

М.А. Моцаков

О ПРОБЛЕМЕ ПОСТАНОВКИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ВЛОЖЕННЫХ СЕТКАХ

M.A. Motsakov

ON THE PROBLEM OF SETTING BOUNDARY CONDITIONS IN A NESTED ENVIROMENT

Статья посвящена проблеме постановки граничных условий при гидродинамическом моделировании атмосферных процессов над ограниченной областью. Рассматриваются «прозрачные» граничные условия, как механизм связи пространств модельного домена. На примере баротропной негеострофической модели показано преимущество метода «прозрачных» границ для решения уравнений гидротермодинамики на вложенных сетках.

The boundary conditions problem is considered. The relation mechanism of the model domain nested area is described. Using barotropic nongeostrophic model, the advantages of the "transparent" boundaries are demonstrated.

Рост производительности ЭВМ стал причиной развития и внедрения в оперативную практику прогностических моделей на вложенных сетках. При такой постановке задачи прогноза внутренняя область может быть достаточно малой. Как следствие этого, любые волны, возникающие в пограничной зоне, могут быстро распространяться к представляющему наибольший интерес центру области прогноза. Отражение и генерация коротковолновых гармоник со значительными фазовыми скоростями в области границ достаточно скоро приведёт к росту интегральных инвариантов модели, т. е. к возникновению нелинейной вычислительной неустойчивости. Учтя скорость развития и кумулятивный характер последствий данного процесса, нетрудно понять важность его устранения.

Традиционно решение задачи постановки граничных условий описывает фиктивную связь замкнутого модельного пространства с окружающим физическим миром. Для модели с вложенной сеткой имеет место наличие неизолированной области высокого пространственно-временного разрешения, связанной с базовой моделью в области своих границ. Эта связь может носить как характер одностороннего обмена, так и иметь элемент взаимного влияния. Отсюда вытекает специфика и сложность решения рассматриваемой задачи.

Большинство оперативных моделей построено с использованием для определения граничных условий релаксационной схемы Дэвиса – Калберга [Davies, 1976], суть которой заключается в построении релаксационной буферной зоны. В пределах этой зоны происходит затухание «шума», генерируемого в области границ в процессе отражения и амплитудно-фазовой деформации волн.

В качестве альтернативы релаксационной схеме можно рассмотреть и применить алгоритм постановки так называемых «прозрачных» границ. Термин «прозрачность», по нашей интерпретации, отражает наличие двух принципиально важных свойств для границ области интегрирования. Во-первых, все волны, приходящие изнутри вложенного модельного пространства, свободно проникают сквозь его границы без отражения. Во-вторых, все метеорологически важные волны проходят внутрь вложенного модельного пространства, не испытывая амплитудно-фазовой деформации и, как следствие, не являются источником ложных высокочастотных осцилляций.

Обоснование решения поставленной задачи. Рассмотрим линеаризованные уравнения мелкой воды:

$$\frac{dU}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \ell V = 0, \quad (1)$$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \ell U = 0, \quad (2)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} + \bar{\Phi} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = 0, \quad (3)$$

где
$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (4)$$

U, V – компоненты вектора скорости ветра; $\Phi = gz$ – геопотенциал изобарической поверхности ($g = 9,81 \text{ м/с}^2$); ℓ – параметр Кориолиса; $\bar{U}, \bar{V}, \bar{\Phi}$ – осредненные по области интегрирования компоненты вектора скорости и геопотенциал соответственно; x, y – координаты в двумерном модельном пространстве; t – модельное время.

Волновое аналитическое решение системы (1) – (3) при представлении переменных согласно выражению

$$(U, V, \Phi) = (\hat{U}, \hat{V}, \hat{\Phi}) \exp[i(kx + ly + \omega t)], \quad (5)$$

