

## ОКЕАНОЛОГИЯ

*К.Е. Сазонов*

### ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ТРОСА ДЛЯ БУКСИРОВКИ ЗАБОРТНОГО ОКЕАНОГРАФИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

*К.Е. Sazonov*

### OPTIMUM DESIGN OF CABLE FOR TOWING THE OCEANOGRAPHIC EQUIPMENT

*Представлено решение задачи об оптимальном проектировании кабель-троса для буксировки забортного океанографического оборудования. Оптимизация диаметра троса осуществляется на основе использования принципа равнопрочности конструкции, который выражается в требовании постоянства натяжения троса в каждой его точке. Предложена процедура подбора диаметров состоящего из нескольких кусков троса.*

*Ключевые слова: принцип равнопрочности, кабель-трос, натяжение, диаметр, дифференциальные уравнения.*

*The solution for the problem of optimum design of umbilical cable for towing the oceanographic equipment is presented. The cable diameter is optimized on the basis of uniform structural strength principle expressing the requirement that the constant tension of the cable must be maintained at each of its points. The procedure for selecting the diameters of the cable consisting of several pieces is suggested.*

*Key words: uniform strength principle, umbilical cable, tension, cable diameter, differential equations.*

Оптимальное проектирование конструкций представляет собой обратную задачу механики деформируемого тела [3]. При оптимальном проектировании по заданному распределению напряжений и деформаций необходимо найти удовлетворяющую этому заданию форму конструкции. Обычно решение обратной задачи более сложное, чем решение прямой. Однако в оптимальном проектировании существуют подходы, позволяющие в простейших случаях свести проектирование к строго поставленным математическим задачам. Один из таких подходов базируется на эвристическом *принципе равнопрочности*.

Этот принцип целесообразно использовать, когда большинство геометрических параметров конструкции примерно известно и необходимо определить оставшиеся неизвестными геометрические параметры. Принцип равнопрочности позволяет в этом случае свести проектирование к некоторой прямой математической задаче относительно оставшихся неопределенных геометрических

параметров. При использовании принципа равнопрочности принимаются следующие допущения.

1. Конструкция сделана из надежного материала и не содержит опасных дефектов металлургического или технологического происхождения, не обнаруженных методами неразрушаемого контроля.

2. Конструкция работает в условиях, исключающих появление и опасное развитие в ней эксплуатационных трещин за время эксплуатации.

3. Считается, что локальное разрушение приводит к разрушению или потере работоспособности конструкции в целом.

Конструкция, удовлетворяющая требованиям 1–3 называется равнопрочной. Разрушение такой конструкции, если она будет спроектирована и построена, при превышении нагрузкой критического значения начинается одновременно во всех точках конструкции. Материал в такой конструкции работает равномерно. Можно показать, что выполнение принципа равнопрочности обеспечивает проектирование конструкции с минимальным весом, из всех возможных конструкций, выдерживающих заданные нагрузки.

Рассмотрим возможность применения принципа равнопрочности при выборе троса для буксировки забортного океанографического оборудования. Схема буксировки носителя аппаратуры и принятая система координат представлены на рис. 1.

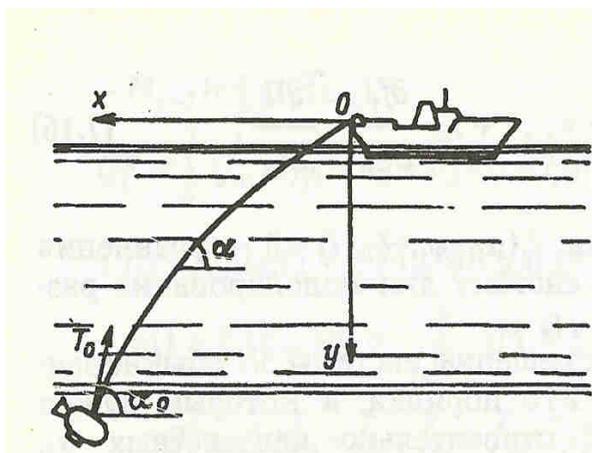


Рис. 1. Схема буксировки носителя аппаратуры

Решение задачи о равновесии кабель-троса в плоскопараллельном потоке в стационарной постановке описывается следующей системой дифференциальных уравнений [2]:

$$T \frac{d\alpha}{ds} - \frac{c\rho Dv^2}{2} \sin \alpha + p \cos \alpha = 0; \quad (1)$$

$$\frac{dT}{ds} + \frac{c\rho Dv^2}{2} \cos \alpha + p \sin \alpha = 0; \quad (2)$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha; \quad (3)$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \alpha, \quad (4)$$

