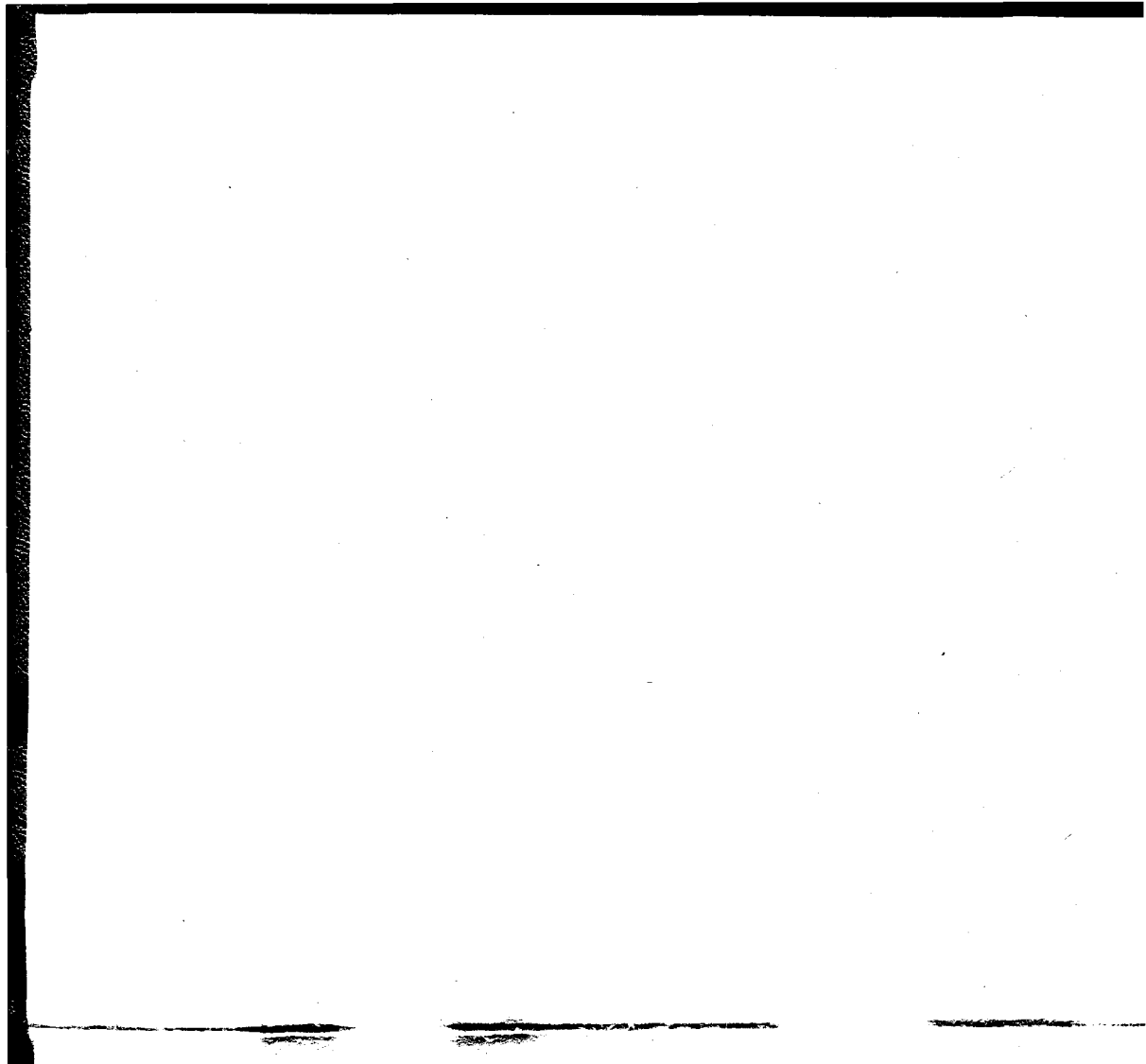




В. Б. Ржонсницкий

ПРИЛИВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ



Ленинград Гидрометеиздат 1979

УДК 551.46

Е
70104

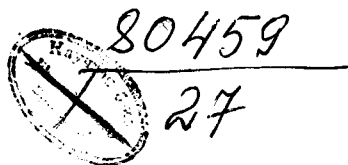
Ответственные редакторы
д-р геогр. наук В. Р. ФУКС,
д-р физ.-мат. наук В. К. АБАЛАКИН

В книге содержатся важные в научном и практическом отношении обобщения результатов классических работ по аналитическим исследованиям приливных движений и современных исследований, посвященных теории приливов. Приводятся полученные автором результаты аналитического исследования явления приливов в Солнечной системе и в первую очередь в Мировом океане и на Солнце. Некоторые из них могут быть использованы для изучения общих особенностей механических движений.

Книга предназначена для океанологов, геофизиков, географов.

The book presents the important generalizations of results of the fundamental works devoted to the analytical research in tidal motions and modern investigations of tides. The author's results of analytical investigations of tides in the Solar System and first of all in the World Ocean and at the Sun are given. Some results can be used for the research of the mechanical motions general peculiarities.

The book is ment for oceanographers, geophysicists, and geographers.



P 20806-187 43-79 1903030100
069(02)-79

© Гидрометеиздат, 1979 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга посвящена аналитическому исследованию приливов. В ней рассмотрены важнейшие силы, под действием которых происходят приливные движения. Установлены и проанализированы зависимости между этими силами и характеристиками приливов, происходящих при более сложных условиях по сравнению с условиями, имеющими место в окружающих Землю зональных и меридианных каналах постоянной глубины и ширины, теория приливов в которых была создана в XIX столетии Г. Б. Эри. Вследствие небольшого объема книги в ней не удалось привести часть установленных к настоящему времени зависимостей между действующими силами и кинематическими характеристиками приливных движений и подробно осветить возможности использования установленных закономерностей приливных движений для изучения приливов в Солнечной системе и их влияния на другие процессы. Очевидно, что последняя проблема может быть предметом отдельного специального исследования, а потому в конце книги кратко рассмотрены только важнейшие ее аспекты.

Чтобы не нарушить последовательность изложения материала и облегчить его восприятие, представилось целесообразным осветить некоторые вопросы, описанные ранее в других трудах. К их числу в первую очередь относится теория двухмерных приливных движений в каналах. Однако в главе, посвященной рассмотрению этих движений, изложены и новые, не опубликованные ранее, результаты, в том числе особенности частных долгопериодных приливов и особенности приливов в каналах переменной ширины, образованных меридианами. Кроме того, в книге устранены обнаруженные автором ошибки, имевшиеся в некоторых опубликованных ранее работах, посвященных аналитическому исследованию приливов. Наиболее существенная из них заключалась в том, что при определении характеристик приливов на жидких небесных телах в качестве граничного условия на невозмущенной поверхности тела использовалось не реальное, а эффективное давление, в результате чего найденные характеристики вдвое превосходили действительные.

Исследование приливов, на основании которого написана эта книга, проводилось автором во время работы на кафедре

океанологии географического факультета Ленинградского государственного университета и в Азовско-Черноморском научно-исследовательском институте морского рыбного хозяйства и океанографии (АзЧерНИРО) в Керчи. Автор выражает глубокую благодарность руководителям названных организаций — заведующему кафедрой океанологии В. Х. Буйницкому и директорам АзЧерНИРО А. С. Ревину и Я. К. Гололобову за внимание к этому исследованию и содействие его выполнению.

На протяжении многих лет автор обсуждал некоторые вопросы теории приливов с геофизиками и океанографами И. В. Максимовым, В. Н. Кочкиным, К. Т. Богдановым и математиками С. З. Рафальсоном, Л. М. Кокозом, В. П. Кулешом. Автор глубоко благодарен им за ценные советы, использованные при написании книги.

Автор выражает глубокую благодарность редакторам книги В. К. Абалакину и В. Р. Фуксу.

Автор выражает глубокую признательность сотрудницам сектора океанографии Черного моря АзЧерНИРО Н. В. Михайловой, С. А. Коваль и М. С. Финкельштейн за большую помощь в вычислении некоторых характеристик приливообразующих сил, приведенных в этой работе.

ВВЕДЕНИЕ

Приливы — широко распространенный в природе вид механического движения материи, вызываемый действием гравитационных по происхождению сил небесных светил.

Историю исследования приливов в океанах Земли можно разделить на три больших этапа. Первый из них начался до новой эры во времена, когда человек узнал о существовании приливов у берегов океанов и морей. Описание этого явления приведено в трудах древнегреческого историка Геродота (484—425 гг. до н. э.). В последующие столетия выдающиеся ученые древней Греции Пифей (IV век до н. э.) и Посидоний (135—51 гг. до н. э.) установили важные зависимости характеристик приливов у берегов Атлантического океана от фаз Луны и даже от времен года. Из опубликованных в первом столетии новой эры трудов римского ученого Плиния Старшего (23—79 гг.) следует, что к тому времени была окончательно установлена зависимость приливов от положений Луны и Солнца на небесной сфере.

Второй этап продолжался от начала новой эры до второй половины XVII века — времени создания научной теории приливов. В последние его столетия, когда данные о приливах стали необходимыми для навигации, были найдены способы предсказания некоторых характеристик приливов в европейских портах, основанные на эмпирических связях между положениями Луны и Солнца на небесной сфере и уровнем моря. В 1213 г. английский королевский астроном Валлингфорд составил первые таблицы приливов для лондонского порта. В дальнейшем подобные таблицы составлялись и для других портов Западной Европы, расположенных на берегах Атлантического океана и его окраинных морей. Однако эти таблицы были неточными и имели непродолжительный срок действия. Для правильного предсказания приливов необходима была точная научная теория этого явления.

Важными предпосылками создания такой теории послужили открытие Николаем Коперником (1473—1543 гг.) гелиоцентрической системы мира, исследования, выполненные Галилео Галилеем (1564—1642 гг.) в области механики, и открытие Иоганном Кеплером (1571—1630 гг.) законов движения планет.

Кеплер впервые высказал мысль, что приливы вызываются гравитационными силами небесных тел: «Моря излились бы все на Луну, если бы их не удерживала Земля. Так как Земля их удерживает, то при кульминации Луны над каким-либо местом океана на поверхности его вод образуется волна».

Научная теория приливов была создана Исааком Ньютоном (1643—1727 гг.) и изложена в его главном труде «Математические начала натуральной философии» [43], изданном в Лондоне в 1687 г. Как отмечает Я. Г. Дорфман [11], этот труд представляет собой «теоретический фундамент классической физики».

Теория приливов Ньютона основывается на открытых им законах механики и законе всемирного тяготения. Ньютон объяснил причину возникновения приливообразующих сил, установил факторы, от которых зависят их значения, и определил порядок значений приливообразующих сил Солнца и Луны, действующих на воды Мирового океана. Он рассматривал приливы как динамический, волновой процесс и исследовал интерференцию приливных волн, возникающих в различных частях океанов, влияние на приливы разницы во времени между моментом кульминации светила на каком-либо меридиане и моментом, в который приливообразующая сила на этом меридиане достигает наибольшего значения, влияние шельфовой зоны и силы трения на амплитуды и фазы приливных движений и другие принципиальные аспекты приливов. Открытия Ньютона создали основу для дальнейшего исследования приливов точными методами физики и математики. Аналитическое исследование приливов наряду с изучением их другими методами сыграло очень важную роль в установлении закономерностей этого явления природы.

Теория приливов Ньютона была высоко оценена современниками и поставлена в один ряд с другими крупнейшими его открытиями в области естествознания. Об этом свидетельствует эпитафия на могиле великого ученого, начинающаяся словами: «Здесь покоится сэр Исаак Ньютон, дворянин, который почти божественным разумом первый доказал с факелом математики движение планет, пути комет и приливы океанов».

Ньютоновская теория приливов явилась началом третьего этапа их исследования, продолжающегося и в наши дни. Дальнейшая задача аналитического изучения приливов заключалась в установлении количественных зависимостей характеристик приливных движений от действующих сил. Вследствие исключительной сложности она решалась при допущениях, введение которых существенно отличало рассматриваемые приливы от реальных. Первым аналитическим решением задачи была созданная Д. Бернулли (1700—1782 гг.), К. Маклореном (1698—1746 гг.) и Л. Эйлером (1707—1783 гг.) статическая теория явления, принципиальные положения которой подробно освещены в работах [4, 16, 31 и т. д.]. Несмотря на хорошо известные допущения, использованные в этой теории, основанной на

результатах ньютоновского исследования равновесного прилива, она позволила объяснить причину квазипериодических изменений уровня воды, наблюдаемых у берегов Мирового океана. Во второй половине XIX века ряд положений этой теории был использован для создания гармонического анализа приливов — важнейшего практического способа предсказания характеристик приливных колебаний уровня и приливных течений.

Дальнейшая задача аналитического исследования приливов заключалась в изучении их как динамического процесса, каким они являются в действительности. Во второй половине XVIII века П. С. Лаплас [42] составил систему уравнений, описывающую приливы, происходящие под действием приливообразующей силы, градиента давления и силы Кориолиса в океане, глубина которого очень мала по сравнению с радиусом Земли. Эта система учитывала основные факторы, определяющие приливные движения в реальных водных бассейнах нашей планеты. Поэтому она использовалась для изучения приливов в Мировом океане в течение двух последующих столетий и сохраняет практическое значение и в настоящее время.*

Чтобы облегчить изучение приливов в океанах и морях земного шара, при составлении рассматриваемой системы Лаплас использовал несколько общеизвестных допущений. Введение этих допущений почти не влияет на точность определения характеристик приливов в отдельных частях Мирового океана, однако следует обратить особое внимание на одно из них. В упомянутую систему входят только два компонента силы Кориолиса из четырех, что не обеспечивает точного перехода от инерциальной системы отсчета к неинерциальной. Это обстоятельство исключает возможность решения системы уравнений точным аналитическим способом (точное решение может быть получено лишь в гипотетических частных случаях, один из которых рассмотрен в этой книге). Поэтому Лаплас решил систему уравнений, описывающую полусуточные приливы в сплошь покрываемом Землю океане постоянной глубины, приближенным аналитическим методом и получил решения в виде степенных рядов.

Впервые точные аналитические формулы кинематических характеристик приливов, рассматриваемых как динамический процесс, были выведены Г. Б. Эри [32] в конце первой половины XIX века. Эри исследовал более простой случай приливов — двухмерные приливные движения в окружающих земной шар зональных и меридианных каналах постоянной глубины и ширины, происходящие под действием приливообразующей силы и силы горизонтального градиента давления. В результате

* Уравнения Лапласа не учитывают нелинейные и диссипативные эффекты, которые при определенных условиях оказываются весьма существенными.— *Прим. ред.* (Все редакторские примечания сделаны В. Р. Фуксом).

этих исследований, получивших название «каналовая теория приливов», Эри установил очень важные особенности явления и, в частности, доказал, что приливы всех периодов в каналах, направленных вдоль параллелей, представляют собой поступательные волны, а приливы в меридианных каналах — волны стоячие. Открытия Эри сыграли выдающуюся роль в изучении приливов Мирового океана. Например, они показали, что главным районом зарождения полусуточных приливов является тропическая зона Атлантического, Тихого и Индийского океанов, а не южное океаническое кольцо, окружающее Антарктиду. Как отмечает Г. Дитрих [10], создание каналовой теории вынудило Уэвелла, автора первых котидальных карт полусуточных приливов в Мировом океане, отказаться от распространенного в прошлом столетии ошибочного воззрения на приливы как на поступательные волны, возникающие в этом кольце и распространяющиеся во все океаны.

К числу других важных достижений относится созданная В. Томсоном [45], Дж. Г. Дарвином [36] и А. Т. Дудсоном [37] теория предсказания характеристик приливных колебаний уровня и приливных течений, называемого гармоническим анализом приливов.

Во второй половине XIX века Томсон [45] и Дарвин [9, 36] рассмотрели роль приливов в развитии небесных систем. Они показали, что приливы влияют на орбиты и периоды обращения планет, а также на периоды вращения планет вокруг их осей, и что приливные движения могут вызывать разрушение небесных тел. Дарвином была создана теория происхождения Луны, согласно которой это светило образовалось вследствие частичного разрушения Земли солнечными приливами. Таким образом, аналитические исследования показали большое космогоническое значение приливов. В конце прошлого столетия Э. У. Браун [34] выдвинул концепцию, согласно которой приливы на Солнце, вызываемые действием планет, являются причиной изменения солнечной активности — фактора, влияющего на геофизические процессы.

Результаты аналитического исследования приливов послужили основой современных способов определения характеристик приливных движений в Мировом океане, в частности созданного В. Ганzenом [38, 39] метода «краевых значений».

В последние десятилетия были достигнуты значительные успехи в изучении океанских приливов путем инструментальных наблюдений и путем приближенного вычисления характеристик приливов на основе уравнений гидродинамики. Однако это обстоятельство ни в коей мере не уменьшает значения дальнейших аналитических исследований приливов. Продолжение этих исследований необходимо для решения ряда проблем, имеющих большое научное и практическое значение. К числу таких проблем относятся:

— объяснение установленного распределения характеристик приливных движений в Мировом океане;

— совершенствование существующих методов расчета приливов в океанах и в первую очередь метода «краевых значений», трудности в использовании которого отмечены в работах [21, 39, 40 и т. д.];

— изучение приливов долгого периода в Мировом океане как одного из факторов, обуславливающих долгопериодную изменчивость океанографических условий;

— исследование причин происхождения и особенностей внутренних приливных волн в Мировом океане;

— изучение влияния приливов на изменение напряженности магнитного поля в ионосфере Земли;

— исследование приливов на Солнце, вызываемых приливообразующими силами планет, и их влияния на изменение солнечной активности и солнечного излучения;

— изучение роли приливов в развитии небесных систем.

В последние десятилетия И. В. Максимовым [19, 20 и т. д.] было установлено влияние лунных долгопериодных приливов в Мировом океане и приливов на Солнце, вызываемых действием планет, на режим Мирового океана и на климат Земли. Обоснование и развитие положений Максимова, имеющих стратегическое значение для предсказания изменений океанографических и метеорологических условий, также требует подробного изучения закономерностей приливных движений.

Наиболее эффективным путем открытия и объяснения упомянутых закономерностей является вывод и анализ формул кинематических характеристик приливов. Использование законов классической механики и классических методов исследования дает возможность решить эту задачу. Основные результаты исследования приливов, полученные таким путем, изложены в предлагаемой книге.

Часть I

ВАЖНЕЙШИЕ СИЛЫ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ КОТОРЫХ ПРОИСХОДЯТ ПРИЛИВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

ГЛАВА I. ПРИЛИВООБРАЗУЮЩАЯ СИЛА

1.1. МЕХАНИЗМ ВОЗНИКНОВЕНИЯ

Приливные движения в природе вызываются действием приливообразующей силы. Существование этой силы обусловлено гравитацией.

Ньютоном [43] был открыт и сформулирован закон всемирного тяготения: *«Каждые две частицы материи притягивают взаимно друг друга, или тяготеют друг к другу, с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними».*

Согласно этому закону, сила притяжения, действующая на любую из этих частиц, равна

$$F = f \frac{m_1 m_2}{d^2}, \quad (1)$$

где f — гравитационная постоянная ($f = 6,672 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/(\text{г} \cdot \text{с}^2)$), m_1 и m_2 — массы частиц, а d — расстояние между ними.

Рассмотрим (рис. 1) два шарообразных небесных тела, плотность каждого из которых либо постоянна, либо изменяется только в радиальном направлении по любому закону. Из теории тяготения известно, что первое из этих тел притягивается вторым с силой, с которой материальная точка, находящаяся в центре (O) первого тела и имеющая массу, равную массе этого тела, притягивается расположенной в центре (S) второго тела материальной точкой, масса которой равна массе второго тела. Эта сила притяжения, показанная на рисунке жирной линией, складывается из сил, с которыми второе тело притягивает каждую частицу первого. Любая из этих частиц (например, изображенные на рисунке частицы A , B , C) притягивается вто-

рым телом с силой, направленной вдоль прямой, соединяющей частицу с его центром. Названная сила прямо пропорциональна произведению массы (m) частицы на массу (M) второго тела, но обратно пропорциональна расстоянию (l) между частицей и его центром.

Нетрудно заключить, что векторы сил, с которыми притягиваются различные частицы, не равны между собой, даже если частицы имеют одинаковую массу. Это объясняется двумя причинами. Во-первых, в общем случае не совпадают направления притяжения отдельных частиц; во-вторых, в общем случае частицы находятся на различных расстояниях от центра второго

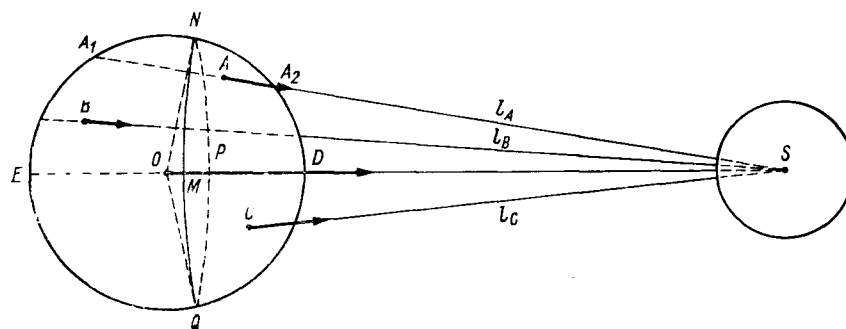


Рис. 1. Притяжение небесного тела и отдельных его частиц небесным светилом.

тела. В частных случаях, когда либо совпадают только что названные направления, либо равны упомянутые расстояния, векторы сил притяжения отдельных частиц также отличаются друг от друга. Так, направление притяжения всех частиц, расположенных на отрезке A_1A_2 прямой, проходящей через частицу A и центр второго тела, одинаково, но притяжение каждой из этих частиц различно, так как они удалены на разные расстояния от точки S . Расстояние между точкой S и любой частицей, находящейся на сферической поверхности с центром в этой точке и с радиусом, превосходящим отрезок SD , но меньшим, чем отрезок SE (например, на поверхности $OMNPQ$), одинаково, вследствие чего силы притяжения каждой частицы не отличаются друг от друга по значению, однако они имеют разные направления.

Таким образом, все частицы небесного тела притягиваются другим телом с разными силами. Этот эффект и является причиной возникновения приливообразующей силы.

Приливообразующей силой называется векторная разность сил притяжения небесным светилом какой-либо частицы небесного тела и частицы такой же массы, находящейся в его центре.

В ряде работ по приливам [25, 31 и т. д.] приливообразующей силой называется векторная сумма силы притяжения частицы вызывающим прилив светилом и действующей на частицу центробежной силы, возникающей вследствие вращения тела и светила вокруг общей оси. Под центробежной силой, естественно, понимается составляющая силы инерции, направленная по нормали к траектории тела и одинаковая во всех точках тела. Эта составляющая, действующая на частицу в центре тела, равна по значению и противоположна по направлению силе притяжения этой частицы светилом. Поэтому векторы приливообразующей силы, получаемые в соответствии с каждым из приведенных определений, равны между собой. Однако определение, данное выше, предпочтительнее. Как известно, в фундаментальном труде Ньютона [43] и в современных работах по теоретической астрономии и небесной механике [3, 8 и т. д.] особенности движения небесных тел объясняются без использования понятия «центробежная сила» в указанном здесь смысле. Представляется логичным не использовать это понятие, только усложняющее изучение процесса, и при исследовании приливных движений. Согласно определению в тексте, приливообразующую силу можно рассматривать как компонент гравитационной, ибо в соответствии с ним сила притяжения любой частицы небесного тела светилом равна векторной сумме сил притяжения частицы в центре тела и приливообразующей силы. Кроме того, из него следует, что приливообразующая сила действует на все частицы тела и в том частном случае, когда траектория тела представляет собой прямую линию, проходящую через центр светила, т. е. при отсутствии центробежной силы.

На рис. 2 жирными короткими линиями показаны приливообразующие силы, действующие на частицы, расположенные в точках A , B и C . Приливообразующая сила, действующая на частицу в точке A , представляет собой векторную разность сил (F_A) притяжения данной частицы и силы (F_O) притяжения частицы в центре тела; приливообразующая сила, действующая на частицу в точке B , — векторную разность сил (F_B и F_O) притяжения частиц в точках B и O ; приливообразующая сила, действующая на частицу в точке C , — векторную разность сил (F_C и F_O) притяжения частиц в точках C и O .

В связи с тем, что векторы сил, с которыми притягиваются отдельные частицы, неодинаковы, векторные разности каждой из этих сил и силы притяжения находящейся в центре рассматриваемого тела частицы (т. е. приливообразующие силы, действующие на отдельные частицы) не равны между собой. Приливообразующая сила в любой точке небесного тела зависит как от расположения этой точки относительно центра тела, так и от расположения ее относительно центра светила. Приливообразующая сила равна нулю только в центре рассматриваемого небесного тела. Все остальные частицы тела находятся под непрерывным ее действием.

Из сказанного следует, что необходимыми и достаточными условиями существования приливообразующих сил являются пространственная протяженность небесного тела и притяжение его каким-либо другим светилом. Как отмечал Ньютон [43], основным, неотъемлемым свойством любого материального тела является его протяженность. Важнейшие же свойства гравитации заключаются в том, что силы тяготения действуют между

всеми телами Вселенной, зависят только от массы тел и расстояний между ними и не имеют никаких преград. Поэтому приливообразующие силы действуют на частицы всех без исключения тел во Вселенной.

Приливообразующие силы стремятся вызвать приливные движения на всех небесных телах. Возможность возникновения этих движений зависит главным образом от сил сцепления между отдельными частицами, которые определяются в первую очередь агрегатным состоянием и температурой тела. На самых распространенных в природе газообразных небесных телах (звездах), а также на жидких телах силы сцепления между частицами, как правило, не могут воспрепятствовать возникновению приливных движений. Согласно современным наблюдениям [41

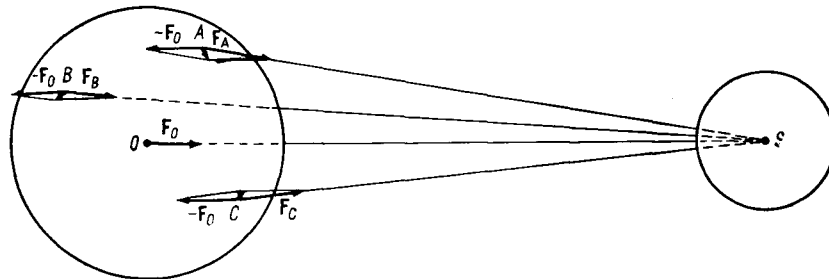


Рис. 2. Приливообразующие силы, действующие на отдельные частицы небесного тела.

и т. д.], приливы существуют и в твердом теле Земли. Таким образом, приливные движения представляют собой универсальное явление природы и относятся к числу наиболее важных видов механического движения материи.

Важная отличительная особенность приливных движений заключается в наличии четкой зависимости между ними и приливообразующими силами. Эта мысль была четко выражена Дудсоном и Варбургом [37]: «...приливообразующие силы имеют огромное значение, и весьма желательно детально изучить их изменение, поскольку характеристики приливов должны быть подобны характеристикам вызывающих их сил».

Изменение взаимного расположения небесного тела и вызывающего прилив светила в пространстве и вращение небесного тела вокруг оси вызывает непрерывное изменение приливообразующих сил, действующих на каждую его частицу. Для установления особенностей этих изменений удобно представлять вектор приливообразующей силы в виде проекций на взаимно перпендикулярные направления. Во многих работах по теории приливов [4, 12 и т. д.] рассматриваются только его проекции на горизонтальную плоскость и на вертикаль.

1.2. ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ И ВЕРТИКАЛЬНАЯ СОСТАВЛЯЮЩИЕ

Формулы, определяющие проекции (F_h и F_w) приливообразующей силы на горизонтальную плоскость и вертикаль, можно вывести следующим геометрическим способом.

Обратимся к рис. 3, на котором изображены небесное тело с центром в точке O и вызывающее прилив светило с центром в точке S . Найдем горизонтальную составляющую (F_h) приливообразующей силы, действующей на частицу, расположенную в произвольно выбранной точке K . Эта приливообразующая сила равна векторной разности сил (F_K и F_O) притяжения светилом

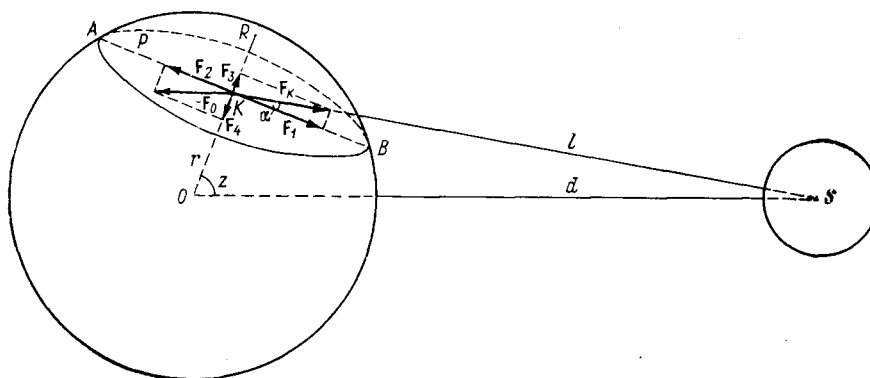


Рис. 3. Горизонтальная и вертикальная составляющие приливообразующей силы, действующей на частицу небесного тела.

частиц в точках K и O . Очевидно, что векторы этих сил лежат в плоскости OSK , проходящей через центры тела и светила и через точку, в которой находится рассматриваемая частица.

Проведем через точку K горизонтальную плоскость P . Эта плоскость перпендикулярна плоскости OSK , так как она перпендикулярна лежащему в плоскости OSK радиусу (OK) тела, проходящему через точку K . Спроектируем на плоскость P векторы F_K и $-F_O$ и обозначим их проекции через F_1 и F_2 . Поскольку плоскости OSK и P — взаимно перпендикулярны, проекции F_1 и F_2 лежат на линии (AB) пересечения этих плоскостей, а горизонтальная составляющая приливообразующей силы равна алгебраической сумме названных проекций.

Обозначим расстояние OS между центрами тела и светила буквой d , расстояние KS между точкой K и центром светила — буквой l , расстояние между центром тела и точкой K — буквой r , острый угол между линией AB и отрезком KS — буквой α , а зенитное расстояние светила (т. е. угол с вершиной в центре тела, образованный исходящими из него лучами, один из которых проходит через рассматриваемую точку, а другой — через

центр светила) — буквой z . Поскольку вектор $-\mathbf{F}_O$ параллелен прямой OS , острый угол между ним и отрезком OK равен углу z как накрест лежащий при пересечении двух параллельных прямых третьей. Угол OKB — прямой, а потому угол между векторами $-\mathbf{F}_O$ и $\mathbf{F}_2$ равен $90^\circ - z$. Следовательно, искомый вектор определяется формулой

$$F_h = F_1 + F_2 = F_K \cos z - F_O \cos (90^\circ - z). \quad (2)$$

Положим, что масса частицы в точке K , как и масса частицы в точке O , равна m , а масса светила — M . Тогда, согласно формуле (1), векторы $\mathbf{F}_K$ и $\mathbf{F}_O$ будут равны $\mathbf{F}_K = f \frac{Mm}{l^2}$ и $\mathbf{F}_O = f \frac{Mm}{d^2}$ и формула (2) примет вид

$$F_h = f \frac{Mm}{l^2} \cos z - f \frac{Mm}{d^2} \sin z. \quad (3)$$

Цель дальнейших преобразований заключается в том, чтобы выразить параметры l и α через зенитное расстояние светила и расстояния между центрами рассматриваемого тела и светила и между центром тела и точкой K .

Согласно теореме косинусов, в треугольнике OKS $l^2 = d^2 - 2dr \cos z + r^2$ и, следовательно, $l = \sqrt{d^2 - 2dr \cos z + r^2}$. Поскольку угол OKB — прямой, угол OKS равен $90^\circ + \alpha$. Согласно теореме синусов, в треугольнике OKS $\frac{\sin (90^\circ + \alpha)}{d} = \frac{\sin z}{l}$,

$$\text{откуда } \sin (90^\circ + \alpha) = \cos \alpha = \frac{d \sin z}{l} = \frac{d \sin z}{\sqrt{d^2 - 2dr \cos z + r^2}}.$$

Подставив найденные значения l^2 и $\cos \alpha$ в формулу (3), получим точную аналитическую формулу горизонтальной составляющей приливообразующей силы:

$$F_h = fMm \left[\frac{d}{(d^2 - 2dr \cos z + r^2)^{3/2}} - \frac{1}{d^2} \right] \sin z. \quad (4)$$

Выведем формулу, определяющую вертикальную составляющую (F_w). Она равна алгебраической сумме проекций (F_3 и F_4) векторов $\mathbf{F}_K$ и $-\mathbf{F}_O$ на проходящий через точку K радиус OR . Как видно из рис. 3, угол между векторами $\mathbf{F}_K$ и $\mathbf{F}_3$ равен $90^\circ - \alpha$, а угол между векторами $-\mathbf{F}_O$ и $\mathbf{F}_4$ равен z . Следовательно, $F_3 = F_K \cos (90^\circ - \alpha)$, $F_4 = -F_O \cos z$ и

$$\begin{aligned} F_w &= F_3 + F_4 = F_K \cos (90^\circ - \alpha) - F_O \cos z = \\ &= f \frac{Mm}{l^2} \sin \alpha - f \frac{Mm}{d^2} \cos z. \end{aligned} \quad (5)$$

Выразим $\sin \alpha$ через использованные ранее величины d , r и z :

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{d^2 \sin^2 z}{d^2 - 2dr \cos z + r^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{d^2 \cos^2 z - 2dr \cos z + r^2}{d^2 - 2dr \cos z + r^2}} = \frac{d \cos z - r}{\sqrt{d^2 - 2dr \cos z + r^2}}.\end{aligned}$$

Подставив в формулу (5) значения l^2 и $\sin \alpha$, получим точную аналитическую формулу вертикальной составляющей:

$$F_w = f M m \left[\frac{d \cos z - r}{(d^2 - 2dr \cos z + r^2)^{3/2}} - \frac{\cos z}{d^2} \right]. \quad (6)$$

Точные формулы (4) и (6), определяющие горизонтальную и вертикальную составляющие приливообразующей силы, можно значительно упростить, если пренебречь весьма малыми величинами. Для этой цели запишем знаменатель первой дроби, входящей в правую часть каждой из этих формул, в виде

$$\begin{aligned}&(d^2 - 2dr \cos z + r^2)^{3/2} = \\ &= \sqrt{d^6 - 6d^5 r \cos z + 3d^4 r^2 + 12d^4 r^2 \cos^2 z - 12d^3 r^3 \cos z -} \\ &\rightarrow -8d^3 r^3 \cos^3 z + 3d^2 r^4 + 12d^2 r^4 \cos^2 z - 6dr^5 \cos z + r^6} = \\ &= \sqrt{(d^3 - 3d^2 r \cos z)^2 + A},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}A &= 3d^4 r^2 + 3d^4 r^2 \cos^2 z - 12d^3 r^3 \cos z - 8d^3 r^3 \cos^3 z + \\ &+ 3d^2 r^4 + 12d^2 r^4 \cos^2 z - 6dr^5 \cos z + r^6.\end{aligned}$$

Расстояние между центрами небесного тела и вызывающего прилив светила гораздо больше, чем радиус тела, и естественно, чем часть этого радиуса. Поэтому $A \ll (d^3 - 3d^2 r \cos z)^2$, и знаменатель каждой рассматриваемой дроби можно записать в виде

$$(d^2 - 2dr \cos z + r^2)^{\frac{3}{2}} \simeq d^3 - 3d^2 r \cos z.$$

Используя последнее соотношение и исключив на последнем этапе преобразований из знаменателей формул слагаемое $3r \cos z$, весьма малое по сравнению с d , получим приближенные формулы горизонтальной и вертикальной составляющих приливообразующей силы:

$$\begin{aligned}F_h &\simeq f M m \left(\frac{d}{d^3 - 3d^2 r \cos z} - \frac{1}{d^2} \right) \sin z = \\ &= f M m \frac{d - d + 3r \cos z}{d^2 (d - 3r \cos z)} \sin z = \\ &= \frac{3}{2} f \frac{M m r}{d^2 (d - 3r \cos z)} \sin 2z \simeq \frac{3}{2} f \frac{M m r}{d^3} \sin 2z, \quad (7)\end{aligned}$$

$$F_w \simeq f M m \left(\frac{d \cos z - r}{d^3 - 3d^2 r \cos z} - \frac{\cos z}{d^2} \right) =$$

$$= f M m \frac{d \cos z - r - d \cos z + 3r \cos^2 z}{d^2 (d - 3r \cos z)} \simeq 3f \frac{M m r}{d^3} \left(\cos^2 z - \frac{1}{3} \right). \quad (8)$$

В связи с тем, что допущения, использованные при выводе формул (7) и (8), очень незначительны, эти формулы весьма точны.

Приближенные формулы (7) и (8), широко используемые в теории приливов, были выведены ранее различными способами. Главное отличие способа, изложенного в тексте, заключается в том, что с его помощью сначала выводятся точные формулы горизонтальной и вертикальной составляющих приливообразующей силы, благодаря чему в любом конкретном случае можно установить погрешность, возникающую при определении этих составляющих по приближенным формулам.

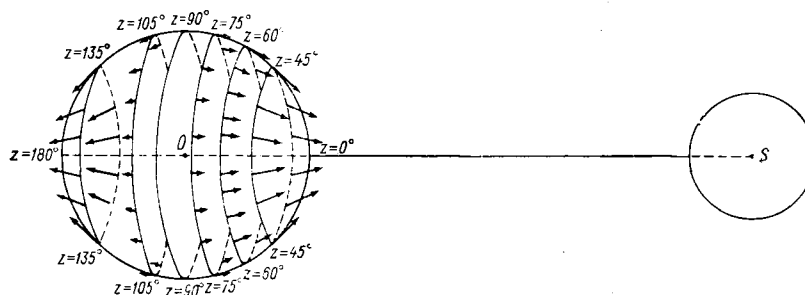


Рис. 4. Горизонтальные составляющие приливообразующей силы в различных частях небесного тела.

Из формул (7) и (8) следует, что и горизонтальная, и вертикальная составляющая приливообразующей силы, действующей на какую-либо частицу небесного тела, прямо пропорциональна массе вызывающего прилив светила, массе частицы и расстоянию между частицей и центром тела, но обратно пропорциональна кубу расстояния между центрами тела и светила. Обе составляющие зависят от зенитного расстояния (z). Горизонтальная составляющая прямо пропорциональна тригонометрической функции $\sin 2z$, которая равна нулю при z , равном 0, 180 и 90°, т. е. в точках, расположенных на прямой, проходящей через центры тела и светила, и в точках круга с центром в точке O, перпендикулярного только что названной прямой (рис. 4). Эта функция имеет наибольшее абсолютное значение при $z = 45^\circ$ и $z = 135^\circ$, т. е. в точках, расположенных на боковых поверхностях двух конусов, вершины которых находятся в центре тела, а основания образованы окружностями на поверхности тела, зенитное расстояние каждой точки одной из которых равно 45°, а зенитное расстояние каждой точки другой — 135°.

Вертикальная составляющая прямо пропорциональна функции $\cos^2 z - \frac{1}{3}$. Эта функция имеет наибольшее положительное значение при $z = 0^\circ$ и $z = 180^\circ$ (т. е. в точках, находящихся на прямой, проходящей через центры тела и светила) и наибольшее отрицательное значение, которое по модулю вдвое меньше, чем наибольшее положительное, при $z = 90^\circ$ (т. е. в точках круга, перпендикулярного только что названной прямой, центр которого совпадает с центром тела). Рассматриваемая функция равна нулю при $z = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$, т. е. при $z = 54^\circ 44'$ и $z = 125^\circ 16'$.

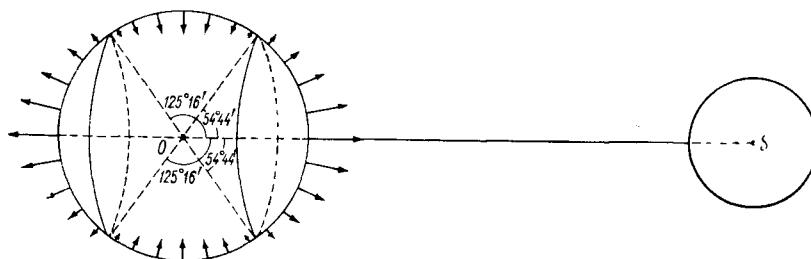


Рис. 5. Вертикальные составляющие приливообразующей силы в различных частях небесного тела.

Точки, зенитные расстояния которых равны только что приведенным значениям, находятся на боковых поверхностях двух конусов с вершинами в центре тела и с основаниями, образованными лежащими на поверхности тела окружностями, зенитные расстояния всех точек одной из которых равны $54^\circ 44'$, а всех точек другой — $125^\circ 16'$ (рис. 5). Очевидно, что боковые поверхности этих конусов разделяют небесное тело на части, в которых вертикальная составляющая приливообразующей силы имеет разные знаки: в пределах конусов и сферических сегментов, имеющих общие с конусами основания, она положительна, а в остальной части тела — отрицательна.

Знак вертикальной составляющей приливообразующей силы показывает ее направление. Составляющая является положительной, когда она направлена вверх, от центра небесного тела, и отрицательной, — когда направлена вниз, к центру тела. Знак же горизонтальной составляющей не определяет ее направления, так как она представляет собой проекцию приливообразующей силы не на какую-нибудь определенную прямую, а на плоскость. Чтобы определять направление горизонтальной составляющей, целесообразнее всего представлять ее в виде проекций на два взаимно перпендикулярных направления — на параллель и на меридиан. Очевидно, что эти проекции являются

и проекциями самой приливообразующей силы на указанные направления. Как отмечали Дудсон и Варбург [37], «разложение горизонтальных составляющих приливообразующей силы на северные и восточные компоненты, а последних — на их «постоянную», суточную и полусуточную части представляется наиболее простым и самым общим методом их рассмотрения».

1.3. ПРОЕКЦИИ НА ПАРАЛЛЕЛЬ И МЕРИДИАН

Выведем формулы, определяющие проекции (F_v и F_u) приливообразующей силы на параллель и на меридиан. На рис. 6 изображены небесное тело с центром в точке O и вызывающее прилив светило с центром в точке S . Окружность $DEMG$ пред-

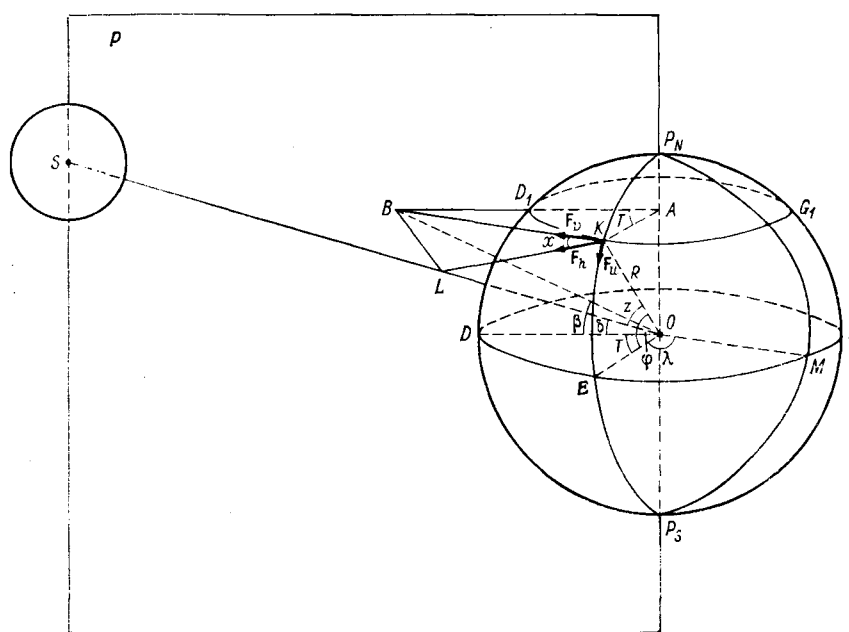


Рис. 6. Проекция приливообразующей силы на параллель и меридиан.

ставляет собой экватор тела, а отрезок $P_N P_S$ — ось его вращения. Плоскость P проходит через только что названную ось и через центр светила.

Чтобы упростить чертеж, расположим точку K на поверхности тела. Проведем через эту точку параллель $D_1 K G_1$ и меридиан $P_N K P_S$. Обозначим вектор горизонтальной составляющей приливообразующей силы, действующей на частицу в точке K , через F_h , а проекции этой составляющей на параллель и

меридиан, направленные по касательным к только что названным линиям,— через F_v и F_u . Соединим точку K с центром тела и с центром (A), проходящей через нее параллели и обозначим радиус (OK) тела буквой R , а угол между векторами F_h и F_v — буквой x . Поскольку векторы F_v и F_u взаимно перпендикулярны, угол между векторами F_h и F_u равен $90^\circ - x$. Очевидно, что искомые векторы равны $F_v = F_h \cos x$ и $F_u = F_h \sin x$.

Проведем проекцию OD отрезка OS , соединяющего центры рассматриваемого тела и светила, и проекцию OE луча OK на плоскость экватора. Из рисунка видно, что географическая широта (φ) точки K определяется углом KOE , зенитное расстояние светила (z) — углом KOS , а часовой угол (T) светила — углом EOD . Склонение (δ) светила (т. е. угол между отрезком, соединяющим центры рассматриваемого тела и светила, и его проекцией на плоскость экватора тела) определяется углом SOD .

Продолжим вектор горизонтальной составляющей до пересечения с отрезком OS и обозначим точку пересечения буквой L . Продолжим также вектор F_v до пересечения с плоскостью P , обозначим точку пересечения буквой B и соединим эту точку с точками L , O и A . Обозначим лежащий в плоскости P угол BOD буквой β .

Согласно теореме косинусов, в треугольниках BKL и BOL

$$BL^2 = KB^2 + KL^2 - 2KB \cdot KL \cos x \text{ и}$$

$$BL^2 = OB^2 + OL^2 - 2OB \cdot OL \cos BOL.$$

Из этих соотношений следует, что

$$\cos x = \frac{KB^2 + KL^2 - OB^2 - OL^2 + 2OB \cdot OL \cos BOL}{2KB \cdot KL}. \quad (9)$$

Поскольку ось $P_N P_S$ вращения тела перпендикулярна плоскости параллели $D_1 K G_1$, треугольники OAK и OAB — прямоугольные. Треугольники OKL и OKB также прямоугольны, так как KL и KB — отрезки касательных к поверхности шара в точке, совпадающей с концом его радиуса OK , а треугольник AKB — прямоугольный потому, что KB — отрезок касательной к параллели $D_1 K G_1$ в точке K , представляющей собой конец радиуса AK этой параллели. В перечисленных прямоугольных треугольниках имеют место следующие соотношения между их сторонами и углами:

$$\text{в треугольнике } OAK \quad AK = R \sin(90^\circ - \varphi) = R \cos \varphi,$$

$$OA = R \cos(90^\circ - \varphi) = R \sin \varphi;$$

$$\text{в треугольнике } AKB \quad KB = AK \operatorname{tg} T = R \cos \varphi \operatorname{tg} T,$$

$$AB = AK \sec T = R \cos \varphi \sec T;$$

$$\text{в треугольнике } OKL \quad KL = OK \operatorname{tg} z = R \operatorname{tg} z,$$

$$OL = OK \sec z = R \sec z;$$

в треугольнике OKB $OB = \sqrt{OK^2 + KB^2} = R \sqrt{1 + \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 T}$;

$$\begin{aligned} \text{в треугольнике } OAB \quad \sin(90^\circ - \beta) &= \cos \beta = \frac{AB}{OB} = \\ &= \frac{\cos \varphi \sec T}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 T}}, \end{aligned}$$

$$\cos(90^\circ - \beta) = \sin \beta = \frac{OA}{OB} = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 T}}.$$

На рис. 6 видно, что лежащий в плоскости P искомый угол BOL равен $\beta - \delta$, а потому $\cos BOL = \cos(\beta - \delta) = \cos \beta \times \times \cos \delta + \sin \beta \sin \delta$. Нетрудно заметить, что при другом склонении светила и других координатах произвольно выбранной точки K угол BOL может определяться соотношением $\widehat{BOL} = \delta - \beta^*$. Однако и в этом случае $\cos BOL = \cos \beta \cos \delta + + \sin \beta \sin \delta$.

Следовательно,

$$\cos BOL = \frac{\cos \varphi \sec T}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 T}} \cos \delta + \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi \operatorname{tg}^2 T}} \sin \delta.$$

Подставив найденные значения KB , KL , OB , OL и $\cos BOL$ в формулу (9), и, выполнив элементарные преобразования, получим

$$\cos x = \frac{(\sin \varphi \sin \delta - \cos z) \cos T + \cos \varphi \cos \delta}{\cos \varphi \sin z \sin T}.$$

Из астрономии известно, что зенитное расстояние светила связано со склонением и часовым углом светила и с географической широтой следующим соотношением:

$$\cos z = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos T. \quad (10)$$

Подставив значение $\cos z$ в предыдущую формулу, получим

$$\cos x = \frac{\cos \delta \sin T}{\sin z}. \quad (11)$$

Используя формулы (11) и (10), найдем $\sin x$:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \delta \sin^2 T}{\sin^2 z}} = \\ &= \frac{1}{\sin z} \sqrt{1 - \cos^2 z - \cos^2 \delta \sin^2 T} = \frac{1}{\sin z} \times \\ &\times \sqrt{\sin^2 \delta \cos^2 \varphi - 2 \sin \delta \cos \delta \sin \varphi \cos \varphi \cos T + \cos^2 \delta \sin^2 \varphi \cos^2 T} = \\ &= \frac{\sin \delta \cos \varphi - \sin \varphi \cos \delta \cos T}{\sin z}. \end{aligned} \quad (12)$$

* Очевидно, что угол BOL равен нулю, когда точка K расположена на отрезке OS , т. е. когда зенитное расстояние точки равно нулю. В этом случае горизонтальная составляющая приливообразующей силы, действующей на частицу в точке K , имеет нулевое значение.

Из формул (11) и (12) следует, что косинус и синус угла между действующей на частицу горизонтальной составляющей приливообразующей силы и ее проекцией на параллель не зависят от расстояния между частицей и центром тела. Поэтому эти формулы могут быть применены для определения проекций на параллель и на меридиан горизонтальной составляющей, действующей на частицы, расположенные не только на поверхности небесного тела, но и в любой его части.

Используя формулы (7), (11), (12) и (10), находим:

$$\begin{aligned} F_v &= F_h \cos x = \frac{3}{2} f \frac{Mmr}{d^3} \sin 2z \frac{\cos \delta \sin T}{\sin z} = \\ &= \frac{3}{2} f \frac{Mmr}{d^3} \cdot 2 \cos z \cos \delta \sin T = \\ &= \frac{3}{2} f \frac{Mmr}{d^3} \cos^2 \delta \cos \varphi \sin 2T + \frac{3}{2} f \frac{Mmr}{d^3} \sin 2\delta \sin \varphi \sin T, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} F_u &= F_h \sin x = \frac{3}{2} f \frac{Mmr}{d^3} \sin 2z \frac{\sin \delta \cos \varphi - \sin \varphi \cos \delta \cos T}{\sin z} = \\ &= \frac{3}{2} f \frac{Mmr}{d^3} \cdot 2 \cos z (\sin \delta \cos \varphi - \sin \varphi \cos \delta \cos T) = \\ &= -\frac{3}{4} f \frac{Mmr}{d^3} \cos^2 \delta \sin 2\varphi \cos 2T + \\ &+ \frac{3}{2} f \frac{Mmr}{d^3} \sin 2\delta \cos 2\varphi \cos T - \frac{3}{4} f \frac{Mmr}{d^3} (1 - 3 \sin^2 \delta) \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (14)$$

Формулы, равносильные приведенным, были выведены ранее другими способами. Простой вывод, основанный на использовании формул сферической тригонометрии, принадлежит Дудсону и Варбургу [37].

При выводе формул (13) и (14) считалось, что северные географические широты, северные склонения светила, а также любые значения его часового угла есть величины положительные, а южные широты и склонения — величины отрицательные. Положительными направлениями считались направления, в которых производился отсчет часового угла светила и географической широты точки, т. е. направления на запад и на север. Поэтому знаки в формулах (13) и (14) определяют направления проекций: положительными являются векторы, направленные на запад и на север, а отрицательными — на восток и на юг.

Преобразуем формулу (8), определяющую вертикальную составляющую приливообразующей силы. Для этого, используя соотношение (10), представим входящий в ее правую часть множитель $\cos^2 z = \frac{1}{3}$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\cos^2 z - \frac{1}{3} &= \sin^2 \delta \sin^2 \varphi + 2 \sin \delta \cos \delta \sin \varphi \cos \varphi \cos T + \\
+ \cos^2 \delta \cos^2 \varphi \cos^2 T - \frac{1}{3} &= \sin^2 \delta \sin^2 \varphi + 2 \sin \delta \cos \delta \sin \varphi \cos \varphi \cos T + \\
+ \frac{1}{2} \cos^2 \delta \cos^2 \varphi \cos 2T + \frac{1}{2} \cos^2 \delta \cos^2 \varphi - \frac{1}{3} &= \\
= \frac{1}{2} \cos^2 \delta \cos^2 \varphi \cos 2T + \frac{1}{2} \sin 2\delta \sin 2\varphi \cos T + \sin^2 \delta \sin^2 \varphi + \\
+ \frac{1}{2} (1 - \sin^2 \delta) (1 - \sin^2 \varphi) - \frac{1}{3} &= \frac{1}{2} \cos^2 \delta \cos^2 \varphi \cos 2T + \\
+ \frac{1}{2} \sin 2\delta \sin 2\varphi \cos T + \frac{1}{2} (1 - 3 \sin^2 \delta) \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
F_w &= \frac{3}{2} f \frac{Mmr}{d^3} \cos^2 \delta \cos^2 \varphi \cos 2T + \\
+ \frac{3}{2} f \frac{Mmr}{d^3} \sin 2\delta \sin 2\varphi \cos T + \\
+ \frac{3}{2} f \frac{Mmr}{d^3} (1 - 3 \sin^2 \delta) \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right). \quad (15)
\end{aligned}$$

Благодаря выполненному преобразованию, широко используемому в работах по приливам [4 и т. д.], вертикальная составляющая представлена в виде функции тех же аргументов, от которых зависят проекции приливообразующей силы на параллель и на меридиан.

1.4. ИЗМЕНЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ И ВО ВРЕМЕНИ КОМПОНЕНТОВ ПРОЕКЦИИ ПРИЛИВООБРАЗУЮЩЕЙ СИЛЫ НА ПАРАЛЛЕЛЬ, НА МЕРИДИАН И НА ВЕРТИКАЛЬ

Из астрономии известно, что часовой угол светила определяется формулой

$$T = nt - \lambda, \quad (16)$$

в которой n — разность угловых скоростей вращения тела вокруг оси и обращения светила вокруг этого тела или тела вокруг светила; t — время на меридиане, принятом за начальный; λ — западная географическая широта места. Для иллюстрации выраженной этой формулой зависимости часового угла от n , t и λ обратимся вновь к рис. 6, на котором линия $\vec{P}_N MP_S$ представляет собой начальный меридиан. Пусть рассматриваемое тело вращается вокруг оси с запада на восток с угловой скоростью ω , а вызывающее прилив светило обращается вокруг тела в том же направлении с угловой скоростью α , причем $\alpha < \omega$. Такое соотношение между угловыми скоростями вращения и обращения имеет место в реальных небесных системах, например

в системах Земля—Луна, Солнце—Меркурий и т. п. Разность угловых скоростей вращения и обращения, часто называемая относительной угловой скоростью, равна $n = \omega - \alpha$. Очевидно, что часовой угол относительно начального меридиана P_NMP_S равен nt , а часовой угол меридиана P_NKP_S равен $nt - \lambda$. Рассматривая конкретные примеры, нетрудно убедиться, что формула (16) справедлива при любом соотношении между угловыми скоростями вращения и обращения.

В течение суток, т. е. интервала времени между двумя последовательными верхними (или нижними) кульминациями светила на каком-либо меридиане, часовой угол этого светила на любом меридиане изменяется на 360° . Поэтому компоненты проекций приливообразующей силы, сомножителями которых являются тригонометрические функции $\sin 2T$ и $\cos 2T$, изменяются во времени с периодом, равным половине суток, а компоненты, в которые в качестве сомножителей входят тригонометрические функции $\sin T$ и $\cos T$, — с периодом, равным суткам. Эти компоненты называются соответственно полусуточными и суточными. Компоненты, не зависящие от тригонометрических функций часового угла, изменяются во времени только с теми периодами, с какими изменяются склонение (δ) светила и расстояние (d) между центрами рассматриваемого тела и светила, и называются долгопериодными.

Термины «полусуточный период», «суточный период» и «долгий период», обычно используемые для характеристики особенностей изменения во времени как отдельных компонентов приливообразующей силы, так и вызываемых ими приливных движений, являются условными. Эти названия появились при изучении приливов в Мировом океане, вызываемых действием Луны и Солнца. Поскольку угловая скорость вращения Земли вокруг оси гораздо больше, чем угловые скорости обращения Луны вокруг Земли и Земли вокруг Солнца, часовой угол каждого из этих светил изменяется с временем намного быстрее, чем другие астрономические аргументы (δ и d) приливообразующих сил. Вследствие этого главный период изменения «полусуточных» компонентов проекций приливообразующей силы равен половине лунных (или солнечных) суток, главный период изменения «суточных» компонентов — лунным (или солнечным) суткам, а главные периоды изменения «долгопериодных» компонентов — половине тропического месяца и аномалистическому месяцу (или половине тропического года и аномалистическому году). Однако очевидно, что при других соотношениях между угловыми скоростями вращения рассматриваемого небесного тела вокруг оси и обращения вызывающего прилив светила вокруг этого тела (или тела вокруг светила) отношения между периодами изменения во времени «полусуточных», «суточных» и «долгопериодных» компонентов приливообразующей силы, а следовательно, и между периодами вызываемых ими приливных дви-

жений будут иными. Так, если угловая скорость вращения тела вокруг оси равна угловой скорости обращения этого тела вокруг вызывающего прилив светила, то на любом меридиане часовой угол светила постоянен и изменение всех перечисленных компонентов обуславливается вариацией одних и тех же астрономических параметров — δ и d . Почти так изменяются, например, компоненты приливообразующей силы Земли, действующей на Луну. Однако «полусуточный», «суточный» и «долгопериодный» компоненты отличаются друг от друга не только скоростью изменения во времени, но и различной зависимостью от склонения вызывающего прилив светила и от географической широты и долготы. Поэтому разделение проекций приливообразующей силы на перечисленные компоненты и обозначение каждого из них определенным термином вполне целесообразно. В этой работе сохранены традиционные названия: «полусуточный», «суточный» и «долгопериодный» компоненты приливообразующей силы (или «компоненты полусуточного, суточного и долгого периодов»).

В теории приливов принято рассматривать приливообразующую силу, отнесенную к единице массы, т. е. фактически ускорение единицы массы, которое стремится вызвать действующая на нее приливообразующая сила. Исключив из формул (13) — (15) массу (m) частицы и используя формулу (16), запишем формулы проекций отнесенной к единице массы приливообразующей силы на параллель, меридиан и вертикаль в следующем виде:

$$F_v = F_{п. п} + F_{п. с} = \frac{3}{2} f \frac{Mr}{d^3} \cos^2 \delta \cos \varphi \sin 2(nt - \lambda) + \\ + \frac{3}{2} f \frac{Mr}{d^3} \sin 2\delta \sin \varphi \sin (nt - \lambda), \quad (17)$$

$$F_u = F_{м. п} + F_{м. с} + F_{м. д} = -\frac{3}{4} f \frac{Mr}{d^3} \cos^2 \delta \sin 2\varphi \cos 2(nt - \lambda) + \\ + \frac{3}{2} f \frac{Mr}{d^3} \sin 2\delta \cos 2\varphi \cos (nt - \lambda) - \frac{3}{4} f \frac{Mr}{d^3} (1 - 3 \sin^2 \delta) \sin 2\varphi; \quad (18)$$

$$F_w = F_{в. п} + F_{в. с} + F_{в. д} = \frac{3}{2} f \frac{Mr}{d^3} \cos^2 \delta \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda) + \\ + \frac{3}{2} f \frac{Mr}{d^3} \sin 2\delta \sin 2\varphi \cos (nt - \lambda) + \\ + \frac{3}{2} f \frac{Mr}{d^3} (1 - 3 \sin^2 \delta) \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right). \quad (19)$$

В приведенных формулах символами $F_{п. п}$, $F_{п. с}$, $F_{м. п}$, $F_{м. с}$, $F_{м. д}$, $F_{в. п}$, $F_{в. с}$ и $F_{в. д}$ обозначены отдельные компоненты, из которых складываются проекции приливообразующей силы (а следовательно, и сам вектор этой силы) на указанные

направления. Первая буква индекса означает направление (п — параллель, м — меридиан, в — вертикаль), вдоль которого действует данный компонент, а вторая буква — главный период (п — полусуточный, с — суточный, д — долгий), с которым этот компонент изменяется во времени. Видно, что проекция приливообразующей силы на параллель представляет собой сумму полусуточного и суточного компонентов, а проекции ее на меридиан и на вертикаль — суммы компонентов полусуточного, суточного и долгого периодов.

Анализ формул (17)–(19) дает возможность установить следующие особенности компонентов приливообразующей силы.

✓ Все компоненты в любой точке небесного тела, кроме его центра, прямо пропорциональны массе вызывающего прилив светила и расстоянию между этой точкой и центром тела, но обратно пропорциональны кубу расстояния между центрами рассматриваемого тела и светила. Естественно, что и сами проекции точно так же зависят от только что названных параметров.

Вследствие прямой пропорциональной зависимости проекций приливообразующей силы на параллель, меридиан и вертикаль от расстояния до центра тела, направления приливообразующих сил во всех точках какого-либо одного радиуса тела должны быть одинаковыми. Нетрудно заметить, что это заключение не соответствует действительности, так как силы с которыми светило притягивает частицы, находящиеся в различных точках одного и того же радиуса, неодинаковы, вследствие чего неодинаковы и приливообразующие силы, действующие на эти частицы. (Направление приливообразующих сил во всех точках одного радиуса одинаково лишь в частном случае, когда радиус лежит на прямой, проходящей через центры рассматриваемого тела и светила.) Отмеченное противоречие объясняется тем, что заключение о неизменности направления приливообразующей силы, действующей на частицы в разных точках одного радиуса, получено путем анализа приближенных, а не точных формул, определяющих ее проекции. Из точных формул (4) и (6) видно, что горизонтальная и вертикальная составляющие этой силы неодинаково зависят от расстояния между частицей и центром тела, а потому направления приливообразующих сил в разных точках одного радиуса различны. Однако это различие крайне невелико.

✓ Все компоненты приливообразующей силы зависят от склонения вызывающего прилив светила. Но в то время как названные ранее параметры влияют на все компоненты одинаково, влияние склонения светила на компоненты полусуточного, суточного и долгого периода различно.

✓ Полусуточные компоненты ($F_{п. п.}$, $F_{м. п.}$ и $F_{в. п.}$) прямо пропорциональны функции $\cos^2 \delta$, вследствие чего они максимальны при нулевом склонении светила, убывают при возрастании его абсолютного значения и обращаются в нуль при склонениях $+90^\circ$ и -90° . Направление этих компонентов не зависит от знака склонения.

✓ Суточные компоненты ($F_{п. с.}$, $F_{м. с.}$ и $F_{в. с.}$) прямо пропорциональны тригонометрической функции $\sin 2\delta$ и, следовательно, равны нулю при δ , равном 0, $+90$ и -90° , и имеют наибольшие

абсолютные значения при δ , равном $+45^\circ$ и -45° . Их направления зависят от знака склонения: при перемене знака направления изменяются на противоположные.

Долгопериодные компоненты ($F_{м. д}$ и $F_{в. д}$) прямо пропорциональны функции $1 - 3 \sin^2 \delta$. Поэтому они имеют одно из экстремальных значений при $\delta = 0^\circ$ и при возрастании склонения убывают, обращаясь в нуль, когда склонение достигает значе-

ния $\pm \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3} = 35^\circ 16'$. При склонениях, превышающих по абсолютному значению только что приведенное, рассматриваемые компоненты имеют направления, противоположные тем, какие они имели при склонениях в диапазоне от $-35^\circ 16'$ до $+35^\circ 16'$. При возрастании абсолютного значения склонения от $35^\circ 16'$ до 90° абсолютное значение долгопериодных компонентов также увеличивается и при $\delta = +90^\circ$ и $\delta = -90^\circ$ оно вдвое больше, чем при $\delta = 0^\circ$.

Существенное различие между зависимостями направлений суточных и долгопериодных компонентов приливообразующей силы от склонения светила заключается в том, что направления суточных компонентов зависят от знака склонения, но не зависят от его абсолютного значения, а направления долгопериодных компонентов, наоборот, зависят от абсолютного значения этого аргумента, но не зависят от его знака. Поэтому, если модуль склонения не превышает $35^\circ 16'$, вариация его значений не влияет на направления долгопериодных компонентов, но обуславливает изменение направлений суточных компонентов на противоположные каждый раз, когда северное склонение сменяется на южное, а южное — на северное.

Функции $\cos^2 \delta$, $\sin 2\delta$ и $1 - 3 \sin^2 \delta$, являющиеся сомножителями полусуточного, суточного и долгопериодного компонентов приливообразующей силы, изображены кривыми с индексами «п», «с» и «д» на рис. 7.

✓ Все полусуточные и суточные компоненты зависят от часового угла светила. Согласно формуле (16), этот аргумент не изменяется во времени только в том частном случае, когда относительная угловая скорость вращения тела и обращения светила или тела равна нулю. При отличающемся от нуля значении относительной угловой скорости часовой угол (T) непрерывно изменяется на всех меридианах. При этом тригонометрические функции $\sin 2T$ и $\cos 2T$, являющиеся сомножителями полусуточных компонентов, изменяются во времени вдвое быстрее, чем функции $\sin T$ и $\cos T$, представляющие собой сомножители суточных компонентов. Долгопериодные компоненты приливообразующей силы от часового угла светила не зависят.

Полусуточные компоненты ($F_{м. п}$ и $F_{в. п}$) проекций приливообразующей силы на меридиан и вертикаль, аргументом которых является тригонометрическая функция $\cos 2T$, имеют

максимальные абсолютные значения, когда часовой угол светила равен 0, 90, 180 и 270°, т. е. в моменты верхней и нижней кульминации светила и в моменты, отстоящие на равные отрезки времени от только что названных. При часовых углах светила, равных 45, 135, 225 и 315°, полусуточные компоненты проекций приливообразующей силы на меридиан и вертикаль равны нулю. Полусуточный компонент ($F_{п. п}$) проекции приливообразующей силы на параллель прямо пропорционален тригономет-

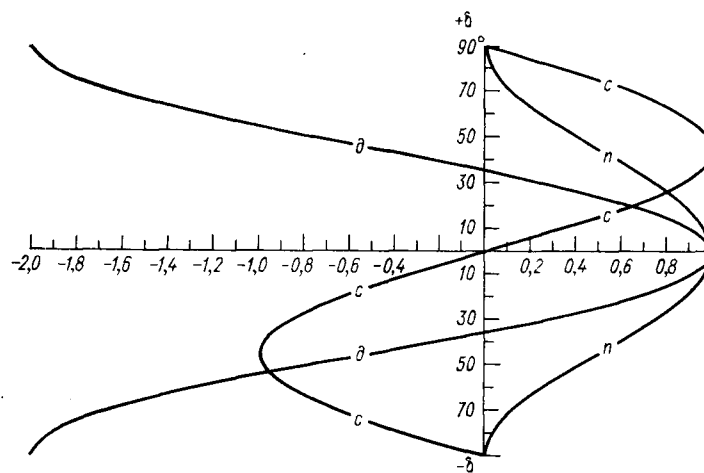


Рис. 7. Зависимости функций $\cos^2 \delta = n$, $\sin 2\delta = c$ и $(1 - 3 \sin^2 \delta) = d$, являющихся множителями полусуточных, суточных и долгопериодных компонентов приливообразующей силы, от склонения вызывающего прилив светила.

рической функции $\sin 2T$ и, наоборот, имеет максимальные абсолютные значения в моменты, когда часовой угол светила составляет 45, 135, 225 и 315°, и равен нулю в моменты, когда часовой угол равен 0, 90, 180 и 270°. Таким образом, временной ход этого компонента отличается по фазе от временного хода полусуточных компонентов проекций на меридиан и вертикаль на 45°, т. е. на восьмую часть суток, которая составляет четверть периода изменения полусуточных компонентов во времени.

Суточные компоненты ($F_{м. с}$ и $F_{в. с}$) проекций приливообразующей силы на меридиан и вертикаль, прямо пропорциональные тригонометрической функции $\cos T$, имеют максимальные абсолютные значения в моменты верхней и нижней кульминации светила и равны нулю в моменты, в которые часовой угол светила составляет 90 и 270°. Суточный компонент ($F_{п. с}$) проекции приливообразующей силы на параллель, прямо пропорциональный функции $\sin T$, наоборот, достигает наибольших абсолютных значений при часовых углах 90 и 270° и равен нулю

в моменты кульминаций светила. Следовательно, разность фаз между его временным ходом и ходом суточных компонентов проекций на меридиан и на вертикаль составляет 90° , т. е. четверть суток или четверть периода изменения во времени суточных компонентов.

В течение суток все полусуточные компоненты приливообразующей силы изменяют свое направление на противоположное четыре раза, а суточные компоненты — два раза.

Часовой угол светила зависит не только от времени и относительной угловой скорости вращения и обращения, но и от

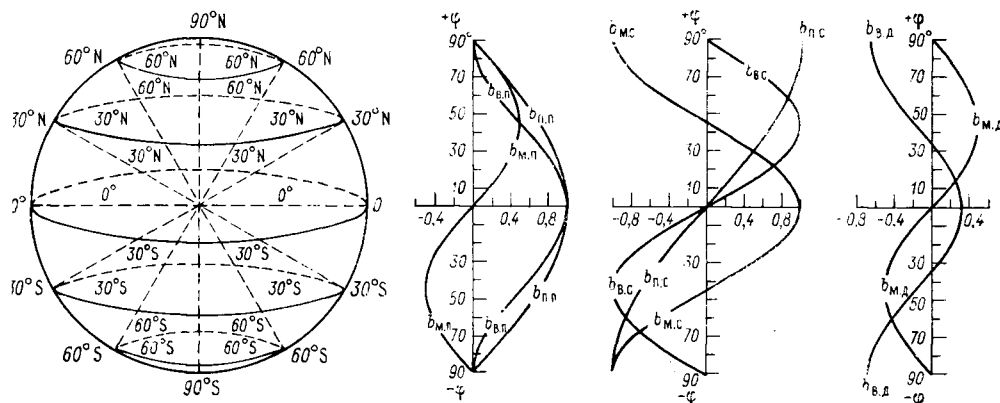


Рис. 8. Геометрические места точек, расположенных на различных широтах, и зависимости функций $\cos \varphi = b_{п.п.}$, $\sin \varphi = b_{п.с.}$, $\frac{1}{2} \sin 2\varphi = b_{м.п.} = b_{м.д.}$, $\cos 2\varphi = b_{м.с.}$, $\cos^2 \varphi = b_{в.п.}$, $\sin 2\varphi = b_{в.с.}$ и $\frac{1}{3} - 3 \sin^2 \varphi = b_{в.д.}$ от широты.

географической долготы. Нетрудно заметить, что в любой момент значения каждого компонента на разных долготах различны. Например, при $t = 0$, т. е. когда $\sin 2T = \sin (-2\lambda)$, компонент $F_{п.п.}$ равен нулю на меридианах $0, 90, 180^\circ$ W, 90° E и имеет наибольшие абсолютные значения на меридианах $45, 135^\circ$ W, 135 и 45° E, причем его направления на меридианах 45° W и 135° E противоположны направлениям на меридианах 135° W и 45° E. Каждый из долгопериодных компонентов ($F_{м.д.}$ и $F_{в.д.}$) приливообразующей силы, не зависящих от часового угла светила, на каждой параллели в любой момент времени одинаков на всех долготах.

Рассмотрим зависимость компонентов приливообразующей силы от географической широты. Заметим, что геометрическим местом точек, расположенных на одной и той же широте, не равной $0, 90^\circ$ N и 90° S, является боковая поверхность конуса с вершиной в центре тела и с основанием, образованным имеющей эту широту параллелью. Геометрическими местами точек,

широты которых равны 0, 90° N и 90° S, являются соответственно плоскость экватора тела и северная и южная части оси его вращения (рис. 8). Естественно, что зависящий от широты сомножитель любого компонента приливообразующей силы имеет одинаковое значение во всех точках, расположенных на одной и той же широте.

Обозначим упомянутые сомножители символами $b_{п.п.}$, $b_{п.с.}$, $b_{м.п.}$, $b_{м.с.}$, $b_{м.д.}$, $b_{в.п.}$, $b_{в.с.}$ и $b_{в.д.}$, индексы в которых имеют такое же значение, как и индексы, использованные для обозначения компонентов приливообразующей силы. Очевидно, что сомножители $b_{п.п.}$ и $b_{в.п.}$, соответственно равные косинусу географической широты и квадрату косинуса географической широты, достигают наибольшего значения при $\varphi = 0^\circ$ и равны нулю при $\varphi = 90^\circ$ N и $\varphi = 90^\circ$ S, причем они положительны на всех широтах. Сомножитель $b_{п.с.}$, равный синусу широты, имеет нулевое значение при $\varphi = 0^\circ$. С возрастанием широты его абсолютное значение также растет. В северном полушарии он положительный, а в южном — отрицательный. Сомножители $b_{м.п.}$, $b_{м.д.}$ и $b_{в.с.}$, равные синусу удвоенной широты, имеют нулевое значение при φ , равном 0°, 90° N и 90° S, и достигают наибольших абсолютных значений на широтах 45° N и 45° S. Эти сомножители положительны в северном полушарии и отрицательны в южном. Сомножитель $b_{м.с.}$, равный косинусу удвоенной широты, равен нулю на широтах 45° N и 45° S и достигает наибольших абсолютных значений при φ , равном 0°, 90° N и 90° S. На всех широтах в диапазоне от 45° N до 45° S он положительный, а на остальных широтах — отрицательный. Наконец, сомножитель $b_{в.д.}$,

равный $\frac{1}{3} - \sin^2\varphi$, имеет нулевое значение на широтах 35°16' N и 35°16' S и экстремальные значения при φ , равном 0°, 90° N и 90° S, причем на широтах 90° N и 90° S он по абсолютному значению вдвое больше, чем на 0°. В зоне между широтами 35°16' S и 35°16' N этот сомножитель положителен, а в зонах севернее 35°16' N и южнее 35°16' S — отрицателен.

Зависимость перечисленных сомножителей от географической широты показана на рис. 8.

Рассмотрим суммарные силы $F_{сп.п.}$, $F_{сп.с.}$, $F_{см.п.}$, $F_{см.с.}$, $F_{см.д.}$, $F_{св.п.}$, $F_{св.с.}$ и $F_{св.д.}$, каждая из которых представляет собой абсолютное значение силы, с которой соответствующий компонент действует на все частицы небесного тела постоянной плотности (ρ). Масса, сосредоточенная в элементарном объеме (dq), равна ρdq , а силы, действующие на эту массу, равны $F_{п.п}\rho dq$, $F_{п.с}\rho dq$, $F_{м.п}\rho dq$, $F_{м.с}\rho dq$, $F_{м.д}\rho dq$, $F_{в.п}\rho dq$, $F_{в.с}\rho dq$ и $F_{в.д}\rho dq$. Очевидно, что перечисленные суммарные силы определяются

формулой типа $F_s = \rho \iiint_{(Q)} F dq$, где F — какой-либо компонент

приливообразующей силы, отнесенный к единице массы, а Q — объем тела.

Как известно, элементарный объем равен произведению элементарных отрезков ($d\Pi$, dM , dB) параллели, меридиана и вертикали, которые в свою очередь равны $d\Pi = r \cos \varphi d\lambda$ или $d\Pi = r \cos \varphi dT$, $dM = r d\varphi$ и $dB = dr$. Следовательно, $dq = r^2 \times \times \cos \varphi dr d\varphi dT$, и таким образом, интегрирование необходимо выполнять в области, в которой изменяются аргументы r , φ и λ , т. е. от 0 до R , от $-\pi/2$ до $\pi/2$ и от 0 до 2π . Поскольку каждый компонент в различных частях небесного тела имеет противоположные направления, для получения суммарных сил, действующих на все небесное тело, необходимо сначала найти их значения в отдельных его частях, в каждой из которых направление соответствующего компонента одинаково, а затем сложить полученные результаты. Выполняя интегрирование, находим:

$$F_{\text{сп. п}} = \rho \int \int \int_{(Q)} F_{\text{п. п}} dq = \frac{3}{2} f \frac{M}{d^3} \rho \cos^2 \delta \times \\ \times \int_0^R r^3 dr \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi \cdot 8 \int_0^{\pi/4} \sin 2T dT = \frac{3\pi}{4} \rho f \frac{MR^4}{d^3} \cos^2 \delta; \quad (20)$$

$$F_{\text{сп. с}} = \rho \int \int \int_{(Q)} F_{\text{п. с}} dq = \frac{3}{2} f \frac{M}{d^3} \rho \sin 2\delta \times \\ \times \int_0^R r^3 dr \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sin 2\varphi d\varphi \cdot 4 \int_0^{\pi/2} \sin T dT = \frac{3}{2} \rho f \frac{MR^4}{d^3} \sin 2\delta; \quad (21)$$

$$F_{\text{см. п}} = \rho \int \int \int_{(Q)} F_{\text{м. п}} dq = \frac{3}{4} f \frac{M}{d^3} \rho \cos^2 \delta \times \\ \times \int_0^R r^3 dr \cdot 2 \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \cdot 8 \int_0^{\pi/4} \cos 2T dT = \rho f \frac{MR^4}{d^3} \cos^2 \delta; \quad (22)$$

$$F_{\text{см. с}} = \rho \int \int \int_{(Q)} F_{\text{м. с}} dq = \frac{3}{2} f \frac{M}{d^3} \rho \sin 2\delta \times \\ \times \int_0^R r^3 dr \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \cos 2\varphi \cos \varphi d\varphi \cdot 4 \int_0^{\pi/2} \cos T dT = \rho f \frac{MR^4}{d^3} \sin 2\delta; \quad (23)$$

$$F_{\text{см. д}} = \rho \int \int \int_{(Q)} F_{\text{м. д}} dq = \frac{3}{4} f \frac{M}{d^3} \rho (1 - 3 \sin^2 \delta) \times$$

$$\times \int_0^R r^3 dr \cdot 2 \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} dT = \frac{\pi}{2} \rho f \frac{MR^4}{d^3} (1 - 3 \sin^2 \delta); \quad (24)$$

$$F_{sb. n} = \rho \int \int \int_{(Q)} F_{b. n} dq = \frac{3}{2} f \frac{M}{d^3} \rho \cos^2 \delta \times$$

$$\times \int_0^R r^3 dr \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi \cdot 8 \int_0^{\pi/4} \cos 2T dT = 2\rho f \frac{MR^4}{d^3} \cos^2 \delta; \quad (25)$$

$$F_{sb. c} = \rho \int \int \int_{(Q)} F_{b. c} dq = \frac{3}{2} f \frac{M}{d^3} \rho \sin 2\delta \times$$

$$\times \int_0^R r^3 dr \cdot 2 \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \cdot 4 \int_0^{\pi/2} \cos T dT = 2\rho f \frac{MR^4}{d^3} \sin 2\delta, \quad (26)$$

$$F_{sb. d} = \rho \int \int \int_{(Q)} F_{b. d} dq = \frac{3}{2} f \frac{M}{d^3} \rho (1 - 3 \sin^2 \delta) \times$$

$$\times \int_0^R r^3 dr \cdot 4 \int_0^{\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} dT =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}\pi}{9} \rho f \frac{MR^4}{d^3} (1 - 3 \sin^2 \delta). \quad (27)$$

Очевидно, что суммарные силы, действующие не на все небесное тело, а на сферический слой, заключенный между сферами с центрами в центре тела и с радиусами R_1 и R_2 , равны

$$F_{sn. n} = \frac{3}{2} f \frac{M\rho}{d^3} \cos^2 \delta \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi \cdot 8 \int_0^{\pi/4} \sin 2T dT =$$

$$= \frac{3\pi}{4} \rho f \frac{M(R_2^4 - R_1^4)}{d^3} \cos^2 \delta; \quad (28)$$

$$F_{sn. c} = \frac{3}{2} f \frac{M\rho}{d^3} \sin 2\delta \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \cdot 4 \times$$

$$\times \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sin 2\varphi d\varphi \cdot 4 \int_0^{\pi/2} \sin T dT = \frac{3}{2} \rho f \frac{M(R_2^4 - R_1^4)}{d^3} \sin 2\delta; \quad (29)$$

$$F_{sm. n} = \frac{3}{4} f \frac{M\rho}{d^3} \cos^2 \delta \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \cdot 2 \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \times$$

$$\times 8 \int_0^{\pi/4} \cos 2T dT = \rho f \frac{M(R_2^4 - R_1^4)}{d^3} \cos^2 \delta; \quad (30)$$

$$F_{\text{см. с}} = \frac{3}{2} f \frac{M\rho}{d^3} \sin 2\delta \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \cos 2\varphi \cos \varphi d\varphi \cdot 4 \int_0^{\pi/2} \cos T =$$

$$= \rho f \frac{M(R_2^4 - R_1^4)}{d^3} \sin 2\delta, \quad (31)$$

$$F_{\text{см. л}} = \frac{3}{4} f \frac{M\rho}{d^3} (1 - 3 \sin^2 \delta) \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \cdot 2 \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \times$$

$$\times \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} dT = \frac{\pi}{2} \rho f \frac{M(R_2^4 - R_1^4)}{d^3} (1 - 3 \sin^2 \delta); \quad (32)$$

$$F_{\text{сб. п}} = \frac{3}{2} f \frac{M\rho}{d^3} \cos^2 \delta \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi \cdot 8 \int_0^{\pi/4} \cos 2T dT =$$

$$= 2\rho f \frac{M(R_2^4 - R_1^4)}{d^3} \cos^2 \delta; \quad (33)$$

$$F_{\text{сб. с}} = \frac{3}{2} f \frac{M\rho}{d^3} \sin 2\delta \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \cdot 2 \cdot 2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \times$$

$$\times \cos^2 \varphi d\varphi \cdot 4 \int_0^{\pi/2} \cos T dT = 2\rho f \frac{M(R_2^4 - R_1^4)}{d^3} \sin 2\delta; \quad (34)$$

$$F_{\text{сб. л}} = \frac{3}{2} f \frac{M\rho}{d^3} (1 - 3 \sin^2 \delta) \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr \times$$

$$\times 4 \int_0^{\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} dT =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}\pi}{9} \rho f \frac{M(R_2^4 - R_1^4)}{d^3} (1 - 3 \sin^2 \delta). \quad (35)$$

Согласно формулам (20—27) и (28—35), каждая суммарная сила, действующая на небесное тело, прямо пропорциональна его плотности, массе вызывающего прилив светила, четвертой степени радиуса тела и тригонометрической функции склонения светила, являющейся множителем соответствующего компонента, а суммарная сила, действующая на сферический слой, — плотности слоя, массе светила, разности четвертых степеней радиусов внешней и внутренней сфер и упомянутой функции склонения светила. Суммарные силы, действующие как на все небесное тело, так и на его сферический слой, обратно пропорциональны кубу расстояния между центрами вызывающего прилив светила и этого тела.