(где $\hat{U}, \hat{V}, \hat{\Phi}$ – амплитуды волн в полях ветра и геопотенциала; k, l – волновые числа для волн в пространстве; ω – волновое число для волн во времени) показывает, что область решения содержит адвективную волну ω_a с амплитудой вида:

$$\hat{U}_a = -\frac{i\ell}{L} \hat{\Phi}_a, \quad (6)$$

$$\widehat{V}_a = -\frac{ik}{L}\widehat{\Phi}_a \quad (7)$$

и групповой скоростью по оси x

$$(C_a^g)_x = \overline{U}, \quad (8)$$

а также две добавочные волны ω_{\pm} с амплитудой

$$\hat{U}_{\pm} = \frac{\hat{\Phi}_{\pm}}{\sqrt{\Phi}} \left[\pm \left(1 - \frac{\varepsilon_l^2}{2} + \frac{\varepsilon_L^2}{2} \right) + i\varepsilon_l \varepsilon_L + O(\varepsilon^4) \right], \quad (9)$$

$$\hat{U}_{\pm} = \frac{\hat{\Phi}_{\pm}}{\sqrt{\Phi}} \left[\pm \varepsilon_l - \varepsilon_L + O(\varepsilon^3) \right] \quad (10)$$

и групповой скоростью по x

$$(\tilde{N}_a^g)_x = \overline{U} \pm \sqrt{\overline{O}} \left(1 + \varepsilon_l^2 + \varepsilon_L^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

где

$$\varepsilon_l^2 = \frac{l}{k}, \quad \varepsilon_L^2 = \frac{\ell}{k\sqrt{\overline{O}}}. \quad (12)$$

Предполагая $\sqrt{\overline{\Phi}} > \overline{U}$, получаем, что для малых ε_l^2 и ε_L^2 , решение (1) – (3) содержит:

1. добавочную волну ω_+ , которая согласно (11) движется вдоль оси x ,
2. волну ω_- , движущуюся в обратном направлении,
3. волну ω_a , перемещающуюся в обоих направлениях.

Если решать уравнения (1) – (3) на области $0 \leq x \leq Lx$, то необходимо, чтобы граница $x = Lx$ являлась прозрачной для ω_+ и ω_a волн. Волны ω_- с метеорологической точки зрения являются «шумом», т. е. граница $x = Lx$ должна быть для них непроницаема. Чтобы выполнить данное условие, решение должно поддерживать только компоненты ω_+ и ω_a . Можно получить систему уравнений, удовлетворяющую выше оговоренному требованию, заменив (3) уравнением:

$$\Phi - U\sqrt{\overline{\Phi}} = 0. \quad (13)$$

Волновое аналитическое решение системы (1), (2), (13) при представлении переменных согласно (5) и при пренебрежении всеми членами порядка $O(\varepsilon^2)$ и выше поддерживает существование только двух видов волн, подобных ω_+ и ω_a [McDonald, 2002]. Все вышесказанное имеет место при условии

малых величин ϵ_l^2 и ϵ_L^2 . Параметр ϵ_l^2 удовлетворяет данному условию для волн, перпендикулярных линии $x = Lx$. Параметр ϵ_L^2 , достаточно мал для большинства волн в средних широтах.

Практическая реализация. Для решения системы уравнений (1)-(3) использовался метод сеток. В качестве базовой была использована модель на нерасштанной А-сетке Аракавы [Аракава, 1979]. Областью интегрирования является квадрат, представленный в стереографической полярной проекции, центр области интегрирования - северный полюс. Шаг по пространству составляет 200 км, шаг по времени – 100 с. Вложенная сетка (нерасштанная А-сетка Аракавы) представляет собой квадрат со стороной, в два раза меньшей по сравнению с базовой сеткой при сохранении числа узлов одинаковым для обеих сеток. Шаг по пространству 100 км, шаг по времени 50 с. Схема интегрирования по времени - «чехарда» [Белов, 1989]. Начальное состояние базовой модели задается полем геопотенциала изобарической поверхности 500 гПа. Компоненты вектора скорости ветра рассчитываются по геострофическим соотношениям. Начальные условия на вложенной сетке получены путем сплайн-интерполяции по базовым полям.

