

# ГИДРОЛОГИЯ

*В.И. Бабкин*

## ОЦЕНКА ПЕРИОДИЧНОСТЕЙ И ДОЛГОСРОЧНЫЙ ПРОГНОЗ ИЗМЕНЕНИЙ УРОВНЕЙ ВОДЫ ОЗЕР (НА ПРИМЕРЕ ЛАДОЖСКОГО ОЗЕРА И ОЗЕРА ВЕТТЕРН)

*V.I. Babkin*

## THE ESTIMATION OF PERIODICITIES AND LONG RANGE FORECAST OF WATER LEVELS OF THE LAKES (BY THE DATA OF THE LADOGA LAKE AND THE VETTERN LAKE)

*Исследование направлено на разработку методологии долгосрочного прогноза уровня воды крупных озер с учетом скрытых периодичностей в данных их наблюдений. Временные ряды уровня Ладожского озера и озера Веттерн моделировались и анализировались методами периодичностей и Дж. Фурье (FFT). Суммы синусоид, составленные на базе этих двух методов, преобразованы в прогностические уравнения, рассчитаны и проверены на независимом материале поверочные долгосрочные прогнозы уровня озер. Результаты прогнозов, рассчитанные на основе метода периодичностей, могут быть оценены не хуже, чем удовлетворительные. Они оказались несколько лучше, чем прогнозы, рассчитанные с использованием метода Дж. Фурье.*

*Ключевые слова: долгосрочный прогноз, уровень воды, метод периодичности, синусоидальные функции.*

*The research is aimed for development of the methodology of long range forecast of the water level of large lakes taking into account the periodicities in their time series. Time series of level of Ladoga Lake and Vettern Lake were analyzed and modeled by the methods of periodicities and J. Fourier (FFT). The sums of sinusoids composed on the base of these two methods were developed into the forecast equations, the training long range forecasts of lakes level were computed and tested by the new data. The forecast results computed by the method of periodicities may be estimated as no worse as satisfactory. They are some better than the forecasts based on the method of J. Fourier.*

*Key words: Long-term forecast, water level, periodicity method, sinusoidal functions.*

### 1. Введение

Уровни воды крупнейших озер характеризуются значительной изменчивостью во времени. Их повышения либо понижения вызывают изменения местоположений береговой линии, площади водной поверхности и островов, элемен-

тов солевого баланса, а также ареалов обитания растений, рыб и животных в воде и на суше. Изменения отметок уровней воды озер влияют на различные отрасли современного производства, включая промышленное и коммунальное водоснабжение, рыболовство, транспорт и туризм, а также на экологию озера и его прибрежных территорий.

Долгосрочные прогнозы отметок уровней воды озер необходимы при планировании социально-экономического развития регионов.

Актуальной проблемой современной гидрометеорологии являются анализ и моделирование временных рядов уровней воды озер, выявление периодичностей в их изменениях с целью их долгосрочного прогнозирования. При моделировании временных рядов уровней озер широко используются методы, основанные на преобразовании Дж. Фурье, а также на корреляционном и спектральном анализе [Шлямин, 1962; Голицын, 2002; Сикан, 2002].

В настоящем исследовании на примере данных по Ладожскому озеру и озеру Веттерн представлена методология оценки периодичностей в данных наблюдений за уровнями озер, основанная на методе наименьших квадратов, а также показана возможность ее использования при прогностических расчетах.

Непрерывные временные ряды наблюдений уровней воды озера Веттерн и Ладожского озера имеются в наличии с 1858 г. и 1859 г. соответственно. Ежегодные временные ряды уровней озер анализировались и моделировались на интервале времени с момента начала инструментальных наблюдений по 1995 г., на 1996–2005 гг. рассчитывались погодичные поверочные прогнозы, которые проверялись на независимом материале.

