

*Е.С. Кузнецова, О.Г. Анискина*

**ИССЛЕДОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ СВОЙСТВ  
МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ  
МЕТОДОМ НОРМИРОВАННОГО РАЗМАХА**

*E.S. Kuznetsova, O.G. Aniskina*

**A STUDY OF FRACTAL PROPERTIES OF METEOROLOGICAL  
SERIES BY THE NORMALIZED AMPLITUDE METHOD**

*The paper considers the fractal properties of series of the first three main components that describe evolution of natural oscillations of mean monthly surface temperature anomalies in the Northern hemisphere for the period from January, 1899 till December, 2002. The time series under question are shown to be stable trend-wise with a relatively low noise level. Estimate of time intervals is obtained for the intervals over which the processes considered demonstrate persistent and anti-persistent characteristics.*

*Исследованы фрактальные свойства рядов трех первых главных компонент, описывающих эволюцию естественных колебаний полей среднемесячных аномалий приземной температуры в Северном полушарии за период с января 1899 г. по декабрь 2002 г. Показано, что указанные временные ряды являются трендоустойчивыми с относительно низким уровнем зашумлённости. Получена оценка временных интервалов, на которых рассмотренным процессам свойственны персистентные и антиперсистентные характеристики.*

Временные ряды, характеризующие крупномасштабную динамику атмосферы, нередко обнаруживают фрактальные свойства, иначе – свойства самоподобия, которые могут определяться, с одной стороны, канторовскими свойствами притягивающего множества, присущими странным аттракторам динамических систем с хаосом, с другой стороны, персистентным, сохраняющим тенденции, характером протекающих процессов. Именно поэтому выявление причин фрактальности временных метеорологических последовательностей имеет существенное значение для выбора подходящего подхода к прогнозу климата, а именно динамико-статистического или статистического метода.

Одним из способов, позволяющим исследовать фрактальные свойства временного ряда, является метод нормированного размаха, предложенный Харстом (Harst) для выделения долгопериодных тенденций в рядах гидрометеорологических величин и получивший распространение при выявлении фрактальных характеристик временных последовательностей. В 1951 г. британский климатолог Г. Харст, участвуя в гидрологических проектах, связанных с Нилом, опубликовал работу [Harst, 1951], в которой излагался (экспериментально им обнаруженный) неожиданный эффект в поведении флуктуаций годичной водности Нила и ряда других рек. Суть этого эффекта в следующем [Федер, 1991; Ширяев, 1998; Кучмент, 1998].

Пусть  $x_1, \dots, x_n$  – временная последовательность изучаемой величины (например, у Харста годовые уровни Нила в некоторой его части) за  $n$  последовательных лет. «Хорошей» оценкой их среднего значения будет величина  $\frac{1}{n} X_n$ , где  $X_n = \sum_{k=1}^n x_k$ . Отклонение  $X_k$  за  $k$  последовательных лет от среднего (эмпирического) значения, подсчитанного по данным за  $n$  лет, есть величина  $X_k - \frac{k}{n} X_n$ , и минимальным и максимальным отклонениями являются  $\min_{k \leq n} \left( X_k - \frac{k}{n} X_n \right)$  и  $\max_{k \leq n} \left( X_k - \frac{k}{n} X_n \right)$ . Обозначим

$$R_n = \max_{k \leq n} \left( X_k - \frac{k}{n} X_n \right) - \min_{k \leq n} \left( X_k - \frac{k}{n} X_n \right) \quad (1)$$

– величина «размаха», характеризующая степень отклонения кумулятивных величин  $X_k$  от их среднего значения  $\frac{k}{n} X_n$  за последовательные  $n$  лет.

В своей экспериментальной практике Харст оперировал не с величинами  $R_n$ , а с нормированными величинами  $Q_n = R_n/S_n$ , где  $S_n$  – эмпирическое стандартное отклонение

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right)^2}, \quad (2)$$

вводимое с целью получения статистики, инвариантной относительно замены  $x_k \rightarrow c(x_k + m)$ ,  $k \geq 1$ , что является желательным свойством, поскольку даже среднее значение и дисперсия величин  $x_k$ , как правило, являются неизвестными.

