А.В. Сикан

ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

A.V. Sikan

PRACTICAL PROCEDURES OF ESTIMATING PARAMETERS OF WEIBULL DISTRIBUTION FOR HYDROLOGICAL COMPUTATIONS

В работе представлен алгоритм оценки параметров распределения Вейбулла. Рассматриваются примеры применения этого распределения при расчетах расходов и уровней воды рек.

Ключевые слова: гидрологические расчеты, кривые обеспеченности, распределение Вейбулла, оценка параметров.

In the article, an algorithm of estimating the parameters of Weibull distribution is presented. Examples of using this distribution for computations of water discharges and stages in rivers are considered.

Key words: hydrological design, exceedance probability curve, Weibull distribution, parameters estimation.

Двухпараметрическое распределение Вейбулла широко используется в статистической теории надежности [1]. В российской гидрологической практике распределение Вейбулла используется редко. Функция плотности вероятности и функция обеспеченностей этого распределения описываются выражениями:

$$f(x) = (b/a)(x/a)^{(b-1)} \exp\left\{-(x/a)^b\right\}; \tag{1}$$

$$P(x) = \exp\left\{-(x/a)^b\right\}, \tag{2}$$

где a – коэффициент масштаба, $a > 0$; b – коэффициент формы, $b > 0$; $0 \le x < \infty$.

Стандартные числовые характеристики и параметры распределения Вейбулла связаны следующими соотношениями:

$$m_x = a\,\Gamma(1 + 1/b); \tag{3}$$

$$D_x = a^2\Gamma(1 + 2/b) - m_x^2; \tag{4}$$

$$C_s = \frac{\Gamma(1 + 3/b)a^3 - 3m_x\Gamma(1 + 2/b)a^2 + 2m_x^3}{\sigma_x^3}; \tag{5}$$

$$M_o = \frac{a(b-1)^{1/b}}{b^{1/b}},\ b > 1; \tag{6}$$

$$M_e = a\ln(2)^{1/b}, \tag{7}$$

где m_x – математическое ожидание; D_x – дисперсия; C_s – коэффициент асимметрии; M_o – мода; M_e – медиана; $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция.

При $b = 1$ распределение Вейбулла превращается в экспоненциальное распределение, при $b = 2$ – в распределение Релея.

Влияние коэффициента вариации на форму кривой плотности вероятности распределения Вейбулла показано на рис. 1.

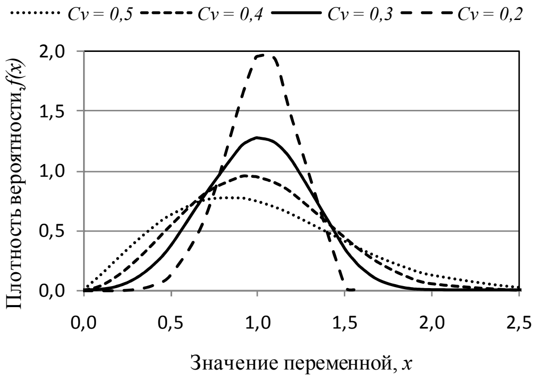

Рис. 1. Функция плотности вероятности распределения Вейбулла
при различных значениях коэффициента вариации при $m_x = 1$

Для распределения Вейбулла параметры a и b аналитически не выражаются через статистические моменты. Для упрощения расчетов зависимость параметров a и b от коэффициента вариации (C_v) в настоящей работе представлена в графическом и табличном виде (рис. 2, табл. 1).

