

ПЕРЕНОС РАДИАЦИИ

В РАССЕЙВАЮЩИХ
И ПОГЛОЩАЮЩИХ
АТМОСФЕРАХ

Стандартные
методы
расчета

**RADIATIVE TRANSFER IN
SCATTERING AND ABSORBING
ATMOSPHERES:
STANDARD COMPUTATIONAL PROCEDURES**

Edited by

Jacqueline Lenoble

Laboratoire d'Optique Atmosphérique
Université des Sciences et Techniques de Lille
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex
France



A. DEEPAK Publishing 1985
A Division of Science and Technology Corporation
Hampton, Virginia USA

ПЕРЕНОС РАДИАЦИИ

В РАССЕЙВАЮЩИХ И ПОГЛОЩАЮЩИХ АТМОСФЕРАХ

Стандартные методы расчета

Под редакцией Жаклин Ленобль

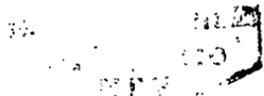
Перевод с английского канд. физ.-мат. наук Ж. К. Золотовой
под редакцией д-ра физ.-мат. наук К. С. Шифрина



Ленинград Гидрометеоздат 1990



В книге изложены результаты работы международной Рабочей группы, созданной Комиссией по радиации Международной ассоциации метеорологии и физики атмосферы. Целью этой группы была подготовка исчерпывающего обзора многочисленных методов решения уравнений переноса излучения в атмосфере, развитых к настоящему времени. В обзоре содержится описание этих методов и анализ их относительных преимуществ и недостатков. Сопоставляется точность разных методов на типичных примерах. Книга адресована метеорологам, океанологам, астрофизикам, экологам и другим специалистам, исследующим процессы переноса радиации в оптически толстых средах, а также студентам соответствующих специальностей.



ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	9
Предисловие к русскому изданию	11
Предисловие	12
Список авторов, принявших участие в создании настоящей книги	14

Часть I

Введение

Глава 1. Общие определения	20
1.1. Параметры, определяющие положение координат и направление	—
1.2. Характеристики атмосферы	21
1.3. Оптическая толщина	22
1.4. Характеристики поля излучения	24
1.5. Уравнение переноса	—
1.5.1. Общий вид	—
1.5.2. Плоскопараллельная атмосфера	25
1.5.2.1. Интегродифференциальное уравнение для суммарной радиации	—
1.5.2.2. Интегродифференциальное уравнение для рассеянной радиации	26
1.5.2.3. Интегральные уравнения	—
1.6. Пропускание и отражение	27
1.7. Принципы взаимодействия	—
1.8. Разложение в ряды Фурье по азимуту	29
1.9. Случай с тепловой эмиссией	—
Глава 2. Точные аналитические методы	30
2.1. Метод сингулярной собственной функции	—
2.2. Метод Винера—Хопфа	32
2.3. Метод матрицы переноса	36
2.4. Приведение к H -функции или к X - и Y -функциям	38
2.4.1. Полубесконечные атмосферы	39
2.4.2. Конечные атмосферы	40
2.4.3. Распространение метода	41
2.4.4. Численные сравнения	—
Глава 3. Численные методы	42
3.1. Метод Монте-Карло	—
3.2. Метод сферических гармоник (или P_L -приближение)	45
3.3. Метод дискретных ординат	47

3.4. Метод сопряженных уравнений	50
3.5. FN-метод	51
3.6. Метод итераций Гаусса—Зейделя	54
3.7. Метод последовательных порядков рассеяния	56
3.8. Метод конечных разностей	58
3.9. Метод матричного оператора (или теория дискретного пространства)	61
3.9.1. Проблема внешнего обмена	—
3.9.2. Уравнения для внутреннего поля	62
3.9.3. Выбор толщины элементарного поля	63
3.9.4. Предельные формы	—
3.9.5. Заключительные замечания	—
3.10. Метод удвоения или сложения	64
3.11. Принципы инвариантности	66
3.12. Метод инвариантного вложения	68
3.13. DART-метод	69
Глава 4. Приближенные методы	73
4.1. Соотношения подобия	—
4.2. Приближение Эддингтона	—
4.3. Двухпоточковые методы	75
4.4. Приближение экспоненциального ядра	76
4.5. Метод возмущений	78
4.6. Приближение малых углов	80
Глава 5. Предельные случаи	81
5.1. Однократное рассеяние	—
5.2. Асимптотические соотношения	—
5.2.1. Постановка задачи	82
5.2.2. Асимптотические параметры и функции	83
5.2.3. Асимптотические формулы для однородной атмосферы	85
5.2.4. Вычисление асимптотических параметров и функций	86
5.2.5. Заключение	87
Глава 6. Проблема аппроксимации индикатрисы рассеяния	88
6.1. Аппроксимация пика индикатрисы в направлении вперед	—
6.2. Различные аналитические представления для индикатрисы рассеяния	90
Глава 7. Численное сравнение методов	91
7.1. Однородные атмосферы	—
7.1.1. Программа для численного сравнения методов	—
7.1.2. Результаты	92
7.1.2.1. Светимость (или интенсивность)	—
7.1.2.2. Поток	115
7.1.2.3. Замечание по поводу индикатрисы	123
7.1.2.4. Заключение	124
7.2. Реальная модель атмосферы	—
7.2.1. Программа для численных сравнений (аэрозольные модели атмосферы, основанные на моделях Рабочей группы «Стандартная радиационная атмосфера»)	—
7.2.2. Результаты	128
7.2.2.1. Яркость	—
7.2.2.2. Поток	138
Приложение IА. Отражение от поверхности	151
Приложение IБ. Взаимность и соотношения симметрии	152
Приложение IВ. Индикатриса рассеяния для атмосферы	155
Список литературы к части I	159

Глава 1. Проблемы рассеяния при наличии газового поглощения	184
1.1. Формулировка задачи. Точное решение	—
1.2. Метод последовательных порядков рассеяния	186
1.3. Использование H - или X -, Y -функций. Соотношение подобия	187
1.4. Метод исходного значения	188
1.5. Представление функции пропускания суммой экспонент	—
1.6. Распределение фотонов по длинам пробегов	189
1.6.1. Полубесконечные атмосферы	190
1.6.2. Метод Монте-Карло	191
1.6.3. Обращение преобразования Лапласа	—
1.6.4. Применение распределения фотонов по длине пробега	194
1.7. Вероятностное распределение поглощающего вещества	195
Глава 2. Горизонтально неоднородные атмосферы, освещенные солнечным излучением	198
2.1. Общий анализ	—
2.2. Однородные атмосферы над неоднородной подстилающей поверхностью	199
2.2.1. Аналитическое решение для изотропного рассеяния	—
2.2.2. Приближенные методы	203
2.3. Атмосферы с горизонтальной неоднородностью	204
2.3.1. Принципы инвариантности	—
2.3.2. Возмущение и малоугловое приближение	207
2.3.3. Асимптотический метод	208
2.3.4. Преобразование Фурье	209
2.4. Облака конечных размеров	—
2.4.1. Дельта-приближение Эддингтона в трех измерениях	—
2.4.2. Приближение Y_1	213
2.5. Поле разорванных облаков	216
2.5.1. Правильное расположение	—
2.5.2. Статистические модели	—
2.5.2.1. Стохастическая структура потоков радиации в атмосфере с разорванной облачностью (или с облаками конечного размера)	—
2.5.2.2. Приближенное решение уравнения переноса при наличии разорванной облачности (или при конечном размере облака)	222
2.6. Метод Монте-Карло	225
Глава 3. Сферические атмосферы планет, освещенные солнечным пучком	227
3.1. Общий анализ	—
3.2. Однократное рассеяние	229
3.3. Инвариантное вложение	—
3.4. Приближенные аналитические методы	230
3.5. Метод Монте-Карло	231
3.6. Решение неплоскопараллельных задач методом DART	—
Глава 4. Освещение узким коллимированным пучком	235
4.1. Общая формулировка	—
4.2. Уравнение для моментов	236
4.2.1. Решение в малоугловом приближении	238
4.2.2. Решение в асимптотическом случае	—
4.3. Инвариантное вложение и принципы инвариантности	239
4.3.1. Процесс инвариантного вложения	—

4.3.2. Использование преобразования Лапласа	241
4.3.3. Принципы инвариантности для моментов	243
4.4. Рассеяние в прямом и обратном направлении в малоугловом при- ближении	246
4.5. Метод Монте-Карло	251
4.6. Нестационарные задачи	—
Список литературы к части II	252
Предметный указатель	263

Информационный бум, возникший в пятидесятых годах нашего столетия и продолжающийся по сей день, ставит перед современными исследователями, в особенности перед новыми поколениями, вступающими в науку, трудную задачу. В этой ситуации совершенно необходимы краткие тщательно составленные компетентными специалистами монографии и обзоры. Один из таких обзоров лежит перед Вами, читатель. Он написан заведующей Лабораторией атмосферной оптики Университета науки и техники в г. Лилле (Франция), профессором Жаклин Ленобль, широко известным ученым, Президентом Международной комиссии по атмосферной радиации Международной ассоциации метеорологии и физики атмосферы.

Книга состоит из двух частей. В первой обсуждается классическая задача о плоскопараллельном слое, освещенном бесконечно широким параллельным пучком света. Последовательно рассмотрены: 1) точные аналитические методы (глава 2); 2) численные методы (глава 3), описывающие разные схемы использования ЭВМ; 3) приближенные методы (главы 4, 5, 6), в которых решение задачи достигается за счет различных упрощений физического характера. (К этой части следовало бы добавить простой приближенный метод, предложенный В. В. Соболевым в 1943 г. В нем рассеяние первого порядка учитывается точно, а рассеяние высших порядков — приближенно. Метод часто используется в задачах атмосферной оптики.)

Первая часть книги Ж. Ленобль заканчивается ценной главой 7, в которой содержатся тестовые проверки различных методов для типичных задач атмосферной оптики. Это позволит читателю правильно выбрать нужный ему метод с учетом объема вычислений и желаемой точности.

Во второй части книги рассмотрены задачи рассеяния с учетом газового поглощения (перенос немонохроматического излучения в рассеивающей среде) в горизонтально неоднородной атмосфере, в сферической атмосфере, в среде, облученной узким коллимированным пучком света. Это важные проблемы, плохо освещенные в изданных монографиях.

Большой объем рассмотренных вопросов часто вынуждает автора быть очень лаконичным. Поэтому, разумеется, книга не может

полностью заменить читателю всю научную литературу по излагаемым вопросам. Это прекрасно понимает и профессор Ж. Ленобль. Она снабжает каждый параграф списком основных публикаций. Книга может служить надежным компасом в необъятном море публикаций, и я надеюсь, что каждый читатель будет признателен ее автору, который очень тщательно в интересах всех нас проделал трудную, но чрезвычайно полезную работу.

При написании монографии Ж. Ленобль использовала материалы, которые для нее подготовили 66 специалистов из 9 стран (США, СССР, Франция, Голландия, ФРГ, Англия, Япония, Югославия, Австралия). Это либо авторы соответствующих методик, либо лица, наиболее активно их использующие. При этом книга отнюдь не является простым сложением различных частей. Она написана Ж. Ленобль как единое целое.

Книга рассчитана на научных работников, инженеров, аспирантов и студентов в области метеорологии, океанологии, физической оптики и смежных дисциплин. Она полезна также для инженеров и конструкторов, занятых разработкой оптической аппаратуры, предназначенной для работы в атмосфере или в океане.

Монография Ж. Ленобль — это ценная справочная книга. Я уверен, что она в течение многих лет будет служить постоянным источником справок и ссылок для всех лиц, занимающихся атмосферной оптикой и смежными вопросами.

К. С. Шифрин

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

В этой книге представлены результаты исследований международной Рабочей группы, которую организовала Комиссия по радиации Международной ассоциации метеорологии и физики атмосферы. Побудительным мотивом создания Рабочей группы была необходимость разобраться в большом числе методов, используемых для решения уравнения переноса в плоскопараллельной рассеивающей атмосфере.

Цель настоящей работы — представить по возможности исчерпывающий обзор этих методов при максимально кратком описании их принципов. Одновременно мы стремились выявить то общее, что содержится в различных методах, а также их относительные преимущества и недостатки. Этот обзор, дополненный численными сравнениями на нескольких типовых примерах, изложен в первой части книги.

В дальнейшем Рабочая группа распространила свою деятельность на изучение неплоскопараллельных задач, существенных для земной атмосферы, и взаимодействия рассеяния и газового поглощения. Здесь речь идет об областях, которые в настоящее время разработаны еще не вполне удовлетворительно и изучение которых сейчас активно продолжается. Поэтому целью второй части книги, посвященной этим вопросам, является уточнение состояния наших знаний и различных подходов, отвечающих, как нам кажется, современному моменту исследований.

В деятельности Рабочей группы участвовали так или иначе 66 исследователей со всего мира, и я бы хотела здесь выразить свою признательность многочисленным советским коллегам, представившим описание своих методов или численные результаты сравнительных программ.

Я хочу особо поблагодарить профессора Шифрина, предложившего издать эту работу на русском языке и отредактировавшего ее перевод, а также Гидрометеиздат, осуществивший публикацию.

Надеюсь, что этот перевод будет способствовать расширению международного сотрудничества.

Ж. Ленобль

ПРЕДИСЛОВИЕ

У этой книги долгая предыстория. Все началось с организации Рабочей группы «Стандартные процедуры для расчета радиационного переноса в рассеивающей атмосфере», учрежденной Комиссией по радиации (КР) Международной ассоциации метеорологии и физики атмосферы (МАМФА) под председательством редактора настоящей книги. В задачу этой рабочей группы входил обзор и сравнение многочисленных методов решения уравнения переноса в рассеивающей атмосфере. В дальнейшем Рабочая группа занялась также рассеянием в неплоскопараллельных атмосферах, содержащих поглощающие газы; кроме того, продолжались численные сравнения результатов специальных тестовых проверок, в том числе и для атмосфер, содержащих аэрозоли.

Настоящая книга является пересмотренной и дополненной версией отчета, опубликованного КР. В первой части рассмотрены плоскопараллельные атмосферы; она содержит существенные дополнения к отчету за 1977 г. и законченные результаты численных сравнений. Вторая часть лишь незначительно отличается от отчета за 1980 г.: несмотря на большое число работ, посвященных в последние годы неплоскопараллельным атмосферам, существенных достижений в этой области пока нет, и вопрос все еще остается в стадии изучения.

Книга, изданная под редакцией председателя Рабочей группы, является коллективным трудом в точном смысле этого слова. В большинство разделов внесли вклад несколько авторов, хотя, разумеется, некоторые разделы написаны только одним из участников, ведущим специалистом по соответствующему методу. Редактор по мере сил постарался придать различным текстам единый стиль. Последовательные варианты полного текста рассылались всем участникам, чтобы обеспечить общее согласие всего коллектива авторов. Мы сознательно не приводили ссылок в самом тексте: по каждому разделу составлена библиография, по возможности полная. Она приведена в конце каждой части. Весьма вероятно, что многое мы упустили, но это сделано не преднамеренно.

В работе приняли участие 66 специалистов из девяти стран. Всех их редактор благодарит за проявленную добрую волю. Особая благодарность тем многим участникам, кто согласился написать подробные анонимные параграфы. Файмат, Хант и Ирвин

сделали обзор английского текста отчета за 1977 г., а Уитни — аналогичный обзор отчета за 1980 г.; раздел по рассеянию и газовому поглощению был первоначально подготовлен Фукаром и Ирвином; Боннель предпринял трудную задачу корректорской правки этого раздела.

С благодарностью отмечаю прекрасную работу издательского коллектива, особенно Мэри Гудвин, выполнившей набор (Science and Technology Corporation/A. Deepak Publishing). Особая благодарность — доктору Рунке, сотруднику Морской исследовательской лаборатории в Вашингтоне, за организацию дополнительной финансовой поддержки, позволившей повысить качество издания.

Жаклин Ленобль

**СПИСОК АВТОРОВ,
ПРИНЯВШИХ УЧАСТИЕ В СОЗДАНИИ
КНИГИ**

- Авасте О. А.**, СССР, Институт астрофизики и атмосферной физики АН ЭССР
- Аронсон Р.**, США, Нью-Йоркский политехнический институт, факультет ядерной инженерии
- Баркстром Б. Д.**, США, Исследовательский центр НАСА
- Блерком, Д. ван**, США, Университет шт. Массачусетс, факультет физики и астрономии
- Бокс М.**, Австралия, Университет Нового Южного Уэльса
- Боннель Б.**, Франция, Лилльский университет науки и техники, лаборатория атмосферной оптики
- Брогниц Ц.**, Франция, Лилльский университет науки и техники, лаборатория атмосферной оптики
- Вайникко Г. М.**, СССР, Институт астрофизики и атмосферной физики АН ЭССР
- Вайнман Дж. А.**, США, Университет шт. Висконсин, метеорологический факультет
- Гелейн Ж. Ф.**, Франция, Париж
- Гермогенова Т. А.**, СССР, Институт прикладной математики АН СССР
- Герстл С. А. У.**, США, Университет шт. Калифорния, Научная лаборатория Лос-Аламоса
- Гутшабаш С. Д.**, СССР, Институт океанологии АН СССР
- Дарбинджан Р. А.**, СССР, Вычислительный центр Сибирского отделения АН СССР
- Дево Ц.**, Франция, Лилльский университет науки и техники, лаборатория атмосферной оптики
- Дейл Х.**, США, Университет шт. Аляска, Геодезический институт
- Дипак А.**, США, Научно-техническая корпорация
- Дэйвис Р.**, США, Университет шт. Висконсин, метеорологический факультет
- Зеге Е. П.**, СССР, Институт физики АН БССР
- Иванов В. В.**, СССР, Ленинградский государственный университет
- Ирвин У. М.**, США, Университет шт. Массачусетс, факультет физики и астрономии
- Кагивада Х.**, США, Рэнд Корпорэйшн
- Каргин Б. А.**, СССР, Вычислительный центр Сибирского отделения АН СССР

- Карп А. Х., США, Корпорация Ай Би эМ
Каттавар Дж. У., Техасское отделение Эй эМ, отдел физики
Квенцель Г., ФРГ, Метеорологический институт
Кершгенс М., ФРГ, Кельнский университет, Институт геофизики
и метеорологии
Кокс С. К., США, Университет штата Колорадо, факультет изу-
чения атмосферы
Коновалов Н. В., СССР, Институт прикладной математики АН
СССР
Кузнецов Е. С., СССР, Вычислительный центр Сибирского отде-
ления АН СССР
Кусцер И., Югославия, Люблянский университет, Институт фи-
зики
Лиоу К. Н., США, Университет шт. Юта, метеорологический фа-
культет
Макки Т. Б., США, Университет шт. Колорадо, факультет изуче-
ния атмосферы
Маккормик Н. Дж., США, Университет шт. Вашингтон, факультет
ядерной инженерии
Малкевич М. С., СССР, Институт физики атмосферы АН СССР
Малликин Т. У., США, Университет шт. Индиана, отдел матема-
тических наук
Марчук Г. И., Сибирское отделение АН СССР
Минин И. Н., СССР, Ленинградский государственный универси-
тет, физический факультет
Михайлов Г. А., СССР, Сибирское отделение АН СССР
Назаралиев М. А., СССР, Сибирское отделение АН СССР
Нийлиск Х. А., СССР, Таллинн
Охврилл Г., СССР, Институт астрофизики и атмосферной физики
АН ЭССР
Пильц У., ФРГ, Кельнский университет, Институт геофизики и
метеорологии
Пласс Дж., Н. Техасское отделение Эй эМ, отдел физики
Рашке Е., ФРГ, Кельнский университет, Институт геофизики и
метеорологии
Романова Л. М., СССР, Институт физики атмосферы АН СССР
Саттлз Дж. Т., США, Исследовательский центр НАСА
Стэмнец К., США, Университет шт. Аляска, Институт геофизики
Токашима Т., Япония, Метеорологический исследовательский ин-
ститут
Танре Д., Франция, Лилльский университет науки и техники, ла-
боратория атмосферной физики
Уено С., Япония, Технический институт
Уискомб У. Дж., США, Центр космических полетов НАСА
Уитни К. К., США, Лаборатория Чарльза Стюарта Дрейпера
Фима А. А., США, Инженерия передовой техники
Фукар И., Лилльский университет науки и техники, лаборатория
атмосферной оптики

- Хаан Я. Ф. де**, Нидерланды, Амстердамский университет, лаборатория природоведения
- Ханзен Дж. А.**, США, НАСА/ГИСС
- Хант Дж. Е.**, Великобритания, Центр дистанционного зондирования
- Херман Н.**, Франция, Лилльский университет науки и техники, лаборатория атмосферной оптики
- Ховеньер Я. В.**, Нидерланды, Амстердамский университет, лаборатория природоведения
- Хюлст В. Ц. ван де**, Нидерланды, Лаборатория Гюингенса
- Шеттл И. П.**, США, Геофизическая лаборатория воздушного флота
- Шипли С. Т.**, США, Исследовательский центр НАСА
- Шифрин К. С.**, СССР, Институт океанологии АН СССР
- Эспозито Л. У.**, США, Университет шт. Массачусетс
- Эшельбах Г.**, ФРГ, Университет Иоханнеса Гутенберга, Метеорологический институт

Часть I

Введение

Задача переноса излучения в рассеивающей атмосфере — это задача многократного рассеяния радиации, излучаемой внутренними или внешними источниками; аналогичными методами обычно исследуется рассеяние при наличии теплового излучения. Сложность задачи в значительной мере зависит от того, насколько точный ответ желателен в том или ином случае.

В оценках суммарной солнечной радиации, поглощенной атмосферой, определяющую роль играет сферическое альbedo; таким образом, при расчетах теплового баланса эта величина — основополагающая. Дивергенция суммарного потока в атмосфере прямо связана со скоростью локального нагревания и является фундаментальной величиной, определение которой необходимо в исследованиях динамики атмосферы. При дистанционном зондировании наиболее подробная диагностическая информация относительно состава и состояния планетарной атмосферы часто извлекается из данных наблюдений за яркостью или даже за поляризацией.

В главе I мы рассмотрим общие определения, связанные с радиационным полем и с характеристиками атмосферы. Для ясности изложения мы постараемся использовать одни и те же обозначения на протяжении всей книги, в том числе и при описании каждого из методов.

До настоящего времени почти все теоретические и вычислительные методы относились к прямой задаче, т. е. физические характеристики атмосферы считались заданными. Источники излучения описывали с помощью некоторых граничных условий, после чего находили радиационное поле в атмосфере.

Обратная задача, в которой поле радиации полагают известным, а целью является определение характеристик атмосферы, имеет, конечно, большое значение для исследований методами дистанционного зондирования. Однако эта задача отягощена множеством параметров, необходимых для описания реальной атмосферы (а возможно, и подстилающей поверхности). Существуют методы для аналитического решения некоторых обратных задач, но они применимы лишь в особо простых случаях. Поэтому обычно искомые атмосферные параметры задают набором величин, а затем сравнивают вычисленное радиационное поле с измеренным.

Мы ограничимся прямой задачей и будем считать, что параметры, характеризующие атмосферу, нам известны точно. Следует всегда помнить, что такое предположение несправедливо для реальной атмосферы; недостаточная точность параметров может сказаться на точности полученных значений радиационного поля в меньшей степени, чем точность используемого численного приближения. В случае сильно анизотропного рассеяния особенно важной оказывается проблема индикатрисы рассеяния: мы обсудим ее в главе 6.

Простейшим случаем в проблеме многократного рассеяния является случай однородной плоскопараллельной атмосферы. Некоторые вычислительные методы решения задач многократного рассеяния практически полностью пригодны и для атмосфер с вертикальной неоднородностью. Гораздо трудней справиться с горизонтальной неоднородностью (включая неоднородные внешние источники, такие, как луч прожектора или отражение от неоднородной поверхности). В некоторых задачах, например при исследовании явлений сумерек, возникает необходимость учитывать сферичность атмосферы. Эти проблемы будут рассмотрены в части II.

В части I мы ограничимся рассмотрением плоскопараллельной атмосферы с возможной вертикальной неоднородностью. Как правило, мы будем излагать методы решения в скалярной форме, а для учета поляризации указывать их возможные модификации в матричной форме, но некоторые методы будут изложены непосредственно в матричной форме. Радиацию мы будем считать монохроматической. Случай немонохроматического излучения в принципе всегда сводится к суперпозиции задач для переноса монохроматического излучения. При описании линии поглощения возникает трудность — требуется установить, какое число таких параллельных задач необходимо для достаточно точного определения формы линии (см. часть II).

Для удобства изложения методы, описанные в этой книге, будут разделены на три группы: 1) точные аналитические методы, 2) вычислительные методы и 3) приближенные методы.

Следует помнить, что эта классификация в общем произвольна и требует некоторых пояснений.

Под точными аналитическими методами (глава 2) мы подразумеваем методы, позволяющие получить результаты в строгом аналитическом виде, по крайней мере в простейших случаях; однако в конечном счете они всегда сопряжены с вычислениями, причем часто прямые вычислительные методы обеспечивают меньшую точность. Основное достоинство аналитических методов состоит в том, что они позволяют уяснить математическую структуру и общее поведение решений уравнения переноса. Главный недостаток — трудность применения этих методов к реальной атмосфере.

Под названием «численные методы» (глава 3) мы опишем большую часть методов, используемых в настоящее время для

вычисления радиационного поля в планетной атмосфере; как правило, они специально разработаны для вычислительных машин. Они могут включать или не включать некоторую аналитическую обработку, предшествующую процедуре расчетов. Обычно эти методы дают возможность учитывать реальные характеристики атмосферы и позволяют получить результаты с любой желаемой степенью точности (при условии использования большого компьютера и неограниченного вычислительного времени). В случае компьютера средних размеров и разумных затратах счетного времени большинство этих методов обеспечивает вычисление с разумной точностью яркости (а часто и поляризации) излучения в атмосфере.

Под приближенными методами (глава 4) мы понимаем такие способы решения, которые позволяют значительно сократить расчетное время или вообще не требуют программирования на ЭВМ. Эти способы обычно связаны с грубым описанием либо характеристик реальной атмосферы, либо задачи переноса. Полезность такого подхода зависит, конечно, от характера искомой величины и от требуемой точности. Однако к ним охотно обращаются в установившейся практике расчетов.

Глава 5 будет посвящена однократному рассеянию; такое приближение справедливо для очень тонких слоев и является правильным пунктом для некоторых других методов и для асимптотических приближений, относящихся к толстым слоям.

Мы будем придерживаться очень краткого описания методов, ограничиваясь изложением основного принципа, а по возможности — основной формулы. Будет отмечена тесная связь, существующая между некоторыми методами.

Мы осознаем, что наш обзор, вероятно, не обладает исчерпывающей полнотой и что мы могли опустить некоторые важные методы, особенно из тех, что были разработаны для переноса нейтронов и еще не применены к переносу радиации.

Авторы различных глав обзора приложили все усилия, чтобы отметить преимущество и недостатки известных им методов. Однако следует отдавать себе отчет в том, что без тщательной проверки и перекрестных сравнений точности результатов и затрат машинного времени для различных случаев сделать это очень трудно. Следовательно, подобная информация имеет скорее качественный характер и отражает мнение одного автора, а не всей группы. Мы предприняли попытку таких перекрестных сравнений, и некоторые ограниченные результаты этих сравнений приведены в главе 2.

Глава 1

Общие определения

В предложенной монографии автор стремился придерживаться терминологии и обозначений, рекомендованных Рабочей группой при Комиссии по радиации «Терминология и единицы». Однако следует отметить два исключения: яркость мы обозначаем I вместо рекомендованного L , а оптическую толщину — τ вместо δ . Эти обозначения, I и τ , широко используются в литературе по радиационному переносу, и большинство участников прибегало к ним в своих исходных текстах; переобозначения их на протяжении всей книги могли привести к ошибкам или путанице, особенно там, где символы L или δ используются в качестве вспомогательных переменных.

1.1. ПАРАМЕТРЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПОЛОЖЕНИЕ КООРДИНАТ И НАПРАВЛЕНИЕ

Положение точки M определяется вектором $\mathbf{r}(x, y, z)$; направление распространения излучения определяется единичным вектором $\Omega(\alpha, \beta, \gamma)$.

В плоскопараллельной горизонтальной однородной атмосфере единственной переменной, определяющей положение точки M , является высота: ось z , как правило, направлена вверх. Направление Ω по отношению к оси z характеризуется углом θ (или $\mu = \cos \theta$) и азимутом ϕ . μ считается положительным для восходящей радиации и отрицательным для нисходящей. Такое определение используется во всей монографии за исключением специальных оговорок. Однако в некоторых методах принято обратное направление осей и μ считается положительным для нисходящей радиации. Иногда бывает удобно использовать $\mu = |\cos \theta|$, а направление отмечать $+\mu$ или $-\mu$. В таких случаях в тексте и примечаниях будет четко указано направление μ .

Азимут ϕ отсчитывается от произвольной начальной оси обычно по часовой стрелке, если глядеть снизу вверх.

1.2. ХАРАКТЕРИСТИКИ АТМОСФЕРЫ

Введем фундаментальные характеристики атмосферы: σ_a — коэффициент поглощения, σ_s — коэффициент рассеяния, $\sigma_e = \sigma_a + \sigma_s$ — коэффициент ослабления, $\bar{\omega}_0 = (\sigma_s/\sigma_e)$ — альбедо однократного рассеяния.

σ_e — объемный коэффициент ослабления (m^{-1}). Массовый коэффициент ослабления равен $\sigma_e \rho$, где ρ — плотность; то же относится к σ_a и σ_s .

Указанные величины обычно являются функциями r , но не Ω . Они зависят от частоты излучения ν , волнового числа k или длины волны λ ; индексы ν , k и λ будут использоваться только в том случае, если это необходимо для ясности изложения.

$p_\nu(r; \Omega, \Omega')$ — индикатриса рассеяния, характеризующая рассеяние в направлении Ω радиации, поступившей из направления Ω' в элементарный объем с центром в точке $M(r)$ (индекс ν обычно опускается). Индикатриса рассеяния нормирована выражением

$$\int \int p(r; \Omega, \Omega') d\Omega' = 4\pi. \quad (1.1)$$

$P_\nu(r; \Omega, \Omega')$ — фазовая матрица рассеяния, относящаяся к вектор-параметру Стокса (см. п. 1.4); это матрица 4×4 , условия ее нормирования описываются выражением

$$\int \int P_{\parallel}(r; \Omega, \Omega') d\Omega' = 4\pi. \quad (1.2)$$

Использование выражения для многократного рассеяния

$$p(r; \Omega, \Omega') = P_{\parallel}(r; \Omega, \Omega') \quad (1.3)$$

всегда связано с аппроксимацией, однако оно позволяет получить весьма точные результаты.

Параметры σ_a , σ_s и P — относятся к единице объема. Их можно либо получить прямыми измерениями, либо вычислить с учетом точного состава элемента объема (молекулы и различные частицы), а также рассеивающих и поглощающих свойств каждой частицы и молекулы. Атмосфера считается однородной, если σ_a , σ_s и p или P не зависят от r . Атмосферу называют консервативной

при условии $\bar{\omega}_0 \cong 1$: это предельный случай для реальной атмосферы, в которой $\bar{\omega}_0$ очень близко к единице. Рассеяние считают изотропным при $p(r; \Omega, \Omega') = 1$; этот воображаемый случай не имеет места в реальной атмосфере.

1.3. ОПТИЧЕСКАЯ ТОЛЩИНА

В плоскопараллельной атмосфере величина

$$\tau = \int_z^{\infty} \sigma_e(z) dz \quad (1.4)$$

является оптической толщиной (или оптической глубиной), соответствующей высоте z . Величина τ часто используется в качестве независимой переменной вместо z . Величину

$$\tau_1 = \int_0^{\infty} \sigma_e(z) dz \quad (1.5)$$

называют полной оптической толщиной.

В более общем случае мы можем использовать оптический путь, соответствующий геометрическому пути между двумя точками — M_1 и M_2 :

$$\tau = \int_{M_1}^{M_2} \sigma_e(r) dr. \quad (1.6)$$

Иногда бывает полезно ввести следующие величины:

$$\tau_{abs} = \int_z^{\infty} \sigma_a(z) dz, \quad (1.7)$$

$$\tau_{scatt} = \int_z^{\infty} \sigma_s(z) dz, \quad (1.8)$$

$$\tau = \tau_{abs} + \tau_{scatt}, \quad \bar{\omega}_0 = \frac{d\tau_{scatt}}{d\tau}. \quad (1.9)$$

1.4. ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ

$I(\mathbf{r}, \Omega)$ — яркость излучения ($\text{Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{ср}^{-1}$), распространяющегося в направлении Ω , в точке, задаваемой вектором \mathbf{r} .

$I_\nu(\mathbf{r}, \Omega)$, $I_\kappa(\mathbf{r}, \Omega)$ или $I_\lambda(\mathbf{r}, \Omega)$ — спектральная плотность яркости излучения с частотой ν ($\text{Дж} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{ср}^{-1}$), волновым числом κ ($\text{Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{ср}^{-1}$) или длиной волны λ ($\text{Вт} \cdot \text{м}^{-3} \cdot \text{ср}^{-1}$). Яркость I далее часто называется удельной яркостью, как принято в астрофизике. Индексы ν , κ и λ будут по возможности опускаться.

$I(\mathbf{r}, \Omega)$ — вектор-параметр Стокса — матрица, элементами которой являются чаще всего четыре параметра Стокса (I, Q, U, V), но могут быть и любые другие подобные параметры, например параметры Кушера: I — яркость, определенная выше; степень поляризации равна $(Q^2 + U^2 + V^2)^{1/2}/I$; величины U и V задают соответственно направление поляризации и эллиптичность.

Для плоскопараллельной атмосферы часто используют обозначения I^+ и I^- для радиации, распространяющейся в направлении $\mu > 0$ и $\mu < 0$ соответственно.

Введем также следующие величины.

$J(\mathbf{r}, \Omega)$ — функция источника, определяемая выражением

$$J(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{\bar{\omega}_0(\mathbf{r})}{4\pi} \iint p(\mathbf{r}; \Omega, \Omega') I(\mathbf{r}; \Omega') d\Omega' + J_s(\mathbf{r}, \Omega), \quad (1.10)$$

где член J_s описывает действие внутренних или внешних источников излучения, либо тех и других вместе.

$\mathbf{J}(\mathbf{r}, \Omega)$ — матрица источника, определяемая матричным уравнением, аналогичным выражению (1.10).

$F_{\Omega}(\mathbf{r})$ — результирующий поток излучения ($\text{Вт} \cdot \text{м}^{-2}$) в точке $M(\mathbf{r})$ через плоскость, перпендикулярную направлению Ω ; описывается выражением

$$F_{\Omega}(\mathbf{r}) = \int \int I(\mathbf{r}; \Omega) \cos(\Omega, \Omega') d\Omega' = F_{\Omega}^{+}(\mathbf{r}) - F_{\Omega}^{-}(\mathbf{r}); \quad (1.11)$$

где F^{+} и F^{-} — значения облученности ($\text{Вт} \cdot \text{м}^{-2}$) по обеим сторонам плоскости соответственно. В плоскопараллельной атмосфере обычно рассматривают результирующий поток $F(z)$ через горизонтальную плоскость. Тогда F^{+} и F^{-} называют восходящим и нисходящим потоками соответственно. Скорость нагревания h связана с дивергенцией вектора F , равного сумме результирующих потоков по трем ортогональным направлениям:

$$h = -\nabla F. \quad (1.12)$$

$\Phi(\mathbf{r})$ — сферический поток в точке $M(\mathbf{r})$, равный

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int \int I(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' = \Phi^{+}(\mathbf{r}) + \Phi^{-}(\mathbf{r}). \quad (1.13)$$

$I(\mathbf{r})$ — средняя интенсивность в точке $M(\mathbf{r})$:

$$\bar{I}(\mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r})/4\pi = \frac{c}{4\pi} u(\mathbf{r}), \quad (1.14)$$

где c — скорость света, u — плотность энергии. Можно определить соответствующие потоковые матрицы.

Для плоскопараллельной атмосферы, освещенной параллельным пучком (см. п. 1.5.2), полезно определить альбедо A в виде отношения полного отраженного потока к падающему потоку:

$$A(\mu_0) = \frac{F^{+i}(0)}{|\mu_0| \pi F}. \quad (1.15)$$

В случае реальной сферической планеты, для которой предположение о плоскопараллельной атмосфере применимо к отдельной точке на планетарном диске, сферическое альбедо, или альбедо планеты в целом, описывается выражением

$$A_s = \frac{\int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^R \rho A(\mu_0; \rho, \gamma) d\rho}{\pi R^2}, \quad (1.16)$$

которое представляет собой отношение полного потока, отраженного планетой, к падающему на нее потоку. Здесь γ и ρ — полярные координаты на диске планеты радиусом R . Если планета однородна, то формула (1.16) приобретает вид

$$A_s = 2 \int_0^1 \mu_0 A(\mu_0) d\mu_0. \quad (1.17)$$

Нисходящий поток $F^-(\tau_1)$ у нижней границы атмосферы состоит из потока рассеянной радиации $F_D^-(\tau_1)$ и пропущенного потока прямой радиации $|\mu_0|e^{\mu_1/\mu_0} \bar{\pi} F e^{\tau_1/\mu_0}$. Прозрачность атмосферы определяется следующим образом:

$$T(\mu_0) = \frac{F^-(\tau_1)}{|\mu_0| \pi F} = t(\mu_0) + e^{\tau_1/\mu_0}, \quad (1.18)$$

где $t(\mu_0)$ — прозрачность для рассеянной радиации:

$$t(\mu_0) = \frac{F_D^-(\tau_1)}{|\mu_0| \pi F}. \quad (1.19)$$

Величину e^{τ_1/μ_0} называют коэффициентом пропускания прямой радиации.

1.5. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

Нижеприведенные уравнения записаны для яркости I . Аналогичные уравнения для матрицы \mathbf{I} можно получить непосредственно заменой всех величин на соответствующие матрицы. Необходимо учитывать, в каком порядке входят матрицы в уравнения.

1.5.1. Общий вид

Для произвольной геометрии уравнение переноса имеет вид

$$\mathbf{\Omega} \nabla I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = -\sigma_e(\mathbf{r}) [I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) - J(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})]. \quad (1.20)$$

Для решения уравнения (1.20) необходимо задать граничные условия.

1.5.2. Плоскопараллельная атмосфера

Для плоскопараллельной атмосферы имеем

$$\mu \frac{\partial I(\tau; \mu, \varphi)}{\partial \tau} = I(\tau; \mu, \varphi) - J(\tau; \mu, \varphi), \quad (1.21)$$

где

$$J(\tau; \mu, \varphi) = \frac{\bar{\omega}_0(\tau)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 p(\tau; \mu, \varphi; \mu', \varphi') I(\tau; \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' + J_s(\tau; \mu, \varphi). \quad (1.22)$$

В качестве граничных условий задаются величины $I^+(\tau_1; \mu, \varphi)$ и $I^-(0; \mu, \varphi)$.

Рассмотрим атмосферу, верхняя граница которой освещена параллельным пучком солнечных лучей, приходящих из направления (μ_0, φ_0) . Пусть суммарный поток, пересекающий единичную

площадку, расположенную перпендикулярно пучку, равен πF . Рефракцией можно пренебречь. Если подстилающая поверхность абсолютно черная ($I^+(\tau_1; \mu, \varphi) = 0$), то мы имеем так называемую стандартную задачу. Обычно нижняя граница является отражающей, но решение этой «планетарной задачи» можно получить через решение стандартной задачи.

1.5.2.1. Интегродифференциальное уравнение для суммарной радиации

Уравнение переноса (1.21) вместе с (1.22) можно представить для стандартной задачи в виде

$$\mu \frac{\partial I(\tau; \mu, \varphi)}{\partial \tau} = I(\tau; \mu, \varphi) - \frac{\bar{\omega}_0(\tau)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 p(\tau; \mu, \varphi; \mu', \varphi') I(\tau; \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} I^-(0; \mu, \varphi) &= \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \pi F, \\ I^+(\tau_1; \mu, \varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

1.5.2.2. Интегродифференциальное уравнение для рассеянной радиации

Рассмотрим отдельно поле рассеянной радиации (ее интенсивность равна $I_D(\tau; \mu, \varphi)$) и поле пропущенной солнечной радиации. Можно записать следующее уравнение:

$$I(\tau; \mu, \varphi) = I_D(\tau; \mu, \varphi) + \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \pi F e^{\tau/\mu_0}. \quad (1.25)$$

С учетом выражений (1.25) и (1.23) из уравнения (1.24) получаем уравнение переноса для I_D :

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I_D(\tau; \mu, \varphi)}{\partial \tau} &= I_D(\tau; \mu, \varphi) - \frac{\bar{\omega}_0(\tau)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 I_D(\tau; \mu, \varphi) \times \\ &\times p(\tau; \mu, \varphi; \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' - \frac{\bar{\omega}_0(\tau)}{4} p(\tau; \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) F e^{\tau/\mu_0} \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} I_D^-(0; \mu, \varphi) &= 0, \\ I_D^+(\tau_1; \mu, \varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Условия на нижней границе (1.24) или (1.27) можно изменить и таким образом учесть любые условия отражения (см. приложение 1А). В обоих уравнениях — (1.23) и (1.26) — как для суммарной радиации, так и для рассеянной обычно используется обозначение I .

1.5.2.3. Интегральные уравнения

Простым интегрированием уравнения (1.21) с граничными условиями получим

$$I^+(\tau; \mu, \varphi) = I^+(\tau_1; \mu, \varphi) e^{-(\tau_1 - \tau)/\mu} + \frac{1}{\mu} \int_{\tau}^{\tau_1} J(t; \mu, \varphi) e^{-(t - \tau)/\mu} dt \quad \text{для } \mu > 0, \quad (1.28)$$

$$I^-(\tau; \mu, \varphi) = I^-(0; \mu, \varphi) e^{\tau/\mu} - \frac{1}{\mu} \int_0^{\tau} J(t; \mu, \varphi) e^{-(t - \tau)/\mu} dt \quad \text{для } \mu < 0, \quad (1.29)$$

$$I(\tau; \mu, \varphi) = J(\tau; \mu, \varphi) \quad \text{для } \mu = 0. \quad (1.30)$$

Эти выражения иногда называют формальным решением задачи.

Подставив выражения (1.28) и (1.29) в (1.22), получим интегральное уравнение для J , называемое вспомогательным уравнением; подставив выражения (1.22) в (1.28) и (1.29), найдем два сопряженных интегральных уравнения для I^+ и I^- .

1.6. ПРОПУСКАНИЕ И ОТРАЖЕНИЕ

Во многих атмосферных задачах очень часто требуется определять поле уходящего излучения. Если плоскопараллельная атмосфера, оптическая толщина которой равна τ_1 , освещена сверху параллельным пучком в направлении $(\mu_0 = |\cos \theta_0|, \varphi_0)$, поток которого равен πF , то функции отражения и пропускания определяются выражениями

$$I^+(0; +\mu, \varphi) = \frac{1}{4\pi\mu} S(\tau_1, 0; \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) \pi F, \quad (1.31)$$

$$I^-(\tau_1; -\mu, \varphi) = \frac{1}{4\pi\mu} T(\tau_1, 0; \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) \pi F. \quad (1.32)$$

Иногда под теми же названиями используются другие функции, связанные с S и T множителями типа $4\mu\mu_0$; 4μ , ... и т. п.

Если атмосфера освещена на нижней границе, то используют аналогичные функции $S(0, \tau_1; \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0)$ и $T(0, \tau_1; \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0)$. Для однородной атмосферы

$$S(0, \tau_1) = S(\tau_1, 0) \quad \text{и} \quad T(0, \tau_1) = T(\tau_1, 0) \quad (1.33)$$

(более общие соотношения см. в приложении 1Б).

Матрицы отражения и пропускания определяются теми же уравнениями, но соотношения (1.33) справедливы только для азимутально независимых членов (см. п. 1.8).

1.7. ПРИНЦИП ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Рассмотрим произвольный слой, ограниченный плоскостями с координатами x и y , причем $0 < y < x < \tau_1$. Интенсивность излучения, выходящего из слоя, линейно зависит от интенсивности падающего излучения и от интенсивности источников J_s^+ и J_s^- , находящихся в слое.

Таким образом, можно записать

$$I^+(y; \mu, \varphi) = t(y, x)I^+(x; \mu, \varphi) + r(x, y)\Gamma^-(y; \mu, \varphi) + J_s^+(y, x), \quad (1.34)$$

$$\Gamma^-(x; -\mu, \varphi) = r(y, x)I^+(x; \mu, \varphi) + t(x, y)\Gamma^-(y; -\mu, \varphi) + J_s^-(x, y). \quad (1.35)$$

Величины r и t можно определить как интегральные операторы следующим образом:

$$\begin{aligned} r(y, x)I^+(x; \mu, \varphi) = \\ = \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^{2\pi} \int_0^1 S(y, x; \mu, \varphi; \mu', \varphi') I^+(x; \mu', \varphi') d\mu' d\varphi', \quad (1.36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t(y, x)I^+(x, \mu, \varphi) = \\ = \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^{2\pi} \int_0^1 T(y, x; \mu, \varphi; \mu', \varphi') I^+(x; \mu', \varphi') d\mu' d\varphi'. \quad (1.37) \end{aligned}$$

Аналогично можно получить выражения для $r(x, y)$ и $t(x, y)$.

1.8. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯДЫ ФУРЬЕ ПО АЗИМУТУ

Индикатриса рассеяния может быть задана либо в виде таблицы, полученной путем измерений или с помощью расчетов, либо представлена аналитическим выражением (см. приложение IV).

Часто пользуются специфическим приемом — разложением индикатрисы по полиномам Лежандра; было доказано, что это единственная форма представления, позволяющая разложить интенсивность в ряды Фурье по азимуту. Такое разложение может быть использовано в сочетании почти со всеми методами, поэтому мы приведем его краткое описание.

Индикатриса рассеяния имеет вид

$$p(\theta) = \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\cos \theta), \quad (1.38)$$

$$\beta_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 P(\vartheta) P_l(\cos \vartheta) d(\cos \vartheta). \quad (1.39)$$

Индикатриса нормируется согласно выражению (1.1), отсюда $\beta_0 = 1$; значение L достаточно велико, чтобы обеспечить требуемую точность. Величину $\beta_1/3 = g$ часто называют показателем асимметрии.

Как следствие теоремы сложения для полиномов Лежандра P_l ,

$$\begin{aligned} & p(\tau; \mu, \varphi; \mu', \varphi') = \\ & \sum_{s=0}^L (2 - \delta_{0s}) \cos s(\varphi - \varphi') \sum_{l=s}^L \beta_l(\tau) P_s^l(\mu) P_s^l(\mu'), \end{aligned} \quad (1.40)$$

где

$$\delta_{0s} = \begin{cases} 1 & \text{при } s = 0, \\ 0 & \text{при } s \neq 0; \end{cases}$$

$P_s^l(\mu)$ — присоединенные полиномы Лежандра, нормированные на $2/(2l+1)$.

Разлагая $I(\tau; \mu, \varphi)$ в ряды по $\cos s(\varphi - \varphi_0)$, можно сразу выполнить интегрирование по φ . Окончательное разложение ограничено порядком L :

$$I(\tau; \mu, \varphi) = \sum_{s=0}^L (2 - \delta_{0s}) I^s(\tau, \mu) \cos s(\varphi - \varphi_0), \quad (1.41)$$

а уравнение переноса распадается на $(L+1)$ уравнений вида,

$$\mu \frac{\partial I^s(\tau; \mu)}{\partial \tau} = I^s(\tau; \mu) - J^s(\tau; \mu), \quad (1.42)$$

где $J^s(\tau; \mu)$ получаются из разложения $J(\tau; \mu, \varphi)$, аналогичного (1.41):

$$\begin{aligned} J^s(\tau; \mu) &= \frac{\bar{\omega}_0(\tau)}{4} p^s(\tau; \mu, \mu_0) F e^{\tau/\mu} + \\ &+ \frac{\bar{\omega}_0(\tau)}{2} \int_{-1}^1 p^s(\tau; \mu, \mu') I^s(\tau, \mu') d\mu', \end{aligned} \quad (1.43)$$

причем

$$\begin{aligned} p^s(\tau; \mu, \mu') &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos s(\varphi - \varphi') p(\tau; \mu, \varphi; \mu', \varphi') d\varphi' = \\ &= \sum_{l=s}^L \beta_l(\tau) P_s^l(\mu) P_s^l(\mu'). \end{aligned} \quad (1.44)$$

В разложении (1.41) ряды обычно можно обрезать при $s = L'$, где $L' < L$; число членов, которыми нельзя пренебречь, зависит от μ и μ_0 .

Для функций пропускания и отражения можно применять разложения, аналогичные (1.41).

В случае матричного уравнения переноса можно получить выражения, аналогичные (1.41), (1.42) и (1.43), но в гораздо более сложном виде.*

1.9. СЛУЧАЙ С ТЕПЛОВОЙ ЭМИССИЕЙ

Если радиация, обусловленная тепловым излучением рассеивающей атмосферы, не является пренебрежимо малой, то, используя предположение о локальном термодинамическом равновесии, к функции источника, заданной выражением (1.10), следует добавить соответствующий член $[1 - \omega_0(r)]B(r)$, где B — излучение черного тела при температуре атмосферы в точке $M(r)$.

* Индикатрисы рассеяния, встречающиеся в геофизических задачах, как правило, очень сильно вытянуты. С этой точки зрения разложение их по полиномам Лежандра кажется неудачным, так как первый полином Лежандра — это сфера. В работе К. С. Шифрина и др. (см. список литературы к части I, п. 1.8) строго доказано, что полиномы Лежандра — единственная система ортонормированных функций, разложение по которой индикатрисы приводит к разделению переменных в уравнении переноса. Это их исключительное свойство связано с тем, что только для полиномов Лежандра с помощью теоремы сложения удается расщепить переменные по направлениям падения и рассеяния. Поэтому практически метод Фурье в задачах геофизики применяют редко, так как он связан с использованием разложения (1.38). Например, в задаче о рассеянии видимого света ($\lambda = 0,5$ мкм) на частице фитопланктона радиусом $a = 50$ мкм число слагаемых в разложении (1.38) составит около 1500. Объем вычислений становится плохо обозримым. Для этих задач применяются различные приближенные приемы типа диффузионного или транспортного приближения и др., в которых с самого начала используется сильная вытянутость индикатрисы рассеяния. (*Прим. ред. пер.*)

2.1. МЕТОД СИНГУЛЯРНОЙ СОБСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ*

Мы ограничимся объяснением принципа этого метода для простого случая полубесконечной атмосферы с изотропным рассеянием. Уравнение переноса (1.26) будет иметь вид

$$\mu \frac{\partial I(\tau; \mu)}{\partial \tau} + I(\tau; \mu) = \frac{\bar{\omega}_0}{2} \int_{-1}^1 I(\tau; \mu') d\mu' + J_s(\tau; \mu). \quad (2.1)$$

Как обычно принято в этом методе, будем считать, что для нисходящей радиации $\mu > 0$.

Будем исходить из решения соответствующего однородного уравнения

$$\mu \frac{\partial I(\tau; \mu)}{\partial \tau} + I(\tau; \mu) = \frac{\bar{\omega}_0}{2} \int_{-1}^1 I(\tau; \mu') d\mu'. \quad (2.2)$$

Разделим переменные с помощью подстановки

$$I(\tau, \mu) = \varphi(\nu, \mu) e^{-\tau/\nu}. \quad (2.3)$$

Решение в таком виде называется собственной модой, а $\varphi(\nu, \mu)$ — соответствующей собственной функцией. Очевидно, что собственная функция подчиняется уравнению

$$(\nu - \mu) \varphi(\nu, \mu) = \frac{1}{2} \bar{\omega}_0 \nu \int_{-1}^1 \varphi(\nu, \mu') d\mu'. \quad (2.4)$$

Вне интервала $(-1, 1)$ имеются два собственных значения $\pm \nu_0$, дающие две регулярные собственные функции $\varphi(\pm \nu_0, \mu)$. Интервал $(-1, 1)$ образует непрерывную часть спектра. В пространстве распределений мы можем построить точные решения для $\nu \in (-1, 1)$; эти решения называются сингулярными собственными функциями.

Используя условие нормировки

$$\int_{-1}^1 \varphi(\nu, \mu) d\mu = 1, \quad (2.5)$$

* В этом параграфе $\mu > 0$ для нисходящей радиации.

получаем для дискретных собственных функций:

$$\varphi(\pm v_0, \mu) = \frac{\bar{\omega}_0 v_0}{2(v_0 \pm \mu)}, \quad (2.6)$$

где v_0 является нулем выражения

$$\Lambda(z) = 1 - \frac{\bar{\omega}_0}{2} z \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{z - \mu} = 1 - \frac{\bar{\omega}_0}{2} z \ln \frac{z+1}{z-1},$$

$$z \notin [-1, 1]. \quad (2.7)$$

Для $v \in (-1, 1)$ мы не можем разрешить уравнение (2.4) относительно $\varphi(v, \mu)$ в пределах класса квадратурных интегрируемых функций, так что мы выбираем

$$\varphi(v, \mu) = \frac{\bar{\omega}_0 v}{2(v - \mu)} + \lambda(v) \delta(v - \mu), \quad (2.8)$$

где δ — дельта-функция Дирака.

Используя уравнение (2.5), получаем:

$$\lambda(v) = 1 - \frac{\bar{\omega}_0 v}{2} \oint_{-1}^1 \frac{d\mu}{v - \mu} = 1 - \frac{\bar{\omega}_0 v}{2} \ln \frac{1+v}{1-v},$$

$$v \in [-1, 1], \quad (2.9)$$

где \oint означает интегрирование в смысле главного значения Коши.

Можно доказать, что набор $\varphi(v, \mu)$, $v \in [(-1, 1), v_0, -v_0]$, является полным набором ортогональных функций по интервалу $-1 \leq \mu \leq 1$. Это означает, что любую произвольную функцию $\psi(\mu')$ можно разложить по этому набору функций в ряды и определить коэффициенты разложения.*

В настоящей задаче мы ожидаем, что при $\tau \rightarrow \infty$ величина $I(v, \mu)$ будет стремиться к нулю или будет ограничена. Это означает, что мы можем использовать для разложения только затухающие собственные моды ($v > 0$). Итак, запишем решение в виде

$$I(\tau; \mu) = I_0(\tau; \mu) + A(v_0) \varphi(v_0, \mu) e^{-\tau/v_0} +$$

$$+ \int_0^1 A(v) \varphi(v, \mu) e^{-\tau/v} dv, \quad (2.10)$$

где $I_0(\tau; \mu)$ — особое решение неоднородного уравнения (2.1). Можно доказать, что половинный набор собственных функций $v \in \{(0, 1), v_0\}$, использованный в решении (2.10), является полным в интервале $0 \leq \mu \leq 1$ и удовлетворяет условиям ортогональности.

* Собственные значения, как обычно, определяются из условия разрешимости уравнения (2.4) для собственных функций. Двум собственным значениям ($\pm v_0$) соответствуют две функции вида (2.6), континууму собственных значений в интервале $(-1, 1)$ — набор обобщенных функций. В соответствии с принятой за рубежом терминологией автор называет их распределением в смысле Лорана Шварца. (Прим. ред. пер.).

В качестве граничных условий зададим $I(\tau, \mu)$ при $\tau = 0$ для $\mu > 0$. Представим известную функцию $\psi(\mu) = I(0, \mu) - I_0(0, \mu)$ набором собственных функций:

$$\psi(\mu) = A(v_0) \varphi(v_0, \mu) + \int_0^1 A(v) \varphi(v, \mu) dv. \quad (2.11)$$

Выражение (2.11) представляет собой сингулярное интегральное уравнение для коэффициентов $A(v)$ и $A(v_0)$. Они получаются из этого уравнения с помощью соотношений ортогональности для полунабора собственных функций:

$$\int_0^1 \varphi(v, \mu) \varphi(v', \mu) \mu H(\mu) d\mu = 0, \quad (2.12)$$

при $v \neq v', v > 0, v' > 0$,

где весовой фактор $H(\mu)$ оказался идентичным классической H -функции Чандрасекара (см. п. 2.3). Далее можно аналитически вывести выражение для функции отражения через H -функцию:

$$\psi(-\mu) = \int_0^1 (\mu'/\mu) \varphi(-\mu, \mu') H(\mu) H(\mu') \psi(\mu') d\mu', \quad \mu > 0. \quad (2.13)$$

Такой же результат дают метод Винера—Хопфа и принцип инвариантности.