Основываясь на большом фактическом материале наблюдений за стоками Нила в период 622 – 1469 гг. (т. е. за 848 лет), Харст обнаружил, что для многих временных рядов наблюдаемый нормированный размах  $R_n/S_n$  очень хорошо описывается эмпирическим соотношением [Федер, 1991, с. 154]

$$\frac{R_n}{S_n} \sim \left( \frac{n}{2} \right)^H. \quad (3)$$

Показатель  $H$ , называемый теперь показателем Харста<sup>1</sup>, более или менее симметрично распределен около среднего значения 0,73 со стандартным от-

<sup>1</sup> Сам Харст обозначал его через  $K$ . Обозначение  $H$  для показателя Харста было введено Мандельбротом.

клонением, равным примерно 0,09. Позднее было получено, что для рек Волга, Днепр, Дунай, Неман показатели Харста равны 0,836, 0,662, 0,772, 0,673, соответственно [Найденов, 2001, с. 46]. Это наблюдение Харста вызывает интерес, потому что при отсутствии долговременной статистической зависимости отношение  $R/S$  должно быть асимптотически пропорционально  $n^{1/2}$ , если временные ряды связаны со случайными процессами с независимыми значениями и конечной дисперсией [Федер, 1991, с. 156]

$$R/S = (\pi n/2)^{1/2}. \quad (4)$$

Выделяют три различных динамики для различных значений показателя Харста [Федер, 1991, Кликушин, 2000]:

1.  $H = 1/2$ . Получается истинно случайный ряд чисел, т.е. события случайны и не коррелированы, наблюдается отсутствие тренда.

2. При  $0 < H < 1/2$  процессы называются антиперсистентными, т.е. для них характерна знакопеременная тенденция с относительно высоким уровнем зашумленности. Происходит «возврат к среднему»: если значения величины растут в какой-то период, то в следующий период нужно ожидать спада.

3. Если  $1/2 < H < 1$ , то процессы называются персистентными, т.е. для них характерно сохранение наблюдаемой тенденции в сочетании с относительно низким уровнем зашумленности. Это трендоустойчивые ряды, т.е. если величина начала возрастать, то можно ожидать, что она будет возрастать и дальше. Чем ближе  $H$  к 1, тем больше трендоустойчивость, потому что чем больше корреляция между процессами, тем больше схожесть между процессами.

В данной работе методом нормированного размаха исследовались фрактальные свойства временных рядов трех первых главных компонент среднемесячных аномалий приземной температуры в Северном полушарии.

Исходными данными для исследования послужили среднемесячные аномалии приземной температуры в Северном полушарии из архива Национального Центра Атмосферных исследований [National Center for Atmospheric Research (NCAR)] за период с января 1899 г. по декабрь 2002 г., рассчитанные по стандартному климату (1960 – 1990 гг.) и представленные в узлах регулярной широтно-долготной сетки с шагом  $5 \times 5^\circ$ . Сетка покрывает все Северное полушарие, начиная с полюса.

Как известно, главная выгода разложений по эмпирическим ортогональным функциям состоит в том, что основная информация о состоянии поля во многих точках сосредотачивается в немногих слагаемых, причем эти слагаемые в статистическом смысле наилучшим образом отвечают природе рассматриваемых исходных полей. Также несомненно важным оказывается и то, что изменение во времени коэффициентов разложения (главных компонент) будет носить более плавный регулярный характер, иметь лучше выявляемые закономерности, чем изменения самих предварительно необработанных исходных данных.

В данной работе метод эмпирических ортогональных составляющих [Мещерская, 1970] применялся для аппроксимации полей среднемесячных аномалий приземной температуры на каждой параллели и для каждого месяца, начиная с  $15^\circ$  с.ш. до  $75^\circ$  с.ш. по всему указанному временному диапазону, при этом широты с  $0^\circ$  с.ш. по  $10^\circ$  с.ш.,  $80^\circ$  с.ш. и  $85^\circ$  с.ш. были исключены из рассмотрения в связи с отсутствием большого количества исходных данных. В результате проведенного разложения были получены собственные числа и собственные векторы корреляционных матриц – эмпирические ортогональные функции, а также коэффициенты разложения (главные компоненты), описывающие амплитуду естественных колебаний рассматриваемых полей при переходе от одной синоптической ситуации к другой. Оценка точности сходимости аппроксимирующих рядов показала, что для описания примерно 90 % общей дисперсии процесса необходимо от 5 (околополюсная область) до 17 (тропическая зона) главных компонент. Для описания наиболее крупномасштабных процессов (около 2/3 общей дисперсии разложения) достаточно 3 – 8 членов ряда, что говорит о том, что первые 3 – 8 естественных колебаний содержат основную информацию об особенностях рассматриваемых полей среднемесячных аномалий приземной температуры в Северном полушарии в любое время года. Далее с целью исключения из рассмотрения процессов мелкого масштаба будут использоваться последовательности главных компонент, описывающих эволюцию первых трех естественных колебаний.

