Р.П. Репинская, И.В. Козлов

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОЛНЕЧНОГО ЦИКЛА КАК СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

R.P. Repinskaya, I.V. Kozlov

A MODELING OF A SOLAR CYCLE AS A STATIONARY RANDOM PROCESS

Работа посвящена проблеме моделирования стационарных случайных процессов (ССП). Разработана компьютерная программа, с помощью которой можно моделировать ССП, если предварительно оценены необходимые его параметры. Приводится важный пример использования программы для имитации солнечного цикла.

A research is dedicated to a problem of the stationary random processes (SRP) modeling. One is created a computer program by that can model SRP if its required parameters are estimated. There is an important example of a program application for a simulation of the solar cycle.

Введение

Стационарные процессы занимают особое место как в природе, так и в технике. Обычно стационарный процесс понимается как состояние физической системы, которое не изменяется во времени. В действительности такое состояние достаточно редко наблюдается. Полностью стационарных явлений нет вообще, однако используется понятие стационарного случайного процесса (ССП). Под ССП понимается некоторое неизменное состояние, однако если к основному устойчивому состоянию добавить случайные возмущения, то некоторые реальные нестационарные природные и технические процессы могут быть описаны в первом приближении с помощью такого приёма. В настоящей работе рассматривается реальный физический процесс – солнечный цикл, описание которого осуществляется с помощью ряда чисел Вольфа. Кроме него, с помощью модели ССП можно, например, описать чандлеровское движение Земли, а также динамику частицы жидкости. Это – эргодические процессы, состояние которых постоянно стремится вернуться из возмущенного состояния к равновесному. Существуют связи между гидрометеорологическими процессами и солнечной активностью, поэтому моделирование этого процесса важно для гидрометеорологии. Данное исследование посвящено разработке программы для ПЭВМ с целью моделирования ССП, в частности солнечного цикла. Предполагается, что динамика пятен на Солнце, характеризуемая рядом чисел Вольфа, может носить стационарный случайный характер.

Обобщенная структура алгоритма моделирования ССП

Нами программировалась следующая рекуррентная формула [Кузнецов, 2001]:

$$X_{k+1} = X_k A_{\exp}(\Delta) + S_D(\Delta) * \Lambda_D(\Delta) * f_{k+1}, \tag{1}$$

где X_k – столбец моделируемых величин на текущем шаге времени; X_{k+1} – столбец неизвестных на следующем шаге по времени; $A_{\exp}$ – матричная экспонента; f_{k+1} – столбец из независимых стандартных гауссовских величин, причем $M\{\tilde{f}_k \tilde{f}_r^T\} = 0_{n\times n}$ ($\tilde{f}_{k+1} = S_D(\Delta) * \Lambda_D(\Delta) * f_{k+1}$ – векторный дискретный гауссовский случайный процесс, М – математическое ожидание) при $k \neq r$, где $0_{n\times n}$ – нулевая ($n\times n$) матрица; $S_D(\Delta)$ – матрица ортонормированных собственных векторов матрицы $D_f(\Delta)$ вида

$$D_f(\Delta) = M\left\{\tilde{f}_k(\Delta)\tilde{f}_k^T(\Delta)\right\} = \int_0^\Delta e^{A(\Delta - t)} \sum\sum^T e^{A^T(\Delta - t)} dt, \tag{2}$$

которая получается как решение $D_f(t)$ матричного дифференциального уравнения вида

$$\frac{dD_f(t)}{dt} = AD_f(t) + D_f(t)A^T + \sum\sum^T, D_f(0) = 0_{n\times n} \qquad \text{при } t = \Delta. \tag{3}$$

Здесь $\sum$ – дисперсионная матрица; A – квадратная матрица, описывающая динамическую составляющую процесса; Δ – шаг интегрирования; символ T означает транспонирование; f – означает, что матрица D описывает дисперсию векторного гауссовского случайного процесса $\tilde{f}$ (знак ~ опущен); $\Lambda_D(\Delta) = \sqrt{EgV}$ – диагональная матрица, где EgV – диагональная матрица собственных чисел матрицы $D_f(\Delta)$.

