

В.В. Коваленко, Е.В. Гайдукова, В.С. Девятков

ФОНОВОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ СУТОЧНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ СТОКОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

V.V. Kovalenko, E.V. Gaidukova, V.S. Devyatov

BACKGROUND FORECASTING OF PROCESS OF FORMATION OF THE DAILY PROBABILITY FLOW CHARACTERISTICS

Рассмотрена методика фонового стохастического прогнозирования с заблаговременностью восемь суток, основанная на использовании системы дифференциальных уравнений для начальных моментов распределения плотности вероятности модулей суточного стока. Оценена степень статистической устойчивости подобного прогнозирования и определено распределение фрактальной размерности суточного стока. Предложен метод делокализации прогностических моделей.

Ключевые слова: стохастические модели, критерий устойчивости, фрактальная размерность.

The technique of background stochastic forecasting with advance of eight day based on use of system of the differential equations for the initial moments of distribution of density of probability modules of a daily flow is considered. The degree of statistical stability of similar forecasting is appreciated and the distribution of fractal dimension of a daily flow is determined. The method of delocalization of forecasting models is offered.

Key words: stochastic models, criterion of stability, fractal dimension.

Введение

(о недостатках прогнозирования по динамическим моделям)

В настоящее время для краткосрочных прогнозов используются либо статистические зависимости предиктора от предиктантов, либо динамические модели в виде дифференциальных уравнений различных порядков. Ближайшим аналогом (прототипом) предлагаемого в настоящей статье метода фонового прогнозирования восьмисуточного хода процесса формирования речного стока является использование обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{k\tau}Q + \frac{\dot{X}}{\tau} \quad (1)$$

(здесь Q – расход воды или модуль стока; k – коэффициент стока; τ – время добега; \dot{X} – интенсивность осадков; t – время) для получения прогностических карт суточных модулей стока на территории, контролируемой Северо-Западным УГМС [2]. Методика основывается на использовании Интернет-ресурсов (сайт www.westwind.ch) – восьмисуточный прогноз хода метеорологических величин, который можно получать практически с любой географической дискретностью.

Осуществляя прогноз по динамической (строго детерминистической) модели (1), мы на каждый момент времени указываем «точное» значение расхода Q_d . Однако «точность» этого прогноза – иллюзия: существует ряд неопределенностей, не учитываемых динамической моделью. Начальное значение $Q(t=0) = Q_0$ никогда достоверно не известно, так как оно получается гидрометрическими методами (косвенными измерениями), имеющими погрешность $\pm \Delta Q$. Прогнозные осадки, взятые из Интернет-ресурсов, – «вещь в себе»: верить им можно еще меньше, чем расходу Q_0 . Ни порядок дифференциального уравнения, ни численные значения коэффициентов k и τ точно не известны. Их определение методом оптимизации лишь минимизирует погрешности, но отнюдь не исключает их. Поэтому при динамическом прогнозировании мы, фактически, имеем не конкретное значение Q_d , а диапазон неопределенности $Q_d \pm \Delta Q$.

Естественно, что в такой ситуации возникает желание делокализовать значение Q_d и вместо равномерного закона распределения плотности вероятности получить более реальный.

Прогноз по стохастической модели

Существует процедура перехода от динамического уравнения (1) к соответствующему стохастическому (тоже детерминистическому, но не «строго») – путем его «зашумления», и к статистически эквивалентному ему уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК). В результате решения последнего получается не «точное» значение Q_d , а распределение плотности вероятности $p(Q_d)$, которое несет в себе гораздо больше информации, чем дельта-функция $\delta(Q - Q_d)$.

На первый взгляд это выглядит довольно парадоксально: с одной стороны локализованное конкретное значение расхода, а с другой – его делокализация в диапазоне от $Q = 0$ до (возможно) $Q \rightarrow \infty$. И тем не менее гораздо «честнее» указать случайное число (т. е. диапазон расходов и вероятность появления тех или иных его значений в этом диапазоне), чем число не случайное, фиксирующее расход Q_d , верить которому нельзя вообще. Все это выглядит как мистика: в модель вводим «дезинформацию» (шумы), а получаем новую более точную информацию (но такова диалектика процесса познания).

