

А.В. Даньшина, Л.Н. Карлин, В.Ю. Чанцев

НЕСИММЕТРИЧНОСТЬ НАПРЯЖЕНИЙ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

A.V. Danshina, L.N. Karlin, V.Yu. Chantsev

THE STRESS ASYMMETRY OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID

В статье рассматривается теоретическое обоснование возможности использования несимметричного тензора поверхностных напряжений при описании системы уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости. Исследование основано на результатах анализа моментной теории упругости.

Ключевые слова: скорость деформации, тензор напряжений, главные моменты, несимметричная механика жидкости.

The theoretical justification of possibility using of asymmetric surface stresses tensor for the equations system describing of the viscous incompressible fluid dynamics discusses in the article. The study is based on an analysis of the couple-stress theory.

Key words: strain rate, stress tensor, principal moments, asymmetric fluid mechanics.

Введение

Практически, начиная с самого начала развития теории упругости сплошных сред и классической гидродинамики, в экспериментальных исследованиях отмечаются некоторые несоответствия разработанной теории, проявляющиеся в различных эффектах, зависящих от масштабных факторов. Эти эффекты характерны практически для всех сплошных сред, в том числе и для жидкостей, обладающих микроструктурой. Для жидкой среды часть эффектов можно объяснить с помощью общепринятой теории Навье-Стокса, например, температурные скачки и наличие сдвига скорости в потоке. Многие другие невозможно описать с помощью принятой теории механики жидкости. Так наблюдаются отличия от классической теории в исследованиях изменений вязкости жидкости, коэффициентов трения и других поверхностных эффектов [Stokes, 1966, 1984, Devakar, Iyengar, 2008].

Возникающие отличия от классической механики сплошной среды тесно связаны с предположениями, лежащими в основе ньютоновской механики, и рассматривающими частицу среды как материальную точку, а не как более сложный объект, наделенный дополнительными свойствами, описывающими микроструктуру вязкого вещества. Классическая теория упругости описывает свойства тел, у которых между частицами действуют центральные силы. Она основывается на постулате, в котором связь нагрузок между двумя сторонами малого поверхностного элемента описывается исключительно главным вектором сил. Это приводит к симметричному напряженному и деформированному

состоянию. Но теория симметричной упругости не описывает с необходимой точностью явления, происходящие в несжимаемой жидкости. В связи с этим в последние годы активно развивается теория упругости сплошных сред, учитывающая моментное (вращательное) взаимодействие частиц. Это направление механики сплошных сред принято называть моментной теорией упругости. В ней несоответствия классической теории упругости можно исправить путем дополнительных предположений о передаче нагрузок через элемент поверхности не только главным вектором сил, но и главным моментом. Можно сказать, что в рассматриваемой жидкой среде частицы обладают как трансляционными, так и вращательными степенями свободы. Предположение появления дополнительных напряжений в элементарном объеме приводит к несимметричности тензора напряжений. Теория была предложена еще Коссера в первые годы 20-го столетия [Cosserat E., Cosserat F., 1908], и развита в середине прошлого века [Toupin, 1962, Mindlin, Tiersten, 1962, Koiter, 1964, Новацкий В., 1975]. Трехмерные теории так называемых микрополярных сред получили интенсивное развитие только в последние сорок лет, когда учет независимых вращательных степеней свободы оказался необходимым в теории жидких кристаллов и теории ферромагнитных материалов. Формулировка обобщенной теории несимметричных напряжений принадлежит Эрингену [Eringen, 1964, Eringen, Suhubi, 1964]. Хотя его работа в первую очередь затрагивала микроупругость твердых тел (микроморфная упругость), она была вполне применима ко всем сплошным средам. Разработанная им физическая модель, основана на том, что любой макрообъем сплошной среды состоит из элементарных объемов, отличных от точки (в противовес классической теории). Каждый подобный элемент способен деформироваться, что влечет за собой деформацию макрообъема [Eringen, 1966].