Описанный метод применим к конечным атмосферам и к анизотропному рассеянию; возможны численные приложения. Однако в настоящее время его достоинства вряд ли сравнимы с вычислительными преимуществами методов, описанных в главе 3.

2.2. МЕТОД ВИНЕРА—ХОПФА *

Методы Винера—Хопфа и сингулярной собственной функции различаются только начальным подходом: оба они приводят к сходным интегральным уравнениям, подлежащим решению. В то время как метод сингулярной собственной функции формально имитирует (в применении к несамосопряженным транспортным операторам) методы разложения, принятые в квантовой механике для самосопряженных операторов, метод Винера—Хопфа является преобразованием Фурье (или Лапласа) интегральных или интегродифференциальных уравнений переноса. В обоих методах начальный анализ сводится к преобразованию задачи к сингулярным интегральным уравнениям, которые разрешимы для полубесконечной атмосферы, а для атмосферы конечной толщины сводятся к интегральным уравнениям Фредгольма. Оба метода применимы по существу только к плоскопараллельным атмосферам.

* В этом параграфе $\mu = |\cos \theta_0|$.

В качестве иллюстрации рассмотрим проблему нахождения альbedo, определенного выражения (1.26) и (1.27), для изотропного рассеяния в однородной атмосфере. Для простоты примем далее $F = 4/\bar{\omega}_0$ и переформулируем задачу в следующем виде:

$$\mu \frac{\partial I}{\partial \tau} = I - J,$$

$$J = \frac{\bar{\omega}_0}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu') d\mu' + e^{-\tau/\mu_0} \quad (\mu_0 \geq 0),$$

$$I^+(\tau, \mu) = I^-(0, \mu) = 0. \quad (2.14)$$

Как видно из выражений (1.28) и (1.29), функция J определяет функцию I . Объектом метода сингулярной собственной функции является задача (2.14), тогда как мы, используя метод Винера—Хопфа, обратимся к интегральному уравнению*

$$J(\tau, \mu_0) = e^{-\tau/\mu_0} + \frac{\bar{\omega}_0}{2} \int_0^{\tau_1} E_1(|\tau - t|) J(t, \mu_0) dt. \quad (2.15)$$

Оба метода, конечно, применимы и к более общим задачам.

Интегральное уравнение для J при $\tau_1 < \infty$ является уравнением классического типа с симметричным квадратично интегрируемым ядром. Решение можно выразить через собственные функции интегрального спектра, однако такое разложение трудно вычислить. Вместо этого мы применим к уравнению (2.15) преобразование Фурье и метод комплексной переменной в качестве возмущения к случаю $\tau_1 = \infty$, который представляет собой стандартную задачу Винера—Хопфа. Для этой задачи существует исчерпывающая теория.** Возмущения вычисляются в виде решения интегральных уравнений Фредгольма. Эти решения являются тривиальными для $\tau_1 = \infty$.

При $\bar{\omega}_0 < 1$ общий метод для получения единственного решения уравнения (такого, как уравнение (2.15)) вида

$$f(\tau) = g(\tau) + \frac{\bar{\omega}_0}{2} \int_0^{\tau_1} E_1(|\tau - t|) f(t) dt \quad (2.16)$$

приводит к выражению

$$f(\tau) = g(\tau) + \frac{\bar{\omega}_0}{2} \int_0^{\tau_1} R(\tau, t) g(t) dt. \quad (2.17)$$

* $E_1(x)$ — интегральная показательная функция; ее свойства, а также вывод уравнения (2.15) из уравнения (1.26) см.: В. В. Соболев, гл. 1. (*Прим. ред. пер.*).

** Метод Винера—Хопфа подробно изложен в книге Ф. Морса и Г. Фешбаха «Методы теоретической физики». — М.: Изд-во иностр. лит., 1958, с. 906—919. (*Прим. ред. пер.*).

Резольвентное ядро R имеет представление

$$R(\tau, t) = \gamma(|\tau - t|) + \bar{\omega}_0 \int_0^{\min\{\tau, t\}} [\gamma(\tau - s) \gamma(t - s) - \gamma(\tau_1 - \tau + s) \gamma(\tau_1 - t + s)] ds, \quad (2.18)$$

где

$$\gamma(\tau) = E_1(\tau) + \frac{\bar{\omega}_0}{2} \int_0^{\tau_1} E_1(|\tau - t|) \gamma(t) dt. \quad (2.19)$$

Это позволяет разделить переменные в резольвентном ядре.

Для разрешения уравнения (2.19) можно использовать метод Винера—Хопфа, определив j в трех интервалах: $(-\infty, 0)$, $(0, \tau_1)$, (τ_1, ∞) . Фурье-преобразование трех интервалов γ позволяет перейти от уравнения (2.19) к формуле *

$$\hat{\gamma}_1 + \left(1 - \frac{\bar{\omega}_0}{2} \hat{E}\right) \hat{\gamma}_2 + \hat{\gamma}_3 = \hat{E}_1.$$

Факторизация Винера—Хопфа позволяет представить $[1 - (\bar{\omega}_0/2)\hat{E}_1]$ в виде произведения аналитических функций в трансформированных переменных в верхней и нижней полуплоскостях. Применение факторизации и анализа комплексной переменной приводит к интегральным уравнениям Фредгольма для $\hat{\gamma}_1$ и $\hat{\gamma}_3$. При $\tau_1 = \infty$ очевидно, что $\hat{\gamma}_3 = 0$, и уравнения Фредгольма решаются тривиально. После того как $\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_2$ и $\hat{\gamma}_3$ определены, обратное преобразование Фурье позволяет вычислить γ_2 , необходимое для решения уравнения (2.18).

Существует эквивалентный подход, который в некоторых случаях оказывается более прямым: выразить g в уравнении (2.16) через его Фурье-преобразование и записать решение для f в виде

$$\hat{f}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\gamma}(\xi) J(\tau, i/\xi) d\xi.$$

Для исследования J -уравнения можно комбинировать результаты Винера—Хопфа с некоторыми другими приемами, которые неприменимы к уравнению (2.19).

Решим уравнение (2.15) и продемонстрируем связь методов преобразования Фурье и сингулярной собственной функции. Для простоты будем рассматривать только случай $\tau_1 = \infty$. Дифференцируя уравнение для J по τ , получаем интегральное уравнение для J' , решение которого (для $\tau_1 = \infty$, $J(\infty, \mu_0) = 0$) будет иметь вид

$$J'(\tau, \mu_0) = \frac{1}{\mu_0} J(\tau, \mu_0) - \frac{\bar{\omega}_0}{2} H(\mu_0) \gamma(\tau). \quad (2.20)$$

* Угловой скобкой над буквами обозначена Фурье-трансформанта функций. (Прим. ред. пер.)

Функции H и γ определяются выражениями

$$H(\mu_0) = J(0, \mu_0) \quad (2.21)$$

и

$$\gamma(\tau) = E_1(\tau) + \frac{\bar{\omega}_0}{2} \int_0^\infty E_1(|\tau - t|) \gamma(t) dt. \quad (2.22)$$

Умножим уравнение (2.15) на γ , проинтегрируем от 0 до ∞ и, воспользовавшись выражением (2.22), найдем:

$$H(\mu_0) = 1 + \frac{\bar{\omega}_0}{2} \int_0^\infty \gamma(\tau) e^{-\tau/\mu_0} d\tau, \quad (2.23)$$

где H представляет собой трансформанту Фурье. Видно, что $H(i/z)$ — аналитическая функция от z для $\text{Im}(z) > 0$. Если обозначить через γ^* продолжение γ на интервал $(-\infty, \infty)$ в соответствии с выражением (2.22), то используя (2.22), получим для трансформанты Фурье $\hat{\gamma}^*$ следующее выражение:

$$\hat{\gamma}^* = \hat{E}_1 + \frac{\bar{\omega}_0}{2} \hat{E}_1 \hat{\gamma}, \quad (2.24)$$

или с учетом выражения (2.23)

$$\hat{\gamma}^* = \hat{E}_1 H. \quad (2.25)$$

Теперь, интегрируя (2.20), можно выразить J через H . В результате получим ($\gamma^* = \gamma$ при $0 \leq \tau \leq \infty$)

$$J(\tau, i/z) = H(i/z) \left[e^{i\tau z} + \frac{\bar{\omega}_0}{2} \int_0^\tau \gamma^*(t) 2e^{i(\tau-t)z} dt \right]. \quad (2.26)$$

Применяя соотношение Парсеваля к последнему интегралу и используя выражение (2.25), находим:

$$J(\tau, i/z) = H(i/z) \left[e^{i\tau z} - \frac{\bar{\omega}_0}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \hat{E}_1(\xi) H(-i/\xi) \frac{e^{i\tau\xi} e^{i\tau z}}{\xi - z} d\xi \right]. \quad (2.27)$$

Это соотношение позволяет выразить J полностью через H .

Функция H определена в (2.21) и выражена в (2.23). Применяя соотношение Парсеваля к уравнению (2.23) и используя выражение (2.20), при $\text{Im}(z) \geq 0$ получаем:

$$H(i/z) = 1 + \frac{\bar{\omega}_0}{2\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{H(i/z) \hat{E}_1(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (2.28)$$

Если в последнем интеграле контур интегрирования деформировать в ветвь, предназначенную для \hat{E}_1 , от i до ∞ и заменить переменные на обратные величины, получим известное сингулярное интегральное выражение для H :

$$\left[1 + \frac{\bar{\omega}_0 \mu^2}{2} \int_0^1 \frac{d\nu}{\nu^2 - \mu^2} \right] H(\mu) = 1 + \frac{\bar{\omega}_0}{2} \mu \int_0^1 \frac{H(\mu')}{\mu' - \mu} d\mu'. \quad (2.29)$$

Нуль выражения $[1 - (\bar{\omega}_0/2)\hat{E}_1]$, ik , в верхней половине плоскости дает ограничение

$$0 = 1 + \frac{\bar{\omega}_0}{2} \int_0^1 \frac{H(\mu') d\mu'}{k\mu' - 1}. \quad (2.30)$$

Таким образом, вычисление J можно свести к сингулярным уравнениям (2.29) и (2.30), решения которых хорошо известны.

Теперь можно воспользоваться факторизацией Винера—Хопфа:

$$\left[1 - \frac{\bar{\omega}_0}{2} \hat{E}_1(z)\right] H(i/z) H(i/z) = 1 \quad (2.31)$$

и результатом

$$I^+(\tau, \mu, \mu_0) = \frac{1}{\mu} \int_{\tau}^{\infty} J(t, \mu_0) e^{-(t-\tau)/\mu} dt. \quad (2.32)$$

Тогда из представления (2.27) получим выражение для I^+ :

$$I^+(\tau, \mu, \mu_0) = H(\mu_0) \left\{ \frac{\mu_0 e^{-\tau/\mu_0}}{\mu + \mu_0} - \frac{\bar{\omega}_0 \mu_0}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \times \right. \\ \left. \times \frac{\hat{E}_1(\xi)}{\left[1 - \frac{\bar{\omega}_0}{2} \hat{E}_1(\xi)\right] H(i/\xi)} \left[\frac{e^{i\tau\xi}}{1 - i\mu\xi} - \frac{\mu_0 e^{-\tau/\mu_0}}{\mu + \mu_0} \right] \frac{d\xi}{\mu_0 \xi - i} \right\}. \quad (2.33)$$

Аналогичное представление получается для I^- .

Дискретный и контурный спектры в методе сингулярных собственных функций получаются из нуля и из ветви, расположенной в верхней полуплоскости $[1 - (\bar{\omega}_0/2)E_1]$, при деформировании контура в представлении I^+ . При отсутствии ошибок оба метода должны, конечно, дать одинаковые результаты.

Решение вопроса о том, какой метод следует предпочесть — метод сингулярных собственных функций или преобразование Фурье, зависит скорее от каких-либо иных соображений.

2.3. МЕТОД МАТРИЦЫ ПЕРЕНОСА

В методе матрицы переноса вектор интенсивности разлагается в линейную комбинацию собственных мод, которые в задачах с плоской геометрией экспоненциально затухают в направлении распространения. В отличие от других методов собственных функций здесь не ищут коэффициенты разложения, а стараются скорее исключить их, чтобы получить явные решения в зависимости от интенсивности падающего излучения и источников. Окончательное решение содержит лишь небольшое число легко вычисляемых матриц. Собственные моды могут иметь вид, характерный для любого стандартного метода разложения по собственной моде, например сингулярной собственной функции, сферических гармоник,

двойного P_N -метода или метода дискретных ординат Вика—Чандрасекара.

Разложим вектор интенсивности на вектор I_+ , описывающий нисходящее излучение, и вектор I_- , описывающий восходящее излучение. Составляющими I_+ и I_- являются I_{+i} и I_{-i} соответственно, где i — некоторый угловой индекс. Для поляризованного излучения эти компоненты являются также векторами в пространстве параметров Стокса. При точных вычислениях (сингулярная собственная функция) индекс i непрерывен: это косинус угла с вертикалью. В нашем разложении всегда $\mu > 0$. В методе разложения по углу коэффициентами разложения являются I_{+i} , в методе дискретных ординат — значения I_+ и I_- в дискретных ординатах, помноженные на некие квадратурные веса.

Факт разложения по собственной моде можно выразить следующим матричным уравнением:

$$I_{\pm}(\tau) = B_{\pm} A_{+}(\tau) + E_{\mp} A_{-}(\tau). \quad (2.34)$$

Здесь $A_{\pm}(\tau)$ — векторы амплитуды моды на оптической глубине τ ($0 \leq \tau \leq t$). Они убывают по экспоненте в направлении распространения:

$$A_{\pm i}(\tau) = \exp(-|\tau - \tau'|/v_i) A_{\pm i}(\tau'), \quad \tau \geq \tau'. \quad (2.35)$$

Матрицы B_{\pm} являются синтезаторами и выражают векторы потока через векторы амплитуд. Длина ослабления v_i — обычные собственные значения, соответствующие используемой аппроксимации. Для континуумных угловых переменных B_{\pm} представляют собой интегральные операторы с ядром

$$B_{\pm}(\mu, \nu) = \varphi(\nu, \pm\mu), \quad \mu > 0, \quad (2.36)$$

где $\varphi(\nu, \mu)$ — собственные функции Кейза.

Самый удобный путь решения уравнения на собственные значения — это использование выражения второго порядка. Уравнение переноса всегда можно представить в виде

$$\frac{d}{d\tau} I_{+}(\tau) = -\alpha I_{+}(\tau) + \beta I_{-}(\tau), \quad (2.37)$$

$$\frac{d}{d\tau} I_{-}(\tau) = -\beta I_{+}(\tau) + \alpha I_{-}(\tau), \quad (2.38)$$

где α и β — матрицы для дискретного представления и интегральные операторы для точного углового представления. Их задают просто через индикатрису. Например, для точного представления ядра α и β имеют вид

$$\alpha(\mu, \mu') = (1/\mu) [J(\mu - \mu') I - 1/2p(\mu, \mu')], \quad (2.39)$$

$$\beta(\mu, \mu') = (1/2\mu) p(-\mu, \mu'), \quad (2.40)$$

где $p(\mu, \mu')$ — матрица рассеяния, I — единичная матрица, а $\mu, \mu' > 0$. Легко показать, что уравнение для собственных значений имеет вид

$$(\alpha - \beta)^{-1} (\alpha + \beta)^{-1} X_k = v_k^2 X_k \quad (2.41)$$

и что

$$\mathbf{B}_{\pm} = \mathbf{X} \pm (\alpha + \beta)^{-1} \mathbf{X} \Lambda, \quad (2.42)$$

где $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_k)_i$, а Λ — диагональные матрицы с собственными значениями ν_k^{-1} .

Выполнив несложные алгебраические преобразования, получим выражения для векторов интенсивности $\mathbf{I}_{\pm}(t)$ через вектор входящий интенсивности $\mathbf{I}_{+}(0)$ на верхней границе атмосферы и через $\mathbf{I}_{-}(\tau)$ у подстилающей поверхности. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{\pm}(\tau) = & \mathbf{K}_{\pm}(t - \tau) \exp(-\Lambda\tau) \mathbf{K}_{+}^{-1}(t) \mathbf{I}_{+}(0) \mathbf{K}_{\mp}(\tau) \times \\ & \times \exp[-\Lambda(t - \tau)] \mathbf{K}_{+}^{-1}(t) \mathbf{L}(t), \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\text{где} \quad \mathbf{K}_{\pm}(x) = \mathbf{B}_{\pm} + \mathbf{B}_{\mp} \exp(-\Lambda x) \mathbf{F} \exp(-\Lambda x), \quad (2.44)$$

$$\mathbf{F} = -\mathbf{B}_{+}^{-1} \mathbf{B}_{-}. \quad (2.45)$$

Все матрицы имеют физический смысл, и это позволяет написать выражение, подобное (2.43), не делая никаких алгебраических преобразований.

Из уравнения (2.43) непосредственно получаем, что матрицы переноса и отражения задаются соответственно в виде

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{K}_{+}(0) \exp(-\Lambda t) \mathbf{K}_{+}^{-1}(t), \quad (2.46)$$

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{K}_{-}(t) \mathbf{K}_{+}^{-1}(t). \quad (2.47)$$

Экстраполированная длина Милна z_0 описывается выражением

$$z_0 = (\nu_0/2) \lg(-1/F_{00}), \quad (2.48)$$

где ν_0 — наибольшее собственное значение, а $F_{00} = F(0, 0)$.

Заметим, что вся физика — матрица рассеяния и схема аппроксимации — содержится в α и β . Обычно $(\alpha \pm \beta)^{-1}$ можно получить из матрицы рассеяния аналитическим путем. После этого решается уравнение на собственные значения (2.41). Все представляющие интерес результаты зависят только от постоянных матриц \mathbf{B}_{\pm} , Λ и \mathbf{F} и от однопараметрического семейства матриц $\mathbf{K}_{\pm}(x)$.

2.4. ПРИВЕДЕНИЕ К H -ФУНКЦИИ ИЛИ К X - И Y -ФУНКЦИЯМ *

Как было показано при обсуждении методов сингулярной собственной функции Винера—Хопфа, функцию отражения от полубесконечной атмосферы можно выразить через H -функции. Такие же выражения можно получить с помощью физических рассуждений, основанных на принципе инвариантности (см. п. 3.11).

Кроме того, функции Грина в уравнении переноса в случае плоской геометрии (и, следовательно, более привычные H -, X - и Y -функции) можно выразить через фундаментальные функции $\Phi(\tau, \tau_0)$. Существуют методы для расчета этих и других связанных с ними функций.

* В этом параграфе $\mu = |\cos \theta|$, $\mu = |\cos \theta_0|$.

Для конечной атмосферы вместо одной H -функции следует использовать X - и Y -функции. Здесь мы приведем результаты только для радиации, рассеянной однородной атмосферой, в случае анизотропного рассеяния.

2.4.1. Полубесконечные атмосферы

Функция отражения, определенная уравнением (1.3.1), разлагается в соответствующие азимутальные ряды:

$$S(\mu, \mu_0; \varphi) = S^0(\mu, \mu_0) + 2 \sum_{m=1}^N S^m(\mu, \mu_0) \cos m\varphi. \quad (2.49)$$

Здесь опущена зависимость от оптической толщины и введено обозначение $\varphi = \varphi - \varphi_0$.

Каждую азимутальную составляющую можно выразить через вспомогательные функции $\varphi_i^m(\mu)$, например

$$\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu_0}\right) S^m(\mu, \mu_0) = \bar{\omega}_0 \sum_{i=m}^N \beta_i (-1)^{i+m} q_i^m(\mu) \varphi_i^m(\mu_0) \frac{(i-m)!}{(i+m)!}. \quad (2.50)$$

Каждую функцию $\varphi_i^m(\mu)$ можно выразить через H -функцию H^m :

$$\varphi_i^m(\mu) = \sqrt{(2m)!} q_i^m(\mu) P_i^m(\mu) H^m(\mu). \quad (2.51)$$

Здесь P_i^m — присоединенные полиномы Лежандра, описанные в п. 1.8; q_i^m — полиномы, которые могут быть определены путем решения системы алгебраических уравнений. Одна из форм этой системы имеет вид

$$q_i^m(\mu) = R_{im}^m(\mu) + \sum_{k=m+1}^N \omega_k^m(\mu) + \frac{k+m-1}{k-m} q_{k-2}^m(\mu) \int_0^1 H^m(\mu) g_{ik}^m(\mu) d\mu, \quad (2.52)$$

где R_{ik}^m можно найти из рекуррентного соотношения

$$(i-m+1) R_{i+1,k}^m(\mu) + (i+m) R_{i-1,k}^m(\mu) = (2i+1 - \bar{\omega}_0 \beta_i) \mu R_{ik}^m(\mu). \quad (2.53)$$

Здесь $R_{ik}^m(\mu) = 1$, $R_{ik}^m(\mu) = 0$ при $i < k$; g_{ik}^m определяется из выражения

$$g_{ik}^m(\mu) = \Psi_m^m(\mu) R_{ik}^m(\mu) R_{im}^m(\mu),$$

$$\Psi_k^m(\mu) = \frac{\bar{\omega}_0}{2} P_m^m(\mu) \sum_{i=k}^N \beta_i \sqrt{\frac{(i-m)!}{(i+m)!}} R_{ik}^m(\mu) P_i^m(\mu). \quad (2.54)$$

Соответствующая H -функция для m -й азимутальной компоненты удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению

$$H^m(\mu) = 1 + \mu H^m(\mu) \int_0^1 \frac{\Psi^m(\mu')}{\mu + \mu'} H^m(\mu') d\mu', \quad (2.55)$$

где $\Psi^m(\mu) \equiv \Psi_m^m(\mu)$ — характеристическая функция для данной индикатрисы.

Уравнение (2.55) обычно решают численно методом итераций. Вместо этого H^m можно найти из линейного интегрального уравнения

$$H^m(\mu) T^m(\mu) = 1 + \mu \int_0^1 \frac{\Psi^m(\mu') H^m(\mu') d\mu'}{\mu' - \mu}, \quad (2.56)$$

которое можно решить в явном виде, если функция

$$T^m(\mu) = 1 + \mu \int_{-1}^1 \frac{\Psi^m(\mu') d\mu'}{\mu' - \mu} \quad (2.57)$$

не слишком неправильная.

2.4.2. Конечные атмосферы

Оказывается, что функцию отражения можно по-прежнему представлять рядами вида (2.49), а функция пропускания также имеет соответствующее разложение

$$T(\mu, \mu_0; \varphi) = T^0(\mu, \mu_0) + 2 \sum_{m=1}^N T^m(\mu, \mu_0) \cos m\varphi. \quad (2.58)$$

Компоненты разложения выражаются через вспомогательную функцию с помощью формул

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu_0}\right) S^m(\mu, \mu_0) &= \bar{\omega}_0 \sum_{i=m}^N \beta_i (-1)^{i+m} \frac{(i-m)!}{(i+m)!} \times \\ &\times [\varphi_i^m(\mu) \varphi_i^m(\mu_0) - \Psi_i^m(\mu) \Psi_i^m(\mu_0)], \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\mu_0}\right) T^m(\mu, \mu_0) &= \bar{\omega}_0 \sum_{i=m}^N \beta_i \frac{(i-m)!}{(i+m)!} \times \\ &\times [\varphi_i^m(\mu_0) \Psi_i^m(\mu) - \varphi_i^m(\mu) \Psi_i^m(\mu_0)], \end{aligned}$$

где вспомогательные функции можно выразить через X^m и Y^m функции

$$\varphi_i^m(\mu) = \sqrt{(2m)!} [X^m(\mu) r_i^m(\mu) + (-1)^{i+m} Y^m(\mu) s_i^m(-\mu)] P_m^m(\mu), \quad (2.60)$$

$$\Psi_i^m(\mu) = \sqrt{(2m)!} [X^m(\mu) s_i^m(\mu) + (-1)^{i+m} Y^m(\mu) r_i^m(-\mu)] P_m^m(\mu).$$

Функция $r_i^m(\mu)$ и $s_i^m(\mu)$ — полиномы, подлежащие определению из соответствующего набора линейных алгебраических уравнений, подобных (2.52).

Функции X^m и Y^m находят либо из нелинейных уравнений вида

$$X^m(\mu) = 1 + \mu \int_0^1 \frac{\Psi_{i,m}^m(\mu')}{\mu + \mu'} [X^m(\mu') X^m(\mu) - Y^m(\mu) Y^m(\mu')] d\mu', \quad (2.61)$$

$$Y^m(\mu) = e^{-\tau/\mu_0} + \mu \int_0^1 \frac{\Psi_{i,m}^m(\mu')}{\mu - \mu'} [Y_{(m)}^m X^m(\mu') - Y^m(\mu') X^m(\mu)] d\mu',$$

либо из линейных сингулярных уравнений. В каждом случае необходимо учитывать соответствующие ограничения.

2.4.3. Распространение метода

Внутренние радиационные поля также могут быть представлены через H -функцию или X - и Y -функцию. Метод был распространен на случай неоднородных атмосфер, а в матричном виде включает также эффект поляризации; при этом необходимо учитывать направление в атмосфере в S - и T -функциях или в матрицах.

2.4.4. Численные сравнения

В ряде работ даны таблицы H -функции или X - и Y -функций для простейших индикатрис. Эти индикатрисы не могут вполне точно описать атмосферу реальной планеты (даже в очень ясные дни атмосфера Земли содержит значительное количество аэрозоля, вследствие чего индикатриса рассеяния заметно отклоняется от рэлеевской), однако приводимые таблицы очень полезны по крайней мере с двух точек зрения. Во-первых, они служат стандартом, с которым исследователь может сравнивать собственную программу расчетов, прежде чем приступить к решению более сложных задач переноса. Во-вторых, с помощью соотношения подобия, которым посвящен п. 4.1 настоящей книги, они могут быть во многих случаях использованы для получения точных результатов в случае более сложных (особенно, более вытянутых вперед) индикатрис.

При увеличении числа членов в индикатрисе возрастает не только число функций, подлежащих табулированию; нахождение и построение полиномов q_1 или соответствующих двух наборов полиномов для конечной атмосферы означает дополнительное увеличение объема работы.

Глава 3

Численные методы

3.1. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

При вычислениях методом Монте-Карло прослеживают трехмерный путь отдельного фотона, перемещающегося в рассеивающей среде. Различные события, возможные в процессе перемещения фотона на разных уровнях в атмосфере, оцениваются соответствующими распределениями вероятности. Затем с помощью набора случайных чисел определяется конкретный исход каждого события. Таким образом определяют следующие величины: 1) положение в пространстве точек столкновений фотона; 2) вероятность поглощения при столкновении; 3) вероятность рэлеевского рассеяния или взаимодействия с аэрозольной частицей; 4) вероятность определенного угла рассеяния; 5) вероятность поглощения на нижней границе; 6) вероятность рассеяния фотона вверх от нижней границы при определенном угле рассеяния.

В эффективных программах по методу Монте-Карло поглощенный фотон не «изымается» из обращения, а исход фотонов с верхней границы атмосферы считается невозможным. При этом каждому фотону придается статистический вес, который в начальный момент равен единице. При каждом столкновении статистический вес умножается на отношение поперечного сечения полного рассеяния к суммарному поперечному сечению для всех процессов. Это позволяет учесть вероятность поглощения при взаимодействии. Затем фотон испытывает рассеяние и продолжает свой путь. Когда фотон движется вверх, точка следующего столкновения выбирается на основе усеченной функции плотности так, чтобы все столкновения фотона были ограничены пределами атмосферы. Для того чтобы устранить это ограничение из конечного результата, статистический вес фотона соответствующим образом регулируется. Траектория фотона заканчивается только тогда, когда статистический вес становится меньше заранее заданного значения, обычно равного 10^{-5} . При любом столкновении фотона определяется поток в каждый детектор; фотоны могут присутствовать в среде в любом количестве. Если требуется учесть эффекты поляризации, следует вводить бивариантную функцию плотности, в которую, наряду с обычным углом рассеяния, надлежит включить угол вращения вокруг плоскости рассеяния.

Рекомендуем три полезных метода Монте-Карло: 1) передний с осреднением в приемнике — фотоны, поступающие на детектор, осредняются в выбранных пределах телесного угла; 2) передний с дискретными углами — при каждом столкновении определяется радиация на детекторе для конкретных, предварительно заданных углов; 3) обратный, или сопряженный с дискретными углами — фотоны начинают движение от детектора под определенными углами и проходят путь в обратном направлении. Два из этих методов изучают путь фотонов в направлении распространения света, и столкновения фиксируются в том же порядке, что и в реальной атмосфере. В третьем методе принят обратный порядок: началом пути фотонов считается детектор, и их движение прослеживается в обратном направлении — от детектора к верхней границе атмосферы.

Первый метод применяется в большинстве опубликованных работ по методу Монте-Карло. Третий метод особенно пригоден для сферических атмосфер. Второй и третий методы не годятся для индикатрис, асимметрия которых больше асимметрии, характерной для дымок.

Принято считать, что методы Монте-Карло требуют больших затрат машинного времени, но определенные выводы по этому поводу можно сделать лишь в процессе сравнения их с другими методами, примененными к тем же задачам при той же точности расчетов. Для такого сравнения приведем данные о затратах машинного времени при использовании метода Монте-Карло в трех задачах разной сложности. Во всех случаях указанное время относится к расчету 1 млн. столкновений фотонов на ЭВМ Control Data 7600 при произвольном солнечном зенитном угле. В каждом случае потоки радиации или четырехкомпонентного вектора Стокса вычислены примерно на десяти детекторах, размещенных внутри среды или на ее границах; вычислены также восходящий и нисходящий потоки каждого детектора.

Атмосфера разделена на несколько слоев, каждый из которых обладает своими свойствами. Реализация программы, предназначенной для вычисления только интенсивности в модели реальной атмосферы, занимает 1,3 мин. Для реализации той же программы, для расчета четырех векторов Стокса и, следовательно, поляризации и других параметров поляризованного света требуется 2,7 мин. Существует и более сложная программа, основанная на методе Монте-Карло, для вычисления вектора Стокса для системы океан — атмосфера с учетом изменения с высотой различных параметров (рэлеевские, аэрозольные и гидрозольные рассеивающие частицы) и отражения и преломления фотона на поверхности океан—атмосфера; ее реализация занимает только 7 мин машинного времени. Полученные результаты осреднены по некоторым диапазонам зенитного и азимутального углов. Статистическая изменчивость результатов зависит от оптической глубины среды и от числа фотонов, достигающих детектора, но обычно не превышает нескольких процентов.

Очень много работ было посвящено методу Монте-Карло в СССР. Здесь применялись как прямой, так и обратный методы Монте-Карло и были развиты методы, подобные описанным выше и направленные на уменьшение изменчивости результатов.

В вычислительном центре Сибирского отделения АН СССР была разработана универсальная программа компилятивного типа на основе « α -языка», предназначенная для решения задач атмосферной оптики. Созданный метод опирается на специфические особенности задачи и состоит вкратце в следующем:

1) для того чтобы уменьшить ошибки статистических оценок, воспроизведенные траектории фотонов модифицируются с помощью примерной информации о «ценности» частиц в различных частях фазового пространства;

2) поле интенсивности излучения вычисляется на основе модификации локального вычислительного метода, что позволяет описать изменчивость;

3) результаты получаются одновременно для различных длин волн на основе метода независимой выборки; это дает возможность определить также «чувствительность» поля по отношению к изменениям некоторых других параметров модели — альbedo, индикатрисы и т. д.;

4) поля интенсивности для рассеянного света различных порядков могут быть получены раздельно;

5) вычисляются частные производные интенсивности излучения по коэффициентам аэрозольного рассеяния в различных частях атмосферы.

Достоинства метода Монте-Карло состоят в следующем:

— можно использовать любую матрицу рассеяния; нет никаких препятствий к использованию индикатрис с большими передними максимумами или к использованию в качестве матрицы рассеяния экспериментальных данных;

— вычисления поляризации занимают машинное время, лишь немногим более чем в два раза превышающее время, необходимое для расчетов яркости;

— в методе Монте-Карло можно использовать любое разумное число детекторов без заметного увеличения затрат машинного времени; нет затруднений в определении яркости внутри среды на любой желаемой высоте;

— атмосферу можно разделить на большое число слоев, обладающих различными свойствами, при этом расходы машинного времени увеличиваются незначительно; толщина каждого слоя может быть выбрана произвольно и не должна зависеть от толщины других слоев;

— можно решать задачи, связанные со сферической геометрией;

— возможно решение задач, в которых яркость зависит не только от оптической толщины среды, но и от координат на горизонтальной плоскости (например, при наличии разорванной облачности).

Однако следует отметить и ряд недостатков метода Монте-Карло. Результаты подвержены статистической изменчивости, которая при разумном использовании машинного времени имеет порядок нескольких процентов. Значительно уменьшать эту ошибку непрактично, так как при двойном увеличении точности результата затраты машинного времени возрастают вчетверо. Таким образом, для задач, требующих высокой точности, этот метод непригоден. Результаты, полученные при расчетах в направлении вперед с осреднением в приемнике, дают яркость, осредненную по некоторому интервалу телесного угла. Для лучшего определения яркости или какого-либо иного компонента вектора Стокса можно менять угловые интервалы, однако при сужении углового интервала точность результата понижается. Интенсивность под определенным углом можно получать как «прямым», так и «обратным» методом Монте-Карло с дискретными углами. Эти два последних метода непригодны для индикатрис, асимметрия которых превышает асимметрию, характерную для дымок.

Метод Монте-Карло непрактичен при больших оптических толщинах ($\tau_1 < 100$).

3.2. МЕТОД СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК (ИЛИ P_L -ПРИБЛИЖЕНИЕ)

В методе сферических гармоник используется интегро-дифференциальное уравнение после разделения по азимуту, т. е. уравнения (1.26), (1.40) и (1.41). Подставим в уравнение переноса разложение для $I^s(\tau, \mu)$ в следующем виде:

$$I^s(\tau, \mu) = \sum_{n=s}^N (2n+1) A_s^n(\tau) P_s^n(\mu),$$

$$N = 2p - 1 + s > L \quad (p - \text{целое}). \quad (3.1)$$

Тогда с учетом свойств присоединенных полиномов Лежандра получим систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка для $2p$ функций $A_s^n(\tau)$:

$$\sqrt{(l+s)(l-s)} \frac{dA_s^{l-1}}{d\tau} + \sqrt{(l+1+s)(l+1-s)} \frac{dA_s^{l+1}}{d\tau} -$$

$$- [(2l+1) - \bar{\omega}_0(\tau) \beta_l(\tau)] A_s^l = - \frac{\bar{\omega}_0(\tau)}{4} F e^{\tau/\mu_0} \beta_l(\tau) P_s^l(\mu_0),$$

$$l = s, s+1, \dots, N, \quad (3.2)$$

где

$$\beta_l = 0 \quad \text{при } l > L,$$

$$A_s^{s-1} = A_s^{N+1} = 0.$$

Граничные условия $I^s(0; \mu < 0)$ и $I^s(\tau_1; \mu > 0)$ для всех μ нельзя удовлетворить аппроксимацией конечного порядка типа

(3.1). Их следует представить в дискретной форме, например в виде условий Маршака:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 I^s(0, \mu) P_s^{s+2l-1}(\mu) d\mu, \\ \int_{-1}^0 I^s(\tau; \mu) P_s^{s+2l-1}(\mu) d\mu, \end{aligned} \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, p.$$

Можно использовать также и другие формы дискретизации.

Систему дифференциальных уравнений (3.2) с граничными условиями можно решить либо численным методом, либо — для случая однородной атмосферы с постоянными коэффициентами — аналитическим путем:

$$A_s^l(\tau) = \sum_{i=-p}^p k_s^i g_s^i (v_s^i) e^{v_s^i \tau} + h_s^l e^{\tau/\mu_0}. \quad (3.3)$$

Здесь g_s^i находится из системы $2p$ линейных однородных уравнений; условие разрешимости этой системы дает значения v_s^i ; h_s^l определяется из похожей, но полной системы с правой частью, а k_s^i — из системы линейных уравнений, полученной из граничных условий.

В первом варианте метода (численное решение) возникают трудности, вызванные появлением неустойчивости при решении системы, полученной из (3.2) методом конечных разностей, однако эту неустойчивость можно исключить соответствующими линейными преобразованиями.

Во втором варианте единственная вычислительная трудность возникает при решении характеристического уравнения, которое можно записать в виде $g_s^{s+2p}(v) = 0$. Однако если использовать тот факт, что корни $(p-1)$ -го приближения обеспечивают хорошее приближение для $p-1$ наименьших корней p -го приближения, то решение становится очень простым.

Следует отметить, что приближенное решение, задаваемое выражениями (3.1) и (3.3), ведет к точному решению методом сингулярных собственных функций при $p \rightarrow \infty$ (см. п. 2.1). К тому же во избежание затруднений, связанных с тем, что μ_0 может оказаться равным одному из значений v_s^i , следует воспользоваться собственной функцией $\varphi(\mu, \mu_0)$ в качестве точного частного решения.

Для повышения точности результатов вблизи границ без увеличения вычислительного времени можно воспользоваться итерационной процедурой, взяв формальное решение (1.28) и (1.29) и подставив в него представление

$$J^{(s)}(\tau; \mu) = \frac{\bar{\omega}_0}{4} F e^{\tau/\nu_0} \sum_{l=s}^L \beta_l P_s^l(\mu) P_s^l(\mu_0) + \bar{\omega}_0 \sum_{l=s}^L \beta_l P_s^l(\mu) A_s^l(\tau), \quad (3.4)$$

полученное методом сферических гармоник.

Основные достоинства метода состоят в следующем:

— можно обойти проблему интегрирования осциллирующих P_s^i -функций и выполнить это интегрирование аналитически;

— он позволяет получить интенсивность радиации на всех уровнях в атмосфере, а также пропущенную и отраженную радиацию (увеличение числа направлений не оказывает заметного влияния на время расчетов; во втором варианте время не зависит (в разумных пределах) от τ_1 и от числа уровней τ);

— направление падающего излучения μ_0 появляется только в последней части расчетов (определение частного решения полной системы), и можно пропускать несколько значений μ_0 за один прогон без больших затрат времени;

— предварительное сравнение с методом удвоения и методом последовательных порядков рассеяния в отношении временных затрат свидетельствует, судя по всему, в пользу метода сферических гармоник;

— первый вариант метода пригоден для неоднородных атмосфер; второй вариант его можно применить к суперпозиции однородных слоев и к некоторым видам неоднородности, но в этом случае никаких сравнений с другими методами не проводилось;

— отражение от поверхности входит только в последнюю часть расчетов при определении k_s^i из граничных условий.

К основным недостаткам метода относятся следующие:

— трудно заранее составить представление о точности, которая обычно должна быть весьма высока; необходимо тщательно выбирать порядок приближения или дискретизации системы;

— при увеличении числа членов индикатрисы возрастает вычислительное время; следует заметить, что благодаря некоторым последним усовершенствованиям метода устарели ранее отмеченные трудности в решении характеристического уравнения для ν при больших L .

3.3. МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ *

В методе дискретных ординат используется интегро-дифференциальное уравнение после разделения его по азимуту, уравнения (1.26), (1.40) и (1.41). В методе дискретных ординат в n -м приближении интегралы заменяются суммами по квадратной формуле Гаусса: на интервале $-1 \leq \mu \leq 1$ размещаются $2n$ ($n \neq 0$) точек μ_i с весами a_i , полученных из условия $P_{2n}(\mu) = 0$ и формулы Гаусса соответственно. Заменив интегралы суммами, получим $2n$ неоднородных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \mu_i \frac{dI^m(\tau, \mu_i)}{d\tau} = I^m(\tau, \mu_i) - \frac{1}{2} \sum_{l=m}^L \beta_l P_l^m(\mu_i) \sum_j a_j I^m(\tau, \mu_j) P_l^m(\mu_j) - \\ - \frac{1}{4} F(2 - \delta_{0,m}) \left[\sum_{l=m}^L (-1)^{l+m} \beta_l P_l^m(\mu_i) P_l^m(\mu_0) \right] e^{-\tau/\mu_0}, \\ i(-n, +n), \end{aligned} \quad (3.5)$$

* В этом параграфе $\mu_0 = |\cos \theta_0|$.

где \sum_j означает, что индекс j меняется от $-n$ до n , $n \neq 0$; $\delta_{0,m} = 1$ при $m = 0$ и $\delta_{0,m} = 0$ при других m . Поскольку наивысший порядок разложения на полиномы L находится под интегралами, которые были заменены на суммы согласно гауссовым квадратурным формулам с весами, то число членов в разложении по полиномам Лежандра не должно превышать $2n$.

После некоторых математических преобразований, таких как представление

$$I^m(\tau, \mu_i) = \sum_j L_j^m W_j^m(\mu_i) e^{-k_j^m \tau} + Z^m(\mu_i) e^{-\tau/\mu_0}, \quad (3.6)$$

можно получить решение указанной выше системы $2n$ дифференциальных уравнений для заданного m . В выражении (3.6) собственные функции получены из присоединенной однородной системы типа

$$W_j^m(\mu_i) = \frac{1}{1 + \mu_i k_j^m} \sum_{l=m}^L \beta_l \xi_l^m(k_j^m) P_l^m(\mu_i), \quad (3.7)$$

где ξ_l^m — коэффициенты пропорциональности, найденные из условия

$$\begin{aligned} \sqrt{(l+m+1)(l-m+1)} \xi_{l+1}^m &= -\frac{2l+1-\beta_l}{k^m} \xi_l^m - \\ &- \sqrt{(l+m)(l-m)} \xi_{l-1}^m. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Приняв $\xi_l^m = 1$, можно получить все значения ξ . Более того, из выражения

$$f(k^m) = 1 - \frac{1}{2} \sum_i a_i P_m^m(\mu_i) \sqrt{2m+1} W_j^m(\mu_i) = 0 \quad (3.9)$$

можно также получить собственные значения k^m .

Последний член в уравнении (3.6) является частным решением, где

$$Z^m(\mu_i) = \frac{1}{4} \mu_0 F \frac{H^m(\mu_0) H^m(-\mu_0)}{\mu_0 + \mu_i} \sum_{l=m}^L \beta_l \xi_l^m \left(\frac{1}{\mu_0} \right) P_l^m(\mu_i) \quad (3.10)$$

и

$$H^m(\mu) = \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \prod_{i=1}^n (\mu + \mu_i) / \prod_{j=1}^n (1 + k_j^m \mu). \quad (3.11)$$

Решение, описываемое соотношением (3.6), справедливо только для неконсервативного рассеяния, потому что для $\omega_0 = 1$ значение $k^m = 0$ будет удовлетворять характеристическому уравнению, и, следовательно, постоянная $\xi_l^m(k^m)$ становится неопределенной. Таким образом, для консервативного рассеяния следует получить

другое решение. Используя условие сохранения потоков, можно легко показать, что уравнение переноса допускает решение в виде

$$I^m(\tau, \mu_i) = \sum_{j=-(n-1)}^{n-1} L_j^m W_j^m(\mu_i) e^{-k_j^m \tau} + \\ + [(1 - \beta_1/3)\tau + \mu_i] L_{-n}^m + L_n^m + Z^m(\mu_i) e^{-\tau/\mu_0}. \quad (3.12)$$

Наконец, коэффициенты L_j^m (для данного m) следует получить численно из граничных условий.

Процесс вычислений для расчета уходящего излучения при $m = 0$, т. е. при независимости от азимута, можно описать следующим образом. Во-первых, надо разложить индикатрису по полиномам Лежандра, коэффициенты которых можно найти, учитывая их ортогональные свойства. Во-вторых, следует определить собственные значения из уравнения (3.9). Однако было обнаружено, что вычисление собственных значений на основе формулировки Чандрасекара связано с неопределенностью относительно полного числа собственных значений и их нахождение требует весьма больших затрат машинного времени. Поэтому для задачи на собственные значения был сформулирован матричный метод, выведенный непосредственно из присоединенных однородных дифференциальных уравнений. Матричный метод не содержит неопределенностей относительно числа собственных значений и требует очень малых затрат машинного времени. В-третьих, было найдено, что выбор наименьшего собственного значения приводит к неустойчивости решения для функций W , поэтому был разработан алгоритм численного решения этой задачи. Наконец, было показано, что $2n$ дифференциальных уравнений можно свести к двум системам из n уравнений, которые можно решать независимо. Благодаря таким преобразованиям вычислительный процесс стал более устойчивым, а затраты машинного времени существенно уменьшились. В последнее время были предложены и другие численные подходы.

Было отмечено хорошее согласие при сравнении результатов расчетов по интенсивности и потоку при изотропном, рэлеевском и анизотропном рассеянии. При расчетах потока в случае использования четырех дискретных потоков значения были получены с точностью около 1%, тогда как метод двух дискретных потоков приводит к ошибкам от 3 до 10%. Для этих двух упрощенных случаев можно получить аналитические решения в замкнутом виде.

Метод дискретных ординат интенсивно использовался в теории нейтронного переноса под названием S_N -метода. Достижения, полученные в этой области, можно, вероятно, применить при переносе радиации.

Главные преимущества метода дискретных ординат заключаются в следующем:

— решение уравнения переноса можно получать в явном виде, и, следовательно, результаты расчетов интенсивности и потока не

зависят от полной оптической толщины облачных или аэрозольных слоев;

— метод позволяет получать как внутреннее поле радиации, так и отраженные и пропущенные поля без дополнительных вычислений;

— можно получать в замкнутом виде аналитические решения для двух и четырех потоков, которые особенно полезны при расчетах лучистых потоков в атмосфере;

— вычислительное время, необходимое для расчетов интенсивности и потока, меньше, чем при использовании других методов.

С другой стороны, метод обладает рядом недостатков:

— очень вытянутая индикатриса рассеяния может вызвать неустойчивость картины яркости;

— не был разработан общий анализ и не выполнены расчеты азимутально зависимых членов;

— для учета поляризации необходимы дальнейшие теоретические исследования.

Использование квадратурной формулы Гаусса идентично применению номинальной аппроксимации I ; можно показать, что для $m=0$ метод дискретных ординат дает в точности те же результаты, что и метод сферических гармоник.

3.4. МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

Метод сопряженных уравнений был впервые разработан в теории нейтронного переноса. Он обычно ассоциируется с S_N -методом (методом дискретных ординат). Он применяется в тех случаях, когда искомой величиной является некоторый интеграл от радиационного поля

$$N = \int_0^{\infty} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} R(\tau; \mu, \varphi) I(\tau, \mu, \varphi) d\tau d\mu d\varphi = \langle R, I \rangle \quad (3.13)$$

или сама яркость, где R — дельта-функция по всем переменным. Практическим примером является вычисление потоков на некотором фиксированном уровне. Если требуется найти нисходящий поток на подстилающей поверхности, то функция реакции R приобретает вид

$$R(\tau; \mu, \varphi) = \mu \delta(\tau_1 - \tau) U(-\mu), \quad (3.14)$$

где δ — обычная дельта-функция, а $U(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда, равная единице при $x > 0$ и нулю при $x < 0$.

Если уравнение переноса записано в виде

$$LI = Q, \quad (3.15)$$

где L — линейный оператор Больцмана, а Q — функция источника, описывающая внутренние и внешние источники излучения, то можно определить сопряженный оператор Больцмана L^* и сопряженную интенсивность $I^*(r; \mu, \varphi)$.

Имеет место следующее соотношение перестановки:

$$\langle I^*, LI \rangle = \langle I, L^*I^* \rangle. \quad (3.16)$$

Для получения N следует решить сопряженное уравнение переноса

$$L^*I^* = R, \quad (3.17)$$

где R — функция реакции, определенная выше, а L^* получается из L изменением знака μ в первом члене $\left(\mu \frac{d}{d\tau}\right)$ и взаимной перестановкой (μ, φ) и (μ', φ') в индикатрисе под знаком интеграла.

Искомую величину N можно получить из решения I^* , используя выражение

$$N = \langle I^*, Q \rangle, \quad (3.18)$$

где N — нисходящий поток на уровне Земли, а Q — плотность внешнего источника солнечного излучения, расположенного выше атмосферы в направлении (μ_0, φ_0) . В результате получаем

$$F^-(\tau_1) = I^*(0, \mu_0, \varphi_0). \quad (3.19)$$

Главное преимущество метода в этом случае состоит в том, что значение $F^-(\tau_1)$ получается для всех зенитных и азимутальных углов путем однократного решения сопряженного уравнения переноса, вместо решения прямого уравнения переноса последовательно для каждого зенитного угла, как делается во многих прямых методах.

3.5. FN-МЕТОД *

После разделения по азимуту, т. е. преобразования уравнения (1.26) с учетом уравнений (1.40) и (1.41), мы будем теперь записывать общее решение для $I^s(\tau, \mu)$ через собственные функции, определенные в п. 2.1:

$$I^s(\tau, \mu) = \sum_{\beta=0}^{k-1} \left[A(\nu_\beta) \varphi(\nu_\beta, \mu) e^{-\tau/\nu_\beta} + A(-\nu_\beta) \varphi(-\nu_\beta, \mu) e^{-\tau/\nu_\beta} \right] + \int_{-1}^1 A(\nu) \varphi(\nu, \mu) e^{-\tau/\nu} d\nu, \quad (3.20)$$

где учтено K пар нулей $(\pm\nu_\beta)$ выражения

$$\Lambda(z) = \frac{\sqrt{2s-1}}{(2s-1)!!} - \frac{\bar{\omega}_0 z}{2} \int_{-1}^1 \frac{g(z, \mu) (1-\mu^2)^{s/2}}{z-\mu} d\mu, \quad (3.21)$$

при этом

$$g(\xi, \mu) = \sum_{l=s}^L \beta_l P_l^s(\mu) g_l^s(\xi). \quad (3.22)$$

* В этом параграфе $\mu > 0$ для нисходящей радиации.

Здесь полиномы

$$g_l^s(\xi) = \int_{-1}^1 \varphi(\xi, \mu) P_l^s(\mu) d\mu \quad (3.23)$$

удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\begin{aligned} \sqrt{(l+s+1)(l-s+1)} g_{l+1}^s(\xi) + \sqrt{(l+s)(l-s)} (1 - \delta_{ls}) g_{l-1}^s(\xi) = \\ = (2l+1 - \bar{\omega}_0 \beta_l) \xi g_l^s(\xi), \quad l \geq s, \end{aligned} \quad (3.24)$$

с условием $g_l^s = 1$.

Кроме того,

$$\varphi(\nu_\beta, \mu) = \frac{\bar{\omega}_0}{2} \nu_\beta \left(\frac{1}{\nu_\beta - \mu} \right) g(\nu_\beta, \mu) \quad (3.25)$$

и

$$\varphi(\nu, \mu) = \frac{\bar{\omega}_0 \nu}{2(\nu - \mu)} g(\nu, \mu) + (1 - \nu^2)^{-s/2} \lambda(\nu) \delta(\nu - \mu), \quad (3.26)$$

где

$$\lambda(\nu) = \frac{\sqrt{2s!}}{(2s-1)!!} - \frac{\bar{\omega}_0 \nu}{2} \oint_{-1}^1 \frac{g(\nu, \mu) (1 - \mu^2)^{s/2}}{\nu - \mu}. \quad (3.27)$$

Здесь символ \oint обозначает интегрирование в смысле главного значения по Коши.

Существует теорема о полной ортогональности, относящаяся к элементарным решениям, т. е.

$$\begin{aligned} (\xi - \xi') \int_{-1}^1 \mu \varphi(\xi, \mu) \varphi(\xi', \mu) d\mu = 0, \\ \xi = \xi' = \pm \nu_\beta \quad \text{или} \quad \in (-1, 1). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Таким образом, мы можем построить следующие сингулярные интегральные уравнения относительно искомых интенсивностей и наложить граничные условия:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mu \varphi(\xi, \mu) I(0, \mu) d\mu + e^{-\tau_1/\xi} \int_0^1 \mu \varphi(-\xi, \mu) I(\tau_1, \mu) d\mu = L_1(\xi), \quad (3.29) \\ \int_0^1 \mu \varphi(\xi, \mu) I(\tau_1, \mu) d\mu + e^{-\tau_1/\xi} \int_0^1 \mu \varphi(-\xi, \mu) I(0, -\mu) d\mu = L_2(\xi). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Здесь $\xi \in P = (\nu_\beta)U(0, 1)$, а известные члены имеют вид

$$L_1(\xi) = \int_0^1 \mu \varphi(-\xi, \mu) I(0, \mu) d\mu + e^{-\tau_1/\xi} \int_0^1 \mu \varphi(\xi, \mu) I(\tau_1, -\mu) d\mu, \quad (3.31)$$

$$L_2(\xi) = \int_0^1 \mu \varphi(-\xi, \mu) I(\tau_1, -\mu) d\mu + e^{-\tau_1/\xi} \int_0^1 \mu \varphi(\xi, \mu) I(0, \mu) d\mu. \quad (3.32)$$

Для получения приближенного значения уходящей радиации $I(0, -\mu)$ и $I(\tau_1, \mu)$, $\mu > 0$, воспользуемся разложением

$$I(0, -\mu) = \Theta_2(\mu) e^{-\tau_1/\mu} + \frac{\bar{\omega}_0}{2} (1 - \mu^2)^{s/2} \sum_{\alpha=0}^N a_\alpha P_\alpha(2\mu - 1), \quad (3.33)$$

$$I(\tau_1, \mu) = \Theta_1(\mu) e^{-\tau_1/\mu} + \frac{\bar{\omega}_0}{2} (1 - \mu^2)^{s/2} \sum_{\alpha=0}^N b_\alpha P_\alpha(2\mu - 1), \quad (3.34)$$

где $\Theta_{1,2}(\mu)$ — точное решение для $\bar{\omega}_0 = 0$.

Неизвестные коэффициенты a_α и b_α получаются в результате подстановки уравнений (3.33) и (3.34) в (3.29) и (3.30), что дает систему:

$$\frac{\bar{\omega}_0}{2} \sum_{\alpha=0}^N [a_\alpha B_\alpha(\xi) + b_\alpha A_\alpha(\xi) e^{-\tau_1/\xi}] = R_1(\xi), \quad (3.35)$$

$$\frac{\bar{\omega}_0}{2} \sum_{\alpha=0}^N [a_\alpha A_\alpha(\xi) e^{-\tau_1/\xi} + b_\alpha B_\alpha(\xi)] = R_2(\xi). \quad (3.36)$$

Здесь известны правые части $R_1(\xi)$, $R_2(\xi)$ и коэффициенты $A_\alpha(\xi)$ и $B_\beta(\xi)$. Теперь мы можем решить $2(N+1)$ линейных алгебраических уравнений, полученных из уравнений (3.35) и (3.36) при выбранных значениях ξ (например, ξ_β , $\beta=0, 1, 2, \dots, N$), найти искомые константы a_α и b_α , $\alpha=0, 1, 2, \dots, N$, и затем с помощью (3.33) и (3.34) определить уходящую радиацию.

