И.А. Рябинин

О СВЯЗИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ С ТЕОРИЕЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

I.A. Ryabinin

ON THE RELATIONSHIP OF MATHEMATICAL LOGIC WITH THE THEORY OF PROBABILITY

На конкретных примерах представлена нестандартность вычисления вероятностей на сложных структурах в целях понимания сущности проблемы.

Non-specificity in computing probabilities is demonstrated by concrete examples in complex structures, aiming at an insight into the essence of the problem.

«Там начало конца,
где читаются старые письма,
Где реликвии нам –
Чтоб о близости вспомнить – нужны ».

Константин Симонов, 1938 г.
«Пять страниц» [1, с. 146 – 166]

Грустные мысли К.Симонова об ушедшей любви к когда-то любимой женщине пересеклись с моими мыслями об ушедшей влюбленности в ***вероятностную логику***.

50 лет тому назад (в 1956г.) вышла книга [2], в которой выдающийся ученый XX столетия Джон фон Нейман впервые произнес эти выделенные слова именно в такой последовательности. А «синтез надежных организмов из ненадежных компонентов» вызвал такие надежды и веру в светлое будущее только-что зарождавшейся науки о надежности технических систем, что глубоко вчитываться в 70-страничный непростой текст книги [2] было «некогда». Тем более, что в 1958 г. мне было официально приказано целиком и полностью переключиться на разработку проблемы надежности в ВМФ [3, с. 7]. Уже в 1967 г. в монографии [4, с. 248] можно прочитать : … «Таким образом, мы приходим к концепции ***вероятностной логики*** [2], в которой вероятность рассматривается как вероятность истинности функций алгебры логики». Хотя на следующей странице [4, с. 249] дается мое определение ***логико-вероятностным методам*** (ЛВМ), понимаемым в то время как синоним вероятностной логики, но все же несколько иначе, а именно … «метод, при котором структура СЭС описывается средствами математической логики, а количественная оценка ее надежности производится с помощью теории вероятностей».

О связи математической логики с теорией вероятностей говорили и писали П.С.Порецкий, П.Эренфест, С.Н.Бернштейн и другие, но ***сущность*** этой связи как-то ускользала из внимания и ***смысл*** слов: «вероятностная логика (ВЛ)» и «логика вероятностей (ЛВ)» воспринимается как тождество.

Даже в книге 2000г. [5, с. 32] параграф 2.5 назван: «Некоторые теоремы алгебры логики и вероятностной логики».

Полное отсутствие определений ВЛ и ЛВ в математических словарях и энциклопедиях также не способствовало пониманию сущности этой связи. Концом моей «влюбленности» в вероятностную логику послужили книги [6, 7, 8] , где эти реликвии оказались нужны, чтобы вспомнить о сущности.

А сущность этих понятий, как стало известно совсем недавно [9], состоит в следующем:

- предметом вероятностной логики является оценка истинности гипотез (высказываний), которые заключены в промежутке между истиной и ложью $\left(1 \geq x \geq 0\right)$;
- предметом логики вероятностей является вычисление вероятности истинности случайных событий (высказываний), принимающих только два значения (1; 0).

В первом случае вычисление вероятностей сложных гипотез осуществляется с помощью традиционного аппарата исчисления вероятностей; во втором – с помощью нового аппарата ***логико-вероятностного исчисления*** (ЛВИ). Иначе говоря, в первом случае имеют дело с ***многозначной логикой***, во втором случае – с ***двузначной логикой***.

Таким образом, ВЛ и ЛВ – это не синонимы, а существенно разные вещи. В отличие от грустных мыслей К Симонова [1] по поводу ушедшей любви, я даже рад избавлению от своей ошибки. Чтобы подчеркнуть разницу этих логик в работе [10] я ввел понятие ***детерминированной логики***, с помощью которой осуществляется формализация условий работоспособности (в надежности) и опасности (в теории безопасности), а затем по специальным алгоритмам производится замещение логических аргументов в функциях алгебры логики вероятностями их истинности.

В связи с полезностью старых книг хотел бы обратить внимание молодых людей (ученых, специалистов и пр.) на три книги [11, 12, 13], вышедших почти одновременно и на одну тематику (о роли математической логики). Эти реликвии перечислены в порядке их выхода в свет и отражают озабоченность авторов состоянием дел на «логическом фронте». Может быть они также послужат ***началом конца*** многочисленных заблуждений в этой области, когда с появлением ЭВМ, Интернета и прочих «свобод» стали появляться разнообразные логики, нейронные сети, мягкие вычисления и измерения.

