С.Д. Винников

РАСЧЕТ УРОВНЕЙ ПРИ НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ ВОДЫ В КАНАЛЕ

S.D. Vinnikov

CALCULATION OF WATER LEVELS AT UNSTEADY FLOW REGIME IN THE CHANNEL

Излагается метод расчета неустановившегося движения воды в канале с использованием системы Сен-Венана, гидродинамическое уравнение которой существенно уточнено.

A method of unsteady flow regime calculation in the channel is stated. The Saint-Venant system is applied, with its hydrodynamical equations being substantially specified.

Прежде всего рассмотрим физический смысл квазилинейного уравнения переноса:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{dx}{dt}\frac{\partial v}{\partial x}=0, \qquad (1)$$

где v – средняя скорость течения; t – время; x – продольная координата.

Рассмотрим это уравнение применительно к случаю движения воды в прямолинейном канале. Его решение приводится во многих литературных источниках и, в частности, в работе [Турчак, 2002]. Для идеализированного потока оно дается в виде прямых линий, носящих название характеристик. Вдоль характеристик значение скорости v постоянны. Наклон характеристик при следовании вдоль оси x либо уменьшается, либо увеличивается при монотонно меняющемся значении v.

Из уравнения (1) следует, что при отсутствии вязкости (силы трения о дно и стенки канала) будем иметь три варианта его решения при уклоне дна $i_д > 0$ (рис. 1).

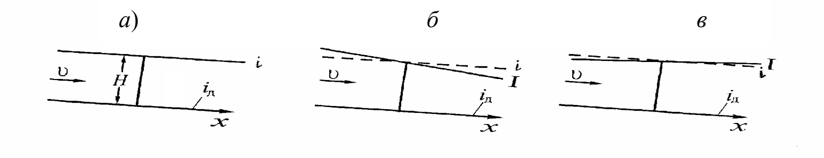

Рис. 1. Случаи состояния потока. *а* – равномерное движение потока; *б* – ускоренное неустановившееся движение потока; *в* – замедленное неустановившееся движение потока

1. При равенстве уклонов водной поверхности и дна ($I = i_д > 0$) и глубине потока H = const характеристики (прямые) параллельны оси t. Этот случай соответствует равномерному движению потока.

2. При уклоне водной поверхности $I > i_д$ (возрастающее значение v) характеристики наклонены к оси x по ее ходу.

3. При уклоне водной поверхности $I < i_д$ (убывающее значение v) характеристики наклонены к оси x против ее хода.

В уравнении (1) справа стоит нуль, указывающий на отсутствие действующей силы, однако авторы названной выше работы негласно ее подразумевают, когда говорят, что наклон характеристик меняется в зависимости от изменения скорости v. Она будет меняться только при наличии действующей на поток силы и ее изменении. В нашем случае такой силой является сила тяжести, точнее превышение силы тяжести над силой трения, определяемое разностью уклонов $\Delta I = I - i_д$ [Винников, 2007].

Учтем теперь вязкость воды, т.е. силу трения потока о дно и стенки канала. В этом случае в (1) появится правая часть, указывающая на то, что мы имеем дело с неоднородным уравнением. В речной гидравлике это уравнение носит название гидродинамического уравнения Сен-Венана:

$$I = \frac{\alpha_0}{g}\frac{\partial v_v}{\partial t} + \frac{\alpha\, v_v}{g}\frac{\partial v_v}{\partial x} + \frac{v_р^2}{C^2 H}, \tag{2}$$

где g – ускорение свободного падения; α_0 и α – коррективы скорости; $v_р$ – средняя скорость потока при его равномерном движении; C – коэффициент Шези;

$$\frac{v_р^2}{C^2 H} = i, \tag{3}$$

где $i = i_д$ – уклон водной поверхности при равномерном движении потока;

$$v_v = v - v_р, \tag{4}$$

где v – средняя скорость потока при глубине H (при уклоне I); $v_р$ – скорость потока при той же глубине H, но при равномерном движении потока (при уклоне i); $v_v = \Delta v$ – приращение скорости при глубине H, обусловленное разностью уклонов $\pm\Delta I$ [Винников, 2007].

В уравнении (2) скорость v_v имеет иное цифровое значение, чем значение скорости v в уравнении (1) . Это обусловлено тем, что в (1) ее значение определяется силой тяжести при отсутствии силы трения, т. е. при $\Delta I = I - 0,$ а в (2) – разностью уклонов $\pm\Delta I = I - i,$ т. е. при наличии силы трения, обусловливающей уклон i. Также следует отметить, что скорость v_v во втором слагаемом справа принимает как положительные, так и отрицательные значения, в то время как скорость v в (1) имеет только положительные значения.

Если в уравнении (2) учтём выражение (4), то получим его в следующей записи:

$$I = \frac{\alpha_0}{g}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\alpha\,(v - v_\text{p})}{g}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{v_\text{p}}{\partial x}\right) + \frac{{v_\text{p}}^2}{C^2 H}, \qquad (5)$$

эта запись окажется более удобной при совместном решении с уравнением неразрывности (см. ниже).

