А.В. Сикан

СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГОЛЕТНИХ КОЛЕБАНИЙ РЕЧНОГО СТОКА И МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ЕЕ ПАРАМЕТРОВ

A.V. Sikan

STOCHASTIC MODEL OF LONG-TERM FLUCTUATIONS OF THE RIVER RUN-OFF AND ESTIMATION TECHNIQUE OF ITS PARAMETERS

Речной водосбор схематизируется в виде двух резервуаров – быстрой и медленной сработки. На базе этого подхода предлагается стохастическая модель для описания многолетних колебаний речного стока. Описывается методика оценки параметров модели. Рассматривается алгоритм учета внутрирядной и межрядной корреляции при моделировании искусственных гидрологических рядов.

Ключевые слова: речной водосбор, расход воды, случайный процесс, стохастическая модель, оптимизация параметров, метод Монте-Карло.

River reservoir is schematized in the form of two tanks – fast and slow drains. On the basis of this approach the stochastic model for the description of long-term fluctuations of a river run-off is offered for consideration. The model parameters estimation technique is described. The algorithm of artificial hydrological series modeling is examined taking into consideration the autocorrelation and space correlation data.

Key words: river drainage area, water discharge, stochastic process, stochastic model, optimization of parameters, Monte-Carlo technique.

В основу разрабатываемой теории положена гипотеза о том, что водосбор природного водного объекта в общем случае можно рассматривать как аналог водохранилища многолетнего регулирования, имеющего емкость сезонного регулирования и емкость многолетнего регулирования стока. В зависимости от размеров и типа водного объекта соотношение между емкостями сезонного и многолетнего регулирования может существенно различаться. Так, водосборы малых рек вообще не имеют емкости многолетнего регулирования, а у крупных инерционных систем (например, у крупных озерно-речных систем) эта емкость весьма значительна.

В данном контексте будем называть емкость многолетнего регулирования резервуаром медленной сработки (РМС), а емкость сезонного регулирования – резервуаром быстрой сработки (РБС).

Под влиянием метеорологических факторов, прежде всего осадков, объем воды в резервуарах постоянно изменяется. При этом РМС работает как интегратор, накапливая положительные и отрицательные приращения, а РБС срабатывается ежегодно.

В наиболее многоводные годы РМС будет переполняться, а в наиболее маловодные полностью срабатываться. Таким образом, с формальной точки зрения объем воды в резервуаре медленной сработки можно рассматривать как сумму случайных приращений, ограниченную верхним и нижним пределами.

С вычислительной точки зрения здесь нет сложностей. При переполнении РМС весь избыток воды будет срабатываться через резервуар быстрой сработки, а при полной сработке РМС дефицит в нем будет компенсироваться за счет РБС.

При таком подходе ряд среднегодовых расходов реки можно представить в виде стохастического уравнения [Сикан, 1991, 1994]:

$$Q_i = \exp\left[\psi_1\left(\sum_{j=1}^{i}\delta_j + \frac{\psi_2}{\psi_1}\varepsilon_i\right) + \psi_3\right], \tag{1}$$

где δ_j и ε_i – независимые гауссовские случайные процессы с нулевым средним и единичной дисперсией; ψ_1, ψ_2, ψ_3 – постоянные коэффициенты (параметры модели).

При этом член $\left(\sum_{j=1}^{i}\delta_j\right)$ характеризует инерционные свойства системы и порождает скоррелированность смежных членов ряда, а член $\frac{\psi_2}{\psi_1}\varepsilon_i$ представляет собой «белый шум», который эту скоррелированность снижает. Уровень шума регулируется за счет изменения параметра $\frac{\psi_2}{\psi_1}$.

Еще одним параметром является $\pm P$ – значение верхнего ($+P$) и нижнего ($-P$) пределов резервуара медленной сработки:

$$-P \le \sum_{j=1}^{i}\delta_j \le +P. \tag{2}$$

Наличие верхнего и нижнего пределов у емкости многолетнего регулирования имеет принципиальное значение как с физической точки зрения, так и с формальной, гарантируя ограничение дисперсии случайного процесса, порождаемого суммированием случайных независимых величин.

Выражение (1) позволяет описать реакцию речного водосбора на воздействие метеорологических факторов. При этом в пределах гидрологически однородного района случайные процессы на входе системы (δ и ε) будут одинаковыми. Особенности водосбора в данной модели учитываются лишь частично за счет параметров, отражающих соотношение емкостей быстрой и медленной сработки, и параметра P, характеризующего значение верхнего и нижнего пределов РМС. В более общем случае расчетное уравнение имеет вид:

$$Q_i = \exp\left[\psi_1\left(\sum_{j=1}^{i}\delta_j + \frac{\psi_2}{\psi_1}\varepsilon_i\right) + \psi_3\right] + \varphi_i, \tag{3}$$

где φ_i – гауссовский случайный процесс с нулевым средним и дисперсией D_φ.