Временные ряды уровней озер Веттерн и Ладожского также анализировались, моделировались и прогнозировались методом Дж. Фурье (FFT). Результаты поверочных прогнозов, рассчитанных на основе методов FFT и периодичностей, были сопоставлены между собой.

## **2. Методические подходы к моделированию временных рядов уровней озер**

### **2.1. Прогностические расчеты, основанные на методе периодичностей**

Метод периодичностей основан на аппроксимации временных рядов уровней озер синусоидальными функциями. При этом оцениваются суммы квадратов разностей временного ряда и аппроксимирующей синусоиды:

$$S_H = \sum_1^n (H_i - H_0 - b \sin \omega t - c \cos \omega t)^2 = \sum_1^n \left[ (H_i - H_0 - \frac{\delta H}{2} \sin(\omega t + \varphi_H)) \right]^2. (1)$$

Здесь  $H_i$  – значение временного ряда в год  $t_i$ ;  $i$  – номер года в ряду наблюдений длиной  $n$ ;  $H_0$  – постоянная величина, около которой колеблется аппроксимирующая синусоида;  $b$  и  $c$  – константы, определяющие амплитуду  $\delta H$  и фазу  $\varphi_H$  аппроксимирующей синусоиды согласно правилам сложения периодических

величин с одинаковой частотой [Бронштейн, 1967],  $\omega$  – частота колебаний аппроксимирующей синусоиды.

Синусоида аппроксимирует ряд наблюдений наилучшим образом, если сумма ее квадратов разностей со значениями ряда наименьшая [Линник, 1962]. Чтобы определить наилучшую аппроксимирующую синусоиду с заданным периодом, были приравнены к 0 и объединены в систему производные выражения (1) по параметрам  $H_0$ ,  $b$  и  $c$ . Ее решение позволило получить формулы для расчета амплитуды, фазы, постоянного значения  $H_0$ , около которого колеблется аппроксимирующая функция, для любого периода аппроксимации, а также последовательности периодов [Бабкин, 2005].

Постоянные величины аппроксимации, амплитуды, фазы и суммы квадратов разностей  $S_{HL}$  и  $S_{HV}$  соответственно между временными рядами уровня Ладожского озера и озера Веттерн и их наилучшими аппроксимирующими синусоидами для каждого периода представлены в табл. 1.

Таблица 1

Синусоидальная аппроксимация временных рядов уровня воды Ладожского озера и озера Веттерн