Уравнение (3) было решено методами, отличающимися от метода, предлагаемого в работе [Кузнецов, 2001]. В нашей работе было реализовано два метода решения уравнения (3) – с помощью явной и неявной схем. Результаты расчетов показывают, что предпочтительнее неявная схема. На рисунках 1 и 2 приводятся примеры моделирования ССП с использованием этой схемы. При расчетах задавались следующие исходные данные: $x_{1_0} = 7{,}0$, $x_{2_0} = -0{,}25$, $\Delta = 0{,}1$ г., время интегрирования 100 лет. Расчеты выполнены для 1821 – 1920 гг. Для генерирования случайных чисел использовалась функция rand() языка С.

Матричная экспонента также вычислялась двумя методами. Первый был взят из [Кузнецов, 2001] и характеризуется как оптимизационный. В настоящей работе был также использован алгоритм непосредственного итерационного вычисления матричной экспоненты с заданной точностью ε. На каждом итерационном шаге проверялся функционал $\mathrm{MAX}\left\{\left|A_{ij}^{\nu+1} - A_{ij}^{\nu}\right|\right\} < \varepsilon$. Выход из итерационного цикла происходил, если невязка становилась меньше ε. Для нахождения собственных чисел и векторов применялся метод Якоби [Уилкинсон, 1976]. В интегрированной среде Borland C++ Builder 6 [Шамис, 2003] была написана специальная программа, где можно выбирать и совмещать любым образом названные методы, продемонстрировать графики полученных расчетов, примеры которых приведены на рисунках 1–2.