Запишем уравнение (2) или равнозначное ему (5) с учётом (3) в следующем виде, приняв $\alpha_0 \approx \alpha \approx 1$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nu_\text{v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v_\text{p}}{\partial x}\right) = g\left(I - i\right). \qquad (6)$$

Уравнение (6) применяется для определения скорости течения при неустановившемся движении воды в естественных руслах. Решением этого уравнения будут характеристики в виде кривых линий сложной конфигурации, и представляют они собой линии следования постоянной скорости течения воды в координатах *x*, *t*. Так они названы по аналогии с характеристиками потока применительно к неустановившемуся его движению в реке, которые Н.М. Бернадский [Бернадский, 1933] назвал линиями следования расхода и уровня воды. Последние представляют собой горизонтали водной поверхности. В качестве примера на рис. 2 приведены характеристики для р. Тверцы [Исследования неустановившегося движения…, 1961]. На этом же рисунке показано и графическое отображение скорости $v_\text{v} = \frac{dx}{dt} = \text{tg}\varphi$. Скорость v_v “управляется” разностью уклонов $I - i$. Чем больше эта разность, т.е. угол φ, тем больше скорость и наоборот. При подъеме уровня воды ($I - i > 0$) характеристики наклонены вправо ($v_\text{v} > 0$), при равномерном движении потока ($I - i = 0$) они идут вертикально ($v_\text{v} = 0$), а при спаде уровня воды ($I - i < 0$) – наклонены влево ($v_\text{v} < 0$).

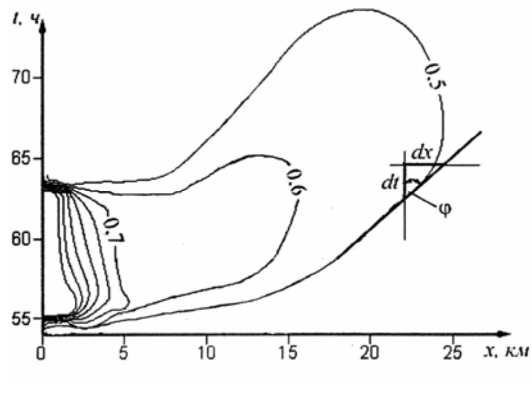

Рис. 2. Линии следования постоянной скорости течения в р. Тверце (попуск 2).
Цифры на изолиниях – скорость в м/с

Из сказанного выше можно сделать следующий вывод: задача о неустановившемся движении естественного потока в канале состоит из двух решений:

1) из решения для равномерного движения воды в канале, определяемого уклоном i, зависящего от турбулентной вязкости и силы трения о дно и стенки канала;

2) из решения для неустановившегося движения потока, определяемого разностью уклонов $\Delta I = I - i$.

При этом оба решения сводятся к определению скорости течения в гидростворе по формуле (4) [Винников, 2007]:

$$v = v_{\text{p}} \pm v_{\text{v}} . \tag{7}$$

Таким образом, (7) – есть решение сложной функции, полученное из частных решений более простых функций. Такой прием решения задачи носит название метода суперпозиции.

В данном случае его применение оправдано независимо от того, что гидродинамическое уравнение нелинейное. Нелинейность его проявилась бы при выполнении счёта по длине потока. Мы же рассматриваем его решение только для одного створа (для одной точки характеристики).

Гидродинамическое уравнение (5) позволяет описать кривую водной поверхности в момент времени t_1. Чтобы перейти к кривой водной поверхности в момент времени t_2, необходимо привлечь еще уравнение неразрывности. Запишем его в расчёте на единицу ширины потока:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + H\frac{\partial v}{\partial x} + \nu\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \tag{8}$$

где z – вертикальная координата.

Если теперь решим совместно уравнения (5) и (8), исключив $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, то получим:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{H}{\alpha(v - v_{\text{p}})}\left(\alpha_0\frac{\partial v}{\partial t} - gI + g\frac{v_{\text{p}}^2}{C^2 H}\right) - \nu\frac{\partial H}{\partial x} - H\frac{\partial v_{\text{p}}}{\partial x}. \tag{9}$$

Запишем уравнение (9) в конечных разностях:

$$z_2 = z_1 + \left[\frac{H}{\alpha(v - v_{\text{p}})}\left(\alpha_0\frac{\Delta v}{\Delta t} + g\frac{\Delta z}{2\Delta x} + g\frac{v_{\text{p}}^2}{C^2 H}\right) - \nu\frac{\Delta H}{2\Delta x} - H\frac{\Delta v_{\text{p}}}{2\Delta x}\right]\Delta t, \tag{10}$$

где z_1 и z_2 – отметки поверхности воды в k-том гидростворе в моменты времени t_1 и t_2; $\Delta z = z_{k+1} - z_{k-1}$, $\Delta H = H_{k+1} - H_{k-1}$ и $\Delta v_{\text{p}} = v_{\text{p}\,k+1} - v_{\text{p}\,k\text{-}1}$ – разница отметок поверхности воды, глубины и скорости при равномерном движении между гидростворами, расположенными ниже (k + 1) и выше (k – 1) по отношению к k-му гидроствору в момент времени t_1; $\frac{\Delta\nu}{\Delta t} = \frac{v - v_\text{р}}{\Delta t} = \frac{v_v}{\Delta t}$ – изменение скорости в k-том гидростворе за период Δt при одной и той же глубине потока H.