Отношение между отдельными суммарными силами, действующими на все небесное тело или на его сферический слой любой толщины, равно

$$\begin{aligned} F_{сп. п} : F_{см. п} : F_{св. п} : F_{сп. с} : F_{см. с} : F_{св. с} : F_{см. д} : F_{св. д} = \\ = 3\pi \cos^2 \delta : 4 \cos^2 \delta : 8 \cos^2 \delta : 6 \sin 2\delta : 4 \sin 2\delta : 8 \sin 2\delta : 2\pi (1 - \\ - 3 \sin^2 \delta) : \frac{8\sqrt{3}\pi}{9} (1 - 3 \sin^2 \delta). \end{aligned} \quad (36)$$

Исследуемые суммарные силы очень велики. В качестве примера в табл. 1 приведены действующие на Землю суммарные силы, вызванные Луной, при нулевом и наибольшем, равном $28^\circ 36'$, склонениях этого светила. При вычислениях предполагалось, что Луна находится на среднем расстоянии (384 400 км) от Земли, что масса Луны равна $7,34 \cdot 10^{25}$ г и что Земля представляет собой шарообразное тело с радиусом 6371 км и имеет постоянную плотность, равную $5,5$ г/см³.

Таблица 1
Действующие на Землю суммарные силы Луны (в динах),
уменьшенные в 10^{22} раз

Склонение Луны	Полусуточные суммарные силы			Суточные суммарные силы			Долгопериодные суммарные силы	
	$F_{сп. п}$	$F_{см. п}$	$F_{св. п}$	$F_{сп. с}$	$F_{см. с}$	$F_{св. с}$	$F_{см. д}$	$F_{св. д}$
$0^\circ 00'$	18,39	7,80	15,61	0,00	0,00	0,00	12,26	9,44
$28^\circ 36'$	14,18	6,02	12,04	9,84	6,56	13,12	3,83	2,95

Рассматривая рис. 9, в обеих частях которого изображены небесное тело с центром в точке O , с экватором $ABCD$ и осью вращения $P_N P_S$ и вызывающее прилив светило с центром в точке S , нетрудно заключить, что абсолютные значения показанных стрелками векторов приливообразующих сил в точках тела, одинаково расположенных по отношению к точкам O и S , равны между собой при различных склонениях светила. Из этого следует, что и сумма абсолютных значений приливообразующих сил, действующих на отдельные частицы тела, не зависит от этого параметра. Но, согласно формуле (36), вариация склонения светила влияет на суммарные значения полусуточных, суточных и долгопериодных компонентов приливообразующей силы и на отношения между ними. Например, при $\delta = 0^\circ$ полусуточные суммарные силы максимальны, долгопериодные имеют одно из экстремальных значений, а суточные равны нулю; при $\delta = 90^\circ$ по-

лусуточные и суточные суммарные силы равны нулю, а долго-
периодные максимальны и т. д.

Из формулы (36) видно также, что, если даже не принимать
во внимание сомножители $\cos^2 \delta$, $\sin 2\delta$ и $1 - 3 \sin^2 \delta$, являю-
щиеся функциями склонения светила, суммарные силы не будут
равны между собой. Это объясняется тем, что компоненты при-
ливообразующей силы по-разному зависят от географической

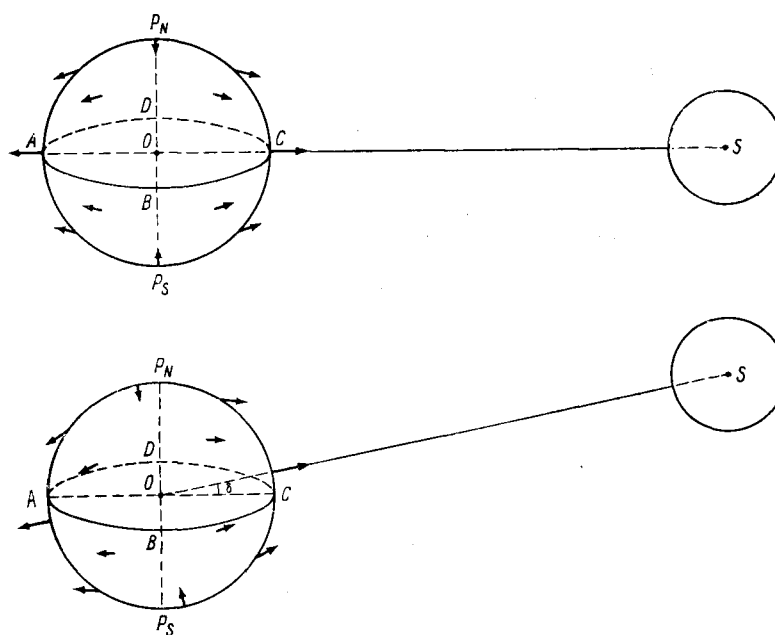


Рис. 9. Приливообразующие силы, вызываемые светилом при раз-
личных его склонениях.

широты, а также тем, что полусуточные и суточные компоненты,
в отличие от долгопериодных, изменяются с долготой. Очевидно,
что количества частиц, которые находятся на поверхностях,
расположенных на разных широтах, неодинаковы. Площадь
круга, ограниченного экватором тела с радиусом R , равна πR^2 .
Поскольку образующей любого изображенного на рис. 8 конуса
является радиус тела, а радиус любой параллели, ограничиваю-
щей основание конуса, равен $R \cos \varphi$, площадь его боковой по-
верхности равна $\pi R^2 \cos \varphi$. Таким образом, площади распо-
ложенных на разных широтах поверхностей, а следовательно, и
количества находящихся на них частиц прямо пропорциональны
косинусу географической широты. Из этого следует, что при
прочих равных условиях наибольшее суммарное значение будет
иметь компонент, значение которого максимально на экваторе

и который медленно убывает с широтой. Именно поэтому суммарная сила $F_{\text{сп. п}}$ превосходит другие суммарные силы, что является одной из важнейших причин преобладания полусуточных приливов над суточными и долгопериодными как на жидких и газообразных телах Солнечной системы, так и в Мировом океане.

1.5. ПОТЕНЦИАЛ ПРИЛИВООБРАЗУЮЩЕЙ СИЛЫ

Согласно теории тяготения, любая частица, находящаяся в гравитационном поле, обладает потенциальной энергией. Эта энергия, часто называемая потенциалом гравитационного поля, определяется работой по перемещению частицы, которую стремится выполнить сила тяготения.

Приливообразующая сила, представляющая собой компонент силы гравитации, также имеет потенциал. Он представляет собой потенциальную энергию, которой обладают частицы, находящиеся в поле названной силы. Его значение (P) в какой-либо точке небесного тела, удаленной от центра на расстояние r , измеряется работой по перемещению частицы из окрестностей центра тела на это расстояние, которую стремится выполнить вертикальная составляющая приливообразующей силы:

$$P = \int_0^r F_w dr.$$

Подставив в это выражение значение отнесенной к единице массы вертикальной составляющей, определяемое приближенной формулой (19), получим:

$$\begin{aligned} P = P_{\text{п}} + P_{\text{с}} + P_{\text{д}} = & \frac{3}{4} f \frac{Mr^2}{d^3} \cos^2 \delta \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda) + \\ & + \frac{3}{4} f \frac{Mr^2}{d^3} \sin 2\delta \sin 2\varphi \cos (nt - \lambda) + \\ & + \frac{3}{4} f \frac{Mr^2}{d^3} (1 - 3 \sin^2 \delta) \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Из приведенной формулы видно, что потенциал приливообразующей силы складывается из полусуточного, суточного и долгопериодного компонентов ($P_{\text{п}}$, $P_{\text{с}}$ и $P_{\text{д}}$).

Потенциальная функция обладает важным свойством, заключающимся в том, что производная от нее по любому направлению представляет собой формулу силы, действующей в этом направлении. Так, дифференцируя потенциальную функцию, описываемую формулой (37), по направлениям параллелей, меридианов и вертикалей, элементарные отрезки которых равны $r \cos \varphi d\lambda$, $r d\varphi$ и dr , получим формулы (17) — (19), определяющие проекции приливообразующей силы.

Отмеченное свойство облегчает определение проекций приливообразующей силы на другие направления. В качестве примера выведем формулу проекций, направленных вдоль изображенных на рис. 10 больших кругов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, расположенных на поверхности небесного тела с радиусом R , пересекающихся с экватором в точке λ_w и направленных к нему под произвольными углами x и $180^\circ - x$. Эта формула, используемая далее для изучения двумерных приливных движений, может быть выведена геометрическим способом, однако такой путь требует выполнения громоздких преобразований.

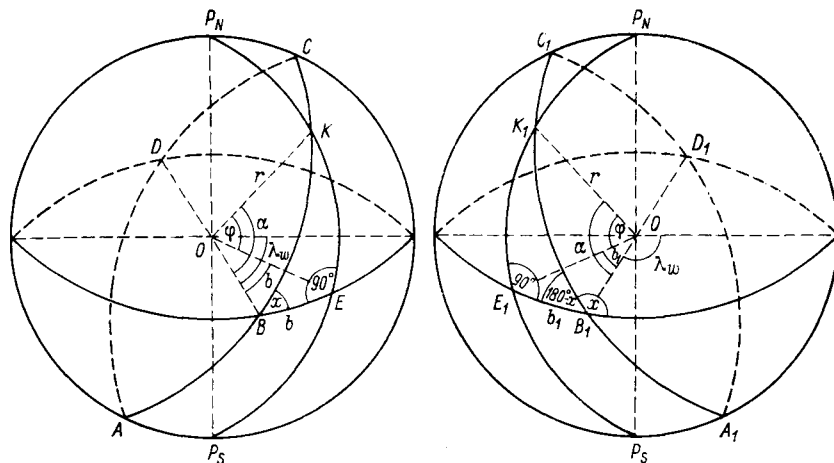


Рис. 10. Большие круги, проходящие под произвольными углами к экватору.

Выберем на большом круге $ABCD$ произвольную точку K . Ее положение на круге определяется центральным углом α , образованным радиусами OB и OK . Проведем через точку K меридиан $P_N K E P_S$. Обозначим широту точки, измеряемую углом KOE , буквой φ , а центральный угол BOE — буквой b . Треугольник BEK , образованный дугами экватора, меридиана и первоначально выбранного большого круга, прямоугольный, так как меридиан образует прямой угол с экватором. Согласно формулам Непера, в этом треугольнике $\sin \varphi = \sin \alpha \cdot \sin x$, $\sin b = \sin \alpha \cos x / \cos \varphi$ и $\cos b = \cos \alpha / \cos \varphi$. Очевидно, что часовой угол относительно проходящего через точку K меридиана равен $T = nt - \lambda = nt - \lambda_w + b$.

Используя значения $\sin \varphi$, $\sin b$, $\cos b$ и T и заменив в формуле (37) аргумент r радиусом (R) тела, приведем эту формулу к следующему виду:

$$P = P_n + P_c + P_d = \frac{3}{4} f \frac{MR^2}{d^3} [\cos^2 b \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda_w + b) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sin 2\delta \sin 2\varphi \cos (nt - \lambda_w + b) + (1 - 3 \sin^2 \delta) \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \alpha \sin^2 x \right) \Big| = \\
& = \frac{3}{4} f \frac{MR^2}{d^3} \left\{ \cos^2 \delta \cos^2 \varphi [(\cos^2 b - \sin^2 b) \cos 2(nt - \lambda_w) - \right. \\
& - 2 \sin b \cos b \sin 2(nt - \lambda_w)] + \sin 2\delta \sin 2\varphi [\cos b \cdot \cos (nt - \lambda_w) - \\
& - \sin b \cdot \sin (nt - \lambda_w)] + (1 - 3 \sin^2 \delta) \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 x \right) \Big\} = \\
& = \frac{3}{4} f \frac{MR^2}{d^3} \cos^2 \delta [(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 x) \cos 2(nt - \lambda_w) - \\
& - \sin 2\alpha \cos x \sin 2(nt - \lambda_w)] + \frac{3}{4} f \frac{MR^2}{d^3} \times \\
& \times \sin 2\delta [\sin 2\alpha \sin x \cos (nt - \lambda_w) - \sin^2 \alpha \sin 2x \sin (nt - \lambda_w)] + \\
& + \frac{3}{4} f \frac{MR^2}{d^3} (1 - 3 \sin^2 \delta) \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \alpha \sin^2 x \right). \quad (38)
\end{aligned}$$

Положение произвольно выбранной точки K_1 на большом круге $A_1B_1C_1D_1$ определяется центральным углом α , образованным радиусами OB_1 и OK_1 . Проведем через эту точку меридиан $P_NK_1E_1P_S$ и обозначим измеряемую углом K_1OE_1 широту точки через φ , а центральный угол B_1OE_1 — через b_1 . Очевидно, что треугольник $B_1E_1K_1$ прямоугольный, так как меридиан $P_NK_1E_1P_S$ перпендикулярен экватору. Согласно формулам Непера, в этом треугольнике $\sin \varphi = \sin \alpha \cdot \sin(180^\circ - x) = \sin \alpha \cdot \sin x$; $\sin b_1 = \sin \alpha \cos(180^\circ - x) / \cos \varphi = -\sin \alpha \sin x / \cos \varphi$ и $\cos b_1 = \cos \alpha / \cos \varphi$. Часовой угол меридиана $P_NK_1E_1P_S$ равен $T = nt - \lambda = nt - \lambda_w - b_1$.

Подставив в формулу (37) полученные значения $\sin \varphi$, $\sin b_1$, $\cos b_1$, T , а также значение r , равное R , и выполнив элементарные преобразования, найдем, что и в этом случае потенциал приливообразующей силы определяется формулой (38).

Элементарный отрезок большого круга равен $Rd\alpha$. Поэтому проекция (F_H) отнесенной к единице массы приливообразующей силы, направленная вдоль каждого из рассматриваемых больших кругов, равна

$$\begin{aligned}
F_H &= \frac{dP}{R d\alpha} = F_{n1} + F_{n2} + F_{c1} + F_{c2} + F_{d1} = \\
&= -\frac{3}{4} f \frac{MR}{d^3} \cos^2 \delta \sin 2\alpha (1 + \cos^2 x) \cos 2(nt - \lambda_w) - \\
&- \frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3} \cos^2 \delta \cos 2\alpha \cos x \sin 2(nt - \lambda_w) + \\
&+ \frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3} \sin 2\delta \cos 2\alpha \sin x \cos (nt - \lambda_w) - \\
&- \frac{3}{4} f \frac{MR}{d^3} \sin 2\delta \sin 2\alpha \sin 2x \sin (nt - \lambda_w) - \\
&- \frac{3}{4} f \frac{MR}{d^3} (1 - 3 \sin^2 \delta) \sin 2\alpha \sin^2 x. \quad (39)
\end{aligned}$$

Видно, что найденная проекция представляет собой сумму двух полусуточных компонентов, двух суточных и одного долгопериодного. Как и в ранее выведенных формулах проекций приливообразующей силы, знаки перед компонентами показывают их направление. Положительными направлениями являются направления от точек B и D к точке C и от точек B_1 и D_1 к точке C_1 , а отрицательными — от точек B и D к точке A и от точек B_1 и D_1 к точке A_1 . В этом нетрудно убедиться, мысленно повернув эти круги вокруг диаметров BD и B_1D_1 так, чтобы они совпали с меридианами, проходящими через точки B и D и через точки B_1 и D_1 , причем точки C и C_1 совместились с северными полюсами сфер.

Можно показать, что в частных случаях, когда большой круг совпадает с только что названными меридианами и с экватором, формула (39), выведенная путем использования потенциальной функции, имеет вид выведенных ранее геометрическим способом формул (18) и (17), в каждой из которых $r = R$, а в последней $\varphi = 0^\circ$. В первом случае угол x между большим кругом и экватором равен 90° , долгота λ_w является долготой (λ) каждой точки круга, а угол α равен углу φ . Поэтому сила F_H описывается формулой (18), определяющей проекцию приливообразующей силы на меридиан.

Во втором случае $x = 180^\circ$ и $\alpha = \lambda - \lambda_w$. Следовательно,

$$\begin{aligned} F_H &= -\frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3} \cos^2 \delta \sin 2(\lambda - \lambda_w) \cos 2(nt - \lambda_w) + \\ &+ \frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3} \cos^2 \delta \cos 2(\lambda - \lambda_w) \sin 2(nt - \lambda_w) = \\ &= \frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3} \cos^2 \delta \sin 2(nt - \lambda). \end{aligned} \quad (40)$$

Видно, что формула (40) определяет проекцию приливообразующей силы на экватор.

Использование потенциальной функции дает возможность вывести формулы проекций приливообразующей силы и на любые другие направления. Как и в рассмотренном примере, для этого необходимо выразить величины r , φ и λ в формуле потенциала приливообразующей силы через аргументы, определяющие длину элементарного отрезка выбранного направления, а затем произвести дифференцирование.

1.6. ПРИЛИВООБРАЗУЮЩИЕ СИЛЫ СОЛНЦА И ЛУНЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЗЕМЛЮ

Определение приливообразующих сил Солнца и Луны можно упростить, если использовать положение Ньютона [43], согласно которому «действия светил зависят от их расстояний до Земли, при меньших расстояниях они сильнее, при больших — слабее,

На рис. 11 показано небесное тело с центром в точке O , светило с центром в точке S и радиус (SB) светила, перпендикулярный отрезку OS . Угол BOS с вершиной в центре тела, образованный лучами, один из которых проходит через центр светила, а второй — через конец перпендикулярного первому лучу радиуса светила, называется видимым горизонтальным полу-

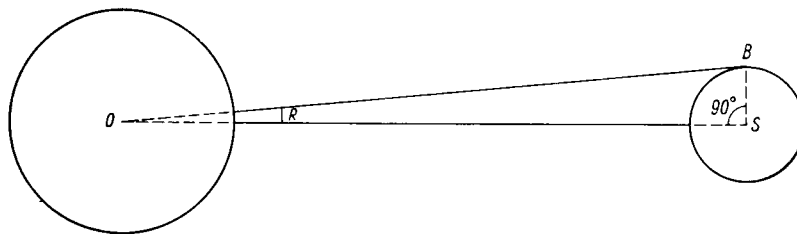


Рис. 11. Видимый горизонтальный полудиаметр вызывающего прилив светила.

Обозначим расстояния между центрами небесного тела и светила буквой d , а радиус светила — буквой a . В прямоугольном треугольнике OSB $d = \frac{a}{\operatorname{tg} R}$. Поэтому общий сомножи-

10/1/50

Массы Солнца и Луны равны соответственно $1,98 \cdot 10^{33}$ и $7,34 \cdot 10^{25}$ г, а радиусы этих светил $6,96 \cdot 10^{10}$ и $1,738 \cdot 10^8$ см. Используя эти данные, найдем значения C_S и C_M при аргументе r , равном среднему радиусу Земли.

$$C_s = \frac{3}{2} \cdot 6,67 \cdot 10^{-8} \frac{1,98 \cdot 10^{33} \cdot 6,371 \cdot 10^8}{(6,96 \cdot 10^{10})^3} \text{ cm/c}^2 \simeq 374 \text{ cm/c}^2;$$

$$C_M = \frac{3}{2} \cdot 6,67 \cdot 10^{-8} \frac{7,34 \cdot 10^{25} \cdot 6,371 \cdot 10^8}{(1,738 \cdot 10^8)^3} \text{ cm/c}^2 \simeq 891 \text{ cm/c}^2.$$

Очевидно, что при других расстояниях (r) между частицей и центром тела значения C_S и C_M определяются формулами

$$C_S = 374 \frac{r}{6,371 \cdot 10^8} \text{ c}^{-2} \text{ и } C_M = 891 \frac{r}{6,371 \cdot 10^8} \text{ c}^{-2}.$$

Используя значение $C \operatorname{tg}^3 R$, запишем формулы (17)–(19) в следующем виде:

$$F_v = F_{п.п} + F_{п.с} = C \operatorname{tg}^3 R \cos^2 \delta \cos \varphi \sin 2(nt - \lambda) + \\ + C \operatorname{tg}^3 R \sin 2\delta \sin \varphi \sin (nt - \lambda). \quad (41)$$

$$F_u = F_{м.п} + F_{м.с} + F_{м.д} = -C \operatorname{tg}^3 R \cos^2 \delta \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi \cos 2(nt - \lambda) + \\ + C \operatorname{tg}^3 R \sin 2\delta \cos 2\varphi \cos (nt - \lambda) - \\ - C \operatorname{tg}^3 R (1 - 3 \sin^2 \delta) \cdot \frac{1}{2} \sin 2\varphi; \quad (42)$$

$$F_w = F_{в.п} + F_{в.с} + F_{в.д} = C \operatorname{tg}^3 R \cos^2 \delta \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda) + \\ + C \operatorname{tg}^3 R \sin 2\delta \sin 2\varphi \cos (nt - \lambda) + \\ + C \operatorname{tg}^3 R (1 - 3 \sin^2 \delta) \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right). \quad (43)$$

Условимся называть сравнительно медленно изменяющиеся во времени величины F_p , F_c и F_d , равные $F_p = \frac{3}{2} f \frac{Mr}{d^3} \cos^2 \delta =$
 $= C \operatorname{tg}^3 R \cos^2 \delta$, $F_c = \frac{3}{2} f \frac{Mr}{d^3} \sin 2\delta = C \operatorname{tg}^3 R \sin 2\delta$, $F_d = \frac{3}{2} f \times$
 $\times \frac{Mr}{d^3} (1 - 3 \sin^2 \delta) = C \operatorname{tg}^3 R (1 - 3 \sin^2 \delta)$, амплитудами полусуточных, суточных и долгопериодных приливообразующих сил. Очевидно, что амплитуды $F_{0п}$, $F_{0с}$ и $F_{0д}$ этих сил на поверхности тела (т. е. при $r = R$) равны $F_{0п} = F_p R/r$, $F_{0с} = F_c R/r$ и $F_{0д} = F_d R/r$. Рассмотрим особенности изменения во времени перечисленных амплитуд приливообразующих сил Солнца и Луны, действующих на поверхностный слой Земли.

Период вариации видимого горизонтального полудиаметра Солнца, называемый аномалистическим годом, составляет около 365,2596 средних солнечных суток. Видимый горизонтальный полудиаметр Солнца ежегодно достигает максимального значения в первых числах января, когда Земля находится в ближайшей к Солнцу точке орбиты — в перигелии. Минимальное значение этот параметр имеет в первых числах июля, когда Земля находится в самой далекой от Солнца точке орбиты — в афелии. Согласно данным, приведенным в астрономических календарях [1, 23], значения видимого горизонтального полудиаметра Солнца в каждую календарную дату изменяются из года в год в очень небольших пределах. На рис. 12 показано изменение максимальных и минимальных значений видимого горизонтального полудиаметра Солнца в 1900–1960 гг. Видно, что наибольшее из максимальных значений этого параметра, наблюдавшееся в 1937 г., равно $16'17,92''$, а наименьшее, наблюдавшееся в 1924 г., равно $16'15,98''$. Таким образом, разность между наибольшим и наименьшим значениями видимого

горизонтального полудиаметра Солнца в моменты 1900—1960 гг., в которые Земля находилась в перигелии, составляла лишь $1,94''$. Видно также, что наибольшие из минимальных значений этого параметра наблюдались в 1936, 1938 и 1939 гг., а наименьшее значение — в 1924 г. Эти наибольшие и наименьшие значения равнялись соответственно $15'45,67''$ и $15'43,76''$, и, таким образом, разность между ними составляла $1,91''$.

Период изменения склонения Солнца, называемый тропическим годом, приблизительно равен $365,2422$ средних солнечных

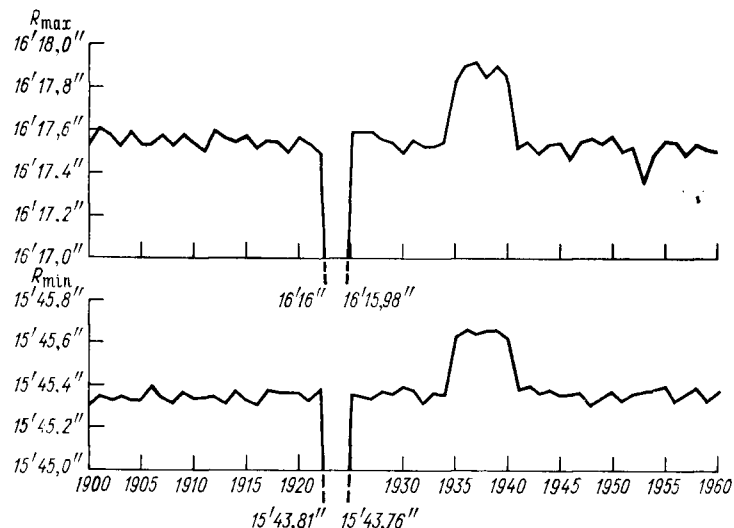


Рис. 12. Максимальные и минимальные значения видимого горизонтального полудиаметра Солнца в 1900—1960 гг.

суток. Солнце имеет максимальное северное склонение в дни летних, а максимальное южное — в дни зимних солнцестояний. Склонение Солнца, как и видимый горизонтальный полудиаметр этого светила, в одни и те же даты разных лет имеет весьма близкие значения. На рис. 13 показано изменение максимальных северных и южных склонений Солнца в 1900—1960 гг. Видно, что наибольшее из максимальных северных склонений наблюдалось в 1911 и 1914 гг. и равнялось $23^{\circ}27'09,6''$. Наименьшее из максимальных северных склонений, имевшее место в 1960 г., составляло $23^{\circ}26'25,2''$. Таким образом, разность между наибольшим и наименьшим из максимальных северных склонений Солнца равнялась $44,4''$. Наибольшее из максимальных по абсолютному значению южных склонений Солнца, наблюдавшееся в 1930 г., составляло $-23^{\circ}27'22,1''$, а наименьшее составляло в 1959 г., $-23^{\circ}26'25,0''$. Следовательно, абсолютное значение разности между наибольшим и наименьшим из

максимальных южных склонений Солнца равнялось $57,1''$ и также не достигало одной минуты.

Приведенные числа показывают, что и видимый горизонтальный полудиаметр, и склонение Солнца меняются в больших пределах в течение каждого года, но почти не изменяются из года в год. Благодаря незначительности межгодовых изменений этих параметров можно, используя их средние многолетние значения в каждые сутки года, вычислить амплитуды полусуточной, суточной и долгопериодной приливообразующей силы Солнца

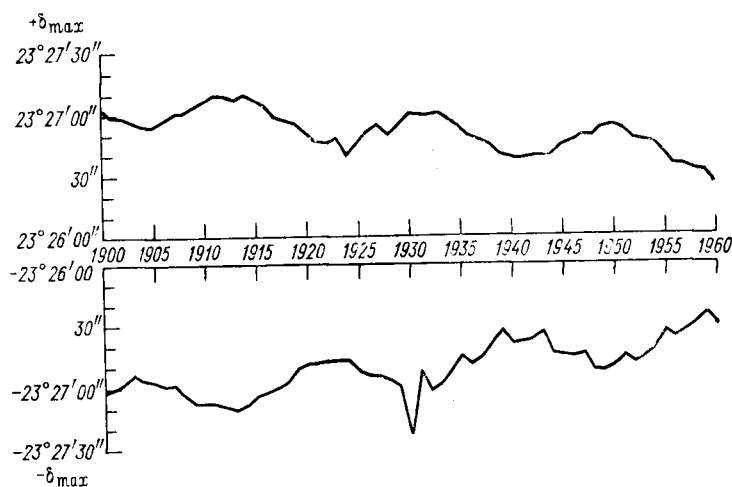


Рис. 13. Максимальные значения северного и южного склонений Солнца в 1900—1960 гг.

на каждую календарную дату. Приближенные значения этих амплитуд во все даты високосного года приведены в табл. 2—4 и для наглядности представлены графически на рис. 14. Приведенные значения весьма близки к тем, которые имеют место в соответствующие даты любого невисокосного года.

Анализ вычисленных данных позволяет установить принципиальные особенности внутригодового изменения амплитуд полусуточной, суточной и долгопериодной приливообразующей силы Солнца. Амплитуда F_{01} достигает максимальных значений в интервалах времени, близких к равноденствиям. С 9 по 19 марта ее значение равно $3,85 \cdot 10^{-5}$ дин, а с 28 сентября по 11 октября — $3,77 \cdot 10^{-5}$ дин. Минимальные значения этой амплитуды наблюдаются в интервалах времени, близких к солнцестояниям: с 20 по 29 июня — $3,04 \cdot 10^{-5}$ дин, а с 15 по 29 декабря — $3,36 \cdot 10^{-5}$ дин. Самое большое ее значение превосходит самое малое в 1,27 раза.

Амплитуда F_{0c} претерпевает гораздо более резкие изменения. Дважды в течение года в дни весеннего и осеннего равноденствия (21 марта и 23 сентября) она обращается в нуль и дважды

Таблица 2

Амплитуды полусуточной приливообразующей силы Солнца, действующей
на массу 1 г на поверхности Земли, в отдельные календарные даты
(в 10^5 дин)

Числа	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	3,37	3,60	3,82	3,80	3,48	3,14	3,05	3,26	3,60	3,77	3,66	3,42
2	3,38	3,61	3,83	3,79	3,47	3,13	3,05	3,27	3,61	3,77	3,65	3,42
3	3,38	3,62	3,83	3,78	3,46	3,12	3,05	3,28	3,62	3,77	3,64	3,41
4	3,39	3,63	3,83	3,77	3,44	3,11	3,06	3,29	3,63	3,77	3,63	3,41
5	3,39	3,64	3,84	3,76	3,43	3,11	3,06	3,30	3,64	3,77	3,63	3,40
6	3,40	3,65	3,84	3,75	3,42	3,10	3,06	3,31	3,64	3,77	3,62	3,40
7	3,40	3,66	3,84	3,74	3,41	3,10	3,07	3,32	3,65	3,77	3,61	3,39
8	3,41	3,67	3,84	3,74	3,39	3,09	3,07	3,34	3,66	3,77	3,60	3,39
9	3,41	3,68	3,85	3,73	3,38	3,09	3,08	3,35	3,67	3,77	3,60	3,38
10	3,42	3,69	3,85	3,72	3,37	3,08	3,08	3,36	3,68	3,77	3,59	3,38
11	3,42	3,70	3,85	3,71	3,36	3,08	3,09	3,37	3,68	3,77	3,58	3,38
12	3,43	3,70	3,85	3,70	3,35	3,07	3,09	3,38	3,69	3,76	3,57	3,37
13	3,43	3,71	3,85	3,69	3,33	3,07	3,10	3,39	3,70	3,76	3,56	3,37
14	3,44	3,72	3,85	3,68	3,32	3,06	3,10	3,40	3,71	3,76	3,55	3,37
15	3,45	3,73	3,85	3,67	3,31	3,06	3,11	3,42	3,71	3,75	3,54	3,36
16	3,46	3,74	3,85	3,66	3,30	3,06	3,12	3,43	3,72	3,75	3,54	3,36
17	3,47	3,75	3,85	3,65	3,29	3,05	3,13	3,44	3,72	3,75	3,53	3,36
18	3,48	3,76	3,85	3,64	3,28	3,05	3,13	3,45	3,73	3,74	3,52	3,36
19	3,48	3,76	3,85	3,63	3,26	3,05	3,14	3,46	3,73	3,74	3,51	3,36
20	3,49	3,77	3,84	3,62	3,25	3,04	3,15	3,47	3,74	3,73	3,50	3,36
21	3,50	3,78	3,84	3,60	3,24	3,04	3,16	3,48	3,74	3,73	3,50	3,36
22	3,51	3,78	3,84	3,59	3,23	3,04	3,17	3,49	3,75	3,72	3,49	3,36
23	3,52	3,79	3,84	3,58	3,22	3,04	3,17	3,50	3,75	3,72	3,48	3,36
24	3,53	3,80	3,83	3,57	3,21	3,04	3,18	3,51	3,75	3,71	3,47	3,36
25	3,54	3,80	3,83	3,56	3,20	3,04	3,19	3,52	3,76	3,71	3,47	3,35
26	3,55	3,81	3,83	3,54	3,19	3,04	3,20	3,54	3,76	3,70	3,46	3,36
27	3,56	3,81	3,82	3,53	3,18	3,04	3,21	3,55	3,76	3,69	3,45	3,36
28	3,57	3,82	3,82	3,52	3,17	3,04	3,22	3,56	3,77	3,68	3,45	3,36
29	3,58		3,81	3,51	3,16	3,04	3,23	3,57	3,77	3,68	3,44	3,36
30	3,58		3,81	3,49	3,16	3,05	3,24	3,58	3,77	3,67	3,43	3,37
31	3,59		3,80		3,15		3,25	3,59		3,66		3,37

Таблица 3

Амплитуда суточной приливообразующей силы Солнца, действующей
на массу 1 г на поверхности Земли, в отдельные календарные даты
(в 10^5 дин)

Чис- ла	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	-2,89	-2,27	-1,10	0,53	1,81	2,51	2,62	2,17	1,12	-0,48	-1,89	-2,70
2	-2,88	-2,24	-1,05	0,58	1,84	2,52	2,61	2,15	1,08	-0,54	-1,92	-2,72
3	-2,87	-2,21	-1,00	0,63	1,87	2,53	2,61	2,12	1,04	-0,60	-1,95	-2,74
4	-2,86	-2,18	-0,95	0,68	1,90	2,54	2,60	2,10	1,00	-0,65	-1,98	-2,76
5	-2,85	-2,15	-0,90	0,72	1,93	2,55	2,60	2,07	0,96	-0,70	-2,01	-2,77
6	-2,84	-2,11	-0,85	0,77	1,96	2,56	2,59	2,05	0,91	-0,75	-2,04	-2,78
7	-2,83	-2,07	-0,80	0,82	1,99	2,57	2,58	2,02	0,86	-0,80	-2,07	-2,79
8	-2,82	-2,03	-0,75	0,86	2,02	2,58	2,57	1,99	0,81	-0,85	-2,10	-2,81
9	-2,81	-1,99	-0,70	0,91	2,05	2,59	2,56	1,96	0,76	-0,90	-2,13	-2,82
10	-2,80	-1,95	-0,65	0,96	2,08	2,60	2,55	1,93	0,71	-0,95	-2,16	-2,83
11	-2,78	-1,91	-0,60	1,00	2,11	2,60	2,54	1,90	0,66	-1,00	-2,19	-2,84
12	-2,76	-1,87	-0,54	1,05	2,14	2,61	2,53	1,87	0,61	-1,05	-2,22	-2,85
13	-2,74	-1,83	-0,48	1,09	2,17	2,61	2,52	1,84	0,56	-1,10	-2,25	-2,86
14	-2,72	-1,79	-0,42	1,14	2,20	2,62	2,51	1,81	0,51	-1,15	-2,28	-2,87
15	-2,70	-1,75	-0,36	1,18	2,22	2,62	2,50	1,78	0,46	-1,20	-2,31	-2,88
16	-2,68	-1,71	-0,30	1,23	2,24	2,63	2,48	1,75	0,41	-1,25	-2,34	-2,88
17	-2,66	-1,67	-0,24	1,27	2,26	2,63	2,47	1,72	0,36	-1,30	-2,37	-2,89
18	-2,64	-1,63	-0,18	1,32	2,28	2,63	2,45	1,68	0,30	-1,35	-2,40	-2,89
19	-2,62	-1,59	-0,12	1,36	2,30	2,64	2,44	1,64	0,24	-1,40	-2,43	-2,90
20	-2,60	-1,55	-0,06	1,40	2,32	2,64	2,42	1,60	0,18	-1,45	-2,46	-2,90
21	-2,58	-1,50	0,00	1,44	2,34	2,64	2,40	1,56	0,12	-1,50	-2,49	-2,91
22	-2,56	-1,45	0,05	1,48	2,36	2,64	2,38	1,52	0,06	-1,55	-2,52	-2,91
23	-2,54	-1,40	0,10	1,52	2,38	2,64	2,36	1,48	0,00	-1,60	-2,54	-2,91
24	-2,51	-1,35	0,15	1,56	2,40	2,64	2,34	1,44	-0,06	-1,64	-2,56	-2,91
25	-2,48	-1,30	0,20	1,60	2,42	2,64	2,32	1,40	-0,12	-1,68	-2,58	-2,91
26	-2,45	-1,25	0,25	1,64	2,44	2,63	2,30	1,36	-0,18	-1,71	-2,60	-2,91
27	-2,42	-1,20	0,30	1,68	2,46	2,63	2,28	1,32	-0,24	-1,74	-2,62	-2,91
28	-2,39	-1,15	0,35	1,72	2,47	2,63	2,26	1,28	-0,30	-1,77	-2,64	-2,91
29	-2,36		0,40	1,75	2,48	2,63	2,24	1,24	-0,36	-1,80	-2,66	-2,90
30	-2,33		0,44	1,78	2,49	2,62	2,22	1,20	-0,42	-1,83	-2,68	-2,90
31	-2,30		0,49		2,50		2,20	1,16		-1,86		-2,89

Таблица 4

Амплитуды долгопериодной приливообразующей силы Солнца,
действующей на массу 1 г на поверхности Земли, в отдельные календарные
даты (в 10^5 дин)

Числа	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	2,18	2,87	3,66	3,76	3,02	2,14	1,92	2,53	3,42	3,76	3,22	2,32
2	2,19	2,90	3,67	3,75	2,99	2,12	1,93	2,56	3,44	3,75	3,19	2,29
3	2,20	2,94	3,69	3,73	2,96	2,10	1,94	2,59	3,46	3,75	3,16	2,27
4	2,21	2,97	3,71	3,71	2,92	2,08	1,95	2,62	3,49	3,74	3,13	2,25
5	2,22	3,00	3,72	3,70	2,89	2,06	1,96	2,64	3,51	3,74	3,10	2,23
6	2,23	3,03	3,74	3,68	2,86	2,04	1,97	2,67	3,53	3,73	3,07	2,22
7	2,24	3,06	3,76	3,66	2,83	2,03	1,98	2,70	3,55	3,72	3,04	2,21
8	2,25	3,09	3,77	3,64	2,80	2,01	2,00	2,73	3,57	3,71	3,01	2,20
9	2,26	3,13	3,78	3,62	2,76	2,00	2,01	2,76	3,59	3,70	2,98	2,19
10	2,27	3,16	3,79	3,60	2,73	1,99	2,03	2,79	3,61	3,69	2,95	2,18
11	2,29	3,19	3,80	3,58	2,70	1,97	2,04	2,82	3,62	3,68	2,92	2,17
12	2,31	3,22	3,81	3,56	2,67	1,96	2,06	2,85	3,64	3,66	2,89	2,16
13	2,34	3,25	3,82	3,53	2,64	1,95	2,08	2,89	3,65	3,65	2,86	2,15
14	2,36	3,28	3,83	3,51	2,61	1,94	2,09	2,92	3,67	3,63	2,83	2,14
15	2,38	3,31	3,83	3,48	2,58	1,93	2,11	2,95	3,68	3,61	2,80	2,13
16	2,41	3,34	3,84	3,46	2,55	1,92	2,13	2,98	3,69	3,60	2,77	2,13
17	2,43	3,37	3,84	3,43	2,52	1,92	2,15	3,01	3,70	3,58	2,74	2,12
18	2,46	3,40	3,84	3,41	2,49	1,91	2,17	3,04	3,71	3,56	2,71	2,11
19	2,48	3,42	3,84	3,38	2,46	1,91	2,19	3,07	3,72	3,54	2,68	2,10
20	2,51	3,45	3,84	3,35	2,43	1,90	2,22	3,09	3,73	3,52	2,65	2,09
21	2,54	3,48	3,84	3,32	2,41	1,90	2,24	3,12	3,74	3,50	2,62	2,09
22	2,57	3,50	3,84	3,29	2,38	1,90	2,26	3,15	3,74	3,48	2,59	2,09
23	2,59	3,53	3,84	3,26	2,35	1,90	2,29	3,18	3,75	3,45	2,56	2,10
24	2,62	3,55	3,83	3,23	2,32	1,90	2,31	3,21	3,75	3,43	2,53	2,10
25	2,65	3,57	3,83	3,20	2,30	1,90	2,34	3,24	3,76	3,41	2,50	2,11
26	2,69	3,60	3,82	3,17	2,27	1,90	2,36	3,26	3,76	3,38	2,47	2,12
27	2,72	3,62	3,81	3,14	2,25	1,90	2,39	3,29	3,76	3,35	2,44	2,13
28	2,75	3,64	3,80	3,11	2,23	1,91	2,42	3,32	3,77	3,33	2,41	2,14
29	2,78		3,79	3,08	2,20	1,91	2,44	3,34	3,76	3,30	2,38	2,15
30	2,81		3,78	3,05	2,18	1,92	2,47	3,37	3,76	3,27	2,35	2,16
31	2,84		3,77		2,16		2,50	3,39		3,25		2,17

в отрезки времени, близкие к солнцестояниям (19—25 июня и 21—28 декабря), достигает максимальных абсолютных значений, соответственно равных $2,64 \cdot 10^{-5}$ и $2,91 \cdot 10^{-5}$ дин. Рассматриваемая амплитуда, как и склонение Солнца, во время от весеннего до осеннего равноденствия имеет положительные значения, а во время от осеннего равноденствия до весеннего — отрицательные.

Амплитуда $F_{0д}$, как и амплитуда $F_{0п}$, в течение всего года имеет только положительные значения. Наибольшие из них наб-

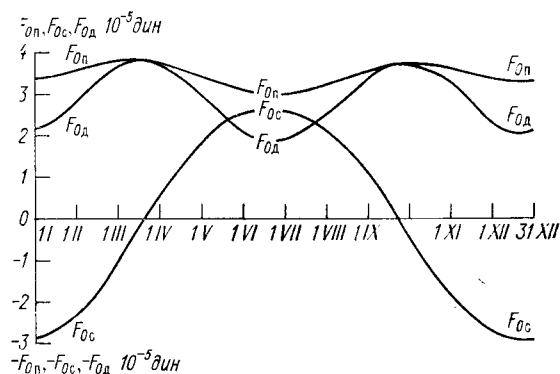


Рис. 14. Приближенные значения амплитуд полусуточной, суточной и долгопериодной приливообразующей силы Солнца в отдельные даты невисокосного года.

людаются в отрезки времени, близкие к равноденствиям, а наименьшие — в отрезки времени, близкие к солнцестояниям. В даты с 16 по 23 марта амплитуда долгопериодной приливообразующей силы Солнца равна $3,84 \cdot 10^{-5}$ дин, 28 сентября — $3,77 \cdot 10^{-5}$ дин, с 20 по 27 июня — $1,90 \cdot 10^{-5}$ дин, а 20—22 декабря — $2,09 \cdot 10^{-5}$ дин. Самое большое ее значение превосходит самое малое в 2,02 раза.

Общей чертой изменения во времени амплитуд полусуточной, суточной и долгопериодной приливообразующей силы Солнца является то, что абсолютное значение каждой из них в течение года имеет два максимума и два минимума. Однако во внутригодовом ходе перечисленных амплитуд существуют серьезные различия, обусловленные разной зависимостью амплитуд от склонения Солнца. Как уже отмечалось, значения амплитуд $F_{0п}$ и $F_{0д}$ во все даты — положительные, тогда как значения амплитуды $F_{0с}$ в даты от осеннего до весеннего равноденствия — отрицательные. Амплитуды $F_{0п}$ и $F_{0д}$ ни в одну дату года не равны нулю, а амплитуда $F_{0с}$ равна нулю в дни равноденствий. Амплитуды $F_{0п}$ и $F_{0д}$ максимальны в отрезки времени, близкие

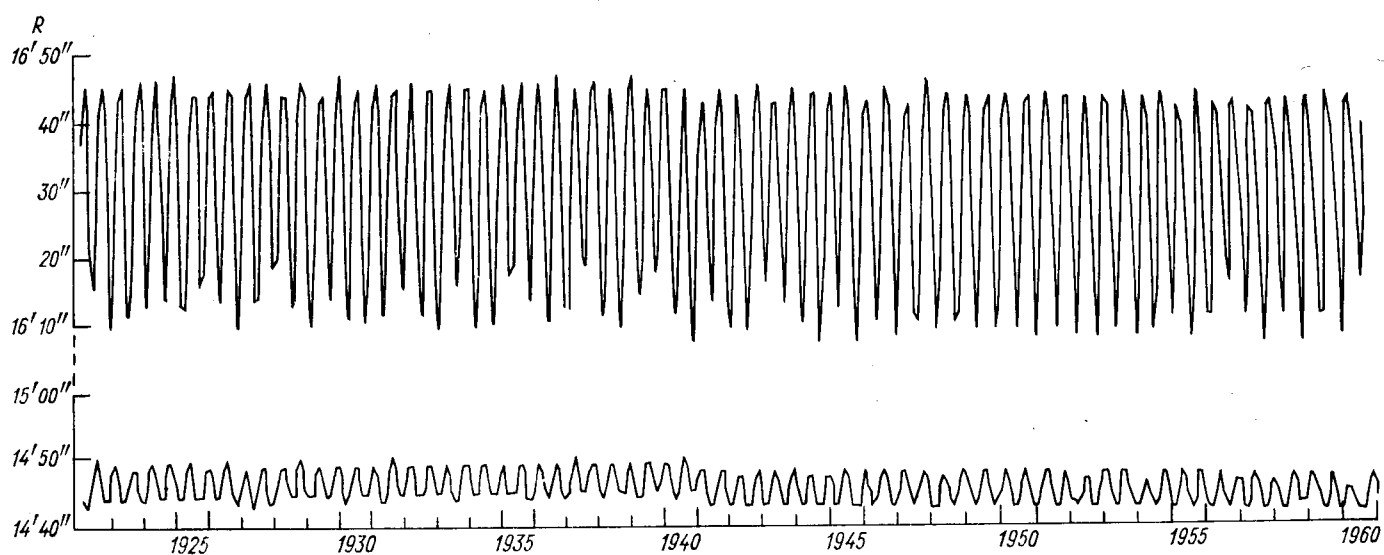


Рис. 15. Максимальные и минимальные значения видимого горизонтального полудиаметра Луны во времена 482 аномалистических месяцев в 1922—1960 гг.

к равноденствиям, а амплитуда F_{0c} — в отрезки времени, близкие к солнцестояниям; поэтому разность фаз изменения во времени амплитуд $F_{0п}$ и $F_{0д}$ и амплитуды F_{0c} составляет около четверти года. Далее, амплитуда $F_{0п}$ изменяется в сравнительно небольших пределах, тогда как изменения амплитуды $F_{0д}$ и особенно F_{0c} очень велики. Почти во все даты амплитуда полусуточной приливообразующей силы Солнца значительно больше, чем амплитуды суточной, а также долгопериодной приливообразующей силы. Это обстоятельство является важнейшей причиной преобладания солнечных полусуточных приливов в Мировом океане и других частях нашей планеты над солнечными суточными и долгопериодными приливами.

Исследуем особенности изменения во времени амплитуд полусуточной, суточной и долгопериодной приливообразующей силы Луны. Период, с которым изменяется расстояние между Землей и Луной, а следовательно, и видимый горизонтальный полудиаметр Луны, называется аномалистическим месяцем. Его средняя продолжительность равна 27,55 суток. Согласно данным, приведенным в астрономическом календаре [1], в течение 482 аномалистических месяцев в 1922—1960 гг. минимальные значения видимого горизонтального полудиаметра Луны варьировали в пределах от $14'42''$ до $14'50''$, а максимальные — от $16'08''$ до $16'47''$. Ход максимальных и минимальных значений этого параметра в указанное время изображен графически на рис. 15. Нетрудно заметить, что в течение каждого года экстремальные значения видимого горизонтального полудиаметра Луны неоднократно были близки к своим верхним и нижним пределам и почти не изменялись из года в год. Внутригодовые вариации экстремальных значений рассматриваемого параметра существенно сказывались на амплитудах $F_{0п}$, F_{0c} и $F_{0д}$. Об этом свидетельствуют следующие значения общего сомножителя $C_M \operatorname{tg}^3 R$ исследуемых амплитуд, которые он имеет при различных экстремальных значениях R :

$$\begin{aligned} \text{при } R=14'42'' \quad C_M \operatorname{tg}^3 R &= 6,985 \cdot 10^{-5} \text{ см/с}^2, \\ \text{при } R=14'50'' \quad C_M \operatorname{tg}^3 R &= 7,137 \cdot 10^{-5} \text{ см/с}^2, \\ \text{при } R=16'08'' \quad C_M \operatorname{tg}^3 R &= 9,195 \cdot 10^{-5} \text{ см/с}^2, \\ \text{при } R=16'47'' \quad C_M \operatorname{tg}^3 R &= 10,353 \cdot 10^{-5} \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, если в течение аномалистического месяца видимый горизонтальный полудиаметр Луны будет изменяться в пределах от $14'50''$ до $16'08''$, то сомножитель $C_M \operatorname{tg}^3 R$, а следовательно, и прямо пропорциональные ему амплитуды $F_{0п}$, F_{0c} и $F_{0д}$ возрастут приблизительно в 1,29 раза. При изменении этого параметра от $14'42''$ до $16'47''$ сомножитель $C_M \operatorname{tg}^3 R$ и амплитуды $F_{0п}$, F_{0c} и $F_{0д}$ увеличатся примерно в 1,48 раза. Однако ход видимого горизонтального полудиаметра Луны почти

не влияет на многолетнее изменение амплитуд полусуточной, суточной и долгопериодной приливообразующей силы этого светила.

Склонение Луны изменяется с периодом, называемым тропическим месяцем. Его средняя продолжительность 27,32 суток. В течение каждого тропического месяца склонение увеличивается от нуля до максимального положительного значения, затем уменьшается до нуля, после чего достигает максимального

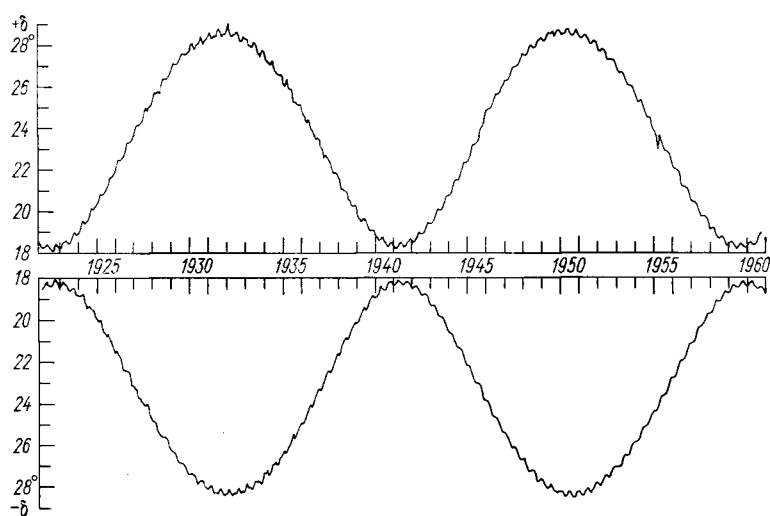


Рис. 16. Максимальные значения северного и южного склонений Луны во времена 486 тропических месяцев в 1922—1960 гг.

отрицательного значения и, наконец, вновь становится равным нулю. Максимальные значения северного и южного склонений изменяются во времени в пределах от $18^{\circ}18'$ до $28^{\circ}36'$ с периодом, равным приблизительно 18,6 года. Это изменение, вызванное обращением узлов лунной орбиты, наклоненной к плоскости эклиптики на $5^{\circ}09'$, называется Саросским циклом. Максимальные северные и южные склонения Луны на протяжении двух Саросских циклов в 1922—1960 гг. показаны графически на рис. 16.

Многолетние изменения экстремальных склонений Луны обуславливают существенную многолетнюю вариацию как ежесуточных, так и экстремальных амплитуд полусуточной, суточной и долгопериодной силы Луны. Так, отношение значений амплитуды $F_{оп}$, которые она имеет при $\delta = 18^{\circ}18'$ и при $\delta = 28^{\circ}36'$, равно 1,17. Отношение значений амплитуды $F_{ос}$ при тех же склонениях составляет 0,71, а отношение значений амплитуды $F_{од}$ равно 2,25. Поэтому изменение склонения Луны с периодом,

равным Саросскому циклу, является важной причиной изменения характеристик полусуточных, суточных и долгопериодных приливов.

В многолетнем ходе амплитуд лунной приливообразующей силы наблюдаются также слабо выраженные изменения с периодами, близкими к четырем с половиной и к девяти годам. Существование этих изменений обусловлено различием средних продолжительностей аномалистического и тропического месяцев и может быть объяснено следующим образом. Пусть в какой-либо начальный момент времени Луна находится в ближайшей к Земле точке орбиты — в перигее, а склонение ее равно нулю. В этот момент амплитуды полусуточных и долгопериодных приливообразующих сил будут максимальными. Спустя один аномалистический месяц их значения будут несколько меньшими в связи с тем, что вследствие разности между продолжительностью аномалистического и тропического месяцев, среднее значение которой составляет 0,23 суток, склонение Луны в этот момент не будет равно нулю. Очевидно, что момент, в который Луна находится в перигее, а склонение ее близко к нулю, отстоит от начального на время, равное произведению продолжительности аномалистического месяца на частное от деления половины продолжительности тропического месяца на 0,23 суток. Это время составляет 4,4—4,5 года. Поскольку продолжительность как тропического, так и аномалистического месяца непрерывно изменяется, склонение Луны в момент нахождения ее в перигее будет близко к нулю не через каждые четыре с половиной года, чем и объясняется нередко наблюдаемое изменение амплитуд приливообразующих сил с периодом, близким к девяти годам. Выбрав в качестве начального момент, в который Луна находится в перигее, а склонение ее имеет экстремальное значение, совершенно аналогичным путем можно объяснить причину изменений амплитуды суточной приливообразующей силы, происходящих с упомянутыми периодами.

Вследствие того, что орбита Луны представляет собой очень сложную кривую, а скорость обращения Луны изменяется во времени по весьма сложному закону, амплитуды приливообразующих сил этого светила подвергаются также непериодическим изменениям. Для их оценки необходимо рассматривать значения амплитуд приливообразующей силы в конкретные моменты времени.

Для вычисления точных значений компонентов проекций приливообразующих сил Солнца и Луны на параллель, меридиан и вертикаль в любой момент времени удобно использовать сомножители $C \operatorname{tg}^3 R$ при значениях R , кратных одной десятой минуты, которые приведены в табл. 5 и 6.

Эти сомножители при значениях R , кратных одной секунде, можно найти путем линейной интерполяции чисел, приведенных в таблицах.

Таблица 5

Сомножители $C_S \operatorname{tg}^3 R$ для определения компонентов проекций приливообразующей силы Солнца на параллель, меридиан и вертикаль (в 10^5 дин)

R	15,7'	15,8'	15,9'	16,0'	16,1'	16,2'	16,3'
$C_S \operatorname{tg}^3 R$	3,57	3,64	3,71	3,78	3,85	3,92	4,00

Таблица 6

Сомножители $C_M \operatorname{tg}^3 R$ для определения компонентов проекций приливообразующей силы Луны на параллель, меридиан и вертикаль (в 10^5 дин)

R	0,0'	0,1'	0,2'	0,3'	0,4'	0,5'	0,6'	0,7'	0,8'	0,9'
14'							6,83	6,97	7,11	7,26
15'	7,40	7,55	7,70	7,85	8,01	8,17	8,33	8,49	8,65	8,82
16'	8,99	9,16	9,33	9,50	9,68	9,86	10,04	10,22	10,40	

Коэффициенты $k_{п.п.}$, $k_{п.с.}$, $k_{м.п.}$, $k_{м.с.}$, $k_{м.д.}$, $k_{в.п.}$, $k_{в.с.}$, $k_{в.д.}$, являющиеся сомножителями полусуточных, суточных и долго-периодных компонентов проекций приливообразующей силы на параллель, на меридиан и на вертикаль и равные $k_{п.п.} = \cos^2 \delta \cos \varphi$, $k_{п.с.} = \sin 2\delta \sin \varphi$, $k_{м.п.} = \frac{1}{2} \cos^2 \delta \sin 2\varphi$, $k_{м.с.} = \sin 2\delta \times \times \cos 2\varphi$, $k_{м.д.} = \frac{1}{2} (1 - 3 \sin^2 \delta) \sin 2\varphi$, $k_{в.п.} = \cos^2 \delta \cos^2 \varphi$, $k_{в.с.} = \sin 2\delta \sin 2\varphi$, $k_{в.д.} = (1 - 3 \sin^2 \delta) \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)$, удобно находить с помощью специальных номограмм, описанных в работе [14]. Входными данными для определения этих коэффициентов служат склонение светила и географическая широта места. Имеются также специальные номограммы для вычисления произведений коэффициентов $k_{п.п.}$, $k_{п.с.}$, $k_{м.п.}$, $k_{м.с.}$, $k_{в.п.}$ и $k_{в.с.}$ на соответствующие тригонометрические функции часового угла светила. Окончательные значения компонентов проекций приливообразующих сил Солнца и Луны можно найти с помощью приведенных в упомянутой работе специальных таблиц, входными данными в которые служат определяемые с помощью номограмм произведения $\cos^2 \delta \cos \varphi \sin 2T$, $\sin 2\delta \sin \varphi \sin T$, $\frac{1}{2} \cos^2 \delta \sin 2\varphi \times \times \cos 2T$, $\sin 2\delta \cos 2\varphi \cos T$, $-\frac{1}{2} (1 - 3 \sin^2 \delta) \sin 2\varphi$, $\cos^2 \delta \cos^2 \varphi \times \times \cos 2T$, $\sin 2\delta \sin 2\varphi \cos T$, $(1 - 3 \sin^2 \delta) \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)$ и видимые горизонтальные полудиаметры светила. Использование этих номограмм и таблиц дает возможность быстро находить значения компонентов проекций приливообразующих сил Солнца и Луны,

действующих на единицу массы в каждой точке поверхности Земли в любой момент времени.

Согласно теории гармонического анализа приливов [36, 37], полусуточные, суточные и долгопериодные приливы в Мировом океане, вызываемые действием Солнца и Луны, могут быть представлены в виде суммы большого количества полусуточных, суточных и долгопериодных приливных волн, каждую из которых принято называть фиктивной приливной волной. В последние десятилетия несколькими исследователями были построены карты распределения амплитуд и фаз важнейших полусуточных и суточных фиктивных приливных волн в Атлантическом, Тихом и Индийском океанах и в ряде окраинных морей [5, 38, 41 и т. д.]. Для объяснения особенностей распределения амплитуд фиктивных приливных волн целесообразно построить и проанализировать карты амплитуд приливообразующих сил, возбуждающих эти волны.

Как известно, каждой фиктивной приливной волне соответствует одно из слагаемых, на которые раскладывается потенциал приливообразующей силы. Чтобы вывести формулы проекций приливообразующей силы, вызывающей рассматриваемую приливную волну, на параллель и на меридиан, достаточно продифференцировать это слагаемое по названным направлениям. Формулы, определяющие проекции сил, возбуждающих важнейшие полусуточные, суточные и долгопериодные фиктивные приливные волны — главную лунную полусуточную (M_2), главную солнечную полусуточную (S_2), лунно-солнечную деклинационную суточную (K_1), главную лунную суточную (O_1), лунную полумесячную (Mf), лунную месячную (Mm), солнечную полугодовую (Ssa) и солнечную годовую (Sa), имеют вид:

$$A_{п. M_2} = \frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3} \cdot 2k_{M_2} \cos \varphi; \quad (44)$$

$$A_{м. M_2} = -\frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3} k_{M_2} \sin 2\varphi; \quad (45)$$

$$A_{п. S_2} = \frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3} \cdot 2k_{S_2} \cos \varphi; \quad (46)$$

$$A_{м. S_2} = -\frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3} k_{S_2} \sin 2\varphi; \quad (47)$$

$$A_{п. K_1} = \frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3} \cdot 2k_{K_1} \sin \varphi; \quad (48)$$

$$A_{м. K_1} = \frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3} \cdot 2k_{K_1} \cos 2\varphi; \quad (49)$$

$$A_{п. O_1} = \frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3} \cdot 2k_{O_1} \sin \varphi; \quad (50)$$

$$A_{м. O_1} = \frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3} \cdot 2k_{O_1} \cos 2\varphi; \quad (51)$$

$$A_{м. Mf} = -\frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3} \cdot \frac{3}{2} k_{Mf} \sin 2\varphi; \quad (52)$$

$$A_{м. Mm} = -\frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3} \cdot \frac{3}{2} k_{Mm} \sin 2\varphi; \quad (53)$$

$$A_{м. Ssa} = -\frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3} \cdot \frac{3}{2} k_{Ssa} \sin 2\varphi; \quad (54)$$

$$A_{м. Sa} = -\frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3} \cdot \frac{3}{2} k_{Sa} \sin 2\varphi. \quad (55)$$

Проекция на параллель приливообразующих сил, возбуждающих долгопериодные фиктивные приливные волны, как и проекция долгопериодных приливообразующих сил Солнца и Луны на это направление, равны нулю.

В формулах (44)–(55) буквы «п» и «м» в индексах при амплитудах A обозначают направления, вдоль которых действует сила (п — параллель, м — меридиан), а латинские буквы с цифрами или без них — фиктивные волны, которые возбуждаются этими силами. В приведенных формулах M — масса Луны, R — радиус Земли, d — среднее расстояние между центрами Земли и Луны, а k_{M_2} , k_{S_2} , k_{K_1} , k_{O_1} , k_{Mf} , k_{Mm} , k_{Ssa} , k_{Sa} — значения коэффициентов рассматриваемых фиктивных волн. При $M = 7,34 \cdot 10^{25}$ г, $R = 6,371 \cdot 10^8$ см, $d = 3,844 \cdot 10^{10}$ см и приведенных в работе [28] средних значениях коэффициентов, равных $k_{M_2} = 0,45426$, $k_{S_2} = 0,21137$, $k_{K_1} = 0,26522$, $k_{O_1} = 0,18856$, $k_{Mf} = 0,07823$, $k_{Mm} = 0,04136$, $k_{Ssa} = 0,03643$, $k_{Sa} = 0,01200$, искомые амплитуды проекций приливообразующих сил, отнесенных к единице массы, равны

$$\begin{aligned} A_{п. M_2} &= 7,48 \cdot 10^{-5} \cos \varphi \text{ см/с}^2, & A_{м. M_2} &= -3,74 \cdot 10^{-5} \sin 2\varphi \text{ см/с}^2, \\ A_{п. S_2} &= 3,48 \cdot 10^{-5} \cos \varphi \text{ см/с}^2, & A_{м. S_2} &= -1,74 \cdot 10^{-5} \sin 2\varphi \text{ см/с}^2, \\ A_{п. K_1} &= 4,37 \cdot 10^{-5} \sin \varphi \text{ см/с}^2, & A_{м. K_1} &= -4,37 \cdot 10^{-5} \cos 2\varphi \text{ см/с}^2, \\ A_{п. O_1} &= 3,10 \cdot 10^{-5} \sin \varphi \text{ см/с}^2, & A_{м. O_1} &= 3,10 \cdot 10^{-5} \cos 2\varphi \text{ см/с}^2, \\ A_{м. Mf} &= -0,97 \cdot 10^{-5} \sin 2\varphi \text{ см/с}^2, & A_{м. Mm} &= -0,51 \cdot 10^{-5} \sin 2\varphi \text{ см/с}^2, \\ A_{м. Ssa} &= -0,45 \cdot 10^{-5} \sin 2\varphi \text{ см/с}^2, & A_{м. Sa} &= -0,15 \cdot 10^{-5} \sin 2\varphi \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Суммарные значения приливообразующих сил, действующих на воду в различных районах Мирового океана, имеющих одинаковую площадь, зависят не только от географических широт, на которых расположены эти районы, но и от массы воды в каждом из них. Поскольку плотность океанской воды изменяется в небольших пределах, можно положить, что масса воды

в таких районах прямо пропорциональна их средней глубине. Поэтому для установления главных особенностей распределения приливообразующих сил в Мировом океане целесообразно рассматривать амплитуды их проекций, действующих на массы воды в пределах вертикальных столбиков, площадь поперечного сечения каждого из которых равна 1 см^2 , а высота — средней глубине (h) района. Глубина Мирового океана мала по сравнению с радиусом Земли, благодаря чему можно считать, что приливообразующая сила, действующая на частицу воды на какой-либо вертикали, равна приливообразующей силе, действующей на частицу, которая имеет такую же массу и находится в точке пересечения этой вертикали с поверхностью океана. Таким образом, амплитуда (F) проекции приливообразующей силы, возбуждающей какую-нибудь фиктивную приливную волну и действующей на массу воды в пределах упомянутого столбика, определяется формулой

$$F = A\rho h \text{ см}^2, \quad (56)$$

в которой A — амплитуда проекции вызывающей рассматриваемую волну приливообразующей силы, отнесенной к единице массы.

Как показано в работе [26], для построения карт распределения амплитуд приливообразующих сил необходимо найти средние глубины отдельных районов Мирового океана, а затем, подставив их значения в формулу (56), вычислить искомые амплитуды. Найденные их абсолютные значения приписываются точкам, расположенным в центрах районов, в которых определялись средние глубины, после чего проводятся линии равных амплитуд. Построенные таким способом карты амплитуд проекций приливообразующих сил показывают зависимость их значений не только от географической широты места, но и от глубины океана в каждом его районе. Благодаря этому они дают возможность найти области Мирового океана, в которых приливообразующие силы стремятся сообщить воде наибольшее количество движения.

Для построения таких карт были вычислены средние глубины, а затем амплитуды проекций приливообразующих сил в 481 районе Мирового океана. Каждый из этих районов представлял собой либо сферическую трапецию, образованную дугами параллелей и меридианов, значения которых кратны 10° , либо фигуру, образованную названными дугами и береговой линией.

Рассмотрение карт, приведенных на рис. 17—22, позволяет сделать следующие выводы о распределении приливообразующих сил, возбуждающих важнейшие фиктивные приливные волны в большей части Мирового океана.

Почти во всех районах наибольшие значения имеют амплитуды проекций на параллель приливообразующей силы, вызывающей главную лунную полусуточную волну M_2 . Так, область,

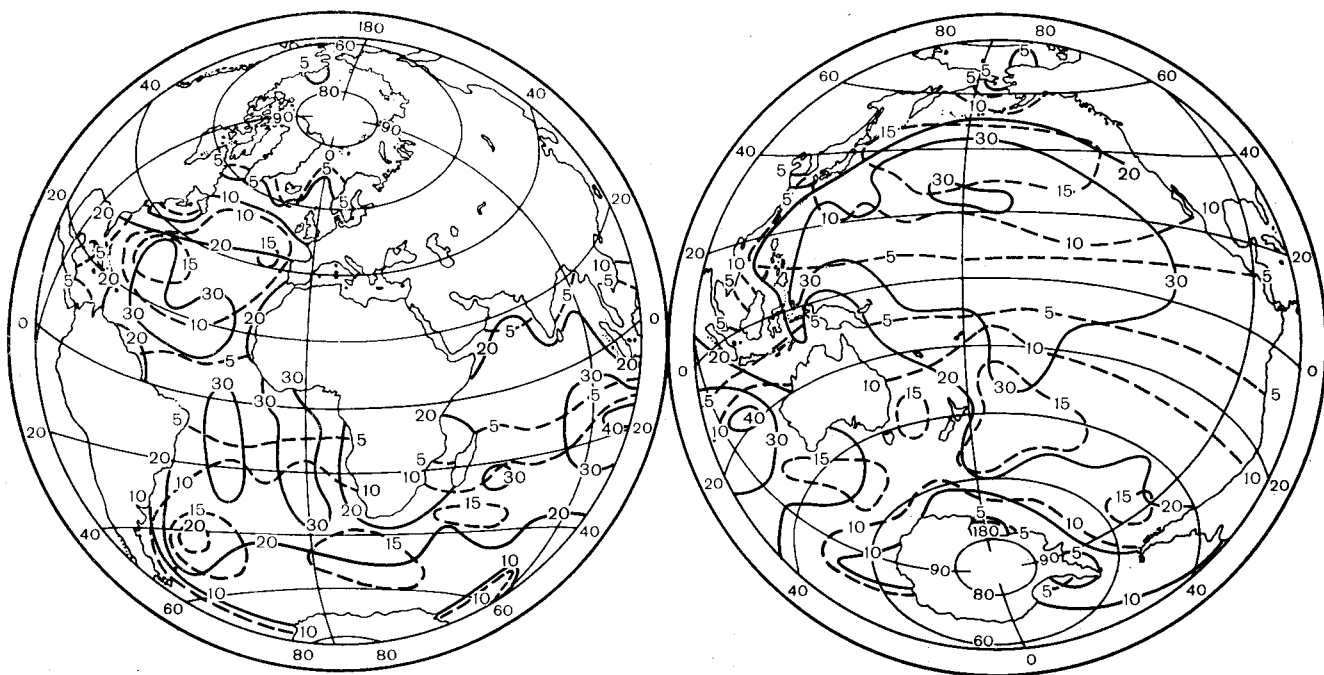


Рис. 17. Распределение амплитуд проекций приливообразующих сил (в динах), возбуждающих главную лунную полу-
суточную волну M_2 в Мировом океане (сплошными линиями показаны изоамплитуды проекции силы на параллель,
а прерывистыми — на меридиан).

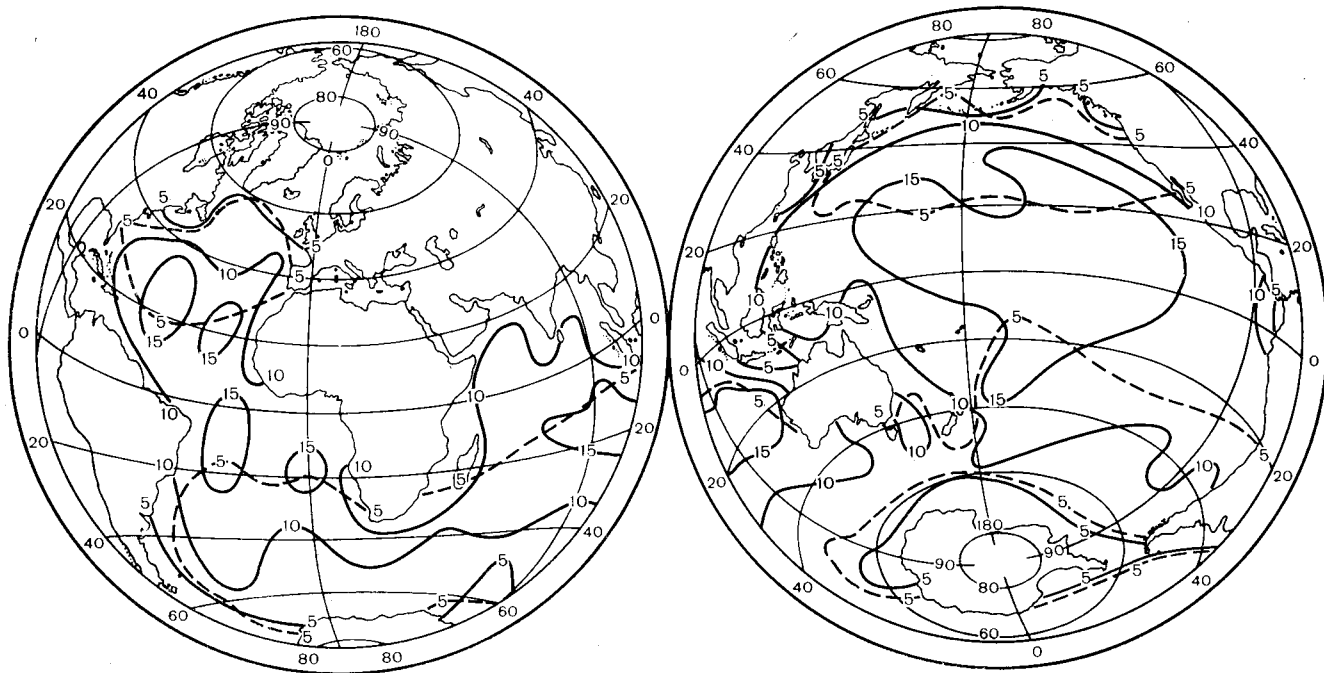


Рис. 18. Распределение амплитуд проекций приливообразующих сил (в динах), возбуждающих главную солнечную полу-
суточную волну S_2 в Мировом океане (сплошными линиями показаны изоамплитуды проекции силы на параллель,
а прерывистыми — на меридиан).

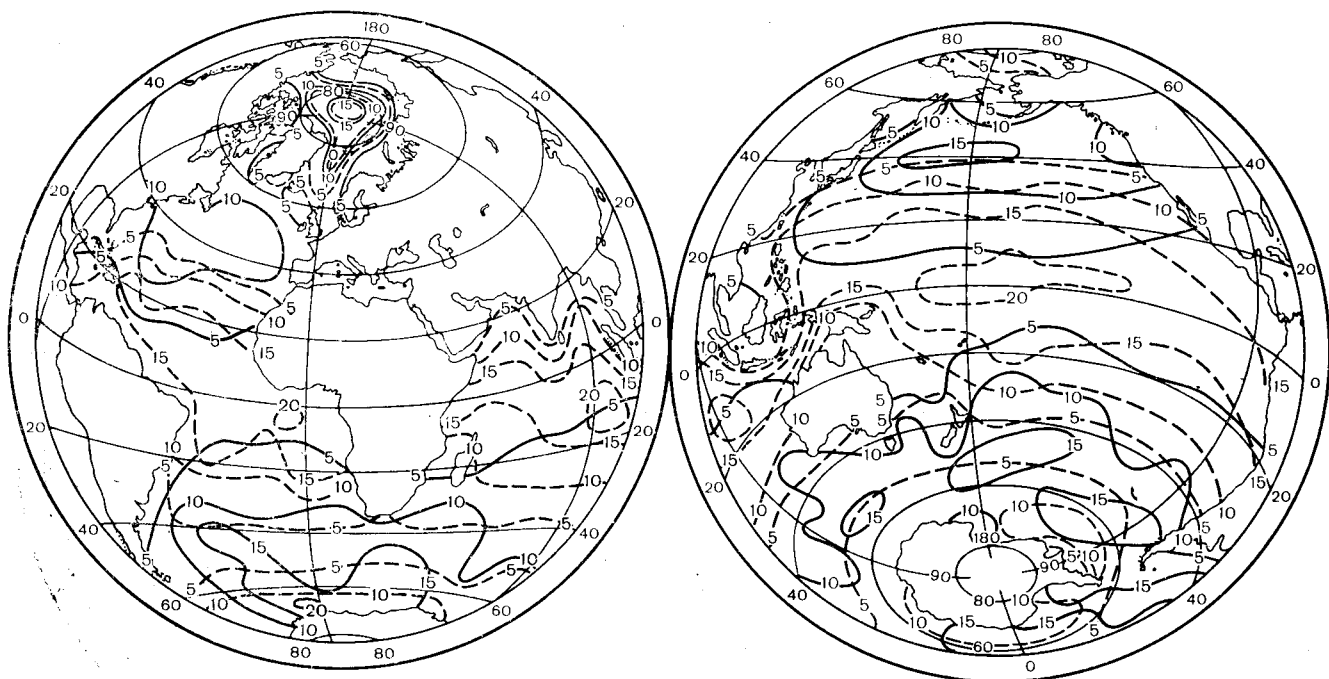


Рис. 19. Распределение амплитуд проекций приливообразующих сил (в динах), возбуждающих лунно-солнечную деклинационную суточную волну K_1 в Мировом океане (сплошными линиями показаны изоамплитуды проекции силы на параллель, а прерывистыми — на меридиан).

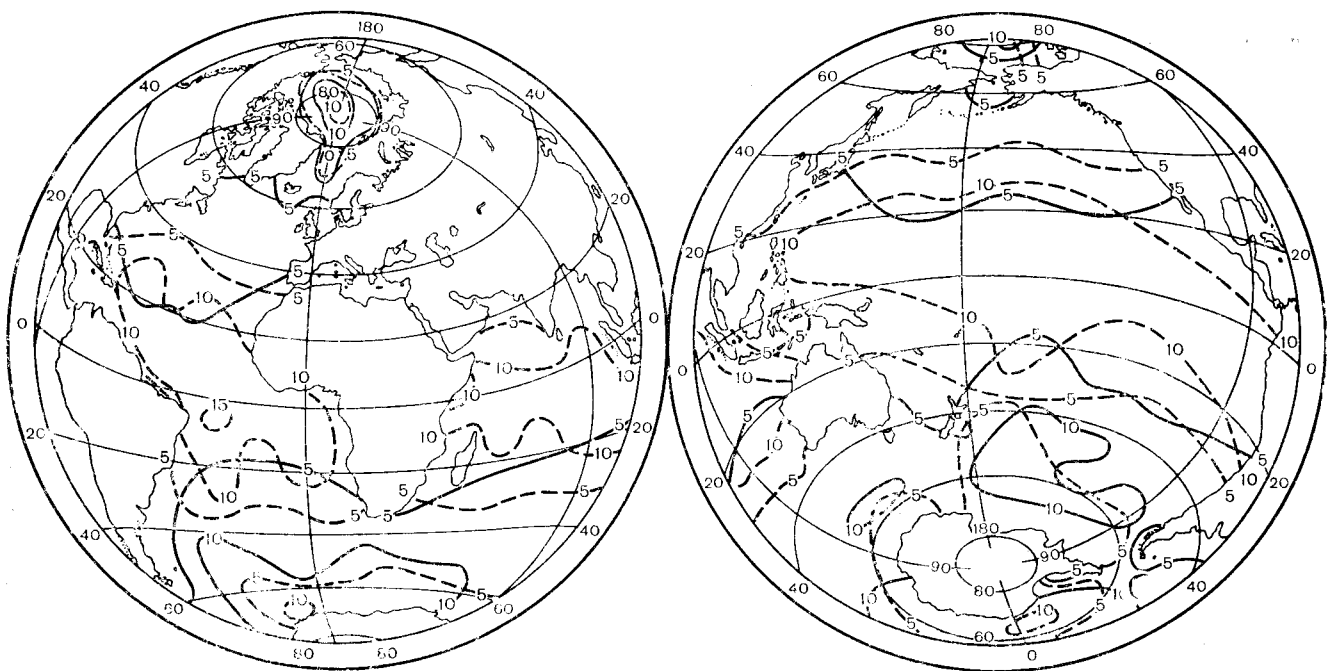


Рис. 20. Распределение амплитуд проекций приливособразующих сил (в динах), возбуждающих главную лунную суточную волну O_1 в Мировом океане (сплошными линиями показаны изоамплитуды проекции силы на параллель, а прерывистыми — на меридиан).

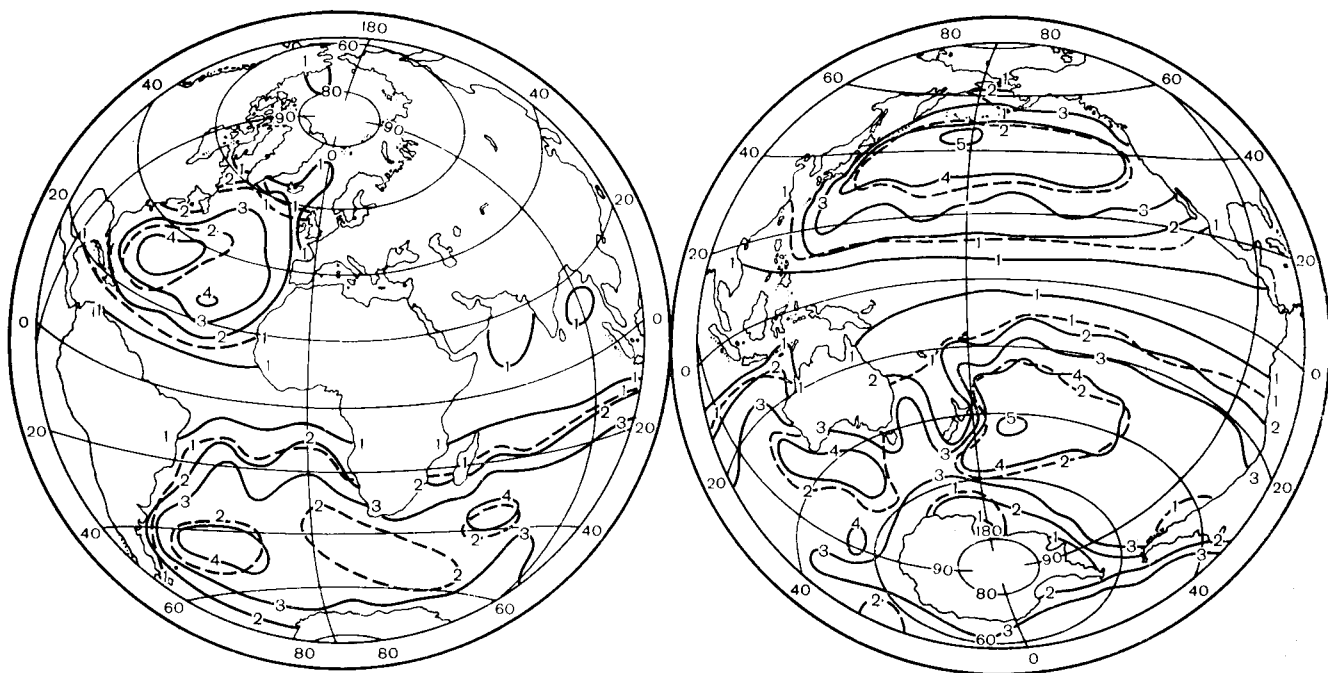


Рис. 21. Распределение амплитуд приливообразующих сил (в динах), возбуждающих лунную полумесячную волну M_f и лунную месячную волну M_t в Мировом океане (сплошными линиями показаны изоамплитуды силы, возбуждающей волну M_f , а прерывистыми — волну M_t).