Схема расчета ординат кривой обеспеченностей Вейбулла включает следующие этапы:

1. По исходному ряду определяются выборочное среднее ($\bar{x}$) и коэффициент вариации (C_v).
2. В зависимости от C_v по табл. 1 или графику 2 определяются параметры a и b.
3. Для заданных обеспеченностей рассчитываются модульные коэффициенты. Расчет производится по формуле, полученной из формулы (2):

$$k_{P\%} = \left[-\ln(P/100)a^b\right]^{1/b}. \tag{8}$$

4. Расчетные значения переменной X определяются по формуле

$$x_{P\%} = k_{P\%}\bar{x}. \tag{9}$$

Двухпараметрическое распределение Вейбулла можно использовать для выборок с малой асимметрией. Как видно на рис. 3, при характерных для гидрологических рядов коэффициентах вариации ($0,31 < C_v < 1$) отношение $C_s/C_v < 2$, а при $C_v < 0,31$ отношение C_s/C_v отрицательное.

Таблица 1

Значения параметров распределения Вейбулла в зависимости от коэффициента вариации при m_x = 1

C_v	a	b	C_s	C_v	a	b	C_s
1	2	3	4	1	2	3	4
1,50	0,773	0,685	3,63	0,48	1,129	2,20	0,48
1,40	0,818	0,727	3,28	0,46	1,129	2,31	0,46
1,30	0,864	0,777	2,95	0,44	1,128	2,42	0,44
1,20	0,910	0,837	2,62	0,42	1,126	2,55	0,42
1,10	0,956	0,910	2,31	0,40	1,125	2,70	0,40
1,00	1,000	1,00	2,00	0,38	1,122	2,85	0,38
0,95	1,020	1,05	1,86	0,36	1,119	3,03	0,36
0,90	1,039	1,11	1,71	0,34	1,116	3,23	0,34
0,88	1,048	1,14	1,64	0,32	1,112	3,46	0,32
0,86	1,056	1,17	1,58	0,30	1,108	3,71	0,30
0,84	1,063	1,20	1,52	0,28	1,103	4,01	0,28
0,82	1,070	1,23	1,47	0,26	1,098	4,35	0,26
0,80	1,076	1,26	1,41	0,25	1,095	4,54	0,25
0,78	1,081	1,29	1,36	0,24	1,092	4,75	0,24
0,76	1,088	1,33	1,30	0,22	1,086	5,22	0,22
0,74	1,093	1,37	1,24	0,20	1,080	5,80	0,20
0,72	1,098	1,41	1,18	0,18	1,073	6,50	0,18
0,70	1,103	1,45	1,13	0,17	1,070	6,91	-0,46
0,68	1,108	1,50	1,07	0,16	1,066	7,38	-0,49
0,66	1,112	1,55	1,02	0,15	1,063	7,90	-0,53
0,64	1,115	1,60	0,96	0,14	1,059	8,51	-0,56
0,62	1,119	1,66	0,90	0,13	1,055	9,21	-0,60
0,60	1,122	1,72	0,85	0,12	1,051	10,03	-0,64
0,58	1,124	1,78	0,80	0,11	1,047	10,99	-0,68
0,56	1,126	1,85	0,74	0,10	1,043	12,15	-0,72
0,54	1,127	1,93	0,68	0,09	1,039	13,58	-0,75
0,52	1,128	2,01	0,62	0,08	1,035	15,35	-0,79
0,50	1,129	2,10	0,57	0,07	1,031	17,63	-0,83

В качестве примера на рис. 4 представлены кривая обеспеченностей среднегодовых расходов воды р. Вьюн – п. Запорожское (Ленинградская область). Эмпирическое значение коэффициента асимметрии для этого ряда 0,12, для кривой Вейбулла C_s = –0,18.

Для рядов с более высокой асимметрией можно использовать трехпараметрическое распределение Вейбула [2]. Для этого распределения функция плотности вероятности и функция обеспеченностей имеют вид:

$$f(x)=\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{x-c}{a}\right)^{(b-1)}\exp\left[-\left(\frac{x-c}{a}\right)^{b}\right], \qquad (10)$$

$$P(x)=\exp\left[-\left(\frac{x-c}{a}\right)^{b}\right], \qquad (11)$$

где a – коэффициент масштаба, $a > 0$; b – коэффициент формы, $b > 0$; c – коэффициент сдвига, $0 \le c \le \min(X)$; $c \le x < \infty$.

