В.В. Коваленко

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ГИДРАВЛИКИ

V.V. Kovalenko

ABOUT THE PERIODIC DECISIONS OF THE EQUATIONS OF HYDRAULICS

Рассматриваются возникающие в потоке квазипериодические изменения гидравлических характеристик, которые описываются модернизированными уравнениями гидравлики. Выявляются причины возникновения квазипериодических изменений. Теоретические выводы подтверждены экспериментальными данными. Приведены аналогии с квантовой механикой.

Quasiperiodic changes of the hydraulic characteristics arising in a flow are considered, which are described by the modernized equations of hydraulics. The reasons of occurrence of quasiperiodic changes are revealed. The theoretical conclusions are confirmed by experimental data. The analogies to the quantum mechanics are given.

По одной из гипотез турбулентность вызывается тем, что в потоке в целом возникают квазипериодические изменения гидравлических характеристик, делающие эпюру скорости неустойчивой по моментам и более выровненной [Коваленко, 2006]. Ранее (см. [Коваленко, 2005]) была получена формула для периода этих изменений исходя из системы Сен-Венана. Если предположить, что информация об уровне (и его изменениях по времени и координате) известна из измерений, то система Сен-Венана для фиксированного створа сводится к уравнению Риккати, которое преобразуется к дифференциальному уравнению второго порядка:

$$d^2y/dt^2 - R(t)y = 0, \tag{1}$$

где $R(t) \approx (I - i_0)g^2/C^2h$ (здесь использованы традиционные для гидравлики обозначения), а переменная y связана рядом преобразований с расходом воды (или средней по сечению скорости). При $R_1 > 0$ уравнение (1) имеет «колебательные» решения с периодом

$$T \approx \frac{\pi C h^{0,5}}{g\sqrt{I - i_0}}, \tag{2}$$

который хорошо согласуется с экспериментальными результатами (см. [Коваленко, 2005]).

Появление отрицательных значений R объясняется зависимостью гидравлических сопротивлений от ускорения:

$$\frac{\lambda_{\text{нст}}}{\lambda_{\text{уст}}} \approx \frac{1}{1+\overline{\omega}^2/4} - \frac{2{,}5+\overline{\omega}^2/2}{1+\overline{\omega}^2/4}\overline{N}, \tag{3}$$

где $\overline{\omega}$ и $\overline{N}$ – безразмерные частота и ускорение [Коваленко, 2005]. При учете выражения (3) в уравнениях Сен-Венана появляются два новых слагаемых, равных примерно (при малых $\overline{\omega}$) $-\gamma\lambda_{\text{уст}}dU/dt$ и $-(\overline{\omega}^2/4)\lambda_{\text{уст}}U^2/h$. С учетом этого обстоятельства выражение для $R(t)$ принимает вид: $R(t) \approx -(\overline{\omega}^2/4)(I-i_0)g^2/C^2h(\gamma\lambda_{\text{уст}}-1)^2$. Следовательно, период T будет отличаться от значения, подсчитанного по формуле (2), на величину $\left[(\gamma\lambda_{\text{уст}}-1)^2/(\overline{\omega}^2/4)\right]^{0,5}$. Наиболее надежные данные (р. Тверца) по выявлению периодичности (см. табл. 2.3.2 из работы [Коваленко, 2005]) показывают, что периоды, рассчитанные по формуле (2), не очень сильно отличаются от экспериментальных значений.

Возникает вопрос: если периодические решения создают зависимость сопротивлений от ускорений, то почему формула (2), которая получается при классическом задании сопротивлений [при игнорировании знака перед $R(t)$], дает правильный порядок величин для T? И вот тут нам пригодится принцип эквивалентности сил тяжести и инерции. Учет влияния ускорения на сопротивления приводит к появлению двух новых членов в динамическом уравнении системы Сен-Венана (чисто инерционных по своей природе, т. е. «фиктивных»). Без их учета мы никогда бы не получили нужный знак у $R(t)$. Появление этих «сил» эквивалентно изменению силы тяжести, «сидящей» в уклоне. А так как подкоренное выражение в формуле (2) можно записать так: $I - i_0 = i_0 - \partial h/\partial x - i_0$, то добавление новых слагаемых к i_0, имеющему разные знаки, периода не меняет. Кроме этого, соответствие формулы (2) натурным данным указывает на существование своеобразной инвариантности: $(\gamma(\overline{\omega})\lambda_{\text{уст}}-1)^2 \approx \overline{\omega}^2/4$. «Гидромеханическую тележку» трясет с частотой, определяемой λ и условиями на границах рассматриваемого участка реки, создающих геометрию «резонатора» ($-\partial h/\partial x$). Следовательно, квазипериодические изменения «коэффициента сноса» в уравнении, описывающем распределение скорости по глубине [Коваленко, 2006], создаются инфинитной (для гидромеханического поля) реальностью (шероховатостью и режимом речного стока).