В практической гидрологии используют 3–4 момента, которых вполне достаточно, чтобы при ограниченных рядах наблюдений все-таки правильно уловить основные особенности кривой плотности вероятности. Поэтому вместо уравнения ФПК можно использовать аппроксимирующую его систему дифференциальных уравнений для начальных моментов m_i [2]:

$$\begin{aligned} dm_1/dt &= -(\bar{c} - 0,5 G_{\bar{c}})m_1 + \bar{N} - 0,5 G_{\bar{c}\bar{N}}; \\ dm_2/dt &= -2(\bar{c} - 0,5 G_{\bar{c}})m_2 + 2\bar{N}m_1 - 3 G_{\bar{c}\bar{N}}m_1 + G_{\bar{N}}; \\ dm_3/dt &= -3(\bar{c} - 1,5 G_{\bar{c}})m_3 + 3\bar{N}m_2 - 7,5 G_{\bar{c}\bar{N}}m_2 + 3G_{\bar{N}}m_1; \\ dm_4/dt &= -4(\bar{c} - 2 G_{\bar{c}})m_4 + 4\bar{N}m_3 - 4 \cdot 3,5 G_{\bar{c}\bar{N}}m_3 + 6G_{\bar{N}}m_2. \end{aligned} \tag{2}$$

В системе (2) использованы следующие обозначения: $\bar{c} = 1/k\tau = \bar{c} + \tilde{c}$; $N = \dot{X}/\tau = \bar{N} + \tilde{N}$ [здесь \bar{c} , \bar{N} – математические ожидания; \tilde{c} и \tilde{N} – белые шумы с интенсивностями $G_{\tilde{c}}$ и $G_{\tilde{N}}$ и взаимной интенсивностью $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$; k , τ и \dot{X} – см. (1)].

Параметризацию подобной модели можно выполнить по методике, изложенной в учебнике [3]. На рис. 1 представлен иллюстративный пример прогнозирования с использованием системы (2).

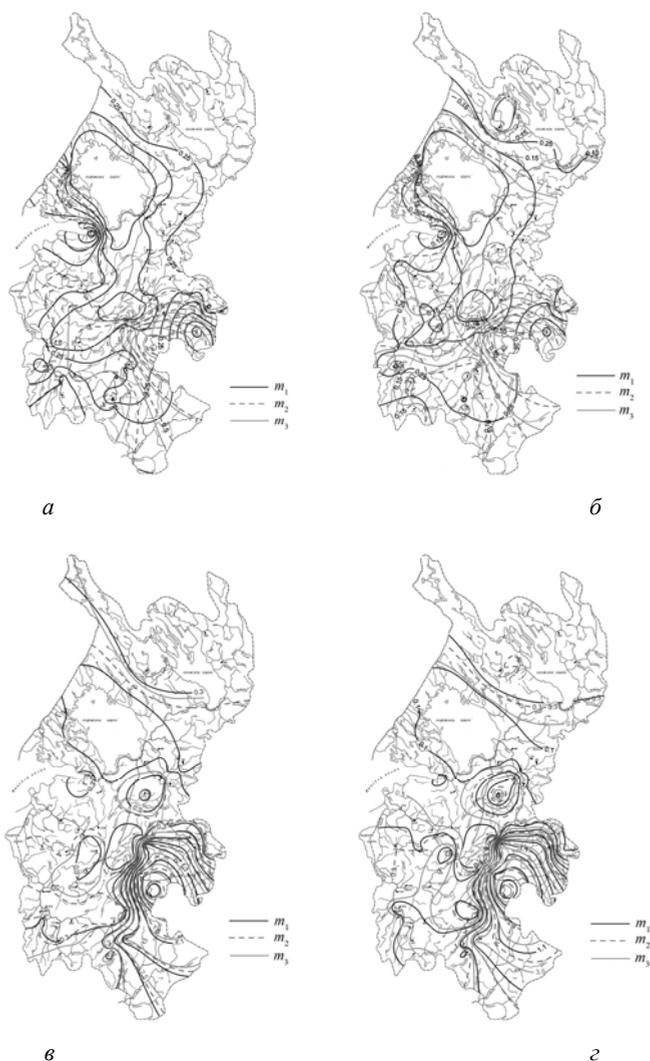


Рис. 1. Эволюция начальных моментов модуля стока по территории Северо-Западного УГМС за восемь суток (через день) при использовании модели (2) как прогностической

Неустойчивость прогнозных моментов плотности вероятности

Делокализация («расползание») δ -функции до распределения плотности вероятности $p(Q)$ имеет ограничения: при $G_{\bar{c}} \rightarrow 2\bar{c}$ моменты распределения теряют устойчивость (сначала старшие моменты, потом младшие, вплоть до потери устойчивости всего распределения в целом). Практически это ощущается в появлении у распределения $p(Q)$ либо полимодальности, либо «толстого хвоста», стремящегося к нулю не по экспоненте (как в случае устойчивых распределений), а степенным образом (неустойчивость по дисперсии).