К большому сожалению, свойства рассматриваемой жидкости характеризуются 22 коэффициентами вязкости, и даже в самом простом линейном случае ее динамика описывается минимум 19 уравнениями в частных производных с 19 неизвестными, что является крайне затруднительным для получения каких бы то ни было решений. В связи с этим работы по распространению теории несимметричной упругости на динамику несжимаемой жидкости были продолжены лишь в последние годы [Иванов, Шардаков, 2007, Devakar, Iyengar, 2008, Виноградова, Ерофеев, 2009]. Однако в большинстве работ не рассматривались случаи преобразования классических уравнений движения Навье-Стокса для несжимаемой жидкости с учетом несимметричности поверхностных напряжений вдали от твердых стенок. Хотя в естественных условиях и лабораторных экспериментах наблюдались динамические структуры, которые без привлечения теории несимметричной упругости описываются не достаточно точно.

В представленной работе рассматривается возможность преобразования уравнений Навье-Стокса с учетом несимметричности касательных поверхностных напряжений, формируемых за счет деформационных свойств скоростей завихренности элементарных объемов жидкости.

Теоретическое обоснование введения несимметричных напряжений в уравнения динамики вязкой несжимаемой жидкости

Классическая механика жидкости основывается на постулате ньютоновской механики, заключающемся в том, что любая среда представлена элементарными объемами, состоящими из элементарных точек. Это предположение позволяет рассматривать относительное перемещение двух точек элементарного объема жидкости, как результат поступательного и вращательного движения. Деформация выделенного объема будет описываться изменением относительной скорости рассматриваемых двух точек. В этом случае приращения составляющих относительной скорости перемещения точек du , dv и dw будут описываться следующими уравнениями [Шлихтинг, 1974]:

$$\begin{aligned} du &= (\varepsilon'_x dx + \varepsilon'_{xy} dy + \varepsilon'_{xz} dz) + (\eta dz - \chi dy); \\ dv &= (\varepsilon'_{yx} dx + \varepsilon'_y dy + \varepsilon'_{yz} dz) + (\chi dx - \xi dz); \\ dw &= (\varepsilon'_{zx} dx + \varepsilon'_{zy} dy + \varepsilon'_z dz) + (\xi dy - \eta dx), \end{aligned} \tag{1}$$

где ε'_{ij} – тензор скоростей деформации, который равен:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{ij} &\equiv \begin{pmatrix} \varepsilon'_x & \varepsilon'_{xy} & \varepsilon'_{xz} \\ \varepsilon'_{yx} & \varepsilon'_y & \varepsilon'_{yz} \\ \varepsilon'_{zx} & \varepsilon'_{zy} & \varepsilon'_z \end{pmatrix} \equiv \\ &\equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2}$$

а ξ , η и χ – составляющие скорости кручения, представленные как:

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right); \quad \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad \chi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Матрица ε'_{ij} является симметричной, а составляющие скорости кручения являются составляющими вектора $\omega = \text{rot } V$. Влияние скорости деформации и скорости кручения на изменение положения одной точки элементарного объема относительно другой, т.е. влияние на характер деформации этого объема, можно продемонстрировать на рис. 1. Это означает, что каждой представленной величине можно дать геометрическую интерпретацию. Видно, что смещение точки B относительно точки A в плоской декартовой системе координат характеризует деформацию элементарного объема только в результате действия дефор-

мационных скоростей (рис. 1, *a*). Эти деформации возникают только под действием недиагональных членов тензора деформационных скоростей ε'_{ij} . Сумма диагональных членов деформационной матрицы ε'_{ii} представляет собой объемное расширение или дивергенцию скорости $\text{div } V$, которая в несжимаемой жидкости равняется нулю.