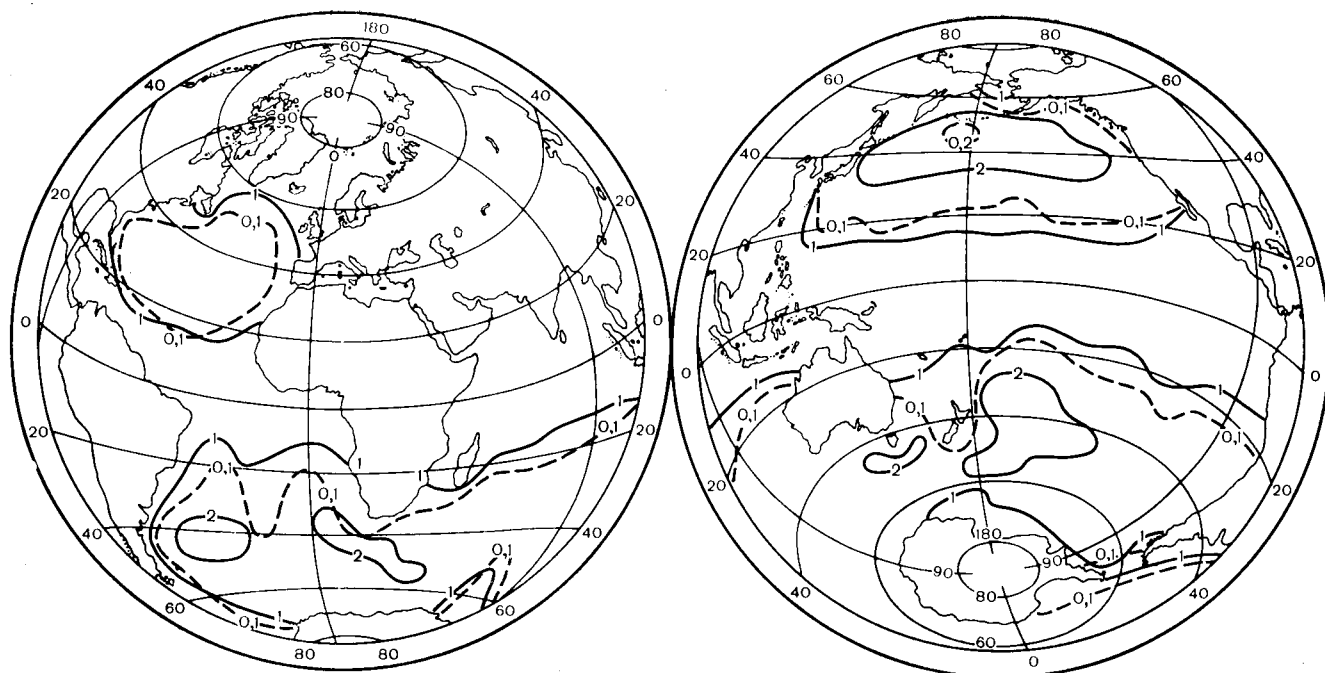


Рис. 22. Распределение амплитуд приливообразующих сил (в динах), возбуждающих солнечную полугодовую волну S_{sa} и солнечную годовую волну S_a в Мировом океане (сплошными линиями показаны изоамплитуды силы, возбуждающей волну S_{sa} , а прерывистыми — волну S_a).

в которой амплитуда этой проекции превосходит 20 дин, занимает почти всю акваторию Атлантического океана, расположенную южнее линии, соединяющей северную часть полуострова Флорида с северо-западной оконечностью Пиренейского полуострова, и почти всю акваторию Тихого и Индийского океанов. В значительной части этой области, особенно обширной в Тихом океане, рассматриваемая амплитуда превышает 30 дин. Ее значения менее 5 дин наблюдаются только в Арктическом бассейне, в районах у восточного берега Гренландии, у берегов Антарктиды в морях Уэдделла и Беллинсгаузена, а также в некоторых окраинных морях. Амплитуда проекции той же силы на меридиан имеет меньшие значения во всех районах океанов. Максимальные ее значения, составляющие 15—20 дин, наблюдаются в сравнительно небольших районах близ параллелей 45° N и 45° S. Акватория, на которой значения этой амплитуды не достигают 5 дин, занимает не только Арктический бассейн и некоторые окраинные моря, но и широкую полосу во всех океанах, ориентированную вдоль экватора.

Распределение амплитуд проекций на параллель и на меридиан приливообразующей силы, возбуждающей главную солнечную полусуточную волну S_2 , очень похоже на только что описанное. Разница заключается в значениях амплитуд, которые во всех районах примерно вдвое меньше, чем амплитуды проекций силы, вызывающей главную лунную полусуточную волну.

Максимальные значения амплитуды проекции на параллель приливообразующей силы, вызывающей лунно-солнечную деклинационную суточную волну K_1 , составляют 15—20 дин. Они отмечаются только в некоторых районах южного океанического кольца, окружающего Антарктиду, в пределах узкой полосы в Тихом океане, направленной вдоль параллели 45° N, и в центре Арктического бассейна. Области, в которых значения этой амплитуды не достигают 5 дин, занимают обширные площади во всех океанах, расположенные по обе стороны экватора.

Наибольшие значения амплитуды проекции на меридиан приливообразующей силы, возбуждающей ту же фиктивную волну, наоборот, отмечаются в экваториальной зоне всех океанов. В этой зоне они составляют 15—20 дин, а в отдельных ее районах даже превышают 20 дин. Область, в которой значения этой амплитуды не достигают 5 дин, занимает часть Тихого океана, лежащую севернее параллели 38° N, часть Атлантического океана, расположенную севернее параллели 35° N, широкую полосу в южном полушарии, вытянутую вдоль параллели 45° S, и акватории ряда окраинных морей. В высоких широтах значения этой амплитуды велики: они достигают 15—20 дин в центре Арктического бассейна и 10—15 дин в обширных районах близ берегов Антарктиды. Таким образом, в большинстве районов Мирового океана амплитуды проекции приливообра-

зующей силы, возбуждающей волну K_1 , на меридиан превосходят амплитуды проекции этой силы на параллель.

Распределение амплитуд проекций на параллель и на меридиан приливообразующей силы, вызывающей главную лунную суточную волну O_1 , подобно распределению соответствующих характеристик силы, возбуждающей волну K_1 , однако эти амплитуды повсеместно имеют меньшие значения.

Амплитуды проекций на меридиан приливообразующих сил, возбуждающих все лунные и солнечные долгопериодные фиктивные волны, имеют максимальные значения в умеренных широтах, причем в южном полушарии площадь зоны с наиболее высокими значениями этих амплитуд гораздо больше, чем в северном. В этих зонах амплитуда силы, вызывающей лунную полумесячную волну, составляет 3—4 дин; амплитуды сил, возбуждающих остальные рассматриваемые долгопериодные волны, не достигают этих значений.

Естественно, что широтное распределение амплитуд проекций всех приливообразующих сил, вызывающих перечисленные фиктивные волны, подчиняется закономерностям, выраженным формулами (44)—(55), однако различия в глубинах отдельных районов Мирового океана существенно усложняют эти закономерности.

Сравнение приведенных карт показывает, что амплитуды проекций на параллель приливообразующей силы, возбуждающей главную лунную полусуточную волну M_2 , в большинстве районов Мирового океана резко превосходят амплитуды проекций сил, вызывающих другие фиктивные волны. В частности, они в два с лишним раза больше, чем амплитуды проекции на то же направление приливообразующей силы, вызывающей главную солнечную полусуточную волну.

Различие между приливообразующими силами Солнца и Луны заключается не только в значениях амплитуд и особенно в вариации их во времени, но и в скорости изменения полусуточных и суточных компонентов, обусловленного изменением часового угла светила. Согласно формуле (16), скорость изменения часового угла прямо пропорциональна относительной угловой скорости вращения тела вокруг оси и обращения вызывающего прилив светила вокруг тела или тела вокруг светила. Луна обращается вокруг Земли в направлении с запада на восток, т. е. в том же направлении, в каком Земля вращается вокруг своей оси и обращается вокруг Солнца. Период обращения Луны вокруг Земли называется сидерическим месяцем. Его средняя продолжительность приблизительно равна средней продолжительности тропического месяца (27,32 средних солнечных суток). Угловая скорость вращения Земли вокруг оси равна $7,29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ и во много раз превосходит угловые скорости обращения Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли, приблизительно равные $0,02 \cdot 10^{-5}$ и $0,27 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$. Поэтому главной

причиной изменения часовых углов Солнца и Луны является не обращение Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли, а вращение Земли вокруг своей оси, вследствие чего отличие в продолжительности солнечных и лунных суток невелико. Но из-за различия указанных скоростей обращения средняя продолжительность лунных суток, составляющая около 24 ч 50 мин, на 50 мин превышает среднюю продолжительность солнечных. Таким образом, полусуточные и суточные приливообразующие

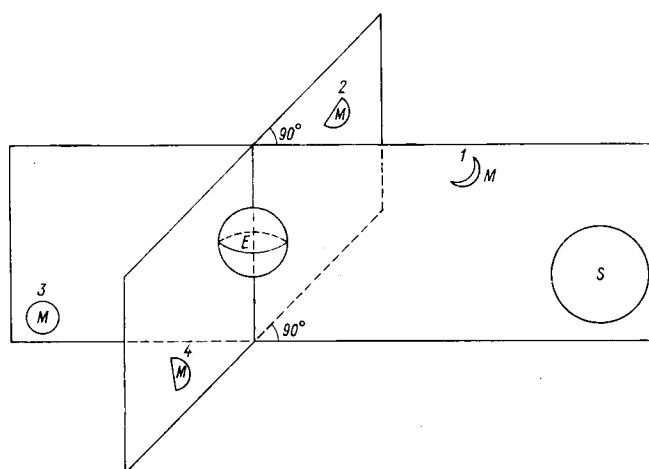


Рис. 23. Положение Луны относительно Земли и Солнца в отдельные моменты синодического месяца.

1 — новолуние, 2 — первая четверть, 3 — полнолуние, 4 — третья четверть.

силы Солнца отличаются от полусуточных и суточных приливообразующих сил Луны не только меньшими амплитудами, но и несколько меньшими периодами изменения во времени.

Одним из следствий различия скоростей обращения Луны вокруг Земли и Земли вокруг Солнца является постоянное изменение разности часовых углов этих светил в любой точке Земли. В момент новолуния Луна и Солнце находятся в одной плоскости, проходящей через полюса Земли, по одну сторону от нее (рис. 23). В этот момент во всех точках Земли часовые углы этих светил равны между собой. В полнолуние светила находятся в той же плоскости, но по разные стороны Земли. В этот момент повсеместно часовые углы Луны и Солнца отличаются друг от друга на 180° . В моменты, когда Луна находится в первой и третьей четвертях (в квадратурах), т. е. в плоскости, проходящей через полюса Земли и перпендикулярной плоскости, в которой находятся полюса и центр Солнца, разность ме-

жду часовыми углами светил составляет 90 или 270°. Интервал времени между двумя последовательными новолуниями или последовательными полнолуниями (т. е. период изменения разности часовых углов Луны и Солнца в пределах от 0 до 360°) называется синодическим месяцем. Его средняя продолжительность 29,53 средних солнечных суток.

Вариация разности часовых углов вызывает месячный ход лунно-солнечных приливообразующих сил полусуточного и суточного периода, представляющих собой суммы как полусуточных, так и суточных сил каждого светила. Очевидно, что лунно-солнечная сила полусуточного периода максимальна в моменты новолуния и полнолуния (т. е. в сизиггии), когда во всех точках разности часовых углов равны соответственно 0 и 180°, а потому проекция лунно-солнечной приливообразующей силы на любое направление представляет собой сумму проекций лунной и солнечной сил. Она минимальна в моменты, когда Луна находится в первой и третьей четвертях (т. е. в квадратурах). В эти моменты во всех точках Земли разность часовых углов Луны и Солнца равна 90 или 270° и проекция лунно-солнечной силы полусуточного периода на любое направление равна разности проекций лунной и солнечной сил. Таким образом, в сизиггиях лунно-солнечная сила полусуточного периода повсеместно представляет собой сумму, а в квадратурах — разность лунных и солнечных полусуточных сил. Вариация полусуточной лунно-солнечной приливообразующей силы обуславливает резкое изменение амплитуд полусуточного прилива с периодом, равным синодическому месяцу, обычно называемое полумесячным (или фазовым) неравенством.

Изменение склонений Луны и Солнца не влияет на направление проекций полусуточных и долгопериодных приливообразующих сил. Однако направление проекций суточных сил зависит от знака склонения светила. Поэтому лунно-солнечная приливообразующая сила суточного периода определяется не только разностью часовых углов Луны и Солнца, но и знаками склонений. При одноименных склонениях этих светил проекции суточной лунно-солнечной силы на любое направление равны в новолуние сумме, а в полнолуние — разности проекций лунной и солнечной силы суточного периода на это направление. При разноименных склонениях упомянутые проекции, наоборот, в новолуние равны разности, а в полнолуние — сумме проекций сил Луны и Солнца. Вследствие зависимости суточных приливообразующих сил от склонения светила суточная лунно-солнечная сила может иметь экстремальные значения не в новолуния и полнолуния, а в те моменты времени, когда склонение Луны достигает наибольших абсолютных значений. Эта сила может иметь даже нулевое значение, если Луна находится в плоскости земного экватора в дни весеннего и осеннего равноденствий.

Временной ход лунно-солнечных приливообразующих сил всех периодов отличается большой сложностью, что обуславливает сложный характер изменений приливных движений в Мировом океане и в других частях Земли.

1.7. ПРИЛИВООБРАЗУЮЩИЕ СИЛЫ ПЛАНЕТ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА СОЛНЦЕ

В табл. 7 приведены некоторые данные о планетах солнечной системы и приближенные значения сомножителей $\frac{3}{2}f \frac{MR}{a^3}$ приливообразующих сил, действующих на единицу массы и вызываемых планетами на поверхности Солнца (т. е. при $R = 6,96 \cdot 10^{10}$ см), когда каждая из них находится на среднем расстоянии от него. Видно, что приливообразующие силы Меркурия, Венеры, Земли, Юпитера, а также Сатурна резко превосходят силы Марса, Урана, Нептуна и Плутона. Поэтому, как отмечал еще Браун [34], при изучении приливов на Солнце достаточно учитывать действие приливообразующих сил первых пяти перечисленных планет.

Таблица 7

Данные о планетах солнечной системы и средние значения сомножителей приливообразующих сил, вызываемых ими на поверхности Солнца

Планета	Масса, г	Среднее расстояние от Солнца, 10^{13} см	Эксцентриситет орбиты	Период обращения вокруг Солнца, годы	Значение сомножителя приливообразующей силы, дин
Меркурий	$0,32 \cdot 10^{27}$	0,579	0,205 62	0,241	$1,18 \cdot 10^{-8}$
Венера	$4,86 \cdot 10^{27}$	1,081	0,006 80	0,615	$2,69 \cdot 10^{-8}$
Земля	$5,98 \cdot 10^{27}$	1,495	0,016 73	1,000	$1,23 \cdot 10^{-8}$
Марс	$0,64 \cdot 10^{27}$	2,278	0,093 36	1,881	$3,76 \cdot 10^{-10}$
Юпитер	$1,90 \cdot 10^{30}$	7,778	0,048 42	11,862	$2,80 \cdot 10^{-8}$
Сатурн	$5,68 \cdot 10^{29}$	14,261	0,055 72	29,457	$1,30 \cdot 10^{-9}$
Уран	$8,73 \cdot 10^{28}$	28,691	0,047 18	84,015	$2,56 \cdot 10^{-11}$
Нептун	$1,03 \cdot 10^{29}$	44,957	0,008 57	164,782	$7,86 \cdot 10^{-12}$
Плутон	$5,5 \cdot 10^{27}$	59,05	0,248 64	249,73	$1,87 \cdot 10^{-13}$

Приливообразующая сила (F), вызываемая совместным действием Меркурия, Венеры, Земли, Юпитера и Сатурна, определяется формулой

$$F = F_{M.p} + F_{M.c} + F_{M.d} + F_{B.p} + F_{B.c} + F_{B.d} + F_{Z.p} + F_{Z.c} + F_{Z.d} + F_{Y.p} + F_{Y.c} + F_{Y.d} + F_{C.p} + F_{C.c} + F_{C.d},$$

в которой первые буквы индексов при составляющих силы означают названия планет, а вторые, как и ранее, — главные периоды изменения составляющих. Очевидно, что рассматриваемая сила

изменяется во времени по еще более сложному закону, чем лунно-солнечная приливообразующая сила, действующая на Землю. Это объясняется не только тем, что она вызывается действием пяти, а не двух светил. Как известно, угловая скорость вращения отдельных зон Солнца вокруг оси неодинакова. Поэтому и полусуточные, и суточные компоненты приливообразующей силы любой планеты, действующие на части Солнца, расположенные на разных гелиографических широтах, изменяются во времени с различными периодами. Упомянутая угловая скорость (ω) равна

$$\omega = (14,4 - 2,7 \sin^2 B) \text{ град/сут},$$

из-за чего период вращения экваториальной части Солнца, равный 25 суткам, почти на 6 суток меньше, чем период вращения его близполюсных зон. Однако хорошо известные в настоящее время закономерности движения планет и вращения поверхностного слоя Солнца вокруг оси дают возможность определять действующую на него приливообразующую силу любой планеты с высокой точностью.

Для вычисления приливообразующих сил планет в отдельные моменты времени удобно использовать приведенные в табл. 8—12 значения сомножителей $\frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3}$ для различных расстояний планет от Солнца, выраженных в астрономических единицах (а. е.).

Таблица 8
Значения сомножителя $\frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3}$ приливообразующей силы Меркурия, действующей на поверхностный слой Солнца (в 10^8 дин)

d а. е.	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
0,300								2,33	2,30	2,28
0,310	2,26	2,24	2,22	2,20	2,18	2,16	2,14	2,12	2,10	2,08
0,320	2,06	2,04	2,02	2,00	1,99	1,97	1,95	1,93	1,92	1,90
0,330	1,88	1,87	1,85	1,84	1,82	1,81	1,79	1,78	1,76	1,74
0,340	1,72	1,71	1,69	1,68	1,66	1,65	1,63	1,62	1,60	1,59
0,350	1,57	1,56	1,55	1,53	1,52	1,51	1,50	1,48	1,47	1,46
0,360	1,45	1,43	1,42	1,41	1,40	1,39	1,37	1,36	1,35	1,34
0,370	1,33	1,32	1,31	1,30	1,29	1,28	1,27	1,26	1,25	1,24
0,380	1,23	1,22	1,21	1,20	1,19	1,18	1,17	1,16	1,15	1,14
0,390	1,14	1,13	1,12	1,11	1,10	1,09	1,08	1,07	1,06	1,05
0,400	1,05	1,04	1,03	1,03	1,02	1,01	1,01	1,00	0,99	0,99
0,410	0,98	0,97	0,96	0,96	0,95	0,94	0,94	0,93	0,92	0,92
0,420	0,91	0,90	0,90	0,89	0,88	0,88	0,87	0,86	0,86	0,85
0,430	0,85	0,84	0,83	0,83	0,82	0,81	0,81	0,80	0,80	0,79
0,440	0,79	0,78	0,77	0,77	0,76	0,76	0,75	0,75	0,75	0,74
0,450	0,74	0,73	0,73	0,72	0,72	0,71	0,71	0,70	0,70	0,69
0,460	0,69	0,68	0,68	0,67	0,67	0,66	0,66	0,66	0,66	

Таблица 9

Значения сомножителя $\frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3}$ приливообразующей силы Венеры, действующей на поверхностный слой Солнца (в 10^8 дин)

d а. е.	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
0,710									2,74	2,72
0,720	2,71	2,69	2,68	2,67	2,66	2,65	2,64	2,63	2,62	

Таблица 10

Значения сомножителя $\frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3}$ приливообразующей силы Земли, действующей на поверхностный слой Солнца (в 10^8 дин)

d а. е.	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
0,980			1,31	1,31	1,31	1,30	1,30	1,29	1,29	1,29
0,990	1,28	1,28	1,27	1,27	1,27	1,26	1,26	1,25	1,25	1,25
1,000	1,24	1,24	1,24	1,23	1,23	1,22	1,22	1,22	1,21	1,21
1,010	1,21	1,20	1,20	1,20	1,19	1,19	1,18	1,18		

Таблица 11

Значения сомножителя $\frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3}$ приливообразующей силы Юпитера, действующей на поверхностный слой Солнца (в 10^8 дин)

d а. е.	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
4,90					3,28	3,26	3,24	3,22	3,20	3,18
5,00	3,16	3,14	3,12	3,11	3,09	3,07	3,05	3,03	3,02	3,00
5,10	2,98	2,96	2,95	2,93	2,91	2,90	2,88	2,86	2,84	2,83
5,20	2,81	2,80	2,78	2,76	2,75	2,73	2,72	2,70	2,69	2,67
5,30	2,66	2,64	2,63	2,61	2,60	2,58	2,57	2,55	2,54	2,52
5,40	2,51	2,50	2,48	2,47	2,46	2,44	2,43			

Приведенные числа показывают, что сомножители $\frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3}$ приливообразующих сил планет, действующих на поверхностный слой Солнца, примерно в тысячу раз меньше аналогичных сомножителей приливообразующих сил Солнца и Луны, действующих на поверхностный слой Земли.

Определение действующих на Солнце приливообразующих сил планет солнечной системы с помощью формул (17) — (19)

Таблица 12

Значения сомножителя $\frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3}$ приливообразующей силы Сатурна, действующей на поверхностный слой Солнца (в 10^9 дин)

d а. е.	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
9,00	1,62	1,62	1,61	1,61	1,60	1,60	1,59	1,58	1,58	1,57
9,10	1,57	1,56	1,56	1,55	1,55	1,54	1,54	1,53	1,53	1,52
9,20	1,52	1,51	1,51	1,50	1,50	1,49	1,49	1,48	1,48	1,47
9,30	1,47	1,46	1,46	1,46	1,45	1,45	1,44	1,44	1,43	1,43
9,40	1,42	1,42	1,41	1,41	1,40	1,40	1,40	1,39	1,39	1,38
9,50	1,38	1,37	1,37	1,37	1,36	1,36	1,35	1,35	1,34	1,34
9,60	1,34	1,33	1,33	1,32	1,32	1,32	1,31	1,31	1,30	1,30
9,70	1,30	1,29	1,29	1,28	1,28	1,28	1,27	1,27	1,26	1,26
9,80	1,26	1,25	1,25	1,24	1,24	1,24	1,23	1,23	1,23	1,22
9,90	1,22	1,22	1,21	1,21	1,20	1,20	1,20	1,19	1,19	1,19
10,00	1,18	1,18	1,18	1,17	1,17	1,16	1,16	1,16	1,15	

затрудняется тем, что в астрономических таблицах не приводится гелиоцентрическое склонение планет. В важнейших астрономических источниках [35 и др.] приводятся расстояния между центрами Солнца и планет и гелиоцентрические долготы и широты планет (l и β) в эклиптической системе координат, в которой главной плоскостью является плоскость орбиты Земли. В этой системе координат орбита Земли (эклиптика) представляет собой большой круг сферы, центр которой совпадает с центром Солнца. Прямая, проходящая через центр сферы и перпендикулярная плоскости орбиты Земли, пересекается со сферой в точках, называемых северным и южным полюсами эклиптики. Меридианы на рассматриваемой сфере называются кругами широты. Гелиоцентрическая долгота светила измеряется дугой эклиптики, заключенной между точкой весеннего равноденствия и точкой пересечения эклиптики с кругом широты, на котором находится светило, или соответствующим этой дуге центральным углом. Она отсчитывается от точки весеннего равноденствия к востоку от 0 до 360° . Гелиоцентрическая широта светила измеряется дугой круга широты, заключенной между точкой пересечения его с эклипкой и светилом, или центральным углом, соответствующим этой дуге. Она отсчитывается в северном и южном направлениях от точки пересечения круга широты светила с эклипкой от 0 до 90° и от 0 до -90° .

Линия пересечения плоскости орбиты какой-либо планеты с плоскостью эклиптики называется линией узлов, а точки пересечения этой линии с эклипкой — восходящим и нисходящим узлами орбиты. Плоскость экватора Солнца наклонена к плоскости эклиптики под углом I , приблизительно равным $7^\circ 15'$. Восходящий узел экватора Солнца имеет гелиоцентрическую

долготу Ω , которая определяется формулой $\Omega = 73^\circ 40' + 50,25'' \times (N - 1850)$, где N — число равное порядковому номеру данного года.

Вследствие сложной зависимости гелиографической широты планет от их гелиоцентрических долгот и широт и от углов I и Ω М. Трелли [46] заменил ее в формуле статического прилива (а следовательно, и в формулах приливообразующих сил) другими астрономическими параметрами. Однако исследование приливов на Солнце, как и на других небесных телах, гораздо удобнее выполнять, используя обычные формулы приливообразующих сил, в которые входит гелиографическая широта (т. е. склонение) планеты. Ниже излагается способ определения гелиографических широт планет по их гелиоцентрическим долготам.

На рис. 24 а изображены небесная сфера $C_N S C_S T$ с северным и южным полюсами эклиптики C_N и C_S и с центром в точке O , совпадающим с центром Солнца; плоскость эклиптики $SMTN$; плоскость экватора Солнца $MENF$; плоскость орбиты планеты $S_1 M_1 T_1 N_1$; точка весеннего равноденствия Υ , от которой отсчитываются гелиоцентрические долготы. Проходящие через центр Солнца прямые MN и $M_1 N_1$ представляют собой линии пересечения плоскости эклиптики с плоскостями экватора Солнца и орбиты планеты. Пусть рассматриваемая планета находится в точке A . Проведем через эту точку прямую, перпендикулярную плоскости эклиптики, и обозначим точки пересечения прямой с плоскостями эклиптики и солнечного экватора через B и D . Опустим из точки A перпендикуляр AC на плоскость солнечного экватора и соединим лежащие в ней точки C и D между собой и с центром Солнца O .

Гелиоцентрическая долгота (l) и широта (β) планеты измеряются углами ΥOB и AOB , а долгота восходящего узла солнечного экватора (Ω) — углом ΥOM . Искомый параметр — гелиографическая широта планеты ($-B$) измеряется углом AOC . Углы ACO , ACD и DBO — прямые, так как отрезок AC перпендикулярен плоскости $MENF$, а отрезок BD — плоскости $SMTN$. Угол CAD равен углу (I) наклона плоскости экватора Солнца к плоскости эклиптики как угол между перпендикулярами AC и BD к этим плоскостям. Вспомогательный угол DOB обозначен через γ .

Для установления зависимости между углами $-B$, β , I и γ рассмотрим изображенные для наглядности на отдельном рис. 24 б пирамиду $OCDA$ и треугольник OAB , расположенный в плоскости ее грани ODA . Из прямоугольного треугольника ACO следует, что $\sin(-B) = AC/AO$. Поэтому для решения задачи необходимо найти отрезки AC и AO .

Обозначим отрезок OB через a . Из прямоугольных треугольников DBO и ABO следует, что $BD = a \operatorname{tg} \gamma$ и $BA = a \operatorname{tg} \beta$. Отсюда $AD = BD - BA = a(\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \beta)$. В прямоугольном треугольнике ACD $AC/AD = \cos I$. Следовательно, $AC =$

$= AD \cos I = a (\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \beta) \cos I$. В прямоугольном треугольнике ABO $AO = OB / \cos \beta = a / \cos \beta$. Таким образом,

$$\sin(-B) = \frac{a (\operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \beta) \cos I}{a / \cos \beta} = (\operatorname{tg} \gamma \cos \beta - \sin \beta) \cos I. \quad (57)$$

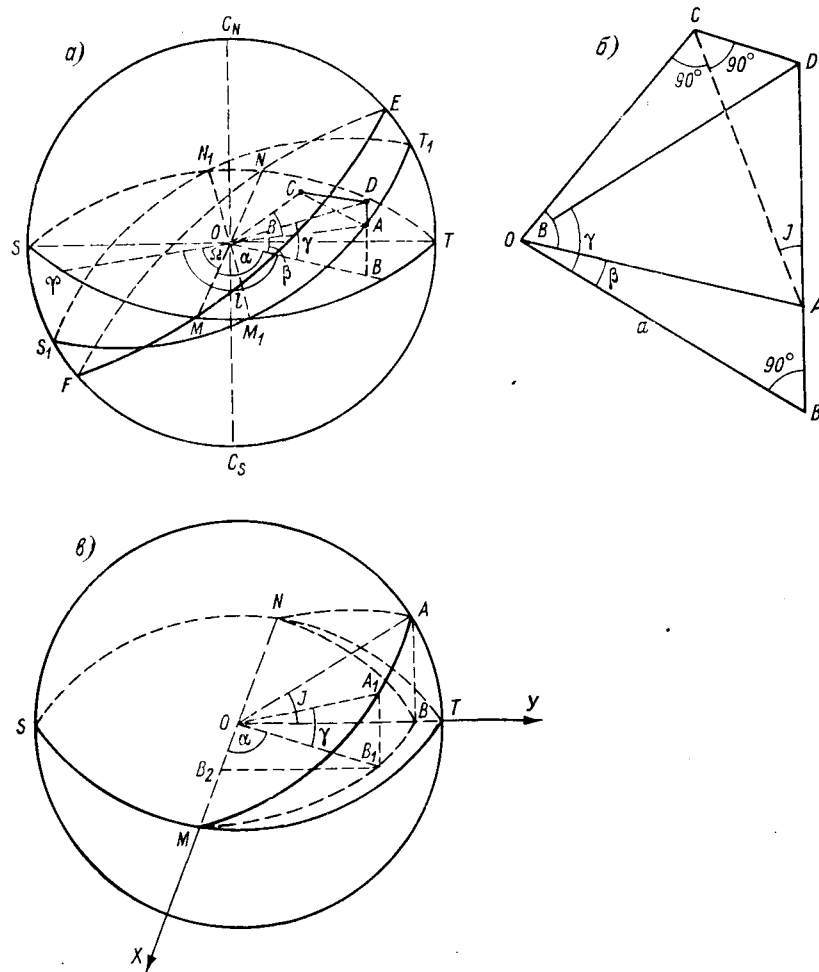


Рис. 24. Система плоскостей и углов для определения гелиографических широт планет. (угол B — отрицательный).

Вспомогательный угол γ можно выразить через параметры I , i и Ω . На рис. 24 a изображены небесная сфера радиуса R , плоскость эклиптики $SMTN$ и плоскость солнечного экватора, наклоненная к плоскости эклиптики под углом I . Проекция

экватора Солнца на плоскость эклиптики представляет собой эллипс с полуосями a и b . Поскольку $a = R$ и $b = R \cos I$, каноническое уравнение этого эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2 \cos^2 I} = 1 \text{ или } x^2 \cos^2 I + y^2 = R^2 \cos^2 I.$$

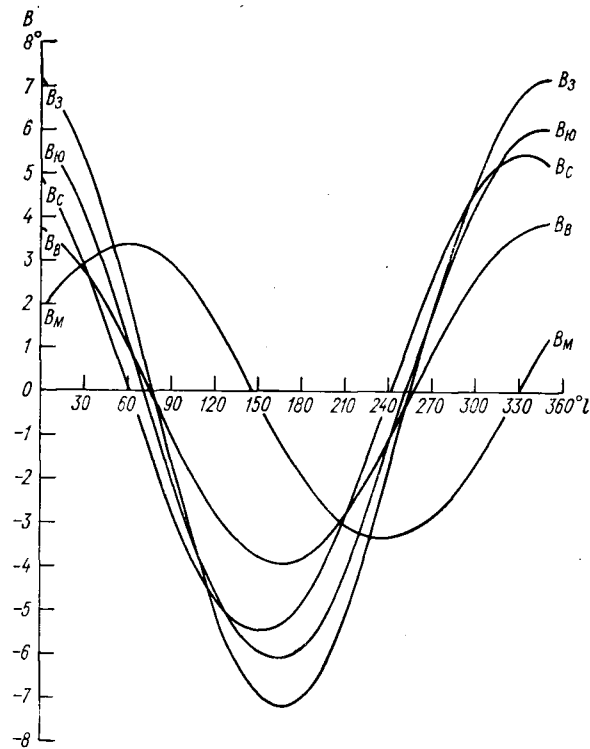


Рис. 25. Гелиографические широты (B_M , B_V , B_Z , B_J , B_S) Меркурия, Венеры, Земли Юпитера и Сатурна при различных гелиоцентрических долготах этих планет.

Из прямоугольного треугольника A_1B_1O , в котором угол A_1OB_1 соответствует вспомогательному углу γ в формуле (57), следует, что $OB_1^2 = R^2 \cos^2 \gamma$. Но с другой стороны, $OB_1^2 = x^2 + y^2$, а потому $x^2 + y^2 = R^2 \cos^2 \gamma$. Вычитая это уравнение из преобразованного канонического уравнения эллипса, получаем $x^2 \cos^2 I - x^2 = R^2 \cos^2 I - R^2 \cos^2 \gamma$, откуда

$$x^2 = - \frac{R^2 (\cos^2 I - \cos^2 \gamma)}{\sin^2 I}.$$

Опустим из точки B_1 перпендикуляр B_1B_2 на ось X и обозначим угол B_1OB_2 (т. е. угол, равный разности гелиоцентрических долгот планеты и восходящего узла экватора Солнца) через α . В прямоугольном треугольнике B_1B_2O $OB_2/OB_1 = \cos \alpha$. Но $OB_2^2 = x^2$, а $OB_1^2 = x^2 + y^2 = R^2 \cos^2 \gamma$ и, таким образом,

$$\cos^2 \alpha = \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \frac{R^2 (\cos^2 I - \cos^2 \gamma)}{R^2 \cos^2 \gamma \sin^2 I} = \frac{\cos^2 \gamma - \cos^2 I}{\cos^2 \gamma \sin^2 I}.$$

Отсюда

$$\cos^2 \gamma = \frac{\cos^2 I}{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 I}, \quad \sin^2 \gamma = \frac{\sin^2 I \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 I}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} I \sin \alpha.$$

Из рис. 24 *в* видно, что $\alpha = l - \Omega$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma &= \operatorname{tg} I \sin(l - \Omega) \quad \text{и} \quad \sin B = (\sin \beta - \cos \beta \operatorname{tg} \gamma) \cos I = \\ &= \sin \beta \cos I - \cos \beta \sin I \sin(l - \Omega). \end{aligned}$$

Положим, что на рис. 24 *в* плоскость MAN представляет собой плоскость орбиты планеты, наклоненную к плоскости эклиптики под углом i . Тогда изображенному на этом рисунке углу γ будет соответствовать гелиоцентрическая широта планеты, а угол α будет определяться соотношением $\alpha = l - \Omega_p$, в котором Ω_p — долгота ее восходящего узла. Очевидно, что

$$\cos^2 \beta = \frac{\cos^2 i}{1 - \sin^2 i \cos^2(l - \Omega_p)} \quad \text{и} \quad \sin^2 \beta = \frac{\sin^2 i \sin^2(l - \Omega_p)}{1 - \sin^2 i \cos^2(l - \Omega_p)},$$

откуда

$$\cos \beta = \frac{\cos i}{\sqrt{1 - \sin^2 i \cos^2(l - \Omega_p)}} \quad \text{и} \quad \sin \beta = \frac{\sin i \sin(l - \Omega_p)}{\sqrt{1 - \sin^2 i \cos^2(l - \Omega_p)}}.$$

Следовательно,

$$\sin B = \frac{\sin i \cos I \sin(l - \Omega_p) - \cos i \sin I \sin(l - \Omega)}{\sqrt{1 - \sin^2 i \cos^2(l - \Omega_p)}}. \quad (58)$$

Как известно, углы наклона орбит планет и плоскости экватора Солнца к плоскости эклиптики, а также долготы восходящих узлов этих орбит и солнечного экватора изменяются во времени медленно. Поэтому при определении гелиографических широт (B) планет в отдельные моменты какого-либо десятилетия эти величины можно считать постоянными. Таким образом, во время отдельной эпохи гелиографическая широта планеты может быть представлена как функция только одного аргумента — гелиоцентрической долготы планеты. Это существенно облегчает вычисление гелиографических широт планет и их функций $\cos^2 B$, $\sin 2B$, $1 - 3 \sin^2 B$, являющихся сомножителями полусуточных, суточных и долгопериодных компонентов приливов, действующих на Солнце, в отдельные моменты времени.

Исследование формулы (58) позволяет найти долготы (l_0 и l_3), при которых гелиографическая широта планеты имеет нулевые и экстремальные значения. Так, формула, определяющая долготу, при которой $B = 0$, выводится путем преобразования соотношения

$$\frac{\sin i \cos I \sin (l_0 - \Omega_p) - \cos i \sin I \sin (l_0 - \Omega)}{\sqrt{1 - \sin^2 i \cos^2 (l_0 - \Omega_p)}} = 0.$$

Поскольку у всех планет $i < 90^\circ$, выражение $\sqrt{1 - \sin^2 i \cos^2 (l_0 - \Omega_p)}$ никогда не равно нулю. Поэтому искомая долгота определяется соотношением $\sin i \cos I \sin (l_0 - \Omega_p) - \cos i \sin I \sin (l_0 - \Omega) = 0$. Из этого соотношения следует, что

$$l_0 = \arctg \frac{\tg i \sin \Omega_p - \tg I \sin \Omega}{\tg i \cos \Omega_p - \tg I \cos \Omega}. \quad (59)$$

Долготы l_3 , при которых склонения планет имеют экстремальные значения, равны значениям l , получаемым путем решения уравнения

$$\left[\frac{\sin i \cos I \sin (l - \Omega_p) - \cos i \sin I \sin (l - \Omega)}{\sqrt{1 - \sin^2 i \cos^2 (l - \Omega_p)}} \right]' = 0.$$

Формула, определяющая эти долготы, имеет вид

$$l_3 = \arctg \frac{[\cos i + \sin i \tg I \cos (\Omega_p - \Omega)] \sin i \cos \Omega_p - \tg I \cos \Omega}{-[\cos i + \sin i \tg I \cos (\Omega_p - \Omega)] \sin i \sin \Omega_p + \tg I \sin \Omega}. \quad (60)$$

Вычисления, выполненные по формулам (59 и 60), показали, что разности между значениями l_0 в 1970 и 1930 гг. и разности между значениями l_3 в 1970 и 1930 гг. у Меркурия, Венеры, Земли, Юпитера и Сатурна не достигают 1° . В табл. 13 приведены значения гелиоцентрических долгот этих планет, при которых в 1970 г. широты B равны нулю и экстремальны, значения экстремальных гелиографических широт и соответствующие им значения функций $\cos^2 B$, $\sin 2B$ и $1 - 3 \sin^2 B$.

Видно, что экстремальные широты всех рассматриваемых планет невелики, а потому при всех возможных широтах значения функций $\cos^2 B$ и $1 - 3 \sin^2 B$, являющихся сомножителями полусуточных и долгопериодных компонентов приливообразующих сил, близки к единице и во много раз превосходят значения функции $\sin 2B$, которая представляет собой сомножитель компонентов приливообразующих сил суточного периода.

Гелиографические широты пяти планет, вычисленные с помощью формулы (58) по данным о долготах восходящих узлов орбит планет и экватора Солнца и углах наклона их к плоскости эклиптики в 1970 г., при всех значениях гелиоцентрических долгот показаны на рис. 25. Знание их позволило составить таблицы, с помощью которых можно находить значения функций $\cos^2 B$, $\sin 2B$ и $1 - 3 \sin^2 B$ в отдельные моменты времени по

Таблица 13

Некоторые характеристики орбит планет и значения функций $\cos^2 B$, $\sin 2B$ и $1 - 3 \sin^2 B$ при экстремальных гелиоцентрических склонениях в 1970 г.

Планеты	i	φ_p	t_0	t_3	B_3	$\cos^2 B_3$	$\sin 2B_3$	$1 - 3 \sin^2 B_3$
Меркурий	7°00'14"	47°58'	147,5° 327,5	57,5 237,5	3,4° -3,4	0,9964 0,9964	0,1184 -0,1184	0,9892 0,9892
Венера	3 23 38	76 25	74,5 254,5	164,5 344,5	-3,9 3,9	0,9954 0,9954	-0,1357 0,1357	0,9862 0,9862
Земля	0 00 00	—	75,3 255,3	165,3 345,3	-7,25 7,25	0,9841 0,9841	-0,2504 0,2504	0,9523 0,9523
Юпитер	1 18 22	100°09'	70,2 250,2	160,2 340,2	-6,1 6,1	0,9886 0,9886	-0,2113 0,2113	0,9658 0,9658
Сатурн	2 29 28	113 24	59,3 239,3	149,3 329,3	-5,5 5,5	0,9908 0,9908	-0,1908 0,1908	0,9724 0,9724

данным о гелиоцентрических долготах планет в эти моменты. В качестве примера ниже приведены средние значения $\cos^2 B$ в различных диапазонах гелиоцентрических долгот Меркурия, Венеры, Земли, Юпитера и Сатурна:

Меркурий и Венера		Юпитер	
l	$\cos^2 B$	l	$\cos^2 B$
0—360°	1,00	0—28°	0,99
		29—112	1,00
		113—208	0,99
		209—292	1,00
		293—360	0,99
Земля		Сатурн	
0—41°	0,99	0—11°	0,99
42—109	1,00	12—107	1,00
110—151	0,99	108—191	0,99
152—179	0,98	192—287	1,00
180—221	0,99	288—360	0,99
222—289	1,00		
290—331	0,99		
332—359	0,98		

Используя такие таблицы и табл. 8—12, можно находить амплитуды действующих на Солнце полусуточных, суточных и долгопериодных приливообразующих сил пяти рассматриваемых планет без выполнения громоздких вычислений.

В связи с тем, что угловая скорость вращения всех частей Солнца вокруг оси гораздо больше, чем угловые скорости обращения Сатурна, Юпитера, Земли, Венеры, а также Меркурия, главной причиной изменения часовых углов планет является не их обращение, а вращение Солнца.

ГЛАВА 2. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ, ВЫЗЫВАЕМОЕ ПРИЛИВООБРАЗУЮЩЕЙ СИЛОЙ.

Приливные движения, как и все механические движения в природе, описываются тремя законами механики, сформулированными Ньютоном [43]:

Закон I. Всякое тело продолжает сохранять свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока и поскольку оно не принуждается приложенными силами изменить это состояние.

Закон II. Изменение движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

*Закон III. Действие всегда встречает равное противодействие, или воздействия двух тел друг на друга между собой равны и направлены в противоположные стороны.**

Согласно второму закону, ускорение (a), приобретаемое любой частицей с массой m , совершающей приливное движение, определяется формулой

$$a = \frac{\sum F}{m}, \quad (61)$$

в которой $\sum F$ означает векторную сумму всех сил, под действием которых происходит это движение.

Рассмотрим движение частицы, происходящее под действием одной только приливообразующей силы. В соответствии с формулой (61), ускорения $a_{п.п.}$, $a_{м.п.}$, $a_{в.п.}$, $a_{п.с.}$, $a_{м.с.}$, $a_{в.с.}$, $a_{м.д.}$ и $a_{в.д.}$, вызываемые полусуточными, суточными и долгопериодными компонентами проекций приливообразующей силы на параллель, меридиан и вертикаль, равны

$$a_{п.п.} = F_n \cos \varphi \sin 2(nt - \lambda), \quad a_{м.п.} = -\frac{1}{2} F_n \sin 2\varphi \cos 2(nt - \lambda).$$

$$a_{в.п.} = F_n \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda), \quad a_{п.с.} = F_c \sin \varphi \sin (nt - \lambda),$$

$$a_{м.с.} = F_c \cos 2\varphi \cos (nt - \lambda), \quad a_{в.с.} = F_c \sin 2\varphi \cos (nt - \lambda),$$

$$a_{м.д.} = -\frac{3}{4} f \frac{Mr}{d^3} (1 - 3 \sin^2 \delta) \sin 2\varphi,$$

$$a_{в.д.} = \frac{3}{2} f \frac{Mr}{d^3} (1 - 3 \sin^2 \delta) \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right).$$

Согласно теории гармонического анализа, долгопериодный компонент ($F_{м.д.}$) проекции приливообразующей силы на меридиан

* Приведенное изложение законов Ньютона на русском языке, представляющее весьма точным, заимствовано из работы Я. Г. Дорфмана «Всемирная история физики с древнейших времен до конца XVIII века» [11].

диан можно представить как сумму слагаемых, каждое из которых ($F_{м. ч. д.}$) имеет вид $F_{м. ч. д.} = -F_{ч. д.} \sin 2\varphi \cos (mt - \psi)$, где $F_{ч. д.}$ — его не зависящая от времени амплитуда, m — циклическая частота изменения во времени, а ψ — фаза, не зависящая ни от времени, ни от географической долготы. Точно так же долгопериодный компонент ($F_{в. д.}$) проекции приливообразующей силы на вертикаль можно представить в качестве суммы слагаемых, каждое из которых ($F_{в. ч. д.}$) имеет вид $F_{в. ч. д.} = 2F_{ч. д.} \times \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi\right) \cos (mt - \psi)$. Естественно, что $F_{м. ч. д.}/F_{м. д.} = F_{в. ч. д.}/F_{в. д.}$ и что реальное долгопериодное приливное движение представляет собой сумму частных долгопериодных движений, каждое из которых вызывается действием слагаемых $F_{м. ч. д.}$ и $F_{в. ч. д.}$. Ускорения $a_{м. ч. д.}$ и $a_{в. ч. д.}$ частицы в направлениях меридиана и вертикали, вызываемые векторами $F_{м. ч. д.}$ и $F_{в. ч. д.}$, равны

$$a_{м. ч. д.} = -F_{ч. д.} \sin 2\varphi \cos (mt - \psi),$$

$$a_{в. ч. д.} = 2F_{ч. д.} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi\right) \cos (mt - \psi).$$

Будем считать амплитуды $F_{п.}$ и $F_{с.}$ полусуточных и суточных компонентов приливообразующей силы неизменными во времени. Дважды интегрируя по времени приведенные формулы ускорений частиц, найдем смещения ($S_{п. п.}$, $S_{м. п.}$, $S_{в. п.}$, $S_{п. с.}$, $S_{м. с.}$, $S_{в. с.}$, $S_{м. ч. д.}$, $S_{в. ч. д.}$) частиц, совершающих полусуточные, суточные и частные долгопериодные приливные движения в направлениях параллелей, меридианов и вертикалей*:

$$s_{п. п.} = \iint F_{п.} \cos \varphi \sin 2(nt - \lambda) dt = -\frac{F_{п.}}{4n^2} \cos \varphi \sin 2(nt - \lambda); \quad (62)$$

$$s_{м. п.} = \iint -\frac{1}{2} F_{п.} \sin 2\varphi \cos 2(nt - \lambda) dt = -\frac{F_{п.}}{8n^2} \sin 2\varphi \cos 2(nt - \lambda); \quad (63)$$

$$s_{в. п.} = \iint F_{п.} \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda) dt =$$

$$= -\frac{F_{п.}}{4n^2} \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda); \quad (64)$$

$$s_{п. с.} = \iint F_{с.} \sin \varphi \sin (nt - \lambda) dt = -\frac{F_{с.}}{n^2} \sin \varphi \sin (nt - \lambda); \quad (65)$$

* Выполняя эту процедуру, автор здесь и везде далее фактически полагает $a = \frac{dV}{dt} \approx \frac{\partial V}{\partial t}$, т. е. в соответствии с линейным приближением рассматривает только локальные инерционные ускорения и смещения, не учитывая конвективные ускорения. — Прим. ред.

$$s_{м. c} = \int \int F_c \cos 2\varphi \cos (nt - \lambda) dt = -\frac{F_c}{n^2} \cos 2\varphi \cos (nt - \lambda); \quad (66)$$

$$s_{в. c} = \int \int F_c \sin 2\varphi \cos (nt - \lambda) dt = -\frac{F_c}{n^2} \sin 2\varphi \cos (nt - \lambda); \quad (67)$$

$$\begin{aligned} s_{м. ч. д} &= \int \int -F_{ч. д} \sin 2\varphi \cos (mt - \psi) dt = \\ &= -\frac{F_{ч. д}}{m^2} \sin 2\varphi \cos (mt - \psi); \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} s_{в. ч. д} &= \int \int 2F_{ч. д} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos (mt - \psi) dt = \\ &= -\frac{2F_{ч. д}}{m^2} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos (mt - \psi). \end{aligned} \quad (69)$$

Выведенные формулы дают возможность исследовать траектории частиц, движущихся под действием полусуточной, суточной и частной долгопериодной составляющих приливообразующей силы. Для этого удобно рассмотреть проекции траекторий на три взаимно перпендикулярные плоскости: на горизонтальную плоскость, на плоскость, в которой лежат радиус небесного тела и касательная к параллели в точке, совпадающей с концом этого радиуса, и на плоскость меридиана. Вторая из перечисленных плоскостей в дальнейшем будет именоваться плоскостью, перпендикулярной меридиану. Расположение этих плоскостей показано на рис. 26.

Рассмотрим сначала движение частиц, вызываемое полусуточными компонентами приливообразующей силы. Согласно формулам (62) и (63), проекции траекторий частиц на горизонтальные плоскости представляют собой эллипсы с осями, ориентированными вдоль параллелей и меридианов, т. е. с зональной и меридианной осями. В системе координат, оси X и Y которой совпадают с только что названными направлениями, а центр — с точкой, в которой находилась частица в невозмущенном состоянии, смещение частицы в направлении параллели равно $x =$

$$= -\frac{F_n}{4n^2} \cos \varphi \sin 2T, \text{ откуда } \sin^2 2T = \frac{x^2}{\frac{1}{16n^4} F_n^2 \cos^2 \varphi}.$$

$$\begin{aligned} \text{Смещение частицы в направлении меридиана равно } y = \\ = \frac{F_n}{8n^2} \sin 2\varphi \cos 2T, \text{ откуда } \sin^2 2T = 1 - \frac{y^2}{\frac{1}{64n^4} F_n^2 \sin^2 2\varphi}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{x^2}{\frac{1}{16n^4} F_n^2 \cos^2 \varphi} + \frac{y^2}{\frac{1}{64n^4} F_n^2 \sin^2 2\varphi} = 1.$$

Таким образом, каноническое уравнение эллипса, представляющего собой проекцию траектории полусуточного приливного движения частицы на горизонтальную плоскость, имеет вид

$$\frac{x^2}{\frac{1}{16n^4} F_n^2 \cos^2 \varphi} + \frac{y^2}{\frac{1}{64n^4} F_n^2 \sin^2 2\varphi} = 1. \quad (70)$$

Отношение между длинами меридианных и зональных осей рассматриваемых эллипсов равно $|\sin \varphi|$. Следовательно, на всех

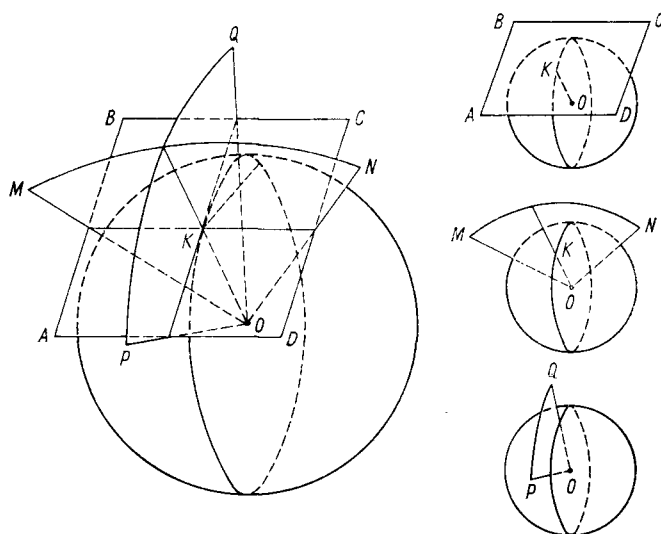


Рис. 26. Расположение трех взаимно перпендикулярных плоскостей ($ABCD$ — горизонтальная плоскость, OMN — плоскость, перпендикулярная меридиану, OPQ — плоскость меридиана).

широтах зональные оси длиннее меридианных. В окрестностях полюсов оси эллипсов становятся исчезающе малыми.

Согласно формулам (62) — (63), при изменении часового угла светила на 360° , т. е. за сутки, частица совершает два оборота. В северном полушарии при $T = 0^\circ$ она находится в северной точке орбиты, при $T = 45^\circ$ — в восточной, при $T = 90^\circ$ — в южной, при $T = 135^\circ$ — в западной, а при $T = 180^\circ$ — вновь в северной, в которой она была при $T = 0^\circ$. При значениях часового угла 225° , 270° и 315° частица находится в восточной, южной и западной точках орбиты, а при $T = 360^\circ$ снова возвращается в северную точку (рис. 27). Таким образом, обращение ее в горизонтальной плоскости происходит в направлении хода часовой стрелки.

В южном полушарии при $T = 0^\circ$ частица находится в южной точке орбиты, а при T , равном 45° , 90° и 135° , — в ее восточной,

северной и западной точках. В момент, когда часовой угол светила достигает 180° , частица вновь попадает в южную точку. При значениях часового угла, равных 225° , 270° и 315° , частица проходит соответственно восточную, северную и западную точки орбиты, а при $T = 360^\circ$ снова находится в южной точке. Таким образом, при изменении часового угла на 360° частица, как и в северном полушарии, совершает два оборота, однако она движется в направлении, противоположном ходу часовой стрелки (рис. 27).

Из формул (62—63) видно также, что траектории частиц, находящихся на экваторе, не имеют меридианных составляющих. Траектория каждой частицы представляет собой отрезок прямой, ориентированный вдоль экватора. В момент, когда $T = 0^\circ$, частица находится в середине отрезка, при $T = 45^\circ$ — в его восточной точке, при $T = 90^\circ$ — в середине отрезка, при $T = 135^\circ$ — в западной точке и при $T = 180^\circ$ — вновь в середине отрезка (рис. 27). В моменты, в которые часовой угол светила составляет 225° , 270° и 315° , частица находится соответственно в восточной точке отрезка, в его середине и в западной точке, а при $T = 360^\circ$ — снова в середине отрезка. Таким образом, при изменении часового угла на 360° каждая частица, находящаяся на экваторе, дважды проходит вдоль всего отрезка в прямом и обратном направлении.

Согласно формулам (62) — (64), проекции траекторий частиц на плоскости, перпендикулярные меридианам, также представляют собой эллипсы. Их оси ориентированы вдоль параллелей и вертикалей. В системе координат с осями X и Z , направленными вдоль параллели и вертикали, и с центром, совпадающим с точкой, в которой находится частица в невозмущенном состоянии, смещение (x) частицы в направлении параллели, как и в предыдущем случае, равно $x = -\frac{F_n}{4n^2} \cos \varphi \sin 2T$, откуда

$$\sin^2 2T = \frac{x^2}{\frac{1}{16n^4} F_n^2 \cos^2 \varphi}.$$

Смещение частицы в направлении вертикали равно

$$z = -\frac{F_n}{4n^2} \cos^2 \varphi \cos 2T,$$

откуда

$$\sin^2 2T = 1 - \frac{z^2}{\frac{1}{16n^4} F_n^2 \cos^4 \varphi}.$$

Следовательно, каноническое уравнение эллипса, представляющего собой проекцию траектории полусуточного приливного

движения частицы на плоскость, перпендикулярную меридиану, имеет вид

$$\frac{x^2}{\frac{1}{16n^4} F_{\Pi}^2 \cos^2 \varphi} + \frac{z^2}{\frac{1}{16n^4} F_{\Pi}^2 \cos^4 \varphi} = 1. \quad (71)$$

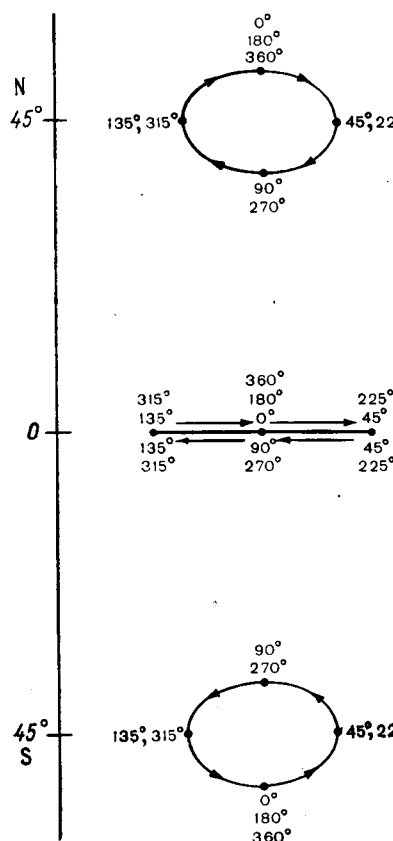


Рис. 27. Проекция траекторий частиц, движущихся под действием приливообразующих сил полусуточного периода, на горизонтальные плоскости.

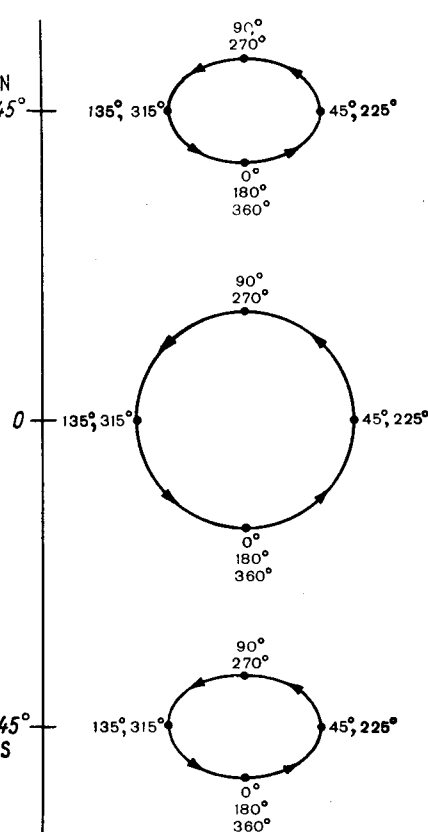


Рис. 28. Проекция траекторий частиц, движущихся под действием приливообразующих сил полусуточного периода, на плоскости, перпендикулярные меридианам.

Отношение между длинами вертикальных и зональных осей рассматриваемых эллипсов равно $\cos \varphi$. Таким образом, на всех широтах, кроме экватора, зональные оси длиннее вертикальных. В окрестностях полюсов и зональные, и вертикальные оси чрезвычайно малы. На экваторе же они имеют наибольшие и равные между собой значения, вследствие чего проекции траекторий частиц на рассматриваемую плоскость представляют собой окружности.

Согласно формулам (62) и (64), при изменении часового угла светила на 360° частица совершает два оборота. Как в северном, так и в южном полушарии в момент, когда часового угла светила равен 0° , частица находится в нижней точке орбиты (рис. 28). При T , равном 45, 90 и 135° , она находится соответственно в восточной, верхней и западной ее точках, а при $T = 180^\circ$ возвращается в нижнюю точку. При часовых углах, равных 225, 270, 315 и 360° , частица снова проходит восточную, верхнюю, западную и нижнюю точки орбиты. Повсеместно обращение частицы происходит в направлении, противоположном ходу часовой стрелки.

Согласно формулам (63), (64), проекции траекторий частиц на плоскости меридианов представляют собой отрезки прямых, направленных под различными углами к горизонту. В системе координат с осями Y и Z , проходящими вдоль меридиана и вертикали, и с центром, совпадающим с точкой, в которой частица находится в невозмущенном состоянии, смещения (y и z) частицы в направлениях меридиана и вертикали равны $y = \frac{F_n}{8n^2} \times$

$$\times \sin 2\varphi \cos 2T, z = -\frac{F_n}{4n^2} \cos^2 \varphi \cos 2T.$$

Из этих уравнений следует, что $\cos 2T = \frac{y}{\frac{1}{8n^2} F_n \sin 2\varphi}$,

$$\cos 2T = \frac{z}{\frac{1}{4n^2} F_n \cos^2 \varphi} \text{ и } \frac{y}{\frac{1}{8n^2} F_n \sin 2\varphi} = -\frac{z}{\frac{1}{4n^2} F_n \cos^2 \varphi}.$$

Таким образом, каноническое уравнение прямой, отрезок которой представляет собой проекцию на плоскость меридиана траектории частицы, совершающей полусуточное приливное движение, имеет вид

$$z = -y \operatorname{ctg} \varphi. \quad (72)$$

Угол наклона этой прямой к горизонтальной плоскости равен

$$k_n = \operatorname{arctg} \frac{z}{y} = \operatorname{arctg} (-\operatorname{ctg} \varphi) = 90^\circ + \varphi. \quad (73)$$

Согласно последней формуле, угол наклона проекций траекторий частиц на плоскость меридиана к горизонтальной плоскости составляет на экваторе 90° и убывает с широтой до 0° в окрестностях полюсов.

Из формул (63), (64) следует, что при часовом угле светила, равном 0° , в северном полушарии каждая частица находится в северной, нижней точке отрезка, являющегося ее траекторией (рис. 29). При $T = 45^\circ$ она находится в середине отрезка, а при $T = 90^\circ$ — в южной, верхней точке. Начиная с этого момента, частица движется в противоположном направлении и при $T =$

$= 135^\circ$ проходит середину отрезка, а при $T = 180^\circ$ возвращается в северную, нижнюю точку. При часовых углах 225, 270, 315 и 360° она находится в тех точках, в которых она была при часовых углах 45, 90, 135 и 180° . Таким образом, при изменении часового угла на 360° частица дважды проходит вдоль всего отрезка в прямом и обратном направлении.

В южном полушарии при нулевом значении часового угла светила частица находится в южной, нижней точке, при $T = 45^\circ$ — в середине отрезка, представляющего ее траекторию, при $T = 90^\circ$ — в северной, верхней точке, при $T = 135^\circ$ — в середине отрезка, а при $T = 180^\circ$ она возвращается в его южную,

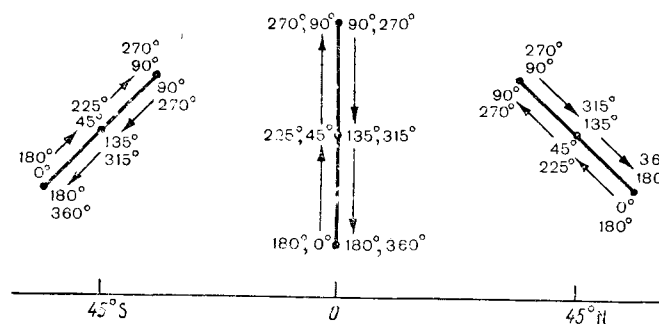


Рис. 29. Проекция траекторий частиц, движущихся под действием приливообразующих сил полусуточного периода, на плоскости меридианов.

нижнюю точку (рис. 29). Как и в северном полушарии, при изменении часового угла на 360° частица дважды проходит в прямом и обратном направлении вдоль всего отрезка, являющегося ее траекторией.

Как уже отмечалось, проекции траекторий частиц, находящихся на экваторе, на плоскости меридианов представляют собой отрезки вертикалей. При часовом угле светила, равном 0° , каждая частица находится в нижней точке отрезка. При часовых углах 45, 90, 135 и 180° она находится соответственно в середине отрезка, в верхней его точке, в середине и в нижней точке. В моменты, когда часовой угол равен 225, 270, 315 и 360° , она занимает положения, в которых была при часовых углах 45, 90, 135 и 180° и, таким образом, в течение суток дважды проходит весь отрезок в прямом и обратном направлениях.

Рассмотрим движения частиц, вызываемые суточными компонентами приливообразующей силы. Согласно формулам (65), (66), проекции траекторий частиц на горизонтальные плоскости представляют собой эллипсы с осями, направленными вдоль параллелей и меридианов. В системе координат, которая использовалась при исследовании проекций траекторий полусуточных

приливных движений на горизонтальную плоскость, смещение частицы в направлении параллели равно $x = -\frac{F_c}{n^2} \sin \varphi \sin T$,

откуда $x^2 = \frac{F_c^2}{n^4} \sin^2 \varphi \sin^2 T$ и $\sin^2 T = \frac{x^2}{\frac{1}{n^4} F_c^2 \sin^2 \varphi}$. Смещение

частицы в направлении меридиана равно $y = -\frac{F_c}{n^2} \cos 2\varphi \cos T$,

откуда $y^2 = \frac{F_c^2}{n^4} \cos^2 2\varphi \cos^2 T = \frac{F_c^2}{n^4} \cos^2 2\varphi (1 - \sin^2 T)$ и $\sin^2 T = 1 - \frac{y^2}{\frac{1}{n^4} F_c^2 \cos^2 2\varphi}$.

Следовательно, $\frac{x^2}{\frac{1}{n^4} F_c^2 \sin^2 \varphi} + \frac{y^2}{\frac{1}{n^4} F_c^2 \cos^2 2\varphi} = 1$.

Таким образом, каноническое уравнение эллипса, представляющего собой проекцию траектории суточного приливного движения частицы на горизонтальную плоскость, имеет вид

$$\frac{x^2}{\frac{1}{n^4} F_c^2 \sin^2 \varphi} + \frac{y^2}{\frac{1}{n^4} F_c^2 \cos^2 2\varphi} = 1. \quad (74)$$

Отношение между длинами меридианных и зональных осей рассматриваемых эллипсов равно $\left| \frac{\cos 2\varphi}{\sin \varphi} \right|$. Следовательно, проекции траекторий полусуточных движений частиц представляют собой на экваторе отрезки прямых, ориентированные вдоль меридианов; в области между широтами 30° N и 30° S — эллипсы, меридианные оси которых длиннее зональных; на только что упомянутых широтах, на которых $\left| \frac{\cos 2\varphi}{\sin \varphi} \right| = 1$, — окружности; в областях севернее 30° N и южнее 30° S — эллипсы, у которых зональные оси длиннее меридианных. В областях между 0 и 45° N и между 0 и 45° S при возрастании абсолютных значений широты меридианные оси убывают до нуля на широтах 45° N и 45° S . На этих широтах проекции траекторий суточных движений частиц на горизонтальные плоскости представляют собой отрезки прямых, ориентированных в зональном направлении. При дальнейшем возрастании абсолютных значений широты меридианные оси эллипсов увеличиваются, и у полюсов рассматриваемые проекции траекторий частиц становятся близкими к окружностям.

Как отмечалось ранее, в отличие от знаков амплитуд приливообразующих сил полусуточного и долгого периодов, знак амплитуды (F_c) суточной приливообразующей силы зависит от знака склонения вызывающего прилив светила. Вследствие этого при одних и тех же значениях часового угла, но разных

по знаку склонения светила частицы, совершающие суточные движения, находятся в различных точках орбит.

Рассмотрим сначала проекции суточных движений частиц на горизонтальные плоскости при положительном склонении вызывающего прилив светила. Согласно формулам (65), (66), в области небесного тела, расположенной севернее 45° N , при часовом угле, равном 0° , частица находится в северной точке орбиты, при $T = 90^\circ$ — в восточной, при $T = 180^\circ$ — в южной, при $T = 270^\circ$ — в западной, а при $T = 360^\circ$ частица возвращается в северную точку орбиты (рис. 30). Таким образом, за сутки каждая частица в указанной области тела совершает один оборот в направлении хода часовой стрелки. Движение частиц в области между экватором и широтой 45° S отличается от только что описанного лишь тем, что в моменты, когда T равно 0, 90, 180 и 270° , частица находится соответственно в южной, западной, северной и восточной точках орбиты, а при $T = 360^\circ$ — вновь в южной точке.

В области между экватором и 45° N при часовых углах светила 0, 90, 180, 270 и 360° частица находится в южной, восточной, северной, западной и южной точках орбиты и, таким образом, за сутки совершает один оборот в направлении, противоположном ходу часовой стрелки. В области южнее 45° S за сутки частица также совершает один оборот в только что названном направлении, но при перечисленных часовых углах светила находится соответственно в северной, западной, южной, восточной и северной точках орбиты.

Таким образом, во всех четырех областях небесного тела за сутки частица совершает один оборот, причем в областях севернее 45° N и между экватором и 45° S — в направлении хода часовой стрелки, а в областях между экватором и 45° N и южнее 45° S — в противоположном направлении.

Частицы, расположенные на широтах 45° N и 45° S , совершают прямолинейные движения в направлении параллелей. На широте 45° N при часовых углах 0, 90, 180, 270 и 360° частица находится соответственно в середине отрезка, являющегося ее траекторией, в восточной точке этого отрезка, в середине отрезка, в западной его точке и вновь в середине отрезка. На широте 45° S при перечисленных значениях часовых углов частица находится в середине отрезка, в западной его точке, в середине отрезка, в восточной точке и снова в его середине. Таким образом, частицы на широтах 45° N и 45° S за сутки один раз проходят вдоль отрезков, являющихся их траекториями, в прямом и обратном направлении.

Частицы, расположенные на экваторе, совершают прямолинейные движения в направлениях меридианов. При часовых углах светила, равных 0, 90, 180, 270 и 360° , каждая частица находится соответственно в южной точке отрезка, представляющего собой ее траекторию, в середине отрезка, в северной его

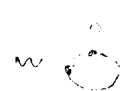


Рис. 30. Проекции траекторий частиц, движущихся под действием приливообразующих сил суточного периода, на горизонтальные плоскости.

точке, в середине отрезка и вновь в южной точке. В течение суток частица проходит вдоль всего отрезка в северном и южном направлении.

При отрицательном склонении вызывающего прилив светила частицы, расположенные в областях севернее 45° N , между экватором и 45° N , между экватором и 45° S и южнее 45° S , движутся точно так же, как и частицы при положительном склонении светила, находящиеся соответственно в областях между экватором и 45° S , южнее 45° S , севернее 45° N и между экватором и 45° N (рис. 30). Таким образом, знак склонения светила не влияет на направление вращательного движения частиц, но влияет на положение их на орбитах во все моменты времени.

Частицы, расположенные на широтах 45° N и 45° S , при отрицательном склонении светила совершают реверсивные движения вдоль параллелей, причем в каждый момент времени занимают на орбитах такие же положения, как и находящиеся соответственно на широтах 45° S и 45° N частицы при положительном склонении светила. На экваторе частицы совершают реверсивные движения в направлениях меридианов. При часовых углах светила $0, 90, 180, 270$ и 360° каждая из них находится в северной точке отрезка, являющегося ее траекторией, в середине отрезка, в южной его точке, в середине отрезка и в северной точке. Следовательно, суточные движения частиц на широтах 45° N , 45° S и на экваторе, происходящие при отрицательном склонении светила, отличаются от движений при его положительном склонении тем, что во все моменты времени частица перемещается в направлении, противоположном тому, в котором она перемещается при положительном склонении.

Перейдем к рассмотрению проекций траекторий частиц, совершающих суточные приливные движения, на плоскости, перпендикулярные меридианам. Из формул (65) и (67) следует, что эти проекции представляют собой эллипсы с осями, ориентированными вдоль параллелей и вертикалей. В системе координат, использованной ранее при исследовании проекций траекторий полусуточных движений частиц на упомянутые плоскости,

смещение частицы в направлении параллели равно $x = -\frac{F_c}{n^2} \times \sin \varphi \sin T$, а смещение частицы в вертикальном направлении равно $z = -\frac{F_c}{n^2} \sin 2\varphi \cos T$. Следовательно, $\sin^2 T = \frac{x^2}{\frac{1}{n^4} F_c^2 \sin^2 \varphi}$

$$\text{и } \sin^2 T = 1 - \frac{z^2}{\frac{1}{n^4} F_c^2 \sin^2 2\varphi}.$$

Таким образом, каноническое уравнение эллипса, представляющего собой проекцию траектории суточного движения

частицы на плоскость, перпендикулярную меридиану, имеет вид

$$\frac{x^2}{\frac{1}{n^4} F_c^2 \sin^2 \varphi} + \frac{z^2}{\frac{1}{n^4} F_c^2 \sin^2 2\varphi} = 1. \quad (75)$$

Отношение между длинами вертикальных и зональных осей рассматриваемых эллипсов равно $2 \cos \varphi$. Следовательно, на ши-

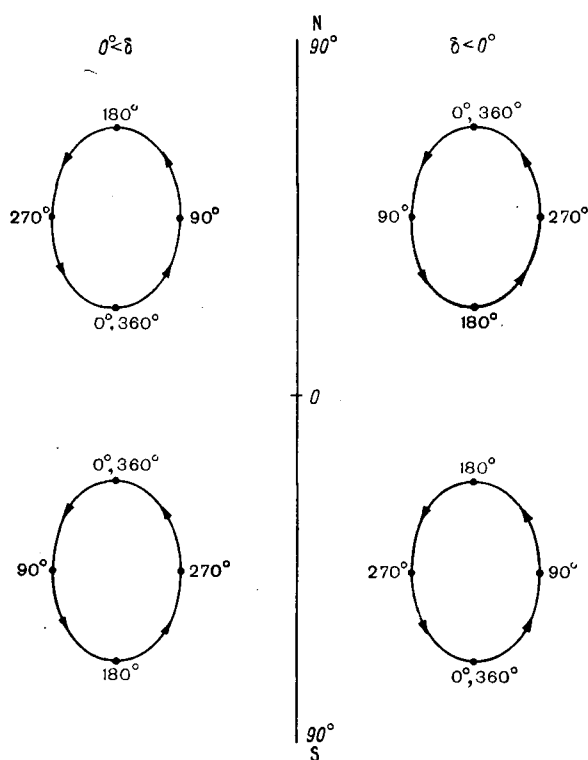


Рис. 31. Проекция траекторий частиц, движущихся под действием приливообразующих сил суточного периода, на плоскости, перпендикулярные меридианам.

ротах 60° N и 60° S вертикальные и зональные оси эллипсов равны между собой и проекции траекторий частиц на плоскости меридианов представляют собой окружности. В областях севернее 60° N и южнее 60° S зональные оси длиннее вертикальных, а в области между только что упомянутыми широтами, наоборот, короче их. На экваторе проекции траекторий суточных приливных движений на плоскости, перпендикулярные меридианам, равны нулю.

На рис. 31 показано установленное с помощью формул (65) и (67) движение частиц в северном и южном полушариях при разных знаках склонения светила. Видно, что за сутки частицы совершают один оборот, причем при любом знаке склонения они повсеместно обращаются в направлении, противоположном ходу часовой стрелки. При положительном склонении светила в моменты, когда часовой угол равен 0, 90, 180, 270 и 360°, каждая частица в северном полушарии находится соответственно в нижней, восточной, верхней, западной и нижней точках орбиты, а каждая частица в южном полушарии — в верхней, западной, нижней, восточной и верхней ее точках. При отрицательном склонении светила в указанные моменты времени частицы в северном и южном полушариях находятся в тех точках орбиты, в которых при положительном склонении светила находились частицы, расположенные соответственно в южном и северном полушариях небесного тела.

Рассмотрим проекции суточных приливных движений частиц на плоскости меридианов. Из формул (66) и (67) видно, что они представляют собой отрезки прямых, проходящих под разными углами к горизонту. В системе координат, использованной для изучения проекций полусуточных движений частиц на эти плоскости, смещения (y и z) частицы в направлениях меридиана и вертикали равны

$$y = -\frac{F_c}{n^2} \cos 2\varphi \cos T, \quad z = -\frac{F_c}{n^2} \sin 2\varphi \cos T,$$

откуда

$$\cos T = -\frac{y}{\frac{1}{n^2} F_c \cos 2\varphi}, \quad \cos T = -\frac{z}{\frac{1}{n^2} F_c \sin 2\varphi} \quad \text{и}$$

$$\frac{y}{\frac{1}{n^2} F_c \cos 2\varphi} = \frac{z}{\frac{1}{n^2} F_c \sin 2\varphi}.$$

Следовательно, каноническое уравнение прямой, отрезок которой является проекцией траектории частицы, совершающей суточное приливное движение, на плоскость меридиана, имеет вид

$$z = y \operatorname{tg} 2\varphi. \quad (76)$$

Угол (k_c) наклона этой прямой к плоскости горизонта определяется формулой

$$k_c = \operatorname{arctg} \frac{z}{y} = \operatorname{arctg} (\operatorname{tg} 2\varphi) = 2\varphi. \quad (77)$$

Из этой формулы следует, что углы между проекциями траекторий частиц на плоскости меридианов и горизонтальными плоскостями равны 0° на экваторе и полюсах и 90° на широтах 45° N и 45° S.

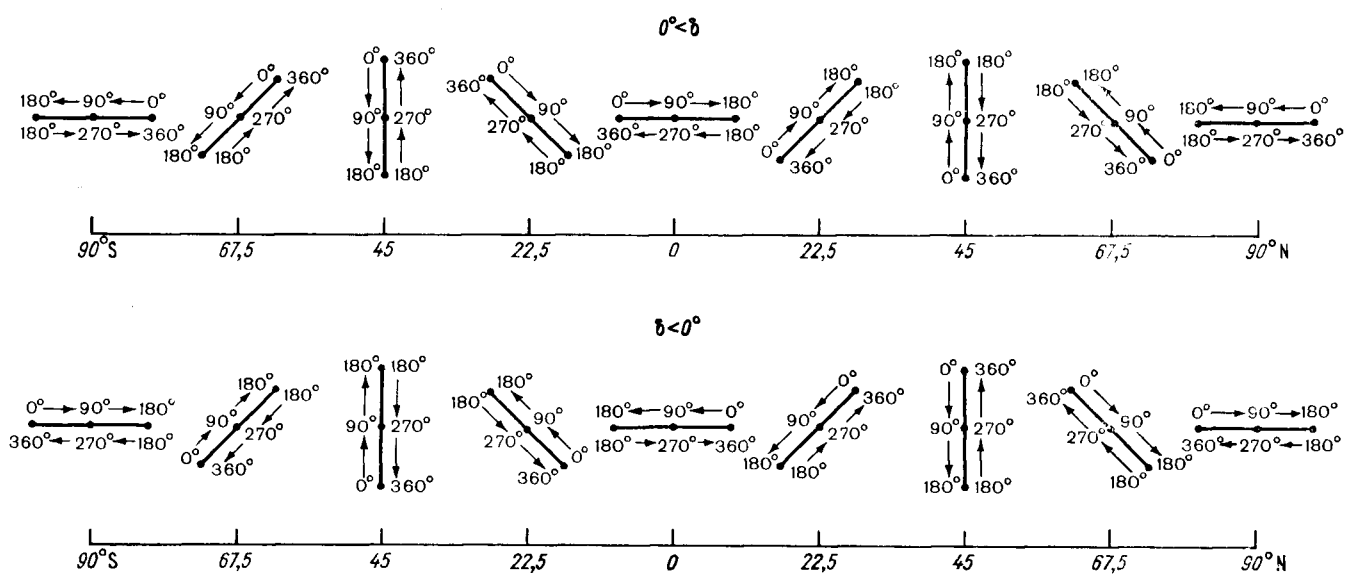


Рис. 32. Проекция траекторий частиц, движущихся под действием приливообразующих сил суточного периода, на плоскости меридианов.

На рис. 32 показано суточное движение частиц в различных частях небесного тела при положительном и отрицательном склонении светила, установленное с помощью формул (66), (67). Видно, что проекции траекторий частиц на плоскости меридианов представляют собой отрезки прямых, вдоль каждого из которых за сутки частица проходит один раз в прямом и обратном направлении. При положительном склонении светила и его часовых углах, равных 0, 90, 180, 270 и 360°, в области севернее 45° N она находится в северной, нижней точке отрезка, в середине отрезка, в южной, верхней точке, в середине отрезка и в северной, нижней точке; в области между экватором и 45° N — в южной, нижней точке, в середине отрезка, в северной, верхней точке, в середине отрезка и в южной, нижней точке; в области между экватором и 45° S — в южной, верхней точке, в середине отрезка, в северной, нижней точке, в середине отрезка и в южной, верхней точке; в области южнее 45° S — в северной, верхней точке, в середине отрезка, в южной, нижней точке, в середине отрезка и в северной, верхней точке. На широтах 45° N и 45° S проекции траекторий частиц представляют собой отрезки вертикалей. При часовых углах 0, 90, 180, 270 и 360° на широте 45° N частица находится соответственно в нижней точке отрезка, в середине его, в верхней точке, в середине отрезка и в его нижней точке, а на широте 45° S при тех же значениях часовых углов — в верхней точке отрезка, в его середине, в нижней точке, в середине отрезка и вновь в верхней точке. На экваторе и в окрестностях полюсов траектории частиц имеют вид отрезков прямых, направленных вдоль меридианов. На экваторе при упомянутых значениях часового угла частица находится в южной точке отрезка, в его середине, в северной точке, в середине отрезка и в его южной точке. При этих значениях часового угла частица, расположенная в окрестности северного полюса, находится соответственно на меридиане нижней кульминации светила в южной точке проекции траектории, на широте 90° N, на меридиане верхней кульминации в южной точке отрезка, симметричной исходной точке относительно оси вращения тела, на широте 90° N и в исходной точке на меридиане нижней кульминации, а частица, расположенная в окрестностях южного полюса, — на меридиане нижней кульминации светила в северной точке проекции траектории, на широте 90° S, на меридиане верхней кульминации светила в северной точке отрезка, симметричной исходной точке относительно оси вращения тела, на широте 90° S и в исходной точке. Очевидно, что проекции траекторий суточных движений частиц в окрестностях полюсов на плоскости меридианов являются также проекциями этих траекторий на горизонтальные плоскости.

При отрицательном склонении вызывающего прилив светила в областях небесного тела севернее широты 45° N, между

экватором и 45° N, между экватором и 45° S и южнее широты 45° S частицы движутся точно так же, как частицы, расположенные соответственно в областях между экватором и 45° S, южнее 45° S, севернее 45° N и между экватором и 45° S (рис. 32). Частицы, расположенные на экваторе, совершают реверсивные движения в меридианном направлении. При часовых углах 0 и 360° каждая из них находится в северной точке отрезка, при часовых углах 90 и 270° — в его середине, а при часовом угле 180° — в южной точке.

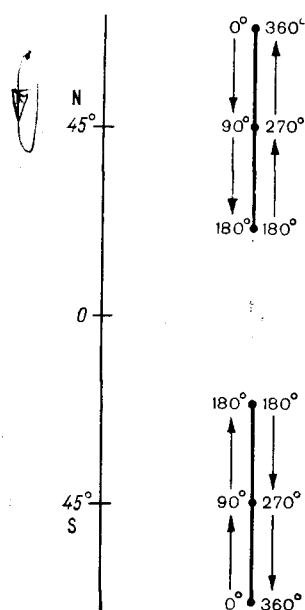


Рис. 33. Проекция траекторий частиц, движущихся под действием приливообразующих сил долгого периода, на горизонтальные плоскости.