Аналогичный подход можно применить к внутренней радиации. Имеем

$$I(\tau - \mu) = \Theta_2(\mu) e^{-(\tau_1 - \tau)/\mu} + \frac{\bar{\omega}_0}{2} (1 - \mu^2)^{s/2} \sum_{\alpha=0}^N c_\alpha(\tau) P_\alpha(2\mu - 1), \quad (3.37)$$

$$I(\tau, \mu) = \Theta_1(\mu) e^{-\tau/\mu} + \frac{\bar{\omega}_0}{2} (1 - \mu^2)^{s/2} \sum_{\alpha=0}^N d_\alpha(\tau) P_\alpha(2\mu - 1). \quad (3.38)$$

Следует решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\bar{\omega}_0}{2} \sum_{\alpha=0}^N [c_\alpha(\tau) B_\alpha(\xi_\beta) - d_\alpha(\tau) A_\alpha(\xi_\beta)] = W_1(\tau, \xi_\beta), \quad (3.39)$$

$$\frac{\bar{\omega}_0}{2} \sum_{\alpha=0}^N [-c_\alpha(\tau) A_\alpha(\xi_\beta) + d_\alpha(\tau) B_\alpha(\xi_\beta)] = W_2(\tau, \xi_\beta), \quad (3.40)$$

где $\beta=0, 1, 2, \dots, N$, а правые части $W_1(\tau, \xi_\beta)$ и $W_2(\tau, \xi_\beta)$ известны. Теперь можем найти коэффициенты $c_\alpha(\tau)$ и $d_\alpha(\tau)$, необходимые для построения искомого решения. Отметим, что матрица коэффициентов уравнений (3.39) и (3.40) не зависит от τ , поэтому для каждого N необходимо произвести одно обращение матрицы. Основные преимущества метода почти аналогичны преимуществам метода сферических гармоник:

— этот метод обеспечивает определение на всех уровнях в атмосфере как интенсивности, так и пропущенной и отраженной радиации;

— увеличение числа направлений незначительно увеличивает вычислительное время; затраты машинного времени почти не зависят от τ_1 и от числа уровней τ ;

— матрицы коэффициентов в выражениях (3.35), (3.36), (3.39) и (3.40) не зависят от μ_0 , поэтому для нескольких μ_0 требуется только одно матричное обращение;

— существенно используя граничные условия, можно применять FN-метод к суперпозиции однородных слоев;

— учитывая зеркальное и диффузное отражение от поверхности, можно получить аналитически модификацию матрицы коэффициентов в выражениях (3.35), (3.36), (3.39), (3.40).

Главным отличием от метода сферических гармоник является то, что учет L членов в индикатрисе не связан с необходимостью выполнения условия $N > L$. По сути дела если поле радиации не слишком анизотропно (первичное рассеяние не является преобладающим и/или поглощение не слишком сильное), то при $N \approx 20$ ошибка, как правило, не превышает 1 %.

В отношении недостатков можно отметить, что трудно предсказать точность метода. Если требуется высокая точность, то увеличение N ее обеспечивает. Как правило, в современных работах $N \approx 50$ позволяет получить по крайней мере четыре верные значащие цифры. Вычислительное время возрастает пропорционально увеличению числа членов индикатрисы и примерно пропорционально N^2 .

3.6. МЕТОД ИТЕРАЦИЙ ГАУССА—ЗЕЙДЕЛЯ

Метод начинается с интегральной формы (1.28), (1.29) уравнения радиационного переноса в плоскопараллельной атмосфере. Для нисходящей радиации

$$I(\tau, \omega) = I(0, \omega) e^{-(\tau/\mu)} + \int_0^{\tau} e^{-[(\tau-\tau')/\mu]} J(\tau', \omega) \frac{d\tau'}{\mu}, \quad (3.41)$$

где $\omega = (\mu, \varphi)$. Все последующие соотношения можно написать без изменений в матричной форме.

Численное решение получается путем дискретизации координат τ и ω и аппроксимации системой линейных алгебраических уравнений без использования разложений в ряд. Для этого атмосфера разделяется на N слоев ($0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \dots \tau_n = \tau$), оптическая толщина каждого из которых равна $\Delta\tau$. Для интервала (τ_i, τ_{i+2}) уравнение (3.41) принимает вид

$$I(\tau_{i+2}, \omega) = I(\tau_i, \omega) e^{-(2\Delta\tau/\mu)} + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+2}} e^{-[(\tau_{i+2}-\tau')/\mu]} J(\tau', \omega) \frac{d\tau'}{\mu} \quad (3.42)$$

для $\mu < 0$. Соответствующее уравнение справедливо и для $\mu > 0$. В качестве приближения используем выражение

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+2}} e^{-[(\tau_{i+2} - \tau')/|\mu|]} J(\tau', \omega) \frac{d\tau'}{\mu} \approx J(\tau_{i+1}, \omega) (1 - e^{-(2\Delta\tau/|\mu|)}), \quad (3.43)$$

а для интегрирования по углу члена, относящегося к источнику — выражение

$$\int p(\bar{\omega}_j, \omega') I(\omega') d\omega' \approx \sum_{K=1}^M p_K(\bar{\omega}_j) I(\bar{\omega}_K) \Delta\omega_K, \quad (3.44)$$

где единичная сфера разделена на M областей, соответствующих приращениям телесного угла $\Delta\omega_j$; $\bar{\omega}_j$ — центр приращения $\Delta\omega_j$. Веса $p_K(\bar{\omega}_j)$ выбираются в виде интегральных средних значений индикатрисы (или матрицы) в области приращения $\Delta\omega_K$:

$$p_K(\bar{\omega}_j) = \frac{1}{\Delta\omega_K} \int_{\Delta\omega_K} p(\bar{\omega}_j, \omega') d\omega'. \quad (3.45)$$

С помощью выражения (3.45) и приближений (3.45) и (3.44) производим замену (3.42) системой линейных алгебраических уравнений, где неизвестные I_{ij} — приближение $I(\tau_i, \bar{\omega}_j)$, $i = 0, 1, \dots, N$; $j = 1, 2, \dots, M$. Интегральные средние значения вычисляются по формуле (3.45) методом приближенного интегрирования с достаточной точностью. Это выражение можно многократно использовать для определения параметров, например высоты солнца, альbedo подстилающей поверхности и мутности. Преимущество такого выбора p_K состоит в том, что число угловых приращений, необходимое для обеспечения заданной точности, меньше, чем при обычном выборе $p_K(\bar{\omega}_j) = p(\bar{\omega}_j, \bar{\omega}_K)$.

Система алгебраических уравнений решается методом одношаговой итерации Гаусса—Зайделя. Значения нисходящей радиации вычисляются от слоя к слою для каждого итерационного шага. На n -м итерационном шаге значения нисходящей радиации для $(i+2)$ -го слоя рассчитываются по значениям нисходящей радиации для i -го и $(i+1)$ -го слоев на том же самом итерационном шаге и по значениям восходящей радиации $(i+1)$ -го слоя на $(n-1)$ -м итерационном шаге.

У поверхности Земли вводятся условия отражения, и значения восходящей радиации вычисляются так же от слоя к слою вверх. Достигнув верхней границы, начинаем новый итерационный шаг.

Из тестовых расчетов следует, что первые четыре значащие цифры в результатах расчета достигают постоянства в случае четырех — семи шагов итерации, в зависимости от альbedo Земли. Чтобы получить точность 1% для яркости и степени поляризации, необходимо разбить полную сферу примерно на 100 областей, а оптическую толщину на $\Delta\tau = 0,02$.

Например, расчет четырех параметров Стокса при 10 слоях и оптической толщине $\tau = 0,2$ занимает на ЭВМ Control Data 3300 около 10 мин.

Основными преимуществами метода являются следующие:

— внутреннее радиационное поле (параметры Стокса, а также потоки и дивергенция) получаются без каких-либо дополнительных расчетов;

— можно учитывать зависимость ослабления радиации от высоты, поэтому метод полезен при решении многих радиационных задач в аэрозольной атмосфере.

Основной недостаток метода заключается в том, что с увеличением оптической толщины линейно возрастают затраты машинного времени, поэтому метод не очень эффективен для задач с $\tau \gg 0,01$. Для преодоления этого препятствия недавно был предложен полуаналитический метод с интегрированием по оптической толщине.

Если требуется получить только потоки радиации и их дивергенцию, можно ввести некоторые упрощения. Поляризацией можно пренебречь, так что уравнение радиационного переноса становится одномерным. В то же время можно аппроксимировать интеграл, входящий в член источника, $\int p(\omega, \omega') I(\omega') d\omega'$:

$$I^+ \int p(\omega, \omega') d\omega' + I^- \int p(\omega, \omega') d\omega',$$

где I^+ , I^- — интегральные средние значения радиации I , рассеянной вверх и вниз. Физический смысл этого приближения состоит в том, что многократное рассеяние в верхней и нижней полусферах полагается изотропным. При таком предположении уравнение радиационного переноса сводится к уравнению, сходному по форме с хорошо известным уравнением Шустера—Шварцшильда. Оно решается численным методом, описанным выше. Для решения этого уравнения требуется в 10 раз меньше машинного времени, чем для решения первоначального одномерного уравнения радиационного переноса.

Во всех рассмотренных случаях при $\tau \ll 1$ разброс значений потоков и дивергенции составляет менее 2 %.

3.7. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПОРЯДКОВ РАССЕЯНИЯ

В методе последовательных порядков рассеяния используются уравнения (1.22), (1.28) и (1.29), чаще всего после разделения по азимуту. Интенсивность выражается в следующем виде:

$$I(\tau; \mu, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} I^{(n)}(\tau; \mu, \varphi), \quad (3.46)$$

где $I^{(n)}$ — доля радиации, рассеянной n раз.

Из уравнений (1.28) и (1.29), привлекая граничные условия (1.27), получаем:

$$I^{(n)+}(\tau; \mu, \varphi) = \frac{1}{\mu} \int_{\tau}^{\tau_1} J^{(n)}(\tau; \mu, \varphi) e^{-[(t-\tau)/\mu]} dt, \quad (3.47)$$

$$I^{(n)-}(\tau; \mu, \varphi) = -\frac{1}{\mu} \int_0^{\tau} J^{(n)}(\tau; \mu, \varphi) e^{[(t-\tau)/\mu]} dt. \quad (3.48)$$

Соответствующий член функции источника имеет вид

$$J^{(n)}(\tau; \mu, \varphi) = \frac{\bar{\omega}_0(\tau)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \rho(\tau; \mu, \varphi; \mu', \varphi') I^{(n-1)}(\tau; \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' + \delta_{1n} J_s(\tau; \mu, \varphi), \quad (3.49)$$

где

$$\delta_{mm} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m, \end{cases}$$

$$I^{(0)} = 0.$$

В численных приложениях интегралы следует аппроксимировать квадратурными формулами; особого внимания требует интегрирование по τ . При возрастании n отношение I^n/I_{n-1} приближается к константе, так что сумму в уравнении (3.46) можно усечь, а остаток заменить геометрическими рядами. Математически это действие соответствует нахождению решения интегрального уравнения для функции источника с помощью рядов Неймана. Подобные же соотношения можно использовать и в матричной форме. Если речь идет о расчете уходящей радиации на верхней границе полубесконечной атмосферы, то можно рассчитать различные составляющие $I^{(n)}$ из уравнений, основанных на принципе инвариантности (см. п. 3.11).

Основные преимущества метода заключаются в следующем:

— обеспечивает лучшее, чем в большинстве методов, физическое понимание задачи, потому что прослеживается каждый процесс рассеяния фотона;

— можно изучать неоднородные и однородные атмосферы с помощью одной и той же программы;

— интенсивность можно получить для стольких значений высоты и направления, сколько выбрано точек в квадратурной формуле;

— в однородной полубесконечной атмосфере после вычисления интенсивности для $\bar{\omega}_0 = 1$ можно получить ее сразу для всех значений $\bar{\omega}_0$ с помощью соотношения

$$I_{\bar{\omega}_0}(\tau; \mu, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\omega}_0^n I_{\bar{\omega}_0=1}^{(n)}(\tau; \mu, \varphi). \quad (3.50)$$

Методу присущи следующие недостатки. Когда $\bar{\omega}_0$ стремится к единице (очень слабое поглощение), сходимость ряда (3.46) становится очень медленной; если одновременно τ_1 велико, то расход машинного времени становится чрезмерным. Положение можно улучшить, ускоряя сходимость различными методами или заменяя соответствующие члены рассеяния высших порядков асимптотическими выражениями; последний прием применялся к полубесконечным атмосферам. Кроме того, программу нужно прогонять полностью для каждого значения μ_0 .

3.8. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

При реализации конечно-разностного метода используются интегродифференциальные уравнения, полученные разложением уравнения радиационного переноса в ряды Фурье по азимуту, т. е. система $L + 1$ уравнений типа (1.42) совместно с уравнениями (1.41), (1.43), (1.44). Однако в уравнении переноса в качестве независимой переменной используется не оптическая толщина, а высота z , а вместо альbedo однократного рассеяния — две величины: коэффициент ослабления σ_e и коэффициент рассеяния σ_s . Таким образом, уравнения имеют вид

$$\mu \frac{\partial I^s(z; \mu)}{\partial z} = \sigma_e(z) I^s(z, \mu) - \frac{\sigma_s(z)}{2} \int_{-1}^1 p^s(z; \mu, \mu') I^s(z; \mu') d\mu' - \frac{\sigma_s(z)}{4} p^s(z; \mu, \mu_0) F e^{\tau/\mu_0}. \quad (3.51)$$

Такой вид уравнения переноса обусловлен необходимостью контроля сохранения энергии при численном решении методом конечных разностей.

Конечно-разностный метод основан на дискретизации оптической толщины и угловых координат:

$$z: \{z_q | q = 1, 2, \dots, N\}, \quad (3.52)$$

$$\mu: \{\mu_m | m = -M, -M + 1, \dots, -1, +1, \dots, M\}, \quad (3.53)$$

где

$$\mu_{-m} = -\mu_m.$$

Аппроксимируем интегралы выражением

$$\int_{-1}^1 p^s(z; \mu, \mu') I^s(z; \mu') d\mu' \cong \sum_{m=-M}^M w_m p_{mn}^s I_m^s \quad (3.54)$$

(где w_m — квадратурные веса), а производные — выражением

$$\left. \frac{\partial I_m^s}{\partial z} \right|_{z_q} \cong \frac{I_m^s(q+1) - I_m^s(q-1)}{z_{q+1} - z_{q-1}}, \quad (3.55)$$

где $I_m^s(q) = I^s(z_q, \mu_m)$.

Важной особенностью метода конечных разностей является альтернативное использование на уровнях z_q симметричных и антисимметричных сумм радиационного поля в угловых точках.

В этих уравнениях T относится к верхней границе, а S — к подстилающей поверхности или к нижней границе. Эти уравнения составляют блок тридиагонального вида, где элементы вне диагоналей имеют значения ± 1 (кроме границы) и, следовательно, могут быть решены с помощью очень эффективного рекуррентного метода. Для метода конечных разностей характерны высокие скорость и точность; он пригоден для атмосфер с вертикальной неоднородностью. Время, необходимое для решения задачи переноса монохроматического излучения, асимптотически пропорционально DM^3L , где D — число точек по высоте, M — число точек по μ , L — число азимутальных членов. Выбор масштаба здесь производится примерно так же, как в методах суммирования — удвоения или в методе сферических гармоник. Точное сравнение показало, что с помощью конечно-разностной операции интенсивность уходящей радиации вычисляется примерно на 20 % быстрее, чем при использовании процедуры удвоения. Кроме того, в случае неоднородных атмосфер скорость расчетов не уменьшается; лишь некоторое дополнительное время необходимо для ограничения ошибок усеченного ряда — с этой целью незначительно увеличивают число точек по высоте. Было показано, что конечно-разностный метод позволяет эффективно и точно решать задачи при больших значениях оптической толщины. Повышению точности вычислений способствуют разработанные указания, как размещать точки толщиной сетки таким образом, чтобы осуществлять достаточный контроль ошибок усеченных рядов. Наконец, было показано, что метод позволяет точно рассчитывать радиационные поля в атмосферах с переменными оптическими свойствами.

В качестве основных преимуществ метода можно указать следующие:

- быстроту вычисления;
- высокую точность, обусловленную тем обстоятельством, что сохранение потока и второго момента радиационного поля выполняется в точном соответствии с исходным уравнением переноса;
- возможность исследования вертикально неоднородных атмосфер без существенного уменьшения скорости;
- гибкость метода, которая позволяет легко менять число и положение угловых точек и, следовательно, лучше описывать изменения индикатрисы, уменьшая таким образом квадратурные ошибки по углу;
- возможность быстро и эффективно решать задачи с большими значениями оптической толщины;
- возможность линеаризации уравнений, которая необходима при изучении чувствительности;

Метод имеет и ряд недостатков:

- при выборе точек по высоте в неоднородных атмосферах и угловых точек для сильно анизотропных индикатрис требуется физическая интуиция и осторожность;
- значения для точек, не совпадающих с точками сетки, должны получаться интерполяцией;

— в тех точках, где отношение интенсивности восходящей радиации к нисходящей составляет менее 10^{-4} , возможен рост ошибок при определении интенсивности из симметричных и антисимметричных сумм.

3.9. МЕТОД МАТРИЧНОГО ОПЕРАТОРА (ИЛИ ТЕОРИЯ ДИСКРЕТНОГО ПРОСТРАНСТВА)

Метод матричного оператора основан на принципе взаимодействия (см. п. 1.7) и хорошо работает как при матричной форме уравнений, включая поляризацию, так и при скалярной форме.

Воспользуемся представлением матрицы

$$I^+(x) = \{I(x, \mu, \varphi) : 0 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, a < x < b\}, \quad (3.62)$$

$$I^-(x) = \{I(x, -\mu, \varphi) : 0 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, a < x < b\}$$

и подобным же представлением для операторов r и t (здесь a и b — границы слоя).

Тогда выражения (1.34) и (1.35) можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} I^+(y) \\ I^-(x) \end{vmatrix} = S(x, y), \quad \begin{vmatrix} I^+(x) \\ I^-(y) \end{vmatrix} + \Sigma(x, y), \quad (3.63)$$

где

$$S(x, y) = \begin{vmatrix} t(y, x)r(x, y) \\ r(y, x)t(x, y) \end{vmatrix}, \quad \Sigma(x, y) = \begin{vmatrix} J_s(y, x) \\ J_s(x, y) \end{vmatrix}. \quad (3.64)$$

Дискретно-ординатный аналог соотношения (1.36) можно получить в виде произведения $4M \times 4M$ матрицы

$$r(x, y) = \frac{1}{4\pi\mu_\alpha} S(x, y; \mu_\alpha, \varphi_\alpha; \mu'_\alpha, \varphi'_\alpha), \quad \alpha, \alpha' = 1, 2, \dots, 4M, \quad (3.65)$$

с вектором $I^-(y)$. Элементы вектора — это удельные интенсивности, относящиеся к направлениям, соответствующим квадратурной формуле на единичной сфере. Перемножение матриц (3.65) содержит в неявном виде приближенную квадратуру, вследствие чего в элементы $r(x, y)$ оказалась включенной диагональная матрица квадратурных весов.

Описанный принцип взаимодействия является отправной точкой нашего обсуждения матричного метода. Задачу можно упростить, если отделить методы, позволяющие определить уходящую из атмосферы радиацию, от методов, описывающих интенсивности или потоки на различных уровнях внутри самой атмосферы.

3.9.1. Проблема внешнего обмена

Рассмотрим два соседних слоя, ограниченных плоскостями x , y , z , где $a \leq x \leq y \leq z \leq b$. Можно описать принцип взаимодей-

ствия двух слоев в отдельности (x, y) (y, z) и для всего слоя (x, z) в целом следующим выражением:

$$\mathbf{S}(x, z) = \mathbf{S}(x, y) \cdot \mathbf{S}(y, z). \quad (3.66)$$

Используя формулу (3.64), из формального определения (3.66) можно получить соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(z, x) &= \mathbf{t}(z, y)[\mathbf{E} - \mathbf{r}(x, y)\mathbf{r}(z, y)]^{-1}\mathbf{t}(y, x), \\ \mathbf{t}(x, z) &= \mathbf{t}(x, y)[\mathbf{E} - \mathbf{r}(z, y)\mathbf{r}(x, y)]^{-1}\mathbf{t}(y, z), \\ \mathbf{r}(z, x) &= \mathbf{r}(y, x) + \mathbf{t}(x, y)\mathbf{r}(z, y)[\mathbf{E} - \mathbf{r}(x, y)\mathbf{r}(z, y)]^{-1}\mathbf{t}(y, x), \\ \mathbf{r}(x, z) &= \mathbf{r}(y, z) + \mathbf{t}(z, y)\mathbf{r}(x, y)[\mathbf{E} - \mathbf{r}(z, y)\mathbf{r}(x, y)]^{-1}\mathbf{t}(y, z), \end{aligned} \quad (3.67)$$

где \mathbf{E} — единичный оператор. Произведения справа существуют, если существуют обратные матрицы.

Для членов, содержащих функции источника, можно записать соответствующие соотношения через два линейных оператора — $\Lambda(x, y, z)$ и $\Lambda'(x, y, z)$:

$$\sum (x, y) = \Lambda(x, y, z) \sum (x, y) + \Lambda'(x, y, z) \sum (y, z), \quad (3.68)$$

$$\Lambda(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{t}(z, y)[\mathbf{E} - \mathbf{r}(x, y)\mathbf{r}(z, y)]^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{t}(x, y)\mathbf{r}(z, y)[\mathbf{E} - \mathbf{r}(x, y)\mathbf{r}(z, y)]^{-1} & \mathbf{E} \end{vmatrix},$$

$$\Lambda'(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{t}(z, y)\mathbf{r}(x, y)[\mathbf{E} - \mathbf{r}(z, y)\mathbf{r}(x, y)]^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{t}(x, y)[\mathbf{E} - \mathbf{r}(z, y)\mathbf{r}(x, y)]^{-1} \end{vmatrix}.$$

На практике прежде всего необходимо разделить слой (a, b) набором плоскостей $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{N+1} = b$.

Затем мы должны предположить, что $\mathbf{S}(x_i, x_{i+1})$ можно найти с желательной степенью точности из физических параметров в некоторой точке внутри слоя (x_i, x_{i+1}) , который предполагается достаточно тонким, чтобы можно было считать его однородным.

3.9.2. Уравнения для внутреннего поля

Требуется вычислить интенсивности $\mathbf{I}_n^\pm \equiv \mathbf{I}_n^\pm(x_n)$ на заданных уровнях $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b$ в среде. Предположим, что $\mathbf{I}_1^+ = \mathbf{I}^+(a)$, $\mathbf{I}_{n+1}^- = \mathbf{I}^-(b)$ — заданы граничными условиями, и что матрицы $\mathbf{S}(n, n+1) \equiv \mathbf{S}(x_n, x_{n+1})$ и источники $\sum(n, n+1) \equiv \sum(x_n, x_{n+1})$ уже вычислены.

Тогда нам предстоит решить систему совместных уравнений

$$\begin{vmatrix} \mathbf{I}_{n+1}^+ \\ \mathbf{I}_n^- \end{vmatrix} = \mathbf{S}(n, n+1) \begin{vmatrix} \mathbf{I}_n^+ \\ \mathbf{I}_{n+1}^- \end{vmatrix} + \sum(n, n+1), \quad 1 \leq n \leq N. \quad (3.69)$$

Перепишем систему (3.69), используя ячейковые векторы

$$\mathbf{I}_{n+1/2}^+ = \begin{vmatrix} \mathbf{I}_n^+ \\ \mathbf{I}_{n+1}^+ \end{vmatrix}, \quad \mathbf{I}_{n+1/2}^- = \begin{vmatrix} \mathbf{I}_{n+1}^- \\ \mathbf{I}_n^- \end{vmatrix}; \quad (3.70)$$

при этом

$$-T(n+1, n)I_{n-1/2}^+ + I_{n+1/2}^+ - R(n, n+1)I_{n+1/2}^- = \Sigma^+(n+1, n), \quad (3.71)$$

$$-R(n+1, n)I_{n-1/2}^- + I_{n+1/2}^- - T(n, n+1)I_{n+1/2}^- = \Sigma^-(n, n+1),$$

где матрицы T и R имеют вид

$$T(i, j) = \begin{vmatrix} 0 & E \\ 0 & t(i, j) \end{vmatrix}, \quad R(i, j) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r(i, j) \end{vmatrix} \quad (|i-j|=1), \quad (3.72)$$

а векторы источников — вид

$$\Sigma^\pm(i, j) = \begin{vmatrix} 0 \\ \Sigma^\pm(i, j) \end{vmatrix} \quad (|i-j|=1). \quad (3.73)$$

Уравнение (3.71) имеет простую блочную тридиагональную структуру, что позволяет нам предложить простой метод решения.

3.9.3. Выбор толщины элементарного слоя

При использовании метода необходимо, чтобы все матричные операторы не были отрицательными. Это условие позволяет наложить ограничение на максимальную толщину элементарного слоя, которое приближенно описывается неравенством

$$\Delta\tau < 2\mu_1, \quad (3.74)$$

где $\mu_1 = \min(\mu_i)$. Для $\mu_1 = 0,02545$ получаем $\Delta\tau < 0,059$. Следует отметить, что уравнения для элементарного слоя учитывают также многократно рассеянную радиацию.

3.9.4. Предельные формы

Для слоев очень малой оптической толщины легко получить в пределе систему дифференциальных уравнений для операторов отражения и пропускания, представляющих собой хорошо известные уравнения, следующие из свойства инвариантности. Подобным же образом можно получить дифференциальные уравнения для функций источника, используемых в методе инвариантного погружения. Пользуясь предельной формой операторов отражения и пропускания, приходим к интегрируемой системе дифференциальных уравнений; эта процедура применяется в методе трансформации Рикатти.

3.9.5. Заключительные замечания

Описанный матричный метод может быть обобщен для создания действенной программы, нацеленной на изучение радиационного переноса в атмосфере. В модели неоднородной атмосферы при вертикальной дискретизации каждый отдельный тонкий слой однороден.

Матричный метод был подвергнут подробному численному анализу.

3.10. МЕТОД УДВОЕНИЯ ИЛИ СЛОЖЕНИЯ *

Суть этого метода проста: если известны функции отражения и пропускания для каждого из двух слоев, можно получить функции отражения и пропускания объединенного слоя, вычислив последовательные отражения в обе стороны, происходящие между слоями.

Пусть τ_a и τ_b — оптические толщины двух слоев, подлежащих суммированию (индексы a и b относятся соответственно к верхнему и нижнему слоям). В методе сложения предусмотрен следующий порядок действий:

$$\begin{aligned} Q_1 &= R_a^* R_b, \\ Q_n &= Q_1 Q_{n-1}, \\ S &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_n, \\ D &= T_a + S \exp(-\tau_a/\mu_0) + S T_a, \\ U &= R_b \exp(-\tau_a/\mu_0) + R_b D, \\ R(\tau_a + \tau_b) &= R_a + \exp(-\tau_a/\mu) U + T_a^* U, \\ T(\tau_a + \tau_b) &= \exp(-\tau_b/\mu) D + T_b \exp(-\tau_a/\mu_0) + T_b D. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Если умножить матрицы отражения и пропускания R и T на $4\mu_0$, то они будут соответствовать функциям в выражениях (1.31) и (1.32). Здесь R и T — матрицы отражения и пропускания рассматриваемого слоя, когда он освещен снизу. Для однородного слоя $R^* = R$ и $T^* = T$ (см. приложение 1Б). Экспоненциальные члены относятся к пропусканию прямой радиации через слой a или b без рассеяния; T — пропускание рассеянной радиации.

С нижней границы обоих слоев вверх пропускается рассеянная радиация $T(\tau_a + \tau_b)$ и поток $\mu F e^{(-\tau_a + \tau_b)/\mu_0}$ нерассеянной радиации в направлении ϕ_0 . Суммарное пропускание, очевидно, надо разделять для прямой и рассеянной радиации, поскольку присутствие дельта-функции в полном пропускании делает это выражение неудобным при полном численном интегрировании.

Величины D и U после умножения на $\mu_0 F$ представляют собой интенсивности излучения, рассеянного вниз и вверх на границе раздела между слоями. Указанное суммирование производится по потокам радиации, отраженной от поверхности раздела слоев, причем индекс n указывает, сколько раз радиация пересекала границу раздела на пути вверх. На практике эта сумма ограничивается небольшим числом (≤ 5) членов (в зависимости от требуемой точности). Более того, остаточные члены можно вполне аппроксимировать геометрической прогрессией, так как отношение последовательных членов стремится к постоянному значению.

* В этом параграфе $\mu = |\cos \phi|$, $\mu_0 = |\cos \phi_0|$.

Величины R^* и T^* вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} Q_1 &= R_b R_a^*, \\ Q_n &= Q_1 Q_{n-1}, \\ S &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_n, \\ U &= T_b^* + S \exp(-\tau_b/\mu_0) + S T_b^*, \\ D &= R_a^* \exp(-\tau_b/\mu_0) + R_a^* U, \\ R^*(\tau_a + \tau_b) &= R_b^* + \exp(-\tau_b/\mu) D + T_b D, \\ T^*(\tau_a + \tau_b) &= \exp(-\tau_a/\mu) U + T_a^* \exp(-\tau_b/\mu_0) + T_a^* U. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Хотя в промежуточных результатах (3.75) и (3.76) используются те же самые обозначения (Q_1 , Q_n , S , U , D), численные значения не обязательно совпадают.

В приведенных выше уравнениях все матрицы содержат четыре строки и четыре столбца. Произвольная матрица этого типа, например X , состоит из членов ряда

$$X = X^{ij}(\mu, \mu_0, \varphi - \varphi_0), \quad i, j = 1, 2, 3, 4, \quad (3.77)$$

где индексы i и j — номера строк и столбцов соответственно. Произведение двух матриц означает перемножение матриц и интегрирование по присоединенным углам. Элемент произвольной матрицы $Z = XY$ определяется соотношением

$$\begin{aligned} Z^{ij}(\mu, \mu_0, \varphi - \varphi_0) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=1}^4 X^{ik}(\mu, \mu', \varphi - \varphi') Y^{kj}(\mu', \mu_0, \varphi' - \varphi_0) \right] \mu' d\mu' d\varphi'. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Численные расчеты могут быть успешно выполнены с помощью разложения в ряды Фурье по азимуту и использования численной квадратуры для интегрирования по μ' . Суммирующие уравнения должны быть справедливы для каждой Фурье-составляющей. Таким образом, получают результаты для всех значений $\varphi - \varphi_0$ и дискретных значений μ и μ_0 . Необходимое число зенитных углов зависит от анизотропии индикатрисы и от требуемой точности. Если индикатриса нормирована для дискретного набора зенитных углов, то число зенитных углов можно удерживать в разумных пределах — обычно от 5 до 25.

Метод сложения требует, чтобы матрицы отражения и пропускания складываемых слоев были известны. Их можно получить из аналитических выражений для многократного рассеяния с начальной оптической толщиной $\sim 2^{-20}$ или с помощью любого точного метода для однократного рассеяния с более толстым элементарным слоем. Хорошие результаты дает вычисление последовательных степеней рассеяния для двух или трех порядков с начальной оптической толщиной, равной примерно 2^{-10} — 2^{-12} .

Если атмосфера однородна, то можно на каждом шаге складывать два одинаковых слоя; таким образом, метод сложения становится методом удвоения. Более того, в этом случае требуется решить только систему (3.75) с функциями R и T . Процедура удвоения выполняется очень быстро даже для очень мощных атмосфер.

Неоднородную атмосферу можно представить в виде суперпозиции однородных тонких подслоев, и длинная процедура сложения по всей атмосфере оказывается очень громоздкой. Сложение обычно начинается с верхней границы атмосферы; складываются последовательно слои, один под другим. После первого шага верхний слой оказывается уже неоднородным, вследствие чего в системе (3.75) $R_a^* \neq R_a$ и $T_a^* \neq T_a$ — приходится при каждом шаге решать одновременно две системы (3.75) и (3.76) для четырех матриц R, R^*, T, T^* . Положение улучшается, если начать сложение с нижней границы атмосферы. Присоединяются вышележащие слои, и на каждом шаге верхний слой оказывается однородным; таким образом, на каждом шаге нужно решать систему (3.75) для двух матриц R и T , что сокращает вдвое машинное время. Более того, если требуется найти только диффузное отражение, как в задачах дистанционного зондирования, то решению подлежат только уравнения, относящиеся к R , что уменьшает расчетное время в два раза.

Приведенный формализм включает и учет поляризации. Однако метод сложения пригоден также для расчетов интенсивности, при которых поляризация не учитывается. Необходимо только считать матрицы скалярными; тогда в соотношениях (3.77) и (3.78) нужно опустить верхние индексы, а в (3.78) — не производить суммирования по k . Для рэлеевского рассеяния интенсивности, рассчитанные без учета поляризации, содержат ошибки $\leq 10\%$, а для частиц, сравнимых по размерам с длиной волны или превышающих ее, ошибка не превышает 1% .

Метод сложения очень схож с матричным методом (см. п. 3.9). Основная разница в формализме обоих методов заключается в тождестве

$$(E - X)^{-1} - E = X + X^2 + X^3 + \dots \quad (3.79)$$

В матричном методе используется «обратный» оператор, тогда как в методе сложения присутствуют бесконечные ряды (см. правую часть выражения (3.79)).

3.11. ПРИНЦИПЫ ИНВАРИАНТНОСТИ *

Во многих задачах физики требуется знать поля уходящего излучения, и определение отражающих и пропускающих свойств атмосферы не требует информации о внутреннем поле радиации. Например, свойство отражения полубесконечной атмосферы явно

* В этом параграфе $\mu = |\cos \theta|$, $\mu_0 = |\cos \theta_0|$.

не изменяется, если к атмосфере добавить тонкий слой; эту интенсивность можно выразить математически через искомую интенсивность отраженной радиации.

Для однородного слоя конечной оптической толщины принципы инвариантности выражаются следующими соотношениями:

$$I(\tau; +\mu, \varphi) = \frac{e^{-\tau/\mu_0}}{4\mu} S(\tau_1, \tau; \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) F + \\ + \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^1 \int_0^{2\pi} S(\tau_1, \tau; \mu, \varphi; \mu', \varphi') I(\tau; -\mu', \varphi') d\mu' d\varphi', \quad (3.80)$$

$$I(\tau; -\mu, \varphi) = \frac{1}{4\mu} T(\tau, 0; \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) F + \\ + \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^1 \int_0^{2\pi} S(\tau, 0; \mu, \varphi; \mu', \varphi') I(\tau_1, +\mu', \varphi') d\mu' d\varphi', \quad (3.81)$$

$$\frac{1}{4\mu} S(\tau_1, 0; \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) F = \frac{1}{4\mu} S(\tau, 0; \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) F + e^{-\tau/\mu} \times \\ \times I(\tau, +\mu, \varphi) + \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^1 \int_0^{2\pi} T(\tau, 0; \mu, \varphi; \mu', \varphi') I(\tau; +\mu', \varphi') d\mu' d\varphi', \quad (3.82)$$

$$\frac{1}{4\mu} T(\tau_1, 0; \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) F = \frac{e^{-\tau/\mu_0}}{4\mu} T(\tau_1, \tau; \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) F + \\ + e^{-I(\tau_1-\tau)/\mu} I(\tau; -\mu, \varphi) + \\ + \frac{1}{4\pi\mu} \int_0^1 \int_0^{2\pi} T(\tau_1, \tau; \mu, \varphi; \mu', \varphi') I(\tau; -\mu', \varphi') d\mu' d\varphi'. \quad (3.83)$$

В полубесконечном однородном слое инвариантность задачи выражается только с помощью уравнения (3.80). Для неоднородного слоя требуется четыре других аналогичных уравнения $S(0, \tau_1)$ и $T(0, \tau_1)$. Для учета эффекта поляризации можно записать восемь уравнений в матричном виде. Эти принципы инвариантности очень схожи с уравнением взаимодействия, используемым после дискретизации в методе матричного оператора (см. п. 3.9).

После исключения I из этих уравнений и из уравнения переноса мы получаем систему интегродифференциальных уравнений для функций S и T , выраженных через H -функцию или X - и Y -функции, как описано в п. 2.4. Другая возможность состоит в том, чтобы решить уравнения для функций S и T каким-либо численным методом. До настоящего времени к такому решению прибегали только в случае однородности исходя из значений функций S и T для первичного рассеяния с помощью алгоритма итерации; в частности, при этом можно оценить вклад различных порядков рассеяния в S и T .

В работах советских специалистов эта задача решалась следующим образом. Различными способами были найдены функции отражения $\rho(\mu, \mu_0, \varphi) = (4\mu\mu_0)^{-1}S(\mu, \mu_0, \varphi)$ для полубесконечных атмосфер. Они вычислялись из линейного сингулярного интегрального уравнения для ρ как непосредственно, так и после предварительного отыскания H -функций. Рассмотренные случаи — трехчленные индикатрисы и индикатрисы Хейли—Гринштейна. Используемый метод дает возможность рассматривать весьма сильно вытянутые индикатрисы (с асимметрией g до 0,85). Другой подход к определению функции ρ состоит в использовании хорошо известного нелинейного интегрального уравнения для ρ .

3.12. МЕТОД ИНВАРИАНТНОГО ВЛОЖЕНИЯ

В основе метода инвариантного вложения лежит методика счета частиц, опирающаяся на принцип инвариантности.

В аналитическом и численном аспектах суть инвариантного вложения заключается в сведении задачи с двухточечной пограничной проблемой к задаче с начальными значениями. В этом свете преимущества и недостатки будут те же, что и в методе, основанном на принципе инвариантности. Из интегрального уравнения Милна можно точно получить для функции источника систему Коши, основанную на принципе суперпозиции, которая далее приведет нас к системе интегродифференциальных уравнений для функций рассеяния и пропускания.

Инвариантное вложение можно использовать для альтернативного подхода к решению интегрального уравнения Милна. Начав со вспомогательного уравнения, которое в случае изотропного рассеяния имеет вид

$$J(t, x; u) = (\bar{\omega}_0/4) \exp[-(x-t)/u] + (\bar{\omega}_0/2) \int_0^x E_1(|t-y|) J(y, x; u) dy, \quad (3.84)$$

где x — полная оптическая толщина, а

$$0 \leq t \leq x, \quad 0 \leq u \leq 1,$$

мы можем найти непосредственно требуемое начальное уравнение для функции источника $J(t, y; x)$ в виде

$$\partial J(t, x; u)/\partial x = -u^{-1}J(t, x; u) + J(x, x; u)\Gamma(t, x; x), \quad (3.85)$$

где $\Gamma(t, x; x)$ совпадает с Φ -функцией Соболева:

$$\Gamma(t, x; x) = \Phi(t, x) = 2 \int_0^1 J(t, x; w) dw/w, \quad (3.86)$$

а $J(x, x; \mu)$ задается X -функцией Чандрасекара:

$$J(x, x; u) = (\bar{\omega}_0/4) X(x, u). \quad (3.87)$$

Особенность такого подхода состоит в нахождении системы Коши для функции источника конечного порядка, тогда как для отдельных порядков рассеяния принцип суперпозиции не имеет силы. Метод инвариантного вложения применялся при решении задачи диффузного отражения и пропускания в конечных неоднородных анизотропно рассеянных атмосферах, ограниченных отражающими поверхностями. Этот метод позволяет учитывать частичную поляризацию.

3.13. DART-МЕТОД

Аббревиатура DART расшифровывается как Dodecagation Approach to Radiative Transfer*. Название метода обязано представлению поля в виде потоков радиации; число этих потоков может быть произвольно, но упорядочение их всегда каким-либо образом основано на использовании правильного двенадцатигранника. В DART-методе на основе этой и нескольких других идей создается вычислительная схема, обладающая достаточным быстродействием в практических приложениях к большим расчетным задачам, таким, например, как рекуррентное обращение данных по рассеянию или создание больших модельных каталогов в сферической геометрии. Некоторые из основных идей метода DART можно использовать отдельно или вместе с другими методами радиационного переноса (например, метод матричного оператора), что может увеличить их эффективность или точность.

Здесь обобщаются и обсуждаются следующие основные идеи.

1. Многие затруднения, связанные с сильно анизотропными, весьма подробными индикатрисами ликвидируются путем предвычисления некоторых угловых интегралов от индикатрисы рассеяния.

2. Поляризация может быть учтена с помощью этих же интегралов путем повсеместного использования хорошо обусловленного интегрируемого определения направления референции поляризации.

3. Число различных углов рассеяния и, следовательно, число интегралов индикатрисы, минимизируется с помощью распределений потоков на основе правильного додекаэдра.

4. Вычислительный код, обеспечивающий модель, организован по древовидной схеме: как только тест показывает, что дальнейшие вычисления несущественны для конечного результата, счет прекращается.

5. Задачи, в которых рассеянная радиация незначительно меняет направление (что является типичным для аэрозолей в земной атмосфере), успешно решаются отсеканием от древа рассеяния любого потока, направленного внутрь себя, и соответствующим

* Подход к радиации на основе додекаэдра. Додекаэдр — двенадцатигранник. Правильный додекаэдр ограничен двенадцатью правильными пятиугольниками. (Прим. ред. пер.)

изменением масштабов для коэффициента ослабления и альbedo однократного рассеяния.*

6. Число дискретных потоков, необходимое для точных расчетов непрерывного поля излучения, минимизируется с помощью правила Байеса из теории вероятности и физически разумной предварительной оценки поля непрерывного излучения.

Обсуждение. Развитие DART-метода начинается с интегродифференциального уравнения переноса суммарной радиации, состоящей из прямого и рассеянного солнечного излучения:

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = I(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) + \text{прямое солнечное излучение.} \quad (3.88)$$

Уравнение имеет вид

$$dS(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = d\mathbf{r} \left[-\sigma_e(\mathbf{r}) S(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) + \frac{\sigma_s(\mathbf{r})}{4\pi} \int_{\Omega} p(\mathbf{r}; \mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}') S(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') d\mathbf{\Omega}' + J_{\text{эмиссия}} \right]. \quad (3.89)$$

Угловые переменные дискретизируются с помощью интегрального оператора примерно так же, как в случае преобразования Фурье. Ядром преобразования является степень косинуса угла $\mathbf{\Omega}$ с некоторым номинальным направлением распространения излучения \mathbf{p} . Интегральный оператор здесь имеет вид

$$\int_{\mathbf{\Omega} \in (\mathbf{p}\mathbf{\Omega}) > 0} (\mathbf{p}\mathbf{\Omega})^n \dots d\mathbf{\Omega}. \quad (3.90)$$

Величины, создаваемые этим оператором, имеют смысл дискретных потоков с номинальным направлением распространения \mathbf{p} , например $[dS(\mathbf{r})]_{\mathbf{p}}$ и $S(\mathbf{r})_{\mathbf{p}}$. Свертывание члена источника $p(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}')$ и $S(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}')$ сводится к сумме произведений

$$\sum_{\mathbf{p}''} \sum_{\mathbf{p}'} c_{\mathbf{p}'', \mathbf{p}'} \mathbf{p} P(\mathbf{r})_{\mathbf{p}''} S(\mathbf{r})_{\mathbf{p}'}, \quad (3.91)$$

где $c_{\mathbf{p}'', \mathbf{p}'}$ — скалярные множители, а $P(\mathbf{r})_{\mathbf{p}''}$ — соответствующие трансформации от индикатрисы рассеяния:

$$P(\mathbf{r})_{\mathbf{p}''} = \int_{\mathbf{\Omega} \ni \mathbf{p}''\mathbf{\Omega} > 0} (\mathbf{p}''\mathbf{\Omega})^n p(\mathbf{r}; \mathbf{\Omega}, \mathbf{z}) d\mathbf{\Omega}. \quad (3.92)$$

Они могут быть один раз предвычислены и затем использованы в любой последующей задаче переноса с теми же индикатрисами. Это экономит машинное время.

При учете поляризации индикатриса $p(\mathbf{r}; \mathbf{\Omega}, \mathbf{z})$ будет уже не скаляром, а матрицей, все элементы которой для образования $P(\mathbf{r})_{\mathbf{p}''}$ следует проинтегрировать. Некоторые из этих матричных элементов зависят от направления референции, которая определяет состояние линейной поляризации. Для того чтобы интегриро-

* Свет, рассеянный вперед, включается в поток прямой радиации; при этом надо ω_0 и τ заменить на ω_0^* и τ^* . Подобный прием используется в так называемом транспортном приближении. Он подробно описан в главе 4. (Прим. ред. пер.)

вание имело смысл, направление референции должно очень гладко изменяться с Ω . Нельзя добиться гладкого хода для всех Ω , но DART-метод позволяет достичь этого в окрестности любого конкретного \mathbf{p}' , для которого оценивается интеграл. Направление референции для произвольного Ω принято определять следующим образом: \mathbf{z} (или $-\mathbf{z}$) совмещают с \mathbf{p}' , а x поворачивают вокруг оси z так, чтобы вектор Ω оказался в плоскости xoz . Такие условия референции приводят к физически разумным результатам: например, при $\mathbf{p} \equiv \mathbf{z}$ или $-\mathbf{z}$ это дает неполяризованное $P(\mathbf{r})_{\mathbf{p}'}$. Более общие условия поляризации не обязательно включают это свойство.

Число направлений потоков \mathbf{p}' , необходимых для полной модели, определяется величиной $(n+1)(n+2)$, но их распределение в пространстве не определено и может коренным образом минимизировать число различных углов рассеяния и, следовательно, число необходимых интегралов в индикатрисе. Сейчас обычно пользуются распределением потоков, базирующемся на долготном широтном разделении сферы, а в работах по переносу нейтронов — S_n -распределениями Карлсона, основанными на разделении правильного октаэдра. Однако распределения потоков, построенные на разделении правильного додекаэдра, имеют в 2—3 раза меньше различных углов рассеяния, чем в каждом из предыдущих методов.

Вычислительный алгоритм для дискретизированного уравнения радиационного переноса, сводится к набору вложенных циклов типа «DO», которые применяются к любому потоку, попадающему на верхнюю границу атмосферы. Каждому порядку рассеяния соответствует свой цикл. Если из теста следует, что сумма остаточных порядков рассеяния пренебрежимо мала по сравнению с уже накопленной суммой, то эти остаточные порядки отбрасываются, даже если все они сравнимы по величине с тестируемым рассеянием. Этот тест меняется в зависимости от порядка рассеяния и от продвижения по ходу развития программы, обеспечивая таким образом сокращение машинного времени. Сокращение возможно также, если опустить в циклах рассеяние вперед. Рассеяние от потока в направлении само на себя характеризуется преобразованием

$$T(\mathbf{r})_{\mathbf{z}} = \sum_{\mathbf{p}'} c_{\mathbf{p}'\mathbf{z}} P(\mathbf{r})_{\mathbf{p}'}. \quad (3.93)$$

Чтобы исключить его, требуется выразить $\sigma_z(\mathbf{r})$ в единицах $1 - T(\mathbf{r})_{\mathbf{z}}$, а $\bar{\omega}_0$ — в единицах $1/[1 - T(\mathbf{r})_{\mathbf{z}}]$.

Вычислительное время существенно зависит от числа рассматриваемых потоков. Для уменьшения этого числа в DART-методе используется правило Байеса из теории вероятности. Предварительная оценка, необходимая для правила Байеса, требует физических соображений о радиационном поле. Идеи, которые привлекаются для этого сегодня, весьма просты: 1) суммарная радиация должна быть не меньше, чем радиация, рассчитанная на модели с однократным рассеянием; 2) многократно рассеянная радиация

возрастает с увеличением оптической толщины в направлении сканирования, достигая экспоненциального насыщения; 3) в отсутствии поглощения выходящий поток возрастает с увеличением входящего потока. Эти соображения служат для компенсации недостаточно подробной угловой дискретизации и часто позволяют ограничиваться двенадцатью потоками как адекватной величиной.

Главные преимущества DART-метода заключаются в следующем:

- быстрый счет во многих задачах, решение которых в ином случае потребовало бы много времени;
- практически неограниченный динамический диапазон;
- отсутствие статистических флуктуаций;
- точность, пригодная для задач обращения.

Метод имеет следующие основные недостатки:

— до настоящего времени до машинного кода доведена только двенадцатипотоковая модель;

— простые задачи можно быстро считать другими методами радиационного переноса; быстрое действие двенадцатипотокового DART-метода может оказаться меньшим преимуществом, чем точность модели высокого порядка.

К факторам, не до конца оцененным, относятся:

- абсолютный предел скорости,
- абсолютный предел точности,
- точность учета поляризации,
- влияние основных идей на другие моделируемые процессы.

4.1. СООТНОШЕНИЕ ПОДОБИЯ

Пусть нам нужно рассмотреть однородную атмосферу с оптической толщиной τ_1 , альbedo однократного расстояния $\bar{\omega}_0$ и индикатрисой $p(\vartheta)$. Определим сначала показатель асимметрии:

$$g = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p(\vartheta) \cos \vartheta d(\cos \vartheta) = \beta_1/3. \quad (4.1)$$

Точное решение может быть аппроксимировано решением такой же задачи для изотропного рассеяния с альbedo $\bar{\omega}_0^*$ и оптической толщиной τ_1^* . Соотношения подобия будут иметь вид

$$\bar{\omega}_0^* = \frac{(1-g)\bar{\omega}_0}{1-g\bar{\omega}_0}, \quad (4.2)$$

$$\tau_1^* = (1-g\bar{\omega}_0)\tau_1 \quad (4.3)$$

либо

$$\tau_1^*/\nu^* = \tau_1/\nu, \quad (4.4)$$

$$\nu^*(1-\bar{\omega}_0^*) = \nu(1-\bar{\omega}_0), \quad (4.5)$$

где ν — максимальное дискретное собственное значение уравнения переноса (см. п. 2.1).

Для наиболее интересного случая $(1-\bar{\omega}_0) \ll 1$ уравнения (4.4) и (4.5) сводятся к уравнениям (4.2) и (4.3).

4.2. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭДДИНГТОНА *

В приближении Эддингтона делается предположение, что радиацию можно задать выражением

$$I(\tau; \mu, \varphi) = I_0(\tau) + \mu I_1(\tau). \quad (4.6)$$

Тогда уравнение переноса можно проинтегрировать по φ :

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI(\tau; \mu)}{d\tau} = I(\tau; \mu) - \frac{\bar{\omega}_0}{2} \int_{-1}^1 p^{(0)}(\mu; \mu') I(\tau, \mu') d\mu' - \\ - \frac{\bar{\omega}_0}{4} p^{(0)}(\mu; \mu_0) F e^{-\tau/\mu_0}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $p^{(0)}$ задается выражением (1.39), взятым при $s = 0$, если индикатриса разложена на полиномы Лежандра (1.38).

* В этом параграфе $\mu_0 = |\cos \theta_0|$.

Взяв нулевой и первый моменты (4.7) относительно μ , получим пару дифференциальных уравнений для I_0 и I_1 ; в эти уравнения входят только первые коэффициенты β_1 из выражения (1.38). Это означает, что индикатриса в действительности может быть аппроксимирована выражением

$$p(\vartheta) = 1 + \beta_1 \cos \vartheta. \quad (4.8)$$

Уравнения для I_0 и I_1 легко решить при заданных граничных условиях.

В этом приближении потоки, рассеянные вверх и вниз, будут соответственно описываться выражениями

$$\begin{aligned} F^+(\tau) &= \pi \left[I_0(\tau) - \frac{2}{3} I_1(\tau) \right], \\ F^-(\tau) &= \pi \left[I_0(\tau) + \frac{2}{3} I_1(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Альbedo атмосферы (при «черной» подстилающей поверхности) задается в виде

$$A(\mu_0, \tau_1) = 2(C_1 + C_2 + D) \quad \text{при } \bar{\omega}_0 \neq 1, \quad (4.10)$$

$$A(\mu_0, \tau_1) = 1 - \frac{2R(\mu_0, \tau_1)}{4 + (3 - \beta_1)\tau_1} \quad \text{при } \bar{\omega}_0 = 1, \quad (4.11)$$

а полное пропускание (прямого и рассеянного излучений) — в виде

$$T(\mu_0, \tau_1) = 2(C_1 e^{-k\tau_1} + C_2 e^{k\tau_1} + D e^{-\tau_1/\mu_0}) + e^{-\tau_1/\mu_0} \quad \text{для } \bar{\omega}_0 \neq 1, \quad (4.12)$$

$$T(\mu_0, \tau_1) = \frac{2R(\mu_0, \tau_1)}{4 + (3 - \beta_1)\tau_1} \quad \text{для } \bar{\omega}_0 = 1, \quad (4.13)$$

где

$$C_1 = G [T_1 e^{k\tau_1} (1 + b) + T_2 e^{-\tau_1/\mu_0} (1 - b)], \quad (4.14)$$

$$C_2 = -G [T_1 e^{-k\tau_1} (1 - b) + T_2 e^{-\tau_1/\mu_0} (1 + b)], \quad (4.15)$$

$$G = \frac{\bar{\omega}_0}{4} \frac{1}{(1 - k^2 \mu_0^2) [e^{k\tau_1} (1 + b)^2 - e^{-k\tau_1} (1 - b)^2]}, \quad (4.16)$$

$$D = -\frac{3}{4} \frac{[1 + (1 - \bar{\omega}_0) \beta_1 / 3]}{(1 - k^2 \mu_0^2)} \mu_0 \bar{\omega}_0, \quad (4.17)$$

$$k^2 = (1 - \bar{\omega}_0)(3 - \bar{\omega}_0 \beta_1), \quad (4.18)$$

$$T_1 = 2 + 3\mu_0 + (1 - \bar{\omega}_0) \beta_1 \mu_0 (1 + 2\mu_0), \quad (4.19)$$

$$T_2 = 2 - 3\mu_0 - (1 - \bar{\omega}_0) \beta_1 \mu_0 (1 - 2\mu_0), \quad (4.20)$$

$$b = \frac{2k}{(3 - \bar{\omega}_0 \beta_1)}, \quad (4.21)$$

$$R(\mu_0, \tau_1) = 1 + \frac{3\mu_0}{2} + \left(1 - \frac{3\mu_0}{2}\right) e^{-\tau_1/\mu_0}. \quad (4.22)$$

При сильной анизотропии индикатрисы для повышения точности по аналогии с методом Эддингтона применяется дельта-метод Эддингтона. При этом усекается пик индикатрисы в направлении рассеяния вперед (см. п. 6.1). Уравнение (4.9) показывает, что в основных уравнениях метода можно, наряду с I_0 и I_1 , использовать также F^+ и F^- . Следовательно, приближение Эддингтона можно рассматривать как один из вариантов двухпоточковых методов, описанных в следующем параграфе.

Добавим, что если поток $F(\tau)$ определяется с достаточной точностью, то дивергенция $dF/d\tau$ получается часто с большой ошибкой. Этот недостаток можно устранить, если по-новому определить постоянные интегрирования.

4.3. ДВУХПОТОКОВЫЕ МЕТОДЫ *

Двухпоточковое приближение использовалось многими авторами. Оно позволяет быстро получить приближенное решение уравнения переноса, разделяя поле радиации на два встречных потока.

В общем виде уравнения для рассеянных восходящего F^+ и нисходящего F^- потоков можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dF^+(\tau)}{d\tau} &= \alpha_1 F^+(\tau) - \alpha_2 F^-(\tau) - \alpha_3 \bar{\omega}_0 \pi F e^{-\tau/\mu_0}, \\ \frac{dF^-(\tau)}{d\tau} &= \alpha_2 F^+(\tau) - \alpha_1 F^-(\tau) + \alpha_4 \bar{\omega}_0 \pi F e^{-\tau/\mu_0}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Их легко решить с граничными условиями для $F^-(0)$ и $F^+(\tau_1)$. Аналогичные уравнения справедливы для суммарных (прямой + рассеянный) потоков. Их можно получить из выражений (4.23), если отбросить последние члены в правой части; граничные условия на верхней границе в обоих случаях, конечно, будут различными.

Уравнения (4.23) и их аналоги для суммарных потоков являются приближенными; это подтверждается при точном интегрировании уравнения переноса. Различные двухпоточковые методы (включая и метод Эддингтона, упомянутый выше) различаются в приближениях, которые делаются для установления значений коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, и в выборе либо полного, либо диффузного потока. В последнее время была предпринята попытка уяснить ситуацию и сравнить между собой различные двухпоточковые методы. Полный обзор этого вопроса оказался бы слишком пространным: мы ограничимся описанием оригинального двухпоточкового метода.