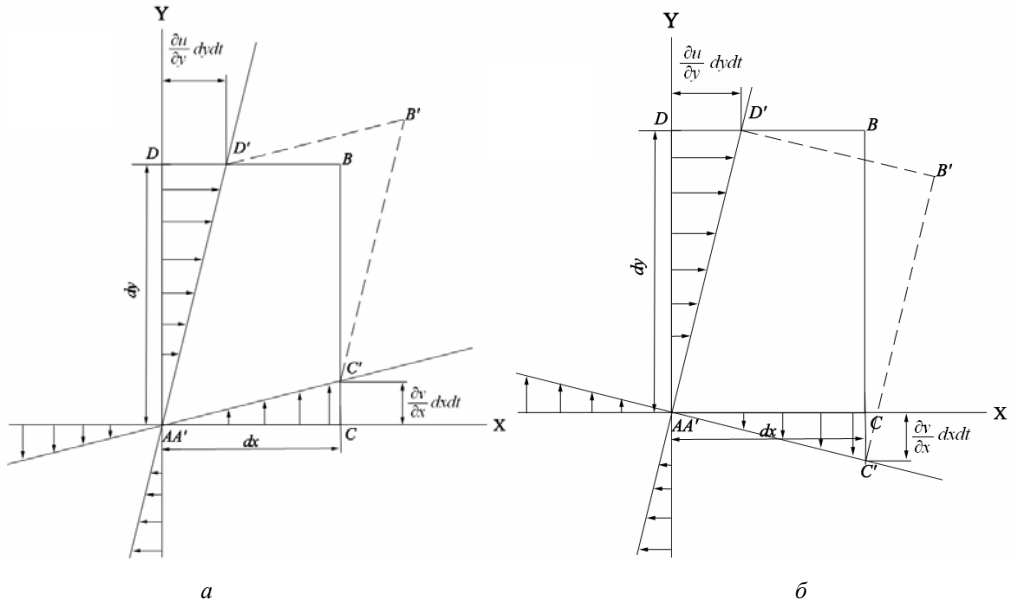


Рис. 1. Локальное искажение элемента жидкости, когда:

$$a - \varepsilon'_{xy} = \varepsilon'_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) > 0, \quad b - \xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \neq 0$$

Скорости кручения порождают только разворот элементарного объема жидкости (рис. 1, *б*) и не приводят к изменениям его формы, т.е. к деформации. Можно сказать, что элемент жидкости осуществляет вращательные движения как твердое тело. Это является одним из основных допущений классической механики жидкости. Именно оно позволяет доказывать теорему взаимности касательных напряжений. Согласно этой теореме условием равновесия элементарного объема будет уравнение моментов:

$$i_1 \times \sigma_1 + i_2 \times \sigma_2 + i_3 \times \sigma_3 = (\tau_{23} - \tau_{32}) \cdot i_1 + (\tau_{31} - \tau_{13}) \cdot i_2 + (\tau_{12} - \tau_{21}) \cdot i_3 = 0, \quad (3)$$

где i_1, i_2, i_3 – орт-векторы, а τ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) представляют собой касательные составляющие векторов поверхностных напряжений σ_1, σ_2 и σ_3 .

Из уравнения (3) прямо следует, что $\tau_{12} = \tau_{21}, \tau_{13} = \tau_{31}, \tau_{23} = \tau_{32}$. Это доказывает симметричность тензора поверхностных напряжений и означает, что если через какую-либо точку жидкой среды провести три взаимно ортогональные бесконечно малые площадки, то для каждого двух из них проекции вектора напряже-

ния, приложенного к одной из площадок, на нормаль к другой равны между собой. Доказательство симметричности тензора напряжений вытекает и из теоремы моментов [Лойцянский, 2003]. Исходя из этого, можно записать систему уравнений для составляющих девиатора симметричного тензора напряжений в виде одного тензорного уравнения в декартовой системе координат:

$$\sigma'_{ij} = \lambda \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (4)$$

где δ – функция Кронекера $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$; λ и μ – постоянные Ламе или коэффициенты вязкости. Согласно гипотезе Стокса $3\lambda + 2\mu = 0$, что позволяет использовать только один известный коэффициент кинематической вязкости жидкости.

