

*Ю.Л. Матвеев*

**ОБ УРАВНЕНИЯХ ПРИТОКА ТЕПЛА  
И ВОДЯНОГО ПАРА В АТМОСФЕРЕ**

*Yu. L. Matveev*

**ON EQUATIONS OF THE HEAT  
AND WATER VAPOUR INFLUXES IN THE ATMOSPHERE**

*Приведен вывод уравнений притока тепла и водяного пара в турбулентной атмосфере. Уравнение притока тепла, как в ненасыщенном, так и в насыщенном воздухе, сохраняет общепринятый вид. Уравнение притока водяного пара для насыщенного воздуха отличается от общепринятого: конвективный член, пропорциональный вертикальной скорости, должен быть дополнен слагаемым, вполне сравнимым по величине с ранее учитываемыми. Этот член приведен к виду, согласно которому приращение массовой доли водяного пара (равно как и температуры) на фиксированных уровнях при влажнонеустойчивой стратификации положительно при восходящем и отрицательно при нисходящем движении воздуха. Результаты анализа уравнений находятся в хорошем согласии с данными наблюдений. Получено выражение для скорости конденсации водяного пара, установлена зависимость водности облака от температуры, вертикальной скорости и других факторов.*

*The paper presents derivation of the equations of heat and water vapour influxes in the turbulent atmosphere. The equation of the heat influx both in non-saturated and saturated air retains its conventional form. The equation of the water vapour influx for saturated air differs from the conventional one: the convection term, proportional to the vertical velocity, should be supplemented by a term quite comparable in its magnitude with those taken into account earlier. This term is transformed so that an increment of the total mass fraction of water vapour (as well as that of temperature) at fixed levels with moist unstable stratification is positive for a rising air motion, and negative for a descending motion of air. Results of analysis of the equations are in good agreement with observational data. A formula determining the rate of water vapour condensation is obtained; the dependence of liquid water content in clouds on temperature, vertical velocity and other factors is established.*

С водяным паром и его фазовыми переходами тесно связаны наиболее значительные процессы формирования погоды – образование облаков, туманов и осадков. Поскольку водяной пар по своему содержанию многократно (на два-три порядка) превышает концентрацию других парниковых газов, то он играет существенную роль в регулировании поля температуры, в частности под влиянием антропогенных факторов [Кондратьев, 1999; Матвеев Л.Т., 2000].

Основная цель статьи – уточнить уравнения притока (баланса) тепла и водяного пара во влажной атмосфере и оценить влияние концентрации водяного пара на водность облаков и интенсивность осадков.

В качестве исходных уравнений привлечем уравнение притока тепла (первого начала термодинамики):

$$c_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p} \frac{dp}{dt} + L \frac{dq_m}{dt} = 0 \quad (1)$$

и уравнение Клаузиуса – Клапейрона

$$\frac{dE}{dt} = \frac{LE}{R_n T^2} \frac{dT}{dt}, \quad (2)$$

где  $T$  и  $p$  – температура и давление воздуха;  $E$  – давление насыщенного водяного пара, однозначно связанное с  $T$ ;  $R \approx 287$  Дж/(кг · К);  $R_n = 461,5$  Дж/(кг · К) – газовые постоянные воздуха и водяного пара;  $c_p = 1006$  Дж/(кг · К) – теплоемкость воздуха;  $L = 2500 - 2,72(T - 273,15)$  кДж/кг – теплота парообразования (конденсации);  $d/dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial y + w\partial/\partial z$  – оператор полной (индивидуальной) производной;  $u, v, w$  – проекции скорости движения (ветра) на оси  $x, y, z$  (ось  $z$  направлена по вертикали вверх);  $t$  – время.