Альбеда задается выражениями

$$\begin{aligned} A &= \frac{G(1 - e^{-2k\tau_1})}{1 - G^2 e^{-2k\tau_1}} \quad \text{при } \bar{\omega}_0 \neq 1, \\ A &= \frac{b\tau_1/\mu_0}{1 + b\tau_1/\mu_0} \quad \text{при } \bar{\omega}_0 = 1, \end{aligned} \quad (4.24)$$

* В этом параграфе $\mu_0 = |\cos \theta_0|$.

а полное пропускание радиации (прямой + рассеянной) — выражениями

$$T = \frac{(1 - G^2) e^{-k\tau_1}}{1 - G^2 e^{-2k\tau_1}} \quad \text{при } \bar{\omega}_0 \neq 1,$$

$$T = \frac{1}{1 + b\tau_1/\mu_0} \quad \text{при } \bar{\omega}_0 = 1, \quad (4.25)$$

где

$$G = (r - s)(r + s)^{-1},$$

$$r = 1 - \bar{\omega}_0 f + \bar{\omega}_0 b,$$

$$s = [(1 - \bar{\omega}_0 f)^2 - \bar{\omega}_0^2 b^2]^{1/2}, \quad (4.26)$$

$$k = s/\mu_0.$$

Коэффициенты b и f определяют долю излучения, рассеянного назад и вперед соответственно.

Очевидно, что

$$b + f = 1, \quad (4.27)$$

и логично выбрать

$$f = \frac{1}{2} \int_0^1 p(\mu) d\mu. \quad (4.28)$$

Если допустить в соответствии с точным решением для потока при $p(\mu) = 1 + \beta_1 \mu$, что

$$f = \frac{1}{2} (1 + \beta_1/3) = \frac{1}{2} (1 + g), \quad (4.29)$$

то мы получим «модифицированное двухпотокное» приближение.

Двухпотковые методы могут также включать особое рассмотрение пиков индикатрисы в направлении рассеяния вперед, как в дельта-методе Эддингтона.

Обобщением двухпотковых методов являются N -потковые методы. Иными словами, методы, подобные методу дискретных ординат или сферических гармоник, приводят к какому-либо двухпотковому методу, если их использовать со вторым порядком.

4.4. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ЯДРА *

Этот метод, как и методы, описанные в п. 4.2 и 4.3, нацелен на получение простых аналитических решений для потоков. Индикатриса аппроксимируется суммой дельта-функции и двух членов полинома Лежандра:

$$\bar{\omega}_0 p(\vartheta) = \bar{\omega}'_0 (1 + \beta'_1 \cos \vartheta) + A \delta(1 - \cos \vartheta). \quad (4.30)$$

Действительную оптическую толщину τ_1 следует заменить эффективной величиной τ'_1 (см. п. 6.1).

* В этом параграфе $\mu_0 = |\cos \theta_0|$.

Уравнение переноса (1.23) для суммарной радиации используется с граничными условиями

$$I(0; \mu < 0, \varphi) = \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \pi F, \quad (4.31)$$

$$I(\tau_1; \mu > 0, \varphi) = \frac{\rho F(\tau_1)}{(\rho - 1) \pi}.$$

Мы приняли здесь, что подстилающая поверхность с альбедо ρ отражает по закону Ламберта и что $F(\tau_1)$ — результирующий поток.

С помощью формального решения (1.28) и (1.29) уравнения переноса в выражениях для потока $F(\tau)$ и средней интенсивности $\bar{I}(\tau)$ получим в качестве множителей интегральные экспоненциальные функции $E_2(t)$ и $E_3(t)$, которые аппроксимируются через ae^{-bt} и ae^{-bt}/b ($a = 3/4$, $\beta = 3/2$). В результате находим интегральные уравнения для F и \bar{I} . Последовательным дифференцированием по τ задача сводится к дифференциальному уравнению для \bar{I} , которое легко интегрируется.

Привлекая граничные условия (4.31), получаем следующие выражения для результирующих потоков на верхней и нижней границах атмосферы:

$$F(0) = \mu_0 \pi F \left(\frac{(b^2 - 1/\mu_0^2)}{(b^2 - a\bar{\omega}'_0\beta'_1) [1 - 1/(\gamma\mu_0)^2]} \right) \left(-1 + \psi \frac{\text{sh } \gamma\tau'_1 + \delta \text{ch } \gamma\tau'_1}{G(\tau'_1)} \right), \quad (4.32)$$

$$F(\tau_1) = \mu_0 \pi F \left(\frac{(b^2 - 1/\mu_0^2)}{(b^2 - a\bar{\omega}'_0\beta'_1) [1 - 1/(\gamma\mu_0)^2]} \right) \left(\frac{\delta\psi}{G(\tau'_1)} \right), \quad (4.33)$$

где

$$\begin{aligned} u_\nu &= \frac{1 + \rho}{1 - \rho}, \\ \delta &= \frac{[(1 - \bar{\omega}'_0 + a\bar{\omega}'_0)(b^2 - a\bar{\omega}'_0\beta'_1)/(1 - \bar{\omega}'_0)]^{1/2}}{b}, \\ \gamma &= \frac{b^2 - a\bar{\omega}'_0\beta'_1}{bu_\nu}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$G(\tau'_1) = 2(1 + \delta u_\nu) \text{sh } \gamma\tau'_1 + (\delta + u_\nu) \text{ch } \gamma\tau'_1,$$

$$\psi = 1 + u_\nu \frac{b\mu_0 - (\gamma\mu_0)^2}{\gamma\mu_0 (b\mu_0 - 1)}.$$

Метод может быть распространен на случай нескольких прилегающих слоев.

При $\bar{\omega}_0 = 0,9$ ошибка полученных значений потоков составляет менее 10% при любом значении τ_1 ; точность увеличивается при возрастании $\bar{\omega}_0$.

4.5. МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ

Этот метод был разработан для изучения неоднородной слоистой атмосферы, в которой вначале рассматривалась только зависимость альbedo однократного рассеяния от оптической толщины (но не зависимость индикатрис или матриц рассеяния). Реализация метода начинается с предположения о том, что оптические характеристики (и в том числе, следовательно, поле радиации — как внутренней, так и уходящей через границы) неоднородной атмосферы с переменным альbedo $\bar{\omega}(\tau)$ могут быть адекватно моделированы наложением на исходную однородную атмосферу с постоянным альbedo $\bar{\omega}_0$ переменного возмущения $a(\tau)$, $a \ll 1$, так что

$$\bar{\omega}(\tau) = \bar{\omega}_0 \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\tau), \quad n = 0, 1, 2, \dots, a_0 = 1. \quad (4.35)$$

Можно ожидать, что в большинстве атмосферных задач достаточным окажется очень малое число таких возмущений — возможно, одно или два. Поэтому все существенные функции рассеяния раскладываются в ряды, аналогичные (4.35):

$$\mathbf{F}(\tau, \dots) = \mathbf{F}_0(\tau, \dots) \sum_n \mathbf{f}_n(\tau), \quad (4.36)$$

где \mathbf{F}_0 — \mathbf{F} — функции для исходной атмосферы, т. е. $\mathbf{F}_0(\tau, \dots) = [\mathbf{F}(\tau, \dots)]_{\bar{\omega}(\tau) = \bar{\omega}_0}$, а возмущенные функции таковы, что $\mathbf{f}_n \ll \ll \mathbf{U}$ (\mathbf{U} — матрица, все элементы которой равны единице) с $\mathbf{f}_0 \equiv \equiv \mathbf{U}$ (единичная матрица), если рассматривается состояние полной поляризации; в других случаях $f_n \ll 1$, $f_0 = 1$. Численные расчеты, выполненные для нескольких тестовых случаев рассеяния, показали, что усеченные разложения

$$\bar{\omega}(\tau) = \bar{\omega}_0 [1 + a(\tau)] \quad (4.37)$$

и

$$\mathbf{F}(\tau, \dots) = \mathbf{F}_0(\tau, \dots) [\mathbf{E} + \mathbf{f}(\tau, \dots)] \quad (4.38)$$

могут дать весьма точные результаты.

Метод сначала проверялся на функциях H , X , Y и их матричных аналогах. Например, соответствующее скалярное уравнение в атмосфере с произвольной оптической толщиной имеет вид

$$Z(\alpha, \gamma; \mu) = 1 + \int_0^1 \left\{ \int_{\alpha}^{\gamma} Z(\alpha', \gamma; \mu) Z(\alpha', \gamma; \mu') \bar{\omega}(\alpha') \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-(\alpha' - \alpha) \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'} \right) \right] d\alpha' \right\} \psi(\mu') \frac{d\mu'}{\mu'}, \quad (4.39)$$

где

$$Z(\alpha, \gamma; \mu) = \begin{cases} X(\alpha, \beta; \mu) & \text{при } \gamma = \beta < \infty, \\ H(\alpha, \mu) & \text{при } \gamma = \beta = \infty. \end{cases}$$

Здесь α и β — оптические толщины, отсчитанные соответственно от верхней и нижней границ. Подставив разложения (4.37) и (4.38) при $F \equiv Z$ в уравнение (4.39), получим линейризованное уравнение

$$z(\alpha, \gamma; \mu) = \bar{\omega}_0 Z_0^{-1}(\alpha, \gamma; \mu) \int_0^1 \left(\int_{\alpha}^{\gamma} Z_0(\alpha', \gamma; \mu) \{a(\alpha') + [1 + a(\alpha')][z(\alpha', \gamma; \mu) + z(\alpha', \gamma; \mu')]\} Z_0(\alpha', \gamma; \mu') \times \right. \\ \left. \times \exp \left[-(\alpha' - \alpha) \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu'} \right) \right] d\alpha' \right) \psi(\mu') \frac{d\mu'}{\mu'}. \quad (4.40)$$

Существуют разные возможности решения уравнения (4.40). Например, существует N -решение (ряд Неймана), которое является единственным:

$$z(\alpha, \gamma; \mu) = \frac{1}{2[1 + a(\alpha)]} \left[(1 + C_{\alpha}^{-}) \sum_{n=0}^{\infty} (C_{\alpha}^{+})^n - 1 \right] a(\alpha'), \quad (4.41)$$

где C_{α}^{\pm} — известный линейный оператор рассеяния, а $(C_{\alpha})^n$ — оператор C_{α} , повторенный n раз. Было найдено, что при рэлеевском рассеянии после нескольких итераций (пяти или шести) достигается режим геометрических рядов. Этот результат согласуется с тем, что был найден методом последовательных рассеяний.

Метод возмущений можно также использовать непосредственно в уравнении радиационного переноса. Подставляя выражения (4.37) и (4.38), записанное в виде

$$I^s(\tau; \mu) = I_0^s(\tau; \mu) + i^s(\tau; \mu), \quad (4.42)$$

в уравнения (1.42) и (1.43), получаем уравнение возмущения

$$\mu \frac{\partial i^s(\tau; \mu)}{\partial \tau} = i^s(\tau; \mu) - \frac{\bar{\omega}_0}{2} \int_{-1}^1 p^s(\mu, \mu') i^s(\tau; \mu') d\mu' - \\ - a(\tau) g^s(\tau; \mu, \mu_0), \quad (4.43)$$

где g^s — известная функция:

$$g^s(\tau; \mu, \mu_0) = \frac{1}{4} p^s(\mu, \mu_0) F e^{\tau/\mu_0} + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 p^s(\mu, \mu') I_0^s(\tau; \mu') d\mu'. \quad (4.44)$$

Уравнение (4.43) очень похоже на исходное уравнение переноса, но в некоторых случаях может быть решено гораздо быстрее. В частности, используя метод сферических гармоник, можно показать, что решение присоединенной однородной системы формально аналогично; единственное различие заключается в оценке частичного решения полной системы, где теперь вместо $(\bar{\omega}_0/4) p^s(\mu, \mu_0) F e^{\tau/\mu_0}$ стоит $a(\tau) g^s(\tau; \mu, \mu_0)$. Решение можно найти непосредственно, если $a(\tau)$ представить экспоненциальной функцией $a(\tau) = e^{-b\tau}$; при этом, незначительно превысив расчетное

время, необходимое в случае однородной атмосферы, можно получить очень точный результат. Возможности распространения метода на другие случаи предстоит еще проверить.

Особенно интересен этот метод при образовании решения для множества случаев из известного решения для данного случая. Он полезен также в расчетах синтетических спектров.

4.6. ПРИБЛИЖЕНИЕ МАЛЫХ УГЛОВ

Решение уравнения переноса (1.26) представляется в виде

$$I(\tau; \mu; \varphi) = I^*(\tau; \mu; \varphi) + \tilde{I}(\tau; \mu; \varphi), \quad (4.45)$$

где приближение малых углов I^* является решением уравнения

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{dI^*(\tau; \mu; \varphi)}{d\tau} = I^*(\tau; \mu; \varphi) - \frac{\bar{\omega}_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 p(\mu, \varphi; \mu', \varphi') \times \\ \times I^*(\tau; \mu', \varphi') d\mu' - \frac{\bar{\omega}_0}{4} p(\mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) F e^{\tau/\mu_0} \end{aligned} \quad (4.46)$$

при граничных условиях

$$I^*(\tau; \mu; \varphi) \equiv 0 \quad \text{при} \quad -1 \leq \mu \leq 1. \quad (4.47)$$

Переменная μ в левой части уравнения (1.26) заменяется на μ_0 в уравнении (4.46), а граничные условия (4.47) означают, что нет отражения от слоя.

Решение уравнения (4.46) может быть получено непосредственно. Вычитая (4.46) из уравнения (1.26), записанного с учетом уравнения (4.45), легко найдем, что \tilde{I} удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\tilde{I}(\tau; \mu, \varphi)}{d\tau} = \tilde{I}(\tau; \mu, \varphi) - \frac{\bar{\omega}_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 p(\mu, \varphi; \mu', \varphi') \times \\ \times \tilde{I}(\tau; \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' - (\mu_0 - \mu) \frac{d\tilde{I}^*(\tau; \mu, \varphi)}{d\tau}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Это уравнение переноса — того же вида, что и наша исходная задача. Существенно, что угловая зависимость у функции \tilde{I} выражена гораздо слабее, чем у I .

Полученное уравнение (4.48) можно решить любым из обычных методов.

5.1. ОДНОКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ

Для очень тонких слоев радиационное поле можно аппроксимировать частью $I^{(1)}$, ответственной только за первичное, или однократное рассеяние (фотоны, рассеянные один раз).

Решая уравнение (1.21) для однородного случая совместно с граничными условиями (1.27) и используя выражение

$$J(\tau; \mu, \varphi) = J^{(1)}(\tau; \mu, \varphi) = \frac{\bar{\omega}_0}{4} p(\mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) F e^{\tau/\mu_0}, \quad (5.1)$$

$$\text{получаем: } I^{(1)\dagger}(\tau; \mu, \varphi) = \frac{\bar{\omega}_0}{4} \frac{\mu_0}{\mu - \mu_0} e^{\tau_1/\mu_0} (e^{(\tau - \tau_1)/\mu} - e^{(\tau - \tau_1)/\mu_0}) p(\mu_1 \varphi; \mu_0, \varphi_0) F. \quad (5.2)$$

$$I^{(1)-}(\tau; \mu, \varphi) = \frac{\bar{\omega}_0}{4} \frac{\mu_0}{\mu - \mu_0} (e^{\tau/\mu} - e^{\tau/\mu_0}) p(\mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) F. \quad (5.3)$$

Для неоднородной атмосферы необходимо численное интегрирование уравнений (1.28) и (1.29) совместно с выражением (5.1) для J . Для учета поляризации можно применить те же выражения в матричной форме.

В тех случаях, когда однократное рассеяние не может определять все радиационное поле, но тем не менее представляет большую часть его, удобно сочетать точный подход к однократному рассеянию с приближенным подходом к многократному рассеянию.

5.2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ *

Возможность применения асимптотической теории к толстым слоям была, вероятно, недостаточно полно использована. Рассмотрим однородную атмосферу с оптической толщиной τ_1 . Диапазон толщин, к которым применимо большинство вычислительных методов, — это малые значения τ_1 (примерно $\tau_1 \leq 3$) и в некоторых методах $\tau_1 = \infty$. Очень большим толщинам (примерно $\tau_1 \geq 30$) удовлетворяет асимптотическая теория. Реальная область применимости зависит от рассматриваемого случая и от требуемой точности. Это позволило авторам считать, что в промежуточном диапазоне значений (примерно $3 < \tau_1 < 30$) возникают большие вычислительные трудности.

* В этом параграфе $\mu > 0$ для нисходящей радиации.

Можно отметить, что такое мнение часто является необоснованным, потому что промежуточный интервал может быть охвачен с большой точностью интерполяцией между $\tau_1 = 1$ и $\tau_1 = \infty$. Для этой цели известные численные результаты можно преобразовать таким образом, что они дадут постоянное известное значение при условии, что асимптотическая теория будет применима. Нанесем эти трансформированные числа на график удобного масштаба, разместив на нем весь диапазон τ_1 от 0 до ∞ и выполним графическую интерполяцию, которая обычно дает хорошие результаты уже вблизи значения $\tau_1 = 10$ и выше. Таким же образом можно произвести численную интерполяцию.*

Для получения полных асимптотических выражений можно воспользоваться двумя существенно различными методами.

1. Испытанный математический способ: строго решить задачу методом разложения по собственным функциям, а затем исключить все члены, не связанные с максимальным дискретным собственным значением, т. е. относящиеся к наиболее слабым модам.

2. Разработан физический метод, основанный исключительно на тщательной регистрации результатов различного взаимного расположения толстых и тонких слоев. Он приводит в точности к тем же самым асимптотическим выражениям. В другом физическом подходе необходимые константы определяются с помощью интегрирования по асимптотическому полю радиации в глубоких слоях полубесконечной атмосферы.

Другие способы, предложенные в литературе, можно рассматривать как промежуточные между указанными двумя противоположными подходами.

5.2.1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение переноса, где I — интенсивность суммарной радиации (рассеянная + пропущенная), а μ считается положительным для радиации, направленной вниз.

Граничные условия задаются обычным образом:

$$I(0, \mu, \varphi) = \psi(\mu, \varphi); \quad I(\tau_1, -\mu, \varphi) = 0, \quad \mu > 0. \quad (5.4)$$

Используя разделение по азимуту (см. п. 1.8), получаем:

$$\mu \frac{\partial I^m(\tau; \mu)}{\partial \tau} + I^m(\tau, \mu) = \frac{\bar{\omega}_0(\tau)}{2} \int_{-1}^1 p^m(\tau; \mu, \mu') I^m(\tau; \mu') d\mu', \quad (5.5)$$

где

$$I^m(0, \mu) = \psi^m(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\mu, \varphi) \cos m\varphi d\varphi;$$

$$I^m(\tau_1; -\mu) = 0, \quad \mu > 0. \quad (5.6)$$

* Подобный приближенный прием был развит В. В. Соболевым в 1943 г. (см. Соболев, 1956, глава X). Он прост и широко используется в атмосферной оптике при расчетах в безоблачной атмосфере, в частности для определения наклонной дальности видимости и яркости дневного неба. Точность его много раз оценивалась. В стандартной ситуации она составляет около 3% для нисходящих яркостей и 5% для восходящих. (Прим. ред. пер.)

Пусть интенсивность отраженной и рассеянной в атмосфере радиации будет выражена через показатели отражения $\rho(\mu, \mu', \varphi - \varphi')$ и рассеяния $\sigma(\mu, \mu', \varphi - \varphi')$ соответственно:

$$I(0, -\mu, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mu' \rho(\mu, \mu', \varphi - \varphi') \psi(\mu' \varphi') d\mu' d\varphi',$$

$$I(\tau_1, +\mu, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mu' \sigma(\mu, \mu', \varphi - \varphi') \psi(\mu' \varphi') d\mu' d\varphi'. \quad (5.7)$$

Умножив функции ρ и σ на $4\mu\mu_0$, получим функции S и T , определенные выражениями (1.31) и (1.32). Затем функции $\rho(\mu, \mu', \varphi - \varphi')$ и $\sigma(\mu, \mu', \varphi - \varphi')$ можно разложить по азимуту; тогда уравнения (5.7) приобретают вид

$$I^m(0, -\mu) = 2 \int_0^1 \mu' \rho^m(\mu, \mu') \psi^m(\mu') d\mu',$$

$$I^m(\tau_1, \mu) = 2 \int_0^1 \mu' \sigma^m(\mu, \mu') \psi^m(\mu') d\mu'. \quad (5.8)$$

5.2.2. Асимптотические параметры и функции

Введем ряд функций и параметров, необходимых при решении рассматриваемой задачи асимптотическим методом.

1. *Характеристическое уравнение теории переноса.* Имеет вид

$$(1 - \nu\mu) i_{\nu}^m(\mu) = \frac{\tilde{\omega}_0}{2} \int_{-1}^1 \rho^m(\mu, \mu') i_{\nu}^m(\mu') d\mu'. \quad (5.9)$$

Выполняется строгое исследование уравнения (5.9) при весьма общих предположениях относительно индикатрисы. Для задач с индикатрисами вида (1.38) уравнение (5.9) при любых m и $\tilde{\omega}_0 \leq 1$ имеет конечное число действительных корней ν_k^m , симметричных по отношению к точке $\nu = 0$ в интервале $(-1, 1)$. Предполагается, что решение $i_{\nu_k}^m$, соответствующее каждому из этих корней, нормируется следующим образом:

$$\frac{\tilde{\omega}_0}{2} \int_{-1}^1 i_{\nu_k}^m(\mu) d\mu = 1. \quad (5.10)$$

Функции $i_{\nu_k}^m$ с различными индексами k ортогональны в интервале $(-1, 1)$ с весом μ :

$$\int_{-1}^1 i_{\nu_k}^m i_{\nu_l}^m(\mu) \mu d\mu = 0, \quad k \neq l.$$

Обозначим норму функции $i_{\nu_k}^m(\mu)$ через M_k^m ; тогда

$$M_k^m = 2 \int_{-1}^1 [i_{\nu_k}^m(\mu)]^2 \mu d\mu. \quad (5.11)$$

2. *Задача Милна.* Понимается здесь как решение уравнения (5.5) с граничными условиями:

$$I_{M^m, k}^m(0, \mu) = 0, \quad \mu > 0, \\ I_{M^m, k}^m(\tau, \mu) = \frac{i_{\nu_k}^m(-\mu)}{M_k^m} e^{\nu_k^m \tau} \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty. \quad (5.12)$$

Граничный режим в задаче Милна обозначен через $U_k^m(\mu)$; функция $U_k^m(\mu)$ определена равенством

$$U_k^m(\mu) = I_{M^m, k}^m(0, -\mu). \quad (5.13)$$

Система функций $U_k^m(\mu)$ ортогональна системе функций в полуинтервале $(0, 1)$ с весом μ :

$$2 \int_0^1 i_{\nu_k}^m(\mu) U_l^m(\mu) \mu d\mu = \delta_{kl}. \quad (5.14)$$

Введем определение

$$N_{kj}^m = 2 \int_0^1 U_k^m(\mu) i_{\nu_j}^m(-\mu) \mu d\mu. \quad (5.15)$$

3. *Коэффициент отражения полубесконечной атмосферы.* Гармоники $\rho^{\infty m}(\mu, \mu_0)$ коэффициента отражения $\rho^{\infty}(\mu, \mu_0, \varphi - \varphi_0)$ удовлетворяют следующему нелинейному интегральному уравнению, удобному для численных расчетов:

$$(\mu + \mu_0) \rho^{\infty m}(\mu, \mu_0) = \frac{\bar{\omega}_0}{4} p^m(-\mu, \mu_0) + \frac{\bar{\omega}_0}{2} \mu_0 \int_0^1 p^m(\mu', \mu) \rho^{\infty m} \times \\ \times (\mu', \mu_0) d\mu' + \frac{\bar{\omega}_0}{2} \mu \int_0^1 p^m(\mu_0, \mu') \rho^{\infty m}(\mu', \mu) d\mu' + \\ + \bar{\omega}_0 \mu \mu' \int_0^1 \rho^{\infty m}(\mu, \mu') d\mu' \int_0^1 p^m(-\mu', \mu'') \rho^{\infty m}(\mu'', \mu_0) d\mu''. \quad (5.16)$$

Имеют место следующие соотношения между функциями $i_{\nu_k}^m(\mu)$, $U_k^m(\mu)$ и $\rho^{\infty m}(\mu, \mu')$:

$$i_{\nu_k}^m(-\mu) = 2 \int_0^1 \rho^{\infty m}(\mu, \mu') i_{\nu_k}^m(\mu') d\mu', \quad (5.17)$$

$$M_k^m U_k^m(\mu) = i_{\nu_k}^m(\mu) - 2 \int_0^1 \rho^{\infty m}(\mu, \mu') i_{\nu_k}^m(-\mu') \mu' d\mu'. \quad (5.18)$$

5.2.3. Асимптотические формулы для однородной атмосферы

В дальнейшем ограничимся классом задач с азимутальной симметрией и удержим в асимптотической формуле только главные члены, соответствующие наименьшему корню ν_0^0 уравнения (5.9) при $m = 0$.

Для простоты опустим индексы $m=0$ в $I^{(10)}(\tau, \mu)$ и во всех вышеописанных функциях нулевого порядка.

1. *Полубесконечная однородная атмосфера.* В этом случае $\tau_1 = \infty$, и решение уравнения переноса порядка $\exp(-\chi\tau)$ ($\nu < \chi < 1$) имеет вид

$$I_\infty(\tau, \mu) \approx A_\infty^{as}(\tau, \mu) = \begin{cases} U_\psi, & \bar{\omega}_0 = 1, \\ U_\psi i(\mu) e^{-\nu\tau}, & \bar{\omega}_0 < 1, \end{cases} \quad (5.19)$$

где

$$U_\psi = 2 \int_0^1 \psi(\mu) U(\mu) \mu d\mu. \quad (5.20)$$

2. *Однородная атмосфера большой оптической толщины.* Для конечной атмосферы большой толщины ($\tau_1 \gg 1$) решение выражается через соответствующие решения для полубесконечной атмосферы:

а) для $0 \leq \tau \leq \tau_1 - \tau^*$ ($\tau^* \gg 1$)

$$I_{\tau_1}(\tau, \mu) = \begin{cases} I_\infty(\tau, \mu) - \frac{MNU_\psi e^{-2\nu\tau_1}}{1 - N^2 e^{-2\nu\tau_1}} I_M(\tau, \mu), & \bar{\omega}_0 = 1, \\ I_\infty(\tau, \mu) = \frac{4U_\psi}{(3 - \beta_1)\tau_1 + 6\delta} I_M(\tau, \mu), & \bar{\omega}_0 = 1; \end{cases} \quad (5.21)$$

б) для $1 \ll \tau \ll \tau_1$

$$I_{\tau_1}(\tau, \mu) = \begin{cases} \frac{MU_\psi e^{-\nu\tau_1}}{1 - N^2 e^{-2\nu\tau_1}} I_M(\tau_1 - \tau, -\mu), & \bar{\omega}_0 < 1, \\ \frac{4U_\psi}{(3 - \beta_1)\tau_1 + 6\delta} I_M(\tau_1 - \tau, -\mu), & \bar{\omega}_0 = 1. \end{cases} \quad (5.22)$$

Здесь

$$\delta = 2 \int_0^1 U(\mu) \mu^2 d\mu; \quad (5.23)$$

U_ψ определяется соотношением (5.20).

Из формул (5.21) и (5.22) для $\tau = 0$ и $\tau = \tau_1$ соответственно, учитывая выражения (5.7) после деления по азимуту и уравне-

ние (5.13), получаем следующие асимптотические выражения для коэффициентов отражения и пропускания:

$$\rho_{\tau_1}(\mu, \mu_0) = \begin{cases} \rho_{\infty}(\mu, \mu_0) - \frac{MNU(\mu)U(\mu_0)e^{-2\nu\tau_1}}{1 - N^2e^{-2\nu\tau_1}}, & \bar{\omega}_0 < 1, \\ \rho_{\infty}(\mu, \mu_0) - \frac{4U(\mu)U(\mu_0)}{(3 - \beta_1)\tau_1 + 6\delta}, & \bar{\omega}_0 = 1, \end{cases} \quad (5.24)$$

$$\sigma_{\tau_1}(\mu, \mu_0) = \begin{cases} \frac{MU(\mu)U(\mu_0)e^{-\nu\tau_1}}{1 - N^2e^{-2\nu\tau_1}}, & \bar{\omega}_0 < 1, \\ \frac{4U(\mu)U(\mu_0)}{(3 - \beta_1)\tau_1 + 6\delta}, & \bar{\omega}_0 = 1. \end{cases} \quad (5.25)$$

Кроме того, при достаточно большом τ_1 области приложения формул (5.21) и (5.22) перекрываются. В таком случае, применяя асимптотическое приближение для решения задачи Милна, получаем:

$$I_{M\tau_1}^{as}(\tau_1, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{M} [i(-\mu)e^{\nu\tau} - Ni(\mu)e^{-\nu\tau}], & \bar{\omega}_0 < 1, \\ \frac{3}{4} \left[\left(1 - \frac{\beta_1}{3}\right)\tau - \mu + \delta \right], & \bar{\omega}_0 = 1. \end{cases} \quad (5.26)$$

С помощью формулы (5.22) легко получить выражение для асимптотического режима в атмосфере:

$$I_{\tau_1}^{as}(\tau, \mu) = \begin{cases} \frac{U_{\psi} [i(\mu)e^{-\nu\tau} - Ni(-\mu)e^{-\nu(2\tau_1 - \tau)}]}{1 - N^2e^{-2\nu\tau_1}}, & \bar{\omega}_0 < 1, \\ \frac{3U_{\psi} \{ [1 - (\beta_1/3)](\tau_1 - \tau) + \mu + \delta \}}{(3 - \beta_1)\tau_1 + 6\delta}, & \bar{\omega}_0 = 1. \end{cases} \quad (5.27)$$

5.2.4. Вычисление асимптотических параметров и функций

Для расчета асимптотических параметров и функций предлагается следующий алгоритм, доказавший свою пригодность во многих приложениях.

1. С помощью итераций уравнения (5.9) ищем собственную функцию $i(\mu)$ при данном ν . После каждой итерации решение перенормируем так, чтобы сохранялось уравнение (5.10).

2. Последовательными аппроксимациями уравнения (5.16) определяем коэффициент отражения $\rho^{\infty}(\mu, \mu_0)$ для полубесконечной атмосферы. Для перенормировки используем соотношение (5.17), в результате чего существенно сокращается число итераций в задачах с малым истинным поглощением.

3. Функцию $U(\mu)$, определяющую граничные условия в задаче Милна, находим также с помощью итераций из уравнения

$$(1 - \nu\mu)U(\mu) = \frac{\omega_0}{2} \int_0^1 K(\mu; \mu')U(\mu')d\mu', \quad (5.28)$$

где

$$K(\mu, \mu_0) = p(\mu, \mu_0) + 2\mu \int_0^1 \rho^\infty(\mu, \mu') p(-\mu', \mu_0) d\mu'. \quad (5.29)$$

Для перенормировки используется соотношение (5.14).

5.2.5. Заключение

Метод можно перенести на атмосферу, состоящую из нескольких однородных слоев — каждый с большой оптической толщиной. Более того, развитая теория позволяет получить простые и удобные формулы для различных интегральных величин, таких как потоки, плотность радиации и т. п.

Глава 6

Проблема аппроксимации индикатрисы рассеяния

6.1. АППРОКСИМАЦИЯ ПИКА ИНДИКАТРИСЫ В НАПРАВЛЕНИИ ВПЕРЕД

Для больших рассеивающих частиц индикатриса имеет очень острый пик вблизи угла рассеяния 0° (дифракционный пик); наличие этого пика требует использования большого числа членов в разложении (1.38) и увеличивает трудность решения уравнения переноса.

С большой степенью точности можно предположить, что радиация, рассеянная в этом пике, просто переносится в направлении падающего луча; в таком приближении пик в направлении вперед представляется дельта-функцией, и индикатриса принимает вид

$$p(\cos \vartheta) = 2f\delta(1 - \cos \vartheta) + \bar{p}(\cos \vartheta), \quad (6.1)$$

где δ — дельта-функция, а $\bar{p}(\cos \vartheta)$ — индикатриса без пика.

Один из подходов — отсечь пик «на глаз». Из условия нормировки (1.1) находим

$$2f = 2 - \int_{-1}^1 \bar{p}(\cos \vartheta) d(\cos \vartheta), \quad (6.2)$$

и перенормированная остаточная индикатриса будет иметь вид

$$p'(\cos \vartheta) = \frac{\bar{p}(\cos \vartheta)}{1 - f}. \quad (6.3)$$

Более формальный подход — использовать полиномы Лежандра в разложении индикатрисы в дельта-функции в выражении (6.1). Тогда

$$\beta_l = (2l + 1)f + (1 - f)\beta'_l, \quad (6.4)$$

где β и β'_l — коэффициенты Лежандра для $p(\cos \vartheta)$ и $p'(\cos \vartheta)$ соответственно.

Из уравнения (6.4) получаем $\beta'_0 = 1$, откуда следует корректирующая нормировка $p'(\cos \vartheta)$.

Ограничение разложения $p'(\cos \vartheta)$ на члене порядка L ($\beta'_l = 0$) при $l \geq L$ предполагает следующий выбор f :

$$f = \beta_L / (2L + 1), \quad (6.5)$$

что следует из выражения (6.4), если подставить туда $\beta'_L = 0$.

Введя уравнение (6.1) в уравнение переноса (1.23) или (1.26), находим решение эквивалентной задачи с усеченной и нормированной индикатрисой $p'(\theta)$ для атмосферы, где альbedo однократного рассеяния $\bar{\omega}_0$ и оптическая толщина τ' связаны с реальными величинами $\bar{\omega}_0$ и τ соотношениями

$$\bar{\omega}'_0 = \frac{\bar{\omega}_0(1-f)}{1-\bar{\omega}_0 f}, \quad (6.6)$$

$$\tau' = (1-\bar{\omega}_0 f)\tau. \quad (6.7)$$

В дельта-методе Эддингтона (см. п. 4.2) и дельта-двухпоточковом методе (см. п. 4.3) используются уравнения (6.1) и (6.3); разложение $p'(\cos \theta)$ при этом усекается на $L=2$. Соотношения подобия (см. п. 4.1) являются по сути дела частным случаем дельта-приближения индикатрисы с усечением $p'(\cos \theta)$ при $L=1$, что дает $f = \beta_1/3 = g$.

Интенсивность радиации, рассеянной под малыми углами, можно вычислить из индикатрисы, аппроксимированной одной или несколькими функциями Гаусса, т. е.

$$p(\theta) = \sum_{i=1}^l A_i \exp(-\alpha_i \theta^2) + \bar{p}(\cos \theta), \quad (6.8)$$

где A_i и α_i — константы, которые можно получить, приравняв четные моменты действительной индикатрисы и четные моменты приближенной индикатрисы. При больших углах индикатрису $\tilde{p}(\theta)$ можно разложить в ряды Лежандра с несколькими членами.

Гауссово приближение позволяет получить аналитические уравнения для интенсивности солнечной радиации, рассеянной под малыми углами:

$$I(\bar{\tau}, \psi) = \sum_{n=1}^N \frac{\bar{\tau}^n e^{-\bar{\tau}}}{4^n} \sum_{m=0}^n \sum_{l=0}^m \dots \frac{\exp(-\psi^2/\chi)}{\chi} \frac{(\tilde{A}_1 \alpha_1)^{n-m} (\tilde{A}_2 \alpha_2)^{m-l}}{(n-m)!(m-l)! \dots}, \quad (6.9)$$

где

$$\chi = (n-m)\alpha_1 + (m-l)\alpha_2 \dots; \quad \tilde{A}_1 = 4\pi A_1, \quad \tilde{A}_2 = 4\pi A_2, \dots,$$

$\bar{\tau} = \tau/\mu_0$; μ_0 — косинус солнечного зенитного угла;

$$\psi = \arcsin[\sin \theta / \cos(\theta \sqrt{1-\mu^2})];$$

θ — азимутальный угол (число членов, подлежащих суммированию, равно l).

Это уравнение можно решить с помощью калькулятора; можно также получить обратное уравнение и найти индикатрису по интенсивности многократно рассеянного света.

Для расчета интенсивности излучения в консервативном облаке с оптической толщиной $1 \leq \tau \leq 20$ использовалась индикатриса с $i=1$ и $\tilde{p}(\theta)$, разложенным в ряд с 10 полиномами Лежандра.

К дымке с $\tau \leq 2$ и $\mu_0 > 0,35$ применялась индикатриса с $i = 6$ и $\tilde{p} = 0$. Оказалось, что результаты с точностью до нескольких процентов совпадают с аналогичными значениями, рассчитанными методом удвоения (см. п. 3.10) при условии, что $\varphi < 35^\circ$.

6.2. РАЗЛИЧНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДЛЯ ИНДИКАТРИСЫ РАССЕЯНИЯ

Широко применяемое разложение по полиномам Лежандра описывается формулой (1.38). Его главное преимущество обсуждается в п. 1.8.

Для представления индикатрисы предлагались и другие аналитические выражения; чаще всего используются следующие:

1) индикатриса Хеньи—Гринштейна

$$p(\vartheta) = \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \vartheta)^{3/2}}, \quad (6.10)$$

где g — показатель асимметрии, заданный выражением (4.1);

2) двухпараметрическая индикатриса вида

$$p(\vartheta) = 4\alpha g (1 - g^2)^{2\alpha} [(1 + g)^{2\alpha} - (1 - g)^{2\alpha}]^{-1} (1 + g^2 - 2g \cos \vartheta)^{-(\alpha+1)} \quad (6.11)$$

(она сводится к индикатрисе (6.10) при $\alpha = 1/2$; это позволяет лучше описать сильно анизотропное рассеяние);

3) индикатриса Кагивады—Калабы

$$p(\vartheta) = \frac{k}{b - \cos \vartheta}, \quad (6.12)$$

где

$$k = 2 \left[\ln \left(\frac{b+1}{b-1} \right) \right]^{-1},$$

$$b = \frac{r+1}{r-1}, \quad (6.13)$$

$$r = \frac{p(0^\circ)}{p(180^\circ)};$$

это представление кажется нам менее удачным.

Сравнение результатов, вычисленных с помощью этих индикатрис, с точными значениями выявляют большие расхождения. Однако для радиации, излучаемой мощными слоями, аналитические функции дают результаты, которые для некоторых задач могут быть достаточно точными.

Глава 7.

Численное сравнение методов

Специальная Рабочая группа Комиссии по радиации сочла полезным завершить свои сообщения о «Стандартных процедурах по расчету переноса в рассеивающей атмосфере» некоторыми численными сравнениями различных методов.

Первая программа сравнений ограничивалась пятью простыми моделями однородной плоскопараллельной атмосферы: три модели описывали различные слои дымки, а две — мощные облачные слои. Программа представлена в п. 7.1.1 в том виде, в каком она была разослана предполагаемым участникам. В п. 7.1.2 приводятся и обсуждаются полученные результаты.

Вторая программа относится к более реальной атмосфере с молекулярным и аэрозольным рассеянием; она обсуждается в п. 7.2.1, а результаты приводятся в п. 7.2.2.

7.1. ОДНОРОДНЫЕ АТМОСФЕРЫ

7.1.1. Программа для численного сравнения методов

Задача. Дано:

- однородная плоскопараллельная атмосфера с оптической толщиной τ_1 и альbedo однократного рассеяния ω_0 ;
- подстилающая поверхность — черная;
- облучение солнечным пучком; направление $(\mu_0, 0)$; поток $\pi F = \pi$ ($F = 1$).

Рассматривается пять случаев:

Случай	Рассеивающий слой	τ_1	ω_0	μ_0
1	Дымка L	1	1	-1
2	Дымка L	1	0,9	-1
3	Дымка L	1	0,9	-0,5
4	Облако C_1	64	1,0	-1
5	Облако C_1	64	0,9	-1

Рассеивающие частицы описываются распределением по размерам $n(r)$ и показателем преломления $m = 1,33$. Следует рассчитать индикатрису на основе теории Ми для $\lambda = 0,7$ мкм.

Дымка * L : $N = 100$ см⁻³; $r_c = 0,07$ мкм; $n(r) = 4,9757 \times 10^6 r^2 \exp(-15,116 r^{1/2})$.

* r_c — модальный радиус. Он соответствует максимуму функции $n(r)$.

Облако C_1 : $N=100$ см⁻³; $r_c=4$ мкм; $n(r)=2,3730 r^6 \exp(-3/2 r)$.

Приводим выписки из указаний исследователям, участвовавшим в этой части работы.

«Для вашего удобства в табл. 1 приводятся соответствующие индикатрисы $p(\theta)$, а в табл. 2 — коэффициенты разложения по полиномам Лежандра для дымок.

Желательно получить следующее:

— поток $F(\tau)$

— интенсивность $I(\tau; \mu, \varphi)$ для $\tau=0, \tau_1/20, \tau_1/10, \tau_1/5, \tau/2, 3\tau_1/4, \tau_1$; $\mu=-1; -0,8; -0,6; -0,4; -0,2; 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1$; $\varphi=0,90, 180^\circ$ (для случая $\mu_0=-0,5$).

По возможности добейтесь точности 1 %; если это невозможно, дайте ожидаемую точность.

Сообщите полное время расчетов для каждого из пяти случаев и точные данные используемой ЭВМ.

Если Вы пользовались приближением индикатрисы, сформулируйте, пожалуйста, приближение».

7.1.2. Результаты

7.1.2.1. Светимость (или интенсивность)

Приведенные результаты (табл. 3—7) были получены следующими методами*:

— методом сферических гармоник (Дево: 5 случаев); (Фима: дымка L , случаи 1 и 2); (Карп: 5 случаев);

— методом дискретных ординат (Стемнес и Дейл: дымка L 3 случая);

— FN-методом (Дево: дымка L , 3 случая, $\tau=0, \tau_1$);

— конечно-разностным методом (Саттлз и Баркстром; 5 случаев);

— методом матричного оператора (Пласс и Каттавар: дымка L , случай 2);

— методом последовательных рассеяний (Квенцель: дымка L , 3 случая);

— методом Монте-Карло (Михайлов и Кузнецов: 5 случаев; Пласс и Каттавар: дымка L , 3 случая; Макки: облако C_1 , 2 случая);

— DART-методом (Уитни: дымка L , 3 случая);

— асимптотическим методом (Гермогенова и Коновалов: облако C_1 , 2 случая).

В табл. 3—7 приведены интенсивности $I(\tau; \mu)$ для пяти случаев: рассчитанные разными методами. Если метод использовался

* Результаты, полученные де Хааном методом удвоения, прибыли, к сожалению, слишком поздно и не могли быть включены в таблицы. Кроме того, результаты, полученные методом сферических гармоник и FN-методом, тоже опоздали и опубликованы в Benassi et al. (1984) и Garcia and Siewert (1984) (см. список литературы к п. 3.2 и 3.5).

ТАБЛИЦА 1. $\rho (\theta) = 1/2 (P_1 + P_2)$

θ	$\Gamma_1/4\pi$	$\Gamma_2/4\pi$	θ	$P_1/4\pi$	$\Gamma_2/4\pi$
Дымка L					
0,0	2,415	2,415	110,0	0,007271	0,004962
2,5	2,331	2,332	120,0	0,007076	0,004698
5,0	2,110	2,114	130,0	0,007671	0,004924
7,5	1,819	1,828	135,0	0,008289	0,005184
10,0	1,521	1,533	140,0	0,009115	0,005517
12,5	1,249	1,262	145,0	0,01009	0,005922
15,0	1,014	1,028	150,0	0,01109	0,006452
17,5	0,8189	0,8323	155,0	0,01182	0,007261
20,0	0,6596	0,6719	157,5	0,01198	0,007827
30,0	0,2816	0,2872	160,0	0,01190	0,008499
40,0	0,1286	0,1293	162,5	0,01151	0,009199
50,0	0,06442	0,06273	165,0	0,01076	0,009742
60,0	0,03550	0,03292	167,5	0,009716	0,009894
70,0	0,02147	0,01870	170,0	0,008617	0,009556
80,0	0,01425	0,01155	172,5	0,007999	0,009024
90,0	0,01037	0,007825	175,0	0,008362	0,008969
100,0	0,008275	0,005882	177,5	0,009428	0,009591
			180,0	0,01002	0,01002
Облако C ₁					
0,0	133,7	133,7	125,0	0,005708	0,002335
1,0	91,25	91,30	127,5	0,006005	0,002638
2,0	35,94	36,01	130,0	0,007082	0,003284
3,0	10,54	10,56	132,5	0,009155	0,004304
4,0	3,900	3,881	135,0	0,01349	0,005633
5,0	2,152	2,112	137,5	0,02131	0,006496
6,0	1,483	1,448	140,0	0,03073	0,006559
7,0	1,140	1,107	142,5	0,03710	0,005579
8,0	0,9335	0,9062	145,0	0,03581	0,004549
9,0	0,8009	0,7765	147,5	0,02503	0,006995
10,0	0,7092	0,6887	150,0	0,01447	0,01133
15,0	0,4684	0,4624	152,5	0,01043	0,01377
25,0	0,2440	0,2530	155,0	0,01088	0,01356
35,0	0,1242	0,1361	157,5	0,01161	0,01267
45,0	0,06121	0,07150	160,0	0,01117	0,01294
55,0	0,02894	0,03683	162,0	0,01074	0,01324
65,0	0,01417	0,01847	164,0	0,01042	0,01393
75,0	0,007188	0,009110	166,0	0,01005	0,01498
85,0	0,004092	0,004565	168,0	0,01029	0,01641
95,0	0,002788	0,002652	170,0	0,01081	0,01863
105,0	0,002416	0,002064	172,0	0,01142	0,02128
107,5	0,002410	0,002007	174,0	0,01518	0,02772
110,0	0,002711	0,002038	175,0	0,01871	0,03480
112,5	0,003195	0,002020	176,0	0,02524	0,04374
115,0	0,003854	0,002053	177,0	0,03317	0,04672
117,5	0,004508	0,002046	178,0	0,03666	0,02947
120,0	0,005096	0,002064	179,0	0,04170	0,02698
122,5	0,005509	0,002131	180,0	0,05055	0,05055

Примечание. P_1 и P_2 из D. Deirmendjian (1969). Electromagnetic Scattering on Spherical Polydispersions.—Elsevier (Пер. с англ.: Д. Дейрменджан. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами. — М.: Мир, 1971).

ТАБЛИЦА 2. $p(\theta) = \sum_{l=0}^L \beta_l P_l(\cos \theta)$, дымка $L: L = 50$

l	β_l	l	β_l
0	1,000000000	26	0,047271098
1	2,412569352	27	0,036174453
2	3,230284584	28	0,031790819
3	3,372619044	29	0,023850873
4	3,230904905	30	0,021270572
5	2,892624280	31	0,015620157
6	2,494764726	32	0,014127594
7	2,112119958	33	0,010136496
8	1,746318359	34	0,009290186
9	1,444832236	35	0,006496147
10	1,174739386	36	0,006023510
11	0,963794295	37	0,004079676
12	0,779478141	38	0,003810597
13	0,638056510	39	0,002455582
14	0,516396858	40	0,002294023
15	0,422216264	41	0,001344100
16	0,343353712	42	0,001250220
17	0,279888320	43	0,000604627
18	0,229480563	44	0,000596397
19	0,185896503	45	0,000220111
20	0,154108346	46	0,000275776
21	0,123618953	47	0,000074326
22	0,103846187	48	0,000133432
23	0,082214820	49	0,000012332
24	0,070085358	50	0,000063550
25	0,054611541		

ТАБЛИЦА 3. Яркость, случай 1: дымка L , $\tau_1 = 1$, $\bar{\omega}_0 = 1$, $\mu_0 = -1$

τ	μ	Метод										Конечных разностей				
		сферических гармоник					дискретных ординат		последовательного рассеяния		FN		DART		Монте-Карло	
		Д	Ф	К	СД	Кв	СД	Кв	Кв	Кв	МК	ПК				
0	1	3,620-2*	3,613-2	3,604-2	3,600-2	3,653-2	3,612-2	4,23-2	3,50-2	3,59-2	3,462-2					
	0,8	4,299-2	4,273-2	4,267-2	4,272-2	4,312-2	4,273-2	5,27-2	4,21-2	4,16-2	4,284-2					
	0,6	5,608-2	5,582-2	5,577-2	5,587-2	5,590-2	5,583-2	6,13-2	5,51-2	5,43-2	5,594-2					
	0,4	7,883-2	7,814-2	7,815-2	7,820-2	7,806-2	7,816-2	6,98-2	7,76-2	7,79-2	7,816-2					
	0,2	9,762-2	9,703-2	9,715-2	9,709-2	9,672-2	9,709-2	7,63-2	9,60-2	9,91-2	9,712-2					
	0		7,059-2	7,018-2	6,986-2	6,950-2	6,989-2	7,76-2		6,87-2	7,397-2					
0,05	1	3,444-2	3,424-2	3,433-2	3,421-2	3,468-2	3,432-2	3,80-2	3,34-2	3,45-2						
	0,8	4,100-2	4,078-2	4,084-2	4,083-2	4,095-2	4,084-2	4,70-2	4,01-2	3,85-2						
	0,6	5,424-2	5,399-2	5,405-2	5,409-2	5,404-2	5,405-2	5,49-2	5,34-2	5,10-2						
	0,4	7,812-2	7,745-2	7,744-2	7,749-2	7,723-2	7,745-2	6,35-2	7,71-2	7,51-2						
	0,2	1,011-1	1,005-1	1,004-1	1,004-1	9,991-2	1,004-1	7,18-2	1,00-1	9,87-2						
	0	8,45-2	8,478-2	8,437-2	8,463-2	8,403-2	8,467-2	7,42-2		8,37-2						
	-0,2	1,629-2	1,650-2	1,644-2	1,648-2	1,627-2	1,649-2	1,47-2	1,60-2	1,68-2						
	-0,4	1,110-2	1,120-2	1,117-2	1,118-2	1,114-2	1,119-2	1,109-2	1,12-2	1,09-2						
	-0,6	1,417-2	1,422-2	1,420-2	1,420-2	1,422-2	1,421-2	1,40-2	1,43-2	1,37-2						
	-0,8	3,192-2	3,196-2	2,196-2	3,195-2	3,204-2	3,196-2	3,36-2	3,36-2	3,12-2						
	-1	3,634-1	3,649-1	3,649-1	3,582-1	3,625-1	3,635-1	3,49-1	3,48-1	3,63-1						
0,10	1	3,256-2	3,250-2	3,241-2	3,239-2	3,284-2	3,249-2	3,53-2	3,13-2	3,31-2						
	0,8	3,904-2	3,888-2	3,882-2	3,886-2	3,899-2	3,887-2	4,38-2	3,80-2	3,74-2						
	0,6	5,222-2	5,206-2	5,201-2	5,210-2	5,208-2	5,206-2	5,20-2	5,15-2	5,02-2						
	0,4	7,689-2	7,626-2	7,626-2	7,630-2	7,668-2	7,626-2	6,18-2	7,59-2	7,47-2						
	0,2	1,038-1	1,028-1	1,028-1	1,028-1	1,023-1	1,028-1	7,26-2	1,02-1	1,01-1						
	0	9,44-2	9,417-2	9,427-2	9,413-2	9,368-2	9,417-2	7,71-2		8,19-2						

* 3,62-10-2

Метод

τ	μ	сферических гармоник						дискретных ординат		последовательно-го рассеяния		FN	DART	Монте-Карло		конечных разностей
		Д	Ф	К	СД	Кв	СД	Кв	МК	ПК						
											МК			ПК		
0,10	-0,2	3,200-2	3,222-2	3,231-2	3,225-2	3,201-2	3,229-2	2,81-2	3,23-2	3,02-2						
	-0,4	2,249-2	2,263-2	2,267-2	2,262-2	2,250-2	2,265-2	2,19-2	2,30-2	2,16-2						
	-0,6	2,841-2	2,846-2	2,848-2	2,845-2	2,850-2	2,846-2	2,81-2	2,91-2	2,85-2						
	-0,8	6,286-2	6,295-2	6,295-2	6,295-2	6,313-2	6,295-2	6,62-2	6,72-2	6,46-2						
	-1	6,973-1	6,975-1	7,002-1	6,994-1	6,959-1	6,975-1	6,69-1	6,75-1	6,98-1						
	1	2,885-2	2,880-2	2,873-2	2,870-2	2,911-2	2,880-2	3,13-2	2,77-2	2,96-2						
	0,8	3,488-2	3,477-2	3,472-2	3,475-2	3,490-2	3,477-2	3,92-2	3,40-2	3,34-2						
	0,6	4,772-2	4,760-2	4,756-2	4,764-2	4,764-2	4,760-2	4,86-2	4,72-2	4,52-2						
0,20	0,4	7,329-2	7,271-2	7,271-2	7,275-2	7,259-2	7,271-2	6,17-2	7,23-2	6,86-2						
	0,2	1,063-1	1,055-1	1,056-1	1,055-1	1,051-1	1,055-1	7,88-1	1,05-1	9,82-2						
	0	1,09-1	1,088-1	1,088-1	1,087-1	1,082-1	1,087-1	8,88-2	1,05-1	2,67-1						
	-0,2	6,044-2	6,074-2	6,080-2	6,070-2	6,046-2	6,076-2	5,44-2	6,22-2	5,71-2						
	-0,4	4,548-2	4,575-2	4,580-2	4,570-2	4,572-2	4,576-2	4,55-2	4,72-2	4,54-2						
	-0,6	5,676-2	5,688-2	5,692-2	5,685-2	5,699-2	5,688-2	5,72-2	5,84-2	5,55-2						
	-0,8	1,219-1	1,221-1	1,221-1	1,221-1	1,225-1	1,221-1	1,20-1	1,30-1	1,23-1						
	-1	1,284 0	1,284 0	1,289 0	1,291 0	1,282 0	1,284 0	1,23 0	1,24 0	1,29 0						
0,5	1	1,761-2	1,762-2	1,757-2	1,756-2	1,782-2	1,762-2	1,84-2	1,72-2	1,64-2						
	0,8	2,156-2	2,160-2	2,157-2	2,160-2	2,172-2	2,160-2	2,39-2	2,12-2	2,15-2						
	0,6	3,117-2	3,118-2	3,116-2	3,121-2	3,126-2	3,119-2	3,42-2	3,09-2	3,05-2						
	0,4	5,414-2	5,373-2	5,374-2	5,376-2	5,372-2	5,374-2	5,36-2	5,39-2	5,09-2						
	0,2	9,896-2	9,837-2	9,846-2	9,837-2	9,820-2	9,839-2	8,93-2	9,92-2	9,05-2						
	0	1,36-1	1,358-2	1,359-1	1,357-1	1,355-1	1,358-1	1,26-1	1,26-1	5,65-2						
	-0,2	1,239-1	1,244-1	1,245-1	1,242-1	1,242-1	1,244-1	1,27-1	1,23-1	1,08-1						
	-0,4	1,118-1	1,123-1	1,124-1	1,122-1	1,124-1	1,123-1	1,23-1	1,15-1	1,02-1						
0,5	-0,6	1,388-1	1,391-1	1,391-1	1,390-1	1,395-1	1,391-1	1,48-1	1,43-1	1,32-1						
	-0,8	2,769-1	2,772-1	2,772-1	2,772-1	2,784-1	2,772-1	3,00-1	2,93-1	2,75-1						
	-1	2,512 0	2,513 0	2,552 0	2,511 0	2,613 0	2,513 0	2,41 0	2,42 0	2,52 0						