Однако положение о симметричности тензора напряжений в классической гидродинамике основывается на постулате, что жидкость является ньютоновской, т.е. она состоит из элементарных точек, обладающих абсолютной симметрией, а также каждый ее элементарный объем совершает вращения как твердое тело. Совсем иначе обстоит дело, если жидкость рассматривать как набор конечных элементов, обладающих индивидуальными свойствами [Cosserat E., Cosserat F., 1908]. В этом случае закон изменения главного момента количества движения в динамике сплошных сред можно сформулировать следующим образом. Индивидуальная производная от главного момента количества движения конечного объема жидкости равна сумме главного момента внешних объемных сил, поверхностных сил, вектора массовых моментов и моментных нагрузок, приложенных к этому объему и ограничивающей его поверхности. Запишем этот закон относительно бесконечно малого, но конечного элемента жидкости в виде тетраэдра (рис. 2) [Новацкий, 1975]:

$$\frac{d}{dt} \int_A r \times \rho V \delta A = \int_V (r \times \rho F + Y) \delta A + \int_S (r \times \sigma_n + m_n) \delta S, \quad (5)$$

где r – радиус-вектор, отсчитываемый от некоторой точки элементарного объема; V – вектор скорости; F и Y – векторы массовых сил и моментов; σ_n и m_n – поверхностные и моментные напряжения; δA и δS – элементы объема и поверхности конечного объема жидкости; ρ – плотность воды.

Преобразуем левую часть уравнения (5), и применим преобразование Остроградского-Гаусса к поверхностному интегралу в правой части. В итоге получим:

$$\int_A r \times \rho \frac{dV}{dt} \delta A = \int_A \left[r \times \left(\rho F + \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial r}{\partial x_1} \times \sigma_1 + \frac{\partial r}{\partial x_2} \times \sigma_2 + \frac{\partial r}{\partial x_3} \times \sigma_3 \right] \delta A + \int_A \left(Y + \frac{\partial m_1}{\partial x_1} + \frac{\partial m_2}{\partial x_2} + \frac{\partial m_3}{\partial x_3} \right) \delta A. \quad (6)$$

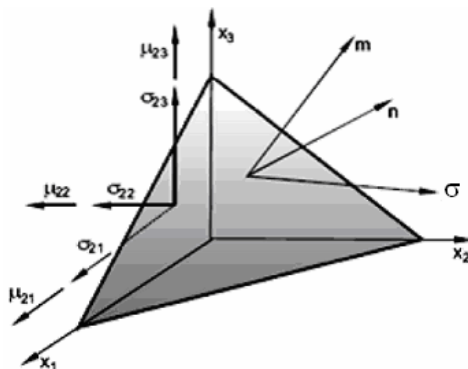


Рис. 2. Распределение поверхностных и моментных напряжений на поверхности элементарного тетраэдра

Переносим все члены уравнения в левую часть и учитывая уравнение динамики сплошной среды в напряжениях [Лойцянский, 2003]:

$$\rho \frac{dV}{dt} = \rho \mathbf{F} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_3}, \quad (7)$$

получим

$$\int_A \left(-\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_1} \times \boldsymbol{\sigma}_1 - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_2} \times \boldsymbol{\sigma}_2 - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_3} \times \boldsymbol{\sigma}_3 - \frac{\partial \mathbf{m}_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{m}_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{m}_3}{\partial x_3} - \mathbf{Y} \right) \delta A = 0. \quad (8)$$

Отсюда, имея в виду произвольность объема интегрирования A и то обстоятельство, что

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_1} = \mathbf{i}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_2} = \mathbf{i}_2, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_3} = \mathbf{i}_3,$$

мы легко получаем баланс поверхностных и моментных напряжений:

$$\mathbf{i}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_1 + \mathbf{i}_2 \times \boldsymbol{\sigma}_2 + \mathbf{i}_3 \times \boldsymbol{\sigma}_3 + \frac{\partial \mathbf{m}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{m}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{m}_3}{\partial x_3} + \mathbf{Y} = 0. \quad (9)$$

Полученное уравнение показывает, что тензор поверхностных напряжений не является симметричным, т.к. оно отличается от уравнения (3). Для симметричности тензора напряжений необходимо, чтобы

$$\frac{\partial \mathbf{m}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{m}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{m}_3}{\partial x_3} + \mathbf{Y} = 0.$$

Как и у Лойцянского [Лойцянский, 2003, с. 71], но уже с учетом несимметричности, раскладывая свободную энергию в окрестности естественного со-

стояния в ряд Тейлора и пренебрегая величинами выше второго порядка, получим определяющее уравнение в тензорном виде для поверхностных напряжений [Новацкий, 1975], которое можно записать в следующем виде:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\sigma_{ij}^S + 2\alpha\sigma_{ij}^A + \lambda\sigma_{kk}\delta_{ij}, \quad (10)$$

где σ_{ij}^S , σ_{ij}^A – симметричная и антисимметричная части тензора напряжений, α – постоянная деформации.

