В. П. Рогунович

Автоматизация математического моделирования движения воды и примесей в системах водотоков

ЛЕНИНГРАД ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ 1989

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук А. Ф. Воеводин,
канд. техн. наук Л. И. Розенберг

Описаны теоретические основы и технология автоматизации создания следующих одномерных математических моделей: систем искусственных и естественных водотоков, в том числе с поймами; процессов установившегося, неустановившегося плавно изменяющегося движения воды и примесей в системах водотоков. Технология реализована в комплексе программ, который значительно ускоряет, упрощает и удешевляет моделирование.

Приведены примеры моделирования, даны оценки достоверности определения параметров моделей и характеристик процессов, рассмотрены современные и перспективные приложения методов и средств автоматизации моделирования.

Книга предназначена для специалистов, работающих в научных, проектных и производственных организациях в области гидрологии, гидротехники, гидравлики, водного, сельского, рыбного хозяйства, рекреации и т. п.

In the book "Automatization of mathematical modelling of flow and substance transport in the water-stream systems" by V. P. Rogounovich the theoretical fundamentals and technologies of automatized development of one-dimensional models are discussed. These are the following models: the systems of natural and man-made watercourses including flood-plains; the processes of stable, transient, gradually changing movement of water and ingredients in the water-stream systems. The technology is presented by the complex of programs due to which the modelling is accelerated, specified and less expensive.

The examples of modelling and estimates of the model parameters and process characteristics validity anre given. The current and future applications of the automatization techniques and procedures of modelling are described.

This book is intended for the specialists of hydrology, hydraulics, water management, water engineering, reclamation, waterways, agriculture and fishery, recreation, etc. involved in research, design and production institutions.

Р $\frac{1805040700\text{-}173}{069\ (02)}$ 23-89

ISBN 5—286—00169—6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Многие причины побудили написать эту книгу. К основным можно отнести следующие.

Во-первых, опыт моделирования показал, что между реальным и книжным представлением о математическом моделировании существует противоречие. В многочисленных публикациях, посвященных отдельным действительным достижениям, очень мало внимания уделяется сложным и малоизученным вопросам. Часто уравнения движения объявляются математическими моделями процессов. Создается впечатление простоты и неограниченных возможностей методов математического моделирования, что не соответствует действительности.

Во-вторых, возможности одномерной схематизации при математическом моделировании находятся в противоречии со сложностью реальных многомерных процессов движения воды и примесей в водотоках, что привело многих исследователей к использованию различных исходных уравнений. Они различаются и видом слагаемых, и количеством коэффициентов, хотя восходят к работам Сен-Венана и Фика. Это затрудняет выбор исходных уравнений движения, вызывает неуверенность в результатах моделирования.

В-третьих, единственность решения соответствующих уравнений движения входит в противоречие с возможностью получения многих решений при использовании различных методик определения одних и тех же коэффициентов. В настоящее время это существенно затрудняет применение методов математического моделирования, что требует создания единой основы методик определения многих коэффициентов уравнений.

В-четвертых, опыт практического моделирования движения воды и переноса примесей в сложных системах водотоков привел к неожиданному противоречию. Оказалось, что затраты на обработку массивов первичной информации, инженерный анализ результатов промежуточных вычислений, оценку приемлемости результатов моделирования многократно превышают затраты на моделирование непосредственно процессов. Это приводит к необходимости повышения степени автоматизации вычислений.

В-пятых, сложность процесса математического моделирования требует в настоящее время специальной подготовки, что входит в противоречие с многочисленными потребностями в моделировании. Поэтому необходимо упрощение технологии моделирования.

Описанные в книге исследования, как надеется автор, направлены на разрешение противоречий современного этапа развития процесса математического моделирования. В ней систематически излагаются теоретические основы и автоматизированная технология создания одномерных математических моделей движения воды и примесей в системах водотоков и при этом не умалчивается о существующих проблемах

Из законов сохранения получены исходные одномерные уравнения движения воды и переноса примесей, расширены возможности их приложений. В связи с различными результатами расчета одних и тех же параметров уравнений по многочисленным методикам при отсутствии, как правило, оценок их достоверности предпринята попытка создания методов, с помощью которых можно было бы определять многие параметры уравнений на единой научной основе. Поскольку при создании таких методик не всегда возможно применить некоторые общие законы типа законов сохранения, а описание сложных процессов, определяющих природу многих коэффициентов, в свою очередь приводит к уравнениям, не менее сложным, чем исходные уравнения движения, пришлось использовать гипотезы и даже эвристические соображения, чтобы довести результаты моделирования до числа — это было одной из важных целей работы. Очевидно, что на создание таких методик могли оказать влияние субъективные факторы. Поэтому автор стремился всегда, когда для этого имелись минимальные предпосылки, численно оценивать достоверность определения как параметров уравнений, так и результатов моделирования.

Сложность выполнения работ, необходимость использования и анализа больших объемов входной и выходной информации потребовало упорядочения всей технологии моделирования и создания комплекса программных средств, с помощью которого можно было бы реализовать технологию, повысив степень автоматизации работ и сделав их более доступными. В настоящее время такой комплекс позволяет подготовленному специалисту, не искушенному во многих деталях математических формулировок задач, методов их решения и программирования, эффективно решать задачи о движении воды и переносе примесей в больших системах водотоков. Можно ожидать, что в будущем, после создания специализированного проблемно-ориентированного языка, процесс автоматизированного моделирования станет доступным каждому специалисту, владеющему лишь содержательной постановкой задачи.

Цель данной книги — изложение научных основ, описание методик, программных средств и приложений технологии автоматизированного одномерного математического моделирования плавно изменяющегося движения воды и примесей в системах естественных и искусственных водотоков.

В основу книги положены результаты исследований, выполненных автором лично или под его научным руководством и при непосредственном участии. Программное обеспечение создано лабораторией автоматизации оперативного управления водными ресурсами ЦНИИ комплексного использования водных ресурсов. Участие автора в создании программного обеспечения ограничивалось разработкой укрупненных алгоритмов и оценкой результатов моделирования.

Исследования с переменной интенсивностью выполнялись продолжительное время, многое рождалось экспромтом в минуты рабочих обсуждений, поэтому затруднительно точно установить вклад каждого из сотрудников лаборатории в создании комплекса программ — результаты периодически публиковались совместно. Однако можно и нужно назвать коллег, которые в разное время внесли значительный вклад в создание комплекса, а именно: И. И. Федорову, А. П. Станкевича, Ф. Д. Шнипова, Э. А. Войтеховскую, С. А. Бампи, А. Л. Азановича, С. И. Кутакова, С. А. Волонцевича.

За продолжительный период на работу оказали влияние многие научные школы и ученые. В список литературы вошли источники, непосредственно использованные и близкие по направлению исследований. Вместе с тем многие работы, содержащие значительные результаты исследований по другим направлениям, в список не попали. Хочется принести их авторам извинения, поскольку причиной является не качество их работ, а мои ограниченные возможности. Слабым оправданием может служить лишь тот факт, что перечень работ, имеющих отношение к математическому моделированию движения воды и примесей в водотоках, мог бы занять весь объем книги.

И все же наибольшее воздействие на выполнение исследований оказала школа, возглавляемая чл.-кор. АН СССР О. Ф. Васильевым. Автор пользовался советами О. Ф. Васильева и его учеников, особенно А. Ф. Воеводина, В. С. Никифоровской, М. Т. Гладышева, А. А. Атавина. Автор выражает им глубокую благодарность.

Большое влияние на исследования оказал проф. Г. В. Железняков, и не только своими публикациями, но и обсуждением трудных вопросов создания методик расчета параметров моделей водотоков, за что автор выражает ему глубокую признательность.

Большое внимание уделял работе д-р техн. наук М. С. Грушевский. Его опыт исследований неустановившегося движения воды и обсуждение результатов моделирования способствовали пониманию сложных задач и путей их решения, за что автор искренне благодарен.

Большое влияние на понимание особенностей процесса переноса примесей, создание методики расчета параметров и разработку метода решения уравнения переноса оказали работы и личное общение с канд. техн. наук Е. В. Еременко. Автор глубоко благодарен ему за доброжелательное обсуждение возникающих трудностей и желание поделиться опытом.

Автор признателен всем коллегам, особенно Э. А. Войтеховской, оказавшим помощь в работе над рукописью.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

s, y, h — гидравлическая ортогональная правая система координат, у которой ветвящаяся ось s проходит через минимальные отметки дна, а ось y горизонтальна, м;

x, y, z — геодезическая ортогональная правая система координат, у которой ветвящаяся ось x горизонтальна и находится в вертикальной плоскости, проходящей через ось s; ось y горизонтальна; оси x и y находятся в плоскости, касательной к геоиду, м;

A — площадь живого сечения, м^2;

A_0 — площадь водного сечения, м^2;

B — ширина живого сечения, м;

B_0 — ширина водного сечения, м;

В — полуширина гипотетического плоского по горизонтали потока в сечении прямоугольной формы, м;

$b=\overline{u_i' u_i'}$ — интенсивность турбулентности, м^2/с^2;

C — коэффициент Шези, м^{0,5}/с;

$c=\sqrt{gA/B}$ — скорость распространения малых возмущений, м/с;

$c_1 = \sqrt{\frac{gA}{B}\frac{\cos\theta}{\beta}}$ — скорость распространения малых возмущений при учете уклона дна и корректива количества движения, м/с;

$C_{\text{В}}$, $C_{\text{Н}}$ — коэффициенты Шези соответственно для гипотетического плоского по горизонтали потока шириной В и плоского по вертикали потока глубиной Н в сечении прямоугольной формы, м^{0,5}/с;

D — коэффициент продольной дисперсии, м^2/с;

$D_y(u)$, $D_h(u)$ — средние в сечении значения конвективных составляющих коэффициента продольной дисперсии, обусловленные неоднородностью распределения скоростей по ширине и глубине, м^2/с;

D_{fs}, D_{fh}, D_{fy} — локальные значения составляющих кинематического коэффициента турбулентной диффузии по осям s, h, y, м^2/с;

$D_{f\bar{y}}$, $D_{f\bar{h}}$ — средние на горизонтали и вертикали значения составляющих кинематического коэффициента турбулентной диффузии, м^2/с;

$D_{fs}(u)$ — среднее в сечении значение кинематического коэффициента продольной диффузии, м^2/с;

D_O — концентрация растворенного в воде кислорода, кг/м^3;

$D_н$ — концентрация растворенного в воде кислорода при насыщении, кг/м^3;

$D_1 = D_н - D_O$ — дефицит кислорода, кг/м^3;

DK — $DK = \frac{1}{K} \cdot \frac{\partial K}{\partial h}$, 1/м;

E_1 — коэффициент извилистости водотока;

$E_t = \rho b/2$ — плотность кинетической энергии турбулентного движения, кг/(м·с^2);

e — основание натуральных логарифмов;

$\mathbf{F}$ — главный вектор сил взаимодействия с другими телами и его проекция на ось s, Н;

f — функция источников (или стоков), характеризующая интенсивность изменения концентраций примесей вследствие попадания в отсек (или исчезновения из отсека) примесей через свободную поверхность, ложе русла, а также из-за физико-химических, биохимических и других процессов, протекающих внутри объема воды, кг/(м^3·с);

g — ускорение свободного падения, м/с^2;

h, $h(s, t)$ — глубина потока, отсчитываемая от минимальной отметки дна в плоскости живого сечения, м;

$h_{\bar{m}}^{\bar{n}}$ — глубина h на конце дуги $\bar{n}$, примыкающей к вершине $\bar{m}$;

$h^{\bar{n}}$ — глубина h на дуге $\bar{n}$;

$h_{\bar{m}}$ — глубина h в вершине $\bar{m}$;

Н — глубина гипотетического плоского по вертикали потока в сечении прямоугольной формы, м;

I — $I = Q^2/K^2$ при равномерном, неравномерном и неустановившемся движении;

$\mathbf{J}$ — количество движения жидкости, находящейся в отсеке, кг·м/с;

K — модуль расхода, м^3/с;

$k = k_1 + \nu$ — кинематический коэффициент суммарной вязкости, м^2/с;

k_0 — коэффициент неконсервативности, характеризующий скорость изменения концентрации ингредиента, vari;

k_1 — кинематический коэффициент турбулентной вязкости ($м^2/с$) и коэффициент, характеризующий интенсивность окисления органических веществ, 1/с;

k_2 — коэффициент атмосферной аэрации, 1/с;

$k_т$ — коэффициент удельной температуропроводности, 1/с;

L — биохимическая потребность воды в кислороде (БПК), $кг/м^3$;

n — коэффициент шероховатости, vari;

M — масса материальной точки и масса воды в отсеке, кг;

Р — масса примеси, находящейся в отсеке (кг) и сила давления, Н;

p — концентрация примеси: масса вещества в единице объема, $кг/м^3$;

$p_{\bar{m}}^{\bar{n}}$ — концентрация примеси p на конце дуги $\bar{n}$, примыкающей к вершине $\bar{m}$;

$p^{\bar{n}}$ — концентрация примеси p на дуге $\bar{n}$;

$p_{\bar{m}}$ — концентрация примеси p в вершине $\bar{m}$;

p' — пульсационная составляющая концентрации примеси, $кг/м^3$;

p_a — атмосферное давление, Па;

Q, $Q(s, t)$ — расход воды, $м^3/с$;

Q_1 — сосредоточенный расход воды, присоединяющейся к основному водотоку, $м^3/с$;

$Q_{\bar{m}}^{\bar{n}}$ — расход воды Q на конце дуги $\bar{n}$, примыкающей к вершине $\bar{m}$;

$Q^{\bar{n}}$ — расход воды Q на дуге $\bar{n}$;

$Q_{\bar{m}}$ — расход воды Q в вершине $\bar{m}$;

q_1 — боковой приток воды, или путевой приток, плотностью ρ_1, $м^2/с$;

R — гидравлический радиус, м;

t — время, с;

T — температура, °С;

T_0 — равновесная температура, °С;

u — местная осредненная продольная скорость движения воды, м/с;

u' — пульсационная составляющая продольной скорости движения воды, м/с;

u_h, u_y — местная осредненная продольная скорость в гипотетическом плоском по вертикали и соответственно по горизонтали потоке, м/с;

v — средняя в сечении скорость потока, м/с;

V — объем, м³;

w — скорость ветра, м/с;

w_0 — проекция на направление s абсолютной скорости массы воды, присоединенной к основному водотоку, м/с;

w_1 — проекция скорости ветра на направление s, м/с;

α — корректив удельной кинетической энергии (коэффициент Кориолиса);

β — корректив удельного количества движения (коэффициент Буссинеска);

$\Delta=\partial^2/\partial h^2+\partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа;

δ_{ij} — символ Кронекера; $\delta_{ij}=1$, если $i=j$; $\delta_{ij}=0$, если $i\neq j$;

θ — угол наклона линии, соединяющей минимальные отметки дна характерных сечений водотока, отсчитываемый от положительного направления оси s против часовой стрелки до положительного направления оси x, рад;

$\varkappa$ — «постоянная» Кармана;

μ — динамический коэффициент вязкости воды, кг/(м·с);

ν — кинематический коэффициент вязкости воды, м²/с;

ξ — коэффициент, учитывающий условия взаимодействия ветра с водой;

ρ — плотность воды, кг/м³;

ρ_1 — плотность воды бокового притока q_1, кг/м³;

τ — касательное напряжение, Н/м²;

τ_0 — среднее значение касательного напряжения на дне, Н/м²;

$\varphi_k^n(s)$ — начальное условие вида k на n-й дуге;

χ — смоченный периметр живого сечения, м;

ψ_k^n — граничное условие вида k на n-й дуге;

δ — толщина пристенного слоя (по И. К. Никитину) и малая величина, м;

ВНИИВО — Всесоюзный научно-исследовательский *институт по охране вод;*

ВОДГЕО — Всесоюзный ордена Трудового Красного Знамени научно-исследовательский институт водоснабжения, канализации, гидротехнических сооружений и инженерной гидрогеологии;

ВЦ АН СССР — Вычислительный центр Академии наук СССР;

Белгипроводхоз — Белорусский государственный институт проектирования водохозяйственного строительства;

ГГИ — Государственный ордена Трудового Красного Знамени гидрологический институт;

Гидропроект — Всесоюзный ордена Ленина проектно-изыскательский и научно-исследовательский институт имени С. Я. Жука;

ИВП АН СССР — Институт водных проблем Академии наук СССР;

ИГиЛ СО АН СССР — Институт гидродинамики имени акад. М. А. Лаврентьева Сибирского отделения Академии наук СССР;

ЛПИ — Ленинградский политехнический институт имени М. И. Калинина;

ТПИ — Таллиннский политехнический институт;

ЦНИИКИВР — Центральный научно-исследовательский институт комплексного использования водных ресурсов.

ВВЕДЕНИЕ

Потребности народного хозяйства в воде определенного качества удовлетворяются из водных объектов, обычно объединенных в водохозяйственные системы (ВХС). В состав сложных ВХС входят естественные и искусственные гидравлически взаимосвязанные поверхностные и подземные водные объекты и гидротехнические сооружения, с помощью которых осуществляется управление водными ресурсами.

В поверхностных водных объектах — водоемах и водотоках,— имеющих, как правило, значительную протяженность, сосредоточена наиболее динамичная часть доступных к использованию водных ресурсов. Для краткости все поверхностные водные объекты будем называть здесь водотоками. Изменение во времени и пространстве многочисленных факторов — режимов использования, сброса примесей, приточности, размеров и форм сечений, шероховатости ложа водотоков, температуры, ветра, давления — приводит к тому, что в системах водотоков практически всегда существует неустановившееся движение воды и примесей, т. е. возникают волны различной природы. Знание их количественных характеристик необходимо как для рационального проектирования, так и для эффективной эксплуатации ВХС.

Повышение обоснованности проектных решений, экономичности и надежности гидротехнических сооружений, эффективности управления водными ресурсами в существующих ВХС требует знаний режима изменения уровней, расходов и характеристик качества воды при различных вариантах инженерных решений. Достаточно детальные сведения о гидрологическом режиме систем водотоков нужны даже на ранних стадиях разработки схем комплексного использования и охраны водных ресурсов.

В связи с необходимостью экономии воды все бóльшую актуальность приобретают задачи повышения эффективности управления. При дефиците водных ресурсов очень важно знать из каких водохранилищ и по каким гидрографам нужно делать попуски в ВХС, чтобы, используя минимальные объемы воды, удовлетворить потребности в воде надлежащего качества. Поэтому при эксплуатации ВХС с еще большей точностью, чем при проектировании, необходимо знать движение воды и примесей в водотоках, чтобы из всевозможных состояний системы выбрать в некотором смысле лучшее. Увеличение погрешностей расчетов будет иметь два следствия: или холостые сбросы воды, или неудовлетворение потребностей водопользователей.

Таким образом, в настоящее время при решении многочисленных инженерных задач, связанных с проектированием и эксплуатацией ВХС, необходимы достаточно детальные сведения о гидрологическом режиме водотоков в зависимости от управляющих воздействий на систему и многочисленных природных факторов.

В связи с большой протяженностью ВХС, необходимостью учета многих факторов в настоящее время количественные и качественные характеристики водных ресурсов можно получить практически только методами математического моделирования процессов движения воды и переноса примесей. В зависимости от возникающих инженерных и научных задач используют математические модели, основанные на различных исходных предпосылках и описывающие процессы с различной степенью детализации,— одномерные, двумерные и трехмерные модели.

Выбор математической модели, которая с требуемой степенью детализации будет описывать сложные процессы движения воды и переноса примесей в водных объектах ВХС и позволит с допустимой погрешностью обосновывать инженерные решения при проектировании и эксплуатации ВХС,— задача весьма проблематичная. Трудности вызваны не только значительными затратами и возможностями выбора типа модели, но и сложностью математического аппарата и программных средств.

Большое количество подходов к созданию математических моделей движения воды [286] и переноса примесей обусловлено прежде всего сложностью процессов и как следствие трудностями их математического моделирования. В настоящее время наиболее широкое применение нашли математические модели трех типов: стохастические, концептуальные и гидродинамические. Они различаются исходными предпосылками, количеством первичной информации, степенью детализации результатов расчетов, однако области их применения частично пересекаются. Поэтому во многих случаях выбор типа модели определяется имеющимися исходными данными, требуемой степенью детализации результатов, подготовленностью специалистов, наличием программного обеспечения и субъективными факторами. Чтобы сложилось хотя бы общее представление о возможностях и областях применения различных типов математических моделей, приведем их краткую характеристику.

Стохастические модели используют данные наблюдений за процессом на объекте для построения статистических зависимостей между параметрами изученных явлений. К ним относятся различные модификации регрессионных и других моделей [331, 375, 366]. Достоинствами стохастических моделей является их простота, небольшое количество исходной информации, возможность применения малых ЭВМ, оперативность получения информации. С их помощью можно установить характеристики неустановившегося движения в створах, где проводились некоторые наблюдения. Недостатки — ограниченные возможности применения этих моделей к проектируемым объектам. Модели дают мало информации о процессе, мало пригодны вне пределов и створов наблюдений.

Концептуальные модели используют некоторые уравнения, обычно являющиеся модификацией уравнения непрерывности, и дополнительные правдоподобные соотношения, основанные на схематизации процесса движения и представлениях о нем авторов. К ним относятся модели гидрологического цикла: линейная и нелинейная модели одиночного водохранилища, модели Калинина—Милюкова, модель Маскингам и др. [83, 84, 98, 113, 321, 363]. Достоинством этих моделей является их простота, малое количество исходной информации, относительно небольшие объемы вычислений, более глубокое, чем у стохастических моделей, проникновение в сущность описываемого процесса, большая степень детализации результатов расчетов, возможности применения в реальном масштабе времени. Концептуальные модели нашли широкое распространение. Их недостатки — необходимость тщательного обоснования в каждом конкретном случае применения в связи с использованием их авторами предположений, не всегда очевидных и не следующих из каких-то более общих закономерностей. Применительно ко многим моделям приходится оценивать допустимость отказа от учета подпорных явлений, хотя эти обоснования, особенно в системах водотоков ВХС, практически всегда проблематичны.

Гидродинамические модели используют для описания процессов *движения и переноса законы механики—законы сохранения* массы, импульса, момента импульса, энергии — и подробную информацию о характеристиках водных объектов ВХС. Применение законов механики к описанию изменяющихся во времени процессов движения воды и примесей в водных объектах, рассредоточенных в пространстве, приводит к исходным системам уравнений движения и переноса в частных производных. Поэтому возникающие задачи формулируются в терминах уравнений математической физики. Достоинством этого типа моделей является использование небольшого количества общепринятых и неоднократно апробированных исходных положений, ясная и строгая математическая формулировка возникающих задач. Чаще всего это классические задачи для уравнений математической физики, что позволяет пользоваться широким арсеналом имеющихся средств их решения.

Существенным преимуществом гидродинамических моделей является их универсальность. Они применимы как при проектировании, так и при эксплуатации ВХС. На ранних стадиях проектирования, когда исходная информация обычно не может быть задана с высокой степенью детализации, математическое моделирование процессов можно выполнить приближенно. С увеличением глубины проработки проекта исходная информация уточняется и погрешности могут быть уменьшены, в особенности на стадии эксплуатации ВХС. Это делает возможным создание единого методического подхода к моделированию процессов на различных стадиях проектирования и на этапе эксплуатации ВХС. Математические модели процессов, уточненные при рабочем проектировании, можно передавать эксплуатационным службам. После идентификации математических моделей можно определять характеристики движения воды и переноса примесей с высокой точностью и использовать их для повышения эффективности управления водными ресурсами в ВХС.

Гидродинамические модели позволяют практически всегда получать характеристики процессов движения воды и переноса примесей с требуемой детализацией и приемлемой погрешностью, интерполировать и экстраполировать характеристики в широких пределах. Поэтому они, несмотря на высокую стоимость создания, получили широкое распространение.

Большая детализация и, следовательно, усложнение математической модели и вычислительного процесса могут не позволить выполнять расчеты применительно к конкретным ВХС. Вместе с тем необоснованное упрощение модели, пренебрежение важными факторами может настолько обесценить результаты математического моделирования, что сделает их непригодными для обоснования инженерных решений. Описанное противоречие, присущее процессу создания каждой математической модели, особенно обостряется применительно к гидродинамическим моделям процессов движения воды и переноса примесей в водотоках сложных ВХС из-за их протяженности в сотни и тысячи километров, неоднородности во времени и пространстве характеристик водотоков.

Для обоснования многих инженерных решений при проектировании и эффективном управлении водными ресурсами ВХС необходимы и достаточны результаты одномерного математического моделирования. Книга посвящена описанию одномерных математических моделей гидродинамического типа, по которым исследования имеют высокую степень завершенности.

Создание двумерных и трехмерных гидродинамических математических моделей процессов движения и переноса применительно к водным объектам сложных ВХС в целом в настоящее время проблематично прежде всего из-за сложности и высокой стоимости получения больших объемов достаточно детальной и точной исходной информации, отсутствия приемлемых моделей турбулентности, с помощью которых стало бы возможно удовлетворительно описывать компоненты тензора турбулентных напряжений в условиях изменяющихся в пространстве и времени морфометрических и гидравлических характеристик водных объектов. Неизбежно возникают трудности и затраты вычислительного характера. Поэтому в настоящее время многомерные модели эффективно используют применительно к решению задач на локальных участках ВХС и во взаимосвязи с одномерными моделями для всей системы водных объектов [315, 344]. Вместе с тем имеющиеся одномерные математические модели процессов движения воды и переноса примесей гидродинамического типа не обладают общностью, имеют и другие недостатки. В сложных системах водотоков при высоких уровнях, как правило, поток выходит на пойму, которая имеет различную глубину наполнения и неоднородную в пространстве шероховатость. Из-за больших гидравлических сопротивлений отдельных участков закустаренных и залесенных пойм равнинных рек продольные скорости уменьшаются, возникают значительные нетранзитные зоны, где вода практически не движется. Поэтому соответствующие нетранзитные части водного сечения не должны учитываться в живом сечении потока. Нетранзитные зоны играют роль аккумулирующих емкостей. Методы выделения нетранзитных зон не разработаны, они не учитываются в обычно используемых одномерных уравнениях движения. Отсутствуют надежные методы моделирования неустановившегося движения воды при выходе потока на пойму [39].

Математические модели гидродинамического типа обладают и другими недостатками. В сложных условиях течения — широкие поймы, сложные сечения, переменная по периметру и во времени шероховатость — определение параметров уравнений движения и переноса вызывает большие трудности. Даже при отсутствии нетранзитных зон в сечениях сложной формы, особенно с неоднородной шероховатостью границ, для определения этих параметров требуется разработка специальных методик, которые, в принципе, не проще методик решения исходной задачи о движении и переносе.

Для создания моделей необходим большой объем дорогостоящей морфометрической, гидравлической и гидрологической информации. Ее проверка, подготовка к вычислениям приводит к большим затратам. Результаты расчетов, представляющие собой численные характеристики состояния водного объекта на большом протяжении и в многочисленные моменты времени, громоздки, трудно обозримы и сложны для инженерного анализа.

Несмотря на недостатки гидродинамических моделей, обоснованность, ясность и строгость формулировок возникающих задач постоянно привлекают большое внимание исследователей и пользователей. Сложность выполнения практических расчетов применительно к конкретным водным объектам чаще всего преодолевается различными способами, а полученные результаты расчетов, как правило, вполне удовлетворительны, что способствует расширению доверия и соответственно практических приложений.

Более чем за вековую историю исследований математическим моделям гидродинамического типа посвящена обширная литература. Только монографических изданий, в которых обстоятельно изложены многие теоретические и экспериментальные результаты исследований установившегося и неустановившегося движений воды, в том числе в сложных условиях, имеется значительное количество [7, 16, 17, 21, 41, 42, 43, 56, 77, 78, 87, 107, 109, 120, 123—126, 130, 132, 151—154, 168, 231, 234, 275, 293, 302, 303, 312, 317]. Невозможно сколько-нибудь детально рассмотреть и проанализировать необозримое количество статей, посвященных гидродинамическим моделям движения воды и переноса примесей. Поэтому в соответствии с целью книги выполним обзор исследований, посвященных в основном созданию одномерных математических моделей установившегося и неустановившегося движения воды и примесей. Попытаемся охарактеризовать вклад в моделирование отдельных коллективов и исследователей, понимая субъективность оценок.

У истоков математического моделирования неустановившегося движения воды в открытых потоках стояли исследования Сен-Венана [362], С. А. Христиановича [302], В. А. Архангельского [7], Стокера [293].

Первые в СССР фундаментальные теоретические исследования неустановившегося движения воды были выполнены в 30-е годы в ГГИ С. А. Христиановичем [302], в исследованиях которого применительно к решению задач неустановившегося движения воды существенно развит метод характеристик, использующийся и в настоящее время. В послевоенный период теоретические и экспериментальные исследования установившегося движения воды, в том числе и в руслах с поймами, продолжались под руководством В. М. Маккавеева, А. В. Караушева, Н. Е. Кондратьева, И. В. Попова, И. Ф. Карасева, Б. Ф. Снищенко [119, 120, 135, 170—172]. Характерной особенностью их было изучение кинематики течений и физических основ процессов с преимущественным приложением результатов к прогнозам гидрологического режима рек, русловым процессам, учету вод.

Результаты этих исследований в сочетании с описываемыми ниже моделями движения воды и примесей могут стать основой актуальных работ по неустановившемуся движению воды и примесей в деформируемых руслах.

Уникальные экспериментальные исследования неустановившегося движения воды выполнены под руководством Н. Е. Кондратьева в реках Тверце и Оредеж [109]. В настоящее время их результаты используются многими как образцовые средства калибровки математических моделей. Исследования закономерностей движения воды и примесей, обобщенные в последних монографиях Н. Е. Кондратьева, И. В. Попова, Б. Ф. Снищенко [135] и И. Ф. Карасева [119], послужили основой для разработки многих нормативных документов по гидротехнике и учету вод.

Обстоятельные исследования сложных случаев движения воды на поймах были выполнены Д. Е. Скородумовым [283, 284] и В. А. Федосеевым [297]. В работах уделено большое внимание схематизации течений, что важно для математического моделирования.

В последнее время обстоятельные отечественные монографии, посвященные изучению неустановившегося движения воды в открытых потоках, опубликованы М. С. Грушевским [77, 78]. В них обобщены результаты многолетних исследований, имеется подробная библиография. В работах М. С. Грушевского и его учеников Л. И. Розенберг, В. А. Федосеева, М. И. Русинова [79, 106, 271—273, 297] изложены результаты многолетних теоретических и экспериментальных исследований неустановившегося движения воды, в том числе в сложных случаях выхода потока на пойму, предложены способы схематизации течений и методы расчета важнейших параметров движения.

В начале 60-х годов под руководством чл.-кор. АН СССР О. Ф. Васильева в ИГиЛ СО АН СССР сформировалась научная школа (А. А. Атавин, А. Ф. Воеводин, М. Г. Гладышев, В. С. Никифоровская, Н. А. Притвиц, С. М. Шугрин), трудам которой принадлежат пионерные результаты в математическом моделировании неустановившегося движения воды [9, 10, 34—40, 48—57, 69—72, 210—214, 305—307]. Получены в более общей форме уравнения движения, даны математические формулировки задач о плавно изменяющемся и разрывном неустановившемся движении воды в водотоках и их системах. Разработаны численные методы решения одномерных задач в стационарных и подвижных сетках без выделения и с выделением разрыва, методики расчета и идентификации многих параметров уравнений. Выполнены исследования по повышению степени автоматизации математического моделирования. Созданы комплексы программ и выполнены расчеты для обоснования инженерных решений по важнейшим народнохозяйственным объектам в СССР и за рубежом. Большое внимание уделено формулировке, аналитическим и численным методам решения задач, в том числе движения воды по сухому руслу. Развивались методы и создавались программные средства решения двумерных задач.

На начальном этапе развития методов математического моделирования школы О. Ф. Васильева и М. С. Грушевского тесно взаимодействовали, что приводило к значительным результатам [248], способствующим становлению методов.

В Гидропроекте математическое моделирование неустановившегося движения воды и разработка численных методов начато И. Б. Историком [110] почти одновременно с работами в ИГиЛ СО АН СССР. Разработан и реализован алгоритм решения задачи по методу мгновенных режимов, причем рассмотрены случаи, когда силами инерции пренебрегать нельзя [110—112]. В дальнейшем работы по математическому моделированию плановых и одномерных задач были расширены В. М. Лятхером, А. Н. Милитеевым, С. Я. Школьниковым [166, 167, 187, 188]. Ими выполнены теоретические исследования и численные эксперименты по моделированию плавно изменяющихся, разрывных, одномерных и плановых течений в системах водотоков и применительно к нижним бъефам гидротехнических сооружений.

В работах С. Н. Ложкина [161, 162] развивается нетрадиционный подход к исследованию кинематики сложных течений, основанный на принципе Ле-Шателье. Применительно к задачам одномерного моделирования использованный подход позволяет уточнить пропускную способность водотоков сложных сечений, например русел с поймой, без использования методов гидродинамики турбулентных течений.

Практически одновременно с работами сотрудников ИГиЛ СО АН СССР и Гидропроекта по созданию математических моделей неустановившегося движения воды начаты исследования в Гидрометцентре В. И. Коренем и Л. С. Кучментом [137—144, 151, 276]. В них рассматривается широкий круг проблем, связанных с созданием математических моделей. Многие работы посвящены математической формулировке граничных задач, созданию численных методов решения с использованием в основном явных разностных схем, разработке методов определения морфометрических и гидравлических характеристик, их аппроксимации, идентификации и определения путем решения обратных задач. Работы Кучмента были развиты затем в ИВП АН СССР. В них большое внимание уделяется математическому моделированию формирования речного стока на водосборе, параллельно исследуются вопросы неустановившегося движения воды в речном русле. Основные результаты исследований приведены в монографиях Л. С. Кучмента [152] и Л. С. Кучмента, В. Н. Демидова и Ю. Г. Мотовилова [153]. При создании численных методов решения применялись методы конечных разностей с явными и неявными разностными схемами. В последнее время находит применение метод конечных элементов [118, 153].

В различных институтах страны и за рубежом разработаны математические модели гидродинамического типа, в основе которых лежат исходные уравнения упрощенного типа, полученные на основе пренебрежения теми или иными слагаемыми — в основном инерционными — уравнений движения. Примерами работ этого направления могут служить исследования А. Н. Зиверта, В. П. Хелманиса и др. [103, 199, 298, 299]. С их помощью выполнены расчеты неустановившегося движения воды для конкретных объектов, где можно ожидать выполнение принятых допущений. Поскольку в системе водотоков оценить приемлемость допущений заранее, как правило, не представляется возможным ввиду наложения волн, использование упрощенных уравнений применительно к таким сложным системам затруднительно, а получаемые выгоды от сокращения количества вычислительных операций при пренебрежении некоторыми слагаемыми уравнений движения в перспективе уменьшаются в связи с ростом быстродействия машин.

Изучению особенностей неустановившегося движения воды в окрестности гидротехнических сооружений, закономерностей распределения скоростей, взаимодействия потока с границами посвящены работы И. Л Розовского, В. Е. Еременко, А. А. Базилевича, А. Н. Шабрина [274, 275, 310, 311] и В. М. Лятхера, Б. Л. Историка, В. М. Синявской, П. М. Рябкина [203].

Исследованию разрывного и плавно изменяющегося движения, в том числе и волн цунами, посвящены работы А. В. Мишуева и его учеников. В них изучается не только сам процесс неустановившегося движения, но и его кинематические, динамические особенности в окрестности фронта волны, взаимодействие волнового движения с границами [62, 193—196, 240].

В ЛПИ Ю. С. Васильевым, В. И Виссарионовым, Б. А. Соколовым и Л. И. Кубышкиным [41, 380] создана математическая модель и программное обеспечение расчета неустановившегося движения воды в ВХС совместно с переходными процессами в водопроводящем тракте гидротехнических сооружений и в электрической и механической системах гидроэнергетических объектов.

Теоретическим основам создания математических моделей неустановившегося движения воды много внимания уделял Н. А. Картвелишвили [123—126]. Применительно к одномерной схематизации течений в его монографиях изложены принципиальные вопросы вывода одномерных уравнений из многомерных уравнений движения, позволившие выяснить теоретические аспекты одномерной схематизации процесса, уточнить математический смысл коррективов количества движения и энергии, по-разному вводимых в уравнения многими авторами.

Большое внимание изучению закономерностей течения воды на пойме уделил Н. Б. Барышников. В его монографиях [16, 17] представлены результаты теоретических и экспериментальных исследований, оценено влияние сил инерции и сопротивления в различных случаях неустановившегося течения. Исследования внесли значительный вклад в понимание сложных физических процессов движения воды на пойме, в схематизацию явления и тем самым в математическое моделирование процесса, особенно в сложных случаях возникновения нетранзитных зон.

В последние годы переведены на русский язык книги, посвященные математическому моделированию движения воды и примесей в открытых водотоках. В 1983 г. издана книга Эббота [317], переведенная Е. И. Массом и С. Ю. Хазановым. Фактически она является первым учебником по вычислительной гидравлике. В ней рассмотрены в основном теоретические аспекты математического моделирования. Детально изложен метод характеристик. Из численных методов излагается метод конечных разностей и обсуждаются вычислительные аспекты использования явных, неявных и консервативных разностных схем. Приведены примеры моделирования.

В 1983 г. издана книга Мак-Доуэлла и О'Коннара [168], переведенная И. П. Беляевым. В ней приводятся уравнения движения, отмечаются особенности определения многих коэффициентов, учитывается изменение плотности воды. Рассматриваются возможности моделирования в одномерной постановке задачи приливных течений. Излагаются аналитические и численные методы решений. Обсуждаются возможности различных разностных схем и метода конечного элемента, приводятся примеры инженерных приложений.

В 1985 г. издана книга Кюнжа, Холли и Вервея [154], переведенная Ю. В. Абрамовым и Е. И. Массом, в которой изложены как инженерные, так и математические аспекты моделирования: приведены одномерные уравнения движения, рассмотрены возможности их упрощения, схематизация водотоков, в том числе с поймами, описаны разностные схемы, вопросы их устойчивости и сходимости, много внимания уделено идентификации, приведены примеры моделирования процессов в реальных водотоках.

Важнейшие характеристики качества воды — концентрации примесей — в водотоках можно определить методами математического моделирования. На концентрацию примесей в водных объектах влияют многие взаимодействующие процессы: с одной стороны, механический перенос примесей, который способствует их перемещению и рассеянию в водных массах потока, с другой стороны — самоочищение — химические, физико-химические, биохимические и биологические процессы, изменяющие концентрацию примесей за счет взаимодействия с другими компонентами примесей, границами водотока, атмосферой и т. п.

Многие из упомянутых процессов весьма сложны, количественные закономерности их в условиях малых концентраций и присутствия неизвестных компонентов исследованы недостаточно для того, чтобы ими можно было непосредственно воспользоваться для математического моделирования на конкретных объектах. По-видимому, обобщение результатов по оценке самоочищающей способности водотоков на таком уровне, чтобы эти закономерности непосредственно можно было бы использовать при моделировании процесса переноса на протяженных участках рек или в системе водотоков,— дело будущего. Поэтому в настоящее время при моделировании для оценки вклада самоочищения в изменение концентраций возникает необходимость использования некоторых упрощенных зависимостей, а для уточнения их параметров — при наличии наблюдений — методов идентификации. Такой подход в свою очередь требует более точного определения механических характеристик переноса, чтобы их составляющая погрешностей в минимальной степени влияла на результаты идентификации. Отметим, что при оперативном управлении водными ресурсами чаще всего используется метод разбавления, что также требует тщательного учета именно механических характеристик переноса примесей, поскольку управление осуществляется фактически объемами воды.

По изложенным объективным и субъективным причинам данная работа посвящена в основном исследованию механической стороны процесса переноса примесей. Учет изменения концентраций примесей за счет самоочищающей способности водотоков будет выполняться по данным исследований других авторов с оценкой возможности уточнения характеристик методами математического моделирования.

У истоков работ по математическому моделированию переноса примесей стоят исследования Тейлора, Стриттера и Фелпса [367, 368, 369—372]. Эти исследования в значительной мере определили теоретические и экспериментальные исследования на протяжении многих десятилетий.

Решающее влияние на современное представление об одномерной схематизации механической составляющей процесса переноса примесей оказали работы Тейлора [370, 371, 372]. В них впервые было теоретически и экспериментально доказано, что главную роль в рассеянии примесей играет конвективный перенос за счет неоднородности распределения осредненных скоростей в сечении.

Экспериментально подтверждены полученные теоретически зависимости для определения коэффициента дисперсии в ламинарных и турбулентных потоках, в трубах круглого сечения. Эти работы повысили интерес к проблеме переноса и оказали существенное влияние на направление исследований. Последовали работы, посвященные созданию методики расчета коэффициентов дисперсии в потоках некруглого сечения. Так, Элдер [329, 330] получил зависимость для определения коэффициента дисперсии в плоском турбулентном потоке, т. е. при определяющем влиянии изменения осредненных скоростей на вертикали. Фишер [332—334] предложил зависимость для определения коэффициента дисперсии, применительно к плановой задаче, т. е. при существенном изменении поля осредненных скоростей по ширине потока.

Изучение и описание закономерностей трансформации примеси в потоке за счет химических, физико-химических, биохимических процессов, по-видимому, впервые начато Стриттером и Фелпсом [367, 368]. В настоящее время эти исследования существенно расширились, им уделяют большое внимание специалисты смежных областей знаний. Закономерности трансформации веществ примесей рассматриваются с системных позиций круговорота вещества экосистемы на основе закономерностей трансформации вещества и энергии. Кратко эти вопросы изложены в подразделе, посвященном возможностям учета самоочищающей способности водотоков.

По-видимому, первые в СССР теоретические исследования переноса примесей выполнены в начале 30-х годов в ГГИ школой В. М. Маккавеева [169—171] и А. В. Караушева [120—122]. Предложены зависимости для вычисления коэффициента турбулентного обмена и экспериментальные методы его определения. Разработана методика расчета расстояния до створа полного перемешивания. Методы расчета переноса примесей доведены до практических рекомендаций [238, 239] и широко используются.

В ВОДГЕО выполнены обширные теоретические и экспериментальные исследования И. Д. Родзиллером [264—267]. Предложена зависимость полуэмпирического типа для определения расстояния до створа полного перемешивания. Оценены возможности многих методик расчета. Исследованы закономерности процесса самоочищения и получены значения параметров. Решены многие задачи расчета характеристик качества вод в сложных условиях совместных воздействий нескольких выпусков, рассмотрены проблемы управления качеством вод.

В последние десятилетия наиболее интенсивные и разносторонние исследования задач переноса примесей выполнены в ТПИ школой А. М. Айтсама, Х. А. Вельнера, Л. Л. Пааля [3, 4, 44—46, 218, 220—226]. Исследования характеризуются комплексностью· изучаются не только отдельные составляющие процесса переноса, но и их взаимосвязь. В основу работ положены теоретические предпосылки. В необходимых случаях они дополняются обстоятельными экспериментальными исследованиями в лабораторных и полевых условиях как параметров, характеризующих механический перенос примесей, так и параметров самоочищающей способности и их взаимосвязи. Получены теоретические решения для расчета концентраций примесей в водотоках при различных граничных условиях с учетом и без учета самоочищающей способности водотоков. Такие решения могут служить калибровочными средствами для вновь создаваемых моделей и программных комплексов. Выполнены экспериментальные и теоретические исследования коэффициентов турбулентной диффузии, продольной дисперсии, неконсервативности. Исследования позволили выявить закономерности процессов и их взаимного влияния, получить зависимости для определения коэффициентов в довольно сложных условиях течения. Разработано программное обеспечение расчетов, которое использовано для решения многих практических задач.

Во ВНИИВО школой Е. В. Еременко не только выполнены обстоятельные исследования переноса примесей водотоками в сложных случаях, но и сформулированы и решены отдельные задачи оптимизации управления качеством вод [93—97]. Разработаны численные методы и программное обеспечение расчетов пассивных примесей, оценены ограничения на шаги по пространству при использовании неявных разностных схем. Предложены зависимости для расчета продольного коэффициента дисперсии. Показана возможность суммирования составляющих коэффициентов продольной дисперсии в вертикальной и горизонтальной плоскостях при определении эффективного коэффициента дисперсии в сечениях ограниченных размеров [95]. Исследованы закономерности переноса примесей в случае существенно неоднородного распределения примеси по сечению, совместно с О. Ф. Васильевым разработана многокомпонентная модель трансформации некоторых примесей [38]. Сформулированы, решены некоторые задачи эффективного управления.

В 70-е годы задачам о переносе примесей уделяется внимание школой О. Ф. Васильева [35, 36, 52, 55]. Сформулированы задачи о переносе примесей в системах водотоков при неустановившемся движении воды, предложены более общие граничные условия во внутренних узлах системы водотоков. Оценены возможности применения различных разностных схем. Создано программное обеспечение, выполнены расчеты модельных задач. Совместно с Е. В Еременко [38] создана многокомпонентная модель трансформации некоторых примесей Рассмотрены отдельные задачи оптимального управления процессом переноса.

В последние годы в ВЦ АН СССР школой акад Н Н. Моисеева уделено внимание созданию математических моделей движения воды и переноса примесей в системах водотоков с учетом взаимодействия подземных и поверхностных вод, в том числе и при одномерной схематизации процессов [91, 92, 180]. Используются численные методы решения с применением в задачах переноса направленных разностей. Создано программное обеспечение, выполнено моделирование движения воды и переноса примесей применительно к конкретным объектам.

Учету влияния на процессы переноса нетранзитных зон водотока посвящены работы [348, 353, 377]. В них рассматриваются новые аспекты задачи о переносе примесей в сложных условиях естественных водотоков. Получено, что при наличии нетранзитных зон уменьшаются максимумы концентраций примесей, удлиняются в пространстве и времени волны концентраций, их распределение становится еще более асимметричным.

Переносу примесей посвящена глава книги Кюнжа, Холли, А. Вервея [154]. В ней излагаются исходные уравнения переноса, обсуждаются численные методы решения задачи и различные разностные схемы, уделяется внимание выбору методов расчета коэффициентов дисперсии и влиянию на результат расчетов численной диффузии. Приведены примеры выполнения расчетов применительно к конкретным объектам, обращено внимание на необходимость идентификации параметров, даны многочисленные рекомендации по выполнению расчетов.

Переносу примесей посвящена значительная часть книги Мак-Доуэлла, О'Коннора [168]. Приводятся уравнения переноса. Много внимания уделяется определению коэффициентов диффузии и дисперсии, учету плотности воды, переносу растворенных, взвешенных и влекомых примесей. Излагаются аналитические и численные методы решения с применением различных разностных схем. Приводятся примеры инженерных приложений

Отметим, что в последние годы проф. А Д. Гиргидов [65—68] уделил значительное внимание описанию процесса переноса примесей на основе уравнений гиперболического типа, описывающих процесс диффузии с конечной скоростью. Хотя в настоящее время методы определения параметров уравнений разработаны недостаточно, это направление исследований является перспективным как с физической, так и с вычислительной сторон и в ближайшее время на этом пути можно ожидать значительных результатов.

Таким образом, при создании одномерных математических моделей гидродинамического типа процессов движения воды и переноса примесей обычно используют в качестве исходных уравнения Сен-Венана и турбулентной диффузии. Для них формулируются краевые задачи, которые решаются в простейших случаях аналитически, в более общих случаях — численными методами, которые в последнее время получили широкое распространение. Они могут быть использованы и для расчета характеристик движения воды и переноса примесей в водных объектах сложных ВХС. Однако методики расчета параметров уравнений — модули расхода, коэффициента дисперсии и др — разработаны недостаточно, особенно применительно к водотокам, имеющим неправильную форму сечения, неоднородную в пространстве и времени шероховатость.

Многие параметры уравнений движения и переноса даже в принципе не могут быть определены с высокой точностью непосредственно на основе измерений. Необходимость их уточнения приводит к применению аппарата идентификации, который, как правило, сложнее непосредственного решения задач о движении воды и переноса примесей. Это перспективное направление исследований, позволяющее во многих случаях уточнить значения параметров, результатов моделирования процессов, уменьшить объемы изыскательских работ, в настоящее время интенсивно развивается [13, 107, 276].

Благодаря успехам в разработке численных методов решения краевых задач для соответствующих уравнений математической физики, опыту применения численных методов к расчетам характеристик движения воды и переноса примесей в настоящее время сложилась ситуация, при которой определение параметров уравнений движения и переноса, особенно применительно к водотокам сложной формы сечения с неоднородной шероховатостью границ, вызывает больше трудностей и научных проблем, чем решение самих уравнений. Интересно отметить, что определение некоторых параметров математических моделей, например коэффициента продольной дисперсии, приводит в свою очередь к решению задач для уравнений математической физики, т.е. задач такого же класса, как и исходная.

Анализ состояния работ по созданию одномерных математических моделей гидродинамического типа процессов движения воды и переноса примесей в водотоках сложных ВХС позволил прийти к следующим основным выводам:

— обычно используемые уравнения движения воды и переноса примесей имеют недостаточную универсальность, поэтому не позволяют учитывать возникновение нетранзитных зон, существенную неоднородность полей скоростей на поймах, что приводит к ограничениям возможностей моделирования паводков, половодий и особенно в экстремальных ситуациях;

— многие методики определения параметров уравнений движения воды и переноса примесей недостаточно универсальны и обоснованы, что вызывает большие погрешности моделирования и может явиться причиной отказа от его применения в сложных случаях;

— существующее программное обеспечение не позволяет автоматизировать многие трудоемкие этапы работ по математическому моделированию, что приводит к большим затратам на обработку пока и без того дорогостоящей первичной информации и на подготовку многочисленных результатов моделирования к инженерному анализу, во многих случаях делает практически нереальным моделирование процессов в больших ВХС.

Несмотря на отмеченные недостатки математических моделей гидродинамического типа, неоспоримая обоснованность научных предпосылок, положенных в основу их создания, ясность и строгость математических формулировок возникающих задач, возможность получения результатов моделирования с требуемой детализацией и точностью являются их большим преимуществом. Представляется, что в настоящее время совершенствование таких моделей и программного обеспечения для автоматизации их создания является актуальной и перспективной целью.

Данная работа посвящена описанию достаточно общих одномерных математических моделей движения воды и переноса примесей водотоками сложных ВХС. В ней уделено основное внимание уменьшению отмеченных выше недостатков гидродинамических моделей.

1 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВОДЫ

При выходе потока на пойму — явлении частом в водотоках сложных ВХС — из-за закустаренности, залесенности, неоднородной шероховатости и неровностей поверхности поймы возникают значительные нетранзитные зоны над теми ее частями, где сопротивления движению воды велики. Могут быть и другие причины возникновения нетранзитных частей в сечениях, например резкие сужения либо расширения потока. Естественно было бы изучать указанные особенности движения воды решением многомерных задач. Однако в связи с большой протяженностью систем водотоков и продолжительностью неустановившегося движения воды в настоящее время использование многомерной модели процесса движения воды во всей системе водотоков практически невозможно, а для решения широкого круга задач в этом и нет необходимости. Моделирование сложного процесса в обычной одномерной постановке задачи также затруднительно. В области нетранзитных зон вода практически не движется. Пренебрежение этой особенностью течения может привести к существенному завышению важнейших характеристик потока: ширины, площади живого сечения и, следовательно, пропускной способности водотока. При возникновении нетранзитных зон значительно увеличивается неоднородность распределения скоростей в сечении. Указанные особенности движения существенно влияют на режим системы водотоков, а их учет на основе широко используемых одномерных уравнений неустановившегося движения невозможен. Необходимы уравнения, позволяющие учесть нетранзитные зоны водотоков, высокую степень неоднородности распределения скоростей в сечениях.

Большая протяженность водотоков и, следовательно, разнообразие условий движения и влияющих факторов требуют учета воздействия ветра, кориолисова ускорения, изменения атмосферного давления и плотности воды.

Ниже представлен вывод более общих одномерных уравнений неустановившегося движения воды. Они позволяют полнее учесть перечисленные особенности течения в сложных условиях. Выполнен анализ уравнений, приведена математическая формулировка задачи, изложен метод ее решения.

1.1. Постановка задачи

На участках естественных водотоков во время половодий и паводков, а на участках искусственных водотоков в экстремальных ситуациях поток, как правило, выходит на пойму. Шероховатость поймы неоднородна и существенно изменяется в пространстве и времени. Поймы рек обычно покрыты различной растительностью, имеют большую ширину, могут быть плоскими с небольшими местными понижениями рельефа, старицами, малыми продольными уклонами. Движение воды в таких условиях осуществляется не по всей ширине поймы, а в отдельных ее частях. Возникают транзит-

Рис 1.1. Движение паводочной волны по закустаренной пойме
Фото А А Таратунина

ные и нетранзитные зоны, количество и размеры которых зависят от уровня воды на пойме, распределения и плотности растительности и других факторов. С течением времени поток на пойме формирует систему транзитных струй.

На рис. 1.1 зафиксирован момент движения паводочной волны по закустаренной пойме. На рисунке видно, что поток движется с большой скоростью по свободной от растительности части поймы (см. центральную часть фотографии). Скорости течения над закустаренной частью поймы значительно меньше, в отдельных зонах, возможно, близки к нулю. Естественно, что скорости движения воды зависят от местных глубин и плотности растительного покрова на пойме.

Нетранзитные зоны могут занимать значительную часть поймы [16, 77, 283, 284]. Конкретное местоположение даже основной транзитной зоны не всегда совпадает с надрусловой частью потока и определяется формой, наполнением сечений, распределением на пойме растительности, извилистостью, многорукавностью русел, т. е. местными морфометрическими и гидравлическими особенностями водотоков, сформированными многократным взаимодействием потока с руслом и поймой. Анализ аэрофотоснимков Белгипроводхоза и непосредственные инструментальные съемки ЦНИИКИВРом полей скоростей в паводок показали, что ширина нетранзитной части сечения меняется с изменением глубины на пойме. При некоторых средних глубинах она может быть большой и превосходить половину ширины водного сечения, однако при высоких уровнях нетранзитные зоны могут исчезнуть совсем. Одной из основных причин возникновения нетранзитных зон могут быть существенно различные над отдельными участками ложа водотока сопротивления движению потока по длине. Их можно выявить только специальными методами.

Нетранзитные зоны могут появляться и по другой причине — из-за резкого изменения сечений водотока. Они возникают в виде водоворотных областей перед гидротехническими сооружениями и за ними, за локальными участками пойм с большими коэффициентами шероховатости и т. п.

В настоящее время имеются [167, 187, 312, 376] методики их расчета при двумерной постановке задачи. Однако при моделировании водного режима сложных систем водотоков обычно нет необходимости детального учета плана течений на отдельных участках водотоков. В таких случаях нетранзитные зоны могут быть выделены приближенно.

Нетранзитные зоны уменьшают пропускную способность водотоков. Находящаяся в них вода в продольном движении практически не участвует, и зоны играют роль аккумулирующих емкостей. Занимая значительную часть сечения, нетранзитные зоны уменьшают площадь живого сечения, изменяют приведенный коэффициент шероховатости, модуль расхода и другие важнейшие характеристики потока и, следовательно, должны учитываться при математическом моделировании.

При возникновении многих транзитных зон на пойме, а именно такие течения образуются чаще всего, простейшая схематизация с разделением потока только на русловой и пойменный [320] недостаточно точно отражает процесс движения. Поэтому применительно к решению одномерной задачи необходимо создать методы выделения нетранзитных зон, определения приведенного коэффициента шероховатости, уточнения модуля расхода и др.

Неоднородность распределения скоростей в сложных сечениях вызывает существенное увеличение коррективов количества движения и кинетической энергии. В аналогичных случаях, согласно имеющимся обобщениям [343], коррективы могут значительно превосходить единицу. Следовательно, обычно принимаемое допущение о близости к единице коррективов становится неприемлемым.

При создании математической модели процесса движения воды в сложных ВХС упрощение уравнений путем пренебрежения некоторыми слагаемыми, например инерционными, недопустимо, поскольку при наложении волн оценить роль отдельных слагаемых заранее практически невозможно.

Протяженность систем требует тщательного определения расстояний как по причине их влияния на гидравлические потери, так и особенно на объем аккумуляции воды. В связи с извилистостью водотоков расстояния между створами зависят от уровней воды. Таким образом, создание одномерной математической модели неустановившегося движения воды в водных объектах сложных ВХС не является простым следствием математической модели неустановившегося движения воды на участке водотока даже в простейшей системе водотоков, а принципиально требует учета перечисленных выше особенностей течения воды.

В системах водотоков могут возникать прерывные волны — в случае разрушения водоподпорных сооружений, управления затворами и т. п. Они распространяются в водотоках на небольшие расстояния в окрестности сооружений и, быстро уполаживаясь, становятся непрерывными, а движение воды плавно изменяющимся. В этом смысле задача о расчете прерывных волн специфическая, для системы водотоков локальная, хотя во многих случаях весьма важная. Ей посвящены глубокие теоретические и экспериментальные исследования и создано программное обеспечение [37, 69—72, 111, 112, 194]. По этим причинам изложенное ниже относится в основном к плавно изменяющемуся движению.

В начальный период процесс затопления поймы обычно характеризуется многорукавностью течения, обусловленной сложным рельефом поймы. Хотя это сложное явление требует тщательного учета затопления и постепенного включения в процесс потока на пойме, чаще всего для обоснования инженерных решений этот период времени и режим не считаются лимитирующими, поэтому возможна одномерная схематизация потока. Однако если по каким-либо причинам процесс начального затопления пойм представляет интерес, то необходимо моделировать течения в закольцованных системах водотоков, что будет рассмотрено ниже.

1.2. Уравнения движения

В качестве исходных уравнений при создании одномерной математической модели неустановившегося движения воды обычно используют различные модификации уравнений Сен-Венана [7, 40, 78, 151, 306, 362]. Как отмечалось ранее, при наличии в сечениях нетранзитных частей непосредственное применение этих уравнений недостаточно обосновано как с качественной, так и с количественной стороны. С качественной стороны применение динамического уравнения мало обосновано потому, что в одном и том же сечении имеются транзитные и нетранзитные части, с количественной стороны — потому, что с большими погрешностями могут быть определены многие параметры уравнений — ширина и площадь живого сечения, коэффициент шероховатости, модуль расхода. Поэтому представляется целесообразной попытка обобщения одномерных уравнений на случай, когда возникают нетранзитные зоны.

При рассмотрении течения воды в русле с поймой Эббот [320] считал возможным принять предположение о том, что вода на

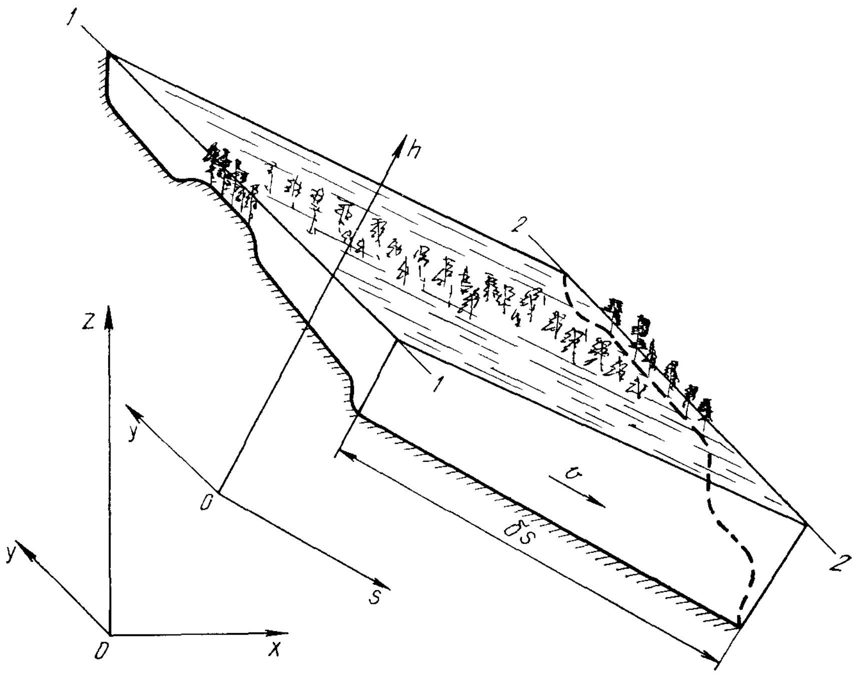


Рис. 1 2 Отсек водотока, ограниченный ложем русла, свободной поверхностью, сечениями *1—1* и *2—2*, находящимися на расстоянии δs и перпендикулярными линии минимальных отметок дна, и продольной вертикальной плоскостью, проходящей через линию минимальных отметок дна.

пойме только аккумулируется, а вся пойма является нетранзитной зоной. В С. Никифоровская [214] выполнила расчеты для участка р Иртыша в соответствии со схематизацией Эббота. Хотя она и не пришла к окончательным выводам относительно повышения точности расчетов, однако отметила, что предложение Эббота предпочтительнее как расчетной схемы, при которой не учитывается работа поймы вообще (получены уровни значительно выше наблюденных), так и расчетной схемы, при которой общая пропускная способность всей поймы определялась суммарно по обычным гидравлическим зависимостям (получены уровни значительно ниже наблюденных).

Поскольку в водотоке с неправильными формами сечения и неоднородной шероховатостью ложа может существовать несколько нетранзитных зон, естественно принять следующую более общую схематизацию течения. Поток в руслах сложной формы сечения может состоять из большого числа нетранзитных и транзитных зон. Последние взаимодействуют как с ложем водотока, так и с водными границами нетранзитных зон. Уровень воды в сечениях практически одинаков.

Для вывода одномерного уравнения непрерывности выделим некоторый отсек жидкости (рис. 1.2) и воспользуемся законом сохранения массы, который логично применить ко всему отсеку водотока, включая транзитные и нетранзитные зоны.

За время $\delta(t)$:

— через сечение *1—1* в отсек войдет масса воды $\rho Q \delta t$;

— через сечение *2—2* из отсека выйдет масса воды

$$\rho Q\,\delta t + \frac{\partial(\rho Q)}{\partial s}\,\delta s\,\delta t;$$

— изменение массы воды в отсеке за счет изменения уровня и плотности составит

$$\frac{\partial(\rho A_0)}{\partial t}\,\delta s\,\delta t;$$

— изменение массы в отсеке за счет бокового притока q_1 плотностью ρ_1 составит

$$\rho_1 q_1\,\delta s\,\delta t.$$

Из закона сохранения массы следует уравнение непрерывности

$$B_0\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial s}=\frac{\rho_1}{\rho}q_1-\frac{A_0}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{Q}{A_0}\,\frac{\partial \rho}{\partial s}\right). \qquad (1.1)$$

При однородной плотности оно примет вид

$$B_0\,\partial h/\partial t+\partial Q/\partial s=q_1.$$

Заметим, что $Q/A_0 \neq v$, если $A_0 \neq A$. Тогда содержимое скобок не равно нулю. Поэтому при изменении плотности воды, например за счет сбросов примесей или в окрестности устья водотока, впадающего в водоем с другой плотностью, вклад слагаемого в скобках может стать существенным.

Одномерное динамическое уравнение неустановившегося движения, встречающееся в литературе, имеет различные формы. При его выводе использовались законы сохранения импульса, энергии, многомерные динамические уравнения движения Отличия принимаемых при выводе допущений, используемых законов сохранения, входящих параметров приводят к несколько различным записям уравнений [7, 78, 125, 231, 293, 302, 306, 317].

Чаще всего уравнения движения отличаются коррективами количества движения и кинетической энергии. Встречаются уравнения без коррективов, с одним и двумя коррективами одновременно [7, 126, 231, 302, 317]. В практических расчетах коррективы принимают постоянными и близкими к единице. Зачастую это предположение делает различные записи уравнения тождественными. Однако оно ограничивает точность решений, поскольку известно, что коррективы могут существенно превосходить единицу [343]. При выводе уравнений многие авторы полагают, что угол наклона дна водотока мал. Это упрощает вывод уравнения, однако ограничивает возможности его использования. В системах водотоков имеются участки, где это предположение не выполняется. Иногда уравнения отличаются знаками слагаемых, учитывающих боковую приточность [214, 293]. Перечень недостатков можно было бы продолжить. Изложенное приводит к необходимости повторения вывода динамического уравнения неустановившегося движения воды, которое можно было бы использовать при возникновении нетранзитных зон над ложем водотока и которое позволило бы учесть большее количество факторов, влияющих на течение.

Обычно при выводе уравнений придерживаются следующего порядка: сначала применяют последовательно законы сохранения массы, импульса, момента импульса, энергии и, если этого недостаточно, используют уравнения движения [108]. Различными авторами использованы все пути, что привело к различным модификациям уравнений. Одномерное динамическое уравнение неустановившегося движения, полученное на основе закона сохранения импульса [7, 317], содержит один корректив количества движения; полученное на основе использования закона сохранения энергии [1, 126] — корректив кинетической энергии, иногда оба корректива [231]; полученное на основе использования многомерных уравнений движения [126] — пять коэффициентов. Однако, как показано в работах [124, 126], коэффициенты-коррективы появляются в результате осреднения по площади потока слагаемых уравнений с различными весами. Так как осреднение с различным весом есть преобразование, не связанное с допущениями или упрощениями, то его результат не зависит от весовой функции. В этом смысле одномерные уравнения, полученные из закона сохранения импульса и энергии, будут иметь одни и те же решения. Однако приближенность определения коррективов, предположение об их постоянстве приводят к различным результатам решения.

Возникает естественный вопрос, какому уравнению отдать предпочтение. Он тождествен вопросу, из какого закона сохранения целесообразнее получать одномерное динамическое уравнение движения.

При использовании закона сохранения энергии приходится учитывать работу внутренних диссипативных сил, что в общем случае вызывает пока значительные трудности в рассматриваемых сложных случаях.

Использование закона сохранения импульса упрощает решение задачи в связи со следующими обстоятельствами. Во-первых, в законе сохранения импульса имеем дело с количеством движения системы. Известно, что количество движения системы — величина аддитивная, т.е. главный вектор количества движения системы равен сумме количеств движения ее частей независимо от того, взаимодействуют они между собой или нет. Это свойство позволяет просто суммировать количества движений частей при определении составляющих главного вектора механической системы. Во-вторых, внутренние силы взаимодействия между частями системы в соответствии с третьим законом Ньютона попарно одинаковы и противоположны по направлению. Но тогда главный вектор внутренних сил равен нулю. Следовательно, необходимо учитывать только внешние силы, действующие на систему. В-третьих, поскольку между коррективами количества движения (β) и энергии (α) существует известное соотношение $\delta\alpha \approx 3\delta\beta$, то использование приближенного значения корректива количества движения при прочих равных условиях приведет к меньшей погрешности решения уравнений движения.

Изложенные обстоятельства приводят к заключению о целесообразности получения одномерного динамического уравнения неустановившегося движения из закона сохранения импульса.

Представляется логичным закон сохранения импульса применять только к транзитным зонам отсека жидкости, поскольку количество движения нетранзитных частей отсека было бы равно нулю, а импульс внешних сил формально был бы определен неверно. Например, в нетранзитной зоне была бы определена сила трения о дно. Вычисленная через характеристики водного сечения, она не была бы равна нулю, хотя в нетранзитной зоне продольное движение практически отсутствует. Аналогичное можно сказать и о воздействии на движение других факторов. Очевидно, что схематизация потока с выделением нетранзитных зон позволяет уточнить описание течения в сложных случаях.

Заметим, что, принимая решение о выделении нетранзитных зон при одномерной схематизации движения в водотоках, мы фактически выделяем те области потока, где силы сопротивления движению воды существенно превосходят все другие силы. В случаях возникновения водоворотных областей — другой разновидности нетранзитных зон — принимаем, что силы инерции в транзитной зоне на участке водоворота существенно превосходят все другие силы. Эти соглашения приводят к более однородным распределениям в транзитной зоне характеристик движения, свойственным гидравлическим постановкам задач.

Запишем общую формулировку закона сохранения импульса в форме основного уравнения Мещерского для динамики материальной точки переменной массы [186]. В уравнении учитываются причины изменения импульса — влияние сил взаимодействия и инерции вследствие изменения ее массы:

$$M\frac{du}{dt} = \mathbf{F} + \frac{dM}{dt}(w_0 - u).$$

Перепишем уравнение в виде

$$d(Mu)/dt = \mathbf{F} + w_0\, dM/dt, \qquad (1.2)$$

где Mu — импульс (количество движения) материальной точки; $w_0\, dM$ — импульс (количество движения) присоединенной массы.

Обобщение уравнения динамики материальной точки переменной массы на случай системы частиц принципиальных затруднений не вызывает, поскольку количество движения — величина аддитивная, т. е. главный вектор количества движения системы равен сумме количеств движения ее частей, а в соответствии с третьим законом Ньютона главный вектор внутренних сил равен нулю, и таким образом главный вектор сил взаимодействия является главным вектором только внешних сил. Следовательно, на уравнение (1.2) можно смотреть как на форму записи закона сохранения импульса замкнутой системы частиц.

Рассмотрим механическую систему частиц воды, движущихся со скоростью $v(s, t)$ через отсек (см. рис. 1.2).

Применительно к отсеку жидкости в проекции на ось s уравнение (1.2) можно переписать в виде

$$d\mathbf{J}(s, t)/dt = \mathbf{F} + w_0\, dM/dt,$$

где $\mathbf{J}(s, t) = \sum\limits_{1}^{n} m_i u_i$ — проекция на ось s главного вектора импульса системы частиц массы воды, находящейся в отсеке.

Раскрывая в уравнении (1.2) полную производную, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{J}(s, t)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{J}(s, t)}{\partial s}\frac{ds}{dt} = \mathbf{F} + w_0 \frac{dM}{dt}. \qquad (1.3)$$

Локальная производная характеризует изменение количества движения за время δt в самом отсеке.

Количество движения жидкости, находящейся в отсеке, $\rho A v\, \delta s = \rho Q\, \delta s$. Следовательно,

$$\frac{\partial \mathbf{J}(s, t)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho Q)}{\partial t} ds = \rho \frac{\partial Q}{\partial t} ds + Q \frac{\partial \rho}{\partial t} ds. \qquad (1.4)$$

Конвективная составляющая полной производной характеризует изменение количества движения в отсеке за время δt за счет его переноса через границы сечения *1—1* и *2—2*.

Количество движения потока, проходящего через сечение за время δt,

$$\beta \rho A v\, \delta t v = \rho\beta (Q^2/A)\, \delta t,$$

тогда

$$\frac{\partial \mathbf{J}(s, t)}{\partial s}\frac{ds}{dt} = 2\rho\beta v \frac{\partial Q}{\partial s} ds - \rho\beta B v^2 \frac{\partial h}{\partial s} ds - \rho\beta v^2 \frac{\partial A}{\partial s}\Big|_h ds +$$

$$+ \rho \frac{Q^2}{A}\frac{\partial \beta}{\partial s} ds + \beta \frac{Q^2}{A}\frac{\partial \rho}{\partial s} ds, \qquad (1.5)$$

где $\left.\frac{\partial A}{\partial S}\right|_h$ — производная при постоянном h.

Пусть к отсеку длиной δs присоединяется масса воды δM, расход которой равен Q_1. Тогда масса, присоединенная за время δt, будет равна

$$\delta M = \rho_1 Q_1 \delta t.$$

Изменение проекции главного вектора (количества движения) присоединенной массы

$$w_0\, dM/dt = \rho_1 w_0 Q_1. \tag{1.6}$$

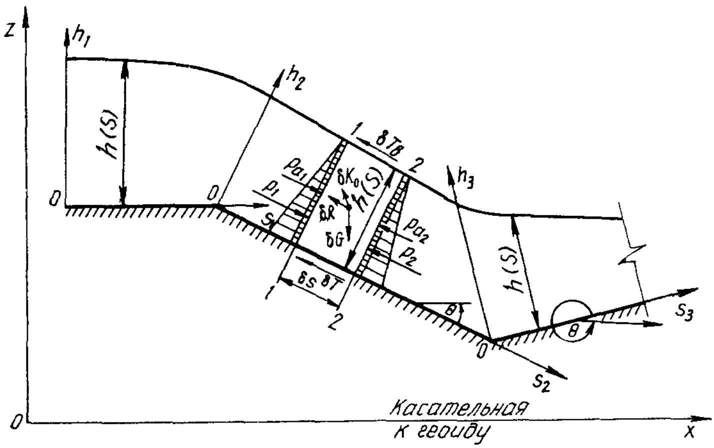


Рис. 1.3. Силы, действующие на выделенный отсек жидкости, и схема отсчета расстояний в системе координат (s, h) и (x, z) и угла θ.

Из составляющих главного вектора **F** внешних сил, воздействующих на выделенный отсек (рис. 1.3), учтем проекции на ось s следующих сил: веса жидкости δG, трения о ложе русла δT, равнодействующей сил давления в живых сечениях *1—1* и *2—2* $\delta P = P_2 - P_1$, реакции поверхности ложа русла δR, ветра $\delta T_в$, атмосферного давления $\delta P_a = P_{a2} - P_{a1}$, кориолисова ускорения δK_0.

Проекция веса жидкости

$$\delta G = \rho g A\, \delta s \sin\theta.$$

Сила трения о дно

$$\delta T = -\tau_0 \chi\, \delta s.$$

Заметим, что если в отсеке не выделить транзитные зоны, то при определении среднего значения касательного напряжения τ_0 в площадь будет включена вся поверхность ложа водотока, в том числе и под нетранзитными зонами, где вода практически находится в покое и касательное напряжение близко к нулю. Это приведет к занижению среднего значения τ_0. Аналогичное можно сказать относительно смоченного периметра χ, при определении которого исключаются части периметра сечения, находящиеся под нетранзитными зонами, но включаются жидкие границы между транзитными и нетранзитными зонами.

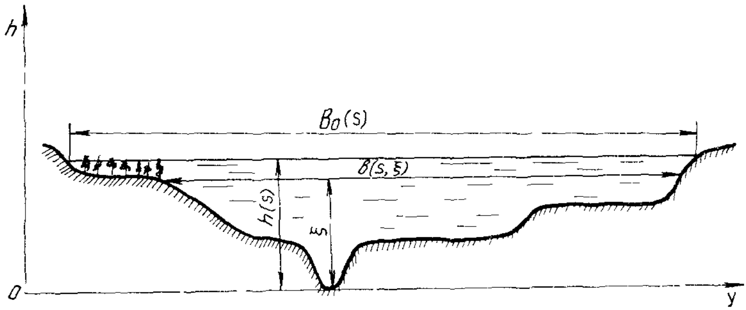


Рис. 1.4. К определению силы давления в сечении.

О влиянии нестационарности на касательные напряжения на стенке, на гидравлические сопротивления имеются противоречивые данные.

В большинстве работ по неустановившимся течениям принимается гипотеза о квазистационарности течения: считается, что гидравлические сопротивления при неустановившемся движении подчиняются тем же закономерностям, что и при установившемся [114, 123, 166, 234, 235]. Имеются экспериментальные данные, которые подтверждают эту гипотезу в весьма широких пределах изменения ускорений — до 7 м/с^2 [234, 326]. Эти пределы практически недостижимы в обычных условиях течения в открытых потоках. Состояние изученности гидравлического сопротивления при неустановившемся движении пока не позволяет отказаться от гипотезы квазистационарности [124]. По-видимому, при изучении течений в обычных условиях в этом нет необходимости, тем более что имеются доказательства о влиянии нестационарности на гидравлические сопротивления лишь при больших ускорениях и при колебаниях с частотами в несколько герц [234, 326]. Изложенное позволяет воспользоваться гипотезой о квазистационарности неустановившегося движения. Тогда

$$\delta T = -\rho g R \frac{Q|Q|}{K^2} \chi \delta s = -\rho g A \frac{Q|Q|}{K^2} \delta s.$$

Равнодействующая сил давления реакции поверхности ложа русла δR и сил давления в живых сечениях *1—1* и *2—2*

$$\delta P = \delta R - \frac{\partial P}{\partial s} \delta s.$$

Выполним вычисления, следуя в основном работам [37, 293]. Силу давления на живое сечение (рис. 1.4) можно вычислить следующим образом:

$$P(s) = g\cos\theta \int_0^{h(s)} \rho(s, \xi)(h(s) - \xi)\, b(s, \xi)\, d\xi.$$

Выполнив дифференцирование интеграла по параметру s и приняв, что поток хорошо перемешан и плотность воды постоянна по глубине, получим

$$\frac{\partial P(s)}{\partial s} = g\cos\theta\left(\frac{\partial\rho}{\partial s}\int_0^{h(s)} (h(s, \xi) - \xi)\, b(s, \xi)\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \rho g\cos\theta\cdot A(s)\frac{\partial h(s)}{\partial s}\right) + \rho\int_0^{h(s)} (h(s, \xi) - \xi)\frac{\partial b(s, \xi)}{\partial s}\, d\xi.$$

Поскольку

$$\delta R = \rho g\cos\theta\cdot\int_0^{h(s)} (h(s, \xi) - \xi)\frac{\partial b(s, \xi)}{\partial s}\,\delta\xi\,\delta s,$$

то

$$\delta P = -\rho g\cos\theta\cdot A(s)\frac{\partial h(s)}{\partial s}\delta s - g\cos\theta\cdot\frac{\partial\rho}{\partial s}\int_0^{h(s)} (h(s) - \xi)\, b(s, \xi)\, d\xi\,\delta s.$$

Очевидно, что интеграл в последнем выражении зависит от формы сечения. По физическому смыслу он выражает силу давления на сечение при удельном весе жидкости, равном единице.

Введем обозначение

$$\mathbf{P}_1 = \int_0^{h(s)} (h(s) - \xi)\, b(s, \xi)\, d\xi,$$

тогда

$$\delta P = -\rho g\cos\theta\cdot A(s)\frac{\partial h(s)}{\partial s}\delta s - g\cos\theta\cdot\mathbf{P}_1\frac{\partial\rho}{\partial s}\delta s.$$

Если бы изменение плотности по глубине было существенным и известным, то

$$\delta P = -g\cos\theta\cdot\frac{\partial h(s)}{\partial s}\int_0^{h(s)} \rho(s, \xi)\, b(s, \xi)\, d\xi\,\delta s -$$

$$- g\cos\theta\cdot\int_0^{h(s)} (h(s) - \xi)\, b(s, \xi)\frac{\partial\rho(s, \xi)}{\partial s}\, d\xi\,\delta s.$$

Очевидно, что при известном изменении плотности по глубине для заданного сечения интегралы вычисляются. Однако в дальнейшем этой детализацией заниматься не будем.

Силу воздействия ветра на свободную поверхность отсека можно определить по зависимости вида [246, 247]

$$\delta T_{\text{в}} = \rho \xi \, | w | \, w_1 B \, \delta s.$$

Силу воздействия атмосферного давления на отсек можно определить, пренебрегая непараллельностью поверхности воды оси s, по зависимости

$$\delta P_{\text{a}} = -A \frac{\partial p_{\text{a}}}{\partial s} \delta s.$$

Силу воздействия на отсек кориолисова ускорения δK_0 можно, как известно, определить следующим образом. Если φ — географическая широта, на которой находится отсек, а ω — угловая скорость вращения Земли, то угловая скорость вращения вокруг оси, нормальной к поверхности Земли, составляет $\omega \sin \varphi$. Тогда вращение вызывает силу, действующую на единицу массы, $2\omega v \sin \varphi$ и

$$\delta K_0 = 2\rho\omega v \sin \varphi \cos \theta \cdot A \, \delta s.$$

Подставляя выражения (1.4)—(1.6) и составляющие главного вектора внешних сил в уравнение (1.3), сокращая его на $\rho \, \delta s$, приводя подобные и используя соотношение $C = \sqrt{gH} = \sqrt{gA/B}$, получаем динамическое уравнение движения.

Таким образом, для математического моделирования в одномерной постановке задачи плавно изменяющегося неустановившегося движения воды в водотоках сложных ВХС с учетом влияния нетранзитных зон, корректива количества движения, распределенной приточности, ветра, атмосферного давления, неоднородной плотности воды и кориолисова ускорения может быть использована следующая система дифференциальных уравнений:

$$B_0 \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{\rho_1}{\rho} q_1 - \frac{A_0}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{Q}{A_0} \frac{\partial \rho}{\partial s} \right); \qquad (1.7)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2\beta v \frac{\partial Q}{\partial s} + (c^2 \cos \theta - \beta v^2) B \frac{\partial h}{\partial s} = gA \sin \theta -$$

$$- gA \frac{Q \, | Q |}{K^2} + \beta v^2 \frac{\partial A}{\partial s} \Big|_h - \frac{Q^2}{A} \frac{\partial \beta}{\partial s} + \xi B \, | w | \, w_1 -$$

$$- \frac{A}{\rho} \frac{\partial p_{\text{a}}}{\partial s} + \frac{\rho_1}{\rho} w_0 q_1 + 2\omega v A \sin \varphi \cos \theta - g \mathrm{P}_1 \frac{\partial \rho}{\rho \, \partial s} \cos \theta -$$

$$- \frac{Q}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \beta v \frac{\partial \rho}{\partial s} \right).$$

1.3. Математическая формулировка задачи

Для упрощения записи системы (1.7) введем следующие обозначения:

$$q_2 = \left(\frac{\rho_1}{\rho} - 1\right) q_1 - \frac{A_0}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{Q}{A_0}\frac{\partial \rho}{\partial s}\right), \quad q = q_1 + q_2;$$

$$\Phi_1 = gA\sin\theta - gA\frac{Q\,|\,Q\,|}{K^2} + \beta v^2 \frac{\partial A}{\partial s}\Big|_h - \frac{Q^2}{A}\frac{\partial \beta}{\partial s} + w_0 q_1;$$

$$\Phi_2 = \xi B\,|\,w\,|\,w_1 - \frac{A}{\rho}\frac{\partial p_a}{\partial s} + \left(\frac{\rho_1}{\rho} - 1\right) w_0 q_1 + 2\omega v A \sin\varphi\cos\theta -$$

$$- gP_1\frac{\partial \rho}{\rho\,\partial s}\cos\theta - \frac{Q}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \beta v\frac{\partial \rho}{\partial s}\right), \quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_2,$$

причем $q_2 \neq 0$ и $\Phi_2 \neq 0$, если необходимо учесть влияние ветра, атмосферного давления, кориолисова ускорения и неоднородной плотности воды.

Тогда система (1.7) будет иметь вид:

$$B_0\,\partial h/\partial t + \partial Q/\partial s = q; \qquad (1.7')$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + 2\beta v\frac{\partial Q}{\partial s} + (c^2\cos\theta - \beta v^2)\,B\,\frac{\partial h}{\partial s} = \Phi.$$

Для установления типа системы уравнений движения запишем (1.7) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\beta v & (c^2\cos\theta - \beta v^2)\,B \\ 0 & B_0 & 1 & 0 \\ dt & 0 & ds & 0 \\ 0 & dt & 0 & ds \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Q}{\partial t} \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial s} \\ \dfrac{\partial h}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi \\ q \\ dQ \\ dh \end{pmatrix}.$$

Линии, вдоль которых определитель, состоящий из элементов матрицы, равен нулю, являются характеристиками системы [73]. Раскрыв определитель, получим

$$ds/dt = \beta v \pm \sqrt{\beta^2 v^2 + (B/B_0)\,(c^2\cos\theta - \beta v^2)}. \qquad (1.8)$$

Введем обозначения уравнений (1.8) соответственно

$$\frac{ds}{dt} = \begin{bmatrix} + & + \\ - & - \end{bmatrix}.$$

В подкоренном выражении (1.8) $\beta > 1$, $0 < B/B_0 \leqslant 1$. Следовательно, оно больше нуля. Тогда система (1.7) имеет две действительные характеристики и является гиперболической.

В частном случае, когда $\beta = 1$, $B = B_0$, $\cos\theta \approx 1$, уравнения (1.8) приводятся к общеизвестным уравнениям характеристик

$$ds/dt = v \pm c.$$

Следовательно, при учете β, $B_0 \neq B$, $\cos\theta$ скорости распространения фронтов волн-возмущений отличаются от скоростей, вычисленных по общеизвестным уравнениям. Поскольку ход характеристики важен при назначении граничных условий, выясним, при каких условиях обе характеристики могут иметь один и тот же знак. Для этого необходимо, чтобы абсолютное значение корня было меньше абсолютного значения βv. Но тогда

$$(B/B_0)(c^2\cos\theta - \beta v^2) < 0, \quad \text{т. е.} \quad v^2 > c^2\,\frac{\cos\theta}{\beta}.$$

Следовательно,

$$|v| > c\sqrt{\frac{\cos\theta}{\beta}}.$$

Таким образом, если

$$v > c\sqrt{\frac{\cos\theta}{\beta}} \quad \text{или} \quad v < -c\sqrt{\frac{\cos\theta}{\beta}},$$

то характеристики имеют один и тот же знак; следовательно, или обе уходят с границы, или обе приходят на границу.