Вошедшая в (1) массовая доля водяного пара  $q_m$  связана с  $T$  и  $p$  соотношением:

$$q_m = 0,622E(T)/p. \quad (3)$$

Из него следует

$$\frac{dq_m}{dt} = q_m \left( \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} - \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} \right). \quad (4)$$

Исключив из (1) и (4) с помощью (2) давление пара  $E$ , приведем их к виду:

$$\frac{dT}{dt} = a \frac{RT}{c_p p} \frac{dp}{dt}, \quad (5)$$

$$\frac{dq_m}{dt} = \frac{RT}{Lp} (1-a) \frac{dp}{dt}, \quad (6)$$

где

$$a = \frac{1 + 0,622LE/(RTp)}{1 + 0,622L^2E/(c_p R_n T^2 p)}. \quad (7)$$

Сравнение последнего соотношения с выражением для влажноадиабатического градиента  $\gamma_{ва}$  показывает, что вошедший в (5) – (6) параметр  $a$  равен отношению  $\gamma_{ва}$  к сухоадиабатическому градиенту  $\gamma_a$ :

$$a = \gamma_{\text{ва}} / \gamma_a . \quad (8)$$

Поскольку  $\gamma_{\text{ва}}$  всегда меньше  $\gamma_a$ , то во влажном насыщенном (облачном) воздухе параметр  $a$  всегда меньше единицы ( $a < 1$ ).

Из (5) – (6) следует, что при падении давления (в частности, при подъеме) температура и массовая доля пара частицы воздуха всегда уменьшаются со временем.

Для получения уравнений для ненасыщенного влажного воздуха следует положить  $L = 0$ . Тогда (7) и (8) принимают вид:

$$a = 1; \quad \gamma_{\text{ва}} = \gamma_a . \quad (9)$$

Температура ненасыщенной частицы при падении давления понижается более быстро, чем насыщенной. Массовая же доля пара в ненасыщенной частице сохраняет постоянное значение ( $q = \text{const}$ ).

В предположении, что справедливо статическое равновесие (подчеркнем: уравнения (5) и (6) получены без такого допущения)

$$dp / dt \approx w \partial p / \partial z = -wgp / (RT), \quad (10)$$

уравнения (5) и (6), записанные для локальных производных, принимают вид:

$$\partial T / \partial t = w(\gamma - \gamma_{\text{ва}}) - (u \partial T / \partial x + v \partial T / \partial y) + \varepsilon_T / c_p, \quad (11)$$

$$\partial q_m / \partial t = -w[c_p(\gamma_a - \gamma_{\text{ва}}) / L + \partial q_m / \partial z] - (u \partial q_m / \partial x + v \partial q_m / \partial y) + \varepsilon_q, \quad (12)$$

где  $\gamma = -\partial T / \partial z$  – вертикальный градиент температуры;  $g$  – ускорение свободного падения.

Правые части последних уравнений дополнены членами, описывающими турбулентные притоки (к 1 кг за 1 с) тепла ( $\varepsilon_T$ ) и водяного пара ( $\varepsilon_q$ ):

$$\frac{\varepsilon_T}{c_p} = k_s \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} k_z \left( \frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_{\text{ва}} \right), \quad (13)$$

$$\varepsilon_q = k_s \left( \frac{\partial^2 q_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q_m}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} k_z \left( \frac{\partial q_m}{\partial z} + b \right), \quad (14)$$

где  $k_s$  и  $k_z$  – коэффициенты турбулентности по горизонтали и вертикали;  $b = (c_p / L)(\gamma_a - \gamma_{\text{ва}})$ .

Обратим внимание на то, что уравнение (12) отличается от общепринятого для него вида наличием в первом члене слагаемого, пропорционального  $\gamma_a - \gamma_{\text{ва}}$ . Поскольку слагаемые в этом члене разного знака (при  $w > 0$  первое

меньше, а второе больше нуля), то изменение  $q_m$  во времени под влиянием  $w$  всегда меньше (по модулю) по сравнению с изменением, обусловленным вторым слагаемым ( $-w \partial q_m / \partial z$ ), которое только и принято учитывать в моделях образования облаков.

Учет именно этого эффекта, наряду с оценкой по (11) локального (а не индивидуального) изменения температуры под влиянием  $w$ , позволил объяснить особенности образования облаков в тропическом циклоне в целом и глаза его в частности [Матвеев Ю.Л., 1997; Матвеев Л.Т., 2000].