Частицы на широтах 45° N и 45° S совершают реверсивные движения в вертикальном направлении. На широте 45° N при часовых углах 0 и 360° , 90 и 270° , 180° каждая частица находится в верхней точке отрезка, в середине его и в нижней точке, на широте 45° S при тех же значениях часовых углов — в нижней точке отрезка, в середине и в верхней точке. Движение частиц, расположенных в окрестностях полюсов, при отрицательном склонении светила отличается от движения их при положительном склонении только тем, что в моменты, когда часовой угол светила равен 0 и 360° , частица находится в крайней точке отрезка на меридиане верхней кульминации, а при часовом угле 180° — на другом конце отрезка на меридиане нижней кульминации. Таким образом, знак склонения светила не влияет на проекции траекторий частиц, но от него зависит положение частицы в любой момент времени.

Перейдем к рассмотрению частных долгопериодных приливных движений. Как отмечалось ранее, каждое из них вызывается силами, действующими только в направлениях меридианов и вертикалей.

Поэтому проекция траектории любого частного долгопериодного движения на горизонтальную плоскость представляет собой отрезок прямой, ориентированной вдоль меридиана. Согласно формуле (68), длина этого отрезка максимальна на широтах 45° N и 45° S и равна нулю на экваторе и полюсах. При значениях аргумента $mt - \psi$, равных 0 , 90 , 180 , 270 и 360° , каждая частица, расположенная в северном полушарии, находится соответственно в северной точке отрезка, в середине его, в южной точке, в середине отрезка и в его северной точке, а каждая частица, расположенная в южном полушарии, — в южной точке отрезка, в середине его, в северной

точке, в середине и в южной точке отрезка (рис. 33), причем фазы движения частиц в обоих полушариях не зависят от географической долготы.

Проекция траекторий частных долгопериодных движений частиц на плоскости, перпендикулярные меридианам, представляют собой отрезки вертикалей. Согласно формуле (69), на широтах $35^{\circ}16' N$ и $35^{\circ}16' S$ эти отрезки равны нулю, а на экваторе и на полюсах имеют экстремальные значения, соответственно равные $\frac{1}{3} \frac{F_{ч.д}}{m^2}$ и $\frac{2}{3} \frac{F_{ч.д}}{m^2}$. При значениях аргумента

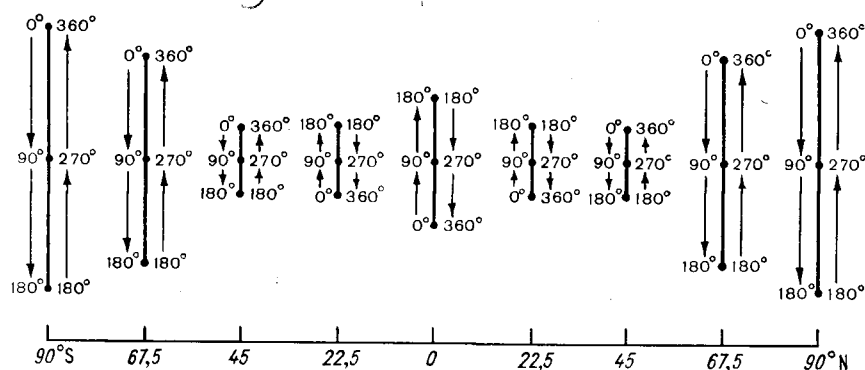


Рис. 34. Проекция траекторий частиц, движущихся под действием приливообразующих сил долгого периода, на плоскости, перпендикулярные меридианам.

$mt - \psi$, равных 0, 90, 180, 270 и 360°, каждая частица в области небесного тела между широтами $35^{\circ}16' N$ и $35^{\circ}16' S$ находится в нижней точке отрезка, в середине его, в верхней точке, в середине отрезка и в нижней точке его, а каждая частица в областях тела, расположенных севернее $35^{\circ}16' N$ и южнее $35^{\circ}16' S$, при указанных значениях аргумента $mt - \psi$ находится в верхней точке отрезка, в его середине, в нижней точке, в середине отрезка и в верхней его точке (рис. 34). Фазы вертикального движения частиц, как и движения их в меридианном направлении, одинаковы на всех долготах.

Согласно формулам (68), (69), проекция траекторий частных долгопериодных движений частиц на плоскости меридианов представляют собой отрезки прямых, направленных под разными углами к горизонтальным плоскостям. В системе координат, которая использовалась при рассмотрении проекций траекторий полусуточных и суточных приливных движений на плоскости меридианов, смещения (y и z) частицы в направлениях

меридиана и вертикали равны

$$y = \frac{F_{ч.д.}}{m^2} \sin 2\varphi \cos(mt - \psi) \text{ и}$$

$$z = -\frac{2F_{ч.д.}}{m^2} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos(mt - \psi).$$

Согласно этим уравнениям, $\cos(mt - \psi) = \frac{y}{\frac{1}{m^2} F_{ч.д.} \sin 2\varphi}$ и

$$\cos(mt - \psi) = -\frac{z}{\frac{2}{m^2} F_{ч.д.} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}.$$

Поэтому каноническое уравнение прямой, отрезок которой

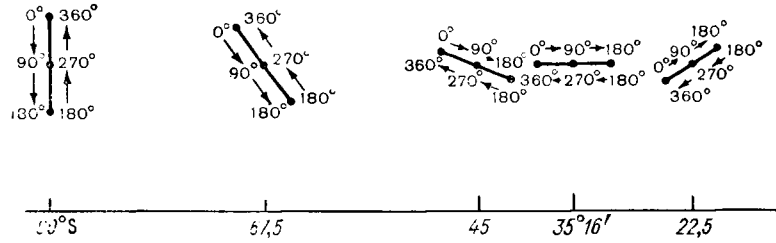


Рис. 35. Проекция траекторий частиц, движущихся под действием

является проекцией траектории частицы на плоскость меридиана, имеет вид

$$z = -\frac{2 \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{\sin 2\varphi} y. \quad (78)$$

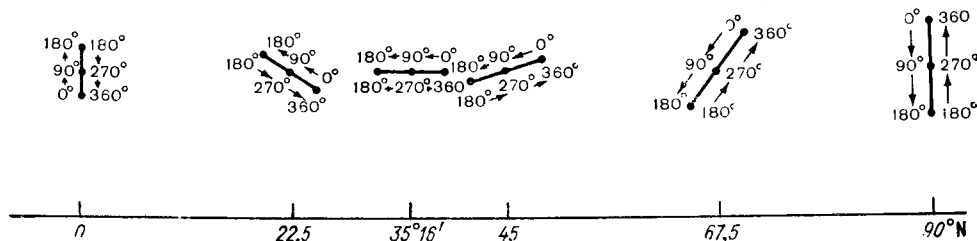
Как видно из формулы (78), угол (k_d) наклона этой прямой к плоскости горизонта равен

$$k_d = \arctg \frac{z}{y} = \arctg \frac{-2 \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{\sin 2\varphi}. \quad (79)$$

Следовательно, на экваторе и полюсах проекции частиц на рассматриваемую плоскость представляют собой отрезки вертикалей, а на широтах $35^\circ 16' N$ и $35^\circ 16' S$ — отрезки горизонтальных прямых.

Частное долгопериодное движение частицы в плоскости меридиана показано на рис. 35. Видно, что при значениях аргумента $mt - \psi$, равных 0, 90, 180, 270 и 360° , в области небесного тела, расположенной севернее широты $35^\circ 16' N$, каждая частица находится соответственно в северной и верхней точке отрезка, в середине его, в южной и нижней точке, в середине отрезка и в северной и верхней точке; в области между эквато-

ром и $35^{\circ}16'$ N — в северной и нижней точке отрезка, в его середине, в южной и верхней точке, в середине отрезка и в северной и нижней точке; в области между экватором и $35^{\circ}16'$ N — в южной и нижней точке отрезка, в середине отрезка, в северной и верхней точке, в середине и в южной и нижней точке отрезка; в области южнее $35^{\circ}16'$ S — в южной и верхней точке отрезка, в середине его, в северной и нижней точке, в середине отрезка и в южной и верхней точке. Частицы, расположенные на экваторе и полюсах, совершают реверсивные движения в вертикальном направлении. При значениях аргумента $mt = \psi$, равных 0 и 360, 90 и 270, 180°, каждая частица на экваторе находится соответственно в нижней точке отрезка, в середине его и в верхней точке, а каждая частица на широтах 90° N и 90° S.



приливообразующих сил долгого периода, на плоскости меридианов.

наоборот, — в верхней точке, в середине и в нижней точке отрезка. Частицы, расположенные на широтах $35^{\circ}16'$ N и $35^{\circ}16'$ S, совершают реверсивные движения в направлениях меридианов. При перечисленных значениях аргумента каждая из них на широте $35^{\circ}16'$ N находится соответственно в северной точке отрезка, в середине его и в южной точке, а на широте $35^{\circ}16'$ S — в южной точке, в середине и в северной точке отрезка.

Проекция траекторий частных долгопериодных движений частиц на плоскости меридианов и положения частиц в одни и те же моменты времени не изменяются с долготой.

При рассмотрении зависимости долгопериодной приливообразующей силы от склонения вызывающего прилив светила отмечалось, что, если абсолютное значение этого параметра превосходит $35^{\circ}16'$, направление упомянутой силы противоположно тому, какое она имеет при склонении, абсолютное значение которого не достигает $35^{\circ}16'$. Поэтому при склонениях светила, превышающих по абсолютному значению $35^{\circ}16'$, направления сил, вызывающих частные долгопериодные приливные движения, также противоположны направлениям, которые они имели в рассмотренном выше случае. Следовательно, при склонениях, превосходящих названное критическое значение, смещения

частиц в направлениях меридианов и вертикалей равны

$$s_{\text{ч. м. д.}} = \int \int F_{\text{ч. д.}} \sin 2\varphi \cos (mt - \psi) dt = - \frac{F_{\text{ч. д.}}}{m^2} \sin 2\varphi \cos (mt - \psi);$$

$$\begin{aligned} s_{\text{ч. в. д.}} &= \int \int -2F_{\text{ч. д.}} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos (mt - \psi) dt = \\ &= \frac{2F_{\text{ч. д.}}}{m^2} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos (mt - \psi). \end{aligned}$$

У С помощью этих формул нетрудно заключить, что проекции траекторий частиц, совершающих частные долгопериодные приливные движения, на все три рассматриваемые плоскости имеют такую же форму, как и проекции траекторий этих движений при склонениях светила, не достигающих по абсолютному значению $35^\circ 16'$. Однако в каждый момент времени частица движется в направлении, противоположном тому, в каком она двигалась в предыдущем случае. Как и при склонениях светила, не достигающих $35^\circ 16'$, ни проекции траекторий частных долгопериодных движений, ни движения частиц по этим траекториям не зависят от географической долготы.

64

Общей особенностью полусуточных, суточных и частных долгопериодных движений частиц, происходящих под действием приливообразующей силы, является их периодичность. Из физики известно, что периодическим движением материальной точки называется такое движение, при котором она через равные интервалы времени проходит одну и ту же точку пространства с одинаковой скоростью. Поскольку часовой угол светила изменяется во времени довольно равномерно, каждая частица через примерно равные интервалы времени проходит одну и ту же точку траектории. Проекции ($v_{\text{п. п.}}$, $v_{\text{м. п.}}$, $v_{\text{в. п.}}$, $v_{\text{п. с.}}$, $v_{\text{м. с.}}$, $v_{\text{в. с.}}$, $v_{\text{ч. м. д.}}$, $v_{\text{ч. в. д.}}$) скоростей полусуточных, суточных и частных долгопериодных движений частиц на параллель, меридиан и вертикаль определяются формулами, получаемыми путем интегрирования по времени формул проекций ускорений частиц [или путем дифференцирования по времени формул (62)–(69) проекций смещений частиц]:

$$v_{\text{п. п.}} = \int F_{\text{п.}} \cos \varphi \sin 2(nt - \lambda) dt = - \frac{F_{\text{п.}}}{2n} \cos \varphi \cos 2(nt - \lambda);$$

$$\begin{aligned} v_{\text{м. п.}} &= \int -\frac{1}{2} F_{\text{п.}} \sin 2\varphi \cos 2(nt - \lambda) dt = \\ &= - \frac{F_{\text{п.}}}{4n} \sin 2\varphi \sin 2(nt - \lambda); \end{aligned}$$

$$v_{\text{в. п.}} = \int F_{\text{п.}} \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda) dt = \frac{F_{\text{п.}}}{2n} \cos^2 \varphi \sin 2(nt - \lambda);$$

$$v_{\text{п. с.}} = \int F_{\text{с.}} \sin \varphi \sin (nt - \lambda) dt = - \frac{F_{\text{с.}}}{n} \sin \varphi \cos (nt - \lambda);$$

$$v_{м.с} = \int F_c \cos 2\varphi \cos (nt - \lambda) dt = \frac{F_c}{n} \cos 2\varphi \sin (nt - \lambda);$$

$$v_{в.с} = \int F_c \sin 2\varphi \cos (nt - \lambda) dt = \frac{F_c}{n} \sin 2\varphi \sin (nt - \lambda);$$

$$v_{м.ч.д} = \int -F_{ч.д} \sin 2\varphi \cos (mt - \psi) dt = -\frac{F_{ч.д}}{m} \sin 2\varphi \sin (mt - \psi);$$

$$v_{в.ч.д} = \int 2F_{ч.д} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos (mt - \psi) dt =$$

$$= \frac{2F_{ч.д}}{m} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \sin (mt - \psi).$$

Из этих формул видно, что проекции скоростей приливных движений представляют собой периодически изменяющиеся во времени величины, вследствие чего каждая частица проходит одну и ту же точку траектории с одинаковой скоростью. Следовательно, полусуточные, суточные и частные долгопериодные приливные движения частиц, вызываемые приливообразующей силой, являются периодическими. Эта особенность исследуемых движений объясняется периодическим изменением приливообразующей силы, обусловленным как периодичностью вращения небесного тела вокруг своей оси, так и периодичностью обращения вызывающего прилив светила вокруг этого тела или тела вокруг светила.

Согласно формулам (62) — (69), проекции смещений частиц в направлениях параллелей, меридианов и вертикалей прямо пропорциональны амплитудам проекций приливообразующих сил, которые в свою очередь прямо пропорциональны расстоянию от центра небесного тела. Из этого следует, что размеры траекторий частиц и, естественно, проекции этих траекторий на три взаимно перпендикулярные плоскости возрастают в направлении от центра тела к его поверхности в соответствии с линейным законом. Так, проекции траекторий полусуточных и суточных движений частиц, которые находятся на одной и той же широте, но на разных расстояниях от центра небесного тела, как на горизонтальные плоскости, так и на плоскости, перпендикулярные меридианам, представляют собой подобные эллипсы с осями, прямо пропорциональными расстоянию между центром тела и частицей. Проекции траекторий полусуточных, суточных и частных долгопериодных движений частиц, расположенных на одной широте, но на различных расстояниях от центра тела, на плоскости меридианов имеют вид наклоненных под одним и тем же углом к горизонту отрезков прямых, длины которых прямо пропорциональны упомянутым расстояниям.

Нетрудно заметить, что проекции орбит полусуточных приливных движений частиц на плоскости, перпендикулярные меридианам, не отличаются по форме от орбит частиц в двух направленных вдоль параллелей поступательных волнах, гребни

которых находятся на меридианах с часовыми углами 90 и 270° , а подошвы — на меридианах с часовыми углами 0 и 180° . Проекция орбит суточных движений частиц на те же плоскости не отличаются от орбит частиц в направленной вдоль параллелей поступательной волне с гребнем на меридиане нижней кульминации светила и с подошвой на меридиане его верхней кульминации, если упомянутые движения происходят в северном полушарии при положительном склонении светила или в южном полушарии при отрицательном склонении, или наоборот, с гребнем на меридиане верхней и подошвой на меридиане нижней кульминации, если движения происходят в южном полушарии при положительном склонении или в северном полушарии, когда склонение отрицательно. Проекция траекторий полусуточных, суточных и частных долгопериодных движений частиц на плоскости меридианов имеют вид траекторий частиц в ориентированных вдоль меридианов стоячих волнах с пучностями, находящимися соответственно на экваторе и в окрестностях полюсов, на широтах 45° N и 45° S и на экваторе и в окрестностях полюсов.

Установленные особенности приливных движений, происходящих на небесном теле под действием приливообразующих сил, — форма проекций траекторий частиц на плоскости, перпендикулярные меридианам, и на плоскости меридианов и периодический характер движения частиц — позволяют заключить, что приливообразующие силы вызывают такие движения, какие имеют место в поступательных волнах, направленных вдоль параллелей, и в стоячих волнах, ориентированных вдоль меридианов.

Следует заметить, что два важнейших допущения, которые использовались при рассмотрении движений частиц, вызываемых приливообразующей силой, не влияют на правильность выводов об особенностях этих движений. Согласно первому допущению, амплитуды (F_p и F_c) приливообразующих сил полусуточного и суточного периодов считались постоянными величинами, тогда как каждая из этих амплитуд зависит от сравнительно медленно изменяющихся во времени астрономических параметров — от расстояния между центрами небесного тела и вызывающего прилив светила и от склонения светила. Однако, согласно теории гармонического анализа приливов, реальную полусуточную или суточную приливообразующую силу можно представить в виде суммы частных гармонически изменяющихся во времени сил, имеющих неизменные во времени амплитуды, но различные фазы. Каждая из таких сил вызывает частное приливное движение, обладающее всеми установленными выше особенностями. Поэтому рассматриваемое допущение не имеет принципиального значения.

Второе допущение заключалось в том, что при исследовании движения частицы не учитывалось изменение действующей на

нее приливообразующей силы, вызываемое перемещением частицы в направлениях параллели, меридиана и вертикали. Оно вводилось для того, чтобы существенно упростить формулы, определяющие проекции смещений частиц на параллель, меридиан и вертикаль, и облегчить установление главных особенностей рассматриваемых движений. Отмеченные изменения приливообразующей силы, действительно имеют место, но они крайне незначительны. Так, при амплитуде приливообразующей силы 10^{-4} дин и относительной угловой скорости вращения небесного тела и обращения светила 10^{-4} с^{-1} амплитуды ($S_{п. п.}$, $S_{м. п.}$, $S_{в. п.}$) полусуточных смещений частицы с массой 1 г в направлениях параллели, меридиана и вертикали при максимальных (т. е. равных единице) значениях зависящих от географической широты сомножителей проекций приливообразующей силы равны

$$S_{п. п.} = \frac{10^{-4} \text{ дин}}{4 (10^{-4})^2 \text{ с}^{-2} \cdot \text{г}} = 2,5 \cdot 10^3 \text{ см} = 25 \text{ м};$$

$$S_{м. п.} = \frac{10^{-4} \text{ дин}}{8 (10^{-4})^2 \text{ с}^{-2} \cdot \text{г}} = 1,25 \cdot 10^3 \text{ см} = 12,5 \text{ м};$$

$$S_{в. п.} = \frac{10^{-4} \text{ дин}}{4 (10^{-4})^2 \text{ с}^{-2} \cdot \text{г}} = 2,5 \cdot 10^3 \text{ см} = 25 \text{ м}.$$

Очевидно, что изменение приливообразующей силы и ее проекций на расстоянии нескольких десятков метров ничтожно мало и им можно пренебречь.

Рассмотренные движения являются гипотетическими, так как в природе на каждую частицу действует не только приливообразующая, но и другие силы. Однако знание особенностей этих движений имеет большое значение для установления и объяснения закономерностей реальных приливов.

ГЛАВА 3. СИЛА, ВЫЗЫВАЕМАЯ ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ, И СИЛА КОРИОЛИСА

Важнейшим фактором, влияющим на движение частиц, вызываемое приливообразующей силой, является притяжение их небесным телом. Согласно теории всемирного тяготения [43], ускорение ($g(r)$) силы тяготения в любой точке небесного тела, плотность (ρ) которого изменяется только в вертикальном направлении по любому закону, определяется следующей формулой:

$$g(r) = \frac{4\pi f \int_0^r r^2 \rho \, dr}{r^2}. \quad (80)$$

Согласно этой формуле, ускорение (g) силы тяготения на поверхности тела с радиусом R и с постоянной плотностью ρ равно

$$g = \frac{4}{3} \pi f \rho R. \quad (81)$$

Каждая частица, находящаяся в поверхностном слое небесного тела, притягивается к его центру с силой, равной произведению ее массы на ускорение g , т. е. равной ее весу. Если частица находится в поверхностном слое жидкого или газообразного тела, то в соответствии с законом Архимеда на нее действует выталкивающая сила, равная по абсолютному значению силе тяжести, но направленная в противоположную сторону. Вследствие этого частица находится в состоянии равновесия. Если же частица возвышается над поверхностью тела, соприкасаясь с ней только нижней гранью, то выталкивающая сила на нее не действует. В этом случае частица давит на нижележащую, прилегающую частицу с силой, равной своему весу и направленной к центру тела. Очевидно, что сила (F_p) давления возвышающегося над поверхностью тела столбика жидкости (или газа) плоскости ρ , площадь основания которого равна s , а высота z , на прилегающие к его нижней грани частицы определяется формулой

$$F_p = \rho g z s. \quad (82)$$

Давление (p) этого столбика на единицу площади равно

$$p = \rho g z. \quad (83)$$

Согласно закону Паскаля, все жидкости и газы передают оказываемое на них внешнее давление во все стороны одинаково*. Поэтому давление упомянутого столбика приводит не только к возникновению сил, действующих на все расположенные под ним частицы и направленных к центру тела, но к возникновению сил во всех горизонтальных плоскостях, причем в каждой из них эти силы направлены во все стороны от проекции основания столбика на эту плоскость.

Таким образом, сила тяготения стремится воспрепятствовать отклонению поверхности небесного тела от невозмущенного положения, а при наличии таких отклонений вызывает силы, действующие на все частицы тела и стремящиеся вернуть их в исходные положения.

Из гидродинамики известно, что отнесенная к единице массы и действующая вдоль какого-нибудь направления сила (G), обусловленная пространственным изменением давления (P) в пределах какого-либо объема жидкости или газа, равна про-

* Закон Паскаля применим для жидкости, находящейся в условиях гидростатического равновесия.— *Прим. ред.*

изводной от давления по этому направлению: $G = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dl}$, где dl — элементарный отрезок длины. Знак «минус» в этой формуле показывает, что рассматриваемая сила, вызываемая градиентом давления, всегда направлена от области большего давления к области меньшего. Согласно этой формуле, проекции (G_v , G_u , G_w) отнесенной к единице массы упомянутой силы на параллель, меридиан и вертикаль равны:

$$G_v = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{r \cos \varphi \, d\lambda}; \quad (84)$$

$$G_u = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{r \, d\varphi}; \quad (85)$$

$$G_w = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr}. \quad (86)$$

Давление в жидкостях и газах, обусловленное действием на них одной только силы тяжести, называется гидростатическим. Как известно, гидростатическое давление на расстоянии r от центра небесного тела с радиусом R равно

$$P = \int_r^{R+z} \rho g(r) \, dr. \quad (87)$$

Оно всегда убывает в направлении от центра тела к поверхности, а потому вызываемая его изменением в этом направлении сила G_w , представляющая собой выталкивающую силу, всегда имеет положительное значение.

Из формул (84) и (85) видно, что возникновение сил G_v и G_u возможно лишь в том случае, когда давление изменяется вдоль параллели и вдоль меридиана. Как было показано ранее, вызываемые приливообразующими силами полусуточные и суточные приливные движения частиц обуславливают изменение положения поверхности тела в направлении параллелей, а полусуточные, суточные и частные долгопериодные приливные движения — в направлении меридианов. Эти изменения обуславливают вариации гидростатического давления на всех горизонтах в зональном и меридианном направлениях, что и является причиной возникновения рассматриваемых сил, действующих вдоль параллелей и имеющих полусуточный и суточный периоды изменения, и сил, действующих вдоль меридианов и изменяющихся во времени с полусуточным, суточным и долгим периодами.

Другая причина, вызывающая изменение давления в меридианном направлении, возникающее в процессе частных долгопериодных приливных движений на жидких небесных телах при действии силы Кориолиса, рассмотрена на с. 206—207.

Изложенный вывод основан на недоказанном ранее положении, согласно которому приливообразующая сила, несмотря на противодействие силы тяготения, вызывает периодические отклонения поверхности небесного тела. Принципиальная задача теории приливов заключается в том, чтобы объяснить, каким образом приливообразующая сила, на несколько порядков меньшая, чем сила тяготения, вызывает наблюдаемые в природе, в частности в океанах Земли, вертикальные движения частиц. В большинстве современных работ по океанографии этот эффект объясняется действием горизонтальной составляющей приливообразующей силы. В них отмечается, что вертикальная составляющая лишь изменяет силу тяжести на ничтожно малую величину и не вызывает никаких движений. Горизонтальная же составляющая действует в направлении, перпендикулярном только что упомянутой силе, вследствие чего последняя не препятствует вызываемым ею движениям. Горизонтальные перемещения частиц несжимаемой материи обуславливают отклонения поверхности от невозмущенного положения, в частности, вызывают приливные колебания уровня в Мировом океане.

Горизонтальная составляющая приливообразующей силы действительно играет решающую роль в формировании приливов в Мировом океане. Но приведенное объяснение представляется неправильным. Неодинаковые на разных широтах и долготах горизонтальные смещения несжимаемой материи (жидкости) неизбежно вызывают неодинаковые в различных районах отклонения поверхности жидкости от невозмущенного положения. В соответствии с законом Паскаля, наличие таких отклонений приводит к возникновению сил, вызываемых градиентами гидростатического давления, горизонтальные составляющие которых препятствуют перемещению частиц в горизонтальных плоскостях. Из этого следует, что действие силы тяжести препятствует перемещению частиц несжимаемой жидкости в горизонтальном направлении, как и в вертикальном.

Наряду с этим приведенное рассуждение о возникновении приливов под действием горизонтальной составляющей приливообразующей силы фактически не объясняет причину вертикальных движений частиц. Согласно второму закону механики, эти движения могут быть вызваны только силами, действующими в вертикальном направлении, однако ни о причине возникновения этих сил, ни даже о самом их существовании в этом рассуждении не упоминается.*

Существование горизонтальных и вертикальных приливных движений в поле силы тяжести объясняется особенностью передачи давления в жидкостях и газах, описываемой законом

* В критикуемом автором утверждении предполагается, что вертикальные движения возникают в соответствии с уравнением неразрывности, выражающим закон сохранения массы.— *Прим. ред.*

Паскаля.* Вследствие действия приливообразующей силы на частицу последняя стремится прийти в движение и оказывает давление на соседнюю. Согласно закону Паскаля, давление передается от одной частицы к другой, в результате чего в жидкости или газе возникает давление, вызываемое суммой приливообразующих сил, действующих на отдельные частицы. Сила его соизмерима с силой, которая возникает вследствие градиентов гидростатического давления, вызываемых наблюдаемыми в Мировом океане приливными колебаниями уровня, а потому действие ее и является непосредственной причиной возникновения приливных движений. Такое, физически обоснованное объяснение изучаемого эффекта было дано Ю. М. Шокальским в фундаментальном труде «Океанография» [31] при исследовании лунных и солнечных статических приливов в океане, покрывающем весь земной шар. Это объяснение правомерно использовать и при изучении приливов как динамического процесса.

Выведем формулы, определяющие пространственное изменение давлений $P_{п.п.}$, $P_{п.с.}$, $P_{м.п.}$, $P_{м.с.}$, $P_{м.д.}$, вызываемого действием компонентов $F_{п.п.}$, $F_{п.с.}$, $F_{м.п.}$, $F_{м.с.}$, $F_{м.д.}$ в жидкости (или газе), в пределах замкнутых каналов, продольные оси которых совпадают с параллелями и меридианами сферы радиуса r , а площадь поперечного сечения каждого из которых равна $с\text{м}^2$. Элементарное давление равно $dP = \frac{1}{s} \rho F dq$, где F — вызывающий его компонент приливообразующей силы. Поэтому давление P определяется формулой $P = \frac{1}{s} \rho \iiint F dq = \rho \int F dl$, в которой dl — элементарная длина канала, а $s = 1\text{ см}^2$. Элементарные длины зональных и меридианных каналов соответственно равны $r \cos \varphi d\lambda$ и $r d\varphi$. Следовательно,

$$\begin{aligned} P_{п.п.} &= \rho \int F_{п.п.} r \cos \varphi d\lambda = \\ &= \rho \int \frac{3}{2} f \frac{Mr^2}{d^3} \cos^2 \delta \cos^2 \varphi \sin 2(nt - \lambda) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \rho r F_n \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda); \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} P_{п.с.} &= \rho \int F_{п.с.} r \cos \varphi d\lambda = \\ &= \rho \int \frac{3}{2} f \frac{Mr^2}{d^3} \sin 2\delta \sin \varphi \cos \varphi \sin (nt - \lambda) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \rho r F_c \sin 2\varphi \cos (nt - \lambda); \end{aligned} \quad (89)$$

* См. примечание на с. 100. — Прим. ред.

$$P_{\text{м. п}} = \rho \int F_{\text{м. п}} r d\varphi = \rho \int -\frac{3}{4} f \frac{Mr^2}{d^3} \cos^2 \delta \sin 2\varphi \cos 2(nt - \lambda) d\varphi = \\ = \frac{1}{4} \rho r F_{\text{п}} \cos 2\varphi \cos 2(nt - \lambda); \quad (90)$$

$$P_{\text{м. с}} = \rho \int F_{\text{м. с}} r d\varphi = \rho \int \frac{3}{2} f \frac{Mr^2}{d^3} \sin 2\delta \cos 2\varphi \cos (nt - \lambda) d\varphi = \\ = \frac{1}{2} \rho r F_{\text{с}} \sin 2\varphi \cos (nt - \lambda); \quad (91)$$

$$P_{\text{м. д}} = \rho \int F_{\text{м. д}} r d\varphi = \rho \int -\frac{3}{4} f \frac{Mr^2}{d^3} (1 - 3 \sin^2 \delta) \sin 2\varphi d\varphi = \\ = \frac{1}{4} \rho r F_{\text{д}} \cos 2\varphi. \quad (92)$$

Каждая единица массы передает оказываемое на нее давление, определяемое формулами (88)–(92), во все стороны, в том числе вниз и вверх. Направленная вниз сила давления в жидкости, окружающей твердую часть небесного тела (например, в океанах Земли), компенсируется силой давления этой части тела на жидкость, возникающей в соответствии с третьим законом механики. На жидких или газообразных небесных телах она компенсируется возникающей вследствие действия тех же компонентов и направленной навстречу ей силой давления в противоположной части тел. Сила давления, направленная вверх, является причиной вертикальных приливных движений частиц в поле силы тяжести.*

С помощью формул (88)–(92) и (83) нетрудно установить, что при тех значениях параметров r , g , $F_{\text{п}}$, $F_{\text{с}}$, $F_{\text{д}}$, которые имеют место у поверхности Земли, давления $P_{\text{п. п}}$, $P_{\text{п. с}}$, $P_{\text{м. п}}$, $P_{\text{м. с}}$, $P_{\text{м. д}}$ равны значениям гидростатического давления P при отклонениях уровня океана от невозмущенного положения на высоту от нескольких сантиметров до нескольких десятков сантиметров, т. е. отклонениях, какие наблюдаются в удаленных от берегов частях Мирового океана и в отдельных прибрежных его районах.

Давления $P_{\text{п. п}}$ и $P_{\text{м. п}}$, $P_{\text{п. с}}$ и $P_{\text{м. с}}$, $P_{\text{м. д}}$ изменяются во времени точно так же, как компоненты $F_{\text{в. п}}$, $F_{\text{в. с}}$, $F_{\text{в. д}}$ вертикальной составляющей приливообразующей силы соответствующих периодов. Кроме того, давление $P_{\text{п. п}}$ зависит от географической широты так же, как полусуточный компонент $F_{\text{в. п}}$, а давления $P_{\text{п. с}}$ и $P_{\text{м. с}}$ — как суточный компонент $F_{\text{в. с}}$. Вследствие этого вертикальные движения частиц, вызываемые силами давлений $P_{\text{п. п}}$, $P_{\text{м. п}}$, $P_{\text{п. с}}$, $P_{\text{м. с}}$, $P_{\text{м. д}}$, имеют ряд общих существенных особенностей с рассмотренными ранее движениями, вызываемыми полусуточным, суточным и долгопериодным компонентами вертикальной составляющей приливообразующей силы.

* Здесь в неявном виде содержатся соотношения статической теории приливов.— *Прим. ред.*

В связи с тем, что горизонтальная протяженность любого океана Земли в сотни раз больше его глубины, суммарное значение проекции горизонтальной составляющей приливообразующей силы на параллель, меридиан или какое-либо другое направление также на 2—3 порядка превосходит суммарное значение вертикальной составляющей, действующей на столбик воды от поверхности до дна. Поэтому главную роль в формировании приливов в Мировом океане, как и в любом окружающем твердое небесное тело жидком или газообразном слое, толщина которого мала по сравнению с радиусом тела, играет горизонтальная составляющая. Однако суммарное значение вертикальной составляющей, действующей на столбик жидкости или газа с высотой, равной длине радиуса небесного тела или соизмеримой с ней, имеет такой же порядок, как и суммарное значение горизонтальной составляющей, действующей вдоль любого направления. Из этого следует, что вертикальная составляющая играет очень важную роль в формировании приливов на жидких и газообразных небесных телах и в жидких и газообразных слоях большой толщины, покрывающих твердые части небесных тел.

Проекции (a_v , a_u , a_w) ускорений на параллель, меридиан и вертикаль, приобретаемых частицами, которые совершают приливные движения на таких небесных телах или в их жидких или газообразных слоях под действием приливообразующей силы и силы, вызванной градиентом давления в поле силы тяготения, определяются следующими уравнениями:

$$a_v = F_v - G_v; \quad a_u = F_u - G_u, \quad a_w = F_w - G_w - g(r).$$

Выразив проекции этих ускорений в виде производных проекций (v , u , w) скоростей приливных движений на указанные направления по времени и подставив в приведенные уравнения значения G_v , G_u и G_w , определяемые формулами (84)—(86), получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} = F_v - \frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial P}{\partial \lambda}, \quad (93)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F_u - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \varphi}; \quad (94)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = F_w - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - g(r). \quad (95)$$

Эти уравнения представляют собой гидродинамические уравнения движения в форме Эйлера. Они описывают приливные движения жидкости постоянной плотности, происходящие под действием приливообразующей и возвращающей силы.

В уравнения (93)—(95) входят четыре неизвестные величины, а потому они недостаточны для определения характеристик приливных движений. Для этой цели наряду с ними

используется уравнение неразрывности материи постоянной плотности, которое после исключения из него весьма малых членов имеет следующий вид:*

$$\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} u \operatorname{tg} \varphi + \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r} w = 0. \quad (96)$$

Система дифференциальных уравнений (93) — (96) движения и неразрывности дает принципиальную возможность найти проекции скоростей частиц материи постоянной плотности, совершающих приливные движения под действием приливообразующей силы и силы, вызываемой градиентом давления в поле силы тяготения.

Приведенные уравнения достаточно точно описывают приливы, происходящие под действием названных сил, только в том случае, когда движение небесного тела в пространстве является равномерным и прямолинейным, а приливообразующая сила на нем вызывается обращаемым вокруг него светилом.** Поскольку выбранная система координат, в которой определяются характеристики приливов, связана с небесным телом, приливные движения в этом случае происходят в системе отсчета, движущейся равномерно и прямолинейно и называемой инерциальной. Такое движение небесных тел в принципе возможно, а потому исследование приливов на них имеет теоретическое значение.

Солнце и все планеты Солнечной системы вращаются вокруг своих осей, вследствие чего связанные с этими телами системы координат, в которых определяются характеристики приливов, являются неинерциальными. Из физики известно, что для определения характеристик какого-либо движения относительно системы координат, вращающейся вокруг оси, необходимо вводить в уравнения движения силу Кориолиса. Приливы, происходящие на вращающихся небесных телах при перечисленных ранее условиях, описываются следующей системой дифференциальных уравнений движения и неразрывности:

*движ
мат-ии
у.м*

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = F_v - \frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial P}{\partial \lambda} - 2\omega u \sin \varphi + 2\omega w \cos \varphi; & (97) \\ \frac{\partial u}{\partial t} = F_u - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + 2\omega v \sin \varphi; & (98) \\ \frac{\partial w}{\partial t} = F_w - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - g(r) - 2\omega v \cos \varphi; & (99) \\ \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} u \operatorname{tg} \varphi + \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2}{r} w = 0. & (100) \end{cases}$$

* Предположение о несжимаемости жидкости в известной мере ограничивает область приложения развиваемой здесь теории к газообразным телам.—
Прим. ред.

** Система уравнений (93) — (96) и (97) — (100) не учитывает диссипативные процессы, а также магнитные силы, которые могут быть существенными

Давление P в уравнениях движения (97)–(99), как и в уравнениях (93)–(95), является гидродинамическим, т. е. давлением, вызываемым в жидкости или газе не только действием силы тяготения, но и действием всех остальных сил, при которых происходят рассматриваемые движения.

В уравнениях (97)–(99) слагаемые $-2\omega i \sin \varphi$, $2\omega \omega \cos \varphi$, $2\omega i \sin \varphi$ и $-2\omega \omega \cos \varphi$, в которых ω — угловая скорость вращения небесного тела вокруг оси, представляют собой проекции отнесенной к единице массы силы Кориолиса на параллель, меридиан и вертикаль. Поскольку каждое из этих слагаемых прямо пропорционально проекции скорости приливного движения на соответствующее направление, а эти проекции изменяются во времени согласно периодическому закону, упомянутые слагаемые, как и проекции силы, вызываемой градиентом давления, также являются периодически изменяющимися во времени величинами.

Важная особенность силы Кориолиса заключается в том, что она всегда направлена под прямым углом к движению материальной точки, на которую она действует. С этой особенностью связано серьезное разногласие в вопросе о влиянии силы Кориолиса на энергию приливов. Из физики известно, что сила, направленная под прямым углом к движению материальной точки, не совершает работу. На этом основании Г. Лякомб [18], А. В. Некрасов [24] и другие исследователи полагают, что действие силы Кориолиса не изменяет энергию приливов. По мнению Некрасова [24], ее действие приводит к перераспределению потенциальной и кинетической энергии приливов в пространстве, но не изменяет общей величины этих видов энергии. С другой стороны, есть основания полагать, что сила Кориолиса влияет как на потенциальную и кинетическую энергии, так и на их суммарное значение. Известно, что потенциальная энергия прямо пропорциональна квадрату отклонения поверхности небесного тела от невозмущенного положения, а кинетическая — квадрату скорости движения частиц. Названные кинематические характеристики приливов зависят от того, происходят ли приливные движения при действии силы Кориолиса или при ее отсутствии. Именно этим можно объяснить полученный в следующей части книги вывод, согласно которому потенциальная, кинетическая и общая энергии приливов, происходящих на жидком небесном теле при отсутствии силы Кориолиса, не равны потенциальной, кинетической и общей энергии приливов, происходящих при ее действии.

Представляется, что сила Кориолиса влияет на энергию приливов и это влияние можно объяснить следующим образом.

Справедливость заключения упомянутых исследователей о том, что непосредственное действие силы Кориолиса на каждую отдельно взятую движущуюся частицу не изменяет ее потенциальную энергию, а потому это действие не изменяет суммарную потенциальную энергию всей совершающей приливные движения материи, не подлежит сомнению. Однако вследствие изменения скоростей частиц в направлениях параллелей, меридианов и вертикалей и вследствие изменения в меридианном направлении тригонометрических функций $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$, являющихся множителями отдельных компонентов силы Кориолиса, эта сила изменяется в пространстве и, следовательно, сообщает

для объяснения приливных движений на Солнце и некоторых планетах Солнечной системы.

В последние годы существенное значение при объяснении приливов в океанах Земли придают изменениям гравитационного поля Земли за счет земных приливов.— *Прим. ред.*

частицам, расположенным в различных точках жидкого или газообразного тела, разные ускорения. Поэтому смещения находящихся в разных точках частиц, вызываемые ее действием, неодинаковы. Изменение взаимного расположения частиц приводит к изменению положения поверхности тела и силы, вызываемой градиентом давления, которая чаще всего направлена не под прямым углом к траекториям частиц и, таким образом, может выполнять работу. Следствием этого эффекта является изменение потенциальной, кинетической и общей энергии приливов.

Приливные движения, как и все механические движения в природе, происходят под действием силы трения, которая всегда направлена навстречу скорости и зависит от ее значения. Поскольку скорости частных приливных движений изменяются во времени периодически, сила трения также подвержена периодическим изменениям.

На основании изложенного можно заключить, что приливообразующая сила, сила, вызываемая градиентом давления, и силы Кориолиса и трения обладают общими особенностями — они действуют во всех трех взаимно перпендикулярных направлениях, т. е. в направлениях параллелей, меридианов и вертикалей, и изменяются во времени согласно периодическому закону. Период изменения силы, вызываемой градиентом давления, силы Кориолиса и силы трения в случае прямо пропорциональной зависимости ее от скорости приливного движения равен периоду изменения приливообразующей силы.

Часть II

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРИЛИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ

ГЛАВА 4. ОБЩИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ПРИЛИВОВ

Частицы, совершающие приливные движения в поле силы тяготения под действием приливообразующей силы, силы, вызываемой градиентом давления, и сил Кориолиса и трения, перемещаются в трех взаимно перпендикулярных направлениях — вдоль параллелей, меридианов и вертикалей. Поэтому приливные движения являются трехмерными. Двухмерные, а также одномерные приливные движения могут происходить при редко встречающихся в природе условиях, при которых какие-либо факторы препятствуют движению частиц в одном или в крайне редких случаях в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Приливные движения происходят под действием периодически изменяющихся во времени сил, а потому являются периодическими.

Очень важная особенность приливных движений заключается в том, что они являются движениями колебательными. Как известно, многие периодические движения (например, вращательные) не представляют собой колебаний, так как периодичность — необходимое, но недостаточное условие существования колебательного движения. Принципиальная особенность колебательного движения материальной точки состоит в том, что оно происходит под действием возвращающей силы, зависящей от положения материальной точки в пространстве и стремящейся вернуть ее в невозмущенное положение. Следовательно, колебательное движение или колебание — это периодическое движение, происходящее под действием возвращающей силы. Приливные движения частиц являются периодическими и происходят под действием возвращающей силы, вызываемой градиентом давления. Следовательно, они представляют собой колебания.

В природе существует два типа колебаний — вынужденные и свободные. Вынужденными называются колебания, которые происходят под действием возбуждающей силы, а свободными — колебания, происходящие в ее отсутствие. Период вынужденных колебаний равен периоду возбуждающей силы. Период свободных колебаний зависит от свойств системы, а в сложных системах и от характера первоначального отклонения отдельных их частей от невозмущенного положения. Приливные колебания происходят под непрерывным действием приливообразующей (возбуждающей) силы и представляют собой вынужденные колебания. Свободных приливных колебаний в природе не существует.

Главной причиной приливных колебаний в некоторых частях сложных систем, к числу которых относится Мировой океан, может быть не непосредственное действие на них приливообразующей силы, а действие силы, возникающей в процессе приливных колебаний в других частях системы. Например, важнейшей причиной существования полусуточных приливов в Северном Ледовитом океане, расположенном в высокоширотной области, в которой приливообразующие силы полусуточного периода очень малы, является действие силы, вызываемой горизонтальным градиентом давления, возникающим в процессе полусуточных колебаний в Атлантическом океане, которые возбуждаются действующими на его воды полусуточными приливообразующими силами. В таких системах приливные колебания можно разделить на собственные и индуцированные. Причиной существования собственных колебаний является непосредственное действие приливообразующей силы на частицы воды в исследуемом районе, а причиной индуцированных — действие силы, вызываемой горизонтальным градиентом давления, возникающим вследствие приливных колебаний в соседних районах. Реальное вынужденное приливное колебание в любой части сложной системы представляет собой сумму собственного и индуцированного колебаний. Поскольку приливообразующие силы действуют на все части Мирового океана, ни в одной из них приливные колебания не могут быть чисто индуцированными. С другой стороны, поскольку приливы существуют во всех частях Мирового океана, а эти части сообщаются между собой, ни в одной из них приливные колебания не могут быть чисто собственными.

Приливные движения всей массы жидкого (или газообразного) небесного тела или жидкой части твердого тела являются волновыми. Очевидно, что колебательное движение частиц является необходимым, но недостаточным условием существования волны. Например, колебательные движения частиц жидкости в физическом маятнике, представляющем собой подвешенный на нити сосуд с жидкостью, не являются волновыми. Волна — это движение материи, все частицы которой совершают колебания, причем фазы этих колебаний изменяются

в пространстве.* Изменение фаз в пространстве на 180° и более обеспечивает возможность существования стоячей волны, а изменение их на 360° и более волны поступательной.**

Согласно результатам, полученным в предыдущей главе, фазы полусуточных вертикальных приливных движений, вызываемых приливообразующими силами на жидком или газообразном небесном теле, изменяются в зональном направлении на 720° и в меридианном на 760° , фазы суточных вертикальных движений — в зональном направлении на 360° и в меридианном на 720° , а фазы частных долгопериодных вертикальных движений — в меридианном направлении на 720° . Даже в ориентированном вдоль меридиана узком водном бассейне небольшой протяженности, на воду в котором горизонтальная составляющая приливообразующей силы любого периода в течение длительных отрезков времени действует только в одном направлении, фазы вертикальных приливных движений изменяются в пространстве на 180° . Поэтому приливные движения массы всего жидкого или газообразного небесного тела или массы жидкости или газа, расположенной на поверхности твердого тела, имеют характер волны.

В природе существуют как вынужденные, так и свободные волны. Коренное различие между ними состоит в том, что в вынужденных волнах каждая частица материи совершает вынужденное колебание, а в свободных — свободное. Поэтому период вынужденной волны равен периоду силы, возбуждающей вынужденные колебания частиц, а период свободной волны определяется свойствами системы, в которой происходят свободные колебания, а в некоторых случаях также и характером первоначального отклонения отдельных частей системы от невозмущенного положения. Свободными волнами в Мировом океане являются цунами, сейши, зыбь и другие волновые движения,

* В физике под волной чаще всего понимается процесс распространения возмущений (колебаний). Это определение отражает скорее природу свободных волн в жидких и газообразных средах, акустических и электромагнитных волн, а не приливных, в которых собственные колебания частиц в целом преобладают над индуцированными. Приведенное в тексте определение волны относится главным образом к волнам, существование которых обусловлено механическими колебаниями частиц. Следует заметить, что, согласно этому определению, под волной можно понимать два существенно различных процесса: колебания в сплошной среде, в которой каждая движущаяся частица воздействует на другие и сама подвергается их воздействию (например, длинные волны в океане), и колебания в среде, в которой каждая движущаяся частица на другие не действует и воздействию с их стороны не подвергается (например, вызываемые ветром колебания не соприкасающихся друг с другом колосьев). Вопрос о целесообразности отнесения второго процесса к числу волновых является спорным. Поэтому приведенное определение волны не содержит уточнения, исключающего возможность рассмотрения этого процесса как волнового.

** Поступательная волна может существовать и при изменении фаз менее чем на 360° . Такая поступательная волна является вырожденной.

продолжающиеся после того, как сила, которая вывела воду в какой-нибудь части океана из положения равновесия, перестала действовать. В приливных волнах каждая частица совершает вынужденные колебания, а потому они представляют собой вынужденные волны. Свободных приливных волн в природе не существует.

Реальную приливную волну, как и реальное приливное колебание, можно рассматривать как сумму собственной и индуцированной волн. В большей части океанов амплитуды собственных волн превышают амплитуды индуцированных. В Северном Ледовитом океане и в большинстве окраинных морей, наоборот, преобладают индуцированные волны, характеристики которых весьма сильно зависят от приливов в прилегающих частях океанов.

В некоторых современных работах по океанографии индуцированные приливные волны в окраинных морях полагаются свободными.* Использование этой концепции, противоречащей как самой физической сущности явления, так и классическим воззрениям на него, существенно затрудняет изучение приливов в морях. Механизм возникновения приливных движений в них состоит в том, что каждая частица морской воды находится под непрерывным воздействием силы, вызываемой горизонтальным градиентом давления, которая возникает в процессе приливных колебаний в прилегающем районе океана. Эта сила изменяется во времени с тем периодом, какой имеет приливовая сила, возбуждающая океанский прилив. Поэтому каждая частица воды в море совершает вынужденное колебание с таким же периодом. Приливные колебания в окраинных морях, имеющих различные формы и размеры, но сообщаящихся с частью океана, в которой существуют приливы определенного, например полусуточного, периода, происходят с тем же самым периодом. Период же свободной волны зависит в первую очередь от размеров и формы бассейна. Поэтому если бы приливные волны, в соответствии с изложенной концепцией, были свободными, то в морях, прилегающих к упомянутой части океана, должны были бы существовать приливы самых различных периодов и, следовательно, полная или малая вода в них наблюдалась бы не два раза в сутки, а, например, 5, 17, 37 или какое-либо другое количество раз. В таком случае приливы в них были бы во многом сходны с сейшми, образующимися в небольшом бассейне после прохождения корабля. Принятие концепции о приливах в морях как о свободных волнах существенно усложняет определение кинематических характеристик приливных движений, так как делает неправомерным использование такого важного свойства частных приливных колебаний, каким является постоянство их периода во всех частях бассейна. Факт, что в окраинных морях индуцированные приливные движения, как и собственные, являются вынужденными, отмечен в работе А. В. Некрасова «Приливные волны в окраинных морях» [24].

✓ По форме волны делятся на поступательные, стоячие и сложные (смешанные); последние из них можно рассматривать как результат сложения поступательной и стоячей волны. Для анализа приливных волн удобно использовать следующие

* Действительно, приливные волны являются вынужденными. Когда отождествляется индуцированная приливная волна со свободной, то чаще всего имеется в виду то, что индуцированная приливная волна имеет фазовую скорость и длину волны, равную соответственно фазовой скорости и длине свободной волны.— Прим. ред.

определения, в которых показана зависимость формы волны от разности фаз горизонтальных и вертикальных движений частиц:

поступательная волна — это волна, в которой разность между фазами проекций любой кинематической характеристики движения каждой частицы (т. е. смещения, скорости или ускорения частицы) на горизонтальную плоскость и на вертикаль равна 90 или 270°;

стоячая волна — это волна, в которой фазы проекций любой кинематической характеристики движения каждой частицы на горизонтальную плоскость и на вертикаль равны между собой или отличаются на 180°;

сложная волна — это волна, в которой разности фаз проекций любой кинематической характеристики движения каждой частицы на горизонтальную плоскость и на вертикаль не равны 90, 270, 0 и 180°.

В последующих главах доказываем, что трехмерные приливные движения представляют собой сложные волны.

Таким образом, общие особенности приливных движений любого периода заключаются в том, что они являются трехмерными и периодическими, причем движение каждой отдельной частицы представляет собой вынужденное колебание, а движение всей совокупности частиц жидкого (или газообразного) небесного тела или жидкого слоя, покрывающего твердое тело, — вынужденную волну. Период колебания каждой частицы и период волны равны между собой и равны периоду приливообразующей силы, вызывающей приливные движения. Поэтому реальная приливообразующая сила, представляющая собой сумму полусуточной, суточной и долгопериодной сил, вызывает приливы трех классов — полусуточного, суточного и долгопериодного.

Другие особенности приливных движений можно установить путем анализа зависимостей кинематических характеристик приливов на всем небесном теле или в отдельных его частях от действующих сил. Такие зависимости можно найти путем решения систем уравнений (93) — (96) и (97—100) с использованием необходимых граничных условий. Для определения кинематических характеристик приливных движений в тонком слое несжимаемой жидкости, покрывающем твердое тело (например, в Мировом океане), целесообразно использовать также систему уравнений Лапласа, которая имеет следующий вид:

$$16 \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= F_{0v} - \frac{g}{R \cos \varphi} \frac{\partial z}{\partial \lambda} - 2\omega u \sin \varphi; \end{aligned} \right. \quad (101)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= F_{0u} - \frac{g}{R} \frac{\partial z}{\partial \varphi} + 2\omega v \sin \varphi; \end{aligned} \right. \quad (102)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= -\frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial (hv)}{\partial \lambda} - \frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial (hu \cos \varphi)}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right. \quad (103)$$

В этой системе уравнения движения (101), (102) определяют проекции ускорений на параллель и меридиан, приобретаемые частицами единичной массы вследствие действия на них приливнообразующей силы, силы, вызываемой градиентом давления, и силы Кориолиса. Гидродинамическое давление в этих уравнениях заменено гидростатическим, определяемым формулой (83), а входящие в них проекции скорости считаются величинами, не изменяющимися по вертикали. В уравнение движения (101) не входит слагаемое, определяющее проекцию силы Кориолиса на параллель, которое прямо пропорционально проекции скорости на вертикаль. Это допущение основано на том, что скорости движения частиц в вертикальном направлении малы. Проекция ускорения частицы на вертикаль полагается равной нулю, а потому третье уравнение движения в систему не входит. Уравнение неразрывности (103) показывает связь между проекциями скорости приливного движения на параллель и меридиан и отклонением (z) уровня от невозмущенного положения, имеющую место в океане, глубина (h) которого изменяется с широтой и долготой. Если глубина океана постоянна, уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{h}{R \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{h}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{h}{R} u \operatorname{tg} \varphi. \quad (104)$$

В некоторых современных работах приливные движения в Мировом океане, описываемые системой уравнений Лапласа, называются двухмерными. Вероятно, такое название связано с тем, что в систему входят только два уравнения движения, определяющие проекции ускорений частиц на два взаимно перпендикулярных направления, и тем, что искомые характеристики (v , u , z) приливов в этой системе являются функцией только двух изменяющихся в пространстве величин (λ и φ). Это название представляется неправильным. Фактически приливные движения в Мировом океане происходят в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Этот факт отражается и в уравнениях Лапласа, в которые входит отклонение уровня от невозмущенного положения, являющееся следствием вертикальных движений. Далее, проекции на параллель, меридиан и вертикаль всех кинематических характеристик приливов в Мировом океане, как и в любом жидком слое, покрывающем твердое небесное тело, зависят не только от географической широты и долготы, но и от расстояния до центра Земли, хотя изменение их в вертикальном направлении очень невелико. Трехмерность приливных движений в исследуемом бассейне и их зависимость от трех изменяющихся в пространстве параметров (λ , φ и r) выражаются общей системой уравнений гидродинамики (97)–(100), описывающей приливы более точно, чем система Лапласа. Естественно, что упрощения, введенные Лапласом для того, чтобы облегчить определение кинематических характеристик приливов в океанах Земли, не изменяют физических особенностей существующих в природе приливных движений и не могут служить основанием называть реально существующие трехмерные движения движениями двухмерными.

Двухмерные приливные движения могут иметь место в узких длинных каналах, поперечные движения в которых чрезвычайно малы. В таких каналах частицы воды движутся в двух взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей каналов и вдоль

вертикалей. Приливные движения в каналах постоянной глубины и ширины, ориентированных вдоль параллелей и меридианов, описываются следующими системами дифференциальных уравнений движения и неразрывности:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = F_{0v} - \frac{g}{R \cos \varphi} \frac{\partial z}{\partial \lambda}; \end{array} \right. \quad (105)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial t} = - \frac{h}{R \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda}; \end{array} \right. \quad (106)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = F_{0u} - \frac{g}{R} \frac{\partial z}{\partial \varphi}; \end{array} \right. \quad (107)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial t} = - \frac{h}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{array} \right. \quad (108)$$

Двухмерные приливные движения несжимаемой жидкости представляют собой частный случай приливных движений в природе. Однако знание их закономерностей облегчает установление особенностей трехмерных движений. Как уже отмечалось во введении, выполненное Эри [32] исследование приливов в направленных вдоль параллелей и меридианов и окружающих земной шар каналах постоянной глубины и ширины сыграло огромную роль в развитии теории приливов. Принципиальные особенности двухмерных приливных движений рассмотрены в следующей главе.

ГЛАВА 5. ДВУХМЕРНЫЕ ПРИЛИВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

5.1. ПРИЛИВЫ В ЗОНАЛЬНЫХ И МЕРИДИАННЫХ КАНАЛАХ, ОКРУЖАЮЩИХ ЗЕМНОЙ ШАР

Системы дифференциальных уравнений, описывающих полусуточные и суточные приливы в окружающих Землю узких зональных каналах постоянной глубины и ширины, получаются путем подстановки в систему уравнений (105), (106) полусуточного и суточного компонентов проекции приливообразующей силы на параллель, а системы дифференциальных уравнений, описывающих полусуточные, суточные и частные долгопериодные приливы в окружающих Землю узких меридианных каналах, также имеющих на всем протяжении одинаковую глубину и ширину, — путем подстановки в систему уравнений (107), (108) полусуточного, суточного и частного долгопериодного компонентов проекции приливообразующей силы на меридиан. Эти системы имеют следующий вид: *

* Каждая из приведенных ниже систем сводится к одному линейному неоднородному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами, решение которых хорошо известно. — *Прим. ред.*

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_{п. п}}{\partial t} &= F_{0п} \cos \varphi \sin 2(nt - \lambda) - \frac{g}{R \cos \varphi} \frac{\partial z_{п. п}}{\partial \lambda}; \end{aligned} \right. \quad (109)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z_{п. п}}{\partial t} &= -\frac{h}{R \cos \varphi} \frac{\partial v_{п. п}}{\partial \lambda}; \end{aligned} \right. \quad (110)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_{п. с}}{\partial t} &= F_{0с} \sin \varphi \sin (nt - \lambda) - \frac{g}{R \cos \varphi} \frac{\partial z_{п. с}}{\partial \lambda}; \end{aligned} \right. \quad (111)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z_{п. с}}{\partial t} &= -\frac{h}{R \cos \varphi} \frac{\partial v_{п. с}}{\partial \lambda}; \end{aligned} \right. \quad (112)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_{м. п}}{\partial t} &= -\frac{1}{2} F_{0п} \sin 2\varphi \cos 2(nt - \lambda) - \frac{g}{R} \frac{\partial z_{м. п}}{\partial \varphi}; \end{aligned} \right. \quad (113)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z_{м. п}}{\partial t} &= -\frac{h}{R} \frac{\partial v_{м. п}}{\partial \varphi}; \end{aligned} \right. \quad (114)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_{м. с}}{\partial t} &= F_{0с} \cos 2\varphi \cos (nt - \lambda) - \frac{g}{R} \frac{\partial z_{м. с}}{\partial \varphi}; \end{aligned} \right. \quad (115)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z_{м. с}}{\partial t} &= -\frac{h}{R} \frac{\partial v_{м. с}}{\partial \varphi}; \end{aligned} \right. \quad (116)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_{м. ч. л}}{\partial t} &= -F_{0ч. л} \sin 2\varphi \cos (mt - \psi) - \frac{g}{R} \frac{\partial z_{м. ч. л}}{\partial \varphi}; \end{aligned} \right. \quad (117)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z_{м. ч. л}}{\partial t} &= -\frac{h}{R} \frac{\partial v_{м. ч. л}}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right. \quad (118)$$

В этих уравнениях индексы при искомым величинах — скорости (v) течения в направлении продольной оси канала и отклонения (z) уровня от невозмущенного положения — имеют такое же значение, как и индексы при компонентах приливообразующей силы, использованные в предыдущих главах.

Положим, что амплитуды ($F_{0п}$ и $F_{0с}$) полусуточной и суточной приливообразующей силы и относительная угловая скорость (n) не изменяются во времени. Это допущение, впервые использованное Эри [32], не только облегчает определение кинематических характеристик приливов, но и позволяет установить общие особенности всех частных приливных движений как полусуточного, так и суточного класса. При названном допущении все кинематические характеристики полусуточных и суточных движений, как и характеристики частных долгопериодных движений, изменяются во времени согласно гармоническому закону. Поэтому скорости приливных течений в направлениях продольных осей зональных и меридианных каналов можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} v_{п. п} &= V_{п. п} \cos 2(nt - \phi_{п. п}) = V_{п. п} \cos 2\phi_{п. п} \cos 2nt + \\ &+ V_{п. п} \sin 2\phi_{п. п} \sin 2nt = v_{1п. п} \cos 2nt + v_{2п. п} \sin 2nt; \end{aligned} \quad (119)$$

$$\begin{aligned} v_{п. с} &= V_{п. с} \cos (nt - \phi_{п. с}) = V_{п. с} \cos \phi_{п. с} \cos nt + \\ &+ V_{п. с} \sin \phi_{п. с} \sin nt = v_{1п. с} \cos nt + v_{2п. с} \sin nt; \end{aligned} \quad (120)$$

$$v_{м. п} = V_{м. п} \cos 2(nt - \phi_{м. п}) = V_{м. п} \cos 2\phi_{м. п} \cos 2nt + \\ + V_{м. п} \sin 2\phi_{м. п} \sin 2nt = v_{1м. п} \cos 2nt + v_{2м. п} \sin 2nt; \quad (121)$$

$$v_{м. с} = V_{м. с} \cos (nt - \phi_{м. с}) = V_{м. с} \cos \phi_{м. с} \cos nt + \\ + V_{м. с} \sin \phi_{м. с} \sin nt = v_{1м. с} \cos nt + v_{2м. с} \sin nt; \quad (122)$$

$$v_{м. ч. д} = V_{м. ч. д} \cos (mt - \phi_{м. ч. д}) = V_{м. ч. д} \cos \phi_{м. ч. д} \cos mt + \\ + V_{м. ч. д} \sin \phi_{м. ч. д} \sin mt = v_{1м. ч. д} \cos mt + v_{2м. ч. д} \sin mt, \quad (123)$$

где $V_{п. п}$, $V_{п. с}$, $V_{м. п}$, $V_{м. с}$, $V_{м. ч. д}$ — амплитуды скоростей полусуточных, суточных и частных долгопериодных течений в зональных и меридианных каналах; $2\phi_{п. п}$, $\phi_{п. с}$, $2\phi_{м. п}$, $\phi_{м. с}$, $\phi_{м. ч. д}$ — фазы этих скоростей, $v_{1п. п} = V_{п. п} \cos 2\phi_{п. п}$, $v_{2п. п} = V_{п. п} \sin 2\phi_{п. п}$, $v_{1п. с} = V_{п. с} \cos \phi_{п. с}$, $v_{2п. с} = V_{п. с} \sin \phi_{п. с}$, $v_{1м. п} = V_{м. п} \cos 2\phi_{м. п}$, $v_{2м. п} = V_{м. п} \sin 2\phi_{м. п}$, $v_{1м. с} = V_{м. с} \cos \phi_{м. с}$, $v_{2м. с} = V_{м. с} \sin \phi_{м. с}$, $v_{1м. ч. д} = V_{м. ч. д} \cos \phi_{м. ч. д}$, $v_{2м. ч. д} = V_{м. ч. д} \sin \phi_{м. ч. д}$.

Подставим значение $V_{п. п}$ из формулы (119) в уравнение (110), проинтегрируем уравнение (110) по времени и, подставив найденное значение $z_{п. п}$ в уравнение (109), в котором компонент приливообразующей силы записан в виде двух слагаемых, получим*:

$$\frac{\partial v_{п. п}}{\partial t} = F_{оп} \cos \varphi \cos 2\lambda \sin 2nt - F_{оп} \cos \varphi \sin 2\lambda \cos 2nt + \\ + \frac{gh}{2R^2 n \cos^2 \varphi} \cdot \frac{\partial^2 v_{1п. п}}{\partial \lambda^2} \sin 2nt - \frac{gh}{2R^2 n \cos^2 \varphi} \cdot \frac{\partial^2 v_{2п. п}}{\partial \lambda^2} \cos 2nt.$$

Проинтегрируем это уравнение по времени, выразим значение $v_{п. п}$ в его левой части через $v_{1п. п}$ и $v_{2п. п}$ и, приравняв коэффициенты при тригонометрических функциях $\cos 2nt$ и $\sin 2nt$ в левой и правой частях, получим два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка относительно искомых величин $v_{1п. п}$ и $v_{2п. п}$:

$$\frac{gh}{4R^2 n^2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{d^2 v_{1п. п}}{d\lambda^2} + v_{1п. п} = -\frac{F_{оп}}{2n} \cos \varphi \cos 2\lambda; \quad (124)$$

$$\frac{gh}{4R^2 n^2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{d^2 v_{2п. п}}{d\lambda^2} + v_{2п. п} = -\frac{F_{оп}}{2n} \cos \varphi \sin 2\lambda. \quad (125)$$

Решение уравнения (124) представляет собой сумму общего решения однородного уравнения $\frac{gh}{4R^2 n^2 \cos^2 \varphi} \frac{d^2 v_{1п. п}}{d\lambda^2} + v_{1п. п} =$

* Подробный вывод формул, определяющих кинематические характеристики полусуточных и суточных приливов в рассматриваемых каналах, приведен в работе [28].

$= 0$ и частного решения неоднородного уравнения * (124). Общее решение ($\bar{v}_{1n, n}$) однородного уравнения имеет вид

$$\bar{v}_{1n, n} = C_1 \sin \frac{2Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} \lambda + C_2 \cos \frac{2Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} \lambda,$$

где C_1 и C_2 — постоянные. Частное решение ($\tilde{v}_{1n, n}$) неоднородного уравнения находится с помощью подстановки $\tilde{v}_{1n, n} = y_1 \cos 2\lambda$, где y_1 не зависит от λ . Используя эту подстановку, получаем

$$-\frac{gh}{R^2 n^2 \cos^2 \varphi} y_1 \cos 2\lambda + y_1 \cos 2\lambda = -\frac{F_{0n}}{2n} \cos \varphi \cos 2\lambda,$$

откуда

$$y_1 = \frac{F_{0n} R^2 n \cos^3 \varphi}{2(gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)} \text{ и } \tilde{v}_{1n, n} = \frac{F_{0n} R^2 n \cos^3 \varphi \cos 2\lambda}{2(gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)}.$$

Следовательно,

$$v_{1n, n} = \bar{v}_{1n, n} + \tilde{v}_{1n, n} = C_1 \sin \frac{2Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} \lambda + C_2 \cos \frac{2Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} \lambda + \frac{F_{0n} R^2 n \cos^3 \varphi \cos 2\lambda}{2(gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)}. \quad (126)$$

Решение уравнения (125) также представляет собой сумму общего решения однородного уравнения $\frac{gh}{4R^2 n^2 \cos^2 \varphi} \times \times \frac{d^2 v_{2n, n}}{d\lambda^2} + v_{2n, n} = 0$ и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение имеет вид

$$\bar{v}_{2n, n} = C_3 \sin \frac{2Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} \lambda + C_4 \cos \frac{2Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} \lambda.$$

Частное решение находится с помощью подстановки $\tilde{v}_{2n, n} = y_2 \sin 2\lambda$, где y_2 не зависит от λ :

$$\tilde{v}_{2n, n} = \frac{F_{0n} R^2 n \cos^3 \varphi \sin 2\lambda}{2(gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)}.$$

Таким образом,

$$v_{2n, n} = \bar{v}_{2n, n} + \tilde{v}_{2n, n} = C_3 \sin \frac{2Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} \lambda + C_4 \cos \frac{2Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} \lambda + \frac{F_{0n} R^2 n \cos^3 \varphi \sin 2\lambda}{2(gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)}. \quad (127)$$

* Решения однородных уравнений в этом разделе и далее могут быть интерпретированы как индуцированные приливы, а частные решения неоднородных уравнений — как собственные приливы. — Прим. ред.

Подставляя значения $v_{п.с.}$, $v_{м.п.}$, $v_{м.с.}$, $v_{м.ч.д.}$, определяемые формулами (120)–(123), в системы уравнений движения и неразрывности (111)–(112), (113)–(114), (115)–(116), (117)–(118) и решая эти системы аналогичным способом, находим:

$$v_{1п.с.} = C_5 \sin \frac{Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} \lambda + C_6 \cos \frac{Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} \lambda + \frac{F_{0с} R^2 n \sin \varphi \cos^2 \varphi \cos \lambda}{gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi}; \quad (128)$$

$$v_{2п.с.} = C_7 \sin \frac{Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} \lambda + C_8 \cos \frac{Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} \lambda + \frac{F_{0с} R^2 n \sin \varphi \cos^2 \varphi \sin \lambda}{gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi}; \quad (129)$$

$$v_{1м.п.} = C_9 \sin \frac{2Rn}{\sqrt{gh}} \varphi + C_{10} \cos \frac{2Rn}{\sqrt{gh}} \varphi - \frac{F_{0с} R^2 n \sin 2\varphi \sin 2\lambda}{4(gh - R^2 n^2)}; \quad (130)$$

$$v_{2м.п.} = C_{11} \sin \frac{2Rn}{\sqrt{gh}} \varphi + C_{12} \cos \frac{2Rn}{\sqrt{gh}} \varphi + \frac{F_{0с} R^2 n \sin 2\varphi \cos 2\lambda}{4(gh - R^2 n^2)}; \quad (131)$$

$$v_{1м.с.} = C_{13} \sin \frac{Rn}{\sqrt{gh}} \varphi + C_{14} \cos \frac{Rn}{\sqrt{gh}} \varphi + \frac{F_{0с} R^2 n \cos 2\varphi \sin \lambda}{4gh - R^2 n^2}; \quad (132)$$

$$v_{2м.с.} = C_{15} \sin \frac{Rn}{\sqrt{gh}} \varphi + C_{16} \cos \frac{Rn}{\sqrt{gh}} \varphi - \frac{F_{0с} R^2 n \cos 2\varphi \cos \lambda}{4gh - R^2 n^2}; \quad (133)$$

$$v_{1м.ч.д.} = C_{17} \sin \frac{Rm}{\sqrt{gh}} \varphi + C_{18} \cos \frac{Rm}{\sqrt{gh}} \varphi - \frac{F_{0ч.д} R^2 m \sin 2\varphi \sin \psi}{4gh - R^2 m^2}; \quad (134)$$

$$v_{2м.ч.д.} = C_{19} \sin \frac{Rm}{\sqrt{gh}} \varphi + C_{20} \cos \frac{Rm}{\sqrt{gh}} \varphi + \frac{F_{0ч.д} R^2 m \sin 2\varphi \cos \psi}{4gh - R^2 m^2}. \quad (135)$$

Постоянные $C_1 - C_{20}$ в уравнениях (126)–(135) в принципе могут быть найдены из граничных условий. Поскольку замкнутые каналы не имеют поперечных границ, граничные условия в этой задаче не имеют смысла. Поэтому, как впервые было показано Эри [32], в данной задаче постоянные $C_1 - C_{20}$ равны нулю, а искомые величины $v_{1п.п.}$, $v_{2п.п.}$, $v_{1п.с.}$, $v_{2п.с.}$, $v_{1м.п.}$, $v_{2м.п.}$, $v_{1м.с.}$, $v_{2м.с.}$, $v_{1м.ч.д.}$, $v_{2м.ч.д.}$ определяются частными решениями уравнений, полученных из систем (109)–(110), (111)–(112), (113)–(114), (115)–(116) и (117)–(118).

Подставив названные величины в формулы (119)–(123) и выполнив элементарные преобразования, найдем скорости

полусуточных и суточных приливных течений в зональных каналах и скорости полусуточных, суточных и частных долгопериодных течений в каналах меридианных:

$$\begin{aligned} v_{п. п} &= \frac{F_{0п} R^2 n \cos^3 \varphi}{2(gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)} \cos 2(nt - \lambda) = \\ &= \frac{3}{2} f \frac{MR^3}{d^3} \frac{n \cos^2 \delta \cos^3 \varphi}{2(gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)} \cos 2(nt - \lambda); \end{aligned} \quad (136)$$

$$\begin{aligned} v_{п. с} &= \frac{F_{0с} R^2 n \sin \varphi \cos^2 \varphi}{gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi} \cos (nt - \lambda) = \\ &= \frac{3}{2} f \frac{MR^3}{d^3} \frac{n \sin 2\delta \sin \varphi \cos^2 \varphi}{gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi} \cos (nt - \lambda); \end{aligned} \quad (137)$$

$$\begin{aligned} v_{м. п} &= \frac{F_{0п} R^2 n \sin 2\varphi}{4(gh - R^2 n^2)} \sin 2(nt - \lambda) = \\ &= \frac{3}{4} f \frac{MR^3}{d^3} \frac{n \cos^2 \delta \sin 2\varphi}{2(gh - R^2 n^2)} \sin 2(nt - \lambda); \end{aligned} \quad (138)$$

$$\begin{aligned} v_{м. с} &= - \frac{F_{0с} R^2 n \cos 2\varphi}{4gh - R^2 n^2} \sin (nt - \lambda) = \\ &= - \frac{3}{2} f \frac{MR^3}{d^3} \frac{n \sin 2\delta \cos 2\varphi}{4gh - R^2 n^2} \sin (nt - \lambda); \end{aligned} \quad (139)$$

$$v_{м. ч. д} = \frac{F_{0ч. д} R^2 m \sin 2\varphi}{4gh - R^2 m^2} \sin (mt - \psi). \quad (140)$$

Формулы горизонтальных смещений ($S_{п. п}$, $S_{п. с}$, $S_{м. п}$, $S_{м. с}$, $S_{м. ч. д}$) и горизонтальных ускорений ($a_{п. п}$, $a_{п. с}$, $a_{м. п}$, $a_{м. с}$, $a_{м. ч. д}$) частиц в зональных и меридианных каналах выводятся путем интегрирования и дифференцирования формул, определяющих горизонтальные скорости, по времени ($s = \int v dt$, $a = dv/dt$). Эти формулы приведены в табл. 14.

Отклонения ($z_{п. п}$, $z_{п. с}$, $z_{м. п}$, $z_{м. с}$, $z_{м. ч. д}$) уровня от невозмущенного положения находятся путем решения уравнений неразрывности (110), (112), (114), (116) и (118), в которые подставляются горизонтальные скорости, определяемые формулами (136) — (140). Перечисленные отклонения уровня равны

$$\begin{aligned} z_{п. п} &= \frac{F_{0п} R h \cos^2 \varphi}{2(gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)} \cos 2(nt - \lambda) = \\ &= \frac{3}{2} f \frac{MR^2}{d^3} \frac{h \cos^2 \delta \cos^2 \varphi}{2(gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)} \cos 2(nt - \lambda); \end{aligned} \quad (141)$$

$$z_{п.с} = \frac{F_{0c} R h \sin 2\varphi}{2(gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)} \cos(nt - \lambda) =$$

$$= \frac{\frac{3}{2} f \frac{MR^2}{d^3} h \sin 2\delta \sin 2\varphi}{2(gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)} \cos(nt - \lambda); \quad (142)$$

$$z_{м.п} = \frac{\frac{1}{2} F_{0п} R h \cos 2\varphi}{2(gh - R^2 n^2)} \cos 2(nt - \lambda) =$$

$$= \frac{\frac{3}{2} f \frac{MR^2}{d^3} h \cos^2 \delta \cos 2\varphi}{4(gh - R^2 n^2)} \cos 2(nt - \lambda); \quad (143)$$

$$z_{м.с} = \frac{2F_{0c} R h \sin 2\varphi}{4gh - R^2 n^2} \cos(nt - \lambda) =$$

$$= \frac{3f \frac{MR^2}{d^3} h \sin 2\delta \sin 2\varphi}{4gh - R^2 n^2} \cos(nt - \lambda); \quad (144)$$

$$z_{м.ч.д} = \frac{2F_{0ч.д} R h \cos 2\varphi}{4gh - R^2 m^2} \cos(mt - \psi). \quad (145)$$

Вертикальные скорости и ускорения частиц в поверхностном слое определяются путем дифференцирования и двукратного дифференцирования формул (141) — (145) по времени.

Таким образом, все кинематические характеристики двухмерных приливных движений в рассматриваемых каналах выражаются элементарными функциями, что существенно облегчает установление особенностей этих движений.

Как показано в работе [28], выведенные формулы кинематических характеристик полусуточных и суточных приливов в зональных и меридианных каналах тождественны формулам, которые Эри [32] получил несколько иным способом. Формулы характеристик долгопериодных приливов отличаются от формул Эри, рассматривавшего приливы этого класса как статический процесс. При таком допущении уравнение движения, описывающее приливы долгого периода в меридианном канале, имеет вид

$$\frac{3}{4} f \frac{MR}{d^3} (3 \sin^2 \delta - 1) \sin 2\varphi - \frac{g}{R} \frac{dz_{м.д}}{d\varphi} = 0.$$

Из этого уравнения следует, что

$$z_{м.д} = \frac{3}{8} \frac{f}{g} \frac{MR^2}{d^3} (1 - 3 \sin^2 \delta) \cos 2\varphi. \quad (146)$$

В соответствии с уравнением неразрывности, долгопериодное отклонение уровня от невозмущенного положения при постоянных во времени скоростях течения равно

$$z_{м.д} = - \frac{h}{R} \frac{ds_{м.д}}{d\varphi}.$$

Каналы	Класс приливов	Проекция	Кинематические характеристики		
			смещение	скорость	ускорение
Зональный	Полусуточный	На параллель	$\frac{F_{0n}R^2 \cos^3 \varphi}{4(gh - R^2n^2 \cos^2 \varphi)} \times$ $\times \sin 2(nt - \lambda)$	$\frac{F_{0n}R^2n \cos^3 \varphi}{2(gh - R^2n^2 \cos^2 \varphi)} \times$ $\times \cos 2(nt - \lambda)$	$-\frac{F_{0n}R^2n^2 \cos^3 \varphi}{gh - R^2n^2 \cos^2 \varphi} \times$ $\times \sin 2(nt - \lambda)$
		На вертикаль	$\frac{F_{0n}Rp \cos^2 \varphi}{2(gh - R^2n^2 \cos^2 \varphi)} \times$ $\times \cos 2(nt - \lambda)$	$-\frac{F_{0n}Rpn \cos^2 \varphi}{gh - R^2n^2 \cos^2 \varphi} \times$ $\times \sin 2(nt - \lambda)$	$-\frac{2F_{0n}Rpn^2 \cos^2 \varphi}{gh - R^2n^2 \cos^2 \varphi} \times$ $\times \cos 2(nt - \lambda)$
	Суточный	На параллель	$\frac{F_{0c}R^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{gh - R^2n^2 \cos^2 \varphi} \times$ $\times \sin (nt - \lambda)$	$\frac{F_{0c}R^2n \sin \varphi \cos^2 \varphi}{gh - R^2n^2 \cos^2 \varphi} \times$ $\times \cos (nt - \lambda)$	$-\frac{F_{0c}R^2n^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{gh - R^2n^2 \cos^2 \varphi} \times$ $\times \sin (nt - \lambda)$
		На вертикаль	$\frac{F_{0c}Rp \sin 2\varphi}{2(gh - R^2n^2 \cos^2 \varphi)} \times$ $\times \cos (nt - \lambda)$	$-\frac{F_{0c}Rpn \sin^2 \varphi}{2(gh - R^2n^2 \cos^2 \varphi)} \times$ $\times \sin (nt - \lambda)$	$-\frac{F_{0c}Rpn^2 \sin 2\varphi}{2(gh - R^2n^2 \cos^2 \varphi)} \times$ $\times \cos (nt - \lambda)$
Меридианный	Полусуточный	На меридиан	$-\frac{\frac{1}{2} F_{0n}R^2 \sin 2\varphi}{4(gh - R^2n^2)} \times$ $\times \cos 2(nt - \lambda)$	$-\frac{\frac{1}{2} F_{0n}R^2n \sin 2\varphi}{2(gh - R^2n^2)} \times$ $\times \sin 2(nt - \lambda)$	$-\frac{\frac{1}{2} F_{0n}R^2n^2 \sin 2\varphi}{gh - R^2n^2} \times$ $\times \cos 2(nt - \lambda)$
		На вертикаль	$\frac{F_{0n}Rp \cos 2\varphi}{4(gh - R^2n^2)} \cos 2(nt - \lambda)$	$-\frac{F_{0n}Rpn \cos 2\varphi}{2(gh - R^2n^2)} \sin 2(nt - \lambda)$	$-\frac{F_{0n}Rpn^2 \cos 2\varphi}{gh - R^2n^2} \times$ $\times \cos 2(nt - \lambda)$
	Суточный	На меридиан	$\frac{F_{0c}R^2 \cos 2\varphi}{4gh - R^2n^2} \cos (nt - \lambda)$	$-\frac{F_{0c}R^2n \cos 2\varphi}{4gh - R^2n^2} \sin (nt - \lambda)$	$-\frac{F_{0c}R^2n^2 \cos 2\varphi}{4gh - R^2n^2} (\cos nt - \lambda)$
		На вертикаль	$\frac{2F_{0c}Rp \sin 2\varphi}{4gh - R^2n^2} \cos (nt - \lambda)$	$-\frac{2F_{0c}Rpn \sin 2\varphi}{4gh - R^2n^2} \sin (nt - \lambda)$	$-\frac{2F_{0c}Rpn^2 \sin 2\varphi}{4gh - R^2n^2} \cos (nt - \lambda)$
	Долгопериодный	На меридиан	$-\frac{F_{0ч.д}R^2 \sin 2\varphi}{4gh - R^2m^2} \cos (mt - \psi)$	$\frac{F_{0ч.д}R^2m \sin 2\varphi}{4gh - R^2m^2} \sin (mt - \psi)$	$\frac{F_{0ч.д}R^2m^2 \sin 2\varphi}{4gh - R^2m^2} \times$ $\times \cos (mt - \psi)$
		На вертикаль	$\frac{2F_{0ч.д}Rp \cos 2\varphi}{4gh - R^2m^2} \cos (mt - \psi)$	$-\frac{2F_{0ч.д}Rpm \cos 2\varphi}{4gh - R^2m^2} \times$ $\times \sin (mt - \psi)$	$-\frac{2F_{0ч.д}Rpm^2 \cos 2\varphi}{4gh - R^2m^2} \times$ $\times \cos (mt - \psi)$

Отсюда

$$S_{м. д} = -\frac{R}{h} \int z_{м. д} d\varphi = -\frac{3}{16} \frac{f}{gh} \frac{MR^3}{d^3} (1 - 3 \sin^2 \delta) \sin 2\varphi. \quad (147)$$

1. Анализируя выведенные формулы, Эри установил важнейшие особенности приливов в зональных и меридианных каналах. В частности, он показал, что приливные движения в них являются волновыми, причем приливная волна в каждом канале, направленном вдоль параллелей, представляет собой сумму полусуточной и суточной поступательных волн, а приливная волна в каждом меридианном канале — сумму стоячих волн полусуточного, суточного и долгого периодов. Представляется, что это открытие Эри, роль которого в развитии представлений о формировании приливов в Мировом океане была отмечена во введении, имеет также фундаментальное значение для теории волн. Согласно традиционной точке зрения, стоячая волна возникает в результате сложения поступательной волны, отразившейся от какого-нибудь препятствия, с набегающей на него новой поступательной волной. Но, как показал Эри, стоячие приливные волны всех периодов в меридианных каналах возникают не вследствие интерференции поступательных волн, а из-за непосредственного действия приливообразующих сил. Тем самым был открыт принципиально новый механизм возникновения глобальных стоячих волн, обладающих огромным количеством движения и огромной энергией.