где  $T$  – натяжение троса;  $\alpha$  – угол наклона троса к горизонтالي;  $c$  – коэффициент лобового гидродинамического сопротивления троса  $c = 1,1$ ;  $\rho = 1020 \text{ кг/м}^3$  – плотность воды;  $D$  – диаметр троса, м;  $v$  – скорость буксировки, м/с;  $p$  – погонный вес кабель-троса, Н/м;  $s$  – текущая длина дуги троса (при  $x = 0 \Rightarrow s = 0$ ). Полная длина троса обозначена  $l$ . Система уравнений (1)–(4) получена в предположении, что гидродинамическая нагрузка, приложенная к элементу троса, направлена по скорости набегающего потока.

Граничные условия задаются в следующем виде, используя параметрическое описание функций, в качестве параметра выбирается текущая длина дуги троса:

$$T(l) = T_0, \quad \alpha(l) = \alpha_0, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 0. \quad (5)$$

Величины  $T_0$  и  $\alpha_0$  определяются расчетным путем или при проведении модельных испытаний подводных носителей аппаратуры в опытовых бассейнах или аэродинамических трубах [3]. В данной работе предполагается, что эти величины заданы.

В случае, когда величиной погонного веса кабель-троса можно пренебречь, система (1)–(5) допускает аналитическое решение прямой задачи, в которой определяются форма троса, а также действующее в нем натяжения. При решении считается, что диаметр троса постоянен.

В данной работе задача оптимального проектирования кабель-троса также решается в предположении  $p = 0$ .

Принцип равнопрочности означает для системы (1)–(5) выполнение следующего равенства в каждой точке троса:

$$T = \frac{\sigma_B}{n} \frac{\pi D^2}{4}, \quad (6)$$

где  $n$  – коэффициент запаса,  $\sigma_B$  – временное сопротивление троса.

Таким образом, для при оптимальном проектировании троса необходимо решить обратную задачу и определить характеристики троса трос, удовлетворяющие условию равнопрочности (6). Другими словами, необходимо найти зависимость диаметра троса от текущей длины троса. Подставив (6) и (3) в уравнение (2), получим:

$$\frac{\sigma_B}{n} \frac{\pi}{2} D dD + \frac{c\rho Dv^2}{2} dx = 0. \quad (7)$$

Решением этого уравнения будет выражение:

$$D = -\frac{nc\rho v^2}{\pi\sigma_B}x + C. \quad (8)$$

Произвольная постоянная  $C$  определяется из условия:  $s = l$   
 $T = T_0 \Rightarrow D_0 = \sqrt{\frac{4nT_0}{\pi\sigma_B}}.$

$$C = \sqrt{\frac{4nT_0}{\pi\sigma_B}} + \frac{nc\rho v^2}{\pi\sigma_B}x(l). \quad (9)$$

Окончательно зависимость для диаметра троса может быть записана следующим образом:

$$D = \sqrt{\frac{4nT_0}{\pi\sigma_B}} + \frac{nc\rho v^2}{\pi\sigma_B}[x(l) - x(s)] = A - Bx(s);$$

$$B = \frac{nc\rho v^2}{\pi\sigma_B}; \quad (10)$$

$$A = \sqrt{\frac{4nT_0}{\pi\sigma_B}} + Bx(l).$$

Продифференцировав выражение (3) по  $s$ , в результате получим:

$$\frac{x''}{-\sin \alpha} = \frac{d\alpha}{ds}. \quad (11)$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по  $s$ . Подставим выражения (4), (10) и (11) в уравнение (1).

$$\frac{\sigma_B}{n} \frac{\pi}{4} Dx'' + \frac{c\rho v^2}{2} y'^2 = 0. \quad (12)$$

Для преобразования этого уравнения воспользуемся основным тригонометрическим тождеством  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  и уравнениями (3) и (4). В итоге получим дополнительное уравнение:

$$x'^2 + y'^2 = 1. \quad (13)$$

Исключая из выражений (12) и (13)  $y'$ , получим дифференциальное уравнение:

$$(A - Bx)x'' + 2B(1 - x'^2) = 0. \quad (14)$$

Введем замену  $x' = \xi$ ,  $x'' = \frac{d\xi}{dx} \frac{dx}{ds} = \xi \frac{d\xi}{dx}$  и поделим уравнение на  $\xi$ .