Ранее (см. [1]) был получен критерий, с помощью которого можно оценивать степень неустойчивости:

$$\beta = (2k \ln r)\tau / \Delta t + 2, \tag{3}$$

где $\beta = G_{\bar{c}} / \bar{c}$; r – коэффициент автокорреляции суточных расходов; Δt – временная сдвигка, при которой берутся значения r .

При $\beta \geq 0,67$ теряет устойчивость момент m_3 (а значит, и коэффициент асимметрии), при $\beta \geq 1 - m_2$ (следовательно – дисперсия), при $\beta \rightarrow 2$ – распределение $p(Q)$ в целом.

Характерные его значения представлены в табл. 1.

Таблица 1

Численные значения критерия устойчивости

Река – пункт	r	k	β	Фрактальная размерность
1	2	3	4	5
Нева – д. Новосаратовка	0,63	0,42	0,01	0,99
Тосна – ст. Тосно	0,96	0,40	1,94	0,75
Асилан-йоки – свх. Застава	0,91	0,41	1,73	0,90
Паша – д. Поречье	0,46	0,50	0,01	1,64
Паша – ниже д. Дуброво	0,68	0,49	0,01	0,80
Паша – с. Часовенское	0,88	0,40	1,20	0,73
Капша – д. Еремина Гора	0,70	0,40	0,58	0,76
Шуя – д. Бесовец	0,87	0,48	0,24	0,75
Сяньга – Чуралахта	0,88	0,46	1,45	0,91
Пяльма – д.Пяльма	0,91	0,50	1,80	–
Водла – д. Харловская	0,98	0,60	1,70	0,69
Сясь – д. Яхново	0,91	0,60	1,09	1,20
Воложба – д. Воложба	0,85	0,30	1,71	0,78
Тихвинка – д. Горелуха	0,83	0,60	1,54	1,94
Пчевжа – д. Белая	0,90	0,42	1,58	1,10
Мста – с. Березовский Рядок	0,95	0,43	1,65	0,92
Мста – пос. Потерпелицы	0,99	0,44	1,89	0,50
Мста – с. Бор	0,98	0,60	1,82	0,45
Мста – д. Девкино	0,99	0,60	1,81	0,47
Шлина – д. Годыши	0,92	0,44	1,62	1,03
Березайка – д. Устье	0,60	0,45	0,01	0,95
Уверь – д. Меглецы	0,98	0,42	1,96	0,73

1	2	3	4	5
Холово – д. Горбуново	0,89	0,43	1,74	1,20
Пола – д. Новый Новосел	0,85	0,45	1,57	0,85
Пола – д. Налючи	0,91	0,47	1,56	1,24
Ловать – г. Великие Луки	0,93	0,77	1,07	–
Ловать – д. Сельцо	0,91	0,83	0,77	1,38
Ловать – г. Холм	0,94	0,81	0,88	1,12
Насва – д. Гороховье	0,92	0,49	1,84	1,42
Кунья – д. Уварово	0,95	0,51	1,72	1,40
Кунья – г. Холм	0,94	0,52	1,70	0,87
Полисть – д. Подтополье	0,85	0,45	1,43	1,002
Шелонь – г. Порхов	0,93	0,48	1,60	0,79
Шелонь – д. Заполье	0,92	0,48	1,48	1,03
Мшага – д. Роглицы	0,90	0,50	1,70	0,18
Луга – д. Луга	0,96	0,49	1,84	0,54
Луга – ст. Толмачево	0,94	0,49	1,33	1,05
Луга – г. Кингисепп	0,93	0,52	1,03	1,07
Оредеж – д. Моровино	0,91	0,50	1,54	0,93
Саба – д. Райково	0,94	0,60	1,24	1,06
Плюсса – с. Плюсса	-0,03	0,41	–	–
Плюсса – д. Брод	0,95	0,41	1,68	1,24
Великая – д. Мельница	0,90	0,68	1,25	–
Великая – г. Опочка	0,80	0,68	0,67	0,90
Великая – д. Селихново	0,94	0,53	1,30	1,05
Великая – д. Гуйтово	0,96	0,53	1,44	0,96
Великая – д. Пятоново	0,96	0,75	1,11	1,01
Исса – д. Визги	0,99	0,64	1,96	0,46
Сороть – д. Осинкино	0,99	0,48	1,97	0,78
Утря – д. Большая Губа	0,85	0,65	0,98	0,52
Лжа – д. Ваньково	0,72	0,63	0,76	–
Череха – д. Сорокина	0,94	0,50	1,67	0,67

