ОКЕАНОЛОГИЯ

В.И. Соколов

ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В АППРОКСИМИРОВАННЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ БАЗИСАХ

V.I. Sokolov

WAVELET TRANSFORM IN APPROXIMATED ORTHOGONAL BASES

В статье представлены результаты исследований методов автоматизированной обработки метеорологических данных на основе аппроксимированных вейвлет-косинусных преобразований. Предлагаемые методы ориентированы на высокоскоростную многомерную обработку сигналов аэрокосмических метеонаблюдений, полученных, например, посредством спутниковых средств атмосферого зондирования.

Ключевые слова: вейвлет-преобразования, ортогональный базис, цифровой сигнал, матрица преобразования, аппроксимированные базисные функции, сжатие, образующий вейвлет.

Results of investigation in automatic methods of meteorologyc data processing based on approximated wavelet-cosine transforms presented. Proposing methods are oriented to multidimensional processing of airspace meteorologyc data obtained by radar, for example.

Key words: multidimensional processing, approximated orthogonal bases, matrix transforms, digital signal.

В последнее время в цифровой обработке сигналов большое внимание уделяется вейвлет-преобразованиям (ВП). Из всего разнообразия ВП наибольшее применение получили дискретные ВП в ортонормированных базисах Хаара и Добеши. Для расширения областей применения ВП в работах [3] предлагалось использовать ВП совместно с другими ортогональными преобразованиями, которые бы по возможности обладали быстрыми вычислительными алгоритмами. Одной из таких областей применения являются системы обработки гидрометеорологических данных, характеризуемых большими объёмами и требующие высокоскоростных и точных вычислительных технологий.

Наряду с другими задачами при обработке гидрометеоданных осуществляется их сжатие, оцениваемое по быстродействию, по величине коэффициента сжатия и по погрешности восстановленного сигнала. Исходя из математических моделей представления дискретных ВП, параметр быстродействия прежде всего определяется количеством арифметических операций и сложностью их реализации.

В настоящей статье приведены математические модели и алгоритмы дискретных ВП в аппроксимированных базисах, где операции общих умножений вещественных чисел заменены на умножения на степени числа два.

1. Обобщённые ортонормированные блочно-диагональные матрицы хааροподобных ВП

Воспользуемся общей формой задания одномерного ВП в блочном векторно-матричном виде:

$$X_N = \psi_N \, \bar{x}_N = \left(\frac{\psi^{(1)}_{N/2,N}}{\psi^{(2)}_{N/2,N}} \right) \bar{x}_N , \tag{1}$$

где $\psi^{(1)}_{N/2,N}$ и $\psi^{(2)}_{N/2,N}$ – блок-матрицы соответственно низкочастотной и высокочастотной половин коэффициентов ВП; X_N – вектор коэффициентов ВП; $\bar{x}_N$ – вектор, соответствующий последовательности отсчетов $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ цифрового сигнала.

Для ВП Хаара матрица (1) может быть представлена в виде

$$\Psi_N = \left(\frac{\Psi^{(1)}_{N/2,N}}{\Psi^{(2)}_{N/2,N}} \right) = \left(\frac{diag\left(h_0^{(1)}, h_1^{(1)}\right)}{diag\left(h_0^{(2)}, h_1^{(2)}\right)} \right),$$

где оператор diag(x) соответствует оператору прямой суммы матриц x.

Для длины $l = 2$ можно построить практически неограниченное количество ортонормированных базисов хаароподобных ВП.

С учётом нормирующего коэффициента матрицу Ψ_N можно привести к виду

$$\Psi_N = K_l \left(\frac{\widehat{\Psi}^{(1)}_{N/2,N}}{\widehat{\Psi}^{(2)}_{N/2,N}} \right), \tag{2}$$

где $\widehat{\Psi}^{(1)}, \widehat{\Psi}^{(2)}$ – матрицы, полученные из матриц $\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}$ посредством вынесения нормирующего коэффициента K_l за скобки. В результате для ВП-Хаара получим матрицу

$$\Psi_N^{(h)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c} diag(1\ \ 1) \\ ------- \\ diag\,(1-1) \end{array} \right),$$

которая позволяет сократить количество умножений при вычислении коэффициентов ВП.