При этом из рассмотрения исключается решение  $\xi = 0$ , которое соответствует постоянству координаты  $x$ . Это решение описывает кабель-трос, опускающийся вертикально вниз. Ясно, что при наличии скорости буксировки такое решение

не может быть реализовано. В результате этих преобразований получается уравнение:

$$(A - Bx) \frac{d\xi}{dx} + \frac{2B}{\xi} (1 - \xi^2) = 0, \quad (15)$$

которое может быть решено методом разделения переменных. Решение этого уравнения может быть записано следующим образом:

$$\frac{1}{2B} \ln |1 - \xi^2| = \frac{1}{B} \ln |A - Bx| + \ln C_1. \quad (16)$$

Выражения, стоящие под знаком модуля в левой и правой частях равенства, по своему физическому смыслу всегда положительны, поэтому выражение (16) может быть переписано без знаков модуля. Разрешив это выражение относительно  $\xi$ , в результате получим:

$$\xi = \sqrt{1 - C_1^2 (A - Bx)^2} = \frac{dx}{ds} = \cos \alpha. \quad (17)$$

Из этого выражение легко может быть получена произвольная постоянная

$$C_1 = \frac{\sin \alpha_0}{A - Bx(l)} = \sin \alpha_0 \sqrt{\frac{\pi \sigma_B}{4nT_0}}. \quad (18)$$

Выражение (17) может быть проинтегрировано для нахождения зависимости  $x = x(s)$ .

$$s = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha_0 \frac{(A - Bx)^2}{(A - Bx(l))^2}}} + C_2 = -\frac{A - Bx(l)}{B \sin \alpha_0} \arcsin \left[ \frac{\sin \alpha_0}{A - Bx(l)} (A - Bx) \right] + C_2. \quad (19)$$

Постоянная интегрирования  $C_2$  определяется из условия при  $s = 0 \quad x = 0$ .

$$C_2 = \frac{1}{BC_1} \arcsin AC_1. \quad (20)$$

Выполнив промежуточные выкладки, в результате получаем зависимости  $x = x(s)$  и  $x' = x'(s)$  в явном виде:

$$x = \frac{1}{BC_1} \left\{ AC_1 [\cos(BC_1 s) - 1] + \sqrt{1 - A^2 C_1^2} \sin(BC_1 s) \right\}; \quad (21)$$

$$x' = AC_1 \sin(BC_1 s) + \sqrt{1 - A^2 C_1^2} \cos(BC_1 s). \quad (22)$$

Неопределенное ранее значение величины  $x(l)$  можно найти из уравнения (21), положив в нем  $s = l$ .

Для уменьшения объемов расчетов перейдем к безразмерным координатам  $\bar{x}$  и  $\bar{s}$ .

$$\bar{x} = x \sqrt{\frac{\pi \sigma_B}{4nT_0}}, \quad \bar{x}_l = x(l) \sqrt{\frac{\pi \sigma_B}{4nT_0}}, \quad \bar{s} = s \sqrt{\frac{\pi \sigma_B}{4nT_0}}. \quad (23)$$

В результате выражение (21) при  $s = l$  преобразуется к виду:

$$\bar{x}_l = \frac{1}{B \sin \alpha_0} \times \left\{ (1 + B \bar{x}_l) \sin \alpha_0 [\cos(B \sin \alpha_0 \bar{l}) - 1] + \sqrt{1 - (1 + B \bar{x}_l)^2 \sin^2 \alpha_0} \sin(B \sin \alpha_0 \bar{l}) \right\}. \quad (24)$$

Из этого выражения следует, что безразмерная абсцисса конца троса  $\bar{x}_l$  зависит от трех безразмерных параметров – безразмерной длины троса  $\bar{l}$ , угла  $\alpha_0$  и комплекса  $B = \frac{nc\rho v^2}{\pi \sigma_B}$ . Уравнение (24) сводится к обыкновенному квадратному алгебраическому уравнению, что дает возможность рассчитать безразмерную абсцисса конца троса  $\bar{x}_l$  в зависимости от указанных параметров:

$$\bar{x}_l^2 + \bar{x}_l \frac{2}{B} \left\{ \sin^2(B \sin \alpha_0 \bar{l}) - \cos(B \sin \alpha_0 \bar{l}) [\cos(B \sin \alpha_0 \bar{l}) - 1] \right\} + \frac{1}{B^2} \left\{ [\cos(B \sin \alpha_0 \bar{l}) - 1]^2 + \sin^2(B \sin \alpha_0 \bar{l}) \left( 1 - \frac{1}{\sin \alpha_0} \right) \right\} = 0. \quad (25)$$

Результаты расчетов  $\bar{x}_l$  представлены на рис. 2–5.