Воспользовавшись формулой (3) и уравнением статики (10), приведем производную  $\partial q_m / \partial z$  в (12) к виду:

$$\frac{\partial q_m}{\partial z} = 0,622 \frac{E}{pT} \left( \frac{g}{R} - \frac{L\gamma}{R_p T} \right), \quad (15)$$

где использовано также уравнение (2) и соотношение

$$\partial E / \partial z = (dE / dT) \partial T / \partial z = -LE\gamma / (R_p T^2). \quad (16)$$

С учетом (7), (8) и (15) уравнение (12) приобретает вид

$$\frac{\partial q_m}{\partial t} = w \frac{Lq_m}{R_p T^2} (\gamma - \gamma_{ва}) - \left( u \frac{\partial q_m}{\partial x} + v \frac{\partial q_m}{\partial y} \right) + \varepsilon_q. \quad (17)$$

В случае ненасыщенного влажного воздуха уравнения для  $T$  и  $q$  получим, если в (11) и (12) положим  $\gamma_{ва} = \gamma_a$ . Выпишем только слагаемые, обусловленные  $w$ :

$$\partial T / \partial t = w(\gamma - \gamma_a), \quad (18)$$

$$\partial q / \partial t = -w \partial q / \partial z, \quad (19)$$

поскольку адвективный и турбулентный члены сохраняют тот же вид, что и для насыщенного воздуха (с заменой в (13)  $\gamma_{ва}$  на  $\gamma_a$ ).

Уравнения (11), (17) – (19) позволяют объяснить ряд особенностей формирования облаков и осадков. Практически все виды облаков (и не только слоистообразных, но и конвективных [Матвеев Ю.Л., 1997]) образуются в областях пониженного давления (циклонах), где под влиянием сходимости (конвергенции) воздушных потоков формируются восходящие вертикальные движения ( $w > 0$ ) синоптического масштаба, скорость которых в нижней части тропосферы растет с высотой ( $\partial w / \partial z > 0$ ).

Поскольку выше приземного слоя (толщина которого всего лишь несколько десятков метров) термическая стратификация всюду и всегда сухоустойчивая ( $\gamma < \gamma_a$ ), а  $q$  уменьшается с высотой (ибо водяной пар поступает с земной поверхности), то из (18) и (19) следует, что при  $w > 0$  на фиксирован-

ных уровнях в ненасыщенном воздухе температура воздуха понижается ( $\partial T / \partial t < 0$ ), а массовая доля увеличивается ( $\partial q / \partial t > 0$ ) во времени. Тот и другой фактор ведут к тому, что относительная влажность  $f = q / q_m$  в восходящем потоке растет и на одном из уровней ( $z_k$ ) достигает 100 %. Под влиянием  $w > 0$  и  $\partial w / \partial z > 0$  в восходящем потоке температура понижается, а вертикальный градиент  $\gamma$  увеличивается во времени.

Выше уровня конденсации  $z_k$  (в облаке) могут наблюдаться два существенно разных термических режима:

а) при влажноустойчивой ( $\gamma < \gamma_{ва}$ ) стратификация на фиксированных уровнях, согласно (11) и (17), температура воздуха и массовая доля водяного пара уменьшаются во времени:  $\partial T / \partial t < 0$ ;  $\partial q_m / \partial t < 0$ ;

б) при влажнонеустойчивой ( $\gamma > \gamma_{ва}$ ) стратификация  $T$  и  $q_m$  на фиксированных уровнях, наоборот, увеличивается во времени:  $\partial T / \partial t > 0$ ,  $\partial q_m / \partial t > 0$ .

При первом режиме ( $\gamma < \gamma_{ва}$ ) формируется слоистообразная (фронтальная) облачность типа Ns–As–Cs. Конденсирующаяся масса водяного пара ( $\partial q_m / \partial t < 0$ ) переходит в жидкое состояние – в водность облака.