$T$ , year	$H_{L0}$ , m	$\delta H_L/2$ , m	$\varphi_{HL}$ , radian	$S_{HL}$ , m <sup>2</sup>	$H_{V0}$ , m	$\delta H_V/2$ , m	$\varphi_{HV}$ , radian	$S_{HV}$ , m <sup>2</sup>
1	2	3	4	5	6	7	8	9
3.0	4.8552	.0351	-.2631	29.5628	88.4931	.0088	4.1066	2.6676
4.0	4.8546	.0446	3.1481	29.5095	88.4931	.0010	3.0934	2.6729
5.0	4.8541	.1068	3.0683	28.8655	88.4933	.0180	-.7969	2.6507
6.0	4.8553	.0694	4.5731	29.3159	88.4931	.0242	.7431	2.6325
7.0	4.8552	.0329	-1.2396	29.5724	88.4929	.0565	2.1215	2.4510
8.0	4.8555	.1097	1.5675	28.8223	88.4927	.0307	-.3152	2.6072
9.0	4.8555	.0416	1.3905	29.5275	88.4936	.0241	1.1530	2.6327
10.0	4.8554	.0705	4.6634	29.3037	88.4934	.0213	3.2866	2.6420
11.0	4.8560	.1503	2.2752	28.1034	88.4928	.0132	.1581	2.6609
12.0	4.8551	.0350	2.7582	29.5631	88.4932	.0055	-1.3308	2.6709
13.0	4.8560	.1374	4.5808	28.3497	88.4930	.0253	-1.0963	2.6284
14.0	4.8555	.0266	3.6690	29.5990	88.4935	.0299	4.0289	2.6122
15.0	4.8558	.0585	-1.5044	29.4091	88.4940	.0430	-1.0805	2.5433
16.0	4.8558	.0663	3.1917	29.3438	88.4927	.0399	4.0257	2.5619
17.0	4.8554	.0769	3.0310	29.2402	88.4931	.0552	4.2357	2.4659
18.0	4.8542	.0258	3.5667	29.6010	88.4940	.0389	.5419	2.5685
19.0	4.8564	.0737	-.3151	29.2747	88.4947	.0499	-.8736	2.4975
20.0	4.8530	.1024	-.1384	28.9370	88.4924	.0539	-.1553	2.4751
21.0	4.8509	.0913	3.4659	29.0792	88.4917	.0330	3.6772	2.5988
22.0	4.8526	.0718	4.4243	29.2863	88.4929	.0066	-1.3125	2.6699
23.0	4.8555	.0770	2.9403	29.2433	88.4931	.0107	.7008	2.6650
24.0	4.8599	.1144	-.4788	28.7753	88.4928	.0173	4.1611	2.6520
25.0	4.8642	.1683	.7215	27.7131	88.4933	.0216	-.2009	2.6406
26.0	4.8643	.2255	.4193	26.1052	88.4940	.0297	.0182	2.6126
27.0	4.8586	.2787	-1.2085	24.2828	88.4937	.0378	-1.3166	2.5741
28.0	4.8488	.3176	2.2445	22.8313	88.4926	.0435	2.3102	2.5432
29.0	4.8397	.3306	4.5868	22.3486	88.4912	.0451	-1.5161	2.5368

1	2	3	4	5	6	7	8	9
30.0	4.8358	.3142	-.3654	22.9914	88.4905	.0412	-.0856	2.5587
31.0	4.8379	.2773	.0660	24.3681	88.4908	.0337	.4676	2.5945
32.0	4.8432	.2303	-.2909	25.9570	88.4915	.0256	.2994	2.6264
33.0	4.8492	.1800	-1.3392	27.3868	88.4924	.0198	-.4449	2.6453
34.0	4.8541	.1310	3.2885	28.4641	88.4929	.0182	4.5353	2.6501
35.0	4.8568	.0874	1.1316	29.1352	88.4932	.0204	2.5348	2.6439
36.0	4.8574	.0564	-1.3244	29.4354	88.4932	.0243	-.1860	2.6307
37.0	4.8563	.0532	2.2521	29.4472	88.4931	.0286	2.7417	2.6140
38.0	4.8545	.0727	-1.2409	29.2746	88.4929	.0328	-1.1633	2.5964
39.0	4.8527	.0954	.8249	29.0214	88.4928	.0365	.7307	2.5800
40.0	4.8516	.1140	2.3704	28.7724	88.4929	.0396	2.1939	2.5662
41.0	4.8513	.1265	3.4934	28.5850	88.4929	.0418	3.2676	2.5565
42.0	4.8516	.1326	4.2475	28.4885	88.4930	.0430	3.9852	2.5517
43.0	4.8524	.1325	4.6675	28.4865	88.4931	.0430	4.3731	2.5518
44.0	4.8534	.1274	-1.5047	28.5630	88.4932	.0420	4.4534	2.5562
45.0	4.8544	.1187	4.5993	28.6925	88.4932	.0402	4.2467	2.5636

Около некоторых периодов отмечаются локальные минимумы наименьших сумм квадратов разностей между временными рядами уровней озер и их аппроксимацией: у периодов длительностью 5, 8, 11, 13, 17, 20, 29, 43, 64 и 141 год у Ладожского озера и 3, 7, 15, 17, 20, 29, 42 и 93 года у озера Веттерн. У этих периодов можно предполагать признаки периодичности.

