

А.В. Бабкин

МЕТОДИКА ДОЛГОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА УРОВНЯ ЛАДОЖСКОГО ОЗЕРА И СТОКА Р. НЕВЫ

A.V. Babkin

A LONG-TERM FORECAST TECHNIQUE FOR LAKE LADOGA WATER LEVEL AND THE NEVA RIVER RUNOFF

Разработана методика долгосрочного прогноза уровня Ладожского озера и стока р. Невы. Методом наименьших квадратов их временные ряды аппроксимировались периодическими функциями последовательно с пошаговым изменением периода. Установлены периоды с минимумами сумм квадратических разностей исследуемых временных рядов и синусоид их аппроксимации.

Ключевые слова: методика, долгосрочный прогноз, уровень, Ладожское озеро, сток, р. Нева.

A long-term forecast technique for Lake Ladoga water level and the Neva River runoff has been developed. Using the method of least squares, their time series are sequentially approximated by periodic functions with a step-wise change in the period. The periods with minimal sums of quadratic differences and sinusoids of their approximation are determined.

Key words: procedures, long-term forecast, level, Lake Ladoga, runoff, Neva River.

Введение

Актуальной проблемой современной гидрометеорологии является разработка методологии долгосрочного прогнозирования уровней воды озер, водных ресурсов речных бассейнов и других гидрологических характеристик.

Перспективным направлением исследований по решению данной проблемы является выявление периодичностей в рядах гидрологических наблюдений [Шлямин, 1962; Шнитников, 1966; Голицын, 2002; Сикан, 2002; Бабкин, 2005 и др.], сложение их в соответствии с теорией колебаний и использование полученной зависимости (кривой, описывающей выявленные периодичности) для прогнозирования исследуемой характеристики на будущий период времени.

В настоящей работе представлена методология выявления периодичностей и на примере колебаний уровня воды Ладожского озера и стока р. Невы за период наблюдений с 1859 по 1993 г. разработана методика и даны прогнозы указанных характеристик на 2004–2010 гг. Поверочные прогнозы на 1994–2003 гг. были проверены на независимом материале.

1. Методические основы оценки периодичностей и прогноза временных рядов уровня и элементов водного баланса озера

Данные наблюдений уровня Ладожского озера и стока р. Невы аппроксимируем функцией вида:

$$R = a_0 + \frac{\delta a}{2} \sin(\omega t + \varphi) = a_0 + b \sin \omega t + c \cos \omega t . \quad (1)$$

Выражение (1) аппроксимирует ряд наблюдений наилучшим образом, если сумма его квадратических разностей со значениями ряда S_a наименьшая [Линник, 1962]:

$$S_a = \sum_1^n (a_i - R)^2 = \sum_1^n (a_i - a_0 - b \sin \omega t_i - c \cos \omega t_i)^2 . \quad (2)$$

Здесь a_i – значение переменной стока или уровня озера из данных наблюдений в год t_i ; i – номер года в ряду наблюдений длиной n . Параметры b и c связаны с амплитудой δa и фазой φ синусоиды согласно правилам сложения периодических величин с одинаковой частотой [Бронштейн, 1967]:

$$\delta a = 2\sqrt{b^2 + c^2} , \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{c} . \quad (4)$$

Чтобы определить наилучшую аппроксимирующую синусоиду с заданным периодом, необходимо объединить в систему и приравнять к 0 производные выражения (2) по параметрам a_0 , b и c :

$$\frac{\partial S_a}{\partial a_0} = -2 \sum_1^n (a_i - a_0 - b \sin \omega t_i - c \cos \omega t_i) = 0 , \quad (5)$$

$$\frac{\partial S_a}{\partial b} = -2 \sum_1^n [(a_i - a_0 - b \sin \omega t_i - c \cos \omega t_i) \sin \omega t_i] = 0 , \quad (6)$$

$$\frac{\partial S_a}{\partial c} = -2 \sum_1^n [(a_i - a_0 - b \sin \omega t_i - c \cos \omega t_i) \cos \omega t_i] = 0 . \quad (7)$$