При втором режиме ( $\gamma > \gamma_{ва}$ ) условия формирования облака существенно отличаются от первого режима. Первое слагаемое в (17) в этом случае меньше нуля только при нисходящем движении воздуха ( $w < 0$ ). При восходящем же движении ( $w > 0$ ) массовая доля водяного пара под влиянием  $w$  увеличивается во времени:  $\partial q_m / \partial t > 0$ . Это означает, что водность в такой восходящей струе уменьшается во времени.

Движение воздуха при  $\gamma > \gamma_{ва}$  имеет характер струй. При этом только в нисходящей струе происходит конденсация водяного пара ( $\partial q_m / \partial t < 0$ ) и образование облака. В восходящей струе водность уменьшается во времени – облако полностью или частично рассеивается. При  $\gamma > \gamma_{ва}$  сильно развит турбулентный обмен, представленный последним слагаемым в (17). Согласно [Бекряев, 1991; Матвеев Ю.Л., 2001], турбулентное перемешивание – по горизонтали и вертикали – играет важную роль в образовании и увеличении размеров облака. Благодаря ему капли, образовавшиеся в нисходящих струях, проникают в струи с восходящим движением – формируется более однородное облако. Тем не менее, согласно данным измерений, в любом облаке и особенно в мощном кучевом или кучево-дождевом наблюдаются хорошо выраженная неоднородность в полях вертикальных движений и водности облака [Матвеев Л.Т., 2000].

Отметим, что такие же особенности наблюдаются в изменении температуры во времени. Согласно (17), только при  $\gamma < \gamma_{ва}$  температура воздуха понижается во времени при восходящем движении. Если же  $\gamma > \gamma_{ва}$ , то при том же вос-

ходящем движении температура уже увеличивается во времени и тем самым способствует уменьшению водности облака.

Перепишем первое слагаемое в (11) в виде:

$$(\partial T / \partial t)_w = w(\gamma - \gamma_a) + w(\gamma_a - \gamma_{ва}). \quad (20)$$

Первое слагаемое здесь – изменение температуры под влиянием  $w$  в ненасыщенном воздухе: оно при  $w > 0$  меньше нуля (ибо  $\gamma < \gamma_{ва}$ ). Второе же слагаемое описывает влияние конденсации водяного пара. В этом легко убедиться, если, привлекая соотношения (7) и (8), составить разность:

$$\gamma_a - \gamma_{ва} = \gamma_a \frac{L(b'L - b'')}{1 + b'L^2}, \quad (21)$$

где  $b'$  и  $b''$  – множители в знаменателе (при  $L^2$ ) и числителе (при  $L$ ) соотношения (7).

Оценим скорость  $(\partial \delta / \partial t)$  увеличения массовой водности ( $\delta$ ) облака под влиянием вертикальной скорости. Эта скорость равна с обратным знаком скорости возрастания  $q_m$ . Согласно (17),

$$(\partial \delta / \partial t)_w = -w \frac{Lq_m}{R_{II}T^2} (\gamma - \gamma_{ва}). \quad (22)$$

При восходящем движении ( $w > 0$ ) на фиксированных уровнях водность увеличивается во времени ( $\partial \delta / \partial t > 0$ ) при  $\gamma < \gamma_{ва}$  и уменьшается при  $\gamma > \gamma_{ва}$ .

Под влиянием изменения величин в правой части (22) производная  $\partial \delta / \partial t$ , а вместе с нею и водность облака могут изменяться в широких пределах. Разность  $\gamma - \gamma_{ва}$  может быть как больше, так и меньше нуля. Однако в условиях достаточно интенсивного перемешивания градиент  $\gamma$  не может очень сильно отличаться от  $\gamma_{ва}$ . Принимая  $w = 1$  м/с и  $\gamma - \gamma_{ва} = 0,1$  °C/100 м, на основе (22) получаем следующие значения массовой водности облака через 1 час после начала конденсации вблизи уровня  $p = 950$  гПа:

$T, \text{ }^\circ\text{C}$	-30	-20	-10	0	10	20	30	40
$\delta, \text{ г/кг}$	0,085	0,244	0,467	1,04	1,98	3,55	6,09	10,02