Перейдем теперь к вопросу о задании в уравнении (10) расчетных интервалов по длине канала Δx и по времени Δt.

Выполненные нами ранее исследования [Винников, 2007] показали, что при неустановившемся движении потока интервал времени Δt является переменной величиной в зависимости от разности уклонов ΔI в гидростворе, т.е. $\Delta t = f(z)$. Интервалы Δt и Δx связаны между собой определенной зависимостью, следовательно, и интервал Δx есть переменная величина. На практике эти интервалы часто принято принимать постоянными во всем диапазоне изменения уровня воды, что, конечно, сказывается на точности расчетов. Если выполним анализ гидродинамического уравнения (5), заменив при этом частные производные искомой функции отношениями конечных разностей, то получим условие устойчивости разностной схемы в виде соотношения:

$$\frac{v_\nu \Delta t}{2\Delta x} = \frac{v_\nu}{\frac{2\Delta x}{\Delta t}} = \frac{v_\nu}{v} \leq 1 . \qquad (11)$$

Чтобы задать в (11) интервалы Δt и Δx , необходимо знать скорость следования характеристики v_v в рассматриваемом гидростворе при отметке z. Эта скорость есть проекция скорости движения тела (жидкости) в зависимости от действующей на него силы тяжести пропорциональной разности уклонов ΔI:

$$v_\nu = \mathrm{tg}\alpha\, gt, \qquad (12)$$

где при малых углах, характерных для естественных потоков, $\mathrm{tg}\,\alpha \approx \sin\alpha = \Delta I$; $t = \Delta t$.

Если теперь подставим значение Δt в выражение (11), то найдем интервал длины Δx .

Из выполненного исследования следует, что интервалы Δt и Δx являются переменными в зависимости от скорости v_ν , а точнее, от разности уклонов $\Delta I = I - i$. При $\Delta I = 0$ – равномерное движение потока (ему соответствует максимальное значение уровня воды при волновом движении воды в канале): $v_\nu = 0$ и $\Delta t = 0$.

Таким образом, выяснив физическую сущность, которую несет скорость v_v в уравнении (2), мы смогли с уверенностью определить интервал времени Δt и соответственно интервал длины Δx в уравнениях Сен-Венана, описывающих неустановившееся движение потока в канале. Из (11) следует, что они не зависят от коэффициента Шези *C*, который вводят в рассмотрение при их определении в существующих методах расчета волнового движения потока в канале (реке).

Если теперь приравняем выражение для скорости v_v, полученное по эмпирическим данным [Винников, 2007] и по формуле (12), то найдём выражение для коэффициента $\alpha_{1_{П(С)}}$:

$$\alpha_{1_{П(С)}} i\ \Delta I = g\ \Delta t\ \ \Delta I, \tag{13}$$

откуда будем иметь

$$\alpha_{1_{П(С)}} = \frac{g\ \Delta t}{i}. \tag{14}$$

Из (14) следует размерность $\alpha_{1_{П(С)}}$ м/с, аналогичная размерности, например, у коэффициента фильтрации формулы Дарси.

В заключение отметим, что в предшествующей этой работе [Винников, 2007] допущены досадные опечатки: в формуле (1) следует читать $v_{\text{р}}$ – средняя скорость потока; на рис. 2 у горизонтальной оси должна быть надпись Δv м/с; в подписи к рис. 3 следует читать «…конвективным (2), локальным (3) ускорениями и гидравлическим трением (1)», а у горизонтальной оси рисунка надпись %. При этом цифровые значения количества энергии, определённые для слагаемых гидродинамического уравнения Сен-Венана и показанные на этом рисунке, должны быть уточнены по уравнению (2) с учётом новых представлений об этом уравнении.

Литература

1. *Бернадский Н.М.* Речная гидравлика, ее теория и методология. – Л.-М.: Госэнергоиздат, 1933. – 148 с.
2. *Винников С.Д.* Некоторые аспекты речной гидравлики // Ученые записки, 2007, № 4, с. 67–76.
3. Исследования неустановившегося движения воды в реках Тверца и Оредеж. – Л.: Гидрометеоиздат, 1961. – 288 с.
4. *Турчак Л.И., Плотников П.В.* Основы численных методов. – М.: Физматлит, 2002. – 304 с.

Ключевые слова: Неустановившееся движение воды в канале, анализ гидродинамического уравнения Сен-Венана, решение системы уравнений Сен-Венана.