Согласно исследованиям Эри, в меридианных каналах пучности стоячих волн полусуточного и долгого периодов находятся на экваторе и на полюсах, а узловые линии, на которых все кинематические характеристики горизонтальных движений имеют максимальные значения, — на параллелях 45° N и 45° S. Пучности суточной стоячей волны, наоборот, расположены на указанных параллелях, а узловые линии — на полюсах и экваторе. В этих каналах амплитуды колебаний уровня и горизонтальных смещений частиц изменяются с широтой места. В зональных каналах амплитуды приливных волн не зависят от долготы, но зависят от широты, на которой расположен канал. В канале, продольная ось которого совпадает с экватором, кинематические характеристики полусуточной волны имеют максимальные значения, а суточная волна вообще отсутствует.

Амплитуды кинематических характеристик полусуточных и суточных приливов, вызываемых компонентами $F_{п.п}$ и $F_{п.с}$ приливообразующей силы в зональных каналах и ее компонентами $F_{м.п}$ и $F_{м.с}$ в каналах меридианных, прямо пропорциональны этим компонентам, но обратно пропорциональны разностям $gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi$, $gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi$, $gh - R^2 n^2$, $4gh - R^2 n^2$. От этих разностей зависят не только амплитуды, но и фазы приливных волн. Если $R^2 n^2 \cos^2 \varphi < gh$, то в зональных каналах

гребни полусуточной волны находятся на меридианах с часовыми углами 0 и 180°, а подошвы — на меридианах, часовые углы на которых равны 90 и 270°; в северном полушарии гребень суточной волны при положительном склонении светила располагается на меридиане, на котором $T = 0^\circ$, подошва — на меридиане с часовым углом 180°, а в южном полушарии гребень — на меридиане с часовым углом 180° и подошва — на меридиане, на котором этот угол равен 0°. Такие приливы называются прямыми. Если же $gh < R^2 n^2 \cos^2 \varphi$, то фазы приливных волн полусуточного и суточного периодов в зональных каналах отличаются от фаз только что описанных волн на 180° и в каналах существуют так называемые обращенные приливы. Фазы полусуточных и суточных стоячих приливных волн в меридианных каналах также изменяются на противоположные при перемене знака разностей $gh - R^2 n^2$ и $4gh - R^2 n^2$. От знаков этих разностей зависят фазы всех кинематических характеристик приливных движений.

Результаты, полученные Эри, можно объяснить с позиций современной теории колебаний. Для этого необходимо преобразовать формулы, определяющие кинематические характеристики приливов.

Периоды (τ_n , τ_c и τ_d) полусуточных, суточных и частных долгопериодных волн равны $\tau_n = \pi/n$, $\tau_c = 2\pi/n$, $\tau_d = 2\pi/m$. Следовательно, относительная угловая скорость n и циклическая частота m долгопериодной волны связаны с этими периодами формулами

$$n = \frac{\pi}{\tau_n}, \quad n = \frac{2\pi}{\tau_c}, \quad m = \frac{2\pi}{\tau_{ч. д.}}$$

Скорость C свободной волны определяется формулой $C = \lambda/\tau_0$, где λ и τ_0 — ее длина и период. Можно доказать, что длины свободных волн, в которые превратились бы вынужденные волны в зональных и меридианных каналах, если бы прекратили действовать приливообразующие силы, равны длинам этих вынужденных волн. Согласно формулам (141) — (145), в зональных каналах длина суточной волны равна длине параллели, совпадающей с продольной осью канала, а длина полусуточной — половине длины этой параллели. В меридианных каналах длины волн полусуточного, суточного и долгого периодов равны половине длины окружности, образованной двумя меридианами. Следовательно, скорость свободной волны определяется формулами

$$C = \frac{\pi R \cos \varphi}{\tau_{оп. п.}}, \quad C = \frac{2\pi R \cos \varphi}{\tau_{оп. с.}}, \quad C = \frac{\pi R}{\tau_{ом. п.}},$$

$$C = \frac{\pi R}{\tau_{ом. с.}}, \quad C = \frac{\pi R}{\tau_{ом. ч. д.}},$$

в которых $\tau_{оп. п.}$, $\tau_{оп. с.}$, $\tau_{ом. п.}$, $\tau_{ом. с.}$ и $\tau_{ом. ч. д.}$ — периоды свободных колебаний частиц воды, равные периодам свободных волн, в которые превратились бы полусуточные, суточные и частные

долгопериодные волны в зональных и меридианных каналах после прекращения действия приливообразующих сил.

Подставим в формулы горизонтальных ускорений частиц, приведенные в табл. 14, значения gh (т. е. C^2), n и m :

$$\begin{aligned} a_{n, n} &= - \frac{F_{0n} R^2 n^2 \cos^3 \varphi}{\frac{\pi^2 R^2 \cos^2 \varphi}{\tau_{0n, n}^2} - \frac{\pi^2 R^2 \cos^2 \varphi}{\tau_n^2}} \sin 2(nt - \lambda) = \\ &= - \frac{F_{0n} n^2 \tau_{0n, n}^2 \tau_n^2 \cos \varphi}{\pi^2 (\tau_{0n, n}^2 - \tau_n^2)} \sin 2(nt - \lambda) = - \frac{F_{0n} \tau_{0n, n}^2 \cos \varphi}{\tau_{0n, n}^2 - \tau_n^2} \sin 2(nt - \lambda); \end{aligned} \quad (148)$$

$$\begin{aligned} a_{n, c} &= - \frac{F_{0c} R^2 n^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{\frac{4\pi^2 R^2 \cos^2 \varphi}{\tau_{0n, c}^2} - \frac{4\pi^2 R^2 \cos^2 \varphi}{\tau_c^2}} \sin (nt - \lambda) = \\ &= - \frac{F_{0c} n^2 \tau_{0n, c}^2 \tau_c^2 \sin \varphi}{4\pi^2 (\tau_{0n, c}^2 - \tau_c^2)} \sin (nt - \lambda) = - \frac{F_{0c} \tau_{0n, c}^2 \sin \varphi}{\tau_{0n, c}^2 - \tau_c^2} \sin (nt - \lambda); \end{aligned} \quad (149)$$

$$\begin{aligned} a_{m, n} &= - \frac{\frac{1}{2} F_{0n} R^2 n^2 \sin 2\varphi}{\frac{\pi^2 R^2}{\tau_{0m, n}^2} - \frac{\pi^2 R^2}{\tau_n^2}} \cos 2(nt - \lambda) = \\ &= - \frac{\frac{1}{2} F_{0n} n^2 \tau_{0m, n}^2 \tau_n^2 \sin 2\varphi}{\pi^2 (\tau_{0m, n}^2 - \tau_n^2)} \cos 2(nt - \lambda) = \\ &= - \frac{\frac{1}{2} F_{0n} \tau_{0m, n}^2 \sin 2\varphi}{\tau_{0m, n}^2 - \tau_n^2} \cos 2(nt - \lambda); \end{aligned} \quad (150)$$

$$\begin{aligned} a_{m, c} &= - \frac{F_{0c} R^2 n^2 \cos 2\varphi}{\frac{4\pi^2 R^2}{\tau_{0m, c}^2} - \frac{4\pi^2 R^2}{\tau_c^2}} \cos (nt - \lambda) = \\ &= - \frac{F_{0c} n^2 \tau_{0m, c}^2 \tau_c^2 \cos 2\varphi}{4\pi^2 (\tau_{0m, c}^2 - \tau_c^2)} \cos (nt - \lambda) = - \frac{F_{0c} \tau_{0m, c}^2 \cos 2\varphi}{\tau_{0m, c}^2 - \tau_c^2} \cos (nt - \lambda); \end{aligned} \quad (151)$$

$$\begin{aligned} a_{m, \lambda} &= - \frac{F_{0\lambda} R^2 m^2 \sin 2\varphi}{\frac{4\pi^2 R^2}{\tau_{0m, \lambda}^2} - \frac{4\pi^2 R^2}{\tau_{\lambda}^2}} \cos (mt - \psi) = \\ &= - \frac{F_{0\lambda} m^2 \tau_{0m, \lambda}^2 \tau_{\lambda}^2 \sin 2\varphi}{4\pi^2 (\tau_{0m, \lambda}^2 - \tau_{\lambda}^2)} \cos (mt - \psi) = \\ &= - \frac{F_{0\lambda} \tau_{0m, \lambda}^2 \sin 2\varphi}{\tau_{0m, \lambda}^2 - \tau_{\lambda}^2} \cos (mt - \psi). \end{aligned} \quad (152)$$

Интегрируя и дважды интегрируя формулы (148) — (152) по времени, получим формулы горизонтальных скоростей и смещений частиц в следующем виде:

$$v_{п. п} = \frac{F_{0п} \tau_{0п. п}^2 \cos \varphi}{2n (\tau_{п}^2 - \tau_{0п. п}^2)} \cos 2 (nt - \lambda); \quad (153)$$

$$v_{п. с} = \frac{F_{0с} \tau_{0п. с}^2 \sin \varphi}{n (\tau_{с}^2 - \tau_{0п. с}^2)} \cos (nt - \lambda); \quad (154)$$

$$v_{м. п} = \frac{\frac{1}{2} F_{0п} \tau_{0м. п}^2 \sin 2\varphi}{2n (\tau_{п}^2 - \tau_{0м. п}^2)} \sin 2 (nt - \lambda); \quad (155)$$

$$v_{м. с} = - \frac{F_{0с} \tau_{0м. с}^2 \cos 2\varphi}{n (\tau_{с}^2 - \tau_{0м. с}^2)} \sin (nt - \lambda); \quad (156)$$

$$v_{м. ч. д} = \frac{F_{0ч. д} \tau_{0м. ч. д}^2 \sin 2\varphi}{m (\tau_{ч. д}^2 - \tau_{0м. ч. д}^2)} \sin (mt - \psi); \quad (157)$$

$$s_{п. п} = \frac{F_{0п} \tau_{0п. п}^2 \cos \varphi}{4n^2 (\tau_{п}^2 - \tau_{0п. п}^2)} \sin 2 (nt - \lambda); \quad (158)$$

$$s_{п. с} = \frac{F_{0с} \tau_{0п. с}^2 \sin \varphi}{n^2 (\tau_{с}^2 - \tau_{п. с}^2)} \sin (nt - \lambda); \quad (159)$$

$$s_{м. п} = - \frac{\frac{1}{2} F_{0п} \tau_{0м. п}^2 \sin 2\varphi}{4n^2 (\tau_{п}^2 - \tau_{0м. п}^2)} \cos 2 (nt - \lambda); \quad (160)$$

$$s_{м. с} = \frac{F_{0с} \tau_{0м. с}^2 \cos 2\varphi}{n^2 (\tau_{с}^2 - \tau_{0м. с}^2)} \cos (nt - \lambda); \quad (161)$$

$$s_{м. ч. д} = - \frac{F_{0ч. д} \tau_{0м. ч. д}^2 \sin 2\varphi}{m^2 (\tau_{ч. д}^2 - \tau_{0м. ч. д}^2)} \cos (mt - \psi). \quad (162)$$

Из формул (148) — (162) видно, что амплитуды всех кинематических характеристик горизонтальных приливных движений прямо пропорциональны амплитудам возбуждающих сил и квадратам периодов свободных колебаний частиц воды, но обратно пропорциональны разностям квадратов периодов сил и периодов свободных колебаний. При равенстве названных периодов возникает резонанс. Если период свободных колебаний превосходит период возбуждающей силы, фазы ускорений частиц равны, а фазы смещений частиц противоположны фазе силы. Если же период возбуждающей силы больше периода свободных колебаний, то фазы ускорений частиц отличаются от фазы силы

на 180° , а фазы смещений совпадают с фазой силы. Таким образом, горизонтальные приливные движения в каналах, окружающих земной шар, подчиняются тем же хорошо известным закономерностям, что и вынужденные колебания, происходящие при отсутствии силы трения.

Путем аналогичных преобразований, выполненных в работе [28], формулы кинематических характеристик вертикальных приливных движений также приводятся к виду, подобному виду формул (148) — (162). В частности, отклонения уровня от невозмущенного положения, т. е. вертикальные смещения частиц поверхностного слоя определяются следующими формулами:

$$z_{п. п} = \frac{\frac{1}{2} F_{0п} R \cos^2 \varphi}{R^2 n^2 \cos^2 \varphi (\tau_{п}^2 - \tau_{0п. п}^2)} \tau_{0п. п}^2 h \cos 2(nt - \lambda); \quad (163)$$

$$z_{п. с} = \frac{\frac{1}{2} F_{0с} R \sin 2\varphi}{R^2 n^2 \cos^2 \varphi (\tau_{с}^2 - \tau_{0п. с}^2)} \tau_{0п. с}^2 h \cos (nt - \lambda); \quad (164)$$

$$z_{м. п} = \frac{\frac{1}{4} F_{0п} R \cos 2\varphi}{R^2 n^2 (\tau_{п}^2 - \tau_{0м. п}^2)} \tau_{0м. п}^2 h \cos 2(nt - \lambda); \quad (165)$$

$$z_{м. с} = \frac{\frac{1}{2} F_{0с} R \sin 2\varphi}{\frac{1}{4} R^2 n^2 (\tau_{с}^2 - \tau_{0м. с}^2)} \tau_{0м. с}^2 h \cos (nt - \lambda); \quad (166)$$

$$z_{м. ч. д} = \frac{\frac{1}{2} F_{0ч. д} R \cos 2\varphi}{\frac{1}{4} R^2 m^2 (\tau_{ч. д}^2 - \tau_{0м. ч. д}^2)} \tau_{0м. ч. д}^2 h \cos (mt - \psi). \quad (167)$$

Видно, что числители правых частей этих формул прямо пропорциональны давлениям, которые вызываются действием компонентов $F_{п. п}$ и $F_{п. с}$ приливообразующей силы на воды зональных каналов и действием компонентов $F_{м. п}$, $F_{м. с}$ и $F_{м. ч. д}$ этой силы на воды меридианных каналов с площадью поперечного сечения 1 см^2 и определяются формулами (88) — (92), в последнюю из которых вместо компонента $F_{м. д}$ входит компонент $F_{м. ч. д}$, вызывающий частный долгопериодный прилив. Следовательно, они прямо пропорциональны силам, возбуждающим вертикальные приливные движения. Таким образом, кинематические характеристики вертикальных приливных движений, как и характеристики горизонтальных, прямо пропорциональны амплитудам возбуждающих сил и квадратам периодов свободных колебаний, но обратно пропорциональны разностям квадратов периодов этих сил и периодов свободных колебаний. При равенстве названных периодов возникает резонанс. Фазы вер-

тикальных ускорений частиц совпадают с фазой возбуждающей силы, если период ее меньше периода свободных колебаний; в противном случае разность этих фаз составляет 180° . Фазы вертикальных смещений частиц, наоборот, не отличаются от фазы возбуждающей силы, если ее период больше периода свободных колебаний. В этом случае имеют место прямые приливы. Если же период свободных колебаний превосходит период возбуждающей силы, то фазы вертикальных смещений отличаются от ее фазы на 180° и в каналах существуют обращенные приливы. Следовательно, и вертикальные и горизонтальные приливные движения подчиняются одним и тем же закономерностям, присущим вынужденным колебаниям, происходящим при отсутствии силы трения.

Согласно формулам (148)—(167), в зависимости от соотношения между периодом возбуждающей силы и периодом свободных колебаний фазы кинематических характеристик как горизонтальных, так и вертикальных приливных движений могут быть либо равны, либо противоположны фазе названной силы. Это заключение дает возможность объяснить причину существования поступательных волн в зональных каналах и стоячих волн в каналах меридианных. В первых из них фазы сил, возбуждающих горизонтальные и вертикальные приливные движения как полусуточного, так и суточного периодов отличаются по фазе на 90° . Следовательно, при любом соотношении между периодом силы и периодом свободных колебаний разность фаз одних и тех же кинематических характеристик горизонтальных и вертикальных приливных движений любого из этих периодов в каждой части канала может составлять только 90° . Поэтому, согласно определениям поступательной и стоячей волн, приведенным в предыдущей главе, и полусуточные, и суточные волны в зональных каналах являются поступательными. В меридианных каналах фазы сил, возбуждающих горизонтальные и вертикальные приливные движения всех классов, либо равны, либо противоположны. Следовательно, при любом соотношении между периодами возбуждающей силы и свободных колебаний фаза каждой кинематической характеристики горизонтального движения может либо быть равной фазе той же характеристики вертикального движения, либо отличаться от нее на 180° . Поэтому, в соответствии с упомянутым определением, приливные волны всех периодов в меридианных каналах являются стоячими. Таким образом, непосредственная причина различных форм приливных волн в зональных и меридианных каналах заключается в том, что разность фаз сил любого периода, возбуждающих горизонтальные и вертикальные движения в зональных каналах, не равна разности фаз сил, возбуждающих горизонтальные и вертикальные движения в каналах меридианных. Последнее объясняется рассмотренными ранее особенностями изменения проекций приливообразующей силы на параллель

в зональном и проекций приливообразующей силы на меридиан в меридианном направлениях.

Сравнение формул (148)—(167) кинематических характеристик горизонтальных и вертикальных приливных движений в зональных и меридианных каналах с формулами вызывающих эти движения сил показывает, что эти характеристики зависят от географической широты точно так же, как и названные силы. Этот вывод, соответствующий принципиальным положениям теории вынужденных колебаний, дает возможность объяснить установленные Эри зависимость горизонтальных и вертикальных смещений частиц в зональных каналах от широты, на которой расположен канал, и распределение смещений частиц в меридианных каналах изменением возбуждающих сил в меридианном направлении.

При составлении исходных систем уравнений движения и неразрывности полагалось, что скорости приливных течений, как и другие кинематические характеристики горизонтальных приливных движений, не изменяются с глубиной. Скорости же и другие характеристики вертикальных движений нельзя считать не изменяющимися в вертикальном направлении уже хотя бы потому, что в прилегающем ко дну слое их значения равны нулю. Определение их зависимости от глубины из исходных систем невозможно, так как в эти системы не входит уравнение движения частиц в вертикальном направлении. В работе [28] на основании рассуждения, согласно которому сила давления, определяемая формулами (88)—(92), передается от слоя к слою, а потому линейно возрастает по мере удаления ото дна, сделан вывод, что все кинематические характеристики вертикальных приливных движений любой частицы в каналах и в океане, покрывающем земной шар, прямо пропорциональны расстоянию (p) между частицей и дном. В следующей главе точным аналитическим способом показано, что такое изменение рассматриваемых характеристик в вертикальном направлении очень близко к действительному*. Таким образом, амплитуды вертикальных смещений, скоростей и ускорений частиц возрастают от нулевого значения в непосредственно прилегающем ко дну слое до максимального значения в поверхностном. Формулы перечисленных кинематических характеристик приведены в табл. 14.

Используя формулы горизонтальных и вертикальных смещений, можно найти траектории частиц и точки траекторий, в которых частицы находятся в отдельные моменты времени.

В любом зональном канале частицы движутся в вертикальных плоскостях, параллельных его продольной оси или проходящих через ось, т. е. в плоскостях, перпендикулярных меридианам.

* Отличие вертикального распределения кинематических характеристик от линейного связано с тем, что исходная система уравнений (93)—(96) имеет второй порядок по r [см. формулы (316)—(318)].—Прим. ред.

нам. Проекции траекторий частиц на горизонтальные плоскости представляют собой отрезки горизонтальных прямых, параллельные продольной оси канала, а проекции на плоскости меридианов — отрезки вертикалей.

Траектории полусуточных движений частиц в зональных каналах представляют собой эллипсы, каноническое уравнение каждого из которых в системе координат, использованной при исследовании проекций траекторий частиц, движущихся под действием одной только приливообразующей силы, на плоскости, перпендикулярные меридианам, имеет вид

$$\frac{x^2}{\left[\frac{F_{\text{оп}} R^2 \cos^3 \varphi}{4 (gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)} \right]^2} + \frac{z^2}{\left[\frac{F_{\text{оп}} R p \cos^2 \varphi}{2 (gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)} \right]^2} = 1. \quad (168)$$

Отношение между длинами вертикальных и горизонтальных осей эллипсов равно $2p/(R \cos \varphi)$. Длины этих осей и отношение между ними не зависят от географической долготы, а потому форма и размеры орбит частиц в слое на любой, но одной и той же глубине постоянны на всем протяжении канала. Горизонтальные оси эллипсов имеют одинаковую длину на всех горизонтах между дном и поверхностью, а длины вертикальных осей равны нулю в непосредственно прилегающем ко дну слое и линейно возрастают по мере удаления ото дна до наибольших значений в поверхностном слое.* Поэтому с увеличением глубины траектории частиц принимают все более сжатую форму, а у самого дна представляют собой отрезки прямых, параллельные оси канала, длины которых равны длинам горизонтальных осей эллипсов. Поскольку радиус Земли гораздо больше глубины канала, в зональных каналах, расположенных на подавляющем большинстве широт, даже в поверхностном слое горизонтальные оси эллиптических орбит во много раз длиннее вертикальных осей. Длины этих осей равны между собой в каналах на широтах $\varphi = \pm \arccos(2p/R)$, т. е. в каналах, расположенных в окрестностях полюсов, где амплитуды всех кинематических характеристик полусуточных приливов чрезвычайно малы.

Общая особенность траекторий полусуточных движений частиц в зональных каналах и рассмотренных ранее проекций траекторий частиц, движущихся под действием одной только приливообразующей силы, на плоскости перпендикулярные меридианам заключается в том, что они имеют форму эллипсов. Главное различие между ними состоит в том, что длины вертикальных осей эллипсов, представляющих собой траектории частиц в каналах, гораздо меньше длин горизонтальных осей и более резко изменяются в вертикальном направлении.

* Это справедливо в тех пределах, в которых можно считать удовлетворительным линейное изменение с глубиной вертикальных ускорений.—
Прим. ред.

Соотношение между периодом приливообразующей силы и периодом свободных колебаний не влияет на форму орбиты, но влияет на расположение частицы на ней во все моменты времени. На рис. 36 схематично показаны орбиты частиц в разных слоях зонального канала и точки, в которых находится частица в моменты, в которые часовой угол светила равен 0, 45, 90, 135 и 180°, в случаях, когда период силы превосходит период свободных колебаний и когда он меньше последнего. В обоих этих случаях частица движется в направлении, противоположном

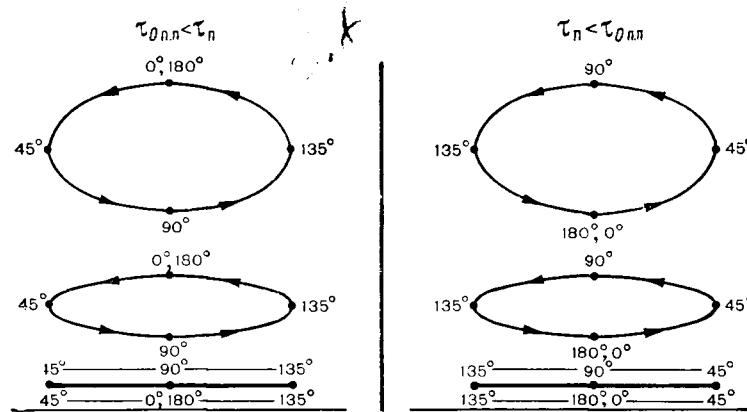


Рис. 36. Полусуточные движения частиц в зональных каналах.

ходу часовой стрелки, причем за сутки, т. е. за время, за которое часовой угол изменяется на 360°, она совершает два оборота. Однако если период свободных колебаний больше периода приливообразующей силы, частица занимает положение, диаметрально противоположное тому, в котором она находилась в случае, когда период силы превосходил период свободных колебаний. Положение частицы в случае, когда период силы меньше периода свободных колебаний, во все моменты времени соответствует положениям частицы, совершающей приливные движения под действием лишь полусуточных компонентов проекций приливообразующей силы на параллель и вертикаль.

Траектории суточных движений частиц в зональных каналах также представляют собой эллипсы, каноническое уравнение каждого из которых имеет вид

$$\frac{x^2}{\left(\frac{F_{0c} R^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi}\right)^2} + \frac{z^2}{\left[\frac{F_{0c} R p \sin 2\varphi}{2(gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)}\right]^2} = 1. \quad (169)$$

Отношение длин вертикальных и горизонтальных осей этих эллипсов равно $p/(R \cos \varphi)$. Длины осей и их отношение не за-

висят от географической долготы, и, следовательно, на всем протяжении канала орбиты частиц, находящихся в одном и том же слое, имеют одинаковую форму и размеры. Горизонтальные оси эллипсов не изменяются с глубиной, тогда как вертикальные линейно возрастают по мере удаления ото дна. Вследствие этого с увеличением глубины форма траекторий частиц становится все более сжатой, а в непосредственно прилегающем ко дну слое траектории имеют вид отрезков прямых, параллельных оси канала, причем длины этих отрезков равны длинам горизонтальных осей эллипсов. Даже в поверхностном слое на большинстве широт горизонтальные оси гораздо длиннее вертикальных. Длины этих осей равны на широтах $\varphi = \pm \arccos(p/R)$, т. е. в каналах близ полюсов, в которых суточные приливы крайне незначительны. Траектории суточных движений частиц в зональных каналах имеют такие же сходства и различия с проекциями траекторий частиц, движущихся под действием одной только суточной приливообразующей силы, на плоскости, перпендикулярные меридианам, какие отмечались при рассмотрении полусуточных приливов.

Положение частицы на орбите в отдельные моменты времени зависит как от знака географической широты, на которой расположен канал, и знака склонения вызывающего прилив светила, так и от соотношения между периодом приливообразующей силы и периодом свободных колебаний. Частица в зональных каналах, расположенных в северном полушарии, при $0 < \delta$ и $\tau_{\text{оп.с}} < \tau_c$ и при $\delta < 0$ и $\tau_c < \tau_{\text{оп.с}}$ и в каналах, расположенных в южном полушарии, при $0 < \delta$ и $\tau_c < \tau_{\text{оп.с}}$ и при $\delta < 0$ и $\tau_{\text{оп.с}} < \tau_c$ в моменты, когда часовой угол светила равен 0, 90, 180, 270 и 360°, находится соответственно в самой верхней, западной, нижней, восточной и верхней точках орбиты (рис. 37 а). Частица в каналах, расположенных в северном полушарии, при $0 < \delta$ и $\tau_c < \tau_{\text{оп.с}}$ и при $\delta < 0$ и $\tau_{\text{оп.с}} < \tau_c$ и в каналах, расположенных в южном полушарии, при $0 < \delta$ и $\tau_{\text{оп.с}} < \tau_c$ и при $\delta < 0$ и $\tau_c < \tau_{\text{оп.с}}$ в те же моменты времени находится в самой нижней, восточной, верхней, западной и нижней точках орбиты, т. е. в диаметрально противоположных точках (рис. 37 б). Таким образом, изменение знака широты, на которой расположен канал, знака склонения светила и знака разности периодов приливообразующей силы и свободных колебаний приводит к тому, что в каждый момент времени частица находится в диаметрально противоположной точке орбиты. Однако перечисленные факторы не влияют на направление движения частицы: в течение суток она всегда совершает один оборот в направлении, противоположном ходу часовой стрелки, т. е. движется так же, как частицы, на которые действуют только суточные компоненты проекций приливообразующей силы на параллель и вертикаль. Следует отметить, что частица, совершающая приливные движения под действием только что названных компонентов, в любой

момент времени находится в точках орбиты, соответствующих тем, в которых находится частица, совершающая суточные движения в расположенном в том же полушарии зональном канале при склонении светила того же знака в случае, когда период свободных колебаний превосходит период приливообразующей силы.

В меридианных каналах частицы движутся в плоскостях меридианов. Проекция их траекторий на горизонтальные плоско-

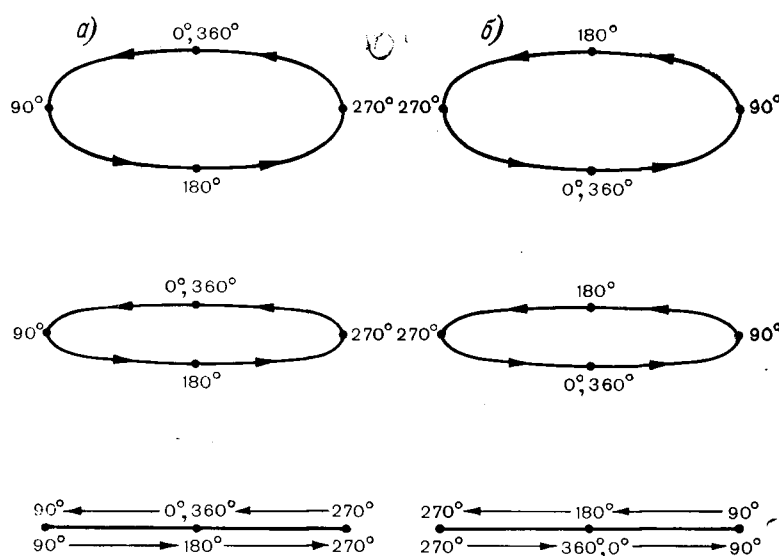


Рис. 37. Суточные движения частиц в зональных каналах.

сти имеют вид отрезков горизонтальных прямых, а на плоскости, перпендикулярные меридианам, — отрезки вертикалей.

Траектории полусуточных движений частиц представляют собой отрезки расположенных в плоскостях меридианов прямых, наклоненных под различными углами к плоскости горизонта. В системе координат, использованной ранее при изучении проекций траекторий частиц, движущихся под действием только приливообразующей силы полусуточного периода, на плоскости меридианов каноническое уравнение каждой из этих прямых имеет вид

$$z = -y \frac{2p}{R} \operatorname{ctg} 2\varphi, \quad (170)$$

а угол (k_n) наклона их к плоскости горизонта определяется формулой

$$k_n = \operatorname{arctg} \frac{z}{y} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{2p}{R} \operatorname{ctg} 2\varphi \right). \quad (171)$$

Следовательно, этот угол изменяется в вертикальном направлении от нуля в непосредственно прилегающем ко дну слое, в котором траектории частиц представляют собой отрезки горизонтальных прямых, до максимального значения в поверхностном слое. Наряду с этим, он изменяется и с широтой от 0° на параллелях 45° N и 45° S до 90° на экваторе и полюсах.

Как отмечалось ранее, проекции траекторий частиц, совершающих полусуточные приливные движения под действием одной только приливообразующей силы, на плоскости меридианов также представляют собой отрезки прямых, наклоненных к горизонтальным плоскостям и описываемых каноническим уравнением (72). Коренное отличие траекторий полусуточных движений частиц в меридианных каналах заключается в том, что угол их наклона к названным плоскостям на большинстве широт очень мал и, кроме того, изменяется в вертикальном направлении.

Траектории частиц в различных частях меридианного канала и положения частиц на них в моменты времени, в которые часовой угол вызывающего прилив светила равен 0, 45, 90, 135 и 180° , при различных знаках разности между периодом приливообразующей силы и периодом свободных колебаний схематично показаны на рис. 38. Можно заключить, что в течение суток каждая частица дважды проходит вдоль всего отрезка, являющегося ее траекторией, в прямом и обратном направлениях, причем в моменты, когда часовой угол равен 45, 135, 225 и 315° , находится в середине этого отрезка, т. е. в точке, в которой она была в невозмущенном состоянии. В эти моменты отклонения уровня от невозмущенного положения на всем протяжении меридианного канала равны нулю. Положение частиц не зависит от знака склона вызывающего прилив светила. Соотношение периодов приливообразующей силы и свободных колебаний не влияет на угол k_n и на время, за которое частица проходит вдоль всего отрезка, но влияет на длину отрезка и на положение частицы в отдельные моменты времени. При отрицательном значении разности между названными периодами частица находится в точке, симметричной относительно середины траектории той точке, в которой располагается частица при положительном значении разности. Знак последней определяет также и направление движения частицы в любой момент времени. Если период свободных колебаний больше периода приливообразующей силы, частица в каждый момент находится в точках траектории, соответствующих тем, в которых находится частица, совершающая приливное движение под действием одних только полусуточных компонентов проекций приливообразующей силы на меридиан и вертикаль.

Траектории суточных движений частиц в меридианных каналах также представляют собой отрезки прямых, расположенных в плоскостях меридианов и наклоненных под различными углами

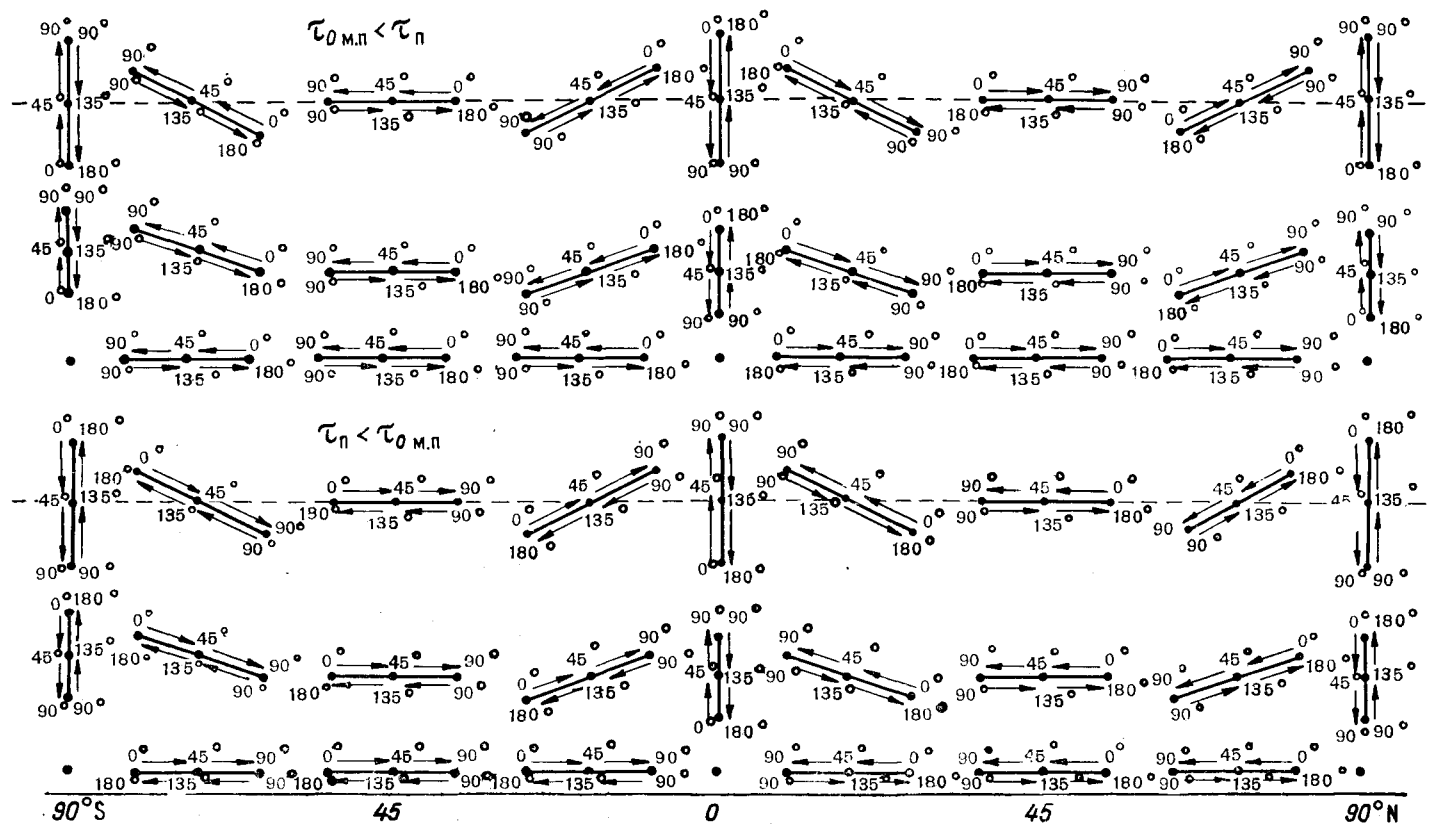


Рис. 38. Полусуточные движения частиц в меридианных каналах.

к горизонтальным плоскостям. Каноническое уравнение каждой из этих прямых в той же системе координат имеет вид

$$z = y \frac{2p}{R} \operatorname{tg} 2\varphi. \quad (172)$$

Угол (k_c) наклона прямой к плоскости горизонта определяется формулой

$$k_c = \operatorname{arctg} \frac{z}{y} = \operatorname{arctg} \left(\frac{2p}{R} \operatorname{tg} 2\varphi \right). \quad (173)$$

Согласно этой формуле, угол k_c во всех частях канала изменяется по вертикали от нуля в непосредственно прилегающем ко дну слое, в котором траекториями частиц являются отрезки горизонтальных прямых, до максимального значения в поверхностном слое и, кроме того, изменяется с широтой от 0° на экваторе и полюсах до 90° на параллелях 45°N и 45°S . Таким образом, траектории суточных движений частиц в меридианных каналах имеют такие же сходные черты и различия с проекциями на плоскости меридианов траекторий суточных движений частиц, происходящих под действием одной только приливообразующей силы, какие отмечались при рассмотрении полусуточных приливов в меридианных каналах.

Траектории частиц в разных местах меридианного канала и положение частиц в моменты времени, в которые часовой угол светила равен $0, 90, 180, 270$ и 360° , в случаях, когда $0 < \delta$ и $\tau_{0\text{м.с}} < \tau_c$ и когда $\delta < 0$ и $\tau_c < \tau_{0\text{м.с}}$, и в случаях, имеющих место при $0 < \delta$ и $\tau_c < \tau_{0\text{м.с}}$ и при $\delta < 0$ и $\tau_{0\text{м.с}} < \tau_c$, показаны схематично на рис. 39 а и б соответственно. Видно, что во всех этих случаях частица за сутки проходит вдоль всего отрезка, являющегося ее траекторией, в прямом и обратном направлениях. Угол наклона траекторий к горизонтальным плоскостям не зависит ни от знака склонения вызывающего прилив светила, ни от соотношения между периодом приливообразующей силы и периодом свободных колебаний. Однако соотношение между названными периодами влияет на длину траектории и, как и знак склонения светила, на положение частицы в любой момент времени и на направление ее движения. Если период свободных колебаний превосходит период возбуждающей силы, при любом знаке склонения светила в каждый момент времени частица находится в точках траектории, соответствующих тем, в которых при таком же знаке склонения находится частица, движущаяся под действием одних только суточных компонентов проекций приливообразующей силы на меридиан и вертикаль. При часовых углах светила 90 и 270° частицы всегда располагаются в серединах траекторий, и в эти моменты отклонения уровня от невозмущенного положения на всем протяжении канала равны нулю.

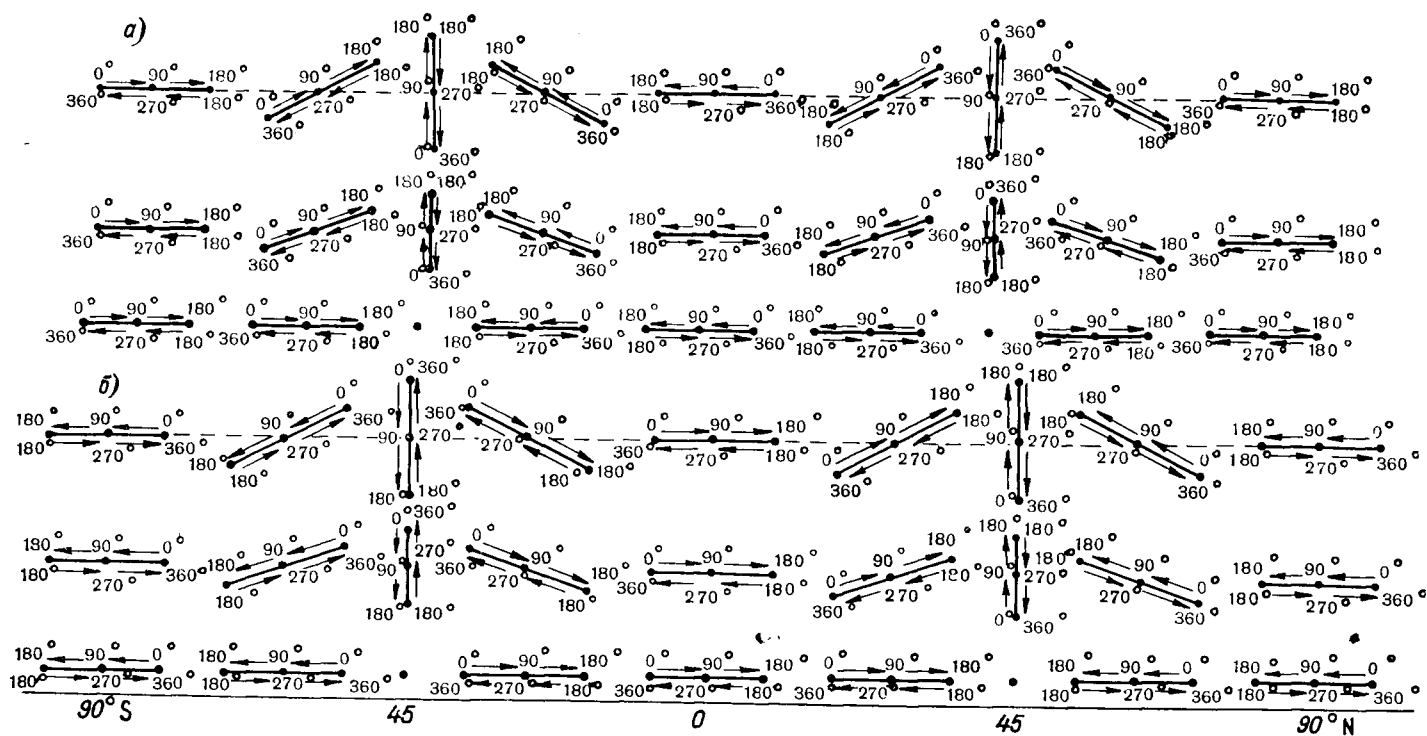


Рис. 39. Суточные движения частиц в меридианных каналах.

3,9
Траектории частных долгопериодных приливных движений частиц в меридианных каналах также представляют собой отрезки прямых, находящихся в плоскостях меридианов и составляющих разные углы с горизонтальными плоскостями. Каноническое уравнение каждой из этих прямых в прежней системе координат имеет вид

$$z = -y \frac{2p}{R} \operatorname{ctg} 2\varphi, \quad (174)$$

а угол (k_1) наклона прямой к горизонтальной плоскости определяется формулой

$$k_1 = \operatorname{arctg} \left(-\frac{2p}{R} \operatorname{ctg} 2\varphi \right). \quad (175)$$

Следовательно, этот угол повсеместно изменяется в вертикальном направлении от 0° в слое, непосредственно прилегающем ко дну, до наибольшего значения в поверхностном слое и, наряду с этим, изменяется с широтой от 0° на параллелях 45° N и 45° S до 90° на экваторе и полюсах. Сходства и различия между траекториями частных долгопериодных приливов в меридианных каналах и траекториями частиц, движущихся под действием одной только частной долгопериодной приливообразующей силы, не отличаются от сходств и различий, отмеченных при рассмотрении полусуточных и суточных приливов в меридианных каналах.

Траектории частиц и положения их в моменты, в которые аргумент $mt - \varphi$ равен 0, 90, 180, 270 и 360° , при склонениях светила, абсолютные значения которых не достигают $35^\circ 16'$ и превосходят $35^\circ 16'$, и при различных соотношениях между периодом возбуждающей силы и периодом свободных колебаний показаны схематично на рис. 40. Видно, что за время изменения названного аргумента на 360° частица проходит в прямом и обратном направлениях вдоль всего отрезка, представляющего собой ее траекторию. При значениях аргумента, равных 90 и 270° , все частицы всегда находятся в серединах отрезков. В эти моменты на протяжении всего канала уровень не отклоняется от невозмущенного положения. При склонениях светила, абсолютные значения которых не достигают $35^\circ 16'$ и, наоборот, превосходят $35^\circ 16'$, или при одном и том же склонении, но противоположных знаках разности периода возбуждающей силы и периода свободных колебаний частицы в любой момент времени находятся в точках траектории, симметричных относительно середины ее, и движутся в противоположных направлениях. В случае, когда период свободных колебаний превосходит период силы, частица во все моменты времени находится в точках траектории, соответствующих точкам, в которых при таком же склонении светила находится частица, движущаяся под действием одной только частной долгопериодной приливообразующей силы.

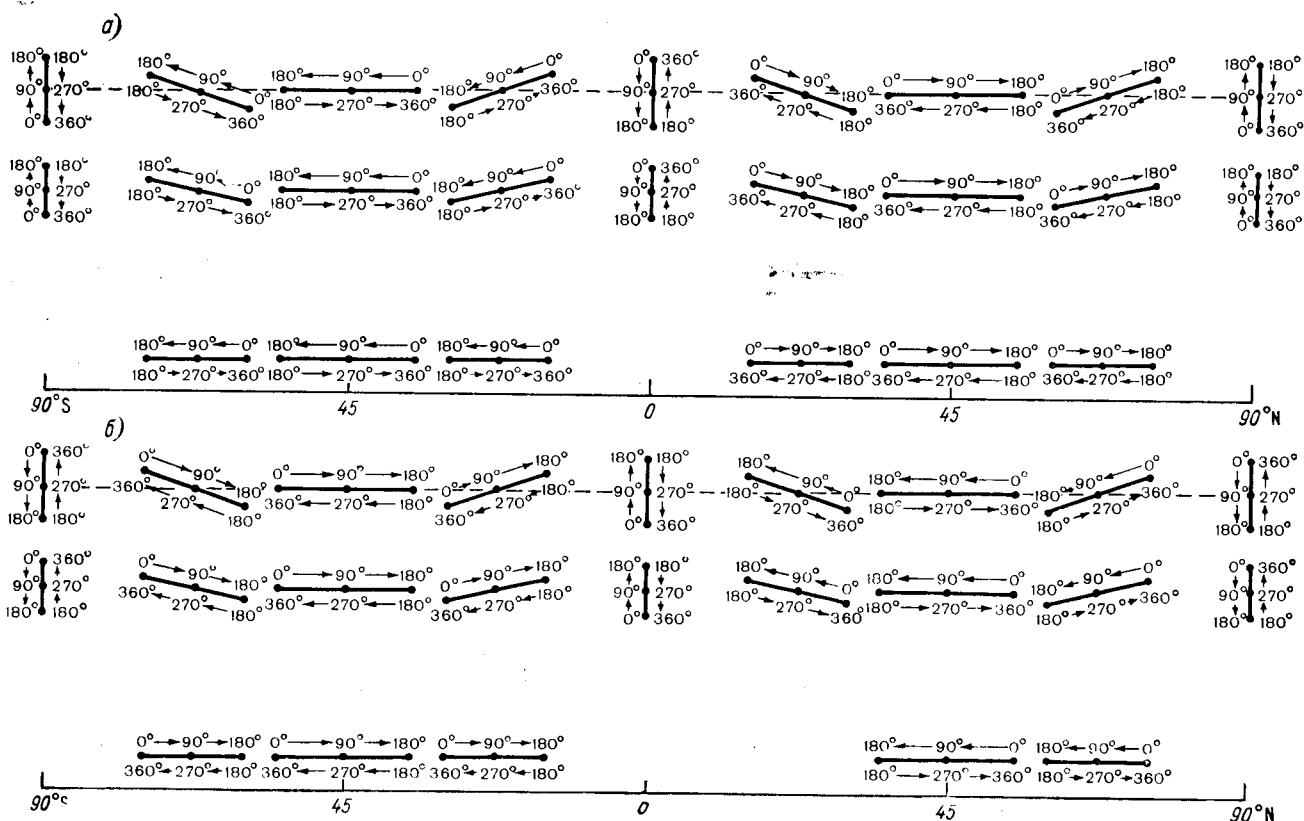


Рис. 40. Долгопериодные движения частиц в меридианных каналах.

а — при $|\delta| < |35^\circ 16'|$, $\tau_{\text{ом.ч.д}} < \tau_{\text{ч.д}}$ и при $|35^\circ 16'| < |\delta|$, $\tau_{\text{ч.д}} < \tau_{\text{ом.ч.д}}$; б — при $|\delta| < |35^\circ 16'|$, $\tau_{\text{ч.д}} < \tau_{\text{ом.ч.д}}$ и при $|35^\circ 16'| < |\delta|$, $\tau_{\text{ом.ч.д}} < \tau_{\text{ч.д}}$.

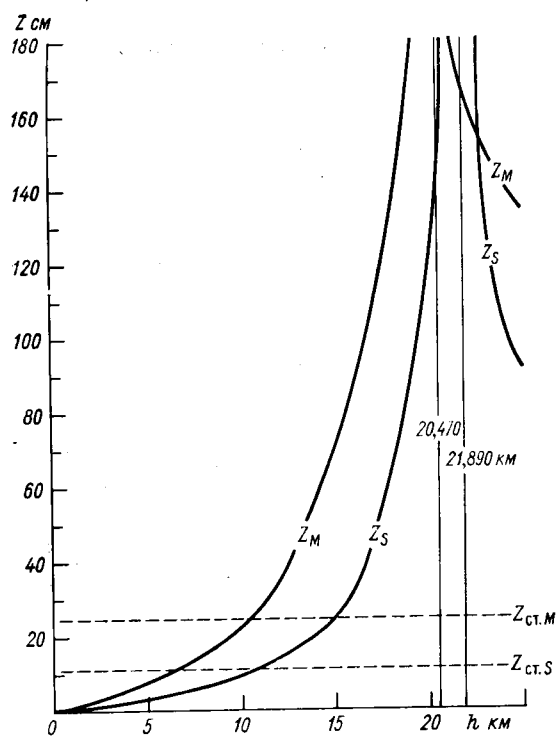


Рис. 41. Зависимости амплитуд колебаний уровня в экваториальном канале, вызываемых полусуточными приливообразующими силами Луны и Солнца, от глубины канала.

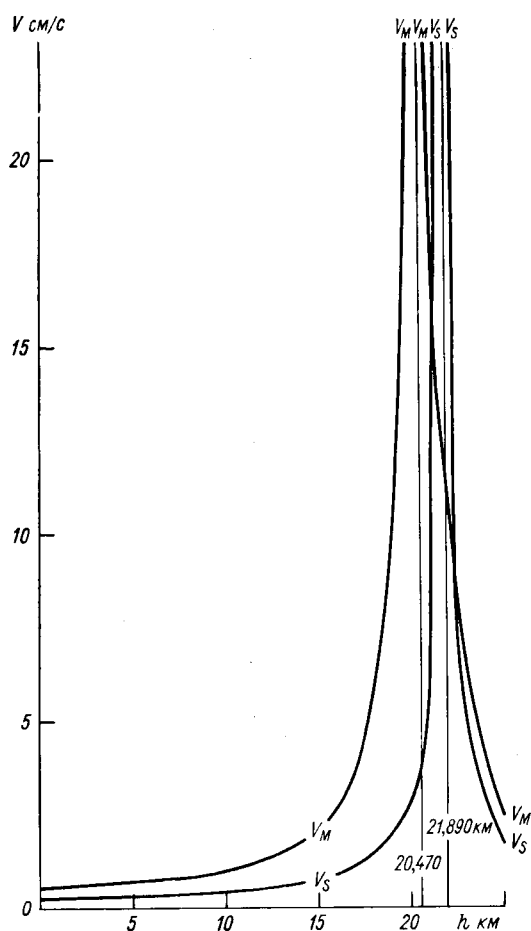


Рис. 42. Зависимости амплитуд скоростей приливных течений в экваториальном канале, вызываемых полусуточными приливообразующими силами Луны и Солнца, от глубины канала.

Амплитуды всех кинематических характеристик горизонтальных и вертикальных приливных движений любого периода (а следовательно, и размеры траекторий частиц) зависят от глубины канала. Эта зависимость проиллюстрирована на рис. 41 и 42. На первом из них показаны амплитуды (Z_M и Z_S) полусуточных колебаний уровня, вызываемых Луной и Солнцем в экваториальном канале, глубина которого изменяется от 100 до 25 000 м. При вычислениях амплитуды приливообразующих сил этих светил приняты равными амплитудам сил, возбуждающих фиктивные волны M_2 и S_2 ($7,48 \cdot 10^{-5}$ и $3,48 \cdot 10^{-5}$ дин), а относительные угловые скорости — средним относительным угловым скоростям вращения Земли вокруг оси и обращения Луны вокруг Земли, вращения Земли вокруг оси и обращения Земли вокруг Солнца (т. е. $7,03 \cdot 10^{-5}$ и $7,27 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$). Прерывистыми линиями показаны амплитуды ($Z_{ст. M}$ и $Z_{ст. S}$) статических приливов, вызываемых этими силами. Их значения вычислены с помощью формулы $Z_{ст} = \frac{F_{оп} R}{2g}$, полученной из уравнения

$$F_{оп} \sin 2(nt - \lambda) - \frac{gdz}{R d\lambda} = 0, \text{ которое описывает приливы в эк-}$$

ваториальном канале как статический процесс. Видно, что амплитуды динамических приливов могут иметь меньшие значения, чем амплитуды статических, но они резко превосходят последние при глубинах канала, близких к резонансным. Как следует из рис. 42, амплитуды (V_M и V_S) скоростей полусуточных приливных движений, вызываемых в том же канале упомянутыми силами, также резко изменяются при изменении глубины канала.

Амплитуды всех кинематических характеристик полусуточных, суточных и частных долгопериодных приливных движений становятся бесконечно большими, когда период возбуждающей силы равен периоду свободных колебаний, т. е. при наличии условий резонанса. В зональных каналах резонанс полусуточных и суточных приливов возникает при такой глубине, при ко-

торой $gh = R^2 n^2 \cos^2 \varphi$, т. е. когда $h = \frac{R^2 n^2}{g} \cos^2 \varphi$. В меридиан-

ных каналах резонанс полусуточных, суточных и частных долгопериодных приливов возникает при тех глубинах, при которых соответственно $gh = R^2 n^2$, $4gh = R^2 n^2$ и $4gh = R^2 n^2$, т. е. при

$h = \frac{R^2 n^2}{g}$, $h = \frac{R^2 n^2}{4g}$ и $h = \frac{R^2 m^2}{4g}$. Если глубина канала пре-

восходит резонансную глубину, то период свободного колебания меньше периода возбуждающей силы и в каналах существуют прямые приливы. При глубине канала, не достигающей резонансной, период свободных колебаний, наоборот, превосходит период этой силы и приливы в каналах являются обращенными.

Согласно приведенным соотношениям, глубины, при кото-

рых возникает резонанс полусуточных приливов в экваториальном и меридианных каналах, когда $n = 7,03 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ и $n = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, соответственно равны 20 470 и 21 890 м. При тех же значениях относительной угловой скорости резонанс суточных приливов в меридианных каналах имеет место при глубинах 5118 и 5472 м, также превосходящих среднюю глубину Мирового океана. Значения глубин (h_M и h_S), при которых возникает резонанс полусуточных и суточных приливов, вызываемых действием Луны и Солнца в зональных каналах, расположенных в северном и южном полушариях на широтах 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 и 89°, приведены в табл. 15.

Таблица 15

Глубины (h_M и h_S), при которых возникает резонанс полусуточных и суточных приливов, вызываемых Луной и Солнцем, в зональных каналах, расположенных на различных широтах

Широта	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	89°
h_M м	19 856	17 993	15 352	12 016	8454	5118	2395	614	61
h_S м	21 233	19 241	16 418	12 849	9341	5472	2551	657	66

Видно, что в тропической зоне и даже в зоне умеренных широт резонансные глубины больше, чем глубины в океанах Земли.

Резонанс частного долгопериодного прилива с циклической частотой $0,53 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, равной циклической частоте лунной полумесячной волны M_f , в меридианных каналах происходит при глубине 29 м. Резонансные глубины других лунных частных долгопериодных приливов имеют такой же порядок, а резонансные глубины солнечных частных долгопериодных приливов примерно в сто раз меньше только что упомянутых. Таким образом, в отличие от резонансных глубин полусуточных и суточных приливов, они гораздо меньше реальных глубин Мирового океана.

5.2. ПРИЛИВЫ В КАНАЛАХ, ОГРАНИЧЕННЫХ ПОПЕРЕЧНЫМИ СТЕНКАМИ

Исследование приливных движений в ограниченных с обеих сторон зональных и меридианных каналах имеет значение для выяснения влияния, которое оказывают на приливы континенты и острова. Как известно, формулы кинематических характеристик трехмерных приливных движений в бассейнах, полностью или частично окруженных сушей, не удалось привести к элементарному виду, что очень затрудняет изучение этой проблемы, тогда как формулы двухмерных движений в рассматриваемых

каналах постоянной глубины и ширины являются элементарными функциями.*

Формулы кинематических характеристик приливов всех классов в каналах, ограниченных поперечными стенками, можно вывести, используя уравнения (126) — (135), в которых постоянные $C_1 — C_{20}$ не равны нулю. Эти постоянные находятся из граничных условий, заключающихся в том, что у стенок скорости горизонтальных приливных движений равны нулю. Согласно формулам (119) — (123), в зональном канале с поперечными стенками на меридианах λ_1 и λ_2 скорости полусуточных и суточных течений у стенок равны нулю, когда при $\lambda = \lambda_1$ и при $\lambda = \lambda_2$ $v_{1п.п} = v_{2п.п} = v_{1п.с} = v_{2п.с} = 0$, а в меридианном канале со стенками на параллелях φ_1 и φ_2 скорости полусуточных, суточных и частных долгопериодных течений у стенок равны нулю, когда при $\varphi = \varphi_1$ и при $\varphi = \varphi_2$ $v_{1м.п} = v_{2м.п} = v_{1м.с} = v_{2м.с} = v_{1м.ч.д} = v_{2м.ч.д} = 0$. Использование этих условий дает возможность найти постоянные $C_1 — C_{20}$ и, следовательно, величины $v_{1п.п}$, $v_{2п.п}$, $v_{1п.с}$, $v_{2п.с}$, $v_{1м.п}$, $v_{2м.п}$, $v_{1м.с}$, $v_{2м.с}$, $v_{1м.ч.д}$, $v_{2м.ч.д}$, а затем вывести формулы скоростей приливных течений. Эти формулы имеют вид

$$v_{п.п} = \frac{F_{0п} R^2 n \cos^3 \varphi}{2(gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)} \cos 2(nt - \lambda) +$$

$$+ \frac{F_{0п} R^2 n \cos^3 \varphi}{2(gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)} \frac{\sin \frac{2Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda - \lambda_2)}{\sin \frac{2Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda_2 - \lambda_1)} \cos 2(nt - \lambda_1) +$$

$$+ \frac{F_{0п} R^2 n \cos^3 \varphi}{2(gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)} \frac{\sin \frac{2Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda_1 - \lambda)}{\sin \frac{2Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda_2 - \lambda_1)} \cos 2(nt - \lambda_2); \quad (176)$$

$$v_{п.с} = \frac{F_{0с} R^2 n \sin \varphi \cos^2 \varphi}{gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi} \cos (nt - \lambda) +$$

$$+ \frac{F_{0с} R^2 n \sin \varphi \cos^2 \varphi}{gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi} \frac{\sin \frac{Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda - \lambda_2)}{\sin \frac{Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda_2 - \lambda_1)} \cos (nt - \lambda_1) +$$

$$+ \frac{F_{0с} R^2 n \sin \varphi \cos^2 \varphi}{gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi} \frac{\sin \frac{Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda_1 - \lambda)}{\sin \frac{Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda_2 - \lambda_1)} \cos (nt - \lambda_2); \quad (177)$$

* В элементарных функциях задача о приливах приближенно решалась для полярных бассейнов, ограниченных определенной широтой (Голдсброу, 1913, 1914 и др.), и для бассейнов, ограниченных двумя меридианами, или бассейнов, ограниченных двумя меридианами и двумя параллелями (Голдсброу, 1927, 1929; Праудмен и Дудсон, 1927; Дудсон, 1940).—Прим. ред.

$$\begin{aligned}
v_{\text{м. п}} = & \frac{F_{0\text{н}} R^2 n \sin 2\varphi}{4(gh - R^2 n^2)} \sin 2(nt - \lambda) + \\
& + \frac{F_{0\text{н}} R^2 n}{4(gh - R^2 n^2)} \frac{\sin \frac{2Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi - \varphi_2)}{\sin \frac{2Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi_2 - \varphi_1)} \sin 2\varphi_1 \sin 2(nt - \lambda) + \\
& + \frac{F_{0\text{н}} R^2 n}{4(gh - R^2 n^2)} \frac{\sin \frac{2Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi_1 - \varphi)}{\sin \frac{2Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi_2 - \varphi_1)} \sin 2\varphi_2 \sin 2(nt - \lambda); \quad (178)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{\text{м. с}} = & - \frac{F_{0\text{с}} R^2 n \cos 2\varphi}{4gh - R^2 n^2} \sin (nt - \lambda) - \\
& - \frac{F_{0\text{с}} R^2 n}{4gh - R^2 n^2} \frac{\sin \frac{Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi - \varphi_2)}{\sin \frac{Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi_2 - \varphi_1)} \cos 2\varphi_1 \sin (nt - \lambda) - \\
& - \frac{F_{0\text{с}} R^2 n}{4gh - R^2 n^2} \frac{\sin \frac{Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi_1 - \varphi)}{\sin \frac{Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi_2 - \varphi_1)} \cos 2\varphi_2 \sin (nt - \lambda); \quad (179)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{\text{м. ч. д}} = & \frac{F_{0\text{ч. д}} R^2 m \sin 2\varphi}{4gh - R^2 m^2} \sin (mt - \psi) + \\
& + \frac{F_{0\text{ч. д}} R^2 m}{4gh - R^2 m^2} \frac{\sin \frac{Rm}{\sqrt{gh}} (\varphi - \varphi_2)}{\sin \frac{Rm}{\sqrt{gh}} (\varphi_2 - \varphi_1)} \sin 2\varphi_1 \sin (mt - \psi) + \\
& + \frac{F_{0\text{ч. д}} R^2 m}{4gh - R^2 m^2} \frac{\sin \frac{Rm}{\sqrt{gh}} (\varphi_1 - \varphi)}{\sin \frac{Rm}{\sqrt{gh}} (\varphi_2 - \varphi_1)} \sin 2\varphi_2 \sin (mt - \psi). \quad (180)
\end{aligned}$$

Формулы горизонтальных смещений и ускорений частиц выводятся путем интегрирования и дифференцирования формул (176)–(180) по времени. Формулы горизонтальных смещений имеют вид

$$\begin{aligned}
s_{\text{п. п}} = & \frac{F_{0\text{н}} R^2 \cos^3 \varphi}{4(gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)} \sin 2(nt - \lambda) + \\
& + \frac{F_{0\text{н}} R^2 \cos^3 \varphi}{4(gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)} \frac{\sin \frac{2Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda - \lambda_2)}{\sin \frac{2Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda_2 - \lambda_1)} \sin 2(nt - \lambda_1) +
\end{aligned}$$

* Подробный вывод формул (176)–(179) приведен в работе [28].

$$+ \frac{F_{0n} R^2 \cos^3 \varphi}{4 (gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)} \frac{\sin \frac{2Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda_1 - \lambda)}{\sin \frac{2Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda_2 - \lambda_1)} \sin 2 (nt - \lambda_2); \quad (181)$$

$$S_{u, c} = \frac{F_{0c} R^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi} \sin (nt - \lambda) +$$

$$+ \frac{F_{0c} R^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi} \frac{\sin \frac{Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda - \lambda_2)}{\sin \frac{Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda_2 - \lambda_1)} \sin (nt - \lambda_1) +$$

$$+ \frac{F_{0c} R^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi} \frac{\sin \frac{Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda_1 - \lambda)}{\sin \frac{Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda_2 - \lambda_1)} \sin (nt - \lambda_2); \quad (182)$$

$$S_{u, n} = - \frac{F_{0n} R^2 \sin^2 \varphi}{8 (gh - R^2 n^2)} \cos 2 (nt - \lambda) -$$

$$- \frac{F_{0n} R^2}{8 (gh - R^2 n^2)} \frac{\sin \frac{2Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi - \varphi_2)}{\sin \frac{2Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi_2 - \varphi_1)} \sin 2 \varphi_1 \cos 2 (nt - \lambda) -$$

$$- \frac{F_{0n} R^2}{8 (gh - R^2 n^2)} \frac{\sin \frac{2Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi_1 - \varphi)}{\sin \frac{2Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi_2 - \varphi_1)} \sin 2 \varphi_2 \cos 2 (nt - \lambda); \quad (183)$$

$$S_{u, c} = \frac{F_{0c} R^2 \cos 2 \varphi}{4gh - R^2 n^2} \cos (nt - \lambda) +$$

$$+ \frac{F_{0c} R^2}{4gh - R^2 n^2} \frac{\sin \frac{Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi - \varphi_2)}{\sin \frac{Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi_2 - \varphi_1)} \cos 2 \varphi_1 \cos (nt - \lambda) +$$

$$+ \frac{F_{0c} R^2}{4gh - R^2 n^2} \frac{\sin \frac{Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi_1 - \varphi)}{\sin \frac{Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi_2 - \varphi_1)} \cos 2 \varphi_2 \cos (nt - \lambda); \quad (184)$$

$$S_{u, \varphi, \lambda} = - \frac{F_{0\lambda, \lambda} R^2 \sin 2 \varphi}{4gh - R^2 m^2} \cos (mt - \psi) -$$

$$- \frac{F_{0\lambda, \lambda} R^2}{4gh - R^2 m^2} \frac{\sin \frac{Rm}{\sqrt{gh}} (\varphi - \varphi_2)}{\sin \frac{Rm}{\sqrt{gh}} (\varphi_2 - \varphi_1)} \sin 2 \varphi_1 \cos (mt - \psi) -$$

$$-\frac{F_{0ч.л}R^2}{4gh-R^2m^2} \frac{\sin \frac{Rm}{\sqrt{gh}} (\varphi_1 - \varphi)}{\sin \frac{Rm}{\sqrt{gh}} (\varphi_2 - \varphi_1)} \sin 2\varphi_2 \cos (mt - \psi). \quad (185)$$

Подставив значения скоростей $v_{п.п.}$, $v_{п.с.}$, $v_{м.п.}$, $v_{м.с.}$, $v_{м.ч.д.}$ в уравнения неразрывности (110), (112), (114), (116), (118) и проинтегрировав эти уравнения по времени, найдем отклонения ($z_{п.п.}$, $z_{п.с.}$, $z_{м.п.}$, $z_{м.с.}$, $z_{м.ч.д.}$) уровня от невозмущенного положения:

$$\begin{aligned} z_{п.п.} = & \frac{F_{0п}Rh \cos^2 \varphi}{2(gh - R^2n^2 \cos^2 \varphi)} \cos 2(nt - \lambda) - \\ & - \frac{F_{0п}Rh \cos^2 \varphi}{2(gh - R^2n^2 \cos^2 \varphi)} \frac{Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} \frac{\cos \frac{2Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda - \lambda_2)}{\sin \frac{2Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda_2 - \lambda_1)} \times \\ & \times \sin 2(nt - \lambda_1) + \frac{F_{0п}Rh \cos^2 \varphi}{2(gh - R^2n^2 \cos^2 \varphi)} \frac{Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} \times \\ & \times \frac{\cos \frac{2Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda_1 - \lambda)}{\sin \frac{2Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda_2 - \lambda_1)} \sin 2(nt - \lambda_2); \quad (186) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{п.с.} = & \frac{F_{0с}Rh \sin 2\varphi}{2(gh - R^2n^2 \cos^2 \varphi)} \cos (nt - \lambda) - \frac{F_{0с}Rh \sin 2\varphi}{2(gh - R^2n^2 \cos^2 \varphi)} \times \\ & \times \frac{Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} \frac{\cos \frac{Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda - \lambda_2)}{\sin \frac{Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda_2 - \lambda_1)} \sin (nt - \lambda_1) + \\ & + \frac{F_{0с}Rh \sin 2\varphi}{2(gh - R^2n^2 \cos^2 \varphi)} \frac{Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} \frac{\cos \frac{Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda_1 - \lambda)}{\sin \frac{Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda_2 - \lambda_1)} \sin (nt - \lambda_2); \quad (187) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{м.п.} = & \frac{F_{0п}Rh \cos 2\varphi}{4(gh - R^2n^2)} \cos 2(nt - \lambda) + \\ & + \frac{F_{0п}Rh}{4(gh - R^2n^2)} \frac{Rn}{\sqrt{gh}} \frac{\cos \frac{2Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi - \varphi_2)}{\sin \frac{2Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi_2 - \varphi_1)} \sin 2\varphi_1 \cos 2(nt - \lambda) - \\ & - \frac{F_{0п}Rh}{4(gh - R^2n^2)} \frac{Rn}{\sqrt{gh}} \frac{\cos \frac{2Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi_1 - \varphi)}{\sin \frac{2Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi_2 - \varphi_1)} \sin 2\varphi_2 \cos 2(nt - \lambda); \quad (188) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_{м.с} = & \frac{2F_{0c}Rh \sin 2\varphi}{4gh - R^2n^2} \cos(nt - \lambda) - \\
& - \frac{F_{0c}Rh}{4gh - R^2n^2} \frac{Rn}{\sqrt{gh}} \frac{\cos \frac{Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi - \varphi_2)}{\sin \frac{Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi_2 - \varphi_1)} \cos 2\varphi_1 \cos(nt - \lambda) + \\
& + \frac{F_{0c}Rh}{4gh - R^2n^2} \frac{Rn}{\sqrt{gh}} \frac{\cos \frac{Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi_1 - \varphi)}{\sin \frac{Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi_2 - \varphi_1)} \cos 2\varphi_2 \cos(nt - \lambda);
\end{aligned}
\tag{189}$$

$$\begin{aligned}
z_{м.ч.д} = & \frac{2F_{0ч.д}Rh \cos 2\varphi}{4gh - R^2m^2} \cos(mt - \psi) + \\
& + \frac{F_{0ч.д}Rh}{4gh - R^2m^2} \frac{Rm}{\sqrt{gh}} \frac{\cos \frac{Rm}{\sqrt{gh}} (\varphi - \varphi_2)}{\sin \frac{Rm}{\sqrt{gh}} (\varphi_2 - \varphi_1)} \sin 2\varphi_1 \cos(mt - \psi) - \\
& - \frac{F_{0ч.д}Rh}{4gh - R^2m^2} \frac{Rm}{\sqrt{gh}} \frac{\cos \frac{Rm}{\sqrt{gh}} (\varphi_1 - \varphi)}{\sin \frac{Rm}{\sqrt{gh}} (\varphi_2 - \varphi_1)} \sin 2\varphi_2 \cos(mt - \psi).
\end{aligned}
\tag{190}$$

Формулы вертикальных скоростей и ускорений частиц в поверхностном слое выводятся путем дифференцирования и двойного дифференцирования формул (186)–(190) по времени. Можно полагать, что в каналах, ограниченных поперечными стенками, амплитуды кинематических характеристик вертикальных приливных движений, как и амплитуды этих характеристик в каналах, окружающих земной шар, прямо пропорциональны расстоянию между частицей и дном. Поэтому их формулы отличаются от формул, определяющих амплитуды вертикальных смещений, скоростей и ускорений частиц в поверхностном слое, только тем, что в числители первых сомножителей каждого слагаемого вместо глубины канала входит названное расстояние.)

Кинематические характеристики приливов можно найти аналитическим способом и тогда, когда канал постоянной глубины и ширины на одном конце ограничен поперечной стенкой, а на другом сообщается с водным бассейном, в котором существуют приливы, или когда канал сообщается с такими бассейнами на обоих концах. В этих случаях решение задачи отличается от приведенного только тем, что в качестве граничных условий используются известные скорости течения или отклонения уровня от невозмущенного положения на концах канала.

Ен. 198

Очевидно, что приливы в каналах, ограниченных поперечными стенками, представляют собой гораздо более сложное физическое явление, чем приливы в замкнутых каналах, окружающих земной шар, а потому их кинематические характеристики описываются более сложными формулами. Правая часть каждой из них состоит из трех слагаемых, первое из которых тождественно формуле, определяющей данную кинематическую характеристику прилива в канале, окружающем Землю. Два других слагаемых прямо пропорциональны амплитуде возбуждающей силы и зависят не только от географической широты и глубины канала, но и от расположения поперечных стенок.

Сравнивая приведенные формулы горизонтальных и вертикальных смещений частиц, можно установить, что при каком угодно расположении стенок полусуточные и суточные приливы в зональных каналах представляют собой сложную волну, являющуюся суммой вырожденной поступательной и стоячей волн, а приливы всех классов в меридианных каналах — стоячую волну. Существование волн таких форм можно объяснить следующим образом.

Давления ($P_{п.п}$ и $P_{п.с}$), вызываемые действием компонентов ($F_{п.п}$ и $F_{п.с}$) приливообразующей силы на воду ориентированных вдоль параллелей каналов, площадь поперечного сечения каждого из которых равна 1 см^2 , а длина — расстоянию между поперечными стенками, ограничивающими зональный канал, и давления ($P_{м.п}$, $P_{м.с}$ и $P_{м.ч.д}$), вызываемые действием компонентов ($F_{м.п}$, $F_{м.с}$ и $F_{м.ч.д}$) приливообразующей силы на воду ориентированных вдоль меридианов каналов с такой же площадью поперечного сечения и с длиной, равной расстоянию между поперечными стенками, ограничивающими меридианный канал, определяются не формулами (88) — (92), а формулами

$$\begin{aligned} P_{п.п} &= \rho \int_{\bar{T}}^{T+\lambda_0} F_{0п.п} R \cos \varphi dT = \\ &= \rho \int_{\bar{T}}^{T+\lambda_0} \frac{3}{2} f \frac{MR^2}{d^3} \cos^2 \delta \cos^2 \varphi \sin 2T dT = \\ &= -\frac{3}{4} f \frac{MR^2}{d^3} \rho \cos^2 \delta \cos^2 \varphi [\cos 2(T+\lambda_0) - \cos 2T] = \\ &= \rho R F_{0п} \cos^2 \varphi \sin \lambda_0 \cos \lambda_0 \sin 2T + \rho R F_{0п} \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda_0 \cos 2T; \\ P_{п.с} &= \rho \int_{\bar{T}}^{T+\lambda_0} F_{0п.с} R \cos \varphi dT = \\ &= \rho \int_{\bar{T}}^{T+\lambda_0} \frac{3}{2} f \frac{MR^2}{d^3} \sin 2\delta \sin \varphi \cos \varphi \sin T dT = \\ &= -\frac{3}{4} f \frac{MR^2}{d^3} \rho \sin 2\delta \sin 2\varphi [\cos (T+\lambda_0) - \cos T] = \end{aligned}$$

$$= \rho R F_{0c} \sin 2\varphi \sin \frac{\lambda_0}{2} \cos \frac{\lambda_0}{2} \sin T + \rho R F_{0c} \sin 2\varphi \sin^2 \frac{\lambda_0}{2} \cos T;$$

$$\begin{aligned} P_{\text{м. п}} &= \rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_{0\text{м. п}} R d\varphi = \\ &= \rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} -\frac{3}{4} f \frac{MR^2}{d^3} \cos^2 \delta \sin 2\varphi \cos 2T d\varphi = \\ &= \frac{3}{8} f \frac{MR^2}{d^3} \rho \cos^2 \delta \cos 2T (\cos 2\varphi_2 - \cos 2\varphi_1) = \\ &= \frac{1}{2} \rho R F_{0\text{п}} \sin (\varphi_1 + \varphi_2) \sin (\varphi_1 - \varphi_2) \cos 2T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{\text{м. с}} &= \rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F_{0\text{м. с}} R d\varphi = \\ &= \rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{3}{2} f \frac{MR^2}{d^3} \sin 2\delta \cos 2\varphi \cos T d\varphi = \\ &= \frac{3}{4} f \frac{MR^2}{d^3} \rho \sin 2\delta \cos T (\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1) = \\ &= \rho R F_{0c} \sin (\varphi_2 - \varphi_1) \cos (\varphi_2 + \varphi_1) \cos T; \\ P_{\text{м. ч. д}} &= \rho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} -F_{0\text{ч. д}} R \sin 2\varphi \cos (mt - \psi) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \rho R F_{0\text{ч. д}} \cos (mt - \psi) (\cos 2\varphi_2 - \cos 2\varphi_1) = \\ &= \rho R F_{0\text{ч. д}} \sin (\varphi_1 + \varphi_2) \sin (\varphi_1 - \varphi_2) \cos (mt - \psi), \end{aligned}$$

в которых $\lambda_0 = \lambda_2 - \lambda_1$, а T и $T + \lambda_0$ — часовые углы поперечных стенок в зональных каналах. Анализ этих формул показывает, что фазы давлений $P_{\text{м. п}}$, $P_{\text{м. с}}$ и $P_{\text{м. ч. д}}$, а следовательно, и фазы вызываемых ими вертикальных сил могут быть равны или противоположны фазам компонентов $F_{0\text{м. п}}$, $F_{0\text{м. с}}$ и $F_{0\text{м. ч. д}}$ горизонтальной составляющей приливообразующей силы. Поэтому приливные волны всех периодов в меридианных каналах, ограниченных расположенными на любых широтах поперечными стенками, являются стоячими. В зональных каналах давления $P_{\text{п. п}}$ и $P_{\text{п. с}}$ представляют собой суммы двух слагаемых, фазы первых из которых совпадают с фазами компонентов $F_{0\text{п. п}}$ и $F_{0\text{п. с}}$ горизонтальной составляющей приливообразующей силы, а фазы вторых отличаются от фаз этих компонентов на 90° . Следовательно, действие вертикальных сил, вызываемых первыми из названных слагаемых давлений $P_{\text{п. п}}$ и $P_{\text{п. с}}$, совместно с действием компонентов $F_{0\text{п. п}}$ и $F_{0\text{п. с}}$ приводит к возникновению в ограниченных поперечными стенками зональных каналах стоя-

чих полусуточных и суточных волн. Действие же вертикальных сил, вызываемых слагаемыми, фазы которых отличаются от фаз компонентов $F_{оп.п}$ и $F_{оп.с}$ на 90° , совместно с действием этих компонентов обуславливает возникновение вырожденных поступательных волн полусуточного и суточного периодов. Поэтому как полусуточная, так и суточная волна в зональном канале с поперечными стенками является сложной волной, представляющей собой сумму стоячей и поступательной волн. Как и в меридианных каналах, стоячая волна образуется не в результате сложения набегающей на стенку и отраженной от нее поступательных волн, а вследствие действия на каждую частицу воды горизонтальных и вертикальных сил, разность фаз которых равна 0 или 180° .

Как видно из формул (176) — (190), изменение глубины канала может вызвать многократное изменение фаз всех кинематических характеристик приливов любого периода на противоположные и существенно влияет на амплитуды смещений, скоростей и ускорений частиц. Резонанс полусуточных и суточных приливов в зональных и полусуточных, суточных и частных долгопериодных приливов в меридианных каналах, ограниченных поперечными стенками, возникает не только при глубинах, соответственно равных $h = \frac{R^2 n^2 \cos^2 \varphi}{g}$, $h = \frac{R^2 n^2 \cos^2 \varphi}{g}$, $P. 186 - 190$

$$h = \frac{R^2 n^2}{g}, \quad h = \frac{R^2 n^2}{4g} \quad \text{и} \quad h = \frac{R^2 m^2}{4g}, \quad \text{но и когда}$$

$$\sin \frac{2Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda_2 - \lambda_1) = 0, \quad \sin \frac{Rn \cos \varphi}{\sqrt{gh}} (\lambda_2 - \lambda_1) = 0,$$

$$\sin \frac{2Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \quad \sin \frac{Rn}{\sqrt{gh}} (\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \quad \text{и}$$

$$\sin \frac{Rm}{\sqrt{gh}} (\varphi_2 - \varphi_1) = 0, \quad \text{т. е. при глубинах, соответственно равных}$$

$$h = \frac{4R^2 n^2 \cos^2 \varphi}{g} \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{(180^\circ k)^2}, \quad h = \frac{R^2 n^2 \cos^2 \varphi}{g} \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{(180^\circ k)^2},$$

$$h = \frac{4R^2 n^2}{g} \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{(180^\circ k)^2}, \quad h = \frac{R^2 n^2}{g} \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{(180^\circ k)^2} \quad \text{и} \quad h = \frac{R^2 m^2}{g} \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{(180^\circ k)^2}, \quad \text{где } k \text{ — любое натуральное число.}^*$$

Таким образом, резонансная глубина зависит не только от географической широты, на которой расположен канал, и относительной угловой скорости (или циклической частоты), но и от расстояния между поперечными стенками. Резонанс приливов

* k представляет собой моду свободной волны или ее обертона. — Прим. ред.

любого периода может возникнуть при различных глубинах, причем резонансные глубины прямо пропорциональны квадрату этого расстояния.

— В табл. 16 приведены вычисленные с точностью до 1 м резонансные глубины лунных полусуточных приливов ($n = 7,03 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$) в экваториальном и меридианных каналах при различных выраженных в угловой мере расстояниях между поперечными стенками и различных значениях k .

Таблица 16

Глубины (в метрах), при которых в экваториальном и меридианных каналах, ограниченных поперечными стенками, возникает резонанс лунных полусуточных приливов

$\lambda_2 - \lambda_1$ или $\varphi_2 - \varphi_1$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
1°	3	1	—	—	—
2	10	3	1	1	—
3	23	7	3	1	1
4	40	10	5	3	2
5	63	16	7	4	3
6	91	23	10	6	4
7	124	31	14	8	5
8	162	40	18	10	6
9	205	51	23	13	8
10	253	63	28	16	10
20	1 011	253	112	63	40
30	2 274	821	252	142	91
40	4 044	1 011	449	253	162
50	6 318	1 580	701	395	253
60	9 099	2 274	1 010	569	364
70	12 383	3 096	1 374	774	495
80	16 174	4 044	1 795	1 011	647
90	20 470	5 118	2 272	1 279	819
120	36 392	9 098	4 039	2 274	1 456
150	56 862	14 216	6 311	3 554	2 275
180	81 881	20 470	9 088	5 118	3 276
210	111 450	27 862	12 370	6 966	4 459
240	145 567	36 392	16 157	9 098	5 823
270	184 233	46 058	20 448	11 514	7 370
300	227 448	56 862	25 245	14 216	9 099
330	275 212	68 803	30 546	17 201	11 010

Видно, что резонанс может возникать в бассейнах, размеры которых имеют такой же порядок, как и размеры отдельных частей Мирового океана.

Установление других особенностей приливов в каналах, ограниченных поперечными стенками или сообщающихся с другими бассейнами, является предметом специального исследования, результаты которого представляются весьма важными для изучения приливов в океанах и морях Земли.