«Квазипериодичность» возникает из-за того, что реально мы имеем задачу на собственные значения (Штурма – Лиувилля), и полученный период соответствует наименьшему собственному значению. Так как мы имеем дело не просто со временем t или координатой x, а с инвариантом $p = t + x/U_0$, то аналогичные рассуждения приводят к формуле для пространственного периода (см. [Карасев, 1992]):

$$L = \frac{\pi C h^{0,5} U_0}{g\sqrt{I - i_0}},$$

получающейся из уравнения

$$d^2y/dx^2 - k(x)y = 0,$$

где y – переменная, связанная преобразованиями со скоростью, а $k(x) < < 0$. Для любого конечного участка русла длиной $l = [x_0, x_k]$, на концах которого принимается отсутствие отклонений от квазиустановившегося режима $[y(x_0) = y(x_k) = 0]$, существуют нетривиальные решения (собственные функции):

$$y_n(x) = a_n \sin\frac{\pi n}{l}x$$

(здесь a_n – амплитуда волны; $n = 1, 2, \ldots$) при собственных значениях

$$k = (g^2 / U_0 C^2 h)(I - i_0) = k_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

Если величина $g^2 / U_0 C^2 h$ постоянна на участке длиной l, то квантомеханический аналог энергии $(I - i_0)$ принимает дискретные значения:

$$(I - i_0)_n = \frac{\pi g^2}{U_0 C^2 h l^2} n^2$$

(при $n = 0$ $I = i_0$, т. е. имеем «равномерный» режим; в квантовой механике это означает отсутствие частиц, а у нас – отсутствие низкочастотных пульсаций).

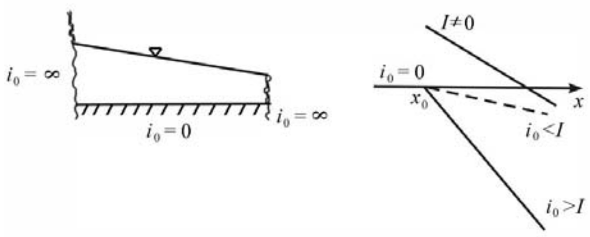

Рис. 1. Гидроквантовомеханическая аналогия:
а – потенциальная яма; *б* – потенциальный барьер.

По аналогии с квантовой механикой (см. [Абаренков, 2004; Левич, 1971]) можно рассматривать различные варианты изменения «потенциала» i_0. Например, в случае потенциальной ямы (горизонтальный участок реки с $i_0 = 0$ длиной l, который начинается и заканчивается водопадом, рис. 1, *а*) имеем дискретный набор $y_n(x)$, т. е. гидромеханическое поле [эпюру $u(h)$] трясет не периодический процесс, а «пила» с частоколом зубьев (см. рис. 1, *б* в диапазоне от 10^{-2} до 10^{0} рад/с).

Другим простейшим аналогом моделей в квантовой механике служит потенциальный барьер (рис. 1, *б*):

$$k \sim I \quad \text{при} \quad x < x_0;$$
$$k \sim I - i_0 \quad \text{при} \quad x > x_0.$$

Если при $I > i_0$ (энергия больше потенциального барьера; на гидравлическом языке – конфузор) «волна» y частично отражается, частично проходит в конфузор, то в случае $I < i_0$ (диффузор), хотя и нет полного запрета на появление «волн» при $x > x_0$ (из-за «квантового» эффекта), но зона их проникновения оказывается экспоненциально малой. Возможно, что описанные эффекты имеют отношение и к грядообразованию, но пока эта аналогия в основном умозрительна.

Литература

1. *Абаренков И. В., Загуляев С.Н.* Простейшие модели в квантовой механике: Учеб. пособие. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004. – 128 с.
2. *Карасев И.Ф., Коваленко В.В.* Стохастические методы речной гидравлики и гидрометрии. – СПб.: Гидрометеоиздат, 1992. – 208 с.
3. *Коваленко В.В.* Частично инфинитное моделирование (основания, примеры, парадоксы). – СПб.: Политехника, 2005. – 480 с.
4. *Коваленко В.В.* Частично инфинитный механизм турбулизации природных и социальных процессов. – СПб.: изд. РГГМУ, 2006. – 166 с.
5. *Левич В.Г., Вдовин Ю.А., Мямлин В.А.* Курс теоретической физики. Т. 2. Квантовая механика. Квантовая статистика и физическая кинетика. – М.: Наука, 1971. – 938 с.