Естественно, что при других значениях  $w$  и  $\gamma - \gamma_{ва}$ , от которых зависимость  $\delta$  линейна, будут наблюдаться другие  $\delta$ , однако во всех случаях сохраняется одна важная особенность: с ростом температуры водность увеличивается. Многочисленные данные наблюдений, приведенные, в частности, в [Матвеев Л.Т., 2002], согласуются с этим заключением: водность одних и тех же форм облаков

тем больше, чем выше температура; водность облака среднего и особенно верхнего яруса существенно меньше, чем облаков нижнего яруса.

В согласии с экспериментальными данными находится связь между вертикальной скоростью и отклонением температуры от среднего значения, вытекающая из уравнения (11): в случае влажнонеустойчивой стратификации ( $\gamma > \gamma_{\text{ва}}$ ) при восходящем движении ( $w > 0$ ) температура увеличивается во времени ( $\Delta T > 0$ ). По данным измерений [Матвеев Л.Т., 2002] в мощных кучевых (Cu cong) и кучево-дождевых (Cb) облаках отмечается тесная связь между  $w$  и  $\Delta T$ : коэффициенты корреляции достигают 0,80 – 0,90. Эти данные одновременно свидетельствуют о том, что в Cu cong и Cb преобладает влажнонеустойчивая стратификация (в противном случае связь между  $w$  и  $\Delta T$  была бы отрицательной).

Используем полученные соотношения для объяснения (понимания) некоторых других известных из наблюдений фактов. Изменение температуры на  $\Delta T$  за время  $\Delta t$  на некотором уровне  $z_1$  под облаком (в ненасыщенном воздухе)

$$\Delta T_1 = w(\gamma - \gamma_a) \Delta t.$$

Вблизи нижней границы, но уже в облаке на уровне  $z_2$ , приращение температуры, согласно (20),

$$\Delta T_2 = \Delta T_1 + \Delta T_{\text{кон}},$$

где  $\Delta T_{\text{кон}} = w(\gamma_a - \gamma_{\text{ва}}) \Delta t$  – рост  $T$  за счет конденсации водяного пара. При восходящем движении ( $w > 0$ ) температура на уровне  $z_2$  (в облаке) понижается во времени более медленно (на величину  $\Delta T_{\text{кон}}$ ), чем на уровне  $z_1$ . Нетрудно видеть, что под влиянием конденсации вертикальный градиент температуры ( $\gamma$ ) между уровнями  $z_1$  и  $z_2$  за время  $\Delta t$  уменьшится на величину

$$\Delta \gamma = -w(\gamma_a - \gamma_{\text{ва}}) - \Delta t / (z_2 - z_1).$$

При  $w = 1$  см/с,  $\gamma_a = 0,5$  °C/100 м и  $z_2 - z_1 = 100$  м градиент  $\gamma$  вблизи нижней границы облака уже через 3 ч уменьшится на 0,54 °C /100 м.

Отсюда следует, что обсуждаемые эффекты вносят существенный вклад в формирование слоев с замедленным падением или инверсионным распределением температуры вблизи нижней границы облаков (в частности, фронтальных Ns-As), равно как в формирование фронтальных разделов в целом.

Таков же механизм образования надоблачных инверсий температуры вблизи верхней границы облаков (прежде всего Sc-St, Ac), когда они оказываются в поле нисходящих вертикальных движений ( $w < 0$ ).

Поскольку в циклоне в целом (а не только во фронтальных зонах) наблюдаются восходящие движения, то сопровождающая их конденсация водяного пара способствует повышению температур между циклоном и окружающей его

средой. А эта последняя (разность) увеличивает адвективный приток тепла и влаги в циклон и способствует его саморазвитию.