Первоначально оценка показателя Харста, согласно описанному выше алгоритму, проводилась по временным рядам трех первых главных компонент среднемесячных аномалий приземной температуры в Северном полушарии для всех месяцев года, при этом длина каждого анализируемого ряда составляла 104 года (104 значения). Зависимость статистики ( $R_n / S_n$ ) от времени наблюдения  $n$  строилась в логарифмическом масштабе и аппроксимировалась прямой линией для определения угла наклона – показателя Харста  $H$ . Полученные результаты представлены на рисунках 1 – 3 (темные области соответствуют максимальным значениям  $H$ , светлые – минимальным).

Анализ рисунков 1 – 3 показывает, что для рассматриваемых рядов все значения показателя Харста попали в интервал  $1/2 < H < 1$ . Таким образом, рассмотренные временные ряды трех первых главных компонент среднемесячных аномалий приземной температуры в Северном полушарии являются трендоустойчивыми рядами с относительно низким уровнем зашумленности, поэтому можно ожидать сохранения наблюдаемой в них тенденции. Также можно отметить, что (см. рис. 1) для первой главной компоненты значения показателя Харста ближе всего к единице (выше трендоустойчивость временных рядов) в области  $20^\circ$  с.ш. –  $35^\circ$  с.ш. во второй половине осени; в области от  $30^\circ$  с.ш. до  $45^\circ$  с.ш.  $H \approx 0,9$  наблюдается в июле и августе, а на  $60^\circ$  с.ш. и  $65^\circ$  с.ш. показатель Харста максимален в марте. Для второй и третьей главных компонент среднемесячных аномалий приземной температуры отмечается менее выраженная, но в общем сходная картина.

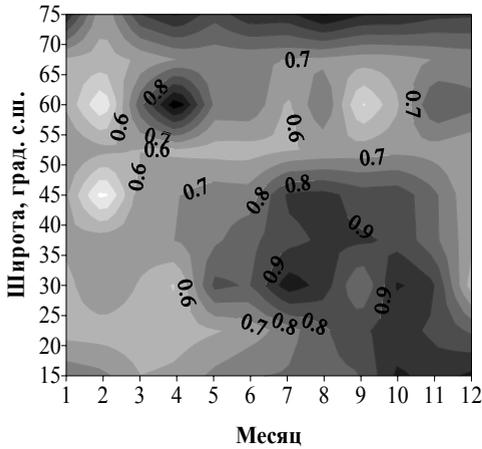


Рис. 1. Оценка показателя Харста  $H$  для первой главной компоненты среднемесячных аномалий приземной температуры в Северном полушарии.

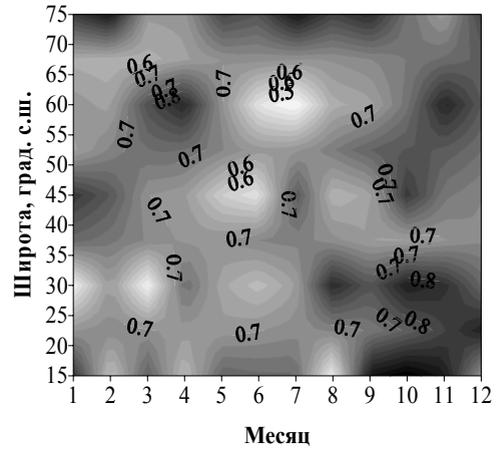


Рис. 2. Оценка показателя Харста  $H$  для второй главной компоненты среднемесячных аномалий приземной температуры в Северном полушарии.

