С.Д. Винников, Е.А. Доля, Е.В. Давыденко

АНАЛИЗ КРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ РЕЙНОЛЬДСА И ФРУДА ПРИМЕНИТЕЛЬНО К АВТОМОДЕЛЬНОЙ ОБЛАСТИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

S.D. Vinnikov, E.A. Dolya, E.V. Davydenko

ANALYSIS OF CRITERIA DEPENDENCY OF REYNOLDS AND FROUDE RELATION TO SCALING OF THE TURBULENT FLOW

Рассматриваются вопросы, связанные с общей трактовкой критериев Рейнольдса и Фруда, а также модулей гидравлических характеристик применительно к турбулентному потоку. Выполнена интерпретация графика А.П. Зегжды.

Ключевые слова: равномерный поток, критерии Рейнольдса и Фруда, модули скорости и расхода, график А.П. Зегжды.

The questions related to the general interpretation of the criteria of Reynolds and Froude, as well as modules of hydraulic characteristics in relation to turbulent flow. Interpolation is performed chart A.P. Zegzhda.

Keywords: uniform flow, the Reynolds number and Froude, modules speed and flow, chart A.P. Zegzhda.

При проектировании гидротехнических сооружений, подлежащих воздвижению на реках, озёрах, водохранилищах и каналов различного назначения применяют три вида исследований: специальное натурное исследование, теоретический анализ дифференциальных уравнений с целью решения конкретной задачи, физическое и математическое моделирование. Ниже мы остановимся только на вопросе физического моделирования явлений, протекающих в водах суши. Под физическим моделированием понимается проведение лабораторного эксперимента на уменьшенной модели водного объекта.

Чаще всего этот вид исследований применяют, когда не удаётся найти решение дифференциального уравнения, описывающего гидравлическое явление, или когда трудно или невозможно изучить его в натуре или стоимость его изучения в натуре чрезвычайно высока.

Чтобы процессы, протекающие на модели, были подобными таковым в натуре, при её изготовлении выполняются определённые требования и, в частности, требование равенства для них (натуры и модели) безразмерных критериев подобия.

Настоящая работа посвящена анализу двух критериев теории гидравлического подобия, а именно, критериев Рейнольдса и Фруда:

$$Re = \frac{\upsilon l}{\nu} \text{ и } Fr = \frac{\upsilon^2}{gl}, \tag{1}$$

где υ – скорость потока; l – характерный размер (в дальнейшем, в качестве характерного размера будет принят гидравлический радиус R); ν – коэффициент кинематической вязкости; g – ускорение свободного падения.

Раскрывая физическую сущность критериев (1) видим, что имеет место несоответствие между содержанием этих формул и их формулировкой. Так, например, в учебниках по гидравлике (см., например, [10]) и других литературных источниках даётся следующее определение этих критериев:

1. Величина Re является безразмерной и представляет собой меру отношения сил инерции к силам трения;

2. Величина Fr является безразмерной и представляет собой меру отношения сил инерции к силам тяжести.

Ниже покажем, не отрицая справедливость зависимостей (1), что приведённые определения не соответствуют действительности.

Критерии (1) получены согласно π-теоремы Букингэма (1917 г.), впоследствии обобщённой Германом Вейлем (1926 г.). π-теорема – основополагающая теорема анализа размерностей величин, характеризующих изучаемое явление. Теорема утверждает, что если имеется физически значимое выражение, включающее в себя n физических переменных, и эти переменные описываются при помощи k независимых фундаментальных физических величин, то исходное выражение эквивалентно выражению, включающему множество из $p = n - k$ безразмерных величин, построенных из исходных переменных. Это позволяет вычислять множество безразмерных величин типа (1) по данным физическим значениям, даже если неизвестно выражение (уравнение, описывающее явление), связывающее эти значения. С выводом этой теоремы можно ознакомиться в специальной литературе [2, 4, 5, 7, 8 и др.]. В названной литературе можно ознакомиться и со вторым методом получения этих критериев подобия – с помощью дифференциального уравнения Навье-Стокса, записанного нами для одномерной задачи в виде:

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \upsilon \frac{\partial \upsilon}{\partial x} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial z^2}, \qquad (2)$$

где t – время; x и z – продольная и вертикальная координаты; F_x – проекция ускорения силы тяжести на ось x; ρ – плотность среды; P – внешнее давление (атмосферное для открытого потока).