Установленные синусоиды с минимумами сумм квадратов разностей с анализируемыми рядами последовательно складывались. При сложении синусоид корреляция их сумм с временными рядами соответственно уровня воды Ладожского озера и озера Веттерн монотонно увеличивалась.

В итоге установлено, что корреляция сумм синусоид и анализируемых рядов оказалась достаточно высокой для их использования при проведении прогностических расчетов. Суммы синусоид были преобразованы в прогностические выражения, и поверочные прогнозы уровня воды Ладожского озера и озера Веттерн были рассчитаны с заблаговременностью 10 лет.

## 2.2. Моделирование, основанное на методе Дж. Фурье

Метод Дж. Фурье (FFT) и методология его использования при моделировании и анализе функций описаны в различных изданиях, например в Справочнике по математике [Бронштейн, Семендяев, 1967]. Метод FFT, как и метод периодичностей, основан на моделировании временного ряда суммой синусоидальных функций. Но синусоиды FFT обуславливаются длиной временного ряда, их периоды должны быть кратными его продолжительности.

Для каждого озера рассматривались два типа сумм FFT: неполная сумма FFT с числом синусоид, равному количеству гармоник, выявленному по методу периодичностей, и полная сумма FFT, корреляция которой с соответствующими временными рядами составляет порядка 98 %.

Поверочные прогнозы характеристик озер на те же годы, основанные на методах FFT и периодичностей, были рассчитаны и их результаты сопоставлены.

### 3. Анализ результатов моделирования

Погодичные прогнозы уровня озера рассматриваются как успешные, если разность между наблюдаемым и спрогнозированным его значением не превышает 67,4 % от его среднего квадратического отклонения [Аполлов и др., 1974].

На рис. 1 *а, б* представлены результаты применения метода периодичностей для анализа, моделирования и прогнозирования временных рядов уровня Ладожского озера и озера Веттерн. Эти прогнозы, а также прогнозы, полученные по методу FFT, в деталях показаны на рис. 1 *в, г*.

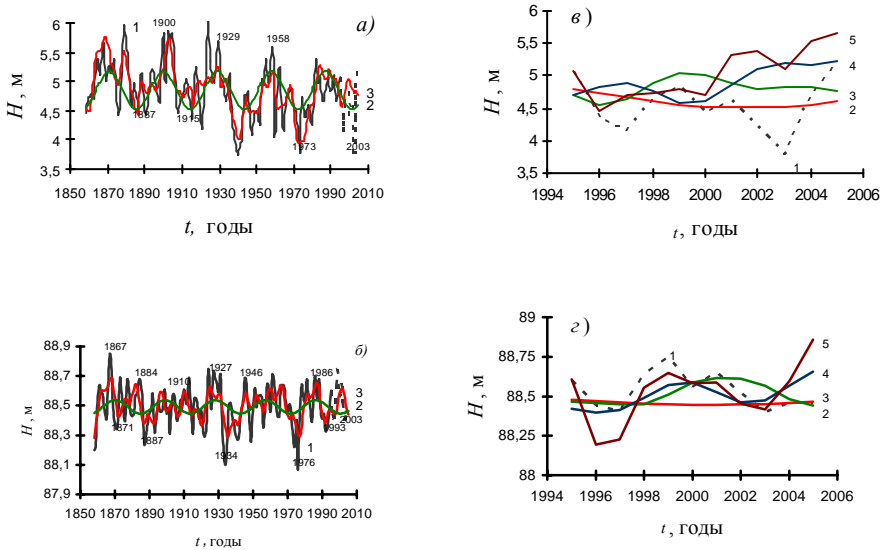


Рис. 1. Изменение уровня воды Ладожского озера (*а, в*) и озера Веттерн (*б, г*):  
 1 – данные наблюдений (пунктирная линия показывает интервал поверочного прогноза 1996–2005); 2 – синусоида с периодом 29 лет; 3 – сумма периодичностей;  
 4 – частичная сумма синусоид FFT, 5 – полная сумма FFT

Для Ладожского озера модель, основанная на методе периодичностей, позволила получить 5 верных погодичных прогнозов. Три верные значения были рассчитаны в первые пять лет и два – за второе пятилетие. Метод FFT с неполной суммой синусоид также произвел 5 верных прогнозов, тогда как этот же метод с полной суммой синусоид позволил получить 4 верных годовых значения. Сумма квадратов ошибок прогноза, основанного на методе периодичностей, оказалась несколько меньше по сравнению с использованными моделями FFT.