5.3. ПОЛУСУТОЧНЫЕ И ДОЛГОПЕРИОДНЫЕ ПРИЛИВЫ В КАНАЛАХ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ, ОБРАЗОВАННЫХ МЕРИДИАНАМИ

Расположенный на сфере океан может быть разделен не на совокупность меридианных каналов постоянной ширины, а на совокупность каналов переменной ширины, образованных меридианами, сходящимися у полюсов. Чтобы установить влияние, которое оказывает на приливные движения изменение ширины этих каналов, имеющих постоянную глубину, необходимо вывести и проанализировать формулы кинематических характеристик происходящих в них приливов.

Системы дифференциальных уравнений движения и неразрывности, описывающие полусуточные и частные долгопериодные приливы в каналах постоянной глубины, образованных меридианами, имеют вид

$$\begin{cases} \frac{\partial v_{м. п}}{\partial t} = -\frac{1}{2} F_{0п} \sin 2\varphi \cos 2(nt - \lambda) - \frac{g}{R} \frac{\partial z_{м. п}}{\partial \varphi}; & (191) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z_{м. п}}{\partial t} = -\frac{h}{R} \frac{\partial v_{м. п}}{\partial \varphi} + \frac{h}{R} v_{м. п} \operatorname{tg} \varphi; & (192) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v_{м. ч. д}}{\partial t} = -F_{0ч. д} \sin 2\varphi \cos (mt - \psi) - \frac{g}{R} \frac{\partial z_{м. ч. д}}{\partial \varphi}; & (193) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z_{м. ч. д}}{\partial t} = -\frac{h}{R} \frac{\partial v_{м. ч. д}}{\partial \varphi} + \frac{h}{R} v_{м. ч. д} \operatorname{tg} \varphi. & (194) \end{cases}$$

Приведенные системы отличаются от систем уравнений (113)—(114) и (117)—(118), описывающих полусуточные и частные долгопериодные приливы в меридианных каналах постоянной ширины, только тем, что в уравнения неразрывности (192) и (194) входят дополнительные слагаемые, соответственно равные $\frac{h}{R} v_{м. п} \operatorname{tg} \varphi$ и $\frac{h}{R} v_{м. ч. д} \operatorname{tg} \varphi$, которые учитывают эффект сходимости меридианов.

Для решения первой системы представим горизонтальную скорость $v_{м. п}$ в виде $v_{м. п} = V_{м. п} \sin 2(nt - \lambda)$, где $V_{м. п}$ — ее не зависящая от t и λ амплитуда, и определим отклонение уровня $z_{м. п}$ из уравнения неразрывности (192):

$$\begin{aligned} z_{м. п} &= \int \left[-\frac{h}{R} \frac{dV_{м. п}}{d\varphi} \sin 2(nt - \lambda) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{h}{R} V_{м. п} \operatorname{tg} \varphi \sin 2(nt - \lambda) \right] dt = \\ &= \frac{h}{2Rn} \frac{dV_{м. п}}{d\varphi} \cos 2(nt - \lambda) - \frac{h}{2Rn} V_{м. п} \operatorname{tg} \varphi \cos 2(nt - \lambda). \end{aligned}$$

Подставив значение $z_{м. п}$ в уравнение движения (191) и, проинтегрировав обе его части по времени, получим следующее

обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно $V_{м. п.}$:

$$\frac{gh}{4R^2n^2} \frac{d^2V_{м. п.}}{d\varphi^2} - \frac{gh}{4R^2n^2} \frac{dV_{м. п.}}{d\varphi} \operatorname{tg} \varphi - \\ - \frac{gh}{4R^2n^2 \cos^2 \varphi} V_{м. п.} + V_{м. п.} = - \frac{F_{0п}}{4n} \sin 2\varphi.$$

Частное решение этого уравнения можно найти с помощью подстановки $\tilde{V}_{м. п.} = y_{п.} \sin 2\varphi$, где $y_{п.}$ не зависит от φ . Используя ее, получаем

$$y_{п.} = \frac{\frac{1}{2} F_{0п} R^2 n}{3gh - 2R^2 n^2} \quad \text{и} \quad \tilde{V}_{м. п.} = \frac{\frac{1}{2} F_{0п} R^2 n \sin 2\varphi}{3gh - 2R^2 n^2}.$$

В отличие от задачи о приливах в меридианных каналах постоянной ширины, в этой задаче существуют граничные условия, обусловленные сходимостью меридианов на полюсах. Эти условия равносильны существованию на полюсах поперечных стенок, у которых все кинематические характеристики горизонтальных приливных движений равны нулю. Однако на широтах 90° N и 90° S полусуточный компонент ($F_{0м. п.}$) проекции приливообразующей силы на меридиан равен нулю, а векторы этого компонента, действующие на отдельные частицы воды в окружающем Землю меридианном канале, симметричны относительно полюсов. Вследствие этих причин горизонтальные приливные движения полусуточного периода не должны происходить на полюсах и при отсутствии поперечных стенок. Этот вывод подтверждается формулой (138), определяющей скорость полусуточного течения в меридианном канале, окружающем земной шар. Таким образом, наличие стенок на полюсах не оказывает никакого влияния на полусуточные приливы, а потому, как и в меридианных каналах, окружающих Землю, амплитуда горизонтальной скорости определяется частным решением неоднородного дифференциального уравнения. Следовательно,

$$v_{м. п.} = \tilde{V}_{м. п.} \sin 2(nt - \lambda) = \frac{\frac{1}{2} F_{0п} R^2 n \sin 2\varphi}{3gh - 2R^2 n^2} \sin 2(nt - \lambda). \quad (195)$$

Подставив значение $v_{м. п.}$ в уравнение неразрывности (192) и решив это уравнение, находим:

$$z_{м. п.} = \frac{\frac{3}{2} F_{0п} R h \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{3gh - 2R^2 n^2} \cos 2(nt - \lambda). \quad (196)$$

Система уравнений (193) — (194) решается таким же способом. Представив горизонтальную скорость $v_{м. ч. д.}$ в виде $v_{м. ч. д.} = V_{м. ч. д.} \sin (mt - \psi)$, где $\tilde{V}_{м. ч. д.}$ — ее не зависящая от

времени амплитуда, и выполнив аналогичные действия, получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно $V_{м. ч. д.}$:

$$\frac{gh}{R^2 m^2} \frac{d^2 V_{м. ч. д.}}{d\varphi^2} - \frac{gh}{R^2 m^2} \frac{dV_{м. ч. д.}}{d\varphi} \operatorname{tg} \varphi - \\ - \frac{gh}{R^2 m^2 \cos^2 \varphi} V_{м. ч. д.} + V_{м. ч. д.} = - \frac{F_{0ч. д.}}{m} \sin 2\varphi.$$

Частное решение этого уравнения находится с помощью подстановки $\tilde{V}_{м. ч. д.} = y_d \sin 2\varphi$, где y_d не зависит от φ . Это решение равно

$$\tilde{V}_{м. ч. д.} = \frac{F_{0ч. д.} R^2 m \sin 2\varphi}{6gh - R^2 m^2}.$$

По той же причине, что и в случае полусуточных приливов, амплитуда горизонтальной скорости определяется приведенным частным решением неоднородного уравнения. Таким образом,

$$v_{м. ч. д.} = \tilde{V}_{м. ч. д.} \sin(mt - \psi) = \frac{F_{0ч. д.} R^2 m \sin 2\varphi}{6gh - R^2 m^2} \sin(mt - \psi). \quad (197)$$

Используя значение $v_{м. ч. д.}$, находим отклонение ($z_{м. ч. д.}$) уровня от невозмущенного положения из уравнения неразрывности (194):

$$z_{м. ч. д.} = \frac{6F_{0ч. д.} R h \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{6gh - R^2 m^2} \cos(mt - \psi). \quad (198)$$

Совместный анализ формул (195) — (198) и формул тех же кинематических характеристик полусуточных и частных долгопериодных приливов в меридианных каналах постоянного поперечного сечения, окружающих земной шар, показывает, что приливы в каналах, образованных меридианами, обладают теми же принципиальными особенностями, какие присущи приливам в каналах постоянной ширины. Однако вследствие формы каналов, образованных меридианами, периоды свободных колебаний в них отличаются от периодов этих колебаний в меридианных каналах постоянного сечения. Поэтому знаменатели правых частей формул (195) — (198) не равны знаменателям правых частей формул скоростей течений и колебаний уровня в упомянутых каналах. Кроме того, форма каналов оказывает влияние и на зависимость амплитуд приливных колебаний уровня от географической широты. Полусуточные и долгопериодные приливные движения в каналах, образованных меридианами, также представляют собой стоячие волны с пучностями на экваторе и близ полюсов и с узловыми линиями на параллелях $45^\circ N$ и $45^\circ S$. Но, в отличие от стоячих волн в каналах постоянного поперечного сечения, линии, на которых отсутствуют колебания

уровня, не совпадают с узловыми (что имеет место в прямоугольном бассейне, т. е. в частном случае), а находятся на широтах $35^{\circ}16' N$ и $35^{\circ}16' S$. Траектории частиц, совершающих полусуточные и долгопериодные приливные движения, представляют собой отрезки прямых, наклоненных к горизонтальным плоскостям под углами k_n и k_d , равными

$$k_n = k_d = \arctg \left[- \frac{6p \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{R \sin 2\varphi} \right], \quad (199)$$

где p — расстояние между частицей и дном.

Знание особенностей полусуточных и долгопериодных приливов в каналах, образованных меридианами, облегчает объяснение некоторых черт трехмерных приливных движений тех же периодов, происходящих в жидком сферическом слое, полностью покрывающем шарообразное тело.

5.4. ПРИЛИВЫ В КАНАЛАХ, НАПРАВЛЕННЫХ ПОД ПРОИЗВОЛЬНЫМИ УГЛАМИ К ЭКВАТОРУ

Двухмерные приливные движения в любом окружающем Землю канале, проходящем под произвольным углом к экватору (например, в изображенном на рис. 10 канале с продольной осью $ABCD$), описываются системой дифференциальных уравнений движения и неразрывности:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} = F_n - \frac{g}{R} \frac{\partial z}{\partial x}; \end{array} \right. \quad (200)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial t} = - \frac{h}{R} \frac{\partial v}{\partial x}, \end{array} \right. \quad (201)$$

в которой F_n — приливообразующая сила, действующая в направлении продольной оси канала. Согласно формуле (39), эта сила представляет собой сумму двух полусуточных, двух суточных и одного долгопериодного компонента. Последний из них можно рассматривать как сумму слагаемых вида $-F_{оч.д} \sin^2 x \sin 2\alpha \cos (mt - \psi)$.

Подставим поочередно в систему уравнений (200) — (201) значения полусуточных и суточных компонентов и только что приведенного компонента, вызывающего частное долгопериодное движение. Для решения пяти полученных систем целесообразно написать искомые скорости $v_{n1}, v_{n2}, v_{c1}, v_{c2}, v_{ч.д}$ в виде $v_{n1} = V_{n1} \sin 2(nt - \lambda_w), v_{n2} = V_{n2} \cos 2(nt - \lambda_w), v_{c1} = V_{c1} \sin (nt - \lambda_w), v_{c2} = V_{c2} \cos (nt - \lambda_w), v_{ч.д} = V_{ч.д} \sin (mt - \psi)$, где $V_{n1}, V_{n2}, V_{c1}, V_{c2}, V_{ч.д}$ — их амплитуды. Решая эти системы способом, который использовался ранее при выводе формул кинематических характеристик приливов всех классов в окружаю-

щих Землю зональных и меридианных каналах, получаем *:

$$v_{n1} = -\frac{F_{0n}R^2n(1 + \cos^2 x) \sin 2x}{4(gh - R^2n^2)} \sin 2(nt - \lambda_w); \quad (202)$$

$$v_{n2} = -\frac{F_{0n}R^2n \cos x \cos 2x}{2(gh - R^2n^2)} \cos 2(nt - \lambda_w); \quad (203)$$

$$v_{c1} = -\frac{F_{0c}R^2n \sin x \cos 2x}{4gh - R^2n^2} \sin (nt - \lambda_w); \quad (204)$$

$$v_{c2} = -\frac{F_{0c}R^2n \sin x \cos x \sin 2x}{4gh - R^2n^2} \cos (nt - \lambda_w); \quad (205)$$

$$v_{q, \lambda} = \frac{F_{0q, \lambda}R^2m \sin^2 x \sin 2x}{4gh - R^2m^2} \sin (mt - \psi); \quad (206)$$

$$z_{n1} = \frac{F_{0n}Rh(1 + \cos^2 x) \cos 2x}{4(gh - R^2n^2)} \cos 2(nt - \lambda_w); \quad (207)$$

$$z_{n2} = -\frac{F_{0n}Rh \cos x \sin 2x}{2(gh - R^2n^2)} \sin 2(nt - \lambda_w); \quad (208)$$

$$z_{c1} = \frac{2F_{0c}Rh \sin x \sin 2x}{4gh - R^2n^2} \cos (nt - \lambda_w); \quad (209)$$

$$z_{c2} = \frac{2F_{0c}Rh \sin x \cos x \cos 2x}{4gh - R^2n^2} \sin (nt - \lambda_w); \quad (210)$$

$$z_{q, \lambda} = \frac{2F_{0q, \lambda}Rh \sin^2 x \cos 2x}{4gh - R^2m^2} \cos (mt - \psi). \quad (211)$$

Формулы горизонтальных смещений частиц, выведенные путем интегрирования формул скоростей течений по времени, имеют вид

$$s_{n1} = -\frac{F_{0n}R^2(1 + \cos^2 x) \sin 2x}{8(gh - R^2n^2)} \cos 2(nt - \lambda_w); \quad (212)$$

$$s_{n2} = -\frac{F_{0n}R^2 \cos x \cos 2x}{4(gh - R^2n^2)} \sin 2(nt - \lambda_w); \quad (213)$$

$$s_{c1} = \frac{F_{0c}R^2 \sin x \cos 2x}{4gh - R^2n^2} \cos (nt - \lambda_w); \quad (214)$$

$$s_{c2} = -\frac{F_{0c}R^2 \sin x \cos x \sin 2x}{4gh - R^2n^2} \sin (nt - \lambda_w); \quad (215)$$

$$s_{q, \lambda} = -\frac{|F_{0q, \lambda}|R^2 \sin^2 x \sin 2x}{4gh - R^2m^2} \cos (mt - \psi). \quad (216)$$

* Вывод формул (202) — (205) и (207) — (210) приведен в работе [28].

Формулы вертикальных скоростей и ускорений частиц в поверхностном слое выводятся дифференцированием и двойным дифференцированием смещений частиц в этом слое по времени. Можно полагать, что, как и в каналах, направленных вдоль параллелей и меридианов, амплитуды всех кинематических характеристик вертикальных приливных движений частиц линейно возрастают в вертикальном направлении от нуля в непосредственно прилегающем ко дну слое до максимальных значений в поверхностном. Поэтому их формулы отличаются от формул кинематических характеристик вертикальных движений в поверхностном слое только тем, что в числителе правых частей входит не глубина канала, а расстояние между частицей и дном.

Использование соотношений $n = \pi/\tau_n = 2\pi/\tau_c$, $m = 2\pi/\tau_d$ и $C = \sqrt{gh} = \lambda/\tau_0 = \pi R/\tau_0$ (где πR — длина волн всех периодов в рассматриваемых каналах, а τ_0 — период свободных колебаний) позволяет привести формулы всех кинематических характеристик к такому же виду, к какому были приведены формулы характеристик приливов в зональных и меридианных каналах. Например, формулы горизонтальных смещений частиц и отклонений уровня от невозмущенного положения, вызываемых действием полусуточных компонентов приливообразующей силы, можно записать так:

$$s_{n1} = - \frac{\frac{1}{2} F_{0n} \tau_0^2 (1 + \cos^2 x) \sin 2x}{4n^2 (\tau_n^2 - \tau_0^2)} \cos 2 (nt - \lambda_w); \quad (217)$$

$$s_{n2} = - \frac{F_{0n} \tau_0^2 \cos x \cos 2x}{4n^2 (\tau_n^2 - \tau_0^2)} \sin 2 (nt - \lambda_w); \quad (218)$$

$$z_{n1} = \frac{F_{0n} h \tau_0^2 (1 + \cos^2 x) \cos 2x}{4Rn^2 (\tau_n^2 - \tau_0^2)} \cos 2 (nt - \lambda_w); \quad (219)$$

$$z_{n2} = - \frac{F_{0n} h \tau_0^2 \cos x \sin 2x}{2Rn^2 (\tau_n^2 - \tau_0^2)} \sin 2 (nt - \lambda_w). \quad (220)$$

Анализ формул (217) — (220) и аналогичных формул кинематических характеристик приливов других классов показывает, что амплитуды и фазы характеристик приливных движений в каналах, направленных под произвольными углами к экватору, как и в каналах, ориентированных вдоль параллелей и меридианов, зависят от соотношения между периодами возбуждающей силы и свободных колебаний. При равенстве этих периодов возникает резонанс. Если период возбуждающей силы больше периода свободных колебаний, фазы горизонтальных и вертикальных смещений частиц повсеместно совпадают с фазой возбуждающей силы, а в случае, когда период силы меньше периода сво-

бодных колебаний, фазы смещений частиц отличаются от фазы ее на 180° .

Траектории полусуточных, суточных и частного долгопериодного движений частиц представляют собой отрезки прямых, наклоненных к горизонтальным плоскостям под углами $k_{п1}$, $k_{п2}$, $k_{с1}$, $k_{с2}$, $k_{д1}$, определяемых формулами:

$$k_{п1} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{2p}{R} - \operatorname{ctg} 2\alpha \right), \quad k_{п2} = \operatorname{arctg} \left(\frac{2p}{R} - \operatorname{tg} 2\alpha \right),$$

$$k_{с1} = \operatorname{arctg} \left(\frac{2p}{R} \operatorname{tg} 2\alpha \right), \quad k_{с2} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{2p}{R} \operatorname{ctg} 2\alpha \right),$$

$$k_{д1} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{2p}{R} \operatorname{ctg} 2\alpha \right).$$

Важная особенность полусуточных движений частиц, вызываемых полусуточными компонентами ($F_{п1}$ и $F_{п2}$) проекций приливообразующей силы на продольные оси рассматриваемых каналов, состоит в том, что фазы всех кинематических характеристик движений, происходящих под действием первого из этих компонентов, отличаются от фаз тех же самых характеристик движений, происходящих под действием второго компонента, на 90° (т. е. точно так же, как и фазы компонентов $F_{п1}$ и $F_{п2}$). Поэтому в момент, когда горизонтальные и вертикальные смещения каждой частицы, а следовательно, и отклонения уровня от невозмущенного положения, вызываемые действием одного из этих компонентов, равны нулю, горизонтальные и вертикальные смещения каждой частицы и отклонения уровня, обусловленные действием другого компонента, достигают максимальных значений. Совершенно аналогичной особенностью обладают и суточные приливы, вызываемые действием суточных компонентов ($F_{с1}$ и $F_{с2}$) проекций приливообразующей силы на продольную ось канала.

Анализ формул (207) — (216) показывает, что полусуточные движения всей массы воды в рассматриваемом канале имеют вид сложной волны, представляющей собой сумму двух стоячих волн. Пучности первой из них находятся на поперечных сечениях, на которых угол α равен 0 , 90 , 180 и 270° , а узловые линии — на сечениях, где этот угол составляет 45 , 135 , 225 и 315° . Пучности второй стоячей волны расположены на сечениях, на которых находятся узловые линии первой волны, а узловые линии второй волны — на сечениях, где расположены пучности первой. Суточные движения всей массы воды также представляют собой сложную волну, складывающуюся из двух стоячих волн. Пучности первой из них и узловые линии второй находятся на сечениях, на которых угол α равен 45 , 135 , 225 и 315° , а узловые линии первой и пучности второй — на сечениях, на которых этот угол составляет 0 , 90 , 180 и 270° . Долгопериодные же движения всей массы воды имеют вид стоячей волны с пучностями

на тех сечениях, где угол α равен 0, 90, 180 и 270°, и с узловыми линиями на сечениях, где он составляет 45, 135, 225 и 315°.

Существование волн перечисленных форм можно объяснить следующим образом. Давления $P_{п1}$, $P_{п2}$, $P_{с1}$, $P_{с2}$ и $P_{ч.д1}$, вызываемые действием компонентов $F_{п1}$, $F_{п2}$, $F_{с1}$, $F_{с2}$ и $F_{ч.д}$ на воду направленного под углом x к экватору канала с площадью поперечного сечения 1 см², равны:

$$P_{п1} = \rho \int F_{п1} R d\alpha = \rho \int -\frac{3}{4} f \frac{MR^2}{d^3} \cos^2 \delta (1 + \cos^2 x) \times \\ \times \sin 2\alpha \cos 2(nt - \lambda_w) d\alpha = \frac{1}{4} \rho R F_{0п} \times \\ \times (1 + \cos^2 x) \cos 2\alpha \cos 2(nt - \lambda_w);$$

$$P_{п2} = \rho \int F_{п2} R d\alpha = \\ = \rho \int -\frac{3}{2} f \frac{MR^2}{d^3} \cos^2 \delta \cos x \cos 2\alpha \sin 2(nt - \lambda_w) d\alpha = \\ = -\frac{1}{2} \rho R F_{0п} \cos x \sin 2\alpha \sin 2(nt - \lambda_w);$$

$$P_{с1} = \rho \int F_{с1} R d\alpha = \\ = \rho \int \frac{3}{2} f \frac{MR^2}{d^3} \sin 2\delta \sin x \cos 2\alpha \cos (nt - \lambda_w) d\alpha = \\ = \frac{1}{2} \rho R F_{0с} \sin x \sin 2\alpha \cos (nt - \lambda_w);$$

$$P_{с2} = \rho \int F_{с2} R d\alpha = \\ = \rho \int -\frac{3}{4} f \frac{MR^2}{d^3} \sin 2\delta \sin 2x \sin 2\alpha \sin (nt - \lambda_w) d\alpha = \\ = -\frac{1}{4} \rho R F_{0с} \sin 2x \cos 2\alpha \sin (nt - \lambda_w);$$

$$P_{ч.д1} = \rho \int F_{0ч.д} R d\alpha = \\ = \rho \int -F_{0ч.д} R \sin^2 x \sin 2\alpha \cos (mt - \psi) d\alpha = \\ = \frac{1}{2} \rho R F_{0ч.д} \sin^2 x \cos 2\alpha \cos (mt - \psi).$$

Видно, что фазы каждого из этих давлений, а следовательно, и фазы обусловленных ими вертикальных сил равны или противоположны фазам вызывающих перечисленные давления компонентов проекции приливообразующей силы на продольную ось канала. Поэтому все приливные волны, обусловленные действием

каждого компонента в отдельности, в каналах, направленных под произвольными углами к экватору, являются стоячими.

Следует заметить, что амплитуды кинематических характеристик горизонтальных приливных движений зависят от угла α точно так же, как и вызывающие эти движения компоненты проекции приливообразующей силы на продольную ось канала, а амплитуды характеристик вертикальных движений — как вертикальные силы, возникающие вследствие существования давлений $P_{п1}$, $P_{п2}$, $P_{с1}$, $P_{с2}$ и $P_{ч.д1}$. Эти зависимости объясняют описанное ранее расположение пучностей и узловых линий всех стоячих волн.

Принципиальное отличие приливов в каналах, направленных под произвольными углами к экватору, от приливов в зональных и меридианных каналах вызвано различиями проекций приливообразующих сил на оси этих каналов. Оно проявляется в том, что в первых из них полусуточные движения каждой частицы представляют собой сумму двух вынужденных полусуточных колебаний, а суточные движения — сумму двух вынужденных суточных. Поэтому в каналах, ориентированных под углом к экватору, полусуточные и суточные приливные волны являются сложными, а в зональных и меридианных каналах — поступательными и стоячими. Таким образом, в общем случае двумерные приливные движения всей массы воды, происходящие с полусуточным и суточным периодами, представляют собой сложные волны.

ГЛАВА 6. ТРЕХМЕРНЫЕ ПРИЛИВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

6.1. ПРИЛИВЫ В ОКЕАНЕ, ПОКРЫВАЮЩЕМ ВЕСЬ ЗЕМНОЙ ШАР

Системы дифференциальных уравнений, описывающих полусуточные, суточные и частные долгопериодные приливы, происходящие под действием приливообразующей силы и силы горизонтального градиента давления в сплошь покрывающем земной шар океане постоянной глубины, которая гораздо меньше радиуса Земли, получаются путем подстановки в систему уравнений (101), (102), (104) полусуточных, суточных и частных долгопериодных компонентов проекций приливообразующей силы на параллель и меридиан. Эти системы имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_n}{\partial t} = F_{0n} \cos \varphi \sin 2(nt - \lambda) - \frac{g}{R \cos \varphi} \frac{\partial z_n}{\partial \lambda}; & (221) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} = -\frac{1}{2} F_{0n} \sin 2\varphi \cos 2(nt - \lambda) - \frac{g}{R} \frac{\partial z_n}{\partial \varphi}; & (222) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z_n}{\partial t} = -\frac{h}{R \cos \varphi} \frac{\partial v_n}{\partial \lambda} - \frac{h}{R} \frac{\partial u_n}{\partial \varphi} + \frac{h}{R} u_n \operatorname{tg} \varphi; & (223) \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_c}{\partial t} &= F_{0c} \sin \varphi \sin (nt - \lambda) - \frac{g}{R \cos \varphi} \frac{\partial z_c}{\partial \lambda}; \end{aligned} \right. \quad (224)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_c}{\partial t} &= F_{0c} \cos 2\varphi \cos (nt - \lambda) - \frac{g}{R} \frac{\partial z_c}{\partial \varphi}; \end{aligned} \right. \quad (225)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z_c}{\partial t} &= -\frac{h}{R \cos \varphi} \frac{\partial v_c}{\partial \lambda} - \frac{h}{R} \frac{\partial u_c}{\partial \varphi} + \frac{h}{R} u_c \operatorname{tg} \varphi; \end{aligned} \right. \quad (226)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_{ч. л}}{\partial t} &= -F_{0ч. л} \sin 2\varphi \cos (mt - \psi) - \frac{g}{R} \frac{\partial z_{ч. л}}{\partial \varphi}; \end{aligned} \right. \quad (227)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z_{ч. л}}{\partial t} &= -\frac{h}{R} \frac{\partial u_{ч. л}}{\partial \varphi} + \frac{h}{R} u_{ч. л} \operatorname{tg} \varphi. \end{aligned} \right. \quad (228)$$

Как отмечалось в первой части работы, проекция приливообразующей силы долгого периода на параллель равна нулю, а амплитуды и фазы проекций этой силы на меридиан и вертикаль не зависят от долготы. Поэтому в океане постоянной глубины, сплошь покрывающем Землю, амплитуды и фазы частных долгопериодных приливных движений не изменяются в зональном направлении и проекция силы, вызываемой горизонтальным градиентом давления, на это направление также равна нулю. Вследствие этого в последнюю систему не входит уравнение движения, определяющее ускорения частиц в направлениях параллелей.

Как и при рассмотрении двумерных приливных движений, положим, что ни амплитуды ($F_{0п}$ и $F_{0с}$) полусуточной и суточной приливообразующей силы, ни относительная угловая скорость (n) не изменяются во времени и, следовательно, все кинематические характеристики полусуточных и суточных движений, как и характеристики частных долгопериодных движений, изменяются во времени согласно гармоническому закону. Поскольку океан покрывает весь земной шар, граничные условия в задачах по определению кинематических характеристик приливов любого класса в таком океане не имеют смысла. Поэтому амплитуда каждой кинематической характеристики определяется частным решением неоднородного дифференциального уравнения, составленного относительно нее на основании исходной системы.

Для решения первой системы запишем полусуточное отклонение ($z_{п}$) уровня от невозмущенного положения в виде $z_{п} = Z_{п} \cos 2(nt - \lambda)$, где $Z_{п}$ — его амплитуда, не зависящая от времени и долготы. Подставим значение $z_{п}$ в уравнения движения (221) и (222) и проинтегрируем их по времени:

$$v_{п} = -\frac{F_{0п}}{2n} \cos \varphi \cos 2(nt - \lambda) + \frac{g}{Rn \cos \varphi} Z_{п} \cos 2(nt - \lambda);$$

$$u_{п} = -\frac{F_{0п}}{4n} \sin 2\varphi \sin 2(nt - \lambda) - \frac{g}{2Rn} \frac{dZ_{п}}{d\varphi} \sin 2(nt - \lambda).$$

Подставив найденные значения $v_{п}$ и $u_{п}$ в уравнение неразрывности (223), проинтегрировав его по времени и выполнив

элементарные преобразования, получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно Z_n :

$$\begin{aligned} & \frac{gh}{4R^2n^2} \frac{d^2Z_n}{d\varphi^2} - \frac{gh}{4R^2n^2} \frac{dZ_n}{d\varphi} \operatorname{tg} \varphi - \\ & - \frac{gh}{R^2n^2 \cos^2 \varphi} Z_n + Z_n = - \frac{3F_{0n}h}{4Rn^2} \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Его частное решение можно найти с помощью подстановки $\tilde{Z}_n = x_n \cos^2 \varphi$, где x_n не зависит от φ . Используя эту подстановку, получаем

$$\begin{aligned} & - \frac{gh}{2R^2n^2} x_n \cos 2\varphi + \frac{gh}{2R^2n^2} x_n \sin^2 \varphi - \\ & - \frac{gh}{R^2n^2} x_n + x_n \cos^2 \varphi = - \frac{3F_{0n}h}{4Rn^2} \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Отсюда

$$x_n = \frac{3}{2} \frac{F_{0n}Rh}{3gh - 2R^2n^2} \text{ и } Z_n = \tilde{Z}_n = \frac{3}{2} \frac{F_{0n}Rh \cos^2 \varphi}{3gh - 2R^2n^2}.$$

Следовательно,

$$z_n = Z_n \cos 2(nt - \lambda) = \frac{3}{2} \frac{F_{0n}Rh \cos^2 \varphi}{3gh - 2R^2n^2} \cos 2(nt - \lambda). \quad (229)$$

Подставив значение Z_n в проинтегрированные по времени уравнения движения, найдем проекции скоростей полусуточных приливных движений на параллель и меридиан:

$$v_n = \frac{F_{0n}R^2n \cos \varphi}{3gh - 2R^2n^2} \cos 2(nt - \lambda); \quad (230)$$

$$u_n = \frac{1}{2} \frac{F_{0n}R^2n \sin 2\varphi}{3gh - 2R^2n^2} \sin 2(nt - \lambda). \quad (231)$$

Вторая система решается аналогичным способом. Суточное отклонение (z_c) уровня от невозмущенного положения записывается в виде $z_c = \tilde{Z}_c \cos(nt - \lambda)$, где Z_c — его не зависящая от времени и долготы амплитуда. Значения проекций скорости находятся путем интегрирования уравнений движения (224) и (225) по времени:

$$v_c = - \frac{F_{0c}}{n} \sin \varphi \cos(nt - \lambda) + \frac{g}{Rn \cos \varphi} Z_c \cos(nt - \lambda);$$

$$u_c = \frac{F_{0c}}{n} \cos 2\varphi \sin(nt - \lambda) - \frac{g}{Rn} \frac{dZ_c}{d\varphi} \sin(nt - \lambda).$$

Эти значения подставляются в уравнение неразрывности (226). После интегрирования его по времени и выполнения

элементарных преобразований получается следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно Z_c :

$$\frac{gh}{R^2 n^2} \frac{d^2 Z_c}{d\varphi^2} - \frac{gh}{R^2 n^2} \frac{dZ_c}{d\varphi} \operatorname{tg} \varphi - \\ - \frac{gh}{R^2 n^2 \cos^2 \varphi} Z_c + Z_c = - \frac{3F_{oc} h}{R n^2} \sin 2\varphi.$$

Частное решение этого уравнения, определяющее искомую величину Z_c , находится с помощью подстановки $\tilde{Z}_c = x_c \sin 2\varphi$, где x_c не зависит от φ :

$$- \frac{4gh}{R^2 n^2} x_c \sin 2\varphi - \frac{2gh}{R^2 n^2} x_c \cos 2\varphi \operatorname{tg} \varphi - \\ - \frac{2gh}{R^2 n^2} x_c \operatorname{tg} \varphi + x_c \sin 2\varphi = - \frac{3F_{oc} h}{R n^2} \sin 2\varphi,$$

откуда

$$x_c = \frac{3F_{oc} R h}{6gh - R^2 n^2} \text{ и } Z_c = \tilde{Z}_c = \frac{3F_{oc} R h \sin 2\varphi}{6gh - R^2 n^2}.$$

Следовательно,

$$z_c = Z_c \cos (nt - \lambda) = \frac{3F_{oc} R h \sin 2\varphi}{6gh - R^2 n^2} \cos (nt - \lambda). \quad (232)$$

Проекции скорости на параллель и меридиан находятся путем подстановки значения Z_c в проинтегрированные по времени уравнения движения. Эти проекции равны

$$v_c = \frac{F_{oc} R^2 n \sin \varphi}{6gh - R^2 n^2} \cos (nt - \lambda); \quad (233)$$

$$u_c = - \frac{F_{oc} R^2 n \cos 2\varphi}{6gh - R^2 n^2} \sin (nt - \lambda). \quad (234)$$

Система уравнений (227) — (228) не отличается от системы уравнений (193) — (194), описывающей частные долгопериодные приливные движения в каналах постоянной глубины, образованных реальными меридианами. Естественно, что все кинематические характеристики частных долгопериодных приливов в рассматриваемом океане не отличаются от характеристик приливов в таких каналах.

Формулы проекций смещений и ускорений частиц на параллель и меридиан выводятся путем интегрирования и дифференцирования проекций скоростей на указанные направления по времени. Формулы вертикальных скоростей и ускорений частиц в поверхностном слое получаются дифференцированием и двойным дифференцированием по времени отклонений уровня от невозмущенного положения. Вертикальные смещения, скорости

и ускорения частиц в других слоях определяются формулами, отличающимися от формул этих характеристик в поверхностном слое только тем, что в числителе их правых частей вместо глубины океана входит расстояние (p) между частицей и дном.

Формулы проекций на параллель, меридиан и вертикаль всех кинематических характеристик полусуточных, суточных и частных долгопериодных приливных движений частиц приведены в табл. 17, а установленные с их помощью виды проекций траекторий частиц на горизонтальные плоскости, плоскости, перпендикулярные меридианам, и плоскости меридианов — в табл. 18.

Рассмотрим важнейшие особенности приливов в покрывающем Землю океане. Для этого представим как полусуточные, так и суточные отклонения уровня от невозмущенного положения в виде суммы двух слагаемых, одно из которых соответствует приливным движениям вдоль параллелей, а второе — приливным движениям вдоль меридианов*. Обозначим названные отклонения уровня, происходящие с полусуточным периодом, буквами $z_{п.п}$ и $z_{м.п}$, а суточные отклонения уровня — буквами $z_{п.с}$ и $z_{м.с}$. Согласно уравнениям неразрывности (223) и (226), эти отклонения определяются соотношениями

$$\frac{\partial z_{п.п}}{\partial t} = -\frac{h}{R \cos \varphi} \frac{\partial v_{п.п}}{\partial \lambda}; \quad \frac{\partial z_{м.п}}{\partial t} = -\frac{h}{R} \frac{\partial u_{п.п}}{\partial \varphi} + \frac{h}{R} u_{п.п} \operatorname{tg} \varphi;$$

$$\frac{\partial z_{п.с}}{\partial t} = -\frac{h}{R \cos \varphi} \frac{\partial v_{п.с}}{\partial \lambda}; \quad \frac{\partial z_{м.с}}{\partial t} = -\frac{h}{R} \frac{\partial u_{п.с}}{\partial \varphi} + \frac{h}{R} u_{п.с} \operatorname{tg} \varphi.$$

Следовательно,

$$z_{п.п} = -\int \frac{h}{R \cos \varphi} \frac{\partial v_{п.п}}{\partial \lambda} dt = \frac{F_{0п} R h}{3gh - 2R^2 n^2} \cos 2(nt - \lambda); \quad (235)$$

$$z_{м.п} = \int \left(-\frac{h}{R} \frac{\partial u_{п.п}}{\partial \varphi} + \frac{h}{R} u_{п.п} \operatorname{tg} \varphi \right) dt =$$

$$= \frac{F_{0п} R h \left(\frac{3}{2} \cos^2 \varphi - 1 \right)}{3gh - 2R^2 n^2} \cos 2(nt - \lambda); \quad (236)$$

$$z_{п.с} = -\int \frac{h}{R \cos \varphi} \frac{\partial v_{п.с}}{\partial \lambda} dt = \frac{F_{0с} R h \operatorname{tg} \varphi}{6gh - R^2 n^2} \cos (nt - \lambda); \quad (237)$$

$$z_{м.с} = \int \left(-\frac{h}{R} \frac{\partial u_{п.с}}{\partial \varphi} + \frac{h}{R} u_{п.с} \operatorname{tg} \varphi \right) dt =$$

$$= \frac{F_{0с} R h (2 \sin 2\varphi + \cos 2\varphi \operatorname{tg} \varphi)}{6gh - R^2 n^2} \cos (nt - \lambda). \quad (238)$$

Очевидно, что $z_{п.п} + z_{м.п} = z_{п}$ и $z_{п.с} + z_{м.с} = z_{с}$.

* Такое представление z здесь и в последующих разделах (с. 180, 194 и др.) — формально.

Основываясь на подобном представлении, нельзя разделить меридиональные и зональные движения, так как скорости течения в (235) — (238) являются функциями $z_{п} + z_{с}$. — Прим. ред.

Таблица 17

Формулы кинематических характеристик приливных движений в океане постоянной глубины, сплошь покрывающем Землю, при отсутствии силы Кориолиса ($n = -\alpha$)

Класс приливов	Проекция	Кинематические характеристики		
		смещение	скорость	ускорение
Полусуточный	На параллель	$\frac{1}{2} \frac{F_{0n} R^2 \cos \varphi}{3gh - 2R^2 n^2} \sin 2(nt - \lambda)$	$\frac{F_{0n} R^2 n \cos \varphi}{3gh - 2R^2 n^2} \cos 2(nt - \lambda)$	$-\frac{2F_{0n} R^2 n^2 \cos \varphi}{3gh - 2R^2 n^2} \times \sin 2(nt - \lambda)$
	На меридиан	$-\frac{1}{4} \frac{F_{0n} R^2 \sin 2\varphi}{3gh - 2R^2 n^2} \times \cos 2(nt - \lambda)$	$\frac{1}{2} \frac{F_{0n} R^2 n \sin 2\varphi}{3gh - 2R^2 n^2} \times \sin 2(nt - \lambda)$	$\frac{F_{0n} R^2 n^2 \sin 2\varphi}{3gh - 2R^2 n^2} \cos 2(nt - \lambda)$
	На вертикаль	$\frac{3}{2} \frac{F_{0n} R p \cos^2 \varphi}{3gh - 2R^2 n^2} \times \cos 2(nt - \lambda)$	$-\frac{3F_{0n} R p n \cos^2 \varphi}{3gh - 2R^2 n^2} \times \sin 2(nt - \lambda)$	$-\frac{6F_{0n} R p n^2 \cos^2 \varphi}{3gh - 2R^2 n^2} \times \cos 2(nt - \lambda)$
	На параллель	$\frac{F_{0c} R^2 \sin \varphi}{6gh - R^2 n^2} \sin (nt - \lambda)$	$\frac{F_{0c} R^2 n \sin \varphi}{6gh - R^2 n^2} \cos (nt - \lambda)$	$-\frac{F_{0c} R^2 n^2 \sin \varphi}{6gh - R^2 n^2} \times \sin (nt - \lambda)$
Суточный	На меридиан	$\frac{F_{0c} R^2 \cos 2\varphi}{6gh - R^2 n^2} \cos (nt - \lambda)$	$-\frac{F_{0c} R^2 n \cos 2\varphi}{6gh - R^2 n^2} \times \sin (nt - \lambda)$	$-\frac{F_{0c} R^2 n^2 \cos 2\varphi}{6gh - R^2 n^2} \times \cos (nt - \lambda)$
	На вертикаль	$\frac{3F_{0c} R p \sin 2\varphi}{6gh - R^2 n^2} \cos (nt - \lambda)$	$-\frac{3F_{0c} R p n \sin 2\varphi}{6gh - R^2 n^2} \times \sin (nt - \lambda)$	$-\frac{3F_{0c} R p n^2 \sin 2\varphi}{6gh - R^2 n^2} \times \cos (nt - \lambda)$
Долгопериодный	На параллель	0	0	0
	На меридиан	$-\frac{F_{0ч.д} R^2 \sin 2\varphi}{6gh - R^2 m^2} \times \cos (mt - \psi)$	$\frac{F_{0ч.д} R^2 m \sin 2\varphi}{6gh - R^2 m^2} \times \sin (mt - \psi)$	$\frac{F_{0ч.д} R^2 m^2 \sin 2\varphi}{6gh - R^2 m^2} \times \cos (mt - \psi)$
	На вертикаль	$\frac{6F_{0ч.д} R p \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{6gh - R^2 m^2} \times \cos (mt - \psi)$	$-\frac{6F_{0ч.д} R p m \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{6gh - R^2 m^2} \times \sin (mt - \psi)$	$\frac{6F_{0ч.д} R p m^2}{6gh - R^2 m^2} \times \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \times \cos (mt - \psi)$

Таблица 18

Проекции траекторий частиц на три взаимно перпендикулярные плоскости

Принципиальные разновидности трехмерных приливных движений	Класс приливов	Проекция траекторий частиц на горизонтальные плоскости	Проекция траекторий частиц на плоскости, перпендикулярные меридианам	Проекция траекторий частиц на плоскости меридианов
Приливы в океане, сплошь покрывающем Землю	Полусуточный	Эллипс, $\frac{M}{\Pi} = \sin \varphi$	Эллипс, $\frac{B}{\Pi} = \frac{3p \cos \varphi}{R}$	Отрезок прямой, наклоненной к плоскости горизонта, $k_n = \arctg \left(-\frac{3p}{R} \operatorname{ctg} \varphi \right)$
	Суточный	Эллипс, $\frac{M}{\Pi} = \frac{\cos 2\varphi}{\sin \varphi}$	Эллипс, $\frac{B}{\Pi} = \frac{6p \cos \varphi}{R}$	Отрезок прямой, наклоненной к плоскости горизонта, $k_c = \arctg \left(\frac{3p}{R} \operatorname{tg} 2\varphi \right)$
	Долгопериодный	Отрезок касательной к меридиану, $M = \frac{F_{\text{оч. д}} R^2 \sin 2\varphi}{6gh - R^2 m^2}$	Отрезок вертикали, $B = \frac{6F_{\text{оч. д}} R p \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{6gh - R^2 m^2}$	Отрезок прямой, наклоненной к плоскости горизонта, $k_d = \arctg \left[-\frac{6p \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{R \sin 2\varphi} \right]$
Приливы на жидком небесном теле при отсутствии силы Кориолиса	Полусуточный	Эллипс, $\frac{M}{\Pi} = \sin \varphi$	Эллипс, $\frac{B}{\Pi} = \cos \varphi$	Отрезок прямой, наклоненной к плоскости горизонта, $k_n = 90^\circ - \varphi$
	Суточный	Эллипс, $\frac{M}{\Pi} = \frac{\cos 2\varphi}{\sin \varphi}$	Эллипс, $\frac{B}{\Pi} = 2 \cos \varphi$	Отрезок прямой, наклоненной к плоскости горизонта, $k_c = 2\varphi$
	Долгопериодный	Отрезок касательной к меридиану, $M = \frac{F_{\text{ч. д}} R \sin 2\varphi}{2g - Rm^2}$	Отрезок вертикали, $B = \frac{2F_{\text{ч. д}} R \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{2g - Rm^2}$	Отрезок прямой, наклоненной к плоскости горизонта, $k_d = \arctg \left[-\frac{2 \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{\sin 2\varphi} \right]$
	Полусуточный	Эллипс, $\frac{M}{\Pi} = \sin \varphi$	Эллипс, $\frac{B}{\Pi} = \cos \varphi$	Отрезок прямой, наклоненной к плоскости горизонта, $k_n = 90^\circ - \varphi$
	Суточный	Эллипс, $\frac{M}{\Pi} = \frac{(n - 2\omega) \cos^2 \varphi - n \sin^2 \varphi}{n \sin \varphi}$	Эллипс, $\frac{B}{\Pi} = \frac{2(n - \omega) \cos \varphi}{n}$	Отрезок прямой, наклоненной к плоскости горизонта, $k_c = \arctg \left[\frac{(n - \omega) \sin 2\varphi}{(n - 2\omega) \cos^2 \varphi - n \sin^2 \varphi} \right]$
	Долгопериодный	Эллипс, $\frac{M}{\Pi} = \frac{3m \sin \varphi}{2\omega}$	Эллипс, $\frac{B}{\Pi} = \frac{3m \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{2\omega \cos \varphi}$	Отрезок прямой, наклоненной к плоскости горизонта, $k_d = \arctg \left[-\frac{2 \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{\sin 2\varphi} \right]$

Анализ формул смещений частиц в направлениях параллелей, меридианов и вертикалей показывает, что проекции траекторий полусуточных движений частиц на горизонтальные плоскости представляют собой эллипсы, оси (Π и M) которых направлены вдоль параллелей и меридианов. Каноническое уравнение каж-

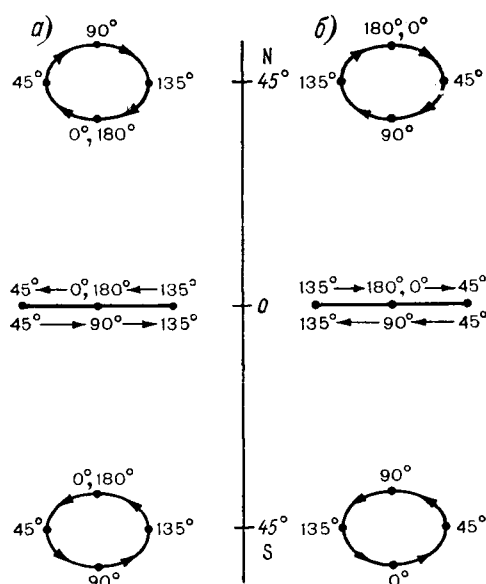


Рис. 43. Проекция траекторий полусуточных движений частиц в океане, покрывающем Землю, на горизонтальные плоскости.

a — при $2R^2n^2 < 3gh$; b — при $3gh < 2R^2n^2$.

дого из этих эллипсов в использованной ранее системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\frac{1}{2} F_{0n} R^2 \cos \varphi}{3gh - 2R^2 n^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\frac{1}{4} F_{0n} R^2 \sin 2\varphi}{3gh - 2R^2 n^2}\right)^2} = 1. \quad (239)$$

Отношение длины меридианной оси к длине зональной равно синусу географической широты. Следовательно, на всех широтах зональные оси эллипсов длиннее меридианных. На экваторе меридианные оси равны нулю и проекции траекторий частиц представляют собой ориентированные вдоль него отрезки. В окрестностях полюсов проекции траекторий частиц близки к окружностям, радиусы которых исчезающе малы. На всех широтах длины осей эллипсов не изменяются с глубиной.

На рис. 43 показано положение частиц на орбитах в моменты, в которые часовой угол вызывающего прилив светила ра-

вен 0, 45, 90, 135 и 180°, в случаях, когда $2R^2n^2 < 3gh$ и $3gh < 2R^2n^2$. Можно заключить, что в обоих этих случаях за сутки частица совершает два оборота, причем в северном полушарии — в направлении хода часовой стрелки, а в южном — в противоположном направлении. Соотношение между величинами $3gh$ и $2R^2n^2$ (т. е. между периодами возбуждающей силы и свободных колебаний) не влияет на направление вращения частицы, но при противоположных знаках разности этих величин частица в любой момент времени находится в диаметрально противоположных точках орбиты. При $3gh < 2R^2n^2$ частица в каждый момент времени находится в точках орбиты, соответствующих тем, в которых находится частица, движущаяся под действием одних только компонентов $F_{ш.п}$ и $F_{м.п}$ приливообразующей силы.

Проекции траекторий частиц на плоскости, перпендикулярные меридианам, представляют собой эллипсы, оси (Π и B) которых направлены вдоль параллелей и вертикалей. В системе координат с осями X и Z , проходящими вдоль только что названных направлений, каноническое уравнение каждого из этих эллипсов имеет вид

$$\frac{x^2}{\left(\frac{\frac{1}{2} F_{0п} R^2 \cos \varphi}{3gh - 2R^2 n^2}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{\frac{3}{2} F_{0п} R p \cos^2 \varphi}{3gh - 2R^2 n^2}\right)^2} = 1. \quad (240)$$

Отношение между длинами вертикальных и зональных осей эллипсов прямо пропорционально расстоянию ото дна и косинусу географической широты. Следовательно, на всех широтах в непосредственно прилегающем ко дну слое рассматриваемые проекции имеют вид отрезков прямых, ориентированных вдоль параллелей. Во всех других слоях эти проекции представляют собой вытянутые вдоль параллелей эллипсы, вертикальные оси которых линейно возрастают по мере удаления ото дна и достигают максимальных значений в поверхностном слое. Но даже в этом слое в районе экватора, где $\cos \varphi = 1$, отношение длины вертикальной оси к длине зональной составляет лишь $3h/R$. Таким образом, проекции траекторий частиц на плоскости, перпендикулярные меридианам, очень похожи на траектории полусуточных движений частиц в зональных каналах. В случаях, когда $2R^2n^2 < 3gh$ и когда $3gh < 2R^2n^2$, частица в любой момент времени находится в точке орбиты, соответствующей той, в которой находится частица, совершающая полусуточные движения в зональном канале при таком же знаке разности периодов возбуждающей силы и свободных колебаний, т. е. при $R^2n^2 \cos^2 \varphi < gh$ и при $gh < R^2n^2 \cos^2 \varphi$ (рис. 36). Как и в этих каналах, за сутки частица совершает два оборота в направлении, противоположном ходу часовой стрелки.

Проекции траекторий частиц на плоскости меридианов представляют собой отрезки прямых, наклоненных к горизонтальным

плоскостям. Каноническое уравнение каждой из них в использованной ранее системе координат имеет вид

$$z = -y \frac{3p}{R} \operatorname{ctg} \varphi, \quad (241)$$

а угол (k_n) наклона ее к плоскости горизонта равен

$$k_n = \operatorname{arctg} \frac{z}{y} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{3p}{R} \operatorname{ctg} \varphi \right). \quad (242)$$

Таким образом, в непосредственно прилегающем ко дну слое эти отрезки имеют горизонтальное направление. Тангенс угла наклона их к горизонтальной плоскости прямо пропорционален расстоянию ото дна. Кроме того, угол k_n зависит от географической широты: на экваторе он равен 90° , но, как и в меридианных каналах, быстро убывает в северном и южном направлениях. В большей части океана эти отрезки почти горизонтальны.

Проекция траектории частиц на различных широтах и положения частиц в моменты, когда часовой угол вызывающего прилив светила равен $0, 45, 90, 135$ и 180° , при противоположных знаках разности $3gh - 2R^2n^2$ показаны схематично на рис. 44. Можно заключить, что в течение суток частица дважды проходит вдоль отрезка в прямом и обратном направлениях, а в моменты, в которые часовой угол равен $45, 135, 225$ и 315° , находится в его середине. При отрицательном значении разности $3gh - 2R^2n^2$ частица находится в точке, симметричной относительно середины траектории той, в которой она находится при положительном значении приведенной разности, причем при противоположных знаках ее частица в каждый момент времени движется в противоположных направлениях.

Совместный анализ формул смещений частиц в направлениях параллелей и меридианов и соответствующих этим смещениям отклонений ($z_{п.п}$ и $z_{м.п}$) уровня от невозмущенного положения показывает, что полусуточное движение всей массы воды океана, сплошь покрывающего земной шар, представляет собой сложную волну. Она складывается из двух поступательных волн, направленных вдоль параллелей, и двух стоячих волн, ориентированных в меридианном направлении. Амплитуды поступательных волн не зависят от широты и долготы места, а фазы при одном и том же знаке разности между периодами возбуждающей силы и свободных колебаний равны фазам полусуточных волн в зональных каналах. Если $2R^2n^2 < 3gh$, гребни поступательных волн находятся на меридианах с часовыми углами 0 и 180° , а подошвы — на меридианах, на которых часовой угол светила равен 90 и 270° . Если же $3gh < 2R^2n^2$, то гребни располагаются на меридианах с только что указанными часовыми углами, а подошвы — на меридианах с часовыми углами 0 и 180° . Все кинематические характеристики меридианных стоячих волн

равны характеристикам полусуточных волн в каналах переменной ширины, образованных реальными меридианами. Таким образом, пучности этих волн расположены на экваторе и полюсах, линии, на которых отсутствуют вертикальные движения,— на

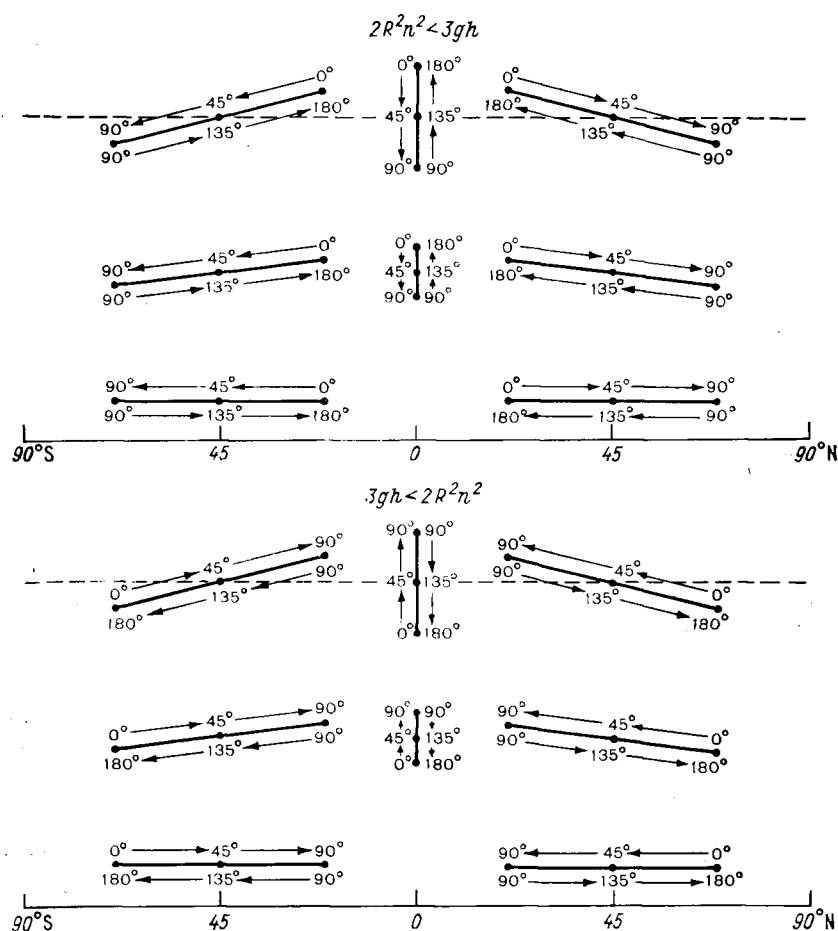


Рис. 44. Проекция траекторий полусуточных движений частиц в океане, покрывающем Землю, на плоскости меридианов.

параллелях $35^{\circ}16' N$ и $35^{\circ}16' S$, а узловые линии — на параллелях $45^{\circ} N$ и $45^{\circ} S$. При противоположных знаках разности $3gh - 2R^2n^2$ стоячие волны также имеют противоположные фазы.

При равенстве периодов возбуждающей силы и свободных колебаний (т. е. когда $3gh = 2R^2n^2$) в покрывающем весь земной шар океане возникает резонанс полусуточных приливов, вследствие чего во всех частях океана кинематические характеристики горизонтальных и вертикальных движений неограниченно

возрастают. Резонанс лунных полусуточных приливов ($n = 7,03 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$) возникает при глубине океана, приблизительно равной 13,6 км, а резонанс солнечных полусуточных приливов ($n = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$) — при глубине около 14,7 км. Таким образом, резонансные глубины лунных и солнечных полусуточных приливов значительно превышают среднюю и даже наибольшую глубину Мирового океана. Если глубина океана, покрывающего весь земной шар, меньше приведенных значений, то в нем существуют обращенные полусуточные приливы.

Рассмотрим особенности суточных приливов. Анализ формул смещений частиц показывает, что проекции траекторий суточных движений на горизонтальные плоскости также представляют собой эллипсы с осями (Π и M), направленными вдоль параллелей и меридианов. Каноническое уравнение каждого эллипса в использованной ранее системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{\left(\frac{F_{0c} R^2 \sin \varphi}{6gh - R^2 n^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{F_{0c} R^2 \cos 2\varphi}{6gh - R^2 n^2}\right)^2} = 1. \quad (243)$$

Отношение между длинами меридианных и зональных осей равно $\left| \frac{\cos 2\varphi}{\sin \varphi} \right|$. На экваторе зональные оси эллипсов равны нулю и проекции траекторий частиц представляют собой отрезки прямых, направленные вдоль меридианов. В зоне между 30° S и 30° N меридианные оси длиннее зональных, а на параллелях 30° N и 30° S эти оси равны и проекции траекторий имеют вид окружностей. В зонах севернее 30° N и южнее 30° S зональные оси длиннее меридианных, причем на параллелях 45° N и 45° S меридианные оси равны нулю и проекции траекторий представляют собой отрезки прямых, ориентированные в зональном направлении. На всех широтах длины осей эллипсов не зависят от глубины.

сутки.

На рис. 45 схематично показаны проекции траекторий суточных движений частиц на горизонтальные плоскости на разных широтах и положения частиц на орбитах в моменты, когда часовой угол равен 0, 90, 180, 270 и 360° , при различных знаках склонения светила и разности $6gh - R^2 n^2$. Видно, что за сутки частица всегда совершает один оборот, а на широтах 45° N , 45° S , 90° N и 90° S один раз проходит вдоль отрезка, являющегося ее траекторией, в прямом и обратном направлениях. В случаях, когда $0 < \delta$ и $R^2 n^2 < 6gh$ или когда $\delta < 0$ и $6gh < R^2 n^2$, в зонах севернее 45° N и между экватором и 45° S частица вращается в направлении хода часовой стрелки, а в зонах между экватором и 45° N и южнее 45° S — в направлении, противоположном ее ходу (рис. 45 а). В случаях, когда $0 < \delta$ и $6gh < R^2 n^2$ и когда $\delta < 0$ и $R^2 n^2 < 6gh$, частица постоянно занимает положения на орбите, диаметрально противоположные только что рассмотрен-

ным (рис. 45 б). Изменение знака склонения светила оказывает такое же влияние на положение частицы на орбите в отдельные моменты времени, какое оказывает изменение знака

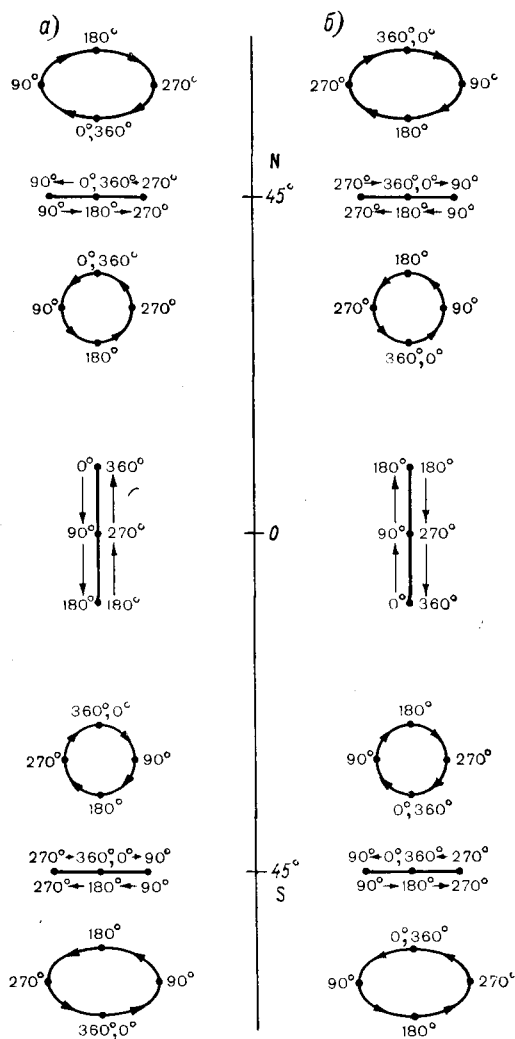


Рис. 45. Проекция траекторий суточных движений частиц в океане, покрывающем Землю, на горизонтальные плоскости.

разности $6gh - R^2n^2$, т. е. знака разности периодов возбуждающей силы и свободных колебаний. На всех широтах при отрицательном значении этой разности и любом знаке склонения светила частица в любой момент времени находится в точках

орбиты, соответствующих тем, в которых при таком же знаке склонения светила находится частица, движущаяся под действием одних только компонентов $F_{п.с}$ и $F_{м.с}$ приливообразующей силы.

Проекции траекторий суточных движений частиц на плоскости, перпендикулярные меридианам, представляют собой эллипсы с осями (P и B), направленными вдоль параллелей и вертикалей. В использованной ранее системе координат каноническое уравнение каждого из них имеет вид

$$\frac{x^2}{\left(\frac{F_{0c}R^2 \sin \varphi}{6gh - R^2 n^2}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\frac{3F_{0c}Rp \sin 2\varphi}{6gh - R^2 n^2}\right)^2} = 1. \quad (244)$$

Отношение длины вертикальной оси к длине зональной равно $\frac{6p}{R} \cos \varphi$, т. е. повсеместно в два раза больше, чем у эллипсов, представляющих собой проекции траекторий полусуточных движений частиц на те же плоскости, однако даже в поверхностном слое в районе экватора вертикальные оси очень малы по сравнению с зональными.

Положение частиц на орбитах в каждый момент времени при любых знаках склонения светила и разности периодов возбуждающей силы и свободных колебаний не отличается от показанного на рис. 37 положения частиц, совершающих суточные приливные движения в зональных каналах, при таких же знаках склонения и разности названных периодов.

Проекции траекторий частиц на плоскости меридианов представляют собой отрезки прямых, проходящих под углом k_c к горизонтальным плоскостям. Каноническое уравнение каждой прямой в использованной ранее системе координат с осями Y и Z , направленными вдоль меридианов и вертикалей, имеет вид

$$z = y \frac{3p}{R} \operatorname{tg} 2\varphi, \quad (245)$$

а угол k_c равен

$$k_c = \operatorname{arctg} \frac{z}{y} = \operatorname{arctg} \left(\frac{3p}{R} \operatorname{tg} 2\varphi \right). \quad (246)$$

Следовательно, этот угол возрастает в вертикальном направлении от нуля в непосредственно прилегающем ко дну слое до максимальных значений в поверхностном и, кроме того, изменяется с широтой от 0° на экваторе и полюсах до 90° на параллелях $45^\circ N$ и $45^\circ S$. Однако на большинстве широт значения его даже в поверхностном слое невелики.

Положение частиц в каждый момент времени при любых знаках склонения светила и разности периода возбуждающей силы

и периода свободных колебаний не отличается от изображенного на рис. 39 положения частиц, совершающих суточные движения в меридианных каналах при таких же знаках склонения светила и разности названных периодов.

Совместный анализ формул смещений частиц в зональном и меридианном направлениях и отклонений ($z_{д.с}$ и $z_{м.с}$) уровня от невозмущенного положения показывает, что суточные приливные движения всей массы воды океана представляют собой сумму поступательной волны, направленной вдоль параллелей, и меридианных стоячих волн.

Амплитуда поступательной волны не зависит от географической долготы и изменяется в меридианном направлении как тангенс географической широты. Повсеместно ее фаза равна фазам суточных волн в зональных каналах. При одинаковых знаках склонения светила и разности $6gh - R^2n^2$ в северном полушарии гребень этой волны находится на меридиане с часовым углом 0° , а подошва — на меридиане с часовым углом 180° , а в южном полушарии, наоборот, гребень — на меридиане, часовой угол которого равен 180° , а подошва — на меридиане с часовым углом 0° . При противоположных знаках склонения и упомянутой разности гребень и подошва волны находятся соответственно на меридианах, часовые углы которых отличаются от только что приведенных на 180° . Таким образом, изменение знака широты, склонения и разности периодов возбуждающей силы и свободных колебаний вызывает изменение фазы волны на противоположную.

Структура меридианных стоячих волн очень сложна. Их пучности расположены на широтах около $37^\circ N$ и $37^\circ S$ и в окрестностях полюсов. На экваторе и близ параллелей $66^\circ N$ и $66^\circ S$ вертикальные приливные движения отсутствуют. Экватор и эти параллели разделяют части океана, в которых фазы всех кинематических характеристик вертикальных движений, соответствующих горизонтальным движениям в направлениях меридианов, противоположны. Амплитуды горизонтальных смещений, скоростей и ускорений частиц максимальны на экваторе и в окрестностях полюсов. Изменение знака широты, склонения светила и разности $6gh - R^2n^2$ обуславливает изменение фаз всех стоячих волн на противоположные.

Согласно формуле (237), в покрывающем Землю океане амплитуда суточной поступательной волны, направленной вдоль параллелей, резко изменяется с широтой. Поэтому различия в широтном распределении кинематических характеристик суточных вертикальных движений в этом океане и в меридианных каналах постоянной ширины объясняются не только формой каналов, но и действием в меридианном направлении силы, вызываемой горизонтальным градиентом давления, возникающим вследствие изменений уровня, соответствующих зональным приливным движениям.

Резонанс суточных приливов происходит, когда $6gh = R^2n^2$, т. е. когда $h = \frac{R^2n^2}{6g}$. Следовательно, глубина рассматриваемого океана, при которой возникает резонанс лунных приливов, приблизительно равна 3,4 км, а глубина, при которой возникает резонанс приливов солнечных, — 3,7 км.

Как уже отмечалось, все кинематические характеристики частных долгопериодных приливов в покрывающем Землю океане не отличаются от их характеристик в каналах переменной ширины, образованных меридианами. Поэтому частное долгопериодное движение всей массы воды в исследуемом океане имеет форму существующих в этих каналах меридианных стоячих волн.

Изложенные факты показывают, что полусуточные, суточные и долгопериодные приливы, происходящие под действием приливообразующей силы и силы, вызываемой горизонтальным градиентом давления, в океане, покрывающем весь земной шар, имеют те же принципиальные особенности, какие присущи приливам перечисленных классов в окружающих Землю зональных и меридианных каналах.

*Зачем
дома?* Для более полной характеристики приливов в океане, сплошь покрывающем земной шар, необходимо исследовать трехмерные приливные движения, происходящие под действием не только учитываемых до сих пор сил, но и силы Кориолиса. По причине, указанной во введении, точное аналитическое решение этой задачи можно получить только для частных случаев приливных движений. Таким случаем являются полусуточные приливы, происходящие при условиях, согласно которым $h = h_0 \cos^2 \varphi$ (где h — глубина в какой-либо точке океана, а h_0 — глубина океана на экваторе) и $n = \omega$. (Второе условие может иметь место, если вызывающее прилив светило не обращается вокруг рассматриваемого тела, а движется по проходящей через центр тела прямой линии или если тело движется по прямой линии, проходящей через центр светила.) Исследуем приливы, происходящие в этом гипотетическом случае.

Система дифференциальных уравнений движения и неразрывности, описывающая приливные движения, которые происходят при указанных условиях, имеет следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= F_{0n} \cos \varphi \sin 2(nt - \lambda) - \frac{g}{R \cos \varphi} \frac{\partial z}{\partial \lambda} - 2\omega u \sin \varphi; \end{aligned} \right. \quad (247)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{2} F_{0n} \sin 2\varphi \cos 2(nt - \lambda) - \frac{g}{R} \frac{\partial z}{\partial \varphi} + 2\omega v \sin \varphi; \end{aligned} \right. \quad (248)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= -\frac{h_0}{R} \frac{\partial v}{\partial \lambda} \cos \varphi - \frac{h_0}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos^2 \varphi + \frac{3h_0}{R} u \sin \varphi \cos \varphi. \end{aligned} \right. \quad (249)$$

Для решения этой системы запишем отклонение (z) уровня от невозмущенного положения и проекции (v и u) скорости при-

ливного течения на параллель и меридиан в виде $z = Z \cos 2(nt - \lambda)$, $v = V \cos 2(nt - \lambda)$, $u = U \sin 2(nt - \lambda)$, где Z , V , U — амплитуды перечисленных кинематических характеристик, не зависящие от времени и долготы. Проинтегрировав уравнения движения (247) и (248) по времени, получим

$$V = -\frac{F_{0n}}{2n} \cos \varphi + \frac{g}{Rn \cos \varphi} Z + U \sin \varphi;$$

$$U = -\frac{F_{0n}}{4n} \sin 2\varphi - \frac{g}{2Rn} \frac{\partial Z}{\partial \varphi} + V \sin \varphi.$$

Решая совместно эти уравнения, находим

$$V = -\frac{F_{0n}}{2n} \frac{1 + \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} + \frac{g}{Rn \cos^3 \varphi} Z - \frac{g}{2Rn} \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi};$$

$$U = -\frac{F_{0n}}{n} \operatorname{tg} \varphi + \frac{g}{Rn \cos^2 \varphi} Z \operatorname{tg} \varphi - \frac{g}{2Rn \cos^2 \varphi} \frac{\partial Z}{\partial \varphi}.$$

Следовательно,

$$v = -\left(\frac{F_{0n}}{2n} \frac{1 + \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} + \frac{g}{Rn \cos^3 \varphi} Z - \frac{g}{2Rn} \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \right) \cos 2(nt - \lambda); \quad (250)$$

$$u = \left(-\frac{F_{0n}}{n} \operatorname{tg} \varphi + \frac{g}{Rn \cos^2 \varphi} Z \operatorname{tg} \varphi - \frac{g}{2Rn \cos^2 \varphi} \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \right) \sin 2(nt - \lambda). \quad (251)$$

Подставив значения v и u в уравнение неразрывности (249), проинтегрировав его по времени и выполнив элементарные преобразования, получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно Z :

$$\frac{d^2 Z}{d\varphi^2} - \frac{dZ}{d\varphi} \operatorname{tg} \varphi - 6Z - 4Z \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{4R^2 n^2}{gh_0} Z = -\frac{4F_{0n} R}{g} \cos^2 \varphi.$$

Поскольку рассматриваемый океан покрывает всю Землю, в этой задаче граничные условия не имеют смысла, и искомая величина Z определяется частным решением ($\tilde{Z}$) приведенного неоднородного уравнения. Это решение находится с помощью подстановки $\tilde{Z} = y \cos^2 \varphi$, где y не зависит от φ . Используя ее, получаем

$$-2y \cos 2\varphi + 2y \sin^2 \varphi - 6y \cos^2 \varphi - 4y \sin^2 \varphi + \frac{4R^2 n^2}{gh_0} y \cos^2 \varphi = -\frac{4F_{0n} R}{g} \cos^2 \varphi.$$

Отсюда

$$y = \frac{F_{0n} R h_0}{2gh_0 - R^2 n^2} \text{ и } Z = \tilde{Z} = \frac{F_{0n} R h_0 \cos^2 \varphi}{2gh_0 - R^2 n^2}.$$

Следовательно,

$$z = -\frac{F_{0n} R h_0 \cos^2 \varphi}{2gh_0 - R^2 n^2} \cos 2(nt - \lambda). \quad (252)$$

Подставляя значение Z в уравнения (250) и (251), находим проекции скорости на параллель и меридиан:

$$v = -\frac{F_{0n} R^2 n (1 + \sin^2 \varphi)}{2(2gh_0 - R^2 n^2) \cos \varphi} \cos 2(nt - \lambda); \quad (253)$$

$$u = -\frac{F_{0n} R^2 n \operatorname{tg} \varphi}{2gh_0 - R^2 n^2} \sin 2(nt - \lambda). \quad (254)$$

Смещения (s_n , s_m) и ускорения (a_n , a_m) частиц в направлениях параллелей и меридианов определяются формулами

$$s_n = \int v dt = -\frac{F_{0n} R^2 (1 + \sin^2 \varphi)}{4(2gh_0 - R^2 n^2) \cos \varphi} \sin 2(nt - \lambda); \quad (255)$$

$$s_m = \int u dt = -\frac{F_{0n} R^2 \operatorname{tg} \varphi}{2(2gh_0 - R^2 n^2)} \cos 2(nt - \lambda); \quad (256)$$

$$a_n = \frac{dv}{dt} = -\frac{F_{0n} R^2 n^2 (1 + \sin^2 \varphi)}{(2gh_0 - R^2 n^2) \cos \varphi} \sin 2(nt - \lambda); \quad (257)$$

$$a_m = \frac{du}{dt} = -\frac{2F_{0n} R^2 n^2 \operatorname{tg} \varphi}{2gh_0 - R^2 n^2} \cos 2(nt - \lambda). \quad (258)$$

Формулы, определяющие отклонения (z_n и z_m) уровня от невозмущенного положения, соответствующие приливным движениям вдоль параллелей и вдоль меридианов, имеют вид

$$z_n = \int -\frac{h_0 \cos \varphi}{R} \frac{\partial v}{\partial \lambda} dt = -\frac{F_{0n} R h_0 (1 + \sin^2 \varphi)}{2(2gh_0 - R^2 n^2)} \cos 2(nt - \lambda); \quad (259)$$

$$\begin{aligned} z_m &= \int \left(-\frac{h_0}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cos^2 \varphi + \frac{3h_0}{R} u \sin \varphi \cos \varphi \right) dt = \\ &= -\frac{3F_{0n} R h_0 \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{2(2gh_0 - R^2 n^2)} \cos 2(nt - \lambda). \end{aligned} \quad (260)$$

Таким образом, все кинематические характеристики полусуточных приливных движений, происходящих при действии силы Кориолиса, выражаются элементарными функциями. Это дает возможность путем анализа формул (252)–(260) установить главные особенности исследуемых движений.

Проекция траекторий частиц на горизонтальные плоскости представляют собой эллипсы, оси которых ориентированы вдоль параллелей и меридианов. Отношение между длинами меридианной и зональной осей равно $\left| \frac{2 \sin \varphi}{1 + \sin^2 \varphi} \right|$ и, таким образом, зависит только от широты. С ростом широты оно увеличивается от нуля на экваторе, где проекции траекторий частиц имеют вид

отрезков прямых, ориентированных в зональном направлении, до единицы у полюсов, где эти проекции близки к окружностям. Рассматриваемые проекции не изменяются с глубиной.

Проекции траекторий частиц на плоскости, перпендикулярные меридианам, представляют собой эллипсы с осями, направленными вдоль параллелей и вертикалей. Отношение между длинами вертикальных и зональных осей равно $\frac{4p \cos \varphi}{R(1 + \sin^2 \varphi)}$, где p — расстояние между частицей и дном. Следовательно, это отношение всегда равно нулю в непосредственно прилегающем ко дну слое и линейно возрастает по мере удаления от дна до максимальных значений в поверхностном слое. При увеличении широты оно убывает от наибольшего значения на экваторе до нуля близ полюсов, где вертикальные приливные движения не происходят. При глубине океана на экваторе, равной 6,371 км (т. е. одной тысячной земного радиуса), это отношение в поверхностном слое на широте 0° составляет лишь 0,004, а на других широтах оно еще меньше.

Проекции траекторий частиц на плоскости меридианов представляют собой отрезки прямых, наклоненных к горизонтальным плоскостям под углом k , равным $k = \arctg\left(-\frac{2p \cos \varphi}{R \sin \varphi}\right)$. Видно, что этот угол возрастает по мере удаления от дна и изменяется с широтой от 90° на экваторе до 0° у полюсов.

Таким образом, рассмотренные проекции траекторий частиц на все три взаимно перпендикулярные плоскости не имеют принципиальных отличий от проекций траекторий частиц, совершающих полусуточные движения в покрывающем земной шар океане постоянной глубины при отсутствии силы Кориолиса. При одинаковых знаках разностей периодов возбуждающей силы и свободных колебаний частица в любой момент времени находится в точках проекций траекторий, соответствующих тем точкам, в которых находится частица, совершающая рассмотренные ранее полусуточные движения в океане постоянной глубины.

Амплитуды всех кинематических характеристик приливов, а следовательно, и проекций их на взаимно перпендикулярные плоскости, прямо пропорциональны амплитуде возбуждающей силы, но обратно пропорциональны разности $2gh_0 - R^2n^2$ (т. е. разности квадратов периодов этой силы и свободных колебаний). В случае, когда $2gh_0 = R^2n^2$, возникает резонанс, при котором кинематические характеристики во всех районах океана беспрестанно возрастают. При значениях n $7,03 \cdot 10^{-5}$ и $7,27 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ резонансные глубины соответственно равны 10,2 и 10,9 км. Изменение знака разности $2gh_0 - R^2n^2$ вызывает изменение фаз всех кинематических характеристик на противоположные. При $R^2n^2 < 2gh_0$ полусуточные приливы в рассматриваемом океане являются прямыми, а при $2gh_0 < R^2n^2$ — обращенными.

Амплитуды кинематических характеристик приливов зависят от географической широты. При возрастании ее амплитуды проекций смещений, скоростей и ускорений частиц на параллель и меридиан увеличиваются, а амплитуды колебаний уровня уменьшаются. Таким образом, наибольшие колебания уровня отмечаются в экваториальной зоне океана, а наибольшие скорости течений — в высоких широтах.

Приливное движение всей массы воды рассматриваемого океана представляет собой сложную волну, которая является суммой поступательных волн, направленных вдоль параллелей, и стоячих волн, ориентированных вдоль меридианов. При $R^2 n^2 < 2gh_0$ гребни поступательных волн находятся на меридианах с часовыми углами 0 и 180° , а при $2gh_0 < R^2 n^2$ — на меридианах, часовые углы которых равны 90 и 270° . При $R^2 n^2 < 2gh_0$ подошвы этих волн расположены не только на названных меридианах, а при $2gh_0 < R^2 n^2$ — на меридианах с часовыми углами 0 и 180° . Пучности меридианных стоячих волн расположены на экваторе и вблизи полюсов, а линии, на которых не существует вертикальных движений, — на параллелях $35^\circ 16' N$ и $35^\circ 16' S$. Изменение знака разности $2gh_0 - R^2 n^2$ обуславливает изменение фаз стоячих волн на противоположные.

Рассматриваемый океан по форме ближе к реальному Мировому океану, чем покрывающий Землю океан постоянной глубины. Угловая скорость $2n$ полусуточной приливной волны, полагаемая равной 2ω , не отличается от угловой скорости главной солнечной полусуточной волны S_2 и мало отличается от угловой скорости главной лунной полусуточной волны M_2 .

В связи с этим выведенные формулы кинематических характеристик могут быть использованы для получения некоторого представления о влиянии силы Кориолиса на полусуточные приливы в Мировом океане. В частности, они показывают, что и при действии ее приливные движения всей массы воды имеют вид сложной волны, складывающейся из зональных поступательных и меридианных стоячих волн, и что при реальной глубине океанов Земли полусуточные приливы в них являются обращенными. Кроме того, из упомянутых формул следует, что максимальные колебания уровня должны наблюдаться в экваториальной зоне океана, а скорости течений — возрастать с широтой.

Однако приведенные формулы не позволяют дать точную аналитическую оценку роли силы Кориолиса в явлении прилива по крайней мере по двум причинам. Во-первых, они описывают приливы только одного класса в одном лишь частном случае, когда угловые скорости n и ω равны между собой. Во-вторых, они учитывают действие только двух компонентов силы Кориолиса из четырех. Аналитическая оценка влияния этой силы на приливные движения может быть дана путем вывода и анализа формул кинематических характеристик полусуточных, суточных и долгопериодных приливов, происходящих на жидких небес-

ных телах под действием приливообразующей силы, силы, вызываемой градиентами давления, и всех четырех компонентов силы Кориолиса. Такая оценка сделана в конце этой главы.

6.2. ПРИЛИВЫ НА ЖИДКИХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛАХ ПРИ ОТСУТСТВИИ СИЛЫ КОРИОЛИСА

2.2

Приливы на жидких телах шарообразной или близкой к ней формы представляют собой самый общий случай приливных движений материи постоянной плотности. Системы дифференциальных уравнений движения и неразрывности, описывающие полусуточные, суточные и частные долгопериодные приливы, которые происходят на таких телах под действием приливообразующей силы и силы, вызываемой градиентом давления, получаются путем подстановки в систему уравнений (93)–(96) полусуточных, суточных и частных долгопериодных компонентов проекций приливообразующей силы на параллель, меридиан и вертикаль. Эти системы имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_n}{\partial t} &= F_n \cos \varphi \sin 2(nt - \lambda) - \frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial P_1}{\partial \lambda}; \end{aligned} \right. \quad (261)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial t} &= -\frac{1}{2} F_n \sin 2\varphi \cos 2(nt - \lambda) - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P_1}{\partial \varphi}; \end{aligned} \right. \quad (262)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial w_n}{\partial t} &= F_n \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_1}{\partial r} - g(r); \end{aligned} \right. \quad (263)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial v_n}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_n}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} u_n \operatorname{tg} \varphi + \frac{\partial w_n}{\partial r} + \frac{2}{r} w_n &= 0; \end{aligned} \right. \quad (264)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_c}{\partial t} &= F_c \sin \varphi \sin (nt - \lambda) - \frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial P_2}{\partial \lambda}; \end{aligned} \right. \quad (265)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_c}{\partial t} &= F_c \cos 2\varphi \cos (nt - \lambda) - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P_2}{\partial \varphi}; \end{aligned} \right. \quad (266)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial w_c}{\partial t} &= F_c \sin 2\varphi \cos (nt - \lambda) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_2}{\partial r} - g(r); \end{aligned} \right. \quad (267)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial v_c}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_c}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} u_c \operatorname{tg} \varphi + \frac{\partial w_c}{\partial r} + \frac{2}{r} w_c &= 0; \end{aligned} \right. \quad (268)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_{\text{ч. л}}}{\partial t} &= -F_{\text{ч. л}} \sin 2\varphi \cos (mt - \psi) - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P_3}{\partial \varphi}; \end{aligned} \right. \quad (269)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial w_{\text{ч. л}}}{\partial t} &= 2F_{\text{ч. л}} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos (mt - \psi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_3}{\partial r} - g(r), \end{aligned} \right. \quad (270)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\text{ч. л}}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} u_{\text{ч. л}} \operatorname{tg} \varphi + \frac{\partial w_{\text{ч. л}}}{\partial r} + \frac{2}{r} w_{\text{ч. л}} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (271)$$

При отсутствии силы Кориолиса проекции на параллель всех кинематических характеристик частных долгопериодных приливов на жидком теле, как и в покрывающем Землю океане, равны нулю; поэтому в последнюю систему не входит уравнение движения вдоль параллели, а уравнение неразрывности (271) не

содержит слагаемого, зависящего от проекции скорости на это направление. Поскольку рассматриваемое небесное тело не вращается вокруг своей оси, относительная угловая скорость n , как и в задаче по определению характеристик приливов, происходящих при отсутствии силы Кориолиса в покрывающем Землю океане, равна по абсолютному значению, но противоположна по направлению угловой скорости обращения вызывающего прилив светила вокруг тела или тела вокруг этого светила. Входящие в уравнения движения амплитуды (F_n , F_c и $F_{c.d}$) полусуточной, суточной и частной долгопериодной приливообразующей силы прямо пропорциональны расстоянию (r) между частицей и центром тела. Величины P_1 , P_2 и P_3 в этих уравнениях представляют собой давления, вызываемые всеми силами, действующими на жидкость.