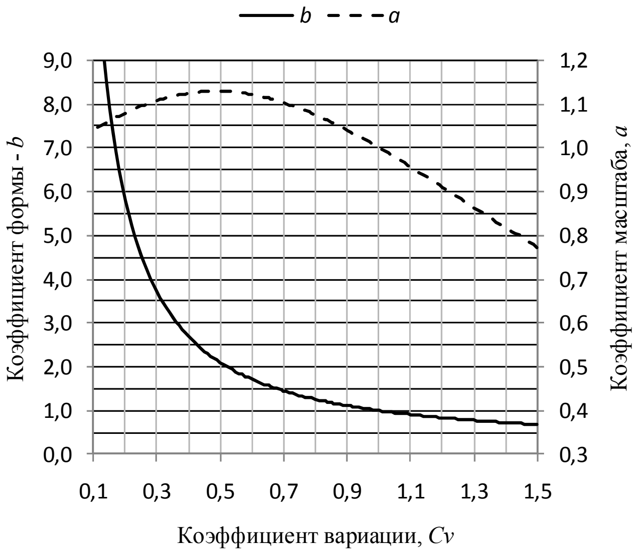

Рис. 2. Зависимость параметров двухпараметрического распределения Вейбулла (a и b) от коэффициента вариации при $m_x = 1$

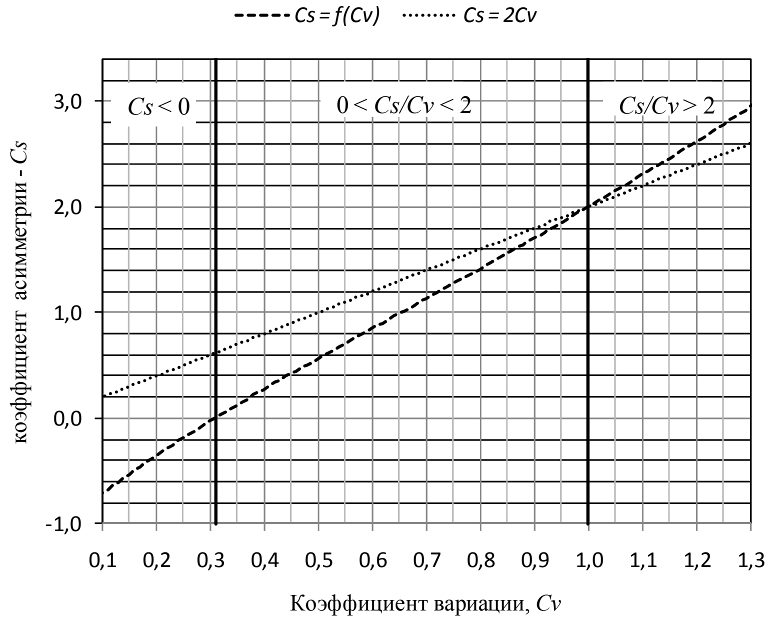

Рис. 3. Зависимость коэффициента асимметрии от коэффициента вариации для двухпараметрического распределения Вейбулла