Если $v = \pm c\sqrt{\frac{\cos\theta}{\beta}}$, то одна из характеристик остается в сечении. Следовательно, скорость распространения малых возмущений

$$c_1 = \pm c\sqrt{\frac{\cos\theta}{\beta}}. \tag{1.9}$$

Очевидно, что если учитывать корректив количества движения β и уклон дна θ, то скорость распространения малых возмущений уменьшится, поскольку

$$c_1 < c = \pm\sqrt{qA/B}.$$

Умножив первое уравнение системы (1.7′) на $-\beta v + \sqrt{\beta^2 v^2 + (B/B_0)(c^2\cos\theta - \beta v^2)}$, а затем на $-\beta v - \sqrt{\beta^2 v^2 + (B/B_0)(c^2\cos\theta - \beta v^2)}$ и сложив поочередно со вторым, получим уравнения движения в характеристической форме:

$$\begin{aligned}
&\partial Q/\partial t + [+\ \ -]\,\partial Q/\partial s - [+\ \ +]\,B_0\,\partial h/\partial t + \\
&+ (c^2\cos\theta - \beta v^2)\,B\,\partial h/\partial s = \Phi - q\,[+\ \ +]; \\
&\partial Q/\partial t + [+\ \ +]\,\partial Q/\partial s - [+\ \ -]\,B_0\,\partial h/\partial t + \\
&+ (c^2\cos\theta - \beta v^2)\,B\,\partial h/\partial s = \Phi - q\,[+\ \ -].
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Каждую систему водотоков можно представить в виде ориентированного связного графа, состоящего из дуг и вершин [24, 104]. Каждая дуга исходит из вершины и входит в другую вершину, к каждой вершине подходит не менее одной дуги. Если к вершине подходит только одна дуга, то вершина является концевой. Применительно к системам водотоков ее удобно называть внешней вершиной. Обычно из внешних вершин у древовидных графов выделяется одна, которую называют корнем [300]. От корневой точки ведется отсчет расстояний. Другие вершины характеризуются тем, что к ним подходит более одной дуги, т. е. они имеют более одной смежной вершины,— их удобно называть внутренними. Обычно граф задается матрицей инцидентности, например с количеством строк, равным числу дуг, и количеством столбцов, равным количеству вершин. В ней можно указать длину дуги, т. е. участок водотока, и знаком — признак того, исходит дуга из вершины или входит в нее. Часто используется операция разбиения дуги, сводящаяся к ее удалению и добавлению вершины, которая соединяется дугами с вершинами удаленной дуги.

При формулировке задач на графах целесообразно различать концы дуг, функционально по-разному примыкающих к вершинам графа, а именно: конец дуги $\dot{n}1$, из которого поток направлен из дуги $\overline{n1}$ в вершину $\bar{m}$, и конец дуги $n2$, в который поток направлен из вершины $\bar{m}$ на дугу $\overline{n2}$. В первом случае вершина $\bar{m}$ будет являться вершиной-стоком, во втором — вершиной-источником.

Известно [73], что математическая формулировка задачи для системы уравнений гиперболического типа зависит от количества уходящих с границы характеристик. При спокойных плавно изменяющихся течениях одна из характеристик приходит, другая уходит с границы, поэтому назначается по одному из граничных условий.

Таким образом, математическое моделирование неустановившегося спокойного плавно изменяющегося движения воды в системах водотоков может привести к необходимости решения на графе следующих краевых задач:

найти решение $h(s, t)$ и $Q(s, t)$ гиперболической системы уравнений

$$B_0\, \partial h/\partial t + \partial Q/\partial s = q;$$

$$\partial Q/\partial t + 2\beta v\, \partial Q/\partial s + (c^2 \cos\theta - \beta v^2)\, B\, \partial h/\partial s = \Phi,$$

на каждой из $\bar{n}$ дуг графа в области

$$s_1^{\bar{n}} < s < s_\backslash^{\bar{n}}, \quad t > t_0,$$

удовлетворяющее следующим краевым условиям:

начальным — на каждой $\bar{n}$-й дуге графа

$$Q^{\bar{n}}(s,\ t_0) = \varphi^{\bar{n}}(s), \quad h^{\bar{n}}(s,\ t_0) = \psi^{\bar{n}}(s);$$

· *граничным — на $n1$ конце $\overline{n1}$-х дуг ($n2$ концах $\overline{n2}$-х дуг), для которых вершина $\bar{m}$ является вершиной-стоком (вершиной-источником) с учетом k сосредоточенных источников $Q_{\bar{m}}^{k}$, для каждой вершины:*

примыкания

$$Q_{\bar{m}}^{\overline{n1}} = \varphi_{\bar{m}}^{\overline{n1}}(t), \text{ или } h_{\bar{m}}^{\overline{n1}} = \psi_{\bar{m}}^{\overline{n1}}(t), \text{ или } Q_{\bar{m}}^{\overline{n1}} = \eta\left(h_{\bar{m}}^{\overline{n1}}\right);$$

$$Q_{\bar{m}}^{\overline{n2}} = \varphi_{m}^{\overline{n2}}(t), \text{ или } h_{\bar{m}}^{\overline{n2}} = \psi_{m}^{\overline{n2}}(t), \text{ или } Q_{\bar{m}}^{\overline{n2}} = \eta\left(h_{\bar{m}}^{\overline{n2}}\right);$$

$$h_{\bar{m}}^{\overline{n1}} = h_{\bar{m}}^{\overline{n2}} = h_{\bar{m}}(t);$$

баланса расходов

$$\sum_{1}^{n1} Q_{\bar{m}}^{\overline{n1}} - \sum_{1}^{n2} Q_{\bar{m}}^{\overline{n2}} + \sum_{1}^{k} Q_{\bar{m}}^{k} = 0.$$

Отметим, что обычно на концах $\overline{n2}$-х дуг, примыкающих к внешним вершинам-источникам, назначается естественное условие $Q_{\bar{m}}^{\overline{n2}} = \varphi_{\bar{m}}^{\overline{n2}}(t)$, а на концах $\overline{n1}$-х дуг, примыкающим к внешним вершинам-стокам, назначается условие $Q_{m}^{\overline{n1}} = \eta(h_{\bar{m}}^{\overline{n1}})$. Условия других видов для внешних вершин являются более жесткими и требуют весьма точных морфометрических, гидравлических и гидрологических данных по объекту моделирования. Возникают задачи с другими граничными условиями, моделирующими режимы функционирования водопроводящих трактов сооружений, энергетического оборудования, аккумулирующих емкостей и т. п. [41, 380]. Некоторые из задач будут рассмотрены ниже.

В случае бурных потоков обе характеристики или уходят с границы, или приходят на границу. Тогда назначаются два или не назначается ни одного граничного условия [37, 148, 149, 307]. Однако эти специальные вопросы здесь рассматриваться не будут.

1.4. Метод решения задачи

Большинство коэффициентов и свободные члены системы уравнений (1.7) произвольно изменяются в пространстве и времени. Задание их в аналитической форме затруднительно. Поэтому они задаются, как правило, табличными функциями. В этом одна из причин применения численных методов решения задачи. В данном случае использован метод конечных разностей. Применительно к одномерным задачам метод конечных элементов вычислительных преимуществ не имеет [154], но сложнее в реализации.

Дифференциальные операторы аппроксимировались разностными. Для этого на каждой дуге выбирались узлы разностной сетки с некоторыми шагами по пространству Δs_i. Использовалась шеститочечная разностная схема с весами σ и (1 — σ). На рис. 1.5 представлена граф-схема сложной системы водотоков, которая имеет притоки третьего порядка и закольцованные участки. Система координат правая, ось s — ветвящаяся. Номера узлов сетки

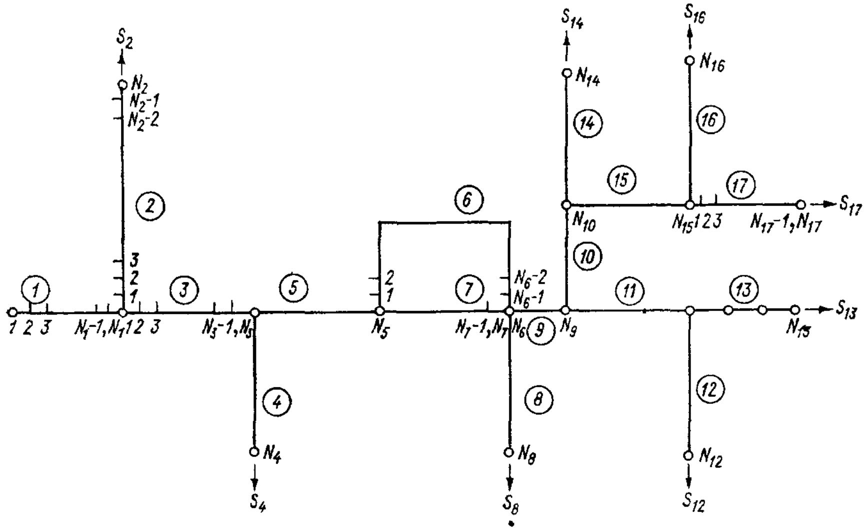


Рис 1 5 Граф сложной системы водотоков

дуг возрастают на каждой дуге с увеличением расстояния от устья (корня графа).

Дифференциальные уравнения аппроксимировались разностными на сетках, представленных на рис. 1.6. Все узлы разностной сетки дуги делились на две группы: внутренние (рис. 1.6 *а*) и гра-

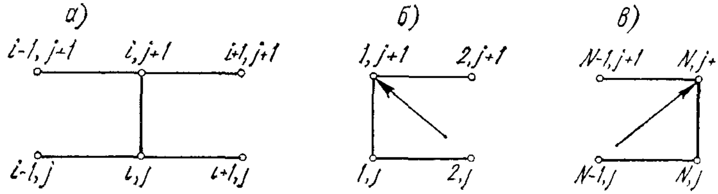


Рис 1 6 Взаимное расположение узлов разностной схемы

а — для внутренней области, *б* — на левой границе *в* — на правой границе

ничные (рис. 1 6 *б*, *в*), совпадающие с концами дуг. Использованная разностная схема обладает определенной универсальностью, например упрощает переход к явной схеме, которая применена в дальнейшем для определения граничного условия в задаче о переносе, позволяет регулировать вклад слагаемых на верхнем и нижнем слоях по времени Вычисления организованы таким образом, что при $\sigma=1$ коэффициенты уравнений, содержащие множитель $(1-\sigma)$, не вычисляются. Тогда разностная схема превращается в неявную четырехточечную, широко используемую схему ИГиЛ СО АН СССР.

Система уравнений (1.7) квазилинейная из-за наличия в правой части динамического уравнения нелинейных слагаемых $Q|Q|$ и Q^2. В работах [40, 306] показано, что для обеспечения абсолютной устойчивости неявной разностной схемы необходимо слагаемое $Q|Q|/K^2$ вычислять на $j+1$-м слое.

Линеаризуем второе уравнение разложением в ряд Тейлора нелинейных слагаемых:

$$\frac{Q|Q|}{K^2}_{i,\,j+1}=\frac{Q|Q|}{K^2}_{i,\,j}+\frac{2|Q|}{K^2}_{i,\,j}\Big((Q_{i,\,j+1}-Q_{i,\,j})-$$

$$-\left(\frac{Q}{K}\,\frac{\partial K}{\partial h}\right)_{i,\,j}(h_{i,\,j+1}-h_{i,\,j})\Big); \tag{1.11}$$

$$Q^2_{i,\,j+1}=-Q^2_{i,\,j}+2Q_{i,\,j+1}Q_{i,\,j}.$$

Чтобы не загромождать изложение непринципиальными для решения задачи деталями, не будем расписывать разностные отношения для учета воздействия ветра, атмосферного давления, неоднородной плотности и кориолисова ускорения, характеристики которых содержатся в слагаемых q_2 и Φ_2. Они не имеют производных от искомых функций, поэтому войдут в свободные члены уравнений. Поскольку эти факторы учитываются не всегда, соответствующие слагаемые вносятся в матричные коэффициенты по признакам, причем на различных слоях в зависимости от особенностей решаемых задач и наличия данных. В этом смысле слагаемые q_2 и Φ_2, содержащие Q, отнесены в свободные члены разностных уравнений условно, с целью упрощения записей разностных уравнений, и поэтому не индексируются по j.

Для внутренних узлов сетки замена дифференциальных операторов разностными с учетом зависимости (1.11) приводит к системе алгебраических уравнений:

$$B_{0i,\,j}\,\frac{h_{i,\,j+1}-h_{i,\,j}}{\Delta t}+\sigma\,\frac{Q_{i+1,\,j+1}-Q_{i-1,\,j+1}}{2\,\Delta s}+$$

$$+(1-\sigma)\,\frac{Q_{i+1,\,j}-Q_{i-1,\,j}}{2\,\Delta s}=q_{1i,\,j}+q_{2i};$$

$$\tag{1.12}$$

$$\frac{Q_{i,\,j+1}-Q_{i,\,j}}{\Delta t}+2\,(\beta v)_{i,\,j}\Big(\sigma\,\frac{Q_{i+1,\,j+1}-Q_{i-1,\,j+1}}{2\,\Delta s}+$$

$$+(1-\sigma)\,\frac{Q_{i+1,\,j}-Q_{i-1,\,j}}{2\,\Delta s}\Big)+(c^2\cos\theta-\beta v^2)_{i,\,j}\times$$

$$\times B_{i,j}\left(\sigma\frac{h_{i+1,j+1}-h_{i-1,j+1}}{2\Delta s}+(1-\sigma)\frac{h_{i+1,j}-h_{i-1,j}}{2\Delta s}\right)=$$

$$=g(A\sin\theta)_{i,j}-g\left(\frac{A}{K^2}Q|Q|\right)_{i,j}-2g\left(\frac{A}{K^2}|Q|\right)_{i,j}Q_{i,j+1}+$$

$$+2g\left(\frac{A}{K^2}Q|Q|\right)_{i,j}+2g\left(\frac{A}{K^2}|Q|\frac{Q}{K}\frac{\partial K}{\partial h}\right)_{i,j}h_{i,j+1}-$$

$$-2g\left(\frac{A}{K^2}|Q|\frac{Q}{K}\frac{\partial K}{\partial h}\right)_{i,j}h_{i,j}+(\beta v^2)_{i,j}\times$$

$$\times\frac{A_{i+1}-A_{i-1}}{2\Delta s}\bigg|_{h\in\min h_{i-1,j},\,h_{i+1,j}}+\left(\frac{Q^2}{A}\right)_{i,j}\left(\frac{\beta_{i+1,j}-\beta_{i-1,j}}{2\Delta s}\right)-$$

$$-\left(\frac{2Q}{A}\right)_{i,j}\left(\frac{\beta_{i+1,j}-\beta_{i-1,j}}{2\Delta s}\right)Q_{i,j+1}+(w_0q_1)_{i,j}+\Phi_{2i}.$$

Сгруппировав слагаемые относительно искомых функций Q и h на верхнем слое, выполнив некоторые преобразования и введя обозначения

$$(\quad)=(c^2\cos\theta-\beta v^2),\quad H=\Delta t/\Delta s,$$

систему (1.12) можем записать в матричном виде:

$$A_iu_{i-1}+B_iu_i+C_iu_{i+1}=D_i,\tag{1.13}$$

где матрицы

$$A_i=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix};\quad B_i=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix};\quad C_i=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix};$$

$$a_{11}=-(H/2)\sigma;\quad a_{12}=0;\quad a_{21}=-(\beta v)_{i,j}H\sigma;$$

$$a_{22}=-(\quad)_{i,j}B_{i,j}(H/2)\sigma;$$

$$b_{11}=0;\quad b_{12}=B_{0i,j};\quad b_{21}=1+\frac{2gA}{K^2}{}_{i,j}|Q|_{i,j}\Delta t+$$

$$+\left(\frac{2Q}{A}\right)_{i,j}\left(\frac{\beta_{i+1,j}-\beta_{i-1,j}}{2}\right)H;$$

$$b_{22}=-\frac{2gA}{K^2}{}_{i,j}|Q|_{i,j}\left(\frac{Q}{K}\frac{\partial K}{\partial h}\right)_{i,j}\Delta t;$$

$$c_{11}=(H/2)\sigma;\quad c_{12}=0;\quad c_{21}=(\beta v)_{i,j}H\sigma;\quad c_{22}=(\quad)B_{ij}(H/2)\sigma;$$

вектор

$$D_i=\begin{pmatrix}D_1\\D_2\end{pmatrix};$$

$$D_1=B_{0i,j}h_{i,j}-(H/2)(1-\sigma)Q_{i+1,j}+(H/2)(1-\sigma)Q_{i-1,j}+$$
$$+q_{i,j}\Delta t+q_{2i}\Delta t;$$

$$D_2=Q_{i,j}-\beta v_{i,j}H(1-\sigma)Q_{i+1,j}+\beta v_{i,j}H(1-\sigma)Q_{i-1,j}-$$
$$-(\quad)_{i,j}B_{i,j}(H/2)(1-\sigma)h_{i+1,j}+(\quad)_{i,j}B_{i,j}(H/2)(1-\sigma)h_{i-1,j}+$$
$$+g(A\sin\theta)_{i,j}\Delta t+(\beta v^2)_{i,j}(A_{i+1}-A_{i-1})\Big|_{h\in\min h_{i+1},h_{i-1}}(H/2)+$$
$$+g\left(\frac{AQ|Q|}{K^2}\right)_{i,j}\Delta t-2g\left(\frac{AQ|Q|}{K^3}\frac{\partial K}{\partial h}\right)_{i,j}h_{i,j}\Delta t+$$
$$+\left(\frac{Q^2}{A}\right)_{i,j}\frac{(\beta_{i+1,j}-\beta_{i-1,j})H}{2}+(w_0q_1)_{i,j}\Delta t+\Phi_2\Delta t;$$

векторы неизвестных u_{i-1}, u_i, u_{i+1}:

$$u_{i-1}=\begin{pmatrix}Q_{i-1,j+1}\\h_{i-1,j+1}\end{pmatrix};\quad u_i=\begin{pmatrix}Q_{i,j+1}\\h_{i,j+1}\end{pmatrix};\quad u_{i+1}=\begin{pmatrix}Q_{i+1,j+1}\\h_{i+1,j+1}\end{pmatrix}.$$

Разделим каждую i-ю дугу графа на $N-1$ интервалов. В результате на каждой дуге будет N_i узлов, причем на них $N-2$ внутренних и два узла граничных. Таким образом, на верхнем слое будем иметь $2N$ неизвестных. Для внутренних узлов из системы (1.12) будет получено $2(N-2)$ алгебраических уравнений. Следовательно, система незамкнута, так как число неизвестных на четыре больше числа уравнений. Поэтому систему уравнений дополним двумя граничными условиями — по одному на каждой границе для спокойных течений и двумя уравнениями (1.10) в характеристическом виде для приходящей на соответствующую границу характеристики.

Для левой граничной точки характеристическому направлению, приходящему на левую границу, соответствует первое уравнение системы (1.10). Его разностная аппроксимация при использовании схемы расположения узлов (см. рис. 1.6 *б*) имеет вид

$$\frac{Q_{1,j+1}-Q_{1,j}}{\Delta t}+[+\quad-]_{1,j}\left(\frac{Q_{2,j+1}-Q_{1,j+1}}{\Delta s}\sigma+\right.$$
$$\left.+\frac{Q_{2,j}-Q_{1,j}}{\Delta s}(1-\sigma)\right)-[+\quad+]_{1,j}B_{01,j}\frac{h_{1,j+1}-h_{1,j}}{\Delta t}+$$
$$+(\quad)_{1,j}B_{1,j}\left(\frac{h_{2,j-1}-h_{1,j-1}}{\Delta s}\sigma+\frac{h_{2,j}-h_{1,j}}{\Delta s}(1-\sigma)\right)=$$
$$=g(A\sin\theta)_{1,j}-g\left(\frac{A}{K^2}Q|Q|\right)_{1,j}-2g\left(\frac{A}{K^2}|Q|\right)_{1,j}Q_{1,j+1}+$$

$$+2g\left(\frac{A}{K^2}Q\,|Q|\right)_{1,j}+2g\left(\frac{A}{K^2}|Q|\frac{Q}{K}\frac{\partial K}{\partial h}\right)_{1,j}h_{1,j+1}-$$

$$-2g\left(\frac{A}{K^2}|Q|\frac{Q}{K}\frac{\partial K}{\partial h}\right)_{1,j}h_{1,j}+(\beta v^2)_{1,j}\frac{A_2-A_1}{\Delta s}\Bigg|_{h\in\min h_1,\,h_2}+$$

$$+\left(\frac{Q^2}{A}\right)_{1,j}\left(\frac{\beta_{2,j}-\beta_{1,j}}{\Delta s}\right)-\left(\frac{2Q}{A}\right)_{1,j}\left(\frac{\beta_{2,j}-\beta_{1,j}}{\Delta s}\right)Q_{1,j+1}+$$

$$+(w_0q_1)_{1,j}+\Phi_{21}-[+\;\;+](q_{11,j}+q_{21}). \tag{1.14}$$

Представим систему в матричном виде для первого отрезка на левой границе:

$$A_1u_1+B_1u_2=D_1, \tag{1.15}$$

где

$$A_1=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix};\quad B_1=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix};$$

$$a_{11}=1-[+\;\;-]_{1,j}H\sigma+2g(A\,|Q|/K^2)_{1,j}\Delta t+(2Q/A)_{1,j}(\beta_{2,j}-\beta_{1,j})H,$$

$$a_{12}=-[+\;\;+]_{1,j}B_{01,j}-(\;\;)_{1,j}B_{1,j}H\sigma-2g\left(\frac{A}{K^2}|Q|\frac{Q}{K}\frac{\partial K}{\partial h}\right)_{1,j}\Delta t;$$

$$a_{21}=1\ \text{для}\ Q=\varphi_1(t)\ \text{и}\ Q=\eta_1(h)\ \text{или}\ a_{21}=0\ \text{для}\ h=\psi_1(t);$$

$$a_{22}=0\ \text{для}\ Q=\varphi_1(t),\ \text{или}\ a_{22}=1\ \text{для}\ h=\psi_1(t),\ \text{или}$$

$$a_{22}=-\frac{\partial Q}{\partial h}_{1,j}\ \text{для}\ Q=\eta(h);\quad b_{11}=[+\;\;-]_{1,j}H\sigma;$$

$$b_{12}=(\;\;)_{1,j}B_{1,j}H\sigma;\quad b_{21}=b_{22}=0\ \text{для}\ Q=\varphi_1(t);$$

$$h=\psi_1(t);\quad Q=\eta_1(h);$$

вектор

$$D_1=\begin{pmatrix}D_1\\ D_2\end{pmatrix};$$

$$D_1=Q_{1,j}-[+\;\;-]Q_{2,j}H(1-\sigma)+[+\;\;-]Q_{1,j}H(1-\sigma)-$$

$$-[+\;\;+]_{1,j}B_{01,j}h_{1,j}-(\;\;)_{1,j}B_{1,j}H(1-\sigma)h_{2,j}+$$

$$+(\;\;)_{1,j}B_{1,j}H(1-\sigma)h_{1,j}+g(A\sin\theta)_{1,j}\Delta t+g\left(\frac{A}{K^2}|Q|\,Q\right)_{1,j}\Delta t-$$

$$-2g\left(\frac{A}{K^2}|Q|\frac{Q}{K}\frac{\partial K}{\partial h}\right)_{1,j}h_{1,j}\Delta t+(\beta v^2)_{1,j}\times$$

$$\times(A_{2,j}-A_{1,j})\Big|_{h\in\min h_1,\,h_2}H+\left(\frac{Q^2}{A}\right)_{1,j}(\beta_{2,j}-\beta_{1,j})H+$$

$$+(w_0q_1)_{1,j}\Delta t+\Phi_{21}\Delta t-[+\;\;+](q_{11,j}+q_{21})\Delta t;$$

$$D_2=\varphi(t)_{1,\,j+1} \text{ для } Q=\varphi_1(t), \text{ или } D_2=\psi_1(t)_{1,\,j+1}$$

$$\text{для } h=\psi_1(t), \text{ или } D_2=Q_{1,\,j}-\frac{\partial Q}{\partial h}_{1,\,j}h_{1,\,j}$$

$$\text{для } Q=\eta_1(h);$$

векторы неизвестных u_1 и u_2:

$$u_1=\begin{pmatrix}Q_{1,\,j+1}\\ h_{1,\,j+1}\end{pmatrix};\quad u_2=\begin{pmatrix}Q_{2,\,j+1}\\ h_{2,\,j+1}\end{pmatrix}.$$

Для правой граничной точки характеристическому направлению, приходящему на правую границу, соответствует второе уравнение системы (1.10). Его разностная аппроксимация при использовании схемы расположения узлов (см. рис. 1.6 *в*) имеет вид

$$\frac{Q_{N,\,j+1}-Q_{N,\,j}}{\Delta t}+[+\quad +]_{N,\,j}\left(\frac{Q_{N,\,j+1}-Q_{N-1,\,j+1}}{\Delta s}\sigma+\right.$$

$$\left.+\frac{Q_{N,\,j}-Q_{N-1,\,j}}{\Delta s}(1-\sigma)\right)-[+\quad -]_{N,\,j}B_{0N,\,j}\frac{h_{N,\,j+1}-h_{N,\,j}}{\Delta t}+$$

$$+(\quad)_{N,\,j}B_{N,\,j}\left(\frac{h_{N,\,j+1}-h_{N-1,\,j+1}}{\Delta s}\sigma+\frac{h_{N,\,j}-h_{N-1,\,j}}{\Delta s}(1-\sigma)\right)=$$

$$=g\,(A\sin\theta)_{N-1,\,j}-g\left(\frac{A}{K^2}Q\,|\,Q\,|\right)_{N,\,j}-2g\left(\frac{A}{K^2}|\,Q\,|\right)_{N,\,j}Q_{N,\,j+1}+$$

$$+2g\left(\frac{A}{K^2}Q\,|\,Q\,|\right)_{N,\,j}+2g\left(\frac{A}{K^2}|\,Q\,|\frac{Q}{K}\frac{\partial K}{\partial h}\right)_{N,\,j}h_{N,\,j+1}-$$

$$-2g\left(\frac{A}{K^2}|\,Q\,|\frac{Q}{K}\frac{\partial K}{\partial h}\right)_{N,\,j}h_{N,\,j}+(\beta v^2)_{N,\,j}\left.\frac{A_N-A_{N-1}}{\Delta s}\right|_{h\in\min h_{N-1},\,h_N}+$$

$$+\left(\frac{Q^2}{A}\right)_{N,\,j}\frac{\beta_{N,\,j}-\beta_{N-1,\,j}}{\Delta s}-\left(\frac{2Q}{A}\right)_{N,\,j}\frac{\beta_{N,\,j}-\beta_{N-1,\,j}}{\Delta s}Q_{N,\,j+1}+$$

$$+(\omega_0 q_1)_{N,\,j}\Delta t+\Phi_{2N}\Delta t-[+\quad -](q_{1N,\,j}+q_{2,\,N})\Delta t. \qquad (1.16)$$

Представим систему в матричном виде для последнего отрезка на правой границе:

$$B_N u_{N-1}+C_N u_N=D_N, \qquad (1.17)$$

где матрицы

$$B_N=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix};\quad C_N=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix};$$

$$b_{11}=-[+\quad +]_{N,\,j}H\sigma;\quad b_{12}=-(\quad)_{N,\,j}B_{N,\,j}H\sigma;$$

$$b_{21}=(b_{22})_N=0 \text{ для } Q=\varphi_N(t);\quad h=\psi_N(t) \text{ и } Q=\eta_N(h);$$

$$c_{11} = 1 + [+ \quad +]_{N,\,j} H\sigma + 2g\left(\frac{A}{K^2}\,|Q|\right)_{N,\,j} \Delta t +$$

$$+ \left(\frac{2Q}{A}\right)_{N,\,j} (\beta_{N,\,j} - \beta_{N-1,\,j})\, H;$$

$$c_{12} = -[+ \quad -]_{N,\,j} B_{0N,\,j} + (\quad)_{N,\,j} + B_{N,\,j} H\sigma -$$

$$- 2g\left(\frac{A}{K^2}\,|Q|\,\frac{Q}{K}\,\frac{\partial K}{\partial h}\right)_{N,\,j} \Delta t;$$

$c_{21} = 1$ для $Q = \varphi_N(t)$ и $Q = \eta_N(h)$ или $c_{21} = 0$ для $h = \psi_N(t)$;

$c_{22} = 0$ для $Q = \varphi_N(t)$, или $c_{22} = 1$ для $h = \psi_N(t)$, или

$$c_{22} = -\frac{\partial Q_{i,\,j}}{\partial h}$$

для $Q = \eta_N(h)$;

вектор

$$D_{N-1} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix};$$

$$D_1 = Q_{N,\,j} - [+ \quad +]_{N,\,j} H(1-\sigma) Q_{N,\,j} + [+ \quad +]_{N,\,j} H(1-\sigma) Q_{N-1,\,j} -$$

$$- [+ \quad -]_{N,\,j} B_{0N,\,j} h_{N,\,j} - (\quad)_{N,\,j} B_{N,\,j} H(1-\sigma) h_{N,\,j} +$$

$$+ (\quad)_{N,\,j} B_{N,\,j} H(1-\sigma) h_{N-1,\,j} + (gA\sin\theta)_N \Delta t +$$

$$+ g\left(\frac{A}{K^2}\, Q|Q|\right)_{N,\,j} \Delta t - 2g\left(\frac{A}{K^2}\,|Q|\,\frac{Q}{K}\,\frac{\partial K}{\partial h}\right)_{N,\,j} h_{N,\,j} \Delta t +$$

$$+ (\beta v^2)_{N,\,j} (A_N - A_{N-1})\Big|_{h \in \min h_{N-1},\, h_N} H + (Q^2/A)_{N,\,j} (\beta_{N,\,j} - \beta_{N-1,\,j}) H +$$

$$+ (w_0 q_1)_{N,\,j} \Delta t - \Phi_{2N} \Delta t - [+ \quad -](q_{1N,\,j} + q_{2N}) \Delta t;$$

$$D_2 = \varphi(t)_{N,\,j+1} \text{ для } Q = \varphi_N(t),$$

$$\text{или } D_2 = \psi_N(t)_{N,\,j+1} \text{ для } h = \psi_N(t),$$

$$\text{или } D_2 = Q_{N,\,j} - \frac{\partial Q(h)}{\partial h}{}_{N,\,j}\, h_{N,\,j}$$

для $Q = \eta_N(h)$;

векторы неизвестных u_{N-1} и u_N:

$$u_{N-1} = \begin{pmatrix} Q_{N-1,\,j+1} \\ h_{N-1,\,j+1} \end{pmatrix}; \quad u_N = \begin{pmatrix} Q_{N,\,j+1} \\ h_{N,\,j+1} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что во второй строке матриц A_1, B_1, B_N, C_N и векторов D_1, D_N расположены три группы коэффициентов, каждая из которых соответствует одному из условий на границе $Q = \varphi(t)$,

$h=\psi(t)$ или $Q=f(h)$. Кроме того, если известно на $j+1$-м слое $\partial\rho/\partial s$, то коэффициенты слагаемых q_2 и Φ_2, содержащие Q, должны быть перенесены из D_1, D_i, D_N в соответствующие коэффициенты матриц B_1, B_i, B_N. Поэтому q_2 и Φ_2 не индексируются по j.

Рассмотрим задачу о расчете движения воды на отдельном участке водотока при задании на каждой границе по одному из граничных условий. В этом случае система алгебраических уравнений

$$A_1u_1+B_1u_2=D_1;$$
$$A_iu_{i-1}+B_iu_i+C_iu_{i+1}=D_i; \qquad (1.18)$$
$$B_Nu_{N-1}+C_Nu_N=D_N$$

замкнута. Ее удобно решать методом матричной прогонки [61, 74, 279, 306].

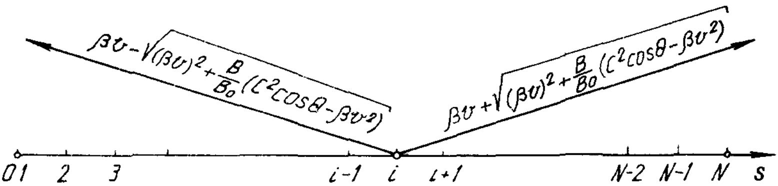


Рис. 1.7. Схема к пояснению метода прогонки.

Изложим сущность метода прогонки на простейшем примере участка водотока, представленного на рис. 1.7. Для правой границы имеем систему алгебраических уравнений

$$B_Nu_{N-1}+C_Nu_N=D_N.$$

Разрешая ее относительно u_N, получаем

$$u_N=-C_N^{-1}B_Nu_{N-1}+C_N^{-1}D_N,$$

где C_N^{-1} — матрица, обратная матрице C_N.

Коэффициенты матриц C_N, B_N и вектор D_N известны из формул (1.17).

Введя обозначения $L_N=-C_N^{-1}B_N$, $K_N=C_N^{-1}D_N$, получим

$$u_N=L_Nu_{N-1}+K_N. \qquad (1.19)$$

Для узла $N-1$, подставив вместо u_N его значение, будем иметь

$$A_{N-1}u_{N-2}+B_{N-1}u_{N-1}+C_{N-1}(L_Nu_{N-1}+K_N)=D_{N-1}.$$

Разрешая относительно u_{N-1}, получаем

$$u_{N-1} = -(B_{N-1} + C_{N-1}L_N)^{-1} A_{N-1}u_{N-2} + \\ + (B_{N-1} + C_{N-1}L_N)^{-1}(D_{N-1} - C_{N-1}K_N).$$

По аналогии в общем случае

$$u_{i-1} = -(B_{i-1} + C_{i-1}L_i)^{-1} A_{i-1}u_{i-2} + \\ + (B_{i-1} + C_{i-1}L_i)^{-1}(D_{i-1} - C_{i-1}K_i).$$

Введя обозначения для прогоночных коэффициентов прямой прогонки

$$L_{i-1} = -(B_{i-1} + C_{i-1}L_i)^{-1} A_{i-1};$$

$$K_{i-1} = (B_{i-1} + C_{i-1}L_i)^{-1}(D_{i-1} - C_{i-1}K_i),$$

получим

$$u_{i-1} = L_{i-1}u_{i-2} + K_{i-1}. \tag{1.20}$$

В матрицах и векторах, входящих в выражения для L_{i-1} и K_{i-1}, имеются только известные элементы. Тогда соотношения между векторами u_{i-1}, u_{i-2} известны. Выполняя вычисления для последнего шага на дуге, получаем

$$u_2 = L_2u_1 + K_2. \tag{1.21}$$

Из соотношения (1.15) на левой границе имеем

$$u_2 = -B_1^{-1}A_1u_1 + B_1^{-1}D. \tag{1.22}$$

Подставляя u_2 из (1.21) в (1.22) и разрешая уравнение относительно u_1, получаем

$$u_1 = -(B_1^{-1}A_1 + L_2)^{-1}(K_2 - B_1^{-1}D_1). \tag{1.23}$$

Подставив полученное значение u_1 в зависимость (1.21), начнем обратную прогонку и получим u_2, а затем из уравнений (1.20), (1.19) — аналогично $u_3, \ldots, u_N$, и задача решена.

Решение задачи о движении воды в системе водотоков обычно осложняется тем, что при слиянии водотоков течение на одном из участков влияет на другой. Поэтому не всегда возможно независимое назначение граничных условий в местах слияния, деления водотоков, т. е. во внутренних узлах графа.

Рассмотрим назначение граничных условий на концах дуг, примыкающих к внутренним узлам графа, применительно к некоторым часто встречающимся случаям слияния водотоков, наличия гидротехнического сооружения, закольцованных участков водотоков.

Наиболее часто в системе водотоков в узле слияния не наблюдается разрыва уровней. Рассмотрим простейший случай слияния водотоков. Пусть к внутренней вершине графа подходят три дуги, причем для второй и третьей дуг вершина является вершиной-стоком, а для первой — вершиной-источником.

Условия сопряжения в узле слияния заключается в выполнении следующих равенств:

$$
\begin{gathered}
Q^{\bar{1}}_{N,\, j+1} = Q^{\bar{2}}_{1,\, j+1} + Q^{\bar{3}}_{1,\, j-1}, \\
h^{\bar{1}}_{N,\, j+1} = h^{\bar{2}}_{1,\, j+1} = h^{\bar{3}}_{1,\, j+1}.
\end{gathered} \tag{1.24}
$$

Показатели степени $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$ означают номера дуг в соответствии с рис. 1 8. С целью упрощения обозначений в дальнейшем индекс

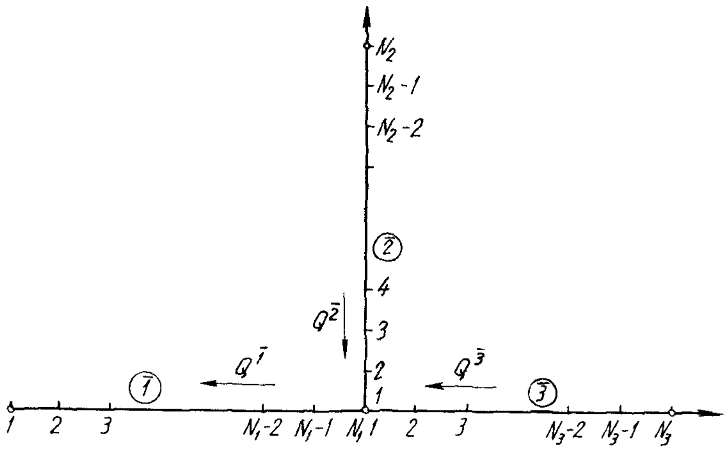


Рис 1 8 Схема простого слияния водотоков

узла опускаем. Разностные уравнения для приходящей характеристики к первому узлу $j+1$-го слоя второй дуги можно записать из системы (1.15) в виде

$$
a^{\bar{2}}_{11} Q^{\bar{2}}_{1,\, j+1} + a^{\bar{2}}_{12} h^{\bar{2}}_{1,\, j+1} + b^{\bar{2}}_{11} Q^{\bar{2}}_{2,\, j-1} + b^{\bar{2}}_{12} h^{\bar{2}}_{2,\, j+1} = D^{\bar{2}}_{1}, \tag{1.25}
$$

где $a^{\bar{2}}_{11}$, $a^{\bar{2}}_{12}$, $b^{\bar{2}}_{11}$, $b^{\bar{2}}_{12}$, $D^{\bar{2}}_{1}$ — известные элементы матриц и векторов первой строки разностного уравнения (1.15).

Выполнив прямую прогонку на второй дуге, на последнем шаге получим

$$
u_2 = L^{\bar{2}}_{2} u_1 + K^{\bar{2}}_{2}
$$

или

$$
\begin{gathered}
Q^{\bar{2}}_{2,\, j+1} = l^{\bar{2}}_{11} Q^{\bar{2}}_{1,\, j+1} + l^{\bar{2}}_{12} h^{\bar{2}}_{1,\, j+1} + k^{\bar{2}}_{1}; \\
h^{\bar{2}}_{2,\, j+1} = l^{\bar{2}}_{21} Q^{\bar{2}}_{1,\, j+1} + l^{\bar{2}}_{22} h^{\bar{2}}_{1,\, j+1} + k^{\bar{2}}_{2}.
\end{gathered}
$$

Подставляя соотношения, полученные для $\overline{Q^2_{2,j+1}}$ и $\overline{h^2_{2,j+1}}$, в уравнение (1.25), будем иметь

$$a^{\bar{2}}_{11}Q^{\bar{2}}_{1,j+1} = -b^{\bar{2}}_{11}\left(l^{\bar{2}}_{1}Q^{\bar{2}}_{1,j+1} + l^{\bar{2}}_{12}h^{\bar{2}}_{1,j+1} + k^{\bar{2}}_{1}\right) - a^{\bar{2}}_{12}h^{\bar{2}}_{1,j+1} -$$
$$- b^{\bar{2}}_{12}\left(l^{\bar{2}}_{21}Q^{\bar{2}}_{1,j+1} + l^{\bar{2}}_{22}h^{\bar{2}}_{1,j-1} + k^{\bar{2}}_{2}\right) + D^{\bar{2}}_{1}.$$

Разрешая относительно $Q^{\bar{2}}_{1,j-1}$, получаем

$$Q^{\bar{2}}_{1,j+1} = -\frac{b^{\bar{2}}_{11}l^{\bar{2}}_{12} + b^{\bar{2}}_{12}l^{\bar{2}}_{22} + a^{\bar{2}}_{12}}{a^{\bar{2}}_{11} + b^{\bar{2}}_{11}l^{\bar{2}}_{11} + b^{\bar{2}}_{12}l^{\bar{2}}_{21}}\, h^{\bar{2}}_{1,j+1} - \frac{b^{\bar{2}}_{11}k^{\bar{2}}_{1} + b^{\bar{2}}_{12}k^{\bar{2}}_{2} - D^{\bar{2}}_{1}}{a^{\bar{2}}_{11} + b^{\bar{2}}_{11}l^{\bar{2}}_{11} + b^{\bar{2}}_{12}l^{\bar{2}}_{21}}. \quad (1.26)$$

Обозначив коэффициенты соответственно через $c^{\bar{2}}$ и $d^{\bar{2}}$, получим

$$Q^{\bar{2}}_{1,j+1} = c^{\bar{2}}h^{\bar{2}}_{1,j+1} + d^{\bar{2}},$$

где $c^{\bar{2}}$ и $d^{\bar{2}}$ — числа.

Для третьей дуги аналогично

$$Q^{\bar{3}}_{1,j+1} = c^{\bar{3}}h^{\bar{3}}_{1,j+1} + d^{\bar{3}}. \quad (1.27)$$

Используя условия сопряжения (1.24), в узле слияния будем иметь

$$Q^{\bar{1}}_{N,j+1} = \left(c^{\bar{2}} + c^{\bar{3}}\right)h^{\bar{1}}_{N,j+1} + d^{\bar{2}} + d^{\bar{3}},$$

т. е. условие вида $Q=\eta(h)$, и, следовательно, на первой дуге можно продолжить прямую прогонку с условием на границе $Q=\eta(h)$. В случае древовидных графов прогонку продолжаем до корневого узла, в котором можно разрешить уравнения по соотношению (1.23), определив Q_1 и h_1. Затем, используя соотношения (1.21) и (1.20), выполняем обратную прогонку на первой дуге вплоть до узла N, где определяем $Q^{\bar{1}}_{N,j+1}$ и $h^{\bar{1}}_{N,j+1}$. Соотношения (1 24) и (1.26) позволяют определить $Q^{\bar{2}}_{1,j+1}$, $h^{\bar{2}}_{1,j+1}$ и аналогично $Q^{\bar{3}}_{1,j+1}$, $h^{\bar{3}}_{1,j+1}$, формулы (1 19) и (1.20) — продолжить обратную прогонку и определить $Q_{i,j+1}$ и $h_{i,j+1}$ во всех расчетных узлах второй и третьей дуг.

В системе водотоков имеются гидротехнические сооружения. В этом случае принимаем, что внутренняя вершина графа совпадает с местоположением гидротехнического сооружения. Назначение граничных условий в такой вершине зависит от функционального назначения сооружения, поэтому условия могут быть разнообразными. Однако в значительной мере они соответствуют рассмотренным ранее условиям на границах типа $Q(t)$, $h(t)$, $Q=\eta(h)$, хотя могут встречаться и более сложные случаи, когда необходимо использовать различные гидравлические закономерности для установления пропускной способности в зависимости от напора, особенностей конструкций гидротехнических сооружений, гидроагрегатов и т. п.

Рассмотрим некоторое часто встречающиеся граничные условия для внутренних вершин графа, совпадающих с расположением гидротехнического сооружения.

Пусть во внутренней вершине графа располагается насосная станция, или гидроэлектростанция, или водосброс, которые по диспетчерскому графику должны работать в режиме с гидрографом $Q(t)$. Тогда на правой границе дуги $D^{\overline{n}}$ (рис. 1.9) и на левой границе дуги $D^{\overline{n+1}}$ назначается уже ранее

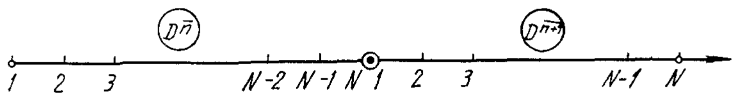


Рис. 1.9. Схема расположения гидротехнического сооружения во внутренней вершине графа.

рассмотренное условие. Дуга графа разбивается на две формально независимые части, хотя расчет естественно выполнять для всего графа. На правой границе дуги $D^{\overline{n}}$ определяемой будет величина $h^{\overline{n}}(t)$, а на левой границе дуги $D^{\overline{n+1}}$ — величина $h^{\overline{n+1}}$. Выполнение расчетов в таких случаях рассмотрено ранее.

Пусть на правой границе дуги $D^{\overline{n}}$ необходимо поддерживать уровень $h^{\overline{n}}(t)$, соответствующий, например, уровню грунтовых вод, который обеспечивает оптимальную влажность корнеобитаемого слоя и т. п. Тогда на правой границе дуги $D^{\overline{n}}$ ставится граничное условие вида $h^{\overline{n}}(t)$, а определяемой величиной будет $Q^{\overline{n}}(t)$. Для левой границы дуги $D^{\overline{n+1}}$ вычисленное условие $Q^{\overline{n}}(t)$ становится граничным, а определяемой величиной будет $h^{\overline{n+1}}(t)$. Выполнение расчетов в таких случаях рассмотрено ранее.

Пусть на правой границе дуги $D^{\overline{n}}$ необходимо поддерживать уровень $h^{\overline{n}}(t)$, а на левой границе дуги $D^{\overline{n+1}}$ — уровень $h^{\overline{n+1}}(t)$. Назначив соответствующие граничные условия, в результате расчетов получим на правой границе $Q^{\overline{n}}(t)$, а на левой — $Q^{\overline{n+1}}(t)$, причем, как правило, $Q^{\overline{n}}(t) \neq Q^{\overline{n+1}}(t)$. Очевидно это возможно, если рядом с узлом N имеются условия для забора воды по графику $\Delta Q(t) = Q^{\overline{n}}(t) - Q^{\overline{n+1}}(t)$, причем если необходимо рассчитывать водный режим каналов водозабора, то график $\Delta Q(t)$ является для него граничным условием вида $Q(t)$.

Пусть во внутренней вершине дуг $D^{\overline{n}}$ и $D^{\overline{n+1}}$ расположен водосброс, расход через который является функцией напора, т. е.

$$Q = f\left(h^{\overline{n}}, h^{\overline{n-1}}\right). \tag{1.28}$$

Вид функции для конкретного водозабора устанавливается или расчетом по гидравлическим зависимостям, или градуировкой гидротехнического сооружения. Обычно это неоднозначная функция, так как один и тот же расход может проходить через сооружение при подпоре при различных уровнях воды. В таком случае расчет можно выполнить следующим образом. Для слоя j уровни известны. Зафиксируем соответствующие уровни $h_j^{\bar{n}}$ и $h_j^{\overline{n+1}}$. По ним обычно можно выбрать соответствующую кривую из множества кривых $Q=f(h^{\bar{n}}, h^{\overline{n+1}})$. Тогда на правой границе дуги $D^{\bar{n}}$ становится известной функция $Q=f(h)$, которая входит в состав рассмотренных граничных условий, и поэтому $Q_{j+1}^{\bar{n}}$ и $h_{j+1}^{\bar{n}}$ могут быть определены.

Естественно принять $Q_{j+1}^{\bar{n}}$ за левое граничное условие дуги $D^{\overline{n+1}}$ и определить из решения задачи $h_{j+1}^{\overline{n+1}}$. Может случиться, что вычисленное значение $h_{j+1}^{\overline{n+1}} \neq h_j^{\overline{n+1}}$, принятому при расчете $Q_{j+1}^{\bar{n}}$ и $h_{j+1}^{\bar{n}}$. Тогда организуется итерационный процесс до тех пор, пока $h_{j+1}^{\bar{n}}$ и $h^{\bar{n}}$, $h_{j+1}^{\overline{n+1}}$ и $h_j^{\overline{n+1}}$ не станут близкими между собой с приемлемой погрешностью.

Пусть в узле N расположено гидротехническое сооружение, поддерживающее заданный перепад уровней $\Delta h=h_{j+1}^{\bar{n}}-h_{j+1}^{\overline{n+1}}$. В этом случае зависимость (1.28) можно привести к виду

$$Q=f\left(h^{\bar{n}}\right).$$

Воспользовавшись значением $h_j^{\bar{n}}$, ее можно обычно выбрать однозначной. Тогда правая граница дуги $D^{\bar{n}}$ становится известной функцией $Q=f(h)$, позволяющей описанными выше методами определить $Q_{j+1}^{\bar{n}}$ и $h_{j+1}^{\bar{n}}$. Задавая значение $Q_{j+1}^{\bar{n}}$ в качестве левого граничного условия $Q_{j+1}^{\overline{n+1}}$ для дуги $D^{\overline{n+1}}$, известным методом можно определить $h_{j+1}^{\bar{n}+1}$ и затем проверить Δh. Если оно не равно заданному, то организуется итерационный процесс по $Q_{j+1}^{\bar{n}}$ до согласования Δh с приемлемой погрешностью.

Рассмотрим более общий подход к организации вычислений, называемый параметрической прогонкой [57, 316]. Смысл ее заключается в том, что в процесс вычисления прогоночных коэффициентов вводят некоторые, пока неизвестные параметры, для которых по общей схеме также определяют прогоночные коэффициенты. Затем искомое решение выражают через введенные параметры и исключают из общей системы уравнений. В оставшейся системе решение на границах дуг графа выражают через параметры. К полученной системе уравнений присоединяют граничные условия, некоторые балансовые и другие очевидные соотношения, связывающие расходы и уровни на концах дуг. Полученная таким образом система становится замкнутой. Из нее определяют искомые параметры, а затем, используя обратную прогонку, на каждой дуге находят все решения. Для пояснения метода матричной параметрической прогонки рассмотрим простейшие примеры сначала для отдельной дуги водотока, а затем для закольцованных дуг.

Условимся обозначать искомые характеристики на каждой левой границе дуги графа индексом (номер дуги с чертой над ним) со знаком «минус», на правой — со знаком «плюс». Например, искомый расход и уровень на левой границе первой отдельной дуги слева будет иметь обозначение $Q^{-\bar{1}}$, $h^{-\bar{1}}$, справа $Q^{+\bar{1}}$, $h^{+\bar{1}}$.

Решение системы (1.18) ищем в более общем, чем обычно, виде для прямой прогонки слева направо

$$u_i = L_i u_{i+1} + K_i + M_i h^{\overline{-1}} \tag{1.29}$$

и справа налево

$$u_i = L_i' u_{i-1} + K_i' + M_i' h^{\overline{+1}}. \tag{1.30}$$

Соответственно разностные уравнения для левой и правой границ будут иметь вид

$$A_1 u_1 + B_1 u_2 = D_1 + F_1 h^{-\bar{1}}, \tag{1.31}$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad D_1 = \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ h^{\overline{-1}} \end{pmatrix};$$

$$B_N u_{N-1} + C_N u_N = D_N + F_N h^{\overline{+1}}; \tag{1.32}$$

$$B_N = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C_N = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad D_N = \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad F_N = \begin{pmatrix} 0 \\ h^{\overline{+1}} \end{pmatrix}.$$

Из уравнения (1.31) получаем

$$u_1 = -A_1^{-1} B_1 u_2 + A_1^{-1} D_1 + A_1^{-1} F_1 h^{\overline{-1}},$$

тогда

$$L_1 = -A_1^{-1} B_1; \quad K_1 = A_1^{-1} D_1; \quad M_1 = A_1^{-1} F_1.$$

Для второго шага по расстоянию

$$A_2 u_1 + B_2 u_2 + C_2 u_3 = D_2,$$

и после подстановки в уравнение u_1 с принятыми обозначениями L_1, K_1, M_1 будем иметь

$$A_2 L_1 u_2 + A_2 K_1 + A_2 M_1 h^{\overline{-1}} + B_2 u_2 + C_2 u_3 = D_2.$$

Вычисляя u_2, получаем

$$u_2 = -(A_2L_1 + B_2)^{-1} C_2u_3 + (A_2L_1 + B_2)^{-1}(D_2 - A_2K_1) -$$

$$-(A_2L_1 + B_2)^{-1} A_2M_1\overline{h^{-1}},$$

т. е. прогоночные коэффициенты равны:

$$L_2 = -(B_2 + A_2L_1)^{-1} C_2;$$

$$K_2 = +(B_2 + A_2L_1)^{-1}(D_2 - A_2K_1);$$

$$M_2 = -(B_2 + A_2L_1)^{-1} A_2M_1$$

или в общем случае по аналогии

$$L_i = -(B_i + A_iL_{i-1})^{-1} C_i;$$

$$K_i = +(B_i + A_iL_{i-1})^{-1}(D_i - A_iK_{i-1});$$

$$M_i = -(B_i + A_iL_{i-1})^{-1} A_iM_{i-1}.$$

Тогда

$$u_i = L_iu_{i+1} + K_i + M_i\overline{h^{-1}}.$$

Для $N-1$-го шага

$$u_{N-1} = L_{N-1}u_N + K_{N-1} + M_{N-1}\overline{h^{-1}}.$$

Подставляя полученное выражение в разностное уравнение (1.32), для последнего шага на правой границе получаем

$$B_N\left(L_{N-1}u_N + K_{N-1} + M_{N-1}\overline{h^{-1}}\right) + C_Nu_N = D_N + F_N\overline{h^{+1}}$$

или

$$(C_N + B_NL_{N-1})\,u_N = D_N - B_NK_{N-1} + F_N\overline{h^{+1}} - B_NM_{N-1}\overline{h^{-1}};$$

$$u_N = (C_N + B_NL_{N-1})^{-1}(D_N - B_NK_{N-1}) + (C_N + B_NL_{N-1})^{-1}\times$$

$$\times\left(F_N\overline{h^{+1}} - B_NM_{N-1}\overline{h^{-1}}\right).$$

Первое уравнение полученной системы дает

$$Q_N = \gamma_{11}\overline{h^{+1}} + \gamma_{12}\overline{h^{-1}} + \gamma_{13}. \tag{1.33}$$

Выполнив прогонку справа налево и аналогичные действия, получим

$$Q_1 = \gamma_{21}\overline{h^{+1}} + \gamma_{22}\overline{h^{-1}} + \gamma_{23}. \tag{1.34}$$

Таким образом, получена система уравнений

$$Q_N = \gamma_{11}\overline{h^{+1}} + \gamma_{12}\overline{h^{-1}} + \gamma_{13};$$
$$Q_1 = \gamma_{21}\overline{h^{+1}} + \gamma_{22}\overline{h^{-1}} + \gamma_{23}, \tag{1.35}$$

с помощью которых устанавливается зависимость расходов и уровней на концах дуги. При задании любой пары граничных условий из Q_1, Q_N, $\overline{h^{+1}}$, $\overline{h^{-1}}$ другие два значения определяются из уравнений (1.35), и прогонка может быть продолжена по формуле (1.29) или (1.30).

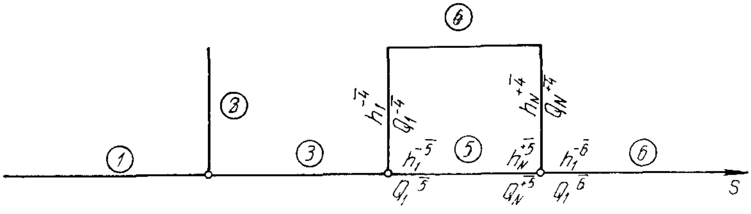


Рис. 1.10. Граф системы водотоков с закольцованными дугами *4* и *5*.

Отметим, что число операций по сравнению с ранее рассмотренным способом вычислений — прямой и обратной прогонкой — увеличивается практически вдвое, однако применительно к графу типа дерева упрощается организация вычислений. Применительно к системам водотоков, имеющих закольцованные маршруты, применение параметрической прогонки на закольцованных участках становится необходимым. Рассмотрим систему водотоков, включающую закольцованный участок (рис. 1.10).

Выполнив прямую прогонку методом, описанным ранее для шестой дуги, на левой границе получим соотношения для верхнего слоя $j+1$:

$$\overline{Q_2^{-6}} = \overline{l_{11}^{6}}\,\overline{Q_1^{-6}} + \overline{l_{12}^{6}}\,\overline{h_1^{-6}} + \overline{k_1^{6}};$$
$$\overline{h_2^{-6}} = \overline{l_{21}^{6}}\,\overline{Q_1^{-6}} + \overline{l_{22}^{6}}\,\overline{h_1^{-6}} + \overline{k_2^{6}}. \tag{1.36}$$

Разностное уравнение для приходящей на левую границу характеристики можно привести к виду

$$\overline{Q_1^{-6}} = \overline{l_1^{6}}\,\overline{Q_2^{-6}} + \overline{l_2^{6}}\,\overline{h_1^{-6}} + \overline{l_3^{6}}\,\overline{h_2^{-6}} + \overline{l_4^{6}}. \tag{1.37}$$

Подставляя в это уравнение $\overline{Q_2^{-6}}$ и $\overline{h_2^{-6}}$ из соотношения (1.36) и разрешая относительно $\overline{Q_1^{-6}}$, получаем

$$\overline{Q_1^{-6}} = f_1\left(\overline{h_1^{-6}}\right). \tag{1.38}$$

Выполняя параметрическую прогонку на четвертой и пятой дугах, будем иметь

$$
\begin{aligned}
&Q_N^{\overline{4}} = \gamma_{11}^{\overline{4}} h_N^{\overline{4}} + \gamma_{12}^{\overline{4}} h_1^{\overline{-4}} + \gamma_{13}^{\overline{4}};\\
&Q_1^{\overline{-4}} = \gamma_{21}^{\overline{4}} h_N^{\overline{4}} + \gamma_{22}^{\overline{4}} h_1^{\overline{-4}} + \gamma_{23}^{\overline{4}};\\
&Q_N^{\overline{5}} = \gamma_{11}^{\overline{5}} h_N^{\overline{5}} + \gamma_{12}^{\overline{5}} h_1^{\overline{-5}} + \gamma_{13}^{\overline{5}};\\
&Q_1^{\overline{-5}} = \gamma_{21}^{\overline{5}} h_N^{\overline{5}} + \gamma_{22}^{\overline{5}} h_1^{\overline{-5}} + \gamma_{23}^{\overline{5}}.
\end{aligned}
\qquad (1.39)
$$

В узлах сопряжения четвертой и пятой дуг выполняются следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
&h_N^{\overline{+3}} = h_1^{\overline{-4}} = h_1^{\overline{-5}}; \quad Q_N^{\overline{+3}} + Q_1^{\overline{-4}} + Q_1^{\overline{-5}} = 0;\\
&h_1^{\overline{-6}} = h_N^{\overline{+4}} = h_N^{\overline{+5}}; \quad Q_1^{\overline{-6}} + Q_N^{\overline{+4}} + Q_N^{\overline{-5}} = 0.
\end{aligned}
\qquad (1.40)
$$

Используя уравнения (1.39) в соотношениях (1.40), можно получить

$$Q_1^{\overline{-6}} = f_2\left(h_1^{\overline{-6}},\ h_N^{\overline{+3}}\right); \qquad (1.41)$$

$$Q_N^{\overline{+3}} = f_3\left(h_1^{\overline{-6}},\ h_N^{\overline{+3}}\right). \qquad (1.42)$$

Используя соотношения (1.38) и (1.41), будем иметь

$$h_1^{\overline{-6}} = f_5\left(h_N^{\overline{+3}}\right). \qquad (1.43)$$

Подставив выражение (1.43) в соотношение (1.42), получим зависимость

$$Q_N^{\overline{+3}} = f_6\left(h_N^{\overline{+3}}\right),$$

которая позволяет продолжить прогонку на третьей дуге по обычной схеме с условием $Q = f(h)$ на правой границе. В первом узле первой дуги уравнения разрешаются по известной формуле (1.23):

$$u_1 = -\left(B_1^{-1}A_1 + L_2\right)^{-1}\left(K_2 - B_1^{-1}D_1\right),$$

и затем обратной прогонкой находятся решения во всех узлах сетки, включая и закольцованные участки.

Таким образом, в данном варианте решения задачи идеи параметрической прогонки используются только применительно к закольцованным дугам. Для других дуг графа системы водотоков применяется обычный алгоритм прогонки. Поэтому данный модифицированный алгоритм экономичнее тотальной параметрической прогонки, так как не требует существенного увеличения операций.

Изложенными методами можно определить водный режим систем водотоков, имеющих притоки различных порядков, закольцованные участки и гидротехнические сооружения.

1.4.1. Начальные и граничные условия

Как следует из математической формулировки задачи о неустановившемся движении воды, для ее решения необходимы начальные условия, т. е. данные о состоянии водного режима системы водотоков в некоторый момент времени, принимаемый за начальный. Имеются различные возможности определения начального состояния. Существуют объекты, на которых в некоторый момент состояние водного режима известно достаточно детально, тогда оно и задается в качестве начального. В расчетных узлах, в которых измерения не выполнялись, значение уровней и расходов воды получают интерполяцией, в том числе и с использованием уравнения движения. В настоящее время такой способ задания начальных условий применяется редко, однако он имеет перспективы в связи с существенным увеличением объемов измерений на ВХС и их автоматизацией.

Наиболее часто в качестве начального выбирается состояние водного режима, близкое к установившемуся в моменты времени, достаточно отдаленные от тех, для которых нужно с минимальной погрешностью определять состояние водного режима при неустановившемся движении. Для расчета установившегося неравномерного движения используется динамическое уравнение системы (1.7). Оно становится независимым от переменной t и превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение. В нем, естественно, отсутствуют слагаемые, содержащие производную по времени, однако частная производная $\partial A/\partial s$ сохраняется, поскольку вычисляется при постоянном h как промежуточном аргументе. Таким образом, уравнение установившегося неравномерного движения можно записать в виде

$$\frac{dh}{ds}=\frac{1}{(c^2\cos\theta-\beta Q^2/A^2)\,B}\,gA\sin\theta-gA\frac{Q\,|\,Q\,|}{K^2}-$$

$$-2\beta\frac{Q}{A}\frac{dQ}{ds}+\beta\frac{Q^2}{A^2}\frac{\partial A}{\partial s}\Big|_h-\frac{Q^2}{A}\frac{d\beta}{ds}+\xi B\,|\,w\,|\,w_1-$$

$$-\frac{A}{\rho}\frac{dp_a}{ds}+\frac{\rho_1}{\rho}w\,q_1+2\omega Q\sin\varphi\cos\theta-\left(gP_1\cos\theta+\beta\frac{Q^2}{A}\right)\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds}. \tag{1.44}$$

или, используя принятые в системе (1.7′) обозначения и учитывая стационарность течения, в виде

$$dh/ds=\Phi/\left((c^2\cos\theta-\beta Q^2/A^2)\,B\right). \tag{1.44′}$$

Поскольку расход воды и воздействующие на движение факторы должны быть заданы и коэффициенты являются известными функциями от h, то получено обыкновенное дифференциальное уравнение и для него может быть сформулирована задача Коши: найти решение дифференциального уравнения первого порядка

$$dh/ds = f(s,\ h(s)),$$

в области $s_1 < s < s_N$ принимающее при s_1 значение $h(s_1) = h_1$.

Формально решение задачи Коши для уравнения (1.44) затруднений не вызывает, поскольку для этой цели в математическом обеспечении практически каждой ЭВМ имеются стандартные программы.

Заметим, что при расчетах установившегося течения во внутренних узлах графа выполняются соотношения по расходам и уровням, аналогичные неустановившемуся движению. Это обычно балансовые соотношения по расходам и равенство уровней.

Расчеты для участков закольцованных водотоков более сложны. Пусть требуется выполнить расчет на закольцованном участке графа, состоящем из четвертой и пятой дуг (см. рис. 1.10). Используем ранее принятые обозначения в узлах сопряжения и балансовые соотношения (1.40). Выполняя расчет от корневого узла графа, получаем значения расходов и уровней на правой границе третьей дуги, т. е. $Q_{\mathrm{V}}^{\overline{+3}}$ и $h_N^{\overline{+3}}$. Затем, распределив предварительно расход между четвертой и пятой дугами пропорционально средним модулям расхода и выполнив расчеты неравномерного движения на этих дугах, начиная с одинаковых уровней $h_N^{\overline{+3}} = h_1^{\overline{-4}} = h_1^{\overline{-5}}$, получим, вероятнее всего, в конце дуг различные уровни $h_{\mathrm{V}}^{\overline{+4}}$ и $h_N^{\overline{+5}}$. Тогда организуем итерационный процесс по перераспределению расходов на четвертой и пятой дугах, окончанием которого служит выполнение условия $|h^{\overline{+4}} - h^{\overline{+5}}| < \varepsilon$. Если это условие выполнено, то становится известным $h_1^{\overline{-6}}$, и расчеты неравномерного движения могут быть продолжены.

Расчеты установившегося движения обычно выполняют от корневой вершины в направлении против течения. Расчеты вниз по течению могут привести к большим погрешностям вычислений, поскольку кривые подпора обычно асимптотически сходятся в направлении против течения, и, следовательно, небольшие погрешности в задании отметки на правой границе, а также в вычислениях могут привести к расчетной кривой свободной поверхности, не соответствующей реальному процессу движения.

Возможны случаи, когда в корневой вершине графа уровень неизвестен. Один из распространенных методов его определения — задание морфометрической и гидрологической информации ниже корневого узла на участке асимптотического сближения кривых свободной поверхности.

Имеются и другие возможности расчета установившегося движения воды в системах водотоков. Например, можно воспользоваться методом установления. Для этого в качестве начального состояния задают некоторые значения уровней в системе водотоков, например уровни, параллельные среднему значению уклона дна на каждой дуге. Естественно, что эти уровни не будут удовлетворять уравнениям как неустановившегося, так и установившегося движения. Однако поскольку известно, что решения уравнений неустановившегося движения зависят от начальных условий в пределах характеристического треугольника, то можно найти промежуток времени $T=n\Delta t$, за пределами которого решения не зависят от начальных условий. Следовательно, можно приближенно определить количество шагов n, за которые режим установится, если задать стационарные граничные условия, соответствующие ожидаемому моменту установления.

Обратим внимание на то, что при задании граничных условий необходимо следить за тем, чтобы в начальные моменты времени граничные и начальные условия были согласованы.

При вычислении необходимо иметь в виду следующее. Выполнить расчеты неравномерного и неустановившегося движения воды в системах водотоков с постоянным шагом по пространству Δs не представляется возможным по разным причинам. Во-первых, в системе водотоков имеются обычно притоки различных порядков, характеризующиеся различными сечениями, уклонами, водностью. Во-вторых, в принципе невозможно выбрать одинаковый шаг даже на одной дуге графа, кратный расстояниям между характерными сечениями, сосредоточенными притоками, местами изменения боковой приточности. По этим причинам даже на отдельных дугах графа расчетный шаг по расстоянию изменяется и, следовательно, возникает различная погрешность аппроксимации, которую, используя особенности задачи, необходимо стремиться существенно уменьшить, не увеличивая вычислений. Рекомендации по расчетам с неравномерным шагом Δs при расчетах неустановившегося движения даны ранее.

Задача о расчете установившегося неравномерного движения в системе водотоков кроме расчета начального состояния имеет самостоятельное значение. Например, СНИП требуют расчета водоприемников мелиоративных систем на условия неравномерного движения.

В качестве граничных условий могут быть использованы на внешних границах гидрографы $Q(t)$, или графики изменения уровней $h(t)$, или зависимости вида $Q=f(h)$, во внутренних узлах графа — условия равенства уровней и баланса расходов воды и другие физически обоснованные зависимости. Они достаточно детально рассмотрены ранее.

2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА ПРИМЕСЕЙ

Обоснование эффективных инженерных решений при проектировании и эксплуатации ВХС требует знаний не только количественных, но и качественных характеристик водных ресурсов. Качество воды характеризуется многими показателями и оценивается экологическими, экономическими, социально-политическими и другими критериями, зависящими от этих показателей. Применительно к использованию воды конкретных водных объектов оценки качества ограничиваются в основном нормируемыми показателями, зависящими от концентраций примесей в воде, и дополнительно некоторыми характеристиками свойств воды.

Оперативно определять концентрации примесей в водотоках ВХС возможно практически только методами математического моделирования переноса примесей. Создание модели переноса сложнее, чем математической модели движения воды. На перенос примесей потоком влияют не только те факторы, которые определяют движение воды, но и собственно движение, биологические, физико-химические, биохимические процессы трансформации вещества и энергии, взаимодействия веществ-примесей между собой и с границами потока. Поэтому концентрация примесей изменяется не только из-за разбавления, но и в результате воздействия других факторов: реакции с другими веществами, сорбции, адсорбции, фотосинтеза и т. д. Эти процессы являются весьма сложными, иногда преобладающими, особенно при малых скоростях течения [23, 44, 46, 85, 150, 201, 367, 368]. Они менее изучены, чем механический перенос примесей, что осложняет моделирование.

Сложность, недостаточная изученность закономерностей физико-химических превращений приводят к тому, что расчет концентраций примесей с приемлемой погрешностью можно выполнять только на небольших участках системы водотоков и в течение малых интервалов времени. Это ограничивает применение математических моделей. Однако необходимо отметить, что идентификация параметров переноса позволяет существенно уменьшить погрешность моделирования и расширить область использования математического моделирования.

Данная глава посвящена в основном механическим аспектам переноса примесей в системах водотоков. В ней излагается постановка задачи, приводится вывод уравнений переноса, математическая формулировка задачи и численный метод ее решения.

2.1. Постановка задачи

Примеси попадают в водотоки из сосредоточенных и распределенных источников. Затем они переносятся потоком, разбавляются, участвуют в различных превращениях, взаимодействуют между собой и с границами. Описанные процессы многомерны в пространстве и изменяются во времени. Для обоснования многих эффективных инженерных решений при проектировании и эксплуатации ВХС достаточно знание средних в сечении концентраций, что приводит к необходимости решения одномерных задач переноса. Вместе с тем обоснование многих решений требует учета многомерности движения на участках ниже места сброса примесей до створов полного перемешивания, в широких водоемах. По-видимому, наиболее эффективный путь решения задачи о переносе примесей в системах водотоков аналогичен расчету движения воды, а именно: для водотоков ВХС ввиду их протяженности моделирование переноса целесообразно выполнять в основном в одномерной постановке, а на отдельных участках, где необходимы знания о распределении концентраций по сечению водотока,— в многомерной.

В данной работе задача о переносе примесей в системах водотоков рассматривается в одномерной постановке, однако в ней приведены результаты исследования турбулентных характеристик переноса, которые могут быть использованы при решении задачи в многомерной постановке.

В качестве исходных уравнений переноса неконсервативных примесей используется неоднородное уравнение турбулентной диффузии. Коэффициентами уравнений служат параметры, характеризующие скорости течения потока, морфометрию водотока, рассеяние примеси потоком и ее превращение в различных физико-химических процессах.

В данной работе будут излагаться методики расчета многих параметров, характеризующих больше механическую сторону переноса. Способы определения некоторых параметров, особенно относящихся к учету влияния физико-химических и биохимических процессов, будут представлены в виде обобщений по литературным источникам.

При возникновении в потоке нетранзитных зон в расчете используется площадь живого сечения, хотя массообмен на границах транзитной и нетранзитной зон интенсивен и за счет его осуществляется перенос концентраций в нетранзитную часть потока. Это приводит к уменьшению концентраций и распластыванию ее волны [348, 353, 377]. Ввиду слабой изученности этого процесса в данной работе поперечный перенос через границу зон учитываться не будет, что может привести к некоторому завышению вычисленных концентраций примесей.

2.2. Уравнение переноса

При выводе одномерного уравнения переноса будем исходить из закона сохранения массы примеси данного ингредиента. Выделим отсек жидкости длиной δs (см. рис.1.2). Масса вещества примеси $P(s,t)$ в выделенном отсеке

$$P(s,\ t) = pA\,\delta s. \tag{2.1}$$

Изменение массы $P(s,t)$ в выделенном отсеке будет слагаться из массы примеси, переносимой через поверхности отсека, и массы, трансформирующейся в другие примеси внутри отсека, т.е.

$$dP(s,\ t)/dt - fV = 0.$$

Раскрывая полную производную, получаем

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial s}\frac{ds}{dt} = fV. \tag{2.2}$$

Локальная производная $\partial P/\partial t$ характеризует изменение массы примеси во времени в выделенном отсеке, конвективная производная — перенос примеси через сечения *1—1* и *2—2* движущейся жидкостью. Интенсивность превращения данной примеси в другие внутри отсека, вывод ее через свободную поверхность и ложе русла за счет физико-химических и других процессов, не связанных непосредственно с механическим переносом, характеризуется функцией интенсивности источников стоков f.

Рассмотрим более детально конвективную составляющую переноса примесей через сечение отсека. Поле продольных скоростей можно представить тремя составляющими, а именно: полем продольных скоростей, у которого все скорости равны средней в сечении (v); полем скоростей, у которого все осредненные скорости в соответствующих точках равны отклонению местной осредненной скорости от средней ($u—v$), и полем пульсационных скоростей (u'). Закономерности переноса примесей через выделенные сечения объемов воды — и массы примеси — каждым слагаемым поля скоростей будут различными.

Масса примеси, транспортируемая через сечение составляющей скорости, равной средней в сечении за время δt, может быть определена по зависимости

$$pAv\,\delta t = pQ\,\delta t. \tag{2.3}$$

Поскольку режим движения турбулентный, то некоторая масса будет переноситься через сечение за счет пульсационных составляющих скорости, т.е. за счет турбулентной диффузии. Плотность удельного турбулентного потока примеси, т.е. количество примеси, переносимого процессом турбулентной диффузии в единицу времени и через единицу площади, согласно предложениям Тейлора [369] и Шмидта [364], восходящим к Буссинеску [323], принимается прямо пропорциональной градиенту осредненной концентрации [165]

$$\overline{u'p'} = -D_{i,j}\, \partial p/\partial x_i.$$

Для определения массы примеси, переносимой через все сечение за счет турбулентной диффузии, выполним интегрирование по сечению удельного потока примеси, приняв следующие допущения: распределение по сечению осредненной концентрации примеси и коэффициента продольной диффузии D_{fs} близко к однородному. Первое предположение удовлетворительно подтверждается экспериментально, хотя имеются некоторые отклонения. Второе предположение является менее точным. Однако в данном случае оно приемлемо потому, что вклад продольной турбулентной диффузии в процессы переноса при существенно неоднородном в сечении поле продольных скоростей, как будет подтверждено ниже, не столь значителен

Тогда массу примеси, переносимую через сечение за счет турбулентной диффузии за время δt, можно определить аналогично:

$$-AD_{fs} \frac{\partial p}{\partial s} \delta t.$$

Поле продольных осредненных скоростей неоднородно в ограниченном сечении. Чтобы установить, какую роль в переносе примесей играет составляющая $(u-v)$, представим плоскость сечения перемещающейся вдоль водотока со средней скоростью v. Это не нарушит баланса примеси, потому что соответствующая доля переноса учтена зависимостью (2.3). Объемы воды, у которых $u>v$, будут переносить в направлении скорости через движущееся со скоростью v сечение некоторое количество примеси. Объемы воды, у которых $u<v$, будут аналогично переносить некоторое количество примеси в противоположном направлении. Из-за неоднородности распределения концентраций по длине эти относительные перемещения объемов воды будут вызывать некоторую неоднородность в распределении концентраций по живому сечению. Поэтому, хотя баланс объемов воды при этом будет равен нулю, перенос примеси через сечение будет осуществляться. Работами Тейлора [371, 372] доказано, что перенос примесей за счет неоднородности распределения по сечению продольных осредненных скоростей посредством описанного выше механизма существенно превосходит перенос за счет турбулентной и тем более молекулярной диффузии Это обстоятельство становится понятным, если принять во внимание, что разность между максимальной и минимальной осредненными скоростями в сечении однонаправленна и значительно превышает пульсационные скорости Экспериментальные исследования показали, что продольное рассеяние примеси относительно плоскости, движущейся со средней скоростью, происходит аналогично рассеянию при диффузии: распределение концентрации по направлению s относительно плоскости, движущейся со средней скоростью, получается близким к гауссовскому,

однако коэффициент, характеризующий рассеяние, при этом во много раз превосходит коэффициент турбулентной диффузии и определяется другими зависимостями [197]. Эта аналогия позволяет для определения плотности удельного потока примеси через сечение, движущееся со средней скоростью, за счет неоднородности поля продольных скоростей воспользоваться той же структурой зависимости, что и для плотности удельного потока примеси за счет турбулентной диффузии. Обычно перенос вещества через сечение за счет неоднородности поля осредненных скоростей и продольной диффузии принято характеризовать одним суммарным коэффициентом рассеяния — коэффициентом дисперсии D. Тогда, учитывая упомянутую аналогию процессов, зависимость для определения массы примеси, переносимой потоком воды через сечение за счет неоднородности поля продольных осредненных скоростей и турбулентной диффузии за время δt, можем записать в виде

$$-AD\frac{\partial p}{\partial s}\,\delta t. \tag{2.4}$$

Подставляя полученные значения слагаемых переноса (2.3), (2.4) и $p(s, t)$ по соотношению (2.1) в уравнение (2.2), выполняя алгебраические преобразования и переходя к пределам, получаем уравнение переноса примесей при неустановившемся движении воды

$$\frac{\partial(Ap)}{\partial t}+\frac{\partial(Qp)}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial s}\left(AD\frac{\partial p}{\partial s}\right)+Af. \tag{2.5}$$

В аналогичной форме уравнение приводится во многих работах.

В качестве примера приведем некоторые значения функции источников и стоков f:

для переноса температуры $T(s, t)$

$$f=k_{\text{т}}(T_0-T)+T_2;$$

для биохимической потребности воды в кислороде $L(s, t)$ (БПК)

$$f=-k_1L+L_2;$$

для растворенного кислорода $D_{\text{О}}(s, t)$ (РК)

$$f=-k_1L+k_2(D_{\text{н}}-D_{\text{О}})+D_2,$$

где $T_2(s, t)$, $L_2(s, t)$, $D_2(s, t)$ — функции, характеризующие интенсивность изменения источников температуры, БПК, РК; T_0 — равновесная температура; $D_{\text{н}}$ — концентрация кислорода при насыщении

2.3. Математическая формулировка задачи

Уравнение (2.5) является неоднородным, в общем случае квазилинейным уравнением параболического типа с переменными коэффициентами Математическое моделирование движения примесей в системах водотоков приводит к необходимости решения для него краевых задач на графах. При формулировке задач целесообразно различать концы дуг, функционально по-разному примыкающих к вершинам графа, а именно: конец дуги, в который поток примеси направлен из вершины на дугу, и конец дуги, через который поток примеси направлен из дуги в вершину. В первом случае вершина будет являться вершиной-источником, а во

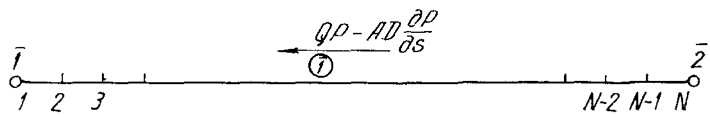


Рис. 2.1. К определению граничных условий в задачах о переносе примесей.

втором — вершиной-стоком. Очевидно, что одна и та же вершина для одних и тех же дуг в различные моменты времени может быть и источником, и стоком.

Назначение граничных условий для задач переноса примесей в воде имеет особенности, связанные со свойствами самого процесса. Их целесообразно подробнее рассмотреть перед формулировкой задачи.

Пусть имеется отдельный участок водотока (рис. 2.1), и на нем поток примеси совпадает с направлением течения воды. Тогда для правого конца дуги вершина $\bar{2}$ является вершиной-источником, и характеристики потока примеси этого источника при решении задачи, естественно, должны быть заданы.

Рассмотрим детальнее ситуацию, складывающуюся на левом конце дуги. Вершина $\bar{1}$ для левого конца дуги является вершиной-стоком. Она принимает весь поток примеси, поступающей с левого конца дуги, и сама непосредственно не воздействует на граничное значение концентрации примеси на левом конце дуги. Концентрация $\rho_{\mathrm{I}}^{\bar{1}}$ примесей зависит только от количества примесей, поступающих с потоком воды из внутренней области дуги.

Из изложенных физических предпосылок следуют некоторые выводы о граничных условиях на концах дуг, примыкающих к вершинам-стокам. Прежде всего они должны зависеть только от характеристики переноса примеси во внутренней области дуги. Таким граничным условием могло бы быть измеренное значение концентрации $\rho_{\mathrm{I}}^{\bar{1}}(t)$, интегрально учитывающее все особенности переноса примесей из внутренней области. Условие приводит к первой краевой задаче. Однако такие измерения выполняют пока редко. Но постановка условия имеет перспективы в связи с автоматизацией измерений и возможностью его определения расчетными методами.

По назначению граничного условия на концах дуг, примыкающих к вершине-стоку, имеются более гибкие предложения, обладающие определенными достоинствами и недостатками. Рассмотрим некоторые из них.

Фактически граничное условие должно помочь выбрать из множества решений дифференциального уравнения (2.5) единственное. Это можно попытаться сделать различными способами. Необязательно жестко назначать $\bar{p}_1^{\mathrm{I}}(t)$, достаточно установить некоторую зависимость $\bar{p}_1^{\mathrm{I}}$ от характеристик переноса во внутренней области.

Одно из общих предложений дано в работах О. Ф. Васильева и А. Ф. Воеводина [36, 379], а именно: назначать на конце дуги, примыкающей к вершине-стоку, условие

$$\partial(Ap)/\partial t + \partial(Qp)/\partial s = Af.$$

Это условие позволяет при численном решении уравнения (2.5) определять значение $\bar{p}_1^{\mathrm{I}}(t)$. Физически принятое условие можно объяснить как допущение о том, что составляющие потока примеси за счет дисперсии в окрестности конца дуги, примыкающей к вершине-стоку, постоянны.

Рассмотрим еще одну возможность назначения достаточно гибкого граничного условия на конце дуги, примыкающей к вершине-стоку. Поскольку при решении рассматриваемых задач обычно используют численные методы, искомые функции определяются приближенно. Уравнение (2.5) обычно решается численно. Если в частных случаях и используют аналитические методы, то из-за неточностей определения коэффициентов решение все равно описывает процесс приближенно. Поэтому представляется логичным предположить, что распределение концентрации $\bar{p}^{\mathrm{I}}(s)$ на $j+1$-м слое в окрестности точки *1* может быть приближенно описано полиномом степени $n-1$ с заранее оцененной погрешностью, учитывающей, например, порядок аппроксимации дифференциальных уравнений разностными и в определенной мере форму кривой, характеризующей распределение примеси в окрестности левого конца дуги. Полином можно построить, например, по Лагранжу, привлекая n узлов, или по методу наименьших квадратов, привлекая большее количество узлов и сглаживая колебания или другим способом. Тогда, очевидно, что вследствие использования полинома степени $n-1$ граничное условие может иметь вид $\partial^n p/\partial s^n = 0$. Как заметил А. Ф. Воеводин, это условие можно трактовать как использование в качестве граничного условия соглашение о том, что форма кривой $\bar{p}^{\mathrm{I}}(s)$ на $j+1$-м слое в окрестности конца дуги, примыкающей к вершине-стоку, приближается полиномом степени $n-1$. Из физических соображений представляется очевидным, что это не слишком жесткое условие при приближенных решениях уравнения (2.5). Заметим, что применение аналогичного условия к уравнениям гиперболического типа привело к корректной краевой задаче [71].

Хотя использование полиномов для аппроксимации граничных условий на верхнем слое представляется перспективным, оно имеет недостатки, которые могут привести к погрешностям решения. Например, как показали А. Ф. Воеводин и А. С. Овчарова [55], использование на верхнем слое полинома Лагранжа не приводит к исходному дифференциальному уравнению при предельном переходе от разностной формы уравнений к дифференциальной. Кроме того, нужны специальные средства выхода на стационарные режимы, поскольку производные от полиномов на границах в этом случае могут не быть близкими к нулю. Не исследовалась и корректность постановки краевой задачи.

Рассмотрим более общие случаи назначения граничных условий, когда к вершине примыкает несколько дуг, сосредоточенные источники и стоки примесей и для части которых вершина является вершиной-источником, а для других — одновременно вершиной-стоком.