Симметричная часть тензора поверхностных напряжений соответствует симметричному тензору напряжений классической механики жидкости [Лойцянский, 2003]:

$$\sigma_{ij}^S = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (11)$$

Антисимметричная часть тензора отличается от классической теории и содержит элемент кручения:

$$\sigma_{ij}^A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \epsilon_{ijk} \omega_k, \quad (12)$$

где ϵ_{ijk} – единичный тензор третьего ранга Леви-Чивита; ω_k – составляющая вектора угловой скорости вращения элементарного объема жидкости.

Из выражения (12) следует, что при условии несимметричности тензора поверхностных напряжений угловая скорость не равняется тождественно ротору линейной скорости, а имеет дополнительный элемент γ , приводящий к дополнительной деформации элементарного объема:

$$\omega = \frac{1}{2} \text{rot} V - \gamma. \quad (13)$$

Такое предположение принято и в работе [Виноградов, Ерофеев, 2009]. Следует отметить, что в случае обнуления вектора γ , тензор напряжений принимает классический вид и становится симметричным. Введенный добавочный член в (13) как раз и должен обеспечивать формирование деформации за счет кручения, позволяя упростить систему описания распределения скорости движения несжимаемой жидкости в рамках моментной теории вязкости.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию скоростей кручения в виде (13) на рис. 3, который построен аналогично рис. 2, б. В этом случае перемещение точки B относительно точки A совершается с деформацией фигуры $ACBD$. Вновь образовавшаяся фигура $A''C''B''D''$ отличается по форме от $A'C'B'D'$, которая была получена при вращении (рис. 1, б), но должна сохранять первоначальную площадь в случае несжимаемой жидкости. Это возможно, если каждая составляющая скорости кручения домножается на величины $(1 - b)$ и $(1 + b)$, которые пропорциональны уже введенной скорости деформации (рис. 3).

Обеспечение неизменности объема деформируемой жидкости при вращательном движении позволяет представить составляющие скорости кручения как:

$$\omega_k = \frac{1}{2} \left[(1-b) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - (1+b) \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right], \quad (14)$$

где b – постоянный коэффициент.

Следовательно, составляющие скорости вращения с учетом (14) можно записать в матричном виде:

$$\omega_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \gamma_k, \quad (15)$$