Пренебрегая градиентом внешнего давления $\frac{\partial P}{\partial x}$, получим:

$$F_x = \frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \upsilon \frac{\partial \upsilon}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial z^2} \qquad (3)$$

или, выражая проекцию ускорения силы тяжести F_x с учётом уклона водной поверхности I, перепишем его в следующем виде:

$$gI = \frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \upsilon \frac{\partial \upsilon}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial z^2}. \qquad (4)$$

В уравнении (4) слагаемое слева от знака равенства отражает силу тяжести, которая обусловливает движение жидкости, два первых слагаемых справа от знака равенства – силу инерции, последнее слагаемое – силу трения.

С целью вывода критериев подобия (1) с помощью уравнения (4) записывают его для натуры и гидродинамически подобной ей модели. Затем вводятся в рассмотрение масштабные соотношения соответствующих характеристик уравнений, операция с которыми приводит к выводу критериев подобия (1). При этом критерий *Re* получается из комплекса масштабных соотношений характеристик двух последних слагаемых (4), а критерий *Fr* – соотношения характеристик предпоследнего слагаемого и слагаемого слева от знака равенства. Согласно вышеприведённым формулировкам определений критериев подобия, они есть следствие отношений этих слагаемых, то есть критерий Рейнольдса – это отношение силы инерции к силе трения, а критерий Фруда – это отношение силы инерции к силе тяжести. При этом отметим, что эти отношения сил не учитывают первое слагаемое справа от знака равенства в (4) $\frac{\partial \upsilon}{\partial t}$, являющееся составной частью силы инерции. Если его учесть, то тогда придём к необходимости отражения в (1) неоднозначного значения силы инерции, которой соответствует ускоренное или замедленное движение жидкости в русле реки (локальное ускорение).

Покажем это, используя уравнение Сен-Венана, адекватное уравнению Навье-Стокса (4):

$$I = \frac{1}{g}\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + \frac{\upsilon}{g}\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \frac{\upsilon^2}{C^2 R}, \tag{5}$$

где I – уклон водной поверхности неустановившегося потока.

Уравнение (5) можно выразить и через уклоны водной поверхности, отражающие соответствующие силы:

$$I = \Delta I + i_{\text{р}}, \tag{6}$$

где $\Delta I = \pm(I - i_{\text{р}})$ – выражение, отражающее полную силу инерции (при ускоренном движении положительный, а при замедленном – отрицательный знак); $i_p = \frac{\upsilon^2}{C^2 R}$ – уклон при равномерном движении потока.

Теперь, учитывая формулировку критерия подобия Рейнольдса, запишем отношение сил, выраженные через уклоны и обозначим его, например, Re′:

$$\frac{\Delta I}{i_{\text{р}}} = \frac{I - i_{\text{р}}}{i_{\text{р}}} = \frac{I}{i_{\text{р}}} - 1 = \mathrm{Re}'. \tag{7}$$

Анализ (7) показывает, что если наблюдается равномерный турбулентный поток, то число Рейнольдса равняется нулю, если наблюдается ускоренное движение потока ($I > i_р$), то $\mathrm{Re}' > 0$, если замедленное ($I < i_р$), то $\mathrm{Re}' < 0$, т.е. получаем отрицательное значение числа, характеризующего турбулентность потока. Из этого следует, что приведённая выше формулировка критерия подобия Рейнольдса не соответствует его содержанию.

Следующим несоответствием приведенной выше формулировки критерия подобия его содержанию является оценка состояния потока. Спокойный или бурный поток мы определяем по критерию Fr. Из (4) и (5) следует, что сила инерции составляет часть силы тяжести. Следовательно, согласно, формулировке критерия подобия Фруда отношение сил для открытого потока всегда должно быть меньше единицы, т.е. $\mathrm{Fr} < 1$. Однако, при оценке состояния потока по (1) – спокойный или бурный поток получают $\mathrm{Fr} > 1$.