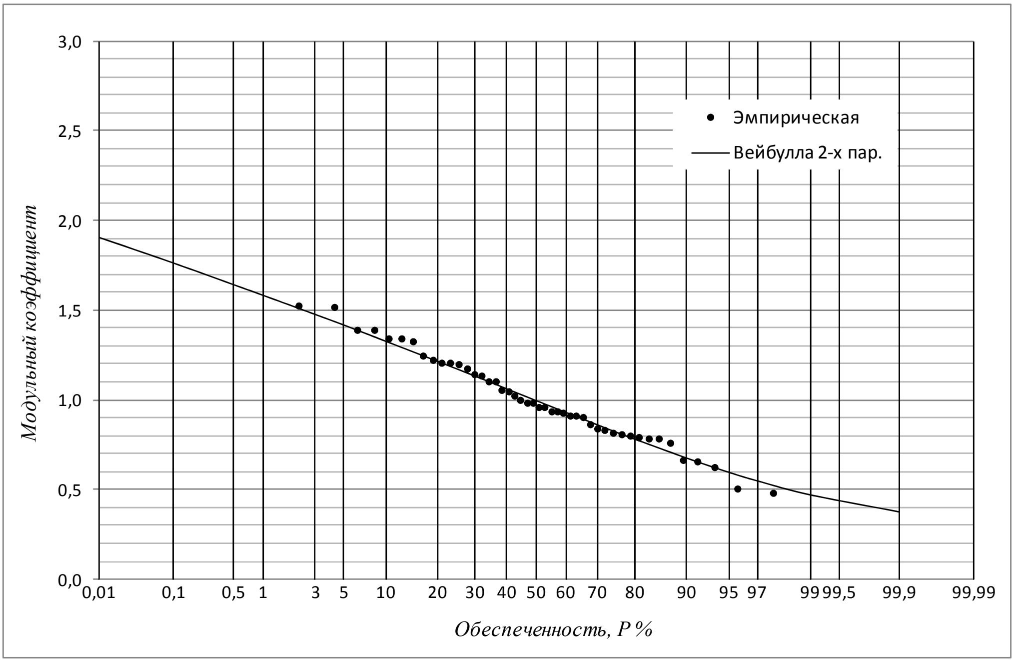

Рис. 4. Эмпирическая и аналитическая (Вейбулла) кривые обеспеченностей среднегодовых расходов воды р. Вьюн – п. Запорожское в модульных коэффициентах (Cv = 0,25; a = 1,096; b = 4,50)

Трехпараметрическое распределение Вейбулла (распределение III типа) входит в систему распределений Фишера-Типпета, которые рекомендуется МАГАТЭ при расчете экстремальных гидрометеорологических явлений [3]. Помимо распределения Вейбулла эта система включает распределение Гумбеля (I тип) и распределение Фреше (II тип).

При использовании трехпараметрического распределения Вейбулла можно рекомендовать следующую схему расчета параметров.

1. По исходному ряду X оцениваются следующие числовые характеристики: среднее значение $\overline{x}$, стандартное отклонение σ_x, коэффициент вариации C_v, коэффициент асимметрии C_s и минимальное значение $x_{\min}$. Учитывая большую погрешность коэффициента асимметрии, его значение допустимо принимать в зависимости от C_v и среднего районного отношения $\left(\overline{C_s/C_v}\right)$ по формуле $C_s = C_v\left(\overline{C_s/C_v}\right)$.

2. В зависимости от C_s определяется значение коэффициента вариации C_v^* ряда Y. Ряды X и Y связаны соотношением $y_i = x_i - c$. Значение C_v^* определяется по табл. 1. Для определения C_v^* можно также использовать аппроксимирующее выражение [формула (18) в табл. 2].

Таблица 2

Формулы для определения параметров распределения Вейбулла

Зависи-мость	Интервал значений аргумента	Аппроксимация	Номер формулы
$C_s = f(C_v)$	0,07–1,00	$C_s = 1{,}013\ C_v^{\ 3} - 1{,}985\ C_v^{\ 2} + 4{,}081\ C_v - 1{,}101$	(12)
	1,00–2,00	$C_s = 2{,}0\ C_v^{\ 1{,}475}$	(13)
$a = f(C_v)$	0,07–1,00	$a = 0{,}9889\ C_v^{\ -1{,}093}$	(14)
	1,00–2,00	$a = 0{,}0768\ C_v^{\ 3} - 0{,}2856\ C_v^{\ 2} - 0{,}1056\ C_v + 1{,}3155$	(15)
$b = f(C_v)$	0,07–1,00	$b = 0{,}9889\ C_v^{\ -1{,}093}$	(16)
	1,00–2,00	$b = -\ 0{,}259\ C_v^{\ 3} + 1{,}5053\ C_v^{\ 2} - 3{,}1592\ C_v + 2{,}9098$	(17)
$C_v = f(C_s)$	(–0,8)– 4,5	$C_v = 0{,}0009\ C_s^{\ 4}$ - $0{,}0105\ C_s^{\ 3} + 0{,}0277\ C_s^{\ 2} +$ $+\ 0{,}3234\ C_s + 0{,}31$	(18)