Случайный процесс φ_i представляет собой шумовую составляющую, обусловленную индивидуальными особенностями конкретного водосбора (особенности подстилающей поверхности, геология и т. д.). Именно благодаря этой составляющей связь между стоком любой реки и любого ее аналога будет иметь вероятностный характер (т. е. всегда будет разброс точек на графике связи).

В то же время в пределах гидрологически однородного района доля дисперсии случайного процесса φ_i в суммарной дисперсии ряда годового стока относительно не велика и обычно не превышает 10–15 %.

Оптимизация параметров модели осуществляется в несколько этапов. На первом этапе из исходного ряда исключается шумовая составляющая φ_i. Для этого задается коэффициент k^2, который характеризует долю дисперсии случайного процесса φ_i в суммарной дисперсии ряда годового стока. Практически это достигается преобразованием каждого члена исходного ряда по формуле:

$$G_i = kQ_i + m\,. \tag{4}$$

Параметры преобразования k и m связаны со статистическими параметрами исходного ряда соотношениями [Сикан, 2007]:

$$\sigma_G = k\sigma_Q\,, \tag{5}$$

$$\overline{G} = \overline{Q} = k\overline{Q} + m\,, \tag{6}$$

где σ_Q и σ_G – соответственно среднеквадратические отклонения исходного ряда и ряда, из которого исключен шум; $\overline{Q}$ и $\overline{G}$ – средние значения рядов Q и G.

При заданном значении параметра k параметр m однозначно определяется через статистические параметры исходного ряда.

На втором этапе ряд G преобразуется в ряд логарифмов:

$$X_i = \ln(G_i)\,. \tag{7}$$

По ряду логарифмов оцениваются три статистических параметра: среднее ($\overline{X}$), среднеквадратическое отклонение (σ_x) и коэффициент автокорреляции (r_x).

Дальнейшая оптимизация производится на основе метода Монте-Карло [Сикан, 2007; Соболь, 1985]. Моделируется пара реализаций случайных процессов δ_j и ε_i и формируется ряд:

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{i} \delta_i + \frac{\psi_2}{\psi_1}\varepsilon_i\,. \tag{8}$$

При этом заранее задаются верхний ($+P$) и нижний ($-P$) пределы ряда сумм. Если на i-том шаге предел превышен, то на шаге $i+1$ значение суммы принимается равным соответствующему пределу.

При правильном выборе параметра $\left(\dfrac{\psi_2}{\psi_1}\right)$ значение r_x должно совпадать с коэффициентом автокорреляции ряда (8) r_λ.

Затем вычисляются параметры ψ_1 и ψ_3, которые являются параметрами линейного преобразования ряда λ_i:

$$\psi_1\bar{\lambda}+\psi_3=\bar{x}, \tag{9}$$

$$\psi_1\sigma_\lambda=\sigma_x, \tag{10}$$

где $\bar{\lambda}$ и σ_λ – соответственно среднее значение и среднеквадратическое отклонение ряда λ_i.

Полученная после линейного преобразования ряда λ_i реализация случайного процесса ($\psi_1\lambda_i+\psi_3$) будет совпадать с рядом X_i по статистическим параметрам $\bar{X},\sigma_x,r_x$.

Учитывая, что ряд X_i получен из ряда G_i на основе преобразования (7), проводим почленное потенцирование ряда ($\psi_1\lambda_i+\psi_3$).

Далее моделируем еще одну реализацию гауссовского случайного процесса φ_i с нулевым средним и среднеквадратическим отклонением σ_φ, где

$$\sigma_\varphi^2=\sigma_Q^2-k^2\sigma_Q^2. \tag{11}$$

На последнем этапе получаем искомую реализацию случайного процесса по формуле:

$$Q_i^*=\exp(\psi_1\lambda_i+\psi_3)+\varphi_i. \tag{12}$$

Полученная реализация случайного процесса Q_i^* будет совпадать с исходным рядом Q_i по среднему значению, среднеквадратическому отклонению и коэффициенту автокорреляции. Однако решение не будет единственным. Сходимость по указанным статистическим характеристикам будет иметь место при различном сочетании параметров P и k^2. Для получения единственного решения необходимо потребовать сходимости еще по нескольким характеристикам. В качестве таких характеристик используются отношение коэффициента асимметрии к коэффициенту вариации (C_s/C_v) и спектральная плотность. В качестве расчетных принимаются такие параметры P и k^2, при которых отношение (C_s/C_v) мало отличается от расчетного, и при этом спектральные плотности исходного и искусственного рядов имеют сходные очертания.