На рассматриваемом небесном теле отсутствуют стенки, препятствующие приливным движениям в направлениях параллелей и меридианов. Это обстоятельство является физической основой правомерности использования для решения приведенных систем подстановок того же типа, какие применялись при определении кинематических характеристик приливов в океане постоянной глубины, сплошь покрывающем земной шар.

Для решения первой системы целесообразно использовать новую неизвестную величину P_n , связанную с P_1 , ρ и $g_{(r)}$ соотношением $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_n}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_1}{\partial r} + g_{(r)}$. Эта величина представляет собой давление, вызывающее возвращающую силу, отнесенную к единице массы. Тогда, поскольку ускорение $g_{(r)}$ не зависит от географической широты и долготы, уравнения движения (261) — (263) примут вид

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} = F_n \cos \varphi \sin 2(nt - \lambda) - \frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial P_n}{\partial \lambda};$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = -\frac{1}{2} F_n \sin 2\varphi \cos 2(nt - \lambda) - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P_n}{\partial \varphi};$$

$$\frac{\partial w_n}{\partial t} = F_n \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_n}{\partial r}.$$

Используя подстановку $P_n = y_n \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda)$, где y_n не зависит от φ , λ и t , и проинтегрировав эти уравнения по времени, получим:

$$v_n = -\frac{F_n}{2n} \cos \varphi \cos 2(nt - \lambda) + \frac{1}{\rho r n} y_n \cos \varphi \cos 2(nt - \lambda); \quad (272)$$

$$u_n = -\frac{F_n}{4n} \sin 2\varphi \sin 2(nt - \lambda) + \frac{1}{2\rho r n} y_n \sin 2\varphi \sin 2(nt - \lambda); \quad (273)$$

$$w_n = \frac{F_n}{2n} \cos^2 \varphi \sin 2(nt - \lambda) - \frac{1}{2\rho n} \frac{dy_n}{dr} \cos^2 \varphi \sin 2(nt - \lambda). \quad (274)$$

Подставим значения v_n , u_n и w_n в уравнение неразрывности (264):

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{2\rho n} \frac{d^2 y_n}{dr^2} \cos^2 \varphi - \frac{1}{\rho r n} \frac{dy_n}{dr} \cos^2 \varphi + \frac{2}{\rho r^2 n} y_n + \right. \\ & + \frac{1}{\rho r^2 n} y_n \cos 2\varphi - \frac{1}{\rho r^2 n} y_n \sin^2 \varphi - \frac{F_n}{rn} - \frac{F_n}{2rn} \cos 2\varphi + \\ & \left. + \frac{F_n}{2rn} \sin^2 \varphi + \frac{F_n}{2rn} \cos^2 \varphi + \frac{F_n}{rn} \cos^2 \varphi \right) \sin 2(nt - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

Видно, что сумма слагаемых, содержащих F_n , равна нулю. После элементарных преобразований это уравнение приобретает вид

$$\frac{d^2 y_n}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dy_n}{dr} - \frac{6}{r^2} y_n = 0. \quad (275)$$

Выведенное обыкновенное однородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно y_n представляет собой известное уравнение Эйлера. Оно имеет решение

$$y_n = C_1 r^2 + C_2 r^{-3}. \quad (276)$$

Постоянные C_1 и C_2 можно определить, используя граничные условия в центре небесного тела и на его невозмущенной поверхности. В центре тела приливообразующая сила равна нулю, а приливных движений не существует. Из уравнения (274) следует, что вертикальная скорость частицы, а потому и ее вертикальное смещение и ускорение в этой точке (т. е. при $r = 0$) при отсутствии приливообразующей силы равны нулю, только когда $\frac{dy_n}{dr} = 0$. Используя условие, согласно которому при $r = 0$ значение y_n равно нулю, из уравнения (276) находим, что $C_2 = 0$ и, таким образом, искомая величина P_n в любой части тела определяется уравнением

$$P_n = y_n \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda) = C_1 r^2 \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda).$$

Следовательно, на невозмущенной поверхности тела (при $r = R$) давление P_{0n} равно

$$P_{0n} = C_1 R^2 \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda). \quad (277)$$

С другой стороны, на этой поверхности давление P_{0n} равно $P_{0n} = \rho g z_n = \rho g \int w_{0n} dt$, где z_n — отклонение уровня, а w_{0n} — вертикальная скорость в поверхностном слое. Подставив в уравнение (274) значение y_n , равное $y_n = C r^2$, получим

$$w_n = \frac{F_n}{2n} \cos^2 \varphi \sin 2(nt - \lambda) - \frac{1}{\rho n} C_1 r \cos^2 \varphi \sin 2(nt - \lambda).$$

Следовательно,

$$w_{0n} = \frac{F_n R}{2rn} \cos^2 \varphi \sin 2(nt - \lambda) - \frac{1}{\rho n} C_1 R \cos^2 \varphi \sin 2(nt - \lambda)$$

и, таким образом,

$$p_{0n} = -\frac{\rho g F_n R}{4rn^2} \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda) + \frac{gR}{2n^2} C_1 \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda). \quad (278)$$

Согласно уравнениям (277) и (278),

$$\begin{aligned} C_1 R^2 \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda) = \\ = \left(-\frac{\rho g F_n R}{4rn^2} + \frac{gR}{2n^2} C_1 \right) \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda), \end{aligned}$$

откуда

$$C_1 = \frac{F_n \rho g}{2r(g - 2Rn^2)}.$$

Таким образом,

$$y_n = \frac{F_n \rho g r}{2(g - 2Rn^2)} \quad \text{и} \quad P_n = \frac{F_n \rho g r}{2(g - 2Rn^2)} \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda).$$

Подставив значение y_n в уравнения (272)–(274) и выполнив элементарные преобразования, найдем проекции скоростей полусуточных приливных движений на параллель, меридиан и вертикаль:

$$v_n = \frac{F_n R n \cos \varphi}{g - 2Rn^2} \cos 2(nt - \lambda); \quad (279)$$

$$u_n = \frac{\frac{1}{2} F_n R n \sin 2\varphi}{g - 2Rn^2} \sin 2(nt - \lambda); \quad (280)$$

$$w_n = -\frac{F_n R n \cos^2 \varphi}{g - 2Rn^2} \sin 2(nt - \lambda). \quad (281)$$

Для решения системы уравнений (265)–(268), описывающей суточные приливы, целесообразно использовать величину P_c , связанную с P_2 , ρ и $g(r)$ соотношением $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_c}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_2}{\partial r} + g(r)$. Тогда уравнения движения (265)–(267) примут вид

$$\frac{\partial v_c}{\partial t} = F_c \sin \varphi \sin (nt - \lambda) - \frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial P_c}{\partial \lambda};$$

$$\frac{\partial u_c}{\partial t} = F_c \cos 2\varphi \cos (nt - \lambda) - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P_c}{\partial \varphi};$$

$$\frac{\partial w_c}{\partial t} = F_c \sin 2\varphi \cos (nt - \lambda) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_c}{\partial r}.$$

Записав давление P_c в виде $P_c = y_c \sin 2\varphi \cos (nt - \lambda)$, где новая неизвестная величина y_c не зависит от φ , λ и t , и проинтегрировав эти уравнения по времени, получим

$$v_c = -\frac{F_c}{n} \sin \varphi \cos (nt - \lambda) + \frac{2}{\rho r n} y_c \sin \varphi \cos (nt - \lambda); \quad (282)$$

$$u_c = \frac{F_c}{n} \cos 2\varphi \sin (nt - \lambda) - \frac{2}{\rho r n} y_c \cos 2\varphi \sin (nt - \lambda); \quad (283)$$

$$w_c = \frac{F_c}{n} \sin 2\varphi \sin (nt - \lambda) - \frac{1}{\rho n} \frac{dy_c}{dr} \sin 2\varphi \sin (nt - \lambda). \quad (284)$$

Подставив значения v_c , u_c и w_c в уравнение неразрывности (264), находим

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{1}{\rho n} \frac{d^2 y_c}{dr^2} \sin 2\varphi - \frac{2}{\rho r n} \frac{dy_c}{dr} \sin 2\varphi + \frac{2}{\rho r^2 n} y_c \operatorname{tg} \varphi + \right. \\ & + \frac{4}{\rho r^2 n} y_c \sin 2\varphi + \frac{2}{\rho r^2 n} y_c \cos 2\varphi \operatorname{tg} \varphi - \frac{F_c}{r n} \operatorname{tg} \varphi - \frac{2F_c}{r n} \sin 2\varphi - \\ & \left. - \frac{F_c}{r n} \cos 2\varphi \operatorname{tg} \varphi + \frac{F_c}{r n} \sin 2\varphi + \frac{2F_c}{r n} \sin 2\varphi \right) \sin (nt - \lambda) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{d^2 y_c}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dy_c}{dr} - \frac{6}{r^2} y_c = 0. \quad (285)$$

Решение этого обыкновенного однородного дифференциального уравнения второго порядка относительно y_c , как и уравнения (275), имеет вид

$$y_c = C_3 r^2 + C_4 r^{-3}. \quad (286)$$

Используя, как и ранее, условие, согласно которому приливные движения в центре небесного тела равны нулю, находим, что $C_4 = 0$ и, следовательно,

$$y_c = C_3 r^2 \text{ и } P_c = C_3 r^2 \sin 2\varphi \cos (nt - \lambda).$$

Таким образом, на невозмущенной поверхности тела давление P_{0c} равно

$$P_{0c} = C_3 R^2 \sin 2\varphi \cos (nt - \lambda). \quad (287)$$

С другой стороны, на этой поверхности оно определяется уравнением

$$P_{0c} = \rho g z_c = \rho g \int w_{0c} dt,$$

в котором z_c — суточное отклонение поверхности тела от невозмущенного положения, а w_{0c} — вертикальная составляющая скорости суточного приливного движения в поверхностном слое тела.

Подставив значение y_c , равное $y_c = C_3 r^2$, в уравнение (284), находим

$$w_c = \frac{F_c}{n} \sin 2\varphi \sin (nt - \lambda) - \frac{2}{\rho n} C_3 r \sin 2\varphi \sin (nt - \lambda),$$

откуда

$$w_{0c} = \frac{F_c R}{r n} \sin 2\varphi \sin (nt - \lambda) - \frac{2}{\rho n} C_3 R \sin 2\varphi \sin (nt - \lambda).$$

Следовательно,

$$P_{0c} = - \frac{\rho g F_c R}{r n^2} \sin 2\varphi \cos (nt - \lambda) + \frac{2gR}{n^2} C_3 \sin 2\varphi \cos (nt - \lambda). \quad (288)$$

Согласно уравнениям (287) и (288),

$$C_3 R^2 \sin 2\varphi \cos (nt - \lambda) = \left(- \frac{\rho g F_c R}{r n^2} + \frac{2gR}{n^2} C_3 \right) \sin 2\varphi \cos (nt - \lambda),$$

откуда

$$C_3 = \frac{F_c \rho g}{r (2g - R n^2)}.$$

Таким образом,

$$y_c = \frac{F_c \rho g r}{2g - R n^2} \text{ и } p_c = \frac{F_c \rho g r}{2g - R n^2} \sin 2\varphi \cos (nt - \lambda).$$

Подставив значение y_c в уравнения (282) — (284), найдем проекции скоростей суточных приливных движений на параллель, меридиан и вертикаль:

$$v_c = \frac{F_c R n \sin \varphi}{2g - R n^2} \cos (nt - \lambda); \quad (289)$$

$$u_c = - \frac{F_c R n \cos 2\varphi}{2g - R n^2} \sin (nt - \lambda); \quad (290)$$

$$w_c = - \frac{F_c R n \sin 2\varphi}{2g - R n^2} \sin (nt - \lambda). \quad (291)$$

Система уравнений (269) — (271), описывающая частные долгопериодные приливы, может быть решена путем использования новой величины $P_{ч.д.}$, связанной с P_3 , ρ и $g(r)$ соотношением $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{ч.д.}}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_3}{\partial r} + g(r)$. Это позволяет записать уравнения движения (269) — (270) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{ч.д.}}{\partial t} &= - F_{ч.д.} \sin 2\varphi \cos (mt - \psi) - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P_{ч.д.}}{\partial \varphi}; \\ \frac{\partial w_{ч.д.}}{\partial t} &= 2 F_{ч.д.} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos (mt - \psi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{ч.д.}}{\partial r}. \end{aligned}$$

Положим, что $P_{ч.д} = y_{ч.д} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos (mt - \psi)$, где $y_{ч.д}$ не зависит от φ и t , и проинтегрируем эти уравнения по времени:

$$u_{ч.д} = -\frac{F_{ч.д}}{m} \sin 2\varphi \sin (mt - \psi) + \frac{1}{\rho r m} y_{ч.д} \sin 2\varphi \sin (mt - \psi); \quad (292)$$

$$\begin{aligned} w_{ч.д} = & \frac{2F_{ч.д}}{m} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \sin (mt - \psi) - \\ & - \frac{1}{\rho m} \frac{\partial y_{ч.д}}{\partial r} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \sin (mt - \psi). \end{aligned} \quad (293)$$

Подставив значения $u_{ч.д}$ и $w_{ч.д}$ в уравнение неразрывности (271), получим

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{1}{\rho m} \frac{d^2 y_{ч.д}}{dr^2} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) - \frac{2}{\rho r m} \frac{dy_{ч.д}}{dr} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) + \right. \\ & + \frac{2}{\rho r^2 m} y_{ч.д} \cos 2\varphi - \frac{2}{\rho r^2 m} y_{ч.д} \sin^2 \varphi - \frac{2F_{ч.д}}{r m} \cos 2\varphi + \\ & \left. + \frac{2F_{ч.д}}{r m} \sin^2 \varphi + \frac{6F_{ч.д}}{r m} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \right] \sin (mt - \psi) = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{d^2 y_{ч.д}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dy_{ч.д}}{dr} - \frac{6}{r^2} y_{ч.д} = 0. \quad (294)$$

Решение этого обыкновенного однородного дифференциального уравнения второго порядка относительно $y_{ч.д}$, как и решения уравнений (275) и (285), имеет вид

$$y_{ч.д} = C_5 r^2 + C_6 r^{-3}. \quad (295)$$

Согласно условию, что в центре тела частные долгопериодные движения отсутствуют, постоянная C_6 равна нулю и, таким образом,

$$y_{ч.д} = C_5 r^2 \text{ и } P_{ч.д} = C_5 r^2 \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos (mt - \psi).$$

Следовательно, на невозмущенной поверхности тела

$$P_{0ч.д} = C_5 R^2 \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos (mt - \psi). \quad (296)$$

С другой стороны, на этой поверхности давление $P_{0ч.д}$ равно

$$P_{0ч.д} = \rho g z_{ч.д} = \rho g \int w_{0ч.д} dt,$$

где $z_{ч.д}$ — частное долгопериодное отклонение поверхности тела от невозмущенного положения, а $w_{0ч.д}$ — вертикальная составляющая скорости частного долгопериодного приливного движения в поверхностном слое.

Подставим значение $y_{ч. д.}$, равное $y_{ч. д.} = C_5 r^2$, в уравнение (293):

$$w_{ч. д.} = \frac{2F_{ч. д.}}{m} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \sin(mt - \psi) - \frac{2}{\rho m} C_5 r \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \sin(mt - \psi).$$

Следовательно,

$$w_{0ч. д.} = \frac{2F_{ч. д.} R}{rm} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \sin(mt - \psi) - \frac{2}{\rho m} C_5 R \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \sin(mt - \psi).$$

Таким образом,

$$P_{0ч. д.} = - \frac{2\rho g F_{ч. д.} R}{rm^2} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos(mt - \psi) + \frac{2gR}{m^2} C_5 \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos(mt - \psi). \quad (297)$$

Согласно уравнениям (296) и (297),

$$C_5 R^2 \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos(mt - \psi) = \left(- \frac{2\rho g F_{ч. д.} R}{rm^2} + \frac{2gR}{m^2} C_5 \right) \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos(mt - \psi),$$

откуда

$$C_5 = \frac{2F_{ч. д.} \rho g}{r(2g - Rm^2)}.$$

Следовательно,

$$y_{ч. д.} = \frac{2F_{ч. д.} \rho g r}{2g - Rm^2} \text{ и } P_{ч. д.} = \frac{2F_{ч. д.} \rho g r}{2g - Rm^2} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos(mt - \psi).$$

Используя значение $y_{ч. д.}$, найдем из уравнений (292) и (293) проекции скоростей частных долгопериодных движений на меридиан и вертикаль:

$$u_{ч. д.} = \frac{F_{ч. д.} R m \sin 2\varphi}{2g - Rm^2} \sin(mt - \psi); \quad (298)$$

$$w_{ч. д.} = - \frac{2F_{ч. д.} R m \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{2g - Rm^2} \sin(mt - \psi). \quad (299)$$

Проекции полусуточных, суточных и частных долгопериодных смещений и ускорений частиц на параллель, меридиан и вертикаль находятся соответственно путем интегрирования и дифференцирования проекций скоростей приливных движений этих классов на перечисленные направления по времени. Формулы, определяющие все кинематические характеристики, приведены

в табл. 19. Из них следует, что вертикальные смещения частиц в поверхностном слое, т. е. полусуточные, суточные и частные долгопериодные отклонения (z_{Π} , z_c и $z_{ч.д.}$) поверхности небесного тела от невозмущенного положения, равны

$$z_{\Pi} = \frac{\frac{1}{2} F_{0\Pi} R \cos^2 \varphi}{g - 2Rn^2} \cos 2(nt - \lambda); \quad (300)$$

$$z_c = \frac{F_{0c} R \sin 2\varphi}{2g - Rn^2} \cos (nt - \lambda); \quad (301)$$

$$z_{ч.д.} = \frac{2F_{0ч.д.} R \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{2g - Rm^2} \cos (mt - \psi). \quad (302)$$

Использованный способ решения систем дифференциальных уравнений (261)–(264), (265)–(268) и (269)–(271) основан на следующих физических соображениях.

Как уже отмечалось, величины P_1 , P_2 и P_3 в уравнениях движения, входящих в эти системы, представляют собой давления, вызываемые всеми силами, действующими на жидкость, а потому каждое из них является суммой давления, обусловленного силой тяготения во всем теле от его центра до невозмущенной поверхности, и давления, обусловленного всеми остальными силами (т. е. $P_1 = P_{(g)} + P_{\Pi}$, $P_2 = P_{(g)} + P_c$ и $P_3 = P_{(g)} + P_{ч.д.}$, где $P_{(g)}$ — давление, обусловленное гравитацией в указанной части тела, а P_{Π} , P_c и $P_{ч.д.}$ — давления, возникающие из-за других причин). В соответствии с законом Архимеда, изменение по вертикали первого из них ($P_{(g)}$) приводит к возникновению выталкивающей силы, которая сообщает частице единичной массы ускоре-

рение $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{(g)}}{\partial r}$, равное по абсолютному значению и противо-

положное по направлению ускорению $g_{(r)}$ силы тяготения. Решение перечисленных систем существенно упрощается исключением этих ускорений из уравнений (263), (267), (270), что и достигается путем использования подстановок

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{\Pi}}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_1}{\partial r} + g_{(r)}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_c}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_2}{\partial r} + g_{(r)} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{ч.д.}}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_3}{\partial r} + g_{(r)}.$$

Согласно формулам, определяющим кинематические характеристики полусуточных, суточных и частных долгопериодных приливных движений, происходящих под действием приливообразующей силы и силы, вызываемой градиентом давления, в покрывающем Землю океане постоянной глубины, глубина океана не влияет на зависимость этих характеристик от географической широты и от аргументов $2(nt - \lambda)$, $nt - \lambda$ и $mt - \psi$. Поэтому логично полагать, что кинематические характеристики приливов всех классов, происходящих на жидких небесных телах под

Таблица 19

Формулы кинематических характеристик приливных движений на жидком небесном теле при отсутствии силы Кориолиса ($n = -\alpha$)

Класс приливов	Проекция	Приливообразующие силы	Кинематические характеристики		
			смещение	скорость	ускорение
Полусуточный	На параллель	$F_n \cos \varphi \sin 2(nt - \lambda)$	$\frac{1}{2} \frac{F_n R \cos \varphi}{g - 2Rn^2} \times \sin 2(nt - \lambda)$	$\frac{F_n R n \cos \varphi}{g - 2Rn^2} \times \cos 2(nt - \lambda)$	$-\frac{2F_n R n^2 \cos \varphi}{g - 2Rn^2} \times \sin 2(nt - \lambda)$
	На меридиан	$-\frac{1}{2} F_n \sin 2\varphi \times \cos 2(nt - \lambda)$	$-\frac{1}{4} \frac{F_n R \sin 2\varphi}{g - 2Rn^2} \times \cos 2(nt - \lambda)$	$\frac{1}{2} \frac{F_n R n \sin 2\varphi}{g - 2Rn^2} \times \sin 2(nt - \lambda)$	$\frac{F_n R n^2 \sin 2\varphi}{g - 2Rn^2} \times \cos 2(nt - \lambda)$
	На вертикаль	$F_n \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda)$	$\frac{1}{2} \frac{F_n R \cos^2 \varphi}{g - 2Rn^2} \times \cos 2(nt - \lambda)$	$-\frac{F_n R n \cos^2 \varphi}{g - 2Rn^2} \times \sin 2(nt - \lambda)$	$-\frac{2F_n R n^2 \cos^2 \varphi}{g - 2Rn^2} \times \cos 2(nt - \lambda)$
	На параллель	$F_c \sin \varphi \sin (nt - \lambda)$	$\frac{F_c R \sin \varphi}{2g - Rn^2} \sin (nt - \lambda)$	$\frac{F_c R n \sin \varphi}{2g - Rn^2} \cos (nt - \lambda)$	$-\frac{F_c R n^2 \sin \varphi}{2g - Rn^2} \times \sin (nt - \lambda)$
Суточный	На меридиан	$F_c \cos 2\varphi \cos (nt - \lambda)$	$\frac{F_c R \cos 2\varphi}{2g - Rn^2} \cos (nt - \lambda)$	$-\frac{F_c R n \cos 2\varphi}{2g - Rn^2} \times \sin (nt - \lambda)$	$-\frac{F_c R n^2 \cos 2\varphi}{2g - Rn^2} \times \cos (nt - \lambda)$
	На вертикаль	$F_c \sin 2\varphi \cos (nt - \lambda)$	$\frac{F_c R \cos 2\varphi}{2g - Rn^2} \cos (nt - \lambda)$	$-\frac{F_c R n \sin 2\varphi}{2g - Rn^2} \times \sin (nt - \lambda)$	$-\frac{F_c R n^2 \sin 2\varphi}{2g - Rn^2} \times \cos (nt - \lambda)$
	На параллель	0	0	0	0
	На меридиан	$-F_{ц.д} \sin 2\varphi \cos (mt - \psi)$	$-\frac{F_{ц.д} R \sin 2\varphi}{2g - Rm^2} \times \cos (mt - \psi)$	$\frac{F_{ц.д} R m \sin 2\varphi}{2g - Rm^2} \times \sin (mt - \psi)$	$\frac{F_{ц.д} R m^2 \sin 2\varphi}{2g - Rm^2} \times \cos (mt - \psi)$
Долгопериодный	На вертикаль	$2F_{ц.д} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \times \cos (mt - \psi)$	$\frac{2F_{ц.д} R \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{2g - Rm^2} \times \cos (mt - \psi)$	$-\frac{2F_{ц.д} R m \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{2g - Rm^2} \times \sin (mt - \psi)$	$-\frac{2F_{ц.д} R m^2 \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{2g - Rm^2} \times \cos (mt - \psi)$
	На параллель	0	0	0	0

действием тех же сил, должны точно так же зависеть от перечисленных величин. Это соображение и было использовано при выборе подстановок $P_n = y_n \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda)$, $P_c = y_c \sin 2\varphi \times \times \cos (nt - \lambda)$ и $P_{ч.д} = y_{ч.д} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos (mt - \psi)$. Очевидно, что все системы можно решить и без их использования, но другие пути являются более сложными и требуют выполнения громоздких преобразований.

Для анализа полусуточных и суточных приливов на жидких небесных телах, как и при исследовании приливов тех же классов в океане постоянной глубины, покрывающем Землю, целесообразно использовать формулы полусуточных и суточных отклонений ($z_{п.п}$, $z_{м.п}$ и $z_{п.с}$, $z_{м.с}$) поверхности тела от невозмущенного положения, соответствующих в отдельности приливным движениям в направлениях параллелей и в направлениях меридианов. Поскольку проекция скорости приливного движения любого класса на вертикаль, как и на другие направления, прямо пропорциональна расстоянию частицы от центра тела, уравнение неразрывности можно записать в виде

$$\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} u \operatorname{tg} \varphi = - \frac{3}{r} w.$$

Следовательно,

$$\frac{dz}{dt} = w_0 = - \frac{1}{3 \cos \varphi} \frac{\partial v_0}{\partial \lambda} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} + \frac{1}{3} u_0 \operatorname{tg} \varphi. \quad (303)$$

Согласно уравнению (303),

$$z_{п.п} = \int \left(- \frac{1}{3 \cos \varphi} \frac{\partial v_{0п}}{\partial \lambda} \right) dt = \frac{\frac{1}{3} F_{0п} R}{g - 2Rn^2} \cos 2(nt - \lambda); \quad (304)$$

$$\begin{aligned} z_{м.п} &= \int \left(- \frac{1}{3} \frac{\partial u_{0п}}{\partial \varphi} + \frac{1}{3} u_{0п} \operatorname{tg} \varphi \right) dt = \\ &= \frac{F_{0п} R \left(\frac{1}{2} \cos^2 \varphi - \frac{1}{3} \right)}{g - 2Rn^2} \cos 2(nt - \lambda); \end{aligned} \quad (305)$$

$$z_{п.с} = \int \left(- \frac{1}{3 \cos \varphi} \frac{\partial v_{0с}}{\partial \lambda} \right) dt = \frac{\frac{1}{3} F_{0с} R \operatorname{tg} \varphi}{2g - Rn^2} \cos (nt - \lambda); \quad (306)$$

$$\begin{aligned} z_{м.с} &= \int \left(- \frac{1}{3} \frac{\partial u_{0с}}{\partial \varphi} + \frac{1}{3} u_{0с} \operatorname{tg} \varphi \right) dt = \\ &= \frac{\frac{1}{3} F_{0с} R (2 \sin 2\varphi + \cos 2\varphi \operatorname{tg} \varphi)}{2g - Rn^2} \cos (nt - \lambda). \end{aligned} \quad (307)$$

Анализ всех выведенных формул дает возможность установить принципиальные особенности полусуточных, суточных и частных долгопериодных приливов, происходящих на жидких небесных телах под действием приливообразующей силы и силы,

вызываемой градиентом давления. В табл. 18 показаны формы проекций траекторий частиц на три взаимно перпендикулярные плоскости, и приведены отношения между осями эллипсов формулы углов наклона проекций траекторий частиц на плоскости меридианов к горизонтальным плоскостям.

Видно, что формы названных проекций не отличаются от форм проекций траекторий частиц, совершающих приливные движения в океане постоянной глубины. Так, проекции траекторий полусуточных и суточных движений на горизонтальные плоскости представляют собой эллипсы с направленными вдоль меридианов и параллелей осями, отношения длин которых одинаковы на всех горизонтах и зависят от географической широты точно так же, как отношения осей эллипсов, являющихся проекциями на горизонтальные плоскости траекторий полусуточных и суточных движений частиц в упомянутом океане. Оси эллипсов прямо пропорциональны расстоянию между частицей и центром тела, вследствие чего форма эллипсов не изменяется с глубиной.

Проекция траекторий полусуточных и суточных движений частиц на плоскости, перпендикулярные меридианам, представляют собой эллипсы с направленными вдоль вертикалей и параллелей осями, отношение длин которых прямо пропорционально косинусу географической широты. Отличие их от эллипсов, являющихся проекциями траекторий полусуточных и суточных движений частиц в океане постоянной глубины на те же плоскости, заключается в том, что длины названных осей прямо пропорциональны расстоянию между частицей и центром тела, а потому отношение между ними и форма эллипсов не изменяются в вертикальном направлении.

Проекция полусуточных, суточных и частных долгопериодных приливных движений частиц на плоскости меридианов, как и в покрывающем Землю океане, представляют собой отрезки прямых, наклоненных под различными углами к горизонтальным плоскостям. Однако углы их наклона не изменяются с глубиной и имеют гораздо большие значения, чем в упомянутом океане.

Отношения длин осей рассмотренных эллипсов и значения только что названных углов равны соответствующим характеристикам проекций на взаимно перпендикулярные плоскости траекторий частиц, совершающих приливные движения под действием одной только приливообразующей силы.

При одинаковых знаках разности периодов возбуждающей силы и свободных колебаний и знаках функций $\sin 2\delta$ и $1 - 3\sin^2 \delta$ и функций географической широты, от которых зависит направление компонентов этой силы, в любой момент времени частица, совершающая полусуточные, суточные и частные долгопериодные приливные движения на жидком теле, находится в точках проекций траекторий, соответствующих тем, в которых находится частица, совершающая приливные движения в океане постоянной глубины, покрывающем Землю. В случаях,

когда периоды свободных колебаний превосходят периоды возбуждающих сил (т. е. при $g < 2Rn^2$, $2g < Rn^2$ и $2g < Rm^2$), частицы в любой момент времени находятся в точках проекций траекторий, соответствующих тем точкам, в которых находятся частицы, движущиеся под действием одних лишь приливообразующих сил при таких же знаках функций склонения светила и географической широты.

Совместный анализ формул смещений частиц в зональном и меридианном направлениях и соответствующих этим смещениям отклонений уровня от невозмущенного положения показывает, что и полусуточные, и суточные приливные движения всей массы жидкого небесного тела являются сложными волнами, представляющими собой результат сложения зональных поступательных и меридианных стоячих волн. Расположение пучностей, линий (а точнее — поверхностей), на которых отсутствуют вертикальные движения, и узловых линий стоячих волн не отличается от расположения перечисленных элементов меридианных стоячих волн соответствующих периодов в океане, покрывающем Землю. Фазы поступательных и стоячих волн зависят от соотношений между периодами возбуждающих сил и свободных колебаний и от знаков функций склонения светила и широты точно так же, как фазы поступательных и стоячих волн в только что названном океане.

Частные долгопериодные приливные движения всей массы небесного тела представляют собой меридианные стоячие волны с пучностями на экваторе и у полюсов и с узловыми линиями на широтах 45° N и 45° S . Таким образом, их расположение не отличается от расположения пучностей и узловых линий частных долгопериодных стоячих волн в каналах, образованных реальными меридианами, и в океане постоянной глубины, сплошь покрывающем Землю. Границами между частями тела, в которых характеристики вертикальных движений имеют противоположные фазы, являются боковые поверхности конусов с вершинами в центре тела и с основаниями, представляющими собой сечения тела плоскостями параллелей $35^\circ 16' \text{ N}$ и $35^\circ 16' \text{ S}$. Частицы, находящиеся на этих плоскостях, не совершают вертикальных движений; поэтому только что названные параллели являются линиями, на которых нет долгопериодных колебаний поверхности небесного тела. При перемене знака разности периодов возбуждающей силы и свободных колебаний или знака функции склонения светила фазы стоячих волн изменяются на противоположные.

Перечисленные сходные черты приливов всех классов на жидком небесном теле и в покрывающем Землю океане постоянной глубины объясняются тем, что на таком теле амплитуды проекций всех кинематических характеристик приливных движений любого периода на параллель, меридиан и вертикаль прямо пропорциональны амплитудам проекций вызывающих их приливо-

образующих сил и, кроме того, величины и направления проекций кинематических характеристик зависят от соотношения между периодами приливообразующей силы и свободных колебаний. Однако вертикальные составляющие смещений, скоростей и ускорений частиц на жидком теле, как и горизонтальные составляющие перечисленных характеристик, прямо пропорциональны расстоянию между частицей и центром тела. Поэтому на нем проекции этих характеристик на параллель, меридиан и вертикаль имеют один и тот же порядок, что обуславливает отмеченные выше отличия проекций траекторий частиц на три взаимно перпендикулярные плоскости от проекций траекторий частиц, совершающих приливные движения в покрывающем Землю океане.

Второе существенное отличие приливов на жидких небесных телах заключается в том, что на них обычно имеет место иное соотношение между периодами приливообразующей силы и свободных колебаний. Как видно из формул кинематических характеристик приливов всех классов в каналах и в покрывающем Землю океане, при возрастании глубины период свободных колебаний уменьшается. Поскольку радиус небесного тела во много раз больше глубины покрывающего его тонкого слоя, периоды свободных колебаний на нем, как правило, гораздо меньше, чем периоды приливообразующих сил. Вследствие этого на жидких небесных телах чаще всего существуют прямые приливы, а условия, при которых происходят приливные движения, весьма далеки от резонансных, и потому амплитуды приливов близки к значениям, получаемым в соответствии со статической теорией.

Согласно формулам (300) — (302), определяющим отклонения уровня от невозмущенного положения (или формулам других кинематических характеристик), резонанс полусуточных, суточных и частных долгопериодных приливов на жидком небесном теле возникает тогда, когда соответственно $g = 2Rn^2$, $2g = Rn^2$ и $2g = Rm^2$. Запишем эти формулы в несколько ином виде. Поскольку ускорение силы тяготения на поверхности сферического тела постоянной плотности равно $g = \frac{4}{3} \pi f \rho R$, то

$$z_n = \frac{\frac{1}{2} F_{0n} \cos^2 \varphi}{\frac{4}{3} \pi f \rho - 2n^2} \cos 2(nt - \lambda), \quad (308)$$

$$z_c = \frac{F_{0c} \sin 2\varphi}{\frac{8}{3} \pi f \rho - n^2} \cos (nt - \lambda); \quad (309)$$

$$z_{ч. д} = \frac{2F_{0ч. д} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{\frac{8}{3} \pi f \rho - m^2} \cos (mt - \psi). \quad (310)$$

Видно, что возможность возникновения резонанса приливов всех классов не зависит от радиуса небесного тела. У полусуточных и суточных приливов она определяется соотношением между двумя физическими параметрами — между плотностью тела и абсолютным значением относительной угловой скорости, которая при отсутствии вращения тела вокруг оси равна абсолютному значению угловой скорости обращения вызывающего прилив светила вокруг тела или тела вокруг светила. Поскольку циклическая частота m определяется скоростью изменения склонения светила и расстояния между его центром и центром тела, а следовательно, в конечном счете — угловой скоростью обращения, возможность возникновения резонанса частных долгопериодных приливов также зависит от соотношения между названными параметрами. Таким образом, при $\rho = \frac{3}{2\pi f} n^2$, $\rho = \frac{3}{8\pi f} n^2$ или $\rho = \frac{3}{8\pi f} m^2$ возникает резонанс полусуточных, суточных или частных долгопериодных приливов, при котором скорости всех частиц неограниченно возрастают. Это приводит к разрушению жидкого небесного тела и рассредоточению частиц жидкости в пространстве.

3.2 6.3. ПРИЛИВЫ В ЖИДКОМ СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ БОЛЬШОЙ ТОЛЩИНЫ, ОКРУЖАЮЩЕМ ТВЕРДую ЧАСТЬ НЕБЕСНОГО ТЕЛА

Полусуточные, суточные и частные долгопериодные приливы, происходящие под действием приливообразующей силы и силы, вызываемой градиентом давления, в жидком слое с толщиной (h), соизмеримой с радиусом тела, также описываются системами дифференциальных уравнений (261) — (264), (265) — (268) и (269) — (271). Поэтому величины y_n , y_c и $y_{ч.д.}$, являющиеся множителями давлений P_n , P_c и $P_{ч.д.}$, определяются полученными из этих систем уравнениями (276), (286) и (295). Чтобы найти входящие в эти уравнения постоянные C_1 — C_6 , необходимо в качестве одного из граничных условий использовать условие, согласно которому на границе твердой части небесного тела с окружающим ее жидким слоем (т. е. при $r = R - h$) скорости вертикальных приливных движений всех классов равны нулю.

1) Выведем сначала формулы кинематических характеристик полусуточных приливов. Для этого подставим значение y_n из уравнения (276) в уравнение (274) вертикальной скорости:

$$w_n = \left(\frac{F_n}{2n} - C_1 \frac{r}{\rho n} + C_2 \frac{3}{2\rho r^4 n} \right) \cos^2 \varphi \sin 2(nt - \lambda). \quad (311)$$

При $r = R - h$ скорость w_n равна нулю и это уравнение принимает вид

$$\frac{F_n(R-h)}{2rn} - C_1 \frac{R-h}{rn} + C_2 \frac{3}{2rn(R-h)^4} = 0$$

и, таким образом,

$$C_1 - C_2 \frac{3}{2(R-h)^5} = \frac{F_n \rho}{2r}. \quad (312)$$

Поскольку $P_n = y_n \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda)$, а $y_n = C_1 r^2 + C_2 r^{-3}$, давление P_{0n} на невозмущенной поверхности жидкого слоя (т. е. при $r = R$) равно

$$P_{0n} = (C_1 R^2 + C_2 R^{-3}) \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda). \quad (313)$$

С другой стороны, давление P_{0n} определяется уравнением

$$P_{0n} = \rho g z_n = \rho g \int w_{0n} dt.$$

Согласно уравнению (311), вертикальная скорость w_{0n} на невозмущенной поверхности равна

$$w_{0n} = \left(\frac{F_n R}{2rn} - C_1 \frac{R}{rn} + C_2 \frac{3}{2rn R^4} \right) \cos^2 \varphi \sin 2(nt - \lambda).$$

Следовательно,

$$P_{0n} = \left[-\frac{\rho g F_n R}{4rn^2} + C_1 \frac{gR}{2n^2} - C_2 \frac{3g}{4R^4 n^2} \right] \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda). \quad (314)$$

Согласно уравнениям (313) и (314),

$$\begin{aligned} (C_1 R^2 + C_2 R^{-3}) \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda) = \\ = \left[-\frac{\rho g F_n R}{4rn^2} + C_1 \frac{gR}{2n^2} - C_2 \frac{3g}{4R^4 n^2} \right] \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda), \end{aligned}$$

откуда

$$2C_1 R^5 (g - 2Rn^2) - C_2 (3g + 4Rn^2) = \rho g \frac{F_n}{r} R^5. \quad (315)$$

Решая совместно уравнения (312) и (315), находим

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\frac{F_n \rho}{2r} [3gR^5 - (R-h)^5 (3g + 4Rn^2)]}{3R^5 (g - 2Rn^2) - (R-h)^5 (3g + 4Rn^2)}; \\ C_2 &= \frac{\frac{2F_n \rho}{r} R^6 n^2 (R-h)^5}{3R^5 (g - 2Rn^2) - (R-h)^5 (3g + 4Rn^2)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$y_n = \frac{\frac{F_n}{2} \rho r [3gR^5 - (R-h)^5 (3g + 4Rn^2)] + 2 \frac{F_n}{r^4} \rho R^6 n^2 (R-h)^5}{3R^5 (g - 2Rn^2) - (R-h)^5 (3g + 4Rn^2)}.$$

Подставив значение y_n в уравнения (272) — (274) и выполнив элементарные преобразования, найдем проекции скоростей полусуточных движений частиц в рассматриваемом жидком слое на параллель, меридиан и вертикаль:

$$v_n = \frac{F_n R^6 n \left[3 + 2 \frac{(R-h)^5}{r^5} \right] \cos \varphi}{3R^5 (g - 2Rn^2) - (R-h)^5 (3g + 4Rn^2)} \cos 2(nt - \lambda); \quad (316)$$

$$u_n = \frac{\frac{1}{2} F_n R^6 n \left[3 + 2 \frac{(R-h)^5}{r^5} \right] \sin 2\varphi}{3R^5 (g - 2Rn^2) - (R-h)^5 (3g + 4Rn^2)} \sin 2(nt - \lambda); \quad (317)$$

$$w_n = - \frac{3F_n R^6 n \left[1 - \frac{(R-h)^5}{r^5} \right] \cos^2 \varphi}{3R^5 (g - 2Rn^2) - (R-h)^5 (3g + 4Rn^2)} \sin 2(nt - \lambda). \quad (318)$$

Смещения ($s_{n, \parallel}$, $s_{n, \perp}$, $s_{n, \text{в. п.}}$) и ускорения частиц в направлениях параллелей, меридианов и вертикалей определяются путем интегрирования и дифференцирования формул (316) — (318) по времени. Смещения частиц равны

$$s_{n, \parallel} = \frac{\frac{1}{2} F_n R^6 \left[3 + 2 \frac{(R-h)^5}{r^5} \right] \cos \varphi}{3R^5 (g - 2Rn^2) - (R-h)^5 (3g + 4Rn^2)} \sin 2(nt - \lambda); \quad (319)$$

$$s_{n, \perp} = - \frac{\frac{1}{4} F_n R^6 \left[3 + 2 \frac{(R-h)^5}{r^5} \right] \sin 2\varphi}{3R^5 (g - 2Rn^2) - (R-h)^5 (3g + 4Rn^2)} \cos 2(nt - \lambda); \quad (320)$$

$$s_{n, \text{в. п.}} = \frac{\frac{3}{2} R_n R^6 \left[1 - \frac{(R-h)^5}{r^5} \right] \cos^2 \varphi}{3R^5 (g - 2Rn^2) - (R-h)^5 (3g + 4Rn^2)} \cos 2(nt - \lambda). \quad (321)$$

Кинематические характеристики суточных и частных долгопериодных приливов определяются совершенно аналогичным образом. Формулы проекций скоростей и смещений частиц, совершающих суточные движения, на параллель, меридиан и вертикаль и проекций скоростей и смещений частиц, совершающих частные долгопериодные движения, на меридиан и вертикаль имеют вид

$$v_c = \frac{F_c R^6 n \left[3 + 2 \frac{(R-h)^5}{r^5} \right] \sin \varphi}{3R^5 (2g - Rn^2) - 2(R-h)^5 (3g + Rn^2)} \cos (nt - \lambda); \quad (322)$$

$$u_c = - \frac{F_c R^6 n \left[3 + 2 \frac{(R-h)^5}{r^5} \right] \cos 2\varphi}{3R^5 (2g - Rn^2) - 2(R-h)^5 (3g + Rn^2)} \sin (nt - \lambda); \quad (323)$$

$$w_c = - \frac{3F_c R^6 n \left[1 - \frac{(R-h)^5}{r^5} \right] \sin 2\varphi}{3R^5 (2g - Rn^2) - 2(R-h)^5 (3g + Rn^2)} \sin (nt - \lambda); \quad (324)$$

$$S_{n. c} = \frac{F_c R^6 \left[3 + 2 \frac{(R-h)^5}{r^5} \right] \sin \varphi}{3R^5 (2g - Rn^2) - 2(R-h)^5 (3g + Rn^2)} \sin (nt - \lambda); \quad (325)$$

$$S_{m. c} = \frac{F_c R^6 \left[3 + 2 \frac{(R-h)^5}{r^5} \right] \cos 2\varphi}{3R^5 (2g - Rn^2) - 2(R-h)^5 (3g + Rn^2)} \cos (nt - \lambda); \quad (326)$$

$$S_{b. c} = \frac{3F_c R^6 \left[1 - \frac{(R-h)^5}{r^5} \right] \sin 2\varphi}{3R^5 (2g - Rn^2) - 2(R-h)^5 (3g + Rn^2)} \cos (nt - \lambda); \quad (327)$$

$$u_{4. d} = \frac{F_{q. d} R^6 m \left[3 + 2 \frac{(R-h)^5}{r^5} \right] \sin 2\varphi}{3R^5 (2g - Rm^2) - 2(R-h)^5 (3g + Rm^2)} \sin (mt - \psi); \quad (328)$$

$$\omega_{4. d} = - \frac{6F_{q. d} R^6 m \left[1 - \frac{(R-h)^5}{r^5} \right] \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{3R^5 (2g - Rm^2) - 2(R-h)^5 (3h + Rm^2)} \sin (mt - \psi); \quad (329)$$

$$S_{m. q. d} = - \frac{F_{q. d} R^6 \left[3 + 2 \frac{(R-h)^5}{r^5} \right] \sin 2\varphi}{3R^5 (2g - Rm^2) - 2(R-h)^5 (3g + Rm^2)} \cos (mt - \varphi); \quad (330)$$

$$S_{b. q. d} = \frac{6F_{q. d} R^6 \left[1 - \frac{(R-h)^5}{r^5} \right] \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{3R^5 (2g - Rm^2) - 2(R-h)^5 (3g + Rm^2)} \cos (mt - \psi). \quad (331)$$

Видно, что при толщине слоя, равной радиусу тела, формулы (316) — (331) не отличаются от формул проекций смещений и скоростей частиц, совершающих полусуточные, суточные и частные долгопериодные движения под действием тех же сил на жидком небесном теле.

Поскольку рассматриваемые формулы были выведены без допущений, использованных Лапласом, они более точно описывают приливы в жидком слое небольшой толщины, покрывающем твердую часть небесного тела, нежели формулы, полученные путем решения систем уравнений (221) — (223), (224) — (226) и (227) — (228). Анализ их показывает, что приливы в таком слое обладают большинством особенностей, установленных на основании анализа формул, полученных из перечисленных систем. Главные отличия заключаются в следующем.

Значения всех кинематических характеристик приливов любого класса и возможность возникновения резонанса и перемены фаз этих характеристик на противоположные определяются несколько иными соотношениями между радиусом тела, ускорением силы тяготения на его поверхности, толщиной слоя и относительной угловой скоростью (или циклической частотой). Так, согласно формулам, полученным из систем (221) — (223), (224) — (226) и (227) — (228), резонанс полусуточных, суточных и частных долгопериодных приливов возникает соответственно

при $n^2 = 3gh/(2R^2)$, $n^2 = 6gh/R^2$ и $m^2 = 6gh/R^2$. На самом же деле это явление имеет место при соотношениях

$$n^2 = \frac{3g[R^5 - (R-h)^5]}{2R[3R^5 + 2(R-h)^5]}, \quad n^2 = \frac{6g[R^5 - (R-h)^5]}{R[3R^5 + 2(R-h)^5]}$$

$$\text{и } m^2 = \frac{6g[R^5 - (R-h)^5]}{R[3R^5 + 2(R-h)^5]}.$$

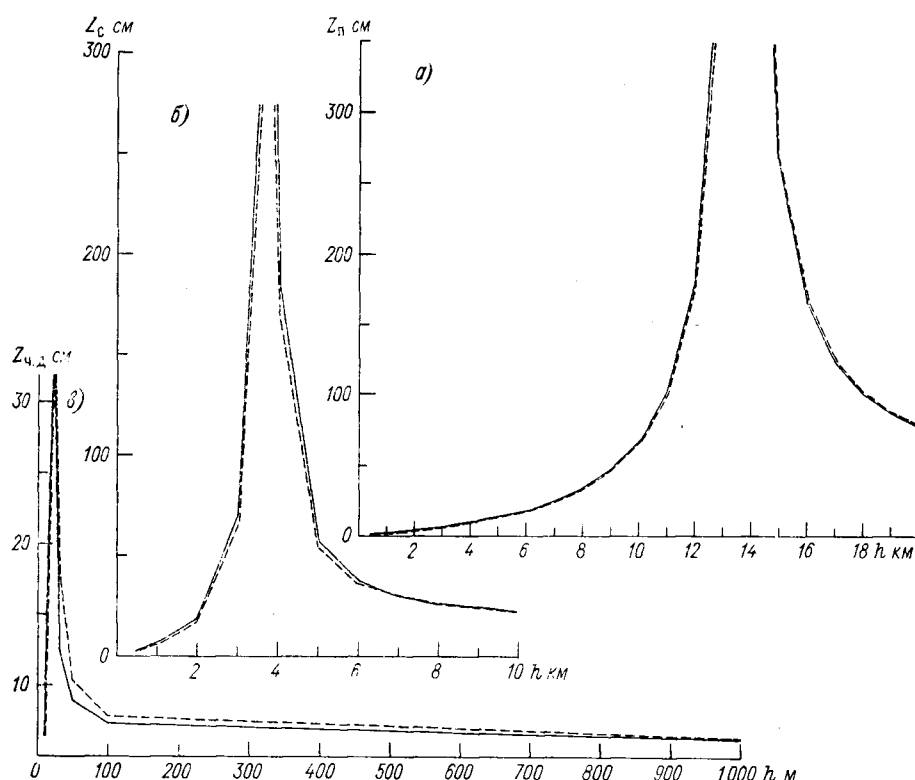


Рис. 46. Зависимости максимальных амплитуд полусуточных, суточных и долгопериодных отклонений поверхности покрывающего Землю океана от его глубины (сплошными линиями показаны значения максимальных амплитуд, полученных из общих уравнений гидродинамики, а прерывистыми — из уравнений Лапласа).

Амплитуды кинематических характеристик вертикальных приливных движений всех классов возрастают от нуля в слое, непосредственно прилегающем к твердой части небесного тела, до максимальных значений в поверхностном слое в соответствии не с линейным, а с более сложным законом. Сложным образом изменяются с глубиной также и амплитуды кинематических характеристик горизонтальных приливных движений.

Однако в жидком слое, толщина которого очень мала по

сравнению с радиусом небесного тела (например, в покрывающем Землю океане с глубиной того же порядка, как и глубина Мирового океана), кинематические характеристики приливов всех классов, определяемые формулами, выведенными из систем уравнений (221)—(223), (224)—(226) и (227)—(228), почти не отличаются от характеристик, которые определяются формулами, полученными из общих систем уравнений гидродинамики. Об этом свидетельствуют, в частности, изображенные на рис. 46 зависимости максимальных амплитуд полусуточных, суточных и частных долгопериодных отклонений поверхности океана, покрывающего Землю, от его глубины, установленные на основании формул, которые были выведены из перечисленных систем. На рис. 47 показаны вычисленные с помощью формул, полученных из систем общих уравнений гидродинамики, максимальные значения амплитуд полусуточных, суточных и частных долгопериодных вертикальных смещений частиц на различных горизонтах в покрывающем земной шар океане с глубиной 10 км. Видно, что они возрастают в вертикальном направлении в почти полном соответствии с линейным законом. Этот факт подтверждает сделанный на основании логических рассуждений вывод о прямой пропорциональной зависимости всех кинематических характеристик вертикальных приливных движений частиц в каналах и в покрывающем Землю океане от расстояния между частицей и дном, использованный ранее при определении траекторий частиц. Полученные результаты подтверждают также правомерность использования системы уравнений Лапласа для вычисления характеристик приливов в Мировом океане.

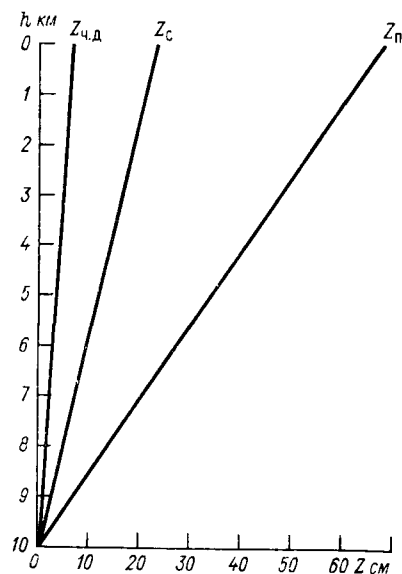


Рис. 47. Максимальные амплитуды полусуточных, суточных и долгопериодных вертикальных смещений частиц на различных горизонтах в покрывающем Землю океане глубиной 10 км.

9.2

6.4. ПРИЛИВЫ НА ЖИДКИХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛАХ ПРИ ДЕЙСТВИИ СИЛЫ КОРИОЛИСА

Системы дифференциальных уравнений движения и неразрывности, описывающие полусуточные, суточные и частные

долгопериодные приливные движения, происходящие под действием приливообразующей силы, силы, вызываемой градиентом давления, и силы Кориолиса, получаются путем подстановки в систему уравнений (97) — (100) полусуточных, суточных и частных долгопериодных компонентов проекций приливообразующей силы на параллель, меридиан и вертикаль. Они имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_n}{\partial t} &= F_n \cos \varphi \sin 2(nt - \lambda) - \\ &- \frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial P_1}{\partial \lambda} - 2\omega u_n \sin \varphi + 2\omega w_n \cos \varphi; \end{aligned} \right. \quad (332)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial t} &= -\frac{1}{2} F_n \sin 2\varphi \cos 2(nt - \lambda) - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P_1}{\partial \varphi} + 2\omega v_n \sin \varphi; \end{aligned} \right. \quad (333)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial w_n}{\partial t} &= F_n \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_1}{\partial r} - g_{(r)} - 2\omega v_n \cos \varphi; \end{aligned} \right. \quad (334)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial v_n}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_n}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} u_n \operatorname{tg} \varphi + \frac{\partial w_n}{\partial r} + \frac{2}{r} w_n &= 0; \end{aligned} \right. \quad (335)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_c}{\partial t} &= F_c \sin \varphi \sin (nt - \lambda) - \\ &- \frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial P_2}{\partial \lambda} - 2\omega u_c \sin \varphi + 2\omega w_c \cos \varphi; \end{aligned} \right. \quad (336)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_c}{\partial t} &= F_c \cos 2\varphi \cos (nt - \lambda) - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P_2}{\partial \varphi} + 2\omega v_c \sin \varphi; \end{aligned} \right. \quad (337)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial w_c}{\partial t} &= F_c \sin 2\varphi \cos (nt - \lambda) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_2}{\partial r} - g_{(r)} - 2\omega v_c \cos \varphi; \end{aligned} \right. \quad (338)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial v_c}{\partial \lambda} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_c}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} u_c \operatorname{tg} \varphi + \frac{\partial w_c}{\partial r} + \frac{2}{r} w_c &= 0; \end{aligned} \right. \quad (339)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_{ч.д}}{\partial t} &= -2\omega u_{ч.д} \sin \varphi + 2\omega w_{ч.д} \cos \varphi; \end{aligned} \right. \quad (340)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial u_{ч.д}}{\partial t} &= -F_{ч.д} \sin 2\varphi \cos (mt - \psi) - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P_3}{\partial \varphi} + 2\omega v_{ч.д} \sin \varphi; \end{aligned} \right. \quad (341)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial w_{ч.д}}{\partial t} &= 2F_{ч.д} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos (mt - \psi) - \\ &- \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_3}{\partial r} - g_{(r)} - 2\omega v_{ч.д} \cos \varphi; \end{aligned} \right. \quad (342)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial u_{ч.д}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} u_{ч.д} \operatorname{tg} \varphi + \frac{\partial w_{ч.д}}{\partial r} + \frac{2}{r} w_{ч.д} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (343)$$

Для решения приведенных систем целесообразно использовать, как и ранее, подстановки $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_n}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_1}{\partial r} + g_{(r)}$, $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_c}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_2}{\partial r} + g_{(r)}$, $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{ч.д}}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_3}{\partial r} + g_{(r)}$, а затем представить искомые величины P_n , v_n , u_n , w_n , P_c , v_c , u_c , w_c , $P_{ч.д}$, $v_{ч.д}$, $u_{ч.д}$, $w_{ч.д}$ в виде

$P_n = x_n \cos 2(nt - \lambda)$, $v_n = V_n \cos 2(nt - \lambda)$, $u_n = U_n \sin 2(nt - \lambda)$,
 $\omega_n = W_n \sin 2(nt - \lambda)$, $P_c = x_c \cos (nt - \lambda)$, $v_c = V_c \cos (nt - \lambda)$,
 $u_c = U_c \sin (nt - \lambda)$, $\omega_c = W_c \sin (nt - \lambda)$, $P_{ч.д} = x_{ч.д} \cos (mt - \psi)$,
 $v_{ч.д} = V_{ч.д} \cos (mt - \psi)$, $u_{ч.д} = U_{ч.д} \sin (mt - \psi)$, $\omega_{ч.д} = W_{ч.д} \times$
 $\times \sin (mt - \psi)$, где величины x_n , x_c , $x_{ч.д}$ и амплитуды проекций
 скоростей приливных движений всех классов не зависят от t
 и λ , но зависят от r и φ . Подставив значения проекций скоро-
 стей, найденные путем совместного решения проинтегрированных
 по времени уравнений движения каждого класса, в соответст-
 вующие уравнения неразрывности и выполнив элементарные
 преобразования, получим следующие дифференциальные урав-
 нения второго порядка в частных производных относительно x_n ,
 x_c и $x_{ч.д}$:

$$\begin{aligned} n^2 \frac{\partial^2 x_n}{\partial r^2} + n^2 \frac{2}{r} \frac{\partial x_n}{\partial r} + n^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 x_n}{\partial \varphi^2} - n^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial x_n}{\partial \varphi} \operatorname{tg} \varphi - \\ - n^2 \frac{4}{r^2 \cos^2 \varphi} x_n - \omega^2 \frac{\partial^2 x_n}{\partial r^2} \sin^2 \varphi - \omega^2 \frac{1}{r} \frac{\partial x_n}{\partial r} \cos^2 \varphi - \\ - \omega^2 \frac{1}{r} \frac{\partial x_n}{\partial r \partial \varphi} \sin 2\varphi - \omega^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 x_n}{\partial \varphi^2} \cos^2 \varphi + \omega^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial x_n}{\partial \varphi} \sin 2\varphi = 0; \quad (344) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^2 \frac{\partial^2 x_c}{\partial r^2} + n^2 \frac{2}{r} \frac{\partial x_c}{\partial r} + n^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 x_c}{\partial \varphi^2} - n^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial x_c}{\partial \varphi} \operatorname{tg} \varphi - n^2 \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} x_c - \\ - \omega^2 \cdot 4 \frac{\partial^2 x_c}{\partial r^2} \sin^2 \varphi - \omega^2 \frac{4}{r} \frac{\partial x_c}{\partial r} \cos^2 \varphi - \omega^2 \frac{4}{r} \frac{\partial^2 x_c}{\partial r \partial \varphi} \sin 2\varphi - \\ - \omega^2 \frac{4}{r^2} \frac{\partial^2 x_c}{\partial \varphi^2} \cos^2 \varphi + \omega^2 \frac{4}{r^2} \frac{\partial x_c}{\partial \varphi} \sin 2\varphi = 0; \quad (345) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m^2 \frac{\partial^2 x_{ч.д}}{\partial r^2} + m^2 \frac{2}{r} \frac{\partial x_{ч.д}}{\partial r} + m^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 x_{ч.д}}{\partial \varphi^2} - m^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial x_{ч.д}}{\partial \varphi} \operatorname{tg} \varphi - \\ - \omega^2 \cdot 4 \frac{\partial^2 x_{ч.д}}{\partial r^2} \sin^2 \varphi - \omega^2 \frac{4}{r} \frac{\partial x_{ч.д}}{\partial r} \cos^2 \varphi - \omega^2 \frac{4}{r} \frac{\partial^2 x_{ч.д}}{\partial r \partial \varphi} \sin 2\varphi - \\ - \omega^2 \frac{4}{r^2} \frac{\partial^2 x_{ч.д}}{\partial \varphi^2} \cos^2 \varphi + \omega^2 \frac{4}{r^2} \frac{\partial x_{ч.д}}{\partial \varphi} \sin 2\varphi = \frac{16 F_{ч.д} \rho \omega^2}{3r}. \quad (346) \end{aligned}$$

Очевидно, что однородные уравнения (344)–(346) имеют
 бесчисленное множество решений и что удовлетворяющими дан-
 ной задаче являются те из них, которые при $\omega = 0$, т. е. при от-
 сутствии силы Кориолиса, зависят от r и φ точно так же, как и
 решения однородных уравнений (275), (285), (294). Такие ре-
 шения имеют вид $x_n = C_6 r^2 \cos^2 \varphi$, $x_c = C_7 r^2 \sin 2\varphi$, $\tilde{x}_{ч.д} =$
 $= C_8 r^2 \left(\frac{m^2 - 4\omega^2}{3m^2 - 4\omega^2} - \sin^2 \varphi \right)$. Частное решение ($\tilde{x}_{ч.д}$) неоднород-
 ного уравнения (346) находится с помощью подстановки $\tilde{x}_{ч.д} =$
 $= y F_{ч.д} r \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)$, где y не зависит от r и φ . Используя ее,
 получаем $\frac{16}{3} \frac{F_{ч.д} \omega^2}{r (m^2 - 4\omega^2)} y = \frac{16}{3} \frac{F_{ч.д} \rho \omega^2}{r (m^2 - 4\omega^2)}$, откуда $y = \rho$

и, таким образом, $\tilde{x}_{\text{ч. д}} = F_{\text{ч. д}} r \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} P_{\text{п}} &= x_{\text{п}} \cos 2 (nt - \lambda) = C_6 r^2 \cos^2 \varphi \cos 2 (nt - \lambda); \\ P_{\text{с}} &= x_{\text{с}} \cos (nt - \lambda) = C_7 r^2 \sin 2 \varphi \cos (nt - \lambda); \\ P_{\text{ч. д}} &= x_{\text{ч. д}} \cos (mt - \psi) = (\bar{x}_{\text{ч. д}} + \tilde{x}_{\text{ч. д}}) \cos (mt - \psi) = \\ &= C_8 r^2 \left(\frac{m^2 - 4\omega^2}{3m^2 - 4\omega^2} - \sin^2 \varphi \right) \cos (mt - \psi) + \\ &+ F_{\text{ч. д}} r \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos (mt - \psi). \end{aligned}$$

Постоянные C_6 и C_7 находятся точно таким же способом, какой использовался при определении постоянных C_1 и C_3 в задаче о приливах на жидком небесном теле при отсутствии силы Кориолиса. Эти константы равны

$$C_6 = \frac{F_{\text{п}} \rho g}{2r (g - 2Rn^2 + 2Rn\omega)}, \quad C_7 = \frac{F_{\text{п}} \rho g (n - \omega)}{r [2g (n - \omega) - Rn^2 (n - 2\omega)]}.$$

При определении постоянной C_8 необходимо иметь в виду, что давление $P_{\text{ч. д}}$ вызывается не только зависящим от широты отклонением поверхности небесного тела от невозмущенного положения. Формулы проекций скоростей частных долгопериодных приливных движений, выведенные путем совместного решения уравнений (340) — (342) при условии, что возвращающая сила отсутствует (т. е. $\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P_3}{\partial \varphi} = 0$ и $\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_3}{\partial r} + g(r) = 0$), имеют вид

$$\begin{aligned} v_{\text{ч. д}} &= - \frac{4F_{\text{ч. д}} \omega \cos \varphi}{3(m^2 - 4\omega^2)} \cos (mt - \psi), \\ u_{\text{ч. д}} &= - \frac{F_{\text{ч. д}} (3m^2 - 8\omega^2) \sin 2\varphi}{3m(m^2 - 4\omega^2)} \sin (mt - \psi), \\ w_{\text{ч. д}} &= \frac{6F_{\text{ч. д}} m^2 \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) + 16F_{\text{ч. д}} \omega^2 \sin^2 \varphi}{3m(m^2 - 4\omega^2)} \sin (mt - \psi). \end{aligned}$$

В отличие от проекций скоростей полусуточных и суточных приливных движений, найденных из систем уравнений движения (332) — (334) и (336) — (338), в которые также не входит возвращающая сила, приведенные формулы проекций скоростей частных долгопериодных движений не удовлетворяют уравнению неразрывности:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial u_{\text{ч. д}}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} u_{\text{ч. д}} \operatorname{tg} \varphi + \frac{\partial w_{\text{ч. д}}}{\partial r} + \frac{2}{r} w_{\text{ч. д}} &= \\ = \frac{16F_{\text{ч. д}} \omega^2}{3rm(m^2 - 4\omega^2)} \sin (mt - \psi) \neq 0. \end{aligned}$$

Вследствие этого в жидкости возникает внутреннее давление P_v и, таким образом, давление $P_{0ч.д}$ на невозмущенной поверхности равно $P_{0ч.д} = P_{0z} + P_{0в}$, где P_{0z} — давление возвышающегося над ней столбика жидкости. Давление P_{0z} , найденное способом, изложенным на с. 189—190, равно $P_{0z} =$

$$= C \frac{6Rg\left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi\right)}{3m^2 - 4\omega^2} \cos(mt - \psi). \text{ Следовательно, } P_{0ч.д} = C_8 \times \\ \times \frac{6Rg\left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi\right)}{3m^2 - 4\omega^2} \cos(mt - \psi) + P_{0в}.$$

С другой стороны, согласно формуле, выведенной путем решения уравнения (346), $P_{0ч.д} = \left[C_8 R^2 \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) - C_8 R^2 \times \right.$

$$\times \left. \frac{\frac{8}{3} \omega^2}{3m^2 - 4\omega^2} \right] \cos(mt - \psi) + \frac{F_{ч.д} \rho R^2}{r} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos(mt - \psi).$$

$$\text{Следовательно, } C_8 \frac{6Rg\left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi\right)}{3m^2 - 4\omega^2} \cos(mt + \psi) + P_{0в} = C_8 R^2 \times$$

$$\times \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos(mt - \psi) - C_8 R^2 \frac{\frac{8}{3} \omega^2}{3m^2 - 4\omega^2} \cos(mt - \psi) + \\ + \frac{F_{ч.д} \rho R^2}{r} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \cos(mt - \psi),$$

откуда

$$P_{0в} = -C_8 R^2 \frac{\frac{8}{3} \omega^2}{3m^2 - 4\omega^2} \cos(mt - \psi) \text{ и } C_8 = \frac{F_{ч.д} \rho R (3m^2 - 4\omega^2)}{r (6g - 3Rm^2 + 4R\omega^2)}.$$

Таким образом, давления P_n , P_c и $P_{ч.д}$ определяются следующими формулами:

$$P_n = \frac{F_{нп} g r \cos^2 \varphi}{2(g - 2Rn^2 + 2Rn\omega)} \cos 2(nt - \lambda);$$

$$P_c = \frac{F_{ср} g r (n - \omega) \sin 2\varphi}{2g(n - \omega) - Rn^2(n - 2\omega)} \cos(nt - \lambda);$$

$$P_{ч.д} = \frac{2F_{ч.д} \rho g r \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) - \frac{8}{9} F_{ч.д} \rho r R \omega^2}{2g - Rm^2 + \frac{4}{3} R \omega^2} \cos(mt - \psi).$$

Знание давлений P_n , P_c и $P_{ч.д}$ дает возможность найти проекции скоростей полусуточных, суточных и частных долгопериодных приливных движений на параллель, меридиан и вертикаль.

Формулы кинематических характеристик приливных движений на жидком

Класс приливов	Проекция	Приливообразующие силы	смещение
Полусуточный	На параллель	$F_{\Pi} \cos \varphi \sin 2(nt - \lambda)$	$\frac{1}{2} \frac{F_{\Pi} R \cos \varphi}{g - 2Rn^2 + 2Rn\omega} \sin 2(nt - \lambda)$
	На меридиан	$-\frac{1}{2} F_{\Pi} \sin 2\varphi \cos 2 \times$ $\times (nt - \lambda)$	$-\frac{1}{4} \frac{F_{\Pi} R \sin 2\varphi}{g - 2Rn^2 + 2Rn\omega} \cos 2(nt - \lambda)$
	На вертикаль	$F_{\Pi} \cos^2 \varphi \cos 2(nt - \lambda)$	$\frac{1}{2} \frac{F_{\Pi} R \cos^2 \varphi}{g - 2Rn^2 + 2Rn\omega} \cos 2(nt - \lambda)$
Суточный	На параллель	$F_c \sin \varphi \sin (nt - \lambda)$	$\frac{F_c R n \sin \varphi}{2g(n - \omega) - Rn^2(n - 2\omega)} \times$ $\times \sin (nt - \lambda)$
	На меридиан	$F_c \cos 2\varphi \cos (nt - \lambda)$	$\frac{F_c R [(n - 2\omega) \cos^2 \varphi - n \sin^2 \varphi]}{2g(n - \omega) - Rn^2(n - 2\omega)} \times$ $\times \cos (nt - \lambda)$
	На вертикаль	$F_c \sin 2\varphi \cos (nt - \lambda)$	$\frac{F_c R (n - \omega) \sin 2\varphi}{2g(n - \omega) - Rn^2(n - 2\omega)} \times$ $\times \cos (nt - \lambda)$
Долгопериодный	На параллель	0	$\frac{4}{3} \frac{F_{\text{ч.д}} R \frac{\omega}{m} \cos \varphi}{2g - Rm^2 + \frac{4}{3} R\omega^2} \times$ $\times \sin (mt - \psi)$
	На меридиан	$-F_{\text{ч.д}} \sin 2\varphi \cos \times$ $\times (mt - \psi)$	$-\frac{F_{\text{ч.д}} R \sin 2\varphi}{2g - Rm^2 + \frac{4}{3} R\omega^2} \times$ $\times \cos (mt - \psi)$
	На вертикаль	$2F_{\text{ч.д}} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right) \times$ $\times \cos (mt - \psi)$	$\frac{2F_{\text{ч.д}} R \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{2g - Rm^2 + \frac{4}{3} R\omega^2} \times$ $\times \cos (mt - \psi)$

Кинематические характеристики	
скорость	ускорение
$\frac{F_n R n \cos \varphi}{g - 2Rn^2 + 2Rn\omega} \cos 2(nt - \lambda)$	$-\frac{2F_n R n^2 \cos \varphi}{g - 2Rn^2 + 2Rn\omega} \sin 2(nt - \lambda)$
$\frac{1}{2} \frac{F_n R n \sin 2\varphi}{g - 2Rn^2 + 2Rn\omega} \sin 2(nt - \lambda)$	$\frac{F_n R n^2 \sin 2\varphi}{g - 2Rn^2 + 2Rn\omega} \cos 2(nt - \lambda)$
$-\frac{F_n R n \cos^2 \varphi}{g - 2Rn^2 + 2Rn\omega} \sin 2(nt - \lambda)$	$-\frac{2F_n R n^2 \cos^2 \varphi}{g - 2Rn^2 + 2Rn\omega} \cos 2(nt - \lambda)$
$\frac{F_c R n^2 \sin \varphi}{2g(n - \omega) - Rn^2(n - 2\omega)} \times$ $\times \cos(nt - \lambda)$	$-\frac{F_c R n^3 \sin \varphi}{2g(n - \omega) - Rn^2(n - 2\omega)} \times$ $\times \sin(nt - \lambda)$
$-\frac{F_c R n [(n - 2\omega) \cos^2 \varphi - n \sin^2 \varphi]}{2g(n - \omega) - Rn^2(n - 2\omega)} \times$ $\times \sin(nt - \lambda)$	$-\frac{F_c R n^2 [(n - 2\omega) \cos^2 \varphi - n \sin^2 \varphi]}{2g(n - \omega) - Rn^2(n - 2\omega)} \times$ $\times \cos(nt - \lambda)$
$-\frac{F_c R n (n - \omega) \sin 2\varphi}{2g(n - \omega) - Rn^2(n - 2\omega)} \times$ $\times \sin(nt - \lambda)$	$-\frac{F_c R n^2 (n - \omega) \sin 2\varphi}{2g(n - \omega) - Rn^2(n - 2\omega)} \times$ $\times \cos(nt - \lambda)$
$\frac{4}{3} \frac{F_{\text{ч. д}} R \omega \cos \varphi}{2g - Rm^2 + \frac{4}{3} R \omega^2} \times \cos(mt - \psi)$	$-\frac{4}{3} \frac{F_{\text{ч. д}} R m \omega \cos \varphi}{2g - Rm^2 + \frac{4}{3} R \omega^2} \sin(mt - \psi)$
$\frac{F_{\text{ч. д}} R m \sin 2\varphi}{2g - Rm^2 + \frac{4}{3} R \omega^2} \sin(mt - \psi)$	$\frac{F_{\text{ч. д}} R m^2 \sin 2\varphi}{2g - Rm^2 + \frac{4}{3} R \omega^2} \cos(mt - \psi)$
$-\frac{2F_{\text{ч. д}} R m \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{2g - Rm^2 + \frac{4}{3} R \omega^2} \times$ $\times \sin(mt - \psi)$	$-\frac{2F_{\text{ч. д}} R m^2 \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{2g - Rm^2 + \frac{4}{3} R \omega^2} \times$ $\times \cos(mt - \psi)$

Формулы этих проекций имеют вид

$$v_n = \frac{F_n R n \cos \varphi}{g - 2Rn^2 + 2Rn\omega} \cos 2(nt - \lambda); \quad (347)$$

$$u_n = \frac{\frac{1}{2} F_n R n \sin 2\varphi}{g - 2Rn^2 + 2Rn\omega} \sin 2(nt - \lambda); \quad (348)$$

$$w_n = -\frac{F_n R n \cos^2 \varphi}{g - 2Rn^2 + 2Rn\omega} \sin 2(nt - \lambda); \quad (349)$$

$$v_c = \frac{F_c R n^2 \sin \varphi}{2g(n - \omega) - Rn^2(n - 2\omega)} \cos(nt - \lambda); \quad (350)$$

$$u_c = -\frac{F_c R n [(n - 2\omega) \cos^2 \varphi - n \sin^2 \varphi]}{2g(n - \omega) - Rn^2(n - 2\omega)} \sin(nt - \lambda); \quad (351)$$

$$w_c = -\frac{F_c R n (n - \omega) \sin 2\varphi}{2g(n - \omega) - Rn^2(n - 2\omega)} \sin(nt - \lambda); \quad (352)$$

$$v_{ч. д} = \frac{\frac{4}{3} F_{ч. д} R \omega \cos \varphi}{2g - Rm^2 + \frac{4}{3} R\omega^2} \cos(mt - \psi); \quad (353)$$

$$u_{ч. д} = \frac{F_{ч. д} R m \sin 2\varphi}{2g - Rm^2 + \frac{4}{3} R\omega^2} \sin(mt - \psi); \quad (354)$$

$$w_{ч. д} = -\frac{2F_{ч. д} R m \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \varphi \right)}{2g - Rm^2 + \frac{4}{3} R\omega^2} \sin(mt - \psi). \quad (355)$$

Формулы полусуточных, суточных и частных долгопериодных смещений и ускорений частиц в направлениях параллелей, меридианов и вертикалей выводятся путем интегрирования и дифференцирования формул (347) — (355) по времени. Они приведены в табл. 20. В табл. 18 приведены характеристики проекций траекторий частиц, совершающих приливные движения при действии силы Кориолиса, на три взаимно перпендикулярные плоскости.

Введение в уравнения движения всех компонентов силы Кориолиса обеспечило точный переход от инерциальной системы к неинерциальной. Благодаря этому формулы всех кинематических характеристик приливов каждого класса представляют собой элементарные функции, что существенно облегчает установление особенностей приливных движений, происходящих при действии этой силы. Исключение же из уравнений движения компонентов силы Кориолиса, прямо пропорциональных косинусу широты, не обеспечило бы этого перехода, вследствие чего формулы кинематических характеристик приливов имели бы вид медленно сходящихся степенных рядов.

Рассмотрим важнейшие особенности полусуточных, суточных и частных долгопериодных приливных движений.

Формулы проекций всех кинематических характеристик полусуточных приливов отличаются от формул проекций кинемати-

ческих характеристик приливов этого класса, происходящих в отсутствие силы Кориолиса только тем, что относительная угловая скорость в них равна $n = \omega - \alpha$ и тем, что в знаменатели правых частей входит дополнительное слагаемое $2Rn\omega$, равное $2R\omega(\omega - \alpha)$. Эти различия оказывают влияние на амплитуды проекций смещений, скоростей и ускорений частиц, на условия возникновения резонанса и перемены фаз проекций кинематических характеристик на противоположные и на быстроту изменения проекций во времени. Однако формы проекций траекторий частиц на три взаимно перпендикулярные плоскости и положения частиц при одном и том же значении часового угла светила при одинаковом знаке разности периодов приливообразующей силы и свободных колебаний не отличаются от форм проекций траекторий и от положений частиц, совершающих полусуточные приливные движения на жидком небесном теле в отсутствие силы Кориолиса. Поэтому полусуточные движения всей массы жидкого небесного тела, происходящие в отсутствие этой силы и при ее действии, не имеют больших различий.

Проекция кинематических характеристик суточных приливных движений отличаются не только значительно более сложной зависимостью от угловых скоростей ω и α и другой быстротой изменения во времени, но и тем, что смещения, скорости и ускорения частиц в меридианном направлении зависят от географической широты иначе, чем действующая в этом направлении суточная приливообразующая сила и чем проекции на меридиан кинематических характеристик суточных приливных движений, происходящих в отсутствие силы Кориолиса.

Найденные изложенным ранее способом суточные отклонения ($z_{п.с}$ и $z_{м.с}$) поверхности небесного тела от невозмущенного положения, которые соответствуют приливным движениям в направлениях параллелей и меридианов в отдельности, равны

$$z_{п.с} = \frac{\frac{1}{3} F_{oc} R n \operatorname{tg} \varphi}{2g(n - \omega) - Rn^2(n - 2\omega)} \cos(nt - \lambda);$$

$$z_{м.с} = \frac{\frac{1}{3} F_{oc} R \left[\left(\frac{5}{2} n - 3\omega \right) \sin 2\varphi - n \sin^2 \varphi \operatorname{tg} \varphi \right]}{2g(n - \omega) - Rn^2(n - 2\omega)} \cos(nt - \lambda).$$

Совместный анализ этих формул и формул проекций суточных смещений частиц вдоль параллелей и меридианов показывает, что суточные приливные движения всей массы жидкого тела представляют собой результат сложения зональной поступательной волны и стоячих волн, ориентированных вдоль меридианов. Вертикальные приливные движения в стоячих волнах отсутствуют на экваторе и полюсах и на широтах, значения которых определяются соотношением угловых скоростей ω и α . От этого соотношения зависит также расположение пучностей и узловых линий меридианных стоячих волн.

Анализ кинематических характеристик частных долгопериодных приливов показывает, что их проекции на меридиан и вертикаль отличаются от проекций кинематических характеристик частных долгопериодных приливных движений, происходящих в отсутствие силы Кориолиса, только тем, что в знаменатели правых частей формул входит дополнительное слагаемое

$$F_{\text{кор}} \frac{4}{3} R \omega^2. \text{ Наличие его влияет на амплитуды названных проекций}$$

и на условие возникновения резонанса. Наряду с этим сила Кориолиса вызывает частные долгопериодные движения в зональном направлении, которые в ее отсутствие не происходят. Поэтому частные долгопериодные приливные движения всей массы жидкого небесного тела, происходящие при действии силы Кориолиса, представляют собой результат сложения меридианных стоячих волн с пучностями на экваторе и полюсах и с узловыми линиями на широтах 45°N и 45°S и периодических движений частиц вдоль параллелей, все кинематические характеристики которых не изменяются с долготой. Важная особенность этих движений в направлении параллелей заключается в том, что скорости их, в отличие от проекций скоростей на меридиан и вертикаль, прямо пропорциональны угловой скорости вращения тела вокруг оси, а не циклической частоте долгопериодной волны. Поскольку скорость вращения тела обычно гораздо больше этой частоты, проекции скорости на параллель резко превосходят проекции скорости на два других взаимно перпендикулярных направления.

Рассмотрим более подробно условия резонанса полусуточных, суточных и частных долгопериодных приливов, для чего, как и ранее, выразим ускорение силы тяготения на поверхности тела через его плотность и радиус, а относительную угловую скорость — через угловые скорости ω и α . Тогда соотношения, при которых возникает резонанс приливов этих классов, примут вид

$$\frac{4}{3} \pi f \rho + 2\alpha (\omega - \alpha) = 0, \quad -\frac{8}{3} \pi f \rho \alpha + (\omega - \alpha)^2 (\omega + \alpha) = 0, \quad \frac{8}{3} \pi f \rho + \frac{4}{3} \omega^2 - m^2 = 0.$$

Согласно первому соотношению, резонанс полусуточных приливов может произойти только в том случае, если величина $2\alpha (\omega - \alpha)$ является отрицательной, т. е. когда угловые скорости ω и α имеют одинаковый знак, но $|\omega| < |\alpha|$, и когда эти угловые скорости имеют разные знаки.

Согласно второму соотношению, резонанс суточных приливов может возникнуть, когда угловые скорости вращения и обращения имеют одинаковое направление и когда направления этих скоростей различны, но угловая скорость обращения превосходит по абсолютному значению угловую скорость вращения. Таким образом, резонанс суточных приливов может иметь место

при таком соотношении угловых скоростей, при котором невозможен резонанс полусуточных, и наоборот, резонанс полусуточных — при таком соотношении скоростей, при котором невозможен резонанс суточных приливов.

Согласно третьему соотношению, резонанс частных долгопериодных приливов может произойти только тогда, когда циклическая частота (которая, как уже отмечалось, является функцией угловой скорости обращения) более чем в $2\sqrt{3}/3$ раза превосходит абсолютное значение угловой скорости вращения тела вокруг оси.

Таким образом, возможность возникновения резонанса приливов любого класса на жидких небесных телах при действии силы Кориолиса зависит от соотношения между тремя физическими величинами — плотностью тела, угловой скоростью его вращения вокруг оси и угловой скоростью обращения вызывающего прилив светила вокруг тела или этого тела вокруг светила. В отличие от приливов, происходящих в отсутствие силы Кориолиса, резонанс в принципе возможен не при любой угловой скорости обращения. Однако такого соотношения между угловыми скоростями вращения и обращения, при котором исключалась бы принципиальная возможность возникновения резонанса приливов всех классов, не существует.

Очень важная особенность приливных движений, происходящих при действии силы Кориолиса, заключается в том, что все их кинематические характеристики зависят не только от разности угловых скоростей (ω и α) вращения небесного тела вокруг оси и обращения вызывающего прилив светила вокруг тела или тела вокруг светила, но и от абсолютных значений этих скоростей. Очевидно, что существует бесчисленное множество случаев, когда при разных значениях угловых скоростей ω и α разность ($\omega - \alpha = n$) между ними, т. е. относительная угловая скорость, одинакова, однако в каждом из этих случаев все кинематические характеристики приливных движений имеют различные значения.