3. Значение параметра сдвига определяется по формуле

$$c = \bar{x} - \frac{\sigma_x}{C_v^*}. \qquad (19)$$

Если $c > x_{\min}$, принимаем $c = x_{\min}$, а C_v^* определяем по формуле

$$C_v^* = C_v / \left(1 - k_{\min}\right), \qquad (20)$$

где $k_{\min}$ – минимальный модульный коэффициент. В этом случае асимметрия у аналитической кривой Вейбулла будет меньше эмпирической и аппроксимация может быть далеко не идеальной.

4. Определяется среднее значение ряда Y по формуле:

$$\bar{y} = \bar{x} - c. \qquad (21)$$

5. В зависимости от $C_v^{\ *}$ по табл. 1 определяются параметры распределения Вейбулла a и b. Для их определения можно также использовать аппроксимирующие выражения, представленные в табл. 2.

6. Определяются модульные коэффициенты распределения Вейбулла для ряда Y:

$$k_{y,P\%} = \left[-\ln(P/100)a^b\right]^{1/b}. \qquad (22)$$

7. Расчетные значения переменной X вычисляются по формуле

$$x_{P\%} = k_{y,P\%}\,\bar{y} + c. \qquad (23)$$

8. Модульные коэффициенты для ряда X определяются по формуле

$$k_{x,P\%} = (x_{P\%}) / (\bar{x}). \qquad (24)$$

На рис. 5 представлена кривая обеспеченностей максимальных расходов весеннего половодья р. Тверца – с. Прутенка. Аппроксимация эмпирических точек выполнена с использованием распределения Пирсона III типа и трехпараметрического распределения Вейбулла.

Как видно на рисунке, обе кривые хорошо согласуются с эмпирическими точками. При этом в области больших обеспеченностей кривая Вейбулла выглядит предпочтительнее.

Приведенные примеры показывают, что в ряде случаев кривая обеспеченностей Вейбулла может быть хорошей альтернативой для используемых в российской гидрологической практике кривых Пирсона III типа и Крицкого-Менкеля. Однако следует учитывать, что кривая Вейбулла обладает меньшей гибкостью, чем названные кривые. Для выборок с высокой асимметрией даже трехпараметрическое распределение Вейбулла может давать заниженную асимметрию и плохо аппроксимировать эмпирические точки, так как значение коэффициента асимметрии для распределения Вейбулла лимитируется коэффициентом вариации и параметром сдвига *c*, значение которого не должно превышать минимальное значение исходного ряда.

Предельное значение C_s для распределения Вейбулла можно определить по приближенным формулам (12)–(13) в зависимости от C_v^*; значение C_v^* определяется по формуле (20).