Матричную форму (2) обобщим на произвольную l-длину базового вейвлета и на количество l-матриц-блоков:

$$\Psi_N = K_l \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(\overline{h}_l^{(1)}) \\ ----- \\ \mathrm{diag}(\overline{h}_l^{(2)}) \\ .... \\ \mathrm{diag}(\overline{h}_l^{(l)}) \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где векторы $\overline{h}_l^{(i)}$ заданы в виде базисных функций преобразования Уолша, имеющего быстрые вычислительные алгоритмы.

Рассмотрим, каким образом полученную обобщённую матрично-блоковую форму (3) можно связать с аппроксимированным дискретным косинусным преобразованием (АДКП).

2. Быстрое аппроксимированное дискретное косинусное преобразование

В работе [1] было рассмотрено так называемое *C*-матричное преобразование, основанное на целочисленной аппроксимации переходной матрицы от преобразования по функциям Уолша к ДКП. Использование целочисленной матрицы при реализации АДКП позволяет исключить умножители универсального типа.

Применительно к ВП целочисленную аппроксимацию переходной матрицы рассмотрим для длины преобразования $N = 4$, поскольку для больших длин возрастает погрешность аппроксимации базисных векторов ДКП.

В общем виде T_N-матрицу ДКП можно представить через переходную $\widehat{C}_N$-матрицу и W_N-матрицу преобразования по функциям Уолша с упорядочением по частости

$$\widetilde{T}_N = \widehat{C}_N \cdot \widetilde{W}_N,$$

где ~ – знак двоично-инверсной перестановки строк; $\widehat{C}_N = N^{-1}\widetilde{T}_N\widetilde{W}_N$ – переходная матрица, обладающая блочно-диагональной структурой. Для $N = 4$ имеем матрицу

$$\widehat{C}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}924 & 0{,}383 \\ 0 & 0 & -0{,}383 & 0{,}924 \end{pmatrix}.$$

С соблюдением свойства ортогональности матрицу $\widehat{C}_4$ можно аппроксимировать с помощью матрицы C_4:

$$C_4 = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 12 \end{pmatrix}.$$

С учетом введенной матрицы C_4 и факторизованной формы матрицы $\widetilde{W}_4^{(\phi)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{diag}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ можно записать быстрый алгоритм вычисления коэффициентов 4-точечного АДКП(АДКП4) в следующей матрично-векторной форме:

$$X_4 = \widetilde{J}_4\, C_4 \cdot \widetilde{W}_4^{(\phi)}\, \overline{x}_4\,,$$

где $\overline{x}_4$ – вектор отсчётов цифрового сигнала.

Обратному быстрому АДКП4 соответствует матрично-векторное выражение

$$\overline{x}_4 = \left(\widetilde{W}_4^{(\phi}\right)'\, C_4'\, \widetilde{J}_4\, X_4\,.$$

Реализация умножения вектора на матрицу C_N не вызывает затруднений, т.к. элементами матриц являются числа, умножение на каждое из которых сводится преимущественно к одному сдвигу и сложению.

Исключение составляет реализация операции умножения на нормирующий коэффициент $\frac{1}{13^2}$, который также может быть заменен приближением – множителем, например $\frac{1{,}5}{2^8}$.

3. Блочно-циклическая матричная форма задания ВП

Блочно-циклическая матричная форма является типичной для добеши-подобных ВП, для которых существует ряд характерных ограничений. Например, длина базового вейвлета всегда является чётным числом, а образующий вектор нижней блок-матрицы соответствует инвертированной последовательности компонентов базового вейвлета с через один изменённым знаком. Кроме того, вейвлеты Добеши обладают так называемыми свойствами «исключения моментов» [2]. Так, для образующего 4-компонентного вейвлет-вектора D4 =

$= d_0\, d_1\, d_2\, d_3$ должны соблюдаться условия равенства нулю скалярного произведения инвертированного вектора $\widetilde{D}4 = d_3 - d_2\, d_1 - d_0$ и $\bar{x} = x_0\, x_1\, x_2\, x_3$ -вектора отсчётов цифрового сигнала

1) $d_3 - d_2 + d_1 - d_0 = 0$ при $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 1$; (7)

2) $d_3 - 2d_2 + 3d_1 - 4d_0 = 0$ при $x_1 = 2x_0$, $x_2 = 3x_0$, $x_3 = 4x_0$, $x_0 = 1$.