* *
*

Общие особенности трехмерных приливных движений, происходящих во всех рассмотренных случаях, заключаются в том, что амплитуды проекций всех их кинематических характеристик на параллель, меридиан и вертикаль прямо пропорциональны амплитудам проекций приливообразующих сил на эти направления и зависят от соотношения периодов сил и периодов свободных колебаний. Проекции траекторий частиц на горизонтальные плоскости и плоскости, перпендикулярные меридианам, имеют вид эллипсов, а проекции на плоскости меридианов — вид отрезков прямых, направленных под различными углами к горизонту.

Если период свободных колебаний превосходит период приливообразующей силы, при любом значении часового угла частица находится в точке траектории, соответствующей той, в которой при том же значении часового угла и прочих равных условиях находится частица, движущаяся под действием одной только приливообразующей силы. Полусуточные и суточные приливные движения всей совокупности частиц представляют собой результат сложения зональных поступательных и меридианных стоячих волн.

ГЛАВА 7. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ И КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ПРИЛИВОВ

Общая энергия приливов на жидком небесном теле постоянной плотности или в жидком слое, покрывающем твердую часть небесного тела, представляет собой сумму потенциальной энергии (P), которой обладает жидкость вследствие отклонения ее поверхности от невозмущенного положения в поле силы тяготения, и кинетической энергии (W) движущейся жидкости. Эти энергии определяются формулами типа

$$P = \frac{1}{2} \rho g z^2 S; \quad (356)$$

$$W = \frac{1}{2} m v^2; \quad (357)$$

в которых S — площадь поверхности жидкости в невозмущенном состоянии, z — отклонение этой поверхности от невозмущенного положения, а v — скорость приливного движения.

Рассмотрим сначала энергию приливов всех классов в узких зональных и меридианных каналах постоянной глубины и ширины. Площадь (S) канала равна $S = lb$, где l — его длина, а b — ширина. Поскольку ширина канала очень мала, можно считать, что энергия приливов, как и их кинематические характеристики, не изменяется в горизонтальном направлении, перпендикулярном его продольной оси. Поэтому суммарная потенциальная энергия прилива в зональном канале определяется формулой $P = \frac{1}{2} \rho g b \int z^2 r \cos \varphi dT$, а в меридианном канале — формулой $P = \frac{1}{2} \rho g b \int z^2 r d\varphi$. Формулы суммарных потенциальных энергий ($P_{п.п}$ и $P_{п.с}$) полусуточных и суточных приливов в зональных каналах и суммарных потенциальных энергий ($P_{м.п}$, $P_{м.с}$, $P_{м.ч.д}$) приведены в табл. 21.*

* Вывод названных формул и формул суммарной кинетической энергии приливов всех классов в зональных и меридианных каналах сделан в работе [28].

Согласно упомянутым формулам, суммарные потенциальные энергии полусуточных и суточных приливов в зональных каналах не изменяются во времени, а в меридианных каналах суммарные потенциальные энергии полусуточных, суточных и частных долгопериодных приливов изменяются во времени соответственно как $\cos^2 2(nt - \lambda)$, $\cos^2(nt - \lambda)$ и $\cos^2(mt - \psi)$. При часовых углах светила, равных 45, 135, 225 и 315°, отклонения уровня от невозмущенного положения, обусловленные приливами полусуточного периода, на всем протяжении меридианного канала отсутствуют, и суммарная потенциальная энергия равна нулю. При часовых углах 0, 90, 180 и 270° полусуточные отклонения уровня и, следовательно, суммарная потенциальная энергия имеют наибольшие значения. Суммарная потенциальная энергия суточных приливов равна нулю, когда часовой угол светила составляет 90 и 270°, и достигает наибольших значений, когда он равен 0 и 180°. Суммарная потенциальная энергия частного долгопериодного прилива равна нулю при значениях аргумента $mt - \psi$ 90 и 270°, а при значениях его 0 и 180° имеет максимальное значение.

Суммарные кинетические энергии (W_{Γ} и $W_{\text{в}}$) горизонтальных и вертикальных приливных движений любого класса опреде-

ляются формулами типа $W_{\Gamma} = \frac{1}{2} \rho b h \int_{l_1}^{l_2} v_{\Gamma}^2 dl$ и $W_{\text{в}} = \frac{1}{2} \rho b \int_0^h \int_{l_1}^{l_2} v_{\text{в}}^2 dl dh$. В работе [28] показано, что суммарная кинетическая энергия вертикальных движений ничтожно мала по сравнению с суммарной энергией горизонтальных. Формулы суммарных кинетических энергий ($W_{\text{п. п.}}$, $W_{\text{п. с.}}$, $W_{\text{м. п.}}$, $W_{\text{м. с.}}$, $W_{\text{м. ч. д.}}$) полусуточных и суточных приливов в зональных каналах и полусуточных, суточных и частных долгопериодных приливов приведены в табл. 21.

Вследствие преобладания суммарной кинетической энергии горизонтальных движений над энергией вертикальных при сравнении суммарной потенциальной и кинетической энергии можно положить, что последняя равна суммарной энергии горизонтальных приливных движений. При этом допущении

$$\frac{P_{\text{п. п.}}}{W_{\text{п. п.}}} = \frac{gh}{R^2 n^2 \cos^2 \varphi} = \frac{\pi^2 R^2 \cos^2 \varphi}{\tau_{\text{п. п.}}^2} \frac{\tau_{\text{п}}^2}{\pi^2 R^2 \cos^2 \varphi} = \frac{\tau_{\text{п}}^2}{\tau_{\text{п. п.}}^2}; \quad (358)$$

$$\frac{P_{\text{п. с.}}}{W_{\text{п. с.}}} = \frac{gh}{R^2 n^2 \cos^2 \varphi} = \frac{4\pi^2 R^2 \cos^2 \varphi}{\tau_{\text{п. с.}}^2} \frac{\tau_{\text{с}}^2}{4\pi^2 R^2 \cos^2 \varphi} = \frac{\tau_{\text{с}}^2}{\tau_{\text{п. с.}}^2}; \quad (359)$$

$$\frac{P_{\text{м. п.}}}{W_{\text{м. п.}}} = \frac{gh}{R^2 n^2} \text{ctg}^2 2(nt - \lambda) = \frac{\pi^2 R^2}{\tau_{\text{м. п.}}^2} \frac{\tau_{\text{п}}^2}{\pi^2 R^2} \text{ctg}^2 2(nt - \lambda) =$$

$$= \frac{\tau_p^2}{\tau_{0м. п}^2} \operatorname{ctg}^2 2 (nt - \lambda); \quad (360)$$

$$\begin{aligned} \frac{P_{м. с}}{W_{м. с}} &= \frac{4gh}{R^2 n^2} \operatorname{ctg}^2 (nt - \lambda) = \frac{4\pi^2 R^2}{\tau_{0м. с}^2} \frac{\tau_c^2}{4\pi^2 R^2} \operatorname{ctg}^2 (nt - \lambda) = \\ &= \frac{\tau_c^2}{\tau_{0м. с}^2} \operatorname{ctg}^2 (nt - \lambda); \end{aligned} \quad (361)$$

$$\begin{aligned} \frac{P_{м. ч. д}}{W_{м. ч. д}} &= \frac{4gh}{R^2 m^2} \operatorname{ctg}^2 (mt - \psi) = \frac{4\pi^2 R^2}{\tau_{0м. ч. д}^2} \frac{\tau_{ч. д}^2}{4\pi^2 R^2} \operatorname{ctg}^2 (mt - \psi) = \\ &= \frac{\tau_{ч. д}^2}{\tau_{0м. ч. д}^2} \operatorname{ctg}^2 (mt - \psi). \end{aligned} \quad (362)$$

Из формул (358) — (362) видно, что в зональных каналах отношения суммарной потенциальной энергии полусуточных и суточных приливов к суммарной кинетической есть постоянные величины. В меридианных каналах отношения между суммарными потенциальными и кинетическими энергиями полусуточных, суточных и частных долгопериодных приливов прямо пропорциональны аргументам $\operatorname{ctg}^2 2 (nt - \lambda)$, $\operatorname{ctg}^2 (nt - \lambda)$ и $\operatorname{ctg}^2 (mt - \psi)$.

Поскольку приливные волны являются вынужденными, а не свободными, в зональных каналах суммарная потенциальная энергия как полусуточных, так и суточных приливов не равна суммарной кинетической энергии приливов тех же периодов, а в меридианных каналах максимальные значения суммарной потенциальной энергии не равны максимальным значениям суммарной кинетической. Названные величины равны между собой лишь в тех случаях, когда период возбуждающей силы не отличается от периода свободных колебаний, т. е. при условии возникновения резонанса. В зональных каналах, где суммарные потенциальная и кинетическая энергии не зависят от времени, соотношение между названными ее видами определяется соотношением между периодами возбуждающей силы и свободных колебаний. Если период этой силы больше периода свободных колебаний, суммарная потенциальная энергия превосходит кинетическую; если же период свободных колебаний больше периода силы, суммарная потенциальная энергия меньше, чем кинетическая. В меридианных каналах, где суммарные значения потенциальной и кинетической энергии зависят от времени, отношение между ними в любой момент прямо пропорционально отношению квадратов периодов возбуждающей силы и свободных колебаний, а отношение между максимальными значениями названных энергий равно отношению квадратов этих периодов.

Можно показать, что установленная закономерность справедлива для любых механических колебаний простых систем. Фундаментальное уравнение таких колебаний имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F \cos \omega t - kx,$$

где m — масса системы; x — ее смещение; t — время; F — амплитуда возбуждающей силы; ω — частота силы; k — постоянный коэффициент, связанный с массой и частотой (ω_0) свободных колебаний системы соотношением $k = m\omega_0^2$. При отсутствии граничных условий это уравнение имеет решение

$$x = \frac{F}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

Скорость (v) движения системы равна

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{F\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \omega t.$$

Потенциальная энергия (P) системы в любой момент времени определяется формулой

$$P = \int kx dx = \frac{kx^2}{2} = \frac{F^2 \omega_0^2}{2m(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \cos^2 \omega t,$$

а максимальное ее значение ($P_{\max}$) — формулой

$$P_{\max} = \frac{F^2 \omega_0^2}{2m(\omega_0^2 - \omega^2)^2}.$$

Кинетическая энергия (W) системы в любой момент времени равна

$$W = \frac{mv^2}{2} = \frac{F^2 \omega^2}{2m(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \sin^2 \omega t,$$

а ее максимальное значение ($W_{\max}$) определяется формулой

$$W_{\max} = \frac{F^2 \omega^2}{2m(\omega_0^2 - \omega^2)^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{P}{W} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \operatorname{ctg}^2 \omega t = \frac{\tau^2}{\tau_0^2} \operatorname{ctg}^2 \omega t \quad \text{и} \quad \frac{P_{\max}}{W_{\max}} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{\tau^2}{\tau_0^2},$$

где τ — период возбуждающей силы, а τ_0 — период свободных колебаний.

Суммарная потенциальная энергия приливов любого класса в океане постоянной глубины, сплошь покрывающем Землю,

Таблица 21

Формулы, определяющие суммарную потенциальную энергию и суммарную кинетическую энергию приливов

Класс приливов	Приливы	Потенциальная энергия	Кинетическая энергия	Отношение потенциальной энергии к кинетической
Полусуточный	В зональном канале	$\frac{1}{8} \pi \rho g b \frac{F_{0n}^2 R^3 h^2 \cos^5 \varphi}{(gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)^2}$	$\frac{1}{8} \pi \rho b \frac{F_{0n}^2 R^5 h n^2 \cos^7 \varphi}{(gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)^2}$	$\frac{gh}{R^2 n^2 \cos^2 \varphi}$
	В меридианном канале	$\frac{1}{32} \pi \rho g b \frac{F_{0n}^2 R^3 h^2}{(gh - R^2 n^2)^2} \times \cos^2 2(nt - \lambda)$	$\frac{1}{32} \pi \rho b \frac{F_{0n}^2 R^5 h n^2}{(gh - R^2 n^2)^2} \times \sin^2 2(nt - \lambda)$	$\frac{gh}{R^2 n^2} \operatorname{ctg}^2 2(nt - \lambda)$
	В океане, сплошь покрывающем Землю	$\frac{6}{5} \pi \rho g \frac{F_{0n}^2 R^4 h^2}{(3gh - 2R^2 n^2)^2}$	$\frac{4}{5} \pi \rho \frac{F_{0n}^2 R^6 h n^2}{(3gh - 2R^2 n^2)^2}$	$\frac{3gh}{2R^2 n^2}$
	На жидком небесном теле при отсутствии силы Кориолиса	$\frac{2}{15} \pi \rho g \frac{F_{0n}^2 R^4}{(g - 2Rn^2)^2}$	$\frac{4}{15} \pi \rho \frac{F_{0n}^2 R^5 n^2}{(g - 2Rn)^2}$	$\frac{g}{2Rn^2}$
	На жидком небесном теле при действии силы Кориолиса	$\frac{2}{15} \pi \rho g \frac{F_{0n}^2 R^4}{(g - 2Rn^2 + 2Rn\omega)^2}$	$\frac{4}{15} \pi \rho \frac{F_{0n}^2 R^5 n^2}{(g - 2Rn^2 + 2Rn\omega)^2}$	$\frac{g}{2Rn^2}$
	В зональном канале	$\frac{1}{2} \pi \rho g b \frac{F_{0c}^2 R^3 h^2 \sin^2 \varphi \cos^3 \varphi}{(gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)^2}$	$\frac{1}{2} \pi \rho b \frac{F_{0c}^2 R^5 h n^2 \sin^2 \varphi \cos^5 \varphi}{(gh - R^2 n^2 \cos^2 \varphi)^2}$	$\frac{gh}{R^2 n^2 \cos^2 \varphi}$
	В меридианном канале	$2\pi \rho g b \frac{F_{0c}^2 R^3 h^2}{(4gh - R^2 n^2)^2} \cos^2 (nt - \lambda)$	$\frac{1}{2} \pi \rho b \frac{F_{0c}^2 R^5 h n^2}{(4gh - R^2 n^2)^2} \sin^2 (nt - \lambda)$	$\frac{4gh}{R^2 n^2} \operatorname{ctg}^2 (nt - \lambda)$
Суточный	В океане, сплошь покрывающем Землю	$\frac{24}{5} \pi \rho g \frac{F_{0c}^2 R^4 h^2}{(6gh - R^2 n^2)^2}$	$\frac{4}{5} \pi \rho \frac{F_{0c}^2 R^6 h n^2}{(6gh - R^2 n^2)^2}$	$\frac{6gh}{R^2 n^2}$
	На жидком небесном теле при отсутствии силы Кориолиса	$\frac{8}{15} \pi \rho g \frac{F_{0c}^2 R^4}{(2g - Rn^2)^2}$	$\frac{4}{15} \pi \rho \frac{F_{0c}^2 R^5 n^2}{(2g - Rn^2)^2}$	$\frac{2g}{Rn^2}$
	На жидком небесном теле при действии силы Кориолиса	$\frac{8}{15} \pi \rho g \times \frac{F_{0c}^2 R^4 (n - \omega)^2}{[2g(n - \omega) - Rn^2(n - 2\omega)]^2}$	$\frac{4}{15} \pi \rho \frac{F_{0c}^2 R^5 n^2 (n^2 + 2\omega^2 - 2n\omega)}{[2g(n - \omega) - Rn^2 \times (n - 2\omega)]^2}$	$\frac{2g(n - \omega)^2}{Rn^2(n^2 + 2\omega^2 - 2n\omega)}$
	В меридианном канале	$2\pi \rho g b \frac{F_{0c, \lambda}^2 R^3 h^2}{(4gh - R^2 m^2)^2} \cos^2 (mt - \psi)$	$\frac{1}{2} \pi \rho b \frac{F_{0c, \lambda}^2 R^5 h m^2}{(4gh - R^2 m^2)^2} \sin^2 (mt - \psi)$	$\frac{4gh}{R^2 m^2} \operatorname{ctg}^2 (mt - \psi)$
Долгопериодный	В океане, сплошь покрывающем Землю	$\frac{32}{5} \pi \rho g \frac{F_{0c, \lambda}^2 R^4 h^2}{(6gh - R^2 m^2)^2} \times \cos^2 (mt - \psi)$	$\frac{16}{15} \pi \rho \frac{F_{0c, \lambda}^2 R^6 h m^2}{(6gh - R^2 m^2)^2} \sin^2 (mt - \psi)$	$\frac{6gh}{R^2 m^2} \operatorname{ctg}^2 (mt - \psi)$
	На жидком небесном теле при отсутствии силы Кориолиса	$\frac{32}{45} \pi \rho g \frac{F_{0c, \lambda}^2 R^4}{(2g - Rm^2)^2} \times \cos^2 (mt - \psi)$	$\frac{16}{45} \pi \rho \frac{F_{0c, \lambda}^2 R^5 m^2}{(2g - Rm^2)^2} \sin^2 (mt - \psi)$	$\frac{2g}{Rm^2} \operatorname{ctg}^2 (mt - \psi)$
	На жидком небесном теле при действии силы Кориолиса	$\frac{32}{45} \pi \rho g \frac{F_{0c, \lambda}^2 R^4}{\left(2g - Rm^2 + \frac{4}{3} R\omega^2\right)^2} \times \cos^2 (mt - \psi)$	$\frac{16}{45} \pi \rho \frac{F_{0c, \lambda}^2 R^5}{\left(2g - Rm^2 + \frac{4}{3} R\omega^2\right)^2} \times \left[\frac{4}{3} \omega^2 \cos^2 (mt - \psi) + m^2 \sin^2 (mt - \psi)\right]$	$\frac{2g}{R} \frac{\cos^2 (mt - \psi)}{\frac{4}{3} \omega^2 \cos^2 (mt - \psi) + m^2 \sin^2 (mt - \psi)}$

определяется формулой

$$P = \frac{1}{2} \rho g \int_{(s)} z^2 ds.$$

В рассматриваемом океане проекции скорости течения на параллель и меридиан во много раз превосходят проекцию скорости на вертикаль и почти не изменяются с глубиной. Поэтому суммарная кинетическая энергия приливов любого класса может быть найдена с помощью формулы

$$W = \frac{1}{2} \rho h \int_{(s)} (v^2 + u^2) ds.$$

Для определения суммарных потенциальной и кинетической энергий интегрирование по широте необходимо выполнить в области от $-\pi/2$ до $\pi/2$, а по долготе — в области от 0 до 2π .

Суммарные потенциальная и кинетическая энергии приливов всех классов на жидком небесном теле находятся с помощью формул $P = \frac{1}{2} \rho g \int_{(s)} z^2 ds$ и $W = \frac{1}{2} \rho \int \int \int_{(Q)} (v^2 + u^2 + w^2) dq$,

в последней из которых dq — элементарный объем, равный $dq = r^2 \cos \varphi dr d\varphi d\lambda$. Интегрирование по r , φ и λ выполняется в областях от 0 до R , от $-\pi/2$ до $\pi/2$ и от 0 до 2π . Формулы суммарных потенциальных и кинетических энергий полусуточных, суточных и частных долгопериодных приливов в покрывающей Землю океане и на жидком небесном теле и формулы, определяющие отношения между суммарными потенциальными и кинетическими энергиями, приведены в табл. 21.

Анализ формул показывает, что и суммарная потенциальная, и суммарная кинетическая энергия приливов любого класса, происходящих во всех рассмотренных случаях, прямо пропорциональна квадрату амплитуды приливообразующей силы и обратно пропорциональна квадрату разности квадратов периодов возбуждающей силы и свободных колебаний. Если эти периоды мало отличаются друг от друга, суммарная потенциальная и суммарная кинетическая энергии достигают огромных значений. В зональных и меридианных каналах и в океане, покрывающем Землю или любое твердое небесное тело, величины этих энергий соизмеримы между собой, тогда как на жидких небесных телах суммарная потенциальная энергия, как правило, во много раз превосходит суммарную кинетическую.

Одно из важных отличий потенциальной энергии приливов от энергии кинетической, заключается в том, что изменение ее на небесных телах постоянной плотности обусловливается изменением формы тел, что приводит к вариации создаваемых ими гравитационных полей. Изменение же кинетической энергии, например энергии зональных долгопериодных приливных движений, может не сопровождаться изменением формы тела и вариацией создаваемого им гравитационного поля.

ГЛАВА 8. ОСОБЕННОСТИ ПРИЛИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ ЖИДКОЙ И ГАЗООБРАЗНОЙ МАТЕРИИ ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТИ

Одним из простейших случаев приливных движений материи переменной плотности являются полусуточные приливы в опоясывающем небесное тело узком экваториальном канале с глубиной, соизмеримой с радиусом. На поверхности тела такой канал ограничен двумя расположенными симметрично относительно экватора параллелями, расстояние между которыми невелико. Сечение канала плоскостью любого меридиана представляет собой часть сектора, образованного двумя радиусами, концы которых находятся в точках пересечения меридиана с ограничивающими канал параллелями, и дугой меридиана, заключенной между этими точками. Снизу часть сектора, представляющая собой сечение канала, ограничена дугой окружности с центром, совпадающим с центром тела. Двухмерные приливные движения в этом случае сохраняют многие принципиальные особенности, присущие приливам на всем небесном теле, точно так же как рассмотренные Эри приливы в окружающем Землю экваториальном канале отражают существенные особенности приливов, происходящих под действием тех же сил в океане, сплошь покрывающем земной шар.*

Система дифференциальных уравнений, описывающих полусуточные приливы в таком канале, имеет вид **

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} = F_n \sin 2(nt - \lambda) - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \lambda}, \quad (363)$$

$$\frac{\partial w_n}{\partial t} = F_n \cos 2(nt - \lambda) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} - g(r) \frac{\rho_1}{\rho}; \quad (364)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_n}{\partial \lambda} + \frac{\partial w_n}{\partial r} + \frac{2}{r} w_n = 0; \quad (365)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -w_n \frac{d\rho}{dr}, \quad (366)$$

где ρ — средняя плотность; ρ_1 — изменение плотности, обусловленное перемещением частиц, причем $\rho_1 \ll \rho$; $d\rho/dr$ — вертикальный градиент плотности, полагаемый неизменным в горизонтальном направлении и во времени.

* Более общий случай приливных движений материи непостоянной плотности рассмотрен в работе [17].

** Система уравнений (363) — (366) описывает внутренние приливные волны. Особенности внутренних волн при различных типах вертикального распределения плотности рассмотрены, например, в книге В. Крауса «Внутренние волны» (Л., Гидрометеиздат, 1968). Вопрос о механизме их возбуждения и о том, реагирует ли океан на приливообразующие силы как баротропная или бароклинная жидкость, остается дискуссионным. — *Прим. ред.*

Для решения этой системы целесообразно представить величины P и w_n в виде $P = y \cos 2(nt - \lambda)$ и $w_n = W_n \sin 2(nt - \lambda)$, где новая неизвестная y и амплитуда вертикальной скорости W_n не зависят от t и λ . Положим, что вертикальное распределение плотности во всех частях небесного тела, кроме окрестностей его центра, определяется соотношением $\rho = K/r^2$, в котором K — константа. Путем элементарных преобразований из системы уравнений (363) — (366) можно получить следующее обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно W_n :

$$r^2 \frac{d^2 W_n}{dr^2} + 2r \frac{dW_n}{dr} + \frac{a^2}{r^2} W_n - 6W_n = -\frac{2F_n}{n}, \quad (367)$$

в котором $a^2 = 8\pi f K/n^2$.

Однородное уравнение $r^2 \frac{d^2 W_n}{dr^2} + 2r \frac{dW_n}{dr} + \frac{a^2}{r^2} W_n - 6W_n = 0$ представляет собой разновидность уравнения Бесселя и имеет решение

$$\begin{aligned} \overline{W}_n = C_1 W_1 + C_2 W_2 = C_1 \left(\cos \frac{a}{r} - \frac{3r}{a} \sin \frac{a}{r} - \frac{3r^2}{a^2} \cos \frac{a}{r} \right) + \\ + C_2 \left(\sin \frac{a}{r} + \frac{3r}{a} \cos \frac{a}{r} - \frac{3r^2}{a^2} \sin \frac{a}{r} \right). \end{aligned}$$

Частное решение неоднородного уравнения (367) можно найти методом Лагранжа с помощью системы уравнений

$$\begin{cases} C_1'(r) W_1 + C_2'(r) W_2 = 0; \\ C_1'(r) W_1' + C_2'(r) W_2' = -\frac{2F_n}{n}, \end{cases}$$

где $C_1(r)$ и $C_2(r)$ — функции r . Это решение имеет вид

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_n = -\frac{F_n}{4n} - \frac{F_n a}{4rn} \left(\cos \frac{a}{r} - \frac{3r}{a} \sin \frac{a}{r} - \frac{3r^2}{a^2} \cos \frac{a}{r} \right) \text{si} \left(\frac{a}{r} \right) + \\ + \frac{F_n a}{4rn} \left(\sin \frac{a}{r} + \frac{3r}{a} \cos \frac{a}{r} - \frac{3r^2}{a^2} \sin \frac{a}{r} \right) \text{Ci} \left(\frac{a}{r} \right), \end{aligned}$$

где

$$\text{si} \left(\frac{a}{r} \right) = \int_{\infty}^{a/r} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \text{Ci} \left(\frac{a}{r} \right) = \int_{\infty}^{a/r} \frac{\cos x}{x} dx.$$

Таким образом, проекция скорости приливных движений в рассматриваемом канале на вертикаль равна

$$\begin{aligned} w_n = W_n \sin 2(nt - \lambda) = (\overline{W}_n + \widetilde{W}_n) \sin 2(nt - \lambda) = \\ = \left[C_1 \left(\cos \frac{a}{r} - \frac{3r}{a} \sin \frac{a}{r} - \frac{3r^2}{a^2} \cos \frac{a}{r} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_2 \left(\sin \frac{a}{r} + \frac{3r}{a} \cos \frac{a}{r} - \frac{3r^2}{a^2} \sin \frac{a}{r} \right) - \frac{F_n}{4n} - \\
& - \frac{F_n a}{4rn} \left(\cos \frac{a}{r} - \frac{3r}{a} \sin \frac{a}{r} - \frac{3r^2}{a^2} \cos \frac{a}{r} \right) \operatorname{Si} \left(\frac{a}{r} \right) + \\
& + \frac{F_n a}{4rn} \left(\sin \frac{a}{r} + \frac{3r}{a} \cos \frac{a}{r} - \frac{3r^2}{a^2} \sin \frac{a}{r} \right) \operatorname{Ci} \left(\frac{a}{r} \right) \sin 2(nt - \lambda).
\end{aligned} \quad (368)$$

Подставив значение w_n в уравнение неразрывности (365) и выполнив элементарные преобразования, находим:

$$\begin{aligned}
v_n &= V_n \cos 2(nt - \lambda) = -r \int \left(\frac{dw_n}{dr} + \frac{2}{r} w_n \right) dr = \\
&= \left\{ -C_1 \left[\left(\frac{a}{2r} - \frac{6r}{a} \right) \sin \frac{a}{r} + \left(\frac{5}{2} - \frac{6r^2}{a^2} \right) \cos \frac{a}{r} \right] - \right. \\
&- C_2 \left[\left(\frac{5}{2} - \frac{6r^2}{a^2} \right) \sin \frac{a}{r} - \left(\frac{a}{2r} - \frac{6r}{a} \right) \cos \frac{a}{r} \right] + \frac{3F_n}{4n} + \\
&+ \frac{F_n a}{8rn} \left[\left(\frac{a}{r} - \frac{12r}{a} \right) \sin \frac{a}{r} + \left(5 - \frac{12r^2}{a^2} \right) \cos \frac{a}{r} \right] \operatorname{Si} \left(\frac{a}{r} \right) - \\
&- \frac{F_n a}{8rn} \left[\left(5 - \frac{12r^2}{a^2} \right) \sin \frac{a}{r} - \left(\frac{a}{r} - \frac{12r}{a} \right) \cos \frac{a}{r} \right] \operatorname{Ci} \left(\frac{a}{r} \right) \Big\} \times \\
&\quad \times \cos 2(nt - \lambda),
\end{aligned} \quad (369)$$

где V_n — амплитуда проекции скорости на параллель.

Используя значение v_n , найдем из уравнения (363) давление P :

$$\begin{aligned}
P &= \left\{ C_1 \frac{Kn}{r} \left[\left(\frac{6r}{a} - \frac{a}{2r} \right) \sin \frac{a}{r} + \left(\frac{6r^2}{a^2} - \frac{5}{2} \right) \cos \frac{a}{r} \right] + \right. \\
&+ C_2 \frac{Kn}{r} \left[\left(\frac{6r^2}{a^2} - \frac{5}{2} \right) \sin \frac{a}{r} - \left(\frac{6r}{a} - \frac{a}{2r} \right) \cos \frac{a}{r} \right] + \frac{5F_n K}{4r} + \\
&+ \frac{F_n K a}{8r^2} \left[\left(\frac{a}{r} - \frac{12r}{a} \right) \sin \frac{a}{r} + \left(5 - \frac{12r^2}{a^2} \right) \cos \frac{a}{r} \right] \operatorname{Si} \left(\frac{a}{r} \right) - \\
&- \frac{F_n K a}{8r^2} \left[\left(5 - \frac{12r^2}{a^2} \right) \sin \frac{a}{r} - \left(\frac{a}{r} - \frac{12r}{a} \right) \cos \frac{a}{r} \right] \operatorname{Ci} \left(\frac{a}{r} \right) \Big\} \times \\
&\quad \times \cos 2(nt - \lambda).
\end{aligned} \quad (370)$$

Постоянные C_1 и C_2 можно найти, используя граничные условия. Одним из них является равенство нулю скорости вертикальных приливных движений на нижней границе канала, расположенной на расстоянии b от центра тела. Это условие выражается уравнением

$$C_1 W_{b1} + C_2 W_{b2} - \frac{F_n b}{4rn} + \frac{F_n a}{4rn} \left[-W_{b1} \operatorname{Si} \left(\frac{a}{b} \right) + W_{b2} \operatorname{Ci} \left(\frac{a}{b} \right) \right] = 0,$$

в котором

$$W_{b1} = \cos \frac{a}{b} - \frac{3b^2}{a^2} \cos \frac{a}{b} - \frac{3b}{a} \sin \frac{a}{b}$$

и

$$W_{b2} = \sin \frac{a}{b} - \frac{3b^2}{a^2} \sin \frac{a}{b} + \frac{3b}{a} \cos \frac{a}{b}.$$

Из приведенного уравнения следует, что

$$C_2 = -C_1 \frac{W_{b1}}{W_{b2}} + \frac{F_n b}{4rn W_{b2}} + \frac{F_n a}{4rn} \frac{W_{b1}}{W_{b2}} \operatorname{si} \left(\frac{a}{b} \right) - \frac{F_n a}{4rn} \operatorname{Ci} \left(\frac{a}{b} \right). \quad (371)$$

На невозмущенной поверхности канала (при $r = R$) давление P_0 равно

$$P_0 = \rho_0 g z_n = \rho_0 g \int \omega_{0n} dt,$$

где ρ_0 и g — плотность и ускорение силы тяготения, соответ-

венно равные $\rho_0 = \frac{K}{R^2}$ и $g = \frac{4\pi f \int_0^R r^2 \frac{K}{r^2} dr}{R^2} = \frac{4\pi f K}{R}$, а z_n и ω_{0n} — отклонение поверхности канала от невозмущенного положения и вертикальная скорость частиц близ этой поверхности. Согласно формуле (368),

$$\omega_{0n} = \left\{ C_1 W_{R1} + C_2 W_{R2} - \frac{F_n R}{4rn} + \right. \\ \left. + \frac{F_n a}{4rn} \left[-W_{R1} \operatorname{si} \left(\frac{a}{R} \right) + W_{R2} \operatorname{Ci} \left(\frac{a}{R} \right) \right] \right\} \sin 2(nt - \lambda),$$

где

$$W_{R1} = \cos \frac{a}{R} - \frac{3R^2}{a^2} \cos \frac{a}{R} - \frac{3R}{a} \sin \frac{a}{R}$$

и

$$W_{R2} = \sin \frac{a}{R} - \frac{3R^2}{a^2} \sin \frac{a}{R} + \frac{3R}{a} \cos \frac{a}{R}.$$

Следовательно,

$$P_0 = \left[-\frac{Kna^2}{4R^3} C_1 W_{R1} - \frac{Kna^2}{4R^3} C_2 W_{R2} + \frac{F_n Ka^2}{16rR^2} + \right. \\ \left. + \frac{F_n Ka^3}{16rR^3} W_{R1} \operatorname{si} \left(\frac{a}{R} \right) - \frac{F_n Ka^3}{16rR^3} W_{R2} \operatorname{Ci} \left(\frac{a}{R} \right) \right] \cos 2(nt - \lambda). \quad (372)$$

С другой стороны, согласно уравнению (370), давление на невозмущенной поверхности канала равно

$$P_0 = \left\{ C_1 Kn \left[\left(\frac{6}{a} - \frac{a}{2R^2} \right) \sin \frac{a}{R} + \left(\frac{6R}{a^2} - \frac{5}{2R} \right) \cos \frac{a}{R} \right] + \right. \\ \left. + C_2 Kn \left[\left(\frac{6R}{a^2} - \frac{5}{2R} \right) \sin \frac{a}{R} + \left(\frac{a}{2R^2} - \frac{6}{a} \right) \cos \frac{a}{R} \right] + \frac{5F_n K}{4r} + \right. \\ \left. + \frac{F_n Ka}{4rR} \left[\left(\frac{a}{2R} - \frac{6R}{a} \right) \sin \frac{a}{R} + \left(\frac{5}{2} - \frac{6R^2}{a^2} \right) \cos \frac{a}{R} \right] \operatorname{si} \left(\frac{a}{R} \right) - \right. \\ \left. - \frac{F_n Ka}{4rR} \left[\left(\frac{5}{2} - \frac{6R^2}{a^2} \right) \sin \frac{a}{R} - \left(\frac{a}{2R} - \frac{6R}{a} \right) \cos \frac{a}{R} \right] \operatorname{Ci} \left(\frac{a}{R} \right) \right\} \times \\ \times \cos 2(nt - \lambda). \quad (373)$$

Используя уравнения (372) и (373) и полученное ранее соотношение (371) между постоянными C_1 и C_2 , путем элементарных преобразований находим, что

$$C_1 = \frac{1}{W_{b2} \left(A \sin \frac{a}{R} + B \cos \frac{a}{R} \right) - W_{b1} \left(B \sin \frac{a}{R} - A \cos \frac{a}{R} \right)} \times \\ \times \left[\frac{F_n b}{4rn} \left(A \cos \frac{a}{R} - B \sin \frac{a}{R} \right) + \frac{F_n a^2}{16R^2 rn} W_{b2} - \frac{5F_n}{4rn} W_{b2} + \right. \\ \left. + \frac{F_n a}{4rn} W_{b2} \left(A \sin \frac{a}{R} + B \cos \frac{a}{R} \right) \operatorname{si} \left(\frac{a}{R} \right) - \right. \\ \left. - \frac{F_n a}{4rn} W_{b1} \left(B \sin \frac{a}{R} - A \cos \frac{a}{R} \right) \operatorname{si} \left(\frac{a}{b} \right) + \right. \\ \left. + \frac{F_n a}{4rn} W_{b2} \left(A \cos \frac{a}{R} - B \sin \frac{a}{R} \right) \operatorname{Ci} \left(\frac{a}{R} \right) + \right. \\ \left. + \frac{F_n a}{4rn} W_{b2} \left(B \sin \frac{a}{R} - A \cos \frac{a}{R} \right) \operatorname{Ci} \left(\frac{a}{b} \right) \right]; \quad (374)$$

$$C_2 = \frac{1}{W_{b2} \left(A \sin \frac{a}{R} + B \cos \frac{a}{R} \right) - W_{b1} \left(B \sin \frac{a}{b} - A \cos \frac{a}{R} \right)} \times \\ \times \left[\frac{F_n b}{4rn} \left(A \sin \frac{a}{R} + B \cos \frac{a}{R} \right) - \frac{F_n a^2}{16R^2 rn} W_{b1} + \frac{5F_n}{4rn} W_{b1} + \right. \\ \left. + \frac{F_n a}{4rn} W_{b1} \left(A \sin \frac{a}{R} + B \cos \frac{a}{R} \right) \operatorname{si} \left(\frac{a}{b} \right) - \right. \\ \left. - \frac{F_n a}{4rn} W_{b1} \left(A \sin \frac{a}{R} + B \cos \frac{a}{R} \right) \operatorname{si} \left(\frac{a}{R} \right) - \right. \\ \left. - \frac{F_n a}{4rn} W_{b1} \left(A \cos \frac{a}{R} - B \sin \frac{a}{R} \right) \operatorname{Ci} \left(\frac{a}{R} \right) - \right. \\ \left. - \frac{F_n a}{4rn} W_{b2} \left(A \sin \frac{a}{R} + B \cos \frac{a}{R} \right) \operatorname{Ci} \left(\frac{a}{b} \right) \right], \quad (375)$$

где

$$A = \frac{6}{a} - \frac{5a}{4R^2} \quad \text{и} \quad B = \frac{6R}{a^2} - \frac{13}{4R} + \frac{a^2}{4R^3}.$$

Таким образом, проекции скоростей приливных движений на вертикаль и параллель в рассматриваемом канале описываются формулами (368) и (369), постоянные C_1 и C_2 в которых определяются формулами (374) и (375). Формулы проекций смещений частиц и ускорений частиц на указанные направления выводятся путем интегрирования и дифференцирования формул (368) и (369) по времени:

$$s_{в. н} = \int w_n dt = -\frac{W_n}{2n} \cos 2(nt - \lambda); \quad (376)$$

$$s_{н. н} = \int v_n dt = \frac{V_n}{2n} \sin 2(nt - \lambda); \quad (377)$$

$$a_{в. н} = \frac{d\omega_n}{dt} = 2nW_n \cos 2(nt - \lambda); \quad (378)$$

$$a_{п. н} = \frac{dv_n}{dt} = -2nV_n \sin 2(nt - \lambda). \quad (379)$$

Отклонение поверхности канала от невозмущенного положения определяется формулой

$$z_n = \int \omega_{0n} dt = \frac{1}{2n} \left\{ -C_1 W_{R1} - C_2 W_{R2} + \frac{F_n R}{4rn} + \right. \\ \left. + \frac{F_n a}{4rn} \left[W_{R1} \operatorname{Si} \left(\frac{a}{R} \right) - W_{R2} \operatorname{Ci} \left(\frac{a}{R} \right) \right] \right\} \cos 2(nt - \lambda). \quad (380)$$

Анализ выведенных формул показывает, что амплитуды проекций всех кинематических характеристик приливов на параллель и вертикаль прямо пропорциональны амплитуде возбуждающей силы и не зависят от географической долготы. Они весьма сложным образом зависят также от расстояния до центра тела и обратно пропорциональны величине

$$W_{b2} \left(A \sin \frac{a}{R} + B \cos \frac{a}{R} \right) - W_{b1} \left(B \sin \frac{a}{R} - A \cos \frac{a}{R} \right),$$

равной

$$\left(\sin \frac{a}{b} - \frac{3b^2}{a^2} \sin \frac{a}{b} + \frac{3b}{a} \cos \frac{a}{b} \right) \left[\left(\frac{6}{a} - \frac{5a}{4R^2} \right) \sin \frac{a}{R} + \right. \\ \left. + \left(\frac{6R}{a^2} - \frac{13}{4R} + \frac{a^2}{4R^3} \right) \cos \frac{a}{R} \right] - \left(\cos \frac{a}{b} - \frac{3b^2}{a^2} \cos \frac{a}{b} - \frac{3b}{a} \sin \frac{a}{b} \right) \times \\ \times \left[\left(\frac{6R}{a^2} - \frac{13}{4R} + \frac{a^2}{4R^3} \right) \sin \frac{a}{R} - \left(\frac{6}{a} - \frac{5a}{4R^2} \right) \cos \frac{a}{R} \right].$$

Если эта величина равна нулю, амплитуды всех кинематических характеристик приливных движений в любой части рассматриваемого канала неограниченно возрастают. Таким образом, явление резонанса может иметь место и в случае приливных движений материи непостоянной плотности.

Фазы всех кинематических характеристик зависят от удвоенной долготы и от знака только что приведенной величины. При перемене ее знака они изменяются на противоположные. Кроме того, фаза любой кинематической характеристики может многократно изменяться на противоположную в вертикальном направлении. Разности фаз проекций одних и тех же характеристик приливных движений на вертикаль и параллель повсеместно равны 90° , т. е. четверти периода приливной волны.

Траектории приливных движений частиц представляют собой эллипсы, расположенные в плоскостях, перпендикулярных меридианам. Оси этих эллипсов ориентированы вдоль вертикалей

и параллелей. Отношение между их длинами равно W_{π}/V_{π} . За время, равное периоду приливной волны, каждая частица совершает полный оборот и возвращается в исходную точку. Поскольку амплитуды проекций смещений частиц на вертикаль и параллель не зависят от долготы, размеры и форма эллипсов в зональном направлении не изменяются. В связи с различной зависимостью только что названных проекций от расстояния до центра тела размеры и форма эллипсов изменяются в вертикальном направлении.

Приливные движения всей массы жидкости или газа в рассматриваемом канале представляют собой поступательную волну с двумя гребнями и двумя подошвами. Расстояние между гребнями (или между подошвами) в угловой мере составляет 180° . Согласно формуле (380), при отрицательном значении амплитуды вертикальной скорости в поверхностном слое гребни находятся на меридианах верхней и нижней кульминации вызывающего прилив светила, а подошвы — на меридианах с часовыми углами 90 и 270° . При положительном значении амплитуды вертикальной скорости гребни поступательных волн расположены на меридианах с только что названными часовыми углами, а подошвы — на меридианах верхней и нижней кульминации светила. Таким образом, исследуемые полусуточные приливы в экваториальном канале, как и приливы на небесных телах постоянной плотности, могут быть как прямыми, так и обращенными.

Видно, что большинство из перечисленных особенностей присуще и полусуточным приливному движениям материи постоянной плотности, происходящим в экваториальном канале под действием тех же сил. Однако приливные движения материи непостоянной плотности имеют два важных отличия. Во-первых, амплитуды кинематических характеристик и условия резонанса и перемены фаз на противоположные определяются соотношением между четырьмя параметрами (R , $b = R - h$, n и K), а не (g , R , h , n), как в случае постоянной плотности, причем это соотношение имеет гораздо более сложный вид, чем в только что названном случае. Во-вторых, амплитуды всех кинематических характеристик приливных движений изменяются в вертикальном направлении в соответствии с весьма сложным законом, зависящим, в частности, от вертикального распределения плотности, причем в этом направлении могут изменяться и фазы смещений, скоростей и ускорений частиц.

Обычно параметр a во много раз превосходит параметр R , а потому аргумент a/R , а следовательно, и аргумент a/r весьма велики. Из-за этого функции $si(a/r)$ и $Ci(a/r)$, равно как и отношения вида r/a и r^2/a^2 имеют чрезвычайно малые значения, и слагаемые, в которые они входят в качестве сомножителей, могут быть исключены из формул проекций кинематических характеристик. После такого упрощения и исключения из формулы

(369) слагаемого $3F_n/4n$, очень малого по сравнению с остальными, формулы (368) и (369) приобретают вид

$$w_n = \left(C_1 \cos \frac{a}{r} + C_2 \sin \frac{a}{r} - \frac{F_n}{4n} \right) \sin 2(nt - \lambda); \quad (381)$$

$$v_n = \frac{a}{2r} \left(-C_1 \sin \frac{a}{r} + C_2 \cos \frac{a}{r} \right) \cos 2(nt - \lambda). \quad (382)$$

Существенно упрощаются и формулы (374) и (375), определяющие постоянные C_1 и C_2 . Они принимают вид

$$C_1 = \frac{-\frac{F_n b}{4rn} \left(\frac{5a}{4R^2} \cos \frac{a}{R} + \frac{a^2}{4R^3} \sin \frac{a}{R} \right) + \frac{F_n a^2}{16R^2 rn} \sin \frac{a}{b}}{\left(-\frac{5a}{4R^2} \sin \frac{a}{R} + \frac{a^2}{4R^3} \cos \frac{a}{R} \right) \sin \frac{a}{b} - \left(\frac{a^2}{4R^3} \sin \frac{a}{R} + \frac{5a}{4R^2} \cos \frac{a}{R} \right) \cos \frac{a}{b}}; \quad (383)$$

$$C_2 = \frac{-\frac{F_n b}{4rn} \left(\frac{5a}{4R^2} \sin \frac{a}{R} - \frac{a^2}{4R^3} \cos \frac{a}{R} \right) - \frac{F_n a^2}{16R^2 rn} \cos \frac{a}{b}}{\left(-\frac{5a}{4R^2} \sin \frac{a}{R} + \frac{a^2}{4R^3} \cos \frac{a}{R} \right) \sin \frac{a}{b} - \left(\frac{a^2}{4R^3} \sin \frac{a}{R} + \frac{5a}{4R^2} \cos \frac{a}{R} \right) \cos \frac{a}{b}}. \quad (384)$$

Анализ приближенных формул (381), (382) и полученных интегрированием и дифференцированием их по времени приближенных формул вертикальных и горизонтальных смещений и ускорений частиц показывает, что в вертикальном направлении фазы кинематических характеристик горизонтальных приливных движений много раз изменяются на противоположные. Количество слоев, в которых они противоположны, уменьшается при увеличении относительной угловой скорости. Толщина этих слоев быстро убывает с глубиной. Амплитуды характеристик вертикальных движений имеют экстремальные значения на горизонтах, разделяющих слои, в которых горизонтальные движения имеют противоположные фазы. Во всех слоях амплитуды кинематических характеристик вертикальных и горизонтальных движений прямо пропорциональны амплитудам возбуждающих сил.

Часть III

ПРИЛИВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ

ГЛАВА 9. ПРИЛИВЫ В МИРОВОМ ОКЕАНЕ

Вследствие очень сложного очертания берегов и рельефа дна Мирового океана кинематические характеристики приливов в нем не могут быть найдены точным аналитическим методом. С помощью этого метода можно определить характеристики приливов лишь в отдельных его районах, отличающихся сравнительно простой формой. К числу таких районов относятся, например, Красное море и его заливы — Суэцкий и Акаба. Приведенные в работах [28 и 29] значения амплитуд и фаз главной лунной полусуточной волны M_2 в этих бассейнах, вычисленные с помощью аналитических формул двухмерных приливных движений в бассейне, сообщаемом с океаном, почти не отличаются от значений, наблюдаемых на берегах. Однако определять точным аналитическим способом характеристики трехмерных приливных движений, происходящих в большинстве районов Мирового океана, невозможно.

Результаты аналитического исследования приливов, изложенные в предыдущей части книги, могут быть использованы главным образом не для определения кинематических характеристик приливных движений в Мировом океане, а для объяснения распределения этих характеристик, получаемых инструментальным способом и путем приближенного решения уравнений гидродинамики.

В настоящее время наиболее распространенным и совершенным способом вычисления амплитуд и фаз приливных колебаний уровня и приливных течений в океанах и морях Земли является метод «краевых значений», созданный Ганzenом [38, 39]. Он основан на приближенном решении систем уравнений гидродинамики, описывающих приливы в отдельных районах, на которые разделен исследуемый водный бассейн. В качестве граничных условий используются данные о колебаниях уровня или

о скоростях течений на границах этого бассейна. С помощью названного метода К. Т. Богдановым и В. А. Магариком [5], С. Л. Пекерисом и У. Аккадом [44], М. Хендершоттом [41] и другими авторами были вычислены амплитуды и фазы колебаний уровня, соответствующих важнейшим полусуточным и суточным приливным волнам M_2 , S_2 , K_1 и O_1 . На основании полученных данных были построены новые карты котидальных линий и изоамплитуд названных волн. Результаты этих исследований подробно описаны в книгах К. Т. Богданова [6], Г. И. Марчука и Б. А. Кагана [21] и в других работах.

Благодаря выполненным расчетам получено большое количество новых данных о приливах в Мировом океане. Однако, как видно из перечисленных работ, вычисления кинематических характеристик полусуточных и суточных приливов в Мировом океане еще не доведены до конца. До настоящего времени не найдены характеристики других фиктивных приливных волн названных классов и не вычислены скорости течений, соответствующих волнам M_2 , S_2 , K_1 и O_1 . Поэтому имеющиеся данные об этих четырех важнейших фиктивных волнах недостаточны для всестороннего изучения принципиальных особенностей каждой из них.

Следует отметить, что с помощью одного и того же метода «краевых значений» разные авторы получили в одних и тех же районах Мирового океана неодинаковые характеристики колебаний уровня, соответствующие каждой из перечисленных фиктивных волн. В работе [21] сделана попытка сравнить результаты расчетов, приведенные в шести различных работах. В качестве критериев, выбранных для сравнения, использованы наличие амфидромий, т.е. небольших районов океана, в которых отсутствуют колебания уровня, положения центров этих амфидромий и направления перемещения котидальных линий в областях, окружающих амфидромии. Естественно, что эти критерии весьма неполно отражают принципиальные черты распределения характеристик той или иной фиктивной волны в Мировом океане или в его части. Для более точного сопоставления результатов, полученных разными авторами, требуется сравнить найденные ими характеристики в каждом районе, на которые разделен исследуемый водный бассейн. Представляется интересным также сравнение значений потенциальной энергии каждой приливной волны в этом бассейне. Однако даже использование упомянутых ранее критериев показало, что результаты расчетов, приведенные в разных работах, далеко не тождественны. Например, значения широт и долгот, на которых, по мнению различных авторов, находится центр амфидромической области в северной части Атлантического океана, заключаются в пределах от 38 до 52° N и от 39 до 53° W , а значения широт и долгот центра амфидромической области в северо-восточной части Тихого океана — в пределах от 17 до 43° N и от 121 до 168° W . Бо-

лее того, некоторые авторы отмечают наличие амфидромических областей в отдельных районах Мирового океана (в северо-западной, юго-западной и юго-восточной частях Тихого океана, в южном океаническом кольце, окружающем Антарктиду, в Карибском и Аравийском морях, в Бенгальском заливе и т. д.), в которых, согласно данным других авторов, эти области отсутствуют.

Из выведенной Ганzenом [38] формулы для вычисления характеристик приливных колебаний уровня в отдельных районах видно, что эти характеристики в весьма большой степени зависят от средних глубин каждого из них и от средних глубин окружающих его районов. Однако в большинстве работ, посвященных расчету амплитуд и фаз приливных колебаний уровня, значения средних глубин отдельных районов не приводятся, что не позволяет сравнить исходные данные, использованные различными авторами при вычислениях. Возможно, что различия в этих данных, а также в данных о колебаниях уровня на границах водных бассейнов и явились причиной разных результатов, полученных отдельными авторами.*

Наряду с этим, приведенные во всех работах распределения характеристик приливных колебаний уровня в Мировом океане, соответствующих фиктивным волнам M_2 , S_2 , K_1 и O_1 , имеют общие особенности. Важнейшие из них заключаются в следующем:

- в большинстве районов Мирового океана амплитуды главной лунной полусуточной волны M_2 значительно превышают амплитуды главной солнечной полусуточной волны S_2 и амплитуды суточных волн K_1 и O_1 ;

- амплитуды полусуточных волн имеют наибольшие значения в тропической зоне всех океанов и в прибрежных районах. Даже в удаленных от берегов районах прилегающей к экватору области Атлантического океана амплитуды волны M_2 близки к 1 м;

- амплитуды суточных волн имеют наибольшие значения в прибрежных районах и в зоне умеренных широт;

- части Мирового океана со значительными амплитудами любой фиктивной волны отделены друг от друга амфидромическими областями, как правило, расположенными на большом удалении от берегов;

- отношение между суммой амплитуд суточных волн и суммой амплитуд полусуточных (или амплитудой волны M_2), служащее критерием для определения типов приливных колебаний уровня, существенно изменяется как в зональном, так и в меридианном направлениях, и распределение типов колебаний уровня в Мировом океане отличается большой сложностью.

Скорости приливных течений в нескольких районах Атлантического океана, вычисленные с помощью уравнений движения по данным о приливных колебаниях уровня, заключаются

* Наряду с этим различие результатов расчетов приливных характеристик у разных авторов объясняется разными способами учета диссипативных эффектов, разными граничными условиями и способами задания параметров, входящих в уравнения. — *Прим. ред.*

в пределах от нескольких миллиметров до нескольких сантиметров в секунду.

Изменение амплитуд фиктивных приливных волн в меридианном направлении в целом соответствует изменению проекций на параллель и меридиан приливообразующих сил, возбуждающих эти волны и действующих на столбики воды, высота которых равна расстоянию от поверхности до дна. Как уже отмечалось, амплитуды силы, возбуждающей волну M_2 , гораздо больше амплитуд сил, возбуждающих другие фиктивные приливные волны, что и является главной причиной преобладания лунных полусуточных приливов над солнечными полусуточными и над суточными приливами, вызываемыми действиями обоих светил. Представляется, что другие отмеченные особенности могут быть объяснены путем представления океанских приливов как результата сложения зональных и меридианных волн, первые из которых вследствие расчленения Мирового океана материками по форме скорее всего ближе к стоячим, чем к поступательным. Для этого реальное отклонение (z) уровня в каждом районе океана, соответствующее какой-либо фиктивной волне, должно быть записано в виде $z = z_{\Pi} + z_M$, где z_{Π} и z_M — отклонения уровня, соответствующие движениям вдоль параллелей и меридианов и определяемые формулами $z_{\Pi} = - \int \left[\frac{1}{R \cos \varphi} \frac{\partial (hv)}{\partial \lambda} \right] \times$
 $\times dt$ и $z_M = \int \left[- \frac{1}{R} \frac{\partial (hu)}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} hu \operatorname{tg} \varphi \right] dt$, которые выводятся из уравнения неразрывности (103). Однако для выполнения такого анализа необходимо знать проекции (v и u) скоростей течений на параллель и меридиан в каждом районе Мирового океана или исследуемой его части.

Очень сложное распределение типов приливных колебаний уровня в океанах и окраинных морях и часто отмечаемое несоответствие типов колебания уровня и течений в одних и тех же районах скорее всего является следствием зависимости расположения областей стоячих волн, в которых вертикальные смещения частиц либо отсутствуют, либо имеют очень малые значения, и областей с максимальными скоростями течений от периода волны. Наличие даже незначительных суточных вертикальных смещений частиц в областях, в которых полусуточные вертикальные смещения равны нулю, а горизонтальные весьма велики, обуславливает существование в них суточного типа приливных колебаний уровня, тогда как течения относятся к полусуточному типу. Этот эффект затрудняет объяснение особенностей приливов в Мировом океане. Очевидно, что анализируя океанские приливы, правомерно сопоставлять условия существования приливных колебаний различных периодов в каждом районе с типом самого приливного колебания, а не с типами приливных колебаний уровня и приливных течений в отдельности. Как показано в работе [27], чтобы выполнить такое сопостав-

ление, целесообразно определить типы приливных колебаний в каждом районе, используя отношения суммарной потенциальной и кинетической энергий суточных волн к суммарной потенциальной и кинетической энергии главной лунной полусуточной волны. Однако для определения типов приливных колебаний по их энергии, как и для объяснения распределения характеристик фиктивных волн, необходимы отсутствующие в настоящее время данные о скоростях приливных течений в отдельных районах.

Наименее изученным классом приливов в Мировом океане является долгопериодный. Это объясняется тем, что большие периоды приливов названного класса затрудняют определение гармонических постоянных долгопериодных волн в прибрежных районах и особенно в районах, удаленных от берегов. В настоящее время количество пунктов, в которых известны гармонические постоянные фиктивных волн полусуточного и суточного классов, в несколько десятков раз превосходит число пунктов, в которых известны гармонические постоянные основных долгопериодных волн. Поэтому вычисление характеристик последних в океанах методом «краевых значений» по данным о долгопериодных колебаниях уровня на берегах невозможно.

Амплитуды и фазы лунной полумесечной волны (M_f) в отдельных районах Атлантического, Тихого и Индийского океанов были вычислены с помощью метода «краевых значений» Б. А. Каганом, В. Я. Ривкиным и П. К. Черняевым [15], использовавшими в качестве граничного условия так называемое условие прилипания, т. е. отсутствие движения воды в прибрежных районах в направлениях, параллельных берегам. На основании полученных данных ими были построены карты распределения фаз этой волны и распределения отношений амплитуд вычисленных и статических приливов. Сравнение приведенных в работе [15] значений только что названных характеристик, полученных путем вычислений и путем обработки наблюдений в 13 пунктах в тропической зоне Тихого океана, показывает, что вычисленные величины весьма значительно отличаются от наблюдаемых. Наиболее вероятной причиной этого расхождения является использование авторами условия прилипания, не существующего в Мировом океане.* Вследствие введения его при каждой итерации все вычисленные кинематические характеристики прилива должны быть меньше реальных, что и следует из сравнения вычисленных и наблюдаемых амплитуд колебаний уровня в большинстве пунктов.

Глубокое исследование долгопериодных приливов в Мировом океане выполнено И. В. Максимовым [19, 20 и т. д.]. На основании детального анализа материалов натурных наблюдений И. В. Максимов пришел к выводу, что кинематические

* Условие прилипания для вязкой жидкости является общепринятым и является естественным для океанических условий.— *Прим. ред.*

характеристики приливов рассматриваемого класса имеют наибольшие значения в высоких широтах.

В предыдущей части книги было показано, что на вращающемся вокруг оси жидком небесном теле отношение проекций скоростей долгопериодного приливного движения на параллель к проекциям их на меридиан имеет такой же порядок, как отношение угловой скорости вращения тела к циклической частоте долгопериодной волны. Используя это положение, путем логических рассуждений можно заключить, что в широтных зонах Мирового океана, окружающих весь земной шар, проекции скоростей долгопериодных течений на параллель должны во много раз превосходить проекции скоростей на меридиан. Такими зонами Мирового океана являются южное океанское кольцо и Северный Ледовитый океан. Думается, что зональные составляющие скорости приливных течений рассматриваемого класса особенно велики в океанском кольце, в котором, как видно из рис. 21 и 22, амплитуды долгопериодных приливообразующих сил, действующих на столбики воды с высотой, равной расстоянию от поверхности до дна, достигают наибольших значений.

Приведенное рассуждение подтверждает изложенный выше вывод И. В. Максимова и правильность его воззрений на долгопериодные приливы, как на одну из причин изменения дрейфа льда, смещения фронтальных зон и других важных океанографических явлений в высоких широтах Земли.

Как показало исследование В. В. Ионова [13], долгопериодные приливы, вызываемые действием Луны, являются главной причиной полумесячных и месячных изменений уровня у тихоокеанского побережья Японии. Это свидетельствует о влиянии приливов долгого периода на океанографические условия не только в областях высоких широт, но и в других зонах океанов.

Для количественной оценки влияния долгопериодных приливов на изменение режима Мирового океана необходимо знать их кинематические характеристики и в первую очередь скорости течений в областях высоких широт. Определение этих скоростей представляет собой важную, не решенную до настоящего времени задачу океанографии.

ГЛАВА 10. ПРИЛИВЫ НА ПЛАНЕТАХ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ. ВЛИЯНИЕ ПРИЛИВОВ НА ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕТ

Использование формул кинематических характеристик приливных движений, происходящих на жидких небесных телах под действием приливообразующей силы, силы, вызываемой градиентом давления, и силы Кориолиса, позволяет установить поря-

док величин приливов на жидких планетах.* В табл. 22 приве-

$$\text{дены вычисленные по формуле } 2Z_{\Pi} = \frac{\frac{1}{2} F_{\text{оп}}}{-\frac{2}{3} \pi f \rho + \alpha (\omega - \alpha)} \text{ удвоен-}$$

ные амплитуды полусуточных приливов, которые наблюдались бы в экваториальных частях восьми планет Солнечной системы в том случае, если бы каждая из них была жидкой, причем плотность жидкости была бы равной средней плотности реальной планеты, а вязкость — равной нулю. При вычислениях использовались средние расстояния между центрами Солнца и планет и значения средней плотности, экваториальных радиусов и периодов вращения и обращения, приведенные в работах [2 и 3]. Амплитуды полусуточных приливов на Плуtone не определялись из-за отсутствия точных данных о размерах этой планеты.

Таблица 22

Удвоенные амплитуды полусуточных приливов в экваториальных частях планет, вычисленные при использовании изложенных в тексте допущений

Планета	$d_{\text{ср}} \cdot 10^{-12}$ см	$R_{\text{эк}} \cdot 10^{-8}$ см	$\frac{3}{2} f \frac{MR}{d^3}$ см/с ²	$\rho_{\text{ср}}$ г/см ³	$\omega \cdot 10^5$ с ⁻¹	$\alpha \cdot 10^5$ с ⁻¹	$\alpha (\omega - \alpha) \cdot 10^{13}$ с ⁻²	$\frac{2}{3} \pi f \rho \cdot 10^7$ с ⁻²	$2Z_{\Pi}$ см
Меркурий	0,579	2,437	$2,49 \cdot 10^{-4}$	5,5	0,124	0,083	3,40	7,67	161,7
Венера	1,081	6,056	$9,49 \cdot 10^{-5}$	5,2	-0,030	0,032	-1,98	7,25	65,4
Земля	1,495	6,378	$3,78 \cdot 10^{-5}$	5,5	7,290	0,020	145,0	7,67	24,7
Марс	2,278	3,386	$5,67 \cdot 10^{-6}$	3,9	7,080	0,0106	75,0	5,44	5,1
Юпитер	7,778	71,400	$3,07 \cdot 10^{-6}$	1,3	17,730	0,0017	30,1	1,81	8,5
Сатурн	14,261	60,400	$4,12 \cdot 10^{-7}$	0,7	17,050	0,0007	11,9	0,98	2,1
Уран	28,691	24,890	$1,04 \cdot 10^{-8}$	1,6	-16,130	0,000238	-3,68	2,23	0,0
Нептун	44,957	24,500	$5,34 \cdot 10^{-9}$	1,7	11,040	0,000121	1,34	2,37	0,0

Поскольку угловые скорости вращения и обращения Венеры и Урана противоположны, величины $\alpha (\omega - \alpha)$ у этих планет отрицательные. Однако, как и у всех остальных планет, они ничтожно малы по сравнению с величинами $\frac{2}{3} \pi f \rho$. Поэтому на всех планетах условия возникновения резонанса полусуточных приливов отсутствуют и приливы этого класса являются прямыми, причем значения их амплитуд очень близки к статическим. Этот вывод справедлив и для суточных и долгопериодных приливов на всех планетах Солнечной системы.

* Приливные движения на жидких небесных телах, вероятно, должны существенно зависеть от плотностной стратификации и электромагнитных эффектов.— Прим. ред.

Вследствие перемещений материи, вызываемых полусуточными приливными движениями, планета принимает форму тела, все точки поверхности которого удалены от центра на расстоя-

ние $R+z_p$, т. е. на $R + \frac{\frac{1}{4} F_{оп} \cos^2 \varphi}{\frac{2}{3} \pi f \rho + \alpha (\omega - \alpha)} \cos 2T$, причем боль-

шая ось этого тела совпадает с линией, проходящей через центры Солнца и планеты. Следовательно, часть массы планеты занимает более близкое к Солнцу положение по сравнению с тем, какое она занимала при отсутствии полусуточных приливов, а равная ей часть массы, наоборот, находится в большем удалении от Солнца. Поскольку сила притяжения каждой частицы планеты обратно пропорциональна квадрату расстояния до центра Солнца, такое изменение расположения массы увеличивает общую силу притяжения планеты. В результате этого планета приобретает дополнительное ускорение, всегда направленное в сторону Солнца. Это ускорение представляет собой причину очень медленного изменения некоторых параметров орбиты планеты и скорости обращения ее вокруг Солнца.

ГЛАВА 11. ПРИЛИВЫ НА СОЛНЦЕ И ИХ ВЛИЯНИЕ НА СОЛНЕЧНУЮ АКТИВНОСТЬ И СОЛНЕЧНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Несомненно, что исследование солнечно-земных связей имеет решающее значение для установления конкретных причин изменения режима Мирового океана и климата Земли. Многие аспекты этой центральной проблемы геофизики освещены в работах [19, 20, 30 и т. д.]. Важной стороной данной проблемы являются вопросы, которые связаны с приливами на Солнце, вызываемыми действием планет.

Первая научная концепция, объясняющая постоянно наблюдаемую одиннадцатилетнюю цикличность численности солнечных пятен — показателя солнечной активности, была выдвинута в 1900 г. американским астрономом Брауном [34]. Согласно этой концепции, главной причиной изменения количества солнечных пятен являются приливы на Солнце, вызываемые Меркурием, Венерой, Землей, Юпитером и Сатурном. Путем совместного анализа количества пятен и амплитуд действующих на Солнце приливообразующих сил Юпитера и Сатурна в 1600—1900 гг. Браун получил убедительные подтверждения правильности этого положения. Он показал, что число солнечных пятен зависит также и от действия приливообразующих сил трех других на-

званных планет. Тем самым было создано новое направление изучения солнечной активности.

В последнее десятилетие идея Брауна была поддержана другими исследователями. В частности, в 1967 г. Е. К. Биг [33] путем статистического анализа цюрихских ежедневных чисел солнечных пятен (чисел Вольфа) за 1850—1960 гг. показал, что в изменении их есть слабо выраженная, но постоянно существующая периодичность, равная периоду обращения Меркурия вокруг Солнца. В нашей стране концепция Брауна была поддержана и развита И. В. Максимовым [19, 20 и т. д.]. Однако и в настоящее время она не является общепризнанной. Главное возражение против нее заключается в том, что действующие на Солнце приливообразующие силы планет очень малы и не могут вызвать сколь-либо значительных движений. Например, М. Трелли [46] установил, что максимальная амплитуда статического прилива на Солнце, вызываемого всеми планетами Солнечной системы, не превосходит 1 мм. Однако для изучения влияния приливных движений на солнечную активность необходимы данные не о статических, а о реальных приливах.

В связи с тем, что выполнение инструментальных наблюдений за приливами на Солнце в настоящее время неосуществимо, а отсутствие данных наблюдений исключает возможность определения характеристик этих приливов численными методами, определение порядка величин кинематических характеристик может быть сделано только аналитическим способом. При решении этой задачи необходимо принимать во внимание изменение плотности Солнца в вертикальном направлении.

Согласно современным данным [3 и т. д.], плотность Солнца изменяется по вертикали в весьма больших пределах: приблизительно от 150 г/см^3 в центре звезды до значения менее $0,001 \text{ г/см}^3$ близ поверхности. Вертикальное распределение плотности (ρ) во всех частях Солнца, кроме центральной, в первом приближении можно выразить формулой $\rho = K/r^2$, в которой K — константа, равная $2,28 \cdot 10^{21} \text{ г/см}$, а r — расстояние от центра светила. При таком распределении плотности значения ее в отдельных слоях имеют тот же порядок, что и значения, полученные в соответствии с современными представлениями о внутреннем строении Солнца, а масса светила ($1,99 \cdot 10^{33} \text{ г}$) и ускорение силы тяготения на его поверхности ($27\,400 \text{ см/с}^2$) не отличаются от известных из астрономии значений.

Как уже отмечалось, угловая скорость вращения верхнего слоя Солнца зависит от гелиографической широты. Поэтому в настоящее время представляется возможным находить кинематические характеристики приливов только в узких широтных зонах, угловая скорость вращения в каждой из которых предполагается постоянной величиной. Наибольшее практическое значение имеют данные о приливах в экваториальной зоне Солнца, ибо, как отметил Миланкович [22], на Землю поступает

радиация, излучаемая областью светила, расположенной между гелиографическими широтами $7^{\circ}10' \text{ N}$ и $7^{\circ}10' \text{ S}$.

В табл. 23 приведены значения относительных угловых скоростей (n) вращения экваториальной части Солнца и обращения планет, параметров a ($a = \frac{2}{n} \sqrt{2\pi f K}$) и отношений ($\frac{a}{R}$) этих параметров к радиусу (R) Солнца. Видно, что отношения $\frac{a}{R}$ (а следовательно, и $\frac{a}{r}$) весьма велики, а потому, чтобы найти порядок величин скоростей вертикальных и зональных полусуточных движений в экваториальной части Солнца, можно использовать формулы (381) — (384).

Таблица 23

Значения величин n , a , $\frac{a}{R}$, C_1 , C_2 , используемых для вычисления кинематических характеристик полусуточных приливных движений в экваториальной части Солнца

Планета	$n \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$	$a \cdot 10^{-13} \text{ см}$	a/R	$C_1 \cdot 10^3 \text{ см/с}$	$C_2 \cdot 10^3 \text{ см/с}$
Меркурий	2,087	2,96	$425,29 =$ $= 67 \cdot 2\pi + 4,32$	-1,032	-1,116
Венера	2,592	2,38	$341,95 =$ $= 54 \cdot 2\pi + 2,66$	-2,655	0,474
Земля	2,716	2,28	$327,59 =$ $= 52 \cdot 2\pi + 0,86$	0,744	0,848
Юпитер	2,899	2,13	$306,03 =$ $= 48 \cdot 2\pi + 4,44$	1,609	-2,930
Сатурн	2,909	2,12	$304,60 =$ $= 48 \cdot 2\pi + 3,01$	-0,120	-0,036

В табл. 23 даны также значения постоянных C_1 и C_2 , вычисленные по формулам (383) — (384) при условии, согласно которому расстояние (b) между центром Солнца и границей его центральной части, в которой приливные движения не происходят, равно одной десятой радиуса светила.

В табл. 24 приведены амплитуды ($Z_{\text{ст}}$) полусуточных статических приливов в экваториальной части Солнца и некоторые характеристики полусуточных приливов, рассматриваемых как динамический процесс, — максимальные амплитуды ($S_{\text{в}}$) вертикальных смещений частиц в верхнем слое, максимальные амплитуды ($V_{\text{г. в.}}$, $V_{\text{г. н.}}$, $S_{\text{г. в.}}$, $S_{\text{г. н.}}$) горизонтальных скоростей и смещений частиц в верхнем и нижнем слоях, количество (N) слоев с противоположными фазами приливных движений и толщины ($H_{\text{в}}$ и $H_{\text{н}}$) верхнего и нижнего слоя.

Таблица 24

Величины, характеризующие статический и динамический полусуточные приливы в экваториальной части Солнца

Планета	$Z_{ст}$ см	S_B см	$V_{г. в}$ см/сек	$V_{г. н}$ см/сек	$S_{г. в}$ м	$S_{г. н}$ м	N	H_B км	H_N км
Меркурий	0,015	702	0,32	3,23	776	7739	1219	5100	60
Венера	0,034	1016	0,46	4,61	895	8897	981	6300	64
Земля	0,016	414	0,19	1,85	342	3400	939	6500	68
Юпитер	0,036	988	0,52	5,11	888	8815	878	7000	72
Сатурн	0,016	39	0,02	0,19	33	327	874	7100	72

Приведенные числа показывают, что полусуточные приливные движения происходят почти во всей толще экваториальной части Солнца, причем скорости горизонтальных движений имеют порядок от нескольких миллиметров до нескольких сантиметров в секунду, т. е. такой же, как и приливные течения в удаленных от берегов районах океанов Земли. Амплитуды реальных вертикальных смещений частиц в верхнем слое светила на 4—5 порядков больше, чем амплитуды статических приливов.

Анализ формул (381)—(384) с учетом конкретных значений входящих в них параметров показал, что скорости приливных движений в слое между поверхностью и каким-нибудь горизонтом почти не зависят от параметра b . Поэтому принципиальные выводы о полусуточных приливах в экваториальной области Солнца остаются в силе и при ином расположении поверхности, ограничивающей центральную часть светила, в которой приливные движения не происходят. Полученные результаты опровергают изложенное ранее возражение против концепции Брауна.

Согласно современным представлениям [30 и т. д.], повышение солнечной активности сопровождается усилением корпускулярного излучения Солнца, что оказывает влияние главным образом на процессы в верхних слоях атмосферы Земли. Не умаляя значимости этого эффекта, следует отметить и другое воздействие приливов на Солнце на климат нашей планеты. Как известно, температура Солнца изменяется примерно от 15 000 000 К в центре светила до 6000 К на его поверхности. Среднее значение ее вертикального градиента (около 21,5 град/км) очень велико. Поэтому перемешивание солнечного газа, вызываемое приливными движениями почти во всей толще светила, повышает температуру в его фотосфере.

Согласно закону Стефана—Больцмана, эффективное излучение любого тела прямо пропорционально четвертой степени его абсолютной температуры. Изменение температуры газа в фотосфере, вызываемое приливными движениями, влияет на интенсивность солнечного излучения и тем самым обуславливает вариации солнечной постоянной. Логично считать, что температура

фотосферы Солнца, близкая к 6000 К,— это температура, имеющая место при средних скоростях приливных движений. Увеличение или уменьшение их скоростей приводит к повышению или к понижению температуры фотосферы и интенсивности излучения. Изменение температуры фотосферы на 15 К обуславливает изменение интенсивности излучения, а следовательно, и солнечной постоянной, на один процент. Представляется, что этот эффект оказывает большее влияние на процессы и явления в Мировом океане и в атмосфере Земли, чем изменение корпускулярного излучения Солнца.

Очевидно, что поступающая на Землю радиация зависит как от приливообразующих сил, действующих на Солнце, так и от фаз приливов в части фотосферы, расположенной близ линии, проходящей через центры Солнца и Земли. Учет этих факторов дает возможность установить тенденцию изменений интенсивности солнечной радиации, вызываемых приливами на Солнце.

Исследования М. И. Будыко [7 и т. д.] показали, что даже сравнительно небольшая вариация солнечной постоянной вызывает резкие изменения климата. Так, уменьшение прихода солнечной энергии всего на два процента от существующего в настоящее время должно привести к полному оледенению Земли, а увеличение его на несколько десятых процента — к таянию полярных льдов и к значительному изменению климата высоких и умеренных широт. В соответствии с этим положением, даже значительно меньшие изменения поступления солнечной радиации могут вызывать существенные вариации гидрологических и метеорологических условий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные в книге результаты дают возможность сделать выводы о перспективах использования аналитического метода изучения приливов.

Выведенные формулы кинематических характеристик двумерных приливных движений в каналах и трехмерных движений в покрывающем Землю океане и на жидких небесных телах, а также приливных движений материи непостоянной плотности, имеют вид элементарных функций. Это облегчает их анализ и позволяет установить принципиальные особенности изучаемого явления.

Для описания приливных движений во всех случаях, рассмотренных в книге, не были использованы очень многие элементарные функции и их комбинации. Можно предположить, что решения систем дифференциальных уравнений движения и неразрывности, описывающих приливные движения, которые про-

исходят при еще более сложных и близких к реальным условиям, также имеют вид элементарных функций. Такое предположение частично подтверждается тем, что упомянутый вид имеют решения не приведенных в книге систем уравнений, описывающих приливы, которые происходят при более сложных условиях, например, при действии силы трения. Это свидетельствует о целесообразности и перспективности использования точного аналитического метода для дальнейшего изучения приливных движений.

Следует также отметить, что в настоящее время аналитический метод является единственным способом определения характеристик приливов на Солнце и на планетах Солнечной системы.

Созданный Ньютоном и развитый Эри, Дарвином, Дудсоном и другими выдающимися геофизиками аналитический метод исследования приливов несомненно является мощным и эффективным средством изучения этого явления природы. Он может быть с успехом использован и для изучения других процессов в Мировом океане.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астрономический календарь СССР.
2. Астрономический календарь. Постоянная часть. Изд. 5-е.— М.: Физматгиз, 1962.
3. Бакулин П. И., Кононович Э. В., Мороз В. И. Курс общей астрономии.— М.: Наука, 1970.
4. Березкин В. А. Динамика моря.— Свердловск—Ленинград: Гидрометеиздат, 1947.
5. Богданов К. Т., Магарик В. А. Численное решение задачи о распространении полусуточных приливных волн (M_2 и S_2) в Мировом океане.— ДАН СССР, 1967, т. 172, № 6.
6. Богданов К. Т. Приливы Мирового океана.— М.: Наука, 1975.
7. Бudyко М. И. Влияние человека на климат.— Л.: Гидрометеиздат, 1972.
8. Вентцель М. К. Основы теоретической астрономии.— М.: Геодезиздат, 1962.
9. Дарвин Дж. Г. Приливы и родственные им явления в солнечной системе. Пер. с англ.— Москва—Петроград, 1923.
10. Дитрих Г., Калле К. Общее мореведение. Пер. с нем.— Л.: Гидрометеиздат, 1961.
11. Дорфман Я. Г. Всемирная история физики с древнейших времен до конца XVIII века.— М.: Наука, 1974.
12. Зубов Н. Н. Динамическая океанология.— Л.: Гидрометеиздат, 1947.
13. Ионов В. В. О происхождении полумесячных и месячных периодичностей в колебаниях уровня моря в северо-западной части Тихого океана.— Изв. ВГО, 1976, т. 108, вып. 3.
14. Исследование приливных явлений в неоднородном море/ В. М. Альтшулер, Л. В. Антропова, В. Г. Бухтеев и др.— Л.: Гидрометеиздат, 1965.
15. Каган Б. А., Ривкинд В. Я., Черняев П. К. Двухнедельные лунные приливы в Мировом океане.— Изв. АН СССР, 1976, т. 12, № 4.
16. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика.— М.: Гостехиздат, 1955.
17. Кулеш В. П., Ржонсницкий В. Б. О приливных движениях материн непостоянной плотности.— Вестник ЛГУ, 1977, № 24.
18. Лякомб А. Физическая океанография. Пер. с франц.— М.: Мир, 1974.
19. Максимов И. В. Геофизические силы и воды океана.— Л.: Гидрометеиздат, 1970.
20. Максимов И. В. Ритмы океана.— Изв. ВГО, 1974, т. 106, вып. 6.
21. Марчук Г. И., Каган Б. А. Океанские приливы.— Л.: Гидрометеиздат, 1977.
22. Миланкович М. Н. Математическая климатология и астрономическая теория колебания климата. Пер. с нем.— М.; Л.: ГОНТИ, 1939.
23. Морской астрономический ежегодник.
24. Некрасов А. В. Приливные волны в окраинных морях.— Л.: Гидрометеиздат, 1975.

25. Никитин М. В. Гармонический анализ приливов.— Л., 1925.
26. Ржонсницкий В. Б., Лямзин О. М. Расчет и картирование величин приливообразующих сил.— Вестник ЛГУ, 1964, № 12.
27. Ржонсницкий В. Б. Определение типов приливных колебаний по их энергии.— Труды ЛГМИ, 1967, вып. 24.
28. Ржонсницкий В. Б. Проблемы каналовой теории приливов.— Л.: Гидрометеониздат, 1973.
29. Ржонсницкий В. Б., Бибик В. А. Аналитическое определение характеристик главной лунной полусуточной волны M_2 в Красном море.— Труды АзЧерНИРО, 1970, т. 30.
30. Солнечно-атмосферные связи (сб. статей).— Л.: Гидрометеониздат, 1974.
31. Шокальский Ю. М. Океанография.— Петроград, 1917.
32. Airy G. B. Tides and waves.— Encyclopedia Metropolitana, Part V. London, 1842.
33. Bigg E. K. Influence of the planet Mercury on sunspots.— The Astronomical J., 1967, 72, N 4.
34. Brown E. W. A possible explanation of the sunspot period.— Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, LX, Supplementary number. 1900.
35. Comrie L. J. Planetary co-ordinates for the years 1800—1940 referred to the equinox of 1950, London, 1933; for the years 1940—1960, London, 1939; for the years 1960—1980, London, 1958.
36. Darwin G. H. Scientific Papers. Vol. 1.— Cambridge University Press, 1907.
37. Doodson A. T. and Warburg H. D. Admiralty manual of tides.— London, 1941.
38. Hansen W. Die halbtägigen Gezeiten im Nordatlantischen Ozean.— Dtsch. Hydr. Ztschr., 1949, Bd. 2, H. 1/2/3.
39. Hansen W. Gezeiten und Gezeitenströme der halbtägigen Hauptmondtide M_2 in der Nordsee.— Dtsch. Hydr. Ztschr., Hamburg, 1952.
40. Heaps N. S. Some notes on tidal theory and its possible relevance to a program of deep-sea tidal measurement.— Dtsch. Hydr. Ztschr., Jahrgang 22, 1969.
41. Hendershott M., Munk W. Tides.— Scripps Institute of Oceanography, La Jolla, California, 1970.
42. Laplace P. S. Mécanique Céleste.— Paris, 1799.
43. Newton I. Philosophiae naturalis principia mathematica.— London, 1687.
44. Pekeris C. L., Accad Y. Solution of Laplace's equations for the M_2 tide in the World Ocean.— Philos. Trans. Roy. Soc., 1969, A-265, London.
45. Thomson and Tait. Natural philosophy.— 1883.
46. Trellis M. Mareés solaires d'origine planétaire.— C. R. Acad. Science Paris, 1966.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
ЧАСТЬ I. ВАЖНЕЙШИЕ СИЛЫ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ КОТОРЫХ ПРОИСХОДЯТ ПРИЛИВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ	
Глава 1. Приливообразующая сила	10
Глава 2. Движение частиц, вызываемое приливообразующей силой.	76
Глава 3. Сила, вызываемая градиентом давления, и сила Кориолиса	99
ЧАСТЬ II. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРИЛИВНЫХ ДВИЖЕНИЙ	
Глава 4. Общие закономерности приливов	109
Глава 5. Двухмерные приливные движения	115
Глава 6. Трехмерные приливные движения	161
Глава 7. Потенциальная и кинетическая энергия приливов	214
Глава 8. Особенности приливных движений жидкой и газообразной материи непостоянной плотности	221
ЧАСТЬ III. ПРИЛИВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ	
Глава 9. Приливы в Мировом океане	229 ✓
Глава 10. Приливы на планетах Солнечной системы. Влияние приливов на движение планет	234
Глава 11. Приливы на Солнце и их влияние на солнечную активность и солнечное излучение	236
Заключение	240
Список литературы	242

Виктор Борисович Ржонсницкий

ПРИЛИВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

Редактор З. И. Мироненко. Художник В. В. Бабанов.
Художественный редактор В. В. Быков. Технический редактор Л. М. Шишкова.
Корректор Т. В. Алексеева

ИБ № 509

Сдано в набор 21.04.79. Подписано в печать 19.11.79. М-13243. Формат 60×90¹/₁₆, бумага тип.
№ 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Печ. л. 15,25. Уч.-изд. л. 17,23. Тираж
1100 экз. Индекс ОЛ-290. Заказ № 294. Цена 2 руб. 40 коп.
Гидрометеиздат. 199053. Ленинград. 2-я линия, д. 23

Ленинградская типография № 8 ЛПО «Техническая книга» Союзполиграфпрома при
Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
190000, Ленинград, Прачечный пер., 6.