Метод

τ	μ	сферических гармоник						дискрет- ных оди- нат	последо- вательно- го рассея- ния		FN	DART	Монте-Карло		конечных разностей
		Д	Ф	К	СД	Кв	МК		ПК						
										К			Кв		
0,75	1	8,482-3	8,524-3	8,499-3	8,493-3	8,616-3	8,521-3	8,18-3	8,19-3	8,48-3					
	0,8	1,017-2	1,040-2	1,038-2	1,039-2	1,046-2	1,039-2	1,08-2	1,04-2	1,19-2					
	0,6	1,537-2	1,536-2	1,535-2	1,538-2	1,541-2	1,536-2	1,79-2	1,56-2	1,71-2					
	0,4	2,930-2	2,912-2	2,913-2	2,914-2	2,911-2	2,913-2	3,38-2	2,99-2	3,32-2					
	0,2	6,834-2	6,798-2	6,805-2	6,799-2	6,783-2	6,800-2	7,16-2	7,04-2	7,58-2					
	0	1,43-1	1,428-1	1,429-1	1,427-1	1,428-1	1,428-1	1,54-1	1,61-1	1,12-1					
	-0,2	1,579-1	1,589-1	1,591-1	1,588-1	1,590-1	1,589-1	1,78-1	1,61-1	1,51-1					
	-0,4	1,604-1	1,609-1	1,610-1	1,607-1	1,612-1	1,609-1	1,86-1	1,64-1	1,47-1					
	-0,6	2,012-1	2,015-1	2,016-1	2,014-1	2,023-1	2,015-1	2,20-1	2,08-1	1,89-1					
	-0,8	3,824-1	3,828-1	3,828-1	3,828-1	3,786-1	3,828-1	4,19-1	4,00-1	3,70-1					
	-1	3,981 0	3,082 0	3,093 0	3,085 0	3,087 0	3,089 0	2,96 0	2,97 0	3,08 0					
1	0	1,160-1	1,153-1	1,157-1	1,157-1	1,152-1	1,148-1	1,74-1	1,82-1	1,72-1				1,214-1	
	-0,2	1,761-1	1,767-1	1,769-1	1,767-1	1,772-1	1,768-1	2,22-1	2,06-1	1,91-1				1,772-1	
	-0,4	1,994-1	2,000-1	2,002-1	1,999-1	2,008-1	2,000-1	2,52-1	2,46-1	2,001-1				2,001-1	
	-0,6	2,557-1	2,560-1	2,561-1	2,559-1	2,574-1	2,560-1	2,96-1	2,62-1	2,46-1				2,562-1	
	-0,8	4,682-1	4,687-1	4,687-1	4,687-1	4,717-1	4,687-1	5,29-1	4,91-1	4,67-1				4,687-1	
	-1	3,368-1	3,370 0	3,380 0	3,370 0	3,380 0	3,369 0	3,25 0	3,25 0	3,40 0				3,492 0	

ТАБЛИЦА 4. Яркость, случай 2: дымка $L_{1T} = 1$, $\bar{\omega}_0 = 0,9$, $\mu_0 = -1$

τ	μ	Метод										Монте-Карло		конечных разностей
		сферических гармоник					последовательного рассеяния	FN	матричного оператора	DART		МК	ПК	
		Д	Ф	К	СД	Кв								
0	1	2,794-2	2,795-2	2,788-2	2,784-2	2,881-2	2,795-2	2,789-2	3,28-2	2,70-2	2,83-2	2,654-2		
	0,8	3,145-2	3,144-2	3,139-2	3,143-2	3,166-2	3,144-2	3,14-2	4,01-2	3,09-2	3,23-2	3,149-2		
	0,6	3,913-2	3,912-2	3,908-2	3,918-2	3,935-2	3,913-2	3,911-2	4,64-2	3,86-2	4,01-2	3,919-2		
	0,4	5,347-2	5,350-2	5,351-2	5,359-2	5,369-2	5,352-2	5,33-2	5,34-2	5,33-2	5,62-2	5,349-2		
	0,2	6,691-2	6,692-2	6,701-2	6,702-2	6,698-2	6,696-2	6,66-2	6,06-2	6,66-2	7,03-2	6,694-2		
	0	5,221-2	5,196-2	5,177-2	5,168-2	5,175-2			6,32-2		4,75-2	5,447-2		
0,05	1	2,656-2	2,656-2	2,649-2	2,646-2	2,688-2	2,657-2	2,651-2	2,96-2	2,57-2	2,69-2			
	0,8	3,007-2	3,006-2	3,002-2	3,006-2	3,018-2	3,007-2	3,00-2	3,59-2	3,94-2	3,12-2			
	0,6	3,789-2	3,789-2	3,784-2	3,792-2	3,794-2	3,789-2	3,788-2	4,17-2	3,74-2	3,90-2			
	0,4	5,295-2	5,298-2	5,298-2	5,306-2	5,287-2	5,299-2	5,28-2	4,88-2	5,30-2	5,54-2			
	0,2	6,904-2	6,905-2	6,912-2	6,912-2	6,875-2	6,906-2	6,90-2	5,69-2	6,93-2	7,23-2			
	0	6,16-2	6,151-2	6,180-2	6,173-2	6,132-2	6,172-2		6,08-2		5,70-2			
	-0,2	1,306-2	1,306-2	1,311-2	1,309-2	1,296-2	1,310-2	1,32-2	1,22-2	1,27-2	1,30-2			
	-0,4	9,52-3	9,519-3	9,538-3	9,522-3	9,504-3	9,530-3	9,52-3	9,47-3	9,53-3	9,51-3			
	-0,6	1,252-2	1,253-2	1,254-2	1,253-2	1,254-2	1,253-2	1,252-2	1,25-2	1,26-2	1,253-2			
	-0,8	2,856-2	2,856-2	2,857-2	2,857-2	2,864-2	2,856-2	2,92-2	3,01-2	3,01-2	2,86-2			
	-1	3,268-1	3,268-1	3,281-1	3,268-1	3,260-1	3,268-1	3,27-1	3,13-1	3,12-1	3,28-1			
0,10	1	2,515-2	2,516-2	2,510-2	2,507-2	2,544-2	2,516-2	2,511-2	2,76-2	2,41-2	2,56-2			
	0,8	2,864-2	2,863-2	2,859-2	2,863-2	2,875-2	2,864-2	2,86-2	3,35-2	2,79-2	2,94-2			
	0,6	3,651-2	3,651-2	3,647-2	3,656-2	3,656-2	3,652-2	3,650-2	3,96-2	3,60-2	3,78-2			
	0,4	5,211-2	5,214-2	5,214-2	5,221-2	5,205-2	5,215-2	5,20-2	4,76-2	5,20-2	5,56-2			
	0,2	7,049-2	7,051-2	7,056-2	7,056-2	7,023-2	7,051-2	7,03-2	5,77-2	7,05-2	7,71-2			
	0	6,80-2	6,802-2	6,810-2	6,803-2	6,766-2	6,802-2	6,34-2	6,34-2	7,43-2	7,43-2			
	-0,2	2,529-2	2,530-2	2,536-2	2,533-2	2,517-2	2,534-2	2,54-2	2,32-2	2,55-2	2,55-2			

τ	μ	Метод										Монте-Карло		конечных разностей							
		сферических гармоник					дискретных ординат		последовательного рас- сеяния		FN	матричного опе- ратора	DART		МК	ПК					
		Д	Ф	К	СД	Кв	СД	Кв													
									Д	Ф	К	СД	Кв								
0,10	-0,4	1,906	-2	1,906	-2	1,909	-2	1,905	-2	1,904	-2	1,907	-2	1,90	-2	1,88	-2	1,94	-2	1,89	-2
	-0,6	2,490	-2	2,491	-2	2,493	-2	2,490	-2	2,495	-2	2,491	-2	2,490	-2	2,49	-2	2,55	-2	2,46	-2
	-0,8	5,602	-2	5,602	-2	5,603	-2	5,603	-2	5,619	-2	5,603	-2	5,73	-2	5,92	-2	5,98	-2	5,58	-2
	-1	6,265	-1	6,266	-1	6,290	-1	6,265	-1	6,251	-1	6,266	-1	6,276	-2	6,00	-1	6,06	-2	6,30	-1
0,20	1	2,232	-2	2,233	-2	2,227	-2	2,224	-2	2,258	-2	2,233	-2	2,228	-2	2,44	-2	2,14	-2	2,24	-2
	0,8	2,566	-2	2,566	-2	2,562	-2	2,565	-2	2,578	-2	2,566	-2	2,56	-2	3,00	-2	2,49	-2	2,60	-2
	0,6	3,343	-2	3,342	-2	3,339	-2	3,347	-2	3,349	-2	3,343	-2	3,341	-2	3,70	-2	3,29	-2	3,40	-2
	0,4	4,966	-2	4,968	-2	4,969	-2	4,975	-2	4,964	-2	4,969	-2	4,95	-2	4,76	-2	4,93	-2	5,16	-2
	0,2	7,202	-2	7,204	-2	7,210	-2	7,209	-2	7,183	-2	7,204	-2	7,19	-2	6,29	-2	7,16	-2	7,65	-2
	0	7,75	-2	7,750	-2	7,756	-2	7,748	-2	7,716	-2	7,747	-2			7,35	-2			7,18	-2
	-0,2	4,673	-2	4,676	-2	4,682	-2	4,675	-2	4,661	-2	4,678	-2	4,71	-2	4,46	-2	4,81	-2	4,70	-2
	-0,4	3,777	-2	3,776	-2	3,781	-2	3,775	-2	3,777	-2	3,777	-2	3,78	-2	3,85	-2	3,90	-2	3,71	-2
	-0,6	4,905	-2	4,907	-2	4,911	-2	4,905	-2	4,917	-2	4,907	-2	4,906	-2	5,01	-2	5,04	-2	4,88	-2
	-0,8	1,077	-1	1,077	-1	1,077	-1	1,077	-1	1,081	-1	1,077	-1	1,10	-1	1,14	-1	1,15	-1	1,084	-1
	-1	1,152	0	1,152	0	1,156	0	1,152	0	1,150	0	1,152	0	1,15	0	1,10	0	1,11	0	1,160	0
0,5	1	1,374	-2	1,374	-2	1,371	-2	1,369	-2	1,390	-2	1,374	-2	1,372	-2	1,41	-2	1,33	-2	1,36	-2
	0,8	1,610	-2	1,609	-2	1,607	-2	1,609	-2	1,620	-2	1,609	-2	1,60	-2	1,78	-2	1,57	-2	1,63	-2
	0,6	2,210	-2	2,209	-2	2,207	-2	2,212	-2	2,218	-2	2,210	-2	2,208	-2	2,54	-2	2,18	-2	2,30	-2
	0,4	3,683	-2	3,685	-2	3,686	-2	3,690	-2	3,687	-2	3,686	-2	3,68	-2	4,01	-2	4,68	-2	3,86	-2
	0,2	6,668	-2	6,669	-2	6,676	-2	6,673	-2	6,662	-2	6,671	-2	6,68	-2	6,88	-2	6,73	-2	6,80	-2
	0	9,40	-2	9,399	-2	9,410	-2	9,399	-2	9,387	-2	9,401	-2			1,02	-1			1,13	-1
	-0,2	9,155	-2	9,159	-2	9,168	-2	9,155	-2	9,153	-2	9,160	-2	9,16	-2	1,02	-1	9,14	-2	9,48	-2
	-0,4	8,834	-2	8,833	-2	8,841	-2	8,828	-2	8,848	-2	8,834	-2	8,84	-2	1,00	-1	9,05	-2	8,87	-2
	-0,6	1,153	-1	1,153	-1	1,154	-1	1,153	-1	1,157	-1	1,153	-1	1,153	-1	1,25	-1	1,19	-1	1,15	-1
	-0,8	2,385	-1	2,385	-1	2,385	-1	2,385	-1	2,395	-1	2,385	-1	1,40	-1	2,60	-1	2,52	-1	2,38	-1
	-1	2,240	0	2,240	0	2,248	0	2,240	0	2,239	0	2,240	0	2,235	0	2,12	-1	2,16	0	2,24	0

τ	μ	Метод										Конечных разностей	
		сферических гармоник			дискретных ординат		последовательного рас-сеяния		FN	матричного опе-ратора	DART	Монте-Карло	
		Д	Ф	К	СД	Кв	МК	ПК					
0,75	1	6,699-3	6,699-3	6,681-3	6,676-3	6,779-3	6,700-3	6,19-3	6,42-3	6,48-3	6,42-3	6,48-3	
	0,8	7,86-3	7,852-3	7,840-3	7,852-3	7,913-3	7,854-3	7,87-3	7,81-3	8,14-3	7,81-3	8,14-3	
	0,6	1,106-2	1,106-2	1,105-2	1,108-2	1,111-2	1,106-2	1,29-2	1,12-2	1,15-2	1,12-2	1,15-2	
	0,4	2,021-2	2,022-2	2,023-2	2,026-2	2,024-2	2,023-2	2,45-2	2,07-2	2,00-2	2,07-2	2,00-2	
	0,2	4,628-2	4,629-2	4,634-2	4,632-2	4,623-2	4,631-2	5,31-2	4,79-2	4,75-2	4,79-2	4,75-2	
	0	9,75-2	9,750-2	9,758-2	9,747-2	9,751-2	9,749-2	1,22-1		1,07-1		1,07-1	
	-0,2	1,138-1	1,138-1	1,139-1	1,138-1	1,139-1	1,138-1	1,41-1	1,15-1	1,11-1	1,15-1	1,11-1	
	-0,4	1,225-1	1,225-1	1,226-1	1,224-1	1,228-1	1,225-1	1,48-1	1,25-1	1,20-1	1,25-1	1,20-1	
	-0,6	1,622-1	1,662-1	1,623-1	1,622-1	1,629-1	1,622-1	1,82-1	1,65-1	1,61-1	1,65-1	1,61-1	
	-0,8	3,266-1	3,226-1	3,226-1	3,226-1	3,242-1	3,226-1	3,56-1	3,38-1	3,23-1	3,38-1	3,23-1	
	-1	2,731 0	2,732 0	2,741 0	2,731 0	2,735 0	2,732 0	2,57 0	2,63 0	2,73 0	2,63 0	2,73 0	
1	0			8,002-2	7,969-2	7,991-2	7,932-2	1,38-1			7,49-2	8,340-2	
	-0,2	1,241-1	1,242-1	1,243-1	1,242-1	1,247-1	1,242-1	1,24-1	1,28-1	1,30-1	1,28-1	1,245-1	
	-0,4	1,483-1	1,483-1	1,484-1	1,482-1	1,491-1	1,483-1	1,48-1	1,52-1	1,54-1	1,52-1	1,483-1	
	-0,6	2,007-1	2,007-1	2,007-1	2,007-1	2,019-1	2,007-1	2,007-1	2,06-1	2,04-1	2,06-1	2,008-1	
	-0,8	3,869-1	3,869-1	3,870-1	3,870-1	3,893-1	3,869-1	3,93-1	4,06-1	3,91-1	4,06-1	3,870-1	
	-1	2,967 0	2,967 0	2,977-1	2,967 0	2,975 0	2,967 0	2,972 0	2,86 0	2,98 0	2,86 0	3,077 0	

ТАБЛИЦА 5. Яркость, случай 3: дымка L , $\tau_1 = 1$, $\bar{\omega}_0 = 0,9$, $\mu_0 = -0,5$, $\varphi = 0$

τ	μ	Метод										конечных разностей
		сферических гармоник		дискретных операторов СД	последова- тельного рассеяния Кв	FN	DART	Монте-Карло		МК	ПК	
		Д	К									
0	1	2,281-2	2,280-2	2,286-2	2,278-2	2,282-2	5,87-2	2,37-2	2,27-2	2,279-2		
	0,8	6,500-2	6,505-2	6,498-2	6,462-2	6,501-2	1,32-2	6,40-2	6,74-2	6,482-2		
	0,6	1,510-1	1,511-1	1,510-1	1,501-1	1,510-1	1,85-1	1,50-2	1,56-1	1,486-1		
	0,4	3,292-1	3,294-1	3,293-1	3,274-1	3,294-1	2,70-1	3,33-1	3,33-1	3,257-1		
	0,2	6,564-1	6,568-1	6,569-1	6,522-1	6,569-1	4,91-1	6,70-1	6,56-1	6,550-1		
	0		1,032-1	1,032-1	1,030-1	1,032-1	1,07-1		1,02-1	1,067-1		
	0,05	1	2,141-2	2,140-2	2,145-2	2,139-2	2,142-2	5,01-2	2,20-2	2,15-2		
	0,8	6,131-2	6,135-2	6,128-2	6,099-2	6,131-2	1,10-1	6,00-2	6,39-2			
	0,6	1,441-1	1,442-1	1,440-1	1,434-1	1,441-1	1,56-1	1,43-1	1,49-1			
	0,4	3,202-1	3,203-1	3,202-1	3,188-1	3,202-1	2,33-1	3,23-1	3,25-1			
0,2	6,585-1	6,585-1	6,584-1	6,557-1	6,584-1	4,37-1	6,70-1	6,60-1				
0	1,145-0	1,148-0	1,148-0	1,147-0	1,148-0	9,78-1		1,18-0				
-0,2	5,084-1	5,087-1	5,099-1	5,070-1	5,089-1	4,78-1	5,15-1	5,20-1				
-0,4	6,385-1	6,385-1	6,386-1	6,356-1	6,386-1	6,17-1	6,40-1	6,42-1				
-0,6	4,182-1	4,182-1	4,183-1	4,171-1	4,183-1	4,05-1	4,18-1	4,19-1				
-0,8	8,648-2	8,646-2	8,649-2	8,663-2	8,649-2	9,15-2	9,50-2	8,68-2				
-1	5,076-3	5,067-3	5,069-3	5,070-3	5,072-3	5,33-3	5,10-3	5,05-3				
0,10	1	1,999-2	1,998-2	2,002-2	1,997-2	1,999-2	4,50-2	2,04-2	2,01-2			
	0,8	5,741-2	5,744-2	5,738-2	5,712-2	5,740-2	9,79-2	5,60-2	5,99-2			
	0,6	1,363-1	1,364-1	1,363-1	1,358-1	1,364-1	1,42-1	1,34-1	1,42-1			
	0,4	3,081-1	3,081-1	3,080-1	3,069-1	3,081-1	2,17-1	3,07-1	3,15-1			
	0,2	6,496-1	6,495-1	6,495-1	6,473-1	6,495-1	4,15-1	6,45-1	6,56-1			
	0	1,188-0	1,188-0	1,188-0	1,188-0	1,188-0	9,26-1	1,19-0	6,56-1			
	-0,2	9,068-1	9,070-1	9,074-1	9,053-1	9,074-1	8,21-1	9,10-1	9,17-0			
	-0,4	1,169-0	1,169-0	1,169-0	1,164-0	1,169-0	1,11-0	1,15-0	1,18-0			
	-0,6	7,781-1	7,780-1	7,781-1	7,759-1	7,781-1	7,46-1	7,65-1	7,80-1			
	-0,8	1,652-1	1,651-1	1,652-1	1,655-1	1,652-1	1,73-1	1,78-1	1,66-1			
-1	1,011-2	1,013-2	1,011-2	1,012-2	1,012-2	1,11-2	1,00-2	9,97-3				

τ	μ	Метод									
		сферических гармоник		дискретных операторов СД	последовательного рассения Кв	FN	DART	Монте-Карло		конечных разностей	
		Д	К					МК	ПК		
0,20	1	1,715-2	1,715-2	1,719-2	1,714-2	1,716-2	3,76-2	1,69-2	1,72-2		
	0,8	4,941-2	4,944-2	4,939-2	4,918-2	4,941-2	8,12-2	4,83-2	5,07-2		
	0,6	1,196-1	1,196-1	1,196-1	1,192-1	1,197-1	1,22-1	1,19-1	1,23-1		
	0,4	2,789-1	2,789-1	2,789-1	2,779-1	2,789-1	1,98-1	2,81-1	2,84-1		
	0,2	6,152-1	6,152-1	6,152-1	6,134-1	6,152-1	3,96-1	6,10-1	6,22-1		
	0	1,193 0	1,194 0	1,194 0	1,194 0	1,194 0	8,69-1		1,13 0		
	-0,2	1,438 0	1,438 0	1,438 0	1,436 0	1,438 0	1,24 0	1,42 0	1,45 0		
	-0,4	1,958 0	1,957 0	1,958 0	1,950 0	1,958 0	1,82 0	1,93 0	1,96 0		
	-0,6	1,346 0	1,346 0	1,346 0	1,343 0	1,346 0	1,27 0	1,32 0	1,34 0		
	-0,8	3,010-1	3,009-1	3,010-1	3,016-1	3,010-1	3,16-1	3,22-1	3,01-1		
	-1	2,004-2	2,006-2	2,003-2	2,007-1	2,004-2	2,42-2	1,99-2	1,93-2		
	0,5	1	9,344-3	9,340-3	9,364-3	9,340-3	9,348-3	1,87-2	8,75-3	5,54-3	
0,8		2,661-2	2,663-2	2,660-2	2,650-2	2,661-3	3,98-2	2,59-2	9,70-2		
0,6		6,811-2	6,815-2	6,211-2	6,784-2	6,812-2	7,06-2	6,85-2	7,10-2		
0,4		1,752-1	1,752-1	1,752-1	1,745-1	1,752-1	1,35-1	1,82-1	1,81-1		
0,2		4,514-1	4,514-1	4,515-1	4,501-1	4,515-1	3,23-1	4,71-1	4,56-1		
0		1,009 0	1,008 0	1,009 0	1,008 0	1,009 0	7,60-1		1,07 0		
-0,2		1,826 0	1,826 0	1,826 0	1,825 0	1,826 0	1,49 0	1,78 0	1,85 0		
-0,4		2,873 0	2,873 0	2,873 0	2,862 0	2,873 0	2,58 0	2,79 0	2,88 0		
-0,6		2,184 0	2,184 0	2,184 0	2,178 0	2,184 0	2,04 0	2,13 0	2,19 0		
-0,8		5,696-1	5,695-1	5,697-1	5,705-1	5,696-1	6,14-1	6,00-1	5,74-1		
-1		4,760-2	4,765-2	4,759-2	4,772-2	4,761-2	7,21-2	4,75-2			
0,75		1	4,023-3	4,021-3	4,034-3	4,020-3	4,025-3	7,10-3	3,76-3	4,09-3	
	0,8	1,102-2	1,103-2	1,102-2	1,097-2	1,102-2	1,46-2	1,06-2	1,14-2		
	0,6	2,949-2	2,952-2	2,951-2	2,934-2	2,951-2	3,07-2	2,92-2	3,15-2		
	0,4	8,407-2	8,412-2	8,411-2	8,364-2	8,411-2	6,94-2	8,55-2	8,82-2		
	0,2	2,661-1	2,661-1	2,662-1	2,649-1	2,662-1	2,02-1	2,74-1	2,73-1		
	0	7,95-1	7,956-1	7,958-1	7,949-1	7,957-1	6,72-1		8,39-1		
	-0,2	1,613 0	1,612 0	1,613 0	1,612 0	1,613 0	1,33 0	1,59 0	1,62 0		
	-0,4	2,778 0	2,778 0	2,778 0	2,768 0	2,778 0	2,46 0	2,69 0	2,76 0		
	-0,6	2,295 0	2,295 0	2,295 0	2,289 0	2,295 0	2,13 0	2,23 0	2,28 0		

τ	μ	Метод										конечных разностей	
		сферических гармоник		дискретных операторов СД	последова- тельно рассеяния Кв	FN	Монте-Карло		DART	Монте-Карло			
		Д	К				МК	ПК					
1	-0,8	6,787-1	6,785-1	6,787-1	6,795-1	6,787-1	7,45-0	7,05 0	6,76-1	7,45-0	7,05 0	6,76-1	5,465-1
	-1	6,734-2	6,740-2	6,733-2	6,754-2	6,736-2	1,10-1	6,75-2	6,68-1	1,10-1	6,75-2	6,68-1	1,296 0
	0		5,242-1	5,277-1	5,231-1	5,242-1	5,85-1		5,23-1	5,85-1		5,23-1	2,404 0
	-0,2	1,291 0	1,291 0	1,291 0	1,289 0	1,291 0	1,14 0	1,26 0	1,31 0	1,14 0	1,26 0	1,31 0	2,165 0
	-0,4	2,401 0	2,401 0	2,401 0	2,392 0	2,401 0	2,16 0	2,31 0	2,42 0	2,16 0	2,31 0	2,42 0	7,197-1
	-0,6	2,153 0	2,153 0	2,153 0	2,148 0	2,154 0	2,04 0	2,07 0	2,16 0	2,04 0	2,07 0	2,16 0	8,351-2
	-0,8	7,199-1	7,198-1	7,200-1	7,206-1	7,200-1	8,27-1	7,40-1	7,21-1	8,27-1	7,40-1	7,21-1	
	-1	8,375-2	8,382-2	8,373-2	8,403-2	8,377-2	1,47-1	8,35-2	8,30-2	1,47-1	8,35-2	8,30-2	
0	1	2,281-2	2,280-2	2,286-2	2,278-2	2,282-2	5,92-2	2,37-2	Нет	5,92-2	2,37-2	Нет	2,285-2
	0,8	3,230-2	3,232-2	3,237-2	3,205-2	3,233-2	7,99-2	3,32-2	данных	7,99-2	3,32-2	данных	3,239-2
	0,6	4,751-2	4,754-2	4,757-2	4,696-2	4,752-2	9,65-2	4,73-2		9,65-2	4,73-2		4,759-2
	0,4	6,927-2	6,933-2	6,934-2	6,827-2	6,930-2	1,11-1	6,85-2		1,11-1	6,85-2		6,926-2
	0,2	8,926-2	8,947-2	8,944-2	8,780-2	8,942-2	1,22-1	8,65-2		1,22-1	8,65-2		8,942-2
0,05	0		6,792-2	6,761-2	6,660-2	6,761-2	1,17-1			1,17-1			7,213-2
	1	2,141-2	2,140-2	2,145-2	2,139-2	2,142-2	5,23-2	2,20-2		5,23-2	2,20-2		
	0,8	3,053-2	3,054-2	3,058-2	3,030-2	3,055-2	7,08-2	3,12-2		7,08-2	3,12-2		
	0,6	4,544-2	4,546-2	4,549-2	4,495-2	4,545-2	8,63-2	4,47-2		8,63-2	4,47-2		
	0,4	6,768-2	6,773-2	6,773-2	6,767-2	6,769-2	1,01-1	6,60-2		1,01-1	6,60-2		
	0,2	9,081-2	9,097-2	9,093-2	8,948-2	9,091-2	1,14-1	8,80-2		1,14-1	8,80-2		
	0	8,13-2	8,171-2	8,161-2	8,038-2	8,159-2	1,12-1			1,12-1			
	-0,2	1,406-2	1,414-2	1,413-2	1,380-2	1,413-2	1,63-2	1,34-2		1,63-2	1,34-2		
	-0,4	6,931-3	6,970-3	6,962-3	7,054-3	6,967-3	8,09-3	6,85-3		8,09-3	6,85-3		
	-0,6	5,113-3	5,114-3	5,106-3	5,155-3	5,111-3	5,60-3	5,35-3		5,60-3	5,35-3		
	-0,8	4,709-3	4,715-3	4,707-3	4,697-3	4,712-3	6,02-3	5,10-3		6,02-3	5,10-3		
	-1	5,067-3	5,076-3	5,069-3	5,079-3	5,072-1	5,36-3	5,10-3		5,36-3	5,10-3		
0,10	1	1,999-2	1,998-2	2,002-2	1,997-2	1,999-2	4,70-2	2,04-2		4,70-2	2,04-2		
	0,8	2,867-2	2,868-2	2,872-2	2,847-2	2,869-2	6,36-2	2,93-2		6,36-2	2,93-2		
	0,6	4,316-2	4,317-2	4,320-2	4,270-2	4,316-2	7,34-2	4,25-2		7,34-2	4,25-2		

φ = 90°

τ	μ	сферических гармоник		дискретных операторов СД	последовательного рассеяния Кв	FN	DART	Монте-Карло		конечных разностей
		Д	К					МК	ПК	
0,20	0,4	6,555-2	6,559-2	6,559-2	6,468-2	6,556-2	9,44-2	6,35-2		
	0,2	9,110-2	9,122-2	9,119-2	8,979-2	9,117-2	1,11-1	8,80-2		
	0	8,92-2	8,930-2	8,932-2	8,797-2	8,924-2	1,14-1			
	-0,2	2,752-2	2,762-2	2,759-2	2,711-2	2,760-2	3,13-2	2,50-2		
	-0,4	1,419-2	1,425-2	1,423-2	1,442-2	1,424-2	1,67-2	1,33-2		
	-0,6	1,043-2	1,043-2	1,042-2	1,052-2	1,043-2	1,20-2	1,03-2		
	-0,8	9,503-3	9,514-3	9,498-3	9,484-3	9,506-3	1,07-2	9,80-3		
	-1	1,011-2	1,013-2	1,011-2	1,012-2	1,012-2	1,11-2	1,00-2		
	1	1,715-2	1,715-2	1,719-2	1,714-2	1,716-2	3,79-2	1,69-2		
	0,8	2,487-2	2,488-2	2,491-2	2,470-2	2,488-2	5,11-2	2,50-2		
	0,6	3,822-2	3,824-2	3,826-2	3,784-2	3,823-2	6,48-2	3,75-2		
	0,4	6,025-2	6,029-2	6,029-2	5,948-2	6,027-2	8,30-2	5,75-2		
	0,2	8,933-2	8,944-2	8,941-2	8,808-2	8,939-2	1,07-1	8,50-2		
	0	9,84-2	9,845-2	9,834-2	9,706-2	9,838-2	1,20-1			
	-0,2	5,088-2	5,095-2	5,090-2	5,023-2	5,091-2	6,96-2	4,67-2		
-0,4	2,878-2	2,885-2	2,881-2	2,911-2	2,883-2	3,62-2	2,67-2			
-0,6	2,130-2	2,130-2	2,127-2	2,144-2	2,128-2	2,75-2	2,06-2			
-0,8	1,915-2	1,917-2	1,912-2	1,912-2	1,915-2	2,44-2	1,96-2			
-1	2,004-2	2,006-2	2,003-2	2,007-2	2,004-2	2,43-2	1,99-2			
1	9,344-3	9,340-3	9,364-3	9,340-3	9,348-3	2,14-2	8,75-3			
0,8	1,377-2	1,385-2	1,388-2	1,377-2	1,386-2	2,96-2	1,36-2			
0,6	2,249-2	2,250-2	2,251-2	2,228-2	2,250-2	4,27-2	2,17-2			
0,4	3,954-2	3,957-2	3,957-2	3,905-2	3,955-2	6,73-2	3,70-2			
0,2	7,178-2	7,186-2	7,184-2	7,078-2	7,183-2	1,14-1	6,50-2			
0	1,034-1	1,035-1	1,035-1	1,021-1	1,035-1	1,68-1				
-0,2	9,286-2	9,295-2	9,288-2	9,183-2	9,290-2	1,50-1	8,50-2			
-0,4	6,676-2	6,685-2	6,679-2	6,697-2	6,681-2	1,15-1	6,40-2			
-0,6	5,241-2	5,242-2	5,236-2	5,253-2	5,239-2	9,61-2	5,10-2			
-0,8	4,684-2	4,688-2	4,682-2	4,677-2	4,684-2	8,39-2	4,70-2			
-1	4,760-2	4,765-2	4,759-2	4,772-2	4,761-2	7,66-2	4,75-2			

τ	Метод										конечных разностей
	сферических гармоник					дискретных операторов СД	последова- тельного рассеяния Кв	FN	Монте-Карло		
	Д	К			МК				ПК		
0,4	5,320-2	5,307-2	5,308-2	5,255-2	5,322-2	4,82-2	4,93-2				
0,2	7,042-2	7,016-2	7,021-2	6,947-2	7,036-2	5,50-2	6,60-2				
0	6,21-2	6,209-2	6,221-2	6,947-2	6,230-2	5,26-2					
-0,2	9,361-3	9,430-3	9,401-3	9,207-3	9,408-3	7,43-3	7,90-3				
-0,4	3,667-2	3,673-3	3,679-3	3,830-3	3,672-3	3,25-3	3,32-3				
-0,6	2,096-2	2,110-3	2,115-3	2,184-3	2,110-3	2,10-3	2,00-3				
-0,8	1,719-3	1,725-3	1,724-3	1,712-3	1,724-3	1,97-3	1,69-3				
-1	5,067-4	5,076-3	5,069-3	5,070-3	5,072-3	5,36-3	5,10-2				
0,10	1,999-2	1,998-2	2,002-2	1,997-2	1,999-2	4,88-2	2,04-2				
0,8	2,827-2	2,882-2	2,824-2	2,815-2	2,828-2	3,80-2	2,72-2				
0,6	3,718-2	3,708-2	3,709-2	3,688-2	3,719-2	4,08-2	3,51-2				
0,4	5,112-2	5,099-2	5,101-2	5,051-2	5,114-2	4,50-2	4,72-2				
0,2	6,920-2	6,895-2	6,900-2	6,828-2	6,913-2	5,26-2	6,55-2				
0	6,55-2	6,532-2	6,541-2	6,476-2	6,552-2	5,14-2					
-0,2	1,793-2	1,796-2	1,798-2	1,770-2	1,798-2	1,36-2	1,55-3				
-0,4	7,458-3	7,438-3	7,461-3	7,750-3	7,451-3	6,61-3	6,75-3				
-0,6	4,299-3	4,316-3	4,329-3	4,459-3	4,320-3	4,58-3	4,02-3				
-0,8	3,501-3	3,510-3	3,510-3	3,490-3	3,506-3	4,41-3	3,34-3				
-1	1,011-2	1,013-2	1,011-2	1,012-2	1,012-2	1,11	1,00-2				
0,20	1,715-2	1,715-2	1,719-2	1,714-2	1,716-2	3,88-2	1,69-2				
0,8	2,450-2	2,446-2	2,448-2	2,440-2	2,451-2	3,03-2	2,33-2				
0,6	3,284-2	3,277-2	3,278-2	3,260-2	3,286-2	3,32-2	3,04-2				
0,4	4,640-2	4,629-2	4,631-2	4,586-2	4,642-2	3,84-2	4,15-2				
0,2	6,556-2	6,536-2	6,540-2	6,470-2	6,552-2	4,80-2	5,80-2				
0	6,81-2	6,795-2	6,801-2	6,728-2	6,810-2	5,02-2					
-0,2	3,186-2	3,182-2	3,183-2	3,150-2	3,189-2	2,42-2	2,97-2				
-0,4	1,481-2	1,477-2	1,482-2	1,528-2	1,480-2	1,41-2	1,38-2				
-0,6	8,797-3	8,813-3	8,841-3	9,056-3	8,823-3	1,09-2	8,30-3				
-0,8	7,147-3	7,161-3	7,162-3	7,129-3	7,159-3	1,08-2	6,90-3				
-1	2,004-2	2,006-2	2,003-2	2,007-2	2,005-2	2,44-2	1,99-2				

τ	μ	Метод										конечных разностей
		сферических гармоник		дискретных операторов СД	последова- тельного рассеяния Кв	FN	DART	Монте-Карло		МК	ПК	
		Д	К									
0,5	1	9,344-3	9,340-3	9,364-3	9,340-3	9,348-3	2,16-2	8,75-3	2,16-2	8,75-3		
	0,8	1,389-2	1,386-2	1,387-2	1,384-2	1,389-2	1,81-2	1,31-2	1,81-2	1,31-2		
	0,6	1,915-2	1,947-2	1,948-2	1,938-2	1,952-2	2,18-2	1,81-2	2,18-2	1,81-2		
	0,4	2,986-2	2,979-2	2,981-2	2,953-2	2,987-2	3,00-2	2,75-2	3,00-2	2,75-2		
	0,2	4,912-2	4,899-2	4,903-2	4,843-2	4,911-2	4,74-2	4,34-2	4,74-2	4,34-2		
	0	6,39-2	6,378-2	6,387-2	6,302-2	6,393-2	6,48-2		6,48-2			
	-0,2	5,270-2	5,260-2	5,271-2	5,206-2	5,271-2	5,81-2	4,60-2	5,81-2	4,60-2		
	-0,4	3,247-2	3,240-2	3,250-2	3,293-2	3,247-2	4,70-2	2,83-2	4,70-2	2,83-2		
	-0,6	2,145-2	2,147-2	2,153-2	2,176-2	2,149-2	4,29-2	1,88-2	4,29-2	1,88-2		
	-0,8	1,796-2	1,797-2	1,798-2	1,790-2	1,796-2	4,30-2	1,67-2	4,30-2	1,67-2		
	-1	4,760-2	4,765-2	4,759-2	4,772-2	4,761-2	7,61-2	4,75-2	7,61-2	4,75-2		
	1	4,023-3	4,021-3	4,034-3	4,020-3	4,025-3	7,79-3	3,76-3	7,79-3	3,76-3		
0,8	6,241-3	6,228-3	6,235-3	6,226-3	6,244-3	6,86-3	5,95-3	6,86-3	5,95-3			
0,6	0,014-3	8,997-3	9,000-3	8,964-3	9,020-3	9,22-3	8,85-3	9,22-3	8,85-3			
0,4	1,476-2	1,473-2	1,474-2	1,460-2	1,477-2	1,54-2	1,47-2	1,54-2	1,47-2			
0,2	2,290-2	2,914-2	2,916-2	2,875-2	2,920-2	3,17-2	2,86-2	3,17-2	2,86-2			
0	5,39-2	5,382-2	5,390-2	5,306-2	5,393-2	6,96-2		6,96-2				
-0,2	5,564-2	5,553-2	5,556-2	5,484-2	5,565-2	7,67-2	5,10-2	7,67-2	5,10-2			
-0,4	4,126-2	4,117-2	4,129-2	4,144-2	4,125-2	7,33-2	3,76-2	7,33-2	3,76-2			
-0,6	2,993-2	2,994-2	3,002-2	3,012-2	2,997-2	7,22-2	2,80-2	7,22-2	2,80-2			
-0,8	2,611-2	2,613-2	2,614-2	2,600-2	2,612-2	7,34-2	2,54-2	7,34-2	2,54-2			
-1	6,734-2	7,740-2	6,733-2	6,754-2	6,736-2	1,17-1	6,75-2	1,17-1	6,75-2			
0		3,537-2	3,453-2	3,362-2	3,422-2	8,62-2		8,62-2				
-0,2	5,066-2	5,062-2	5,069-2	4,974-2	5,069-2	1,07-1	4,73-2	1,07-1	4,73-2			
-0,4	4,480-2	4,473-2	4,485-2	4,466-2	4,480-2	1,13-2	4,17-2	1,13-2	4,17-2			
-0,6	3,590-2	3,599-2	3,598-2	3,589-2	3,593-2	1,16-1	3,35-2	1,16-1	3,35-2			
-0,8	3,296-2	3,299-2	3,300-2	3,278-2	3,298-2	1,16-1	3,20-2	1,16-1	3,20-2			
-1	8,375-2	8,382-2	8,373-2	8,403-2	8,377-2	1,65-1	8,35-2	1,65-1	8,35-2			
1												3,620-2
												5,078-2
												4,477-2
												3,595-2
												3,282-2
												8,350-2

ТАБЛИЦА 6. Яркость, случай 4: облако C_1 , $\tau_1 = 64$, $\bar{\omega}_0 = 1$, $\mu_0 = -1$

τ	μ	Метод						
		сферических гармоник		Монте-Карло		асимптотического приближения	конечных разностей	
		Д	К	МК	МКК			
0	1	1,042 0	1,044 0	1,05 0			1,03 0	2,359—0
	0,8	9,538—1	9,526—1	9,47—1	9,36—1		9,45—1	9,354—1
	0,6	8,254—1	8,258—1	7,88—1	8,29—1		8,21—1	8,049—1
	0,4	7,113—1	7,122—1	7,88—1	7,23—1		7,09—1	6,911—1
	0,2	5,584—1	5,602—1	5,91—1	5,47—1		5,57—1	5,548—1
	0		2,872—1				2,50—1	3,210—1
3,2	1	1,005 0	1,006 0	1,04 0				
	0,8	9,974—1	9,979—1	1,04 0				
	0,6	9,777—1	9,789—1	8,16—1				
	0,4	9,564—1	9,579—1	8,32—1				
	0,2	9,242—1	9,256—1	1,11 0				
	0	8,78—1	8,788—1					
	-0,2	8,170—1	8,179—1	6,30—1				
	-0,4	7,529—1	7,552—1	4,94—1				
	-0,6	7,366—1	7,364—1	5,13—1				
	-0,8	8,848—1	8,884—1	6,80—1				
	-1	2,866 0	8,045—1	1,22—2				
6,4	1	9,622—1	9,627—1	9,50—1			9,64—1	
	0,8	9,766—1	9,775—1	9,99—1			9,88—1	
	0,6	9,876—1	9,887—1	9,59—1			1,01 0	
	0,4	9,969—1	9,981—1	9,55—1			1,04 0	
	0,2	1,003 0	1,004 0	1,17 0			1,06 0	
	0	1,004 0	1,005 0				1,08 0	
	-0,2	1,000 0	1,002 0	9,09—1			1,11 0	
	-0,4	9,950—1	9,966—1	1,06 0			1,13 0	
	-0,6	1,004 0	1,006 0	1,03 0			1,15 0	
	-0,8	1,084 0	1,086 0	1,15 0			1,18 0	
	-1	1,840 0	1,174—1	1,15—1			1,20 0	
12,8	1	8,571—1	8,580—1	9,27—1			8,53—1	
	0,8	8,795—1	8,803—1	9,52—1			8,77—1	
	0,6	9,016—1	9,023—1	8,51—1			9,01—1	
	0,4	9,235—1	9,242—1	9,90—1			9,24—1	
	0,2	9,451—1	9,457—1	9,66—1			9,48—1	
	0	9,662—1	9,669—1				9,72—1	
	-0,2	9,870—1	9,876—1	9,99—1			9,95—1	
	-0,4	1,008 0	1,008 0	9,26—1			1,02 0	
	-0,6	1,029 0	1,030 0	1,07 0			1,04 0	
	-0,8	1,059 0	1,059 0	9,35—1			1,07 0	
	-1	1,144 0	1,260 0	1,27 0			1,09 0	
32	1	5,237—1	5,243—1	5,59—1			5,21—1	
	0,8	5,467—1	5,473—1	4,69—1			5,44—1	
	0,6	5,697—1	5,702—1	4,49—1			5,68—1	
	0,4	5,928—1	5,932—1	7,91—1			5,92—1	
	0,2	6,158—1	6,161—1	5,95—1			6,15—1	
	0	6,388—1	6,391—1				6,39—1	
	-0,2	6,618—1	6,620—1	6,78—1			6,63—1	
	-0,4	6,848—1	6,850—1	8,87—1			6,86—1	
	-0,6	7,079—1	7,079—1	7,30—1			7,10—1	
	-0,8	7,309—1	7,308—1	7,20—1			7,33—1	
	-1	7,540—1	7,538—1	7,45—1			7,57—1	

τ	μ	Метод					
		сферических гармоник		Монте-Карло		асимптотического приближения	конечных разностей
		Д	К	МК	МкК		
48	1	2,455—1	2,459—1	2,73—1		2,44—1	
	0,8	2,684—1	2,687—1	2,42—1		2,67—1	
	0,6	2,914—1	2,917—1	3,07—1		2,92—1	
	0,4	3,145—1	3,146—1	2,25—1		3,14—1	
	0,2	3,375—1	3,376—1	4,35—1		3,38—1	
	0	3,605—1	3,605—1			3,62—1	
	-0,2	3,835—1	3,835—1	3,30—1		3,85—1	
	-0,4	4,065—1	4,064—1	4,50—1		4,09—1	
	-0,6	4,294—1	4,296—1	3,65—1		4,33—1	
	-0,8	4,526—1	4,523—1	4,08—1		4,56—1	
64	-1	4,756—1	4,753—1	3,93—1		4,80—1	
	0		4,027—2		9,3—2	4,04—2	5,007—2
	-0,2	8,926—2	8,908—2	7,45—2	1,27—1	9,18—2	8,832—2
	-0,4	1,189—1	1,185—1	1,27—1	1,36—1	1,22—1	1,173—1
	-0,6	1,458—1	1,453—1	1,25—1	1,64—1	1,50—1	1,448—1
	-0,8	1,713—1	1,708—1	1,63—1		1,76—1	1,718—1
	-1	1,961—1	1,955—1	1,50—1		2,01—1	1,965—1

ТАБЛИЦА 7. Яркость, случай 5: облако C_1 , $\tau_1 = 64$, $\bar{\omega}_0 = 0,9$, $\mu_0 = -1$

τ	μ	Метод					
		сферических гармоник		Монте-Карло		асимптотического приближения	конечных разностей
		Д	К	МК	МкК		
0	1	1,903—1	1,938—1	1,83—1		1,84—1	1,989—0
	0,8	1,557—1	1,546—1	1,60—1	1,31—1	1,48—1	1,540—1
	0,6	1,069—1	1,069—1	8,76—2	1,08—1	1,03—1	1,004—1
	0,4	9,376—2	9,417—2	8,82—2	9,55—2	9,06—2	8,620—2
	0,2	7,871—2	7,981—2	7,27—2	5,97—2	7,65—2	7,201—2
	0		6,514—2			3,99—2	4,814—2
	3,2	1	8,643—2	8,489—2	1,09—1		
3,2	0,8	8,505—2	8,476—2	1,30—1			
	0,6	8,359—2	8,380—2	8,17—2			
	0,4	9,154—2	9,197—2	7,69—2			
	0,2	1,049—1	1,052—1	1,12—1			
	0	1,242—1	1,241—1				
	-0,2	1,508—1	1,506—1	1,15—1			
	-0,4	1,904—1	1,910—1	1,78—1			
	-0,6	2,643—1	2,630—1	2,31—1			
	-0,8	4,455—1	4,476—1	4,12—1			
	-1	2,085 0	6,924—1	1,07+2			
6,40	1	4,147—2	4,117—2	3,70—2		4,18—2	
	0,8	4,376—2	4,369—2	3,77—2		4,63—2	
	0,6	4,760—2	4,768—2	3,60—2		5,36—2	
	0,4	5,527—2	5,540—2	6,17—2		6,40—2	
	0,2	6,711—2	6,726—2	5,76—2		8,21—2	
	0	8,44—2	8,457—2			1,08—1	

τ	μ	Метод					
		сферических гармоник		Монте-Карло		асимптотического приближения	конечных разностей
		Д	К	МК	МКК		
	-0,2	1,093-1	1,094-1	8,32-2			
	-0,4	1,456-1	1,457-1	1,66-1			
	-0,6	2,027-1	2,025-1	2,33-1			
	-0,8	3,112-1	3,112-1	3,37-1			
	-1	8,713-1	8,938-0	8,74 0			
12,8	1	9,538-3	9,501-3	1,22-2		9,54-3	
	0,8	1,044-2	1,041-2	1,02-2		1,06-2	
	0,6	1,193-2	1,911-2	1,15-2		1,22-2	
	0,4	1,430-2	1,428-2	1,30-2		1,48-1	
	0,2	1,788-2	1,786-2	1,91-2		1,87-2	
	0	2,31-2	2,311-?			2,45-2	
	-0,2	3,083-2	3,076-2	2,36-2		3,30-2	
	-0,4	4,204-2	4,191-2	2,23-2		4,54-2	
	-0,6	5,868-2	5,846-2	4,91-2		6,35-2	
	-0,8	8,480-2	8,440-2	8,50-2		9,04-2	
	-1	1,453-1	2,230-1	2,30-1		1,31-1	
32	1	1,096-4	1,084-4	7,19-5		1,14-4	
	0,8	1,207-4	1,195-4	8,20-5		1,26-4	
	0,6	1,393-4	1,379-4	1,08-4		1,46-4	
	0,4	1,681-4	1,665-4	1,39-4		1,77-4	
	0,2	2,116-4	2,095-4	1,31-4		2,23-4	
	0	2,75-4	2,727-4			2,92-4	
	-0,2	3,69-4	3,649-4	1,29-3		3,93-4	
	-0,4	5,055-4	4,997-4	5,52-4		5,40-4	
	-0,6	7,064-4	6,976-4	6,21-4		7,56-4	
	-0,8	1,005-3	9,919-4	1,72-3		1,08-3	
	-1	1,460-3	1,438-3	1,22-3		1,56-3	
48	1	2,632-6	2,587-6	2,68-6		2,83-6	
	0,8	2,900-6	2,853-6	1,85-6		3,13-6	
	0,6	3,347-6	3,293-6	2,94-6		3,63-6	
	0,4	4,042-6	3,977-6	2,27-6		4,40-6	
	0,2	5,086-6	5,003-6	2,31-6		5,56-6	
	0	6,62-6	6,513-6			7,28-6	
	-0,2	8,871-6	8,718-6	9,02-6		9,78-6	
	-0,4	1,216-5	1,196-5	8,94-6		1,34-5	
	-0,6	1,698-5	1,667-5	2,30-5		1,88-5	
	-0,2	2,417-5	2,369-5	2,78-5		2,68-5	
	-1	3,506-5	3,433-5	5,18-5		3,89-5	
64	0		7,864-7			9,06-8	1,77-7
	-0,2	1,799-7	1,757-7	8,62-8	2,11-47	2,09-7	3,11-7
	-0,4	2,703-7	2,637-7	1,61-7	1,77-30	3,13-7	5,04-7
	-0,6	3,928-7	3,829-7	2,72-7	5,20-20	4,53-7	7,56-7
	-0,8	5,694-7	5,546-7	7,54-7	4,72-17	6,53-7	1,27-6
	-1	8,336-7	8,110-7	2,77-7		9,56-7	1,943-6

разными авторами, то мы приводим инициалы авторов. Значения, выделенные жирным шрифтом, получены интерполяцией между двумя соседними вычисленными значениями μ , однако интерполяция проводилась только в случае очень близких значений.

Для случаев 1, 2 и 3 (дымка L) мы располагаем результатами, полученными четырьмя точными методами (сферические гармоники, дискретные ординаты, последовательное рассеяние, FN-метод). Кроме того, три различных автора применяли метод сферических гармоник для случаев 1 и 2 и два автора — для случая 3. Различие между этими результатами никогда не превышало 1%, а иногда было менее 0.1%; большинство случаев различается в пределах нескольких десятых процента. Для случая 2 представлены также результаты, полученные методом матричного оператора; основное внимание мы уделяли сравнению в точках $\mu = \pm 1$ и $\mu = \pm 0,6$, для которых интерполяция не проводилась. Как оказалось, согласие с другими методами находится в пределах от одной до нескольких десятых процента. Конечно-разностный метод дает результаты только на границе слоя; и в этом случае значения совпадают с другими результатами до нескольких десятых процента за исключением точек $\mu = 1, 0, -1$, где ошибка может достигать нескольких процентов, что, несомненно, объясняется применением экстраполяции.

Мы можем сделать вывод, что по меньшей мере пять методов позволяют при правильном использовании получить результаты с точностью 1%, что на практике более чем достаточно. По-видимому, для достижения такой точности затраты машинного времени на средних ЭВМ составляют, как правило, от 20 с до нескольких минут. Но мы отказались от идеи сравнения затрат машинного времени, так как это вовлечет нас в сложные сравнения характеристик ЭВМ. Далее заметим, что все методы включают какой-либо вид дискретизации. Меняя порядок приближения, можно получить лучшие результаты за счет увеличения времени вычислений; можно добиться существенного выигрыша во времени либо просто за счет совершенствования процедуры расчета, либо допуская большие ошибки в нескольких особых точках. Некоторая информация о связи между точностью и затратами машинного времени обычно содержится в описании метода. За более подробной информацией читатель может обратиться к оригинальным публикациям.

Следует ожидать, что метод Монте-Карло и DART-метод дадут менее точные результаты. В табл. 8 приведены для случая 2 ошибки, полученные при использовании метода Монте-Карло и DART-метода, которые определялись по отношению к средним значениям, полученным пятью «точными» методами. Согласие между двумя сериями результатов по методу Монте-Карло вполне удовлетворительно. Ошибка составляет обычно около нескольких процентов, иногда меньше; в исключительных случаях она приближается к 10%. По мнению обоих авторов, можно увеличить точность за счет увеличения машинного времени. Что касается самого машинного времени, оно имеет тот же порядок, что и при использо-

ТАБЛИЦА 8. Ошибка (%) по отношению к среднему значению результатов, полученных с помощью шести точных методов*; случай 2: дымка L , $\tau_1 = 1$, $\bar{\omega}_0 = 0,9$, $\mu_0 = -1$

τ	μ	„Точные“ осредненные значения	Ошибка, %		
			Монте-Карло		DART
			ПК	МК	
0	1	2,798—2	1,1	—3,5	17
	0,8	3,147—2	2,6	—1,8	27
	0,6	3,917—2	2,4	—1,4	19
	0,4	5,353—2	5,0	—0,4	—0,2
	0,2	6,697—2	15,0	—0,5	—9,5
	0	5,187—2	—8,4	/	22
0,05	1	2,658—2	1,2	—3,3	11
	0,8	3,008—2	3,7	—2,2	19
	0,6	3,790—2	2,9	—1,3	10
	0,4	5,297—2	4,6	0,1	—7,9
	0,2	6,902—2	4,7	0,4	—18
	0	6,161—2	—7,5	/	—1,3
	—0,2	1,306—2	—0,5	—2,8	—6,6
	—0,4	9,52—3	—0,1	0,1	—0,5
	—0,6	1,253—2	0	0,6	—0,2
	—0,8	2,858—2	0,1	5,3	5,3
	—1	3,269—2	0,3	—4,6	—4,2
0,1	1	2,518—2	1,7	—4,3	9,6
	0,8	2,865—2	2,6	—2,6	17
	0,6	3,652—2	3,5	—1,4	8,4
	0,4	5,213—2	6,6	—0,3	—8,7
	0,2	7,048—2	9,4	0	—18
	0	6,797—2	9,3	/	—6,7
	—0,2	2,530—2	0,8	0,8	—8,3
	—0,4	1,906—2	—0,8	1,8	—1,4
	—0,6	2,492—2	—1,3	2,3	—0,1
	—0,8	5,605—2	—0,5	6,7	5,6
	—1	6,267—2	0,5	—3,3	—4,3

* „Точные“ методы — метод сферических гармоник (данные трех авторов), дискретных ординат, последовательного рассеяния, DART-метод.

τ	μ	«Точные» средненные значения	Ошибка, %		
			Монте-Карло		DART
			ПК	МК	
0,2	1	2,235—2	0,2	—4,2	9,2
	0,8	2,567—2	1,3	—3,0	17
	0,6	3,344—2	1,7	—1,6	11
	0,4	4,969—2	3,9	—0,8	—4,2
	0,2	7,202—2	6,2	—0,6	—13
	0	7,745—2	—7,3	/	—5,1
	—0,2	4,674—2	0,6	2,9	—4,6
	—0,4	3,777—2	—1,8	3,3	1,9
	—0,6	4,909—2	—0,6	2,7	2,1
	—0,8	1,078—1	0,6	6,7	5,8
	—1	1,152—1	0,7	—3,7	—4,5
0,5	1	1,375—2	—1,1	—3,3	2,5
	0,8	1,611—2	1,2	—2,5	11
	0,6	2,211—2	4,0	—1,4	15
	0,4	3,686—2	5,3	—0,2	8,8
	0,2	6,670—2	2,0	0,9	3,2
	0	9,399—2	20	/	8,6
	—0,2	9,158—2	3,5	—0,2	11
	—0,4	8,836—2	0,4	2,4	13
	—0,6	1,154—2	—0,3	3,1	8,3
	—0,8	2,387—2	—0,3	5,6	8,9
	—1	2,241—2	—0,1	—3,6	—5,4
0,75	1	6,706—3	—3,4	—4,3	—7,7
	0,8	7,862—3	3,5	—0,7	0,1
	0,6	1,107—2	3,9	1,2	17
	0,4	2,073—2	1,8	2,3	21
	0,2	4,630—2	2,6	3,5	15
	0	9,751—2	9,7	/	25
	0,2	1,138—1	—2,5	1,0	24
	—0,4	1,226—1	—2,1	2,0	21
	—0,6	1,623—1	—0,8	1,6	12
	—0,8	3,229—1	0	4,7	10
	—1	2,734—1	—0,1	—3,8	—6,0
1	0	7,972—2	—6,0	/	73
	—0,2	1,243—1	4,6	3,0	41
	—0,4	1,484—1	3,8	2,4	33
	—0,6	2,009—1	1,5	2,5	20
	—0,8	3,873—1	0,9	4,8	14
	—1	2,970—1	0,3	—3,7	—6,1

вании других методов с менее точными результатами. Однако известно, что для плоскопараллельных атмосфер метод Монте-Карло в этом отношении проигрывает. Во всяком случае, главная область его применения относится к более сложным случаям, где другие методы неэффективны, поэтому важно было подтвердить высокую точность метода. DART-метод тоже был предназначен для приложения к реальным неплоскопараллельным атмосферам. Точность его очень сильно меняется: в некоторых точках ошибка составляет несколько процентов или менее того, а в исключительных случаях — до 20 % и даже более; в первом приближении можно установить ее равной примерно 10 %. Уитни отмечает, что фактическая ошибка практически постоянна для таких наборов данных, как сканирование лимба, так что для отношений сравниваемых сигналов точность существенно повышается. Вычислительное время, по-видимому, немного меньше, чем при использовании метода Монте-Карло.