На примере данных по озеру Веттерн с использованием метода периодичностей получено 7 верных прогнозов. На основе модели FFT, как с частичной, так и с полной суммой синусоид, число верных прогнозов равно 5.

Представляет также определенный интерес предсказания года максимального или минимального значений уровня воды Ладожского озера и озера Веттерн. В изменениях уровня Ладожского озера можно отметить определенную закономерность. Его экстремальные значения очень часто наблюдаются в те же годы, что и соответствующие максимумы и минимумы 29-летней периодичности. Максимальные и минимальные значения уровня воды Ладожского озера буквально повторяются через 29 – 30 лет. Его локальные максимумы отмечались в 1871, 1900, 1929, 1958 гг. Минимумы уровня озера приходятся соответственно на 1915, 1973 и 2003 гг.

В появлении экстремумов уровня воды озера Веттерн можно полагать проявления (менее отчетливые) 16–17-летней закономерности. Его локальные максимумы приходятся на 1867, 1884, 1910 и 1927 гг.

### **Заключение**

Сравнение результатов прогнозирования на основе методов периодичностей и FFT (с частичной и полной суммами синусоид) показало, что метод периодичностей позволил рассчитать погодичные поверочные прогнозы несколько лучше. Его результаты могут быть оценены не хуже, чем удовлетворительные.

Тем не менее, метод FFT с полной суммой синусоид, производя в целом более слабые прогнозы, в некоторых случаях лучше предвидел годы экстремумов уровней воды озер. Так, модель, основанная на методе FFT с полной суммой синусоид, верно предсказала экстремальные значения уровня обоих озер 1999 и 2003 гг., а также его локальный минимум 2000 г. Это может быть в результате того, что метод FFT учитывает большое число синусоид в области высоких частот с дробными периодами в интервалах 2 – 3, 3 – 4 и 4 – 5 лет. Метод периодичностей с единичным шагом периода не позволяет выявлять гармоник в этих интервалах. Но метод периодичностей может быть доработан и обобщен для учета синусоид с высокими частотами.

Работа выполнена при поддержке грантов: Президента Российской Федерации (МД-3616.2008.5), РФФИ (07-05-00465) и Администрации Санкт-Петербурга.

### **Литература**

1. *Аполлов Б.А., Калинин Г.П., Комаров В.Д.* Курс гидрологических прогнозов. – Л.: Гидрометеоздат, 1974. – 419 с.
2. *Бабкин А.В.* Усовершенствованная модель оценки периодичности изменений уровня и элементов водного баланса Каспийского моря // *Метеорология и гидрология*, 2005, № 11, с. 63–73.
3. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1967. – 608 с.
4. *Голицын Г.С., Ефимова Л.К., Мохов И.И. и др.* Гидрологические режимы Ладожского и Онежского озер и их изменения // *Водные ресурсы*, 2002, № 2, с. 168–173.
5. *Линник Ю.В.* Метод наименьших квадратов. – М.: Наука, 1962. – 350 с.
6. *Сикан А.В.* Исследование многолетних колебаний уровня Ладожского озера. – Материалы итоговой сессии ученого совета РГГМУ. СПб.: ООО Концепт, 2002, с. 103–104.
7. *Шлямин Б.А.* Сверхдолгосрочный прогноз уровня Каспийского моря // *Изв. ВГО*, 1962, т. 94, вып. 1, с. 26–33.