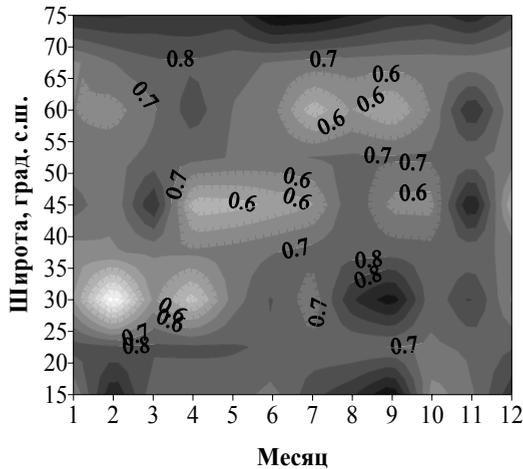


Рис. 3. Оценка показателя Харста  $H$  для третьей главной компоненты среднемесячных аномалий приземной температуры в Северном полушарии.

Затем показатель Харста для трех первых главных компонент среднемесячных аномалий приземной температуры в Северном полушарии (длина каждого ряда составляла 104 года и 1248 значений) рассчитывался следующим образом [Федер, 1991]. Находилась статистика  $R_n/S_n$  для всего периода наблюдений ( $n = N = 1248$ ). Зависимость статистики  $R_n/S_n$  от  $n$  строилась в логарифмическом масштабе и аппроксимировалась прямой для определения угла наклона –  $H$ . После этого весь временной ряд делился на две равные выборки, при этом принималось соответственно  $n = N/2$  и вновь находилась по-

казатель Харста  $H$ . Затем период задержки  $n$  уменьшался еще в два раза и т.д. до  $n = N / 100$ .

В качестве примера на рис. 4 приведена зависимость  $H$  от времени для трех первых главных компонент среднемесячных аномалий приземной температуры на  $15^\circ$  с.ш. Нетрудно видеть, что зависимый, персистентный характер ( $1/2 < H < 1$ ) для первой главной компоненты наблюдается на периодах после 21,6 года, для второй главной компоненты на периодах после 39,3 лет, а для третьей главной компоненты – после 48 лет.

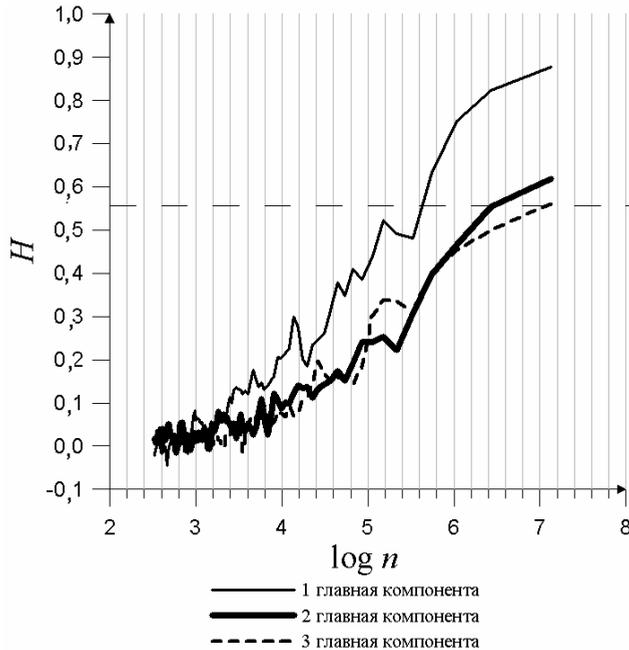


Рис. 4. Значения показателя Харста  $H$  как функции запаздывания  $n$  (месяцы) для первой, второй и третьей главных компонент среднемесячных аномалий приземной температуры,  $15^\circ$  с.ш.

На рис. 5 представлены значения  $\log n$  для трех первых главных компонент среднемесячных аномалий приземной температуры в Северном полушарии при динамике показателя Харста  $1/2 < H < 1$ , которая соответствует персистентному, зависимому поведению рассматриваемых процессов. Как видно из рассматриваемого рисунка, для первой главной компоненты с увеличением широты от  $15^\circ$  с.ш. (период выше 21,6 года) и до  $50^\circ$  с.ш. (период выше приблизительно 53-х лет) растет временной интервал, после которого имеет место тенденция к поддержанию уже существующих аномалий. Затем, начиная с  $50^\circ$  с.ш. и вплоть до  $75^\circ$  с.ш. (период свыше 14,5 лет) временной интервал, характеризующий тенденцию к поддержанию уже существующих аномалий, уменьшается. Сходная картина наблюдается также для второй и третьей главных компонент.