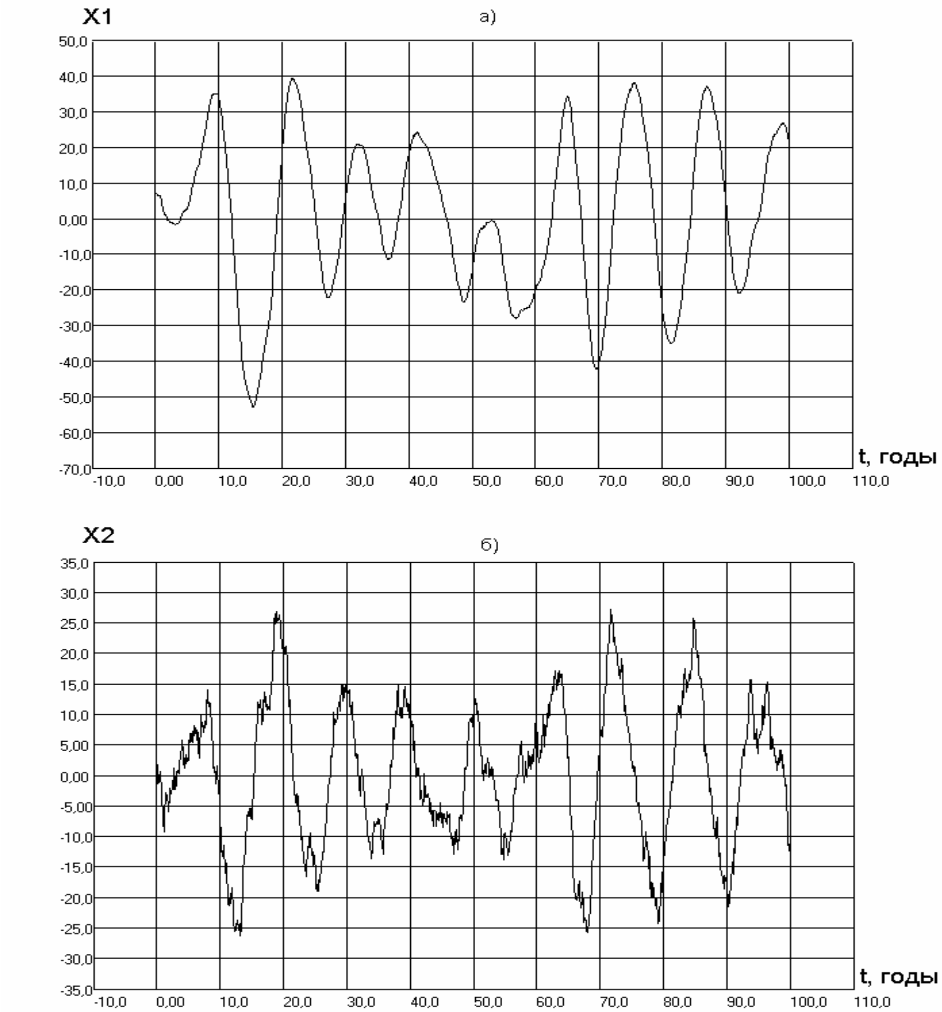
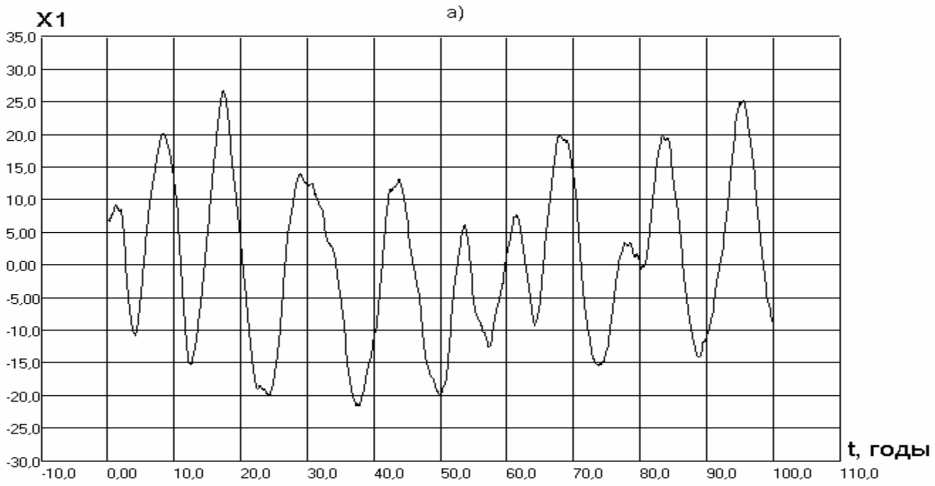


Рис. 1. а) Компонента x_1 для солнечной активности; x_1 – величина безразмерная и представляет собой смоделированные числа Вольфа без учета среднего значения. б) Компонента x_2 для солнечной активности; x_2 – производная от x_1.