По данным этой таблицы была построена карта распределения зон неустойчивости, из которой следует, что существуют районы с неустойчивыми распределениями (по младшим моментам; по старшим моментам распределения неустойчивы практически всегда).

Фрактальная диагностика рядов стока

В рамках частично инфинитной гидрологии [2] существуют возможности моделировать и прогнозировать статистически неустойчивые процессы путем расширения фазовых пространств изучаемых систем. Размерность фазового пространства соответствует числу фазовых переменных x_n [а значит, числу дифференциальных уравнений первого порядка и, следовательно, размерности n распределений $p(x_1, \dots, x_n)$], которые надо применять для устойчивого прогнозирования.

На вопрос, сколько их, дает ответ так называемая фрактальная диагностика.

Ее суть сводится к тому, что по наблюдениям за одной (доступной измерению) фазовой переменной (расходу, в нашем случае) можно судить о числе реальных «участников» процесса формирования стока в речном бассейне. Если изучаемая система находится в процессе развития, то упомянутая выше размерность – дробная, а ближайшее, превосходящее ее целое число указывает на размерность линейной системы дифференциальных уравнений, позволяющих устойчиво описывать процессы в этой системе (а значит и делать устойчивые прогнозы). Методика фрактального диагностирования применительно к гидрологии описана в работах [1, 3], а результаты ее применения для суточных расходов в летне-осенний период для рассматриваемой территории – в последней колонке табл. 1 и на рис. 2.

Наличие регионов с размерностью пространства вложения больше единицы указывает на необходимость делегализации фазовых пространств бассейнов, расположенных в этих регионах.

Природа дополнительных фазовых переменных такова, что (как увидим ниже) точность фонового прогноза стока определяется не только физико-географическими факторами (распределение осадков и характер подстилающей поверхности), но и более глубоким (гидравлическим) уровнем детализации, связанным с особенностями гидрометрического учета речного стока.

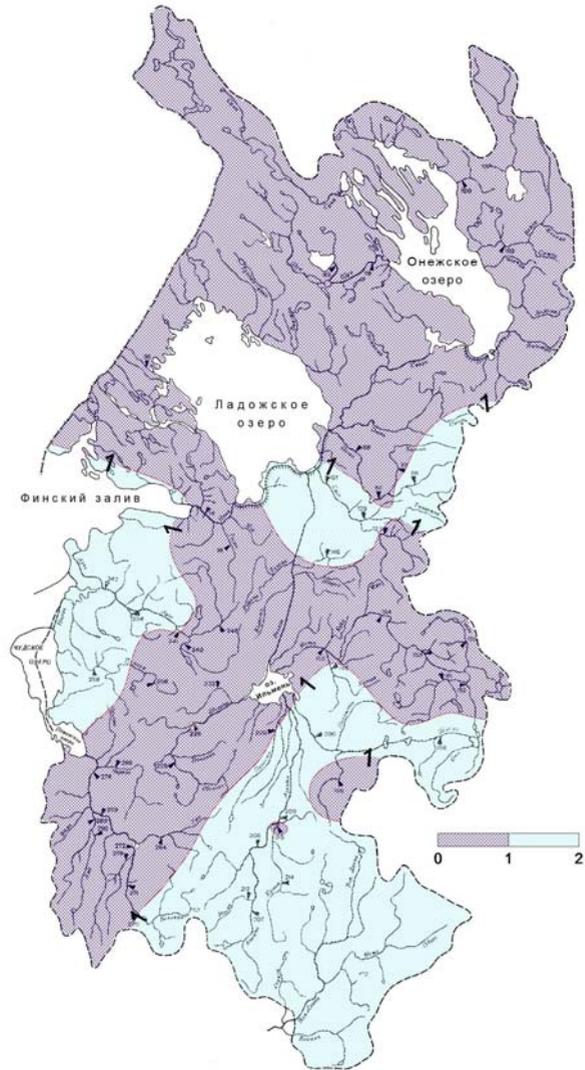


Рис. 2. Распределение размерности пространства вложения (карта построена по рядам суточных расходов за летне-осенний период 1980 г.)