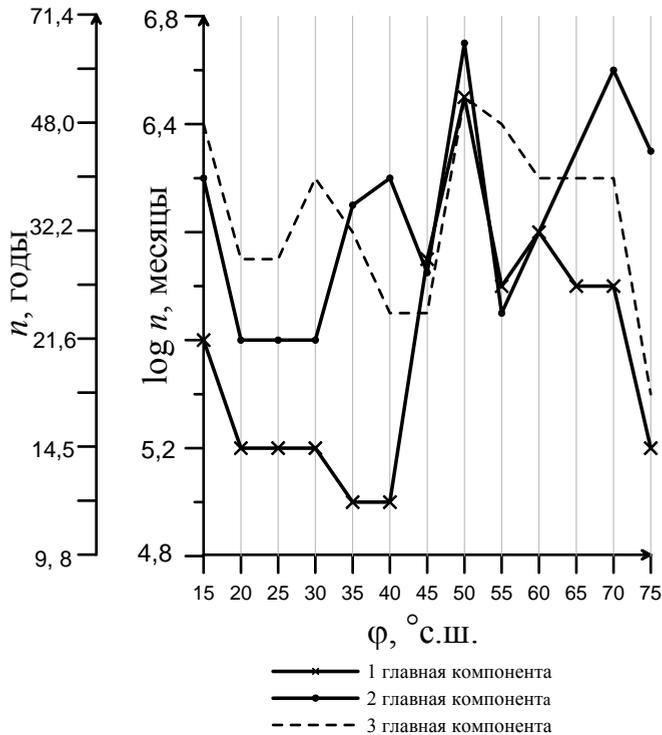


Рис. 5. Значения  $\log n$  для первой, второй, третьей главных компонент среднемесячных аномалий приземной температуры в Северном полушарии при динамике Харста  $1/2 \leq H < 1$ .

Заметим, что рис. 5 позволяет давать оценку временным интервалам, на которых рассмотренным процессам свойственны персистентные или антиперсистентные тенденции. Например, среднемесячные аномалии приземной температуры на  $15^\circ$  с.ш., определяемые первой главной компонентой разложения по эмпирическим ортогональным составляющим, время жизни которых составляет приблизительно до 22 лет, с большей вероятностью будут ослабляться, чем усиливаться. Напротив, если время жизни, в течение которого рассматриваемые среднемесячные аномалии существуют, составляет более 22 лет, можно ожидать, что они сохранятся и в дальнейшем.

Таким образом, проведенное исследование дает основание заключить, что временные ряды трех первых главных компонент среднемесячных аномалий приземной температуры в Северном полушарии являются трендоустойчивыми с относительно низким уровнем зашумленности, поэтому можно ожидать сохранение наблюдаемой в них тенденции. Выявленные свойства персистентности в указанных метеорологических последовательностях помогут в разработке их оптимальных нелинейных моделей, которые, возможно, окажутся полезными для улучшения заблаговременности среднесрочных и долгосрочных прогнозов погоды.

**Литература**

1. *Кликушин Ю.Н.* Метод фрактальной классификации сложных сигналов. // Журнал радиоэлектроники, 2000, № 4. – <http://jre.cplire.ru/jre/apr00/1/text.html>.
2. *Кучмент Л.С., Поюровский Л.В.* Эффект Херста в многолетних колебаниях уровня Каспийского моря. // Метеорология и гидрология, 1998, № 5, с. 73 – 79.
3. *Мещерская А.В., Руховец Л.В., Юдин М.И., Яковлева Н.И.* Естественные составляющие метеорологических полей. – Л.: Гидрометеиздат, 1970. – 199 с.
4. *Найденов В.И., Кожевникова И.А.* Гидрофизический механизм явлений Херста. // ДАН, 2001, т. 373, № 1, с. 45 – 47.
5. *Федер Е.* Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 264 с.
6. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики. Т.1 – М.: ФАЗИС, 1998. – 489 с.
7. *Harst H.* Long-term storage capacity of reservoirs. // Transactions of American Society of Civil Engineers, 1951, v. 116, p. 770 – 808.