и в условиях реального времени, характерных, например, для гидрометеорологии [5].

Литература

1. *Haar A.* Zur theorie der ortogonalen funktionensysteme. Math. Ann. 69 (1910), 331-371; 71 (1912) 38-53.
2. *Ахмед Н., Рао К.Р.* Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов. – М.: Связь, 1980.
3. *Соколов В.И., Гагарин К.Ю.* Быстрые алгоритмы обобщённых хааро-подобных преобразований // Мат-лы Всеросс. межвуз. конф. «XXXV неделя науки СПбГПУ», 2006, ч. XII, с. 37-39.
4. *Гагарин Ю.И.* Математические модели и алгоритмы быстрых ортогональных преобразований. – СПб.: изд. СПбГТУ, 1999.
5. *Привальский В.Е.* Модели временных рядов с приложениями в гидрометеорологии. – СПб.: Гидрометеоиздат, 1992.