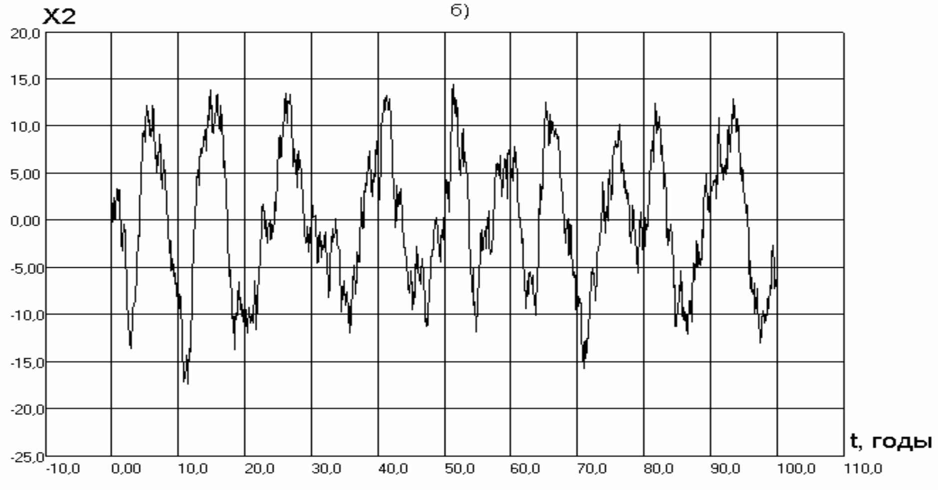


Рис. 2. а) Компонента x_1 для солнечной активности; x_1 – величина безразмерная и представляет собой смоделированные числа Вольфа без учета среднего значения. б) Компонента x_2 для солнечной активности; x_2 – производная от x_1.

Обсуждение результатов

Результаты моделирования достаточно показательны. Можно отметить ряд интересных результатов, полученных нами.

Одно из достоинств созданной программы заключается в том, что можно в процессе её работы менять положение датчика случайных чисел. Как показали численные эксперименты, при разном начальном положении датчика случайных чисел получаются немного разные результаты. Сравните рисунки 1 и 2, где приведены расчеты при положении датчика случайных чисел 1 и 123 соответственно. К сожалению, при проведении расчетов со случайными величинами это – настоящая проблема, так как компьютер генерирует псевдослучайные числа. По умолчанию датчик стартует с некоторого начального положения, которое всегда одинаковое, однако предусматривается возможность его менять, что и было использовано в программе.

Следует обратить также внимание на функцию, генерирующую нормально распределенную величину по алгоритму из [Кузнецов, 2001]. Для численной генерации нормально распределённой случайной величины рекомендуется выбирать 12 случайных чисел. В работе [Кузнецов, 2001] подчеркивается, что необходимо сначала установить режим генерации нормально распределенных случайных величин, однако детали не приводятся. Возможно, речь идёт именно о количестве случайных чисел, необходимых для генерирования гауссовской величины. В настоящей работе нормальная величина формировалась 10 случайными числами. Такой искусственно подобранный режим обеспечил наилучшую согласованность полученных результатов с приводимыми в [Кузнецов, 2001] и фактическими данными.

На рис. 3 приводится сравнение реальных и смоделированных значений чисел Вольфа. Как видно, модель ССП даёт при расчётах циклические вариации чисел Вольфа, и в принципе с её помощью можно попробовать дать прогноз на ближайшие несколько лет. Для этого к полученным модельным значениям чисел Вольфа необходимо прибавить их среднее значение, поскольку моделирование чисел Вольфа производилось без учета их среднего значения.

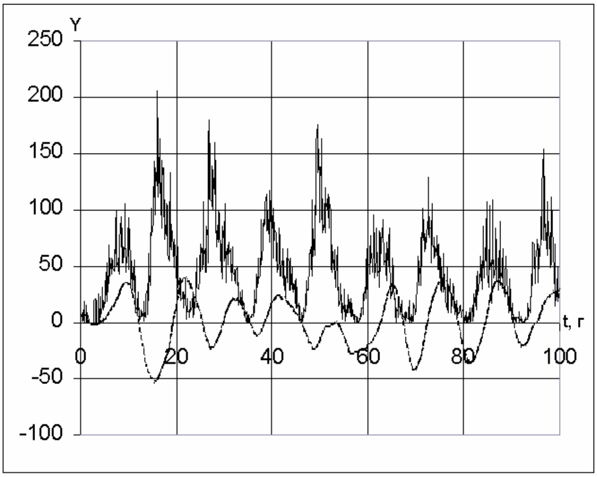


Рис. 3. Сравнение фактических и смоделированных значений чисел Вольфа.