Прежде всего естественно полагать, что в каждой вершине — при одномерной постановке задачи — происходит полное перемешивание примесей. Вследствие этого на концах дуг, для которых вершина является вершиной-источником, концентрации примесей одинаковы. Закон сохранения массы примеси приводит к балансу потоков примеси для всех дуг и сосредоточенных источников и стоков, примыкающих к вершине.

Граничные условия для концов дуг, примыкающих к вершине как к вершине-стоку, могут быть определены аналогично граничным условиям для конца дуги p_{I}^{I}, рассмотренным ранее на примере одной дуги с вершиной-стоком.

Граничные условия для концов дуг, примыкающих к вершине-источнику, определяются из уравнения баланса примесей всех дуг, примыкающих к вершине, с учетом равенства концентраций примесей на их концах и потоков примеси сосредоточенных источников и стоков. Если к вершине примыкают источники и стоки примесей, не схематизированные дугами графа, то их потоки, естественно, должны быть заданы.

Таким образом, математическое моделирование движения примесей в системах водотоков может привести к необходимости решения на графе следующих краевых задач:

найти решение $p(s, t)$ параболического уравнения

$$\frac{\partial (Ap)}{\partial t} + \frac{\partial (Qp)}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(AD\frac{\partial p}{\partial s}\right) + Af$$

на каждой из $\bar{n}$ дуг графа в области

$$s_{\text{I}}^{\bar{n}} < s < s_{\text{V}}^{\bar{n}}, \quad t > t_0,$$

удовлетворяющее следующим краевым условиям:

начальным — на каждой $\bar{n}$-й дуге графа

$$p^{\bar{n}}(s,\ t_0) = \varphi^{\bar{n}}(s);$$

граничным — на $n1$ конце $\overline{n1}$-х дуг ($n2$ концах $\overline{n2}$-х дуг), для которых вершина $\bar{m}$ является вершиной-стоком (вершиной-источником) с учетом k сосредоточенных источников $Q^k_{\bar{m}} p^k_{\bar{m}}$, для каждой вершины:

примыкания

$$p^{\overline{n1}}_{\bar{m}} = \varphi^{\overline{n1}}_{\bar{m}}(t), \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial (Ap)}{\partial t} + \frac{\partial (Qp)}{\partial s} = Af\right)^{\overline{n1}}_{\bar{m}},$$

$$\text{или} \quad \left(\frac{\partial^n p}{\partial s^n} = 0\right)^{\overline{n1}}_{\bar{m}}; \quad p^{\overline{n2}}_{\bar{m}} = \varphi^{\overline{n2}}_{\bar{m}}(t), \quad \text{или}$$

$$p^{\overline{n2}}_{\bar{m}} = p_{\bar{m}}(t);$$

баланса потоков примеси

$$\sum_1^{n1}\left(Qp - AD\frac{\partial p}{\partial s}\right)^{\overline{n1}}_{\bar{m}} - \sum_1^{n2}\left(Qp - AD\frac{\partial p}{\partial s}\right)^{\overline{n2}}_{\bar{m}} + \sum_1^{k} Q^k_{\bar{m}} p^k_{\bar{m}} = 0;$$

полного перемешивания

$$\sum_1^{n1}\left(Qp - AD\frac{\partial p}{\partial s}\right)^{\overline{n1}}_{\bar{m}} + \sum_1^{k} Q^k_{\bar{m}} p^k_{\bar{m}} = p_{\bar{m}} \sum_1^{n2} Q^{\overline{n2}}_{\bar{m}}.$$

Это наиболее часто встречающиеся задачи. Однако возможны формулировки задач с другими граничными условиями, посредством которых моделируют работу различных устройств, воздействующих на изменение концентрации примесей. Например, поток насыщается кислородом и примесями-реагентами по определенному режиму, который и моделируется граничными условиями.

2.4. Метод решения задачи

Уравнение переноса примесей (2.5) учитывает влияние на движение примесей расходов, скоростей течения воды, площади сечения водотоков, взаимодействия ингредиентов с окружающей средой. Большинство упомянутых факторов произвольно изменяются в пространстве и времени, задание их в аналитической форме затруднительно, а некоторые, как, например, расход воды, получаются в табличной форме. Поэтому все параметры, входящие в уравнения, представляются в табличной форме. В этом одна из причин применения численных методов решения задачи о переносе примесей, как и задачи о движении воды с уравнениями движения (1.7). Ниже рассматривается наиболее часто встречающаяся ситуация, когда плотность воды не зависит от переноса моделируемых примесей и известна. Тогда уравнения (1.7) и (2.5) образуют распадающуюся систему уравнений, поэтому решаются последовательно.

Сначала решается задача о движении воды с помощью системы уравнений движения (1.7), а затем с учетом этих результатов — уравнение (2.5). Если $\rho = f(p)$, то систему уравнений необходимо решать совместно, например, методами, изложенными в работах [175, 319].

Дифференциальные операторы уравнения (2.5) аппроксимировались разностными по той же шеститочечной разностной схеме с весами (см. рис. 1.6 *а*), что и дифференциальные операторы системы уравнений (1.7), с некоторым несущественным отличием. В работе [146] показано, что использование направленных разностей для конвективного слагаемого, содержащего расход, повышает обусловленность разностной системы. Естественно было бы воспользоваться этим свойством.

Имелось два пути численного решения задачи о переносе. Первый — непосредственное решение численными методами уравнения второго порядка (2.5). Второй путь — переход от уравнения второго порядка (2.5) к системе уравнений первого порядка введением новой переменной, например $E = AD\partial p/\partial s$. В работе [52] использован этот переход, и результаты расчетов были приемлемыми. Использование второго пути представляется привлекательным с позиций организации вычислительного процесса: весь алгоритм решения задачи о переносе примесей практически сводится к имеющемуся алгоритму и в определенной мере к программе расчета неустановившегося движения воды с теми лишь отличиями, что будут другими (значительно более простыми) матричные коэффициенты и в некоторых случаях программы определения граничных условий. Это придало бы универсальность всему процессу вычислений. Однако отсутствуют возможности представления второго варианта разностной задачи. Кроме того, не накоплен опыт ее применения, а чисто теоретический путь оценки эквивалентности соответствующей системы уравнений первого порядка уравнению второго порядка затруднителен. Известно, что эквивалентность оценивается свойствами коэффициентов уравнений, а они являются достаточно сложными табличными функциями, особенно при выходе потока на пойму. Условия эквивалентности [148] не очевидны. Поэтому представлен вариант решения задачи численными методами уравнения переноса второго порядка.

Разностный аналог дифференциального уравнения (2.5) будет иметь вид

$$\frac{(Ap)_{i,j+1} - (Ap)_{i,j}}{\Delta t} + \sigma\left(\varphi_1 \frac{(Qp)_{i,j+1} - (Qp)_{i-1,j+1}}{\Delta s} + \right.$$

$$\left. + \varphi_2 \frac{(Qp)_{i+1,j+1} - (Qp)_{i,j+1}}{\Delta s}\right) + (1-\sigma)\left(\varphi_1 \frac{(Qp)_{i,j} - (Qp)_{i-1,j}}{\Delta s} + \right.$$

$$\left. + \varphi_2 \frac{(Qp)_{i+1,j} - (Qp)_{i,j}}{\Delta s}\right) =$$

$$= \frac{\sigma}{\Delta s}\left(\frac{((AD)_{i+1,\,j+1} + (AD)_{i,\,j+1})(p_{i+1,\,j+1} - p_{i,\,j+1})}{2\,\Delta s}\right) -$$

$$- \frac{((AD)_{i,\,j+1} + (AD)_{i-1,\,j+1})(p_{i,\,j+1} - p_{i-1,\,j+1})}{2\,\Delta s} +$$

$$+ \frac{1-\sigma}{\Delta s}\left(\frac{((AD)_{i+1,\,j} + (AD)_{i,\,j})(p_{i+1,\,j} - p_{i,\,j})}{2\,\Delta s} -\right.$$

$$\left. - \frac{((AD)_{i,\,j} + (AD)_{i-1,\,j})(p_{i,\,j} - p_{i-1,\,j})}{2\,\Delta s}\right) + (Af)_{i,\,j+1}, \qquad (2.6)$$

где $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ — коэффициент учета весов временных слоев; φ_1, φ_2 — коэффициенты учета направленных разностей:

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = 0, \text{ если } \operatorname{sign}(Q_{i,\,j+1} - Q_{i-1,\,j+1}) = -1;$$
$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 1, \text{ если } \operatorname{sign}(Q_{i,\,j+1} - Q_{i-1,\,j+1}) = 1;$$

при $\varphi_1 = \varphi_2 = 0{,}5$ разности становятся центральными.

Сгруппировав слагаемые с неизвестными $p_{i-1,\,j+1}$, $p_{i,\,j+1}$, $p_{i+1,\,j+1}$ на верхнем слое, приведем уравнение (2.6) к виду

$$a_i p_{i-1,\,j+1} + b_i p_{i,\,j+1} + c_i p_{i+1,\,j+1} = d_i, \qquad (2.7)$$

где

$$a_i = -H\sigma\left(\varphi_1 Q_{i-1,\,j+1} + \frac{(AD)_{i,\,j+1} + (AD)_{i-1,\,j+1}}{2\,\Delta s}\right);$$

$$b_i = A_{i,\,j+1} + H\sigma(\varphi_1 Q_{i,\,j+1} - \varphi_2 Q_{i,\,j+1} +$$

$$+ \frac{1}{2\,\Delta s}((AD)_{i+1,\,j+1} + 2(AD)_{i,\,j+1} + (AD)_{i-1,\,j+1});$$

$$c_i = H\sigma\left(\varphi_2 Q_{i+1,\,j+1} - \frac{(AD)_{i+1,\,j+1} + (AD)_{i,\,j+1}}{2\,\Delta s}\right);$$

$$d_i = -H(1-\sigma)\left(\varphi_1((Qp)_{i,\,j} - (Qp)_{i-1,\,j}) - \varphi_2((Qp)_{i+1,\,j} - (Qp)_{i,\,j})\right) +$$

$$+ \frac{H(1-\sigma)}{2\,\Delta s}\left(((AD)_{i+1,\,j} + (AD)_{i,\,j})(p_{i+1,\,j} - p_{i,\,j}) -\right.$$

$$\left. - ((AD)_{i,\,j} + (AD)_{i-1,\,j})(p_{i,\,j} - p_{i-1,\,j})\right) + (Ap)_{i,\,j} + (Af)_{i,\,j+1}\,\Delta t.$$

Таким образом, из системы (2.7) видно, что для каждой дуги графа и каждого $j+1$-го слоя необходимо последовательно решать разностную краевую задачу

$$a_i p_{i-1} + b_i p_i + c_i p_{i+1} = d_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant N$$

при рассмотренных ранее граничных условиях. Последовательность решения такого рода краевых задач и есть общее решение задачи. Для этого воспользуемся методом прогонки, придерживаясь работ [61, 74].

Запишем уравнение $p_N=\varphi_N$ в более общем виде

$$p_N = l_N p_{N-1} + k_N, \tag{2.8}$$

причем

$$l_N = 0; \quad k_N = \varphi_N(t).$$

Для узла $N-1$ можно записать

$$a_{N-1} p_{N-2} + b_{N-1} p_{N-1} + c_{N-1} p_N = d_{N-1}. \tag{2.9}$$

Заметим, что признак дуги графа и расчетного слоя снят, поскольку вычисления последовательно выполняются на каждой дуге и на каждом $j+1$-м временном слое. Подставив в соотношение (2.9) значение p_N из уравнения (2.8) и выполнив преобразования, получим

$$(b_{N-1} + c_{N-1} l_N) p_{N-1} = -a_{N-1} p_{N-2} + d_{N-1} - c_{N-1} k_N.$$

Тогда

$$p_{N-1} = \frac{-a_{N-1}}{b_{N-1} + c_{N-1} l_N} p_{N-2} + \frac{d_{N-1} - c_{N-1} k_N}{b_{N-1} + c_{N-1} l_N},$$

причем a_{N-1}, b_{N-1}, c_{N-1}, d_{N-1}, l_N и k_N — величины известные.

По аналогии в общем случае

$$p_{i-1} = -\frac{a_{i-1}}{b_{i-1} + c_{i-1} l_i} p_{i-2} + \frac{d_{i-1} - c_{i-1} k_i}{b_{i-1} + c_{i-1} l_i}.$$

Следовательно, получены рекуррентные соотношения вида

$$p_{i-1} = l_{i-1} p_{i-2} + k_{i-1}, \tag{2.10}$$

где

$$l_{i-1} = -a_{i-1}/(b_{i-1} + c_{i-1} l_i); \quad k_{i-1} = (d_{i-1} - c_{i-1} k_i)/(b_{i-1} + c_{i-1} l_i). \tag{2.11}$$

Используя рекуррентные соотношения, можно вычислить последовательно l_{i-1}, k_{i-1}, l_{i-2}, k_{i-2}, l_{i-3}, k_{i-3} и так далее до l_2, k_2 на каждой дуге, имеющей внешнюю вершину. Для такой дуги будет получено

$$p_2 = l_2 p_1 + k_2.$$

Если первый узел дуги внешний и в нем значение $p_1=\varphi_1$ задано, то, используя пары значений l_i и k_i, по рекуррентным соотношениям (2.10) последовательно вычисляем p_3, p_4, ..., p_{N-1}. Следовательно, на $j+1$-м слое задача решена и можно переходить на $j+2$-й слой и до момента T.

Различные возможности определения граничного условия в случае, когда в первом узле дуги графа концентрация $p_{1,j+1}$

не задана (наиболее часто встречающийся случай), будут рассмотрены в п. 2.4.1.

Процесс вычисления коэффициентов l_i и k_i по рекуррентным соотношениям (2.11) называется прямой прогонкой, а процесс нахождения решений по рекуррентным соотношениям (2.10) — обратной прогонкой. Известно, что метод прогонки удачно использует особенности полученной системы разностных уравнений и является наиболее экономичным по количеству арифметических операций, причем погрешности, возникающие в процессе вычислений, не накапливаются.

2.4.1. Начальные и граничные условия

Как следует из математической формулировки задачи, для ее решения необходимы начальные условия, т. е. знания о распределении по длине системы водотоков концентрации примеси в некоторый момент времени. Имеются различные возможности их получения. Существуют объекты, на которых выполняют достаточно детальные измерения концентраций. Тогда в расчетных узлах значения концентраций можно получить интерполяцией, в том числе и с использованием уравнения переноса. В настоящее время этот способ используют редко, однако он имеет перспективы в связи с автоматизацией измерений.

Наиболее просто определять начальное состояние водотоков ВХС в моменты, когда распределение концентраций по длине близко к установившемуся. Расчеты распределения концентраций при установившемся по гидравлическим и качественным характеристикам состоянии водотоков можно выполнить по уравнению переноса (2.5), в котором, естественно, опускается слагаемое $\partial(Ap)/\partial t$. Применительно к стационарному случаю уравнение (2.5) будет иметь вид

$$d\,(Qp - AD\,dp/ds)/ds = Af, \tag{2.12}$$

где коэффициенты Q, A, D определяются из математической модели движения; значение f должно быть задано. Из уравнения (2.12) следует

$$Qp - AD\,dp/ds = \int\limits_{s_1}^{s} Af\,ds + c_1. \tag{2.13}$$

Константу c_1 можно определить из соотношения (2.13)

$$c_1 = Q_1 p_1 - A_1 D_1\,dp/ds,$$

где индексом «1» отмечены параметры, определенные в начальном створе. Поскольку зависимость функции A и f от s известна, интеграл можно определить численными методами. Введя обозначения

$$-v'D = f_1(s), \quad -(1/AD)\int\limits_{s_1}^{s} Af\,ds + c_1 = f_2(s),$$

уравнение (2.13) можем записать в виде

$$dp/ds + f_1(s)\,p = f_2(s).$$

Таким образом, получено обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Оно имеет аналитическое решение [177, 178]. Однако в нашем случае, поскольку все параметры уравнения — табличные функции, целесообразнее применить численные методы решения задачи Коши и при этом воспользоваться стандартными программами, имеющимися в математическом обеспечении практически каждой ЭВМ.

Заметим, что при установившемся переносе примесей возможны ситуации, когда измерения концентрации примесей выполняют не в одном, а в нескольких створах. В таком случае приходим к краевой задаче. Численное решение задачи Коши на участке водотока, на границах которого измерены концентрации, вероятнее всего, не приведут к определению значения концентрации примеси в точке, находящейся на противоположной границе расчетного участка, численно равного измеренному значению. Причин тому много. Среди них и неточности задания функции f, и погрешности расчета параметров уравнения и численного метода. Для уточнения функции f обычно организуется итерационный процесс по параметрам функции f до совпадения вычисленных значений концентраций с измеренными. Так уточняются, идентифицируются сложные параметры, характеризующие интенсивность физико-химических процессов, что само по себе является важной задачей. Таким образом, начальные условия могут быть определены различными способами.

В рассмотренной ранее первой краевой задаче граничные условия известны. В более сложных случаях они могут быть определены различными способами.

На концах $\overline{n2}$-х дуг, для которых вершина $\overline{m}$ является вершиной-источником, условия полного перемешивания и примыкания позволяют определить значения концентраций $p_{\overline{m}}^{\overline{n2}}$. Если к вершине $\overline{m}$ как к вершине-источнику примыкает одна дуга, то условие баланса потоков примеси к вершине $\overline{m}$ позволяет получить граничное условие вида

$$Qp - AD\,\partial p/\partial s = c,$$

разностный аналог которого и используется для определения граничного значения $p_{\overline{m}}^{\overline{n2}}$ при совместном решении с последним уравнением прямой прогонки.

Для концов $\overline{n1}$-х дуг, для которых вершина $\overline{m}$ является вершиной-стоком, значение $p_{\overline{m}}^{\overline{n}}$ на верхнем слое может быть определено при совместном решении последних уравнений прямой прогонки с разностными аналогами дифференциальных уравнений

$$\partial(Ap)/\partial t + \partial(Qp)/\partial s = Af \quad \text{или} \quad \partial^n p/\partial s^n = 0,$$

записанных в окрестности конца дуги.

Поскольку рассмотренные ранее варианты задания граничных условий на конце $\overline{n1}$-й дуги, примыкающей к вершине-стоку, обладают некоторыми недостатками (кроме, естественно, условия, когда $p_m^{\overline{n1}}=\varphi_m^{\overline{n1}}(t)$), обратимся к еще одной возможности определения граничного условия на концах дуг, примыкающих к вершине-стоку.

В работе Е. В. Еременко [93] предложено определять $p_m^{\overline{n1}}$, используя явную разностную схему для решения (2.5), и полиномы Лагранжа [20] надлежащей степени для вычисления производных на нижнем слое. При определении $p_m^{\overline{n1}}$ таким образом учитываются в окрестности границы все слагаемые переноса, поэтому это предложение в дальнейшем совершенствовалось. Чтобы избежать жестких ограничений на шаг по времени на всей длине водотока из-за использования явной разностной схемы, в работе [259] предложено только в окрестности границ ввести промежуточные слои j' с шагом по времени Δt_1, учитывающим ограничения на явную схему, а во всех остальных узлах выполнять расчеты по неявной схеме.

Соответствующие разностные уравнения для первого узла дуги, примыкающей к вершине-стоку, при использовании для аппроксимации с погрешностью, меньшей $0(\Delta s^2)$, производных на нижнем слое полиномов Лагранжа имеют вид

$$p_{1,\,j'+1}=\frac{1}{A_{1,\,j'+1}}\Biggl((Ap)_{1,\,j'}+\frac{H_1}{2}\biggl(\Bigl(\frac{1}{2\,\Delta s}\bigl(-3\,(AD)_{1,\,j'}+4\,(AD)_{2,\,j'}-$$
$$-(AD)_{3,\,j'}\bigr)-Q_{1,\,j'}\Bigr)(-3p_{1,\,j'}+4p_{2,\,j'}-p_{3,\,j'})-$$
$$-p_{1,\,j'}(-3Q_{1,\,j'}+4Q_{2,\,j'}-Q_{3,\,j'})+$$
$$+\frac{(AD)_{1,\,j'}}{\Delta s}(4p_{1,\,j'}-10p_{2,\,j'}+8p_{3,\,j'}-2p_{4,\,j'})\biggr)\Biggr)+f_{1,\,j'+1}\,\Delta t; \tag{2.14}$$

аналогично для последнего узла

$$p_{N,\,j'+1}=\frac{1}{A_{N,\,j'+1}}\Biggl((Ap)_{N,\,j'}+\frac{H_1}{2}\biggl(\Bigl(\frac{1}{2\,\Delta s}\bigl((AD)_{N-2,\,j'}-$$
$$-4\,(AD)_{N-1,\,j'}+3\,(AD)_{N,\,j'}\bigr)-Q_{N,\,j'}\Bigr)\times$$
$$\times(p_{N-2,\,j'}-4p_{N-1,\,j'}+3p_{N,\,j'})-p_{N,\,j'}(Q_{N-2,\,j'}-4Q_{N-1,\,j'}+$$
$$+3Q_{N,\,j'})+\frac{(AD)_{N,\,j'}}{\Delta s}(-2p_{N-3,\,j'}+8p_{N-2,\,j'}-$$
$$-10p_{N-1,\,j'}+4p_{N,\,j'})\biggr)\Biggr)+f_{N,\,j'+1}\,\Delta t_1, \tag{2.15}$$

где $H_1=\Delta t_1/\Delta s$.

Для внутренних узлов в окрестности границ примем использованную ранее схему аппроксимации уравнения переноса, которая при $\sigma=0$ превращается в четырехточечную центральную явную разностную схему. Тогда из уравнения (2.5) получим

$$\frac{(Ap)_{i,\,j'+1}-(Ap)_{i,\,j'}}{\Delta t}+\varphi_1\frac{(Qp)_{i,\,j'}-(Qp)_{i-1,\,j'}}{\Delta s}+$$

$$+\varphi_2\frac{(QP)_{i+1,\,j'}-(Qp)_{i,\,j'}}{\Delta s}=$$

$$=\frac{1}{\Delta s}\left(\frac{((AD)_{i+1,\,j'}+(AD)_{i,\,j'})(p_{i+1,\,j'}-p_{i,\,j'})}{2\,\Delta s}-\right.$$

$$\left.-\frac{((AD)_{i,\,j'}+(AD)_{i-1,\,j'})(p_{i,\,j'}-p_{i-1,\,j'})}{2\,\Delta s}\right)+(Af)_{i,\,j'+1}.$$

Разрешая уравнение относительно $p_{i,\,j'+1}$, получаем расчетную формулу

$$p_{i,\,j'+1}=\frac{1}{A_{i,\,j'+1}}\Big((Ap)_{i,\,j'}+H_1\Big(\varphi_1\big((Qp)_{i-1,\,j'}-(Qp)_{i,\,j'}\big)+$$

$$+\varphi_2\big((Qp)_{i,\,j'}-(Qp)_{i+1,\,j'}\big)\Big)+\frac{1}{2\,\Delta s}\Big(\big((AD)_{i+1,\,j'}+(AD)_{i,\,j'}\big)\times$$

$$\times(p_{i+1,\,j'}-p_{i,\,j'})-\big((AD)_{i,\,j'}+(AD)_{i-1,\,j'}\big)(p_{i,\,j'}-p_{i-1,\,j'})\Big)\Big)+$$

$$+f_{i,\,j'+1}\,\Delta t. \qquad (2.16)$$

Рассмотрим подробнее вычисление граничных условий по предлагаемой схеме. Поскольку ограничения на шаги с использованием явной разностной схемы более жесткие, чем для неявной, то $\Delta t_1\leqslant\Delta t$. Значит, при определении граничного условия в момент времени Δt необходимо сделать несколько шагов Δt_1.

Для того чтобы на промежуточном слое вычислить концентрацию примесей именно в момент времени $t+\Delta t$, действительное значение шага Δt_1 выбирают несколько меньшим с тем, чтобы отношение $\Delta t/\Delta t_1$ было целым числом.

Определим по изложенной схеме граничное условие на левой границе. На рис. 2.2 представлена соответствующая схема расположения узлов. Пусть поток примеси направлен к первому узлу дуги. Очевидно, что для аппроксимации левосторонней производной второго порядка с погрешностью $0(\Delta s^2)$ по зависимости (2.14) необходимо иметь на слое $j'+4$ четыре узла, из которых один ($p_{1,\,j'+4}$) находится на границе, а остальные — во внутренней области дуги. Но тогда на предпоследнем слое $j'+3$, чтобы использовать разностные уравнения (2.16), нужно иметь во внутренней области на один узел больше. Очевидно, что этот процесс приводит к построению лесенки, как представлено на рис. 2.2.

Расчеты $p_{1,j+1}=p_{1,j'+5}$ выполняют следующим образом. В узлах *2—7* значения $p_{i,j'+1}$ находят по формуле (2.16), а в узле *1* — по формуле (2.14), на слое $j'+2$ в узлах *2—6* — соответственно по формуле (2.16) и в узле *1* — по формуле (2.14) и так далее до слоя $j'+4$. Затем по формуле (2.14) определяют значение $p_{1,j'+5}$, равное $p_{1,j+1}$. Это и есть граничное условие в момент $t+\Delta t$.

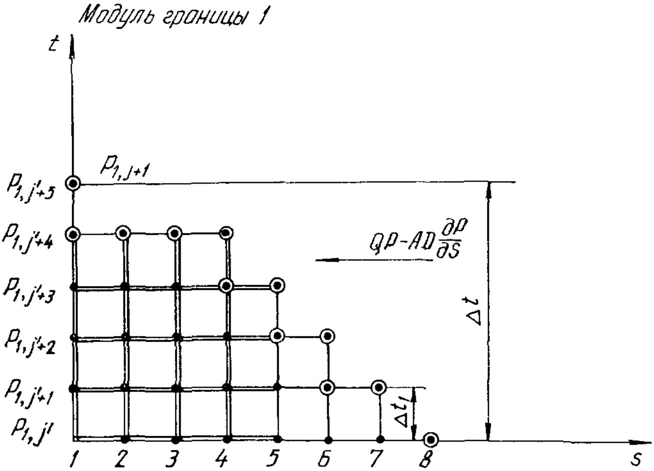


Рис. 2.2. К определению граничного условия.

Если на правой границе поток примеси направлен из внутренней области дуги в вершину-сток, то определение концентрации примесей на правой границе выполняют аналогично с использованием в граничном узле формулы (2.15).

Отметим, что в случае линейного изменения или постоянной концентрации — выход на режимы установления — в окрестности концов дуг, примыкающих к вершине-стоку, формулы (2.14) и (2.15) могут привести к большим погрешностям определения производных, поскольку на нижнем слое формально строится полином третьей степени и правосторонняя вторая производная от него не будет равна нулю. Поэтому при построении полинома необходимо анализировать коэффициенты точек, через которые строится полином. Если они окажутся расположенными вблизи прямой, то необходимо вычислить производные, например численными методами.

Заметим, кстати, что с целью построения экономичного алгоритма нет необходимости осуществлять прогонки по всему графу, целесообразно путем вычисления производных от решений следить за фронтом волны и осуществлять прогонку на участке только в пределах от границы до фронта волны, а после окончания сброса решать задачу в пределах перемещающегося колокола концентраций, выполняя расчеты по адаптивной к перемещению колокола сетке [59, 257, 361].

Хотелось бы обратить внимание на то, что с целью упрощения записей алгебраических уравнений при разностной аппроксимации дифференциальных уравнений движения воды и переноса примесей использовались одинаковые обозначения для шагов по пространству Δs и по времени Δt. Однако на самом деле для уравнений переноса примесей они значительно меньше. Это вызвано прежде всего существенным влиянием шагов на вычислительную дисперсию, которая может при неудачном их выборе полностью обесценить результаты моделирования.

3 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ВОДОТОКОВ

Использование уравнений движения и переноса для математического моделирования процессов требует знания коэффициентов уравнений, характеризующих морфометрические, гидравлические и другие параметры системы водотоков. Определение большинства параметров вызывает значительные трудности, обусловленные прежде всего сложностью и недостаточной изученностью представляемых ими характеристик. В настоящее время трудности создания методик определения параметров превосходят трудности математического моделирования процессов. При создании моделей процессов на этапе получения исходных уравнений используются общие законы сохранения, на этапе решения — строгие методы математической физики и численного анализа. Для определения параметров уравнений отсутствует столь проверенный и совершенный аппарат, поскольку гидравлика, несмотря на многовековую историю, из-за сложности изучаемых процессов не имеет применительно к расчету большинства параметров сложившейся системы бесспорных утверждений, из которых в качестве следствий можно было бы определять основные параметры. Поэтому в гидравлике сосуществуют многочисленные подходы к определению одних и тех же важнейших характеристик, причем результаты вычислений по различным методам различаются существенно, а оценки их достоверности, как правило, отсутствуют.

Необходимость определения многих параметров применительно к сложным системам водотоков потребовала некоторого единого и достаточно общего подхода к методам их расчета. Наиболее перспективным представляется путь, при котором принимается некоторая система исходных утверждений, обоснованных экспериментально и являющихся, вообще говоря, обобщением опытных данных, и затем создания на их основе методики расчета параметров. Естественно, система исходных утверждений может со временем совершенствоваться.

В различных работах имеются попытки аксиоматического подхода к созданию методик расчета гидравлических явлений. Это в значительной мере относится к разделам гидравлики, которые развиваются на базе теоретической гидромеханики, однако последней пока недоступны решения многих практических задач. Поэтому гидравлика дополняет положения гидромеханики своими аксиомами-постулатами, которые больше схематизируют сложные явления, но позволяют во многих случаях с приемлемой погрешностью определять характеристики гидравлических явлений.

В данной работе предпринята попытка аксиоматического подхода к созданию методик расчета основных параметров одномерных уравнений движения и переноса примесей. При этом отдавалось предпочтение известным постулатом гидравлики. Однако в тех случаях, когда, по мнению автора, существующие гидравлические постулаты недостаточно обоснованно ограничивали возможности математического моделирования, они совершенствовались, а достоверность результатов оценивалась. Поэтому всегда, когда для этого имелись необходимые условия, результаты расчетов параметров по предлагаемой методике и используемых экспериментальных исследований имеют интервальную оценку погрешностей.

Решение одномерной задачи о движении воды и переносе примеси сводится к определению характеристик процессов в расчетных узлах в некоторые моменты времени. Следовательно, и водоток целесообразно также представлять связанными с расчетными узлами характерными сечениями, параметры которых будут источником первичной информации при моделировании процессов. Поскольку численный метод решения задач предполагает интерполяцию параметров в расчетные узлы уравнений, естественно выбирать характерные сечения водотоков таким образом, чтобы интерполяция была возможной.

Обратим внимание на то, что не все параметры уравнений, даже в принципе, можно интерполировать линейно. Например, линейная интерполяция ширины или глубины как линейных величин является естественной, однако одновременная линейная интерполяция площади будет противоречить предположению о возможности линейной интерполяции ширины и глубины. Это соображение приводит к следующему, весьма существенному выводу: линейно можно интерполировать характеристики, которые изменяются между характерными сечениями по линейной или близкой к линейной зависимости. Другие параметры уравнений в расчетных узлах должны вычисляться через линейно изменяющиеся.

Из изложенного следует, что характерные сечения должны располагаться в местах существенного изменения ширины сечения, уклона, а также шероховатости ложа водотока с тем, чтобы было возможно линейные характеристики интерполировать линейно.

3.1. Понятие о математической модели системы водотоков

Для математического моделирования процессов движения воды и примесей в системе водотоков должны быть известны коэффициенты уравнений — параметры уравнений движения и переноса. Большинство параметров может быть определено для характерных сечений до моделирования процессов, их значения вычисляются для различных глубин, и тем самым каждое сечение представляется таблицей параметров. Сечения располагаются в соответствии с расстоянием от постоянного начала.

Упорядоченную по глубине в характерном сечении и по расстоянию графе систему таблиц параметров математических моделей процессов, которая характеризует систему водотоков как объект *математического моделирования, назовем математической моделью системы водотоков.* В качестве примера приведена упрощенная табл. 3.1, в которой представлены параметры уравнений движения и переноса для трапецеидального сечения водотока.

Используя одну и ту же математическую модель системы водотоков, можно воссоздать различные гидрологические режимы системы, меняя лишь расходы и (или) уровни, и (или) концентрации примесей на границах и (или) внутри системы. Заметим, что прослеживается аналогия между математической и физической моделями системы водотоков.

Таблица 3.1

Таблица параметров математической модели системы водотоков (математическая модель объекта — ММО)

Параметр	Глубина				
	1	2	3	4	5
h	0,240E + 01	0,280E + 01	0,320E + 01	0,360E + 01	0,400E +
B_0	0,880E + 01	0,960E + 01	0,104E + 02	0,112E + 02	0,120E +
B	0,880E + 01	0,960E + 01	0,104E + 02	0,112E + 02	0,120E +
A	0,336E + 01	0,704E + 01	0,110E + 02	0,154E + 02	0,200E +
R	0,368E + 00	0,686E + 00	0,969E + 00	0,123E + 01	0,146E +
$\|D\|$	0,244E + 02	0,499E + 02	0,875E + 02	0,143E + 03	0,214E +
n	0,187E − 01	0,194E − 01	0,193E − 01	0,191E − 01	0,190E −
K	0,877E + 02	0,282E + 03	0,561E + 03	0,916E + 03	0,134E +
β	0,106E + 01	0,106E + 01	0,106E + 01	0,105E + 01	0,106E +
H	0,391E + 00	0,767E + 00	0,114E + 01	0,150E + 01	0,186E +
DK	0,402E + 01	0,210E + 01	0,141E + 01	0,107E + 01	0,793E +
$E1$	0,100E + 01	0,100E + 01	0,100E + 01	0,100E + 01	0,100E +

Заметим, что при моделировании процессов в математической модели объекта используются реальные характеристики системы водотоков. Поэтому нет необходимости пересчета результатов математического моделирования с модели на натуру и соответственно не возникает проблемы критериев подобия. Физическое моделирование сложных систем водотоков практически недоступно из-за необходимости существенного уменьшения модели и возникающих проблем пересчета наблюденных характеристик движения с модели на натуру и больших затрат. Поэтому методы математического моделирования процессов движения и перноса в системах сложных водотоков являются практически единственными.

Большинство параметров уравнений движения и переноса — морфометрические и гидравлические характеристики водотоков, отнесенные к сечению. Морфометрические характеристики, в принципе, могут быть измерены и вычислены, определение же многих гидравлических характеристик, например приведенного коэффициента шероховатости для водотоков сложных сечений с неоднородными границами, представляет значительные методические трудности. При выходе потока на широкую пойму возникают особые затруднения: шероховатость русла и отдельных участков поймы весьма неоднородна. С помощью известных таблиц, предназначенных для выбора по описательной характеристике поверхности водотока коэффициентов шероховатости, можно лишь приближенно определить их значения применительно к отдельным, локальным участкам поймы. Вместе с тем при решении задачи о движении воды и переносе примесей в одномерной постановке необходимо знание приведенного коэффициента шероховатости, единого для всего сечения. Это обстоятельство требует разработки прежде всего методики расчета приведенных коэффициентов шероховатости по локальным характеристикам сечений водотоков.

При выходе потока на пойму движение обычно осуществляется не по всему сечению, а в отдельных его частях — транзитными струями, в то время как на значительной части поймы, где небольшие глубины и большая шероховатость, вода практически не движется. Включение нетранзитных зон поймы, ширина которых при определенных глубинах достигает двух третей ширины водного сечения, в площадь живого сечения существенно увеличивает расчетную пропускную способность сечений и ведет к большим погрешностям расчета уровней и расходов. Поэтому транзитные зоны должны выделяться и именно для них должны определяться приведенный коэффициент шероховатости, площади и ширина живого сечения, гидравлический радиус, модуль расхода, корректив количества движения, коэффициент дисперсии, а затем в процессе решения задачи и другие коэффициенты уравнений.

3.2. Определение приведенного коэффициента шероховатости

Погрешность результатов математического моделирования неустановившегося движения воды и примесей в значительной мере зависит от правильного определения параметров математической модели водотоков. Определение модуля расхода водотоков произвольной формы сечения вызывает значительные методические трудности [16, 17, 100], одна из которых — определение приведенного коэффициента шероховатости неоднородных границ водотоков.

Выполненный Н. Б. Барышниковым [16, 17] анализ методов определения пропускной способности водотоков произвольной формы сечения с неоднородными границами показал, что использующиеся в настоящее время методики расчета учитывают неоднородность распределения по границам сечения шероховатости практически лишь двумя однородными величинами — коэффициентами шероховатости русла и поймы.

Наиболее строгая гидравлическая постановка решения этой задачи принадлежит Н. Н. Павловскому [228], который из-за отсутствия экспериментальных данных и сложности процесса воспользовался допущениями о равенстве средних скоростей и гидравлических радиусов для частей потока, относящихся к различным значениям коэффициента шероховатости. Дальнейшие исследования показали [82, 131], что первое допущение является более приемлемым, хотя выделение частей потока, относящихся к различным значениям коэффициента шероховатости, особенно при многократном его изменении по границам и усложнении формы сечения, весьма затруднительно. В сложных сечениях над элементами периметра с большими значениями коэффициента шероховатости и малыми глубинами продольное течение может практически отсутствовать. Использование даже наиболее приемлемого допущения о равенстве средних скоростей в некоторых частях потока средней скорости всего потока применительно к сечениям произвольной формы с неоднородными границами не находит подтверждения. Поэтому целесообразно попытаться разработать методику расчета приведенного коэффициента шероховатости применительно к неоднородным границам водотоков произвольной формы сечения без привлечения известных допущений о равенстве соответствующих гидравлических радиусов и средних скоростей в частях сечения, прилегающих к частям границ с однородной шероховатостью [228] или к приведенной длине смоченного периметра [81].

Многочисленные исследования [19, 81, 82, 89, 100, 130, 131, 228, 313, 343], посвященные определению приведенного коэффициента шероховатости неоднородных по границам сечения русел водотоков, позволили получить приближенные зависимости. Обстоятельный аналитический обзор и обобщение исследований выполнены Г. В. Железняковым [100]. Приведем некоторые из наиболее распространенных зависимостей. В наиболее общем виде такая зависимость предложена И. Д. Денисенко [81, 82]:

$$n=\left(\frac{\chi_1 n_1^{1/(0,5+y)}+\chi_2 n_2^{1/(0,5+y)}}{\chi_1+\chi_2}\right)^{0,5+y}, \qquad (3.1)$$

где y — показатель степени в формуле Павловского.

Из выражения (3.1) при $y=0$ получаем формулу Павловского [228], которой дадим номер (3.2), при $y=1/6$ получаем формулу (3.3), которая встречается в работах Н. П. Белоконя [19], А. А. Сабанеева, Э. П. Коваленко [131]; при $y=1/2$ — формулу (3.4) для средневзвешенного значения коэффициента. Кроме того, находят применение формулы В. Б. Дульнева [89] — дадим ей номер (3.5) — и Е. А. Шиперко [313] — номер (3.6).

И. Д. Денисенко выполнил экспериментальные исследования [81, 82] и обобщил опубликованные экспериментальные данные по приведенным коэффициентам шероховатости неоднородных границ сечений водотоков и вычислил их значения по зависимостям (3.1)—(3.6). Эти данные использованы для статистической оценки погрешностей расчетов приведенного коэффициента шероховатости по различным методикам. Полученные результаты представлены в табл. 3.2.

И. Д. Денисенко отмечает, что различия в значениях приведенного коэффициента шероховатости, вычисленного по различным зависимостям, становятся существенными, когда локальные коэффициенты шероховатости различаются в 1,5—2 раза — это наиболее распространенный случай применительно к водотокам ВХС.

Изложенное позволяет прийти к выводу о том, что имеющиеся формулы определения приведенного коэффициента шероховатости применительно к водотокам относительно простых форм сечений с двумя несущественно различающимися значениями характеристик шероховатости на границе приводят к погрешностям определения коэффициента, отличающимся на порядок. Методики, как правило,

Таблица 3.2

Погрешности определения приведенного коэффициента шероховатости по различным формулам ($p=0,95$)

Номер формулы	Погрешность, %	Номер формулы	Погрешность, %
(3.1)	$+0,7\pm0,7$	(3.4)	$+0,2\pm1,1$
(3.2)	$-3,4\pm1,0$	(3.5)	$+6,3\pm2,4$
(3.3)	$-1,1\pm3,0$	(3.6)	$+10,0\pm3,2$

не содержат рекомендаций по применению их к сечениям произвольных форм с многократно изменяющейся по границам шероховатостью.

Трудно предположить, что изучение тонкой структуры турбулентных течений в ближайшее время позволит оценить диссипацию энергии в потоках произвольных поперечных сечений с неоднородной по границам сечения шероховатостью. Поэтому представляется перспективным используемое в гидравлике направление изучения недостаточно исследованных видов течений путем привлечения гипотез, которые, схематизируя сложные течения, сводят их к более простым, но и к более исследованным.

В гидравлике применительно к равномерному движению широко используют постулат: средняя скорость в русле любой формы сечения равна средней скорости плоского потока с глубиной, равной гидравлическому радиусу R, и шириной, равной смоченному периметру χ. Он сформулирован в явной форме, например, в работе [75]. При этом неявно предполагается равенство уклонов и однородность по границам сечения коэффициентов шероховатости русла произвольной формы и плоского потока. На рис. 3.1 *1* схематически представлены сечения водотока произвольной формы и соответствующих плоских потоков На схемы нанесены гидравлические параметры, которые принимаются, в соответствии с постулатом и гипотезой, равными для потоков произвольной формы сечения и плоских.

Замена течения в водотоке произвольной формы плоским течением при определении средней скорости хотя и является схематизацией явления, тем не менее не может вызывать существенных возражений, поскольку многолетняя практика гидравлических расчетов подтверждает приемлемость постулата [75]; более того, предложение о замене сложного течения плоским, теоретически и экспериментально наиболее изученным,— при всей его дискуссионности — представляется целесообразным.

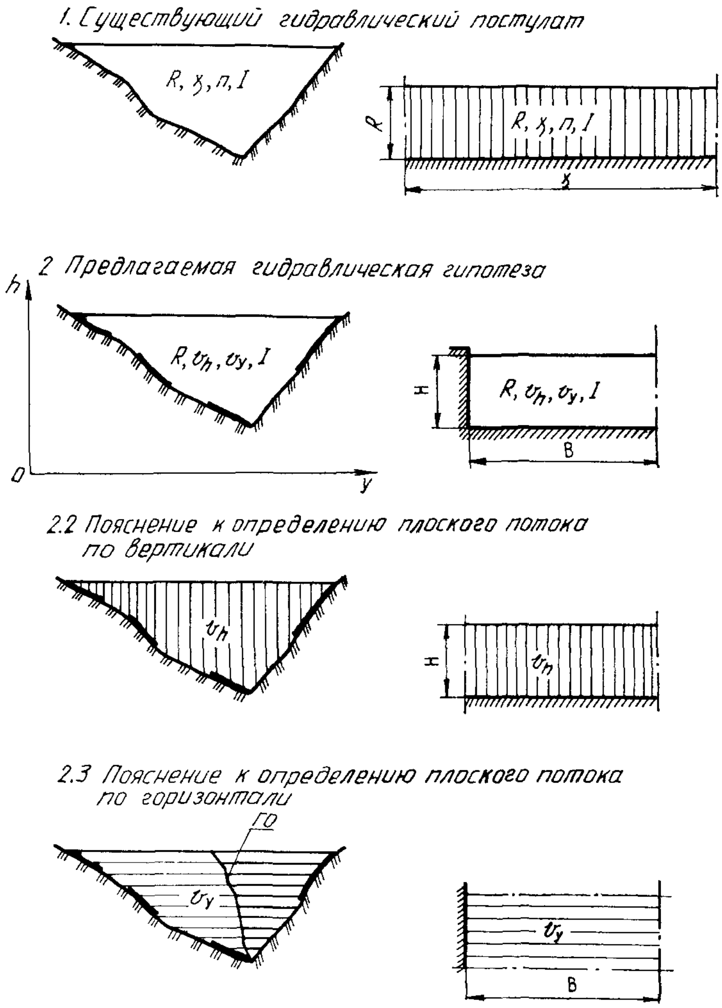


Рис 3 1 Схемы к иллюстрации гидравлического постулата (*1*) и предлагаемой гипотезы (*2*)

Тем не менее использованная в гидравлическом постулате схематизация является слишком решительной: сводит течения в водотоках любых форм сечений к течению плоского потока.

Заметим, что требование равенства гидравлических радиусов и смоченных периметров, а следовательно площадей, поскольку $A=$

$=R\chi$, в упомянутом гидравлическом постулате является излишним. Действительно, средняя скорость плоского потока с глубиной, равной R, и шириной, равной χ, равна средней на вертикали скорости в этом же потоке. Значит, упомянутый постулат можно было бы сформулировать и следующим образом: средняя скорость в русле любой формы сечения равна средней на вертикали скорости плоского потока с глубиной, равной гидравлическому радиусу R. Следовательно, нет необходимости в удовлетворении требования постулата о равенстве смоченных периметров и как следствие площадей русла любой формы и плоского потока. Можно рассматривать, естественно, плоский поток единичной ширины. Влияние формы не учитывается, и соответствие потоков не взаимнооднозначное, поскольку одинаковый гидравлический радиус могут иметь различные сечения.

Постулат, хотя и используется широко в гидравлике, имеет не гидравлическое, а геометрическое, точнее морфометрическое, содержание. Основная гидравлическая характеристика — коэффициент шероховатости — играет в ней пассивную роль, так как он принимается однородным по границам произвольной формы сечения и плоского потока. Постулат не позволяет определить приведенный коэффициент шероховатости в случае неоднородных границ водотоков. Отмеченные недостатки постулата приводят к необходимости его совершенствования. К особенностям, которые желательно было бы учесть при этом, в первую очередь целесообразно отнести форму сечения и неоднородность распределения по границам водотока шероховатости.

Попытка улучшения постулата, хотя еще и в неявной форме, принадлежит В. Н. Гончарову [75], который при выводе формулы для расчета поля продольных скоростей в сечении прямоугольной формы предложил определять его не через поле скоростей одного плоского потока, как это казалось бы следовало из упомянутого постулата (см. рис. 3.1 *1*), а посредством некоторой суперпозиции полей скоростей двух плоских потоков, перпендикулярных границам. Получено удовлетворительное согласование вычисленных скоростей с экспериментальными [75].

Дальнейшее развитие этого направления исследований содержится в работах Э. П. Коваленко [131, 133], который при выводе формулы для расчета поля продольных скоростей в сечении произвольной формы предложил заменять продольное поле скоростей некоторой комбинацией полей скоростей двух взаимно перпендикулярных плоских потоков — плоского по горизонтали и плоского по вертикали, причем плоские потоки рассматриваются уже необязательно в плоскостях, перпендикулярных элементам периметра произвольного сечения.

На этом предложении Коваленко еще сказывается влияние существующего гидравлического постулата, а именно· при выводе формулы для расчета поля продольных скоростей использовано требование постулата о равенстве площадей и смоченных периметров сечений. Это привело к необходимости введения двух коэффициентов, которые не для каждого сечения произвольной формы принимают действительные значения. Ранее было отмечено, что в существующей гипотезе нет необходимости в удовлетворении равенства смоченных периметров сечений произвольной формы и плоского потока, а следовательно, нет необходимости и во введении двух коэффициентов.

Представление реального поля продольных скоростей, как показали работы Гончарова и Коваленко, комбинацией полей скоростей более изученных плоских потоков нам кажется плодотворным, так как позволяет более полно учесть влияние на течение формы сечения и локальных характеристик шероховатости границ через поля скоростей хотя и гипотетических, но более изученных плоских потоков. Естественно в дальнейшем отказаться от замеченных недостатков постулата и излишних предположений.

В связи с изложенным применительно к равномерному движению предлагается следующая гипотеза: *средние скорости потоков сложной формы сечения с неоднородной шероховатостью границ и прямоугольного сечения с однородными границами равны, если равны их гидравлические радиусы, средние скорости соответствующих гипотетических плоских в двух семействах параллельных плоскостей потоков и все уклоны* [252]. Для иллюстрации гипотезы на рис. 3.1 *2* схематично представлено русло произвольной формы сечения и прямоугольное. На сечениях нанесены параметры, равенство которых, согласно предлагаемой гипотезе, приводит к равенству средних скоростей в обоих сечениях.

На рис. 3.1 *2.2* и 3.1 *2.3* приведены схемы к вычислению средних в сечениях скоростей гипотетических плоских потоков соответственно в семействах вертикальных (плоский по вертикали поток) и горизонтальных (плоский по горизонтали поток) плоскостей, перпендикулярных сечениям произвольной и прямоугольной форм. На рис. 3.1 *2.3* нанесена гидродинамическая ось (ГО) — линия максимальных скоростей плоского по горизонтали потока, использующаяся при определении средней скорости v_y в сечении произвольной формы. Ее положение может быть определено из распределения скоростей в плоском по горизонтали потоке с учетом положения и неоднородной шероховатости границ водотока.

Принимаемые в соответствии с предлагаемой гипотезой равенства гидравлических радиусов ($R = \mathrm{R}$), средних в сечении скоростей гипотетических плоского по вертикали ($v_h = v_\mathrm{H}$) и плоского по горизонтали ($v_y = v_\mathrm{B}$) потоков для сечений сложной и прямоугольной форм могут быть записаны соответственно в виде системы уравнений:

$$1/R = 1/\mathrm{H} + 1/\mathrm{B};$$

$$(1/A) \int_A u_h(h,\ y)\, dA = C_\mathrm{H} \sqrt{\mathrm{H}I}\,; \qquad (3\ 7)$$

$$(1/A) \int_A u_y(y,\ h)\, dA = C_\mathrm{B} \sqrt{\mathrm{B}I}\,.$$

Заметим, что здесь по традиции оставлено обозначение I — как тангенса угла наклона дна водотока. Однако необходимо понимать это обозначение как $\sin\theta$. Например, при увеличении уклона $\operatorname{tg}\theta$ вместе с ним и скорость по Шези стремится к бесконечности, что, конечно же, неверно, т. е. формула Шези верна, пока $\sin\theta \approx \operatorname{tg}\theta$.

В системе (3.7) левые части равенства относятся к сечению сложной формы, правые — к сечению прямоугольной формы. Сечение сложной формы может иметь неоднородную по границам шероховатость, локальные характеристики которой учитываются в формулах для расчета осредненных скоростей в плоских потоках u_y и u_h, в то время как шероховатость границ прямоугольного сечения принимается однородной, хотя и неизвестной. Гидравлические уклоны реальных и гипотетических потоков в сечениях произвольной формы и прямоугольном, согласно гипотезе, равны.

Уравнения (3.7) образуют алгебраическую нелинейную систему. Она замкнута. Из нее единственным образом можно определить для прямоугольного сечения его размеры H и B, коэффициент шероховатости n. Из равенства, согласно предлагаемой гипотезе, реальных средних скоростей, гидравлических радиусов и уклонов в сечениях сложной формы и прямоугольном и формулы Шези следует, что приведенный коэффициент шероховатости водотока со сложной формой сечения и неоднородными границами равен коэффициенту шероховатости водотока с прямоугольным сечением, который вычислим из решения системы уравнений (3.7). Таким образом, определим приведенный коэффициент шероховатости русла со сложной формой сечения и неоднородными границами.

Вследствие однородности границ прямоугольного сечения ГО в ней совпадает с осью симметрии, поэтому при исследованиях возможно и целесообразно рассматривать полусечение, как это сделано при изложении гипотезы (см. рис. 3.1).

Использование предлагаемой гипотезы для определения приведенного коэффициента шероховатости позволяет освободиться от дополнительных предположений о равенстве средних скоростей и гидравлических радиусов потоков, относящихся к однородным участкам границ сечения [131, 228], и средних скоростей в реальном и некотором приведенном сечении [81, 82], о необходимости введения некоторых коэффициентов [130, 131].

Значения интегралов в системе (3.7) можно определить следующим образом:

$$Q = \int_A u_h(h,\ y)\,dA = \int_0^B \int_{h_0(y)}^{h(y)} u_h(h,\ y)\,dh\,dy = \sqrt{I}\int_0^B C_h(y)\,h(y)\sqrt{h(y)}\,dy, \tag{3.8}$$

где $h(y)$ — глубина потока на вертикали с абсциссой y; $u_h(h,\ y)$ — распределение скоростей в гипотетическом и плоском по вертикали потоке на вертикали $h(y)$; $C_h(y)$ — скоростной множитель Шези, определяемый для вертикали $h(y)$; $h_0(y)$ и $h(y)$ — соответственно отметка дна и поверхности воды на вертикали $h(y)$; B — ширина водотока.

Периметр поперечного сечения русла неправильной формы можно представить состоящим из линейных отрезков, а сечение — соответственно из трапецеидальных, в частном случае прямоугольных и треугольных отсеков. Вид формул для вычисления расходов через отсеки будет определяться зависимостью для скоростного множителя Шези в формуле (3.8), для которого в настоящее время находят применение формулы Н. Н. Павловского [229], И. И. Агроскина [1, 2], М. Ф. Срибного [290], И. К. Никитина [204, 208], Г. В. Железнякова [100]. По исследованиям А. М. Латышенкова [158], наиболее широкие пределы изменения параметров R и n допускает обобщенная формула Г. В. Железнякова [100], учитывающая изменение параметра $\varkappa$. Поскольку универсальная зависимость отсутствует, применительно к различным размерам сечений и пределам изменения коэффициентов шероховатости в соответствии с областью определения формул, установленных их авторами, могут и должны использоваться различные зависимости для определения скоростного коэффициента Шези. С целью получения в аналитическом виде конечных зависимостей для определения расхода через отсек плоского потока воспользуемся наиболее простыми формулами логарифмического вида

$$C = N \ln R + E.$$

Для вычисления N и E применяют различные зависимости, определяемые из формул для расчета коэффициента Шези.

В случае использования для C формулы логарифмического типа, например И. И. Агроскина [1], зависимости (см. рис. 3.2) для определения расходов Q_k плоского потока имеют вид:

через трапецеидальный отсек

$$Q_k = \frac{y_{k+1} - y_k}{2{,}5\,(h_k - h_{k+1})}\left(h_k^{2,5}(C_k - 0{,}4N) - h_{k+1}^{2,5}(C_{k+1} - 0{,}4N)\right)\sqrt{I}; \tag{3.9}$$

через прямоугольный отсек, когда $h_k = h_{k+1}$,

$$Q_k = (y_{k+1} - y_k)\,h_k^{1,5}C_k\sqrt{I}; \tag{3.10}$$

через треугольный отсек, когда $h_{k+1} = 0$,

$$Q_k = \left((y_{k+1} - y_k)/2{,}5\right)h_k^{1,5}(C_k - 0{,}4N)\sqrt{I}; \tag{3.11}$$

через треугольный отсек, когда $h_k = 0$,

$$Q_k = \left((y_{k+1} - y_k)/2{,}5\right)h_{k+1}^{1,5}(C_{k+1} - 0{,}4N)\sqrt{I},$$

где y_k и y_{k+1} — расстояние по оси y от начала координат соответственно до точек сечения k и $k+1$; h_k, h_{k+1} — глубина на границах отсека; C_k, C_{k+1} — коэффициент Шези, вычисленный соответственно при h_k и h_{k+1}; k — номер точки на периметре поперечного сечения.

Вычисление расходов для плоских потоков по горизонтали выполняется аналогично с учетом положения ГО (см. рис. 3.2).

По предлагаемой методике определены значения приведенного коэффициента шероховатости для экспериментов, обобщенных в статьях Денисенко [81, 82]. Статистическая оценка погрешностей расчетов коэффициента по предлагаемой методике при доверительной вероятности $p=0{,}95$ получилась равной $1{,}0 \pm 1{,}0$ %. Погрешность имеет тот же порядок, что при расчете этого коэффициента по формуле (3.1), и, по-видимому, соответствует погрешности эксперимента. Все существующие методики определения приведенного коэффициента шероховатости не учитывают расположения элемента периметра в сечении. Он может располагаться у поверхности или на большой глубине, и методики никак не отражают этого факта, хотя очевидно, что элемент периметра сложного сечения, находящийся в окрестности поверхности, окажет меньшее влияние на пропускную способность, чем такой же элемент, находящийся на большой глубине. Предлагаемая методика учитывает положение в сечении и шероховатость каждого элемента периметра, не имеет ограничений на их количество. В этом смысле она обладает общностью. По другим методикам погрешности расчетов даже применительно к простейшим условиям в несколько раз больше. Феномен малой погрешности средневзвешенного значения объясняется простейшими условиями лабораторных экспериментов, в которых глубина и шероховатость изменялись в узких пределах.

Изложенная методика была применена в сложных условиях при создании математической модели р. Припяти и шести ее основных притоков — ширина реки с поймой достигает десятков километров, шероховатость границ многократно и значительно меняется, суммарная длина системы водотоков 980 км [181]. Вычисленные по изложенной методике значения приведенного коэффициента шероховатости использовались в качестве первого приближения и уточнялись идентификацией [291]. Заметим, что процедура идентификации совершенно необходима, так как никакой схематизацией течения невозможно детально учесть все особенности изменения шероховатости границ и формы сечения реальных водотоков.

Вместе с тем очевидно, что погрешности расчетов по предлагаемой методике приведенного коэффициента шероховатости будут минимальны для водотока с плавным изменением формы сечения и локальных коэффициентов шероховатости, где кинематический эффект [100, 102] не будет существенно влиять на кинематику потока. В случае же резких изменений характеристик шероховатости и формы сечения необходимо учитывать влияние на пропускную способность кинематического эффекта, т. е. эффекта трехмерности течения. Пока не будут решены трехмерные задачи для сечений произвольной формы с неоднородной по периметру шероховатостью, представляется перспективным при уточнении пропускной способности использовать при наличии данных наблюдений аппарат идентификации параметров математических моделей [181, 291], при отсутствии — принцип Ле-Шателье [161].

3.3. Расчет поля продольных скоростей

Предложенная гипотеза позволяет получить полуэмпирическую зависимость для расчета поля продольных осредненных скоростей в водотоках сложной формы сечения с неоднородной шероховатостью границ при однородном по длине движения. Представляется возможным учесть влияние неоднородности распределения шероховатости как на гидравлические сопротивления движению (через приведенный коэффициент шероховатости), так и на местные скорости (через поля скоростей гипотетических плоских потоков, учитывающих локальное значение коэффициента шероховатости). Естественно, что возможности использования формулы ограничены областью приемлемости гипотезы. В данном подразделе будут изложены оценки погрешностей расчета поля продольных скоростей при однородном по длине течении с помощью предложенной формулы, приведены некоторые оценки возможности применения гипотезы при неоднородном по длине движении.

При выводе формулы будем исходить в основном из работ Э. П. Коваленко [130, 133], отказавшись от излишних, на наш взгляд, предположений и некоторых допущений. Для упрощения зависимостей определим скоростной множитель Шези по формулам логарифмического типа. В настоящее время они считаются наиболее обоснованными, а некоторые из них характеризуют гидравлические сопротивления не только в квадратичной, но и в переходной области, как, например, формула И. К. Никитина [204—208]. Однако поскольку при решении задач в одномерной постановке при характеристике шероховатости поверхности водотока обычно применяют понятие коэффициента шероховатости или толщины пристенного слоя δ, а не физических характеристик шероховатости, будем пользоваться в основном для определения скоростного множителя Шези формулами логарифмического вида

$$C = N \ln R + E.$$

При применении формулы И. И. Агроскина [1]

$$N = 7{,}7, \quad E = 1/n; \tag{3.12}$$

при применении уточненной формулы И. И. Агроскина и И. И. Штеренлихта [2]

$$N = (11{,}99 - 130{,}2n), \quad E = 1/n; \tag{3.13}$$

при применении формулы И. К. Никитина [204, 208] с учетом уточнения [251]

$$N = 9{,}32, \quad E = 17{,}72 - 9{,}32 \ln \delta, \tag{3.14}$$

где δ — толщина пристенного слоя двухслойной модели турбулентности.

Используя зависимость логарифмического типа для коэффициента Шези C, второе и третье уравнения системы (3.7) можно разрешить относительно Н и В:

$$\mathrm{H}=\exp\left(\frac{\int\limits_A u_h(h,\ y)\,dA}{NA\sqrt{\mathrm{H}I}}-\frac{E}{N}\right); \tag{3.15}$$

$$\mathrm{B}=\exp\left(\frac{\int\limits_A u_y(y,\ h)\,dA}{NA\sqrt{\mathrm{B}I}}-\frac{E}{N}\right). \tag{3.16}$$

Поскольку

$$(1/A)\int\limits_A u(y,\ h)\,dA=C\sqrt{RI},$$

где $u(y,\ h)$ — местная осредненная скорость в сечении, то аналогично

$$R=\exp\left(\frac{\int\limits_A u(y,\ h)\,dA}{NA\sqrt{RI}}-\frac{E}{N}\right). \tag{3.17}$$

Подставив полученные значения R, Н, В в первое уравнение системы (3.7), получим выражения, в которые входят интегралы по области A, выражающие по физическому смыслу расходы гипотетических плоских потоков соответственно по вертикали и горизонтали, а также расход реального потока. Следовательно, упомянутые интегралы, зависящие от области, являются аддитивными функциями. Воспользуемся тем, что производная по области от интеграла, являющегося аддитивной функцией, равна подынтегральной функции. Подставим соотношения (3.15)—(3.17) в первое уравнение системы (3.7) и выполним дифференцирование по области.

Чтобы сократить простые, но громоздкие преобразования, приведем результаты дифференцирования по области выражения для $\partial R/\partial A$:

$$\frac{\partial R}{\partial A}=\exp\left(\frac{\int\limits_A u(y,\ h)\,dA}{NA\sqrt{RI}}-\frac{E}{N}\right)\times$$

$$\times\frac{u(y,\ h)\,NA\sqrt{RI}-N\sqrt{RI}\int\limits_A u(y,\ h)\,dA-NA\sqrt{I}/(2\sqrt{R})\times\int\limits_A u(y,\ h)\,dA\,\partial R/\partial A}{(NA\sqrt{RI})^2}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{E}{N}\right). \tag{3.18}$$

Если для определения E и N будут использованы зависимости типа (3.12) или (3.13), то получим, что $\partial(E/N)/\partial A=0$; если зависимость (3.14), то $\partial(E/N)/\partial A$ окажется весьма слабо изменяющейся функцией.

Поскольку $N=9{,}32$, $E=17{,}72-9{,}32\ln\delta$, то

$$\partial(E/N)/\partial A=-\partial\ln\delta/\partial A.$$

Для области с полным проявлением шероховатости [204, 208] $\ln(u_{*,0}\Delta/\nu)$ не зависит от $\ln(\Delta/\delta)$, значит, $\partial E/\partial A=0$.

Для переходной области сопротивлений можно записать [204, 208]

$$\ln(\Delta/\delta)=\ln(u_{*,0}\Delta/\nu)-c,$$

где c — постоянная для данного типа шероховатости.

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{E}{N}\right)=\frac{1}{2R}\,\frac{\partial R}{\partial A}.$$

Используя значение $\partial(E/N)/\partial A$ для переходной области и выполнив некоторые преобразования, выражение (3.18) можем переписать в виде

$$\partial R/\partial A=2R\left(u(y,\ h)-v\right)/\left(A\left(k_vN\sqrt{RI}+v\right)\right).$$

Аналогично

$$\partial\text{Н}/\partial A=\left(2\text{Н}\left(u_h(h,\ y)-v_\text{Н}\right)\right)/\left(A\left(k_vN\sqrt{\text{Н}I}+v_\text{Н}\right)\right);$$

$$\partial\text{В}/\partial A=\left(2\text{В}\left(u_y(y,\ h)-v_\text{В}\right)\right)/\left(A\left(k_vN\sqrt{\text{В}I}+v_\text{В}\right)\right).$$

Обратим внимание на то, что для квадратичной области сопротивлений $k_v=2$, для переходной — при использовании для определения коэффициента Шези формулы Никитина $k_v=3$.

Подставив значения R, Н и В в первое уравнение системы (3.7), выполнив дифференцирование по области A и использовав полученные зависимости для $\partial R/\partial A$; $\partial\text{Н}/\partial A$; $\partial\text{В}/\partial A$, после алгебраических преобразований будем иметь

$$u(y,\ h)=v+\frac{R\left(k_vN\sqrt{RI}+v\right)}{\text{Н}\left(k_vN\sqrt{\text{Н}I}+v_\text{Н}\right)}\left(u_h(h,\ y)-v_\text{Н}\right)+$$
$$+\frac{R\left(k_vN\sqrt{RI}+v\right)}{\text{В}\left(k_vN\sqrt{\text{В}I}+v_\text{В}\right)}\left(u_y(y,\ h)-v_\text{В}\right).$$

Учитывая, что $v=C\sqrt{RI}$, $v_\text{Н}=C_\text{Н}\sqrt{\text{Н}I}$, $v_\text{В}=C_\text{В}\sqrt{\text{В}I}$, получаем

$$u(y,\ h)=C\sqrt{RI}+\frac{R^{1,5}\left(k_vN+C\right)}{\text{Н}^{1,5}\left(k_vN+C_\text{Н}\right)}\left(u_h(h,\ y)-v_\text{Н}\right)+$$
$$+\frac{R^{1,5}\left(k_vN+C\right)}{\text{В}^{1,5}\left(k_vN+C_\text{В}\right)}\left(u_y(y,\ h)-v_\text{В}\right).$$

Введя обозначения

$$L = \frac{R^{1,5}(k_v N + C)}{\text{H}^{1,5}(k_v N + C_\text{H})}; \quad M = \frac{R^{1,5}(k_v N + C)}{\text{B}^{1,5}(k_v N + C_\text{B})}; \quad S = Lv_\text{H} + Mv_\text{B}$$

будем иметь

$$u(y, h) = v + Lu_h(h, y) + Mu_y(y, h) - S. \tag{3.19}$$

Параметры v, L, M, S определяют по результатам решения системы (3.7); параметры L и M — весовые коэффициенты, суммарно учитывающие влияние границ сечения на местную осредненную скорость через поля продольных скоростей гипотетических плоских потоков $u_h(y, h)$, $u_y(y, h)$ по вертикальному и горизонтальному направлениям; C_H и C_B — коэффициенты Шези при использовании в качестве гидравлического радиуса соответственно глубины Н и полуширины В гипотетического прямоугольного сечения [252], приведенного коэффициента шероховатости n или толщины пристенного слоя δ по Никитину [204, 206—208, 274].

В качестве расчетных формул в каждой из плоскостей семейства могут быть использованы, например, формула Прандтля—Кармана для квадратичной области сопротивления

$$u_h(h, y) = v(y)\left(1 + \frac{\sqrt{g}}{\varkappa C(y)}\left(1 - \ln\frac{D(h, y)}{h(y)}\right)\right) \tag{3.20}$$

или формула Никитина для переходной и квадратичной областей сопротивлений при гладких и шероховатых границах

$$u_h(h, y) = 2{,}98v(y)\left(\ln\frac{D(h, y)}{\delta(h, y)} + 2{,}90 - \frac{\delta(h, y)}{D(h, y)}\right), \tag{3.21}$$

где y — абсцисса, фиксирующая расстояние от начала координат до плоскости, в которой рассчитывается распределение скоростей по формуле Прандтля—Кармана или Никитина; $v(y)$ — средняя скорость плоского потока на вертикали с абсциссой y; $h(y)$ — глубина на расчетной вертикали; $C(y)$ — коэффициент Шези при использовании в качестве гидравлического радиуса локальных значений глубины $h(y)$ и $n(h, y)$ или $\delta(n, y)$; остальные обозначения см. на правой стороне рис. 3.2.

Формулы $u_y(y, h)$ для гипотетических плоских потоков по горизонтали (до ГО) записываются аналогично, с той лишь разницей, что роль параметра y играет ордината h, а вместо $h(y)$ используется полуширина $b(h)$, которая определяется как расстояние, измеренное на расчетной горизонтали h от границы потока до ГО, координаты которой можно приближенно определить как для линии, на которой осредненные скорости двух (слева и справа от ГО) плоских по горизонтали потоков равны.

Если воспользоваться для расчета распределения скоростей в плоском потоке формулой (3.20), то на основе зависимости (3.19) для расчета распределения продольных скоростей в водотоке со сложной формой сечения можно получить формулу

$$u(y,\ h)=v+Lv(y)\left(1+\frac{\sqrt{g}}{\varkappa C(y)}\left(1+\ln\frac{D(h,\ y)}{h(y)}\right)\right)+$$

$$+Mv(h)\left(1+\frac{\sqrt{g}}{\varkappa C(h)}\left(1+\ln\frac{D(y,\ h)}{b(h)}\right)\right)-S. \qquad (3.22)$$

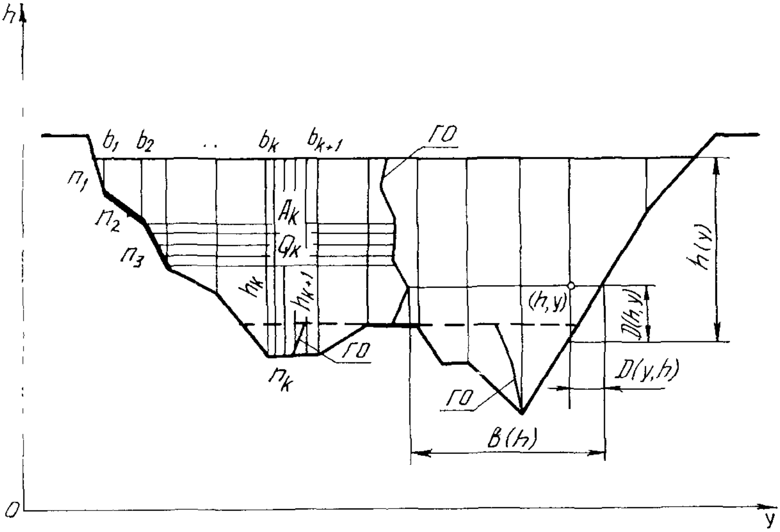


Рис. 3.2. Схемы к определению расхода Q_k через вертикальный, горизонтальный отсек (*слева от ГО*) и к расчету поля продольных скоростей в сечении сложной формы (*справа от ГО*).

ГО — гидродинамическая ось.

Если для расчета распределения скоростей в плоском потоке использовать формулу (3.21) с учетом примечания [251], то на основе зависимости (3.19) для расчета распределения продольных скоростей в водотоке сложного сечения получим формулу

$$u(y,\ h)=v+2{,}98Lv(y)\left(\ln\frac{D(h,\ y)}{\delta(h,\ y)}+2{,}90-\frac{\delta(h,\ y)}{D(h,\ y)}\right)+$$

$$+2{,}98Mv(h)\left(\ln\frac{D(y,\ h)}{\delta(y,\ h)}+2{,}90-\frac{\delta(y,\ h)}{D(y,\ h)}\right)-S. \qquad (3.23)$$

Из зависимостей (3.22) и (3.23) как частные результаты получаются поля продольных скоростей в потоках прямоугольного [251, 263] и трапецеидального сечений [262].

В качестве примера приведем исходные данные и результаты расчета продольной скорости по формуле (3.22) для отдельных скоростных вертикалей в земляном магистральном канале Краснодарской оросительной системы (Федоровский гидроузел) для сечения, представленного на рис. 3.3 [256]. Поле продольной скорости измерено гидрометрическими микровертушками детальным способом. Средняя в сечении скорость $v=1{,}00$ м/с, $I=0{,}0000924$, $R=4{,}16$ м, $n_i=0{,}025$. Требуется вычислить скорость в точке с координатами: $y=31{,}0$ м, $h=8{,}65$ м.

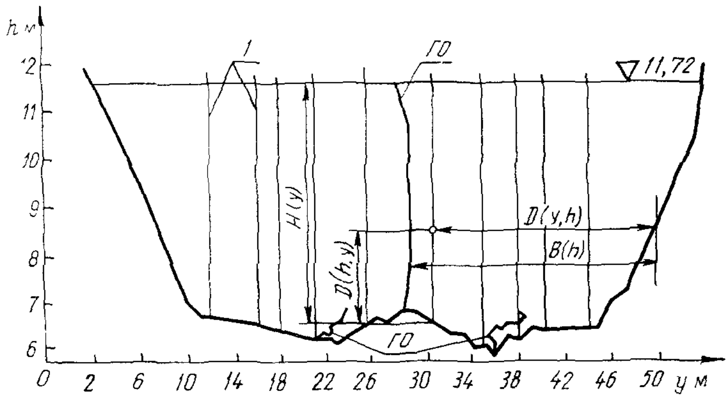


Рис. 3.3. Поперечное сечение канала МК КОС.
1 — скоростные вертикали.

Из решения системы (3.7) определяем: $H=5{,}11$ м, $B=22{,}36$ м, $n=0{,}025$. Затем вычисляем $L=0{,}717$, $M=0{,}067$, $S=1{,}013$ м/с, входящие в зависимость (3.22). Определяем геометрические параметры: $h(y)=5{,}12$ м, $b(h)=21{,}10$ м, $D(h,\ y)=2{,}05$ м, $D(y,\ h)=18{,}70$ м. По формуле Агроскина после подстановки вместо R значений $h(y)$, $b(h)$ и $n=0{,}025$ получаем $C(y)=52{,}6$ м^{0,5}/с, $C(h)=63{,}5$ м^{0,5}/с, что дает возможность по формуле Шези определить $v(y)=1{,}18$ м/с, $v(h)=2{,}93$ м/с. При $\varkappa=0{,}4$ по формуле (3.22) получаем $u(y,\ h)=1{,}06$ м/с. Результаты вычисления и измерения скоростей в других точках живого сечения представлены в табл. 3.3. Там же приведены относительные погрешности Δu_i (%), вычисленные по формуле

$$\Delta u_i = \frac{u_{\text{т}i} - u_{\text{э}i}}{u_{\text{э}i}} 100, \qquad (3.24)$$

где $u_{\text{т}i}$ значение скорости, вычисленное по формуле (3.22); $u_{\text{э}i}$ — экспериментальное значение скорости.

Приведем сравнение в графическом виде вычисленных скоростей с экспериментальными данными для водотоков, различающихся формами сечений. На рис. 3.4 представлены данные для водотоков с прямоугольной формой сечения [322], на рис. 3.5 — с трапецеидальной формой [244], на рис. 3.6 — для потока со сложной формой сечения и фиксированным руслом [86], на рис. 3.7 — для земляного магистрального канала Краснодарской оросительной системы (МК КОС).

Статистическая оценка погрешностей расчетов продольного поля осредненных скоростей в сечениях произвольных форм с переменной *по периметру шероховатостью по зависимости (3.22) дана* в работах [27, 28]. В табл. 3.4, заимствованной из работы [28],

Таблица 3.3

Сравнение скоростей течения, вычисленных по формуле (3.22) и измеренных в канале МК КОС Федоровского гидроузла на р. Кубани [256]

y м	h м	$u_т$ м/с	$u_э$ м/с	Δu_i %
11,97	11,69	1,16	1,14	1,8
	10,73	1,12	1,16	—3,4
	8,74	1,01	1,05	—3,8
	7,74	0,91	0,95	—4,2
	6,88	0,64	0,65	—1,5
17,97	11,69	1,21	1,19	1,7
	10,67	1,17	1,11	5,4
	8,57	1,06	1,04	1,9
	7,52	0,96	0,96	0,0
	6,60	0,59	0,59	0,0
37,98	11,69	1,21	1,17	3,4
	10,66	1,18	1,19	—0,8
	8,53	1,07	1,04	2,9
	7,46	0,97	1,01	—4,0
	6,53	0,58	0,60	—3,3
43,99	11,69	1,18	1,15	2,6
	10,69	1,15	1,15	0,0
	8,64	1,04	1,04	0,0
	7,61	0,94	0,98	—4,1
	6,71	0,60	0,58	3,4

приведено распределение по сечению относительных погрешностей расчетов и доверительных интервалов при доверительной вероятности $p=0{,}95$. В выборку для статистической оценки погрешности определения по формуле (3.22) продольной скорости объединены значения относительной погрешности, вычисленные по формуле (3.24), в точке с одинаковыми относительными координатами β и γ.

Относительные координаты вычислялись следующим образом:

$$\beta\left[1-\frac{D(y,\ h)}{b(h)}\right],\quad \gamma\left[1-\frac{D(h,\ y)}{h(y)}\right].$$

Система координат (β, γ) представлена на рис. 3.8.

В точках координат, представленных в табл. 3.4, значения $u_{\text{т}i}(\beta,\ \gamma)$ вычислялись по формуле (3.22), экспериментальные значения $u_{\text{э}i}(\beta,\ \gamma)$ интерполировались или экстраполировались в соответствующие точки.

Для оценки погрешностей были использованы экспериментальные данные по 165 распределениям продольных скоростей в сечениях различных форм при близком к однородному по длине водотока движению воды. Каждая выборка, содержащая таким образом 165 элементов, обработана статистическими методами [76]. Вычислено математическое ожидание относительной погрешности определения Δu_i (%) и доверительный интервал при $p=0{,}95$.

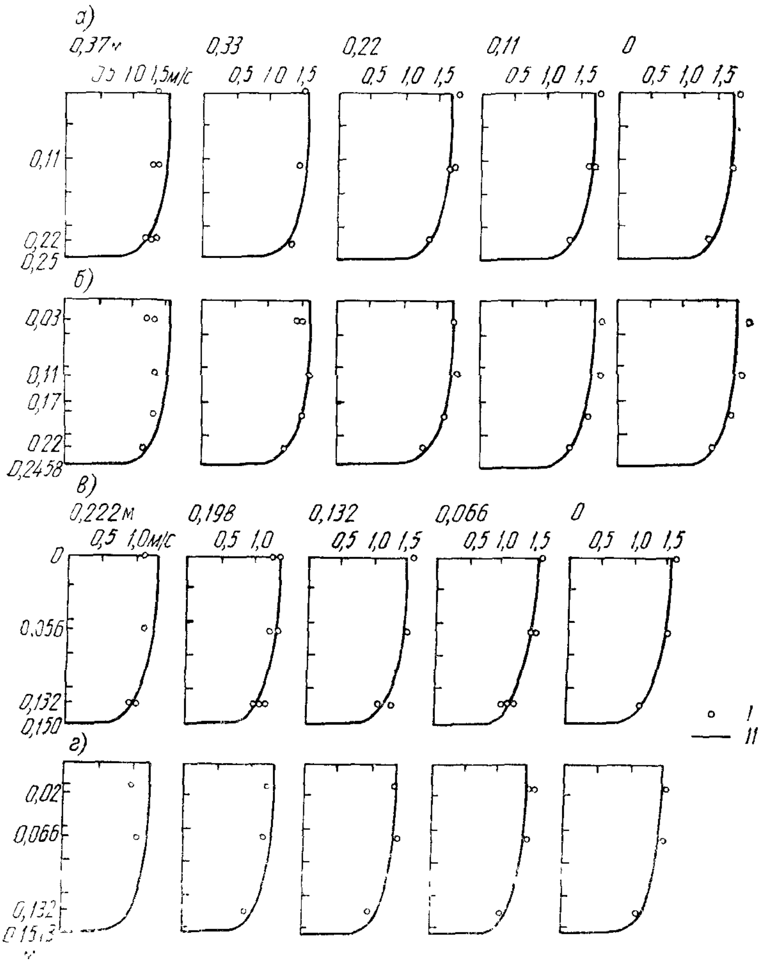


Рис 3.4. Сравнение скоростей, вычисленных по формуле (3 23), с экспериментальными данными Базена [322]

Данные Базена a — серия 51 ($v=1{,}545$ м с, $Q=0{,}618$ м³ с, $R=0{,}154$ м, $I=0{,}004272$, $\delta=0{,}00161$ м, $2H=2\cdot0{,}25$ м, $2B=2$ 0,40 м) $б$ — серия 53 ($v=1{,}567$ м с, $Q=0{,}307$ м³/с, $R=0{,}152$ м, $I=0{,}004265$, $\delta=0{,}00145$ м, $H=0{,}246$ м, $2B=2$ 0,40 м), $в$ — серия 52 ($v=1{,}326$ м с, $Q=0{,}191$ м /с, $R=0{,}0922$ м, $I=0{,}006257$, $\delta=0{,}00168$ м, $2H=2\cdot0{,}15$ м, $2B=2$ 0,24 м), $г$ — серия 54 ($v=1{,}281$ м с. $Q=0{,}0926$ м³ с, $R=0{,}093$ м, $I=0{,}0060$, $\delta=0{,}00217$ м, $H=0{,}1513$ м, $2B=2$ 0,24 м)

I — эксперимент, II — расчет

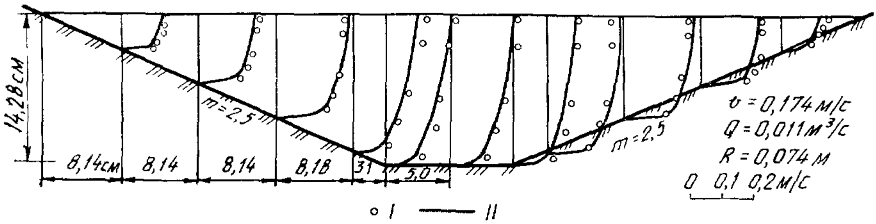


Рис. 3.5. Сравнение скоростей, вычисленных по формуле (3.22), с экспериментальными данными Е. К. Рабковой, В. И. Елфимова и М. П. Хавьера [244].
I — эксперимент, II — расчет.

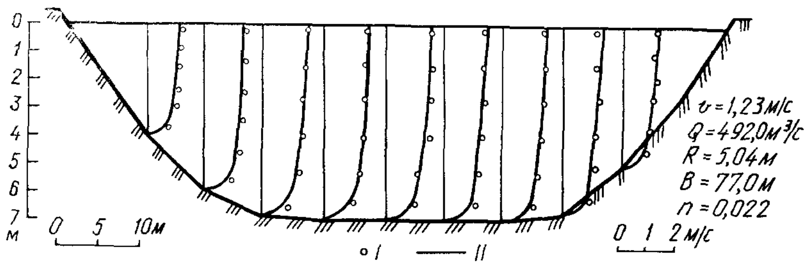


Рис. 3.6. Сравнение скоростей, вычисленных по формуле (3.22), с экспериментальными данными М. М. Дидковского и И. А. Родионова [86].
I — эксперимент, II — расчет.

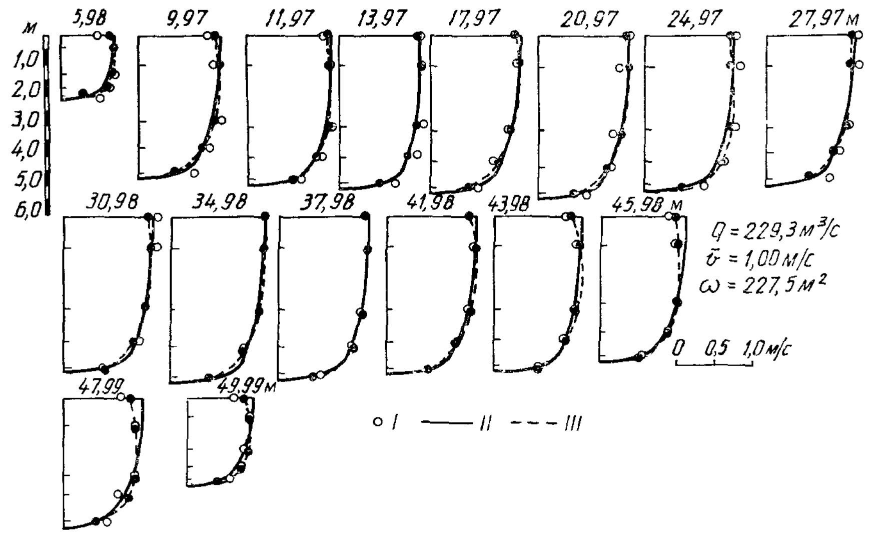


Рис 3.7. Сравнение поля скоростей, вычисленных по формуле (3 22) и уточненной формуле (3 22′), с экспериментальными данными по оросительному каналу МК КОС [256]
I — эксперимент, II — расчет по формуле (3 22), III — расчет по формуле (3 22′).