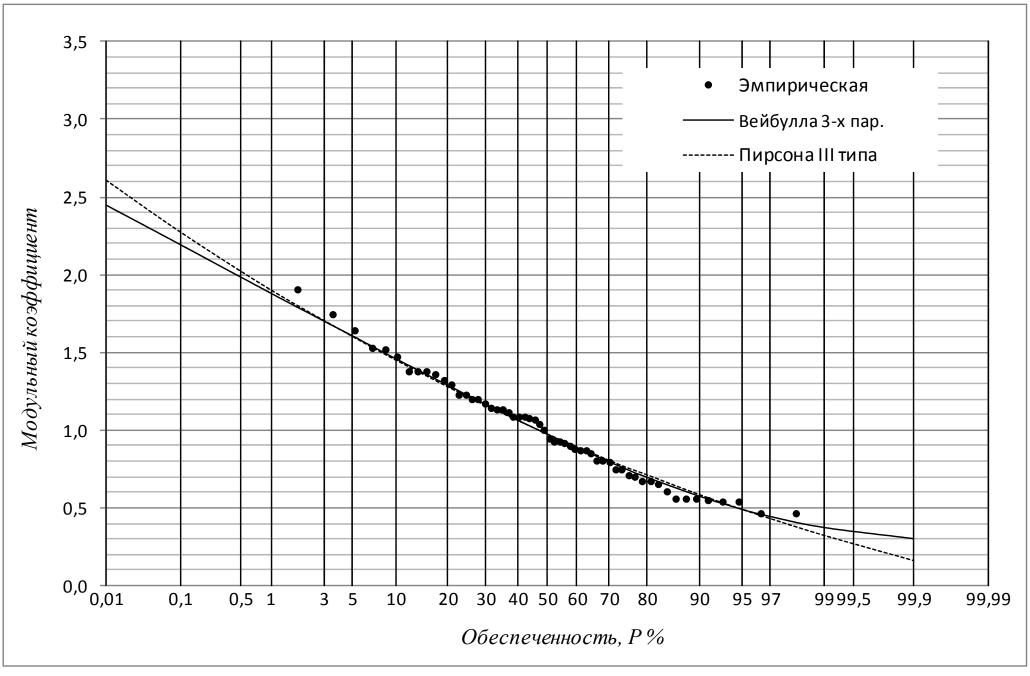

Рис. 5. Эмпирическая и аналитические кривые обеспеченностей максимальных расходов весеннего половодья р. Тверца – с. Прутенка в модульных коэффициентах ($\bar{x}$ = 366; Cv = 0,37; C_s = 0,45; a = 1,129; b = 2,30; c = 94)

На рис. 6 показана кривая обеспеченностей максимальных расходов весеннего половодья р. Тихвинка – д. Горелуха (C_v = 0,37; $k_{\min}$ = 0,40). При таких C_v и $k_{\min}$ предельное значение коэффициента C_s для распределения Вейбулла равно 0,91, а эмпирическое значение C_s = 1,21.

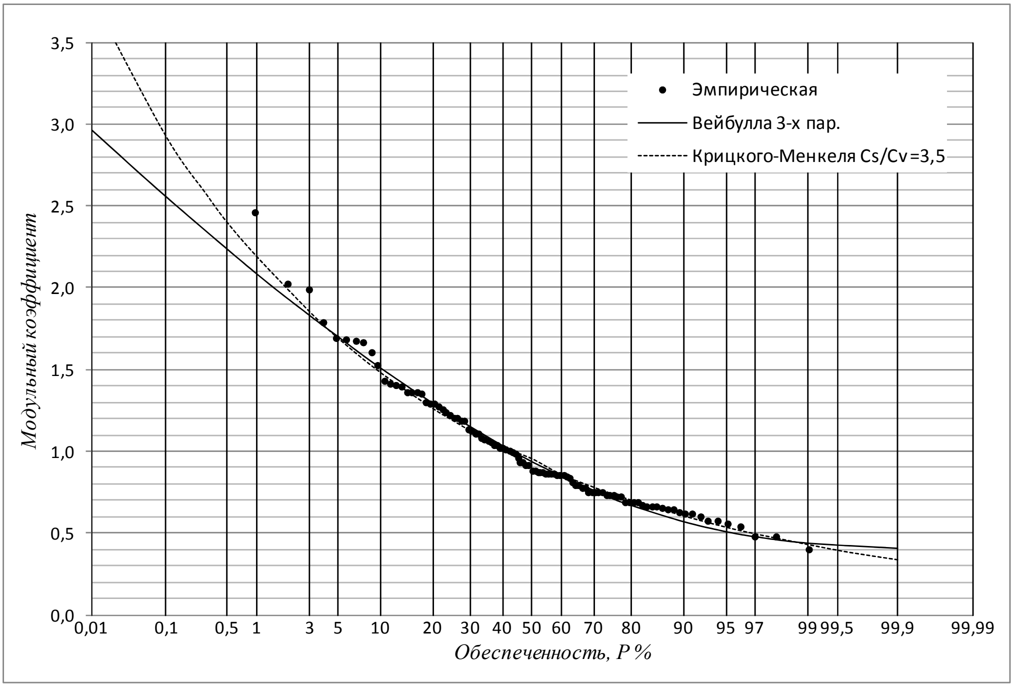

Рис. 6. Эмпирическая и аналитические кривые обеспеченностей максимальных расходов весеннего половодья р. Тихвинка – д. Горелуха в модульных коэффициентах ($\bar{x}$ = 181; Cv = 0,37; a = 1,119; b = 1,66; c = 72)