В случае с облаками появляются две дополнительные трудности: большая оптическая толщина и сильно вытянутый пик индикатрисы. Поэтому для сравнения было предоставлено меньше результатов (см. табл. 6 и 7).

В методе сферических гармоник машинное время почти не зависит от оптической толщины. Результаты представлены различными авторами. Дево аппроксимировал облачную индикатрису суммой дельта-функций и разложением остатка по 36 полиномам Лежандра. Поэтому в направлении вперед ($\mu = -1$) для малых значений оптической толщины результаты неверны. Сравнение с результатами Карпа дает ошибку при $\mu = -1$ — при $\tau = 12,8$ она составляет 10 % для $\bar{\omega}_0 = 1$ (случай 4) и 40 % для $\bar{\omega}_0 = 0,9$ (случай 5); при $\tau = 32$ эти ошибки уменьшаются соответственно до 0,03 и 3 %. Для $\bar{\omega}_0 = 0,9$ и больших значений толщины ($\tau = 48,64$) интенсивность радиации становится очень малой и расхождение между двумя наборами результатов может достигать нескольких процентов. В других случаях расхождение между двумя наборами результатов не превышает нескольких десятых процента, как в случае с дымкой L .

При использовании метода Монте-Карло не возникает затруднений с вытянутым пиком индикатрисы, и качество результатов, полученных для $\mu = -1$ и малой оптической толщины, превосходят качество результатов, полученных с помощью метода сферических гармоник с отсечением переднего пика. Однако при большой оптической толщине вычислительное время становится очень большим.

Наконец, в случае больших значений оптической толщины естественно применять асимптотический метод. Конечно, при малой оптической толщине к нему нельзя прибегать, особенно в случае нисходящей радиации. В консервативном случае ($\bar{\omega}_0 = 1$) при сравнении с методом сферических гармоник для уходящей радиации на уровне $\tau = 0$ и для всего поля радиации на уровне $\tau = 6,4$

и ниже расхождение всегда составляет менее 10 %, а обычно — около 1 %. Для случая 5 ($\bar{\omega}_0 = 0,9$) ошибка, как правило, составляет от 5 до 10 %.

К сожалению, проведенное выше сравнение не коснулось некоторых полезных и широко используемых методов. Определенную информацию о них можно получить, рассматривая их аналоги с описанными методами. Так, метод удвоения основан на тех же принципах, что и метод матричного оператора, хотя численные процедуры обоих методов весьма различны; итерацию Гаусса—Зейделя можно приблизительно сравнить с методом последовательных порядков рассеяния; при большой оптической толщине в обоих методах возникают одинаковые трудности, однако в отличие от вычислительного времени в методе последовательного рассеяния время итерации не зависит от величины $\bar{\omega}_0$.

7.1.2.2. Поток

Поток можно получить либо интегрированием яркости излучения, рассчитанной описанными выше методами, либо так называемыми приближенными методами, с помощью которых поток получают непосредственно. Большинство перечисленных методов включали значения потока. Кроме того, только для расчета потоков использовались следующие методы.

- удвоения (Вискомб: 5 случаев);
- дискретных ординат (Лиоу: 5 случаев, поток при $\tau = 0$ и только $\tau = \tau_1$);
- последовательного рассеяния (Кершгенс, Рашке и Пилц: дымка L , 3 случая);

Сравнение по пяти случаям выполнялось для большого числа приближенных методов:

- Эддингтона (Ирвин и Эспозито; Шеттл);
- Эддингтона с принципами подобия (Шеттл);
- дельта-метод Эддингтона (Вискомб; Боннел);
- стандартного двухпотокового (Ирвин и Эспозито);
- модифицированного двухпотокового (Ирвин и Эспозито; Кершгенс, Рашке, Пилц);
- использующего экспоненциальное ядро (Брогниц).

В табл. 9—13 приведены поток отраженной радиации $F^+(0)$, поток пропущенной рассеянной радиации $F_D(\tau_1)$ и суммарный поток $F(\tau)$, рассчитанные различными методами.

В этих таблицах отсутствует сравнение вычислительного времени. Ясно, что при использовании методов, основанных на интегрировании радиации, машинное время примерно одинаково при расчетах как только потока, так и одновременно потока и яркости. Однако для расчета потока требуется знание только азимутальной независимой части яркости. Кроме того, в некоторых полуаналитических методах (например, методе сферических гармоник) поток можно вычислить без подробного расчета яркости, а следова-

ТАБЛИЦА 9. Поток, случай 1: дымка L , $\tau_1 = 1$, $\bar{\omega}_0 = 1$, $\mu_0 = -1$

τ	Метод											
	сферических гармоник		дискретных ординат			последовательного рассеяния			FN	удвоения	конечных разностей	DART
	Д	К	СД	Л	Кв	КРП	Кв	КРП				
$F^+(0)$	0,1736			0,1732	0,1734	0,1728	0,1732	0,1732	0,1732	0,1730	0,1880	
$F_D^-(\tau_1)$	1,8124			1,8127	1,838	1,7954	1,8126	1,8126	1,8126	1,8128	0,53	
0	2,9680	2,9685	2,9683	2,9644	2,968	2,9688	2,9684	2,9684	2,9684	2,9686	2,95	
0,05	2,9671	2,9685	2,9683		2,970	2,9674	2,9684	2,9684	2,9684	2,9686	2,87	
0,1	2,9673	2,9685	2,9683		2,971	2,9661	2,9684	2,9684	2,9684	2,9686	2,79	
0,2	2,9676	2,9685	2,9683		2,975	2,9637	2,9684	2,9684	2,9684	2,9686	2,64	
0,5	2,9684	2,9685	2,9682		2,983	2,9579	2,9684	2,9684	2,9684	2,9686	2,34	
0,75	2,9689	2,9685	2,9682		2,988	2,9541	2,9684	2,9684	2,9684	2,9686	2,21	
1	2,9682	2,9685	2,9682	2,9684	2,993	2,9512	2,9684	2,9684	2,9684	2,9686	1,68	

τ	Метод										
	Монте-Карло ПК	Эддингтона		Эддингтона + подобия	дельга Эддингтона		стандартный двухпотоковый вый	модифицированный двухпотоковый		экспоненциального ядра	
		ИЕ	S		У	Б		Е	КРП		
$F^+(0)$	0,165	-0,0307	-0,0306	0,2805	0,1985	0,1737	0,1216	0,2801	0,1738	0,1736	
$F_D^-(\tau_1)$	1,820	2,0167	2,0165	0,2782	1,7874	1,8125	1,8643	1,7059	1,8121	1,8124	
0	2,976	3,1723	3,1722	2,8611	2,9431	2,9679	3,0200	2,8615	2,9678	2,9680	
0,05	2,976	3,1723	3,1722	2,8611	2,9431	2,9679	3,0198	2,8615	2,9678	2,9680	
0,1	2,976	3,1723	3,1722	2,8611	2,9431	2,9679	3,0198	2,8615	2,9678	2,9680	
0,2	2,976	3,1723	3,1722	2,8611	2,9431	2,9679	3,0198	2,8615	2,9678	2,9680	
0,5	2,976	3,1723	3,1722	2,8611	2,9431	2,9679	3,0198	2,8615	2,9678	2,9680	
0,75	2,976	3,1723	3,1722	2,8611	2,9431	2,9679	3,0198	2,8615	2,9678	2,9680	
1	2,976	3,1723	3,1722	2,8611	2,9431	2,9679	3,0199	2,8615	2,9678	2,2980	

ТАБЛИЦА 10. Поток, случай 2: $L_{\sigma 1} = 1$, $\omega_0 = 0,9$, $\mu_0 = -1$

τ	Метод											
	сферических гармоник		дискретных ординат		последовательного рассеяния			FN	матричного оператора	удвоения	конечных разностей	DART
	Д	К	СД	Л	Кв	КРП	КРП					
$F^+(0)$	0,1236				0,1243	0,1243	0,1234	0,1234	0,1237	0,1237	0,1233	0,144
$F_D^-(\tau_1)$	1,5155				1,537	1,537	1,5011	1,5155	1,5156	1,5155	1,5157	0,42
0	3,0180	3,0180	3,0179	3,0178	3,017	3,017	3,0182	3,0179	3,0179	3,0179	3,0182	2,99
0,05	3,0007	3,0007	3,0006		3,001	3,001	2,9997	3,0006	3,0007	3,0006	3,0009	2,90
0,1	2,9832	2,9833	2,9831		2,953	2,953	2,9811	2,9831	2,9831	2,9831	2,9835	2,81
0,2	2,9479	2,9419	2,9479		2,988	2,988	2,9437	2,9479	2,9480	2,9479	2,9483	2,65
0,5	2,8418	2,8433	2,8417		2,856	2,856	2,8325	2,8418	2,8418	2,8418	2,8425	2,28
0,75	2,7547	2,7548	2,7546		2,722	2,722	2,7424	2,7547	/	2,7547	2,7549	2,09
1	2,6712	2,6714	2,6712	2,6714	2,692	2,692	2,6567	2,6713	2,6713	2,6713	2,6714	1,58

τ	Метод										
	Монте-Карло ПК	Эддингтона		Эддингтона + подобие	дельта Эддингтона		стандартный двухпоточный	модифицированный двухпоточный		экспоненциального ядра	
		IE	C		У	Б		IE	КРП		
$F^+(0)$	0,1230	-0,0716	-0,0716	0,2204	0,1471	0,1246	0,0999	0,2312	0,1304	0,0989	
$F_D^-(\tau_1)$	1,516		1,5545	0,2166	1,4998	1,5165		1,4616	1,4921		
0	3,019	3,2132	3,2132	2,9212	2,9945	3,0170	3,0417	2,9104	3,0112	3,0427	
0,05	3,001	3,1976	3,1977	2,9034	2,9773	3,0000	3,0333	2,8935	2,9939	3,0222	
0,1	2,985	3,1816	3,1815	2,8857	2,9601	2,9829	3,0066	2,8772	2,9762	3,0018	
0,2	2,952	3,1467	3,1467	2,8509	2,9256	2,9485	2,9378	2,8473	2,9394	2,9610	
0,5	2,837	3,0289	3,0290	2,7510	2,8225	2,8443	2,6569	2,7515	2,8220	2,8404	
0,75	2,749	2,9213	2,9214	2,6730	2,7379	2,7570	2,3947	2,6794	2,7199	2,7425	
1	2,672	2,8163	2,8163	2,6000	2,6555	2,6722		2,6174	2,6174	2,6477	

ТАБЛИЦА 11. Поток, случай 3: дымка l , $\tau_1 = 1$, $\omega_0 = 0,9$, $\mu_0 = -0,5$

τ	Метод											конечных разностей	DART		
	сферических гармоник		дискретных ординат			последовательного рассеяния			FN	удвоения	модифицированный двухпоточковый			экспоненциального ядра	
	Д	К	С.Д	Л	Кв	КРП	У	Б			ИЕ				КРП
$F^+(0)$	0,2255			0,2262	0,2234	0,2257	0,2255	0,2255	0,2255	0,2255	0,2255	0,2249	0,355		
$F_D^-(\tau_1)$	0,8032			0,8035	0,8018	0,8036	0,8033	0,8033	0,8033	0,8033	0,8033	0,8036	0,79		
0	1,3452	1,3453	1,3453	1,3446	1,347	1,3453	1,3453	1,3453	1,3453	1,3453	1,3453	1,3469	1,21		
0,05	1,3257	1,3257	1,3257	1,3257	1,327	1,3256	1,3257	1,3257	1,3257	1,3257	1,3257	1,3263	1,39		
0,1	1,3058	1,3059	1,3059	1,3059	1,307	1,3058	1,3058	1,3058	1,3058	1,3058	1,3058	1,3072	1,52		
0,2	1,2664	1,2664	1,2664	1,2664	1,267	1,2665	1,2664	1,2664	1,2664	1,2664	1,2664	1,2671	1,68		
0,5	1,1567	1,1568	1,1568	1,1568	1,157	1,1570	1,1568	1,1568	1,1568	1,1568	1,1568	1,1590	1,83		
0,75	1,0791	1,0791	1,0791	1,0791	1,078	1,0794	1,0791	1,0791	1,0791	1,0791	1,0791	1,0795	1,80		
1	1,0158	1,0159	1,0159	1,0161	1,014	1,0162	1,0159	1,0159	1,0159	1,0159	1,0159	1,0162	1,37		

τ	Метод											экспоненциального ядра
	Эддингтона		Эддингтона + подобие		дельта Эддингтона		стандартный двухпоточковый		модифицированный двухпоточковый		экспоненциального ядра	
	NE	C	У	Б	У	Б	У	Б	ИЕ	КРП		
$F^+(0)$	0,234	0,2708	0,2708	0,1955	0,2191	0,2258	0,0880	0,0880	0,1960	0,2297	0,3047	
$F_D^-(\tau_1)$	0,795	0,8130	0,8132	0,1888	0,8580	0,8511	0,9861	0,9861	0,8790	0,8531	0,8322	
0	1,336	1,3000	1,3000	1,3753	1,3517	1,3450	1,4828	1,4828	1,3748	1,3411	1,3661	
0,05	1,317	1,2818	1,2819	1,3579	1,3340	1,3273	1,4662	1,4662	1,3575	1,3234	1,3450	
0,1	1,297	1,2644	1,2644	1,3408	1,3167	1,3100	1,4501	1,4501	1,3404	1,3062	1,3245	
0,2	1,256	1,2311	1,2312	1,3078	1,2835	1,2767	1,4168	1,4168	1,3071	1,2736	1,2853	
0,5	1,150	1,1430	1,1431	1,2173	1,1933	1,1866	1,3293	1,3293	1,2165	1,1856	1,1812	
0,75	1,064	1,0806	1,0805	1,1512	1,1279	1,1215	1,2612	1,2612	1,1500	1,1221	1,1078	
1	1,008	1,0256	1,0257	1,0929	1,0706	1,0645	1,1987	1,1987	1,0916	1,0657	1,0448	

ТАБЛИЦА 12. Поток, случай 4: облако C_1 , $\tau_1 = 64$, $\omega_0 = 1$, $\mu_0 = 1$

τ	Метод									
	сферических гармоник		дискретных ординат J	удвоения	конечных разностей	асимптотического приближения	Монте-Карло МКК	Эддингтона ИЕ		
	Д	К								
$F^+(0)$	2,6587		2,6782	2,6620	2,6605	2,65	2,6559			
$F^-(0)$	0,4821		0,4633	0,4796	0,4811	0,495	0,4856			
0	0,4828	0,4806	0,4634	0,4796	0,4811	0,490				0,4756
3,2	0,4826	0,4806		0,4796	0,4811					0,4756
6,4	0,4825	0,4806		0,4796	0,4811	0,500				0,4756
12,8	0,4825	0,4806		0,4796	0,4811	0,495				0,4756
32	0,4823	0,4806		0,4796	0,4811	0,495				0,4756
48	0,4822	0,4806		0,4796	0,4811	0,495				0,4756
64	0,4821	0,4806	0,4633	0,4796	0,4811	0,495				0,4756

τ	Метод									
	Эддингтона	Эддингтона +подобие		дельта Эддингтона		стандартный двухпоточковый	модифицированный двухпоточковый		экспоненциального ядра	
		С	2,6660	0,4754	У		Б	ИЕ		КРП
$F^+(0)$	2,6660	2,6660		2,6685	2,6657	2,5943	2,6350		2,6557	
$F^-(0)$	0,4756	0,4754		0,4731	0,4759	0,6073	0,5066		0,4759	
0	0,4756	0,4756	0,4731	0,4731	0,4759	0,6073	0,5066	0,5382	0,4759	
3,2	0,4756	0,4756	0,4731	0,4731	0,4759	0,6073	0,5066	0,5382	0,4759	
6,4	0,4756	0,4756	0,4731	0,4731	0,4759	0,6073	0,5066	0,5382	0,4759	
12,8	0,4756	0,4756	0,4731	0,4731	0,4759	0,6073	0,5066	0,5382	0,4759	
32	0,4756	0,4756	0,4731	0,4731	0,4759	0,6073	0,5066	0,5382	0,4759	
48	0,4756	0,4756	0,4731	0,4731	0,4759	0,6073	0,5066	0,5382	0,4759	
64	0,4756	0,4756	0,4731	0,4731	0,4759	0,6073	0,5066	0,5382	0,4759	

ТАБЛИЦА 13. Поток, случай 5: облако \hat{C}_1 ; $\tau_1 = 64$; $\hat{\omega}_0 = 0,9$; $\mu_0 = -1$

τ	Метод							
	сферических гармоник		дискретных ординат J	удвоения	конечных разностей	асимптотического приближения	Монте-Карло МКК	Эддингтона ИЕ
	Д	К						
$F^{+(0)}$	0,3733		0,5212	0,3755	0,4151	0,362	0,3697	0,0550
$F_D^-(\tau_1)$	1,527-7				3,3894-6		0,0000	
0	2,7683	2,7671	2,6204	2,7661	2,7265	2,780		3,0866
3,2	1,6085	1,6062		1,6049	1,5815			1,5782
6,4	0,8331	0,8307		0,8295	0,8408	0,909		0,6841
12,8	0,1981	0,1969		0,1964	0,2183	0,207		0,1247
32	2,287-3	2,255-3		0,0022	3,264-3	2,46-3		0,0006
48	5,498-5	5,387-5		0,0001	9,441-5	6,12-5		
64	1,525-6	1,485-6		0,0000	3,339-6	1,76-7		

τ	Метод							
	Эддингтона С	Эддингтона + подобие	дельта Эддингтона		стандартный потоковый	модифицированный двухпотоковый		экспоненциального ядра
			У	Б		ИЕ	КРП	
$F^{+(0)}$	0,0550	0,4860	0,3544	0,3500	0,6023	0,6645	0,3981	0,3155
$F_D^-(\tau_1)$			3,079-7					5,569-7
0	3,0866		2,7872	2,7916	2,5393	2,4771	2,744	2,8261
3,2	1,5781	2,6556	1,6141	1,6185	1,5842	1,5151	1,348	1,5903
6,4	0,6841	1,5566	0,8257	0,8284	0,9885	0,9266	0,583	0,8137
12,8	0,1248	0,8631	0,1833	0,1842	0,3848	0,3465	0,106	0,1866
32	0,0008	0,2409	1,32-3	0,0013	0,0226	0,0182	6,44-4	1,608-3
48		0,0037	1,9-5		0,0022	0,0016	9,14-6	2,792-5
64		0,001	3,1-7		0,0003	0,0003	1,5-7	5,569-7

тельно, значительно сокращается вычислительное время. Приближенные методы были развиты с целью кардинального сокращения машинного времени или для того, чтобы полностью обойтись без компьютера. Например, Кершгенз и др. приводят вычислительное время для одного и того же случая и одной и той же ЭВМ; метод удвоения — около 4 с, модифицированный двухпоточковый метод — 0,01 с.

В трех случаях дымки L расхождение значений потоков, вычисленных методами сферических гармоник, матричного оператора, последовательных рассеяний, дискретных ординат, удвоения FN, конечных разностей и Монте-Карло, не превосходило 1% и обычно составляло несколько десятых процента. Значения потока, полученные DART-методом, оказались не очень точными, так как, по замечанию Уитни, интегрирование было выполнено по недостаточному количеству точек.

Для случая консервативного облака (случай 4) расхождение результатов, полученных методами сферических гармоник (два ряда результатов), удвоения, конечных разностей и Монте-Карло, составляло от 0,1 до 1%. Расхождение результатов, вычисленных методами дискретных ординат и асимптотическим, имеет порядок нескольких процентов. Для поглощающего облака (случай 5) расхождение между названными выше методами несколько увеличивается, но для уровней $\tau < 12,8$ согласие остается хорошим (кроме отраженного потока, вычисленного методом дискретных ординат; вероятно, здесь имела место случайная ошибка). Для уровней $\tau < 12,8$ расхождения увеличиваются, но это не имеет большого значения, так как суммарный поток становится ничтожно малым.

Ради сравнения значения потока, вычисленные приближенными методами, приводились с четырьмя или пятью значащими цифрами, но это, конечно, не соответствует их действительной точности. Следует отметить, что все методы удовлетворяют условию сохранения потока при $\bar{\omega}_0 = 1$. В табл. 14 представлена ошибка результирующего потока, вычисленная приближенными методами, по отношению к среднему значению результатов, полученных точными методами, которые обсуждались выше. Наилучшими представляются методы экспоненциального ядра и дельта-метод Эддингтона, для которых расхождение обычно составляет 1%, иногда бывает несколько, но никогда не превышает нескольких процентов. Укажем, что при использовании одного и того же (или сходного) метода различными авторами могут быть получены существенно различные результаты. То же самое относится в еще большей степени к результатам, полученным с помощью двух модифицированных двухпоточковых методов, которые могут сильно различаться, так как один из методов дает ошибки более 1%, а другой (для тонкого слоя дымки) — несколько процентов. Для облаков оба модифицированных двухпоточковых метода дают ошибки более 10%. Стандартный двухпоточковый метод, с помощью которого можно получить хорошие результаты для тонких слоев при нормальном падении лучей, не стоит использовать для

ТАБЛИЦА 14. Относительные ошибки значений результирующего потока, вычисленных приближенными методами, по отношению к среднему значению результатов, полученных точными методами

Случай	τ	"Точные" средние значения	Относительные ошибки в процентах							
			Метод Эддингтона или ИЕ, или С	Метод Эддингтона + подобию	Дельта-метод Эддингтона		Стандартный двухпоточковый метод	Модифицированный двухпоточковый метод		Метод экспоненциального ядра
					У	Б		ИЕ	КРП	
1	0—1	2,9684	6,9	-3,6	-0,9	-0,02	1,7	-3,6	-0,02	-0,01
2	0	3,0180	6,6	3,2	-0,8	-0,03	0,8	-3,6	-0,2	0,8
	0,05	3,0006	6,6	-3,2	-0,8	-0,02	1,1	-3,6	-0,2	0,7
	0,1	2,9832	6,7	-3,3	-0,8	0	0,8	-3,6	-0,2	0,6
	0,2	2,9479	6,7	-3,3	-0,8	0,02	-0,3	-3,4	-0,3	0,4
	0,5	2,8418	6,6	-3,2	-0,7	0,1	-6,5	-3,2	-0,7	-0,1
	0,75	2,7547	6,1	-3,0	-0,6	0,1	-13	-2,7	-1,3	-0,4
3	1	2,6713	5,2	-2,7	-0,6	-0,03	/	/	-2,0	-0,9
	0	1,3453	-3,4	2,2	0,5	-0,02	10	2	-0,3	1,5
	0,05	1,3257	-3,3	2,4	0,6	0,1	2,4	2,4	-0,2	1,5
	0,1	1,3059	-3,2	2,7	0,8	0,3	11	2,6	0,02	1,4
	0,2	1,2664	-2,8	3,3	1,4	0,8	12	3,2	0,6	1,5
	0,5	1,1568	-1,2	5,2	3,2	2,6	15	5,2	2,5	2,1
4	0,75	1,0791	0,1	6,7	4,5	3,9	17	6,6	4,0	2,7
	1	1,0159	1,0	7,6	5,4	4,8	18	7,5	4,9	2,8
	0,64	0,4810	-1,1	-1,1	-1,6	-1,1	26	12	5,3	-1,1
	0	2,7672	12	-4,0	0,7	0,9	-8,2	-11	-0,8	2,1
	3,2	1,6065	-1,8	-3,1	0,5	0,7	-1,4	-5,7	-16	-1,0
	6,4	0,8311	-18	3,9	-0,6	-0,3	19	12	-30	-2,1
12,8	0,1977	-37	22	-7,0	-6,6	95	76	-46	-5,3	

толстых слоев и наклонного облучения. В то же время метод Эддингтона дает наилучшие результаты в толстых консервативных слоях. Сочетание принципов подобия с методом Эддингтона может в конце концов изменить знак ошибки, но, по-видимому, не улучшает результаты.

7.1.2.3. Замечание по поводу индикатрисы

Отметим, что сравнение должно было проводиться для заданного распределения частиц по размерам, а индикатрисы авторы должны были либо рассчитать, либо воспользоваться значениями Дерменджана, приведенными в табл. 1 или (для дымки) значениями β_l из табл. 2. Уискомб указал на важность выбора пределов интегрирования r_{\min} и r_{\max} , шкал интегрирования по r и способа интегрирования для распределения по размерам. В качестве примера он нашел, что при изменении интервала интегрирования для случая облака C_1 от $r_{\min} = 0,10127$ мкм, $r_{\max} = 24,99546$ мкм до $r_{\min} = 0,10000$ мкм, $r_{\max} = 24,99979$ мкм (в обоих случаях $\Delta r = 0,005570423$ мкм) показатель асимметрии изменяется в четвертом десятичном разряде, из чего наверняка следует изменение потока в четвертой значащей цифре.

Уискомб рассчитал также β_l для дымки L при длине волны 0,7 мкм и показателе преломления 1,33, используя квадратурную формулу Лобатто при 179 значениях углов. Он ожидал, что по меньшей мере четыре или пять значащих цифр будут точными. Оказалось, что при $l > 4$ различия по сравнению со значениями в табл. 2 отмечаются в третьем десятичном разряде. Точные значения β_l для дымки L и облака C_1 были недавно опубликованы Бенасси и др. (см. список литературы к п. 3.2).

Более того, все методы включают различные приближения индикатрисы, что в какой-то мере может быть причиной небольших расхождений в результатах. Г. А. Михайлов и С. Л. Кузнецов выполнили следующие тесты: они провели обширные расчеты (10^6 фотонов, 2 ч на БЭСМ-6) для случая 2, $\tau = 0,2$. Были получены следующие значения интенсивности (I_{mk}) ошибок метода Монте-Карло по отношению к точному решению уравнения переноса с кусочно-гладкой линейной индикатрисой ($\sigma_{mk} \%$), относительных расхождений результатов, полученных методами Монте-Карло и сферических гармоник (Δ_{mksh}):

μ	1	0,8	0,6	0,4	0,2
I_{mk}	2,15—2	2,49—2	3,29—2	4,92—2	7,08—2
$\sigma_{mk} \%$	0,49	0,51	0,60	0,67	0,77
$\Delta_{mksh} \%$	—3,7	—3,0	—1,60	—0,9	—1,8
μ	—0,2	—0,4	—1,6	—0,8	—1
I_{mk}	4,65—2	3,84—2	5,02—2	1,15—1	1,11 0
$\sigma_{mk} \%$	0,87	0,55	0,37	0,26	0,21
$\Delta_{mksh} \%$	—0,7	1,7	2,1	6,7	—3,6

Михайлов и Кузнецов отметили также, что хорошее согласие между результатами, полученными методами сферических гармоник и матричного оператора, станет еще лучше, если в обоих

методах в конечном итоге использовать аналогичные способы дискретизации индикатрисы. В методе сферических гармоник эта дискретизация скрыта, но может быть выявлена посредством известных аналогий с методом дискретных ординат. То же замечание справедливо для сравнения методов сферических гармоник, FN и дискретных ординат.

7.1.2.4. Заключение

Подводя итоги, отметим следующее:

— большинство так называемых вычислительных методов позволяют вычислять яркость с ошибкой не более 1 % при умеренных затратах машинного времени; выявилась ограниченная пригодность некоторых методов к слоям с большой оптической толщиной и вытянутым пиком индикатрисы в направлении вперед;

— проведенная проверка точности методов Монте-Карло и DART является весьма важной ввиду их пригодности для более реальных атмосфер;

— наконец, учитывая практическое значение результирующего потока, важнейший результат, вероятно, состоит в проверке приближенных и быстрых методов его расчета; очень часто погрешность этих методов составляет менее 10 %; для дельта-метода Эддингтона и метода экспоненциального ядра ошибка во всех случаях остается порядка 1 %.

7.2. РЕАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ АТМОСФЕРЫ

7.2.1. Программа для численных сравнений (аэрозольные модели атмосферы, основанные на моделях Рабочей группы «Стандартная радиационная атмосфера»)

Модель

— плоскопараллельная атмосфера, однородная по горизонтали;
— подстилающая поверхность — черная;
— профили температуры, давления, плотности соответствуют «Стандартной атмосфере США, 1976» (табл. 15);

— падающее солнечное излучение: $\mu_0 = -1,0; -0,75; -0,5; -0,25$; поток $\pi F = \pi (F = 1)$;

— поглощение в газах отсутствует (считается, что слой O_3 расположен выше аэрозольного слоя);

— длины волн: 0,4; 0,55; 2,06 мкм (если только одна длина волны, то 0,55 мкм);

— аэрозоли: одна модель для слоя от 2 до 30 км, связанная с каждой из трех моделей для слоя от 0 до 2 км (если только одна модель, использовать профиль II, табл. 16).

Фоновый аэрозоль в стратосфере состоит из 75 % H_2SO_4 . Континентальный, городской и морской аэрозоли находятся в смесях, определенных в табл. 17. В табл. 18 приведены параметры распределения по размерам, а в табл. 19 — показатели преломления.

ТАБЛИЦА 15. Стандартная атмосфера США, 1976

Высота, км	Давление, гПа	Температура, К	Плотность, г·м ⁻³
0	1,013E+03	288	1,255E+03
1	8,988E+02	282	1,112E+03
2	7,950E+02	275	1,007E+03
3	7,012E+02	269	9,093E+02
4	6,166E+02	262	8,194E+02
5	5,405E+02	256	7,364E+02
6	4,722E+02	249	6,601E+02
7	4,111E+02	243	5,900E+02
8	3,565E+02	236	5,258E+02
9	3,080E+02	230	4,671E+02
10	2,650E+02	223	4,135E+02
11	2,270E+02	217	3,648E+02
12	1,940E+02	217	3,119E+02
13	1,658E+02	217	2,666E+02
14	1,417E+02	217	2,279E+02
15	1,211E+02	217	1,948E+02
16	1,035E+02	217	1,665E+02
17	8,850E+01	217	1,423E+02
18	7,565E+01	217	1,217E+02
19	6,467E+01	217	1,040E+02
20	5,529E+01	217	8,891E+01
21	4,729E+01	218	7,572E+01
22	4,048E+01	219	6,450E+01
23	3,467E+01	220	5,501E+01
24	2,972E+01	221	4,694E+01
25	2,549E+01	222	4,008E+01
30	1,197E+01	227	1,841E+01
35	5,746E+00	237	8,463E+00
40	2,871E+00	253	3,996E+00
45	1,491E+00	264	1,966E+00
50	7,978E-01	271	1,027E+00
70	5,220E-02	220	8,283E-02
100	3,008E-04	210	4,990E-04

ТАБЛИЦА 16. Коэффициент ослабления σ_e и оптическая толщина τ при $\lambda = 0,55$ мкм

z км			
30	$\sigma_e(30) = 3,32 \cdot 10^{-5} \text{ км}^{-1}$ $\sigma_e(20) = 2,18 \cdot 10^{-4} \text{ км}^{-1}$	Линейная зависимость от z	$\tau = 0,003$ Фоновый стратосферный аэрозоль
20	$\sigma_e = 2,18 \cdot 10^{-4} \text{ км}^{-1} = \text{const}$		
12	$\sigma_e = 0,0025 \text{ км}^{-1} = \text{const}$		$\tau = 0,025$ Континентальный аэрозоль
2	<i>Профиль I</i> $\sigma_e = 0,5 \text{ км}^{-1} = \text{const}$ $\tau = 1,0$ Городской аэрозоль	<i>Профиль II</i> $\sigma_e = 0,1 \text{ км}^{-1} = \text{const}$ $\tau = 0,2$ Континентальный аэрозоль	<i>Профиль III</i> $\sigma_e = 0,025 \text{ км}^{-1}$ $\tau = 0,05$ Морской аэрозоль
0			

ТАБЛИЦА 17. Характеристики моделей аэрозолей

Модель	Распределение по размерам	Характеристика состава	Доля (%) аэрозольного объема
Континентальный аэрозоль	Тонкий	Водорастворимый	29
	Грубый	Пылеобразный	70
	Тонкая сажа	Сажа	1
Городской индустриальный аэрозоль	Тонкий	Водорастворимый	61
	Грубый	Пылеобразный	17
	Тонкая сажа	Сажа	22
Морской аэрозоль	Океанский	Океанский	95
	Тонкий	Водорастворимый	5

ТАБЛИЦА 18. Параметры, характеризующие распределение частиц по размерам

*Логнормальное распределение **

Аэрозоль	r_i мкм	σ_i
Тонкий	0,005	0,475
Грубый	0,50	0,475
Тонкая сажа	0,0118	0,301
Океанский	0,30	0,40

*Модифицированное гамма-распределение ***

Аэрозоль фоновый стратосферный	A ***	α	γ	b
	324	1,0	1,0	18

$$* \frac{dN_i}{dr} = \frac{N_i}{\ln 10 r \sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\lg r - \lg r_i)^2}{2\sigma_i^2} \right]$$

$$** \frac{dN(r)}{dr} = Ar^\alpha \exp(-br^\gamma)$$

*** Определено таким образом, что полное число частиц нормировано на единицу.

ТАБЛИЦА 19. Показатели преломления для различных типов аэрозоли

Длина волны, мкм	Аэрозоль				75 % H ₂ SO ₄
	Пылеобразный	Водорастворимый	Океанский	Сажа	
0,2000	1,530 -7,00E-02	1,530 -7,00E-02	1,429 -2,87E-05	1,500 -0,350	1,498 -1,00E-08
0,2500	1,530 -3,00E-02	1,590 -3,00E-02	1,404 -1,45E-06	1,620 -0,450	1,484 -1,00E-08
0,3000	1,530 -8,00E-03	1,530 -8,00E-03	1,395 -5,83E-07	1,740 -0,470	1,469 -1,00E-08
0,3371	1,530 -8,00E-03	1,530 -5,00E-03	1,392 -1,20E-07	1,750 -0,470	1,459 -1,00E-08
0,4000	1,590 -8,00E-03	1,530 -5,00E-03	1,385 -9,90E-09	1,750 -0,460	1,440 -1,00E-08
0,4880	1,530 -8,00E-03	1,430 -5,00E-03	1,382 -6,41E-09	1,750 -0,450	1,432 -1,00E-08
0,5145	1,530 -8,00E-03	1,530 -5,00E-03	1,381 -3,70E-09	1,750 -0,450	1,431 -1,00E-08
0,5500	1,530 -8,00E-03	1,530 -6,00E-03	1,381 -4,26E-09	1,750 -0,440	1,430 -1,00E-08
0,6328	1,530 -8,00E-03	1,530 -6,00E-03	1,377 -1,62E-08	1,750 -0,430	1,429 -1,00E-08
0,6943	1,530 -8,00E-03	1,530 -7,00E-03	1,376 -5,04E-08	1,750 -0,430	1,428 -1,00E-08
0,8600	1,520 -8,00E-03	1,520 -1,20E-02	1,372 -1,09E-06	1,750 -0,430	1,425 -1,79E-07
1,0600	1,590 -8,00E-03	1,520 -1,70E-02	1,367 -6,01E-05	1,750 -0,440	1,420 -1,50E-06
1,3000	1,460 -8,00E-03	1,516 -2,00E-02	1,365 -1,41E-04	1,760 -0,450	1,410 -1,00E-05

Вычисления

Вычислить по возможности больше значений следующих величин: яркость, поляризация, поток и дивергенция потока для $|\mu| = 1,0$ (0,1) 0; $\varphi = 0, 90^\circ, 180^\circ$ (или больше точек), $z = 0, 2, 12, 20, 30$ км (или больше точек).

Сообщить всю возможную информацию относительно метода, вычислительного времени и точности.

7.2.2. Результаты

7.2.2.1. Яркость

Были получены следующие результаты.

Метод конечных разностей (Саттль): яркость на верхней и нижней границах; $\mu_0 = -1,0; -0,75; -0,50; -0,25; |\mu| = 0$ (0,1) 1; $\varphi = 0, 90, 180^\circ$, 3 профиля; $\lambda = 0,40; 0,55; 1,06$ мкм.

Метод сложения—удвоения (Хаан): яркость и коэффициент поляризации (%) на верхней и нижней границах; $\mu_0 = -1,0; -0,75; -0,50; -0,25; |\mu| = 0,1; 0,25; 0,5; 0,75; 1$ и 20 в интегрировании точек методом Гаусса: $\varphi = 0, 90, 180^\circ$; 3 профиля; $\lambda = 0,55; 1,06$ мкм.

FN-метод (Боннел и Дево): светимость на верхней и нижней границах; $\mu_0 = -1,0; |\mu| = 0$ (0,1) 1; 0,25; 0,75; 3 профиля; $\lambda = 0,4; 0,55, 1,06$ мкм и $\mu_0 = -0,5; |\mu| = 0$ (0,1) 1; 0,25; 0,50, 0,75; $\varphi = 0, 90, 180^\circ$; профиль I; $\lambda = 0,55$ мкм.

В табл. 20 приведены результаты сравнения для отраженной радиации ($z = 30$ км), а в табл. 21 — для пропущенной радиации ($z = 0$ км). В целом согласно результатов, полученных указанными тремя методами, хорошее: в большинстве случаев их расхождение не превышает 1—3 %, а иногда и 0,1 %.

Единственное значительное расхождение относится к пику в направлении вперед ($\mu_0 = \mu = -1$ и $\mu = \mu_0 = -0,5$). Расхождение возрастает, когда начинают преобладать однократно рассеянные фотоны. Это легко объяснить тем, что в разных методах используются различные способы дискретизации. Если принять во внимание, что дискретизация имеет тенденцию уменьшать долю радиации, рассеянной вперед, то наилучшие результаты дает метод удвоения — сложения, а наименее удачным является FN-метод.

Следует иметь в виду, что в отличие от предыдущей серии сравнений (п. 7.1), в настоящем случае сравниваются не только методы решения уравнения радиационного переноса; сравнению подвергается также весь подход к физической задаче, включая оценку радиационных характеристик атмосферы. Возможно, это обстоятельство вносит свой вклад в те несколько процентов (а в отдельных случаях более 10 %), которыми оценивается здесь расхождение между результатами.

Три автора рассчитали радиационные характеристики молекулярного рэлеевского рассеяния для заданного профиля стандарт-

ТАБЛИЦА 20. Отраженная яркость для трех значений λ ; $\mu_0 = 1,0$; все $= \Phi$

μ	$\lambda = 0,40$ мкм			$\lambda = 0,55$ мкм			$\lambda = 1,06$ мкм		
	Конечные разности	FN	Удвоение — сложение	Конечные разности	FN	Удвоение — сложение	Конечные разности	FN	Удвоение — сложение
<i>Профиль I</i>									
1,0	0,1502	0,1584	0,0772	0,0758	0,0791	0,0235	0,0195	0,0198	
0,9	0,1584	0,1560	0,0722	0,0739	0,0791	0,0193	0,0187		
0,8	0,1586	0,1605	0,0751	0,0763	0,0786	0,0203	0,0197		
0,75	—	—	—	0,0779	0,0786	—	0,0205	0,0204	
0,7	0,1661	0,1675	0,0796	0,0799	0,0799	0,0221	0,0215		
0,6	0,1761	0,1759	0,0861	0,0859	0,0944	0,0249	0,0241		
0,5	0,1891	0,1898	0,0948	0,0946	0,0944	0,0289	0,0280	0,0275	
0,4	0,2059	0,2062	0,1061	0,1065	0,1065	0,0346	0,0335		
0,3	0,2270	0,2273	0,1207	0,1221	0,1221	0,0431	0,0414		
0,25	—	—	—	0,1318	0,1281	—	0,0466	0,0459	
0,2	0,2556	0,2545	0,1416	0,1432	0,1432	0,0546	0,0528		
0,1	0,2862	0,2845	0,1767	0,1773	0,1704	0,0723	0,0682	0,0669	
0	0,2937	0,2920	0,2412	0,2448	0,2448	0,1133	0,2069	0,2069	
<i>Профиль II</i>									
1,0	0,1387	0,1432	0,0560	0,0514	0,0541	0,0088	0,0089	0,0092	
0,9	0,1415	0,1425	0,0502	0,0511	0,0511	0,0087	0,0082		
0,8	0,1472	0,1476	0,0521	0,0527	0,0527	0,0090	0,0084		
0,75	—	—	—	0,0538	0,0539	—	0,0087	0,0084	
0,7	0,1555	0,1555	0,0556	0,0554	0,0554	0,0097	0,0091		

μ	λ=0,40 мкм			λ=0,55 мкм			λ=1,06 мкм		
	Конечные разности	FN	Удвоенное — сложение	Конечные разности	FN	Удвоенное — сложение	Конечные разности	FN	Удвоенное — сложение
0,6	0,1672	0,1668	—	0,0613	0,0604	—	0,0111	0,0103	—
0,5	0,1830	0,1821	—	0,0698	0,0688	0,0680	0,0133	0,0123	0,0118
0,4	0,2037	0,2024	—	0,0824	0,0818	—	0,0169	0,0155	—
0,3	0,2298	0,2282	—	0,1012	0,1014	—	0,0227	0,0208	—
0,25	—	—	—	—	0,1148	0,1105	—	0,0251	0,0243
0,2	0,2610	0,2586	—	0,1312	0,1316	—	0,0338	0,0314	—
0,1	0,2877	0,2846	—	0,1763	0,1762	0,1682	0,0597	0,0555	0,0534
0	0,2896	0,2892	—	0,2260	0,2352	—	0,1251	0,1998	—

Профиль III

1,0	0,1256	0,1284	—	0,0416	0,0415	0,0452	0,0077	0,0073	0,0077
0,9	0,1276	0,1288	—	0,0408	0,0419	—	0,0066	0,0062	—
0,8	0,1317	0,1324	—	0,0416	0,0421	—	0,0053	0,0058	—
0,75	—	—	—	—	0,0422	0,0428	—	0,0055	0,0054
0,7	0,1377	0,1382	—	0,0428	0,0427	—	0,0061	0,0055	—
0,6	0,1471	0,1474	—	0,0462	0,0455	—	0,0066	0,0058	—
0,5	0,1607	0,1604	—	0,0518	0,0510	0,0514	0,0076	0,0067	0,0065
0,4	0,1795	0,1787	—	0,0606	0,0602	—	0,0095	0,0082	—
0,3	0,2052	0,2039	—	0,0744	0,0751	—	0,0128	0,0109	—
0,25	—	—	—	—	0,0862	0,0832	—	0,0133	0,0129
0,2	0,2402	0,2376	—	0,1002	0,1011	—	0,0193	0,0167	—
0,1	0,2761	0,2717	—	0,1494	0,1506	0,1445	0,0378	0,0324	0,0316
0	0,2865	0,2800	—	0,2235	0,2260	—	0,1240	0,1954	—

ТАБЛИЦА 20а. Отраженная яркость для трех значений φ ; $\lambda = 0,55$ мкм

μ	$\varphi = 0^\circ$			$\varphi = 90^\circ$			$\varphi = 180^\circ$		
	Конечные разности	FN	Удвоенное сложение	Конечные разности	FN	Удвоенное сложение	Конечные разности	FN	Удвоенное сложение
1,0	0,0579	—	0,0589	0,0579	—	0,0569	0,0579	—	0,0589
0,9	0,0593	—	—	0,0619	—	—	0,0724	—	—
0,8	0,0675	—	—	0,0670	—	—	0,0848	—	—
0,75	—	—	0,0749	—	—	0,0708	—	—	0,0951
0,7	0,0801	—	—	0,0756	—	—	0,0954	—	—
0,6	0,0980	—	—	0,0818	—	—	0,1018	—	—
0,5	0,1213	—	0,1224	0,0921	—	0,0919	0,1117	—	0,1152
0,4	0,1512	—	—	0,1050	—	—	0,1251	—	—
0,3	0,1891	—	—	0,1212	—	—	0,1421	—	—
0,25	—	—	0,2134	—	—	0,1307	—	—	0,1570
0,2	0,2372	—	—	0,1439	—	—	0,1682	—	—
0,1	0,2983	—	0,2966	0,1812	—	0,1770	0,2174	—	0,2184
0	0,3738	—	—	0,2477	—	—	0,3168	—	—
1,0	0,0473	0,0473	0,0472	0,0474	0,0473	0,0471	0,0473	0,0473	0,0471
0,9	0,0572	0,0579	—	0,0524	0,0523	—	0,0588	0,0598	—
0,8	0,0710	0,0728	—	0,0582	0,0583	—	0,0691	0,0704	—
0,75	—	0,0823	0,0816	—	0,0618	0,0612	—	0,0754	0,0767
0,7	0,0886	0,0935	—	0,0650	0,0656	—	0,0801	0,0807	—

μ	φ = 0°			φ = 90°			φ = 180°		
	Конечные разности	FN	Удвоенные — сложение	Конечные разности	FN	Удвоенные — сложение	Конечные разности	FN	Удвоенные — сложение
0,6	0,1110	0,1216	0,3081	0,0736	0,0746	0,1257	0,0950	0,0941	0,1153
0,5	0,1394	0,1589	0,1564	0,0840	0,0857	0,0841	0,1113	0,1106	0,1062
0,4	0,1857	0,2079	0,0971	0,0971	0,0993	0,0993	0,1263	0,1257	0,2472
0,3	0,2479	0,2718	0,1142	0,1142	0,1167	0,1167	0,1467	0,1468	0,2472
0,25	—	0,3099	0,3081	—	0,1275	0,1257	—	0,1622	0,1062
0,2	0,3334	0,3530	0,1382	0,1382	0,1404	0,1404	0,1801	0,1820	0,1062
0,1	0,4478	0,4490	0,4487	0,1771	0,1787	0,1766	0,2404	0,2486	0,2472
0	0,5687	0,4004	0,2459	0,2459	0,2540	0,2540	0,3624	0,4004	0,2472
μ₀ = -0,25									
1,0	0,0324	0,0319	0,0319	0,0325	0,0325	0,0319	0,0324	0,0319	0,0319
0,9	0,0452	0,0452	0,0452	0,0365	0,0365	0,0365	0,0388	0,0388	0,0319
0,8	0,0607	0,0607	0,0607	0,0411	0,0411	0,0411	0,0466	0,0466	0,0319
0,75	—	0,0709	0,0709	—	0,0465	0,0434	—	—	0,0522
0,7	0,0809	0,0809	0,0809	0,0465	0,0465	0,0465	0,0556	0,0556	0,0522
0,6	0,1088	0,1088	0,1088	0,0536	0,0536	0,0536	0,0666	0,0666	0,0522
0,5	0,1464	0,1464	0,1537	0,0624	0,0624	0,0627	0,0799	0,0799	0,0829
0,4	0,1987	0,1987	0,0739	0,0739	0,0739	0,0739	0,0992	0,0992	0,0829
0,3	0,2818	0,2818	0,0900	0,0900	0,0900	0,1249	0,1249	0,1249	0,0829
0,25	—	0,3531	0,3531	—	0,1140	0,1018	—	—	0,1473
0,2	0,4148	0,4148	0,1140	0,1140	0,1140	0,1140	0,1636	0,1636	0,1473
0,1	0,6030	0,5897	0,5897	0,1552	0,1552	0,1561	0,2298	0,2298	0,2377
0	0,8560	0,8560	0,2348	0,2348	0,2348	0,2348	0,3786	0,3786	0,2377

ТАБЛИЦА 21. Пропущенная яркость для трех значений λ ; $\mu_0 = -1, 0$; все ϕ

μ	$\lambda = 0,40$ мкм			$\lambda = 0,55$ мкм			$\lambda = 1,06$ мкм		
	Конечные разности	FN	Удвоение — сложение	Конечные разности	FN	Удвоение — сложение	Конечные разности	FN	Удвоение — сложение
<i>Профиль I</i>									
0,0	0,0556	0,0542	0,0678	0,0664	0,0580	0,0570	0,0580	0,0570	0,0685
-0,1	0,0711	0,0707	0,0853	0,0852	0,0701	0,0695	0,0701	0,0695	0,0723
-0,2	0,0863	0,0858	0,1015	0,1014	0,0739	0,0728	0,0739	0,0728	0,0802
-0,25	—	—	—	0,1091	—	0,0730	—	0,0730	0,0802
-0,3	0,1027	0,1023	0,1164	0,1165	0,0760	0,0734	0,0760	0,0734	0,0802
-0,4	0,1207	0,1203	0,1310	0,1311	0,0776	0,0758	0,0776	0,0758	0,0802
-0,5	0,1405	0,1402	0,1469	0,1471	0,0832	0,0810	0,0832	0,0810	0,0802
-0,6	0,1635	0,1632	0,1674	0,1678	0,0930	0,0904	0,0930	0,0904	0,0802
-0,7	0,1929	0,1927	0,1969	0,1973	0,1094	0,1063	0,1094	0,1063	0,0802
-0,75	—	—	—	0,2181	—	0,1181	—	0,1181	0,0802
-0,8	0,2364	0,2363	0,2453	0,2454	0,1379	0,1339	0,1379	0,1339	0,0802
-0,9	0,3160	0,3161	0,3395	0,3399	0,1927	0,1883	0,1927	0,1883	0,0802
-1,0	0,9420	0,8833	1,2181	1,1090	1,2341	0,9451	1,2341	0,9451	0,0802
<i>Профиль II</i>									
0,0	0,1548	0,1493	0,1263	0,1219	0,0966	0,0823	0,0966	0,0823	0,0634
-0,1	0,1929	0,1919	0,1482	0,1466	0,0708	0,0659	0,0708	0,0659	0,0634
-0,2	0,2141	0,2119	0,1404	0,1387	0,0524	0,0480	0,0524	0,0480	0,0634
-0,25	—	—	—	0,1324	—	0,0433	—	0,0433	0,0634
-0,3	0,2189	0,2179	0,1282	0,1272	0,0446	0,0404	0,0446	0,0404	0,0634

μ	λ=0,40 мкм			λ=0,55 мкм			λ=1,06 мкм		
	Конечные разности	FN	Удвоение — сложение	Конечные разности	FN	Удвоение — сложение	Конечные разности	FN	Удвоение — сложение
-0,4	0,2169	0,2147	0,1217	0,1212	0,0382	0,0424	0,0389	0,0374	
-0,5	0,2160	0,2130	0,1205	0,1206	0,1163	0,0432	0,0422	0,0374	
-0,6	0,2194	0,2197	0,1253	0,1259	0,0468	0,0468	0,0487	0,0374	
-0,7	0,2309	0,2297	0,1384	0,1388	0,0541	0,0541	0,0539	0,0524	
-0,75	—	—	—	0,1499	0,1473	—	0,0680	0,0610	
-0,8	0,2585	0,2586	0,1665	0,1658	0,0680	0,0680	0,0943	0,0869	
-0,9	0,3219	0,3238	0,2262	0,2270	0,0943	0,0943	4,4607	1,9440	
-1,0	2,9248	2,0528	3,9528	2,3076	18,2936	4,4607	1,9440	9,6342	

Профиль III

0	0,1894	0,1799	0,1401	0,1235	0,0760	0,0559	0,0356
-0,1	0,2324	0,2281	0,1408	0,1376	0,0431	0,0364	0,0356
-0,2	0,2244	0,2210	0,1066	0,1031	0,0291	0,0240	0,0207
-0,25	—	—	—	0,0915	—	0,0212	0,0207
-0,3	0,2018	0,1997	0,0844	0,0831	0,0240	0,0195	0,0183
-0,4	0,1835	0,1821	0,0741	0,0733	0,0227	0,0183	0,0183
-0,5	0,1704	0,1696	0,0687	0,0688	0,0233	0,0187	0,0183
-0,6	0,1624	0,1628	0,0674	0,0681	0,0259	0,0209	0,0183
-0,7	0,1600	0,1603	0,0705	0,0709	0,0312	0,0254	0,0183
-0,75	—	—	—	0,0745	—	0,0292	0,0286
-0,8	0,1661	0,1659	0,0809	0,0801	0,0418	0,0347	0,0286
-0,9	0,1858	0,1878	0,1053	0,1061	0,6665	0,0581	0,0286
-1,0	6,3727	2,9477	6,2554	2,9605	2,5973	1,6263	3,2936

ТАБЛИЦА 21а. Пропущенная яркость для трех значений φ ; $\lambda = 0,55$ мкм

μ	$\varphi = 0^\circ$			$\varphi = 90^\circ$			$\varphi = 180^\circ$		
	Конечные разности	FN	Удвоенные — сложение	Конечные разности	FN	Удвоенные — сложение	Конечные разности	FN	Удвоенные — сложение
	$M_0 = -0,75$								
0,0	0,1331		0,1850	0,0540		0,0685	0,0390		0,0476
-0,1	0,1840			0,0689			0,0476		0,0546
-0,2	0,2435			0,0922			—		—
-0,25	—		0,2777	—			—		—
-0,3	0,3087			0,0930			0,0596		0,0687
-0,4	0,3790			0,1014			0,0626		0,0631
-0,5	0,4613		0,4638	0,1082		0,1076	0,0642		0,0687
-0,6	0,5755			0,1148			0,0656		—
-0,7	0,7182			0,1224			0,0680		—
-0,75	—		4,1963	—			—		—
-0,8	0,6584			0,1619			0,0735		—
-0,9	0,4288			0,1451			0,0862		—
-1,00	0,1646		0,1647	0,1646		0,1647	0,1647		—
	$M_0 = -0,50$								
0,0	0,1252	0,1229	0,1871	0,0343	0,0331	0,0445	0,0258	0,0249	0,0328
-0,1	0,1875	0,1868		0,0451	0,0448		0,0326	0,0324	
-0,2	0,2735	0,2725		0,0555	0,0552		0,0391	0,0388	
-0,25	—	0,3229	0,3242	—	0,0598		—	0,0416	0,0421
-0,3	0,3776	0,3759		0,0637	0,0637		0,0440	0,0439	

μ	$\varphi=0^\circ$				$\varphi=90^\circ$				$\varphi=180^\circ$			
	Конечные разности		Удвоение — сложение		Конечные разности		Удвоение — сложение		Конечные разности		Удвоение — сложение	
	FN		FN		FN		FN		FN		FN	
-0,4	0,4716	0,4915	0,0694	0,0692	0,0469	0,0467	0,0469	0,0467	0,0469	0,0467	0,0469	0,0467
-0,5	0,6884	0,6853	0,0725	0,0748	0,0476	0,0495	0,0476	0,0495	0,0476	0,0495	0,0476	0,0495
-0,6	0,4733	0,4853	0,0740	0,0739	0,0473	0,0473	0,0473	0,0473	0,0473	0,0473	0,0473	0,0473
-0,7	0,3591	0,3588	0,0749	0,0747	0,0468	0,0468	0,0468	0,0468	0,0468	0,0468	0,0468	0,0468
-0,75	—	0,3046	—	0,0750	—	0,0469	—	0,0469	—	0,0469	—	0,0462
-0,8	0,2563	0,2555	0,0755	0,0754	0,0474	0,0472	0,0474	0,0472	0,0474	0,0472	0,0474	0,0472
-0,9	0,1702	0,1696	0,0763	0,0762	0,0505	0,0501	0,0505	0,0501	0,0505	0,0501	0,0505	0,0501
-1,0	0,0771	0,0775	0,0775	0,0775	0,0771	0,0775	0,0771	0,0775	0,0771	0,0775	0,0771	0,0775
$\mu_0 = -0,25$												
0	0,0361	0,0121	0,0121	0,0121	0,0098	0,0098	0,0098	0,0098	0,0098	0,0098	0,0098	0,0098
-0,1	0,0644	0,0169	0,0169	0,0169	0,0135	0,0135	0,0135	0,0135	0,0135	0,0135	0,0135	0,0139
-0,2	0,1447	0,0230	0,0230	0,0230	0,0185	0,0185	0,0185	0,0185	0,0185	0,0185	0,0185	0,0213
-0,25	—	0,6374	—	0,0961	—	0,0961	—	0,0961	—	0,0961	—	0,0213
-0,3	0,1816	0,0285	0,0285	0,0285	0,0233	0,0233	0,0233	0,0233	0,0233	0,0233	0,0233	0,0287
-0,4	0,1754	0,0327	0,0327	0,0327	0,0269	0,0269	0,0269	0,0269	0,0269	0,0269	0,0269	0,0287
-0,5	0,1568	0,0348	0,0348	0,0348	0,0284	0,0284	0,0284	0,0284	0,0284	0,0284	0,0284	0,0287
-0,6	0,1317	0,0357	0,0357	0,0357	0,0285	0,0285	0,0285	0,0285	0,0285	0,0285	0,0285	0,0287
-0,7	0,1054	0,0357	0,0357	0,0357	0,0280	0,0280	0,0280	0,0280	0,0280	0,0280	0,0280	0,0277
-0,75	—	0,0928	—	0,0354	—	0,0354	—	0,0354	—	0,0354	—	0,0277
-0,8	0,0809	0,0351	0,0351	0,0351	0,0273	0,0273	0,0273	0,0273	0,0273	0,0273	0,0273	0,0277
-0,9	0,0589	0,0344	0,0344	0,0344	0,0271	0,0271	0,0271	0,0271	0,0271	0,0271	0,0271	0,0277
-1,0	0,0333	0,0334	0,0334	0,0334	0,0330	0,0330	0,0330	0,0330	0,0330	0,0330	0,0330	0,0330

ной атмосферы. Значения оптической толщины молекулярного рассеяния, приведенные в табл. 22, очень близки. Однако де Хаан показал, что если пренебречь лишь коэффициентом деполяризации в формуле Рэлея, то ошибки в значениях отраженной радиации могут составить несколько процентов.