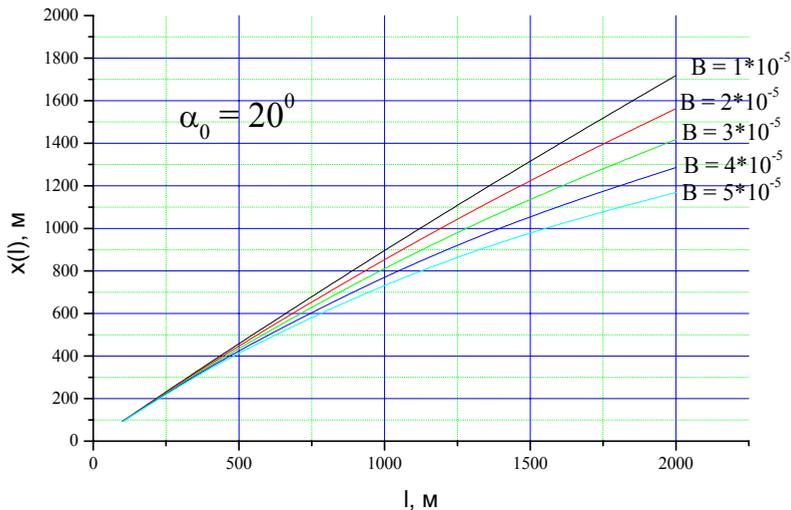


Рис. 2. График для определения абсциссы конца троса  $\alpha_0 = 20^0$

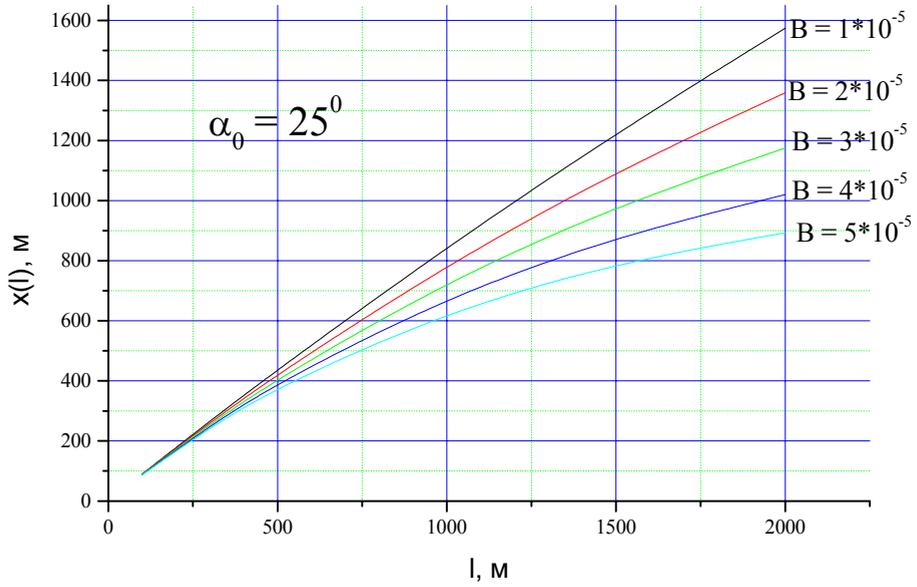


Рис. 3. График для определения абсциссы конца троса  $\alpha_0 = 25^\circ$

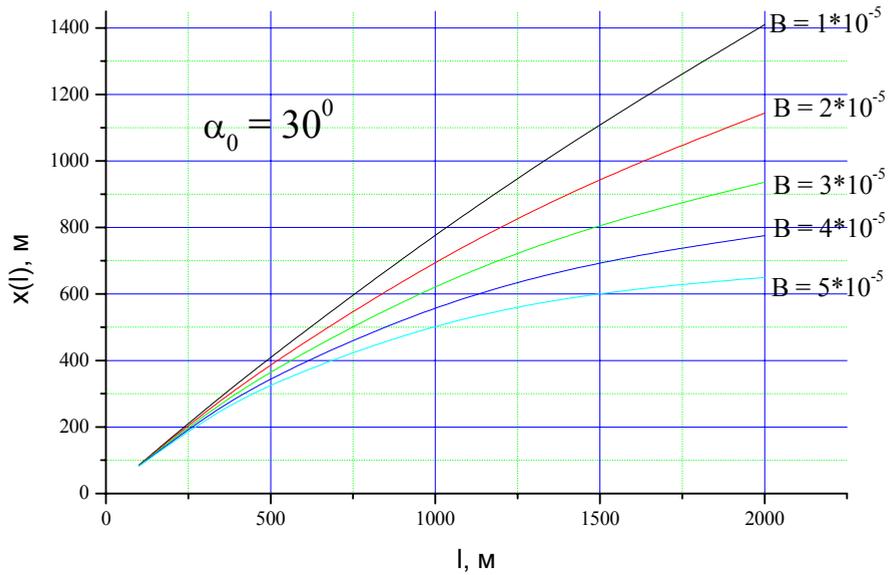


Рис. 4. График для определения абсциссы конца троса  $\alpha_0 = 30^\circ$

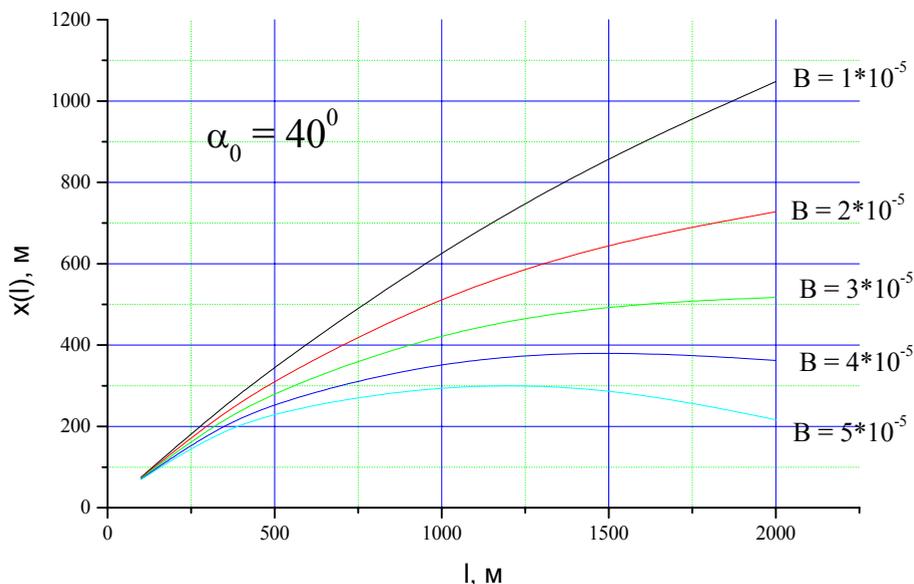


Рис. 5. График для определения абсциссы конца троса  $\alpha_0 = 40^0$

Подставив выражение (22) в уравнение (13) и проведя необходимые преобразования, получим расчетные выражения для нахождения зависимости  $y = y(s)$ .

$$y = \int \sqrt{1 - \left[ AC_1 \sin(BC_1s) + \sqrt{1 - A^2C_1^2} \cos(BC_1s) \right]^2} ds + C_3. \quad (26)$$

Этот интеграл легко вычисляется:

$$y = \int \cos(BC_1s + \arccos AC_1) ds + C_3 = \frac{1}{BC_1} \sin(BC_1s + \arccos AC_1) + C_3. \quad (27)$$

Произвольная постоянная  $C_2$  может быть найдена из условия при  $s = 0$ ,  $y = 0$ .

$$C_3 = -\frac{\sqrt{1 - A^2C_1^2}}{BC_1}. \quad (28)$$

Зависимость  $\alpha = \alpha(s)$  может быть определена с помощью, например, формул (4), (27) и (28). Таким образом, задача оптимального проектирования кабель-троса решена полностью.

Распределение диаметра троса по его длине определим, подставив в формулу (10) выражение (21):

$$D = A - \frac{1}{C_1} \left\{ AC_1 [\cos(BC_1s) - 1] + \sqrt{1 - A^2 C_1^2} \sin(BC_1s) \right\} \quad (29)$$

Результаты расчетов по этой формуле зависимости  $D = D(s)$  для троса длиной  $l = 500$  м,  $B = 3 \cdot 10^{-5}$ ,  $T_0 = 350$  кН,  $\sigma_B = 700$  МПа,  $\alpha_0 = 30^\circ$  приведены на рис. 6.