Расширение фазового пространства

Какова природа второй фазовой переменной? Рационального (выводимого однозначно из каких-либо представлений) ответа не существует. Чтобы ответить на этот вопрос, надо подключить интуицию, опыт, творческое воображение, умозрительные рассуждения и т. д. (т. е. неформализуемые «действия»). Возможны, видимо, два варианта ответа на этот вопрос.

1. Расширим модель (1) до двухъёмкостной [1]:

$$\tau_2 \frac{d^2 Q}{dt^2} + \left(\frac{\tau_2}{k\tau_1} + 1 \right) \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{k\tau_1} Q = \frac{1}{\tau_1} \dot{X}, \quad (4)$$

где τ_2 – параметр релаксации вновь введенной ёмкости.

Уравнение (4) сводится к системе из двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dU_1}{dt} - U_2 &= 0; \\ \tau_2 \frac{dU_2}{dt} + \left(\frac{\tau_2}{k\tau_1} + 1 \right) U_2 + \frac{1}{k\tau_1} U_1 &= \frac{1}{\tau_1} \dot{X}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $U_1 = Q$; $U_2 = dQ/dt$.

Ёмкости ведут себя как «генераторы» процесса изменения расхода в выходном створе бассейна и каждая из них «задумывается», как реагировать на внешнее воздействие с разным временем релаксации τ_i . Если природа второй фазовой переменной именно в этом, то тогда не надо ничего особенно и выдумывать: уравнения (4) достаточно для моделирования и прогнозирования процесса многосуточного изменения речного стока. Уравнение ФПК для системы (5) имеет вид (уравнение записано при отсутствии мультипликативных шумов):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial U_1} (A_1 p) - \frac{\partial}{\partial U_2} (A_2 p) + 0,5 \frac{\partial}{\partial U_2^2} (B_2 p), \quad (6)$$

где коэффициенты сноса A и диффузии B определяются формулами: $A_1 = U_2$;

$$A_2 = (c_2 U_1 + c_1 U_2 + \bar{N}); \quad B_1 = 0; \quad B_2 = G_{\bar{N}}; \quad c_1 = \left(\frac{1}{k\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right); \quad c_2 = \frac{1}{k\tau_1 \tau_2};$$

$$\bar{N} = \frac{\dot{X}}{\tau_1 \tau_2}; \quad p = p(U_1, U_2).$$

Разумеется, вероятностная делокализация в этом случае усложняется, но в принципе прогнозировать двумерное распределение $p(Q, \dot{Q})$ (или его моменты) возможно.

2. Второй вариант ответа ведет к более «тяжелым» последствиям с точки зрения практической реализации методики прогнозирования (возможен еще и

третий вариант как синтез первого и второго). Вспомним, как организован гидрометрический учет стока на гидрологической сети наблюдений. По непосредственно измеренным в течение года расходам воды в створе (этих измерений, как правило, не больше пятидесяти) находится зависимость расхода от уровня H $Q = f(H)$, которая является основой для получения ежедневных значений расходов (либо непосредственно по измеряемым уровням, либо с привлечением дополнительной информации при зарастании, русловых деформациях, ледовых явлениях, переменных подпорах).

Если говорить о прогнозах летне-осенних паводков (как, впрочем, и половодий), то основной причиной неоднозначности связи $Q = f(H)$ является неустановившийся и неравномерный характер движения воды в реках, а также влияние инерционности на гидравлические сопротивления.