К очередному замечанию отнесём случай равномерного движения потока как ламинарного, так и турбулентного. При равномерном движении вообще силы инерции отсутствуют, следовательно, согласно формулировке критериев подобия Re и Fr, мы не можем оценить степень турбулентности и состояния такого потока, так как числа Re и Fr равняются нулю.

Таким образом, в связи с изложенным выше возникает вопрос: действительно ли характеристикой критериев подобия Рейнольдса и Фруда (1) является отношение силы инерции (тем более части этой силы), соответственно, к силе трения и силе тяжести.

Теперь рассмотрим правомерность применения критерия подобия Рейнольдса в записи (1) к оценке степени турбулентности потока в так называемой автомодельной области графика А.П. Зегжды [2], представленном на рис. 1. Особенностью этого графика является то, что он разработан для равномерного движения потока – случаю, позволяющему определить коэффициент гидравлического сопротивления λ и соответственно рассчитать максимальную силу трения, проявляющуюся при обтекании потоком дна и стенок канала и русла реки. Горизонтальные линии в автомодельной области указывают на то, что при отношении $\dfrac{R}{k} = \mathrm{const}$ коэффициент $\lambda = \mathrm{const}$, т.е. он является модулем – независимой характеристикой от уклона водной поверхности. При изменении уклона водной поверхности при равномерном движении потока, пропорционально ему изменяется и скорость потока. В натурных условиях это утверждение не проверить, так как в русле реки (канала) при $\dfrac{R}{k} = \mathrm{const}$ мы будем иметь только одно значение $\upsilon_р$, пропорциональное $i_р$, где $\upsilon_р$ и $i_р$ – скорость и уклон водной поверхности при равномерном движении потока. Реально это осуществить можно только в гидравлическом лотке с переменным уклоном дна, чем и воспользовался А.П. Зегжда в своих экспериментах [2].

Итак, анализ экспериментальных данных А.П. Зегжды и других исследователей показал, что при равномерном движении открытого потока жидкости модуль гидравлического сопротивления при $\frac{R}{k} = \text{const}$ является величиной постоянной, т.е.

$$\lambda = \frac{2gR}{W^2} = \text{const}\,, \tag{8}$$

где W – модуль скорости [6];

$$W = \frac{\upsilon_p}{\sqrt{i_p}} = C\sqrt{R} = \text{const}, \tag{9}$$

где C – коэффициент Шези.

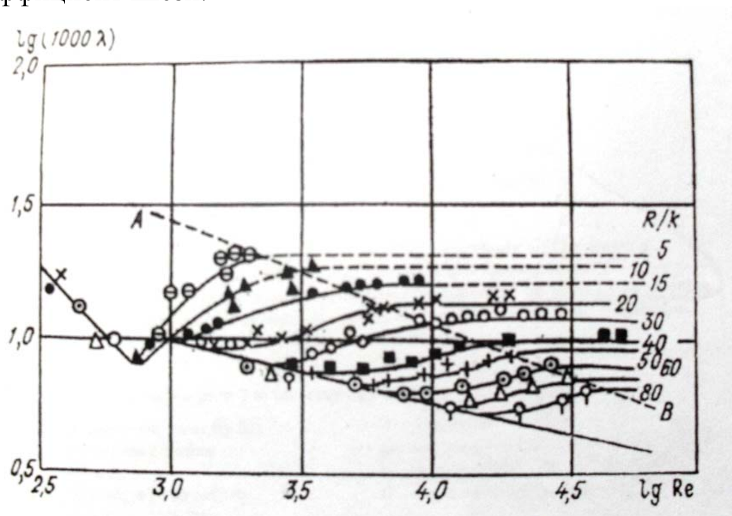

Рис. 1. График А.П. Зегжды

Математическое выражение модуля скорости (9) и модуля расхода

$$K = \frac{Q_p}{\sqrt{i_p}} = \omega C\sqrt{R}\ , \tag{10}$$

где $Q_р$ – расход воды в реке (канале); ω – их поперечное сечение (впервые введены Б.А. Бахметевым [1]).