Для длин l = 4 и l = 6 матрицы ВП-Добеши обычно заданы соответствующими векторами D4 = 0,48296; 0,836516; 0,224143, –0,129409; D6 = 0,33267; 0,80689; 0,459877; –0,135011; –0,085441; 0,035226, для которых можно использовать один из ортонормированных аппроксимированных вариантов. Например, AD4 = 1; 2; 0,5; –0,25; AD6 = 0,5, 0,31; –0,062; –0,125; 0,98, 0,02.

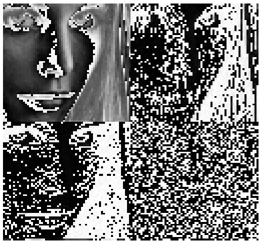
При сравнении качества фильтрации аппроксимированных вейвлетов и их оригиналов следует учитывать также степень загрубления значений компонентов образующего вейвлет-вектора, обусловленную ограниченным количеством двоичных разрядов в их представлении. Компьютерное моделирование показало, что в десятичном эквиваленте количество разрядов должно быть не менее трёх. В противном случае будет нарушено условие обратимости матрицы ВП, вносящее дополнительные погрешности вычислений.

С позиций снижения вычислительных затрат использование аппроксимированных ВП является значительно предпочтительнее, однако для них либо не выполняется условие (7), либо выполняется с определённым приближением. Один из вариантов аппроксимации вейвлета D4, был исследован в двухитерационной вейвлет-технологии сжатия неподвижного чёрно-белого изображения, заданного в виде BMP-файла (рис. 1–6). В таблице приведены сравнительные оценки качества применения различных ВП для итерационного сжатия изображения.

Тип и размер изображения	Базис ВП	Коэффициент сжатия $K_{сж}$	Количество арифметических операций/пкс		Погрешность восстановленного изображения Δ
			A слож.	M умн.	
BMPфайл «Lena», N = 128	АДКП4	1ит. 8 2ит. 9,7	3 3	2 сдв 2 сдв	2,4 3,7
-«-	ПФУ4	1ит. 7,3 2ит 8,6	2 2	1 сдв 1 сдв	2,6 3,7
-«-	AD4	1ит. 3,8 2ит 7	3 3	4 сдв 4 сдв	2,8 3,9
-«-	D4	1ит. 4 2ит 8	3 3	4 4	2,6 3,8

T1

Рис. 1. Исходное изображение



Y

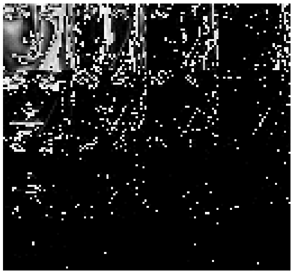
Рис. 2. Изображение в области аппроксимированного D4

Y31

Рис. 3. Сжатое изображение после первой нисходящей итерации

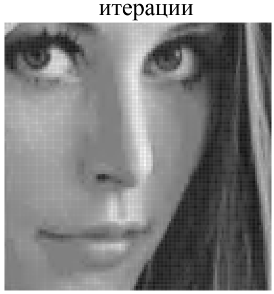
(T20 + 128)

Рис. 4. Восстановленное изображение после первой итерации



Y3

Рис. 5 Сжатое ВП АДКП4 изображение на первой итерации



(T40 + 128)

Рис. 6. Восстановленное изображение после двух-итерационного сжатия

Выводы

По результатам компьютерного моделирования можно сделать следующие выводы:

1) быстрое аппроксимированное 4-точечное косинусное преобразование может быть успешно использовано в многоитерационных технологиях сжатия изображений;

2) аппроксимация 4-точечных вейвлетов Добеши может быть также успешно использована с целью замены операций общих умножений вещественных двоично-кодированных чисел на их сдвиги.

Литература

1. *Соколов В.И., Гагарин К.Ю.* Быстрое аппроксимированное дискретное косинусное преобразование // Мат-лы Всеросс. межвуз. конф. студ. и асп. «XXXIII неделя науки СПбГПУ», 2004, ноябрь, ч. XII, с. 71-72.
2. *Уэлстид С.* Фракталы и вейвлеты для сжатия изображений в действии. – М.: Триумф, 2003.
3. *Hongli Shi, Bo Hu, Jian Qiu Zhang.* A Novel Scheme for the Designof Approximate Hilbert Transform Pairs of Orthonormal Wavelet Bases // Ieee transactions on signal processing, vol. 56, No. 6, June 2008 2289.