Все авторы упомянутых «реликвий» придерживались ***классической*** (или аристотелевской) логики, о которой сейчас имеются и такие суждения [14, с. 52]: … «Информационный подход означает, что наши попытки ответить на вопрос о реальности будут пустой тратой времени, если мы будем ***продолжать барахтаться в рамках аристотелевской логики***» (подчеркивания наши).

Хочу поблагодарить лирика К.Симонова, который помог сформулировать весьма полезную научную рекомендацию:

«Там начало конца,
где читаются старые ***книги***,
Где реликвии нам –
Чтоб о ***сущности*** вспомнить – нужны ».

Конец моей истории разочарования в вероятностной логике может стать началом ее нового витка – в форме ***логики вероятностей*** на простейших примерах (более доступной для понимания). Примеры , как известно, учат иногда больше и быстрее, чем сухая теория.

Чтобы практически осознать нестандартность вычисления вероятностей на сложных структурах и понять сущность проблемы, рассмотрим четыре простейших примера на одной и той же мостиковой структуре, состоящей из пяти элементов (рис. 1).

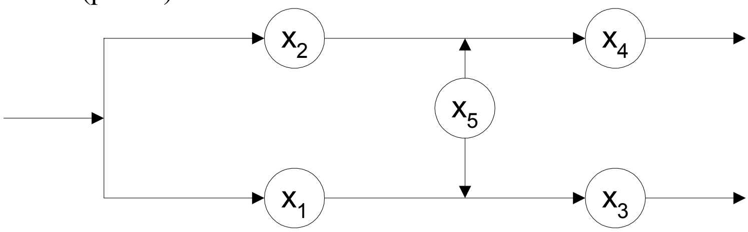

Рис. 1

Функции работоспособности системы (ФРС) с помощью кратчайших путей успешного функционирования (КПУФ) запишем в матричном виде следующим образом:

$$y_1(x_1,...,x_1)=\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & \\ x_2 & x_4 & \\ x_1 & x_5 & x_4 \\ x_2 & x_5 & x_3 \end{vmatrix}, \tag{1}$$

$$y_2(x_1,...,x_5)=\begin{vmatrix} x_1 & x_3 & \\ x_2 & x_4 & \\ x_1 & x_5 & x_4 \end{vmatrix}, \tag{2}$$

$$y_3(x_1, ..., x_5) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_3 & x_5 & x_4 \\ x_2 & x_4 & x_5 & x_3 \end{vmatrix}, \quad (3)$$

$$y_4(x_1, ..., x_5) = \begin{vmatrix} x_1 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_3 & x_5 \\ x_2 & x_4 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Здесь логические произведения (конъюнкции) между логическими высказываниями x_i и x_j записаны в строке без использования знаков Λ, &,•; логические сложения (дизъюнкции) записаны отдельными строками без использования знаков $\vee$, +.Логическое отрицание вместо знаков ¬, – , будем обозначать штрихами над соответствующими логическими аргументами (не x_i будет $x_i^{/}$).

Все эти функции (1) – (4), записанные в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ), являются монотонными (т.к. не содержат логических отрицаний) и повторными (что и является препятствием для прямого замещения логических операций арифметическими).

Стоит вопрос, как же следует вычислять вероятность {P} сложного высказывания P $\{y(x_1, \ldots, x_5) = 1\}$, если будут известны вероятности истинности простейших высказываний

$$P\{x_i = 1\} = R_i, \quad (5)$$

$$P\{x_i^{/} = 1\} = Q_i, \quad (6)$$

какова ***логика этих вероятностей***?

Еще Н. Руш в 1956 г. [8] рекомендовал полный перебор всех возможных состояний системы путем записи ФАЛ в совершенной дизъюнктивной нормальной форме (СДНФ).

Учитывая громадное число возможных состояний 2^n в реальных задачах, когда n равно не 5, а несколько десятков и сотен, все разработчики ***логико-вероятностных методов*** (ЛВМ) искали соответствующие алгоритмы преобразования самих ФАЛ, чтобы при сохранении абсолютной точности расчетов добиться существенного сокращения их трудоемкости.