При таких жестких требованиях не каждая тройка случайных реализаций δ, ε, φ будет давать искомое решение. Данный факт можно трактовать в пользу предлагаемой теории, так как при различном сочетании метеорологических факторов реакция водосбора будет различной, что в свою очередь отразится на форме спектральной плотности гидрологического ряда и (в несколько меньшей степени) на его асимметрии.

В качестве примера рассмотрим ряд среднегодовых расходов воды реки Невы. Данный ряд выбран потому, что река Нева является частью крупной озерно-речной системы, и ее водосбор имеет достаточно большой резервуар медленной сработки.

Генерация искусственных реализаций проводилась с использованием надстройки «анализ данных» пакета Microsoft Excel. В качестве расчетных принимались такие реализации процесса Q^*, при которых имела место сходимость с исходным рядом по всем перечисленным выше параметрам.

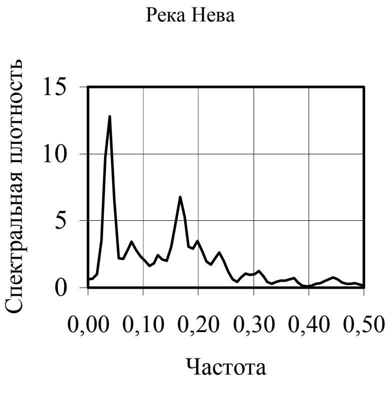
На рис. 1 представлены спектральные плотности исходного ряда и искусственных выборок той же длины, полученных с использованием предложенной расчетной схемы. Как видно на рисунке, для отобранных выборок спектральная плотность имеет хорошо выраженный пик на частоте ω = 0,030–0,035, что соответствует периоду колебаний 28–33 года. Аналогичный пик имеется и на спектре реки Невы.

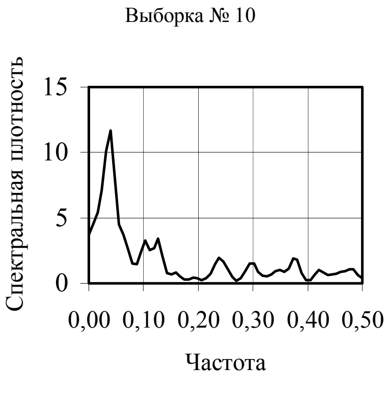
Все представленные выборки имеют точную сходимость по параметрам $\overline{Q}$, σ_Q, r_Q и имеют близкие с исходной выборкой отношения C_s/C_v.

Использовав предложенную модель, можно генерировать искусственные ряды большой продолжительности. На рис. 2 и 3 представлены ряд среднегодовых расходов воды реки Невы за 125 лет и искусственный ряд продолжительностью 1500 лет.

В дальнейшем планируется применить изложенную схему к рядам месячных расходов воды. В этом случае для устранения нестационарности, обусловленной внутригодовой цикличностью, будут применены методы декомпозиции [Боровиков, 1999]. Из исходного ряда будет устраняться линейный тренд (если он имеется) и сезонная составляющая.

Данное исследование выполнялось в рамках гранта РФФИ 07-05-01037.