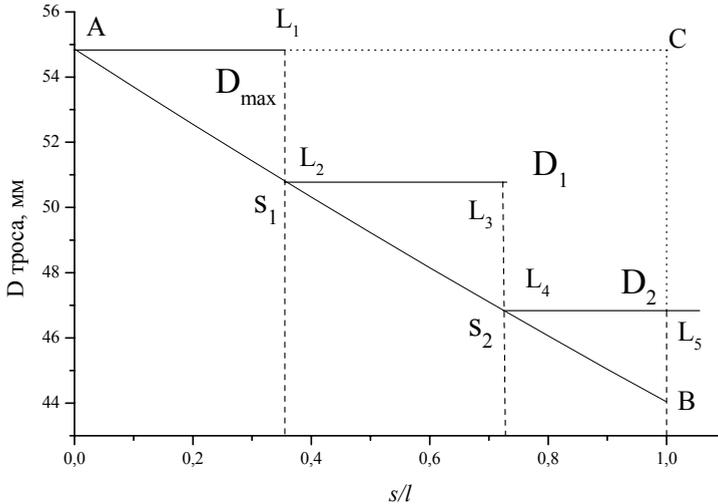


Рис. 6. Зависимость  $D = D(s)$  (кривая АВ)

После получения зависимости  $D = D(s)$  возникает вопрос о возможности ее практического использования. Ясно, что при выполнении реальных буксировок невозможно для каждой отдельной буксировки создавать специальный трос, диаметр которого плавно изменяется по длине троса в соответствии с полученным законом. Тем не менее, знание оптимального закона распределения диаметра по длине троса может быть эффективно использовано в практической деятельности.

Ранее уже упоминалось, что трос, удовлетворяющий условию равнопрочности, одновременно является и тросом с минимальным весом. Можно показать, что площадь под кривой АВ рис. 6 пропорциональна минимально возможному весу тросовой системы. Хотя при решении задачи вес троса в воде не учитывался, снижение веса троса на воздухе является актуальной задачей. Эта задача может быть решена следующим образом.

На основании анализа плана предполагаемых буксировок определяется наиболее тяжелый режим. Для этого режима выполняется расчет оптимально троса и строится зависимость  $D = D(s)$ . Если выбрать для тросовой системы максимальный диаметр  $D_{\max}$ , то лишний вес этой системы по сравнению с оп-

тимальной будет пропорционален площади фигуры ABC на рис. 6. Уменьшить этот вес можно, применив составной трос, состоящий из кусков разного диаметра. Диаметры и длина кусков составного троса должны быть определены из условия обеспечения минимальности веса. Любая тросовая система должна содержать кусок троса с диаметром  $D_{\max}$ . Это условие следует из принципа равнопрочности.

На рис. 6 показана оптимизация тросовой системы, состоящей из 3-х кусков. Очевидно, что вес тросовой системы будет минимальным, если площадь  $F$  фигуры  $CL_1L_2L_3L_4L_5$  будет минимальна. Запишем выражение для вычисления площади фигуры:

$$F = [D_{\max} - D_1(s_1)](l - s_1) + [D_1(s_1) - D_2(s_2)](l - s_2). \quad (30)$$

Это выражение можно рассматривать как функцию двух переменных  $F = F(s_1, s_2)$ . Условием наличия экстремума функции нескольких переменных является равенство нулю частных производных. Используя это условие, можно получить систему уравнений для нахождения  $s_1$  и  $s_2$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial s_1} = -D_1'(s_1)(l - s_1) - [D_{\max} - D_1(s_1)] + D_1'(s_1)(l - s_2) = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial s_2} = -D_2'(s_2)(l - s_2) - [D_1(s_1) - D_2(s_2)] = 0. \end{cases} \quad (31)$$

При подстановке формулы (29) в эту систему можно получить ее окончательный вид. Проще всего решение системы находить численными методами.

### **Литература**

1. *Виноградов Н.И., Крейнфель С.А., Ляв И.Г., Нисневич М.З.* Привязные подводные системы: Аэрогидродинамические характеристики при установившемся движении. – СПб.: ФГУП «ЦНИИ «Гидроприбор», 2005. – 304 с.
2. *Поддубный В.И., Шамарин Ю.Е., Черненко Д.А., Астахов Л.С.* Динамика подводных буксируемых систем – СПб.: Судостроение, 1995. – 200 с.
3. *Черепанов Г.П., Еришов Л.В.* Механика разрушения. – М.: Машиностроение, 1977. – 224 с.