Воспользуемся одним из них – алгоритмом ортогонализации [5]. После преобразования функций (1) – (4) в ортогональную дизъюнктивную нормальную форму (ОДНФ) будем иметь:

$$y_1(x_1, ..., x_1) = \left| \begin{array}{lllll} x_1 & x_3 & & & \\ x_2 & x_3^{/} & x_4 & & \\ x_1^{/} & x_2 & x_3 & x_4 & \\ x_1^{/} & x_2 & x_3 & x_4^{/} & x_5 \\ x_1 & x_2^{/} & x_3^{/} & x_4 & x_5 \end{array} \right| , \qquad (7)$$

$$y_2(x_1, ..., x_5) = \left| \begin{array}{lllll} x_1 & x_3 & & & \\ x_2 & x_3^{/} & x_4 & & \\ x_1^{/} & x_2 & x_3 & x_4 & \\ x_1^{/} & x_2 & x_3 & x_4^{/} & x_5 \end{array} \right| , \qquad (8)$$

$$y_3(x_1, ..., x_5) = \left| \begin{array}{lllll} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ x_1 & x_3 & x_5 & x_4 & x_2^{/} \\ x_2 & x_4 & x_5 & x_3 & x_1^{/} \end{array} \right| , \qquad (9)$$

$$y_4(x_1, ..., x_5) = \left| \begin{array}{llll} x_1 & x_3 & x_4 & \\ x_1 & x_3 & x_4^{/} & x_5 \\ x_1^{/} & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3^{/} & x_4 & x_5 \end{array} \right| . \qquad (10)$$

Используя вероятности (5) и (6) и зная логику этих вероятностей (7)–(10), вычислим вероятностные функции (ВФ) типа (5):

$$P\{y_1(x_1,...,x_5) = 1\} = R_{c1} = R_1R_3 + R_2Q_3R_4 + Q_1R_2R_3R_4 + +Q_1R_2R_3Q_4R_5 + R_1Q_2Q_3R_4R_5, \qquad (11)$$

$$P\{y_2(x_1,...,x_5) = 1\} = R_{c2} = R_1R_3 + R_2Q_3R_4 + Q_1R_2R_3R_4 + Q_1R_2R_3Q_4R_5 , \qquad (12)$$

$$P\{y_3(x_1,...,x_5) = 1\} = R_{c3} = R_1R_2R_3R_4 + R_1Q_2R_3R_4R_5 + Q_1R_2R_3R_4R_5 , \qquad (13)$$

$$P\{y_4(x_1,...,x_5) = 1\} = R_{c4} = R_1R_3R_4 + R_1R_3Q_4R_5 + Q_1R_2R_3R_4 + R_2Q_3R_4R_5 . \qquad (14)$$

Заменив $Q_i = 1 - R_i$ и приняв равенство $R_i = R$, получим следующие однопараметрические полиномы:

$$R_{c1} = 2R^2 + 2R^3 - 5R^4 + 2R^5 , \qquad (15)$$

$$R_{c2} = 2R^2 + R^3 - 3R^4 + R^5 , \qquad (16)$$

$$R_{c3} = 3R^4 - 2R^5 \;, \tag{17}$$

$$R_{c4} = 4R^3 - 3R^4 \;. \tag{18}$$

Подставив в них R=0,5, получим «веса» функций:

$$g_{y1} = 0{,}5,\; g_{y2} = 0{,}46875,\; g_{y3} = 0{,}125,\; g_{y4} = 0{,}3125. \tag{19}$$

Число наборов, на которых функции y_i принимают истинное значение, т.е. мощности этих множеств, будут:

$$\left.\begin{aligned} Card\; y_1 &= 0{,}5 \cdot 2^5 = 16,\\ Card\; y_2 &= 0{,}46875 \cdot 2^5 = 15,\\ Card\; y_3 &= 0{,}125 \cdot 2^5 = 4,\\ Card\; y_4 &= 0{,}3125 \cdot 2^5 = 10. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

На этих простейших примерах можно убедиться:

– в абсолютной правильности полученных результатов (11) – (14) полным перебором всех $2^5 = 32 - x$ состояний;

– в определенной экономии вычислений с помощью ОДНФ по сравнению с СДНФ ($\frac{16}{5}$=3,2, $\frac{15}{4}$=3,75, $\frac{4}{3}$=1,33, $\frac{10}{4}$=2,5);

– в возможности на одной и той же структуре формулировать несколько разных и реальных задач.