Как видно из данных табл. 3.4, распределение средних значений погрешностей в сечении имеет систематический характер: погрешности имеют положительный знак в одних областях сечения и отрицательный — в других. Их изменение практически носит

Таблица 3.4

Математическое ожидание и доверительный интервал относительной погрешности определения скоростей по формуле (3.22) в точках с координатами β и γ

γ	β					
	0,01	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
0,01	2,3±2,3	4,8±2,6	4,2±2,1	4,9±2,4	11,4±4,3	10,7±8,7
0,1	2,5±1,6	2,5±1,4	3,9±1,1	4,6±1,0	3,3±1,8	4,0±6,1
0,2	1,5±1,2	0,3±1,4	1,5±1,3	1,5±0,9	—2,0±1,5	11,4±3,7
0,3	0,0±1,6	—1,2±1,1	—0,1±1,2	0,8±1,0	—4,5±1,5	7,6±3,4
0,4	0,2±1,3	—1,5±1,4	—0,4±1,1	0,6±1,2	—3,8±1,7	7,1±3,6
0,5	0,0±1,2	—0,7±1,3	—0,6±1,2	—0,3±1,1	—2,2±1,6	2,0±3,0
0,6	—0,1±1,1	—1,4±1,0	0,1±1,4	—0,2±1,3	—1,5±1,6	—2,0±3,3
0,7	—0,7±1,0	—1,5±1,3	—0,1±1,1	—0,1±1,3	—1,6±1,3	—12,2±3,1
0,8	—0,6±1,1	0,6±1,2	3,2±1,6	0,9±1,6	0,9±1,6	—6,4±3,4
0,9	7,3±2,0	8,8±2,0	9,4±2,2	8,0±2,4	3,4±2,3	5,6±2,5

плавный характер. В большей части сечения они малы (до нескольких процентов) и увеличиваются в окрестности границ. Возникновение и распределение по сечению погрешностей может быть объяснено многими причинами и прежде всего недостатками мето-

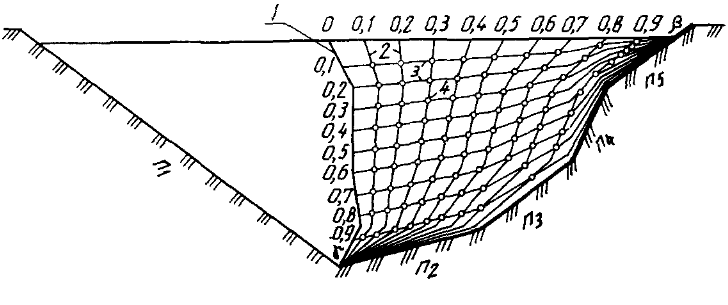


Рис. 3.8. Схема представления соответствующих точек живого сечения сложной формы в относительных координатах (β, γ).
1 — гидродинамическая ось; 2 — изолинии $\beta=a$, где $a\in[0,1[$; 3 — изолинии $\gamma=b$, где $b\in[0,1[$. 4 — узел сетки с координатами (β, γ), n_1, , n_5 — локальные коэффициенты шероховатости

дики расчета поля продольных скоростей. Хотя она и учитывает морфометрические и гидравлические характеристики сечения, но не может учесть возникающие в турбулентном потоке все сложные процессы, которые влияют на поле продольных скоростей в окрестности резких изменений сечения и шероховатости.

Значительные погрешности расчетов в окрестности свободной поверхности и жестких границ можно объяснить особенностями турбулентных течений в водотоках некруглой формы сечения, где поле осредненных скоростей трехмерно, что не учитывается формулой (3.22).

Действительно, в исходной системе уравнений (3.7) и в полученной из нее формуле (3.22) при вычислении местной осредненной скорости используются некоторые комбинации распределения скоростей в плоских потоках по вертикали и горизонтали. Если записать уравнения Рейнольдса применительно к плоскому потоку, то станет очевидным, что поле продольных скоростей в плоском потоке формируется только касательными напряжениями. Следовательно, в формулах предпринята попытка учесть влияние границ на поле осредненных скоростей в водотоках ограниченных размеров только через касательные напряжения. Однако в однородных по длине потоках ограниченного сечения на поле продольных скоростей оказывают влияние поперечные компоненты осредненной скорости, вызванные неоднородностью распределения по ограниченному сечению нормальных компонентов тензора турбулентных напряжений [254, 328, 360, 374].

Уточнить влияние существенного изменения формы сечения и шероховатости на поле продольных скоростей без использования уравнений Рейнольдса можно, используя принцип Ле-Шателье [162].

После выполненных статистических оценок погрешностей расчетов имеется интересная возможность учесть влияние на поле продольных скоростей факторов, которые непосредственно не учитывает использованная гипотеза и соответственно формула (3.22). Действительно, для каждой точки сечения, в которой вычисляется продольная скорость по формуле (3.22), по табл. 3.4 можно определить математическое ожидание относительной погрешности расчета. Исключив ее с учетом знака, можно уменьшить систематическую методическую погрешность расчетов.

В табл. 3.4 приведены средние относительные погрешности вычисления скорости по формуле (3.22) для точек сечения с относительными координатами β и γ. После оценок табл. 3.4 логично смотреть на формулу (3.24) так же, как на относительное значение средних отклонений вычисленных значений $u_т$ от средних экспериментальных значений скорости $u_э$ в соответствующих точках. Тогда $(u_т - u_э)/u_э = \pm\Delta u_т$, причем знак Δu для конкретной точки определяется по табл. 3.4 в соответствии с координатами точки β и γ. Получаем $u_т = (1 \pm \Delta u_т) u_э$. Следовательно, чтобы исправить теоретическое значение скорости $u_т$ и приблизить его к экспериментальному, необходимо ввести поправку $\delta(y, h) = 1/(1 + \Delta u_т)$ и уточненную формулу (3.22) записать в виде

$$u(y, h, \delta) = u(y, h)\delta(y, h). \qquad (3.22)'$$

Поправку $\delta(h, y)$ можно вычислить, воспользовавшись зависимостью $\delta(y, h)$ и данными табл. 3.4. Поправки приведены в табл. 3.5.

На рис. 3.7 штриховой линией нанесены эпюры скоростей с учетом поправки $\delta(y, h)$.

Из табл. 3.5 и рис. 3.7 видно, что в результате учета поправки $\delta(y, h)$ можно точнее вычислять продольные скорости, определять и области погружения максимума скоростей, и области увеличения придонных скоростей. Однако заметим, что поправки $\delta(y, h)$ можно получить значительно более точными, чем приведено в табл. 3.5.

Таблица 3 5

Математическое ожидание и доверительный интервал поправки $\delta(y, h)$ для исключения систематической методической погрешности расчетов по формуле (3.22)

γ	β					
	0,01	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
0,01	0,98±0,02	0,95±0,02	0,96±0,02	0,95±0,02	0,90±0,03	0,90±0,07
0,1	0,98±0,00	0,98±0,01	0,96±0,01	0,96±0,01	0,97±0,02	0,96±0,06
0,2	0,99±0,01	1,00±0,01	0,98±0,01	0,98±0,01	1,02±0,02	0,90±0,03
0,3	1,00±0,02	1,01±0,01	1,00±0,01	0,99±0,01	1,05±0,02	0,93±0,03
0,4	1,00±0,01	1,02±0,01	1,00±0,01	0,99±0,01	1,04±0,02	0,93±0,03
0,5	1,00±0,01	1,01±0,01	1,01±0,01	1,00±0,01	1,02±0,02	0,98±0,03
0,6	1,00±0,01	1,01±0,01	1,00±0,01	1,00±0,01	1,02 0,02	1,02±0,03
0,7	1,01±0,01	1,02±0,01	1,00±0,01	1,00±0,01	1,02±0,01	1,14±0,04
0,8	1,01±0,01	0,94±0,01	0,97±0,02	0,99±0,02	0,99±0,02	1,07±0,04
0,9	0,93±0,02	0,92±0,02	0,91±0,02	0,92±0,02	0,97±0,02	0,95±0,02

Известно, например, что влияние трехмерных эффектов осредненного течения существенно в окрестности жестких границ и углов сечения. Очевидно, что для их учета, а также учета других особенностей точнее было бы при вычислении таблиц типа 3.5 воспользоваться экспериментальными данными выборок по Δu_i в формуле (3.24), предварительно сгруппировав их по близким отношениям B/H. Однако уделить здесь внимание деталям этого вопроса не представляется возможным.

Таким образом, приведенные в табл. 3.3—3.5 и на рис. 3.4—3.7 данные о сходимости результатов расчетов по формуле (3.22) к экспериментальным данным позволяют сделать вывод об их удовлетворительном согласовании, особенно если учесть сложность форм сечения водотоков, неоднородность распределения шероховатости по периметру, погрешности экспериментальных исследований. Это позволяет использовать в дальнейшем зависимость (3 22), (3.22'), (3.23) в различных приложениях.

О влиянии неравномерности и нестационарности течения на поле продольных скоростей имеются противоречивые сведения [234, 235, 310, 311, 378]. Некоторые обобщения выполнены в работе [26]. Естественно ожидать, что гипотеза о квазистационарности течения и здесь может быть использована, конечно в определенных пределах отношения сил инерции к силам сопротивления.

Выполненные М. И. Богдановичем [27] исследования влияния нестационарности течения на поле продольных скоростей в окрестности изотахи средних в сечении скоростей привели к широким пределам применения указанной гипотезы.

Для оценки неравномерности и нестационарности течения использованы безразмерные параметры:

$$\eta=\left(\frac{\beta C^2 R}{g\,|v|}\right)\frac{\partial v}{\partial s}; \tag{3.25}$$

$$\varepsilon=\left(\frac{C^2 R}{g\,|v|\,v}\right)\frac{\partial v}{\partial t}, \tag{3.26}$$

характеризующие отношение сил конвективного и локального ускорения к силам сопротивления движению воды.

Экспериментальные исследования [27] показали, что при изменении параметров в пределах:

для неравномерного движения

$$1{,}0 > \eta > -1{,}0;$$

для неустановившегося движения в случае положительного конвективного ускорения

$$1{,}0 > \eta > 0{,}0,$$

$$5{,}0 > \varepsilon > 1{,}0;$$

в случае отрицательного конвективного ускорения

$$0{,}0 > \eta > -0{,}5,$$

$$5{,}0 > \varepsilon > 0{,}5$$

в окрестности определенной при равномерном движении изотахи средней в сечении скорости поле продольных скоростей при неравномерном и неустановившемся течении отличается от поля скоростей при равномерном движении в среднем не более чем на 2 %, а с доверительной вероятностью 0,95 не более чем на 3 %.

Пределы изменения η и ε таковы, что можно ожидать существенного различия полей скоростей в случаях, когда силы инерции значительно больше сил сопротивления, что бывает лишь на ограниченных участках водотока, в окрестности разрывных волн. Уже на расстоянии нескольких десятков глубин от сооружения волна уполаживается, и есть основания полагать, что гипотеза о квазистационарности течения применительно к полю продольных скоростей становится приемлемой. Поэтому можно сделать предположение, что формулы (3.22), (3.22′) и (3.23) могут быть использованы для расчета полей скоростей и при неравномерном, и при неустановившемся течении в определенных, хотя и более узких, чем для окрестности изотахи средних в сечении скоростей, пределах изменения параметров неравномерности и нестационарности.

3.4. Выделение нетранзитных зон в водотоках со сложными сечениями

Анализ аэрофотоснимков пойм во время прохождения паводка показал, что часто движение воды на пойме осуществляется на отдельных участках. Значительную часть водотока занимают нетранзитные зоны, достигающие, например, на р. Припяти 75 % всей ширины сечения. Выделение этих зон необходимо для более точного определения многих параметров математической модели водотока, например модуля расхода. Указанные особенности движения воды на поймах неоднократно отмечались многими исследователями [273, 297].

Нетранзитные зоны в водотоках возникают по двум причинам: из-за значительных сил инерции за местными понижениями, резкими сужениями у мостов, водосбросов — явно нетранзитные зоны — и из-за больших гидравлических сопротивлений по длине течения — неявно нетранзитные зоны. Их выделение выполняется по-разному.

Явно нетранзитные зоны имеют локальные характеристики и выделяются с помощью достаточно детальных топографических материалов. Чтобы правильно отразить в модели процесс движения потока у резких сужений, например у мостов, характерные створы выбирают следующим образом. Один из створов назначают непосредственно по оси сооружения, затем выше и ниже моста, на некотором, обычно небольшом, расстоянии выбирают еще два створа. Створ моста считается полностью транзитным сечением, а в створах выше и ниже моста транзитной считается лишь та часть, которая попадает в угол расширения в соответствии с представлением о плавно изменяющемся движении транзитной струи. Аналогично поступают при выделении явно нетранзитной части сечения в других случаях резкого сужения и расширения в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Хотя выделение явно нетранзитных зон при решении задач в одномерной постановке выполняют приближенно, погрешности расчета в целом невелики в связи с небольшой протяженностью участков сужения или расширения потока

Значительно труднее выделить нетранзитные зоны сечений, возникающие по причине повышенных коэффициентов шероховатости на отдельных частях границ водотока. Такие зоны при небольших глубинах наполнения являются нетранзитными, при больших глубинах становятся транзитными. Например, если участок поймы покрыт невысоким, но достаточно густым кустарником, то при малых глубинах движение воды на нем практически отсутствует, а при повышенных глубинах вода приходит в движение Существуют методы [188, 312, 315], с помощью которых при необходимости тщательного изучения движения воды на каком-нибудь участке водотока можно выделить неявно нетранзитные зоны на основе решения плановой задачи движения воды Однако если тщательное исследование течения в непосредственной окрестности объекта интереса не представляет, например при изучении водного режима системы водотоков в целом в одномерной постановке задачи, можно выделение неявно нетранзитных зон существенно упростить. Соображения о влиянии неоднородности течения, изложенные в п. 3.3, позволяют предположить, что критерием оценки, является ли часть сечения нетранзитной, можно считать отношение поверхностной скорости движения воды над рассматриваемым участком к средней по сечению скорости. Если это отношение меньше некоторого малого значения r_i, т. е.

$$u_i/v < r_i, \tag{3.27}$$

где u_i — осредненная поверхностная скорость потока в точке, находящейся над серединой элемента периметра при равномерном движении; v — средняя в сечении скорость; r_i — параметр, служащий для выделения нетранзитных частей сечения, то данный участок нетранзитный [255]. Если элемент периметра имеет значительную длину, он делится на части и для каждой из них находится значение r_i.

На границе транзитных и нетранзитных частей существуют значительные градиенты скоростей, интенсивные пульсационные движения, приводящие к большим касательным напряжениям, а при схематизации — к большим коэффициентам шероховатости.

В работе [14] на основании экспериментов в трубе с диафрагмами были получены значения коэффициентов шероховатости n вдоль границы транзитной и нетранзитной частей течения. Оценки показали, что среднее значение n на указанной границе можно принять равным 0,040. Это значение использовано при математическом моделировании вдоль границ транзитной и нетранзитной частей сечений.

Местная осредненная скорость u_i может быть определена по формуле (3.22). Если для элемента периметра выполнялось условие $u_i/v<r_i$, то с концов элемента периметра проводились вертикальные линии до пересечения с поверхностью воды и на них, как на границах нетранзитных частей, назначалось $n=0{,}040$. Эта часть сечения между упомянутыми вертикальными линиями принималась нетранзитной. Расстояние между линиями исключалось из ширины водного сечения, и таким образом определялась ширина живого сечения. Аналогично поступали и с выделением нетранзитной части площади водного сечения. Таким образом, транзитная часть сечения принимала измененные очертания по сравнению с полным сечением. Ширина живого сечения становилась равной $B\leqslant B_0$, а площадь $A\leqslant A_0$

Заметим, что в формуле (3.27) сокращается множитель $\sqrt{I}$ Это указывает на слабую зависимость отношения от уклона. Следовательно, неявно нетранзитные зоны зависят от формы сечения и распределения по периметру шероховатости и могут быть выделены на стадии создания математической модели объекта.

Значение r_i обычно устанавливают применительно к конкретным объектам следующим образом. Для р. Припяти выполнены расчеты параметров моделей по существующей методике для отдельных характерных створов, на которых Белгипроводхозом была произведена аэрофотосъемка движения воды на пойме в паводок, и для створов, в которых лабораторией комплексного использования водных ресурсов ЦНИИКИВРа выполнены измерения распределения скоростей на пойме с помощью гидрометрической микровертушки. По полученным материалам были выделены экспериментально транзитные и нетранзитные части сечений, представленные в табл. 3.6. По методике, изложенной в п. 3.3 и дополненной особенностями, связанными с выделением неявно нетранзитных частей сечения по критерию $u_i/v<r_i$, рассчитаны параметры математических моделей при различных значениях r_i. Для различных значений аргумента гиперболического тангенса определялась суммарная ширина живого сечения и по совпадению ее с экспериментальным значением была установлена эмпирическая зависимость

Таблица 3.6

Наблюденные и вычисленные размеры живых сечений для характерных створов р. Припяти

Организация, проводившая наблюдения	Способ получения исходных данных	Ширина водного сечения, км	Ширина живого сечения, км	
			наблюденная	вычисленная
Белгипроводхоз	Аэрофотосъемка	24,7	7,5	10,6
		29,4	10,2	10,7
ЦНИИКИВР	Измерения на пойме	14,1	3,5	3,0

$$r_i=(u_{\text{макс}}/v)\,\text{th}\left(6{,}5\cdot10^{-5}\,(B/H)\right), \qquad (3.28)$$

где $u_{\text{макс}}$ — максимальная скорость на поверхности потока, вычисляемая при максимальной глубине и данном уровне воды в сечении по формуле (3.22).

Эмпирическая зависимость (3.28) имеет следующий физический смысл: чем больше отношение ширины к глубине и больше неоднородность распределения скорости в сечении (характеризуется отношением $u_{\text{макс}}/v$), тем больше возможность возникновения нетранзитных зон в сечениях. Значение параметра аргумента гиперболического тангенса подбиралось таким образом, чтобы наблюденные значения для нетранзитных частей приближенно согласовывались с вычисленными.

В табл. 3.6 представлены данные о ширине водного и живого сечений по результатам расчетов и наблюдений. Как видно, вычисленная ширина транзитного потока отличается от наблюденной. Однако, учитывая сложность выделения транзитной части сечения как по материалам аэрофотосъемки, так и по данным непосредственных измерений для потоков, ширина которых достигает нескольких десятков километров, согласование вычисленного значения ширины живого сечения с наблюденными можем считать удовлетворительным.

В формулу (3.28) входит параметр, равный $6{,}5 \cdot 10^{-5}$. Он получен эмпирическим путем только по материалам для р. Припяти и может рассматриваться в качестве первого приближения. Для придания бо́льшей универсальности методике выделения нетранзитных зон предложен алгоритм, позволяющий учитывать особенности сечения и в автоматическом режиме изменять упомянутый параметр.

При выделении нетранзитных частей сечения для каждого характерного уровня важной характеристикой является значение приведенного коэффициента шероховатости. При переходе от одного характерного уровня к другому этот коэффициент меняется в зависимости от локальных по периметру значений коэффициента шероховатости. Обычно при небольших характерных уровнях отсутствуют нетранзитные части — поток в русле до бровок. Если после выделения нетранзитных частей на последующем уровне приведенный коэффициент шероховатости увеличивается (уменьшается) вместе с увеличением (уменьшением) локальных значений коэффициентов шероховатости на участках периметра между предыдущим и последующим характерными уровнями, то принимается, что параметр изменен правильно. Но если с увеличением (уменьшением) локальных коэффициентов шероховатости между характерными уровнями приведенный коэффициент шероховатости для нового характерного уровня уменьшается (увеличивается) по сравнению с предыдущим уровнем, то параметр подобран неправильно и выделение нетранзитных частей произведено неточно. Для уточнения расчета параметр в уравнении (3.28) уменьшают (увеличивают), и расчет в цикле повторяют.

Таким образом, параметр аргумента гиперболического тангенса становится переменным, для каждого конкретного уровня воды в сечении имеет свое значение, а уравнение для r_t принимает вид

$$r_t = (u_{\text{макс}}/v)\,\mathrm{th}\left(r\,(\mathrm{B}/\mathrm{H})\right), \tag{3.29}$$

где r — величина, вычисляемая программно методом подбора по локальным коэффициентам шероховатости. Подбор осуществляется до тех пор, пока с увеличением (уменьшением) локальных коэффициентов шероховатости увеличивается (уменьшается) и их приведенное значение. Для более достоверного определения границ нетранзитной зоны, если она имеется, элементы периметра делят на несколько частей и проверку существования нетранзитной зоны по данной методике производят для каждой части.

3.5. Определение морфометрических характеристик и модуля расхода

После выделения нетранзитных частей сечения описанными методами автоматически определяются координаты живого сечения, поэтому вычисление его площади и смоченного периметра, а также ширины — элементарная геометрическая задача. Зная площадь живого сечения A и смоченный периметр, нетрудно вычислить гидравлический радиус R и, воспользовавшись формулой $K = AC\sqrt{R}$, модуль расхода K.

Однако возникают значительные трудности в определении коэффициента Шези. Известно, что для его расчета рекомендованы сотни зависимостей, большинство из которых имеют жесткие ограничения на пределы применимости по коэффициентам шероховатости и гидравлическим радиусам. В некоторых используется значение уклона или толщины пристенного слоя, что, как правило, для рассматриваемых задач практически неприемлемо. Вместе с тем для пойм естественных водотоков реальные значения коэффициентов шероховатости могут существенно превосходить пределы, рекомендуемые авторами формул. Было принято решение на данном этапе определять коэффициент Шези по формуле Агроскина, если $R \geqslant 1$:

$$C = 1/n + 7{,}7 \ln R,$$

и по формуле Срибного [289, 290], если $R < 1$:

$$C = (1/n) R^{1{,}18\sqrt{n}}.$$

В обоснование принятия такого решения можно привести следующие соображения. Формула Агроскина в известных пределах изменения параметров наиболее близка к формуле Павловского, однако при больших значениях n и при малых значениях R (кстати, при которых она не рекомендована автором к использованию, но при выполнении расчетов применительно к естественным водотокам с поймами такие ситуации часто встречаются), можно получить не только неточные, но и отрицательные значения C. Формула Срибного не имеет по крайней мере формальных ограничений снизу на R и n. Заметим, что при $R = 1$ м обе формулы приводят к одинаковому результату, но при больших значениях R формула Срибного дает нереальные значения коэффициента Шези. Поэтому было принято решение об использовании в различных диапазонах изменения R различных формул, а их сопряжение осуществлять при $R = 1$ м.

Дальнейшие исследования показали, что наиболее широкий диапазон применения имеет формула Железнякова

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{\sqrt{g}}{0{,}13}(1 - \lg R)\right) + \\ + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{\sqrt{g}}{0{,}13}(1 - \lg R)\right)^2 + \frac{\sqrt{g}}{0{,}13}\left(\frac{1}{n} - \sqrt{g}\lg R\right)}.$$

Однако ее сложная структура не позволяет получить аналитические выражения при ее использовании в подынтегральных функциях. Применение численных методов усложняет интегрирование, требует выполнения большого числа операций и значительных затрат машинного времени. Однако в будущем она, по-видимому, будет использоваться.

Заметим, что при применении формул полуэмпирического типа очень важна их структура, так как часто приходится экстраполировать аргументы за пределы, рекомендуемые авторами формул. Разумеется, это не всегда корректно, но иногда необходимо. Обоснованная структура формул, как показывает оценка погрешностей конечного результата, приводит к приемлемости результатов. В настоящее время считается, что зависимость для коэффициента Шези имеет логарифмическую структуру, поэтому формулы логарифмического типа и использованы при вычислении коэффициента Шези для больших значений гидравлического радиуса.

3.6. Определение коррективов количества движения и кинетической энергии

Методика расчета корректива количества движения излагается применительно к однородным по длине водотокам с произвольной формой сечения и неоднородными границами. Для поля продольных скоростей использована формула полуэмпирического типа (3.22). Погрешности определения корректива оцениваются по существующим и предлагаемой методикам. В связи с тем что в опубликованных работах в основном излагаются методики расчета корректива кинетической энергии и что методики расчета коррективов количества движения и кинетической энергии практически одинаковы, они излагаются параллельно.

Известно, что количество движения и кинетическая энергия массы воды, протекающей через живое сечение, вычисленные по средней скорости, меньше их действительных значений. В водотоках сложных форм сечения с различной шероховатостью границ продольные осредненные скорости распределены неоднородно, вследствие этого коррективы существенно больше единицы. Потребность в повышении достоверности расчетов с помощью одномерных математических моделей движения воды приводит к необходимости создания достаточно общей методики расчета корректива удельного количества движения β (коэффициент Буссинеска) и корректива удельной кинетической энергии α (коэффициент Кориолиса) применительно к водотокам с произвольной формой сечения и неоднородной шероховатостью границ.

За полуторавековой период исследований, начиная с Кориолиса и Базена, накоплено достаточное количество данных, убедительно доказывающих, что коррективы могут значительно превосходить единицу Для характеристики предела изменения коррективов в табл. 3.7 приведены максимальные значения α, оцененные различными авторами.

Интересно отметить, что в настоящее время при создании одномерных математических моделей коррективы принимаются или равными единице, или незначительно превосходящими единицу и

Таблица 3.7

Оценки максимальных значений корректива кинетической энергии α

Автор	Максимальное значение	Автор	Максимальное значение
А. А. Труфанов [295]	2,58	И. М. Лившиц, Я. М. Вильнер, Н. Е. Бонч-Осмоловская [160]	1,51
Н. К. Топчибашев [294]	3,14		
Л. А. Морозов [198]	2,43	Г. В. Железняков, Ю. А. Ибад-Заде, П. Л. Иванов и др. [63]	1,75
Д. Е. Скородумов [284]	1,48		
Г. В. Железняков [101]	1,42	Г. В. Железняков [102]	1,50
Л. С. Никитина [209]	1,84	В. А. Большаков, Ю. М. Константинов, В. Н. Попов и др. [287]	2,50
М. М. Бочева [31]	2,32		

постоянными по глубине, хотя давно имеются зависимости, позволяющие точнее определять их значения, например формулы:

Базена [90]

$$\alpha_{Б} = 1 + 210/C^2;$$

Труфанова [295]

$$\alpha_{Т} = 1 + 11{,}75/C^{1,17};$$

Железнякова [102]

$$\alpha_{Ж} = 1 + 0{,}88\left(0{,}34 + \left(1 + \sqrt{I/\mathrm{Fr}}\right)/\left(2{,}3 + 0{,}3\sqrt{\mathrm{Fr}/I}\right)\right)^2.$$

Сложившуюся практику гидравлических расчетов можно попытаться объяснить двумя причинами. Во-первых, учет изменения коррективов по глубине усложняет исходные уравнения движения, что требует уточнения широко известных методик расчета. Во-вторых, расчеты выполняют обычно для определения уровней воды при неравномерном движении, а коррективы являются множителями слагаемых, содержащих расход. Поэтому погрешности вычисления уровней были незначительными, а результаты расчетов удовлетворительно согласовывались с данными наблюдений.

Экспериментально наиболее полно корректив кинетической энергии исследован в работе [343]. Значения α тщательно вычислены по измеренным полям продольных скоростей в сечениях различной формы с неоднородной шероховатостью и в широких диапазонах изменения расходов ($Q = 0{,}03 \ldots 15\,000$ м^3/с) и средних скоростей ($\bar{v} = 0{,}1 \ldots 3{,}0$ м/с).

Поскольку достоверная экспериментальная оценка β и α представляется чрезвычайно важной, приведем табл. 3.8, заимствованную из работы [343].

Как видно из данных табл. 3.8, корректив α может изменяться в значительно более широких пределах, чем об этом можно получить представление из учебников. Поэтому недостаточно точный учет коррективов при расчетах водного режима ВХС, имеющих большую длину водотоков, может привести к погрешностям определения как расходов, так и уровней воды и как следствие к неверному определению пропускной способности, высотного положения гидротехнических сооружений и к неэффективному управлению водными ресурсами. Таким образом, разработка методики расчета коррективов является актуальной задачей.

Таблица 3.8

Обобщения корректива α для различных типов сечения [343]

Тип сечения	Количество измерений	$\alpha_{мин}$	$\alpha_{макс}$	$\alpha_{ср}$
1. Естественные русла трапецеидальной формы сечения в свободном состоянии без выхода на пойму	402	1,09	2,90	1,40
2. Естественные русла с сооружениями, изменяющими течение	97	1,06	4,70	1,45
3. Каналы без выхода потока на пойму	73	1,03	1,76	1,10
4. То же, что и в п. 1, но с частичным выходом потока на пойму	170	1,18	2,99	1,46
5. То же, что и в п. 3, но с частичным выходом потока на пойму	8	1,10	1,32	1,14

Напомним, что корректив количества движения β характеризует отношение действительного количества движения массы жидкости, проходящей за единицу времени через рассматриваемое сечение водотока, к количеству движения той же массы жидкости, вычисленному по средней в сечении скорости v. Аналогично определяется значение α. Зависимости для определения β и α можно записать в общем виде:

$$\beta = \frac{\int\limits_A u^n\,dA}{v^n A}, \qquad (3.30)$$

где u — местная осредненная скорость; A — площадь живого сечения водотока; n — показатель степени, причем если $n=2$, то по формуле (3.30) вычисляется β, если $n=3$, то α.

Действительное количество движения и кинетической энергии определяется приведенной зависимостью приближенно, так как в числителе формулы (3.30) следовало бы использовать не местную осредненную скорость, а ее мгновенное значение

$$u = u + u'.$$

При учете пульсационной составляющей скорости в формулах для β и α появляются слагаемые вида

$$\Delta\beta' = \frac{\int\limits_A u'^2\, dA}{v^2 A}.$$

Заметим, что выполняется равенство $\Delta\alpha \approx 3\,\Delta\beta$.

Оценки показывают, что при обычных условиях течения воды $\Delta\beta'$ и $\Delta\alpha'$ относительно малы и составляют доли процента. Поэтому в дальнейшем будем, как обычно, понимать под действительным количеством движения его значение, вычисленное по распределению в сечении осредненных скоростей. Однако необходимо иметь в виду, что в сечениях, где интенсивность турбулентности высока, например в прыжке на фронте крутой волны, для определения действительного количества движения и кинетической энергии необходим учет $\Delta\beta'$ и $\Delta\alpha'$.

Таким образом, определение коррективов, как следует из зависимости (3.30), требует знания распределения в сечении продольной осредненной скорости. Здесь возникает кажущееся противоречие. Если нам известно поле продольных скоростей, то, собственно, и не нужны β и α. Но в настоящее время поле продольных скоростей не может быть определено в достаточно общих случаях, например при неравномерном и неустановившемся течениях. Однако для однородных по длине потоков в сечениях произвольных форм с изменяющейся по периметру шероховатостью расчет поля осредненных скоростей возможен полуэмпирическими методами с приемлемой погрешностью. Это позволяет определить корректив в достаточно общих случаях при близком к однородному по длине движению воды, а при применении гипотезы о квазистационарности течения, распространенной и на поле скоростей,— во многих случаях и при неравномерном и неустановившемся движениях.

Получить аналогичное выражение для β и α по формуле (3.30) в общем случае затруднительно. Поэтому при вычислении β и α по формуле (3.30) применялись численные методы интегрирования при подынтегральной функции $u(y, h)$, определяемой по формуле (3.22). Были определены значения коррективов для экспериментальных данных, представленных на рис. 3.9. Приведенные коэффициенты шероховатости вычислялись из формулы Шези, кроме створов на р. Пит, экспериментальные значения n указаны на рисунках поперечных сечений [343]. Экспериментальные значения коррективов вычислялись для створов рек Волги и Сестры [8], Немана [160], канала МК КОС [256] по данным гидрометрических измерений. Экспериментальные значения корректива кинетической энергии для прямоугольного сечения заимствованы из работы [15].

Ранее для определения α приводились относительно простые зависимости [90, 99, 102, 295], в которых непосредственно не используется распределение скоростей в сечении. Поскольку предлагаемая методика требует большого количества вычислений, представлялось целесообразным выполнить оценку относительных погрешностей определения α по приведенным выше простым форму-

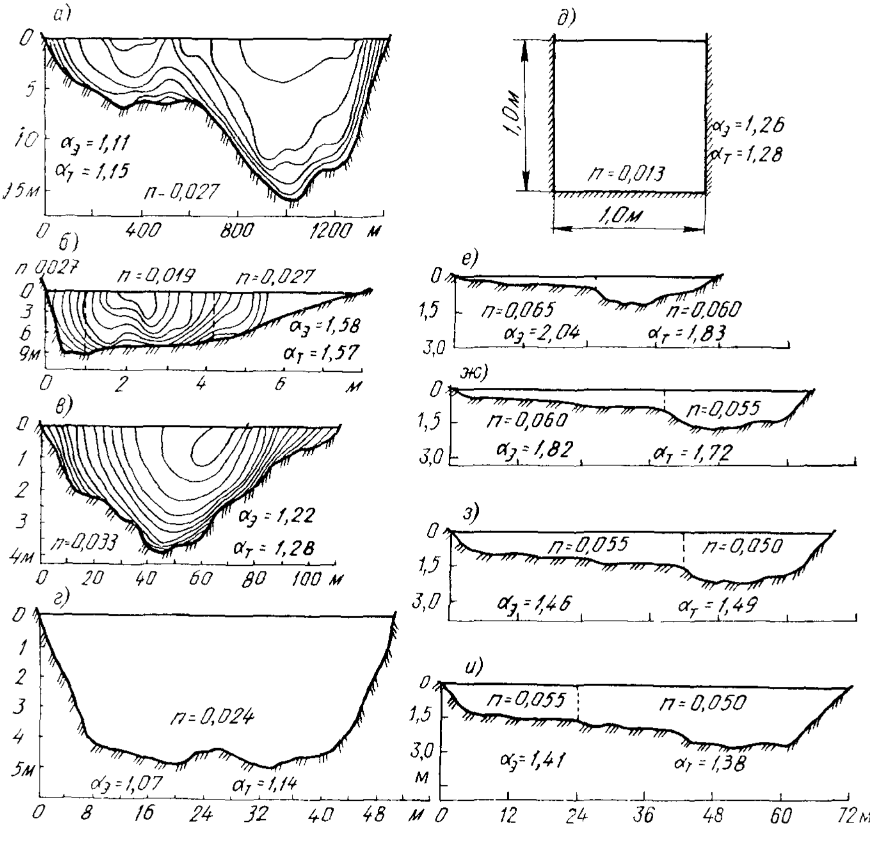


Рис 3.9 Сравнение коррективов кинетической энергии $\alpha_т$, вычисленных по предлагаемой методике, со значениями $\alpha_э$, вычисленными нами по опытным значениям скоростей, заимствованным из ряда работ (*а*—*г*), и вычисленными авторами ряда экспериментальных исследований (*д*—*и*).

а, *б* — [8] *в* — [160], *г* — [256] *д* — [15] *е*–*и* — [343]

лам различных авторов и по предлагаемой методике, чтобы оценить целесообразность ее применения. С этой целью для каждой из приведенных зависимостей и по предлагаемой методике набирались выборки из относительных погрешностей определения для каждого опыта по формуле

$$\Delta\alpha_i = (\alpha_т - \alpha_э)/\alpha_э, \tag{3.31}$$

где $\alpha_т$ — значение корректива для i-го эксперимента, определенное по приведенным выше зависимостям и по предлагаемой методике; $\alpha_э$ — значение корректива, определенное по экспериментальным данным для девяти сечений, представленных на рис. 3.9. Таким образом, количество выборок было равно количеству методов определения α, в каждой выборке использовались одни и те же экспериментальные данные. Каждая выборка обрабатывалась ста-

Таблица 3.9

Математическое ожидание и доверительный интервал погрешности определения α

$\alpha_Б$	$\alpha_Т$	$\alpha_Ж$	Предлагаемая методика
$-0,13\pm0,07$	$-0,15\pm0,09$	$-0,10\pm0,10$	$0,01\pm0,04$

тистическими методами [76] и определялось среднее значение относительной погрешности $\Delta\alpha$ и доверительный интервал доверительной вероятности $p=0,95$.

Результаты расчета относительных погрешностей корректива приведены в табл. 3.9. Индекс при α соответствует первым буквам фамилий авторов предложенной зависимости.

Из данных табл. 3.9 можно сделать вывод о том, что минимальную систематическую погрешность определения α имеет предлагаемая методика, учитывающая и форму сечения, и распределение по периметру шероховатости. Заметим, что доверительные интервалы могут быть существенно уменьшены увеличением длины выборки.

Результаты оценок определения коррективов позволяют сделать вывод, что разработан метод расчета коррективов количества движения и кинетической энергии, пригодный для применения к открытым потокам с сечениями достаточно общих форм и с изменяющейся по периметру шероховатостью. Для определения коррективов в качестве исходных данных используют координаты поперечного сечения и локальные по участкам периметра коэффициенты шероховатости, т. е. учитывают форму сечения и неоднородность распределения шероховатости. Большое количество вычислений в настоящее время не может служить препятствием к использованию методики.

Изложенная методика позволяет выполнять расчеты β и α для различных уровней воды в сечении, тем самым коррективы количества движения и кинетической энергии становятся ординарными параметрами математических моделей водотоков и могут быть использованы для уточнения расчетов движения воды с помощью одномерных математических моделей.

Однако следует отметить, что коэффициенты β и α по предлагаемой методике вычислены на основе использования полуэмпирической зависимости (3.22), которая, на что уже обращалось внимание, получена применительно к равномерному — впрочем, как и все другие методики, — точнее к однородному по длине течению. В случае неравномерного и неустановившегося движения при большой неравномерности и нестационарности поля скоростей могут отличаться от поля при равномерном течении, что, естественно, не учитывается методикой и может привести к погрешностям расчетов. Однако имеются веские основания считать, что в обычно существующих плавно изменяющихся потоках при невысокой степени неравномерности и нестационарности поля скоростей и соответственно коррективы будут отличаться от коррективов при равномерном течении несущественно. Имеются экспериментальные доказательства этого предположения. В работах А. Н. Шабрина [310, 311] показано, что при небольшой степени нестационарности поля скоростей отличаются незначительно от полей скоростей при равномерном течении. Следовательно, в таких условиях гипотеза квазистационарности применима к полям скоростей и, следовательно, к β и α приемлема в большинстве случаев — практически при всех расчетах плавно изменяющегося неравномерного и неустановившегося движения.

Для оценки влияния корректива количества движения на уровни и расходы неустановившегося движения воды выполнены численные эксперименты. Сущность их заключалась в следующем. Созданы математические модели участков водотоков, у которых сечения или только увеличивались, или только уменьшались по длине, а корректив количества движения для каждого из них или только уменьшался, или только увеличивался на конкретном участке, что позволило в определенной мере разделить факторы, влияющие на результат моделирования. По длине водотока равномерно располагалось пять гидрометрических створов. На левой границе в створе первого поста расход подавался сначала по резко возрастающему гидрографу, затем стабилизировался. По истечении 37 мин 40 с, чтобы вызвать замедленное движение, расход резко уменьшали. Расчеты выполняли при $\beta \geqslant 1$, определенном по предложенной методике. Результаты математического моделирования для одного из участков водотока представлены на рис. 3.10. Чтобы избежать наложения графиков, только расходы и уровни первого створа представлены в масштабах, обозначенных на оси ординат. Гидрографы и графики изменения уровней во втором и последующих створах сдвинуты соответственно друг относительно друга на 100 м^3/с и 1 м.

Из рис. 3.10 можно сделать следующие выводы. Увеличение расходов на левой границе при коррективе количества движения $\beta > 1$ приводит к вычисленным уровням и расходам во всех нижерасположенных створах, несколько большим, чем при $\beta = 1$. Уменьшение расходов на левой границе ведет к противоположной картине учет корректива количества движения $\beta \neq 1$ приводит к уменьшению и уровней, и расходов

В период подачи постоянного расхода вычисленные расходы в последующих створах при учете корректива $\beta > 1$ несколько больше, а уровни — меньше. Анализ других результатов численного эксперимента показал, что при учете $\beta > 1$ добегание максимальных уровней до нижерасположенных створов существенно замедляется с увеличением расстояния от левого граничного створа. Расходы в некоторые моменты времени в отдельных створах существенно (иногда на 30 %) больше, чем без учета корректива количества движения.

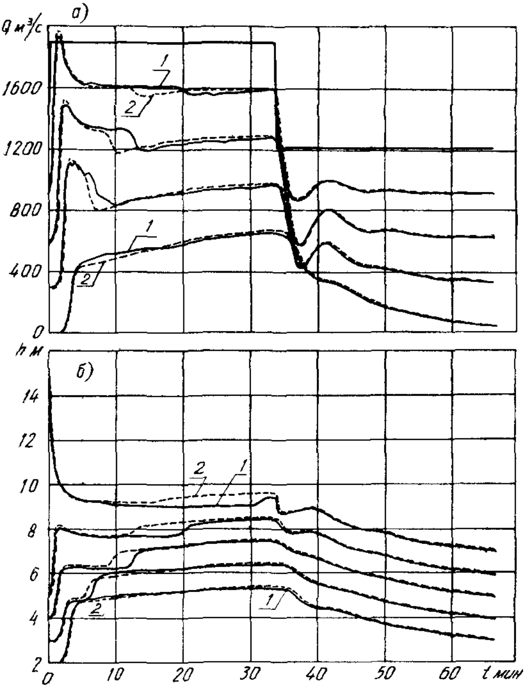


Рис 3 10. К оценке влияния корректива количества движения.
1 — $\beta > 1$, 2 — $\beta = 1$.

Все изложенное позволяет сделать вывод, что при моделировании неустановившегося движения воды на участках водотоков с однообразно изменяющимися гидравлическими и морфометрическими характеристиками необходим учет корректива количества движения $\beta > 1$, так как при этом уточняются решения. Вместе с тем в водотоках с разнообразно изменяющимися по длине морфометрическими и гидравлическими характеристиками инерционные составляющие уравнений могут менять знак на различных участках. Это может привести как к вычитанию, так и к сложению отдельных слагаемых уравнений, содержащих β, что не позволяет пока сделать окончательный вывод, в каких случаях необходим учет корректива количества движения $\beta > 1$. Таким образом, в случае существенных неоднородностей по длине водотока должны быть продолжены исследования необходимости учета корректива количества движения $\beta > 1$.

3.7. Определение коэффициента продольной дисперсии

Изменение концентраций примесей в водотоке обусловливается многими физическими, химическими, биохимическими и биологическими процессами круговорота веществ в природе. На различных участках системы водотоков вклад каждого из процессов в изменение концентрации может существенно меняться и зависеть от многих причин. В данном подразделе рассматривается роль физических, точнее механических, процессов в изменении концентрации примесей в водотоке.

Как следует из одномерных уравнений переноса, примесь перемещается и одновременно рассеивается потоком. Перемещение и рассеяние примеси приводит к известным примечательным особенностям переноса. Перечислим некоторые из них. Во-первых, концентрация примесей (на значительном расстоянии от места мгновенного сброса) оказывается примерно симметрично распределенной относительно своего максимума, хотя распределение скоростей в сечении несимметрично относительно средней в сечении скорости. Во-вторых, скорость перемещения максимума распределения концентрации по длине совпадает со средней на участке скоростью движения воды — это свойство используется в сложных условиях течения для определения средней скорости. В-третьих, продольное рассеяние примеси относительно максимума концентраций, характеризующееся в уравнении переноса коэффициентом дисперсии D, происходит значительно интенсивнее, чем можно было бы ожидать вследствие различий турбулентных характеристик течения в продольном и поперечном направлениях. Поэтому причина экспериментально установленного большого рассеяния примеси в продольном направлении [369—373] не могла быть объяснена только различиями турбулентных пульсаций в продольном и поперечном направлениях.

Тейлор первым выяснил причину весьма интенсивного продольного рассеяния примеси и получил применительно к случаю течения жидкости в круглой трубе зависимость для определения коэффициента D [370—372]. Им установлено, что основной вклад в продольное рассеяние примеси вносит неоднородность распределения по сечению осредненных скоростей. Действительно, представим, что в некоторый начальный момент времени примесь введена в поток и равномерно распределена в объеме между двумя близко расположенными сечениями. Обычно максимальная продольная скорость значительно превосходит среднюю в сечении, а минимальная — близка к нулю. В течение последующих моментов времени массы воды, имеющие максимальную скорость, переместятся, перемешиваясь по пути, на большее расстояние, чем то, на которое переместятся объемы воды, двигающиеся со средней и тем более минимальной скоростью. В результате примесь вместе с объемами воды, движущимися со скоростями, близкими к максимальной, будет интенсивно перемещаться вдоль потока и интенсивно рассеиваться во всех направлениях за счет турбулентной диффузии Известно, что разность между максимальной и минимальной осредненными скоростями однонаправленна и значительно больше турбулентных пульсаций скорости. Это приводит к большему конвективному рассеянию примеси в продольном направлении за счет неоднородности поля осредненных скоростей, чем за счет турбулентных пульсаций, т. е. турбулентной диффузии По данным Тейлора применительно к трубе, турбулентная диффузия составляет 0,5 % продольного рассеяния за счет неоднородности поля осредненных скоростей, а по данным Элдера применительно к плоскому открытому потоку,— 4 %. Таким образом, вклад конвективного рассеяния примеси за счет неоднородности поля осредненных скоростей может на два порядка превосходить вклад в рассеяние турбулентной диффузии, причем в открытых потоках он меньше, чем в закрытых. Эти обстоятельства ставят перед необходимостью учета при математическом моделировании продольного рассеяния примеси в открытых потоках как конвективных составляющих за счет неоднородности поля осредненных скоростей, так и составляющих турбулентной диффузии.

Коэффициенты продольной дисперсии и диффузии играют важную роль в процессах переноса примесей, поэтому их исследованию уделялось много внимания. Предложено большое количество зависимостей для расчета как коэффициентов дисперсии, так и коэффициентов диффузии. Подавляющее большинство из них имеют структуру произведения константы на характерный размер поперечного сечения и динамическую скорость. Естественно, что при такой степени схематизации весьма слабо отражается влияние на коэффициент дисперсии основного фактора — распределения осредненных скоростей в сечении, так как форма сечения неполно описывается одним характерным размером. Выполнен анализ [58] многих зависимостей, предложенных для расчета коэффициентов диффузии и дисперсии различными авторами. Расчеты показали, что вычисленные применительно к одним и тем же условиям, но по различным зависимостям коэффициенты продольной дисперсии и диффузии могут отличаться на несколько порядков.

Разнообразие поперечных сечений искусственных и естественных водотоков, неоднородность распределения по сечению шероховатости затрудняет выбор подходящей зависимости и ставит перед необходимостью совершенствования методики расчета коэффициентов дисперсии и диффузии, которые удовлетворительно учитывали бы особенности течения. Выполненные сравнения [58] вычисленных значений коэффициентов дисперсии с экспериментальными показали, что наиболее близкое согласование дают зависимости, имеющие структуру, предложенную Тейлором. Она учитывает рассеяние примеси полем осредненных скоростей относительно плоскости, движущейся со средней скоростью, т. е. конвективную роль неоднородности распределения по сечению поля продольных осредненных скоростей. В водотоках со сложными формами поперечного сечения и неоднородной шероховатостью границ неоднородность поля продольных осредненных скоростей существенно больше, чем в трубах. Это должно привести к значительному увеличению рассеяния примеси за счет конвективной составляющей поля осредненных скоростей и соответственно коэффициента дисперсии, определение которого с приемлемой погрешностью вряд ли возможно без достаточно детального знания поля осредненных скоростей. Поэтому представляются перспективными направления исследований, в которых коэффициент дисперсии предлагается определять, используя знания о полях продольных скоростей.

Применительно к открытым потокам Фишер предложил зависимость для определения конвективной составляющей продольной дисперсии D_y от изменения характеристик течения в плане в предположении малого влияния изменения характеристик течения по вертикали [332—336]. Представляется естественным, зная поле продольных скоростей в сечении сложной формы, определить среднее в сечении значение $D_y(u)$.

Применительно к плоским потокам Элдер предложил зависимость для определения конвективной составляющей продольной дисперсии D_h только от изменения характеристик течения по вертикали [330]. Представляется естественным, зная поле продольных скоростей в сечении сложной формы (находится по формуле (3.22) или (3.23)) попытаться определить конвективную составляющую дисперсии D_h для каждой скоростной вертикали и затем вычислить среднее в сечении значение $D_h(u)$.

Е. В. Еременко в работе [95], во-первых, доказал необходимость учета не только конвективной составляющей дисперсии $D_y(u)$, вызванной неоднородностью распределения в сечении средних на вертикали скоростей, как у Фишера, но и составляющей дисперсии $D_h(u)$, вызванной неоднородностью распределения скоростей на вертикалях, как у Элдера, и, во-вторых, установил возможность суммирования составляющих $D_y(u)$ и $D_h(u)$ при определении коэффициента дисперсии D.

Так как турбулентная диффузия вносит определенный вклад в продольное рассеяние примеси в открытых потоках, необходимо, как это сделано в работах Тейлора, Элдера и Фишера, учитывать продольную турбулентную диффузию $D_{fs}(u)$. С учетом изложенного зависимость для определения коэффициента продольной дисперсии может быть представлена в виде

$$D = D_y(u) + D_h(u) + D_{fs}(u). \qquad (3.32)$$

3.7.1. Определение конвективных составляющих коэффициента продольной дисперсии

Как отмечалось, работами Тейлора была доказана определяющая роль в продольном рассеянии примесей поля осредненных скоростей в сечении: именно конвективное рассеяние примеси за счет неоднородности распределения осредненных продольных скоростей в сечении является основной физической причиной рассеяния. Поэтому при создании методики расчета коэффициента дисперсии в сечениях сложной формы учет распределения продольных скоростей должен быть главным фактором и коэффициент должен определяться через характеристики поля скорости.

В п. 3.3 получены полуэмпирические зависимости для расчета поля продольных скоростей в сечениях сложной формы с учетом изменения локальных коэффициентов шероховатости по периметру. Оценки, приведенные в табл. 3.4, показывают высокую достоверность расчетов. Поэтому представляется целесообразным использовать зависимости (3 22), (3.22′) или (3 23) для определения составляющих коэффициента продольной дисперсии D, вызванных неоднородностью распределения скоростей

Такой подход, вытекающий из работ Тейлора, применил Фишер [335, 336], предположив, что в открытых водотоках основную роль играет неоднородность распределения характеристик течения в плане. Он предложил зависимость для расчета конвективной составляющей коэффициента дисперсии в виде

$$D_y(u) = -(1/A_0)\int_0^B q'(y)\int_0^y\Big(1/(D_{\bar{y}}h(y))\Big)\int_0^y q'(y)\,dy\,dy\,dy, \qquad (3.33)$$

где

$$q'(y) = \int_0^{h(y)} u'(y,\ h)\,dh, \quad u'(y,\ h) = u(y,\ h) - v,$$

$h(y)$ — глубина в сечении на расстоянии y от начала координат.

Таким образом, определение конвективной составляющей коэффициента дисперсии $D_y(u)$ по зависимости (3.33) сводится к вычислению четырех повторных интегралов, три из которых имеют переменный верхний предел интегрирования. Хотя для вычисления интеграла численными методами имеются стандартные программы, методика вычисления нескольких повторных интегралов имеет некоторые особенности, связанные с переменностью пределов интегрирования внутренних интегралов. Поэтому кратко остановимся на алгоритме вычисления $D_y(u)$.

Расчетные вертикали размещают в местах излома периметра сечения. На каждом отрезке периметра, составляющем долю общей ширины, равномерно добавляют расчетные вертикали таким образом, чтобы расстояние между вертикалями было меньше наперед десятой части ширины поверху Затем между каждой расчетной вертикалью помещают еще одну вертикаль. В итоге расчетные вертикали размещаются во всех точках излома периметра сечения и на каждом отрезке периметра равномерно с расстоянием менее $0{,}05\,B$ в узлах $1, 2, \ldots, N, N+1$.

Используя зависимости (3.22) или (3.23) для расчета поля продольных скоростей на каждой скоростной вертикали $2 \ldots N$, вычисляем интеграл

$$\int_0^{h(y)} \big(u(y,\ h) - v\big)\,dh$$

и получаем таблицу T_1^{N-1} значений интеграла. С ее помощью можно вычислить интеграл с переменным верхним пределом

$$\int_0^y q'(y)\,dy$$

для каждого расчетного узла 1, 2, ..., $N+1$, накапливая значение интеграла с возрастанием i-й расчетной вертикали и запоминая его значение в каждом расчетном узле в таблице T_2^{N+1}.

Методика расчета коэффициента диффузии рассматривается ниже в специальном подразделе. Поэтому в данном алгоритме будем считать, что $D_{f\bar{y}}$ известно, а произведение $D_{f\bar{y}}h(y)$ накапливается в таблице T_3^{N+1}. Частное от делений соответствующих элементов таблиц T_2^N на T_3^{N+1} дает значение подынтегральной функции второго внутреннего интеграла в узлах расположения расчетных вертикалей и накапливается в таблице T_4^{N+1}. Интегрируя в пределах от нуля до i-й расчетной вертикали сеточную функцию полученного подынтегрального выражения, последовательно получаем таблицу T_5^{N+1} значений второго внутреннего интеграла. Умножая соответствующие элементы таблицы на элементы таблицы T_1^{N+1}, получаем сеточную подынтегральную функцию в массиве T_6^{N+1} внешнего интеграла, интегрируя которую по ширине водотока — после деления на площадь — получаем значение конвективной составляющей дисперсии, вызванной неоднородностью распределения скоростей по горизонтали.

Рассеяние примеси осуществляется также за счет изменения характеристик течения в вертикальных плоскостях. Для расчета конвективной составляющей продольной дисперсии из-за неоднородности поля осредненных скоростей по вертикали воспользуемся зависимостью Элдера [329, 330]. Вычислим среднее в сечении значение составляющей дисперсии. Используя формулу Элдера, в этом случае зависимость для определения $D_h(y)$ можем записать в виде

$$D_h(u) = -\frac{1}{A}\int_0^B \int_0^{h(y)} q'(h) \int_0^{h(y)} \frac{1}{D_{fh}} \int_0^{h(y)} q'(h)\,dh\,dh\,dh\,dy, \qquad (3.34)$$

где

$$q'(h) = u(y,\ h) - v(y); \quad v(y) = \frac{1}{h(y)} \int_0^{h(y)} u(y,\ n)\,dh.$$

Таким образом, определение $D_h(y)$ сводится к вычислению четырех повторных интегралов, три из которых имеют переменный предел интегрирования, а последний осуществляет суммирование по ширине для определения среднего в сечении значения составляющей коэффициента продольной дисперсии, вызванной неоднородностью распределения скоростей по вертикали.

Кратко остановимся на алгоритме их вычисления, применив тот же принцип разбиения сечения, что и при вычислении $D_y(u)$.

Используя зависимость (3.22) или (3.23) для расчета поля продольных скоростей, можно на каждой вертикали вычислить среднюю на вертикали скорость $v(y)$, запомнив ее значение в одномерном массиве T_0^{N+1}. Затем в расчетных узлах на каждой вертикали можно вычислить функцию $q'(h)$, запомнить ее значение в двумерном массиве T_1^{N+1} и от нее вычислить внутренний интеграл с переменным верхним пределом $h(y)$, запомнив его значение в двумерном массиве T_2^{N+1}.

Методика расчета коэффициента диффузии будет рассмотрена в специальном подразделе, поэтому здесь будем считать, что значение D_{fh} — местное значение вертикальной составляющей коэффициента диффузии — известно и хранится в двумерном массиве T_3^{N+1} для расчетных узлов сетки на каждой вертикали. Частное от деления элементов таблиц T^{N+1} на соответствующие элементы таблиц T^{N+1} дает значение подынтегральной функции второго внутреннего интеграла, который запоминаем в двумерном массиве T_4^{N+1}. Вычисляя от заданной таблично функции T_4^{N+1} интеграл с переменным пределом на каждой из вертикалей, получаем двумерный массив T_5^{N+1}, умножив элементы которого на соответствующие элементы массива T_1^{N+1}, получим подынтегральную функцию третьего внутреннего интеграла в выражении (3.34). Вычислив его как интеграл с переменным верхним пределом, получим таблицу значений интеграла T_6^{N+1}. Проинтегрировав по ширине табличную функцию последней строки таблицы T_6^{N+1} и разделив полученный результат на площадь, определим среднее в сечении значение конвективной составляющей продольной дисперсии $D_h(u)$ из-за неоднородности поля осредненных скоростей на вертикалях.

3.7.2. Определение составляющих коэффициента диффузии

В зависимости для определения коэффициента продольной дисперсии входят компоненты тензора турбулентной диффузии. Вспомним, что в общем случае анизотропной турбулентности плотность удельного турбулентного потока примеси $\rho\overline{p'u'_i}$ по направлению оси x_i задается зависимостью [121, 197], восходящей к Буссинеску [323] и Шмидту [364]:

$$\overline{p'u'_i} = -D_{i,j}\,\partial p/\partial x_j,$$

где $D_{i,j}$ — компоненты тензора, имеющие смысл коэффициентов турбулентной диффузии.

Получение зависимостей для компонентов анизотропного тензора $D_{i,j}$ применительно к водотокам ограниченных поперечных размеров в настоящее время вряд ли возможно. Тем не менее принять его изотропность в данном случае также малообоснованно в связи с существенными отличиями пульсационных характеристик движения в различных направлениях открытых водотоков. Поэтому приходится использовать аналогии процессов переноса примеси, импульса и некоторые обобщения турбулентных характеристик течения.

Для кинематического коэффициента турбулентной вязкости можно записать [197]

$$k_{i,j} = l_{i,j}\sqrt{b},$$

где $b = 0{,}5\,\overline{u_i' u_i'}$ — средняя кинетическая энергия пульсационного движения единицы массы; $l_{i,j}$ — тензор масштабов турбулентности, имеющий одновременно и смысл «путей перемешивания» [164].

В работе [189] показано, что применительно к плоскому потоку — в нашем случае в окрестности жестких границ — можно записать

$$k_h = l_h^* \sqrt{\overline{u_h'^2}}. \tag{3.35}$$

Индекс h обозначает, что соответствующая составляющая рассматривается в направлении оси h, перпендикулярном жесткой границе, l_h^* — «путь перемешивания», или интегральный масштаб $L_{ss}(0, h, 0)$.

Если исходить из обычно принимаемого в настоящее время предположения, что механизмы переноса пассивной примеси и импульса аналогичны, то для составляющей кинематического коэффициента турбулентной диффузии D_{fh} в направлении, перпендикулярном жесткой границе, можно записать

$$D_{fh} = l_h \sqrt{\overline{u_h'^2}}, \tag{3.36}$$

где l_h — величина, аналогичная l_h^* для примеси.

Если бы пути перемешивания для количества движения и примеси были одинаковы, то, как следует из соотношений (3.35), (3.36), кинематические коэффициенты турбулентной вязкости (k_h) и диффузии (D_{fh}) были бы одинаковы. Однако полного единства процесса переноса импульса [249, 314] и вещества нет. Если представить, что на некотором пути перемешивания l_h^* (по Прандтлю) количество движения сохраняется, то на том же пути может не сохраняться количество вещества в переносящем его жидком объекте, так как переносимая примесь не полностью пассивна. Поэтому естественнее полагать, что для примеси имеются свои «пути перемешивания» l_h, причем различные [164] для различных направлений.

Чтобы количественно охарактеризовать различие между коэффициентами кинематической турбулентной вязкости и диффузии, воспользуемся турбулентным числом Шмидта

$$\mathrm{Sc}_t = k_h / D_{fh}.$$

Простейшим, обычно используемым при решении внутренних задач турбулентного течения предположением, является допущение о полной пассивности примеси [164] и, следовательно, о равенстве единице числа Sc_t. Однако в настоящее время пределы изменения оцениваются [301, 358] следующим образом:

$$0{,}7 \leqslant Sc_t \leqslant 1{,}0.$$

Необходимо обратить внимание на трудность экспериментальных оценок Sc_t, обусловленных сложностью экспериментов, особенно касающихся изменения этого числа по сечению. Поэтому в настоящее время отсутствует возможность использования переменного по сечению значения Sc_t.

Из структуры зависимостей для кинематического коэффициента турбулентной вязкости (3.35) и компонента турбулентной диффузии (3.36) можно оценить, что число Шмидта характеризует различие соответствующих компонентов тензора интегральных масштабов турбулентности $l^*_{i,j}$ и тензора интегральных масштабов диффузии $l_{i,j}$, так как

$$Sc_t = k_h/D_{fh} = l^*_h/l_h.$$

Определяя вполне аналогично компоненты турбулентной диффузии, параллельные границе и вдоль потока, можем записать:

$$D_{fy} = l_y \sqrt{\overline{u_y'^2}};$$

$$D_{fs} = l_s \sqrt{\overline{u_s'^2}}.$$

Из соотношений для компонентов турбулентной диффузии D_{fh}, D_{fy}, D_{fs} следует, что анизотропность и неоднородность распределения по сечению коэффициентов турбулентной диффузии будет определяться как анизотропностью и неоднородностью распределения по сечению характеристик пульсаций скоростей, так и анизотропностью и неоднородностью распределения по сечению соответствующих путей перемешивания примеси в различных направлениях.

В настоящее время имеется возможность в сложных сечениях, в криволинейных областях, прилегающих к жесткой границе, вычислить на основании обобщений [25] отношения:

$$a_{s,h} = \sqrt{\overline{u_s'^2}} \Big/ \sqrt{\overline{u_h'^2}} = 2{,}38 \exp(0{,}4\varepsilon_y - 0{,}71\varepsilon_h);$$

$$a_{y,h} = \sqrt{\overline{u_y'^2}} \Big/ \sqrt{\overline{u_h'^2}} = 1{,}5 \exp(0{,}4(\varepsilon_y - \varepsilon_h)).$$

Аналогично можно обобщить экспериментальные данные по интегральным масштабам турбулентности, определяемым по корреляционным функциям:

по исследованиям Е. М. Минского [189, 190]

$$L_{ss}(s,\ 0,\ 0)=0{,}62h,$$

$$L_{ss}(0,\ h,\ 0)=0{,}14h;$$

по исследованиям Конт-Белло [136]

$$L_{ss}(s,\ 0,\ 0)=h,$$

$$L_{ss}(0,\ h,\ 0)=0{,}16h,$$

$$L_{ss}(0,\ 0,\ y)=0{,}13h,$$

$$L_{ss}(0,\ h,\ 0)\approx L_{ss}(0,\ 0,\ y);$$

по исследованиям Ханжалика, Лондера [338]

$$L_{ss}(s,\ 0,\ 0)=0{,}61h,$$

$$L_{ss}(0,\ h,\ 0)=0{,}24h.$$

Тогда по Минскому

$$l_{sh}=L_{ss}(s,\ 0,\ 0)/L_{ss}(0,\ h,\ 0)=0{,}62h/0{,}14h\approx 4{,}5;$$

по Конт-Белло

$$l_{sh}=L_{ss}(s,\ 0,\ 0)/L_{ss}(0,\ h,\ 0)=h/0{,}16h\approx 4{,}0;$$

по Ханжалику, Лондеру

$$l_{sh}=L_{ss}(s,\ 0,\ 0)/L_{ss}(0,\ h,\ 0)=0{,}61h/0{,}24h\approx 3{,}0.$$

Из экспериментальных данных можно принять в качестве приближенных оценок среднеарифметическое значение $p=0{,}95$:

$$l_{sh}=3{,}8\pm 1{,}9;$$

на основании данных Конт-Белло можно оценить

$$l_{yh}=L_{ss}(0,\ 0,\ y)/L_{ss}(0,\ h,\ 0)=0{,}13h/0{,}16h\approx 1{,}0.$$

Естественно принять, что отношения интегральных масштабов турбулентности, определенные по нормированным координационным функциям скорости двухточечных моментов пульсационных продольных скоростей, и соответствующие двухточечные моменты пульсации концентрации и продольной скорости будут пропорциональными.

Как показал Минский [189, 190], интегральный масштаб турбулентности $L_{ss}(0,\ h,\ 0)$ численно равен пути перемешивания l_h^*. На этом основании принято, что пути перемешивания для продольного и поперечного (горизонтального) коэффициентов диффузии могут определяться соответственно через интегральные масштабы $L_{ss}(0,\ 0,\ y)$ и $L_{ss}(s,\ 0,\ 0)$, пропорциональные интегральным масштабам $L_{ps}(0,\ 0,\ y)$ и $L_{ps}(s,\ 0,\ 0)$. Учитывая изложенное, для трех составляющих кинематического коэффициента турбулентной диффузии можем записать:

$$D_{fh}=l_h\sqrt{\overline{u_h'^2}}=l_h^*\sqrt{\overline{u_h'^2}}/\mathrm{Sc}_t=L_{ss}(0,\ h,\ 0)\sqrt{\overline{u_h'^2}}/\mathrm{Sc}_t=$$

$$=l_h^*\sqrt{\overline{u'^2}}/\mathrm{Sc}_t=k_1/\mathrm{Sc}_t;$$

$$D_{fy}=l_y\sqrt{\overline{u_y'^2}}=l_y^*\sqrt{\overline{u_y'^2}}/\mathrm{Sc}_t=(L_{ss}(0,\ 0,\ y)/\mathrm{Sc}_t)\sqrt{\overline{u_y'^2}}=$$

$$=(l_{yh}a_{yh}/\mathrm{Sc}_t)\,L_{ss}(0,\ h,\ 0)\sqrt{\overline{u_h'^2}}=(l_{yh}a_{yh}/\mathrm{Sc}_t)\,k_1;$$

$$D_{fs}=l_s\sqrt{\overline{u_s'^2}}=l_s^*\sqrt{\overline{u_s'^2}}/\mathrm{Sc}_t=(L_{ss}(s,\ 0,\ 0)/\mathrm{Sc}_t)\sqrt{\overline{u_s'^2}}=$$

$$=(l_{sh}a_{sh}/\mathrm{Sc}_t)\,L_{ss}(0,\ h,\ 0)\sqrt{\overline{u_h'^2}}=(l_{sh}a_{sh}/\mathrm{Sc}_t)\,k_1.$$

Обозначив

$$\alpha_h=1/\mathrm{Sc}_t;\quad \alpha_y=l_{yh}a_{yh}/\mathrm{Sc}_t;\quad \alpha_s=l_{sh}a_{sh}/\mathrm{Sc}_t,$$

получим

$$D_{fh}=\alpha_h k_1;\quad D_{fy}=\alpha_y k_1;\quad D_{fs}=\alpha_s k_1,$$

где k_1 — кинематический коэффициент турбулентной вязкости.

Приведенные выше значения параметров a_{sh}, a_{yh}, l_{sh}, l_{yh}, Sc_t позволяют оценить их применительно к конкретным условиям и, следовательно, приближенно определить три составляющие коэффициента турбулентной диффузии. Впрочем, при желании перейти к концепции изотропного коэффициента турбулентной диффузии достаточно принять равными единице коэффициенты α_h, α_y, α_s. Таким образом, определение составляющих коэффициента турбулентной диффузии можно свести к определению кинематического коэффициента турбулентной вязкости k_1 — характеристике турбулентного движения жидкости, значительно больше изученной теоретически и экспериментально, чем коэффициент диффузии.

3.7.3. Определение кинематического коэффициента турбулентной вязкости k_1

Как следует из изложенного, коэффициент продольной дисперсии D может быть определен, если располагать методиками расчета составляющих коэффициента дисперсии $D_h(u)$, $D_y(u)$, $D_{\tau s}(u)$. В свою очередь конвективные составляющие коэффициента дисперсии зависят от коэффициентов диффузии D_{fy} и D_{fh}. Как изложено в п. 3.7.2, три составляющие коэффициента диффузии могут быть выражены через кинематический коэффициент турбулентной вязкости. Поэтому методике его расчета будет уделено внимание ниже.

Незамкнутость системы уравнений Рейнольдса приводит к необходимости привлечения для решения различных задач дополнительных связей полуэмпирического типа. Такие связи используют чаще всего понятие турбулентной вязкости, что позволяет уменьшить число неизвестных в системе. Но поскольку и с введением турбулентной вязкости система оказывается незамкнутой даже при описании простейших течений, приходится делать те или иные предположения относительно изменения турбулентной вязкости в сечении. Даже для случая плоского однородного по длине течения эти предположения значительно различаются [197]. В потоках ограниченных поперечных размеров задача усложняется, хотя и в этом случае выдвигаются гипотезы о распределении турбулентной вязкости [121, 200]. Существенные различия в предположениях о распределении турбулентной вязкости объясняются как неполнотой экспериментальных данных о распределении турбулентных напряжений и осредненных скоростей, так и значительными погрешностями их измерения. Имеются экспериментальные данные, свидетельствующие как об уменьшении турбулентной вязкости при приближении к поверхности [190, 301, 356], так и об ее увеличении [121].

В последнее время находят широкое применение модели турбулентности различного порядка [18, 155, 268, 342, 350, 351], использующие для определения кинематического коэффициента турбулентной вязкости $k-\varepsilon$-модели, выражающие кинематическую вязкость через кинетическую энергию турбулентности и диссипацию энергии. Их численное определение применительно к рассматриваемым в данной работе случаям (сечения сложных форм и больших размеров с неоднородной шероховатостью, изменяющейся в широких пределах) встречает значительные, пока непреодолимые трудности. Например, в моделях турбулентности второго порядка принимается предположение о равенстве продукции турбулентности скорости диссипации [327, 352], что вряд ли приемлемо в окрестности жестких границ и границ транзитного и нетранзитного потоков. Исследованиями [301, 324, 341] показано, что области продукции турбулентности и диссипации совпадают лишь частично. Кроме того, в различные модификации $k-\varepsilon$-моделей входит до десяти неуниверсальных [185] коэффициентов, определение которых применительно к рассматриваемым сложным случаям течения весьма затруднительно Поэтому применение $k-\varepsilon$-моделей в условиях турбулентного течения водотока сложных форм с неоднородной шероховатостью встречает трудности, не позволяющие довести решение до числа Из сказанного следует, что расчет распределения турбулентной вязкости, особенно в потоках ограниченных поперечных размеров со сложной формой сечений и неоднородной шероховатостью, пока весьма затруднителен Поэтому представляется целесообразным пойти другим путем.

Если в уравнениях Рейнольдса выразить турбулентные напряжения через турбулентную вязкость и осредненные скорости, используя зависимость типа обобщенного [197] соотношения Буссинеска

$$\rho \overline{u_i' u_j'} = (^2/_3)\, \rho b \delta_{ij} - \rho k_1 \Phi_{ij}, \tag{3.37}$$

где k_1 — кинематический коэффициент турбулентной вязкости; Φ_{ij} — тензор скоростей деформации, то турбулентная вязкость оказывается связанной с осредненными скоростями посредством дифференциальных уравнений.

Воспользуемся тем, что знания о распределении скоростей значительно полнее, чем о распределении турбулентной вязкости. Действительно, в простейших случаях вид функции, описывающей распределение скоростей для значительной области потока, может быть получен независимо от дифференциальных уравнений движения, например методами теории размерности [156, 157, 197]. Из различных предпосылок, начиная с работ Кармана [345] и Прандтля [355], для плоского однородного по длине потока в области, не слишком близкой и не слишком далекой от границ, для осредненных скоростей получены логарифмические зависимости [197, 204, 208, 314], которые для области, удаленной от границ, переходят в параболическую зависимость [282]. Имеются предложения по расчету поля скоростей в потоках со сложными формами поперечного сечения [191, 192]. Кроме того, по распределению осредненных скоростей накоплен богатейший экспериментальный материал, на основании которого можно, с одной стороны, более обоснованно высказывать предположения о распределении скоростей, с другой — расчеты можно непосредственно сравнивать с экспериментальными данными. Поэтому при исследовании распределения турбулентной вязкости по сечению с неоднородной шероховатостью границ целесообразно воспользоваться знаниями о распределении продольных осредненных скоростей, сконцентрированных в формулах полуэмпирического типа, расчеты по которым удовлетворительно согласуются с многочисленными экспериментальными данными, а распределение турбулентной вязкости получить, интегрируя уравнение движения.

После введения турбулентной вязкости в уравнения Рейнольдса применительно к продольно-однородному потоку ограниченной ширины проекция уравнения на продольную ось примет вид [254]

$$(k_1 + \nu)\,\Delta u + \left(\frac{\partial k_1}{\partial h} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial h}\, u + \left(\frac{\partial k_1}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial h}\right)\frac{\partial}{\partial u}\, u = -F_1, \tag{3.38}$$

где ψ — функция тока для поперечной циркуляции; F_1 — проекция силы тяжести на продольное направление.

В уравнение (3.38) входят поперечные компоненты осредненной скорости, которые по физическому смыслу представляют собой инерцию осредненного поперечного движения, являющегося весьма медленным. Естественно полагать, что осредненное поперечное движение несущественно сказывается на пульсационных характеристиках течения. На основании этих физических соображений можно пренебречь в уравнении поперечными компонентами осредненной скорости. Если в уравнении (3.38) рассматривать в качестве неизвестной функции кинематический коэффициент суммарной вязкости $k=k_1+\nu$, то для его определения можно использовать полученное неоднородное линейное уравнение в частных производных первого порядка.

Для уравнения (3.38) с учетом упрощения можно сформулировать задачу Коши: найти решение $k(h, y)$ уравнения

$$\Delta uk + \frac{\partial u}{\partial h}\frac{\partial k}{\partial h} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial k}{\partial y} = -F_1, \tag{3.39}$$

которое на кривой $h=f(y)$, нигде не касающейся проекции характеристик, принимает заданные значения $k(h)$.

Известно, что решение задачи Коши существует и единственно, если коэффициенты и свободный член уравнения непрерывны и непрерывно дифференцируемы, коэффициенты уравнения не обращаются в нуль одновременно, функции $f(y)$ и $k(h)$ непрерывно дифференцируемы [32, 115, 177, 232].

Использование полуэмпирических соотношений для замыкания уравнений (3.22) и (3.23) не гарантирует выполнения условий единственности решения в сечениях произвольных форм, поскольку геометрические размеры, а следовательно и гидравлические характеристики, а также характеристики шероховатости могут быть разрывными, изменяться скачкообразно, что, в принципе, может привести к нарушению непрерывности коэффициентов и производных от них. Это, естественно, является недостатком методики расчета коэффициентов. В реальных течениях при относительно небольших скоростях все характеристики течения изменяются монотонно из-за влияния вязкости, как физической, так и турбулентной. Имеются различные пути преодоления этого недостатка методики. Один из них, например, сводится к небольшим локальным изменениям сечения с тем, чтобы относительные координаты h/H, y/B и n в окрестности особенностей менялись плавно, что исключает разрывность полей скоростей и обеспечивает существование и единственность решения задачи Коши для уравнения (3.39).

Рассмотрим некоторые случаи решения сформулированной задачи, когда обеспечивается единственность и существование решения без применения специальных мер, обеспечивающих непрерывность поля скоростей, когда можно получить в аналитическом виде и численными методами распределение в сечении кинематического коэффициента турбулентной вязкости и сравнить результат расчета с имеющимися экспериментальными данными. Заметим, что экспериментальные данные, по которым можно получить распределение по сечению кинематического коэффициента турбулентной вязкости, существуют для потоков, имеющих относительно простую форму сечения — прямоугольную и трапецеидальную. В таких сечениях возможны количественные оценки погрешностей методики расчета k.

Выполнение расчетов в сечениях произвольной формы затрудняется сложностью кривой $y=k(h)$, на которой можно определить значения $k(h)$. Кривая $y=k(h)$ может быть неоднозначной из-за наличия многих гидродинамических осей.

Попытаемся найти решение уравнения (3.39) для потока прямоугольной и трапецеидальной форм сечения с неоднородной шероховатостью дна и стенок.

Исследуем детальнее распределение по сечению турбулентной вязкости в потоке прямоугольной формы сечения, поскольку в этом случае зависимость для расчета распределения по сечению кинематического коэффициента суммарной вязкости удается получить в аналитическом виде. Для распределения продольных скоростей воспользуемся формулой (3.23), которая применительно к прямоугольному сечению имеет вид [251]

$$u = v + N\left(\ln(eh/H) - \delta_h/h\right) + P\left(\ln(ey/B) - \delta_y/y\right), \qquad (3.40)$$

где

$$N = 2{,}98Lu_{*h} = 2{,}98\,\frac{R^{3/2}\left(F + \ln(R/\delta)\right)}{H^{3/2}\left(F + \ln(H/\delta_h)\right)}\,u_{*h};$$

$$P = 2{,}98Mu_{*y} = 2{,}98\,\frac{R^{3/2}\left(F + \ln(R/\delta)\right)}{B^{3/2}\left(F + \ln(B/\delta_y)\right)}\,u_{*y};$$

δ_h — толщина пристенного слоя для плоского вертикального потока; δ_y — толщина пристенного слоя для плоского горизонтального потока; δ — приведенная толщина пристенного слоя; $F=3{,}90$ в области с полным проявлением шероховатости и 4,90 в переходной области; $u_{*h}=\sqrt{gHI}$ — динамическая скорость для плоского в вертикальной плоскости потока; $u_{*y}=\sqrt{gBI}$ — динамическая скорость для плоского в горизонтальной плоскости потока. Расположение осей координат представлено на рис. 3.11. Начало координат представлено на рис. 3.11. Начало координат расположено в точке пересечения дна и стенки потока. Здесь B — полуширина прямоугольного сечения.

Вычислив производные от продольных скоростей и подставив их в уравнение (3.39), получим

$$N\left(1/h + \delta_h/h^2\right)\partial k/\partial h + P\left(1/y + \delta_y/y^2\right)\partial k/\partial y =$$

$$= \left(N\left(1/h^2 + 2\delta_h/h^3\right) + P\left(1/y^2 + 2\delta_y/y^3\right)\right)k - F_1 \qquad (3.41)$$

Для определения k получено неоднородное линейное уравнение в частных производных первого порядка. Коэффициенты и правая часть уравнения — непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции от h, y, k в области $\delta_h \leqslant h \leqslant H$, $\delta_y \leqslant y \leqslant B$, причем коэффициенты уравнения не обращаются в нуль одновременно. Тогда решение уравнения (3.41) существует, единственно и однозначно определяется начальными данными Коши: $k=f(h)$ при $y=y_i$.

Из вида начальных данных следует, что для решения уравнения (3.41) необходимо предварительно установить распределение суммарной вязкости на какой-либо из вертикалей. Наиболее подходя-

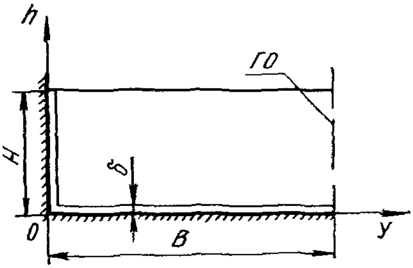


Рис 3.11 Схема к расположению осей координат в прямоугольном сечении

щей для этих целей является средняя вертикаль. Из физических соображений о симметричности полей на средней вертикали следует, что $\partial u/\partial y|_{y=B}=0$ и $\partial k/\partial y|_{y=B}=0$. Однако известный недостаток формул логарифмического вида не приводит к нулевым значениям указанных производных, а дает некоторые их малые значения. Так как они входят в уравнение (3.39) произведением, с учетом отмеченных физических соображений считается возможным принять $\partial u/\partial y \cdot \partial k/\partial y|_{y=B}=0$. Тогда уравнение движения на оси симметрии будет иметь вид

$$N\,(1/h+\delta_h/h^2)\,dk/dh-\left(N\,(1/y^2+2\delta_y/y^3)+G_1\right)k=-F_1,$$

где

$$G_1=P\,(1/B^2+2\delta_y/B^3). \tag{3.42}$$

Выполнив некоторые преобразования, окончательно получим

$$\frac{dk}{dh}-\left(\frac{1}{h}+\frac{\delta_h}{h\,(h+\delta_h)}+\frac{G_1h^2}{N\,(h+\delta_h)}\right)k=\frac{F_1}{N}\,\frac{h^2}{h+\delta_h}. \tag{3.43}$$

Это обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Общее решение имеет вид

$$k=\exp\left(\int\left(\frac{1}{h}+\frac{\delta_h}{h\,(h+\delta_h)}+\frac{G_1h^2}{N\,(h+\delta_h)}\right)dh\right)\times$$
$$\times\left(c-\frac{F_1}{N}\int\frac{h^2}{h+\delta_h}\exp\left(-\int\left(\frac{1}{h}+\frac{\delta_h}{h\,(h+\delta_h)}+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{G_1h^2}{N\,(h+\delta_h)}\right)dh\right)dh\right), \tag{3.44}$$

где c — произвольная постоянная.

Вычислим и оценим интеграл

$$\int (h^2/(h+\delta_h))\,dh = 0{,}5\,(h-\delta_h)^2 - \delta_h^2\,(2-\ln(h+\delta_h)).$$

Поскольку в окрестности стенки поток плоский, т. е. из уравнений движения следует, что $\partial\tau_{sy}/\partial y=0$, то поправка G_1 в уравнениях (3.42), которая учитывает тот факт, что на средней вертикали характеристики несколько иные, чем в плоском потоке, должна исправлять решение вдали от стенок, где слагаемыми, эквивалентными δ_h^2, можно пренебречь. Пренебрегая этими слагаемыми, получаем

$$\int (h^2/(h+\delta_h))\,dh = 0{,}5\,(h-\delta_h)^2.$$

Вычислив в выражении (3.44) интегралы и обозначив $G_2 = G_1/(2N)$, получим

$$k = (h^2/(h+\delta_h))\exp\left(G_2(h-\delta_h)^2\right)\left(c - \frac{F_1}{N}\int \exp\left(-G_2\,(h-\delta_h)^2\right)dh\right).$$

Интеграл $\int \exp\,(-G_2(h-\delta_h)^2)\,dh$ не выражается в конечном виде через элементарные функции, поэтому вычислим его приближенно разложением в ряд:

$$\exp(-z^2) = \sum_{k=0}^{\infty}\left((-1)^n z^{2n}/n!\right).$$

Поскольку полученный функциональный ряд сходится равномерно во всей области $(+\infty,\ -\infty)$, то допустимо почленное его интегрирование. В результате

$$k = \frac{h^2}{h+\delta_h}\exp\left(G_2\,(h-\delta_h)^2\right)\left(c - \frac{F_1}{N}\,\frac{1}{\sqrt{G_2}}\times\right.$$
$$\left.\times\sum_{0}^{\infty}\left((-1)^n\,\frac{(\sqrt{G_2}\;(h-\delta_h))^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}\right)\right). \qquad (3.45)$$

Чтобы установить постоянную c, необходимо иметь значение кинематического коэффициента суммарной вязкости хотя бы в одной точке вертикали. Оно может быть найдено в точке $h=\delta_h$ на оси симметрии потока.

Действительно, для пристенного слоя на средней вертикали можно пренебречь в уравнении движения в напряжениях слагаемыми, содержащими поперечный вертикальный компонент осредненной скорости. Тогда проекция уравнения движения в напряжениях будет иметь вид

$$F_1 + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\tau_{sh}}{\partial h} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial\tau_{sy}}{\partial y} = 0.$$

Рассмотрим слагаемое $\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{sy}}{\partial y}$ в окрестности точки пересечения оси симметрии и дна:

$$\tau_{sy}/\rho = k\,(\partial u_s/\partial y + \partial u_y/\partial s),$$

где u_y — поперечный компонент местной осредненной скорости.

Поскольку

$$\partial u_y/\partial s = 0, \text{ то } \tau_{sy}/\rho = k\,\partial u_s/\partial y.$$

Тогда
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{sy}}{\partial y} = \frac{\partial k}{\partial y}\frac{\partial u_s}{\partial y} + k\frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2}. \tag{3.46}$$

Первое слагаемое уравнения (3.46) равно нулю из соображений симметрии, и, кроме того, на стенке $u_{s\,|\,h=0}=0$; значит, $\partial u_s/\partial y\,|_{h=0}=0$ и $\partial^2 u_s/\partial y^2\,|_{h=0}=0$, поэтому $\partial \tau_{sy}/\partial y\,|_{y=B}=0$. Полагаем, что и в непосредственной близости от стенки справедливо $\partial \tau_{sy}/\partial y=0$. Тогда в окрестности дна на оси симметрии уравнение движения в напряжениях примет вид

$$F_1 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{sh}}{\partial h} = 0. \tag{3.47}$$

В этом смысле вблизи стенки поток можно считать плоским. Интегрируя уравнение (3.47), получаем

$$\tau_{sh}/\rho = -gIh + c.$$

При $h=0$ $\tau_{sh}=\tau_0$. Тогда $c=\tau_0/\rho$, следовательно,

$$\tau_{sh}/\rho = \tau_0/\rho - gIh.$$

Получено, что в окрестности дна на оси симметрии касательные напряжения изменяются по линейному закону Если учесть, что толщина пристенного слоя δ_h мала по сравнению с H, то в пределах пристенного слоя касательные напряжения изменяются незначительно. Тогда

$$\left.\frac{\tau_{sh}}{\rho}\right|_{h=\delta_h} \approx \frac{\tau_0}{\rho}.$$

Поскольку в однородном по длине потоке $\tau_{sh}/\rho = k\partial u/\partial h$, то

$$k_{\delta_h}\left.\frac{\partial u}{\partial h}\right|_{h=\delta_h} = \frac{\tau_0}{\rho} = u_{*h}^2,$$

где k_{δ_h} — кинематическая суммарная вязкость на границе пристенного слоя.