Как видно на рисунке, в этой ситуации кривая обеспеченностей Вейбула хуже согласуется с эмпирическими точками, чем Кривая Крицкого-Менкеля.

Таким образом, в практике гидрологических расчетов распределение Вейбулла целесообразно применять для выборок с умеренной положительной и отрицательной асимметрией.

В частности, неплохие результаты получены при аппроксимации кривых обеспеченности максимальных уровней весеннего половодья, которые нередко имеют небольшую отрицательную асимметрию (рис. 7).

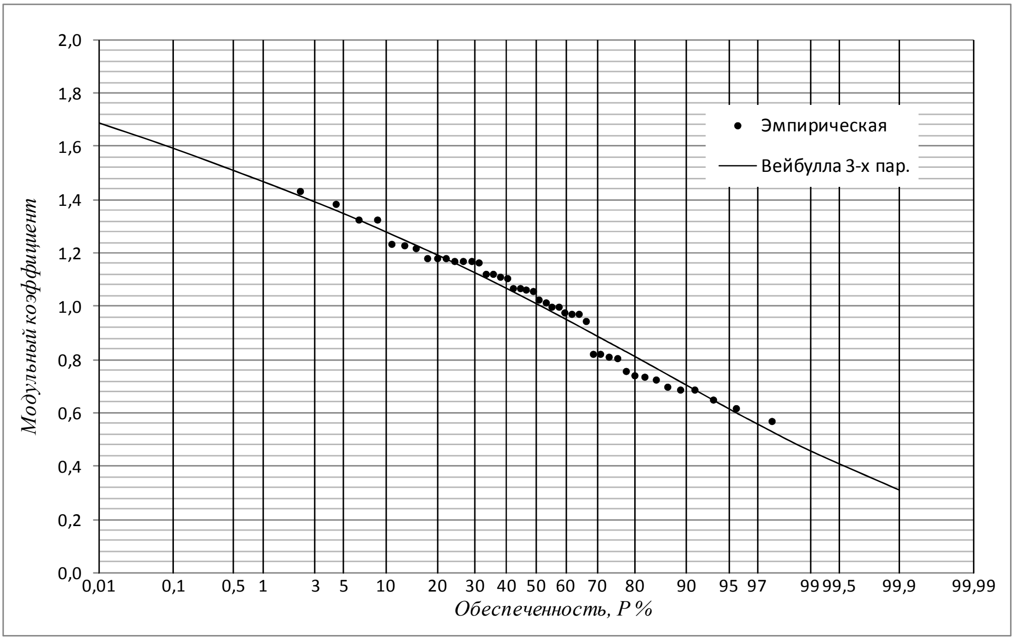

Рис. 7. Эмпирическая и аналитические кривые обеспеченностей максимальных уровней весеннего половодья р. Долгая – п. Загорье в модульных коэффициентах; «0» поста 34,05 м БС ($\bar{x}$ = 150 см; Cv = 0,22; Cs = –0,22; a = 1,092; b = 4,75; c = 10,8)

Литература

1. *Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.* Математические методы в теории надежности. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
2. Международное руководство по методам расчета основных гидрологических характеристик. – Л.: Гидрометеоиздат, 1984. – 247 с.
3. Серия норм МАГАТЭ по безопасности. Учет метеорологических явлений при оценке площадок для атомных электростанций. Руководство по безопасности № NS-G-3.4. – Вена, 2003.