Архитектура алгоритма постановки граничного условия в приложении к восточной границе. Связь между сетками (базовой и вложенной) осуществляется дискретно в модельном времени. В области границы на двух «линиях» дискретного модельного пространства формируется однонаправленный механизм связи – «Refresh line» (см. рис. 1), суть работы которого заключается в регулярном обновлении приграничного поля вложенного уровня путем линейной интерполяции во времени

$$F_g^{Sg} = F_h^{Sh} + \frac{S_g \Delta t_g}{\Delta t_h} (F_h^{Sh+1} - F_h^{Sh}) \quad (14)$$

(где индексы g (guest) и h (host) означают, что рассматривается величина на

вложенной и базовой сетках соответственно; $F = \begin{pmatrix} U \\ V \\ \Phi \end{pmatrix}$; S – номер шага по

времени; Δt – величина шага по времени) и сплайн-интерполяции в пространстве. То есть на каждом шаге по времени согласно динамике развития базового модельного пространства происходит коррекция полей метеорологических величин подчиненной ему области вложенного модельного пространства.

Собственно, границей будет являться третья «линия» вложенного модельного пространства «Boundary line» (рис. 1), для которой строится механизм, обеспечивающий сохранение неизменным условия

$$q_g(S_g \Delta t_g) = q_h(S_g \Delta t_g + 2 \Delta t_h), \quad (15)$$

$$q = \Phi - U \sqrt{\Phi_0}, \quad (16)$$

где Φ_0 – максимальное значение геопотенциала на базовой сетке.

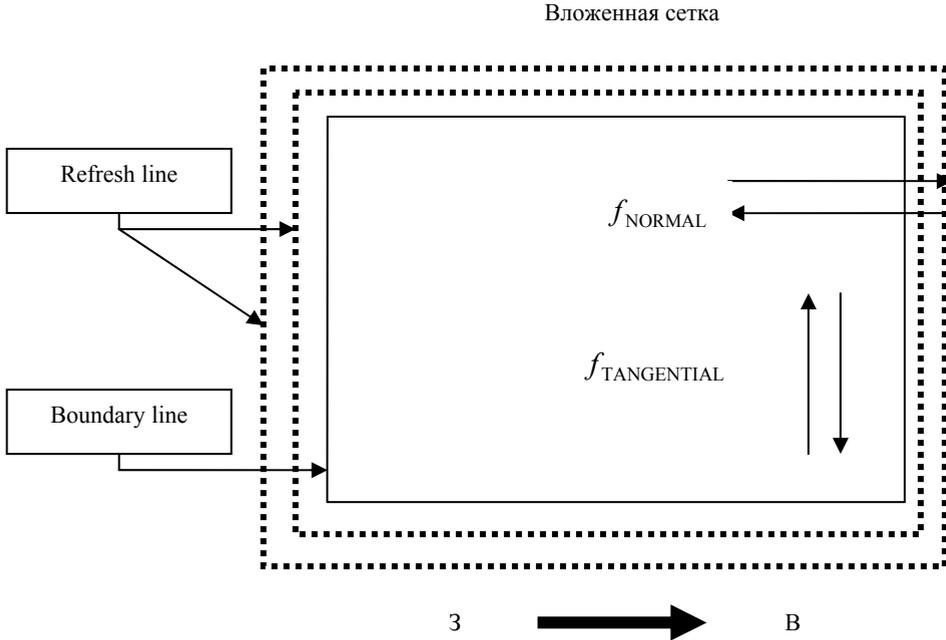


Рис. 1. Схема организации вложенного модельного пространства.

Величина $q_h(S_g \Delta t_g + 2 \Delta t_h)$ находится путем линейной экстраполяции во времени:

$$q_h(S_g \Delta t_g + 2 \Delta t_h) = q_h^{Sh} + \frac{(S_g \Delta t_g + 2 \Delta t_h)}{\Delta t_h} (q_h^{Sh+1} - q_h^{Sh}). \quad (17)$$

Величина Φ_g^{Sg} выражается из равенства (15) с учетом (16), при этом принимается приближение вида:

$$f_g(S_g \Delta t_g) = f_h(S_g \Delta t_g + 2 \Delta t_h). \quad (18)$$

Для коррекции поля скорости ветра производится наложение полей базовой сетки на поля вложенной сетки согласно (18). При этом в областях втока происходит наложение тангенциальной компоненты (направленной по касательной к границе) скорости ветра, а в областях вытока - нормальной к границе составляющей. Компоненты вектора скорости ветра находим путем линейной экстраполяции во времени вида:

$$f_h(S_g \Delta t_g + 2\Delta t_h) = f_h^{Sh} + \frac{(S_g \Delta t_g + 2\Delta t_h)}{\Delta t_h} (f_h^{Sh+1} - f_h^{Sh}), \quad (19)$$

где $f = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$.