Тогда окончательно

$$k_{\delta_h} = u_{*h}^2 \Big/ \left.\frac{\partial u}{\partial h}\right|_{h=\delta_h}. \tag{3.48}$$

Таким образом, если известна динамическая скорость и производная от продольных скоростей, то определение суммарной кинематической вязкости на границе пристенного слоя не представляет затруднений для средней вертикали. Динамическую скорость можно определить по формуле $u_{*h}=\sqrt{gHI}$, а $\partial u/\partial h|_{h=\delta_h}$ — из формулы для расчета продольных скоростей (3.40).

Зависимость (3.48) приводится в монографии И. К. Никитина [208] и подтверждена им экспериментально.

Установим теперь значение постоянной в формуле (3.45). Для этого необходимо предположить, что $k=k_{\delta_h}$ при $h=\delta_h$. Тогда

$$c=2k_{\delta_h}/\delta_h.$$

Учитывая, что

$$2Nk_{\delta_h}/(F_1\delta_h)=2NgHI\delta_h^2/(F_1\delta_h N2\delta_h)=H,$$

получаем

$$k=\frac{F_1}{N}\frac{h_2}{h+\delta_h}\exp\left(G_2(h-\delta_h)^2\right)\left(H-\sum_0^\infty\left((-G_2)^n\frac{(h-\delta_h)^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}\right)\right). \tag{3.49}$$

Зависимость (3.49) дает начальные данные Коши для решения уравнения (3.41).

Таким образом, для расчета распределения суммарной вязкости по сечению прямоугольной формы приходим к следующей задаче Коши: найти решение линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$N(1/h+\delta_h/h^2)\,\partial k/\partial h+P(1/y+\delta_y/y^2)\,\partial k/\partial y-$$
$$-\left(N(1/h^2+2\delta_h/h^3)+P(1/y^2+2\delta_y/y^3)\right)k=-F_1 \tag{3.50}$$

такое, чтобы

$$k=\frac{F_1}{N}\frac{h^2}{h+\delta_n}\exp\left(G_2(h-\delta_h)^2\right)\left(H-\sum_0^\infty(-G_2)^n\frac{(h-\delta_h)^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}\right)$$

при $y=B$.

Известно, что задачи об интегрировании уравнения (3.50) и соответствующей ему системы обыкновенных дифференциальных уравнений эквивалентные [32, 177, 178].

Получим соответствующую систему. Для этого неоднородное уравнение приведем к однородному:

$$N(1/h+\delta_h/h^2)\,\partial v/\partial h+P(1/y+\delta_y/y^2)\,\partial v/\partial y+$$
$$+\left(\left(N(1/h^2+2\delta_h/h^3)+P(1/y^2+2\delta_y/y^3)\right)k-F_1\right)\partial v/\partial k=0. \tag{3.51}$$

Запишем соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений в симметрической форме:

$$\frac{dh}{N\,(1/h+\delta_h/h^2)}=\frac{dy}{P\,(1/y+\delta_y/y^2)}=$$

$$=\frac{dk}{(N\,(1/h^2+2\delta_h/h^3)+P\,(1/y^2+2\delta_y/y^3))\,k-F_1}. \qquad (3.52)$$

Эта система имеет два независимых интеграла. Найдем их. Для этого перепишем систему (3.52) в виде

$$\frac{dh}{N\,(1/h+\delta_h/h^2)}=\frac{dy}{P\,(1/y+\delta_y/y^2)};$$

$$(3.53)$$

$$\frac{dy}{P\,(1/y+\delta_y/y^2)}=\frac{dk}{(N\,(1/h^2+2\delta_h/h^3)+P\,(1/y^2+2\delta_y/y^3))\,k-F_1}.$$

Интегрируя первое уравнение системы, получаем

$$(h-\delta_h)^2=(N/P)\,(y-\delta_y)^2+(2N/P)\,\delta_y^2\ln(y+\delta_y)-$$

$$-2\delta_h^2\ln(h+\delta_h)+4\delta_h^2-4\delta_y^2N/P+2c_1N. \qquad (3.54)$$

В зависимости (3.54) функции $\ln(y+\delta_y)$ и $\ln(h+\delta_h)$ слабо изменяются при $y\geqslant\delta_y$ и $h\geqslant\delta_h$. Так как они умножаются на слагаемое δ^2, их удельное значение мало, тем более что в окончательных выражениях, куда будут входить слагаемые $(h-\delta_h)^2$ и $(y-\delta_y)^2$ будет присутствовать постоянная B. Это существенно улучшает оценки погрешностей от замены слагаемых вида $\delta_h^2\ln(h+\delta_h)$ постоянной и делает возможным запись интеграла первого уравнения системы (3.53) в виде

$$c=(h-\delta_h)^2-(N/P)\,(y-\delta_y)^2. \qquad (3.55)$$

Приступим к интегрированию второго уравнения системы (3.53)

$$\frac{dy}{P\,(1/y+\delta_h/y^2)}=\frac{dk}{(N\,(1/h^2-2\delta_h/h^3)+P\,(1/h^2+2\delta_y/y^3))\,k-F_1}$$

или

$$\frac{dk}{dy}-\left(\frac{1}{y}+\frac{\delta_y}{y\,(y+\delta_y)}+\frac{N}{P}\,\frac{h+2\delta_h}{h^3}\,\frac{y^2}{y+\delta_y}\right)k=-\frac{F_1y^2}{P\,(y+\delta_y)}.$$

$$(3.56)$$

Из уравнения (3.55) получим

$$h=\sqrt{(N/P)\,(y-\delta_y)^2+c}+\delta_h. \qquad (3.57)$$

Упростим одно из слагаемых уравнения (3.56), используя соотношение (3.57) и пренебрегая слагаемыми, эквивалентными δ_y^2.

Тогда

$$\frac{N}{P}\,\frac{h+2\delta_h}{h^3}\,\frac{y^2}{y+\delta_y}=\frac{N}{P}\,\frac{\sqrt{(N/P)\,(y-\delta_y)^2+c}+3\delta_h}{\left(\sqrt{(N/P)\,(y-\delta_y)+c}+\delta_h\right)^3}\,\frac{y^2}{y+\delta_y}=$$

$$=\frac{y-\delta_y}{(y-\delta_y)^2+(P/N)\,c}.$$

После упрощения уравнение (3.56) примет вид

$$\frac{\partial k}{\partial y}-\left(\frac{1}{y}+\frac{\delta_y}{y\,(y+\delta_y)}+\frac{y-\delta_y}{(y-\delta_y)^2+(P/N)\,c}\right)k=-\frac{F_1}{P}\,\frac{y^2}{y+\delta_y}.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение. Его решение имеет вид [177]

$$k=\exp\left(\int\left(\frac{1}{y}+\frac{\delta_y}{y\,(y+\delta_y)}+\frac{y-\delta_y}{(y-\delta_y)^2+(P/N)\,c}\right)dy\right)\times$$

$$\times\left(c_2-\frac{F_1}{P}\int\frac{y^2}{y+\delta_y}\exp\left(-\int\left(\frac{1}{y}+\frac{\delta_y}{y\,(y+\delta_y)}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{y-\delta_y}{(y-\delta_y)^2+(P/N)\,c}\right)dy\right)dy\right).$$

Тогда

$$k=\frac{y^2}{y+\delta_y}\sqrt{(y-\delta_y)^2+(P/N)\,c}\left(c_2-\frac{F_1}{P}\ln\left|(y-\delta_y)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{(y-\delta_y)^2+(P/N)\,c}\,\right|\right).$$

Подставляя значение c из уравнения (3.55) и разрешая относительно c_2, получаем

$$c_2=\frac{k\,(y+\delta_y)}{\sqrt{(P/N)}y^2\,(h-\delta_h)}+\frac{F_1}{P}\ln\left|(y-\delta_y)+\sqrt{(P/N)}\,(h-\delta_h)\right|.$$

Интегралы первого и второго уравнений системы (3.53) независимые. Общее решение однородного уравнения будет иметь вид:

$$\Phi\left((h-\delta_h)^2/N-(y-\delta_y)^2/P\right),$$

$$\frac{k\,(y+\delta_y)}{\sqrt{(P/N)}\,y^2\,(h-\delta_h)}+\frac{F_1}{P}\ln\left|\left((y-\delta_y)+\sqrt{(P/N)}\,(h-\delta_h)\right|\right)=0.$$

Для нахождения частного решения воспользуемся начальными данными Коши. Пренебрегая слагаемыми, эквивалентными δ_h^2, разрешая последнее уравнение относительно k, получаем

$$k=\frac{F_1}{\sqrt{PN}}\,\frac{y^2}{(y+\delta_y)}\,\frac{h^2}{(h+\delta_h)}\times$$

$$\times\left(\ln\frac{(B-\delta_y)+\sqrt{(B-\delta_y)^2-(y-\delta_y)^2+(P/N)\,(h-\delta_h)^2}}{(y-\delta_y)+\sqrt{(P/N)}\,(h-\delta_h)}+\right.$$

$$\left.+\frac{B+\delta_y}{B^2}\exp\left(G_2\,(N/P)\left((B-\delta_y)^2-(y-\delta_y)^2+(P/N)\,(h-\delta_h)^2\right)\right)\right)\times$$

$$\times\left(H\sqrt{(P/N)}-\sum_0^\infty\left((-G_2\,(N/P))^n\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{(\sqrt{(B-\delta_y)^2-(h-\delta_h)^2+(P/N)\,(h-\delta_h)^2})^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}\right)\right).$$

Из вида полученной зависимости следует, что в окрестности $h\to\delta_h$ и $y\to\delta_y$ $k\to\infty$ из-за того, что знаменатель логарифма обращается в нуль. Это является следствием того, что при выводе формулы приходилось делать некоторые допущения, влияющие на решение в окрестности $y=\delta_h$. Подправим знаменатель логарифма так, чтобы, с одной стороны, формула для k давала удовлетворительное значение k в окрестности $h=\delta_h$, $y=\delta_y$, с другой стороны, чтобы это исправление несущественно влияло в области $h\gg\delta_h$, $y\gg\delta_y$. Для этого введем такую поправку ε_δ к знаменателю, чтобы она была существенной только в окрестности $h=\delta_h$, $y=\delta_y$ и несущественной в остальной части решения.

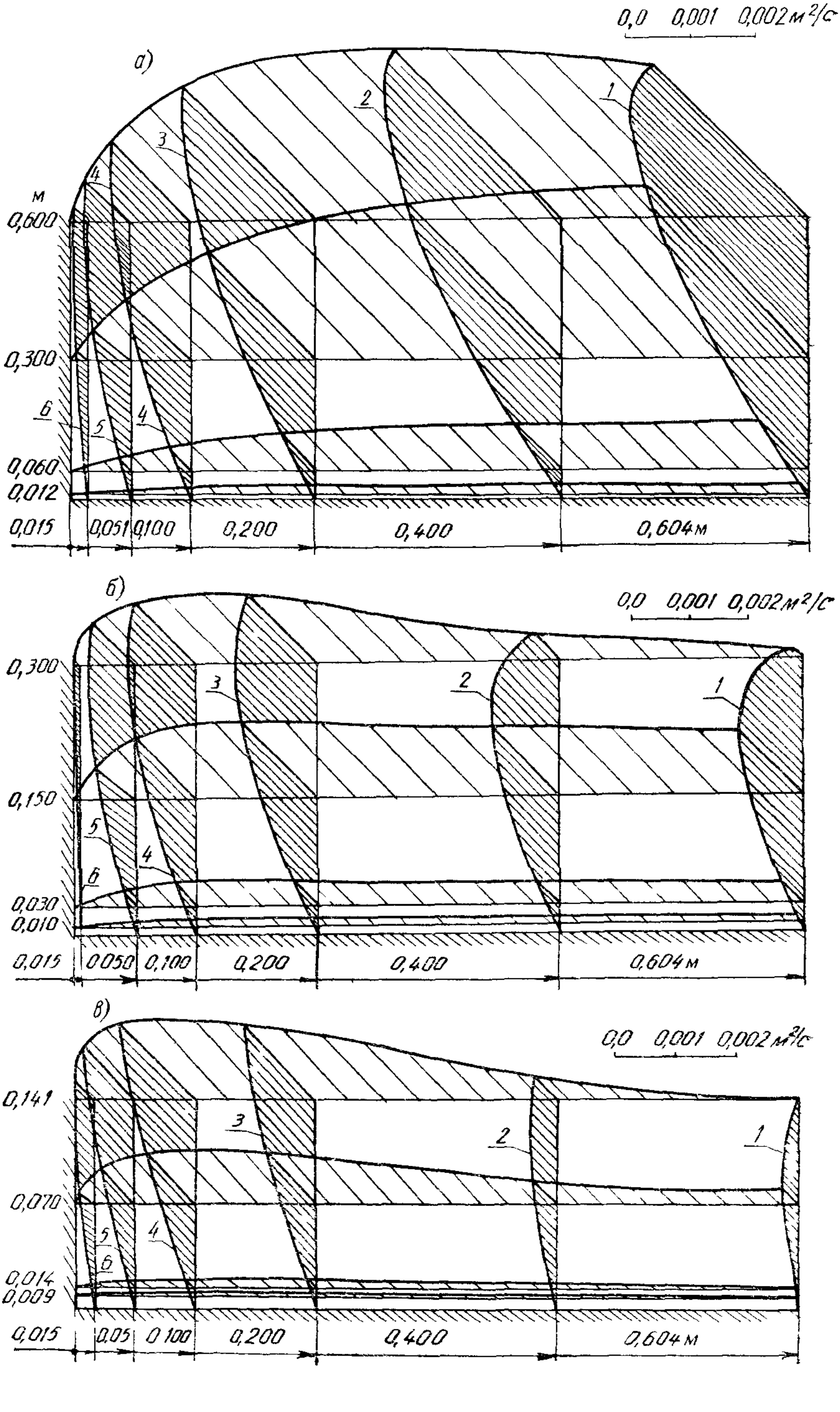
Из экспериментальных данных Н. К. Никитина [208] и формулы для расчета кинематического коэффициента суммарной вязкости на границе пристенного слоя (3.48), а также предварительных расчетов по формуле, полученной для k, следует, что на границе пристенного слоя в плоском потоке и на средней вертикали в потоке ограниченной ширины кинематический коэффициент суммарной вязкости k лишь в несколько раз превосходит кинематический коэффициент молекулярной вязкости ν. Поэтому целесообразно определить поправку ε_δ такой, чтобы в точке $h=\delta_h$, $y=\delta_y$ величина k незначительно превосходила ν, например, чтобы $k=(1\ldots\,1{,}5)\nu$. Естественно, возможны другие варианты корректировки значений k в окрестности указанной точки.

Вводя в знаменатель логарифма поправку ε_δ, учитывая, что $\delta_y\ll B$, и обозначая для краткости записи

$$G_2\frac{N}{P}\left(\frac{1}{B^2}+\frac{2\delta_y}{B^3}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{N}{P}\,\frac{P}{N}\left(\frac{1}{B^2}\right)=\frac{1}{2B^2}=G$$

и

$$(\ldots)=(B-\delta_y)^2-(y-\delta_y)^2+\frac{P}{N}\,(h-\delta_h)^2,$$


0,0 0,001 0,002 м²/с
а)
1
2
3
4
м
0,600
0,300
6
5
4
0,060
0,012
0,015
0,051
0,100
0,200
0,400
0,604 м
б)
0,0 0,001 0,002 м²/с
0,300
3
2
1
0,150
5
4
6
0,030
0,010
0,015
0,050
0,100
0,200
0,400
0,604 м
в)
0,0 0,001 0,002 м²/с
0,141
3
2
1
0,070
5
4
6
0,014
0,009
0,015
0,05
0,100
0,200
0,400
0,604 м

получаем следующую формулу распределения по прямоугольному сечению кинематического коэффициента суммарной вязкости:

$$k = \frac{F_1}{\sqrt{PN}} \frac{y^2}{y + \delta_y} \frac{h^2}{h + \delta_h} \left(\ln \frac{B + \sqrt{(\cdot\ \cdot\ \cdot)}}{(y - \delta_y) + \sqrt{P/N}\,(h - \delta_h) + \varepsilon_\delta} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{B} \exp G(\ldots) \left(H \sqrt{\frac{P}{N}} - \sum_{0}^{\infty} (-G)^n \frac{(\cdot\ \cdot\ \cdot)^{n+1/2}}{n!\,(2n+1)} \right) \right). \qquad (3.58)$$

По полученной формуле выполнены многочисленные расчеты. На рис. 3.12 представлено распределение кинематической суммарной вязкости по прямоугольным сечениям с различным отношением H/B, что позволяет подчеркнуть особенности вычисленного распределения k в сечениях. Из рисунка видно, что у границ k увеличивается почти по линейному закону, дальше его изменение зависит от отношения H/B и от удаления вертикали от стенки. Для областей в середине потока при малых отношениях H/B (рис. 3.12*в*) кинематический коэффициент суммарной вязкости имеет максимум в области, близкой к $H/2$, и при приближении к поверхности уменьшается почти до ν. При увеличении отношения H/B на средней вертикали *1* максимум расположен выше $H/2$. Для вертикалей *3*, *4*, находящихся в средней части полусечения, характер изменения k зависит существенно от отношения H/B, а именно: при $H/B = 1$ и 0,23 (рис. 3.12*в*) вязкость увеличивается к поверхности. Однако при $H/B = 0{,}5$ (рис. 3.12*б*) вязкость у границ сначала возрастает почти линейно, но затем уменьшается к поверхности, достигая максимума в сечении на вертикали *3*.

Для вертикалей, расположенных вблизи боковых границ, k увеличивается почти линейно, достигая максимума у поверхности.

Полученное распределение кинематической суммарной вязкости по сечению в определенной мере объясняет противоречивые мнения дискуссии [121, 190] об увеличении или уменьшении k при приближении к поверхности. Из рис. 3.12 следует, что k может как увеличиваться, так и уменьшаться при приближении к поверхности в зависимости от положения вертикали в сечении.

Количественное сравнение вычисленных распределений кинематического коэффициента турбулентной вязкости с экспериментальными данными, полученными обработкой результатов измерений распределения турбулентных напряжений и осредненных скоростей представлено на рис. 3.13.

Статистическая оценка погрешностей при ограниченном числе экспериментальных данных показала, что среднее значение

Рис 3 12 Распределение кинематического коэффициента суммарной вязкости в потоке прямоугольного сечения, вычисленное по зависимости (3 58), при различных отношениях H/B

а) $H\,B = 1{,}0$ $v = 0\,627$ м с, $i = 0{,}0003125$ *б*) $H\,B = 0{,}5$ $v = 0{,}519$ м с, $i = 0{,}0003125$ *в*) $H/B = 0{,}23$, $v = 0{,}371$ м с, $i = 0{,}0003125$

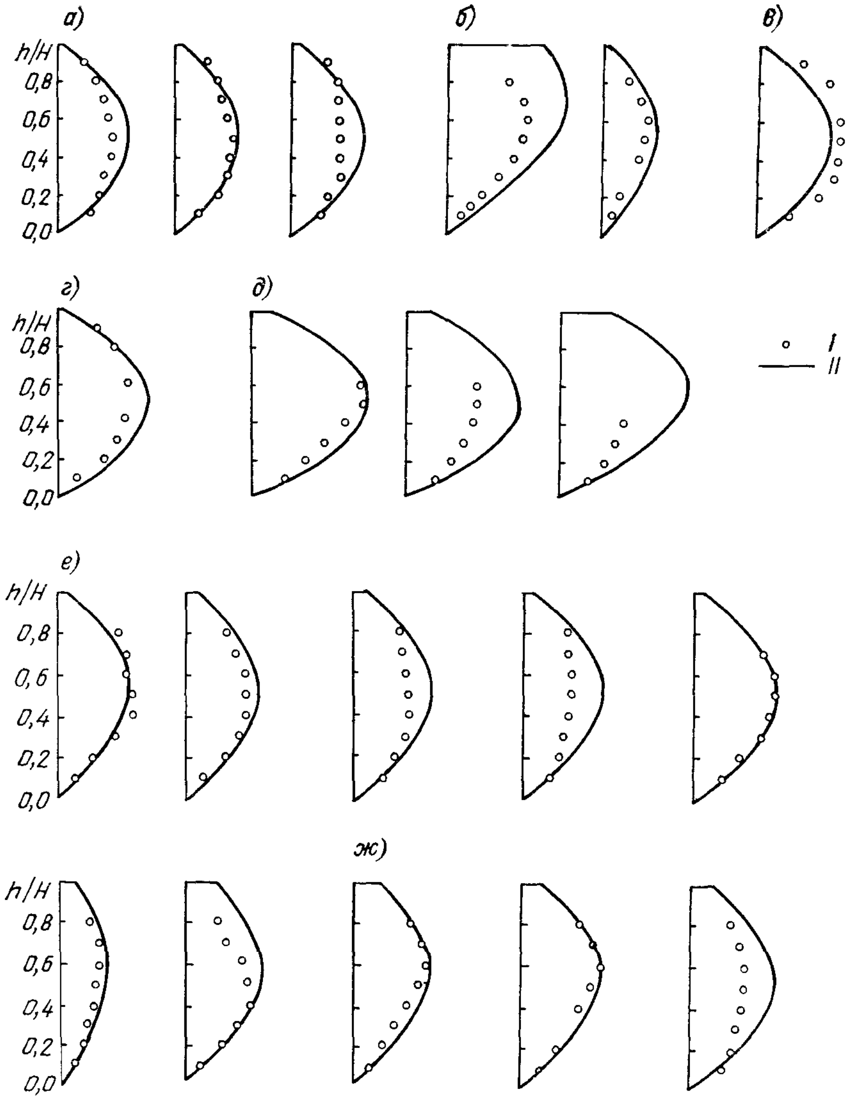


Рис 3 13 Сравнение распределений на средней вертикали в потоке с прямоугольным сечением кинематического коэффициента суммарной вязкости, вычисленного по зависимости (3 58), с результатами обработки экспериментальных данных

а — Конт Белло [136], *б* — И К Никитина [205] *в* — Хинца [341] *г* — Рейхарда [337], *д* — Грасса [337], *е* — А Г Марченко [174], гладкая стенка *ж* — А Г Марченко [174], шероховатая стенка

I — эксперимент, *II* — расчет

относительной погрешности расчета кинематического коэффициента суммарной вязкости на средней вертикали прямоугольного сечения не превышает 25 %, а с доверительной вероятностью $p = 0{,}95$ она не выше 40 %.

Дать статистическую оценку распределения по всему прямоугольному сечению погрешности расчета этого коэффициента по формуле (3.58) из-за отсутствия экспериментальных данных не

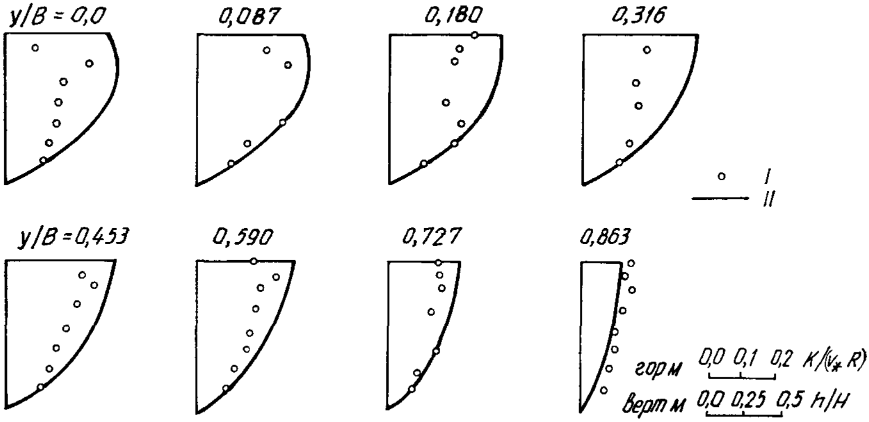


Рис 3 14 Сравнение распределений по прямоугольному сечению кинематического коэффициента суммарной вязкости, вычисленного по зависимости (3 58), с результатами обработки экспериментальных данных Мелминга и Уайтлоу [349]

I — эксперимент, *II* — расчет

имеется возможности. На рис. 3.14 приведены вычисленное и экспериментальное распределения кинематического коэффициента турбулентной вязкости для опыта Меллинга и Уайтлоу (квадратная труба, ось y совмещена с осью симметрии) [349], анализ которых позволяет сделать некоторые выводы. Характер вычисленного распределения по сечению кинематического коэффициента турбулентной вязкости достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными. Экспериментальные значения k в основном меньше вычисленных. Погрешности увеличиваются к осям симметрии сечения. Статистическая оценка среднего в сечении отклонения вычисленных значений k от экспериментальных привела к следующему результату: (29 ± 10) % при доверительной вероятности $p = 0{,}95$. Поскольку неизвестны погрешности измерений, выполнить достоверные оценки погрешностей расчетов по формуле (3.58) затруднительно. По-видимому, можно согласиться с удовлетворительной оценкой характера сходимости вычисленных и экспериментальных значений k, учитывая сложность определения с высокой точностью производных от осредненных скоростей в областях малых их изменений.

Применительно к сечениям трапецеидальной формы решение задачи Коши усложняется, так как многие параметры формул (3.22), (3.23) становятся переменными и соответствующие соотношения более громоздкими, не позволяющими надеяться на получение аналитического выражения для $k(h, y)$. Поэтому приходится привлекать численные методы решения задачи Коши. Чтобы избежать громоздких выкладок, отметим лишь принципиальные моменты расчета кинематического коэффициента суммарной вязкости в сечениях трапецеидальной формы, которые в значительной мере являются общими для более общих сечений. Рассмотрим трапецеидальное сечение канала, откосы которого имеют шероховатость, отличающуюся от шероховатости дна.

В зависимость (3.39) входят первые и вторые частные производные от распределения продольных скоростей. Поскольку в углах трапецеидального сечения шероховатость изменяется скачком, а глубина потока — не монотонно (на отрезке дна постоянна, а на участке откоса изменяется линейно), то в углах откоса аргументы функций (3.22), (3.23) имеют разрыв. Это является недостатком полуэмпирических зависимостей. Естественно, в реальном поле скоростей разрывов нет. Возможны выходы из сложившейся ситуации. Во-первых, можно ввести некоторый параметр, который на вертикали в точке пересечения дна и откосов сглаживает разрыв, плавно сопрягая соответствующие функции. Во-вторых, при численном решении можно не располагать расчетные узлы в окрестности точек, в которых нарушается непрерывность изменения аргументов.

Для решения задач Коши необходимо на какой-нибудь кривой $h=f(y)$ знать распределение суммарной вязкости. Наиболее подходящей для этой цели является ось симметрии потоков, совпадающая в данном случае с гидродинамической осью. По аналогии с сечением прямоугольной формы уравнение (3.39) на оси симметрии трапецеидального сечения можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial h}\frac{dk}{dh}+\Delta uk=-F_1. \tag{3.59}$$

Выражения для первых и вторых производных от поля продольной скорости (3.22) или (3.23) имеют довольно громоздкий вид и поэтому не записаны, тем более что интегрирование уравнения выполняется численными методами. Начальное условие Коши определяется по зависимости (3.48), и уравнение (3.59) решается численными методами по стандартной программе. В результате решения на оси симметрии сечения в области $\delta_h<h\leqslant H$ получают распределение кинематического коэффициента суммарной вязкости.

При вычислении начальных условий Коши на свободной поверхности решалась задача Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dk}{dy}+\Delta uk=-F_1. \tag{3.60}$$

Оно решается аналогично уравнению (3.59). Однако в связи с тем что в окрестности откоса у поверхности, погрешности вычислений с помощью формулы (3.22) или (3.23) максимальны, δ_y вычисляется весьма приближенно. Поэтому в качестве условия Коши принимается значение k на гидродинамической оси при $h=H$, полученное из решения уравнения (3.59).

Таким образом, подготовлены условия Коши для решения задачи о расчете распределения в трапецеидальном сечении кинематического коэффициента суммарной вязкости. Поскольку математическая формулировка задачи Коши вполне аналогична задаче в прямоугольном сечении, она здесь повторяться не будет. Отметим лишь особенности решения.

В общем виде уравнение имеет вид

$$\Delta uk+\frac{\partial u}{\partial h}\frac{\partial k}{\partial h}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial k}{\partial y}=-F_1. \tag{3.61}$$

Как отмечалось, интегрирование данного уравнения и соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений — задачи эквивалентные. Запишем соответствующую систему:

$$\frac{dh}{\partial u/\partial h}=\frac{dy}{\partial u/\partial y}=\frac{dk}{-k\,\Delta u-F_1}.$$

Систему можно переписать в виде:

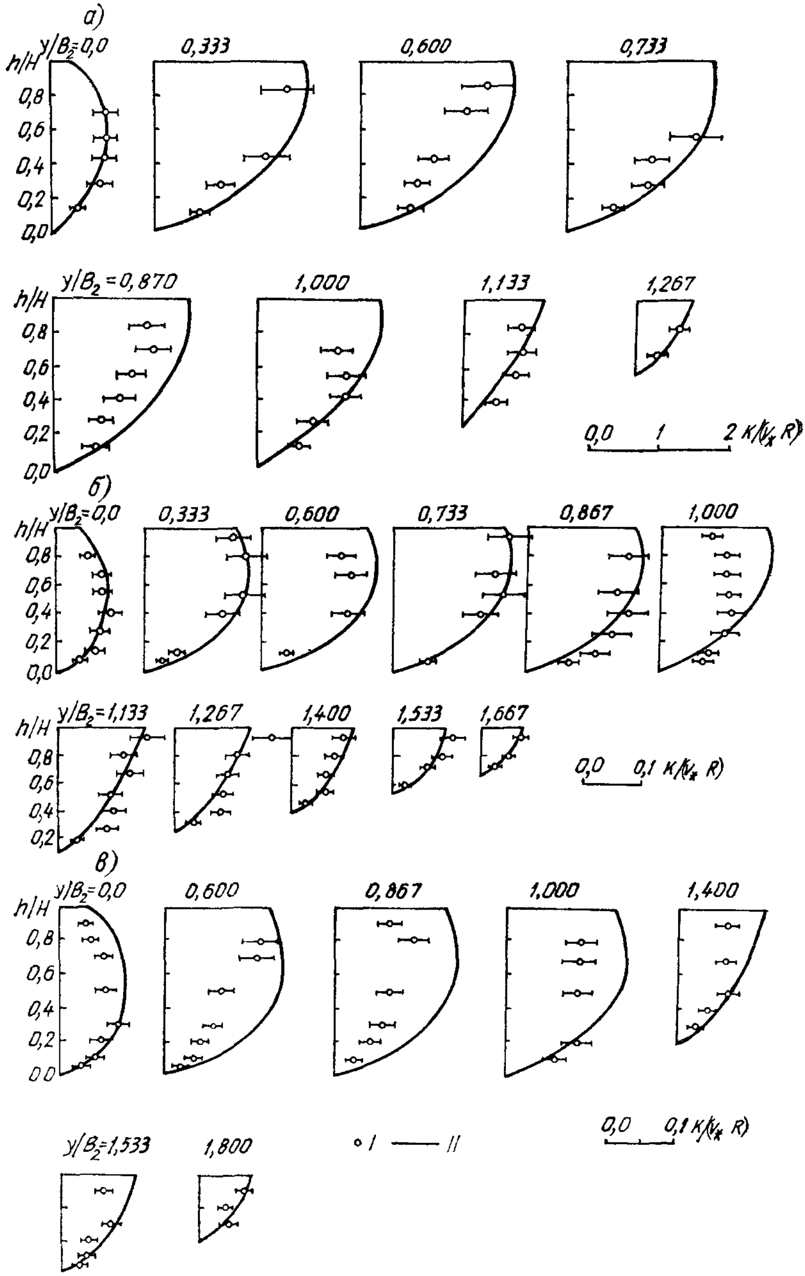
$$\begin{gathered}\frac{dy}{dh}=\frac{\partial u/\partial y}{\partial u/\partial h};\\ \frac{dk}{dh}=-\frac{k\,\Delta u+F_1}{\partial u/\partial h}.\end{gathered} \tag{3.62}$$

В первое уравнение системы (3.62) не входит k, т. е. решение первого уравнения есть проекция на плоскость $(y,\ h)$ характеристик. Исследования показывают, что характеристики, проходящие через каждую точку $(h_i,\ y_j)$, пересекают гидродинамическую ось или свободную поверхность, т. е. линии, на которых известны значения кинематического коэффициента суммарной вязкости,— начальные данные Коши. Обозначим узлы, принадлежащие оси симметрии и поверхности, индексами y_0 и h_0. Таким образом, для системы обыкновенных уравнений (3.62) применительно к решению методом конечных разностей можно сформулировать задачу Коши следующим образом: найти функции $y=f_1(h)$, $k(h,\ y)=f_2(h,\ \varphi_1(h))$, удовлетворяющие системе уравнений (3.62) и принимающие в точках пересечения кривых $y=f_1(h)$ — проекций характеристик — с кривыми $y_0=f_3(h_0)$ и $h_0=f_4(y_0)$ заданные значения $k_0(h_0,\ y_0)$.

Интегрирование уравнений (3.59) и (3.60) для нахождения на оси симметрии и поверхности потока начальных данных Коши выполнялось методом Рунге—Кутта по стандартной программе RK2 [182]. В результате получены начальные условия Коши для системы (3.62) в виде табличных функций:

$$k_0\,|_{y=0}=f\,(h_0);\quad \delta_h<h_0\leqslant H;$$

$$k_0\,|_{h=H}=f\,(y_0);\quad 0<y_0\leqslant B-\delta_y.$$


а)
y/B₂=0,0
0,333
0,600
0,733
h/H
0,8
0,6
0,4
0,2
0,0
y/B₂=0,870
1,000
1,133
1,267
0,0 1 2 K/(V* R)
б)
y/B₂=0,0
0,333
0,600
0,733
0,867
1,000
y/B₂=1,133
1,267
1,400
1,533
1,667
0,0 0,1 K/(V* R)
в)
y/B₂=0,0
0,600
0,867
1,000
1,400
y/B₂=1,533
1,800
∘ I —— II
0,0 0,1 K/(V* R)

Начало координат расположено в точке пересечения оси симметрии с дном.

Пусть трапецеидальное полусечение покрыто сеткой

$$0 \leqslant y_i \leqslant B - \delta_y, \quad \delta_h \leqslant h_i \leqslant H.$$

Алгоритм вычисления кинематического коэффициента турбулентной вязкости в узлах (h_j, y_i) сводится к следующему. Первое уравнение системы (3.62) решается методом Рунге—Кутта по стандартной программе RK1 [182] с выдачей результата в конечной точке (h_0, y_0), принадлежащей или оси симметрии, или поверхности, при начальных условиях (h_j, y_i). Тем самым строится проекция характеристики, проходящей через заданный расчетный узел (h_j, y_i), на плоскость $k=0$. При этом контролируется, куда выходит проекция характеристик. Если $h_0 \leqslant H$, то начальное значение k_0 выбирается по интерполяции численного решения уравнения (3.59), если $h_0 > H$, то по интерполяции численного решения (3.60). Таким образом готовится решение задачи Коши для системы (3.62).

Задача Коши для системы решается модифицированным методом Хемминга по стандартной программе HPCG [182].

Организовав циклы по i и j, можно вычислить значения кинематического коэффициента суммарной вязкости k во всех расчетных узлах сечения.

По изложенному алгоритму Ф. Д. Шниповым написана программа на ЕС ЭВМ и выполнено сравнение с экспериментальными данными.

Распределение по трапецеидальному сечению кинематического коэффициента турбулентной вязкости согласуется с распределением в сечениях прямоугольных форм. Характер изменения k определяется в основном соотношением геометрических размеров сечения. Как правило, над горизонтальным дном максимальное значение k отмечается на некоторой глубине, над откосами, как правило, у поверхности.

Для количественных оценок на рис. 3.15 приведено сравнение вычисленных значений кинематического коэффициента суммарной вязкости с экспериментальными данными Шнипова. Для экспериментальных значений нанесены доверительные интервалы $p=0{,}95$.

Рис 3.15 Сравнение распределения по трапецеидальному сечению кинематического коэффициента суммарной вязкости, полученного из решения уравнения (3.61), с экспериментальными данными Ф Д Шнипова

а) $h=0{,}036$ м, $B_2=0{,}075$ м — полуширина сечения по дну, $m=1$ — заложение откосов, $R=0{,}027$ м, $Q=0{,}0021$ м³/с, $v=0{,}32$ м/с, $v_* = \sqrt{gRi_0}=0{,}015$ м/с *б*) $h=0{,}075$ м, $B_2=0{,}075$ м, $m=1$ $R=0{,}047$ м, $Q=0{,}0073$ м³/с, $v=0{,}43$ м/с, $v_*=0{,}020$ м/с, *в*) $h=0{,}100$ м, $B_2=0{,}075$ м, $m=1$, $R=0{,}058$ м, $Q=0{,}0125$ м³/с, $v=0{,}50$ м/с, $v_*=0{,}022$ м/с

I — эксперимент, *II* — расчет

Вычисленные значения суммарной вязкости, как правило, покрывают доверительный интервал, поэтому есть основания говорить об их удовлетворительном согласовании с экспериментальными, особенно в придонной области и в зоне боковых откосов, где градиенты от полей осредненных скоростей и турбулентных напряжений велики. Отклонения вычисленных значений k в средней части потока больше. Их можно объяснить как относительно большими погрешностями определения экспериментальных значений k (20 %), так и приближенностью зависимостей для расчета продольных осредненных скоростей. Статистическая оценка среднего в сечении отклонения вычисленных значений k от экспериментальных привела к следующему результату· (19 ± 6) % при доверительной вероятности $p=0{,}95$.

Таким образом, выполненные сравнения вычисленных и экспериментальных распределений кинематического коэффициента суммарной вязкости как по прямоугольному, так и по трапецеидальному сечениям позволяют говорить об их удовлетворительном согласовании и, следовательно, о возможности использования вычисленных значений k для определения коэффициентов диффузии и дисперсии, поскольку известные аналитические или полуэмпирические зависимости позволяют в лучшем случае получить лишь порядок оценок [168].

3.7.4. Сравнение вычисленных значений коэффициента продольной дисперсии с опытными данными

Публикаций, посвященных экспериментальному определению коэффициента продольной дисперсии, немного. Известны исследования Фишера [336], Рохусаара и Пааля [278], выполненные в потоках с прямоугольным и трапецеидальным сечениями и однородными и неоднородными границами. Оценки погрешностей экспериментальных исследований в работах не приведены, поэтому отсутствуют доверительные интервалы, характеризующие погрешности измерений, и не имеется возможности воспользоваться ими для оценки достоверности расчета коэффициента продольной дисперсии D, т. е указать, с какой вероятностью доверительный интервал покрывает вычисленное значение D. Поэтому экспериментальное значение коэффициента продольной дисперсии будет приниматься за истинное значение D.

Напомним, что опыты Фишера [336] были выполнены в каналах прямоугольного сечения с однородными границами. Ширина сечения B_0 была равна 0,419 и 0,546 м при глубине H_0, изменяющейся от 0,046 до 0,137 м. Опыты Рохусаара и Пааля [278] были выполнены в канале трапецеидального сечения с шириной по дну $B_0=0{,}272$ м, заложением откосов 1 · 1 и глубиной H_0, изменяющейся от 0,07 до 0,175 м.

Значения D определялись по зависимости (3.32), ее слагаемые $D_y(u)$ — по зависимости (3.33), $D_h(u)$ — по зависимости (3.34).

В указанные зависимости входят составляющие коэффициента турбулентной диффузии. Они определялись следующим образом. Для среднего в сечении кинематического коэффициента турбулентной вязкости $\bar{k}$ в сечениях прямоугольной формы использовалась зависимость (3.58). В случае трапецеидального сечения решение уравнения (3.61) выполнялось численными методами. В результате решения была получена двумерная табличная функция $k(h_i y_i)$. Она умножалась на α_s, интегрировалась по сечению численным методом; результат делился на площадь сечения. Таким образом определялось среднее в сечении значение $D_{fs}(u)$.

Коэффициенты анизотропности составляющих диффузии α_h, α_y и α_s определялись следующим образом. Число Шмидта Sc_t принималось постоянным в сечении и равным 0,9 в соответствии с рекомендуемыми значениями для пристеночных течений [268]. Соотношения интегральных масштабов считались постоянными в сечении: $l_{yh}=1{,}0$, $l_{sh}=3{,}8$ в соответствии с выполненными обобщениями. Соотношения средних квадратических значений пульсационных скоростей a_{sh} и a_{yh} как наиболее изменяющиеся параметры принимались переменными в сечении и вычислялись по обобщенным [25] ранее приведенным зависимостям. Относительные координаты выбирались в соответствующих ячейках, прилегающих к жестким границам, разделенным в потоке линией $\partial u/\partial y=\partial u/\partial h$.

Среднее на вертикали значение горизонтальной составляющей коэффициента диффузии D_{fy} в формуле (3.33) вычислялось интегрированием $D_{f\bar{y}}$ по вертикали и делением на глубину.

Распределение на вертикали вертикальной составляющей коэффициента диффузии принималось равным распределению кинематического коэффициента турбулентной вязкости, умноженному на коэффициент α_h, принятый постоянным.

Результаты расчетов коэффициента продольной дисперсии D сведены в табл. 3.10, в которой приводятся также некоторые характеристики сечения и поверхности границ лотков.

Ряд, состоящий из относительных погрешностей, был обработан статистическими методами. Проверка выборки на присутствие грубых погрешностей по критерию Романовского привела к выбраковке значения относительной погрешности 86,3 %. Оценка относительной погрешности расчета коэффициента продольной дисперсии D при доверительной вероятности $p=0{,}95$ привела к следующему результату: $(7{,}7\pm9{,}3)$ %.

По-видимому, можно говорить об удовлетворительном согласовании — даже лучшем, чем можно было ожидать — вычисленных значений коэффициента продольной дисперсии с экспериментальными данными, особенно если учитывать весьма сложную структуру зависимостей и ограниченные данные для обобщений по некоторым входящим в расчетные формулы параметрам.

Необходимо отметить, что повысить точность оценки погрешностей расчетов возможно методами рандомизации. Однако этому не станем уделять внимания, поскольку, в принципе, методическую составляющую погрешности расчетов D они не уменьшат.

Таблица 3 10

Сравнение результатов расчетов коэффициентов продольной дисперсии D с экспериментальными данными

Автор, номер опыта	Вычисленное значение				Экспериментальное значение $D_э$ м²/с	Относительная погрешность $\delta = \frac{D - D_э}{D_э} \cdot 100\ \%$	H_0 м	Форма сечения; ширина по дну, м; заложение откосов; шероховатость
	$D_y(u)$	$D_h(u)$	$D_{fs}(u)$	D м²/с				
Фишер (1967 г.)								
1200	0,0065	0,0022	0,0017	0,0104	0,00720	44,4	0,046	Прямоугольное; 0,419 м; 1:1; однородная гладкая поверхность
1300	0,0102	0,0046	0,0012	0,0160	0,01690	—5,3	0,091	То же
1400	0,0116	0,0058	0,0011	0,0185	0,01910	—3,1	0,137	„
1500	0,0044	0,0018	0,0011	0,0073	0,0074	—1,4	0,065	„
2600	0,0068	0,0027	0,0021	0,0116	0,0120	—3,3	0,069	Прямоугольное; 0,546 м; 1:1; однородная гладкая поверхность
2700	0,0149	0,0074	0,0022	0,0245	0,0240	2,1	0,128	То же

Пааль и др. (1970 г.)								
1	0,0386	0,0102	0,0029	0,0517	0,0278	86,0	0,106	Трапецеидальное; 0,272 м; 1 : 1; однородная цементная штукатурка
2	0,0323	0,0076	0,0026	0,0425	0,0264	61,0	0,094	То же
3	0,0273	0,0058	0,0023	0,0354	0,0237	49,4	0,082	„
4	0,0193	0,0038	0,0020	0,0251	0,0221	13,6	0,070	„
5	0,0130	0,0022	0,0011	0,0163	0,0187	—12,8	0,048	„
6	0,0194	0,0015	0,00100	0,0219	0,0280	—21,8	0,052	Дно—штукатурка, стенки—щебень диаметром 10...15 мм; неоднородная шероховатость
7	0,0334	0,0024	0,00135	0,0372	0,0396	—6,1	0,067	То же
9	0,0390	0,0043	0,00247	0,0458	0,0444	3,2	0,100	„
11	0,0436	0,0061	0,0030	0,00527	0,0475	10,9	0,121	„
12	0,0556	0,0086	0,0032	0,0674	0,0547	23,2	0,136	„
13	0,0649	0,0115	0,0035	0,0799	0,0622	28,5	0,152	
14	0,0166	0,0012	0,0018	0,0196	0,0205	—4,4	0,073	
15	0,0230	0,0019	0,0023	0,0273	0,0295	—7,8	0,090	
17	0,0321	0,0040	0,0032	0,0393	0,0390	0,8	0,122	
18	0,0406	0,0059	0,0035	0,0500	0,0494	1,2	0,140	
19	0,0445	0,0078	0,0039	0,0562	0,0576	—2,4	0,158	
20	0,0423	0,0097	0,0045	0,0565	0,0565	0,0	0,175	

3.8. Об учете самоочищающей способности водотоков

Вопросы эффективного использования и охраны водных ресурсов рассматриваются в настоящее время в масштабах бассейнов рек и морей. Нормативные документы, регламентирующие охрану от загрязнения поверхностных вод внутренних водных объектов, ориентированы на применение к участкам водных объектов и как бы в статическом состоянии. Например, при определении кратности разбавления расчетные условия по водности и расходам сточных вод нормируются в некотором характерном створе. Не допускается их даже разовое кратковременное превышение. Можно полагать, что при совершенствовании нормативной документации ограничения станут более гибкими, динамичными.

Применительно к условиям эксплуатации ВХС существует необходимость рассматривать процессы, характеризующие качество воды, в динамике [29] в системах водных объектов, связанных между собой гидравлически, т. е. в системах водотоков, включающих проточные водоемы. Необходимы знания о характеристиках качества воды не только в характерных створах и лимитирующих по водности условиях или при расчетных расходах сточных вод, но и в течение продолжительного времени, когда можно ожидать нарушения нормативов качества вод. Необходимо было бы характеризовать качество вод с надежностью доверительными интервалами, поскольку качество воды зависит от многих процессов, носящих вероятностный характер. Все это позволило бы лучше учитывать ассимилирующую способность водных объектов и принимать более эффективные решения при планировании водоохранных мероприятий и управлении водными ресурсами.

Известно, что качество воды оценивается физико-химическими, биологическими и микробиологическими показателями. Возможность использования воды ограничивается предельно допустимыми концентрациями (ПДК) различных веществ в воде и некоторыми общесанитарными свойствами воды. Таким образом, чтобы оценить качество воды, нужно знать прежде всего концентрацию вредных веществ в воде.

Изучение закономерностей изменения концентраций различных веществ в воде показало, что они являются достаточно общими не только для многих, например минеральных и органических, веществ, но и для характеристик многих явлений, например температуры воды, дефицита кислорода и т. п. Поэтому в дальнейшем под примесью с точки зрения математического моделирования будем понимать не только сбрасываемые в поток вещества, но и характеристики некоторых явлений. Такое широкое толкование понятия примеси упрощает терминологию и формулировку задач переноса и сделает их решения более общими. Изложенное приводит к необходимости рассмотрения задачи о переносе примесей в системе водотоков с учетом их трансформации.

В системах водотоков, как правило, существует неустановившееся движение воды, вызванное естественными причинами, управлением водными ресурсами, нестационарным поступлением примесей, зачастую связанным с изменением технологического режима предприятия и управлением сбросами примесей из накопителей. Изменяются во времени и пространстве морфометрические и гидравлические характеристики водотоков, интенсивность физико-химических и биологических процессов, в которых участвуют примеси. Перечисленные причины приводят к изменению в пространстве и времени концентраций примесей и, следовательно, качества воды.

Учет качества воды необходим при разработке схем комплексного использования и охраны водных ресурсов всех уровней, в состав которых, как правило, входят водоохранные мероприятия. Кроме того, разрабатываются специальные водоохранные мероприятия для бассейнов рек, озер и морей. Допустимая степень изменения качества поверхностных вод оценивается по ПДК в воде в соответствии с видом водопользования [184]. Загрязненными считаются участки водных объектов, на которых при расчетной водности превышаются установленные для различных веществ ПДК, приведенные в Правилах [237], дополнительных перечнях ПДК и других источниках [22].

Учет качества воды при эффективном оперативном управлении использования водных ресурсов требует знания как мгновенных локальных значений концентрации примесей в воде, так и осредненных во времени и пространстве значений. Практически невозможно принять эффективное решение по управлению использованием водных ресурсов без знания последствий управления на продолжительность и концентрации примесей. Требование к точности количественных оценок постоянно возрастает, количество ингредиентов, которые необходимо контролировать, увеличивается. Последнее приводит к интенсификации исследований по созданию комплексных, интегральных оценок качества вод [134, 163]. Комплексные оценки сводятся к получению некоторых обобщенных характеристик, определенных по выбранным для репрезентативных примесей показателям, зависящим от концентраций и, как правило, так или иначе связанным с ПДК.

Таким образом, практические проблемы учета качественных характеристик водных ресурсов при эффективном управлении водными ресурсами непосредственно связаны с возможностями расчета изменяющихся в пространстве и времени концентраций примесей.

Как следует из уравнений переноса (2.5), изменение концентрации примеси зависит от механических процессов ее конвективного переноса, рассеяния осредненным и турбулентным движением и от химических, биологических и других процессов, в которых участвует примесь, находящаяся в воде. Механический перенос воздействует на все примеси и определяется в основном морфометрическими, гидравлическими характеристиками водотоков и процессов движения воды в них. Механические составляющие переноса примесей приводят, во-первых, как правило, к уменьшению концентрации через разбавление примесей и, во-вторых, к изменению концентрации через значительную интенсификацию химических, физико-химических, биохимических и биологических процессов. Последние обусловливают изменение концентраций примесей через трансформацию вещества и энергии в водотоке, однако принимается, что они не влияют на механический процесс движения — в пределах концентраций, не изменяющих физическую вязкость и плотность. В этом смысле используются понятия «пассивные примеси», не влияющие на механическое движение, и «неконсервативные примеси», участвующие в процессах трансформации вещества в водотоке.

Хотя кинематика механического движения примеси весьма сложна, поскольку примеси перемещаются осредненным полем скоростей и турбулентными пульсациями в потоке, кинетика процесса взаимодействия с границами и трансформации одних примесей в другие не менее сложна. Скорость взаимодействия и трансформации зависит как от упомянутых механических причин, так и от наличия других примесей, их концентрации, свойств границ, температуры, способности к сорбции, седиментации и множества других факторов, причем, как правило, при этом поток очищается от примесей, восстанавливает свои естественные свойства.

Многие минеральные вещества, находящиеся в водотоке, участвуют в процессах сорбции, интенсивность которых зависит от состава примесей, свойств границ водотоков, гидродинамики течения. Сорбция в системе грунт—вода составляет значительную часть обменных процессов. Концентрация водородных ионов (pH) существенно влияет на сорбционно-десорбционные процессы [85]. Распределение металлов, например, в донных отложениях определяется в основном значениями pH. При снижении pH сорбированные металлы освобождаются, приобретают подвижность, что необходимо учитывать при математическом моделировании концентраций металлов. Некоторые минеральные вещества, взаимодействуя между собой, под воздействием солнечной энергии при определенном температурном режиме могут весьма активно превращаться в органические соединения с обогащением воды кислородом, другие практически не участвуют в химических и биологических взаимодействиях, однако через процессы седиментации изменяют гидродинамику течения и через нее влияют на интенсивность химических и биологических процессов.

Большинство органических веществ участвуют в окислительных процессах химической и биологической природы, в результате которых трансформируются и минерализуются. Некоторые органические вещества практически не участвуют в биохимических процессах и в основном растворяются в воде, рассеиваясь механически.

Фактически в кинетике процесса превращений необходимо описывать трансформацию вещества и энергии в водотоках при взаимодействии веществ между собой, с границами водотока при малых концентрациях примесей, что оказывается существенным для оценки как скорости реакций, так и изменения концентраций. Для детального расчета этих взаимодействий необходимо знать все этапы процесса и механизм взаимодействия примесей, который для нас не может быть вполне однозначным как из-за различных условий протекания процесса взаимодействия, так и под влиянием чаще всего неизвестных нам, но присутствующих в водотоке многих веществ, влияющих на ход процесса. Эти обстоятельства не позволяют, в принципе, с малой погрешностью заранее определять из литературных источников характеристики и скорости протекания процессов трансформации примесей для конкретных участков водотока. Вместе с тем в связи с необходимостью повышения точности расчетов требуются достоверные знания о количественных характеристиках процессов. Это противоречие, пожалуй, невозможно преодолеть изучением кинетики процесса в лабораторных условиях, а выполнение соответствующих измерений на объектах затруднительно. В этом случае целесообразно воспользоваться аппаратом идентификации параметров математических моделей, с помощью которого по наблюдениям в характерных створах водотока за концентрацией примесей в воде можно уточнить характеристики скоростей протекания процессов на участке водотока.

Как уже отмечалось, многообразие веществ, попадающих в водоток, сложность и неопределенность процессов взаимодействия каждого из них с другими, часто неизвестными нам веществами привело к необходимости введения некоторых интегральных, хотя и не универсальных, характеристик качества воды, которые, однако, при расчетах рассматриваются как примеси. Среди них наибольшее распространение получили следующие: биохимическая потребность воды в кислороде L (БПК) как некоторая характеристика свойства части содержащихся в воде нестойких органических веществ подвергаться биохимическому окислению — для хозяйственно-бытовых и сточных вод предприятий переработки сельскохозяйственной продукции ВПК чаще всего можно считать суммарным эквивалентом концентрации органических веществ в воде; дефицит кислорода D_1 как разность между количеством кислорода при полном насыщении воды кислородом при данной температуре и давлении и действительном насыщении воды кислородом; химическая потребность воды в кислороде (ХПК) как некоторый суммарный эквивалент в специфических единицах суммарной концентрации органических веществ, способных окисляться бихроматом.

Изучение процессов превращения отдельных ингредиентов, стадий процессов и изменения интегральных характеристик качества воды позволило установить достаточно общие закономерности для скорости изменения концентрации ингредиентов во времени. Эти закономерности существенно зависят от веществ, участвующих в реакциях, и определяются кинетикой реакций [80, 159]. В простейшем виде закономерности могут быть описаны зависимостью вида

$$\partial p/\partial t = \pm k_0 p^n,$$

где p — концентрация ингредиента примеси в воде; k_0 — коэффициент неконсервативности, характеризующий скорость реакции; n — показатель степени, характеризующий порядок реакции и зависящий от свойств ингредиента.

В уравнении переноса (2.5) часть локальной производной, характеризующая интенсивность процессов в выделенном объеме жидкости, для общности и упрощения записей обозначена через f:

$$f = \frac{1}{A}\,\frac{\partial (Ap)}{\partial t} = \pm k_0 p^n.$$

Необходимо иметь в виду, что скорость реакции может зависеть не только от концентрации данного ингредиента, но и от других веществ, например катализаторов, от температуры, давления и т. п. Поэтому зависимость изменения концентрации во времени может иметь более сложный вид, поскольку обычно с данным ингредиентом реагирует не одна, а несколько примесей, содержащихся в воде одновременно, причем протекание реакции с каждой из них может описываться зависимостью для реакций различных порядков. Кроме того, встречаются реакции, протекающие не по одностадийному механизму, а каждая стадия реакции может быть описана зависимостью различного порядка. Встречаются параллельные, последовательные и обратные стадии. Чаще всего отдельные стадии реакции протекают быстро, а поэтому кажущийся порядок реакции определяется наиболее медленной стадией. Указанные особенности реакций также приводят к целесообразности определения констант, характеризующих скорость реакции, методами идентификации параметров уравнений переноса.

Несмотря на сложности определения констант, они устанавливаются или экспериментальным путем, или идентификацией. Тем самым как для скорости изменения концентрации отдельных веществ, так и для скорости изменения интегральных характеристик качества воды подбираются константы, характеризующие осредненную скорость протекания реакции. Приведем некоторые примеры.

Вода насыщается кислородом как из атмосферы, так и за счет фотосинтеза. Считается, что процесс обогащения воды кислородом за счет фотосинтеза происходит по реакции нулевого порядка, т. е. если необходимо учитывать в уравнении переноса обогащение воды кислородом за счет фотосинтеза, то

$$f = k_ф.$$

Аналогично учитывается количество кислорода, поступающего с ливневыми, эрозионными водами и поглощаемого донными отложениями

В реакциях нулевого порядка предполагается, что скорость реакции в первом приближении не зависит от концентрации ингредиента, а определяется, например, как при фотосинтезе, энергией поглощения света. В других случаях скорость реакции зависит от количества катализатора и т. п. Заметим, однако, что процесс фотосинтетической аэрации при более детальном рассмотрении зависит от десятков параметров и описывается более сложными зависимостями [23]. Тщательный учет многочисленных особенностей фотосинтетической аэрации в кислородном балансе становится весьма существенным и часто даже определяющим фактором качества воды. Это происходит, например, вследствие увеличения поступления биогенных веществ с сельскохозяйственных угодий и замедления течения воды в водотоках при регулировании водного режима. Вместе с тем на ограниченных участках водотоков, где фитопланктон не находит существенного развития, при залповых сбросах, низкой температуре, когда выделение кислорода при синтезе органического вещества происходит не интенсивно, окислительная минерализация органических веществ идет с поглощением кислорода.

Большинство органических веществ, попадая в поток, претерпевают превращения и минерализуются, причем изменение концентрации органического вещества описывается уравнением первого порядка

$$f = -k_0 p.$$

Коэффициенты неконсервативности различных органических веществ устанавливают экспериментально и обычно в статических условиях. Имеются предложения по более детальному учету реальных условий коэффициентами неконсервативности. Предлагается, например, считать коэффициент биохимического окисления, состоящим из двух слагаемых: из статической составляющей, определяемой стандартными скляночными экспериментами, и динамической составляющей, зависящей от морфометрических и гидравлических характеристик водотока и других факторов, причем динамическая составляющая может во много раз превосходить статическую. Имеются предложения по определению динамической составляющей [46, 219]. Для многих веществ из-за сложного их состава становится невозможным определение единого коэффициента неконсервативности. Например, для некоторых нефтепродуктов устанавливаются различные коэффициенты для каждого отдельного углеводорода.

Из интегральных обобщенных характеристик примесей в воде чаще всего используют биохимическую потребность воды в кислороде L и дефицит кислорода D_1. Начиная с работ Фелпса и Стриттера [367, 368], скорости реакции для L и D_1 описываются уравнениями первого порядка:

$$f = -k_1 L;$$

$$f = k_2 (D_H - D_O),$$

где k_1 — коэффициент неконсервативности, характеризующий скорость потребления кислорода при окислении органических веществ; k_2 — коэффициент аэрации, характеризующий скорость насыщения воды кислородом.

Процессы окисления органических веществ с потреблением кислорода и насыщения воды кислородом из атмосферы протекают одновременно и действуют в противоположных направлениях, поэтому при расчете концентрации растворенного кислорода используется зависимость

$$f = -k_1 L + k_2 (D_H - D_O).$$

При необходимости учета продукции кислорода за счет фотосинтеза, потребления кислорода донными отложениями, снижения концентрации загрязняющих веществ в результате адсорбции и осаждения, внесения загрязняющих веществ за счет ливневых вод уравнение можно записать в виде

$$f = -k_1 L + k_2 (D_H - D_O) - k_3 D_O + k_{ф} + k_{л},$$

где k_3 — коэффициент, характеризующий скорость адсорбции; $k_{ф}$ — функция, характеризующая интенсивность увеличения концентрации кислорода за счет фотосинтеза; $k_{л}$ — функция, характеризующая интенсивность увеличения органических веществ в водотоке за счет ливневых процессов смыва.

В связи с интенсивным развитием ядерной энергетики особого внимания заслуживает изучение воздействия АЭС на водные объекты. Поэтому задача о переносе радионуклидов в водотоках имеет большое значение. Вместе с воздействием на перенос механических процессов особую роль начинают играть процессы сорбции радионуклидов на взвешенных частицах и донных отложениях, перенос гидробионтами, где радионуклиды преимущественно накапливаются. Установлено, что накопление происходит в небольшом слое донных отложений, а их содержание в воде остается низким. Поэтому, рассчитывая процесс по средним концентрациям радионуклидов в воде, можно получить недостоверную информацию о действительном превышении концентрации в водотоке над нормируемыми по средним значениям — важен эффект, представленный на рис. 5.13 *б*. Необходимо дисперсию и перенос в данном случае считать не для сечения в целом, а для различных его частей в соответствии со свойствами примесей. В работе [145, 354] предложены новые нелинейные модели миграции радионуклидов.

На многие характеристики процесса трансформации влияет температура. Известно, что влияние температуры на скорость реакции описывается эмпирическим уравнением Аррениуса, которое имеет вид показательной функции. Обычно при расчете концентраций неконсервативных веществ и БПК коэффициенты неконсервативности в зависимости от температуры корректируются по следующим эмпирическим зависимостям [267]:

при $T = 5 \ldots 30\,°C$

$$k_1(T) = k_1(20\,°C)\, 1{,}047^{(T-20)};$$

при $T = 0 \ldots 5\,°C$

$$k_1(T) = k_1(20\,°C)\left(1{,}12\,(T+1)^{-0{,}038}\right)^{(T-20)}.$$

Поскольку при расчете трансформации практически всех веществ и интегральных характеристик качества воды необходимо учитывать температуру, именно ее необходимо определять перед расчетом концентраций. Интенсивность изменения температуры описывается уравнением реакции первого порядка

$$f = -k_T (T - T_0).$$

Отметим, что практически все коэффициенты, характеризующие скорости процессов трансформации ингредиентов, зависят не только от температуры, но и от морфометрических и гидравлических характеристик течения [219, 221], причем последние могут ускорить процессы трансформации некоторых примесей на порядок. Отсутствует возможность детального описания имеющихся зависимостей для учета гидравлических факторов в различных условиях течения. Большое количество сведений, необходимых для учета влияния гидравлических и температурных факторов на процессы трансформации ингредиентов при математическом моделировании переноса, имеется в литературных источниках [22, 23, 46, 60, 85, 88, 116, 145, 218, 219, 227, 237—239, 266, 267, 304]. В этих работах приводятся коэффициенты неконсервативности для большого количества примесей. Однако круг веществ, для которых неизвестны коэффициенты неконсервативности, расширяется. Сведения о них не полностью систематизированы и рассредоточены по многим научным изданиям. Поэтому их поиск затруднен. Аналогичная ситуация сложилась с ПДК. Хотя основные ПДК установлены [22, 237], список веществ, для которых это необходимо сделать, ежегодно дополняется, а значения ПДК уточняются. В связи с этим очень важно было бы иметь доступную всем обновляющуюся базу данных о коэффициентах неконсервативности и ПДК на магнитных носителях, возможно в составе автоматизированной информационной системы «Гидрохимия» [227].

Особенностью учета самоочищающей способности при математическом моделировании переноса примесей является неопределенность многих факторов, влияющих на процессы самоочищения. В водотоке могут оказаться неизвестные нам вещества, участвующие в реакции, катализаторы. В связи с этим и некоторые стадии реакции могут быть неизвестны. На реакции оказывают влияние температурный режим, гидродинамика течения, освещенность и другие факторы, сведения о которых могут быть определены с большой погрешностью. Кроме того, коэффициенты неконсервативности и другие параметры, характеризующие процессы трансформации примесей, получены обычно в лабораторных стационарных условиях, в то время как использовать их приходится в реальных условиях движущегося потока. Изложенное приводит к тому, что значения коэффициентов уравнений, характеризующих скорость реакций в процессах самоочищения в реальных условиях, применительно к конкретному участку водотока могут рассматриваться как ориентировочные, которые можно использовать лишь для оценок.

Хотелось бы обратить внимание на то, что причиной этого являются не субъективные факторы, а чрезвычайная сложность процессов самоочищения и их некоторая неопределенность в связи с неполным знанием состава воздействующих факторов. Поэтому точнее было бы говорить о параметрах, характеризующих самоочищающую способность в вероятностном смысле: как о математическом ожидании характеристики, имеющей весьма широкий доверительный интервал. Означает ли это, что учитывать самоочищающую способность водотоков в конкретных случаях с достаточной точностью невозможно? Нет, не означает.

При наличии некоторого минимума наблюдений на конкретном участке водотока методы математического моделирования процесса переноса позволяют средствами идентификации математических моделей определить с необходимой точностью параметры, интегрально характеризующие самоочищающую способность на данном участке — а именно это обычно и требуется — фактически без знания многих деталей химических, физико-химических, биохимических и биологических процессов, происходящих в водотоке. Результаты расчетов переноса примесей в этом случае лучше согласуются с наблюдениями из-за переменности параметров, определенных применительно к конкретным участкам водотоков методом идентификации, чем если бы использовали усредненные значения параметров по литературным данным. Краткое описание алгоритма идентификации будет приведено в следующем подразделе.

3.9. Идентификация параметров математических моделей

Создание математической модели системы водотоков требует использования в качестве исходной морфометрической, гидравлической и гидрологической информации. Ее получение с приемлемой точностью применительно к водотокам ВХС связано с большими трудностями, не только вызванными большими объемами работ, но и имеющими принципиальный характер. Действительно, водоток при моделировании представляется характерными сечениями. Между характерными сечениями выполняется интерполяция параметров модели, например ширина водотока интерполируется линейно. Однако очевидно, что в промежуточных расчетных узлах реального водотока, строго говоря, ширина не изменяется линейно. Очевидно, что увеличение числа характерных створов ничего принципиально нового не внесет. Поэтому разрабатываются статистические методы получения морфометрической и гидравлической информации [285], позволяющие определять осредненные вдоль водотока характеристики границ водотока.

Требования к достоверности морфометрической информации обычно высокие, так как неточности в ее задании ведут к погрешностям определения параметров уравнений, объемов аккумуляции стока и как следствие к погрешностям решения уравнений. Требования обычно обеспечиваются достаточно детальными топографическими материалами, а при необходимости — инструментальными съемками и надлежащей статистической обработкой [30, 285]. Очевидно, что, в принципе, морфометрические характеристики могут быть определены сколь угодно точно.

В отличие от морфометрической гидравлическую информацию уточнить путем непосредственных измерений на объекте не представляется возможным. Коэффициент шероховатости, характеризующий в гидравлическом отношении поверхность ложа водотока, обычно измерить нельзя. Он является некоторой интегральной характеристикой, включающей различные свойства поверхности: относительные размеры и расположение неровностей рельефа, закустаренность, залесенность и т. п. Коэффициент шероховатости является некоторой статистической характеристикой, численные методы определения которой к настоящему времени недостаточно разработаны. Известные таблицы [119, 176, 233, 287, 289, 308, 309] позволяют по словесной характеристике поверхности водотока установить примерное значение коэффициента. Пределы изменения коэффициентов применительно к одному и тому же описанию существенно различны. Например, для поверхностей, покрытых растительностью, они различаются в 2—3 раза, поэтому на выбор значения коэффициента шероховатости значительно влияет субъективный фактор. Коэффициент шероховатости реальных водотоков изменяется в пространстве и времени. Учет этого изменения существен с точки зрения уточнения режимов изменения уровней и расходов воды, определения их максимальных значений.

Важен учет изменения коэффициента шероховатости по ширине и длине водотока. Предположим, что принято решение о защите поймы от затопления. Дамбы обвалования располагаются обычно недалеко от русла реки с тем, чтобы защитить большие площади. При выполнении расчетов водного режима реки в обвалованном состоянии для определения отметок дамб и оценки их устойчивости необходимы знания коэффициентов шероховатости в междамбовом пространстве. Однако их невозможно получить по наблюдениям за естественным водным режимом, поскольку известными методами может быть определен лишь приведенный коэффициент шероховатости для всего сечения воды по руслу и пойме. Однако коэффициенты шероховатости защищаемой поймы обычно больше коэффициентов шероховатости русла и прилегающей к нему части поймы. Поэтому целесообразна идентификация не только приведенных, но и локальных значений коэффициентов шероховатости.

Также затруднительно учесть известными автору методами изменение коэффициента шероховатости по глубине, длине водотока и во времени. Действительно, при повышении уровня воды затапливаются все бóльшие участки пойм обычно с повышенной шероховатостью, поэтому приведенный коэффициент шероховатости изменяется с глубиной. На участке между гидрологическими постами часто имеется несколько характерных сечений с различными коэффициентами шероховатости, т. е. шероховатость меняется по длине. Кроме того, процесс прохождения паводков в системах водотоков весьма продолжителен и может достигать нескольких месяцев, участки водотоков могут располагаться в различных климатических условиях. Это приводит к значительному во времени изменению коэффициентов шероховатости за счет растительности. Известные методы [13, 107] не позволяют учесть эти существенные факторы. Поэтому предлагается уточнение методик идентификации коэффициентов шероховатости с тем, чтобы стало возможным уточнение локальных по периметру значений коэффициентов шероховатости и учет их изменения по длине водотока и во времени.

Идентификация приведенных коэффициентов шероховатости выполняется на участке системы водотоков, в граничных створах которых имеются гидрографы и графики изменения уровней. Выбираются моменты времени, когда нестационарность течения мала. На участке выполняется расчет неравномерного движения. Возможная невязка стока распределяется в виде бокового притока Если вычисленный уровень не совпадает с измеренным, то выполняется уточнение приведенных коэффициентов шероховатости до тех пор, пока с заданной погрешностью уровни совпадут. При этом предполагается линейное изменение коэффициента шероховатости, пропорциональное его значениям в каждом створе. Естественно, при этом контролируется выход значений приведенных коэффициентов шероховатости за верхний и нижний пределы возможных их изменений, устанавливаемых заранее специалистом, выполняющим расчет. Если такой выход случается в каком-либо характерном створе, то значение коэффициента фиксируется и при дальнейшем уточнении его изменение в данном створе не допускается. Если такое происходит во всех характерных створах между гидрологическими постами, то расчет останавливается и дается сообщение, что возможности идентификации по коэффициенту шероховатости исчерпаны и необходимо искать погрешности в задании морфометрической или гидрологической информации. Кстати, такие случаи встречаются достаточно часто. При этом, как правило, обнаруживается, что при задании исходной информации о водотоке были упущены весьма существенные его особенности: характерные створы по вновь построенным мостам, дамбам и т п.

Такие уточнения приведенного коэффициента шероховатости выполняют для двух-четырех моментов времени, охватывающих практически весь период расчета неустановившегося течения.

Если по наблюденным гидрографам и графикам изменения уровней не удается выбрать характерные моменты времени, для которых на участке водотока течение можно считать неравномерным и, следовательно, нестационарность несущественна, то идентификацию по коэффициенту шероховатости выполняют до удовлетворения критерия в среднеквадратическом смысле, но по уравнениям неустановившегося движения [48] в системе водотоков между граничными створами.

При идентификации с помощью уравнений неустановившегося движения обычно возникает задача о назначении начальных условий Одним из возможных решений является назначение в качестве начальных условий решения уравнения неравномерного движения для момента времени, отстоящего от того момента, при котором требуются начальные условия, на интервал, больший, чем определяемый из характеристического треугольника.

Таким образом, процесс идентификации математической модели движения воды по коэффициенту шероховатости сводится практически к следующему алгоритму.

Выбирают участки с граничными створами и характерные моменты времени, в которые желательно выполнить идентификацию (их должно быть не менее двух). Систему водотоков разбивают граничными створами на подсистемы, для которых выполняют идентификацию. Для каждой подсистемы моменты времени, в которые выполняют идентификацию, могут быть разными, но охватывающими весь расчетный интервал по времени. Моменты времени фиксируют для соответствующих подсистем.

Используя алгоритм расчета неравномерного движения по критерию совпадения уровней или, если процесс существенно нестационарный, алгоритм расчета неустановившегося движения по критерию минимума среднего квадратического отклонения их значения для небольшого интервала времени вокруг заданного момента идентификации, устанавливают необходимость изменения коэффициента шероховатости. Если уровни в граничном створе не согласуются, то определяют значение Δn_{n+1}, на которое целесообразно изменить коэффициент шероховатости в граничном створе. Затем организуют итерационный процесс, используя зависимость

$$\Delta n_{n+1} = n_n (1 - h_в/h_h),$$

где n_n — коэффициент шероховатости в граничном створе в предыдущей итерации; $h_в$ и h_h — соответственно вычисленная и наблюденная глубина в граничном створе.

Затем вычисляют средневзвешенное по длине расчетного участка значение коэффициента шероховатости:

$$n_в = n_i l_i / \sum l_i,$$

где n_i — приведенный коэффициент шероховатости при n_n в данном характерном створе; l_i — расстояние, отнесенное к данному характерному створу (обычно равно сумме расстояний между ближайшими створами расчетного участка, деленной пополам); $\sum l_i$ — расстояние между граничными створами

Поправки к значениям приведенного коэффициента шероховатости в других i-х характерных створах $\Delta n_{n+1\,i}$ расчетного участка пропорциональны поправке Δn_{n+1} в граничном створе и отношению вычисленного при предыдущей итерации значения $n_{вn}^{i}$ приведенного коэффициента шероховатости в i-м створе к средневзвешенному на участке значению $n_в$, т. е.

$$\Delta n_{n+1,\,i} = \Delta n_{n+1} n_{вni}/n_в.$$

То есть поправка в i-м створе вводится таким образом, что коэффициенты шероховатости изменяются пропорционально их отношению к средневзвешенному значению. Было принято, что

Таблица 3.11

Отношение идентифицированных коэффициентов шероховатости к неидентифицированным

Дата идентификации	Река							
	Припять	Птичь	Случь	Горынь	Уборть	Ясельда	Стырь	Стоход
25.03.1976	1,8	4,5	4,1	5,8	3,6	3,8	6,5	4,2
17.04.1976	1,4	2,3	2,8	1,7	2,2	2,6	4,9	2,9

поправка $\Delta n_{n+1,\,i}$ постоянна для всех уровней выше бровки и линейно уменьшается до нуля для уровней ниже бровки. Опыт расчетов показал, что итерационный процесс быстро сходится.

Распространяя указанный алгоритм на всю систему водотоков, получаем уточненные значения приведенного коэффициента шероховатости для всей системы водотоков, точнее для той ее части, для которой имеются данные наблюдений за водным режимом.

Выполняя указанную операцию, например, для моментов времени, соответствующих разным фазам развития растений или сезонам, получаем уточненные значения коэффициентов шероховатости для различных характерных моментов времени, т. е. закономерность изменения коэффициента шероховатости в течение расчетного интервала времени и в каждом характерном створе.

Опыт идентификации показывает, что идентифицированные значения коэффициента шероховатости [291] значительно превосходят значения, выбранные первоначально. Естественно, что предварительный выбор коэффициентов шероховатости должен быть обоснован. Приведем заимствованную из работы А. П. Станкевича [291] таблицу отношений идентифицированных коэффициентов шероховатости к предварительно выбранным с различной степенью обоснованности, поскольку эти данные имеют самостоятельное значение (табл. 3.11).

Из данных таблицы следует, что для р. Припяти, экспедиционное обследование которой было выполнено с помощью вертолетов, принятые по табличным данным значения коэффициентов шероховатости были занижены в 1,4—1,8 раз. Однако для притоков, где коэффициент шероховатости назначался по старым картографическим материалам, различия идентифицированных и заданных коэффициентов шероховатости были значительно больше и тем больше, чем менее изученным оказывался водоток (р. Стырь). Эти обстоятельства должны предостеречь от соблазна назначения коэффициентов шероховатости по устаревшим и недостоверным данным без экспедиционных наблюдений.

Отметим, что значительно большие, чем можно было ожидать, вычисленные значения коэффициентов шероховатости могут быть объяснены и тем обстоятельством, что при выбранном методе идентификации параметров уравнений все погрешности задания морфометрических и гидрологических данных, неточности использованных при математическом моделировании системы водотоков зависимостей для определения параметров математических моделей водных объектов, погрешности численного метода решения уравнений фактически отнесены на значение коэффициента шероховатости. Вместе с тем, если выполнить идентификацию параметров, это не приведет, как показал опыт расчетов (см., например, п. 5.1 и 5.2), к большим погрешностям вычислений характеристик процесса моделирования.

Таким образом, имеются возможности в различные моменты времени, выбранные для идентификации, изложенными методами уточнить приведенный коэффициент шероховатости в каждом характерном створе. Это значение коэффициента будет соответствовать некоторому уровню воды, который был установлен при идентификации. Для части сечения водотока, расположенного ниже характерного уровня, имеются в исходной информации о водотоке координаты поперечного сечения и локальные по участкам периметра коэффициенты шероховатости. По этим исходным данным можно вычислить неидентифицированное значение приведенного коэффициента шероховатости изложенными выше методами. Оно, вероятнее всего, не будет равно идентифицированному. Тогда, увеличивая или уменьшая пропорционально неидентифицированные значения локальных коэффициентов шероховатости, можем, например методом итераций, определить такие локальные значения коэффициента шероховатости, что вычисленное по ним значение приведенного коэффициента шероховатости будет равно идентифицированному. Эти локальные значения коэффициентов шероховатости принимаются за идентифицированные. Найдя отношение идентифицированного значения приведенного коэффициента шероховатости к неидентифицированному и умножив на него локальные значения коэффициента шероховатости для части периметра выше характерного расчетного уровня данного сечения, получим идентифицированные локальные коэффициенты шероховатости. Следовательно, в итоге идентификации получают уточненные локальные коэффициенты шероховатости. Они позволяют вычислить, во-первых, уточненные идентифицированные параметры математических моделей движения и частично переноса (коэффициент дисперсии) и, во-вторых, идентифицированные математические модели для частей сечений, например в междамбовом пространстве (задание коэффициентов шероховатости откосов дамб возможно с малой относительной погрешностью без процедуры идентификации).

Таким образом получены идентифицированные локальные значения коэффициента шероховатости в характерных сечениях и изменение их во времени, т. е. охарактеризовано изменение коэффициентов шероховатости в пространстве и времени.

Изложенные методики идентифицированного приведенного и локальных коэффициентов шероховатости, параметров математических моделей движения и переноса использовались при моделировании процессов на многих объектах. Некоторые результаты их применения будут описаны в главе 5.

3.9.1. О возможности идентификации характеристик самоочищающей способности водотоков

Создание математических моделей процесса переноса примесей в системах водотоков затрудняется многими обстоятельствами. Прежде всего весьма трудно установить наличие, особенно в небольших количествах, в водотоке многих веществ, которые или взаимодействуют непосредственно с веществом данной примеси, или являются катализатором в данной реакции. Практически всегда наряду с процессами самоочищения происходят процессы механического разбавления и выделить экспериментальным путем в природных условиях изменение концентрации за счет процессов самоочищения весьма трудно.

В таких условиях описывать протекание сложнейших химических, физико-химических, биохимических, биологических процессов и взаимодействий вызывает значительные трудности, вызванные неточным знанием явления: этапов реакций, участвующих ингредиентов, температурного режима. Детальное экспериментальное исследование процессов взаимодействия практически невозможно, по крайней мере затруднительно. В такой ситуации существенную помощь в установлении характеристик самоочищающей способности могут оказать методы математического моделирования. Их применение требует достоверного знания параметров, характеризующих механическую составляющую переноса, и некоторого минимума наблюдений за концентрацией примесей.

Действительно, если выполнить идентификацию параметров математической модели движения, можно изложенными выше методами получить с хорошей точностью расходы, уровни воды и идентифицированные значения коэффициентов дисперсии. Затем, если измерить температуру воды в двух створах, то, используя программу расчета переноса примесей, можно путем решения прямых задач подобрать коэффициенты температуропроводности такими, чтобы режимы изменения температуры воды в нижнем и верхнем створах были равны наблюденным. Но тогда и установленный таким образом коэффициент будет идентифицированным, позволяющим рассчитать температуру воды методами математического моделирования при различных режимах сброса воды и примесей без детального изучения процесса теплообмена.

Поступая аналогично с расчетом биохимической потребности воды в кислороде, можем установить коэффициент скорости окисления органических веществ k_1 с учетом влияния температуры и разбавления, а затем последовательно коэффициент скорости атмосферной аэрации k_2. Этот процесс можно продолжить применительно к другим примесям.

Таким образом, метод идентификации параметров математических моделей позволяет по наблюденным концентрациям примесей в двух характерных створах восстановить последовательно коэффициенты скорости протекания процессов взаимодействия примесей в конкретных условиях водотока, так сказать, по интегральной характеристике, т. е. без детальных экспериментальных исследований собственно химических, физико-химических, биохимических и биологических процессов, в которых участвует примесь. Идентификация существенно уточняет, упрощает оценку самоочищающей способности, делает возможным моделирование процесса переноса в системах водотоков, однако предполагает наличие программного обеспечения для идентификации параметров, характеризующих скорости процессов самоочищения, и минимум экспериментальных наблюдений за режимом изменения концентрации примеси, по крайней мере на границах участка водотока.

3.10. Пример таблицы параметров характерного сечения

В данной главе изложены методики расчета и идентификации основных параметров математических моделей водотоков. Параметры определяются для характерных сечений водотоков. Среди них имеются такие, которые не потребовали разработки специальных методик. К таким параметрам относятся ширина водного сечения B_0, коэффициент извилистости водотока E_1 и синус угла наклона оси s к горизонту на участке водотока. Для других параметров потребовалось создание специальных методик, позволяющих определять их по простейшим первичным данным о характерном сечении водотока. К таким параметрам относятся следующие: ширина (B) и площадь (A) живого сечения, приведенный коэффициент шероховатости n, корректив количества движения β, модуль расхода K, модуль коэффициента продольной дисперсии $|D|$, включающий локальные и средние коэффициенты продольной дисперсии и диффузии.

Кроме названных определяют вспомогательные параметры, служащие для исследований, организации и упрощения вычислений. К ним относятся глубина (H), ширина (B) гипотетического прямоугольного сечения, производная, обозначенная кратко DK.

Разработанные методики, созданные алгоритмы и программы позволяют по натурным и простейшим данным — координатам поперечного сечения и примерным значениям коэффициента шероховатости — определять для различных (до 10) характерных уровней перечисленные параметры математических моделей движения и переноса. Заметим, что фиксируются другие характеристики сечения, позволяющие установить расположение сечения на графсхеме, следить за ограничениями на исходную информацию и т. п.

В результате расчетов с помощью созданного программного обеспечения получаем параметры математической модели, упрощенный пример представления которых приведен в табл. 3.1. Таблицы вычисляются для каждого характерного сечения системы водотоков, упорядочиваются по расстоянию от корня графа (обычно от устья водотока), образуя математическую модель системы водотоков. Применяя ее и описанные в главах 1 и 2 модели, можно создавать одномерные математические модели движения воды и переноса примесей в системах водотоков, используя, естественно, комплексы программ, реализующие вычисления по описанным методам и алгоритмам.

4 АВТОМАТИЗАЦИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В данной главе излагаются основные особенности математического моделирования движения воды и примесей в сложных системах водотоков, связанные с необходимостью обработки большого количества исходной информации, сложностью вычисления параметров математических моделей водотоков, большим количеством результатов моделирования и необходимостью их специальной подготовки к инженерному анализу. Дается краткое описание комплекса программ, реализующих технологию автоматизированного моделирования. Обсуждаются особенности выбора расчетных шагов по пространству и времени с учетом характера информации о системе водотоков.

4.1. Необходимость создания и условия применения технологии автоматизированного моделирования

Круг практических задач, эффективное решение которых возможно только на основе знаний о движении воды и переносе примесей, интенсивно расширяется. Знания водного режима систем водотоков в настоящее время нужны не только для решения традиционных вопросов проектирования гидротехнических объектов, прогнозирования процесса прохождения паводков, хотя и здесь объемы работ и сложность объектов увеличиваются. Возрастает потребность решения многочисленных задач, связанных с повышением эффективности оперативного управления водными ресурсами. Решение таких задач практически только начинается, хотя в последнее время в этой области имеются существенные достижения [11, 12, 127, 173, 269]. Многие задачи, в особенности многокритериальные, еще не имеют математической формулировки. Однако эффективное использование, экономия водных ресурсов непосредственно зависят от успешного решения этих задач. Возможность быстрого и без больших затрат математического моделирования процессов движения воды и переноса примесей в водотоках специалистами, владеющими лишь основами моделирования и содержательной стороной задачи, будет играть в таких задачах существенную роль. Это одна из важнейших причин необходимости более высокого уровня организации вычислительных работ при математическом моделировании процессов движения воды и переноса примесей в водотоках ВХС.