Раскрыв скобки и введя в линейную систему трех уравнений с тремя неизвестными (5)–(7) обозначения

$$\sum_1^n a_i = r , \quad (8)$$

$$\sum_1^n \sin \omega t_i = l , \quad (9)$$

$$\sum_1^n \cos \omega t_i = p , \quad (10)$$

$$\sum_1^n a_i \sin \omega t_i = v, \quad (11)$$

$$\sum_1^n \sin^2 \omega t_i = s, \quad (12)$$

$$\sum_1^n \cos \omega t_i \sin \omega t_i = u, \quad (13)$$

$$\sum_1^n a_i \cos \omega t_i = z, \quad (14)$$

$$\sum_1^n \cos^2 \omega t_i = y, \quad (15)$$

представим ее в виде:

$$a_0 n + bl + cp = r, \quad (16)$$

$$a_0 l + bs + cu = v, \quad (17)$$

$$a_0 p + bu + cy = z. \quad (18)$$

Параметры периодической аппроксимации выражаются следующим образом:

$$c = \frac{rsp - rul + vnu - vpl + zl^2 - zsn}{sp^2 - 2upl + u^2n + yl^2 - ysn}, \quad (19)$$

$$b = \frac{vp^2 - zpl + zun - upr + yrl - vny}{sp^2 - 2upl + u^2n + yl^2 - ysn}, \quad (20)$$

$$a_0 = \frac{r - cp - bl}{n}. \quad (21)$$

Расчеты по формулам (3)–(4), (19)–(21) с учетом (8)–(15) позволяют оценить амплитуду, фазу, постоянное значение a_0 , около которого колеблется аппроксимирующая функция, для любого периода колебаний, а также их последовательности. При этом суммы квадратических разностей между аппроксимирующей синусоидой и значениями ряда могут быть рассчитаны по формуле (2).

В результате проведенных исследований установлено, что минимумам сумм квадратических разностей соответствуют максимальные значения амплитуд аппроксимирующих синусоид. Максимум амплитуды ее зависимости от частоты или периода является статистическим признаком периодичности [Саруханян, 1971].

Получено, что в большинстве случаев минимумы сумм квадратических разностей данных наблюдений и аппроксимации уровня Ладожского озера и стока р. Невы приходятся на периоды той же длительности. Минимумы сумм квадратических разностей соответственно временных рядов уровня озера и стока р. Невы и синусоид их аппроксимации отмечаются у периодов, длительностью 5, 8, 11, 13, 20 и 29 лет.

В некоторых случаях минимумы сумм квадратических разностей данных наблюдений уровня озера и стока р. Невы и аппроксимирующих их синусоид приходятся не на те же периоды, а на соседние. Минимумы сумм квадратических разностей данных наблюдений и аппроксимации уровня Ладожского озера приходятся на периоды, длительностью 17 лет и 42 года, а стока р. Невы – 16 лет и 43 года.

Помимо этого минимумы сумм квадратических разностей временных рядов и аппроксимации уровня Ладожского озера отмечаются у периодов, длительностью 67 и 140 лет, а стока р. Невы – у 120-летнего периода. Таким образом, в данных наблюдений за уровнем Ладожского озера установлено 10 периодов, 9 периодов выявлено в изменениях стока р. Невы.

Проведем последовательное сложение синусоид аппроксимации с установленными периодами. Сумму периодичностей F_{ai} представим сложением алгебраической суммы синусоид и среднего арифметического их дополнительных констант.

Сумму квадратических разностей суммы синусоид с определенными периодами и значений ряда наблюдений рассчитаем следующим образом:

$$S_{Fa} = \sum_1^n (a_i - F_{ai})^2. \quad (22)$$

При этом для каждой суммы оценивалось ее корреляционное отношение с соответствующим временным рядом по формуле:

$$r = \sqrt{1 - \frac{S_{Fa}}{S_{0a}}}. \quad (23)$$

Здесь S_{0a} – сумма квадратов отклонений временных рядов соответственно уровня озера и притока вод от их средних значений.

За временной интервал 1859–1993 гг. средние значения уровня Ладожского озера и стока р. Невы составили 4,86 м и 78,75 км³/год соответственно, а сумм S_{0H} и S_{0W} – 29,88 м² и 24 203 (км³/год)².

Корреляционное отношение (23) характеризует качество методики прогноза. Оно показывает, насколько хорошо выражение, используемое для прогноза, воспроизводит данные наблюдений прогнозируемой величины [Аполлов, 1974]. Методика прогноза считается удовлетворительной, если отношение r находится в пределах 0,6–0,86, и хорошей, если $0,86 < r < 1$.