Они получаются в результате преобразования формулы Шези, предназначенной для расчета средней скорости потока при его равномерном движении.

Б.А. Бахметевым и несколько позже Павловским Н.Н. [6] модули скорости и расхода рекомендуются как “инструмент“ в гидравлических расчетах и не раскрывается их физическая сущность. Правда, Б.А. Бахметев модуль расхода называет величиной, характеризующей пропускную способность русла рек. Но такую же характеристику можно присвоить и другим гидравлическим параметрам: Q, ω, C, R и т.д. Нам представляется, что особенностью модулей W, K, λ и других является их постоянство при равномерном движении потока (и неизменном его поперечном сечении) в случае изменения уклона водной поверхности, о чём уже было упомянуто несколько выше. Покажем это, воспользовавшись экспериментальными данными, приведенными в работе А.П. Згжды [2].

Из рис. 2 следует, что, например, при одном и том же значении гидравлического радиуса R = 6 см и различных уклонах водной поверхности i_p = 0,0005; 0,0007; 0,001 и относительной гладкости дна канала $\frac{R}{k}=20$ получаем одно и то же значение модуля скорости W = 1060 см/с. Аналогичные построения справедливы будут и при рассмотрении модуля расхода K.

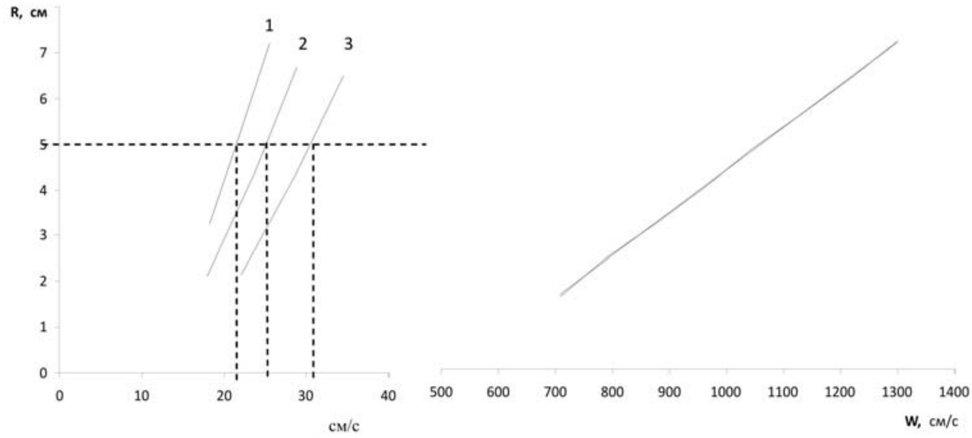

Рис. 2. Графическая иллюстрация доказательства постоянства модуля скорости W при относительной гладкости русла R/k = 20.
Цифры у линий 1, 2, 3 соответствуют уклонам i_p= 0,0005; 0,0007; 0,001

Из сказанного выше следует, что если, например, имеются гидравлические расчеты для какого-либо “стандартного” канала с известным сечением и заложением откосов при уклоне дна $i_д = i_p$, т.е. получены значения модуля скорости W, расхода K, то с их помощью легко можно будет определить требуемые значения гидравлических характеристик при любом другом уклоне дна такого стандартного канала: расход, скорость течения, размывания дна и его заиления. То есть, зная, например, W, находим по формуле (9) при новом значении уклона i_p скорость течения и т.д.