Некоторые задачи, для решения которых необходимо моделирование движения воды и примесей, еще не сформулированы даже содержательно. К ним можно отнести задачи создания моделей движения воды и переноса примесей для оперативной системы

Государственного учета использования вод, оптимизации размещения средств измерений характеристик водного режима и качества воды, минимизации исходной информации, необходимой для моделирования при проектировании и эксплуатации водохозяйственных объектов, и др. Без решения такого класса задач эффективные системы учета, проектирования, эксплуатации ВХС не могут быть созданы.

Таким образом, количество приложений математических моделей движения и переноса интенсивно увеличивается в нетрадиционных областях их применения и возможность их реального использования будет определяться не только решением уравнений движения и переноса, где достигнуты большие успехи, но прежде всего упрощением и удешевлением таких операций, как обработка большого количества первичной информации, вычисление параметров математических моделей и подготовка многочисленных результатов математического моделирования к анализу и принятию решений. Успеха можно достичь только на пути создания автоматизированных технологий, ориентированных на использование больших и малых ЭВМ.

Подготовка первичной информации к созданию математических моделей объектов — трудоемкий процесс, связанный с проверкой большого объема исходных гидравлических, гидрологических, метеорологических, гидрохимических данных, их упорядочением и организацией, созданием цифровой модели системы водотоков. В связи с большими объемами работ — речь идет о миллионах и десятках миллионов машинных слов — представляют интерес имеющиеся оценки затрат на различные этапы работ, связанных с математическим моделированием гидрологических процессов. Обобщения показали [346, 347], что затраты на моделирование распределяются следующим образом: подготовка и проверка исходной информации — 50 %, анализ погрешностей моделирования — 30 %, получение «полезных» результатов — 20 % общих затрат. Таким образом, 80 % затрат приходится на «вспомогательные» работы. При усложнении ВХС доля затрат на получение «полезных» результатов уменьшается. Очевидно, что автоматизация «вспомогательных» этапов работ — необходимая предпосылка осуществления и удешевления всего процесса моделирования.

Создание математических моделей сложных водных объектов требует разработки методик расчета параметров математических моделей на основе некоторого единого методического подхода. Этому чаще всего не уделяется должного внимания. Даже при сложных водотоках параметры определяют по простейшим зависимостям и затем вычисляют характеристики, определяемые тонкими механизмами диффузии, дисперсии, сопротивлений движению воды. Хорошо известно, что если при математическом моделировании учитываются не все существенные взаимосвязи и факторы, причем важные опускаются при чрезмерных упрощениях, то результаты моделирования могут быть хуже, чем без применения современных математических методов и вычислительных средств

[5]. На примере методики расчета коэффициента дисперсии очевидно, что его определение требует решения задач для уравнений математической физики не менее сложных, чем задачи для описания процессов движения воды и переноса примесей. Достаточно сложны методики расчета приведенного коэффициента шероховатости, корректива количества движения, способ выделения нетранзитных зон и др. Вместе с тем чрезмерное усложнение моделей хотя и может привести к достаточно полному описанию процессов, однако из-за отсутствия соответствующих методов может оказаться невозможным решение реальных задач. Поэтому математические модели должны быть достаточно сложными, чтобы они учитывали основные взаимосвязи в исследуемых явлениях, и в то же время достаточно простыми, чтобы их использование приводило к задачам, которые можно решить с практической пользой [5].

Если в методиках расчета параметров математических моделей водотоков ВХС не учитывается форма характерных сечений водотоков и распределение по периметру сечения шероховатости, то всегда существует возможность получить по упрощенным зависимостям значения параметров с большими погрешностями, тем более что, как правило, для упрощенных зависимостей не приводится оценка точности расчетов. Вместе с тем очевидно, что получение аналитических зависимостей для определения параметров математических моделей водотоков произвольного сечения нереально. Поэтому представляется, что задачи об определении параметров математических моделей водотоков сложной формы и с неоднородной шероховатостью границ достаточно актуальны и не могут быть решены без автоматизации вычислений.

Изложенные математические модели движения воды и примесей, программное обеспечение позволяют получить мгновенные значения уровней, расходов воды и концентраций примесей на каждом расчетном слое и во всех расчетных узлах. При протяженной системе водотоков количество расчетных узлов может составить десятки тысяч, расчетных моментов времени — сотни; в каждом конкретном узле выдается информация о его расстоянии от начала отсчета, уровнях, расходах воды, средних в сечении скоростях течения, концентрациях примесей. В итоге выполнения расчетов накапливаются практически необозримые массивы чисел порядка 10^6—10^7. Непосредственный анализ таких объемов информации практически невыполним. Необходимы специальные средства, позволяющие подготовить информацию к содержательному инженерному анализу. Поэтому в настоящее время создание программных средств автоматизации подготовки информации к такому анализу является актуальной задачей.

Необходимо отметить, что технология получения морфометрической информации, а именно она составляет основной объем, существенно изменяется. Вместо топографических материалов различного масштаба все большее количество информации представляют в виде цифровых моделей местности, из которых можно программными средствами получить характерные сечения водотоков и другие морфометрические характеристики. За один рейс самолета или вертолета с помощью лазерных измерений можно в автоматическом режиме получать цифровые модели поперечных сечений водотока в характерном створе. Увеличение возможностей дистанционных средств измерений количественных характеристик местности позволяет предположить, что в ближайшем будущем самая трудоемкая морфометрическая информация может быть получена с высокой детализацией, точностью и минимальными затратами. Лишь автоматизация ее обработки может дать практические результаты и значительный эффект от достижений технологической революции.

Таким образом, эффективное создание математических моделей процессов движения воды и переноса примесей в сложных системах водотоков практически невозможно без разработки технологии автоматизированного моделирования и существенного повышения уровня автоматизации не только на этапе расчетов, связанных с решением уравнений движения и переноса, но и на этапах (они представляются в настоящее время решающими) подготовки исходной информации к расчетам, создания математических моделей систем водотоков, подготовки результатов моделирования и содержательному анализу. Именно поэтому выполнялись и выполняются работы по созданию комплекса программ, позволяющих повышать степень автоматизации математического моделирования. Первые комплексы программ автоматизации математического моделирования неустановившегося движения воды для различных ЭВМ созданы в ИГиЛ СО АН СССР [49, 50, 211, 230]. Используя их, можно вычислять параметры уравнений движения, создавать математические модели сложных систем водотоков и выполнять моделирование неустановившегося плавно изменяющегося движения воды в них на основе общих и неполных уравнений Сен-Венана с учетом воздействия ветра и атмосферного давления. Описываемые в книге методики расчетов, реализованные лабораторией автоматизации оперативного управления водными ресурсами ЦНИИКИВРа в виде комплексов программ для автоматизации создания неидентифицированных и идентифицированных математических моделей систем водотоков и математического моделирования неравномерного и неустановившегося движения воды и примесей в них, являются развитием работ сотрудников ИГиЛ СО АН СССР. Обобщены уравнения движения, что позволило решать задачи выхода потока на пойму с выделением на ней в случае их возникновения многих нетранзитных зон. Разработаны методики определения приведенных и идентификации локальных коэффициентов шероховатости в случае сложных сечений, выделения нетранзитных зон, расчета коррективов количества движения, для некоторых сечений — коэффициентов продольной дисперсии. Уделено большое внимание сервисным программам, существенно облегчающим подготовку и анализ исходных данных и результатов моделирования.

Технология вычислений при математическом моделировании движения воды и переноса примесей ориентирована на переработку большого количества информации и представления ее в виде, удобном для анализа. Овладение комплексом программ требует определенных затрат. Поэтому наиболее эффективное применение технологии возможно при математическом моделировании процессов в достаточно сложных водных объектах и системах водных объектов. Естественно, ее можно использовать и в простых случаях.

Как уже отмечалось, применение математических моделей гидродинамического типа требует большого количества исходной дорогостоящей информации. Поэтому прежде чем принять решение об использовании математических моделей гидродинамического типа, необходимо оценить стоимость и возможность обеспечения их необходимой морфометрической, гидравлической и гидрологической информацией. Одним из важных условий применения математической модели гидродинамического типа для обоснования проектных решений является требование к точности результатов математического моделирования, что обычно обусловливается классом сооружений. В принципе, гидродинамические модели могут обеспечить любые разумные требования к точности расчетов, если имеется достаточно полная исходная информация. Для обеспечения высокой точности расчетов обычно выполняют идентификацию параметров математических моделей. Поэтому одним из необходимых условий применения математических моделей гидродинамического типа является наличие гидрологической информации для идентификации параметров.

Естественным условием применения средств автоматизации моделирования является наличие соответствующего программного обеспечения. Возможности такого обеспечения в значительной степени определяют затраты на математическое моделирование. Здесь важна степень автоматизации работ по подготовке исходной информации, созданию математических моделей объектов, процессов и подготовке результатов расчетов к анализу.

Использование технологии автоматизированных вычислений хотя и существенно облегчает весь процесс математического моделирования, но требует тщательной подготовки информации, знания последовательности вычислений, вариантов достижения цели в случае нарушения технологической цепочки по не зависящим от вычислителя обстоятельствам. Процесс вычислений достаточно сложен, и необходимо иметь специалистов, подготовленных к правильной оценке ситуаций, когда процесс вычислений нарушается или содержательный анализ результатов требует прекращения вычислений. Процесс математического моделирования движения воды и примесей состоит фактически из последовательного преодоления «мелких» препятствий, каждое из которых на определенном этапе становится последним и фактически останавливает моделирование. Поэтому вычислительный процесс может довести до конца лишь подготовленный специалист, в совершенстве знающий содержательную сторону задачи, в достаточной мере — процесс моделирования, чтобы предвидеть последствия своего воздействия на вычислительный процесс.

Анализ опыта применения предлагаемой технологии моделирования показывает, что большинство причин остановов вычислительного процесса связано с погрешностями в задании исходной морфометрической и гидравлической информации. Именно здесь трудно выявить такие погрешности, потому что они не только могут возникать в массивах чисел, имеющихся в распоряжении вычислителя, но и могут быть обусловлены отсутствием очень важной информации о водотоке. Опыт создания математических моделей достаточно сложных объектов показывает, что, к сожалению, зачастую вообще пропускается информация о многих характерных сечениях, например о вновь построенных мостах, в значительной мере определяющих движение воды и примесей на участке водотока. Выявление таких участков возможно на различных этапах расчетов. Однако чаще всего они обнаруживаются на этапе идентификации математических моделей, когда идентифицируемые характеристики, например приведенный коэффициент шероховатости, выходят за известные пределы. Довольно часто в результате выполнения расчетов выясняется, что в отдельные промежутки времени уровни и расходы воды выходят за разумные, с инженерной точки зрения, пределы изменения. Эти результаты должны быть серьезным сигналом к необходимости анализа исходной, особенно морфометрической, информации на участке водотока.

В связи с изложенным процесс математического моделирования — это поэтапный анализ результатов, оценка их достоверности и в случае необходимости — воздействие на вычислительный процесс и даже на исходную информацию. Поэтому проблематично создание в настоящее время технологии автоматического моделирования. Лишь после создания достоверной математической модели объекта можно говорить об удовлетворительных результатах математического моделирования. Разработка вариантов математических моделей процессов, различающихся гидрологическими условиями или управлением,— задача относительно более простая, хотя и здесь, особенно при моделировании процессов в системе водотоков, имеются сложности, вызванные наложением волн.

Таким образом, одним из условий, позволяющих ставить вопрос об автоматизации математического моделирования процессов движения и переноса примесей, является наличие специалистов, подготовленных к широкому пониманию физической стороны моделируемых объектов, явлений и способных через воздействие на средства автоматизации и исходную информацию управлять процессом вычислений. Качественное упрощение процесса моделирования и уменьшение требований к специалистам до уровня знаний лишь содержательной постановки задачи возможно после создания проблемно-ориентированного языка.

Итак, к необходимым условиям эффективного применения технологии автоматизированного моделирования можно отнести: достаточную сложность водных объектов, возможность обеспечения и приемлемую стоимость исходной морфометрической, гидравлической и гидрологической информации, высокие требования к точности и достоверности результатов расчетов и уверенность в том, что точность и достоверность могут быть обеспечены только гидродинамическими моделями. К достаточным условиям эффективного применения технологии автоматизированных вычислений нужно прежде всего отнести наличие программного обеспечения и специалистов, подготовленных к содержательному пониманию физической стороны решаемых задач и способных активно воздействовать на вычислительный процесс для получения достоверных результатов математического моделирования.

4.2. Исходная информация о водотоке

Работы по математическому моделированию неустановившегося движения воды и примесей в конкретной системе водотоков начинают с формализации системы как объекта моделирования. Ее представляют в виде графа, функционально соответствующего реальной системе. Затем на нем указывают расстояния от единого начала, как правило от устья реки, до начала и конца каждой дуги графа. Дуги обычно нумеруют начиная с минимального расстояния по его возрастанию, включая притоки любых порядков.

Для создания математической модели системы водотоков необходимо иметь о ней морфометрическую, гидравлическую и гидрологическую исходную информацию. Ее количество зависит от сложности и протяженности системы. Наибольший объем приходится на морфометрические и гидравлические характеристики сечений водотоков, которые необходимы для определения параметров уравнений, используемых в качестве исходных при математическом моделировании движения воды и примесей.

4.2.1. Морфометрическая и гидравлическая информация

Систему водотоков представляют характерными сечениями, которые выбирают по следующим признакам: во-первых, в местах резких изменений продольного профиля реки; во-вторых, в местах сужений и расширений водотока с тем условием, чтобы между характерными сечениями ширина водотока изменялась почти линейно; в-третьих, в местах резких изменений характеристик шероховатости по длине, причем в окрестности резкого изменения коэффициента шероховатости должны задаваться два характерных сечения, которые могут и не различаться координатами точек периметра, но должны существенно отличаться локальными значениями коэффициента шероховатости. Задание двух сечений с различными значениями коэффициентов необходимо для возможности интерполяции его между близлежащими характерными сечениями.

Информация о характерном сечении готовится на специальном бланке «Исходные морфометрические и гидравлические данные о характерном сечении водотока», представленном на рис. 4.1. Основные массивы информации состоят из абсцисс и ординат периметра сечения и четырех массивов локальных по элементам периметра коэффициентов шероховатости, куда заносятся его приближенные неидентифицированные значения для характерных в смысле изменения шероховатости моментов времени. Задается положение явно нетранзитных частей сечения. Координат точек периметра характерного сечения может быть до 150. Ограничение, естественно, не жесткое.

Кроме упомянутых к основным относятся массивы, в которых содержится информация, используемая при вычислениях, а именно: номер дуги, на которой расположено сечение; гидрографический признак (ГП), характеризующий совпадение сечения с одним из концов дуги или принадлежность внутренней точке дуги; номер сечения; расстояние от корня графа — устья водотока; количество точек в характерном сечении; минимальные и максимальные значения координат точек периметра и коэффициентов шероховатости для автоматического поиска погрешностей в задании координат и коэффициентов шероховатости; форматы, в которых следует читать основную информацию в случае, если принятые для ее записи в бланке форматы неприемлемы; даты, на которые устанавливались по наблюдениям локальные коэффициенты шероховатости; количество точек вершин периметра сечения. Кроме основных массивов на бланке имеется неперфорируемая информация, а именно: название организации-заказчика, исполнителя, фамилии исполнителей, дата подготовки ими материалов, номер листа, общее количество листов, а также информация, поясняющая заполнение некоторых массивов.

Программное обеспечение выполняет контроль исходной информации на экстремальные значения параметров, которые занесены в исходную форму. Проверяется возрастание абсциссы в каждой последующей точке, выполняются многие другие проверки исходной информации и делается сообщение об обнаруженных ошибках.

В математических моделях процессов необходимо учитывать изменение некоторых параметров в пространстве и времени, например коэффициентов шероховатости пойм и, следовательно, модуля расхода, которые существенно зависят от сезона года Кроме того, они не могут быть определены непосредственно с требуемой точностью Коэффициенты шероховатости являются некоторой интегральной характеристикой, включающей различные свойства поверхности, относительные размеры и положение неровностей рельефа, закустаренность, залесенность, т. е. они являются некоторой статистической характеристикой поверхности ложа водотока, методы расчета которой в настоящее время разработаны недостаточно.

Форма ИМГД

ИСХОДНЫЕ МОРФОМЕТРИЧЕСКИЕ И ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ О ХАРАКТЕРНОМ СЕЧЕНИИ ВОДОТОКА

Заказчик	Фамилия	Дата	Лист	Листов
Исполнитель	Фамилия	Дата	Примечания	

Номер дуги	Г.П	Номер сечения	Расстояние от устья	Кол-во точек сечен	Минимум y	Максимум y	Река-водоприемник
#							

Минимум h	Максимум h	Минимум n	Максимум n	Fy	Fh	Fn	Объект

1-я дата наблюдения	2-я дата наблюдения	3-я дата наблюдения	4-я дата наблюдения	К-во хар точ	Примечание

Схема характерного сечения и расположение осей координат

У-значения абсцисс характерных точек			
1	2	3	4
147	148	149	150

h-значения ординат характерных точек				
1	2	3	4	5
146	147	148	149	150

Коэффициент шероховатости (n_i) на участках периметра по сезонам					
1	2	3	4	5	6
145	146	147	148	149	150
1	2	3	4	5	6
145	146	147	148	149	150
1	2	3	4	5	6
145	146	147	148	149	150
1	2	3	4	5	6
145	146	147	148	149	150

Примечания

ГП гидрографический признак дуги
01 - начало дуги,
00 - промежуточная точка
02 - конец дуги.

Рис. 4.1 Исходные морфометрические и гидравлические данные о характерном сечении водотока

Коэффициенты шероховатости устанавливают, как правило, по качественной характеристике поверхности ложа водотока, полученной по рекогносцировочному описанию и на основании имеющихся таблиц. При таком выборе их значений не исключается субъективный фактор. Кроме того, в существующих разных таблицах для закустаренных, залесенных и заболоченных пойм значения коэффициентов шероховатости, соответствующие одному и тому же словесному описанию поверхности, различаются в несколько раз. В этой связи возникает необходимость уточнения этих коэффициентов; например, по результатам наблюдений за изменением уровней и расходов воды можно идентифицировать параметры уравнений движения с помощью решения уравнения установившегося неравномерного движения, как это описано в п. 3.9. Поскольку коэффициенты шероховатости могут существенно изменяться во времени (по сезонам года) и в пространстве из-за изменения по длине водотока при необходимости расчетов уровней и расходов в течение длительного периода, идентификацию выполняют для двух-четырех моментов времени, а в промежутках между ними коэффициенты шероховатости интерполируют линейно во времени и по пространству между характерными створами.

4.2.2. Гидрологическая информация

Для выполнения расчетов необходимо располагать исходной гидрологической информацией, в качестве которой задают следующие данные: во внешних вершинах графа и на внутренних постах $Q(t)$ или зависимости вида $Q(h)$, $h(t)$; по длине водотока — гидрографы боковой приточности сосредоточенной $Q(t)$, распределенной $q(s, t)$, данные о расчетном атмосферном давлении $p_а(s, t)$, скорости ветра $w(s, t)$. Если в системе водотоков имеются гидротехнические сооружения, то на них обычно задают графики изменения $h(t)$, $Q(t)$, $Q(h)$ или другие зависимости, характеризующие режим работы сооружения, которые можно использовать как граничные условия во внутренних вершинах графа. По отношению к внешним граничным условиям системы водотоков эти условия называют внутренними.

Вполне аналогично задают информацию о примесях, сосредоточенных и распределенных по длине, однако деталям этого задания здесь уделять внимание не представляется возможным.

Гидрологическая информация готовится на специальном машинно-ориентированном бланке, представленном на рис. 4.2 (форма ИГД).

Основные массивы состоят из массивов времени (или массивов уровней воды h) и соответствующих массивов расходов воды $Q(t)$, $Q(h)$ (сосредоточенная приточность $Q(t)$) и бокового притока (путевой приток $q_1(t)$), привязанных к единой системе расстояний. Координат точек может быть 150. Ограничение, естественно, не жесткое.

Форма ИГД

ИСХОДНЫЕ ГИДРОЛОГИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ О ВОДОТОКЕ
$Q=f(t)$, $h=f(t)$, $Q=f(h)$, $q=f(t)$

Заказчик ______ Фамилия ______ Дата ______ Лист ______ Листов ______

Исполнитель ______ Фамилия ______ Дата ______ Примечания ______

	Номер дуги	ГП	Номер сечения	Расстояние от устья	Кол-во точек сечен	Масштаб времени K	n	Река-водоприемник	Объект	

Название водотока	Примечания

Время t,с или уровень воды h,м				
1	2	3	4	5
46	47	48	49	50

Расход $Q(t)$ и $Q(h)$, $м^3/с$ или Уровень $h(t)$,м или Сосредоточенная приточность $Q(t)$, $м^3/с$ или Распределенная приточность $q(t)$, $м^3/с$				
1	2	3	4	5
46	47	48	49	50

Примечания

1. Расстояние S, км от устья до створа;
2. Уровень воды h, м;
3. ГП - гидрографический признак для граничных условий:
   00 - $Q=f(t)$, 01 - $h=f(t)$, 02 - $Q=f(h)$;
   для боковых приточностей:
   20 - начальной точки, 10-конечной точки, 21-внутреней точки;
4. $q(t)$ умножается на 10^n
5. Если время в сутках, то $K=86400$, в часах - 3600, в минутах - 60, в секундах - 1.

Рис. 4 2 Исходные гидрологические данные о водотоке

Кроме перечисленных к основным относятся массивы, в которые заносится информация, используемая при вычислениях, а именно· номер дуги, к которой относится расход, гидрографический признак (ГП), характеризующий вид граничного условия, порядковый номер сечения, расстояние от устья, количество точек сечения, масштаб времени k, показатель степени множителя при боковой приточности. В бланк также заносится неперфорируемая информация, а именно: названия организаций заказчика и исполнителя, фамилии исполнителей, номер листа, количество листов, а также некоторая другая информация, поясняющая заполнение некоторых массивов.

В связи с большим объемом гидрологической информации при ее вводе осуществляют контроль на корректность задания и выявление случайных ошибок. Кроме того, для уточнения расчетов при использовании в качестве граничных условий $Q(t)$ или $h(t)$ предусмотрено расчетный шаг по времени назначать таким образом, чтобы все характерные точки заданных гидрографов были учтены с заданной точностью. Расстояния, заданные для гидрографов и бокового притока, проверяют на согласование с расчетными узлами начальных данных.

Расчет неустановившегося движения воды желательно начинать с некоторого начального момента времени, при котором движение воды можно считать установившимся. Поэтому при отсутствии данных наблюдений за уровнями и расходами на расчетных участках начальные условия обычно определяют из решения уравнения неравномерного движения.

Разработанная программа расчета неравномерного движения воды в системе водотоков имеет также самостоятельное значение и может использоваться при построении кривых свободной поверхности в случаях, когда гидравлические характеристики водотоков незначительно изменяются во времени.

После создания математической модели объекта, определения начальных условий из решения уравнения установившегося неравномерного движения, учитывая граничные условия, выполняют расчеты неустановившегося движения воды в системе водотоков, результаты которых используют при моделировании примесей.

В процессе расчета в течение длительного периода времени и значительном колебании уровней неизбежны случаи выхода потока на пойму Это влечет за собой изменение расстояний между характерными створами, причем оно меняется в зависимости от уровней воды. Учет этого фактора предусмотрен в разработанном комплексе.

В уравнения движения воды и переноса примесей входит расстояние ds. В алгебраических аналогах этих уравнений имеется величина Δs_i, соответствующая длине шагов при измерениях расстояний по гидродинамической оси русла. Оно не изменяется до выхода на пойму. Однако когда уровни воды поднимаются выше бровок, значение Δs_1 необходимо умножить на параметр $E1 \leqslant 1$, содержащийся в таблицах параметров характерных сечений. Зависимость $E1(h)$ устанавливают по топографическим материалам для каждого участка водотока между характерными створами. Параметром $E1(h)$ учитывается изменение объемов аккумуляции на пойме и гидравлических потерь по длине водотока.

4.3. Выбор расчетных шагов, влияние на них исходной информации

Известно, что принятая шеститочечная разностная схема с весами аппроксимирует дифференциальные операторы уравнений движения и переноса с порядком $0(\Delta t+\Delta s^2)$. Заметим, что при $\sigma=0{,}5$ (схема Кранка—Николсона) погрешность аппроксимации уменьшается и становится эквивалентной $0(\Delta t^2+\Delta s^2)$, а при неравномерном шаге увеличивается. Для сходимости решений разностных уравнений к решению дифференциальных необходимо, чтобы разностная схема удовлетворяла условиям устойчивости. Использованная для аппроксимации дифференциальных уравнений движения разностная схема абсолютно устойчива, если в слагаемом, учитывающем сопротивление движению, расход вычисляется на верхнем слое [73, 281, 307]. Однако, несмотря на абсолютную устойчивость разностной схемы, погрешности вычислений приводят к регулярным пилообразным колебаниям в четных и нечетных узлах сетки. Накладывается довольно жесткое (в реальных условиях D — величина малая, см. табл. 3.10) ограничение на шаг сетки [236, 250]

$$\Delta s < 2D/v \tag{4.1}$$

при решении задачи о переносе примесей.

Стремление увеличить шаги по пространству приводит к использованию направленных разностей при аппроксимации младших производных в уравнении переноса. Возникает значительная вычислительная дисперсия, которая может существенно увеличить коэффициент дисперсии [55, 117, 147]. По имеющимся ориентировочным оценкам [117]

$$D_{\text{в}} \approx \Delta t v^2/2, \tag{4.2}$$

т. е. вычислительная дисперсия $D_{\text{в}}$ может быть равна физической дисперсии и даже превосходить ее. Тогда расчеты могут потерять смысл.

Пока неизвестны эффективные средства исключения влияния вычислительной дисперсии. Уменьшить ее вклад можно применением численного метода предиктор-корректор [55] и разностной схемы Кранка—Николсона. При использовании явных разностных схем для аппроксимации уравнений переноса в окрестности вершины-стока должно выполняться условие [277, 280, 281]

$$\Delta s^2/\Delta t_1 \geqslant 2D \tag{4.3}$$

и условие Куранта—Фридрихса—Леви [236, 250]

$$\Delta s/\Delta t_1 \geqslant v. \tag{4.4}$$

Условиям можно придать следующий физический смысл: информация о процессе должна поступать быстрее, чем распространение примеси за счет осредненной скорости и дисперсии.

Разностные уравнения, аппроксимирующие дифференциальные уравнения движения воды и переноса примесей, записаны применительно к равномерному шагу по пространству. Однако расчетные узлы, как правило, невозможно расположить равномерно из-за особенностей водотока. К ним относятся места расположения характерных сечений на участках водотока, слияния водотоков, впадения сосредоточенных притоков, изменения боковой распределенной приточности, гидрологических постов, сброса примесей и т. п. Естественно, что упомянутые и другие особенности располагаются по длине водотока неравномерно и расчетный шаг не кратен расстоянию между ними. Желательно в местах, где отмечаются указанные особенности, иметь расчетные узлы. Этого можно добиться различными способами. Простейший из них — соотнесение особенности к ближайшему расчетному узлу. Однако это приводит к некоторым погрешностям, оценить которые затруднительно. Для их уменьшения представляется целесообразным поступить следующим образом.

Для каждой дуги графа задают некоторый расчетный шаг Δs. На участке между каждыми двумя особенностями расчетный шаг автоматически устанавливают следующим образом. Расстояние между двумя ближайшими особенностями L_i делят на Δs и определяют, сколько раз этот шаг укладывается на указанном расстоянии. Обычно получается нецелое число. Это число округляют до ближайшего большого целого n_i, делением на которое получают новый шаг $\Delta s_i'$, наиболее близкий к Δs на рассматриваемом участке между особенностями, но уже кратный L_i. Нетрудно видеть, что шаги в окрестности расположения особенностей будут различаться не более чем на $|\Delta s_i'/n_i - \Delta s_{i+1}'/n_{i+1}|$. Учитывая, что по технологии вычислительного процесса необходимо, чтобы на каждом расчетном участке было не менее трех шагов (это связано с «развязыванием» узлов сопряжений при прямой и обратной прогонках на границах), получаем максимальную неоднородность шага $|\Delta s_i - \Delta s_{i+1}|/3$. Следовательно, при таком способе установления расчетных шагов шаг в окрестности особенностей становится почти равномерным, близким к Δs, что позволяет, в принципе, выполнять вычисления как с равномерным шагом. Однако это привело бы к некоторому увеличению погрешностей аппроксимации. Поэтому в алгоритме решения задачи реализована схема счета с равномерным шагом между особенностями.

Это выполнено следующим образом. Напомним, что в п. 1.4 и 2.4 изложена расчетная схема развязывания узлов при слиянии двух водотоков, в случае если нас интересует режим уровней, расходов воды и концентраций примесей на всех трех примыкающих дугах. Этот же принцип расчета реализуют в случае, если в водоток впадает сосредоточенный приток $Q(t)$, однако режим изменения характеристик движения и переноса на притоке нас не интересует. Поэтому по притоку процедуры прогонок не выполняют, а в узле слияния выполняют лишь условия равенства уровней, баланса расходов и потоков примесей. Именно эти условия распространены на все другие особенности водотока с тем лишь отличием, что в этих узлах добавляются сосредоточенный расход

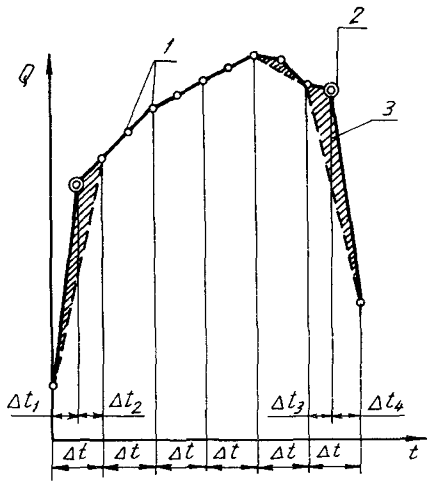


Рис. 4.3. Гидрографы наблюденный и «прочтенный» ЭВМ при равномерном шаге Δt и линейной интерполяции.

1 — наблюденные расходы, *2* — наблюденные расходы, но не учтенные при равномерном шаге Δt и учтенные при неравномерных шагах Δt_1, Δt_2, Δt, Δt_3, Δt_4; *3* — погрешности считывания гидрологической информации при равномерном шаге Δt

и поток примеси, естественно, равные нулю. Затем по принятому алгоритму во всех узлах сетки, где имеются особенности, связанные с неравномерным шагом, автоматически развязываются узлы с учетом физических свойств этих особенностей.

На выбор шагов по времени оказывает влияние режим изменения характеристик гидрологической, гидравлической информации и мест сброса примесей $p_i(t)$. Напомним, что к гидрологической информации относятся гидрографы $Q_i(t)$, графики изменения уровней $H_i(t)$, гидрографы боковой распределенной приточности $q_i(s, t)$. К гидравлической информации в данном случае отнесем графики $Q_i(h)$. Все перечисленные характеристики обычно задаются в виде таблиц, и, следовательно, в каждом узле t_i для каждой из характеристик может быть зафиксировано достаточно резкое его изменение. Если задать постоянный шаг по времени, то расчетные моменты времени лишь случайно могут совпасть с некоторыми из узлов табличных функций $Q_i(t)$, $H_i(t)$, $q_i(s, t)$, $p_i(t)$. Указанные характеристики в расчетные моменты времени определяют линейной интерполяцией между ближайшими наблюденными значениями. Но тогда многие из наблюденных значений $Q_i(t)$, $H_i(t)$, $q_i(s, t)$, $p_i(t)$ не учитываются или не полностью учитываются в расчетах. Это приводит к нарушению баланса объема стока или массы примесей.

На рис. 4.3 представлены наблюденный гидрограф и гидрограф, который будет учтен в расчетах при шаге по времени Δt. Заштрихованная площадь, соответствующая некоторому объему стока, обычно теряется из-за вычислительного алгоритма. Аналогичные рассуждения могут быть приведены по отношению ко всем перечисленным характеристикам. Чтобы избежать указанных потерь информации, алгоритм выбора шагов по времени реализован так, что он учитывает все существенные особенности в задании исходной информации. Это осуществляется следующим образом. Задают относительную погрешность считывания исходной информации. Между двумя расчетными шагами по каждой из таблиц проверяют все моменты времени, в которые задана измеренная исходная информация. Если относительное отклонение измеренного значения от значения, полученного линейной интерполяцией между расчетными узлами, больше заданной относительной погрешности считывания информации, то момент времени, в который это произошло, включают в массив особенностей расчетных шагов по времени. После проверки всех моментов времени для каждого заданного параметра формируют сводный массив особенностей расчетных шагов, который затем объединяют с основным массивом, созданным на основе шага Δt. В объединенный массив входят моменты времени, в которые нужно выполнять вычисления.

Учет моментов времени, характеризующих особенности процессов в системе, увеличивает количество расчетных слоев по времени и удлиняет процесс вычислений, однако лишь для учета тех особенностей, которые существенны для процесса и пренебрежение которыми привело бы к значительным погрешностям. В этом смысле операция учета особенностей необходима.

При решении задачи о переносе примесей необходимо добиваться тщательного согласования начальных и граничных условий, так как параболические уравнения значительно чувствительнее других к невыполнению этого условия.

Возможны многочисленные подходы к оценке результатов вычислений. Прежде всего с помощью численного эксперимента возможно для конкретной системы подобрать эффективные шаги по пространству и времени, ориентируясь на ограничения по формулам (4.1)—(4.4). Это трудоемкий, но обычно эффективный путь, поэтому процесс подбора шагов автоматизируется. Для этого сначала задают некоторые большие расчетные шаги, а затем автоматически уменьшают их до тех пор, пока это будет существенно сказываться на сходимости результатов. Возможны и другие подходы к оценке результатов моделирования. Можно, например, локально сравнивать решения с аналитическими, принимая на отдельных участках водотока постоянными величины D и v и исследуя погрешность численного решения по сравнению с аналитическим, имеющимся для постоянных v и D.

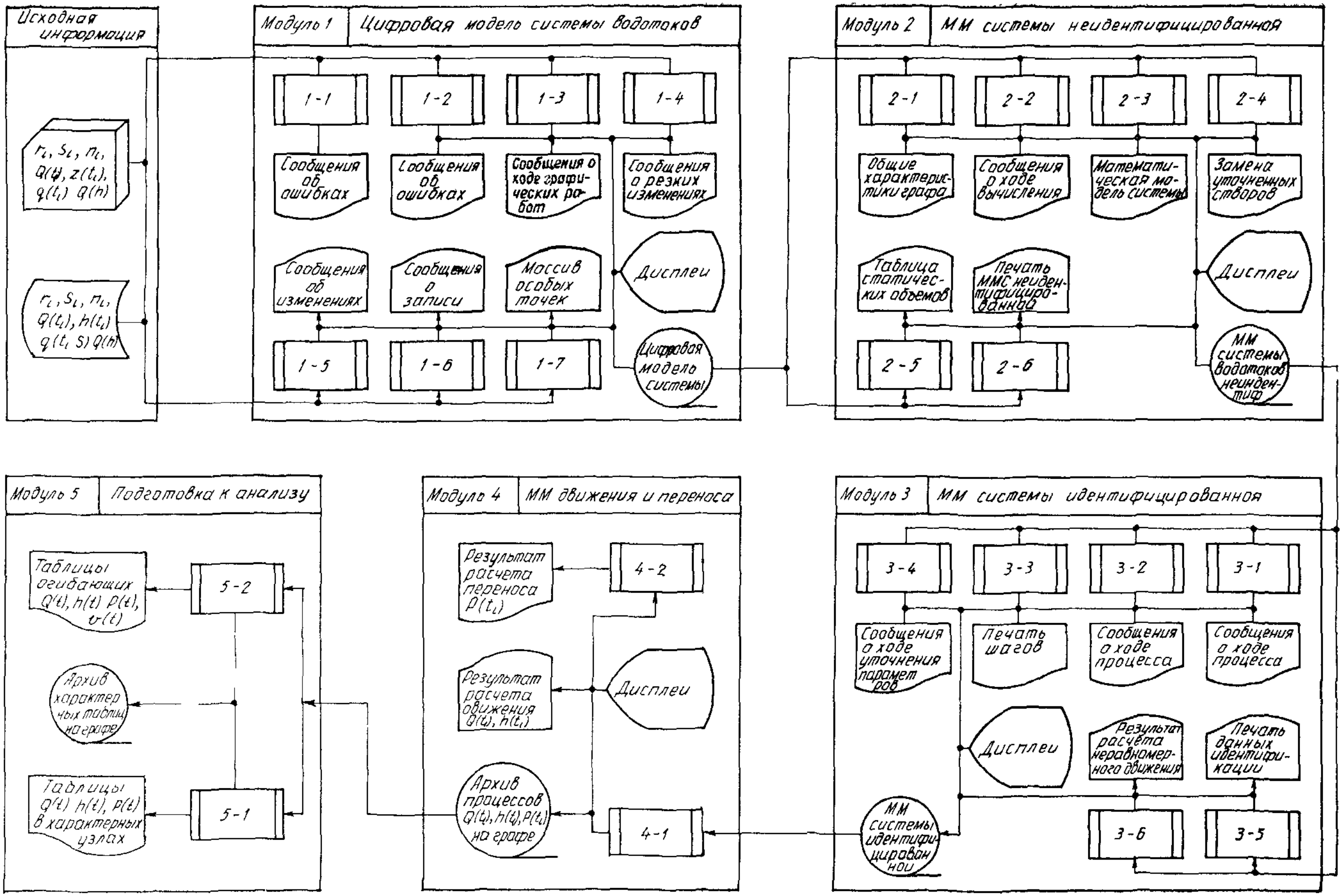
Таким образом, при решении задачи о переносе примесей в системах водотоков встречаются значительные сложности. Их можно преодолеть, выполняя численный эксперимент, учитывающий как особенности задачи, так и отмеченные ограничения.

4.4. Технология автоматизированного моделирования

Ранее были изложены научные основы создания одномерных математических моделей системы водотоков, процессов движения воды и примесей в них. Приведены математические формулировки задач, описаны численные методы их решения, созданы методики расчета многих параметров математических моделей применительно к сложным системам естественных и искусственных водотоков с неоднородными в пространстве и времени границами. Методы решения уравнений и методики расчета параметров сложны, объем вычислений большой. Вследствие этого использовать методы математического моделирования затруднительно, они труднодоступны. Поэтому понадобилось создание технологии автоматизированного моделирования, которая, предоставляя достаточно гибкие возможности специалисту, позволяет передать большинство вычислительных операций ЭВМ не только по численному решению уравнений движения и переноса, что выполнялось и ранее, но и по подготовке информации к моделированию, ее проверке и представлению к содержательному анализу на всех этапах моделирования. Именно такого рода операции в настоящее время наиболее трудоемки и составляют 80 % суммарных затрат на моделирование. Автоматизация этих этапов вычислений позволяет довести моделирование даже в случае сложных ВХС до числовых результатов и содержательно их оценить.

Излагаемая технология автоматизации моделирования позволяет по простейшей морфометрической и гидравлической информации о водотоках — координатам характерных сечений и локальным значениям коэффициентов шероховатости в характерные моменты времени — в автоматизированном режиме создавать математические модели системы водотоков с однородными и неоднородными по длине характерными сечениями и изменяющейся и не изменяющейся в пространстве и времени шероховатостью. Используя математическую модель системы водотоков, технология позволяет по различной гидрологической информации, в сложных случаях дополняемой метеорологическими и другими данными, создавать математические модели процессов движения воды, в том числе и в случаях возникновения нетранзитных зон при выходе потока на пойму, и переноса примесей в системах водотоков.

Технология в основном реализована в комплексах программ сотрудниками лаборатории автоматизации оперативного управления водными ресурсами ЦНИИКИВРа [260], а именно: В. П. Рогунович, С. А. Бампи, Э. А. Войтеховская, С. А. Волонцевич, А. П. Станкевич, Ф. Д. Шнипов создали комплекс программ для автоматизированного математического моделирования систем водотоков, В. П. Рогунович, А П. Станкевич, А. Л. Азанович, С. И. Кутаков — для автоматизированного математического моделирования неравномерного движения воды в системах водотоков; В. П. Рогунович, Ф. И. Федорова, А. П Станкевич, Ф. Д. Шнипов,


Исходная информация
$r_i, S_i, n_i, Q(t), z(t_i), q(t_i)\ Q(h)$
$r_i, S_i, n_i, Q(t_i), h(t_i)\ q(t_i\ S)\ Q(h)$
Модуль 1
Цифровая модель системы водотоков
1-1
1-2
1-3
1-4
Сообщения об ошибках
Сообщения об ошибках
Сообщения о ходе графических работ
Сообщения о резких изменениях
Сообщения об изменениях
Сообщения о записи
Массив особых точек
Дисплеи
1-5
1-6
1-7
Цифровая модель системы
Модуль 2
ММ системы неидентифицированная
2-1
2-2
2-3
2-4
Общие характеристики графа
Сообщения о ходе вычисления
Математическая модель системы
Замена уточненных створов
Таблица статических объемов
Печать ММС неидентифицированная
Дисплеи
2-5
2-6
ММ системы водотоков неидентиф
Модуль 5
Подготовка к анализу
Таблицы огибающих $Q(t), h(t)\ P(t), v(t)$
5-2
Архив характерных таблиц на графе
Таблицы $Q(t)\ h(t), P(t)$ в характерных узлах
5-1
Модуль 4
ММ движения и переноса
Результат расчета переноса $P(t_i)$
4-2
Результат расчета движения $Q(t_i), h(t_i)$
Дисплеи
Архив процессов $Q(t_i), h(t_i), P(t_i)$ на графе
4-1
Модуль 3
ММ системы идентифицированная
3-4
3-3
3-2
3-1
Сообщения о ходе уточнения параметров
Печать шагов
Сообщения о ходе процесса
Сообщения о ходе процесса
Дисплеи
Результат расчета неравномерного движения
Печать данных идентификации
ММ системы идентифицированной
3-6
3-5

А. Л. Азанович, С. И. Кутаков — для автоматизированного математического моделирования неустановившегося движения воды и примесей в системах водотоков; А. П. Станкевичем, С. А. Волонцевичем, В. Н. Корнеевым написаны программы поиска грубых ошибок в исходной информации, подготовки результатов вычислений к анализу, статистической оценки погрешностей расчетов, графического и табличного представления информации.

Для получения характеристик состояния системы водотоков в различные моменты времени необходимо выполнить определенную последовательность действий со всем программным обеспечением над массивами исходной, промежуточной информации и результатами вычислений. Определенная последовательность действий с частью программного обеспечения приводит к некоторому промежуточному, но содержательному результату. Такая часть программного обеспечения обычно объединяется в программный модуль. Созданный комплекс состоит из пяти модулей. Кратко охарактеризуем каждый модуль, получаемый с его помощью результат и программы, реализующие основные операции по его достижению. Укрупненная граф-схема комплекса программ представлена на рис. 4.4.

МОДУЛЬ 1. Цифровая модель системы водотоков. Реальная система водотоков формализуется в виде графа. Концы каждой дуги привязываются к ветвящейся оси расстояний, начало которой обычно находится в нижнем створе — устье водотока. Характерные створы привязываются к единой системе отсчета расстояний. Локальные значения коэффициентов шероховатости задаются по результатам изысканий для нескольких сезонов по известным таблицам. Информация о координатах характерных сечений и локальных значениях коэффициентов шероховатости готовится на специальном бланке (см. рис. 4.1).

В качестве гидрологической информации задаются: гидрографы $Q(t)$, графики изменения уровней $h(t)$ на левой, правой и внутренних границах, зависимость $Q(h)$ на правой границе, сосредоточенная $(Q(t))$ и распределенная $(q_1(s, t))$ приточность. Информация о гидрологических характеристиках готовится на специальном бланке (см. рис. 4.2). При необходимости в таблицах аналогичного вида задается информация о плотности бокового притока $q_1(s, t)$, скорости и направления ветра $w(s, t)$, атмосферном давлении, изменении плотности воды в водотоке $\rho(s, t)$.

Конечный результат работы модуля — цифровая модель системы водотоков. Она состоит из проверенных числовых массивов координат поперечных сечений, локальных коэффициентов шероховатости и табличных функций $Q(t)$, $H(t)$, $Q(h)$, $\rho(s, t)$, при необходимости $w(s, t)$, $p_a(s, t)$, $q_1(s, t)$, $\rho(s, t)$.

Программа 1-1 контролирует правильность задания исходной морфометрической и гидравлической информации об объекте.

Рис. 4.4 Укрупненная граф-схема комплекса программ

Входные данные: массив абсцисс и ординат сечений водотока и массивы локальных значений коэффициентов шероховатости и параметров нетранзитных частей сечения, пределы изменения всех характеристик. Программа реализует синтаксический контроль каждой записи сравнением с шаблоном внутри программы, сравнивает с допустимыми пределами изменения параметра, проверяет абсциссы на возрастание. В случае невыполнения проверок сообщается о месте и характере неточности.

Программа 1-2 корректирует в соответствии с заданной структурой исходную морфометрическую и гидравлическую информацию, записывает ее на магнитный носитель.

Программа 1-3 выводит в графическом виде на АЦПУ и графопостроитель в заданном масштабе сечения водотока с целью визуального выявления ошибок в задании координат сечения. На сечении отмечается положение явно нетранзитных частей. Часть сечения водотока ниже периметра штрихуется. Заданная числовая информация выводится в табличном виде, даются некоторые описательные характеристики сечения.

Программа 1-4 контролирует плавность изменения сечений на участке водотока между характерными сечениями. Сообщается о нарушении плавного изменения.

Программа 1-5 вписывает в заданный профиль сечения другой с меньшим количеством координат и локальных коэффициентов шероховатости и записывает на магнитный носитель проверенную исходную информацию.

Программа 1-6 контролирует и записывает на магнитный носитель исходную гидрологическую информацию для расчетов неравномерного и неустановившегося движения воды.

Программа 1-7 выбирает особые точки в гидрологической информации для уменьшения погрешностей расчетов и включает их в массив моментов времени, в которые и выполняются расчеты неустановившегося движения и переноса примесей.

МОДУЛЬ 2. Математическая модель системы водотоков неидентифицированная. Программы модуля позволяют в характерных створах системы водотоков определять параметры математических моделей движения воды и переноса примесей, результаты представляются в виде таблиц (см. табл. 3.1, форма ММО). Таблицы, упорядоченные по глубине в характерном сечении, по времени — в соответствии с идентификацией, по длине — в соответствии с положением характерных створов на графе, образуют математическую модель системы водотоков.

Конечный результат — математическая модель системы водотоков неидентифицированная.

Программа 2-1 печатает общие характеристики характерных сечений, упорядоченных на графе.

Программа 2-2 уточняет расстояние между створами на расчетном участке с учетом коэффициента извилистости, зависящего от глубины, при выходе потока на пойму, записывает на магнитный носитель расстояния.

Программа 2-3 вычисляет коэффициенты уравнений движения и переноса для пяти—десяти характерных уровней и одного—четырех сезонов по координатам поперечных сечений и локальным на участках периметра коэффициентам шероховатости, информация о которых получена модулем 1; результаты расчетов записывает на магнитные носители, т. е. создает математическую модель системы водотоков неидентифицированную.

Программа 2-4 удаляет или добавляет необходимое количество характерных сечений, записанных на магнитном носителе, помещает на нужное место или заменяет одно сечение другим.

Программа 2-5 определяет статический объем воды по расчетным участкам, включая водохранилища.

Программа 2-6 выводит на печать в табличном виде неидентифицированную математическую модель системы водотоков.

МОДУЛЬ 3. Математическая модель системы водотоков идентифицированная. Программы модуля, используя неидентифицированную математическую модель системы водотоков, гидрологические данные, выполняют расчет неравномерного или неустановившегося движения воды и переноса примесей, идентифицируют параметры математической модели движения по данным наблюдений за процессом.

Конечный результат — идентифицированная математическая модель системы водотоков.

Программа 3-1 готовит результаты наблюдений к использованию при расчетах неравномерного, неустановившегося движения и переноса примесей, выполняет некоторые операции контроля достоверности информации.

Программа 3-2 готовит массивы к расчету неустановившегося движения воды и переноса примесей с учетом данных наблюдений.

Программа 3-3 изменяет шаг по расстоянию при подготовке начальных данных к расчету неустановившегося движения воды.

Программа 3-4 выполняет расчет неравномерного движения воды и переноса примесей в системе водотоков, уточняет на соответствующие даты параметры моделей, печатает коэффициенты идентификации.

Программа 3-5 выполняет идентификацию, печатает коэффициенты идентификации для параметров математических моделей на соответствующие даты по расчетам неустановившегося движения воды.

Программа 3-6 выводит на печать результаты расчета неравномерного движения, неустановившегося движения и переноса примесей в табличном и графическом видах на даты идентификации.

МОДУЛЬ 4. Моделирование движения воды и переноса примесей в системе водотоков. Программы модуля позволяют по идентифицированным математическим моделям и гидрологической информации вычислять уровни, расходы воды и концентрации примесей в заданных расчетных узлах и в расчетные моменты времени.

Начальные условия могут быть определены по наблюдениям в отдельных сечениях за водным режимом и концентрациями примесей с интерполяцией по уравнениям движения и переноса в расчетные узлы сетки. Возможно установление начальных условий расчетным путем применительно к неравномерному движению воды и к стационарному переносу примесей. Для расчета уровней при установившемся неравномерном движении решается уравнение неравномерного движения воды. Из его решения определяются уровни воды во всех расчетных узлах.

Если отсутствуют измерения концентраций примесей, то при их стационарном сбросе, стационарных характеристиках самоочищения и неравномерном движении воды распределение по длине можно определить, используя уравнение переноса. Если начальные условия при моделировании движения нестационарны, то при наличии детальных наблюдений данные интерполируются. При отсутствии наблюдений расчеты выполняются от стационарного состояния, отстоящего от начального на интервал времени, определяемый из характеристического треугольника.

С помощью математической модели системы водотоков и с учетом начальных и граничных условий решаются задачи о движении воды и переносе примесей. Конечный результат — таблицы $Q(s_i, t_j)$, $h(s_i, t_j)$, $p(s_i, t_j)$ в системе водотоков в табличном и графическом виде с выводом на АЦПУ и магнитные носители.

Программа 4-1 выполняет расчет неустановившегося движения воды в системах водотоков, по требованию выводит в заданных узлах и в расчетные моменты времени числовые значения (уровни, расходы воды, средняя в сечении скорость течения), дает их графическое представление на АЦПУ, записывает результаты на магнитный носитель.

Программа 4-2 выполняет расчет переноса примесей в системах водотоков, печатает в расчетных узлах числовые значения p, дает их графическое представление на АЦПУ и записывает результаты на магнитный носитель.

МОДУЛЬ 5. Подготовка результатов математического моделирования к анализу. Программы модуля, используя многочисленные записи на магнитные носители результатов вычислений, готовят их к содержательному анализу. Конечный результат — таблицы огибающих $Q(s_i, t_j)$, $h(s_i, t_j)$, $p(s_i, t_j)$ в системе водотоков и в характерных узлах с выводом на АЦПУ и магнитные носители.

Программа 5-1 строит и печатает на АЦПУ в табличном виде мгновенные значения уровней, расходов воды и концентраций примесей в указанных расчетных узлах с различными шагами по пространству и времени, запоминает результаты на магнитных носителях.

Программа 5-2 строит и печает на АЦПУ в табличном виде огибающие экстремальных уровней, расходов воды и концентраций примесей и время их наступления, запоминает результаты на магнитных носителях.

5 ПРИМЕРЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В данной главе приведены примеры математического моделирования движения воды и переноса примесей описанными выше методами и средствами. Для моделирования процесса движения воды в качестве примера выбрана р. Тверца как эталонный объект, используемый обычно для оценки возможностей математических моделей, и система водотоков бассейна р. Припяти как сложная система водотоков с большими нетранзитными зонами на широких поймах. Выбор объектов для моделирования процессов переноса примесей весьма ограничен. Отсутствуют экспериментальные данные о переносе при неустановившемся движении воды. Это потребовало выполнения таких экспериментов. Поэтому моделирование процесса переноса примесей выполнено применительно к широко известным экспериментальным данным при равномерном и неравномерном движении воды и специально выполненным экспериментам при неустановившемся движении.

5.1. Математическое моделирование движения воды в р. Тверце

Оценка возможностей созданных методик и средств автоматизации моделирования требует достаточно детальной морфометрической, гидравлической и гидрологической информации по водотоку. Количество объектов, которые удовлетворяли бы указанным требованиям, весьма ограничено. Среди них наиболее детальная информация об объекте и неустановившемся движении получена ГГИ во время экспериментов на р. Тверце [109]. Поэтому именно эти экспериментальные данные используются как эталонные при оценке программных средств [153, 248]. Экспериментальные исследования на р. Тверце представляют особый интерес в том смысле, что на ней имеется участок с широкой поймой, где могут возникать нетранзитные зоны в сечении водотоков, которые могут быть учтены предлагаемой математической моделью.

Экспериментальные исследования выполнялись на 48-километровом участке р. Тверцы, ограниченном сверху плотиной Новотверецкой ГЭС. Начальный участок — искусственный канал, далее следует естественное русло с низкими затопленными берегами и широкой поймой, затем — беспойменное русло.

В границах рассматриваемого участка в р. Тверцу впадает пять небольших рек и несколько ручьев и каналов. Суммарный расход воды всех притоков (около 0,49 м^3/с) мал по сравнению с попусками, которые колебались от 20 до 120 м^3/с. Боковая приточность незначительно влияет на ход неустановившегося движения воды. Однако для учета аккумулирующей емкости устьев притоков по ним выполнялись расчеты неустановившегося движения воды.

Экспериментальный участок обследован и описан с точки зрения морфометрического строения русла и поймы в работе [109]. Имеется схематичный план реки на рассматриваемом участке и продольный профиль, а также сечения русла реки в межень, описаны характер микрорельефа поймы и растительности на ней, измерены расстояния по руслу. Нанесена также сеть временных постов и гидрометрических створов. Имеющиеся исходные морфометрические данные р. Тверцы позволили построить 200 характерных поперечных сечений. С целью задания приближенных значений локальных по участкам периметра коэффициентов шероховатости использовалось краткое описание русла и поймы реки на экспериментальном участке.

Для наблюдения за водным режимом потока при неустановившемся движении на участке р. Тверцы действовала сеть временных гидрометрических створов и постов. Всего на участке было размещено 8 гидростворов и 32 поста.

Экспериментальные попуски проводились в течение 13 сут. График попусков предусматривал максимальное разнообразие видов волн.

По имеющимся исходным данным о поперечных сечениях водотока была создана математическая модель системы водотоков бассейна р. Тверцы. Для определения начальных условий моделирования неустановившегося движения воды было проведено моделирование установившегося неравномерного движения на участке реки до момента попуска. Выполнена идентификация параметров математической модели, сущность которой заключалась в уточнении локальных по участкам периметра сечения коэффициентов шероховатости.

В качестве исходной гидрологической информации использовались следующие данные:

1) гидрографы $Q(t)$ на левой границе, на правой границе — зависимость $Q(h)$;

2) гидрографы боковой распределенной приточности $q_1(s, t)$;

3) гидрографы сосредоточенной приточности $Q(t)$.

На основе неидентифицированной математической модели системы водотоков при использовании перечисленной гидрологической информации создавалась идентифицированная математическая модель системы водотоков бассейна р. Тверцы. На АЦПУ выводились в табличном виде гидрографы, графики изменений уровней во времени для постов и гидростворов. Для расчетных узлов системы в табличном виде выводились огибающие максимальных уровней и расходов.

На рис. 5.1 и 5.2 пунктирными линиями нанесены результаты математического моделирования неустановившегося движения воды при коррективах количества движения $\beta=1$ и $\beta\neq1$.

Анализ результатов математического моделирования целесообразно выполнить для трех последовательно сменяющих друг

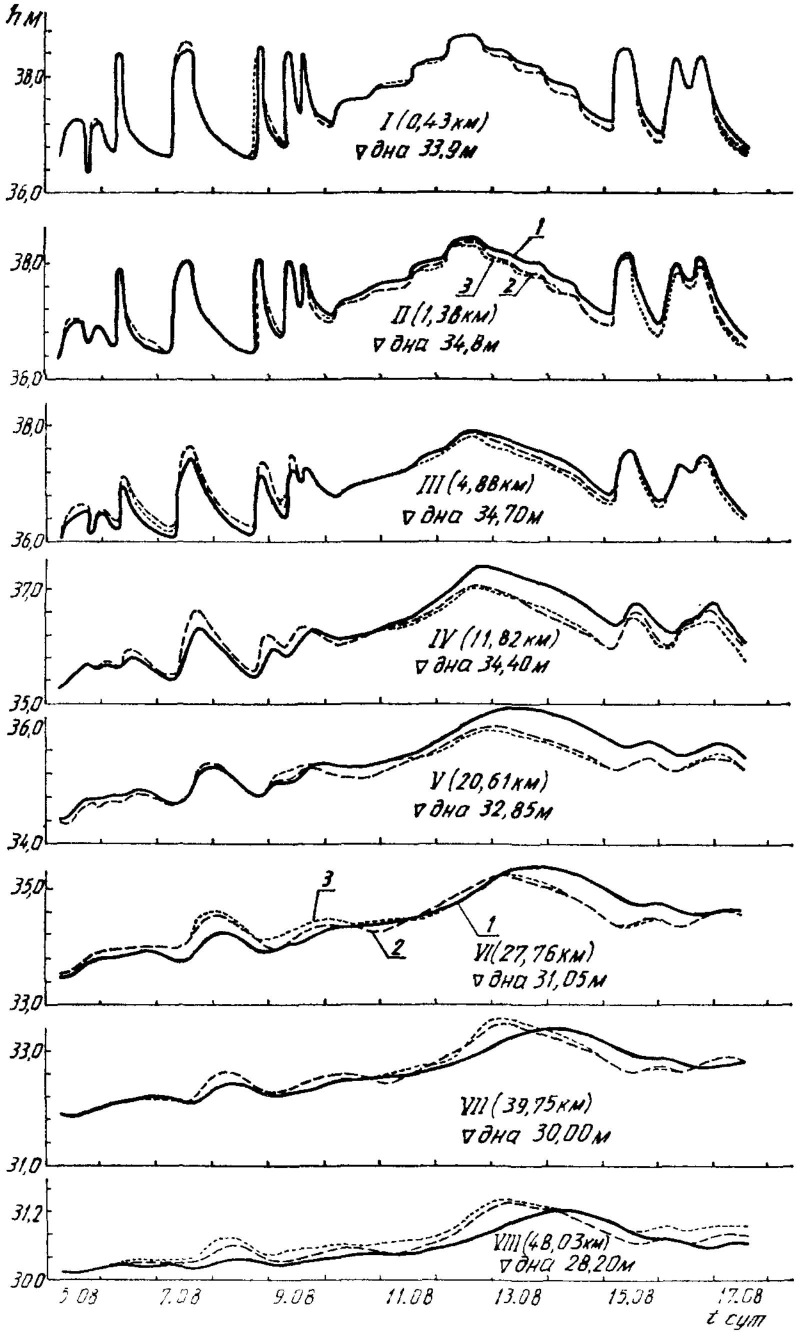


Рис. 5.1. Графики изменения уровней воды на р. Тверце.

1 — экспериментальные данные: результаты математического моделирования: *2* — при $\beta=1$, *3* — при $\beta\neq1$; *I—VIII* — гидростворы

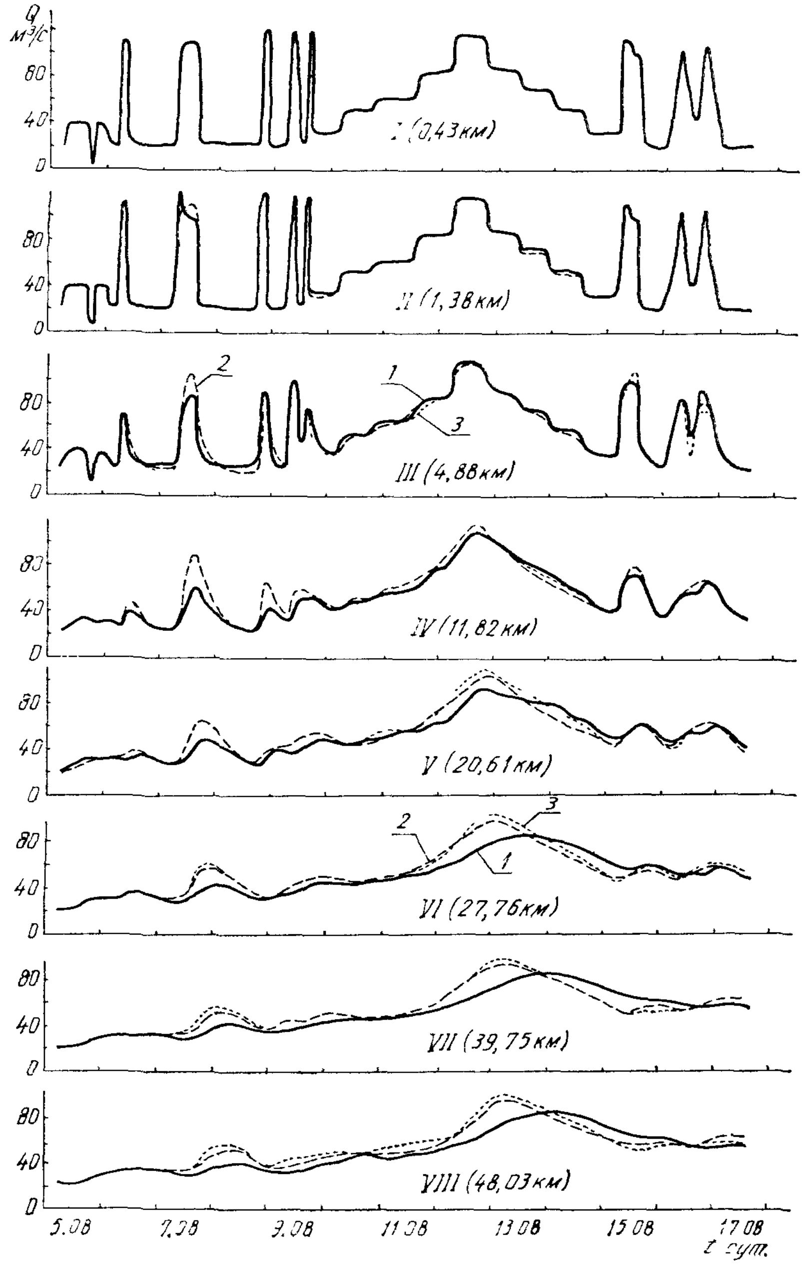


Рис 5 2 Гидрографы р Тверцы
Усл обозн см рис 5 1

друга участков: начального — канал длиной 1,50 км в нижнем бьефе Новотверецкой ГЭС; среднего, находящегося на расстоянии от 1,50 до 38,40 км, — естественное русло с низкими берегами, местами с широкой поймой; нижнего, находящегося на расстоянии от 38,40 до 48,03 км — беспойменное естественное русло.

Для начального участка уровни и расходы воды, полученные в результате математического моделирования, хорошо согласуются с наблюденными, особенно если учесть разнообразное и резкое изменение входного гидрографа.

Для среднего участка согласование результатов моделирования с наблюденными уровнями и расходами хуже. Аналогичная ситуация наблюдалась у многих разработчиков математических моделей. Обратим внимание на то, что на рис. 5.1 представлено практически лишь изменение уровней, а не глубин. Отметки дна указаны на графике изменения уровней каждого поста. Такое вынужденное представление результатов завышает визуальные оценки отклонений рассчитанных и наблюденных уровней. Можно пытаться объяснить ухудшение согласований различными причинами, в том числе и недостатками одномерной математической модели, численных методов и программного обеспечения. Однако однозначно такой вывод сделать нельзя по той причине, что морфометрическая и гидравлическая информация по некоторым характерным сечениям на среднем участке, представленная в работе [109], не может считаться полной. Следствием этого могут быть неточно определенные объемы аккумуляции и другие параметры, что влияет на вычисленные уровни и расходы воды.

На нижнем участке согласование результатов моделирования с данными наблюдений улучшается. Здесь, видимо, более точно задана морфометрическая и гидравлическая информация по беспойменному руслу. Очевидно, что в последних створах подъем уровней и увеличение расходов по данным математического моделирования происходит раньше, чем по данным наблюдений. Это можно объяснить меньшим объемом аккумуляции воды на пойме среднего участка, что согласуется с вычисленными бóльшими расходами и меньшими уровнями воды на пойме среднего участка.

Окончательные выводы о влиянии на результаты расчетов корректива количества движения сделать на основании данной модели трудно. На начальном участке учет корректива не приводит к существенным изменениям в определении уровней и расходов. Графики изменения уровней и гидрографы практически совпадают, поэтому они и обозначены одной пунктирной линией. На среднем и нижнем участках различия больше. Хотя учет корректива и делает графики изменения всегда более плавными, иногда лучше совпадающими с наблюденными, окончательно оценку влияния корректива количества движения сделать затруднительно. По-видимому, причина заключается в том, что все характеристики естественного водотока, а соответственно и параметры математической модели объекта, изменяются по длине разнородно, что приводит к компенсации некоторых слагаемых уравнений движения.

5.2. Математическое моделирование водного режима системы водотоков бассейна р. Припяти в естественном состоянии и при обваловании

Описанию технологии создания математических моделей систем водотоков бассейна р. Припяти, неустановившегося движения воды в них ниже уделяется значительное внимание в связи с тем, что без учета особенностей движения воды при выходе потока на широкие поймы было невозможно решить возникающие задачи, используя традиционный подход, основанный на одномерных уравнениях Сен-Венана. На поймах возникали значительные нетранзитные зоны, включать которые в площади живых сечений было принципиально неверно. Количество первичной информации переработать обычными методами и средствами было также практически невозможно, особенно в связи с жестко регламентированными сроками. Уточнение локальных характеристик шероховатости поймы в междамбовом пространстве также имело существенное значение. Поэтому применение описанных в книге методов и средств было необходимым условием выполнения работ. Более того, описанные в книге методы и средства были в начальный период созданы для математического моделирования неустановившегося движения воды в системе водотоков бассейна р. Припяти, а затем использованы на других объектах. Это позволило дать оценку возможностей технологии автоматизированного моделирования.

Необходимо отметить, что в период, когда выполнялись расчеты водного режима систем водотоков бассейна р. Припяти, еще не была разработана методика определения корректива количества движения. Поэтому он принимался, как обычно, постоянным и равным единице. Повторить расчеты в более поздние сроки не представилось возможным.

Защита поймы р. Припяти и ее основных притоков имеет важное народнохозяйственное значение, так как в среднем 9 раз в 10 лет в период половодья и летне-осенних паводков затапливаются значительные площади Продолжительное весеннее половодье не позволяет интенсивно использовать пойменные земли. Значительные ущербы наносятся не только сельскому хозяйству, но и инженерным сетям, коммуникациям и другим народнохозяйственным объектам. Поэтому было принято решение о выполнении работ по защите поймы реки от затоплений при условии искусственного поддержания в заповедных местах естественного водного режима

На большей части водотоков расстояние между дамбами в несколько раз меньше ширины поймы, затапливаемой в естественном состоянии. Поэтому после обвалования поперечные сечения стали существенно отличаться от естественных, что привело к изменению режима уровней и расходов. Определение водного режима значительной по размерам сложной системы водотоков в настоящее время возможно практически только методами математического моделирования.

Математическое моделирование процесса движения воды выполнено для системы водотоков суммарной длиной 940 км, включая суммарную длину (500 км) восьми притоков [179, 181, 253, 359]. Верхние граничные створы выбраны достаточно далеко от границ обвалования с тем, чтобы на их водный режим не оказывали влияния дамбы. Нижний расчетный створ выбран по железнодорожному мосту у г. Мозыря. На пропускную способность реки в створе моста дамбы также не влияют. Схема системы водотоков бассейна р. Припяти представлена на рис. 5.3. Участки водотоков, для которых необходимо было выполнить математическое моделирование, показаны утолщенной линией. Прежде чем приступить к созданию математической модели водного режима, были изучены особенности водотоков и движения воды в них.

Пойма р. Припяти и большинства ее притоков плоская, с невыраженным рельефом и местными понижениями. Она изобилует старицами, есть небольшие озера. Пойма закустарена, залесена, заросли кустов имеют различную плотность. Леса лиственные с подлеском. Болота покрыты тростником и камышом. Понижения поймы преимущественно вытянуты в направлении долины и относительно свободны от кустарников. По-видимому, они сформированы транзитными потоками паводочных вод. Ширина русла и поймы р. Припяти и притоков колеблется в широких пределах (от сотен метров до десятков километров). Максимальная ширина р. Припяти с поймой в ее среднем течении между устьями рек Ясельды и Бобрика достигает 30 км. Кустарники занимают ориентировочно 10 % общей площади затапливаемой поймы, лес — 17 %, болота — 10 %. Остальная часть поймы — луга и пашни.

В таких условиях процесс движения воды весьма сложен. Для изучения его особенностей Белгипроводхозом были выполнены аэрофотосъемки поймы р. Припяти и частично ее притоков на различных фазах прохождения паводка. Как показал анализ аэрофотоснимков, движение воды на пойме происходит в отдельных местах, на значительной ее части движение практически отсутствует. Суммарная ширина этих зон в одних и тех же местах различна на разных фазах прохождения паводка и при средних глубинах может достигать $^2/_3$ общей ширины затопления. Нетранзитные зоны играют роль аккумулирующих емкостей, уменьшаются с увеличением глубины и при высоких уровнях могут исчезнуть вовсе. На рис. 5.4 представлены схемы к выделению явно и неявно нетранзитных частей сечения в пойме р Припяти. Неявно нетранзитные зоны располагаются над залесенными и закустаренными частями пойм Они выделяются автоматически При повышении уровня нетранзитные части становятся транзитными На правобережной пойме имеются две старицы Над ними выделены до выполнения расчетов явно нетранзитные части сечения.

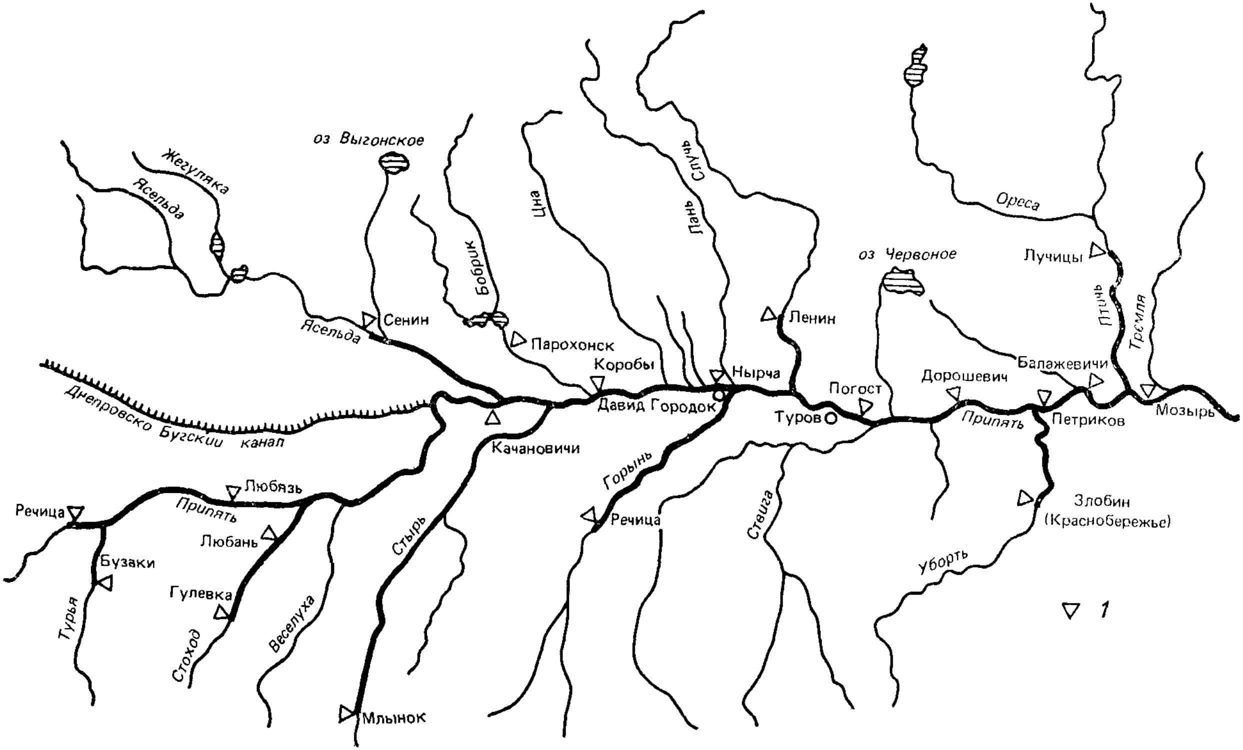


Рис 53 Схема системы водотоков бассейна р. Припяти.
1 — гидрологический пост

Отмеченные особенности движения воды в руслах с поймами наблюдались неоднократно на других объектах и достаточно детально описаны в работах [17, 79, 273, 283, 284, 297]. Выполненные расчеты [214], учитывающие аккумуляцию воды на пойме, для объектов, имеющих наблюдения за уровенным режимом, показали, что учет нетранзитных зон на пойме необходим.

Большая протяженность дамб обвалования, существенное стеснение ими основного водотока и притоков приводят к изменению

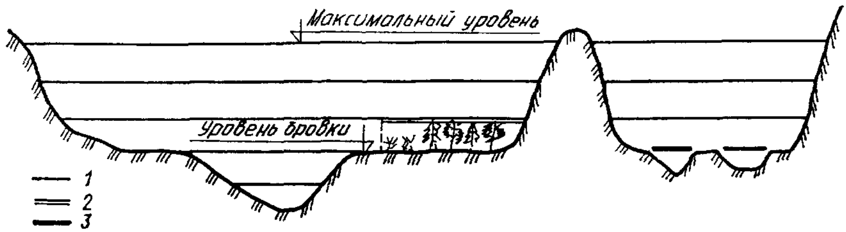


Рис. 5.4. К выделению нетранзитных частей в сечениях водотока.
1 — характерные уровни, 2 — неявно нетранзитные части сечения, 3 — явно нетранзитные части сечения

прохождения паводочных волн как в р. Припяти, так и в притоках и, следовательно, к другому режиму их наложения. Изучение водного режима системы в новых условиях необходимо было выполнить с большой тщательностью, так как неточности расчетов могли привести к неверному высотному положению дамб на протяжении почти 1000 км. В связи с этим предъявлялись высокие требования прежде всего к заданию и проверке исходной информации о морфометрических и гидравлических характеристиках водотоков.

Исходная информация о водотоках задавалась в характерных сечениях, которые выбирались в местах значительного изменения геометрии сечений водотоков и шероховатости их поверхностей. При создании математической модели системы водотоков бассейна р. Припяти в естественном состоянии использовано 230 характерных створов, в условиях обвалования — 270.

Информация о характерных сечениях задавалась двух видов: морфометрическая и гидравлическая. Сведения о геометрии характерных сечений получены на основе картографических материалов, которые в отдельных случаях дополнялись данными непосредственных измерений

Гидравлическая информация задавалась следующим образом. Предварительно по топографическим материалам, используя известные таблицы, определяли коэффициенты шероховатости. Затем их уточняли наблюдениями с вертолета путем сравнения местности со словесным описанием аналогов в таблицах. Однако пределы изменения коэффициентов шероховатости даже для одного и того же описания в таблицах различаются в несколько раз. Выбранные таким образом коэффициенты шероховатости можно считать лишь качественной оценкой, но не количественной характеристикой, а полученные по этим коэффициентам параметры математической модели будут лишь первым приближением. Поэтому значения коэффициента уточняли идентификацией При этом первоначальное значение коэффициента шероховатости использовали в качестве первого приближения. Такую идентификацию модели по средним в сечении коэффициентам шероховатости оказалось невозможным выполнить на всем графе. На небольшой части графа, начиная с 19-й и до середины 17-й дуги (рис. 5.5, 5.8) идентификация была невозможной, так как необходимые наблюдения не проводились. Поэтому на этой части графа при идентификации использован метод аналогий. На всех остальных дугах графа тщательная идентификация выполнена при использовании уравнения неравномерного движения воды, как описано в п. 3.9.

Половодье в системе водотоков бассейна р. Припяти характеризуется большой продолжительностью. В течение нескольких месяцев его прохождения меняется растительный покров поймы, что, безусловно, сказывается на гидравлических сопротивлениях, которые изменяются во времени. Чтобы учесть это обстоятельство, математическая модель системы идентифицировалась для двух моментов времени. За первый принималось начало половодья, за второй — время прохождения максимума уровней. В гидравлическом отношении эти моменты времени различались коэффициентами шероховатости, идентифицированными на различные уровни. Для двух различных распределений коэффициентов шероховатости строились две математические модели системы водотоков, соответствующие двум характерным моментам прохождения паводка. В промежуточные моменты значения параметров модели вычислялись интерполяцией, причем интерполировались линейно линейные параметры моделей и приведенный коэффициент шероховатости, остальные — вычислялись с учетом идентификации.

Уточнение только приведенных коэффициентов шероховатости было недостаточным, так как в дальнейшем необходимо было знать идентифицированные значения локальных коэффициентов шероховатости участков сечений, находящихся в междамбовом пространстве. Способ уточнения локальных по участкам периметра коэффициентов шероховатости описан в п. 3.9.

Построение математической модели для условия обвалования выполнялось следующим образом. В характерном сечении с уточненными локальными коэффициентами шероховатости задавалось плановое расположение дамб обвалования и их высотное положение, заведомо превышающее ожидаемые уровни. На поверхности дамбы задавался коэффициент шероховатости, равный 0,022, и дальнейшее вычисление параметров математической модели выполнялось по описанным ранее методикам.

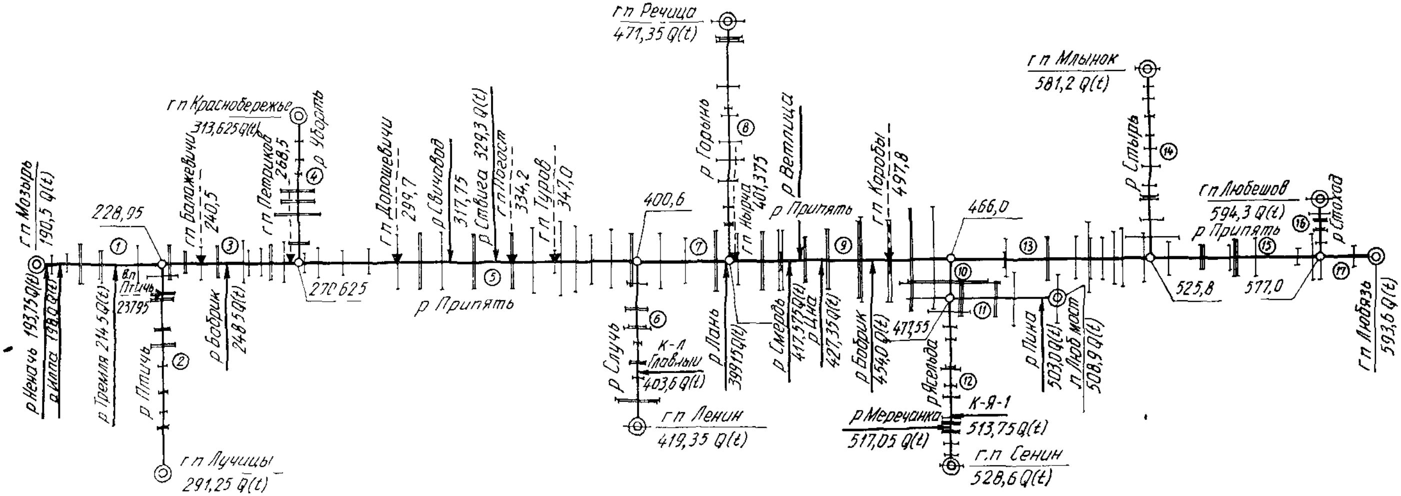


Рис 5 5 Граф системы водопотоков бассейна р. Припяти для естественных услозий

Граф, на котором выполнялось математическое моделирование движения воды в системе водотоков для естественных условий, представлен на рис. 5.5. На рисунках нанесены характерные створы. Графы различаются расстоянием между отдельными створами, так как на некоторых участках водотоков предусматривались спрямления русла и переброски стока.

В связи с высокими требованиями, предъявляемыми к точности определения параметров математической модели водотоков, исходная информация о характерных сечениях тщательно контролировалась, после чего использовалась для создания математических моделей систем водотоков в естественном состоянии и при обваловании.

В качестве исходной задавалась следующая гидрологическая информация:

1) гидрографы в граничных постах: Речица на р. Припяти, Бузаки на р. Турье, Любешов или Гулевка на р. Стоходе, Млынок на р. Стыри, Сенин на р. Ясельде, Любанский мост — на Старой Припяти, Речица на р. Горыни, Ленин на р. Случе, Злобин на р. Уборти, Лучицы на р. Птичи;

2) гидрографы сосредоточенной приточности задавались в устьях следующих притоков: Бобрик, Цна, Смердь, Лань, Канал Главный, Ствига, Свиновод, Бобрик, Тремля, Иппа, Неначь;

3) гидрографы расходов боковой приточности для всех дуг графа.

Боковая распределенная приточность задавалась в виде гидрографов удельных расходов по характерным участкам системы водотоков. Ее объем определялся по разности объемов стока в створах соседних гидрологических постов, а распределение во времени — по аналогии с учетом физико-географических характеристик водозаборов расчетного и аналога. Вся исходная информация готовилась Белгипроводхозом на бланках, представленных на рис. 4.1 и 4.2. Параметры математических моделей систем водотоков были идентифицированы на два момента времени: на начало паводка 1976 г. и на время прохождения максимума уровней. К 1976 г. в бассейне р. Припяти были организованы дополнительные гидрологические посты, поэтому имелись наиболее полные сведения о режиме уровней, стока и затоплении поймы, что позволило выполнить тщательную идентификацию параметров математической модели системы водотоков. На момент начала паводка была решена задача о стационарном движении в системах водотоков без обвалования и при обваловании. Ее результаты являлись начальными условиями для расчета неустановившегося движения воды в системах водотоков.

Расчеты водного режима системы водотоков выполнялись на гидрологические условия шести реальных лет. 1931, 1932, 1956, 1958, 1970, 1976. Из них все, кроме 1976, можно отнести к многоводным годам, наблюдавшимся за последние 60 лет.