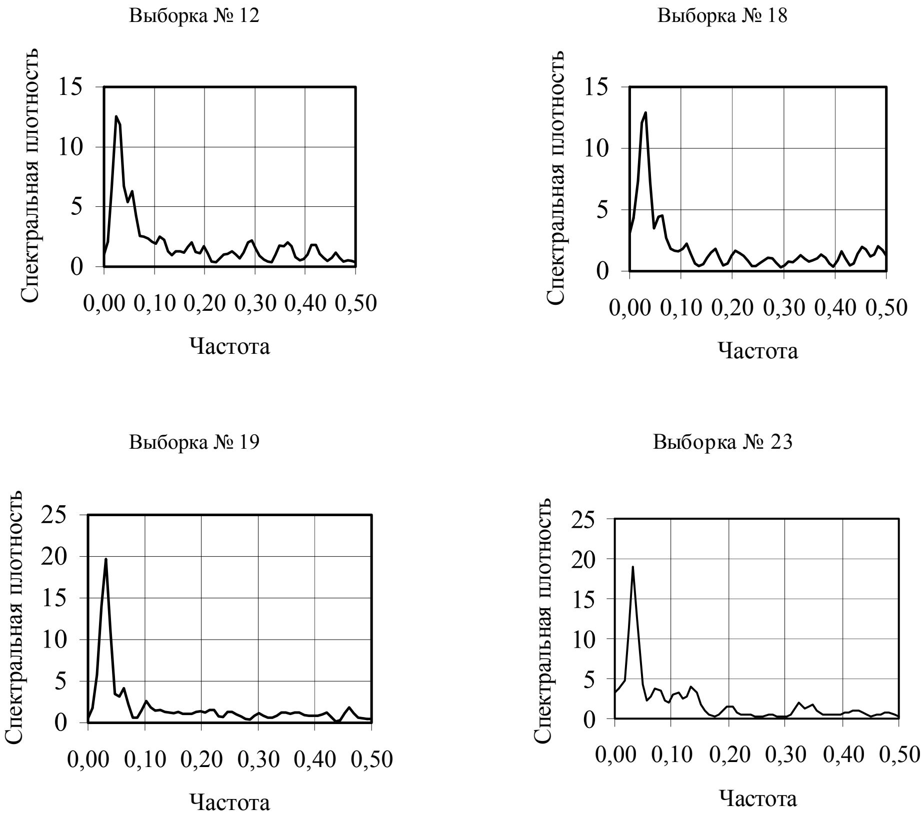


Рис. 1. Нормированные спектры среднегодовых расходов воды реки Невы и искусственных рядов, полученных на базе разных случайных последовательностей.

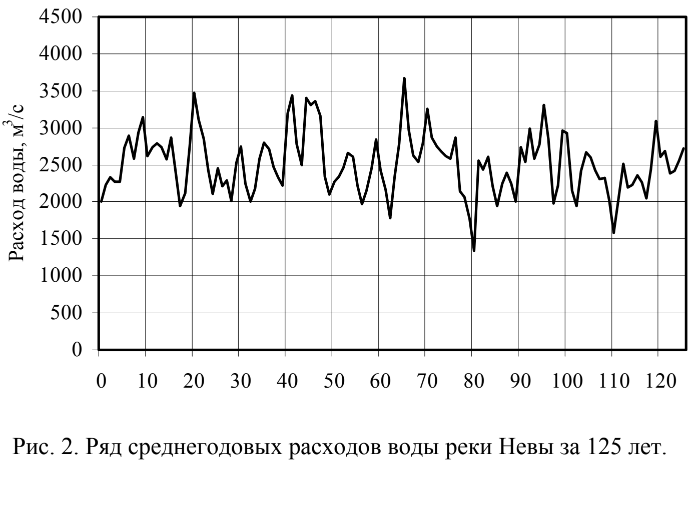


Рис. 2. Ряд среднегодовых расходов воды реки Невы за 125 лет.

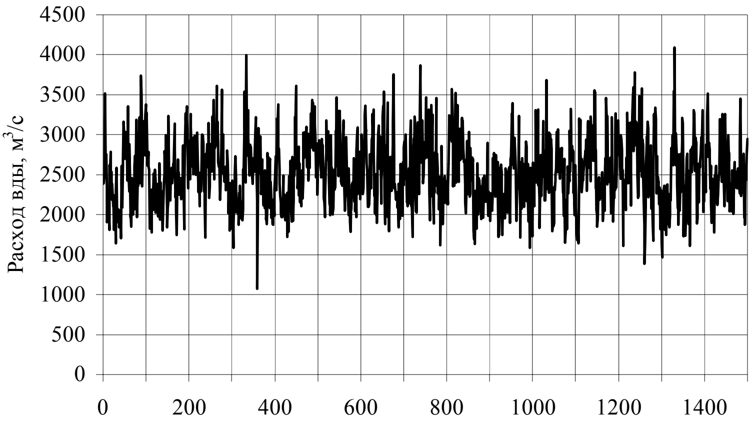


Рис. 3. Искусственный ряд среднегодовых расходов воды реки Невы за 1500 лет.

Литература

1. *Боровиков В.П., Ивченко В.П.* Прогнозирование в системе STATISTICA в среде Windows. Основы теории и интенсивная практика на компьютере. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 384 с.
2. *Сикан А. В.* Математическая модель речного стока в виде нестационарного случайного процесса. Расчетные гидрологические характеристики. Междуведомственный сборник научных трудов. Вып. 110. – Л.: изд. ЛГМИ, 1991, с. 44–51.
3. *Сикан А. В.* Моделирование рядов годового стока по схеме нестационарного случайного процесса. Вопросы экологии и гидрологические расчеты. Сборник научных трудов (междуведомственный). Вып. 116. – СПб.: изд. РГГМИ, 1994, с. 95–99.
4. *Сикан А. В.* Методы статистической обработки гидрометеорологической информации. – СПб.: изд. РГГМУ, 2007. – 279 с.
5. *Соболь И. М.* Метод Монте-Карло. – М.: Наука, 1985. – 80 с.