2. Оценка оправдываемости прогноза уровня Ладожского озера и стока р. Невы

Данные наблюдений уровня Ладожского озера и стока р. Невы (1859–1993 гг.), аппроксимированные синусоидами с 29-летней длиной периода, а также суммами синусоид для соответствующих характеристик представлены на рис. 1, а, б. Пунктирный участок кривой 1 показывает данные наблюдений за уровнем озера и стоком р. Невы за 1994–2003 гг. Эти значения были использованы для оценки достоверности их поверочного прогноза.

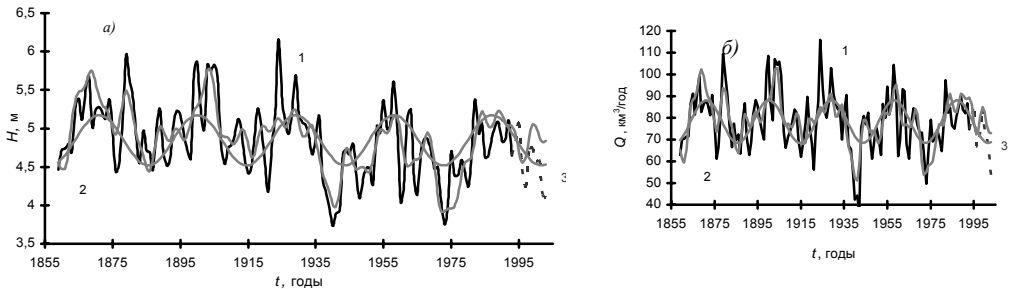


Рис. 1. Изменение уровня Ладожского озера (а) и стока вод по р. Неве (б).
1 – данные наблюдений (пунктиром показан поверочный участок 1994 – 2003 гг.),
2 – сумма периодичностей, 3 – синусоида с периодом 29 лет

Прогноз считался оправдавшимся, если разность прогнозируемой и наблюдаемой величины не превышала 67,4 % от ее среднего квадратического отклонения. Среднее квадратическое отклонение временного ряда уровня Ладожского озера равно 0,470 м, а стока р. Невы – 13,39 км³/год. Величина допустимой погрешности прогноза уровня озера составила 0,317 м, а стока р. Невы – 9,03 км³/год.

Одновременно для сопоставления полученных результатов были даны оценки прогнозных значений уровня воды озера и стока р. Невы по их средним многолетним величинам.

Прогнозы уровня Ладожского озера и стока р. Невы по среднему значению в первые три года оправдались за два года, в первые пять лет – за три года, во вторые пять лет – за три года, в десятилетний поверочный интервал прогнозы по среднему значению оправдались в шести случаях.

Прогнозы временных рядов по 29-летней синусоиде в первые три года оправдались во все годы, в первые пять лет прогноз уровня Ладожского озера оправдался за 4 года, а прогноз стока р. Невы – во все годы. Во вторые пять лет прогноз уровня озера и стока р. Невы оправдался в трех годах.

Прогнозы временных рядов по суммам синусоид в первые пять лет оправдались во все годы, в следующие пять лет прогноз уровня Ладожского озера оправдался два раза, а стока р. Невы – три раза. Таким образом, за десятилетний

интервал времени прогноз уровня Ладожского озера оправдался в семи годах, а стока р. Невы – в восьми.

Суммы квадратов разностей ошибок прогноза уровня воды Ладожского озера и стока р. Невы по среднему значению больше сумм квадратов разностей ошибок их прогноза по 29-летней синусоиде и по суммам синусоид в первые три года, в первые пять лет, во второе пятилетие и за все 10 лет поверочного интервала. Суммы квадратов ошибок прогнозов по сумме синусоид меньше или примерно равны суммам квадратов ошибок прогнозов по 29-летней синусоиде в первые три года и пять лет прогностического интервала. Во вторые пять лет суммы квадратов ошибок прогнозов уровня Ладожского озера и стока р. Невы по 29-летней синусоиде несколько меньше сумм квадратов ошибок их прогнозов по суммам синусоид.

Заключение

Разработана методика анализа временных рядов характеристик озер на основе последовательной аппроксимации их синусоидальными функциями. В рядах наблюдений уровня Ладожского озера установлены периоды с минимумами сумм квадратов разностей с их аппроксимацией, длиной 5, 8, 11, 13, 17, 20, 29, 43, 67 и 140 лет, а стока р. Невы – 5, 8, 11, 13, 16, 20, 29, 42 и 120 лет.

