А.Н. Постников

ГИПОТЕЗА О СИЛЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ В УРАВНЕНИИ СЕН-ВЕНАНА

A.N. Postnikov

HYPOTHESIS OF RESISTANCE FORCE IN EQUALITY BY SEN-VENAN

Сила сопротивления есть реакция на действие составляющей силы тяжести, вызывающей движение речного потока. Если последняя изменяется во времени, то на формирование соответствующей силы сопротивления требуется время. Поэтому в члене уравнения, описывающем силы сопротивления, должна значиться скорость не за данный, а за некоторый предшествующий момент времени. Высказанные в работе положения автор относит к разряду дискуссионных и надеется на их обсуждение среди специалистов.

Ключевые слова: сила сопротивления, неустановившееся движение, дискуссия.

Resistance force is a reaction to action of component of gravity force causing movement of river flow. If the last changes in time it needs some time for forming suitable resistance force. Therefore in the member of equality describing resistance forces it must be speed not for the present moment but for some previous moment of time. The author treats the theses given in the work as debatable and hopes for their discussion among specialists.

Key words: resistance force, unsteady movement, discussion.

Основным уравнением, с помощью которого гидрологи пытаются описать неустановившееся движение воды в речных потоках, является уравнение Сен-Венана:

$$gi - g\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{gv^2}{C^2 R} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v\partial v}{\partial x}, \qquad (1)$$

где i – продольный уклон дна; h – глубина потока; v – скорость, осредненная по поперечному сечению потока; C – коэффициент Шези; R – гидравлический радиус; g – ускорение свободного падения; ось x направлена вдоль по течению.

Для наших целей уравнение удобнее представить в виде:

$$gI - \lambda v^2 = \frac{dv}{dt}, \qquad (2)$$

где $I = i - \frac{\partial h}{\partial x}$ –уклон водной поверхности вдоль потока; $\lambda = \frac{g}{C^2 R}$ – коэффициент сопротивления.

Второй член в левой части уравнения (2) характеризует силы сопротивления, возникающие в процессе движения жидкости. К настоящему времени не вызывает сомнений, что в случае равномерного движения, когда в (1) исчезают все производные и из остатка уравнения следует формула Шези, силы сопротивления ($f_с$) выражаются именно так, как показано, т.е. $f_с = \lambda v^2$. В уравнениях (1) и (2) силы сопротивления приводятся в таком же виде, но записаны они так вынужденно и только по аналогии с равномерным движением. Строгих обоснований того, что аналитические выражения в случаях равномерного и неустановившегося движений совпадают, нет. Насколько же правомерно представлять силы сопротивления при неустановившемся движении в этом виде?

Выскажем гипотезу, которая, по нашему мнению, может внести определенную ясность в этот вопрос. Как нам представляется, это можно сделать на основе достаточно простых рассуждений. Обсудим сначала случай равномерного движения, когда уравнение имеет вид

$$gi - \lambda v^2 = 0. \qquad (3)$$

Здесь постоянно действуют две силы: gi – составляющая силы тяжести, вызывающая движение, и λv^2 – сила сопротивления, вызванная к жизни движением, а значит, и первой силой. Вторая сила есть реакция (ответ) на действие первой. Важно отметить, что на формирование реакции, как ответа на действие силы тяжести, необходимо время. Но здесь с течением времени ничего не меняется : сила, вызывающая движение одна и та же во все моменты времени, а значит, и реакция, т.е. сила сопротивления, одна и та же.

Пусть далее возникает неустановившееся движение. Это значит, что составляющая силы тяжести, вызывающая движение и равная теперь gI, изменяется со временем. На подъеме паводочной волны она возрастает от gi до некоторого максимума, затем начинает убывать и на пике паводка снова становиться равной gi. На спаде составляющая силы тяжести сначала убывает от значения gi, а затем начинает расти и в конце спада опять становится равной gi. Так как на формирование реакции требуется время, то логично предположить, что сила сопротивления не может зависеть от актуальной (текущей) скорости, но зависит от скорости, которая была за некоторое время Δt до данного момента времени t. Поэтому в правых частях уравнений (1) и (2) $v = v(\mathrm{t})$, а в левых – $v = v\,(t - \Delta t)$. При этом чем круче подъем (спад), тем больше Δt. Отсюда следует, что при одной и той же актуальной скорости $v(t)$ силы сопротивления будут меньше на подъеме паводочной волны, чем на спаде. Кроме этого, по-видимому, можно утверждать, что при одной и той же скорости движения некоторого тела в жидкости силы сопротивления будут меньше при разгоне этого тела, чем при торможении.

Еще раз обратимся к выражению для сил сопротивления и запишем его теперь так:

$$f_с = \lambda v^n. \qquad (4)$$

Мы видим здесь три величины: λ, v, n. В принципе, получить нужное значение $f_с$ можно, манипулируя одной из них и задавая две другие. Рассмотрим эти варианты.

1. *Полагаем:* $\lambda = \dfrac{g}{C^2R}$; $v = v(t)$. Здесь за все отвечает показатель степени n. Так как силы сопротивления определяются величиной $v(t - \Delta n)$, а не величиной $v(t)$, то на подъеме паводка должно быть $n < 2$, а на спаде $n > 2$, если $v(t) \geq 1$ м/с. Если $v(t) < 1$ м/с, то наоборот: на подъеме $n > 2$, а на спаде $n < 2$. По-видимому, в данном случае удобнее пользоваться не единицами системы СИ, а единицами СГС и измерять скорость в см/с. Тогда как для подъема, так и для спада будет верным первое утверждение.

2. *Полагаем:* $\lambda = \dfrac{g}{C^2R}$; $n = 2$. В этом случае в выражении для силы сопротивления должна рассматриваться скорость $v(t - \Delta t)$. Нужно научиться определять значение скорости за некоторый момент времени в прошлом. Иначе говоря, значение $v(t - \Delta t)$ есть решение уравнения за некоторый момент времени в прошлом. Если мы хотим решать уравнение методом конечных разностей, то этот вариант наиболее предпочтительный, так как уравнение теперь упрощается и имеет вид:

$$gI - A = \frac{dv}{dt}, \tag{5}$$

где A – величина, известная на момент решения уравнения.

3. *Полагаем:* $v = v(t)$; $n = 2$. Мы оперируем скоростью $v(t)$, но силы сопротивления определяются скоростью $v(t - \Delta t)$. За это несоответствие ответит величина λ: на подъеме паводочной волны должно быть $\lambda < \dfrac{g}{C^2R}$, а на спаде $\lambda > \dfrac{g}{C^2R}$. Последний вариант подтверждают исследования В.В. Коваленко. В работе [Коваленко, 1984] было установлено, что значения λ при неустановившемся ($\lambda_{нст}$) и установившемся ($\lambda_{уст}$) движениях различны, их отношение зависит от производной скорости по времени: $\lambda_{нст} / \lambda_{уст} = f(dv/dt)$. При $\dfrac{dv}{dt} > 0$ отношение меньше единицы, а при $\dfrac{dv}{dt} < 0$ – больше единицы.

Напомним, что в любом из трех рассмотренных вариантов в правых частях уравнений (1) и (2) берется актуальная скорость $v(t)$.

Автору хотелось бы надеяться, что высказанные в настоящей работе соображения о силах сопротивления вызовут обсуждение среди специалистов в области гидравлики и могут оказаться полезными в их научной и практической деятельности.

Литература

Коваленко В.В. Измерение и расчет характеристик неустановившихся речных потоков. – Л.: Гидрометеоиздат, 1984. – 159 с.