Основная задача работы – получить максимально корректно работающую программу для моделирования ССП и провести ряд компьютерных экспериментов. Реализовано два алгоритма вычисления матричной экспоненты и два алгоритма вычисления дисперсионной матрицы, причем программа выстроена таким образом, что эти алгоритмы можно совмещать как угодно. С помощью этих алгоритмов моделировался ряд чисел Вольфа, описывающий солнечный цикл. Этот процесс считался стационарным случайным, т.е. представлялся в виде последовательностей случайных возмущений на фоне некоторого неизменного стационарного состояния.

Поскольку солнечный цикл важен для процессов, протекающих на Земле, выбранную модель для его моделирования нужно считать частным подходом к попытке имитации солнечного цикла. Это же касается и двух других моделей: чандлеровского движения Земли и лагранжевой динамики частицы жидкости.

Наконец, нужно отметить, что полученная программа достаточно универсальная. Если известны параметры некоторого стационарного случайного процесса, то его можно смоделировать с её помощью. Для этого нужно знать матрицу, описывающую динамическую составляющую процесса (последняя, как правило, представляет собой колебания, затухающие с течением времени), и дисперсионную матрицу, которая задает интенсивность случайных возмущений. Так, в [Arato, 1982] показано, что модель авторегрессии второго порядка можно свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка с матрицей системы второго порядка. Это понятно, поскольку дифференциальное уравнение второго порядка (например, $a\ddot{x}+b\dot{x}+c=f$) сводится к системе двух уравнений первого порядка путем замены переменных ($\dot{x}=z$). Более детально подобные преобразования систем уравнений даны в [Пискунов, 1985].

Переход от обычной авторегрессионной модели к модели ССП, которая нами рассматривалась, дает улучшение качества решения, поскольку вторая показывает более тонкую структуру процесса. Для примера приведены рисунки 1 и 2, где представлены компоненты x_1 и x_2 для солнечной активности. Первая представляет собой собственно значения чисел Вольфа без учета среднего значения, вторая – производная. Можно заметить, что x_2 является более тонкой характеристикой солнечного цикла. В частности, x_2 равно нулю как раз там, где есть экстремумы у x_1. При использовании обычной регрессионной модели мы получим только x_1 и, скорее всего, более сглаженную кривую.

Более того, данная модель позволяет моделировать и более сложные процессы, например чандлеровские колебания Земли и лагранжеву динамику частицы жидкости [Кузнецов, 2001]. Для этих моделей были также выполнены расчеты. Если речь идет о чандлеровском движении Земли, то x_1 и x_2 – равноправные угловые координаты Северного полюса Земли. Ось в реальности получается наклоненной. Характеристики, описывающие отклонение, в самом простом случае являются стационарным случайным процессом. Однако здесь, ввиду ограниченного объема статьи, эта модель и модель лагранжевой динамики частицы жидкости не рассматриваются детально.

Основные выводы

Разработана компьютерная программа для моделирования стационарных случайных процессов; в реализованных алгоритмах вычисление дисперсионной матрицы проводилось методом, отличающимся от используемого в [Кузнецов, 2001], и был также апробирован альтернативный алгоритм вычисления матричной экспоненты; с помощью программы моделирования ССП смоделирован в первом приближении ряд чисел Вольфа; установлено, что вид решения зависит не только от начальных данных, но и от выбранной последовательности псевдослучайных величин; отмечена также зависимость решения от режима генерации нормально распределенной случайной величины; возможно дальнейшее использование программы для моделирования ССП.

Литература

1. *Кузнецов Д.Ф.* Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. – СПб.: Изд-во СПб гос. ун-та, 2001. – 712 с.
2. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 2. – М.: Наука, 1985. – 560 с.
3. *Уилкинсон Дж., Райнш С.* Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. – М.: Машиностроение, 1976. – 389 с.
4. *Шамис В.А.* Borland C++ Builder 6. – СПб.: Изд. дом «Питер», 2003. – 798 с.
5. *Arato M.* Lenear stochactic sistems with constant coefficients. A statistical approach. – Berlin, Heidelberg, N. Y.: Springer-Verlag, 1982. – 289 p.