ФРС y_1 – обеспечение питанием объектов x_3 или x_4;

ФРС y_2 – то же самое, но по перемычке x_5 передача электроэнергии (информации) возможна только в одном направлении;

ФРС y_3 – обеспечение питанием объектов x_3 и x_4 одновременно, когда мощности x_1 (x_2) достаточно;

ФРС y_4 – нанесение ущерба системе по кратчайшим путям опасного функционирования (КПОФ).

Новый виток истории ***логики вероятностей*** следует отсчитывать с 2002 г. [15], а отдельные ее фрагменты были опубликованы в журнале «Морской Вестник» в номерах 5, 6, 13, 18 [16–19]. Если первый период истории ЛВМ, формально прошедший под знаменем «***вероятностной логики»***, охватывает 40 лет (1962–2002), то второй период, надеюсь, будет короче и с участием «чистых» математиков.

Литература

1. *Симонов К.М.* Три тетради. – М.: Воениздат, 1964. – 592 с.
2. *Нейман Дж.* Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонентов. / Автоматика. – М.: Иностранная литература, 1956, с. 68–139.

3. *Рябинин И.А.* История возникновения, становления и развития теории надежности в Военно-морском флоте (глазами автора и по документам из его личного архива). – СПб, ГУП СПМБМ «Малахит», Вопросы эксплуатации и надежности, вып. № 94, 2000. – 36 с.
4. *Рябинин И.А.* Основы теории расчета надежности судовых электроэнергетических систем. – Л.: Судостроение, 1967. 362 с.
5. *Рябинин И.А.* Надежность и безопасность структурно-сложных систем. – СПб.: Политехника, 2000. – 264с.
6. *Колмогоров А.Н.* От Редакции. // Успехи математических наук, выпуск V. – М.-Л., 1938.
7. *Гливенко В.И.* Курс теории вероятностей. – М.: ГОНТИ, 1939.
8. *Rouche N.* Extension du formalisme de f'algebre logique. (Руш «Расширение формализма алгебры логики на вероятности») // Revue HF, 1956, 3 №5, с. 179–182, франц.
9. *Рябинин И.А.* Логико-вероятностное исчисление, как аппарат исследования надежности и безопасности структурно-сложных систем. – М.: Наука, Автоматика-телемеханика, 2003.
10. *Рябинин И.А.* Что есть смысл. Поиски смыслов. – СПб.: Северо-западный НИИ Наследия, 2004.
11. *Рябинин И.А., Черкесов Г.Н.* Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем. – М.: Радио и связь, 1981. – 264с. (Переведена в 1987 г. на японский язык).
12. *Глушков В.М.* Машина доказывает. – М.: Знание, Сер. «Математика, кибернетика» № 12, 1981. – 63 с.
13. *Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г.* Введение в математическую логику. – М.: Изд-во МГУ, 1982. – 120 с.
14. *Яйли Е.А. Музалевский А.А.* Риск: анализ, оценка, управление. – СПб.: изд. РГГМУ, ВВМ, 2005. – 234 с.
15. *Рябинин И.А.* Ленинградская научная школа логико-вероятностных методов исследования надежности и безопасности структурно-сложных систем. // В кн.: Наука Санкт-Петербурга и морская мощь России. – СПб.: Наука, т. 2, 2002, с. 797–811.
16. *Рябинин И.А.* Логико-вероятностное исчисление, как аппарат исследования надежности и безопасности структурно-сложных систем. // «Морской Вестник», 2003, № 1 (5), с.78–81.
17. *Рябинин И.А.* Безопасность и математическая логика (азбука безопасности). // «Морской Вестник», 2003, № (6), с. 59–60.
18. *Рябинин И.А.* Феномен логико-вероятностного исчисления. // «Морской Вестник», № 1 (13), 2005, с. 36–40.
19. *Рябинин И.А.* Логика теории безопасности и реальный мир. // «Морской Вестник», № 2 (18), 2006, с; Три кита ВМФ: надежность, живучесть, безопасность. // Юж.-рос. гос. тех. ун-т. – Новочеркасск: 000 НПО «Темп», 2006. –116 с.