Учитывая, что при $\frac{R}{k}=\text{const}$ коэффициент гидравлического сопротивления λ тоже неизменная величина, следует предположить, что в этом случае и число Рейнольдса также есть постоянная величина. Однако зависимость для Re в (1) не позволяет это предполагать. Из этого следует вывод, что либо мы ошибаемся в своих выводах, либо формулу для Re в записи (1) для развитого турбулентного потока нельзя применять. Действительно, известно, что в турбулентном потоке кинематический коэффициент вязкости $\nu << \nu_T$ – коэффициента виртуальной вязкости, являющейся физической характеристикой турбулентного потока:

$$\nu_T = \frac{A}{\rho}, \tag{11}$$

где A – коэффициент турбулентной вязкости, который согласно В.М. Маккавееву [3], при параболическом распределении скорости по вертикали равномерного потока равен

$$A = \frac{\rho g \upsilon_p R}{2mC}, \tag{12}$$

где коэффициент Базена m = 24.

Решим теперь совместно (1), (11) и (12), тогда получим критерий подобия Рейнольдса для равномерного турбулентного потока

$$Re_T = \frac{\upsilon_p R}{\nu_T} = \frac{2mC}{g} = \text{const}. \tag{13}$$

Как видим, наше предположение о постоянстве числа Рейнольдса при равномерном движении потока и постоянном значении относительной гладкости русла $\frac{R}{k}$, где k обозначает абсолютную шероховатость русла (высоту выступов), оправдалось. Из этого следует, что для турбулентного потока при расчёте числа Рейнольдса не должны пользоваться коэффициентом кинематической вязкости ν, так как при увеличении скорости течения он остаётся постоянным, что приводит к росту числа Рейнольдса. В действительности же этот коэффициент должен расти пропорционально скорости потока. Как видим, это и отражено в формулах (11) и (12). Подтвердим теперь сказанное выше расчётами. Для этого воспользуемся экспериментальными данными А.П. Зегжды [2], которые были им использованы для построения графика $\lambda = f_1\left(\text{Re}, \frac{R}{k}\right)$, представленного на рис. 1.

Выразим в (13) коэффициент Шези через коэффициент гидравлического сопротивления λ по формуле

$$C = \sqrt{\frac{2g}{\lambda}}, \tag{14}$$

тогда найдем

$$\text{Re}_T = \frac{21{,}6}{\sqrt{\lambda}}. \tag{15}$$

Расчёты по формуле (15) для автомодельной области графика А.П. Зегжды сведены в таблицу. По результатам этой таблицы построены кривые $\lambda = f_2(\frac{R}{k})$ и $\mathrm{Re}_T = f_3(\lambda)$, которые приведены на рис. 3. Из изложенного следует, что график А.П. Зегжды рис. 1, т.е. его часть, относящаяся к автомодельной области турбулентного потока, заменена графиком рис. 3, где характеристикой турбулентности потока является число Рейнольдса Re_T, соответствующее некоторым значениям гладкости русла $\frac{R}{k}$, совпадающим с линией *АВ* (показанной на графике рис. 1), построенной авторами работы [9]. В работе М.А. Михалёва [5] положение этой линии определяется формулой