При сложении синусоид с установленными периодами корреляция их сумм со значениями соответствующих рядов последовательно увеличивалась. Суммы синусоид и временные ряды уровня Ладожского озера и стока р. Невы обнаружили корреляцию, достаточную для проведения прогностических расчетов. Были получены прогностические оценки этих характеристик на десятилетнем поверочном интервале (1994 – 2003 гг.), которые проверялись на независимом материале.

Проводился сравнительный анализ результатов прогнозов уровня озера и стока р. Невы по среднему значению, по синусоиде с 29-летним периодом и по сумме всех синусоид. Показано, что результаты прогнозов по сумме всех синусоид и по синусоиде с 29-летним периодом лучше результатов прогнозов по среднему значению (число верно спрогнозированных годовых значений больше, а сумма квадратов ошибок прогнозов меньше). В первые три года и пять лет поверочного интервала прогноз уровня Ладожского озера по сумме синусоид оказался несколько лучше прогноза по синусоиде с 29-летним периодом.

Прогнозы стока р. Невы на первом трехлетнем и первом пятилетнем интервале по сумме синусоид и по 29-летней синусоиде примерно одного качества (такое же число верно спрогнозированных значений стока примерно равно сумме квадратов ошибки прогнозов).

За второе пятилетие результаты прогнозов уровня Ладожского озера и стока р. Невы по 29-летней синусоиде оказались несколько лучше прогнозов по суммам синусоид.

В целом расчеты уровня Ладожского озера и стока р. Невы на 1994–2003 гг. по сумме синусоид следует считать успешными, поскольку из 10 значений 7–8 оказались спрогнозированными верно. В результате расчетов по сумме синусоид оказался также верно указан год экстремально высоких значений уровня Ладожского озера и стока р. Невы – 1999 г., что невозможно определить по расчетам по 29-летней синусоиде.

Аналогично проведен анализ временных рядов уровня Ладожского озера и стока р. Невы за более длительный период 1859–2003 гг. Результаты их прогнозных оценок на 2004–2010 гг. представлены в табл. 1.

Таблица 1

Ожидаемые оценки уровня Ладожского озера и стока р. Невы на 2004 – 2010 гг.

<i>t</i> , год	<i>H</i> , м	<i>Q</i> , км ³ /год
2004	4,26	62,4
2005	4,30	62,1
2006	4,40	64,0
2007	4,66	72,0
2008	5,01	83,5
2009	5,23	91,0
2010	5,20	90,9

Литература

1. Аполлов Б.А., Калинин Г.П., Комаров В.Д. Курс гидрологических прогнозов. – Л.: Гидрометеоздат, 1974. – 419 с.
2. Бабкин А.В. Усовершенствованная модель оценки периодичности изменений уровня и элементов водного баланса Каспийского моря // Метеорология и гидрология, 2005, № 11, с. 63–73.
3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.: Наука, 1967. – 608 с.
4. Голицын Г.С., Ефимова Л.К., Мохов И.И. и др. Гидрологические режимы Ладожского и Онежского озер и их изменения // Водные ресурсы, 2002, № 2, с. 168–173.
5. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов. – М.: Наука, 1962. – 350 с.
6. Сикан А.В. Исследование многолетних колебаний уровня Ладожского озера. – Материалы итоговой сессии ученого совета РГТМУ. – СПб.: ООО «Концепт», 2002, с. 103–104.
7. Саруханян Э.И., Смирнов Н.П. Многолетние колебания стока Волги. – Л.: Гидрометеоздат, 1971. – 168 с.
8. Шлямин Б.А. Сверхдолгосрочный прогноз уровня Каспийского моря // Изв. ВГО, 1962, т. 94, вып. 1, с. 26–33.
10. Шнитников А.В. Внутривековая изменчивость общей увлажненности бассейна Ладожского озера // Сб. статей «Гидрологический режим и водный баланс Ладожского озера». – Л.: Изд-во ЛГУ, 1966, с. 5–57.

Работа выполнена при поддержке грантов: Президента Российской Федерации (МД-5340.2006.5); INTAS (Ref. № 05-109-4234) и РФФИ (05-05-65041 и 07-05-00465).