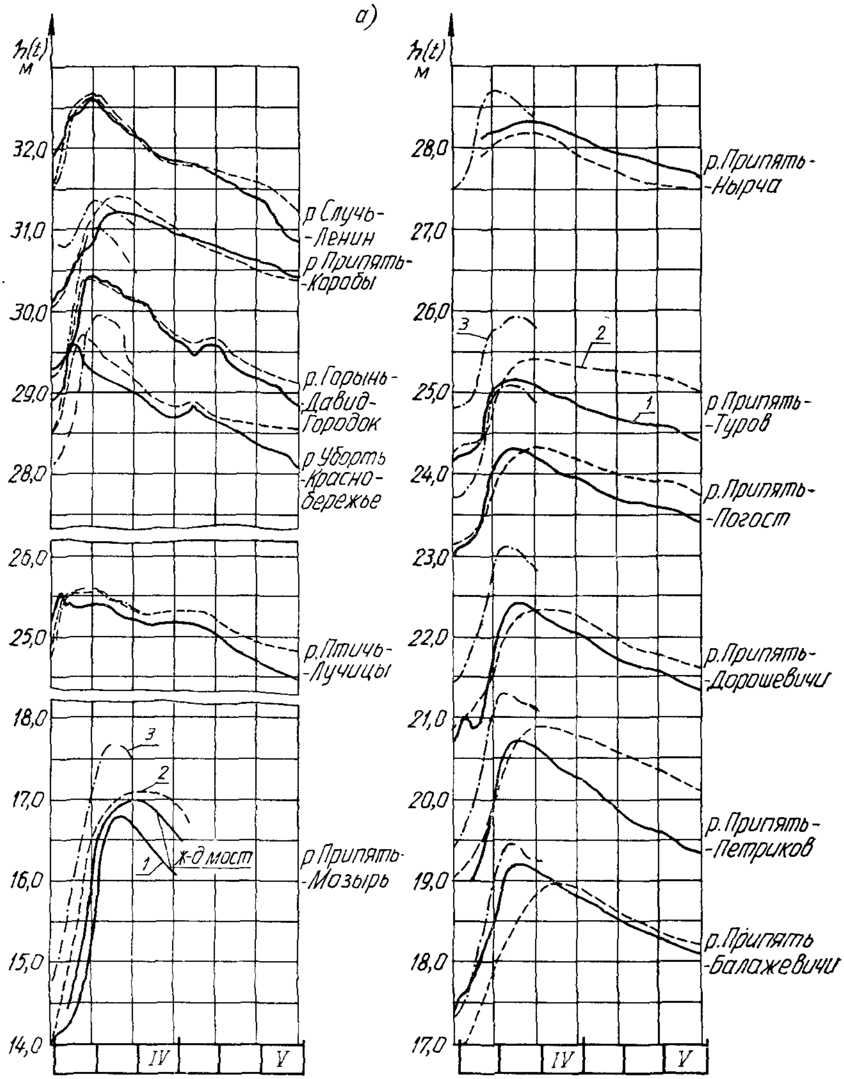
Сначала моделировалось неустановившееся движение воды для естественного состояния систем водотоков по гидрологическим условиям 1976 г. Согласование результатов расчетов с наблюденными уровнями и расходами на постах было удовлетворительным. Однако так как при идентификации модели были использованы гидрологические условия 1976 г., требовалась оценка пригодности модели для воспроизведения водного режима других расчетных лет, причем в данном случае, в связи с изменением во времени шероховатости пойм, целесообразно было использование гидрологических условий ближайшего из расчетных лет. Поэтому для оценки был взят 1970 г.

На рис. 5.6 представлены изменения уровня воды на гидрологических постах системы водотоков, наблюденные в 1976 и 1970 гг. и полученные в результате математического моделирования. На рис. 5.7 приведены гидрографы по гидрологическому посту Туров, наблюденные и полученные в результате математического моделирования движения воды в системе водотоков бассейна р. Припяти на гидрологические условия 1976 и 1970 гг. в естественном состоянии и при ее обваловании.

Сравнивая графики изменения уровней и гидрографы (рис. 5.6, 5.7), можно прийти к следующим выводам. Учитывая сложность движения воды на взаимно влияющих друг на друга из-за небольших уклонов дна 19 участках системы водотоков, имеющих суммарную почти тысячекилометровую длину, и ширину, изменяющуюся от сотен метров до нескольких десятков километров в пределах закустаренных, заболоченных и залесенных пойм, можно прийти к выводу об удовлетворительном согласовании уровней, полученных в результате моделирования, с наблюденными. Практически везде удалось повторить при математическом моделировании все особенности наблюденных графиков изменения уровней. Имеется некоторый сдвиг в наступлении максимумов уровней, что можно объяснить сложностью и, пожалуй, невозможностью задания с высокой точностью гидрографов удельной боковой распределенной приточности, поскольку ее приходилось восстанавливать методом аналогий и по балансу стока на редко расположенных гидрологических постах.

Гидрографы, полученные в результате моделирования, повторяют все особенности наблюденных, однако максимумы расходов, полученные с помощью математического моделирования, на 15—30 % выше наблюденных. Эти расхождения можно объяснить трудностью задания с высокой точностью распределения в пространстве и времени боковой распределенной приточности, сложностью измерений расходов в широких створах гидрологических постов, разновременностью наступления максимумов уровней и расходов, что, в принципе, затрудняет возможность измерения именно максимальных расходов

Поскольку целью математического моделирования неустановившегося движения воды было обоснование высотного положения дамб обвалования, определяющими характеристиками являлись максимальные уровни, которые удовлетворительно согласуются с наблюденными. Сравнение максимальных уровней, полученных



в результате моделирования, с наблюденными на гидрологических постах системы водотоков позволило сделать вывод, что они удовлетворительно согласуются между собой как в 1976 г., так и в 1970 г. (см. рис. 5.6 *а, б*). Из отклонений максимальных уровней, полученных в результате математического моделирования, от наблюденных был составлен ряд для оценки погрешностей моделирования. Ряд был обработан статистическими методами. В результате оказалось, что средняя погрешность моделирования максимальных уровней равна 0,10 м, а при доверительной вероятности 0,99 она не превышает 0,25 м.

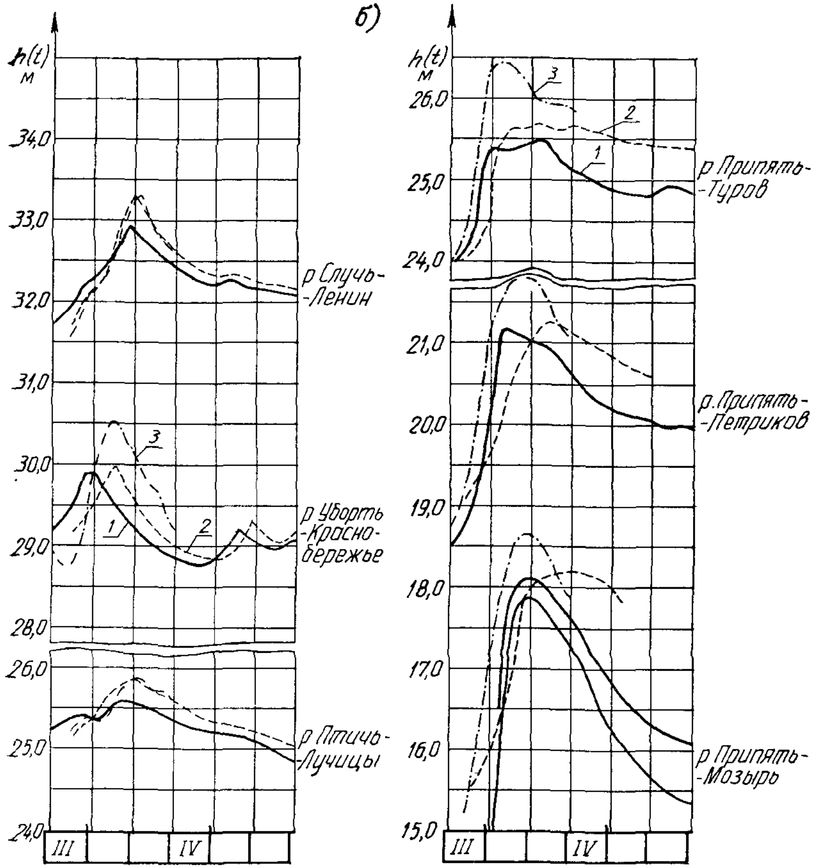


Рис. 5.6. Графики изменения уровней воды в системе водотоков бассейна р. Припяти.

Гидрологические условия: *а* — 1976 г., *б* — 1970 г.; *1* — наблюденные данные; результаты математического моделирования; *2* — для естественных условий, *3* — для условий обвалования.

Результаты математического моделирования движения воды в системе водотоков бассейна р. Припяти подтвердили приемлемость разработанных методик, алгоритмов и программ и позволили не только качественно, но и количественно оценить погрешность математического моделирования максимального уровня — важнейшей характеристики, определяющей высотное положение дамб.

Полученные оценки погрешностей расчетов максимальных уровней для сложной системы водотоков суммарной длиной около 1000 км можно считать удовлетворительными. Можно объяснить малую погрешность математического моделирования максимальных уровней двумя причинами. Первая из них — тщательная идентификация коэффициентов шероховатости. Перед началом расчетов были организованы экспедиционные наблюдения с помощью вертолетов, которые позволили уточнить локальные значения коэффициентов шероховатости для основных характерных створов. По этим данным и результатам гидрологических наблюдений

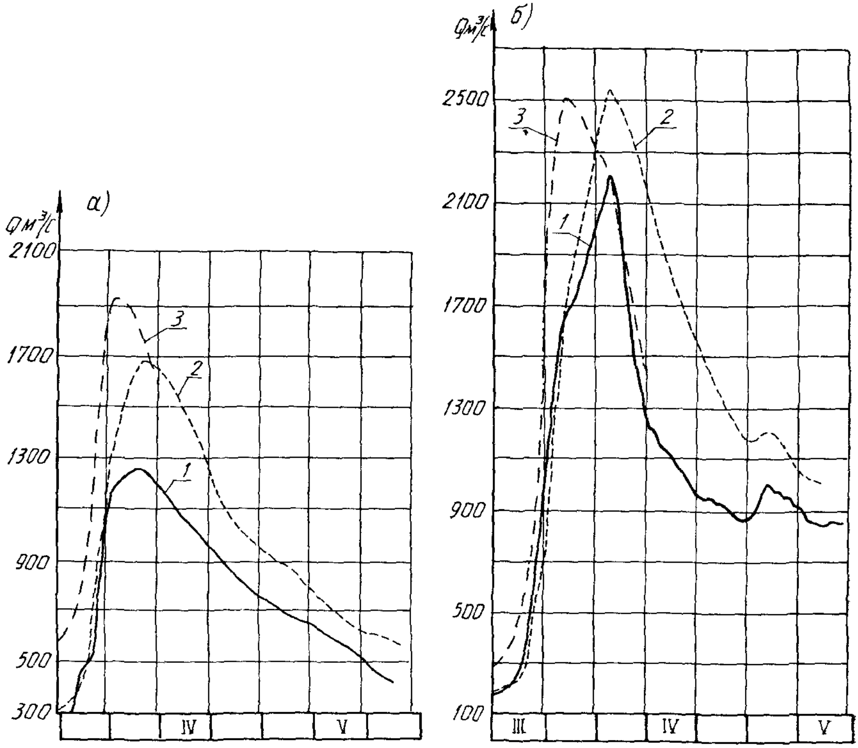


Рис. 5.7 Гидрографы р Припяти у гидрологического поста Туров.
Усл обозн см рис 5 6.

1976 г. по расширенной программе была весьма тщательно выполнена идентификация математических моделей движения на моменты времени, близкие к прохождению минимальных и максимальных расходов. Это позволило учесть изменения параметров моделей в пространстве и времени. Второй причиной можно назвать особенности движения воды на весьма широкой пойме р. Припяти, играющей роль большой аккумулирующей емкости, для изменения уровней которой нужны большие объемы стока. Это привело к тому, что если и имели место погрешности в определении расходов, то они не могли привести к существенным погрешностям определения уровня воды. Следовательно, с помощью

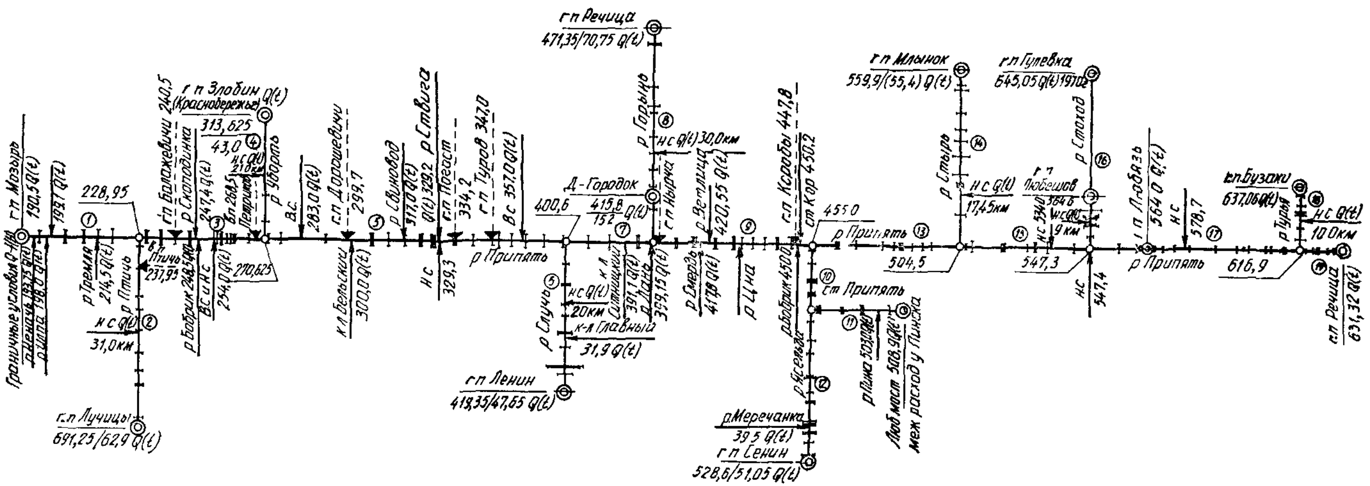


Рис 58 Граф системы водотоков бассейна р Припяти для условий обвалования.

одномерных математических моделей движения воды можно решать многие задачи применительно к водотокам с широкой поймой, что, вообще говоря, дискутируется.

Выполненные качественные и количественные оценки результатов математического моделирования движения воды в бассейне р. Припяти в естественном состоянии позволили сделать вывод о том, что уравнения движения, методики расчета параметров математических моделей водотоков, методики решения задачи о неустановившемся движении воды в системах водотоков, алгоритмы и программное обеспечение могут быть использованы для расчетов водного режима систем водотоков в относительно более простых условиях обвалования основных водотоков бассейна реки.

Расчеты водного режима для систем водотоков в условиях обвалования выполнялись аналогично. На рис. 5.8 представлен граф системы водотоков в условиях основного варианта обвалования. Заметим, что расстояния между соответствующими узлами графа обычно меньше естественных, так как на некоторых участках проектировались спрямления русла и переброски стока. Кроме того, к основному водотоку подключен участок графа выше поста Любязь. На графе указаны насосные станции, режим работы которых учитывался при математическом моделировании. В результате математического моделирования для гидрологических условий каждого из шести расчетных лет были вычислены мгновенные значения уровней и расходов воды для различных моментов времени прохождения паводка во всей системе водотоков. Для оперативного анализа результаты расчетов выводились на печать в табличном и графическом виде с заданным шагом по времени. С помощью сервисных программ были построены огибающие максимальных уровней и расходов, а также гидрографы и графики изменения уровней в различных характерных точках системы, например на постах. Для гидрологических условий 1970 и 1976 гг. они представлены на рис. 5.6, 5.7. Для гидрологических условий шести расчетных многоводных лет уровни, определенные математическим моделированием движения воды в системе обвалованных водотоков, превысили уровни воды в естественном состоянии в соответствующие годы.

Уровни воды, определенные моделированием, были использованы Белгипроводхозом для определения обеспеченных расчетных максимальных уровней и расходов весеннего половодья в системе водотоков [296].

Для постов Мозырь, Туров, Коробы, Сенчицы, Любязь, Невир, Выжевский гидроузел и Речица обеспеченные уровни воды в проектных условиях определены построением верхней ветви кривой обеспеченности. Максимальные уровни воды в условиях обвалования реки за 6 лет наносились на клетчатку вероятности соответственно обеспеченности уровней в естественных условиях. Кривые обеспеченности строились с соблюдением условий наименьшего отклонения от эмпирических точек.

Построенные верхние участки кривых обеспеченности для проектных условий являются касательными к кривым обеспеченностей уровней в естественных условиях на участке 60—85 %-ной обеспеченности, т. е. до отметки, когда уровень начинает превы-

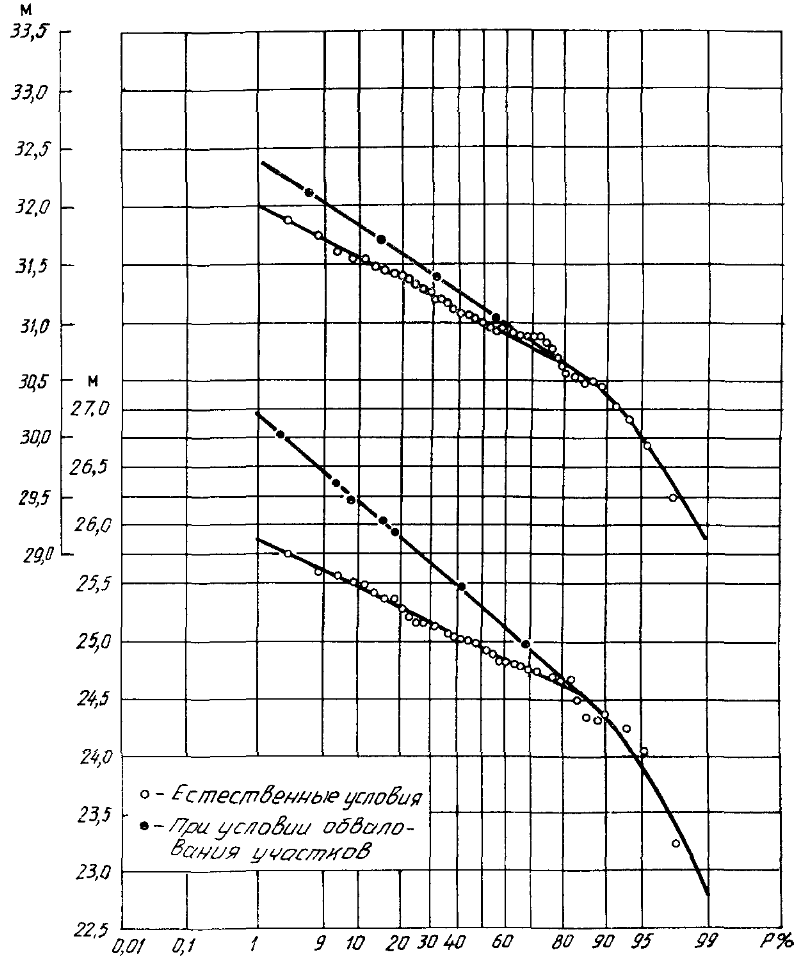


Рис. 5.9 Кривые обеспеченности максимальных уровней весеннего половодья на гидрологических постах Туров и Коробы в естественных условиях и после обвалования системы водотоков

шать отметки подошвы дамб обвалования и начинает сказываться влияние обвалования на режим пропуска половодья (рис. 5.9).

Для других постов на р. Припяти и устьевых участках ее притоков максимальные уровни воды весеннего половодья в проектных условиях получены по графикам связи. Линия связи для проектных условий в большинстве случаев или совпадает с направлением линии связи для естественных условий, или параллельна ей и смещена не более чем на 30 см, что указывает на практически идентичные изменения морфометрических характеристик в опорных и передаточных створах. Среднее отклонение определенных математическим моделированием максимальных уровней весеннего половодья за характерные годы от уровней, определенных по осредненной кривой обеспеченности для условий обвалования, составляет 0,05 м, максимальные — 0,25 м, кроме створа Выжевского гидроузла. Отклонение по Выжевскому гидроузлу составляет 0,5 м, что объясняется устранением переливов в Днепро-Бугский канал.

Таблица 5.1

Изменение максимальных уровней воды р. Припяти под влиянием обвалования

Гидрологический пост	Расстояние от устья, км	Превышения над естественными уровнями, м							
		вычисленные с помощью математической модели						обеспеченные на	
		1931 г.	1932 г.	1956 г.	1958 г.	1970 г.	1976 г.	1 %	25 %
Речица	654,3	0,5	0,7	0,5	0,6	0,3	0,1	0,9	0,3
Любязь	586,1	1,7	1,5	1,5	1,4	1,3	1,2	2,0	1,2
Качановичи	479,3	—0,3	—0,6	—0,5	0,7	0,8	—0,2	0,0	0,0
Коробы	447,6	0,0	0,6	0,3	0,2	0,2	0,1	0,4	0,2
Туров	347,0	0,7	1,0	0,7	0,6	0,9	0,8	1,1	0,6
Петриков	268,6	0,5	1,2	0,6	0,6	0,7	0,6	1,3	0,4
Мозырь	193,2	—	—	0,0	0,1	0,5	0,6	1,0	0,3

В табл. 5.1 приведено превышение уровней воды в проектных условиях над естественными за исключением участка Старой Припяти (с. Качановичи), пропуск воды на котором ограничивался 40 м^3/с. Режим этого участка определялся стоком рек Ясельды и Пины; участок находился в подпоре от основной трассы р. Припяти.

Наибольшее увеличение уровней в проектных условиях при 1 %-ной обеспеченности отмечалось у с. Любязь, что вызвано устранением перелива части стока в Днепро-Бугский канал. Наименьшее увеличение уровней наблюдалось у с. Коробы и составляло 0,4 м. В среднем на участке от с. Речицы до г. Мозыря превышение составило 1,0 м. Наименьшие уровни и расходы будут на участке р. Припяти от нового устья р. Стыри до устья р. Ясельды, так как после обвалования попуски воды во входной створ участка Старой Припяти допускаются объемом не более 40 м^3/с (до полного наполнения русла). Сток рек Припяти и Стыри при расходах выше 40 м^3/с направляется в Припять ниже по течению, вследствие этого ее водный режим на участке от устья р. Ясельды до нового устья р. Стыри формируется реками Ясельдой и Пиной и зависит от подпора в месте слияния Припяти и Стыри.

По изложенной методике построены кривые обеспеченности максимальных расходов воды весеннего половодья в створах постов Коробы, Туров и Мозырь. Максимальные расходы 1 %-ной обеспеченности после обвалования по сравнению с естественными по посту Коробы увеличились на 100 $м^3/с$ (5 %), по посту Туров — на 900 $м^3/с$ (23 %) и по посту Мозырь — на 600 $м^3/с$ (10 %), т. е. от 5 до 23 %. Максимальные расходы наступают ранее, чем максимальные уровни.

5.3. Примеры математического моделирования переноса примесей

Используемые при математическом моделировании уравнения движения и переноса являются приближенными, методики расчета параметров — полуэмпирическими, методы решения возникающих задач — численными. Все это потребовало оценки погрешности окончательных результатов математического моделирования переноса примесей. Экспериментальных исследований переноса примесей значительно меньше, чем исследований движения воды. Поэтому, во-первых, выполнить двухточечные оценки погрешностей математического моделирования процесса переноса не представляется возможным; во-вторых, в связи с недостаточностью экспериментальных данных, особенно в полевых условиях и при неустановившемся движении воды, необходимо было выполнять и экспериментальные исследования. Если коэффициент дисперсии был установлен экспериментально, то при математическом моделировании переноса примесей для условий различных экспериментов его значение использовалось при математическом моделировании процесса. Если экспериментальное значение коэффициента дисперсии не определялось, то модуль коэффициента дисперсии вычислялся по методике, изложенной в п. 3.7. При математическом моделировании значение модуля коэффициента дисперсии $|D|$, содержащегося в таблицах параметров математической модели (см. табл. 3.1), умножалось на $\sqrt{I}=|Q|/K$.

Ниже приводится сравнение результатов математического моделирования процесса переноса примесей с помощью описанных выше методов и средств с экспериментальными данными различных авторов. При изложении результатов экспериментальных исследований кратко описываются условия выполнения эксперимента и некоторые основные характеристики течения.

На рис. 5.10 *а* представлено сравнение результатов математического моделирования с экспериментальными данными и результатами моделирования Фишера [336]. Опыты выполнены в лотке трапецеидального сечения, шириной по дну 0,32 м, заложением откосов 1 : 1, глубиной 0,035 м; абсолютные размеры шероховатости откосов 0,0254 м; дно лотка выполнено из шифера. Длина рабочей части экспериментальной установки 40 м, расстояние между граничным створом и створом, в котором выполнялись измерения, 11,95 м, средняя скорость $v=0{,}444$ м/с, экспериментальный коэффициент продольной дисперсии $D=0{,}25$ м^2/с.

Передний фронт волны, полученный в результате математического моделирования, выполненного Фишером и нами, более пологий, чем наблюденный. После прохождения максимума концентраций, который удовлетворительно согласуется по времени и

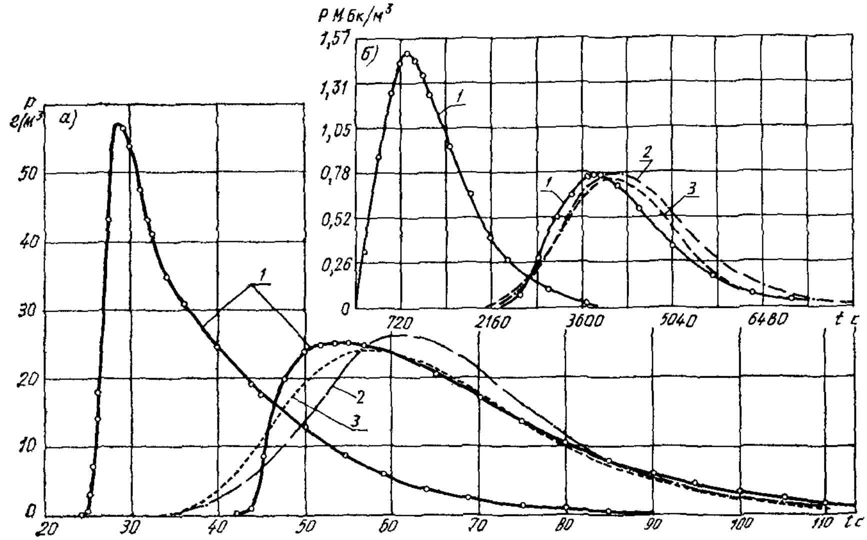


Рис. 5.10. Сравнение результатов математического моделирования с экспериментальными данными Фишера.

Данные заимствованы из работ *а* — [332], *б* — [333], *1* — экспериментальные данные, результаты математического моделирования *2* — выполненного Фишером, *3* — описанным выше методом

амплитуде, результаты моделирования и экспериментальные данные практически совпадают.

Опыты, результаты которых приведены на рис. 5.10*б*, выполнялись Фишером [333] в естественном водотоке со сложной формой сечения. Приведем некоторые осредненные характеристики течения: ширина реки по свободной поверхности около 18 м, максимальная глубина 1,04 м, площадь сечения 13,8 м^2, $v=0{,}49$ м/с, экспериментальное значение $D=21{,}4$ м^2/с. Расстояние между граничным створом и створом, в котором выполнялись измерения и сравнения результатов расчетов, 1731 м

В связи с тем что количество вещества примесей, вычисленное для граничного створа и створа, в котором выполнялись измерения концентраций и сравнения с данными моделирования, и определенное по измеренной концентрации, различались, учитывались процессы самоочищения по реакции первого порядка. Сравнивая экспериментальную кривую изменения концентраций и кривую, полученную в результате моделирования процесса переноса, можно отметить следующее. Формы кривых и максимальные значения концентраций согласуются между собой удовлетворительно, однако максимумы несколько сдвинуты по времени как по результатам моделирования Фишера, так и по нашим данным. Объяснением этого может служить замечание, имеющееся в работе Фишера [333], о том, что данные о скорости течения воды были получены во время другого опыта.

Экспериментальное изучение распределения продольных скоростей течения и переноса примесей в условиях неравномерного движения воды выполнялось в ЦНИИКИВРе в прямолинейном трапецеидальном лотке длиной 72 м, шириной по дну 1,02 м, заложением откосов 1 : 1. Продольный уклон дна канала составлял 0,00036. Шероховатость ложа канала была однородной и создавалась путем покрытия дна и стенок лотка мелкозернистым песком фракции 0,63—1,25 мм, что соответствовало коэффициенту шероховатости $n=0{,}017$. План и поперечное сечение лотка представлены на рис. 5.11.

Измерение глубин, распределения скоростей течения и концентрации примеси производилось в трех гидрометрических створах, расположенных на расстояниях 16, 40 и 60 м от входа в канал. В качестве индикатора использовался раствор соли $NaNO_3$ в концентрации 75 г/л, который сбрасывали мгновенно в оголовок лотка, что способствовало улучшению перемешивания раствора. Движение воды в канале было замедленным. Опыты выполнялись для двух расходов (Q_1 и Q_2). Основные гидравлические параметры потоков приведены в табл. 5.2.

В гидрометрических створах измерялась непосредственно электрическая проводимость воды, а зависимость между ней и концентрацией устанавливалась градуировкой прибора, которая проводилась до и после выполнения экспериментов. При этом использовалась вода из лотка той же температуры и минерализации, которые имели место в период проведения эксперимента.

Измерение электрической проводимости воды в гидрометрических створах производилось в 25 точках сечения, расположенных по пять на каждой из пяти вертикалей, и в трех контрольных точках сечений.

Первичные измерительные преобразователи при измерении концентрации на вертикалях располагались на расстояниях 15, 30, 70, 120, 163 мм от дна канала при средней глубине в нем $H_{1\,ср}=$ $=171$ мм и 15, 60, 140, 240, 324 мм — при $H_{2\,ср}=332$ мм. Вертикали размещались следующим образом· одна на оси потока, а остальные на расстоянии 0,31 и 0,51 м по обе стороны от оси

Измерения в каждом гидрометрическом створе выполнялись последовательно при идентичных сбросах раствора, причем при измерении всех характеристик в одном гидрометрическом створе в двух других створах в центре потока устанавливались контрольные измерительные преобразователи, которые регистрировали электрическую проводимость воды. Показания их использовались в дальнейшем при обработке результатов измерений в качестве

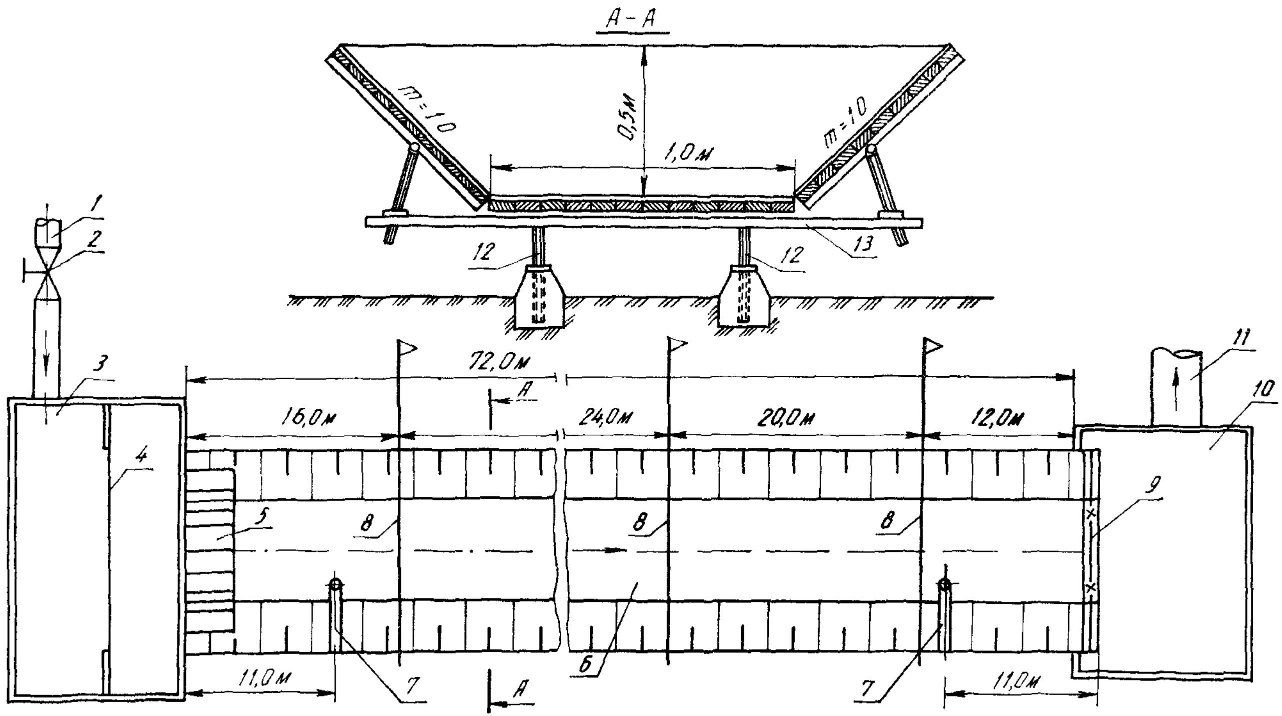


Рис 5 11 План и поперечное сечение гидрометрического лотка

1 — напорный трубопровод 2 — задвижка, 3 — верхний оголовок 4 — мерный водослив 5 — пластинчатые направляющие, 6 — лоток, 7 — шпитценмасштаб, 8 — гидрометрические створы, 9 — затвор 10 — низовой оголовок 11 — отводящий канал

контрольных для установления идентичности процесса. Все 28 вторичных преобразователей измерителя электрической проводимости воды, а также секундомер для фиксирования времени прохождения волны концентрации через гидрометрический створ были смонтированы на одной панели. Это позволило для одновременной регистрации показаний всех приборов использовать фотоаппарат. Интервалы времени регистрации показаний приборов не были

Таблица 5.2

Основные характеристики потоков

Номер гидрометрического створа	$Q_1=0{,}333$ м³/с				$Q_2=0{,}209$ м³/с			
	глубина h м	площадь поперечного сечения A м²	средняя скорость течения в сечении, м/с	модуль коэффициента дисперсии $\|D\|$ м²/с	глубина h м	площадь поперечного сечения A м²	средняя скорость течения в сечении, м/с	модуль коэффициента дисперсии $\|D\|$ м²/с
1	0,165	0,196	0,170	0,0220	0,330	0,445	0,470	0,160
2	0,171	0,204	0,164	0,0229	0,332	0,448	0,466	0,165
3	0,177	0,212	0,157	0,0240	0,340	0,462	0,453	0,175

постоянными и зависели от скорости прохождения волны концентрации через створ. Показания приборов расшифровывались с помощью градуировочных зависимостей, выражающих связь между электрической проводимостью и концентрацией раствора соли. Полученные значения концентрации примеси в отдельных точках сечения каждого створа обрабатывались с использованием интерполяционных полиномов второго порядка для получения средних на вертикалях и средних по сечению значений концентрации в различные моменты времени.

Измерение скоростей выполнялось с помощью блока микровертушек диаметром 15 мм и полуавтоматической штанги в пяти точках на каждой из девяти скоростных вертикалей каждого створа, и данные измерений обрабатывались по методике, изложенной в работе [242].

Таким образом, исследование позволило получить данные о закономерности распределения концентрации примеси во времени в потоке с неравномерным движением воды. Для описанных экспериментов выполнялись сравнения концентраций, полученных методом математического моделирования, с наблюденными Коэффициенты дисперсии определялись по изложенной в п. 3.7 методике, их модули представлены в табл. 5.2.

Для математического моделирования переноса примесей была создана математическая модель лотка и математическая модель неравномерного движения воды в нем, а затем математическая модель переноса примесей Самоочищающая способность не учитывалась из-за малой продолжительности процесса в лабораторных условиях.

На рис. 5.12 представлено сравнение результатов математического моделирования с экспериментальными данными, полученными в створе *3* при расходе воды 0,333 м³/с и в створе *2* при расходе 0,209 м³/с. Концентрации примесей удовлетворительно согласуются по значениям и фазе. Однако на рис. 5.12 *б* максимальное

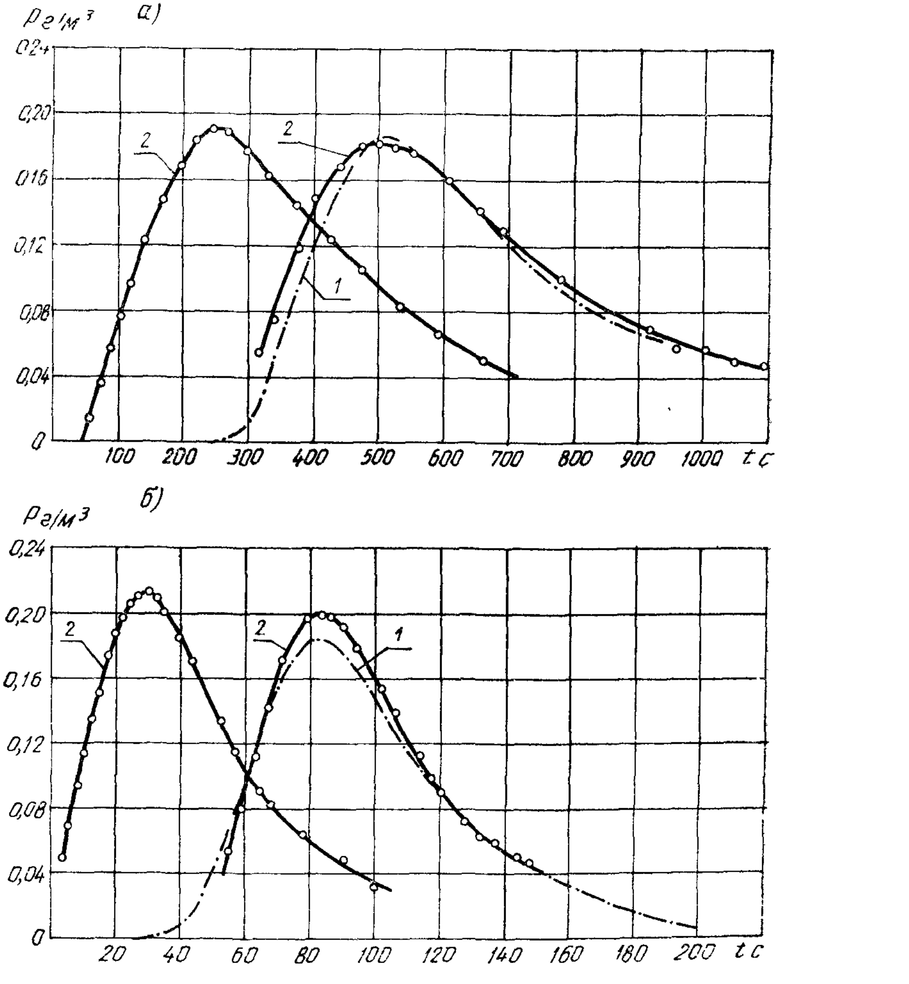


Рис 5 12 Сравнение результатов математического моделирования (*1*) переноса примесей с экспериментальными данными (*2*), полученными в канале трапецеидального сечения.
а) $Q=0{,}333$ м³ с, *б*) $Q=0{,}209$ м³ с.

значение концентрации, полученное в результате математического моделирования, меньше экспериментального. Возможно, причиной занижения максимума концентрации явилась вычислительная дисперсия.

Представленные на рис. 5.12 результаты подтверждают вывод [117] о том, что вычислительная дисперсия существенно увеличивается с увеличением скорости течения воды.

Исследования по переносу примесей в полевых условиях выполнялись в нижнем бьефе паводкового водосбора Любаньского гидроузла на р. Оресе [318]. Экспериментальный участок длиной 554 м был выбран на расстоянии 169 м от водосбора. Русло реки имело близкую к трапецеидальной форму сечения, ширина поверху составляла 16—18 м, средний на участке уклон дна — 0,000034.

В задачу экспериментальных исследований входило измерение средних в сечении концентраций примеси, скоростей течения и уровней воды в нескольких створах и в различные моменты времени. Для получения средних в сечении концентраций примесей и скоростей необходимо было измерять их в нескольких точках сечения. Измерения выполнялись в двух гидрометрических створах, расположенных на расстоянии 169 и 554 м от водосброса.

Процесс прохождения волны жидкости и концентраций примесей относительно медленный. Поэтому характеристики осредненных скоростей, концентраций и моменты времени можно было фиксировать одновременно с помощью фотоаппарата по показаниям соответственно 30 счетчиков импульсов, 30 микроамперметров и секундомера.

В гидрометрических створах измерялась непосредственно электрическая проводимость воды, а градуировочные зависимости строились до выполнения экспериментов и после них. При этом использовалась речная вода той же температуры и качества, что и в период проведения эксперимента.

Электрическая проводимость воды и скорость течения в створе измерялись одновременно в 25 точках сечения. Первичные измерительные преобразователи концентрации и скорости размещались по пять штук на каждой из пяти вертикалей в соответствии с рекомендациями детального способа измерения расхода, причем для измерения концентрации они устанавливались на штанге на 0,5 см ниже, чем для скорости. Скоростные вертикали в створах во всех измерениях размещались на оси потока и на расстояниях 2 и 5 м по обе стороны оси.

При неустановившемся движении в отличие от установившегося перед началом попуска верхние измерительные преобразователи концентрации (2 шт.) и скорости (2 шт.) размещались на штангах выше уровня воды, соответствующего установившемуся движению, чтобы по мере увеличения глубины после попуска расхода была возможность фиксировать значение скорости и концентрации по всей глубине потока.

Для измерения концентрации примесей и местных продольных скоростей применялись кондуктометр и микровертушки [202, 241]. Лопастные винты измерительных преобразователей скорости имели диаметр 15 мм. Лопастные винты размещались на расстоянии 1,5 см от дна и в 2,5 см от уровня воды, оставшиеся три винта — в соответствии с рекомендациями детального способа при установившемся движении. При неустановившемся движении это расстояние, за исключением донных измерительных преобразователей, не выдерживалось, так как предварительно определить точную глубину было затруднительно. Общая продолжительность записи процесса, т. е. время прохождения волны концентрации от одного до другого гидрометрического створа в условиях установившегося движения, составила около 2 ч, а для неустановившегося — менее 1 ч.

При проведении опытов в качестве ингредиента использовался азотнокислый аммоний (NH_4NO_3), из которого приготавливались растворы на речной воде. Сброс раствора осуществлялся мгновенно в центре водотока на расстоянии 89 м ниже водосброса. Попуски воды создавались изменением положения затвора. Процесс открытия—закрытия затвора длился 728 с. Сброс раствора на 30 с предшествовал моменту открытия щита.

Порядок проведения опытов был следующим. Все первичные измерительные преобразователи, а также уровнемерная рейка устанавливались в створе *1*, в створе *2* размещалась только рейка. Сначала измерения выполнялись при установившемся движении. Производился сброс раствора. Прохождение волны примесей в створе *1* фиксировалось с одновременной регистрацией концентрации примесей и продольных скоростей приборами через определенные интервалы времени, которые зависели от скорости изменения волны концентрации.

После проведения измерений в створе *1* при установившемся движении опыт повторялся для неустановившегося движения, т. е. осуществлялись мгновенный сброс раствора, попуск воды из водохранилища и регистрации показаний всех приборов в створе *1*, а также уровня в створе *2*.

Затем средства измерений перемещались в створ *2*, и при одинаковых условиях опыт последовательно повторялся для установившегося и неустановившегося движения воды.

Показания приборов расшифровывались в лабораторных условиях по градуировочным зависимостям. Полученные значения концентраций примесей и скоростей обрабатывались с применением интерполяционных полиномов второго порядка [242]. В результате обработки были получены значения средних в сечении скоростей и концентраций примесей в различные моменты времени.

На рис. 5.13 приведено сравнение результатов математического моделирования переноса примесей с экспериментальными данными, полученными при неравномерном и неустановившемся движении воды. Для моделирования переноса примесей создавалась математическая модель участка р. Оресы, затем выполнялось математическое моделирование неравномерного и неустановившегося движения воды и переноса примесей с помощью описанных ранее методов и программных средств. Коэффициенты дисперсии определялись по методике, описанной в п. 3.7. Учитывалась самоочищающая способность потока по реакции первого порядка.

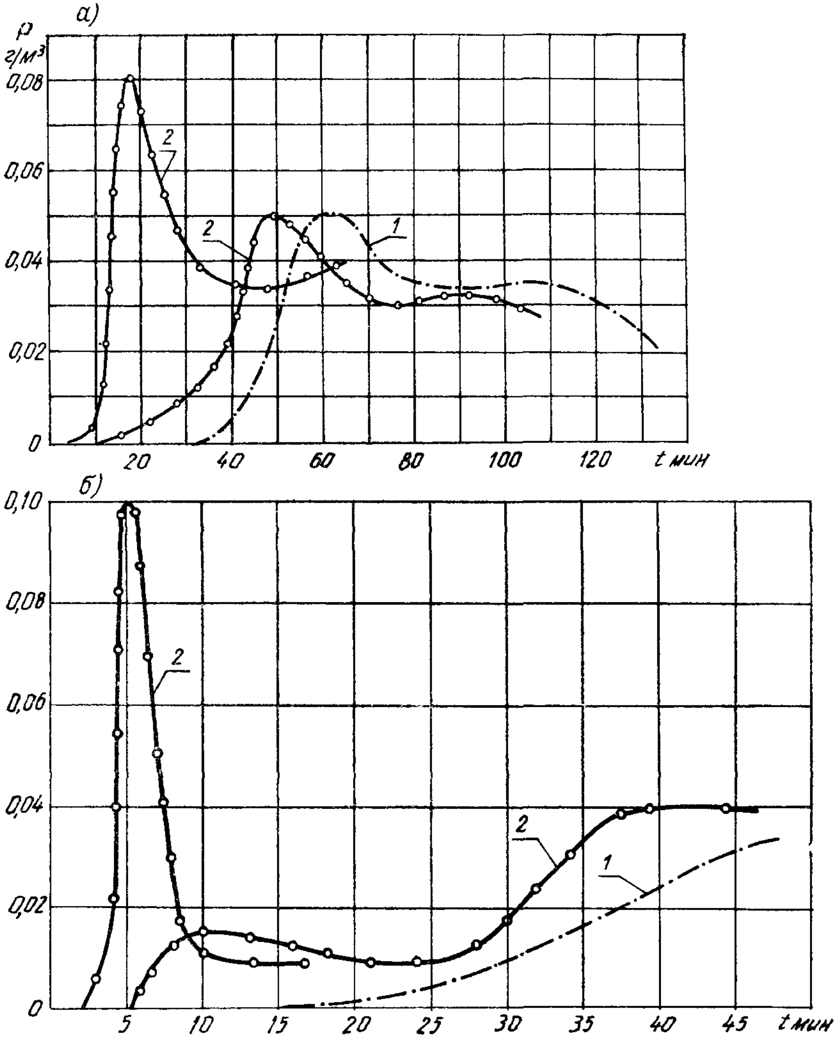


Рис. 5.13. Сравнение результатов математического моделирования (*1*) переноса примесей с экспериментальными данными (*2*), полученными на р. Оресе [318] при неравномерном (*а*) и неустановившемся (*б*) движении воды.

Как следует из рис. 5.13 *а*, изменение концентрации во времени, определенное путем математического моделирования, хорошо повторяет график, построенный по экспериментальным данным. Максимумы концентраций практически совпадают. Однако полученный при математическом моделировании график сдвинут вправо во времени относительно наблюденного, т. е. рассчитанный максимум наступает позже экспериментального. Это обстоятельство можно объяснить разновременностью изменений расходов и концентраций в створах *1* и *2* и невозможностью при измерениях в створе *2* в полевых опытах полностью повторить условия измерений в створе *1*. При сдвиге графиков рассчитанные значения концентраций практически полностью совпадают с наблюденными.

Представленные на рис. 5.13 *б* данные на первый взгляд показывают, что согласование результатов математического моделирования и экспериментов при неустановившемся движении воды не может рассматриваться как удовлетворительное. Продолжительное время это не находило объяснений. На рисунке видно, что результаты математического моделирования сближаются с экспериментальными данными в окрестности максимума концентраций. Это в некоторой мере обнадеживало. Однако, что касается начального периода появления концентраций примесей в створе *2*, то ясно, что результаты моделирования не согласуются с опытными данными. Возникает эффект двухступенчатого повышения концентраций, хотя в створе *1* имеется один максимум. Кроме того, повышение концентраций по данным экспериментов наступает значительно раньше, чем по результатам математического моделирования. Кривая концентрации имеет сразу крутой подъем, а затем некоторую почти горизонтальную площадку, которая затем переходит в плавный подъем, как и в других аналогичных экспериментах. Рассчитанные значения концентраций в районе второго подъема сближаются с экспериментальными, но, однако, не достигают их. Отмеченные особенности переноса примесей при неустановившемся движении воды нашли интересное объяснение и практическое значение, поэтому обращаем внимание на них.

Действительно, при попуске воды из водохранилища фронт положительной волны неустановившегося движения достигал створа *2* значительно раньше, чем фронт волны концентраций. В результате перед створом, где производились измерения, увеличивались скорости, которые приводили к размыву земляного ложа р. Оресы; взмучивались и переносились вниз по течению донные отложения, на которых сорбировались ионы различных веществ. Они увеличивали электрическую проводимость воды задолго до ее изменения за счет поступления примесей из первого граничного створа. Когда к створу *3* подходили примеси, введенные в воду в створе *1*, суммарная концентрация в створе *2* увеличивалась и за счет концентраций от размыва донных отложений. Этим можно объяснить и двухступенчатое повышение концентраций в экспериментальной кривой, и постепенное сближение рассчитанных значений концентраций с экспериментальными.

Заметим, что такого эффекта двухступенчатого увеличения концентраций не наблюдалось во всех описанных ранее экспериментах с фиксированным руслом. Этот эффект необходимо учитывать при организации попусков из водохранилища с целью разбавления концентраций примесей в нижерасположенных створах, особенно в связи со спецификой переноса радионуклеидов, сорбированных на грунтах ложа.

Экспериментальные исследования переноса примесей при неустановившемся движении в водотоке выполнялись также на одном из оросительных каналов Джанкойского управления эксплуатации оросительных систем [258]. Канал на протяжении 2 км прямолинейный, трапецеидального сечения со следующими сред-

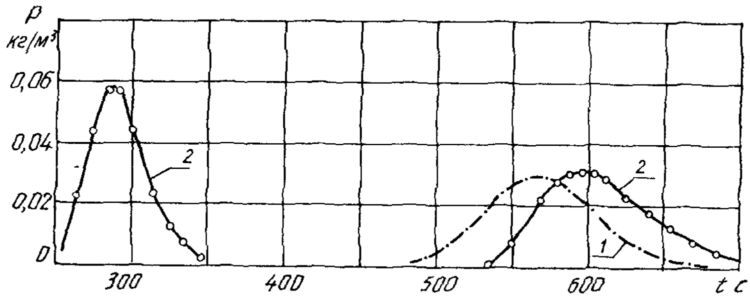


Рис 5 14 Сравнение результатов математического моделирования (*1*) переноса примесей с экспериментальными данными (*2*), полученными на канале РА-1 Джанкойской оросительной системы при неустановившемся движении воды [258]

ними характеристиками: ширина по дну 1,0, м, поверху 3,9 м, заложение откосов 1 : 1,25; канал облицован бетонными плитами. Приведенный коэффициент шероховатости $n=0{,}017$. Продольный уклон поверхности воды при установившемся движении $I=0{,}000538$, а дна канала $i_0=0{,}000601$.

Для создания попуска был выбран участок у шлюза-регулятора. Характерные створы располагались на расстояниях 79 и 500 м от него. В качестве примеси использовался раствор аммиачной селитры. Попуски воды создавались открытием щита. Сброс раствора осуществлялся мгновенно через 15 с после открытия щита по всей ширине начального створа, расположенного на расстоянии 2 м от шлюза. Расходы воды изменялись в течение 40 с в пределах 0,7—1,7 м³/с, при этом глубина наполнения канала менялась от 0,5 до 1,0 м. Методика экспериментальных исследований и обработки результатов измерений аналогична использованной в экспериментах на р. Оресе.

На рис. 5.14 представлены экспериментальные данные [258] и результаты математического моделирования переноса примесей при неустановившемся движении воды в канале, сравнение которых позволяет говорить об удовлетворительном их согласовании. Сдвиг максимумов можно объяснить сложностью создания одинаковых условий проведения эксперимента при разновременных измерениях в створах *1* и *2*.

Таким образом, сопоставление результатов, полученных с помощью описанных методик и программных средств, с известными экспериментальными данными и выполненными ЦНИИКИВРом в лабораторных и полевых условиях как при установившемся, так и при неустановившемся движении воды показало удовлетворительное согласование рассчитанных и наблюденных концентраций примесей. Это позволяет использовать их при решении многих задач, связанных с моделированием характеристик качества воды для охраны природы и экологии.

Опыт математического моделирования переноса примесей показал, что многие вопросы требуют дальнейших исследований. Среди них можно отметить следующие. Весьма сложен подбор эффективных шагов по пространству и времени. Мелкие шаги ведут к большим затратам машинного времени и делают практически невозможным математическое моделирование переноса при использовании вычислительных машин третьего поколения. Увеличение шагов ведет к возрастанию влияния вычислительной дисперсии и как следствие к распластыванию волн и уменьшению концентраций примесей. Необходимо продолжать работы по созданию методик расчета коэффициента дисперсии в сечениях сложной формы с неоднородной шероховатостью границ.

Недостаточно выполняются экспериментальные работы по исследованию закономерностей переноса, установлению параметров неконсервативности в динамических условиях. Поэтому практически отсутствуют опытные данные о закономерностях переноса при неустановившемся течении воды, не выяснено влияние нестационарности на процессы самоочищения. Это ограничивает использование математического моделирования переноса примесей при повышении эффективности оперативного управления качеством вод в системах водотоков. Выполненные экспериментальные исследования не имеют оценок погрешностей измерений. В некоторых опубликованных данных при установившемся течении масса примеси, прошедшая через нижерасположенное сечение водотока, больше, чем в начальном створе, скорость прохождения максимумов концентраций существенно отличается от средней скорости на участке водотока, вычисленной по средним скоростям в характерных сечениях. Сложившееся положение не позволяет надлежащим образом оценивать погрешность математического моделирования и фактически препятствует его совершенствованию. При экспериментальных исследованиях переноса примесей, особенно в неустановившихся потоках, для определения мгновенных значений расходов и уровней воды, концентраций примеси необходимо выполнять большое количество измерений. Без автоматизации экспериментальных исследований и улучшения уровня метрологического обеспечения повысить достоверность экспериментальных исследований практически невозможно. Поэтому создание автоматизированных систем научных исследований применительно к изучению закономерностей переноса — одна из важных задач, без решения которой затруднительно совершенствовать математическое моделирование переноса примесей в водотоках.

6 ПРИЛОЖЕНИЯ МЕТОДОВ И СРЕДСТВ АВТОМАТИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Математическое моделирование процессов движения воды и переноса примесей находит все более широкое применение при решении многих инженерных задач. Продолжительное время результаты математического моделирования используют при обосновании проектных решений в связи с тем, что они позволяют оценивать влияние на значительную часть или весь бассейн реки водохозяйственных мероприятий. С увеличением масштабов инженерного воздействия область приложений математического моделирования расширялась, так как создание физических моделей водных объектов, расположенных на больших территориях, было или технически невозможно, или экономически нецелесообразно. В таких условиях математическое моделирование становилось единственным средством, позволяющим практически предвидеть изменения водного режима систем водотоков и обосновывать варианты инженерных решений.

Использование математического моделирования при эксплуатации водохозяйственных систем позволяет прогнозировать прохождение паводков в речных и водохозяйственных системах, определять зоны и продолжительность затоплений и при наличии водохранилищ находить эффективное управление процессом прохождения паводков. Определение зоны затоплений и времени наступления уровней высоких вод позволяет предотвратить или уменьшить ущербы от затоплений.

Применение математического моделирования на различных стадиях проектирования ВХС позволяет рассчитывать водный режим системы водотоков после проведения различных вариантов инженерных мероприятий — обвалования, строительства водохранилищ, насосных станций, водосбросов и т. п. Возможно и определение основных характеристик гидротехнических сооружений: их высотного положения, размеров водопропускных отверстий, вследствие чего можно установить объемы затоплений, протяженности напорного фронта сооружений, объемов аккумуляции стока, предельных режимов эксплуатации ВХС и т. п.

В последнее время область применения методов и программных средств математического моделирования существенно расширяется как при проектировании, так и при эксплуатации ВХС. При проектировании в связи с автоматизацией математического моделирования увеличивается многовариантность проработок проектных решений При эксплуатации все чаще возникают вопросы эффективного оперативного управления водными ресурсами в существующих водохозяйственных системах. Перечисленные задачи в какой-то мере решались и ранее, однако их количество и сложность возрастает и решение становится затруднительным и даже недоступным без автоматизации математического моделирования.

Появляются нетрадиционные задачи, связанные как с рациональным проектированием, так и с эффективной эксплуатацией ВХС. Формулировки таких задач только начали осознаваться, однако без их решения дальнейшее повышение эффективности проектирования и эксплуатации ВХС невозможно. К таким задачам необходимо отнести создание информационно-измерительных систем водного режима и характеристик качества воды ВХС, поиск эффективного управления водными ресурсами в существующих системах, определение минимума исходной морфометрической, гидравлической и гидрологической информации для математического моделирования процессов движения воды и переноса примесей с погрешностью, не превышающей заданную, обоснование минимально необходимого количества и рационального размещения на конкретной ВХС средств измерений количественных и качественных характеристик водных ресурсов для оперативного получения с заданной точностью информации. В связи с введением платного водопользования все более острыми становятся вопросы повышения точности учета вод и их использования, в решении которых методы математического моделирования могут играть значительную роль. Круг проблем, связанных с повышением эффективности проектирования и эксплуатации ВХС, стремительно расширяется. Математические модели движения и переноса примесей являются непременными составляющими математической формулировки задач эффективного оперативного управления водными ресурсами.

В данной главе будет предпринята попытка содержательной формулировки такого рода задач. Обращение к их обсуждению — не дань моде, а попытка обратить внимание на большое количество актуальных вопросов, имеющих большое научное и практическое значение.

6.1. Прогнозирование водного режима систем водотоков в экстремальных ситуациях

В каждой системе водотоков ВХС возникает необходимость оперативного прогнозирования водного режима паводков, половодий и других экстремальных ситуаций. При этом важно знать, какие уровни можно ожидать, когда они могут наступить, какова продолжительность затоплений, какие могут быть скорости течения воды и т. д. Располагая этими сведениями, можно заблаговременно наметить план мероприятий, реализовать его в надлежащей последовательности и тем самым в определенной мере предотвратить или уменьшить ущербы от затоплений.

В реальной ситуации необходимо как можно раньше иметь сведения о возможном времени наступления уровней высоких вод и по мере приближения опасных явлений уточнять ход их изменений. Эти возможности предоставляет математическое моделирование неустановившегося движения воды в водотоках. Чтобы реализовать их, необходимо заблаговременно иметь математическую модель системы водотоков. Математическому моделированию процесса неустановившегося движения воды посвящена основная часть данной работы. Поэтому будем исходить из предпосылки, что математическая модель имеется, и уделим здесь внимание возможностям ее использования для задач прогнозирования режима прохождения паводков в системе водотоков. Рассмотрим этот процесс на детально описанной математической модели системы водотоков бассейна р. Припяти.

Пусть требуется определить возможные зоны и время затоплений поймы р. Припяти при различной интенсивности таяния снегов в разных частях бассейна. Естественно было бы иметь заранее выполненное вариантное моделирование движения воды в системе водотоков при различных сочетаниях гидрологических условий в разных частях бассейна. Выбор наиболее близкого варианта по интенсивности таяния снега мог бы дать приближенный прогноз наступления уровней высоких вод по всему бассейну практически немедленно, что позволило бы оперативно наметить мероприятия, уменьшающие ущерб. На последующих стадиях можно по уточненной гидрологической обстановке, заменяя расходы на граничных гидрологических постах на измеренные и выполняя математическое моделирование, уточнять время наступления уровней высоких вод в ближайшие дни. Для этого нужно было бы прогнозировать граничные условия. Поскольку время добегания значительно, то неточный прогноз расходов воды на границе повлиял бы лишь на относительно небольших участках водотоков, прилегающих к граничным постам. Вне этих участков, размеры которых можно определить, применяя уравнение уходящих с граничного створа характеристик, использовалось бы измеренное значение расхода в граничном створе, что не влияло бы на точность прогноза. В системах водотоков, где ущербы от наводнений значительны, естественно было бы создавать с учетом экономической эффективности автоматизированные информационно-измерительные системы (ИИС), позволяющие оперативно выполнять измерения уровней в системе и расходов в граничных створах с использованием единой автоматизированной системы связи страны для передачи оперативной информации на ВЦ, как описано в п. 6.3. Это позволило бы с высокой точностью прогнозировать уровни, расходы воды, скорости течения и в случае необходимости оперативно планировать защитные мероприятия, уменьшающие или предотвращающие затопления. Особенно важно создавать такие ИИС в окрестности крупных водных объектов, чтобы уменьшить возможные последствия аварийных ситуаций, создавая системы оповещения и прогнозирования водного режима.

При пропуске паводков важным является вопрос о продолжительности затоплений территорий, особенно пойменных, поскольку различные растения могут находиться под водой разное время без ущерба для урожая. Если в ВХС имеются емкости для частичной аккумуляции паводочного стока, то с помощью методов математического моделирования возможно их эффективное использование для срезки максимальных уровней и уменьшения в определенных частях пойм продолжительности затоплений.

Перечень задач, при которых возникает необходимость в прогнозировании паводочных волн, не ограничивается упомянутыми. Описанные математическая модель движения воды и программные средства для автоматизации моделирования водотоков ВХС и процессов движения воды создают необходимые условия для решения многих других задач, где требуются знания водного режима систем водотоков.

6.2. Обоснование проектных решений

Методы и средства математического моделирования движения воды в настоящее время находят широкое применение при обосновании проектных решений. В п. 5.2 была подробно описана технология создания математической модели системы водотоков бассейна р. Припяти. На рис. 5.6 представлены некоторые результаты математического моделирования неустановившегося движения воды в системах естественных и обвалованных водотоков по гидрологическим условиям 1976 г. Аналогичные расчеты были выполнены для гидрологических условий других многоводных лет. Использование этих результатов позволило установить отметки требуемой обеспеченности дамб обвалования системы водотоков для одного из вариантов расположения дамб. Естественно, что при этом можно определить лишь стоимость реализации данного инженерного решения по расположению дамб обвалования. Выводов относительно его эффективности сделать нельзя. Поэтому обычно рассматривают многие варианты расположения дамб. При этом каждый раз, естественно, могут быть защищены различные площади поймы, гребни дамб будут располагаться на различных отметках, система будет иметь различную стоимость и эффективность. Поэтому обоснование выбора варианта обвалования требует многовариантного моделирования.

Комплекс программ имеет возможности автоматизированного создания математических моделей систем водотоков при различном расположении дамб обвалования. Для этого необходимо указать в характерном сечении лишь абсциссу положения дамбы и примерную ординату ее гребня. В первом приближении принимают некоторую предполагаемую максимально возможную отметку. Затем по итогам математического моделирования процесса движения воды ее уточняют. Аналогично положение дамб задают в каждом характерном сечении. Вариант математической модели системы водотоков в обвалованном состоянии создается программным обеспечением в автоматизированном режиме по имеющимся координатам поперечного характерного сечения междамбового пространства и идентифицированным локальным коэффициентам шероховатости.

Таким образом, методы и средства математического моделирования могут позволить выполнить многовариантные расчеты водного режима и обосновать эффективные варианты защиты от затоплений пойменных территорий.

Регулирование стока требует создания водохранилищ, а следовательно водомерных и водопропускных сооружений. К створам расположения плотин волны неустановившегося движения доходят трансформированными по отношению к волнам в естественном состоянии водотока. Уровни и расходы воды изменяются. Математическое моделирование позволяет учесть трансформацию волн и определить уровни и расходы воды в створе плотины, что дает возможность установить отметку гребня плотины и размеры водопропускных отверстий.

Необходимость в тщательном математическом моделировании неустановившегося движения воды возникает при работе водохранилищ в каскаде. Особенно в сложных условиях находится водоток, соединяющий водохранилища. В зависимости от забора воды из водохранилищ, от притока воды к водохранилищам во всей системе водохранилище—водоток—водохранилище возникает неустановившееся движение воды, причем в водотоке может возникать движение с разнонаправленными скоростями течения воды в различные моменты времени. Расчет пропускной способности водотока по уравнениям равномерного или неравномерного движения в таких ситуациях невозможен. Только математическое моделирование может позволить правильно оценить размеры водотока, работающего в сложных условиях неустановившегося движения воды.

Повышение эффективности использования пойменных земель требует создания польдерных систем, затапливаемых весенним половодьем и незатапливаемых летне-осенними паводками. При этом важны не только площади затопления и уровень воды на пойме, но и продолжительность затопления. Выполнить такие расчеты позволяет математическое моделирование.

Рассмотрим пример, представленный на рис. 6.1. Пусть требуется определить отметку дамбы, защищающей пойму от затопления летне-осенними паводками некоторой обеспеченности и допускающей затопление поймы половодьями и паводками меньшей обеспеченности. Очевидно, что дамба стеснит движение воды, уровни и расходы при выходе потока на пойму изменятся после ее строительства. Эти изменения естественных волн неустановившегося движения можно определить методами математического моделирования. Если на верхней границе участка водотока, где водный режим в результате строительства дамбы не изменяется, задавать наблюденные значения расходов, а на участке водотока рассчитывать водный режим при отметках дамбы, не допускающих затопление, то в результате будут определены графики изменения уровней и гидрографы. По графикам изменения уровней можно установить тот узел в нижнем течении реки, в котором будет достигнут требуемый уровень и продолжительность затопления. Выполняя моделирование на естественные гидрологические условия верхнего граничного створа нескольких лет, можно определить обеспеченные уровни продолжительности затопления и места, через которые целесообразно осуществлять затопление продолжительностью не более заданной. Отметки гребня дамбы должны быть

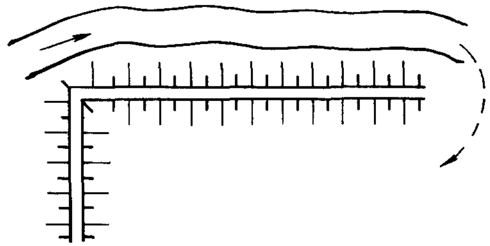


Рис. 6.1. Схема защиты поймы от затопления летне-осенними паводками.

выше рассчитанных уровней воды в соответствии с трансформацией волн, полученной с помощью математического моделирования. Рассматривая защищенную часть поймы как дугу графа с нулевой сосредоточенной приточностью, можем рассчитать и режим ее затопления, и продолжительность стояния вод в различных частях поймы.

Стремление уменьшить ущербы от затоплений при создании водохранилищ комплексного, но преимущественно энергетического назначения приводит к созданию небольших водохранилищ, рассредоточенных по слабо обжитым территориям, использование которых ведется не интенсивно. Предпочтительнее создание каскадов относительно небольших водохранилищ, полезные объемы воды в которых используются в интенсивном режиме. На рис. 6.2 представлен элемент водноэнергетического комплекса, состоящий из двух водохранилищ и размещенных на них водопользователей. Вода используется в жилищно-коммунальном и промышленном водоснабжении, для выработки электроэнергии на двух ГЭС и одной АЭС. Для выравнивания нагрузки одна из ГЭС может работать как гидроаккумулирующая.

В связи с различными режимами работы водозаборов для жилищно-коммунального водоснабжения, работой ГЭС и ГАЭС (в режиме ГЭС). при пике нагрузки и работе ГАЭС при минимуме нагрузки необходимость обеспечения гарантированного постоянного расхода для АЭС приводят к сложному водному режиму как водохранилищ, так и канала, соединяющего водохранилища. Движение в канале может осуществляться в различные моменты времени и в один и тот же момент времени в различных частях в противоположных направлениях. Определить необходимые размеры канала возможно в таких условиях, используя методы и средства

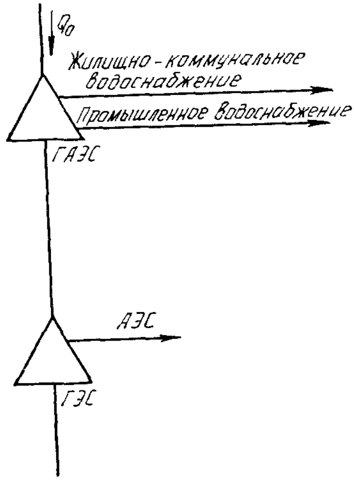


Рис. 6.2. Схема водноэнергетического комплекса.

математического моделирования. Они позволяют ответить на сложные вопросы, возникающие при проектировании и эксплуатации ВХС, и зачастую являются единственным средством обоснования многочисленных проектных решений.

6.3. Повышение достоверности измерений на водохозяйственных системах

Достоверность измерений при учете использования вод после введения платного водопользования будет иметь непосредственное экономическое и социальное значение. Данные Государственного учета использования вод показывают, что более 50 % суммарного объема потребляемой воды используется в сельском хозяйстве. Промышленное и коммунальное водопотребление имеет относительно стабильный режим, и, следовательно, наладить достоверные измерения объемов водопотребления в этом случае проще. Наиболее динамичная часть водопотребления — сельскохозяйственное, особенно для целей орошения. Оно имеет явно выраженный сезонный характер, но и внутри сезона забор воды осуществляется неравномерно, причем именно в этот период учет особенно важен, поскольку необходимо контролировать технологию поливов, объемы заборов воды, уменьшать холостые сбросы и т. п. В настоящее время эти операции в определенной мере выполняются, однако их эффективность, точность, оперативность должны быть существенно повышены, поскольку непроизводительные потери воды на оросительных системах страны составляют 34 км^3 в год. Из них 40 % (14 км^3) теряется из-за отсутствия или низкой точности средств измерений и учета, несоблюдения технологической дисциплины [6]. В работе [6] отмечается, что при соблюдении норм и требований к режимам поливов — а достоверность их необходимо контролировать оперативными методами и средствами измерений — можно только за счет водного фактора повысить урожайность на 20 % и более и при этом сэкономить 15—20 % воды. Поэтому повышение достоверности, оперативных измерений расходов и объемов воды в оросительных системах представляется первоочередной задачей. Существует проблема несанкционированных заборов воды, приводящая к превышению норм орошения и как следствие к дефициту воды в других частях системы.

В решении сложных проблем оперативного учета использования вод методы математического моделирования движения воды и переноса примесей могут быть эффективно использованы. С их помощью можно контролировать распределение воды, уменьшать количество средств и частоту измерений. Они создают необходимые предпосылки для повышения эффективности оперативного управления водными ресурсами. Более того, по-видимому, не существует альтернативы их применения, если пытаться повысить оперативность и точность данных учета использования вод в ВХС.

Необходимость привлечения к учету использования вод методов и средств математического моделирования неустановившегося движения воды и примесей в системах водотоков вызвана следующими причинами.

В настоящее время на мелиоративных системах страны количество гидрометрических пунктов, в которых измеряются уровни или расходы воды, почти на порядок превосходит количество гидрологических постов, использующихся для учета ресурсов поверхностных вод. Хотя гидрологические посты обычно надлежащим образом оборудованы средствами измерений, на гидрометрических пунктах, особенно в период поливов, значительно чаще приходится выполнять измерения расходов и уровней воды и поэтому объемы измерений на них значительно больше. Оперативность и высокая точность измерений расходов воды вызывается необходимостью соблюдения лимитов водопользования и технологии поливов, поскольку отклонения от режима полива сказываются на урожайности.

Гидрометрические пункты для учета использования вод рассредоточены практически по всей территории СССР, особенно плотно в районах, где развито земледелие.

Большое количество гидрометрических пунктов, рассредоточенность их по территории страны, необходимость получения оперативных данных об уровнях, расходах, характеристиках качества воды при одновременном повышении точности измерений, большая частота измерений оставляют единственно реальный путь получения достоверной первичной информации для оперативного управления ВХС, как это утверждено Положением о государственном учете вод и их использования,— путь автоматизации учета использования вод на основе современных методов и средств получения и передачи информации.

В настоящее время имеются научно-технические возможности создания автоматических дистанционно-управляемых средств измерений уровней, расходов, характеристик качества воды, объединения их в информационно-измерительные системы с широким применением космической технологии получения и передачи информации. Известен и международный опыт применения такой технологии для сбора информации о водных ресурсах [325, 339, 340]. В США космическая технология используется с 1975 г. Она представляет собой глобальную систему сбора и обобщения данных, состоящую из геостационарных спутников, наземных станций приема и приборов, собирающих и передающих на спутники первичную информацию. К системе подключаются многие государства. С 1978 г. к системе подключилась Канада [357]. Автоматический сбор информации о количественных и качественных характеристиках водных ресурсов в США осуществляют примерно 1000 наземных станций с 10 тыс. пунктов измерений.

В СССР есть все необходимые предпосылки для создания автоматизированной, а затем автоматической системы первичного учета использования вод. Существует Единая автоматизированная сеть связи СССР (ЕАСС), основу которой составляет система ретрансляторов, установленных на геостационарных спутниках Земли. С 1978 г. действует система передачи алфавитно-цифровой информации по космическим каналам связи, причем пропускная способность одного канала позволяет опросить все гидрометрические пункты на мелиоративных системах СССР за несколько десятков минут [245, 288]. Создана и развивается постоянно действующая космическая система изучения природных ресурсов Земли [216].

В ЦНИИКИВРе разработан [26, 27, 217, 261] способ, позволяющий по непосредственному измерению средней скорости в одной точке сечения канала определять расход воды (одноточечный способ). Это, в принципе, один из способов, позволяющих автоматизировать технологию измерения расходов воды в каналах. В частности, с использованием его создан телеметрический измеритель расходов воды, работающий с 1984 г. в канале МК КОС Управления эксплуатации Федоровского гидроузла на р. Кубани [183]. В различных институтах страны созданы автоматизированные и автоматические устройства для измерений расходов, уровней воды, концентраций примесей. Изложенное позволяет сделать вывод о том, что имеются научно-технические основы для создания наземного сектора оперативной системы учета использования вод Государственной космической системы исследования природных ресурсов Земли.

На рис. 6.3 представлена схема обзора геостационарного спутника Земли и расположения автоматических гидрометрических пунктов. Из нее следует, что практически вся территория СССР находится в зоне радиовидимости ретрансляторов, установлен-

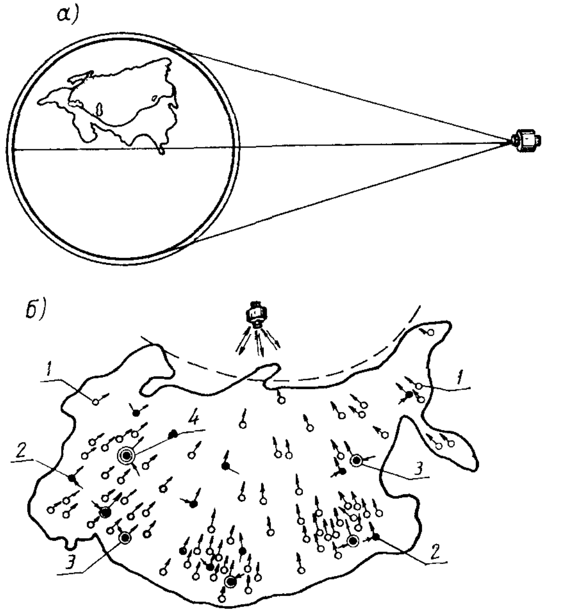


Рис. 6.3. Схема обзора геостационарного спутника Земли (*а*) и ретрансляции передач информации (*б*).

1 — автоматический гидрометрический пункт; *2* — местная наземная станция приема и передачи данных учета; *3* — региональная наземная станция приема и передачи данных учета, *4* — центральная наземная станция приема и передачи данных учета.

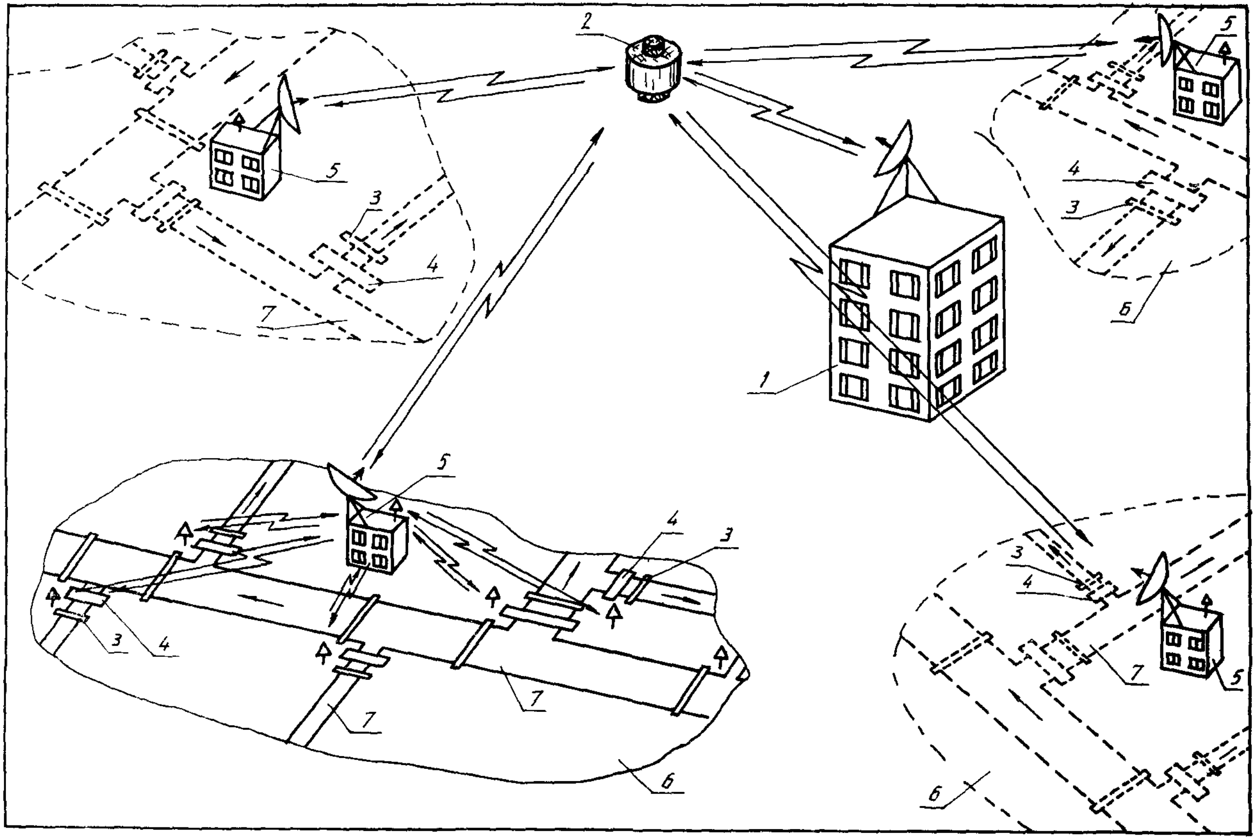
ных на геостационарном спутнике. Поэтому практически не имеет значения, где на территории СССР находятся передающая и приемная станции. Передача информации из автоматического дистанционно-управляемого гидрометрического пункта через ретранслятор геостационарного спутника может осуществляться или в территориальный, или в главный центр приема и обработки информации. Непосредственная передача через ретранслятор геостанционарного спутника затруднена только с территории СССР, расположенной выше 70-той параллели, где не столь интенсивно используются водные ресурсы. В этом смысле задачи, связанные с автоматизацией сбора информации, могут быть полностью решены, если ориентироваться на использование космических средств связи.

Возникает необходимость создания территориальных автоматических систем сбора данных измерений, включающих территориальные центры приема и обработки данных об использовании водных ресурсов (ТЦПОД), а затем территориальных автоматических систем первичного учета использования вод. Объединение территориальных систем потребует создания Главного центра приема и обработки данных по использованию водных ресурсов

(ГЦПОД) как элемента Единой системы изучения природных ресурсов Земли из космоса [216]. На рис. 6.4 представлена схема поступления первичной информации с объектов в центр подготовки и обработки данных и дистанционного управления. В конечном итоге этот этап должен закончиться созданием оперативной Единой автоматической системы государственного учета и динамического кадастра использования водных ресурсов, материальная и информационная база которых может стать основой Единой автоматизированной системы управления водными ресурсами.

Представим, что на некоторой водохозяйственной системе технически реализованы описанные выше научно-технические возможности создания автоматизированных дистанционно-управляемых средств измерений. Как во всякой большой системе, возможны объективные причины возникновения погрешностей измерений — сбои аппаратуры, искажение информации, неточности в установке и использовании средств измерений. Не исключаются и субъективные причины искажения данных измерений. Выделить результаты достоверных измерений из измерений, выполненных с большими погрешностями, даже в отдельных случаях сложно, поскольку, как правило, необходимы повторные измерения, что не всегда возможно. Решать задачу о погрешностях измерений применительно к ВХС в целом без привлечения специальных системных методов и средств практически нельзя. В этом случае становится совершенно необходимым использование математических моделей движения воды, переноса примесей и аналогов программного обеспечения, описанных в данной работе. Действительно, на рис. 5.2 представлено сравнение результатов математического моделирования неустановившегося движения воды с экспериментальными данными. Начальный участок реки ниже Новотверецкой ГЭС канализован. На нем результаты математического моделирования хорошо согласуются с данными измерений, хотя здесь наблюдается наибольшая нестационарность течения. Заметим, что при создании математических моделей процессов в конкретных ВХС многие параметры математических моделей водных объектов можно тщательно идентифицировать и практически всегда с высокой достоверностью воссоздавать состояние системы на момент измерений. Но тогда математические модели создают возможности проверки согласования наблюденных и измеренных значений уровней, расходов, концентраций примесей. В зависимости от характера рассогласований во многих случаях можно с помощью диагностических программ указать места и причины, вызвавшие их.

Изложенное позволяет прийти к выводу о том, что созданные математические модели могут стать системным средством контроля достоверности измерений уровней, расходов воды и концентраций примесей в водотоках оросительных систем. Более того, они могут восстановить достоверную информацию в случае отказов в информационно-измерительных системах.


1
2
3
4
5
6
7

6.4. Повышение эффективности управления водными ресурсами

Рациональное использование природных ресурсов вообще и водных в частности — одна из актуальных задач. Оценки показывают, что затраты на улучшение использования ресурсов эффективнее, чем на их добычу, обработку, доставку. Для народного хозяйства страны требуется более 350 км^3 воды в год. Отсутствие надлежащего первичного учета, технических возможностей, научного и программного обеспечения для решения сложных задач эффективного управления водными ресурсами — основные причины, приводящие к непроизводительным потерям воды, особенно используемой для орошения [6]. Не случайно ставится задача об экономии в ближайшее время 15—20 % воды, потребляемой в сельском хозяйстве, причем при экономии воды за счет соблюдения норм и режимов полива можно повысить урожайность на 20 % и более [6].

Имеются возможности экономии водных ресурсов и в промышленности за счет применения оборотного водоснабжения, безводных технологий и в жилищно-коммунальном хозяйстве за счет учета водопотребления. Таким образом, проблема экономии водных ресурсов является многоплановой, зависящей в значительной мере от научно-технического потенциала страны. Кратко остановимся на содержательной формулировке некоторых актуальных задач, при решении которых необходимы методы и средства математического моделирования.

Как уже отмечалось, сельскохозяйственное водопотребление — наиболее динамичная часть общего водопотребления страны. В нем имеются значительные резервы, особенно в орошаемом земледелии. Они могут быть использованы при повышении эффективности оперативного управления. Однако это возможно лишь за счет решения оптимизационных задач оперативного управления, в формулировку которых входят математические модели процессов. В последние годы решению таких задач уделяется возрастающее внимание [11, 12, 127—129, 173, 269, 270]. Применяются различные критерии эффективности управления: экономии водных ресурсов, быстродействия, минимума переключений насосных агрегатов и др.

Одна из задач экономного использования водных ресурсов рассмотрена в работе [292]. Остановимся на ней подробнее. На многих ВХС большие объемы воды сбрасываются вхолостую в связи

Рис 6 4 Схема поступления первичной информации о расходах, уровнях, характеристиках качества воды в центр подготовки и обработки данных учета использования вод.

1 — главный центр приема и обработки данных об использовании водных ресурсов (ГЦПОД); *2* — ретранслятор геостационарного спутника Земли, *3* — автоматический гидрометрический пункт, *4* — водорегулирующее сооружение, *5* — территориальный центр передачи и обработки данных об использовании водных ресурсов (ТЦПОД), *6* — автоматический пункт измерения влажности почвы, *7* — водоток с тем, что нестационарный забор воды из источника согласовать с рассредоточенными по водотокам нестационарными режимами заборов воды потребителями сложно, более того, практически невозможно без специальных мер. Чтобы свести к минимуму холостые сбросы, необходимо использовать специальные методы и средства. Рассмотрим некоторые содержательные формулировки задач об уменьшении холостых сбросов.

Вода, накопленная в водохранилище, может быть сброшена в нижний бьеф по различным гидрографам, в определенной мере регламентированным правилами эксплуатации водохранилища. Однако в различных местах водотока, вытекающего из водохранилища, имеются ограничения на уровни и расходы воды, зависящие в том числе и от времени. Пределами, регламентирующими уровни, могут быть отметки, например, дамб обвалования, пролетного строения мостов и т. п. Минимальные уровни могут ограничиваться водозаборами насосных станций, экологическими условиями и т. д. Аналогичные требования могут быть предъявлены потребителями к расходам воды. Обычно требуется обеспечение заборов воды из водотока по определенным гидрографам. Таким образом, в общем случае вдоль водотока, в различных его точках, имеются ограничения на уровни и расходы вида $Q(s_i, t)$ и $h(s_i, t)$. Эти ограничения налагаются водопользователями, ради которых и создавалась ВХС и водохранилище. Естественно, что $Q(s_i, t)$ и $h(s_i, t)$ практически не согласованы между собой. Режим ограничений $Q(s_i, t)$ и $h(s_i, t)$ обычно нестационарный, поэтому для удовлетворения потребителей приходится забирать воду также по нестационарному гидрографу $Q(t)$.