Можно показать (см. [2, 3]), что в этом случае расход зависит не только от уровня H , но и его производных по времени H_t и расстоянию H_x : $Q = f(H, H_t, H_x)$. Так, для прямых волн (это наиболее распространенная ситуация в практике краткосрочного прогнозирования) производные H_t и H_x коррелируют, то в гидрометрии уже достаточно давно используют графики $Q = f(H, I)$, где $I = -H_x$. Причем для плавного неустановившегося движения (именно этот тип движения наиболее распространен) вполне допустима пространственная делокализация: $I \approx (H_2 - H_1)/L$, где H_1 и H_2 – уровни воды в створах, удаленные на расстоянии L друг от друга.

Одна из возможных ситуаций, когда достаточно просто уйти от чисто гидравлического уровня описания, представлена на рис. 3. Предположим, что на замыкающем гидростворе (г/с) 1 большого водосбора связь расходов и уровней близка к однозначной (бассейн, в силу своих размеров, сглаживает резкие колебания гидравлических характеристик). В то же время на г/с 2 ощущается влияние подпора от г/с 1. Так как мы прогнозируем процесс изменения расходов на восемь суток, то измерительная информация об уровнях (или других гидравлических характеристик) нам неизвестна, но известны (приблизительно из прогнозов) расходы в г/с 1 и 2. Поэтому семейство кривых $Q = f(H, I)$ можно заменить на семейство $H_2 = f(Q_2, \alpha)$, где $\alpha = Q_1 - Q_2$. Чем меньше α , тем меньше влияние створов друг на друга; в равномерном режиме всегда $\alpha > 0$, так как расходы с увеличением водосборной площади увеличиваются. В течение прогнозируемого периода осадки могут перераспределяться по бассейнам, вызывая большее или меньшее взаимодействие между г/с 1 и 2 (переменный подпор).

Из рассмотрения данной ситуации следует, что прогнозный расход равен расходу, определенному по кривой равномерного режима (при $\alpha = \alpha^*$) только при $Q_1 - Q_2 \rightarrow \alpha^*$. В противном случае он определяется не только уровнем H_2 , но и величиной α . В этой ситуации фрактальная размерность ряда измеренных расходов будет находиться между 1 и 2 (а в случае, если сток формируется двухъемкостной моделью – между 2 и 3).

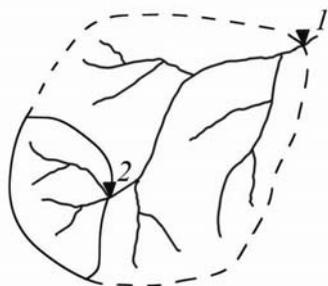


Рис. 3. Пример географической локализации предметной области путем пространственной делокализации уклона водной поверхности

Таким образом, для устойчивого прогноза в этой ситуации (в ситуации неустойчивости при выходе фрактальной размерности прогнозируемого ряда за пределы топологической) надо иметь эмпирически установленное семейство $H_2 = f(Q_2, \alpha)$ и прогнозные значения Q_1 и Q_2 . Чтобы спрогнозировать уровень H_2 (от которого зависит площадь затопления), надо просто одновременно иметь прогноз по обоим створам.

Для того чтобы перейти к вероятностным прогнозам, надо использовать двумерное уравнение ФПК для $p(Q_1, Q_2)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial Q_1}(A_{Q_1}p) - \frac{\partial}{\partial Q_2}(A_{Q_2}p) + 0,5 \frac{\partial^2}{\partial Q_1^2}(B_{Q_1}p) + \\ & + 0,5 \frac{\partial^2}{\partial Q_1 Q_2}(B_{Q_1 Q_2}p) + 0,5 \frac{\partial^2}{\partial Q_2^2}(B_{Q_2}p), \end{aligned} \quad (7)$$

где $A_{Q_1}, A_{Q_2}, B_{Q_1}, B_{Q_1 Q_2}, B_{Q_2}$ – коэффициенты сноса и диффузии.

Решая (7), мы находим эволюцию совместного распределения прогнозных расходов в двух взаимодействующих створах, а значит, можем дать прогноз плотности вероятности затопления $p(H_2)$ [для прогноза реальной площади затопления $F_{зат}$ в районе г/с 2 надо иметь морфометрическую зависимость $F_{зат} = f(H_2)$].