$$Re_{\text{кв}} = 3{,}65(4\lg\frac{R}{k} + 4{,}25)\frac{R}{k}. \tag{16}$$

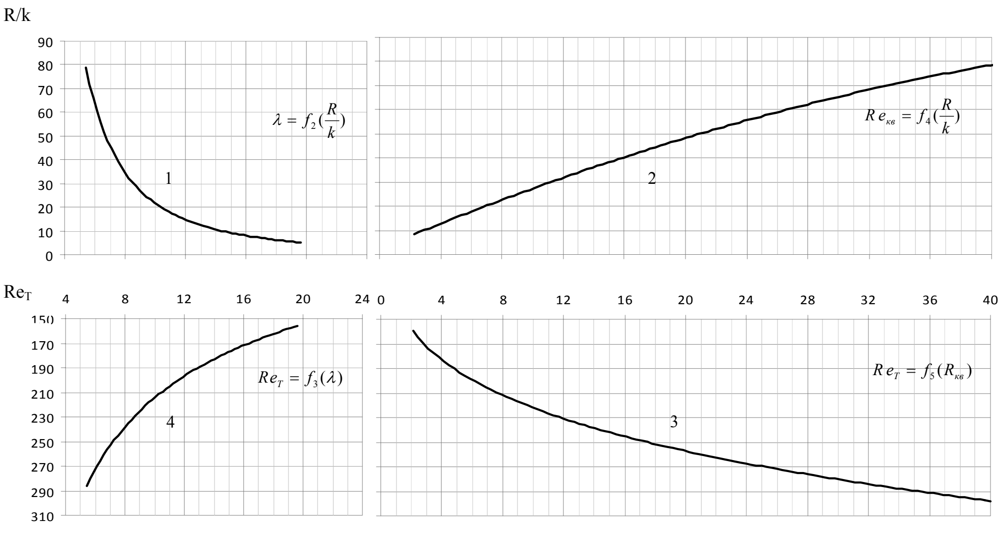

Рис. 3. Зависимости для автомодельной области открытого турбулентного равномерного потока. Значения $\mathrm{Re}_{\text{кв}}$ взяты на линии *АВ* рис. 1

Отметим также, что формулу, аналогичную формуле (15), но с другим числовым коэффициентом в числителе, получим если воспользуемся для определения коэффициента виртуальной вязкости по формуле Л. Прандтля:

$$\nu_T = 0{,}4R\sqrt{g}\,\frac{\upsilon}{C}. \tag{17}$$

Таким образом, в результате выполненных исследований мы показали, что формулировки критериев подобия гидравлического моделирования Рейнольдса и Фруда, приведённые в учебниках по гидравлике и научных трудах, не соответствуют содержанию этих критериев. В связи с этим, метод вывода критериев, в основе которого лежит уравнение Навье-Стокса, не должен рекомендоваться студентам или же даваться, но с соответствующими пояснениями. В работе также показано, что в равномерном потоке при развитом турбулентном движении жидкости (в автомодельной области) при гладкости русла $\frac{R}{k} = \text{const}$ при переменном уклоне дна коэффициент гидравлического сопротивления λ и число Рейнольдса Re_T являются неизменными величинами. Знание этого факта позволяет нам упростить некоторые гидравлические расчёты, например, расчёты при проектировании канала и в других случаях. Нами также рекомендуется пользоваться более простыми графиками рис. 3 вместо графика Загжды, представленном на рис. 1. Оба графика построены для потока жидкости движущегося равномерно. Если движение потока неустановившееся, то при определённых значениях $\frac{R}{k}$ и λ на рис. 3 будем иметь рассчитанные значения числа Рейнольдса, расположенные ниже кривой 4 – при уклоне водной поверхности $I > i_p$ (ускоренное движение потока), и значения, расположенные выше кривой 4 – при уклоне водной поверхности $I < i_p$ (замедленное движение потока).

Литература

1. *Бахметев Б.А.* О равномерном движении жидкости в каналах и трубах. – Л.: Ленинградская правда, 1929. – 244 с.
2. *Загжда А.П.* Теория подобия и методы расчёта гидротехнических моделей. – М-Л.: Госстройиздат, 1938. – 164 с.
3. *Караушев А.В.* Речная гидравлика. – Л.: Гидрометеоиздат, 1963. – 417 с.
4. *Леви И.И.* Моделирование гидравлических явлений. – Л.: Энергия, 1967. – 235 с.
5. *Михалев М.А.* Физическое моделирование гидравлических явлений. – СПб.: изд-во Политех. ун-та, 2010. – 443 с.
6. *Павловский Н.Н.* Гидравлический справочник. – Л.-М.: ОНТИ-НКТП, 1937. – 891 с.
7. *Полтавцев В.И., Спицын И.П., Винников С.Д.* Гидрологическое лабораторное моделирование. – Л.: Политех. ин-т им. Калинина, 1982. – 142 с.
8. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
9. *Спицын И.П., Соколова В.А.* Общая и речная гидравлика. – Л.: Гидрометеоиздат, 1990. – 359 с.
10. *Чугаев Р.Р.* Гидравлика. – Л.: Энергоиздат, 1982. – 672 с.