При дефиците водных ресурсов необходимо из множества гидрографов выбрать такой гидрограф $Q(t)$, при котором будет минимальным холостой сброс, т. е. будут забраны минимальные объемы воды. Таким образом, приходим к задаче оптимального управления: определить гидрограф попуска из водохранилища $Q(t)$ такой, чтобы

$$\int_{t_1}^{t_2} Q(t)\,dt \to \min,$$

если процесс движения описывается уравнениями (1.7) при удовлетворении ограничений на $Q(s_i, t)$, $h(s_i, t)$ в i-х точках водотока.

Для решения задачи из всевозможных последовательно сменяющихся состояний водотока, которые можно получить с помощью описанных выше методов и средств математического моделирования, необходимо выбрать те, которые удовлетворяют одновременно всем ограничениям, касаясь в каждый момент времени по крайней мере одного из них. Прежде всего нужно знать состояние процесса в начальный момент управления. Его можно получить методами и средствами, схематично описанными в п. 6.3. Этими же средствами можно проконтролировать удовлетворение ограничений и гидрограф попуска. Таким образом, для повышения эффективности управления водными ресурсами необходим оперативный первичный учет.

Сменив в содержательной постановке задачи критерий эффективности с минимума на максимум, приходим к другой задаче оптимального управления, решая которую определим, по какому гидрографу нужно сбрасывать воду из водохранилища, чтобы при максимальном сбросе объемов воды ни в одной точке водотока не были повышены максимальные уровни и расходы воды. Это задача о пропуске паводочных вод в случаях опасности переполнения водохранилища. Аналогичные задачи возникают при необходимости переброски максимальных объемов воды из одного водохранилища в другое за минимальный интервал времени — задача о быстродействии — при организации попусков из водохранилища для разбавления концентраций примесей до предельно допустимых. Однако в последнем случае необходимо привлекать математическую модель переноса примесей и соответствующее программное обеспечение.

Перечень задач и их содержательные формулировки можно легко продолжить. Их количество становится практически неограниченным, если перейти к многокритериальным задачам эффективного управления водными ресурсами и искать решения в системах водотоков с водохранилищами. В каждой из них в качестве математических моделей процесса могут быть использованы модели и средства математического моделирования процессов движения воды и переноса примесей, описанные в данной работе.

Решение таких задач началось относительно недавно. В связи с необходимостью усиления охраны природы, повышения урожайности на мелиорируемых землях, улучшения эффективности использования водных ресурсов, защиты от вредного воздействия вод, примесей и расширением возможности использования современных средств вычислений, передачи информации область применения методов и средств математического моделирования процессов движения воды и переноса примесей будет расширяться, способствовать экономному использованию водных ресурсов и приносить значительный эффект.

6.5. Минимизация исходной информации и средств измерений

Математическое моделирование процессов движения воды и переноса примесей предполагает создание математической модели систем водотоков. При этом в качестве исходной используется первичная морфометрическая, гидравлическая и гидрологическая информация. Стоимость ее получения пока высока, особенно если предъявляются высокие требования к точности математического моделирования и как следствие становятся недостаточными имеющиеся топографические карты, требуется дополнительная съемка поймы и русла.

Для получения гидравлической информации о водотоке обычно выполняют специальное вертолетное обследование водотока, поскольку имеющиеся картографические материалы, характеризующие растительный покров пойм, как правило, устаревают к моменту моделирования.

Некоторые характеристики водотоков, например приведенный коэффициент шероховатости, в принципе точно задать нельзя. Поэтому довольно часто выполняют экспедиционные обследования объекта, при которых измеряют расходы и уровни воды в отдельные моменты времени с целью использования их значений при идентификации.

Таким образом, получение первичной морфометрической, гидравлической и гидрологической информации о водном объекте — задача весьма сложная, трудоемкая и дорогостоящая. Естественно пытаться решать ее различными путями. Во-первых, целесообразно попытаться установить минимально необходимое количество исходной информации для обеспечения требуемой точности моделирования. Во-вторых, можно использовать новые методы и средства, которые в значительной степени позволят ускорить процесс и удешевить стоимость информации.

Для определения минимально необходимого объема исходной информации требуется выполнить исследования, целью которых должно быть установление зависимости погрешностей математического моделирования процессов от степени детализации исходной морфометрической и гидравлической информации. Однако получение такой закономерности затруднительно. Во-первых, необходимо создать различные математические модели системы водотоков, различающиеся степенью детализации исходной информации, и выполнить моделирование процессов по одним и тем же гидрологическим данным. И эта задача, если использовать описанный в данной работе аппарат, вполне выполнима. Во-вторых, необходимо оценить влияние на погрешности математического моделирования выбранных шагов по пространству и времени. Это сделать трудно, хотя и возможно. Дело в том, что даже абсолютная устойчивость и сходимость разностной схемы, использованной при моделировании движения,— это очень важные, но все же качественные характеристики. Из вывода, что использованная разностная схема имеет первый порядок аппроксимации по времени $0(\Delta t)$ и второй — по пространству $0(\Delta s^2)$, невозможно сделать заключение об абсолютных или относительных погрешностях математического моделирования процесса движения воды, что, однако, требуется при оценке результатов моделирования на конкретном объекте. Поэтому целесообразно провести с помощью разработанных методов и средств математического моделирования следующий численный эксперимент.

Необходимо выделить несколько типоразмеров водотоков. Для них задать детальную исходную морфометрическую, гидравлическую и гидрологическую информацию. Выполнить математическое моделирование процессов, начиная с больших шагов по пространству и времени, и, постепенно уменьшая их, следить за уменьшением погрешности моделирования. Когда уменьшение шагов не повлечет существенного изменения результатов моделирования, целесообразно принять максимальные из таких шагов за наилучшие и таким образом обосновать для различных типоразмеров водотока и различной их водности оптимальные шаги по пространству и времени. После определения шагов максимально возможная степень детализации устанавливается практически аналогично.

Для этого необходимо последовательно уменьшать степень детализации морфометрической и гидравлической информации о водотоке и определять зависимость погрешностей математического моделирования от степени детализации. Затем, используя полученную зависимость, по допустимой погрешности можно определить степень детализации исходной информации. Это позволило бы обоснованно уменьшать объемы и, следовательно, стоимость изыскательских работ и работ по подготовке исходной информации к обработке.

Объемы и стоимость изыскательских работ могут быть уменьшены за счет применения методов и дистанционных средств измерений. Они все больше заменяют контактные методы измерений, которые хотя и обладают высокой точностью, но требуют больших затрат. В настоящее время созданы научные основы и интенсивно создаются средства [33, 47, 215, 243] дистанционного зондирования поверхности земли, воды, атмосферы. Имеется возможность определения отметок поверхности земли, воды, глубины водных объектов, т. е. оперативного получения характеристик сечений водотоков, и характеристики растительности на пойме. Люминесцентными методами можно дистанционно определять концентрацию органических веществ в воде [215]. Информация может с заданной дискретностью заноситься на магнитные носители, и, следовательно, может оперативно создаваться цифровая модель водотока. Таким образом, стоимость исходной информации для создания математических моделей систем водотоков существенно уменьшится, оперативность получения данных возрастет и станет возможным создание динамических математических моделей систем водотоков.

Имеющиеся в литературе данные [346, 347] о затратах на математическое моделирование позволяют оценить их распределение на различные этапы работ следующим образом: затраты на подготовку исходных данных и их проверку — 50 %, на анализ погрешностей моделирования — 30 %, на получение полезных результатов — 20 % общей стоимости работ. При усложнении системы водотоков доля стоимости получения полезных результатов уменьшается, а трудоемкость работ увеличивается, создавая зачастую непреодолимые трудности. Именно поэтому в данной работе большое внимание уделялось автоматизации этапов работ по подготовке и контролю исходной информации к созданию математических моделей систем водотоков и подготовке к анализу многочисленных результатов расчетов.

Однако необходимо отметить, что, несмотря на повышение уровня автоматизации получения исходной информации и подготовки ее к математическому моделированию, затраты на выполнение этих этапов работ существенны, и поэтому задача о научно обоснованном уменьшении объемов исходной информации актуальна.

Повышение эффективности управления использованием водных ресурсов требует оперативной гидрологической информации, которая необходима для определения начального состояния процесса при оптимизации управления, для идентификации параметров математических моделей, для контроля качества управления. Оперативную информацию об уровнях, расходах воды, концентрации примесей можно получить с помощью автоматических дистанционно управляемых средств измерений, которые могут использоваться для определения характеристик состояния непосредственно или в качестве реперной сети для идентификации дистанционных измерений другими средствами. Естественно стремится к некоторому минимуму количества таких средств измерений. В то же время очевидно, что недостаточное количество средств измерений и неудовлетворительное их размещение не позволит воспроизвести с приемлемой погрешностью процесс с помощью программного обеспечения математического моделирования. Насколько известно, работ, посвященных научному обоснованию необходимого количества средств измерений и рационального их размещения, мало [105]. В связи с этим возникает задача о минимизации количества средств измерений, аналогичная задаче о минимизации исходной информации. Содержательно ее можно сформулировать следующим образом: установить минимально необходимое количество средств измерений и разместить их таким образом, чтобы погрешность математического моделирования была меньше заданной. Поскольку схема решения такой задачи аналогична схеме решения задачи об обосновании минимально необходимого объема исходной информации, на ней останавливаться не будем.

Таким образом, минимизация объемов исходной информации, а также обоснование минимального количества и размещения средств измерений требует решения оптимизационных задач, в которых могут быть использованы методы и средства, описанные в этой книге.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ исследований по созданию одномерных математических моделей движения воды и примесей в водотоках показал, что в случаях, когда водное и живое сечения совпадают, работы имеют определенную степень завершенности. Модели нашли практическое применение при проектировании. Однако лишь начинается период их активного использования для многовариантного проектирования и особенно для эффективного управления водными ресурсами. Это вызвано недостаточной общностью моделей, высокой стоимостью и сложностью процесса моделирования.

Результаты работ, представленные в монографии, дополняют выполненные исследования. Изложен вывод обобщенных одномерных уравнений движения Сен-Венана. Они могут быть использованы для математического моделирования плавно изменяющегося неустановившегося движения воды в общем случае при выходе потока на пойму и возникновении нетранзитных зон, когда водное сечение больше живого. При выводе уравнений не использованы допущения о малости уклона дна и равенстве единице корректива количества движения. Имеются возможности учета влияния на движение неоднородной по длине плотности воды и, как обычно, воздействия ветра, атмосферного давления, кориолисова ускорения.

Приведен вывод уравнения переноса примесей при неустановившемся движении воды.

Сформулированы краевые задачи о движении воды и переносе примесей в системах водотоков, в том числе и при наличии внутренних граничных условий. Описаны численные методы их решения применительно к сложным системам водотоков, в частности с закольцованными участками.

Изложена гипотеза об условиях равенства гидравлических сопротивлений водотоков с произвольной формой сечения и неоднородной шероховатостью границ и с прямоугольным сечением и однородными границами. Ее использование позволило создать единую основу полуэмпирических методов расчета многих параметров уравнений движения воды и переноса примесей, а именно: приведенного коэффициента шероховатости, ширины и площади живого сечения как части водного сечения потока, корректива количества движения потоков сложной формы с неоднородными границами, коэффициентов турбулентной вязкости и продольной дисперсии (для некоторых сечений).

В работе представлены не только результаты математического моделирования процессов движения воды и переноса примесей, но и многие детали процесса создания математических моделей водотоков, о которых обычно умалчивают из-за подразумевающейся простоты. Параметры математических моделей даже в сложных случаях чаще всего вычисляют по простым зависимостям, хотя их определение в свою очередь приводит к необходимости решения сложных задач для уравнений математической физики и вызывает в настоящее время трудности, не меньшие, чем при решении краевых задач для уравнений движения воды и переноса. Именно поэтому многие операции по созданию математических моделей водных объектов были изложены детально с демонстрацией числового и графического материала, по возможности оценены последствия упрощений.

Оценки распределения затрат по этапам работ показали, что удешевление математического моделирования в настоящее время требует прежде всего существенного повышения автоматизации таких этапов работ, как подготовка многочисленной первичной информации к созданию математических моделей водных объектов, вычисление их параметров, подготовка к инженерному анализу многочисленных промежуточных и окончательных результатов моделирования. Именно поэтому потребовалось создание комплекса программ, позволяющего не только решать краевые задачи, но и в значительной мере ускорять и удешевлять обработку первичной информации и результатов вычислений. Программы помогают выявлять погрешности в задании исходных данных, упорядочивают входную информацию, готовят ее к созданию математических моделей систем водотоков, облегчают анализ многочисленных результатов математического моделирования, определяют погрешности расчетов, выполняют графические работы и готовят информацию к принятию инженерных решений. Это потребовало создания многих методик расчета параметров моделей, упорядочения вычислительного процесса, разработки новых взаимосвязанных программ и использования существующих системных средств. В итоге была создана технология автоматизированного моделирования. Именно она сделала возможным и экономически целесообразным создание в приемлемые сроки математических моделей реальных сложных систем водотоков и процессов движения воды в них.

И все же необходимо продолжать работы по повышению степени автоматизации математического моделирования, расширению классов решаемых задач, включая и многомерные, совершенствованию системного наполнения комплекса для создания возможностей перехода к диалоговому режиму работы с ЭВМ. Однако это по силам только коллективам единомышленников. По-видимому, потребуется создание специального языка, реализующего в макрокомандах целые этапы технологии как на больших вычислительных машинах, так и на персональных ЭВМ. Это приведет к созданию комплексов прикладных программ, функционально ориентированных на имитацию состояний систем водных объектов, и сделает доступным математическое моделирование специалистам, знающим лишь содержательную сторону задач. На первом этапе они будут в состоянии оперативно ответить на вопрос, каковы результаты воздействия на систему водных объектов. Ответы позволят в автоматизированном режиме выполнять многовариантное проектирование. Затем станет доступным решение многочисленных задач оперативного эффективного управления водными ресурсами.

Один из недостатков математических моделей гидродинамического типа — большой объем и значительная стоимость исходной морфометрической, гидравлической и гидрологической информации — может существенно уменьшить достижения современных технологий, использующих новые физические методы и основанные на них средства измерений. Есть основания надеяться, что стоимость морфометрической и гидравлической информации значительно уменьшится в ближайшее время за счет применения существующих лидарных и СВЧ-радиометрических систем, особенно в связи с созданием Государственной космической системы исследования природных ресурсов Земли. Оперативное получение и передача гидрологической информации могут быть обеспечены автоматическими средствами измерений и Единой автоматизированной сетью связи страны. Таким образом, первичная информация в ближайшее время в значительной мере может быть получена автоматизированно. Есть основания полагать, что в процессе создания математических моделей будет использован режим телеобработки. Математические модели ВХС станут динамическими. Применение банков данных и систем управления базами данных упростит общение пользователя с ЭВМ.

Естественно полагать, что динамические математические модели объектов позволят оперативно создавать достоверные математические модели процессов движения воды и переноса примесей в системах водотоков в режиме реального времени и станут важными составными частями будущих автоматизированных и автоматических систем разумного природопользования.

Чтобы довести моделирование процессов движения воды и переноса примесей в ВХС до числового результата, пришлось пользоваться гипотезами, допущениями, обобщениями экспериментальных данных. Хотя в каждом случае автор стремился оценить достоверность получаемых промежуточных и окончательных результатов, многие принятые положения могут оказаться дискуссионными. Автор с благодарностью примет замечания и пожелания, способствующие улучшению исследований, и постарается учесть их в дальнейшей работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агроскин И. И., Дмитриев Г. Т., Пикалов Ф. П. Гидравлика.— 4-е изд., перераб..— М.; Л.: Энергия, 1964.— 352 с.

2. Агроскин И. И., Штеренлихт Д. В. Уточненная формула для коэффициента Шези С//Гидротехника и мелиорация.— 1965.— № 9, с. 32—55.

3. Айтсам А. М., Вельнер Х. А., Пааль Л. Л. О расчете продольного смешения вещества загрязнения в водотоках//Тр. Таллинн. политехн. ин-та. Сер. А — 1967.— Т. 247, № 4.— С. 57—65.

4. Айтсам А. М., Вельнер Х. А., Пааль Л. Л. О теоретических основах инженерного расчета смешения сточных вод в водоемах//Науч. докл. по вопросам самоочищения водоемов и смешения сточных вод. Материалы I Всесоюз. симпоз. Таллинн, 7—10 июня 1965 г.— Таллинн, 1965. С. 99—116.

5. Анисимов-Спиридонов Д. Д. Методы и модели больших систем оптимального планирования и управления.— М.: Наука, 1969.— 360 с.

6. Артамонов К. Ф. Ускорить создание метрологической базы//Гидротехника и мелиорация.— 1983.— № 3.— С. 54—56.

7. Архангельский В. А. Расчеты неустановившегося движения в открытых водотоках.— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947.— 136 с.

8. Астров А. И. Гидравлика.— М.: Студ. изд. о-во при Импер. моск. техн. уч-ще, 1911.— 441 с.

9. Атавин А. А. Расчет неустановившегося течения воды в разветвленных системах речных русел или каналов//Динамика сплошной среды.— 1975.— Вып. 22.— С. 25—36.

10. Атавин А. А., Гладышев М. Т., Шугрин С. М. О разрывных течениях в открытых руслах//Динамика сплошной среды.— 1975.— Вып. 22.— С. 37—64.

11. Атанов Г. И., Воронин С. Т. Вариационная задача управления гидродинамикой открытых русел//Математические методы механики жидкости и газа.— Днепропетровск, 1984.— С. 60—65.

12. Атанов Г. А., Воронин С. Т. Об одной вариационной задаче гидродинамики открытых русел//Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.— 1980.— № 4.— С. 159—163.

13. Атанов Г. А., Воронин С. Т., Толстых В. К. О задаче идентификации параметров открытых русел//Водные ресурсы.— 1986.— № 4, с. 69—78.

14. Бампи С. А. Определение коэффициента шероховатости на границе транзитного потока и водоворотной зоны в круглой трубе с диафрагмами//Изучение и использование водных ресурсов: Сб. науч. тр. ВНИИГиМ.— М.; 1980.— С. 105—110.

15. Барклая Г. И. Некоторые результаты экспериментальных исследований коэффициента α_0 и α в неустановившихся потоках//Гидравлика и расчеты гидросооружений.— М., 1984.— С. 48—51.

16. Барышников Н. Б. Морфология, гидрология и гидравлика пойм.— Л.: Гидрометеоиздат, 1984.— 280 с.

17. Барышников Н. Б. Речные поймы (морфология и гидравлика).— Л.: Гидрометеоиздат, 1978.— 152 с.

18. Белов И. А. Модели турбулентности: Учеб. пособие.— 2-е изд.— Л.: Изд. ЛМИ, 1986.— 100 с.

19. Белоконь П. Н. Инженерная гидравлика потока под ледяным покровом.— М.; Л.: Госэнергоиздат, 1940.— 160 с.

20. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений.— 2-е изд — М.: Физматгиз, 1962.— 464 с.

21. Бернадский Н. М. Речная гидравлика, ее теория и методология. Т. 1.— М.; Л.: Госэнергоиздат, 1933.— 148 с.

22. Беспамятнов Г. П., Кротов Ю. А. Предельно допустимые концентрации химических веществ в окружающей среде: Справочник.— Л.: Химия, 1985.— 527 с.

23. Биологические процессы и самоочищение на загрязненном участке реки/Под ред. Г. Г. Винберга.— Минск: Изд-во БГУ, 1973.— 192 с.

24. Блох А. Ш. Граф-схемы и алгоритмы.— Минск: Вышэйшая школа, 1987.— 144 с.

25. Бобков В. П., Ибрагимов М. Х., Сабелев Г. И. Обобщение экспериментальных данных по интенсивности пульсации скорости при турбулентном течении жидкости в каналах различной формы//Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.— 1988.— № 3.— С. 162—165.

26. Богданович М. И. Анализ влияния неравномерности и нестационарности движения на распределение продольных осредненных скоростей//Водное хозяйство и гидротехническое строительство.— 1985.— Вып. 14.— С. 81—85.

27. Богданович М. И. Гидравлические обоснования одноточечного способа измерения расходов воды в каналах неправильной формы сечения: Автореф. дис. ... канд. техн. наук.— Л., 1987.— 16 с.

28. Богданович М. И. Метод расчета продольного компонента осредненной скорости в равномерных открытых потоках неправильной формы поперечного сечения//Вторая Всесоюз. конф. «Динамика и термика рек, водохранилищ и эстуариев»: Тез. докл. — М., 1984.— Т. 1.— С. 21—23.

29. Бончковский Д. Ф., Кузин А. К. К вопросу совершенствования Правил охраны поверхностных вод от загрязнения сточными водами//Водные ресурсы.— 1986.— № 3.— С. 22—30.

30. Бочаров М. К. Методы математической статистики в географии.— М.: Мысль, 1971.— 372 с.

31. Бочева М. М. Изследване неравномерността на разпределение на скоростите и напречните сечения на открити речни течения//Водни проблеми.— 1976.— № 4.— С. 10—17.

32. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов.— Лейпциг: Тойбнер; М.: Наука, 1981.— 718 с.

33. Бункин А. Ф., Власов Д. В., Галумян А. С. Дистанционная диагностика сред методом КАРС при ВРМБ назад//Квантовая электроника.— 1985.— Т. 12, № 3.— С. 619—621.

34. Васильев О. Ф., Атавин А. А., Воеводин А. Ф. Методы расчета неустановившихся течений в системах открытых русел и каналов//Численные методы механики сплошной среды.— 1975.— Т. 6, № 4.— С. 21—30.

35. Васильев О. Ф., Воеводин А. Ф. Математическое моделирование качества воды в системах открытых русел//Динамика сплошной среды.— 1975.— Вып. 22.— С. 73—88.

36. Васильев О. Ф., Воеводин А. Ф. Математическое моделирование качества воды в системах открытых русел//Материалы 5-го Всесоюз. науч. симпоз. по современным проблемам самоочищения и регулирования качества воды. Таллинн, нояб. 1975.— Таллинн, 1975.— 1-я секция.— С. 16—21.

37. Васильев О. Ф., Гладышев М. Т. О расчете прерывных волн в открытых руслах//Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.—1966.— № 6. С. 184—189.

38. Васильев О. Ф., Еременко Е. В. Моделирование трансформации соединений азота для управления качеством воды в водотоках//Водные ресурсы.— 1980.— № 5.— С. 110—117.

39. Васильев О. Ф., Лятхер В. М. Гидравлика//Механика в СССР за 50 лет.— М. Наука, 1970.— Т. 2.— С. 709—790.

40. Васильев О. Ф., Темноева Т. А., Шугрин С. М. Численный метод расчета неустановившихся течений в открытых руслах//Изв. АН СССР Механика.— 1965.— № 2 — С. 17—25.

41. Васильев Ю С., Виссарионов В. И., Кубышкин Л. И. Решение гидроэнергетических задач на ЭВМ.— М.: Энергоатомиздат, 1987.— 160 с.

42. Васильченко Г. В. Воздействие потоков на мелиоративные и водохозяйственные сооружения.— Минск: Ураджай — 1985.— 175 с.

43. Великанов М. А. Динамика русловых потоков.— Л.; М.: Гидрометеоиздат, 1946.— 522 с.

44. Вельнер Х. А., Айтсам А. М., Пааль Л. Л. Об основах инженерного расчета самоочищающей способности водотоков//Науч. докл. по вопросам самоочищения водоемов и смешения сточных вод: I Всесоюз. симпоз. Таллинн, июнь 1965 г.— Таллинн, 1965.— С. 117—143.

45. Вельнер Х. А., Пааль Л. Л., Рохусаар Л. Л. К вопросу экспериментального исследования коэффициента продольной диффузии на малых реках//Тр. Таллин. политехн. ин-та. Сер. А.— 1967.— Т. 248, № 5.— С. 167—184.

46. Вельнер Х. А., Платс Р. В. О биохимическом окислении вещества загрязнения в реках//Тр. Таллин. политехн. ин-та. Сер. А.— 1967.— Т. 247, № 4.— С. 91—98.

47. Власов Д. В. Лазерное аэрозондирование верхнего слоя океана//Изв. АН СССР. Сер. физическая.— 1985.— Т. 49, № 3.— С. 433—441.

48. Воеводин А. Ф., Никифоровская В. С. Численный метод решения некоторых обратных задач гидравлики//Всесоюз. симпоз. «Численные методы в гидравлике». Телави, апр. 1980 г.: Тез. сообщ.— Л., 1980.— С. 29—32.

49. Воеводин А. Ф., Никифоровская В. С., Данилова З. В. Комплекс программ ГИДР1 для расчета гидравлических режимов в разветвленных системах открытых русел: Описание применения (3533970.00004—01 31 01).— Новосибирск, 1984.

50. Воеводин А. Ф., Никифоровская В. С., Данилова З. В. Комплекс программ ГИДР2 для расчета гидравлических режимов в разветвленных системах открытых водотоков (Упрощенная модель): Описание применения (3533970.00005—01 31 01).— Новосибирск, 1984.

51. Воеводин А. Ф., Никифоровская В. С., Данилова З. В. Комплекс программ ГИДР3 для расчета гидродинамических режимов в разветвленных системах открытых русел: Описание применения (3533970.00006—01 31 01).— Новосибирск, 1984.

52. Воеводин А. Ф., Никифоровская В. С., Овчарова А. С. Расчеты гидравлических характеристик потока и качества воды в водотоке// Материалы V Всесоюз. науч. симпоз. по современным проблемам самоочищения и регулир. качества воды. Таллинн, нояб. 1975 г.— Таллинн, 1975.— 1-я секция.— С. 28—33.

53. Воеводин А. Ф., Никифоровская В. С., Овчаров А. С. Численные методы решения задачи о неустановившемся движении воды на устьевых участках рек//Тр. ААНИИ— 1983.— Т. 378.— С. 23—34.

54. Воеводин А. Ф., Никифоровская В. С., Чернышева Р. Т. Об одном численном методе для расчета резко изменяющихся течений в руслах и водотоках//Динамика сплошной среды.—1975.— Вып. 22.— С. 89—98.

55. Воеводин А. Ф., Овчарова А. С. Численное решение задачи о качестве воды в открытом русловом потоке//Водные ресурсы.— 1977.— № 4.— С. 172—178.

56. Воеводин А. Ф., Шугрин С. М. Численные методы расчета одномерных систем.— Новосибирск: Наука, 1981.— 208 с.

57. Воеводин А. Ф., Шугрин С. М. Численный расчет одномерных течений воды в системах речных русел и каналов//Динамика сплошной среды.— 1978.— Вып. 35.— С. 40—60.

58. Войтеховская Э. А. Обобщение исследований по определению коэффициентов продольной дисперсии и диффузии//Водоотведение и охрана вод.— Минск, 1982.— С. 33—42.

59. Войтеховская Э. А., Рогунович В. П., Скрипко М. И. К разработке математической модели переноса примесей естественными водотоками//Комплексное использование водных ресурсов.— 1974.— Вып. 2 — С. 149—155.

60. Галкин Л. М. Задачи при построении математических моделей самоочищения водоемов и водотоков//Самоочищеие и диффузия во внутренних водоемах.— Новосибирск, 1980.— С. 7—47.

61. Гельфанд И. М., Локуциевский О. В. Метод «прогонки» для решения разностных уравнений/С. К. Годунов, В. С. Рябенький. Введение в теорию разностных схем.— М., 1962.— С. 283—309.

62. Гидродинамика зарегулированных водотоков на урбанизированных территориях/А. В. Мишуев, В. С. Боровков, В. Н. Спиридонов и др.// Гидрофизические процессы в реках и водохранилищах.— М., 1985.— С. 11—15.

63. Гидротехнические сооружения: Справочник проектировщика/Г. В. Железняков, Ю. А. Ибад-заде, П. Л. Иванов и др.; Под общ. ред. В. П. Недриги.— М.: Стройиздат, 1983.— 543 с.

64. Гидрофизические процессы в реках и водохранилищах/Под ред. В. К. Дебольского.— М.: Наука, 1985.— 318 с.

65. Гиргидов А. Д. Модель процессов разбавления воды в крупных каналах//Тр. ЛПИ.— 1976.— № 351.— С. 76—80.

66. Гиргидов А. Д. О параметрах, входящих в уравнение диффузии с конечной скоростью//Охрана окружающей среды от загрязнения промышленными выбросами.— 1975.— Вып. 2.— С. 112—116.

67. Гиргидов А. Д. Расчет разбавления сточных вод в реках и каналах//Проблемы охраны и рационального использования природных ресурсов.— Л., 1976.— С. 84—89.

68. Гиргидов А. Д. Уравнение диффузии с конечной скоростью в двух- и трехмерном пространствах//Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.— 1981.— Т. 10, № 1.— С. 91—93.

69. Гладышев М. Т. К задаче о распаде начального разрыва в открытых руслах//Изв. вузов. Энергетика.— 1968.— № 4.— С. 81—88.

70. Гладышев М. Т. Математическое моделирование распространения волны прорыва в бьефах гидроузлов//20-й конгр. Междунар. ассоц. по гидравлическим исследованиям. Москва, 5—9 сент. 1983 г.: Аннот. докл.— Ч. 1.— Б. м., 1983.— С. 193—196.

71. Гладышев М. Т. Математическое моделирование длинных волн в прибрежной зоне//Теоретические и экспериментальные исследования длинноволновых процессов.— Владивосток, 1985.— С. 65—72.

72. Гладышев М. Т. О распространении разрывов в открытых руслах// Изв. вузов. Энергетика.— 1965.— № 11.— С. 70—77.

73. Годунов С. К. Уравнения математической физики.— М.: Наука. 1971.— 416 с.

74. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы.— М.: Наука, 1973.— 400 с.

75. Гончаров В. Н. Динамика русловых потоков.— Л.: Гидрометеоиздат, 1962.— 374 с.

76. ГОСТ 8.207—76. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений.— Переизд. сент. 1980.— М.: Изд-во стандартов, 1981.— 9 с.

77. Грушевский М. С. Волны попусков и паводков в реках.— Л.: Гидрометеоиздат, 1969.— 338 с.

78. Грушевский М. С. Неустановившееся движение воды в реках и каналах.— Л.: Гидрометеоиздат, 1982.— 288 с.

79. Грушевский М. С., Розенберг Л. Н., Федосеев В А. Исследование специальных вопросов неустановившегося движения воды в реках// Тр. IV Всесоюз. гидрол. съезда.— Л., 1976.— Т. 11.— С. 65—74.

80. Даниэльс Ф., Альберти Р. Физическая химия. М.: Высш. шк., 1967.— 783 с.

81. Денисенко И. Д. Определение коэффициента шероховатости в руслах с неоднородными стенками//Гидравлика.— 1965.— Вып. 1.— С. 37—45.

82. Денисенко И. Д. Определение скоростного множителя *C* потока в русле с неоднородными стенками//Гидравлика.— 1966.— Вып. 2.— С. 65—77.

83 Денисов Ю. М. Математическое моделирование процесса стока горных рек//Тр. САНИИРИ.— 1968.— Вып. 39 (54).— С. 30—36.

84. Денисов Ю. М. Схема расчета гидрографа стока горных рек.— Л.: Гидрометеоиздат, 1965.— 103 с.

85. Денисова А. И. Формирование гидрохимического режима водохранилищ Днепра и методы его прогнозирования.— Киев: Наук. думка, 1979.— 292 с.

86. Дидковский М. М., Родионов И. А. Сопротивление движению воды в больших земляных каналах.— Киев: Изд-во АН УССР, 1956.— 79 с.

87. Динамика сплошных сред в расчетах гидротехнических сооружений/Под ред. В. М. Лятхера, Ю. С. Яковлева.— М.: Энергия, 1976.— 391 с.

88. Донные отложения водохранилищ и их влияние на качество воды/А. И. Денисова, Е. П. Нахшина, Б. И. Новиков, А. К. Рябов.— Киев: Наук. думка, 1987.— 164 с.

89. Дульнев В. Б. О движении потока под ледяным покровом//Метеорология и гидрология.— 1962.— № 7.— С. 55—56.

90. Евреинов В. Н. Гидравлика.— Л.; М.: Речиздат, 1947.— 740 с.

91. Епихов Г. П. Алгоритм построения математической модели речного бассейна с учетом взаимодействия стока в речной сети и плановой фильтрации подземных вод.— М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1979.— 24 с.

92. Епихов Г. П. Об одной математической модели речного бассейна//Водные ресурсы.— 1978.— № 5.— С. 68—78.

93. Еременко Е. В. К расчету распространения пассивной примеси в неустановившемся потоке/Проблемы охраны вод.— 1972.— Вып. 1.— С. 58—67.

94. Еременко Е. В. Математическое моделирование формирования качества воды для целей управления и планирования охраны вод//Управление качеством природных вод.— Харьков, 1980.— С. 22—30.

95. Еременко Е. В. Определение коэффициента продольной дисперсии в открытом потоке//Динамика и термика рек и водохранилищ.— М., 1984.— С. 61—71.

96. Еременко Е. В. Расчеты минимальных расходов попуска и режима сброса сточных вод в неустановившийся поток при ограничении на концентрацию примесей//Материалы V Всесоюз. науч. симпоз. по современным проблемам самоочищения и регулирования качества воды. Таллинн, нояб. 1975 г.:— Таллинн, 1975.— 4-я секция.— С. 74—90.

97. Еременко Е. В., Колпак В. З. Определение концентраций примесей в водотоках, принимающих поверхностный сток//Материалы V Всесоюз. науч. симпоз. по современным проблемам самоочищения и регулирования качества воды. Таллинн, нояб. 1975 г.— Таллинн, 1975.— 1-я секция.— С. 69—73.

98. Железняк И. А. Регулирование паводочного стока.— Л.: Гидрометеоиздат, 1965.— 326 с.

99. Железняков Г. В. К расчету удельной кинетической энергии речного потока//Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт.— 1965.— № 5.— С. 173—175.

100. Железняков Г. В. Пропускная способность русел каналов и рек.— Л.: Гидрометеоиздат, 1981.— 311 с.

101. Железняков Г. В. Теория гидрометрии.— Л.: Гидрометеоиздат, 1976.— 343 с.

102. Железняков Г. В., Неговская Т. А., Овчаров Е. Е. Гидрология, гидрометрия и регулирование стока.— М.: Колос, 1984.— 432 с.

103. Зиверт А. А., Хелманис В. П. Расчет трансформации паводочных волн в русловых системах с учетом берегового регулирования//Водные ресурсы.— 1973.— № 6.— С. 118—126.

104. Зыков А. А. Теория конечных графов.— Новосибирск: Наука, 1969.— 543 с.

105. Иваненко И. Г., Хусанходжаев У. О размещении средств контроля и измерения на мелиоративных системах//Развитие и совершенствование эксплуатации хозяйственных оросительных систем.— Ташкент, 1986.— С. 57—65.

106. Иванова А. А. Анализ связей воды с уровнями при распространении волн попусков в призматическом русле (численные эксперименты)//Тр. ГГИ.— 1967.— Вып. 140.— С. 44—64.

107. Идентификация моделей гидравлики/Г. Д. Бабе, Э. А. Бондарев, А. Ф. Воеводин, М. А. Каниболотский. Отв. ред. Г. В. Арцимович.— Новосибирск: Наука, 1980 — 160 с.

108. Иродов И. Е. Основные законы механики.— М.: Высш. шк., 1985.— 248 с.

109. Исследовaия неустановившегося движения воды на реках Тверце и Оредеж/Под ред. Н. Е. Кондратьева и В. А. Урываева.— Л.: Гидрометеоиздат, 1961.— 228 с.

110. Историк Б. Л. Расчет неустановившегося движения воды в открытых руслах на электронных вычислительных машинах//Тр. Гидропроекта.— 1964.— Сб. 12.— С. 222—239.

111. Историк Б. Л. Численное исследование резко нестационарных течений в открытых руслах//Гидравлика и фильтрация.— М., 1979.— С. 16—27.

112. Историк Б. Л. Численный метод и программы на ЭВМ для расчета резко нестационарных течений воды в открытых руслах//Всесоюз. симпоз. «Численные методы в гидравлике». Телави, 14—18 апр. 1980 г.: Тез. сообщ.— Л., 1980.— С. 21—22.

113. Калинин Г. П., Милюков П. И. Приближенный расчет неустановившегося движения водных масс//Тр. ЦИП.— 1958.— Вып. 66—72 с.

114. Калишевский Л. Л., Селиховкин С. В. Некоторые результаты исследования нестационарного турбулентного движения//Теплоэнергетика.— 1967.— № 1.— С. 69—72.

115. Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка.— М.: Наука, 1966.— 260 с.

116. Канализация/С. В. Яковлев, Я. А. Карелин, А. И. Жуков, С. К. Колобанов.— М.: Стройиздат, 1975.— 632 с.

117. Канторович В. К. Численные расчеты распространения консервативных примесей в неустановившихся речных потоках//Водные ресурсы.— 1986.— № 5.— С. 93—102.

118. Канторович В. К., Кучмент Л. С. Применение метода конечных элементов к расчетам неустановившегося движения воды по уравнениям Сен-Венана//Водные ресурсы.— 1981.— № 6.— С. 45—53.

119. Карасев И. Ф. Речная гидрометрия и учет водных ресурсов.— Л.: Гидрометеоиздат, 1980.— 310 с.

120. Караушев А. В. Проблемы динамики естественных водных потоков.— Л.: Гидрометеоиздат, 1960.— 392 с.

121. Караушев А. В. Распределение скоростей и коэффициента турбулентного обмена по вертикали//Тр. ГГИ.— 1947.— Вып. 2 (56).— С. 38—78.

122. Караушев А. В. Турбулентная диффузия и метод смешения.— Л.: Гидрометеоиздат, 1946.— 82 с.

123. Картвелишвили Н. А. Динамика напорных трубопроводов.— М.: Энергия, 1979.— 224 с.

124. Картвелишвили Н. А. Нетрадиционные задачи гидравлики.— М.: Энергоатомиздат, 1985.— 169 с.

125. Картвелишвили Н. А. Неустановившиеся открытые потоки.— Л.: Гидрометеоиздат, 1968.— 129 с.

126. Картвелишвили Н. А. Потоки в недеформируемых руслах.— Л.: Гидрометеоиздат, 1973.— 280 с.

127. Киенчук А. Ф. Совершенствование водораспределения на оросительных системах зоны недостаточного естественного увлажнения: Дис. ... д-ра техн. наук. Минск, 1986.— 330 с.

128. Киенчук А. Ф., Пардаев Х. Б. Вопросы межхозяйственного водораспределения при децентрализации управления//Вопросы мелиорации и использования водных ресурсов.— Ереван: Айастан, 1985.— 3 с.

129. Коваленко П. И. Автоматизация мелиоративных систем.— М.: Колос, 1983.— 304 с.

130. Коваленко Э. П. Исследование движения воды в открытых руслах.— Минск: Изд-во АН БССР, 1963.— 224 с.

131. Коваленко Э. П. К определению приведенного коэффициента шероховатости для равномерного движения в руслах с неоднородными стенками// Весцī АН БССР. Сер. фіз.-техн. навук.— 1962.— № 2.— С. 106—110.

132. Коваленко Э. П. Неустановившееся движение воды в открытых руслах//Тр. Ин-та энергетики АН БССР.— 1960.— Вып. 12.— С. 3—219.

133. Коваленко Э. П. Распределение скоростей в равномерном потоке жидкости//Инженерно-физический журнал.— 1961.— Т. 4, № 4.— С. 55—61.

134. Комплексные оценки качества поверхностиых вод/Под ред. А. М. Никанорова, В. Р. Лозанского, Г. Н. Даниловой и др.— Л.: Гидрометеоиздат, 1984.— 144 с.

135. Кондратьев Н. Е., Попов И. В., Снищенко Б. Ф. Основы гидроморфологической теории руслового процесса.— Л.: Гидрометеоиздат, 1982.— 270 с.

136. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками.— М.: Мир, 1968.— 176 с.

137. Корень В. И. Интегрирование уравнений Сен-Венана и аппроксимация морфометрических и гидравлических характеристик русла при расчетах неустановившегося движения//Тр. Гидрометцентра СССР.— 1974.— Вып. 131.— С. 36—48.

138. Корень В. И. Исследование устойчивости некоторых явных разностных схем при интегрировании уравнений Сен-Венана//Метеорология и гидрология.— 1967.— № 1.— С. 42—48.

139. Корень В. И. Особенности некоторых разностных схем численного интегрирования уравнений Сен-Венана при расчетах неустановившегося движения воды для случая слияния рек (на примере прямоугольных русел)//Гидрологические прогнозы с применением электронных вычислительных машин.— М., 1965.— С. 35—48.

140. Корень В. И., Романов А. В. Определение морфометрических и гидравлических характеристик русла при интегрировании уравнений Сен-Венана//Метеорология и гидрология.— 1976.— № 8.— С. 71—80.

141. Корень В. И., Кучмент Л. С. К постановке граничных условий при численном интегрировании уравнений Сен-Венана//Метеорология и гидрология.— 1967.— № 6.— С. 105—107.

142. Корень В. И., Кучмент Л. С. Определение геометрических и гидравлических характеристик речного русла путем решения обратных задач для уравнений Сен-Венана//Водные ресурсы.— 1973.— № 4.— С. 83—100.

143. Корень В. И., Кучмент Л. С. Решение обратных задач для моделей стока с распределенными параметрами (на примере уравнений Сен-Венана)//Тр. IV Всесоюз. гидрол. съезда.— Л., 1976.— Т. 7.— С. 208—216.

144. Корень В. И., Кучмент Л. С. Численное интегрирование уравнений Сен-Венана по явным схемам при расчетах неустановившегося движения воды в реках//Тр. Гидрометцентра СССР.— 1967.— Вып. 8.— С. 49—61.

145. Крышев И. И., Сазыкина Т. Г. Математическое моделирование миграции радионуклидов в водных экосистемах.— М.: Энергоатомиздат, 1986.— 150 с.

146. Кудряшова Ж. Н. Численный метод решения задачи о качестве воды в реках//Водные ресурсы.— 1977.— № 3.— С. 27—33.

147. Кудряшова Ж. Н. Численный метод решения задачи о распространении консервативной примеси в водотоке//Журн. вычислительной математики и математической физики.— 1978.— Т. 18, № 6.— С. 1549—1560.

148. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2.— М.; Л.: Гостехтеориздат, 1951.— 544 с.

149. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны.— М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1950.— 426 с.

150. Куслап П. Г. Уточнение расчетных зависимостей кислородного режима водоемов с отдельным учетом в них потребления кислорода донными отложениями//Тез. VII Всесоюз. симпоз. по соврем. проблемам прогнозирования, контроля качества воды водоемов и озонирования Таллинн, 19—21 нояб. 1985 г.— Таллинн, 1985.— 1-я секция.— С. 91—93.

151. Кучмент Л. С. Математическое моделирование речного стока.— Л.: Гидрометеоиздат, 1972.— 192 с.

152. Кучмент Л. С. Модели процессов формирования речного стока.— Л.: Гидрометеоиздат, 1980.— 144 с.

153. Кучмент Л. С., Демидов В. Н., Мотовилов Ю. Г. Формирование речного стока.— М.: Наука, 1983.— 216 с.

154. Кюнж Ж. А., Холли Ф. М., Вервей А. Численные методы в задачах речной гидравлики (практическое применение).— М.: Энергоатомиздат, 1985.— 256 с.

155. Ламли Дж. Модели второго порядка для турбулентных течений// Методы расчета турбулентных течений/Под ред. В. Колльмана.— М., 1984.— С. 7—34.

156. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика.— М.: Наука, 1986.— 733 с.

157. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред.— М.: Гостехтеоретиздат, 1953.— 788 с.

158. Латышенков А. М. Сравнение различных формул для определения коэффициента Шези//Гидротехническое строительство.— 1973.— № 7.— С. 32—36.

159. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика.— М.: Физматгиз, 1959.— 699 с.

160. Лифшиц И. М., Вильнер Я. М., Бонч-Осмоловская Н. Е. Методы определения корректива кинетической энергии по данным речной гидрометрии//Водное хозяйство и гидротехническое строительство, 1979.— Вып. 9.— С. 111—123.

161. Ложкин С. Н. Применение принципа Ле-Шателье к расчету турбулентного взаимодействия руслового и пойменного потоков//Тр. Гидропроекта.— 1985.— Вып. 101.— С. 126—132.

162. Ложкин С. Н. Применение принципа Ле-Шателье при расчете взаимодействия потоков основного русла и поймы//Метеорология и гидрология.— 1984.— № 11.— С. 86—91.

163. Лозанский В. Р. Проблема комплексных оценок качества поверхностных вод и пути ее решения//Комплексные оценки качества поверхностных вод.— Л., 1984.— С. 6—14.

164. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа.— М.: Наука, 1970.— 904 с.

165. Лыков А. В., Михайлов Ю. А. Теория тепло- и массопереноса.— М.; Л.: Госэнергоиздат, 1963.— 536 с.

166. Лятхер В. М. Прогноз гидравлического режима рек и водохранилищ// Водные ресурсы.— 1982.— № 6.— С. 118—144.

167. Лятхер В. М., Милитеев А. Н., Тогунова Н. П. Исследование плана течений в нижнем бьефе гидротехнических сооружений численными методами//Гидротехническое строительство.— 1978.— № 6.— С. 27—32.

168. Мак-Доуэлл Д. М., Коннор Б. А. Гидравлика приливных устьевых рек/Пер. с англ.— М.: Энергоатомиздат, 1983.— 312 с.

169. Маккавеев В. М. К динамике твердого и жидкого стока свободных потоков при прямолинейном и извилистом руслах//Тр. по гидрологии/ Геогр.-экон. НИИ ЛГУ.— 1938.— Вып. 1.— С. 5—81.

170. Маккавеев В. М. К теории турбулентного режима и взвешивания наносов//Изв. ГГИ.— 1931.— № 32.— С. 5—26.

171. Маккавеев В. М. Теория процессов перемешивания при турбулентном движении свободных потоков и вопросы зимнего режима рек//Зап. ГГИ.— 1931.— Т. 5.

172. Маккавеев В. М., Коновалов Г. М. Гидравлика.— Л.; М.: Речиздат, 1940.— 644 с.

173. Маковский Э. Э., Волчкова В. В. Автоматизированные автономные системы трансформации неравномерного стока.— Фрунзе: Илим, 1981.— 380 с.

174. Марченко А. Г. Исследование структуры турбулентного течения на входных участках гладких и шероховатых труб//Гидромеханика.— 1970.— Вып. 16.— С. 18—26.

175. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики.— М.: Наука, 1977.— 456 с.

176. Матвеев А. П. К вопросу определения пойменного стока рек Аган и Тромъеган//Материалы науч. конф. «Проблемы гляциологии Алтая».— Томск 1973.— С. 208—221.

177. Матвеев Н. М. Дифференциальные уравнения.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1965.— 368 с.
178. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Росвузиздат, 1962.— 291 с.
179. Математическая модель системы водотоков бассейна р. Припяти в естественном состоянии и при обваловании/В. П. Рогунович, Ю. И. Вап, С. А. Бампи, Ф. Д. Шнипов//Проблемы Полесья.— 1982.— Вып. 8.— С. 75—92.
180. Математические модели для расчета динамики и качества сложных водных систем//З. Н. Добровольская, Г. П. Епихов, П. П. Корянов, Н. Н. Моисеев//Водные ресурсы.— 1981.— № 3.— С. 33—51.
181. Математическое моделирование водного режима системы водотоков бассейна р. Припяти в естественном состоянии и при обваловании/ В. П. Рогунович, Ю. И. Вап, И. И. Федорова и др.//Проблемы Полесья.— 1982.— Вып. 8.— С. 135—148.
182. Математическое обеспечение ЕС ЭВМ. Пакет научных подпрограмм.— Минск, 1973.— Вып. 2.— 272 с.
183. Мелиорация — путь к высоким урожаям/Отв. ред. Л. П. Белянский.— Краснодар: Советская Кубань, 1985.— 24 с.
184. Методические указания по применению правил охраны поверхностных вод от загрязнения сточными водами.— М.; Харьков, 1982.— 64 с.
185. Методы расчета турбулентных течений/Под ред. В. Колльмана.— М.: Мир, 1984.— 464 с.
186. Мещерский И. В. Работы по механике тел переменной массы.— 2-е изд.— М.: Гостехтеориздат, 1952.— 280 с.
187. Милитеев А. Н. Численные исследования плана течений открытых потоков//Гидравлика и фильтрация.— М., 1979.— С. 3—15.
188. Милитеев А. Н., Школьников С. Я. Численные методы исследования планов течения в руслах со сложным рельефом дна//Всесоюз. симпоз. «Численные методы в гидравлике». Телави, 14—18 апр. 1980 г.: Тез. сообщ.— Л., 1980.— С. 124—125.
189. Минский Е. М. Статистическое определение пути смешения в турбулентном потоке//ДАН СССР.— 1940.— Т. 28, № 8.— С. 685—688.
190. Минский Е. М. Турбулентность руслового потока.— Л.: Гидрометеоиздат, 1952.— 164 с.
191. Михалев М. А. Распределение касательных напряжений по дну и скорости течения по живому руслу в открытых каналах произвольной поперечной формы//Вторая Всесоюз. конф. «Динамика и термика рек, водохранилищ и эстуариев»: Тез. докл.— М., 1984.— Т. 1.— С. 125—127.
192. Михалев М. А. Распределение скорости течения по живому сечению каналов различного поперечного сечения при равномерном движении//Тр. ЛПИ.— 1982.— № 383.— С. 8—15.
193. Мишуев А. В. Некоторые актуальные задачи гидравлики каналов// Гидротехническое строительство.— 1985.— № 7.— С. 17—21.
194. Мишуев А. В. О волновых процессах в каналах при быстром образовании отверстий в водоперегораживающем сооружении//Сб. науч.-метод. статей по гидравлике.— 1977.— Вып. 1.— С. 68—78.
195. Мишуев А. В., Жилкин А. П. Интегральные характеристики нестационарного турбулентного пограничного слоя//Изв. вузов. Энергетика.— 1985.— № 4.— С. 111—116.
196. Мишуев А. В., Сладкевич М. С., Селедкин А. А. Теоретический анализ отражения волн при взаимодействии прерывной волны с водосливом//Тр. МИСИ.— 1983.— № 189.— С. 18—25.
197. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности.— М.: Наука, 1965.— Ч. 1.— 640 с.
198. Морозов Л. А. О коэффициенте кинетической энергии естественных водотоков//Гидротехническое строительство.— 1964.— № 7.— С. 38.
199. Мундерецкий С. И. Об информационном обеспечении математических моделей неустановившегося движения воды//Вопросы гидравлики и инженерной гидрологии.— М., 1983.— С. 72—74.

200. Назарян А. Г. О расчете изотах при равномерном турбулентном течении в прямоугольных каналах//Тр. ГГИ.— 1955.— Вып. 49 (103).— С. 34—43.

201. Нахшина Е. П. Микроэлементы в водохранилищах Днепра.— Киев: Наук. думка, 1983.— 158 с.

202. Неронея Л. С., Рогунович В. П. Малогабаритная вертушка// Гидротехника и мелиорация.— 1968.— № 7.— С. 84—88.

203. Неустановившееся движение воды в бьефах гидроузлов/ В. М. Лятхер, Б. Л. Историк, В. М. Синявская, П. М. Рябкин//Тр. Гидропроекта.— 1975.— Вып. 44.— С. 85—100.

204. Никитин И. К. Обобщенные зависимости для расчета стабилизированных турбулентных течений по двухслойной схеме//Исследования однородных и взвесенесущих турбулентных потоков.— Киев, 1967.— С. 17—25.

205. Никитин И. К. Особенности структуры турбулентного потока у его свободной поверхности//Гидротехника и гидромеханика.— Киев, 1964.— С. 3—6.

206. Никитин И. К. Сложные турбулентные течения и процессы тепломассопереноса.— Киев: Наук. думка, 1980.— 238 с.

207. Никитин И. К. Турбулентные течения со сдвигом в задачах гидротехники: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук.— Л., 1968.— 92 с.

208. Никитин И. К. Турбулентный русловой поток и процессы в придонной области.— Киев: Изд-во АН УССР, 1963.— 142 с.

209. Никитина Л. С. Коэффициенты Буссинеска и Кориолиса для русла с поймой//Метеорология и гидрология.— 1973.— № 3.— С. 59—61.

210. Никифоровская В. С. Идентификация коэффициента ветрового напряжения//Вопросы гидрологии Сибири.— Л., 1980.— С. 86—88.

211. Никифоровская В. С. Комплекс программ PROFIL для определения гидравлических и морфометрических характеристик открытых водотоков: Описание применения (3533970.00007—01 31 01).— Новосибирск, 1984.

212. Никифоровская В. С. Математическая модель для расчета на ЭВМ гидрофизических процессов в устьевых областях рек//Гидрофизические процессы в реках и водохранилищах.— М., 1985.— С. 211—216.

213. Никифоровская В. С. Методы определения параметров моделей сложных систем открытых водотоков//Автореф. ... канд. техн. наук.— Л., 1979.— 17 с.

214. Никифоровская В. С. О численных моделях неустановившихся течений в руслах с поймами//Динамика сплошной среды.— 1978.— Вып. 35. С. 89—98.

215. О возможности дистанционного лазерного зондирования некоторых нелюминесцирующих соединений в естественных водоемах/Ф. В. Бункин, Д. В. Власов, Л. М. Герасименко, В. П. Слободянин//Квантовая электроника.— 1984.— Т. 11, № 6.— С. 1253—1254.

216. О построении и эксплуатации наземного сектора государственной космической системы исследования природных ресурсов Земли/В. В. Ежков, Ю. П. Киенко, А. П. Метальников и др.//Исследования Земли из космоса.— 1985.— № 1.— С. 3—9.

217. Осипович А. А. Способ измерения расходов воды//Гидротехника и мелиорация.— 1982.— № 1.— С. 56—57.

218. Основы прогнозирования качества поверхностных вод/Л. Н. Фальковская, В. С. Каминский, Л. Л. Пааль, И. Ф. Грибовская — М.: Наука, 1982.— 182.

219. Охрана водных ресурсов/И. И. Бородавченко, Н. В. Зарубаев, Ю. С. Васильев и др.— М.: Колос, 1979.— 248 с.

220. Пааль Л. Л. Вопросы гидравлического моделирования процесса диффузии//Охрана окружающей среды от загрязнения промышленными выбросами.— Л., 1977.— Вып. 4.— С. 137—140.

221. Пааль Л. Л. Инженерные методы расчета формирования качества воды водотоков: Конспект лекции/Таллин. политехн. ин-т,— Таллинн, 1976.— Ч. 2.— 102 с.

222. Пааль Л. Л. О расчете смешения сточных вод при некоторых эпюрах загрузки водотоков//Тр. Таллин. политехн. ин-та. Сер. А.— 1967.— Т. 247, № 4.— С. 75—89.

223. Пааль Л. Л. Расчет кислородного режима в водотоке при некоторых элементарных эпюрах впуска сточных вод//Тр. Таллин. политехн. ин-та. Сер. А.— 1970.— Т. 298, № 6.— С. 49—56.

224. Пааль Л. Л., Вельнер Х. А., Айтсам А. М. Вопросы инженерного расчета самоочищения водотоков//Науч. докл. по вопросам самоочищения водоемов и смешения сточных вод: Материалы I Всесоюз. симпоз. Таллинн. 7—10 июня 1965 г.— Таллинн, 1965.— С. 144—155.

225. Пааль Л. Л., Суурказк В. А. Определение коэффициентов дисперсии и турбулентной диффузии//Материалы V Всесоюз. науч. симпоз. по современным проблемам самоочищения и регулирования качества воды. Таллинн, нояб. 1975 г.— Таллинн, 1975.— 1-я секция.— С. 140—145.

226. Пааль Л. Л., Хяяль К. Р. О гидравлической сущности коэффициентов турбулентной диффузии//Тр. Таллин. политехн. ин-та. Сер. А.— 1972.— Т. 330, № 9.— С. 11—20.

227. Павелко В. Л., Прошина О. П. Информационное обеспечение решения задач по качеству вод//Тр. ВНИИГМИ—МЦД.— 1987.— Вып. 142.— С. 82—88.

228. Павловский Н. Н. К вопросу о расчетной формуле для равномерного движения в водотоках с неоднородными стенками//Собр. соч.— Л.; М.: Изд-во АН СССР, 1955.— Т. 1.— С. 319—326.

229. Павловский Н. Н. Формула для коэффициента Шези//Собр. соч.— Л.; М.: Изд-во АН СССР, 1955.— Т. 1.— С. 311—318.

230. Пакет программ ДРЕВО для расчета неустановившихся течений в разветвленных системах открытых русел: Отчет о НИР ИГиЛ СО АН СССР. № Гр 3533970. 00003-01-ЛУ; Инв. № П008102.— Новосибирск, 1984.— 41 с.

231. Петров Г. А. Движение жидкости с изменением расхода вдоль пути.— М.; Л.: Стройиздат, 1951.— 200 с.

232. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1964.— 272 с.

233. Поляков Б. В. Значение коэффициентов шероховатости русел и поймы равнинных рек//Метеорология и гидрология.— 1936.— № 12.— С. 25—31.

234. Попов Д. Н. Нестационарные гидромеханические процессы.— М.: Машиностроение, 1982.— 240 с.

235. Попов Д. Н. Об особенностях нестационарных потоков в трубах// Изв. вузов. Машиностроение.— 1972.— № 7.—С. 78—82.

236. Поттер Д. Вычислительные методы в физике.— М.: Мир, 1975.— 392 с.

237. Правила охраны поверхностных вод от загрязнения сточными водами.— М.: Изд. Минздрава СССР, 1975.— 38 с.

238. Практические рекомендации по гидрологическому изучению загрязнения и самоочищения рек, озер и водохранилищ.— Л.: Изд. ГГИ, 1971.— 26 с.

239. Практические рекомендации по расчету разбавления сточных вод в реках, озерах и водохранилищах.— Л.: Изд. ГГИ, 1973.— 101 с.

240. Прерывная волна на участках резкого расширения каналов/ А. В. Мишуев, С. И. Левина, А. А. Гусев, А. А. Селедкин//Гидротехническое строительство.— 1984.— № 4. С. 6—9.

241. Приборы для измерения скоростей движения воды/В. П. Рогунович, А. А. Осипович, В. Ф. Янголь, Л. П. Каравай//Гидротехника и мелиорация.— 1978.— № 5.— С. 68—70.

242. Приборы и программа для автоматизации определения расходов в открытых потоках/В. П. Рогунович, Л. С. Нероненя, А. А. Осипович, Г. С. Цацук//Вопросы водного хозяйства.— 1976.— Вып. 2.— С. 231—237.

243. Применение метода поляризационного КАРС для измерения температуры воды/А. Ф. Бункин, Д. В. Власов, А. С. Галумян, К. О. Сурский// Оптика и спектроскопия.— 1985.— Т. 58, вып. 3.— С. 481—486.

244. Рабкова Е. К., Елфимов В. И., Хавьер П. М. Кинематическая структура потока в трапецеидальном русле//Гидротехническое строительство.— 1984.— № 3.— С. 24—27.

245. Раков А. И. Надежность радиорелейных и спутниковых линий передачи.— М.: Радио и связь, 1981.— 160 с.
246 Распопин Г. А. Влияние ветра на параметры потока в больших каналах//Гидротехника и мелиорация.— 1985.— № 7.— С. 25—28.
247. Распопин Г. А. Влияние стратификации на касательные напряжения между воздушным потоком и свободной поверхностью//Метеорология и гидрология.— 1971.— № 8.— С. 43—49.
248. Расчет неустановившегося движения на р. Тверце с помощью электронной вычислительной машины/А. Ф. Воеводин, М. С. Грушевский, В. С. Никифоровская и др.//Тр. ГГИ.— 1965.— Вып. 121.— С. 88—104.
249. Рейнольдс О. Динамическая теория движения несжимаемой вязкой жидкости и определение критерия//Проблемы турбулентности.— М.; Л., 1936.— С. 185—227.
250. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач.— М.: Мир, 1972.— 418 с.
251. Рогунович В. П. К расчету распределения осредненных продольных скоростей в однородных по длине прямолинейных потоках//Водное хозяйство Белоруссии.— 1971.— Вып. 1.— С. 64—73.
252. Рогунович В. П. Определение приведенного коэффициента шероховатости//Метеорология и гидрология.— 1986.— № 3.— С. 81—88.
253. Рогунович В. П. Расчет водного режима систем водотоков//Всесоюз. симпоз. «Численные методы в гидравлике». Телави, 14—18 апр. 1980 г.: Тез. сообщ.— Л., 1980.— С. 54—57.
254. Рогунович В. П. Расчет трехмерного поля осредненных скоростей в однородных по длине потоках прямоугольного сечения//Инженерный физический журн.— 1985.— Т. 49, № 3.— С. 509—510.
255. Рогунович В. П., Бампи С. А., Волонцевич С. А. Выделение негранзитных частей водотоков сложных сечений//Водное хозяйство и гидротехническое строительство.— 1989.— Вып. 18.— С. 61—65.
256. Рогунович В. П., Богданович М. И. Распределение продольных скоростей в руслах неправильной формы сечения//Водное хозяйство и гидротехническое строительство. 1984.— Вып. 13.— С. 56—62.
257. Рогунович В. П., Войтеховская Э. А. Определение граничного условия при расчетах концентраций примеси в водотоках//Водоотведение и охрана вод.— Минск, 1982.— С. 24—33.
258. Рогунович В. П., Войтеховская Э. А. Экспериментальные исследования переноса примесей в водотоке при нестационарном движении воды//Комплексное использование водных ресурсов.— М., 1975.— Вып. 3.— С. 154—162.
259. Рогунович В. П., Войтеховская Э. А., Скрипко М. И. Теоретические и экспериментальные исследования переноса примесей естественными водотоками//Материалы V Всесоюз. науч. симпоз. по современным проблемам самоочищения и регулирования воды. Таллинн, нояб. 1975 г.— Таллинн, 1975.— 1-я Секция.— С. 146—152.
260. Рогунович В. П., Войтеховская Э. А., Федорова И. И. Возможности пакета прикладных программ для автоматизации гидравлических расчетов систем водотоков//Гидравлика открытых русел.— М., 1984.— С. 19—28.
261. Рогунович В. П., Осипович А. А. Совершенствование способов измерений расходов воды на мелиоративных системах//Орошение и оросительные системы./ЦБНТИ Минводхоза СССР.— 1980.— Сер. 1. вып. 1. С. 14—20.
262. Рогунович В. П., Осипович А. А., Цацук Г. С Распределение продольного компонента осредненной скорости в однородных по длине потоках трапецеидального сечения//Водное хозяйство и гидротехническое строительство.— 1980.— Вып. 10. С. 109—117.
263. Рогунович В. П., Харченко В. Д. К расчету распределения осредненных продольных скоростей в двупараметрических прямолинейных потоках прямоугольного поперечного сечения//Вопросы водохозяйственного строительства.— Минск, 1970.— С. 167—174.

264. Родзиллер И. Д. К вопросу о расчете смешения сточных вод в реках.— М.: Изд. ВОДГЕО, 1954.— 31 с.
265. Родзиллер И. Д. О некоторых теоретических вопросах применения метода сорбции для очистки сточных вод//Тр. ВОДГЕО.— 1968.— № 20.— С. 70—75.
266. Родзиллер И. Д. Определение кратности разбавления вод речной водой//Гигиена и санитария.— 1959.— № 11.— С. 17—26.
267 Родзиллер И. Д. Прогноз качества воды водоемов — приемников сточных вод.— М.: Стройиздат, 1984.— 263 с.
268. Роди В. Модели турбулентности окружающей среды//Методы расчета турбулентных течений/Под ред. В. Колльмана.— М., 1984.— С. 227—322.
269. Рожнов В. А. Совершенствование водораспределения на оросительных системах: Дис. ... д-ра техн. наук.— Ташкент, 1986.— 365 с.
270. Рожнов В. А., Сафтенко А. И. Моделирование переходных процессов в оросительных каналах//Методы и средства управления водораспределением.— Фрунзе, 1984.— С. 43—55.
271. Розенберг Л. И. О трансформации сложных волн в открытых руслах//Тр. ГГИ.— 1973.— Вып. 211.— С. 176—182.
272. Розенберг Л. И., Грушевский М. С. Возможности расчета распластывания волн половодья в реках с деформирующимся руслом (на примере Амударьи)//Тр. ГГИ.— 1972.— Вып. 190.— С. 211—228.
273. Розенберг Л. И., Русинов М. И. Особенности в схематизации пойменных русел при расчетах неустановившегося движения воды//Тр. ГГИ.— 1967.— Вып. 140.— С. 83—90.
274. Розовский И. Л. Исследования турбулентных напорных и открытых потоков, выполненные в институте Гидромеханики АН УССР//Турбулентные течения.— М., 1970.— С. 168—179.
275. Розовский И. Л., Еременко Е. В., Базилевич А. А. Неустановившееся движение водного потока ниже гидроэлектростанций и его влияние на русло.— Киев: Наук. думка, 1967.— 276 с.
276. Романов А. В. Расчет (прогноз) уровней и расходов воды по уравнениям Сен-Венана при отсутствии данных о морфометрических и гидравлических характеристик русла: Автореф. ... канд. геогр. наук.— М., 1976.— 18 с.
277. Роуч П. Вычислительная гидродинамика.— М.: Мир, 1980.— 612 с.
278. Рохусаар Л. Л., Пааль Л. Л. О результатах экспериментального исследования коэффициента продольной диффузии в открытых водотоках// Тр. Таллинн. политехн. ин-та. Сер. А.— 1970.— Т. 298, № 6.— С. 3—17.
279. Русанов В. В. Об устойчивости метода матричной прогонки//Вычислительная математика.— 1960.— Сб. 6.— С. 74—83.
280. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М.: Наука, 1983.— 615 с.
281. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем.— М.: Наука, 1973.— 415 с.
282. Синельщиков В. С. О применении теории Колмогорова к пристенной турбулентности//Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.— 1966.— Вып. 3, № 10.— С. 125—130.
283. Скородумов Д. Е. Вопросы гидравлики пойменных русел в связи с задачами построения и экстраполяции кривых расходов воды//Тр. ГГИ.— 1965.— Вып. 128.— С. 3—97.
284. Скородумов Д. Е. Вопросы гидравлического расчета потока в русле с поймой//Тр. IV Всесоюз. гидрол. съезда.— Л., 1976 — Т. 11.— С. 57—64.
285. Соколов Ю. Н. Гидравлическое сопротивление пойм//Водные ресурсы.— 1980.— № 6.— С. 143—154.
286. Соколовский Д. Л. О математизации гидрологии и методах математического моделирования и расчета паводков//Метеорология и гидрология.— 1971.— № 5.— С. 60—68.

287. Справочник по гидравлике/Под ред. В. А. Большакова.— Киев: Вища шк., 1984.— 344 с.
288. Спутниковая связь и вещание: Справочник.— 2-е изд./Г. Б. Аскинази, В. Л. Быков, М. Н. Дьячкова и др.; Под ред. Л. Я. Кантора.— М.: Радио и связь, 1988.— 344 с.
289. Срибный М. Ф. Нормы сопротивления движению естественных водотоков и расчет отверстий больших мостов по способу бытовых морфологических характеристик.— М.; Л.: Гострансиздат, 1932.— 148 с.
290. Срибный М. Ф. Формула средней скорости течения рек и их гидравлическая классификация по сопротивлению движению//Исследования и комплексное использование водных ресурсов.— М., 1960.— С. 204—220.
291. Станкевич А. П. Уточнение коэффициентов шероховатости для системы водотоков бассейна р. Припяти//Проблемы Полесья.— 1982.— Вып. 8.— С. 149—155.
292. Станкевич А. П. Минимизация попусков воды из водохранилища// Проблемы гидравлики и инженерной гидрологии.— М., 1985.— С. 98—101.
293. Стокер Дж. Волны на воде.— М.: Изд. иностр. лит., 1959.— 618 с.
294. Топчибашев Н. К. К вопросу о неравномерности распределения скоростей в открытых потоках//Тр. Энерг. ин-та им. И. Г. Есьмана.— 1954.— Т. 12.— С. 121—135.
295. Труфанов А. А. О коэффициенте Кориолиса, корректирующем неравномерность распределения скоростей по живому сечению//Метеорология и гидрология.— 1940.— № 9.— С. 58—60.
296. Указання по определению расчетных гидрологических характеристик СН 435-72.— Л.: Гидрометеоиздат, 1972.— 19 с.
297. Федосеев В. А. Одномерная схематизация неустановившегося движения при изоляции русла от поймы//Тр. ГГИ.— 1969.— Вып. 173.— С. 3—33.
298. Хавич В. А. Исследование влияния планируемых противопаводковых мероприятий на режим и параметры максимального стока р. Ясельды//Проблемы гидравлики и инженерной гидрологии.— М., 1985.— С. 111—116.
299. Хавич В. А. Метод расчета неустановившегося движения воды и его применение к математическому моделированию половодий//Водное хозяйство и гидротехническое строительство.— 1987.— Вып. 16.— С. 67—71.
300. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов.— М.: Мир, 1977.— 324 с.
301. Хинце И. О. Турбулентность, ее механизм и теория.— М.: Физматгиз, 1963.— 680 с.
302. Христианович С. А. Неустановившееся движение в каналах и реках//Некоторые новые вопросы механики сплошной среды.— М.; Л., 1938.— С. 13—153.
303. Черкесов Л. В. Гидродинамика волн.— Киев: Наук. думка, 1980.— 259 с.
304. Черкинский С. Н. Санитарные условия спуска сточных вод и водоемов.— М.: Стройиздат, 1977.— 224 с.
305. Численные методы решения одномерных задач гидравлики/ А. А. Атавин, О. Ф. Васильев, А. Ф. Воеводин, С. М. Шугрин//Водные ресурсы.— 1983.— № 4.— С. 38—47.
306. Численный метод расчета распространения длинных волн в открытых руслах и приложение его к задаче о паводке/О. Ф. Васильев, С. К. Годунов, Н. А. Притвиц и др.//Докл. АН СССР.— 1963.— Т. 151, № 3.— С. 525—527.
307. Численный расчет неустановившегося движения воды в открытом русле/О. Ф. Васильев, С. К. Годунов, Н. А. Притвиц, С. М. Шугрин//Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках/Г. Б. Алалыкин, С. К. Годунов, И. Л. Киреева, Л. А. Плинер.— М.: Наука, 1970.— Прилож. 3.— С. 99—111.
308. Чоу В. Т. Гидравлика открытых каналов.— М.: Стройиздат, 1969.— 464 с.
309 Чугаев Р. Р. Гидравлика.— Л.: Энергия, 1975.— 599 с.

310 Шабрин А Н Исследование скоростной структуры неустановившегося открытого потока Автореф канд техн наук — Киев, 1964 — 17 с
311 Шабрін А М Швидкісна структура відкритих потоків при неусталеному русі//Доповіді АН УРСР — 1963 — № 11 — С 1448—1450
312 Шеренков И А Прикладные плановые задачи гидравлики спокойных потоков — М Энергия, 1978 — 240 с
313 Шиперко Е Э Гидравлический расчет русел с неоднородной шероховатостью//Изв вузов Горный журн — 1961 — № 7 — С 22—28
314 Шлихтинг Г Теория пограничного слоя — М Наука, 1974 — 712 с
315 Шугрин С М Соединение одномерной и двумерной (плановой) моделей течения воды//Водные ресурсы — 1987 — № 5 — С 5—15
316 Шугрин С М Численный расчет неустановившегося движения воды в системах речных русел или каналов//Изв СО АН СССР Сер тех наук — 1969 — Вып 1, № 3 — С 25—31
317 Эббот М Гидравлика открытого потока/Пер с англ Е И Масса, С Ю Хазанова — М Энергоатомиздат, 1983 — 272 с
318 Экспериментальное исследование водного режима водотока при неравномерном и неустановившемся движениях/В П Рогунович, Э А Войтеховская, С А Бампи и др //Водное хозяйство и гидротехническое строительство 1985 — Вып 14 — С 69—73
319 Яненко Н Н Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики — Новосибирск. Наука, 1967.— 195 с
320 Abbot M B, Verhoog F A Data reversible systems for flood routing//13th Congr Int Assoc Hydraul Res — Kyoto, 1969 — Vol 1 — P 305—312
321 Bardzik A The application of the Muskingum model in the analysis and forecasting of flood wave propagation in the Upper Vistula basin//Report Intern conf numerical modelling of river, channel and overland flow for water resources and environmental applications, Bratislava, May 4—8, 1981 Sec 1 2 — Bratislava, 1981 — 14 p
322 Basin M Recherches experimentales sur l'ecoulement de l'eau//Memoires de l'Academie des sciences — Paris, 1865 — T 19 — 652 P
323 Boussinesq J Theorie de lecoulement tourbillennant et tumulteux des liquides dans les lins rectilignes a grande section — Paris Gauthier — Villars — 1897
324 Brundrett E, Baines W D The production and diffusion of vorticity in duct flow//Fluid Mech — 1964 — Vol 19 — P 3
325 Carter W D, Paulson R W Introduction to monitoring dynamic environmental phenomena of the world using satellite data collection systems, 1978//Geological survey circular — 1979 — N 803 — 21 p
326 Daily S W, Deemer K C The unsteady flow water tunnel at the Massachussets Institute of technology//Trans ASME — 1954 — Jan — P 81—88
327 Demuren A O, Rodi W Calculation of turbulence-driven secondary motion in non-circular ducts//J Fluid Mech — 1984 — Vol 146 — P 189
328 Einstein H A, Li H Secondary currents in straight channels//Trans Amer Geophys Union — 1958 — Vol 36, N 6 — P 1085—1088
329 Elder J W An experimental investigation of turbulence spots and breakdown to turbulence//J Fluid Mech — 1960 — Vol 9, N 2 — P 235—249
330 Elder J W The dispersion of marked fluid in turbulent shear flow// J Fluid Mech — 1959 — Vol 5, N 4 — P 544—560
331 Erlich M, Niemic A A multidimensional stochastic model for bed load transportation phenomena in open channels//Rep Int conf numerical modelling of river, channel and overland flow for water resources and environmental applications Bratislava, May 4—8 1981 Sect 2 1 — Bratislava, 1981 — 10 p
332 Fischer H B Analytic prediction of longitudinal dispersion coefficients in natural streams//Ploc III Congr Intern Assoc Hydraul Res — 1967 — Vol 4 — P 11—19
333 Fischer H B Dispersion predictions in natural streams//J Sanitary Eng Div ASCE — 1968 — Vol 94, N 5 — P 927—943

334 Fischer H B Longitudinal dispersion and turbulent mixing in open-channel flow//Annu Rev Fluid Mech — 1973 — Vol 5, N 8036 — P 59—78

335 Fischer H B Longitudinal dispersion in laboratory and natural streams//Rep Laboratory of Hydraul and Water Res California Inst Technology N KH-R 12/W M Keck — Pasadena, 1966

336 Fischer H B The mechanics of dispersion in natural streams//J Hydraul Div ASCE — 1967 — Vol 93, N 6 — P 187—216

337 Grass A J Structural features of turbulent flow over smooth and rough boundaries//J Fluid Mech — 1971 — Vol 50, N 2 — P 233—255

338 Hanjalic K, Lounder B E A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows//J Fluid Mech — 1972 — Vol 52, N 4 — P 609—638

339 Herschy R W Satellite data transmission as an aid to hydrological telemetry//IAHS Publ — 1986 — N 160 — P. 369—376

340 Herschy R W Towards a satellite based hydrometric data collection system//Advances in Hydrometry Proc Exeter Symp July, 1982 — IAHS Publ — 1982 — N 134 — P 285—296

341 Hinze J O Experimental investigation on secondary currents in the turbulent flow through a straight conduit//Appl Sci Res — 1973 — Vol 28, Desember — P 453—466

342 Holly Forrest M Physical principles and dispersion equations//Dispersion in rivers and coastal waters — J Div Hydraul Eng (London, New York) — Vol 3 — 1985 — P 1—37

343 Hulsing H, Smith W, Cobb E D Velocity head coefficients in open channels//River Hydraul Geol Survey Water Supply Paper — 1966 — N 1869 c — 45 p

344 Iwasa Y, Inoue K Mathematical simulation of flood and overland flows//Rep Intern conf numerical modelling of river, channel and overland flow for water resources and environmental applications, Bratislava May 4—8, 1981 Sect 1 1 — Bratislava, 1981 — 12 p

345 Karman Th Mechanische Ähnlichkeit der und Turbulenz//Nachr Ges Wiss Gottingen Math — Phys — 1930 — Kl — P 58—76, 271—286

346 Kite G W Data bases for modelhng//Gen rep Intern conf numerical modelling of river, channel and overland flow for water resources and environmental applications Bratislava, 4—8 May, 1981 Sect 3 1 — Bratislava, 1981 — 24 p

347 Manley R E Hysim — a physically realistic, general purpose hydrological model//Proc Intern Symp Logistics and Benefits of Using Mathematica Models of Hydrological and Water Resources Systems, October 24—26, 1978 — Pisa, Italy, 1978

348 Matsuoka Yuzuru Doboky gakai rombyn hokokusy//Proc Jap Soc Civ Eng — 1978 — N 280 — P 39—50

349 Melling A, Whitelaw J H Turbulent flow in a rectangular duct//J Fluid Mech — 1976 — Vol 78 — P 289—315

350 Mellor G L, Herring H J A survey of the mean turbulent field closure models//AIAA J — 1973 — N 11 — P 590—599

351 Miller A C, Richardson E V Diffusion and dispersion in open channel flow//J Hydraul Div ASCE — 1974 — Vol 100, N 1 — P 159—171

352 Nakayama A, Chow W L, Sharma D Calculation of fully developed turbulent flows in ducts of arbitraty cross-section//J Fluid Mech — 1983 — Vol 128 — P 199—217

353 Pederson F B Prediction of longitudinal dispersion in natural streams//Progr Rept Inst Hydrodyn and Hydraul Eng Techn Univ Den — 1976 — N 41 — P 13—22

354 Popa R Mathematical modelling of stream pollution under nuclear accident conditions//Finite Elem Water Resour Proc 6th Int Conf Lisboa, June, 1986 — Berlin, 1986 — P 449—458

355 Prandtl L Zur turbulenten Stromung in Rohren und langs Platten//Ergebn Aerodyn Versuchsanst — Gottingen — 1932 — N 4 — S 18—29

356 R a o G o v i n d a Turbulence characteristics of open channel flows//J Inst Engineers (India), Civil Eng Div — 1964 — Vol 44, N 5
357 R e i d I A Practical methods of aiming antennas at geostationary satellites//Techn bull (Ottawa Canada Inland Waters Directorate Water Res Branch) — 1978 — N 104 — 10 p
358 R e y n o l d s W C Recent advances in the computation of turbulent flow//Advances in Chem Engineering — 1974 — Vol 9 — P 193—246
359 R o g o u n o v i c h V P Mathematical models of water motion in channel systems//Rep Intern conf numerical modelling of river, channel and overland flow for water resources and environmental applications, Bratislava May 4—8 1981 Sect 1 1 — Bratislava, 1981 — 14 p
360 R o g o u n o v i c h V P, S c h n i p o v F D Calculation of crossflows in straight rectangular and trapezidal ducts with variable peripheral roughness// 21th Congr Intern Assoc Hydraul Res (Melbourne) — 1985 — Vol 2 — P 64—69
361 R o g o u n o v i c h V P, V o i t e k h o v s k a y a E A Mathematical model application for solution of water quality problems//Symp USA Computer Techn and Automat Water Resources Systems Washington, April, 1974 — Washington, 1974 — 6 p
362 S a i n t V e n a n t B Theorie du mouvement non permanent des eaux// Comptec Rendus de l Ac des Sciences — 1871 — N 68 — P 147—237
363 S a u v a g e t P a t r i c k Numerical computation of dispersion//Dispersion in rivers and coastal waters J Dev Hydraul Eng (London New York) — Vol 3 — 1985 — P 39—78
364 S c h m i d t W Der Massenaustausch bei der ungeordneten Strumung in freier Luft und seine Folgen//Sitzungsber Akad Wiss Wien — Math — nat Kl (2a) — 1917 — 126 N 6 — S 757—804
365 S c h m i d t E Über die Anwendung der Differenzrechnung auf Technische Anheiz und Abhuhlungeprobleme//Beitr zur Technischen Mechanik und Technischen Physik — Berlin 1924
366 S e l e z o v I T, Z h e l e z n y a k M I On the numerical modelling of long waves propagation in open channels//Rep Intern conf numerical modelling of river, channel and overland flow for water resources and environmental applications Bratislava, May 4—8, 1981 Sect 1 1 — Bratislava, 1981 — 11 p
367 S t r e e t e r H W P h e l p s E B A study of the pollution and natural purification of the Ohio river//Oxidation and Reaeration USPHS bull — 1925 — N 146 — P 75
368 S t r e e t e r H W The rate of atmospheric reaeration of sewage polluted streams//Publ Health Rep — 1926 — Vol 41, N 7
369 T a y l o r G I Eddy motion in the atmosphere//Phil Trans Roy Soc — 1915 — A215 — P 1 — 25
370 T a y l o r G I Dispersion of soluble matter in solvent slowing slowly through a tube//Proc Roy Soc — 1953 — A219, N 1137 — P 186—203
371 T a y l o r G I The dispersion of matter in turbulent flow through a pipe// Proc Roy Soc — 1954 — A223 N 1155 — P 446—468
372 T a y l o r G I Conditions under which dispersion of a solute in a stream of solvent can be used to measure molecular diffusion//Proc Roy Soc — 1954 — A225 N 1163 — P 473—477
373 T h o m a n R V Effects of longitudinal components on dynamic water quality response of streams and rivers//Water Res Res — 1973 — Vol 9 N 3 — P 355—365
374 T r a c y J Turbulent flow a three dimensional channel//Hydraul Div — 1965 — N 6 — P 9—35
375 Z a g o r s k a E W i t M One dimensional hydrodynamic models of overland flow//Rep Intern conf numerical modelling of river channel and overland flow for water resources and environmental applications Bratislava May 4—8 1981 Sect 1 1 — Bratislava 1981 — 12 p
376 Z i e l k e W U r b a n K Two dimensional modelling of river with flood plains//Rep Intern conf numerical modelling of river channel and overland flow for water resources and environmental applications Bratislava May 4—8 1981 Sect 1 1 — Bratislava 1981 — 13 p

377 V a l e n t i n e E r i c M, W o o d I a n R Longitudinal dispersion with dead zones//J Hydraul Div Proc Amer Soc Civ Eng — 1977 — Vol 103, N 9 P 975—990
378 V a s i l i e v O F K v o n V I Friction forces of unsteady flow in open channels and pipes//Proc 14th Congr IAHR — Paris 1973 — Vol 2 — P 186—196
379 V a s i l i e v O F Mathematical modelling of water quality in river channels and its systems//Rep Intern Inst Applied Systems Analysis N WP 72 121 Laxenburg, Austria, 1979
380 V a s i l i e v Y S, V i s s a r i o n o v V I S o k o l o v B A Simulation of hydrodynamic processes in water resources systems//Rep Intern conf numerical modelling of river, channel and overland flow water resources and environmental applications Bratislava May 4—8 1981 Sect 1 1 — Bratislava, 1981 — 9 p

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Монография

Василий Петрович Рогунович

Автоматизация математического моделирования движения воды и примесей в системах водотоков

Редактор Т. С. Шмидт. Художник В. В. Быков.

Художественный редактор Б. А. Денисовский.

Технический редактор Н. В. Морозова. Корректор И. Б. Михайлова.

ИБ № 1611.

Сдано в набор 20.07.89. Подписано в печать 23.10.89. М-17694. Формат 60×90$^{1}/_{16}$. Бумага типографская № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Печ. л. 16,5. Кр.-отт. 16,5. Уч.-изд. л. 18,51. Тираж 1130 экз. Индекс ГЛ-222. Заказ № 194. Цена 3 р. 20 к.

Гидрометеоиздат. 199226. Ленинград, ул. Беринга, 38.

Ленинградская типография № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 190000, Ленинград, Прачечный переулок, 6.