При решении (7) мы «стартуем» с начального асимметричного «колокольчика» $p(Q_1, Q_2; t_0)$, который со временем будет смещаться в пространстве фазовых переменных $(Q_1, Q_2; t)$, но главное – делокализовываться в нем за счет параболических свойств (7). Эта делокализация – естественное следствие потери начальной информации о расходах Q_1 и Q_2 . Если при использовании графика $H_2 = f(Q_2, \alpha)$ ориентироваться на модальные прогнозные значения Q_1 и Q_2 и прогнозировать «модальное затопление территории» (т. е. наиболее вероятное), то диффузионными членами в (7) можно пренебречь (по крайней мере, в первом приближении). В этом случае мы приходим к дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial Q_1}(A_{Q_1} p) - \frac{\partial}{\partial Q_2}(A_{Q_2} p), \quad (8)$$

решение которого сводится к решению системы характеристических уравнений.

На рис. 4 дан иллюстративный пример прогноза $p(Q_1, Q_2; t)$. Распределение быстро («быстрота» зависит от интенсивностей шумов G_{ζ_1} и G_{ζ_2}) релаксирует к δ -функции, одновременно перемещаясь по фазовой плоскости (Q_1, Q_2) в зависимости от эволюции прогнозного поля осадков.

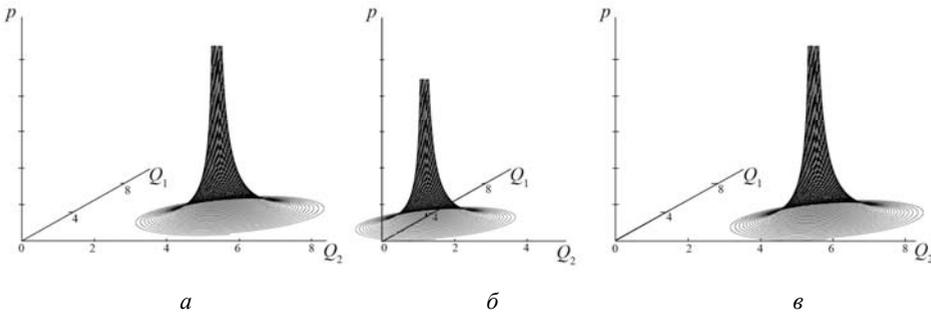


Рис. 4. Пример прогноза эволюции двумерного распределения $p(Q_1, Q_2; t)$ (а, б, в)

Выводы

В статье предложена методика, позволяющая в перспективе прогнозировать с восьмисуточной заблаговременностью случайные процессы затопления обширных территорий. Для ее реализации необходим метеорологический восьмисуточный прогноз изменения осадков и температуры воздуха (в случае прогнозирования весеннего половодья), стандартные сетевые гидрометеорологические наблюдения и детальное знание топографии рассматриваемых территорий, включая морфометрические зависимости в гидростворах рек.

В статье конкретно:

1) проиллюстрирована методика фонового стохастического прогнозирования с заблаговременностью восемь суток, основанная на использовании системы дифференциальных уравнений для начальных моментов распределения плотности вероятности модулей суточного стока на территории Северо-Западного УГМС. Оценена степень статистической устойчивости подобного прогнозирования и определено распределение фрактальной размерности суточного стока, результаты которой указывают, что для устойчивого прогнозирования часто достаточно ограничиться системами дифференциальных уравнений второго порядка;

2) предложен метод децентрализации (по и фазовым пространствам) прогностических моделей, позволяющий определять эволюцию двумерных распределений плотности вероятности на основе только стандартных наблюдений за уровнем воды на постах сети гидрологических наблюдений.

Литература

1. Коваленко В.В. Частично инфинитная гидрология. – СПб.: РГГМУ, 2007. – 230 с.
2. Коваленко В.В. Нелокальная гидрология. – СПб: РГГМУ, 2010. – 96 с.
3. Коваленко В.В., Викторова Н.В., Гайдукова Е.В. Моделирование гидрологических процессов: Учебник. Изд. 2-е, испр. и доп. – СПб.: РГГМУ, 2006. – 559 с. (первое издание: Коваленко В.В. Моделирование гидрологических процессов. – СПб.: Гидрометеиздат, 1993. – 256 с.).

Работа выполнена при финансовой поддержке мэрии Санкт-Петербурга (грант № 196/08) и частично – Министерства высшего образования и науки РФ в рамках НИР, выполняемых по единому наряд-заказу и проектам № 2.1.1/3355, № П2588, № П740.