где

$$\gamma_k = \frac{b}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (16)$$

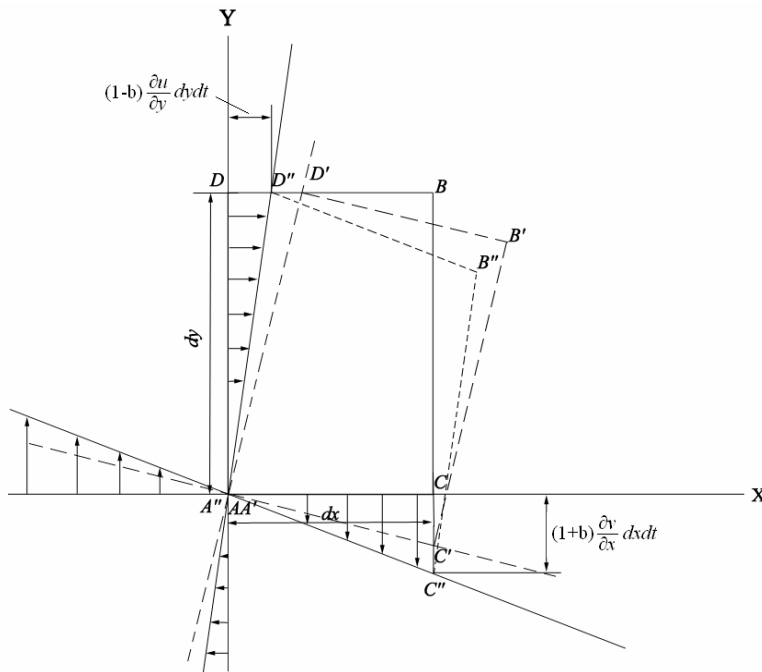


Рис. 3. Локальная деформация объема жидкости, когда $\omega_3 = \frac{1}{2} \left[(1-b) \frac{\partial u}{\partial y} - (1+b) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \neq 0$

Хорошо видно, что, действительно, введенный добавочный член в уравнении (13) пропорционален скорости деформации элементарного объема несжимаемой жидкости. Тогда составляющие тензора напряжений (10) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = -p + 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \lambda \operatorname{div} V; \\ \sigma_{22} = -p + 2\mu \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \lambda \operatorname{div} V; \\ \sigma_{33} = -p + 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3} + \lambda \operatorname{div} V; \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \tau_{12} = \left(\mu + \frac{1}{2}\alpha b\right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right), \tau_{13} = \left(\mu - \frac{1}{2}\alpha b\right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right); \\ \tau_{21} = \left(\mu - \frac{1}{2}\alpha b\right) \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right), \tau_{23} = \left(\mu + \frac{1}{2}\alpha b\right) \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right); \\ \tau_{31} = \left(\mu + \frac{1}{2}\alpha b\right) \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right), \tau_{32} = \left(\mu - \frac{1}{2}\alpha b\right) \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right). \end{cases} \quad (18)$$

При рассмотрении движения несжимаемой жидкости в уравнениях диагональных членов тензора напряжений (17) величина $\operatorname{div} V = 0$, что позволяет не рассматривать постоянный коэффициент λ , т.к. в несимметричной механике сплошных сред [Лойцянский, 2003, с. 66] он не может быть выражен через μ в связи с тем, что $3\lambda + 2\mu > 0$. Остаются неизвестными коэффициенты α и b . Если считать, что бесконечно малый элемент жидкости можно принять твердым, то коэффициент b как и α принимается постоянным. Эти постоянные коэффициенты должны определяться экспериментально, как предлагается в [Шлихтинг, 1974, Иванов, Шардаков, 2007].

Для вывода основных дифференциальных уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости, как и в классической механике жидкости, используем уравнение динамики сплошных сред в напряжениях (7). Запишем это векторное уравнение в виде системы матричных уравнений и в правой части развернем составляющие тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_1}{dt} &= \rho F_1 + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3}; \\ \rho \frac{dv_2}{dt} &= \rho F_2 + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3}; \\ \rho \frac{dv_3}{dt} &= \rho F_3 + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (19)$$

Останавливаясь на случае изотермического движения, когда $\rho = \operatorname{const}$ и $\mu = \operatorname{const}$, а также подставляя выражения для компонент несимметричного тен-

зора напряжений (17) и (18) в уравнения системы (19), получим систему основных уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= F_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \left(\nu + \frac{\alpha b}{2\rho} \right) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \left(\nu - \frac{\alpha b}{2\rho} \right) \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} + \frac{\alpha b}{2\rho} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\alpha b}{2\rho} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3 \partial x_1}; \\ \frac{dv_2}{dt} &= F_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \left(\nu - \frac{\alpha b}{2\rho} \right) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \left(\nu + \frac{\alpha b}{2\rho} \right) \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} - \frac{\alpha b}{2\rho} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\alpha b}{2\rho} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3 \partial x_2}; \\ \frac{dv_3}{dt} &= F_3 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \left(\nu + \frac{\alpha b}{2\rho} \right) \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \left(\nu - \frac{\alpha b}{2\rho} \right) \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2} + \frac{\alpha b}{2\rho} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\alpha b}{2\rho} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2 \partial x_3}, \end{aligned} \quad (20)$$

где ν – коэффициент динамической вязкости, $\nu = \mu/\rho$.