Оптическая толщина $\tau_{aэр}$ аэрозольного рассеяния рассчитывалась по теории Ми при $\lambda = 0,4$ мкм и $\lambda = 1,06$ мкм (см. табл. 22), а индикатриса — для трех длин волн. Различия между $\tau_{aэр}$ у различных авторов оказались незначительными, единственное исключение — профили II и III при $\lambda = 1,06$ мкм, где в методе конечных разностей использованное значение было примерно на 10 % больше $\tau_{aэр}$, использованных в других методах. Этим объясняются большие различия значений яркости. В FN-методе и методе конечных разностей индикатрисы альbedo одинаковы; для метода сложения—удвоения она рассчитывалась независимо. Сравнения использованных индикатрис не проводилось. Для метода сложения—удвоения верхний предел интегрирования распределения частиц по размерам принимался равным 20 мкм для $\lambda = 0,55$ мкм и 40 мкм для $\lambda = 1,06$ мкм; предполагалось, что ошибка за счет пренебрежения некоторыми очень большими частицами не превысит 0,1 %. Однако альbedo однократного рассеяния и показатель асимметрии на 1—3 % отличались от значений, приведенных в Стандартной радиационной атмосфере для континентального аэрозоля при 0,55 мкм. Для FN и конечно-разностного метода верхний предел интегрирования по параметру Ми составил 780, он соответствует радиусу 68 мкм при $\lambda = 0,55$ мкм.

В методе сложения—удвоения атмосфера разделялась на пять однородных слоев: 0—2, 2—7, 7—12, 12—30 км и слой молекулярного рассеяния, расположенный выше 30 км, который в других методах вообще не учитывался. Далее, только для профиля I при $\lambda = 0,5$ мкм приземный слой разделялся на два подслоя (0—1 и 1—2 км). К каждому подслою применялось удвоение, а при комбинировании слоев — сложение. Вычисления проводились со 198 членами разложения Фурье при 20 значениях μ . Для сокращения времени расчетов использовались некоторые приближения, так чтобы значения яркости получились с точностью ± 1 %. Степень поляризации вычислялась с точностью $\pm 0,4$ % (она здесь не приводится, так как, к сожалению, сравнений произвести не удалось). В двух других методах поляризация не учитывалась. Не была выполнена проверка, как неучет поляризации отражается на значениях яркости, однако известно, что для аэрозольного рассеяния ошибка составляет около 1 %, а для чисто молекулярного рассеяния достигает 10 %. В конечно-разностном методе применялась дискретизация с 15 зенитными углами и 31 оптическими толщинами (исключение составляет профиль I при $\lambda = 0,40$ и 0,55 мкм (49 толщин); вычисления проводились с 30 членами разложения Фурье. Значения при заданных углах получались интерполяцией по вычислительной сетке с помощью кубических сплайн-функций. В FN-методе деление на однородные слои выполнялось так же,

ТАБЛИЦА 22. Оптическая глубина для FN-метода, метода удвоения — сложения (УС), метода конечных разностей (КР)

λ мкм	Профиль	Метод	$\tau_{\text{мол}}$	$\tau_{\text{азр}}$	$\tau_{\text{сумм}}$	
0,4	I	FN	0,3388	1,5191	1,8579	
		КР	0,3391	1,5184	1,8575	
	II	FN	0,3388	0,3191	0,6579	
		КР	0,3391	0,3203	0,6594	
	III	FN	0,3388	0,0931	0,4319	
		КР	0,3391	0,0937	0,4328	
0,55	I	FN	0,0947	1,0280	1,1227	
		УС	0,0968	1,0277	1,1245	
		КР	0,0949	1,0280	1,1229	
	II	FN	0,0947	0,2280	0,3227	
		УС	0,0968	0,2277	0,3245	
		КР	0,0949	0,2280	0,3229	
	III	FN	0,0947	0,0780	0,1727	
		УС	0,0968	0,0777	0,1745	
		КР	0,0949	0,0780	0,1729	
	1,06	I	FN	0,0069	0,4220	0,4288
			УС	0,0068	0,4217	0,4285
			КР	0,0069	0,4290	0,4359
II		FN	0,0069	0,1016	0,1084	
		УС	0,0068	0,1013	0,1081	
		КР	0,0069	0,1091	0,1160	
III		FN	0,0069	0,0559	0,0627	
		УС	0,0068	0,0550	0,0618	
		КР	0,0069	0,0637	0,0706	

как в методе сложения, с дальнейшим разделением на 20 км. Вычисления проводились с 50 членами Фурье при 24 углах μ . Попытки сравнить вычислительное время, необходимое при использовании различных методов, не предпринимались. Во всех методах необходимо было найти компромисс между «разумными затратами машинного времени» и «приемлемой точностью». Даже при незначительных изменениях точности расчетов машинное время может меняться в широких пределах.

7.2.2.2. Поток

Потоки на верхней и нижней границах атмосферы рассчитывались тремя методами: FN, конечных разностей, сложения—удвоения для тех же случаев, что и яркость. Результаты, вычисленные FN-методом и конечно-разностным методом, включают также уходящий поток на некоторых промежуточных уровнях. В случаях когда возможно сравнение, результаты трех названных методов согласуются в пределах 1% или лучше. Ниже мы будем использовать их в качестве «точных» значений потока, которые будут играть роль эталона в проверке приближенных методов. Всякий раз, когда результаты получены тремя методами или двумя из них, в качестве «точного значения» в таблице приводится

их среднее. Разумеется, если использовался лишь один метод, за эталон принимается значение потока, полученное непосредственно по этому методу.

Пять приближенных методов (Боннел) дали значения потоков для трех профилей, длин волн λ , равных 0,40, 0,55 и 1,06 мкм, и солнечных углов $\mu_0 = -1,0; -0,75; -0,5; -0,25$. Метод Эддингтона (E) (Шеттл и Вейнман, 1970), дельта-метод Эддингтона (DE), (Джозеф и др., 1976), модифицированный двухпоточковый (TS) (Лиоу, 1974), дельта-двухпоточковый (DTS) (Шэллер, 1979), практически улучшенный поточковый (PIF), являющийся вариантом двухпоточковых методов (Здановски и др., 1980), использовались в таком виде, в каком они представлены в указанных работах (см. список литературы к п. 4.2 и 4.3).

Полученные результаты сравниваются с точными значениями в табл. 23. В большинстве случаев дельта-метод Эддингтона, дельта-двухпоточковый метод и практически улучшенный поточковый дают результаты, отличающиеся от точных значений не более чем на несколько процентов, что вполне приемлемо для практических задач. При $\lambda=0,55$ мкм метод Эддингтона и двухпоточковый плохи для отраженного потока в случае $\mu_0 = -1$ (для профиля II ошибка составляет 20 %) и не очень точны для пропущенного потока при $\mu = -1$ (для профиля II ошибка около 10 %). В других случаях они работают так же хорошо, как и PIF и методы, основанные на дельта-приближении: при $\mu = -0,25$ они несколько лучше. Для профиля I, оптическая толщина

ТАБЛИЦА 23. Сравнение отраженного F^+ ($z = 30$ км) и рассеянного пропущенного F_D^- ($z = 0$) потоков, а также результирующих потоков F_{net} на верхней границе атмосферы ($z = 30$ км), на верхней границе пограничного слоя ($z = 2$ км) и у подстилающей поверхности ($z = 0$)

	μ_0	Точное значение	Метод				
			E	DE	TS	DTS	PIF
Профиль I, $\lambda = 0,40$ мкм							
F^+ ($z = 30$)	1,00	0,558	0,497	0,547	0,512	0,567	0,570
Относительная ошибка			-11,0	-2,1	-8,3	+1,6	2,1
F_D^- ($z = 0$)		0,713	0,705	0,719	0,741	0,743	0,689
Относительная ошибка			-1,1	0,8	3,9	4,2	-3,3
F_{net} ($z = 30$)		2,581	2,640	2,590	2,625	2,570	2,567
Относительная ошибка			2,3	0,4	1,7	-0,4	-0,6
F_{net} ($z = 2$)		2,566	2,626	2,577	2,612	2,556	2,553
Относительная ошибка			2,3	0,4	1,8	-0,4	-0,5
F_{net} ($z = 0$)		1,199	1,195	1,209	1,231	1,233	1,179
Относительная ошибка			-0,3	0,9	2,7	2,8	-1,6

	μ_0	Точное значение	Метод				
			E	DE	TS	DTS	PIF
$F^+ (z = 30)$	0,75	0,534	0,519	0,533	0,539	0,556	0,553
Относительная ошибка			-2,8	-0,1	2,0	4,1	3,6
$F_D^- (z = 0)$		0,479	0,493	0,504	0,515	0,520	0,480
Относительная ошибка			2,9	5,3	7,5	8,6	0,4
$F_{net} (z = 30)$		1,822	1,832	1,818	1,812	1,796	1,798
Относительная ошибка			0,6	-0,2	-0,5	-1,4	-1,3
$F_{net} (z = 2)$		1,807	1,819	1,805	1,800	1,783	1,785
Относительная ошибка			0,7	-0,1	-0,4	-1,3	-1,2
$F_{net} (z = 0)$		0,677	0,690	0,702	0,713	0,717	0,678
Относительная ошибка			2,0	3,7	5,3	6,0	0,2
$F^+ (z = 30)$	0,50	0,480	0,480	0,475	0,508	0,497	0,491
Относительная ошибка			0,1	-0,9	4,6	3,7	2,4
$F_D^- (z = 0)$		0,264	0,289	0,289	0,289	0,296	0,271
Относительная ошибка			9,4	9,2	13,0	12,0	2,5
$F_{net} (z = 30)$		1,091	1,086	1,090	1,064	1,069	1,075
Относительная ошибка			-0,5	-0,1	-2,4	-2,0	-1,5
$F_{net} (z = 2)$		1,077	1,074	1,079	1,053	1,057	1,063
Относительная ошибка			-0,3	0,1	-2,2	-1,8	-1,3
$F_{net} (z = 0)$		0,303	0,327	0,327	0,337	0,334	0,309
Относительная ошибка			8,2	8,0	11,0	10,0	2,2
$F^+ (z = 30)$	0,25	0,348	0,338	0,332	0,354	0,349	0,343
Относительная ошибка			-3,0	-4,5	1,8	0,2	-1,6
$F_D^- (z = 0)$		0,105	0,120	0,115	0,121	0,117	0,105
Относительная ошибка			14,0	10,0	16,0	11,0	0,9
$F_{net} (z = 30)$		0,437	0,442	0,448	0,426	0,431	0,437
Относительная ошибка			1,3	2,4	-2,5	-1,3	0,1
$F_{net} (z = 2)$		0,427	0,434	0,439	0,418	0,423	0,429
Относительная ошибка			1,7	2,9	-2,1	-0,9	0,5
$F_{net} (z = 0)$		0,105	0,120	0,116	0,121	0,117	0,106
Относительная ошибка			14,0	10,0	15,0	11,0	0,8
Профиль II, $\lambda = 0,40$ мкм							
$F^+ (z = 30)$	1,00	0,526	0,488	0,515	0,467	0,505	0,517
Относительная ошибка			-7,3	-2,2	-11,0	-4,1	-1,7
$F_D^- (z = 0)$		0,867	0,911	0,886	0,937	0,901	0,883
Относительная ошибка			5,00	2,2	8,1	3,9	1,8

	μ_0	Точное значение	Метод				
			E	DE	TS	DTS	PIF
$F_{net} (z = 30)$		2,609	2,650	2,622	2,670	2,632	2,620
Относительная ошибка			1,5	0,5	2,3	0,9	0,4
$F_{net} (z = 2)$		2,594	2,636	2,609	2,657	2,619	2,606
Относительная ошибка			1,6	0,6	2,4	1,0	0,5
$F_{net} (z = 0)$		2,493	2,538	2,513	2,564	2,528	2,510
Относительная ошибка			1,8	0,8	2,9	1,4	0,7
$F^+ (z = 30)$	0,75	0,519	0,504	0,510	0,492	0,505	0,512
Относительная ошибка			-3,0	-1,8	-5,2	-2,8	-1,4
$F_D^- (z = 0)$		0,750	0,769	0,764	0,786	0,774	0,762
Относительная ошибка			2,6	1,9	4,9	3,3	1,6
$F_{net} (z = 30)$		1,837	1,848	1,847	1,860	1,842	1,839
Относительная ошибка			0,6	0,3	1,2	0,6	0,1
$F_{net} (z = 2)$		1,822	1,835	1,829	1,847	1,835	1,827
Относительная ошибка			0,7	0,4	1,4	0,7	0,2
$F_{net} (z = 0)$		1,728	1,749	1,744	1,766	1,754	1,742
Относительная ошибка			1,2	0,9	2,2	1,5	0,8
$F^+ (z = 30)$	0,50	0,482	0,477	0,470	0,473	0,469	0,472
Относительная ошибка			-1,1	-2,5	-1,8	-2,6	-2,1
$F_D^- (z = 0)$		0,577	0,589	0,597	0,598	0,601	0,594
Относительная ошибка			2,2	3,4	3,7	4,3	3,1
$F_{net} (z = 30)$		1,089	1,089	1,096	1,093	1,097	1,094
Относительная ошибка			0,0	0,7	0,4	0,7	0,5
$F_{net} (z = 2)$		1,075	1,077	1,085	1,082	1,086	1,083
Относительная ошибка			0,3	0,9	0,7	1,0	0,7
$F_{net} (z = 0)$		0,997	1,011	1,018	1,019	1,022	1,016
Относительная ошибка			1,4	2,1	2,2	2,5	1,9
$F^+ (z = 30)$	0,25	0,360	0,349	0,343	0,352	0,347	0,345
Относительная ошибка			-3,0	-4,6	-2,3	-3,7	-4,2
$F_D^- (z = 0)$		0,318	0,332	0,337	0,333	0,336	0,335
Относительная ошибка			4,6	6,0	4,7	5,9	5,6
$F_{net} (z = 30)$		0,425	0,431	0,437	0,429	0,434	0,435
Относительная ошибка			1,3	2,7	0,8	1,9	2,3
$F_{net} (z = 2)$		0,415	0,423	0,428	0,421	0,426	0,427
Относительная ошибка			1,9	3,2	1,4	2,6	2,9
$F_{net} (z = 0)$		0,374	0,389	0,393	0,389	0,393	0,392
Относительная ошибка			4,0	5,2	4,1	5,1	4,8

μ_1	Точное значение	Метод				
		E	DE	TS	DTS	PIF

Профиль III, $\lambda = 0,40$ мкм

$F^+ (z = 30)$	1,00	0,475	0,452	0,458	0,443	0,451	0,458
Относительная ошибка			-4,7	-3,5	-6,7	-5,0	-3,5
$F_D^- (z = 0)$		0,608	0,629	0,623	0,640	0,631	0,623
Относительная ошибка			3,4	2,5	5,1	3,8	2,5
$F_{net} (z = 30)$		2,665	2,684	2,678	2,694	2,686	2,678
Относительная ошибка			0,7	0,5	1,1	0,8	0,5
$F_{net} (z = 2)$		2,650	2,671	2,665	2,681	2,673	2,665
Относительная ошибка			0,8	0,6	1,2	0,9	0,6
$F_{net} (z = 0)$		2,648	2,669	2,663	2,679	2,671	2,663
Относительная ошибка			0,8	0,6	1,2	0,9	0,6
$F^+ (z = 30)$	0,75	0,458	0,448	0,449	0,442	0,445	0,449
Относительная ошибка			-2,3	-2,0	-3,6	-3,0	-2,0
$F_D^- (z = 0)$		0,557	0,564	0,563	0,571	0,568	0,563
Относительная ошибка			1,4	1,1	2,6	2,0	1,1
$F_{net} (z = 30)$		1,898	1,903	1,902	1,910	1,907	1,902
Относительная ошибка			0,3	0,2	0,6	0,5	0,2
$F_{net} (z = 2)$		1,884	1,891	1,890	1,898	1,895	1,890
Относительная ошибка			0,4	0,3	0,7	0,6	0,3
$F_{net} (z = 0)$		1,881	1,889	1,887	1,896	1,893	1,887
Относительная ошибка			0,4	0,3	0,8	0,6	0,3
$F^+ (z = 30)$	0,50	0,422	0,418	0,416	0,415	0,414	0,416
Относительная ошибка			-1,0	-1,4	-1,6	-1,8	-1,4
$F_D^- (z = 0)$		0,472	0,473	0,475	0,476	0,477	0,475
Относительная ошибка			0,3	0,7	1,0	1,2	0,7
$F_{net} (z = 30)$		1,149	1,148	1,150	1,151	1,151	1,150
Относительная ошибка			-0,1	0,1	0,2	0,3	0,1
$F_{net} (z = 2)$		1,135	1,137	1,139	1,140	1,141	1,139
Относительная ошибка			0,1	0,3	0,4	0,5	0,3
$F_{net} (z = 0)$		1,133	1,135	1,137	1,138	1,139	1,137
Относительная ошибка			0,1	0,3	0,4	0,5	0,3
$F^+ (z = 30)$	0,25	0,326	0,318	0,316	0,319	0,317	0,316
Относительная ошибка			-2,5	-3,1	-2,2	-2,7	-3,1
$F_D^- (z = 0)$		0,308	0,313	0,315	0,313	0,314	0,315
Относительная ошибка			1,5	2,2	1,4	2,0	2,2

	μ_0	Точное значение	Метод				
			E	DE	TS	DTS	PIF
$F_{net} (z = 30)$		0,459	0,462	0,464	0,461	0,463	0,464
Относительная ошибка			0,6	1,0	0,4	0,8	1,0
$F_{net} (z = 2)$		0,449	0,454	0,456	0,453	0,455	0,456
Относительная ошибка			1,1	1,5	0,9	1,3	1,5
$F_{net} (z = 0)$		0,448	0,453	0,455	0,452	0,454	0,455
Относительная ошибка			1,0	1,5	0,9	1,3	1,5
Профиль I, $\lambda = 0,55$ мкм							
$F^+ (z = 30)$	1,00	0,279	0,215	0,280	0,205	0,281	0,295
Относительная ошибка			-23,0	0,3	-27	-0,9	5,7
$F_D^- (z = 0)$		0,763	0,785	0,776	0,831	0,802	0,757
Относительная ошибка			2,8	1,7	8,8	5,1	-0,9
$F_{net} (z = 30)$		2,863	2,925	2,860	2,935	2,859	2,845
Относительная ошибка			2,2	-0,1	2,5	-0,2	-0,6
$F_{net} (z = 2)$		2,852	2,915	2,850	2,926	2,849	2,835
Относительная ошибка			2,2	-0,1	2,6	-0,1	-0,6
$F_{net} (z = 0)$		1,785	1,807	1,798	1,853	1,824	1,779
Относительная ошибка			1,2	0,7	3,8	2,2	-0,3
$F^+ (z = 30)$	0,75	0,288	0,281	0,300	0,280	0,306	0,312
Относительная ошибка			-2,6	4,0	-2,8	6,2	8,2
$F_D^- (z = 0)$		0,570	0,593	0,601	0,624	0,620	0,585
Относительная ошибка			4,0	5,4	9,5	8,7	2,7
$F_{net} (z = 30)$		2,070	2,074	2,055	2,074	2,049	2,043
Относительная ошибка			0,2	-0,7	0,2	-1,0	-1,3
$F_{net} (z = 2)$		2,059	2,064	2,045	2,065	2,039	2,033
Относительная ошибка			0,2	-0,7	0,3	-1,0	-1,3
$F_{net} (z = 0)$		1,097	1,120	1,128	1,151	1,147	1,113
Относительная ошибка			2,1	2,8	5,0	4,5	1,4
$F^+ (z = 30)$	0,50	0,282	0,302	0,292	0,310	0,302	0,302
Относительная ошибка			7,3	3,6	9,9	7,0	7,0
$F_D^- (z = 0)$		0,351	0,387	0,392	0,404	0,402	0,379
Относительная ошибка			10,0	12,0	15,0	15,0	8,2
$F_{net} (z = 30)$		1,292	1,267	1,277	1,260	1,268	1,268
Относительная ошибка			-1,9	-1,2	-2,5	-1,9	-1,9
$F_{net} (z = 2)$		1,282	1,257	1,268	1,250	1,258	1,258
Относительная ошибка			-1,9	-1,1	-2,5	-1,8	-1,8

	μ_0	Точное значение	Метод				
			E	DE	TS	DTS	PIF
$F_{net}(z=0)$		0,517	0,553	0,558	0,570	0,569	0,546
Относительная ошибка			7,1	7,9	10,0	10,0	5,6
$F^+(z=30)$	0,25	0,230	0,240	0,225	0,250	0,235	0,232
Относительная ошибка			4,5	-1,9	8,9	2,4	1,2
$F_D^-(z=0)$		0,143	0,173	0,164	0,177	0,167	0,156
Относительная ошибка			21,0	15,0	24,0	17,0	9,1
$F_{net}(z=30)$		0,558	0,544	0,558	0,534	0,548	0,551
Относительная ошибка			-2,6	0,1	-4,4	-1,7	-1,2
$F_{net}(z=2)$		0,548	0,535	0,550	0,525	0,540	0,543
Относительная ошибка			-2,4	0,3	-4,2	-1,5	-1,0
$F_{net}(z=0)$		0,152	0,182	0,173	0,186	0,176	0,165
Относительная ошибка			20,0	14,0	23,0	16,0	8,6
Профиль II, $\lambda = 0,55$ мкм							
$F^+(z=30)$	1,00	0,207	0,166	0,202	0,137	0,188	0,203
Относительная ошибка			-20,0	-2,6	-34,0	-9,1	-2,0
$F_D^-(z=0)$		0,568	0,615	0,581	0,646	0,597	0,580
Относительная ошибка			8,3	2,3	14,0	5,0	2,1
$F_{net}(z=30)$		2,933	2,974	2,938	3,002	2,952	2,937
Относительная ошибка			1,4	0,2	2,3	0,6	0,1
$F_{net}(z=2)$		2,923	2,965	2,929	2,993	2,943	2,928
Относительная ошибка			1,4	0,2	2,4	0,7	0,1
$F_{net}(z=0)$		2,842	2,890	2,856	2,921	2,872	2,855
Относительная ошибка			1,7	0,5	2,8	1,1	0,5
$F^+(z=30)$	0,75	0,221	0,213	0,222	0,193	0,212	0,223
Относительная ошибка			-3,6	0,2	-13,0	-1,0	0,7
$F_D^-(z=0)$		0,529	0,530	0,523	0,552	0,534	0,522
Относительная ошибка			0,1	-1,2	4,3	0,9	-1,4
$F_{net}(z=30)$		2,135	2,141	2,133	2,161	2,142	2,132
Относительная ошибка			0,3	-0,1	1,2	0,4	-0,1
$F_{net}(z=2)$		2,124	2,132	2,123	2,152	2,133	2,122
Относительная ошибка			0,4	-0,0	1,3	0,4	-0,1
$F_{net}(z=0)$		2,060	2,062	2,055	2,084	2,066	2,054
Относительная ошибка			0,1	-0,2	1,2	0,3	-0,3
$F^+(z=30)$	0,50	0,234	0,245	0,232	0,233	0,226	0,232
Относительная ошибка			4,7	-0,9	-0,0	-3,1	-0,5

	μ_0	Точное значение	Метод				
			E	DE	TS	DTS	PIF
$F_D^-(z=0)$		0,429	0,430	0,444	0,444	0,450	0,443
Относительная ошибка			0,4	3,4	3,5	5,0	3,2
$F_{net}(z=30)$		1,336	1,325	1,338	1,336	1,343	1,337
Относительная ошибка			-0,8	0,1	-0,0	0,5	0,1
$F_{net}(z=2)$		1,326	1,315	1,328	1,327	1,334	1,328
Относительная ошибка			-0,8	0,2	0,1	0,6	0,1
$F_{net}(z=0)$		1,251	1,254	1,267	1,267	1,274	1,266
Относительная ошибка			0,2	1,3	1,3	1,8	1,2
$F^+(z=30)$	0,25	0,221	0,229	0,209	0,226	0,208	0,210
Относительная ошибка			3,5	-5,3	2,1	-5,8	-5,0
$F_D^-(z=0)$		0,292	0,289	0,306	0,293	0,308	0,305
Относительная ошибка			-1,1	4,8	0,6	5,7	4,6
$F_{net}(z=30)$		0,564	0,555	0,575	0,558	0,576	0,574
Относительная ошибка			-1,5	1,9	-1,0	2,1	1,8
$F_{net}(z=2)$		0,554	0,547	0,566	0,550	0,568	0,566
Относительная ошибка			-1,4	2,2	-0,8	2,4	2,0
$F_{net}(z=0)$		0,507	0,505	0,522	0,509	0,524	0,521
Относительная ошибка			-0,5	2,9	0,5	3,4	2,8

Профиль III, $\lambda = 0,55$ мкм

$F^+(z=30)$	1,00	0,162	0,137	0,151	0,123	0,142	0,151
Относительная ошибка			-15,0	-6,6	-24,0	-12,0	-6,6
$F_D^-(z=0)$		0,322	0,349	0,335	0,363	0,344	0,335
Относительная ошибка			8,4	4,1	13,0	6,8	4,1
$F_{net}(z=30)$		2,980	3,003	2,989	3,017	2,998	2,989
Относительная ошибка			0,8	0,3	1,3	0,6	0,3
$F_{net}(z=2)$		2,978	2,994	2,980	3,008	2,989	2,980
Относительная ошибка			0,8	0,3	1,3	0,6	0,3
$F_{net}(z=0)$		2,963	2,992	2,978	3,006	2,987	2,978
Относительная ошибка			1,0	0,5	1,5	0,8	0,5
$F^+(z=30)$	0,75	0,165	0,159	0,162	0,149	0,155	0,162
Относительная ошибка			-3,4	-1,4	-9,8	-5,2	-1,4
$F_D^-(z=0)$		0,315	0,313	0,310	0,324	0,316	0,310
Относительная ошибка			-0,6	-1,7	2,8	0,4	-1,7
$F_{net}(z=30)$		2,192	2,295	2,192	2,206	2,198	2,192
Относительная ошибка			0,1	-0,0	0,6	0,3	-0,0

	μ^0	Точное значение	Метод				
			E	DE	TS	DTS	PIF
$F_{net} (z = 2)$		2,183	2,186	2,183	2,197	2,189	2,183
Относительная ошибка			0,2	0,0	0,7	0,3	0,0
$F_{net} (z = 0)$		2,181	2,185	2,181	2,195	2,188	2,181
Относительная ошибка			0,2	0,0	0,7	0,3	0,0
$F^+ (z = 30)$	0,50	0,168	0,175	0,169	0,169	0,166	0,169
Относительная ошибка			4,2	0,7	0,3	-1,6	0,7
$F_D^- (z = 0)$		0,278	0,272	0,278	0,278	0,282	0,278
Относительная ошибка			-2,1	-0,0	0,3	1,4	-0,0
$F_{net} (z = 30)$		1,403	1,394	1,400	1,400	1,404	1,400
Относительная ошибка			-0,6	-0,2	-0,2	0,1	-0,2
$F_{net} (z = 2)$		1,393	1,385	1,391	1,392	1,395	1,391
Относительная ошибка			-0,6	-0,2	-0,1	0,1	-0,2
$F_{net} (z = 0)$		1,388	1,384	1,389	1,390	1,393	1,389
Относительная ошибка			-0,3	0,1	0,2	0,4	0,1
$F^+ (z = 30)$	0,25	0,162	0,171	0,160	0,168	0,159	0,160
Относительная ошибка			5,7	-0,8	4,2	-1,7	-0,8
$F_D^- (z = 0)$		0,223	0,210	0,221	0,213	0,222	0,221
Относительная ошибка			-5,6	-0,9	-4,4	-0,2	-0,9
$F_{net} (z = 30)$		0,624	0,613	0,623	0,615	0,625	0,623
Относительная ошибка			-1,8	-0,1	-1,4	0,1	-0,1
$F_{net} (z = 2)$		0,615	0,605	0,616	0,608	0,617	0,616
Относительная ошибка			-1,7	0,0	-1,2	0,3	0,0
$F_{net} (z = 0)$		0,615	0,604	0,614	0,606	0,616	0,616
Относительная ошибка			-1,9	-0,1	-1,4	0,1	-0,1
Профиль I, $\lambda = 1,06$ мкм							
$F^+ (z = 30)$	1,00	0,082	0,047	0,088	0,028	0,081	0,092
Относительная ошибка			-42,0	7,7	-66,0	-1,2	-13,0
$F_D^- (z = 0)$		0,429	0,454	0,430	0,485	0,445	0,425
Относительная ошибка			5,9	0,3	13,0	3,8	0,8
$F_{net} (z = 30)$		3,059	3,094	3,053	3,114	3,060	3,049
Относительная ошибка			1,1	-0,2	1,8	0,1	-0,3
$F_{net} (z = 2)$		3,051	3,087	3,046	3,107	3,053	3,042
Относительная ошибка			1,2	-0,2	1,8	0,1	-0,3
$F_{net} (z = 0)$		2,470	2,500	2,476	2,531	2,491	2,471
Относительная ошибка			1,2	0,2	2,4	0,8	0,0

	μ_0	Точное значение	Метод				
			E	DE	TS	DTS	PIF
$F^+ (z = 30)$	0,75	0,097	0,095	0,107	0,083	0,103	0,110
Относительная ошибка			-1,4	11,0	-14,0	6,6	14,0
$F_D^- (z = 0)$	0,367		0,376	0,374	0,398	0,385	0,370
Относительная ошибка			2,5	2,0	8,7	5,1	0,9
$F_{net} (z = 30)$	2,257		2,261	2,249	2,273	2,253	2,246
Относительная ошибка			0,1	-0,4	0,7	-0,2	-0,5
$F_{net} (z = 2)$	2,250		2,253	2,242	2,266	2,246	2,238
Относительная ошибка			0,2	-0,4	0,7	-0,2	-0,5
$F_{net} (z = 0)$	1,691		1,706	1,704	1,728	1,715	1,700
Относительная ошибка			0,9	0,8	2,2	1,5	0,5
$F^+ (z = 30)$	0,50	0,113	0,130	0,119	0,125	0,118	0,121
Относительная ошибка			15,0	5,0	11,0	4,1	7,1
$F_D^- (z = 0)$	0,274		0,287	0,298	0,301	0,305	0,295
Относительная ошибка			4,8	8,6	10,0	11,0	7,5
$F_{net} (z = 30)$	1,455		1,440	1,452	1,445	1,453	1,450
Относительная ошибка			-1,0	-0,2	-0,7	-0,1	-0,4
$F_{net} (z = 2)$	1,447		1,433	1,445	1,438	1,446	1,442
Относительная ошибка			-1,0	-0,2	-0,6	-0,1	-0,3
$F_{net} (z = 0)$	0,936		0,953	0,964	0,968	0,971	0,961
Относительная ошибка			1,9	3,0	3,4	3,8	2,7
$F^+ (z = 30)$	0,25	0,115	0,130	0,108	0,131	0,110	0,110
Относительная ошибка			13,0	-5,8	14,0	-4,4	-4,3
$F_D^- (z = 0)$	0,154		0,172	0,175	0,178	0,178	0,173
Относительная ошибка			12,0	14,0	15,0	16,0	12,0
$F_{net} (z = 30)$	0,667		0,655	0,677	0,654	0,675	0,675
Относительная ошибка			-1,8	1,5	-1,9	1,2	1,2
$F_{net} (z = 2)$	0,559		0,648	0,669	0,647	0,668	0,668
Относительная ошибка			-1,8	1,5	-1,9	1,3	1,3
$F_{net} (z = 0)$	0,293		0,313	0,316	0,319	0,320	0,314
Относительная ошибка			6,8	7,8	8,7	9,0	7,1
Профиль II, $\lambda = 1,06$ мкм							
$F^+ (z = 30)$	1,00	0,040	0,019	0,041	0,003	0,034	0,041
Относительная ошибка			-52,0	2,2	-92,0	14,0	2,8
$F_D^- (z = 0)$	0,230		0,240	0,219	0,256	0,226	0,219
Относительная ошибка			4,2	-4,8	11,0	-1,8	-4,9

	μ_0	Точное значение	Метод				
			F	DE	TS	DTS	PIF
$F_{net} (z = 30)$		3,101	3,122	3,101	3,138	3,107	3,101
Относительная ошибка			0,7	-0,0	1,2	0,2	-0,0
$F_{net} (z = 2)$		3,094	3,115	3,094	3,131	3,100	3,094
Относительная ошибка			0,7	0,0	1,2	0,2	-0,0
$F_{net} (z = 0)$		3,039	3,058	3,038	3,075	3,045	3,038
Относительная ошибка			0,8	0,1	1,4	0,4	0,1
$F^+ (z = 30)$	0,75	0,049	0,046	0,051	0,034	0,047	0,051
Относительная ошибка			6,8	4,1	-30,0	-5,5	4,5
$F_D^- (z = 0)$		0,219	0,208	0,204	0,221	0,209	0,203
Относительная ошибка			-4,6	-6,8	1,0	-4,4	-6,9
$F_{net} (z = 30)$		2,304	2,310	2,305	2,322	2,309	2,305
Относительная ошибка			0,2	0,0	0,8	0,2	0,0
$F_{net} (z = 2)$		2,297	2,203	2,298	2,315	2,302	2,298
Относительная ошибка			0,3	0,0	2,8	0,2	0,0
$F_{net} (z = 0)$		2,248	2,247	2,242	2,260	2,248	2,242
Относительная ошибка			-0,0	-0,2	0,5	-0,0	-0,2
$F^+ (z = 30)$	0,50	0,063	0,071	0,061	0,063	0,058	0,061
Относительная ошибка			11,0	-3,7	-0,1	-8,4	-3,4
$F_D^- (z = 0)$		0,184	0,175	0,185	0,183	0,188	0,184
Относительная ошибка			-5,0	0,2	-0,6	2,1	0,2
$F_{net} (z = 30)$		1,504	1,500	1,510	1,507	1,513	1,509
Относительная ошибка			-0,2	0,4	0,3	0,6	0,4
$F_{net} (z = 2)$		1,496	1,493	1,502	1,500	1,506	1,502
Относительная ошибка			-0,2	0,4	0,3	0,6	0,4
$F_{net} (z = 0)$		1,440	1,439	1,449	1,477	1,452	1,449
Относительная ошибка			-0,0	0,6	0,5	0,9	0,6
$F^+ (z = 30)$	0,25	0,078	0,088	0,067	0,085	0,066	0,067
Относительная ошибка			12,0	-14,0	7,9	-16,0	-14,0
$F_D^- (z = 0)$		0,148	0,134	0,153	0,138	0,155	0,153
Относительная ошибка			-9,5	3,4	-7,0	4,5	3,4
$F_{net} (z = 30)$		0,703	0,697	0,718	0,701	0,719	0,718
Относительная ошибка			-0,8	2,1	-0,3	2,3	2,1
$F_{net} (z = 2)$		0,696	0,690	0,711	0,694	0,712	0,711
Относительная ошибка			-0,7	2,3	-0,3	2,4	2,2
$F_{net} (z = 0)$		0,650	0,643	0,662	0,647	0,664	0,662
Относительная ошибка			-1,1	1,9	-0,5	2,1	1,9

	μ_0	Точное значение	Метод				
			E	DE	TS	DTS	PIF
$F^+ (z = 30)$	1,00	0,025	0,003	0,023	0	0,019	0,023
Относительная ошибка			-86,0	-6,8		-24,0	-6,7
$F_D^- (z = 0)$		0,162	0,178	0,159	0,191	0,163	0,159
Относительная ошибка			1,00	-2,1	18,0	0,6	-2,1
$F_{net} (z = 30)$		3,116	3,138	3,118	3,151	3,123	3,118
Относительная ошибка			0,7	0,1	1,1	0,2	0,1
$F_{net} (z = 2)$		3,109	3,131	3,111	3,144	3,116	3,111
Относительная ошибка			0,7	0,1	1,1	0,2	0,1
$F_{net} (z = 0)$		3,106	3,129	3,109	3,142	3,113	3,109
Относительная ошибка			0,7	0,1	1,2	0,3	0,1
$F^+ (z = 30)$	0,75	0,030	0,025	0,030	0,015	0,027	0,030
Относительная ошибка			-16,0	0,4	-49,0	-10,0	0,4
$F_D^- (z = 0)$		0,162	0,155	0,150	0,165	0,153	0,150
Относительная ошибка			-4,4	-7,3	1,7	-5,4	-7,3
$F_{net} (z = 30)$		2,324	2,331	2,326	2,341	2,329	2,326
Относительная ошибка			0,3	0,1	0,7	0,2	0,1
$F_{net} (z = 2)$		2,317	2,324	2,319	2,334	2,322	2,319
Относительная ошибка			0,3	0,1	0,7	0,2	0,1
$F_{net} (z = 0)$		2,319	2,322	2,317	2,332	2,320	2,317
Относительная ошибка			0,1	-0,1	0,6	0,1	-0,1
$F^+ (z = 30)$	0,50	0,038	0,046	0,036	0,039	0,034	0,036
Относительная ошибка			19,0	-5,0	2,6	-10,0	-5,0
$F_D^- (z = 0)$		0,146	0,130	0,140	0,137	0,142	0,140
Относительная ошибка			-11,0	-4,3	-6,2	-2,8	-4,3
$F_{net} (z = 30)$		1,529	1,525	1,534	1,531	1,536	1,534
Относительная ошибка			-0,3	0,3	0,1	0,5	0,3
$F_{net} (z = 2)$		1,522	1,518	1,527	1,524	1,529	1,527
Относительная ошибка			-0,2	0,4	0,2	0,5	0,4
$F_{net} (z = 0)$		1,520	1,516	1,525	1,522	1,527	1,525
Относительная ошибка			-0,2	0,4	0,2	0,5	0,4
$F^+ (z = 30)$	0,25	0,051	0,063	0,042	0,060	0,041	0,042
Относительная ошибка			23,0	-18,0	17,0	-20,0	-18,0
$F_D^- (z = 0)$		0,123	0,103	0,124	0,106	0,125	0,124
Относительная ошибка			-17,0	0,5	-14,0	1,4	0,6
$F_{net} (z = 30)$		0,730	0,723	0,744	0,726	0,745	0,744
Относительная ошибка			-1,1	1,8	-0,7	2,0	1,8
$F_{net} (z = 2)$		0,723	0,716	0,737	0,719	0,738	0,737
Относительная ошибка			-1,0	1,9	-0,6	2,0	1,9
$F_{net} (z = 0)$		0,721	0,714	0,735	0,717	0,736	0,735
Относительная ошибка			-1,0	1,9	-0,6	2,0	1,9

которого в приземном слое велика, рассеянный вниз поток и результирующий поток у поверхности земли всегда дают большую ошибку при малых μ_0 (при $\mu_0 = -0,25$ ошибка расчетов по методу PIF — около 10 %, по дельта-методу Эддингтона и дельта-двухпоточковому методу — 16 %, по методу Эддингтона и двухпоточковому методу — 20 %). Для $\lambda = 0,40$ мкм и $\lambda = 0,55$ мкм выводы оказываются аналогичными, только при больших погрешностях полученные результаты несколько точнее. Для $\lambda = 1,06$ мкм значения приземного потока в случае профиля I, $\mu_0 = -0,25$, становятся более точными, но ошибки в значениях отраженного потока для $\mu_0 = -1$ сильно возрастают (для метода Эддингтона — около 50 %, а для двухпоточкового метода — 100 %).

Приложение IА

Отражение от поверхности

Граничные условия на подстилающей поверхности можно представить в виде

$$I^+(\tau_i; \mu, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho(\mu, \varphi; \mu', \varphi') \mu' I^-(\tau_i; -\mu', \varphi') d\mu' d\varphi', \quad (1A.1)$$

где «двухнаправленный» коэффициент яркости зависит от направления падения (μ', φ) и отражения (μ, φ) и обычно является сложной функцией обоих направлений. Более того, коэффициент не очень хорошо изучен для разных видов покровов почвы, и здесь необходимы большие экспериментальные исследования.

Рассмотрим два предельных случая:

1) идеально отражающая поверхность, отвечающая закону Ламберта:

$$\rho(\mu, \varphi; \mu', \varphi') = \rho_L, \quad (1A.2)$$

где ρ_L — постоянная величина, равная альбедо подстилающей поверхности; этот предельный случай удобно использовать в качестве первого приближения для различных видов почв;

2) поверхность с зеркальным отражением:

$$\rho(\mu, \varphi; \mu', \varphi') = \delta(\mu - \mu') \delta(\varphi - \varphi' + \pi) \rho_F(\mu),$$

где ρ_F задается хорошо известным законом Френеля; по существу, таковы условия отражения от спокойной плоской поверхности. Для океанской поверхности отражение следует вычислить на основе закона Френеля с учетом формы взволнованной поверхности и переотражений. Присутствие пены учитывается с помощью диффузной составляющей отражения.

Приложение IБ

Взаимность и соотношения симметрии

Как и в любой физической теории, в теории радиационного переноса важную роль играют инвариантные свойства или трансформации. Здесь мы будем различать так называемые локальные инварианты (или соотношения) и глобальные инварианты. Первые имеют отношение к матрице однократного рассеяния P ; они индуцируют вторые, которые относятся к матрицам рассеяния и пропускания S и T .

1. ЛОКАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

Рэлеевское рассеяние (изотропные молекулы), рассеяние Рэлея—Кабанна (анизотропные молекулы) и рассеяние Ми (изотропные частицы), а также любую комбинацию этих типов рассеяния описывают в общем три основных соотношения:

универсальное соотношение

$$P(\tau; \mu, \mu'; \varphi - \varphi') = P(\tau; -\mu, -\mu'; \varphi' - \varphi), \quad (1B.1)$$

соотношение перестановки

$$P(\tau; \mu, \mu'; \varphi - \varphi') = g\tilde{P}(\tau; \mu', \mu; \varphi' - \varphi)g, \quad (1B.2)$$

соотношение обратимости

$$P(\tau; \mu, \mu'; \varphi - \varphi') = g^*\tilde{P}(\tau; -\mu', -\mu; \varphi' - \varphi)g^*. \quad (1B.3)$$

Из комбинации этих соотношений получаются четыре дополнительных зависимых соотношения:

$$P(\tau; \mu, \mu'; \varphi - \varphi') = g\tilde{P}(\tau; -\mu', -\mu; \varphi - \varphi')g, \quad (1B.4)$$

$$P(\tau; \mu, \mu'; \varphi - \varphi') = g^*\tilde{P}(\tau; \mu', \mu; \varphi - \varphi')g^*, \quad (1B.5)$$

$$P(\tau; \mu, \mu'; \varphi - \varphi') = gg^*P(\tau; \mu, \mu'; \varphi' - \varphi)g^*g, \quad (1B.6)$$

$$P(\tau; \mu, \mu'; \varphi - \varphi') = gg^*P(\tau; -\mu, -\mu'; \varphi - \varphi')g^*g. \quad (1B.7)$$

В этих выражениях тильда означает транспонирование матрицы; g и g^* — симметричные ортогональные матрицы, удовлетворяющие условию $pp^* = 1$ (единичная матрица), $p = g, g^*, gg^*$. Эти семь соотношений применимы независимо от представления, принятого для описания состояния поляризации. Однако явные выражения для g и g^* зависят от используемого представления. Так,

для представления Стокса \mathbf{g} и \mathbf{g}^* — диагональные матрицы с элементами $(1, 1, 1, -1)$ и $(1, 1, -1, 1)$ соответственно.

Операции в семи приведенных уравнениях совместно с операцией тождества образуют абелеву группу. Соответствующая таблица умножения показывает, что имеется 21 подгруппа четвертого порядка и 35 подгрупп третьего порядка. Системы из трех соотношений (1Б.5—1Б.7) и (1Б.1, 1Б.3, 1Б.6) можно использовать с точки зрения алгебраической и пространственно-временной симметрии соответственно. Все соотношения (кроме 1Б.1) могут быть объяснены только соображениями симметрии аргументов.

Мы ознакомили читателя с максимальным числом возможных соотношений. Следует отметить, что не все соотношения справедливы для любого типа частиц.

2. ГЛОБАЛЬНЫЕ ВАРИАНТЫ

Для неоднородной произвольной атмосферы в целом существует десять соотношений, из которых три являются независимыми

$$\mathbf{S}(\tau_1, 0; \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = \mathbf{g}\tilde{\mathbf{S}}(\tau_1, 0; \mu_0, \mu; \varphi - \varphi_0)\mathbf{g}, \quad (1Б.8)$$

$$\mathbf{S}(\tau_1, 0; \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = \mathbf{g}^*\tilde{\mathbf{S}}(\tau_1, 0; \mu_0, \mu; \varphi_0 - \varphi)\mathbf{g}^*, \quad (1Б.9)$$

$$\mathbf{S}(\tau_1, 0; \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = \mathbf{g}\mathbf{g}^*\mathbf{S}(\tau_1, 0; \mu, \mu_0; \varphi_0 - \varphi)\mathbf{g}^*\mathbf{g}, \quad (1Б.10)$$

$$\mathbf{S}(0, \tau_1; \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = \mathbf{g}\tilde{\mathbf{S}}(0, \tau_1; \mu_0, \mu; \varphi - \varphi_0)\mathbf{g}, \quad (1Б.11)$$

$$\mathbf{S}'(0, \tau_1; \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = \mathbf{g}^*\tilde{\mathbf{S}}(0, \tau_1; \mu_0, \mu; \varphi_0 - \varphi)\mathbf{g}^*, \quad (1Б.12)$$

$$\mathbf{S}(0, \tau_1; \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = \mathbf{g}\mathbf{g}^*\mathbf{S}(0, \tau_1; \mu, \mu_0; \varphi_0 - \varphi)\mathbf{g}^*\mathbf{g}, \quad (1Б.13)$$

$$\mathbf{T}(\tau_1, 0; \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = \mathbf{g}\mathbf{g}^*\mathbf{T}(\tau_1, 0; \mu, \mu_0; \varphi_0 - \varphi)\mathbf{g}^*\mathbf{g}, \quad (1Б.14)$$

$$\mathbf{T}(0, \tau_1; \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = \mathbf{g}\mathbf{g}^*\tilde{\mathbf{T}}(0, \tau_1; \mu, \mu_0; \varphi_0 - \varphi)\mathbf{g}^*\mathbf{g}, \quad (1Б.15)$$

$$\mathbf{T}(\tau_1, 0; \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = \mathbf{g}\tilde{\mathbf{T}}(0, \tau_1; \mu_0, \mu; \varphi - \varphi_0)\mathbf{g}, \quad (1Б.16)$$

$$\mathbf{T}(\tau_1, 0; \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = \mathbf{g}^*\tilde{\mathbf{T}}(0, \tau_1; \mu_0, \mu; \varphi_0 - \varphi)\mathbf{g}^*. \quad (1Б.17)$$

В то же время, если матрица индикатрисы этой неоднородной атмосферы симметрична по отношению к центральному уровню атмосферы, то можно получить десять дополнительных соотношений, из которых опять-таки только три будут независимыми (этот особый вид неоднородной атмосферы, конечно, включает в себе как частный случай однородную атмосферу):

$$\mathbf{S}(\tau_1, 0; \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = \mathbf{g}\tilde{\mathbf{S}}(0, \tau_1; \mu_0, \mu; \varphi_0 - \varphi)\mathbf{g}, \quad (1Б.18)$$

$$\mathbf{S}(\tau_1, 0; \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = \mathbf{g}^*\tilde{\mathbf{S}}(0, \tau_1; \mu_0, \mu; \varphi - \varphi_0)\mathbf{g}^*, \quad (1Б.19)$$

$$\mathbf{S}(\tau_1, 0; \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = \mathbf{g}\mathbf{g}^*\mathbf{S}(0, \tau_1; \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0)\mathbf{g}^*\mathbf{g}, \quad (1Б.20)$$

$$\mathbf{T}(\tau_1, 0; \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = \mathbf{g}\tilde{\mathbf{T}}(\tau_1, 0; \mu_0, \mu; \varphi_0 - \varphi)\mathbf{g}, \quad (1Б.21)$$

$$T(\tau_1, 0; \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = \mathbf{g}^* \tilde{T}(\tau_1, 0; \mu_0, \mu; \varphi - \varphi_0) \mathbf{g}^*, \quad (1Б.22)$$

$$T(0, \tau_1; \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = \mathbf{g} T(0, \tau_1; \mu_0, \mu; \varphi_0 - \varphi) \mathbf{g}, \quad (1Б.23)$$

$$T(0, \tau_1; \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = \mathbf{g}^* \tilde{T}(0, \tau_1; \mu_0, \mu; \varphi - \varphi_0) \mathbf{g}^*, \quad (1Б.24)$$

$$T(\tau_1, 0; \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = \mathbf{g} \mathbf{g}^* T(0, \tau_1; \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) \mathbf{g}^* \mathbf{g}, \quad (1Б.25)$$

$$S(\tau_1, 0; \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = S(0, \tau_1; \mu, \mu_0; \varphi_0 - \varphi), \quad (1Б.26)$$

$$T(\tau_1, 0; \mu, \mu_0; \varphi - \varphi_0) = T(0, \tau_1; \mu, \mu_0; \varphi_0 - \varphi). \quad (1Б.27)$$

У этих соотношений также имеются групповые свойства. Как и в случае с матрицей индикатрисы, здесь тоже следует отметить, что соотношения (1Б.8) — (1Б.27) составляют максимальное число возможных соотношений и что они могут быть объяснены только соображениями симметрии аргументов. Важнее всего, что приведенные двадцать уравнений применимы как к однократному рассеянию, так и к рассеянию любого порядка, к любому конечному накоплению порядков рассеяния и к полному многократному рассеянию (бесконечное накопление).

3. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Физические и модельные приложения

Пользуясь соображениями симметрии, можно быстро выполнить сравнение между результатами наблюдений и теорией (проверка либо качества наблюдений, либо теоретических соображений). Для этого можно использовать данные об излучении, отраженном или пропущенном облаком, или излучении, диффузно отраженном атмосферной планеты.

Вычислительные приложения

Приведенными соотношениями можно воспользоваться как для проверки точности вычислений, так и для сокращения вычислительной процедуры.

Их можно использовать для сведения четырехмерной задачи радиационного переноса к задаче с меньшим числом координат (однако это приложение успешно применяется только в случаях рассеяния типа Рэлея и Рэлея—Кабанна).

В методе матричного оператора (см. п. 3.9) и в методе удвоения (см. п. 3.10) уравнения (1Б.26) и (1Б.27) описывают связь между потоками, проходящими на верхнюю и нижнюю границы комбинируемых атмосферных слоев.

Приложение IV

Индикатриса рассеяния для атмосферы

1. РАССЕЙВАЮЩИЕ ЧАСТИЦЫ В ЗЕМНОЙ АТМОСФЕРЕ

В абсолютно чистой атмосфере рассеяние происходит только на молекулах воздуха* (рэлеевское рассеяние); соответствующая оптическая толщина меняется в пределах от 0,15 для изучения 500 нм до 1,0 в ближней ультрафиолетовой области. Другие рассеиватели — это твердые или жидкие частицы сферической или иной формы. Они характеризуются формой, размером и показателем преломления (с реальной и мнимой частями, последняя связана с поглощением). Обычно они полидисперсны вокруг некоторого среднего размера; их распределение по размерам описывается различными полуэмпирическими формулами.

В первом приближении эти частицы можно разделить на четыре группы:

— твердые аэрозоли (средний размер 0,1—1 мкм, неправильная форма, неоднородный состав, обычно мало данных о показателе преломления);

— водяные капли дымки (средний размер 0,1—1 мкм, форма сферическая, показатель преломления известен);

— водяные облачные капли (средний размер 1—10 мкм, форма сферическая, показатель преломления известен);

— ледяные облачные кристаллы (средний размер 1—10 мкм, форма неправильная, показатель преломления известен).

Эти частицы либо находятся преимущественно в нижнем слое атмосферы (дымки, аэрозоли), либо сконцентрированы в ограниченных слоях (слой стратосферных аэрозолей, облака). Изменение концентрации с высотой вынуждает нас считать атмосферу неоднородной, но следует помнить, что вертикальное распределение частиц, как правило, плохо известно.

Оптическая толщина, характерная для этих частиц, изменяется от 0,1 для весьма чистой атмосферы до 100 для мощной облачности.

* Выражение «рассеяние на молекулах» используется для краткости. В действительности рассеяние происходит не на молекулах, а на флуктуациях плотности атмосферы. (Прим. ред. пер.)

2. РЭЛЕЕВСКОЕ РАССЕЯНИЕ (ИЗОТРОПНЫЕ МОЛЕКУЛЫ)

Рэлеевская матрица рассеяния, использующая параметры Стокса (I, Q, U, V), имеет вид

$$P(\theta) = \frac{3}{4} \begin{vmatrix} 1 + \cos^2 \theta & \cos \theta^2 - 1 & 0 & 0 \\ \cos \theta^2 - 1 & 1 + \cos^2 \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \cos \theta \end{vmatrix}, \quad (1B.1)$$

а соответствующая индикатриса — вид

$$p(\theta) = \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \theta). \quad (1B.2)$$

Показатель рассеяния единичного объема газа, содержащего N молекул, описывается выражением

$$\sigma_s = \frac{8\pi^3}{3} \frac{(n^2 - 1)^2}{\lambda^4 N}, \quad (1B.3)$$

где n — реальный микроскопический показатель преломления газа.

Для анизотропных молекул необходима модификация формул (1B.1) и (1B.3), но в большинстве атмосферных задач этим эффектом можно пренебречь.