Нельзя не обратить внимания на одну трудность, возникающую при прогнозе облаков. Из уравнений (18) и (22) следует, что приращения (за время  $\Delta t$ ) температуры  $\Delta T$  и влажности облака  $\Delta \delta$  связаны между собой соотношением

$$\Delta \delta = -\frac{Lq_m}{R_{\text{п}} T^2} \Delta T. \quad (23)$$

Если здесь перейти от массовой ( $\delta$ ) к объемной  $\delta^* = \rho \delta$  влажности облака, то (23) примет вид:

$$\Delta \delta^* = -b \Delta T; \quad b = \frac{LE}{R_{\text{п}}^2 T^3}. \quad (24)$$

Множитель  $b$ , зависящий только от  $T$ , принимает следующие значения:

$T, ^\circ\text{C}$	-20	-10	0	10	20
$b, \text{г}/(\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C})$	0,091	0,185	0,352	0,633	1,083

Из приведенных данных следует: уже при повышении температуры только на  $1^\circ\text{C}$  влажность облака или тумана уменьшается на  $0,1 - 0,3 \text{ г}/\text{м}^3$  при  $T < 0^\circ\text{C}$  и на  $0,5 - 1,0 \text{ г}/\text{м}^3$  при  $T > 0^\circ\text{C}$ . Поскольку реальная влажность облаков и туманов такого же порядка величины, то это означает, что ошибка измерения, моделирования или прогноза, во всяком случае, не должна превышать  $1^\circ\text{C}$ , поскольку уже при такой ошибке существующее облако исчезнет или возникнет фиктивное облако.

Соотношение (24) позволяет объяснить такой факт, как уменьшение числа туманов и даже дымок в крупном городе по сравнению с окружающей его местностью. В качестве примера приводим данные о числе туманов за 10 лет (1971–1980 гг.) в Москве (ВДНХ) и Волоколамске:

	Зима	Лето
Москва (ВДНХ)	22	11
Волоколамск	43	54

В соотношении (24) под  $\Delta T$  можно понимать разность температур между крупным городом ( $T_{\text{Г}}$ ) и окружающими его пунктами ( $T_{\text{окр}}$ ):  $\Delta T = T_{\text{Г}} - T_{\text{окр}}$ . За тот же 10-летний период средние разности температур воздуха между Москвой (ВДНХ) и Волоколамском составили  $1,0^\circ\text{C}$  зимой и  $1,1^\circ\text{C}$  летом.

Очевидно, что повышение температуры воздуха в Москве на эти значения приводит к уменьшению влажности столь значительному, что какая-то часть туманов, образовавшихся под влиянием общих для города и окрестностей метеорологических факторов в Москве, исчезает.



В заключение подчеркнем, что уточнения уравнений притока и скорости конденсации водяного пара позволяют объяснить ряд известных из наблюдений особенностей формирования и строения облаков.

### ***Литература***

1. *Бекряев В.И., Гурович М.В.* Нестационарная численная модель кучево-дождевого облака. // Тр. ГГО им. А.И. Воейкова, 1991, вып. 538, с. 109–121.
2. *Кондратьев К.Я., Матвеев Л.Т.* Основные факторы формирования острова тепла в большом городе. // ДАН, 1999, т. 367, № 2, с. 353–356.
3. *Матвеев Л.Т.* Физика атмосферы. – СПб.: Гидрометеиздат, 2000. – 750 с.
4. *Матвеев Л.Т., Матвеев Ю.Л.* Формирование и особенности острова тепла в большом городе. // ДАН, 2000 а, т. 370, № 2, с. 249–252.
5. *Матвеев Л.Т., Матвеев Ю.Л.* Особенности образования, развития и движения тропических циклонов. // Известия АН, ФАО, 2000 б, т. 36, № 6, с. 760–767.
6. *Матвеев Ю.Л.* Физико-статистический анализ условий образования облаков. // Известия АН, ФАО, 1994, т. 30, № 3, с. 345–351.
7. *Матвеев Ю.Л., Матвеев Л.Т.* О формировании глаза и стены облаков в тропическом циклоне. // ДАН, 1997, т. 353, № 6, с. 815–817.
8. *Матвеев Ю.Л., Матвеев Л.Т.* О механизме образования конвективных облаков. // ДАН, 2001, т. 378, № 4, с. 538–541.