Совокупность уравнений (20) несимметричной механики сплошных сред представляет собой нелинейную систему уравнений в частных производных второго порядка, отличную от уравнений Навье-Стокса. Проекция объемной силы F_1, F_2, F_3 представляющие собой силы тяжести, инерционные и кориолисовы силы, задаются функциями координат и скоростей движения жидкости. В случае стремления коэффициента b к нулю ($b \rightarrow 0$) полученная система уравнений движения (20) переходит в систему уравнений Навье-Стокса классической гидродинамики. Появление дополнительных членов в правой части уравнений движения, представленных смешанными производными второго порядка от поперечных составляющих скорости движения, демонстрирует более тесную связь между проекциями вектора течения на оси ортогональной системы координат.

Выводы

Полученная система уравнений движения для несимметричной механики жидкости наглядно показывает качественное отличие от классической теории Навье-Стокса. Представленное теоретическое исследование позволяет минимизировать вычислительные затраты при расчете движения несжимаемой вязкой жидкости в рамках несимметричной теории вязких взаимодействий. Изменение направления вектора перемещения определяется теперь не только распределением давления или нормальных напряжений и особенностями граничных условий при решении задач гидродинамики, но также и характером вязких взаимодействий. В данной постановке уравнения движения позволяют рассчитывать эволюцию динамики упорядоченных структур, таких как, например, грибовидные или дипольные вихревые структуры. Был установлен ряд параметров, которые должны быть определены в процессе эксперимента. Исходя из общих соображений, новые дополнительные параметры вязкости становятся значимыми только при скоростях, при которых характер движения жидкости уже нельзя называть чисто ламинарным, т.е. число Рейнольдса приближается к своему критическому значению или превосходит его. Данный факт определяет область ис-

следований для практического подтверждения применимости теории несимметричной механики жидкости для описания поведения реальных жидкостей. В частности, это позволяет наметить схему возможного эксперимента, а также необходимую точность измерений и методику обработки данных для получения конкретных определяющих параметров, таких как, например, неклассические вязкости.

Литература

1. *Виноградова Ю.В., Ерофеев В.И.* Вывод уравнений динамики нелинейной среды Коссера // Вестник Нижегородского ун-та им. Н.И. Лобачевского, 2009, № 6 (1), с. 159-162.
2. *Иванов А.С., Шардаков И.Н.* Аналитическое исследование течения несжимаемой вязкой жидкости в плоском канале в рамках несимметричной теории типа Коссера // Вестник Пермского ун-та. Математика. Механика. Информатика, 2007, вып. 7 (12), с. 101-107.
3. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
4. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
5. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974. – 712 с.
6. *Cosserat E., Cosserat F.* Théorie des Corps Déformables. – Paris: Hermann, 1908. – 746 p.
7. *Devakar M., Iyengar T.K.V.* Stokes' Problems for an Incompressible Couple Stress Fluid // Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 2008, Vol. 1, No. 2, p. 181-190.
8. *Eringen A.C.* Simple microfluids // Int. J. Eng. Sci. 1964. 2. p. 205-207.
9. *Eringen A.C., Suhubi E.S.* Nonlinear theory of simple micro-elastic solids // Int. J. Eng. Sci. 1964. N. 2, p. 189-203.
10. *Eringen A.C.* Theory of micropolar fluids // J. Math. Mech. 1966. N. 16, p.11–18
11. *Koiter, W.T.* Couple stresses in the theory of elasticity, I and II. // Proc. Ned. Akad. Wet. (B), 1964. N. 67, p. 17-44.
12. *Mindlin, R.D., Tiersten, H.F.* Effects of couple-stresses in linear elasticity // Arch. Rational Mech. Anal. 1962. N. 11, p. 415-488.
13. *Stokes V.K.* Couple stresses in fluids // Phys. Fluids, 1966. 9 (9), p. 1709-1715.
14. *Stokes V.K.* Theories of Fluids with Microstructure. – New York: Springer, 1984. – 312 p.
15. *Toupin, R. A.* Elastic materials with couple-stresses // Arch. Rational Mech. Anal., 1962. N. 11, p. 385-414.