Анализ результатов численного эксперимента. Результаты численных экспериментов приведены на рис. 2, где (А) – начальное поле ветра, (В) – прогноз с применением «прозрачных» граничных условий, (С) – прогноз с простейшими (фиктивными) граничными условиями вида $\left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{\Gamma} = 0$.

Проанализировав результаты расчетов, нетрудно сделать вывод о том, что теория «прозрачных границ» имеет право на существование. Особенно хорошо видна «прозрачность» при сравнении полей геопотенциала (рис. 2, В, С) в области наиболее активного оттока на восточной границе, где максимально выражен процесс отражения волн. В результате при использовании обыкновенных граничных условий там происходит генерация ложных коротковолновых гармоник – «шумов», а также образование «стоячих волн», что пагубно сказывается на устойчивости численного алгоритма и качестве прогноза.

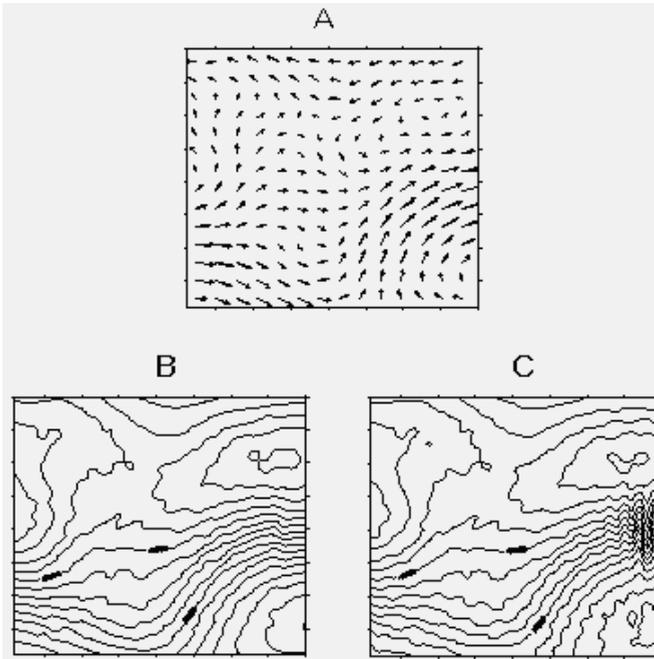


Рис. 2. Начальное поле ветра (А). Прогностические поля геопотенциала с применением «прозрачных» (В) и фиктивных граничных условий (С).

Заключение. Начальным толчком для данного исследования послужили идеи, высказанные Макдональдом [McDonald, 2002]. Но подход к построению граничных условий в данной работе не вполне соответствует первоначальным разработкам Макдональда, которые были переработаны и модернизированы. Это было обоснованно путем проведения большого числа экспериментов, показавших лучший результат для ряда модификаций рассмотренного алгоритма. По-видимому, очень важно и плодотворно внедрение процедур двухшаговой экстраполяции во времени, что привело к подавлению коротковолновых гармоник с периодом $2\Delta t$, которые, по своей сути, являются «шумами» в домене модельного пространства.

«Прозрачные границы» показали хорошие результаты во всех поставленных экспериментах, что говорит о достаточной их корректности и приемлемости в решении практических задач.

Литература

1. Аракава А., Мезингер Ф. Численные методы, используемые в атмосферных моделях. – Л.: Гидрометеоздат, 1979. – 136 с.
2. Белов Н.П., Борисенков Е.П., Панин Б.Д. Численные методы прогноза погоды. – Л.: Гидрометеоздат, 1989. – 375 с.
3. Davies H.C. A lateral boundary formulation for multi-level prediction models // Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 1976, vol. 102, p. 405–418.
4. McDonald A. Transparent boundary conditions for the Shallow-Water Equations: Tested in a nested environment // Monthly Weather Review, 2002, vol. 131, p. 98–135.