3. РАССЕЯНИЕ МИ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ

3.1. Одна частица

Параметр размера частицы, часто называемой параметром Ми, равен $a = 2\pi r/\lambda$, где r — радиус частицы, λ — длина волны излучения. Для отдельной частицы матрица рассеяния, записанная с помощью параметра Стокса, имеет вид

$$P(r, \theta) = \frac{\lambda^2}{2\pi\sigma(r)} \times \begin{vmatrix} S_1 S_1^* + S_2 S_2^* & S_2 S_2^* - S_1 S_1^* & 0 & 0 \\ S_2 S_2^* - S_1 S_1^* & S_1 S_1^* + S_2 S_2^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_2 S_1^* + S_1 S_2^* & i(S_2 S_1^* - S_1 S_2^*) \\ 0 & 0 & i(S_1 S_2^* - S_2 S_1^*) & S_2 S_1^* + S_1 S_2^* \end{vmatrix}, \quad (1B.4)$$

а индикатриса рассеяния — вид

$$p(r, \theta) = \frac{\lambda}{2\pi\sigma(r)} (S_1 S_1^* + S_2 S_2^*), \quad (1B.5)$$

где S_1 и S_2 — функции от ϑ , заданные рядами Ми:

$$S_1(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(a_n \frac{dP_n^1}{d\vartheta} + b_n \frac{P_n^1}{\sin\vartheta} \right), \quad (1B.6)$$

$$S_2(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(a_n \frac{P_n^1}{\sin\vartheta} + b_n \frac{dP_n^1}{d\vartheta} \right), \quad (1B.7)$$

P_n^1 — присоединенный полином Лежандра; a_n и b_n — коэффициенты, являющиеся функциями α и комплексного коэффициента преломления частицы m ; S_i^* — число, комплексно сопряженное с S_i .

Коэффициенты рассеяния и ослабления равны соответственно

$$\frac{\sigma_s(r)}{\pi r^2} = \frac{2}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(a_n^2 + b_n^2), \quad (1B.8)$$

$$\frac{\sigma_e(r)}{\pi r^2} = \frac{2}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{Re}(a_n + b_n). \quad (1B.9)$$

Число членов в рядах (1B.6) и (1B.7), которыми нельзя пренебречь, равно приблизительно $(2\alpha + 3)$.

Индикатриса рассеяния, имеющая вид (1B.5), может быть преобразована аналитическим путем в ряд по полиномам Лежандра типа (1.38) с тем же числом членов $(2\alpha + 3)$.

3.2. N полидисперсных частиц

Обозначим распределение по размерам $n(r)$. Тогда полное число частиц равно

$$N = \int_0^{\infty} n(r) dr.$$

Коэффициенты рассеяния и ослабления для системы частиц имеют вид

$$\sigma_s = \int_0^{\infty} \sigma_s(r) n(r) dr, \quad (1B.10)$$

$$\sigma_e = \int_0^{\infty} \sigma_e(r) n(r) dr, \quad (1B.11)$$

где $\sigma_s(r)$ и $\sigma_e(r)$ — коэффициенты для одной частицы, определенные формулами (1B.8) и (1B.9).

Индикатриса рассеяния системы получается из индикатрисы рассеяния отдельной частицы (1B.5).

$$p(\vartheta) = \frac{1}{\sigma_s} \int_0^{\infty} n(r) \sigma_s(r) p(r, \vartheta) dr. \quad (1B.12)$$

Аналогичные соотношения справедливы для матрицы рассеяния.

4. РАССЕЯНИЕ НЕСФЕРИЧЕСКИМИ ЧАСТИЦАМИ

Для частицы простой геометрической формы типа кристаллов льда иногда можно развить теорию Ми, но обычно задача рассеяния несферическими частицами решается только путем непосредственного измерения рассеяния.

Часто используют весьма грубое допущение, которое заключается в том, что неправильные произвольно ориентированные частицы рассеивают так же, как сферические частицы того же размера, и с тем же показателем преломления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ЧАСТИ I

В большинстве теоретических работ нелегко отделить методы, посвященные только переносу нейтронов, от методов, пригодных для переноса излучения. В книге «Hendry, Lathorp et al., Bibliography of Neutral Particle Transport Theory» (Los Alamos Report, L. A. 4287, MS 1970) содержится 1849 ссылок на работы в этой области.

I. Учебники и общие обзоры

Амбарцумян В. А., Мусталь Э. Р., Северный А. Б., Соболев В. В. Теоретическая астрофизика.— М.: Гостехтеоретиздат, 1952. 635 с.

* Зеге Э. П., Иванов А. П., Кацев И. Л. Перенос изображения в рассеивающей среде.— Минск: Наука и техника, 1985. 327 с.

Иванов А. П. Оптика рассеивающих сред.— Минск: Наука и техника, 1969.

Иванов В. В. Перенос излучения и спектры небесных тел.— М.: Наука, 1969.

Кастий Дж., Калаба Р. Е. Методы погружения в прикладной математике/Пер. с англ.— М.: Мир, 1976. 223 с.

Кондратьев К. Я. (ред.). Радиационные характеристики атмосферы и поверхности Земли.— Л.: Гидрометеоздат, 1969. 212 с.

Кондратьев К. Я., Авасте О. А., Федорова М. П., Якишева К. Е. Радиационное поле Земли как планеты.— Л.: Гидрометеоздат, 1967. 359 с.

Лиюу К. М. Основы радиационных процессов в атмосфере/Пер. с англ.— Л.: Гидрометеоздат, 1985. 376 с.

* Мак-Картни Э. Оптика атмосферы.— М.: Мир, 1979. 421 с.

* Масленников М. В., Сушкевич Т. А. (ред.). Численное решение задач атмосферной оптики.— М.: Изд. ИПМ АН СССР, 1984. 234 с.

Минин И. Н. Теория переноса излучения в атмосферах планет.— М.: Наука, 1988. 264 с.

Сивков С. И. Методы расчетов характеристик солнечной радиации.— Л.: Гидрометеоздат, 1968. 231 с.

Соболев В. В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет.— М.: Гостехтеоретиздат, 1956. 320 с.

Соболев В. В. Рассеяния света в атмосферах планет.— М.: Наука, 1972.

* Соболев В. В. Курс теоретической астрофизики. 3-е изд.— М.: Наука, 1985.

Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии/Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1953. 431 с.

Bellman, R., editor, G. Birkhoff, and I. Abu Shumays (1969): *Transport Theory*, SIAM-AMS, AMS Proceedings, Providence, Rhode Island.

Bellman, R. E., H. H. Kagiwada, R. E. Kalaba, and M. C. Prestrud (1964): *Invariant Imbedding and Time-Dependent Transport Processes*, American Elsevier, New York.

Bellman, R. E., R. E. Kalaba, M. C. Prestrud (1963): *Invariant Imbedding and Radiative Transfer in Slabs of Finite Thickness*, American Elsevier, New York.

Busbridge, I. W. (1960): *The Mathematics of Radiative Transfer*, Cambridge University Press, London.

Case, K. M., and P. F. Zweifel (1967): *Linear Transport Theory*, Addison Wesley, Reading, Massachusetts.

Davison, B. (1958): *Neutron Transport Theory*, Clarendon Press, Oxford.

Goulard, P., editor, S. M. Scala, and R. N. Thomas (1968): *Radiative Energy Transfer*, Proceeding of the Symposium on Interdisciplinary Aspects of Radiative Energy Transfer (Philadelphia), Pergamon Press, New York.

Hopf, E. (1934): *Mathematical Problems of Radiative Equilibrium*, Cambridge University Press, London.

Hunt, G. E., editor (1971): *Transport Theory Atlas Symposium No. 3*, Proc. of the Symposium of Interdisciplinary Applications of Transport Theory (Oxford); *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 11, 511—1033.

Kourganoff, V. (1952): *Basic Methods in Transfer Problems*, Clarendon Press, Oxford.

* Звездочкой отмечены работы, добавленные к списку литературы редактором перевода. (Прим. ред. пер.)

Kuriyan, J. G., editor (1973): *Proc. of the UCLA Int. Conference on Radiation and Remote Probing of the Atmosphere*, Western Periodicals Comp., Los Angeles, California.

Ozisik, M. N. (1973): *Radiative Transfer and Interactions with Conduction and Convection*, J. Wiley, New York.

Preisendorfer, R. W. (1965): *Radiative Transfer on Discrete Spaces*, Pergamon Press, New York.

Sanchez, R., and N. J. McCormick (1982): A Review of Neutron Transport Approximations, American Nuclear Society Critical Reviews Nr. 11, *Nuc. Sci. Eng.* 80, 481—535.

Van de Hulst, H. C. (1980): *Multiple Light Scattering. Tables, Formulas and Applications*, Vols. 1 and 2, Academic Press, New York.

2.1. Метод сингулярной собственной функции

Case, K. M., and P. F. Zweifel (1967): *Linear Transport Theory*, Addison Wesley, Reading, Massachusetts.

Kaper, H. G. (1966): One Speed Transport Theory with Anisotropic Scattering—Application to the Slab Albedo Problem—Part I, Theory; Report TW-37, Mathematisch Instituut, University of Groningen, The Netherlands.

Kaper, H. G., and G. K. Leaf (1971): A Survey of Approximation Procedures for the Numerical Solution of the Neutron Transport Equation, Report ANL 7779, Argonne National Laboratory, Illinois.

Kaper, H. G., and G. K. Leaf (1971): A Survey of Approximation Procedures Theory With Anisotropic Scattering—Part II: Numerical Evaluation of the Exact Slab Albedo Problem Solution; Report TW-65, Mathematisch Instituut, University of Groningen, The Netherlands.

Kaper, H. G., J. K. Shultis, and J. G. Veninga (1970): Numerical Evaluation of the Slab Albedo Problem Solution in One Speed Anisotropic Transport Theory, *J. Comput. Phys.* 6, 288—313.

Kuscer, I., and N. J. McCormick (1973): Some Analytical Results for Radiative Transfer in Thick Atmospheres, Proceedings UCLA International Conference on Radiation and Remote Probing of the Atmosphere, 196—226.

McCormick, N. J., and I. Kuscer (1966): Bi Orthogonality Relations for Solving Half-Space Transport Problems, *J. Math. Phys.* 7, 2036—2045.

McCormick, N. J., and I. Kuscer (1973): Singular Eigenfunctions Expansions in Neutron Transport Theory, *Adv. Nuc. Sci. Tech.* 7, 181—282 (contains an extended list of references).

Pahor, S., and P. F. Zweifel (1969): Invariant Imbedding and Case Eigenfunctions, *J. Math. Phys.* 10, 581—589.

Schnatz, T. W., and C. E. Siewert (1971): On the Transfer of Polarized Light in Rayleigh-Scattering Half-Spaces With True Absorption, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 152, 491—508.

Schultis, J. K., and H. G. Kaper (1969): Greenhouse Effect in a Finite Anisotropically Scattering Atmosphere, *Astron. Astrophys.* 3, 110—121.

Siewert, C. E. (1972): On the Half Range Orthogonality Theorem Appropriate to the Scattering of Polarized Light, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 12, 683—694.

Van de Hulst, H. C. (1970): The Spectrum of the Anisotropic Transfer Equation an Arbitrary Scattering Function, *Bull. Astron. Inst. Nether.* 20, 77—86.

Van de Hulst, H. C. (1970): The Spectrum of the Anisotropic Transfer Equation, *Astron. Astrophys.* 9, 366—373.

2.2. Метод Венера-Хопфа

Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Системы интегральных уравнений для полулучей, базирующиеся на разности аргументов.—Успехи мат. наук, 1958.

* Фок В. А. О некоторых интегральных уравнениях математической физики.—Математический сборник, 1944, т. 14 (56), № 1—2, с. 3—50.

Hopf, E. (1934): *Mathematical Problems of Radiative Equilibrium*, Cambridge University Press, London.

Krein, M. G. (1958) (in Russian): Integral Equations on a Half-Line With Kernel Differences of the Arguments, *Usp. Math. Nauk.* (English translation *Amer. Math. Soc. Transl.* 22, 163—228, 1962.)

Martin, B. J. (1971): On a New Integral Equation Arising in the Theory of Radiative Transfer, *SIAM J. Appl. Math.* 20, 703—713.

Williams, M. M. R. (1973): The Wiener-Hopf Technique: An Alternative to the Singular Eigenfunction Method, *Adv. Nuc. Sci. Techn.* 7, 283—327 (contains an extended list of references).

2.3. Метод матрицы переноса

Aronson, R. (1970): Transfer Matrix Solution of Some One- and Two-Medium Transfer Problems in Slab Geometry, *J. Math. Phys.* 11, 931—940.

Aronson, R. (1971): Relation Between the Transfer Matrix Method and Case's Method, *Transport Theory Stat. Phys.* 1, 209—224.

Aronson, R. (1972): Travelling Mode Solution of Transport Theory Problems by Inspection, *Transport Theory Stat. Phys.* 2, 181—196.

Aronson, R. (1972): General Solution for Polarized Radiation in a Homogeneous-Slab Atmosphere, *Astrophys. J.* 177, 411—421.

Aronson, R. (1973): One-Speed Neutron Transport Problems, Part I: Exact Transfer Matrix Formulation, *Nucl. Sci. Eng.* 51, 157—165.

Aronson, R., and D. L. Yarmush (1966): Transfer-Matrix Method for Gamma-Ray and Neutron Penetration, *J. Math. Phys.* 7, 221—237.

Caroll, G., and R. Aronson (1973): One-Speed Neutron Transport Problems, Part II: Slab Transmission and Reflection and Finite Reflector Critical Problems, *Nucl. Sci. Eng.* 51, 166—179.

Pahor, S., A. Suhadolc, and E. Zakrajsek (1974): A New Method for Solving the Matrix Transport Equation in Radiative Transfer, Publication of the Department of Mathematics VI 1971-73, University of Ljubljana, Yugoslavia, 51—80.

2.4. Приведение к H -функции или к X - и Y -функциям

Амбарцумян В. А. Рассеяние света планетными атмосферами.— *Астрономический журнал*, 1942, т. 19, с. 30.

Амбарцумян В. А. Диффузное отражение света туманной средой.— *Доклады АН СССР*, 1943, т. 38, с. 229—232.

Амбарцумян В. А., Мусталь Э. Р., Северный А. Б., Соболев В. В. Теоретическая астрофизика.— М.: Гостехтеориздат, 1952. 635 с.

Колесов А. К. Результаты расчетов H -функции для различных индикатрис рассеяния различной элонгации.— *Труды Астрономической обсерватории ЛГУ*, 1971, т. 28, № 3.

Колесов А. К. Отражение и пропускание света полубесконечной атмосферы для анизотропного рассеяния.— *Труды Астрономической обсерватории ЛГУ*, 1972, т. 29.

Колесов А. К., Смоктий О. И. Диффузное отражение и пропускание света полубесконечной атмосферой с четырехчленной индикатрисой рассеяния.— *Астрономический журнал*, 1971, т. 48, с. 1013.

Колесов А. К., Соболев В. В. Перенос излучения в полубесконечной среде при трехчленной индикатрисе рассеяния.— *Труды Астрономической обсерватории ЛГУ*, 1969, т. 26, № 3, с. 3—19.

Лоскутов В. М. Вычисление радиационного поля для монохроматического изотропного рассеяния, II. Функции Амбарцумяна и $\varphi(\eta, \tau_0)$ и $\varphi(\eta, \tau_0)$ и их моменты.— *Астрофизика*, 1973, т. 9, № 3, с. 256—267.

Лоскутов В. М. Диффузное отражение света от полубесконечной атмосферы с трехчленной индикатрисой рассеяния.— *Труды Астрономической обсерватории ЛГУ*, 1973, т. 29, с. 33.

Соболев В. В. Курс по радиационному переносу.— М.: Гостехиздат, 1956.

Соболев В. В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет.— М.: Гостехиздат, 1956, 320 с.

Abhyankar, K. D., and A. L. Fymat (1969): Linearization of the Global Equations of Radiative Transfer, Jet Propulsion Laboratory Report SPS 37-56, Vol. III, 50-52, Pasadena, California.

- Abhyankar K. D., and A. L. Fymat (1969): Diffuse Reflection by a Semi-Infinite Nonconservative Rayleigh Atmosphere, *Bull. Amer. Astron. Soc.* 1, 179.
- Abhyankar K. D., and A. L. Fymat (1969): Effect of Linearization of the Transfer Problem on the Computations of the Emergent Radiation Field, Jet Propulsion Laboratory Report SPS 37-57, Vol. III, 28—30, Pasadena, California.
- Abhyankar K. D., and A. L. Fymat (1970): On the Solution H_1 (μ) of Ambarzumian-Chandrasekhar H-Equation, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 9, 1563—1566, 1969; 10, 705.
- Abhyankar K. D., and A. L. Fymat (1970): Imperfect Rayleigh Scattering in a Semi-Infinite Homogeneous Atmosphere, *Astron. Astrophys.* 4, 101—110, 5, 491.
- Abhyankar K. D., and A. L. Fymat (1970): Theory of Radiative Transfer in Inhomogeneous Atmospheres: III. Application of the Perturbation Method to Azimuth-Independent Terms, *Astrophys. J.* 159, 1009—1018.
- Abhyankar K. D., and A. L. Fymat (1970): Theory of Radiative Transfer in Inhomogeneous Atmospheres: IV. Application of the Matrix Perturbation Method to a Semi-Infinite Atmosphere, *Astrophys. J.* 159, 1019—1028.
- Abhyankar K. D., and A. L. Fymat (1971): Tables of Auxiliary Functions for Non-Conservative Rayleigh Phase Matrix in Semi-Infinite Atmospheres, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 23, No. 195, 35—192.
- Adams, C. N., and G. W. Kattawar (1970): Solutions of the Equations of Radiative Transfer by an Invariant Imbedding Approach, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 10, 341.
- Bellman, R., H. Kagiwada, R. Kalaba, and S. Ueno (1966): Numerical Results for Chandrasekhar's X and Y Functions of Radiative Transfer, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 6, 479—500.
- Bellman, R., P. T. Y. Poon, and S. Ueno (1973): Numerical Results for Finite Order X and Y Functions of Radiative Transfer, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 13, 1273.
- Bond, G. R., and C. E. Siewert (1971): On the Nonconservative Equation of Transfer for a Combination of Rayleigh and Isotropic Scattering, *Astrophys. J.* 164, 97—110.
- Busbridge, I. W. (1960): *The Mathematics of Radiative Transfer*, Cambridge University Press, New Rochelle, New York.
- Busbridge, I. W., and S. E. Orchard (1967): Reflection and Transmission of Light by a Thick Atmosphere According to a Phase Function $1 + \chi \cos \theta$, *Astrophys. J.* 149, 655—664.
- Busbridge, I. W., and S. E. Orchard (1968): Reflection and Transmission of Light by Thick Atmospheres of Pure Scatters With a Phase Function $1 + \sum_{n=1}^N \tilde{\omega}_n P_n(\cos \theta)$, *Astrophys. J.* 154, 729—739.
- Cadwell, J. (1971): The W- and Y-Functions of Chandrasekhar, *Astrophys. J.* 163, 111.
- Carlstedt, J. L., and T. W. Mullikin (1966): Chandrasekhar's X- and Y-Functions, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 12, No. 113, 449.
- Chandrasekhar, S. (1950): *Radiative Transfer*, Oxford University Press, Oxford (reprinted by Dover Publications, Mineola, New York, 1960).
- Chandrasekhar, S., and D. Elbert (1954): The Illumination and Polarization of the Sunlit Sky on Rayleigh Scattering, *Trans. Amer. Phil. Soc.* 44, 643.
- Coulson, K. L. (1959): Characteristics of the Radiation Emerging From the Top of a Rayleigh Atmosphere, *Plan. Space Sci.* 1, 265—276.
- Coulson, K. L., J. V. Dave, and Z. Sekera (1960): *Tables Related to Radiation Emerging From a Planetary Atmosphere With Rayleigh Scattering*, University of California Press, Los Angeles.
- Domke, H. (1971) (in Russian): Radiative Transfer With Rayleigh Scattering: I. Semi-Infinite Atmosphere, *Astron. Zh.* 48, 341 (English translation *Sov. Astron.* 15, 266, 1971); II. Finite Atmosphere, *Astron. Zh.* 48, 777 (English translation *Sov. Astron.* 15, 616, 1971).
- Fymat, A. L. (1967): Theory of Radiative Transfer in Atmospheres Exhibiting Polarized Resonance Fluorescence, Pp. D. Thesis, University of California at Los Angeles.

Fymat, A. L. (1971): Tables of Auxiliary Functions for Anisotropic Molecular Scattering and Resonance Fluorescence Line Scattering in Semi-Infinite Atmospheres, Jet Propulsion Laboratory Technical Report, Pasadena, California.

Fymat, A. L., and K. D. Abhyankar (1968): Transfer of Radiation Through Inhomogeneous Slab Atmospheres, *Astron. J.* 73, S. 178.

Fymat, A. L., and K. D. Abhyankar (1969): Transfer of Radiation Through Atmospheres With Variable Albedo for Single Scattering, *Bull. Am. Astron. Soc.* 1, 219.

Fymat, A. L., and K. D. Abhyankar (1969): Iteration Scheme for Solving the Linearized X- and H-Equations, JPL Report SPS 37-56, Vol. III, 53-55; SPS 37-57, Bol. III, 35, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California.

Fymat, A. L., and K. D. Abhyankar (1969): Error Analysis of the Linearization Method in Radiative Transfer Theory, JPL Report SPS 37-57, Vol. III, 25-28, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California.

Fymat, A. L., and K. D. Abhyankar (1969): Theory of Radiative Transfer in Inhomogeneous Atmospheres: I. Perturbation Method, *Astrophys. J.* 158, 315-324.

Fymat, A. L., and K. D. Abhyankar (1969): Theory of Radiative Transfer in Inhomogeneous Atmospheres: II Application of the Perturbation Method to a Semi-Infinite Atmosphere, *Astrophys. J.* 158, 325-335.

Fymat, A. L., and K. D. Abhyankar (1970): Imperfect Rayleigh Scattering in a Semi-Infinite Atmosphere, *Astron. Astrophys.* 4, 101, 1970; 5, 49.

Fymat, A. L., and K. D. Abhyankar (1970): An Alternate System of Ueno's X- and Y-Equations for Inhomogeneous Atmospheres, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 10, 49-54.

Fymat, A. L., and K. D. Abhyankar (1970): Transfer of Partially Polarized Radiation Through Finite Inhomogeneous Atmospheres, *Bull. Am. Astron. Soc.* 2, 193.

Fymat, A. L., and K. D. Abhyankar (1971): Effect of Absorption on Scattering by Planetary Atmospheres, *J. Geophys. Res.* 76, 732-735.

Harris, D. L. (1957): Diffuse Reflection From Planetary Atmospheres, *Astrophys. J.* 126, 408.

Kahle, A. B. (1968): Intensity of Radiation From a Rayleigh Scattering Atmosphere, *J. Geophys. Res.* 73, 7511.

Kahle, A. B. (1968): Global Radiation Emerging From a Rayleigh-Scattering Atmosphere of Large Optical Thickness, *Astrophys. J.* 151, 637-645.

Kreise, J. T., and C. E. Siewert (1971): An Expedient Method for Calculating H-Matrices, *Astrophys. J.* 164, 389-391.

Kuscer, I. (1953): Penetration of Radiation Through a Thick Slab Isotropically Scattering Material, *Can. J. Phys.* 31, 1187.

Kuscer, I. (1956): Milne's Problem for Anisotropic Scattering, *J. Math. Phys.* 34, 256.

Kuscer, I. (1958): Diffuse Reflection of Light From a Semi-Infinite Scattering Medium, *J. Math. Phys.* 37, 52.

Lenoble, J. (1963): Essai d'une Methode General epour l'Introduction des Fonctions X et Y de Chandrasekhar dans le Cas de la Diffusion Anisotrope, *C. R. Acad. Sci.* 256, 4638-4640.

Lenoble, J. (1970): Importance de la polarisation dans le Rayonnement Diffuse par une Atmosphere Planetaire, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 10, 533.

Mayers, D. F. (1962): Calculation of Chandrasekhar's X- and Y-Functions for Isotropic Scattering, *Month. Not. R. Astron. Soc.* 123, 471.

Mullikin, T. W. (1961): Principles of Invariance in Transport Theory, *J. Math. Anal. Appl.* 3, 441-454.

Mullikin, T. W. (1964): Chandrasekhar's X and Y Equations, *Trans. Am. Math. Soc.* 113, 316-332.

Mullikin, T. W. (1964): Radiative Transfer in Finite Homogeneous Atmospheres With Anisotropic Scattering: I. Linear Singular Equations, *Astrophys. J.* 139, 379-396, 1964; II. The Uniqueness Problem for Chandrasekhar's and ψ_1 and δ_1 Equations, *Astrophys. J.* 139, 1267-1289.

Mullikin, T. W. (1965): A Nonlinear Integrodifferential Equation in Radiative Transfer, *J. Soc. Ind. App. Math.* 13, 388-410.

Mullikin, T. W. (1966): The Complete Rayleigh Scattered Field Within a Homogeneous Plane-Parallel Atmosphere, *Astrophys. J.* 145, 886—931.

Nagirner, D. I. (1973): (in Russian): Calculation of the Radiation Field for Monochromatic Isotropic Scattering. I. Resolvent Functions, *Astrophys.* 9, N3.

Scheeweiss, A. B. (1973) (in Russian): Calculation of the Radiation Field in Isotropically Scattering Semi-Infinite Medium, *Vestnik Leningrad Univ.* 7.

Schiffer, R. A. (1971): The Depolarization of Multiple Scattered Atmospheric Radiation Due to Molecular Anisotropy, Ph. D. Dissertation, University of California at Los Angeles (UCLA).

Sekera, Z. (1955): Investigation of the Polarization of Skylight, Final Report, Contract AF 19 (122) 239, Department of Meteorology, University of California at Los Angeles (UCLA).

Sekera, Z. (1956): Recent Developments in the Study of the Polarization of Skylight, *Advances in Geophysics*, 3, 43—104.

Sekera, Z. (1963): Radiative Transfer in a Planetary Atmosphere With Imperfect Scattering, Report R-413-PR, The Rand Corporation, Santa Monica, California.

Sekera, Z. (1966): Reduction of the Equations of Radiative Transfer for a Plane-Parallel Planetary Atmosphere: I. Memorandum RM-4951-PR, II. Memorandum RM-5056-PR, The Rand Corporation, Santa Monica, California.

Sekera, Z. (1967): Determination of Atmospheric Parameters From Measurements of Polarization of Upward Radiation of Satellite or Space Probe, *Icarus* 6, 345.

Sekera, Z. (1968): Radiative Transfer and the Scattering Problem, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 8, 17—24.

Sekera, Z., and A. B. Kahle (1966): Scattering Functions for Rayleigh Atmospheres of Arbitrary Thickness, Memorandum R-452-PR, The Rand Corporation, Santa Monica, California.

Sobouti, Y. (1963): Chandrasekhar's X, Y, and Related Functions, *Astrophys. J. Supp.* 7, 411.

Stibbs, D. W. M., and R. E. Weir (1959): On the H-Functions for Isotropic Scattering, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 119, 512.

Sweigart A. V. (1970): Radiative Transfer in Atmospheres Scattering According to the Rayleigh Phase Function With Absorption *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 22, 1.

Ueno, S. (1959): The Probabilistic Method for Problems of Radiative Transfer IX. Diffuse Reflection and Transmission in a Finite Atmosphere With Isotropic Scattering in the Nonconservative Case, *Ann. Astrophys.* 22, 468—483.

Ueno, S. (1959): The Probabilistic Method for Problems of Radiative Transfer XI. On the Scattering and Transmission Functions of Chandrasekhar, *Ann. Astrophys.* 22, 484—490.

Ueno, S. (1960): The Probabilistic Method for Problems of Radiative Transfer X. Diffuse Reflection and Transmission in a Finite Inhomogeneous Atmosphere, *Astrophys. J.* 132, 729—745.

Van de Hulst, H. C. (1970): Reduction to H-Functions in Radiative Transfer With a General Anisotropic Phase Function, *Astron. Astrophys.* 9, 359—365.

3.1. Метод Монте-Карло

Антюфеев В. С., Михайлов Г. А., Назаралиев М. А. В кн.: Вероятностные методы решения задач математической физики.—Изд. ВЦ СО АН СССР, 1971, с. 26—43.

Антюфеев В. С., Назаралиев М. А. Новая модификация метода Монте-Карло для решения задач теории рассеяния света в сферической атмосфере.—Изд. АН СССР. ФАО, т. 9, № 7, 1973, с. 820—828.

Каргин Б. А. В кн.: Вероятностные методы решения задач математической физики.—Изд. ВЦ СО АН СССР, 1971. с. 123—156.

* Каргин Б. А. Статистическое моделирование поля солнечной радиации в атмосфере.—Изд. ВЦ СО АН СССР, 1984, 206 с.

Каргин Б. А., Михайлов Г. А. Журнал высшей математики и математической физики, 1972, т. 12, с. 150—158.

Креков Г. М., Михайлов Г. А., Каргин Б. А.—Изд. физики ВУЗов, 1968, № 4, с. 110—115.

- Креков Г. М., Михайлов Г. А., Каргин Б. А. Изв. физики ВУЗов, 1968, № 5, с. 54—59.
- Марчук Г. И., Михайлов Г. А. Результаты решения некоторых задач атмосферной оптики методом Монте-Карло.—Изв. АН СССР. ФАО, т. 3, 1967. с. 394—408.
- Марчук Г. И., Михайлов Г. А., Назаралиев М. А., Дарбинджан Р. А. Решение прямых и некоторых обратных задач атмосферной оптики методом Монте-Карло.—Изд. ВЦ СО АН СССР, 1968.
- * Марчук Г. И. (ред.), Михайлов Г. А., Назаралиев М. А., Каргин Б. А., Елезов Б. С. Метод Монте Карло в атмосферной оптике, Наука. Новосибирск, 1976. 215 с.
- Михайлов Г. А. Журнал высшей математики и математической физики, т. 13, 1973, с. 574—582.
- * Михайлов Г. А. Некоторые вопросы теории методов Монте-Карло.—Новосибирск: Наука, 1974. 142 с.
- Михайлов Г. А., Назаралиев Н. А. Расчеты поляризации света в сферической атмосфере методом Монте-Карло.—Изв. АН СССР. ФАО. т. 7, 1971, с. 385—396.
- Appleby, J. F., and W. M. Irvine (1973): Path Length Distributions of Photons Diffusely Reflected From a Semi-Infinite Atmosphere, *Astrophys. J.* 183, 337.
- Collins, D. G. (1967): Study of Polarization of Atmospheric Scattered Light Using Monte-Carlo Methods, *J. Opt. Soc. Am.* 57, 1423 (abstract).
- Collins, D. G., W. G. Blattner, M. B. Wells, and H. G. Horak (1972): Backward Monte-Carlo Calculations of the Polarization Characteristics of the Radiation Emerging From Spherical Shell Atmospheres, *Appl. Opt.* 11, 2684.
- Collins, D. G., K. Cunningham, and M. B. Wells (1967): Monte-Carlo Studies of Light Transport, Report RRA-T74 (Radiation Research Associates, Inc., Fort Worth, Texas).
- Collins, D. G., and M. B. Wells (1965): Monte-Carlo Codes for Study of Light Transport in the Atmosphere, Report RR-T54 (Radiation Research Associates, Inc., Fort Worth, Texas) Vols. 1 and 2.
- Danielson, R. E., D. R. Moore, and H. C. Van de Hulst (1969): The Transfer of Visible Radiation Through Clouds, *J. Atmos. Sci.* 26, 1078.
- Darbinian, R. A. (1971) (in Russian): In "Probability Methods of the Solution of the Problems of Mathematical Physics", Computer Center, SO AN SSSR, Novosibirsk, 87—97.
- Kattawar, G. W., and G. N. Plass (1968): Influence of Particle Size Distribution on Reflected and Transmitted Light From Clouds, *Appl. Opt.* 7, 869—878.
- Kattawar, G. W., and G. N. Plass (1968): Radiance and Polarization of Multiple Scattered Light From Haze and Cloud, *Appl. Opt.* 7, 1519—1527.
- Kattawar, G. W., and G. N. Plass (1969): Infrared Cloud Radiance, *Appl. Opt.* 8, 1169—1178.
- Kattawar, G. W., and G. N. Plass (1970): Thermal Emission From Haze and Clouds, *Appl. Opt.* 9, 413.
- Kattawar, G. W., and G. N. Plass (1971): Influence of Aerosol Clouds and Molecular Absorption on Atmospheric Emission, *J. Geophys. Res.* 76, 34—37.
- Kattawar, G. W., and G. N. Plass (1972): Radiative Transfer in the Earth's Atmosphere-Ocean System: II. Radiance in the Atmosphere and Ocean, *J. Phys. Ocean.* 2, 146—156.
- Kattawar, G. W., and G. N. Plass (1972): Degree and Direction of Polarization of Multiple Scattered Light: I. Homogeneous Cloud Layers, *Appl. Opt.* 11, 2851—2865.
- Kattawar, G. W., and G. N. Plass (1972): Time of Flight Lidar Measurements as an Ocean Probe, *Appl. Opt.* 11, 662.
- Kattawar, G. W., G. N. Plass, and C. N. Adams (1971): Flux and Polarization Calculations of the Radiation Reflected From the Clouds of Venus, *Astrophys. J.* 170, 371.
- Kattawar, G. W., G. N. Plass, and J. A. Guinn (1973): Monte Carlo Calculations of Polarization of Radiation in the Earth's Atmosphere-Ocean System, *J. Phys. Ocean.* 3, 353—372.

Plass, G. N., and G. W. Kattawar (1968): Influence of Single Scattering Albedo on Reflected and Transmitted Light From Clouds, *Appl. Opt.* 7, 361—367.

Plass, G. N., and G. W. Kattawar (1968): Monte-Carlo Calculations of Light Scattering From Clouds, *Appl. Opt.* 7, 415—419.

Plass, G. N., and G. W. Kattawar (1968): Radiant Intensity of Light Scattered From Clouds, *Appl. Opt.* 7, 699—704.

Plass, G. N., and G. W. Kattawar (1968): Calculations of Reflected and Transmitted Radiance From Earth's Atmosphere, *Appl. Opt.* 7, 1129—1135.

Plass, G. N., and G. W. Kattawar (1969): Radiative Transfer in an Atmosphere-Ocean System, *Appl. Opt.* 8, 455—466.

Plass, G. N., and G. W. Kattawar (1969): Effect of Changes in Complex Part of the Refractive Index on Polarization of Light Scattered From Haze and Clouds, *Appl. Opt.* 8, 2489—2496.

Plass, G. N., and G. W. Kattawar (1970): Polarization of the Radiation Reflected and Transmitted by the Earth's Atmosphere, *Appl. Opt.* 9, 1122—1130.

Plass, G. N., and G. W. Kattawar (1971): Radiance and Polarization of the Earth's Atmosphere With Haze and Clouds, *J. Atmos. Sci.* 28, 1187—1198.

Plass, G. N., and G. W. Kattawar (1971): Radiance and Polarization of Light Reflected From Optically Thick Clouds, *Appl. Opt.* 10, 74.

Plass, G. N., and G. W. Kattawar (1971): Radiative Transfer in Water and Ice Clouds in the Visible and Infrared Region, *Appl. Opt.* 10, 738.

Plass, G. N., and G. W. Kattawar (1971): Reflection of Light Pulses From Clouds, *Appl. Opt.* 10, 2304.

Plass, G. N., and G. W. Kattawar (1972): Radiative Transfer in the Earth's Atmosphere-Ocean System: I. Elux in the Atmosphere and Ocean, *J. Phys. Ocean.* 2, 139—145.

Plass, G. N., and G. W. Kattawar (1972): Effect of Aerosol Variation on Radiance in the Earth's Atmosphere-Ocean System, *Appl. Opt.* 11, 1598—1604.

Plass, G. N., and G. W. Kattawar (1972): Degree and Direction of Polarization of Multiple Scattered Light: II. Earth's Atmosphere with Aerosols, *Appl. Opt.* 11, 1866—1879.

Van Blerkom, D. (1971): Diffuse Reflection From Clouds With Horizontal Inhomogeneities, *Astrophys. J.* 166, 235.

3.2. Метод сферических гармоник

Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов/Пер. с англ.—М.: Изд-во ИЛ, 1960. 520 с.

Николаишвили С. С., Поливанский В. П. Вопросы физики реактора. Атомиздат, 1972, № 5, с. 64.

Benassi, M., R. D. M. Garcia, A. H. Karp, and C. E. Siewert (1984): A High-Order Spherical Harmonics Solution to the Standard Problem in Radiative Transfer, *Astrophys. J.* 280, 853—864.

Canosa, J., and H. R. Penafiel (1973): A Direct Solution of the Radiative Transfer Equation: Application to Rayleigh and Mie Atmospheres, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 13, 21—39.

Davison, B. (1957): *Neutron Transport Theory*, Oxford University Press.

Deuze, J. L., C. Devaux, and M. Herman (1973): Utilisation de la Methode des Harmoniques Spheriques dans les Calculs de Transfert Radiatif. Extension au Cas de Couches Diffusantes d'Absorption Variable, *Nouv. Rev. Optique* 4, 307—314.

Deuze, J. L., and M. Herman (1972): Extension de la Methode des Harmoniques Spheriques a des Couches d'Albedo Variable, in "Comparaison de Diverses Methodes de Resolution de l'Equation de Transfert: I. Sans Polarisation," Rapport Universite des Sciences et Techniques de Lille, France.

Devaux, C., and M. Herman (1971): Remarques sur l'Utilisation de la Methode des Harmoniques Spheriques dans les Calculs du Transfert Radiatif, *C. R. Acad. Sci.* 273, 849—852.

Devaux, C., and M. Herman (1972): Methode des Harmoniques Spheriques, in "Comparaison de Diverses Methodes de Resolution de l'Equation de Transfert: I. Sans Polarisation," Rapport Universite des Sciences et Techniques de Lille, France.

Karp, A. H. (1981): Computing the Angular Dependence of the Radiation of a Planetary Atmosphere, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 25, 403—412.

Karp, A. H., J. Greenstadt, and J. A. Fillmore (1980): Radiative Transfer Through an Arbitrarily Thick, Scattering Atmosphere, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 26, 391—406.

Karp, A. H., and S. Petrack (1983): On the Spherical Harmonics and Discrete Ordinates Methods for Azimuth Dependent Intensity Calculations, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 30, 351—356.

Jeans, J. M. (1917): The Equation of Radiative Transfer of Energy, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 78, 28.

Lenoble, J. (1961): Application de la Methode des Harmoniques Spheriques au Cas de la Diffusion Anisotrope, *C. R. Acad. Sci.* 252, 2087—2089.

Lenoble, J. (1961): Application de la Methode des Harmoniques Spheriques a l'Etude de l'Etat de Polarisation du Rayonnement Diffus, *C. R. Acad. Sci.* 252, 3562—3564.

Mark, J. C. (1945): The Spherical Harmonic Method, Nat. Research Council of Canada, Atomic Energy Project I. Report MT 92, 1944, II. Report MT 97.

Markshak, R. E. (1947): Note on the Spherical Harmonic Method as Applied to the Milne Problem for a Sphere *Phys. Rev.* 71, 43.

Yvon, J. (1957): La Diffusion Macroscopique des Neutrons. Une Methode d'Approximation, *J. Nucl. Energy* 4, 305.

3.3. Метод дискретных ординат

Гермогенова Т. А. О решении уравнения радиационного переноса с сильно анизотропным рассеянием.— Доклады АН СССР, 1957, т. 113, с. 297—300.

Кузнецов Е. С. Общий метод построения приближенных решений уравнения радиационного переноса.— Известия АН СССР, сер. геофиз., 1951 г. 71, с. 91.

Кузнецов Е. С. О решении уравнения радиационного переноса для планетарного слоя с анизотропным рассеянием.— Журнал высшей математики и математической физики, 1966, т. 6, с. 769—773.

Asano, S. (1975): On the Discrete Ordinates Method for the Radiative Transfer, *J. Meteor. Soc. Japan* 53, 92—95.

Carlson, B. (1963): The Numerical Theory of Neutron Transport, in *Methods of Computational Physics, I.*, New York, London.

Chandrasekhar, S. (1950): *Radiative Transfer*, Clarendon Press, Oxford.

Cuzzi, J. N., T. P. Ackerman, and L. C. Helme (1982): The Delta Four-Stream Approximation for Radiative Flux Transfer, *J. Atmos. Sci.* 39, 917—925.

Davison, B. (1957): *Neutron Transport Theory*, Oxford University Press.

Hill, T. R. (1975): ONETRAN: A Discrete Ordinates Finite Element Code for the Solution of One-Dimensional Multigroup Transport Equation, Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-5990-MS.

Karp, A. H. (1981): Computing the Angular Dependence of the Radiation of a Planetary Atmosphere, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 25, 403—412.

Kuznetsov, E. S. (1951) (in Russian): A General Method of Constructing the Approximate Solutions of the Radiative Transfer Equation, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geofiz.* 71, 91.

Kuznetsov, E. S. (1966) (in Russian): On Solution of Radiative Transfer Equation for a Planetary Layer With Anisotropic Scattering, *Zh. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* 6, 769—773.

Lathrop, K. D. (1972): Discrete Ordinates Methods for the Numerical Solution of the Transport Equation, *Reactor Technology* 15, 107.

Lenoble, J. (1956): Application de la Methode de Chandrasekhar a l'Etude du Rayonnement Diffuse dans le Brouillard et dans la Mer, *Rev. Optique* 35, 1—17.

Liou, K. N. (1973): A Numerical Experiment on Chandrasekhar's Discrete Ordinate Method for Radiative Transfer: Application to Cloudy and Hazy Atmospheres, *J. Atmos. Sci.* 30, 1303—1326.

Liou, K. N. (1974): Analytic Two-Stream and Four-Stream Solutions for Radiative Transfer, *J. Atmos. Sci.* 31, 1473—1475.

Liou, K. N. (1975): Applications of the Discrete Ordinate Method for Radiative Transfer to Inhomogenous Aerosol Atmospheres, *J. Geophys. Res.* 80, 3434—3440.

- Stamnes, K. (1982): On the Computation of Angular Distributions of Radiation in Planetary Atmospheres, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 28, 47—51.
- Stamnes, K., and H. Dale (1981): A New Look at the Discrete Ordinate Method for Radiative Transfer Calculations in Anisotropically Scattering Atmospheres. II: Intensity Computations, *J. Atmos. Sci.* 38, 2696—2706.
- Stamnes, K., and R. A. Swanson (1981): A New Look at the Discrete Ordinate Method for Radiative Transfer Calculations in Anisotropically Scattering Atmospheres, *J. Atmos. Sci.* 38, 387—399.
- Weinman, J. A., and P. J. Guettner (1972): Penetration of Solar Irradiances Through the Atmosphere and Plant Canopies, *J. Appl. Meteor.* 11, 136—140.
- Wick, C. C. (1943): Über Ebene Diffusions Probleme, *Z. Phys.* 120, 702.

3.4. Метод сопряженных уравнений

- * Льюинс Дж. Ценность. Сопряженная функция.—М.: Атомиздат, 1972. 175 с.
- Bell, G I., and S. Glasstone (1970): *Nuclear Reactor Theory*, Van Nostrand Publishing Company, New York.
- Lewins, J. (1965): *Importance, The Adjoint Function*, Pergamon Press, New York.
- Gerstl, S. A. W. (1979): Application of the Adjoint Method in Atmospheric Radiative Transfer Calculations, Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-UR-80-17; (1982) *Atmospheric Aerosols: Their Formation, Optical Properties and Effects*, ed by A. Deepak, pp. 241—254, Spectrum Press, Hampton, Virginia.
- Gerstl, S. A. W. (1980): Application of Modern Neutron Transport Method to Atmospheric Radiative Transfer, Proc International Radiation Symposium, August 11—16, 1980, Fort Collins, Colorado, 500—502.
- Gerstl, S. A. W., A. Zardecki, and E. P. Shettle (1981): Solar Irradiance Calculations in the UV and Visible Using the Adjoint Discrete Ordinates Method, Proc. Fourth Conference on Atmospheric Radiation, June 16—18, 1981, Toronto, Canada, 67—70.

3.5. FN-метод

- Devaux, C., P. Grandjean, Y. Ishiguro, and C. E. Siewert (1979): On Multi-Region Problems in Radiative Transfer, *Astrophys. Space Sci.* 62, 225—233.
- Devaux C., and C. E. Siewert (1980): The FN Method for Radiative Transfer Problems Without Azimuthal Symmetry, *J. Appl. Math. Phys.* 31, 592—604.
- Devaux, C., C. E. Siewert, and Y. L. Yan (1982): The Complete Solution for Radiative Transfer Problems With Reflecting Boundaries and Internal Sources, *Astrophys. J.* 253, 773—786.
- Garcia, R. D. M., and C. E. Siewert (1982): On Angular Flux Computations in Neutron Transport Theory, *Nucl. Sci. Eng.* 81, 474—476.
- Garcia, R. D. M., and C. E. Siewert (1984): Benchmark Results in Radiative Transfer, IBM Palo Alto Scientific Center, California, Report G320.3471.
- Grandjean, P., and C. E. Siewert (1979): The FN Method in Neutron Transport Theory Part II: Applications and Numerical Results, *Nucl. Sci. Eng.* 69, 161—168.
- Siewert, C. E. (1978): The FN Method for Solving Radiative Transfer Problems in Plane Geometry, *Astrophys. Space Sci.* 58, 131—137.
- Siewert, C. E., and P. Benoist (1979): The FN Method in Neutron-Transport Theory Part I: Theory and Applications, *Nucl. Sci. Eng.* 69, 156—160.

3.6. Метод итераций Гаусса—Зейделя

- Braslau, N., and J. V. Dave (1972): Effect of Aerosols on the Transfer of Solar Energy Through Realistic Atmospheres: I. Non-absorbing Aerosols, IBM Report RC 4114, Dec.
- Braslau, N., and J. V. Dave (1972): Effect of Aerosols on the Transfer of Solar Energy Through Realistic Model Atmospheres: II. Partly Absorbing Aerosols, IBM Report RC 4152, Dec.
- Braslau, N., and J. V. Dave (1973): Effect of Aerosols on the Transfer of Solar Energy Through Realistic Model Atmospheres, Part I, *J. Appl. Meteor.* 12, 601—615, 1973; Part II, *J. Appl. Meteor.* 12, 616—619.

- Danzer, K. M., and K. Bullrich (1968): Uber Zwei Methoden zur Berechnung der Strahlungsmehrfachstreuung in der truben Atmosphäre, *Contr. Atmos. Phys.* 41, 143—152.
- Dave, J. V. (1970): Intensity and Polarization of the Radiation Emerging From a Plane-Parallel Atmosphere Containing Monodispersed Aerosols, *Appl. Opt.* 9, 2673—2684.
- Dave, J. V., and J. Gazdag (1970): A Modified Fourier Transform Method for Multiple Scattering Calculations in a Plane Parallel Mie Atmosphere, *Appl. Opt.* 9, 1457—1466.
- Eschelbach, G. (1971): A Direct Method for the Integration of the Equation of Radiative Transfer in a Turbid Atmosphere, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 11, 757—765.
- Eschelbach, G. (1973): Calculs Numeriques Concernant la Luminance, le Taux de Polarisation et les Divergences du Flux Energetique de la Region Visible du Spectre Solaire dans l'Atmosphere Trouble tenant compte de la Diffusion Multiple, *Ann. Geophys.* 29, 329—339.
- Herman, B. M. (1963): A Numerical Solution to the Equation of Radiative Transfer for Particles in the Mie Region, Ph. D. Thesis, University of Arizona, Tucson.
- Herman, B. M., W. Asous, and S. R. Browning (1980): A Semi-Analytic Technique to Integrate the Radiative Transfer Equation Over Optical Depth, *J. Atmos. Sci.* 37, 1828—1838.
- Herman, B. M., and S. R. Browning (1965): A Numerical Solution to the Equation of Radiative Transfer, *J. Atmos. Sci.* 22, 559—566.
- Herman, B. M., and S. R. Browning (1975): The Effect of Aerosols on the Earth-Atmosphere Albedo, *J. Atmos. Sci.* 32, 1430—1445.
- Herman, B. M., S. R. Browning, and R. J. Curran (1971): The Effect of Aerosols on Scattered Sunlight, *J. Atmos. Sci.* 28, 419—428.
- Herman, B. M., and D. N. Yarger (1966): Some Effects of Multiple Scattering on Heating Rates in the Ozone Layer, *J. Atmos. Sci.* 23, 320—324.

3.7. Метод последовательных порядков рассеяния

- Гермогенова Т. А. Сходимость некоторых приближенных методов решения уравнения переноса.— Доклады АН СССР, 1968, т. 181, № 3.
- Гермогенова Т. А. Локальные свойства решений уравнений переноса.— М.: Наука. 1986. 272 с.
- Гермогенова Т. А., Сушкевич Т. А. Решение уравнения радиационного переноса методом средних потоков.— Вопросы физики реакторов.— Атомиздат, 1969, т. 181, № 3, с. 34—46.
- de Bary, E. (1964): Influence of Multiple Scattering on the Intensity and Polarization of Diffuse Sky Radiation, *Appl. Opt.* 3, 1293—1303.
- Bellman, R., S. Ueno, and R. Vasudevan (1972): Invariant Imbedding and Radiation Dosimetry: I. Finite Order Scattering and Transmission Functions, *Math. Biosci.* 14, 235—254.
- Bellman, R., S. Ueno, and R. Vasudevan (1972): Invariant Imbedding and Radiation Dosimetry: II. Integral Recurrence Relations for the Finite Order Scattering and Transmission Functions, *Math. Biosci.* 15, 153—162.
- Bellman, R., S. Ueno, and R. Vasudevan (1972): Invariant Imbedding and Radiation Dosimetry: III. Integral Recurrence Relations for Finite Order X and Y Functions, *Math. Biosci.* 15, 195—204.
- Bellman, R., S. Ueno, and R. Vasudevan (1973): Invariant Imbedding and Radiation Dosimetry: IV. Finite Order Scattering of Gamma Radiation by a Target Slab, *Math. Biosci.* 17, 89—104.
- Bellman, R., S. Ueno, and R. Vasudevan (1973): Invariant Imbedding and Radiation Dosimetry: V. Finite Order Intensity of Radiation in a Target Slab, *Math. Biosci.* 18, 55—66.
- Bellman, R., S. Ueno, and R. Vasudevan (1973): Invariant Imbedding and Radiation Dosimetry: VII. Finite Order Scattering and Transmission Functions of the Two Radiation Approximation in a Target Slab, *Math. Biosci.* 18, 255—268.

Bellman, R., S. Ueno, and R. Vasudevan (1974): Invariant Imbedding and Radiation Dosimetry: VIII. Reflection Function From a Double Layer Finite Order Function, *Math. Biosci.* 20, 299—314.

Bellman, R., S. Ueno, and R. Vasudevan (1974): Invariant Imbedding and Radiation Dosimetry: IX. Inverse Problem of Determining a Plane Source in Finite Isotropically Scattering Target Slab, *Math. Biosci.* 20, 315—325.

Bellman, R., O. Ueno, and R. Vasudevan (1975): Invariant Imbedding and Radiation Dosimetry: X. Emergent Intensity of Finite Order Gamma Radiation From a Target Slab With a Plane Source, *Math. Biosci.* 23, 1—9.

Dave, J. V. (1964): Meaning of Successive Iteration of the Auxiliary Equation in the Theory of Radiative Transfer, *Astrophys. J.* 140, 1292—1303.

Dave, J. V. (1965): Multiple Scattering in a Non-Homogeneous Rayleigh Atmosphere, *J. Atmos. Sci.* 22, 273—279.

Dave, J. V., and P. Furukawa (1966): Intensity and Polarization of the Radiation Emerging from an Optically Thick Rayleigh Atmosphere, *J. Opt. Soc. Am.* 6, 394—400.

Dave, J. V. and W. H. Walker (1966): Convergence of the Iterative Solution of the Auxiliary Equations for Rayleigh Scattering, *Astrophys. J.* 144, 798—808.

Fouquart, Y. (1971): Effet de la Diffusion sur l'Echauffement Radiatif dû au Rayonnement Solaire, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 11, 709—722.

Fouquart, Y. (1972): Methode des Ordres Successifs de Diffusion, in "Comparison des Diverses Methodes de Resolution de l'Equation de Transfert: I. Sans Polarisation" Rapport Universite des Sciences et Techniques de Lille, France, Dec.

Fymat, A. L., and S. Ueno (1974): Order of Scattering of Partially Polarized Light in Inhomogeneous Anisotropically Scattering Atmospheres. I. Fundamentals, *Astrophys. Space Sci.* 30, 3—25; II. Reciprocity and Symmetry Relation, *Astrophys. Space Sci.* 30, 251—273.

Hammad, A. (1953): Calculation of the Polarization of a Sunlight Sky Composed of Pure Air Molecules, *J. Opt. Soc. Am.* 43, 184.

Hammad, A., and S. Chapman (1939): The Primary and Secondary Scattering of Sunlight in a Plane Stratified Atmosphere of Uniform Composition, *Phil. Mag.* 28, 99.

Heger, K. (1969): Der Einfluss der Zweifachstreuung auf die Himmelsstrahlung und auf die Erdatmosphäre verlassende Strahlung unter der Annahme einer getrubten Atmosphäre, *Meteor. Rundschau* 22, 7—10.

Heger, K. (1971): Einfach-Zweifach- und Dreifachstreuung der Sonnenstrahlung in der truben Atmosphäre, *Contr. Atmos. Phys.* 44, 201—212.

Hovenier, J. W. (1971): Multiple Scattering of Polarized Light in Planetary Atmospheres, *Astron. Astrophys.* 13, 7—29.

Irvine, W. M. (1964): The Formation of Absorption Bands and the Distribution of Photon Optical Paths in a Scattering Atmosphere, *Bull. Astron. Inst. Neth.* 17, 266.

Irvine, W. M. (1965): Multiple Scattering by Large Particles, *Astrophys. J.* 142, 1563—1575.

Lenoble, J. (1954): Contribution a l'Etude du Rayonnement Ultraviolet Solaire, de sa Diffusion dans l'Atmosphère et de sa Penetration dans la Mer, *Ann. Geophys.* 10, 117—146, 187—225.

Moller, F., and H. Quenzel (1972): Über die Wechselwirkung zwischen Bodenreflexionsvermögen und Himmelselligkeit, *Gerlands Beitr. Geophys.* 81, 407—413.

Poon, P. T. Y., and S. Ueno (1974): Algebraic Recurrence Relations for the Finite Order Scattering and Transmission Functions, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 14, 85—92.

Poon, P. T. Y., and S. Ueno (1974): Sobolev's Phi Function of Radiative Transfer in Planar and Spherical Media, *Astrophys. Space Sci.* 28, 233—244.

Raschke, E. (1972): Multiple Scattering Calculations of the Transfer of Solar Radiation in at Atmosphere-Ocean System, *Contr. Atmos. Phys.* 45, 1—19.

Raschke, E., and U. Stucke (1973): Theoretische Studien des transportierten Solarer Strahlung in einem realistischen Model des Systems Ozean-Atmosphäre, Report BMFT-FBW 73—13.

Ueno, S., S. Mukai, and A. P. Wang (1973): Invariant Imbedding and Chandrasekhar's Planetary Problem of Polarized Light, In *Planets, Stars and Nebulae Studied With Photopolarimetry*, ed. by T. Gehrels, The University of Arizona Press, Tucson, 582—592.

Ueno, S., R. Vasudevan, and R. Bellman (1973): Invariant Imbedding and Radiation Dosimetry: VI. Absorbed Dose of X and Gamma Radiation in a Target Slab, *Math. Biosci.* 18, 67—75.

Uesugi, A., and W. M. Irvine (1970): Multiple Scattering in a Plane-Parallel Atmosphere. I. Successive Scattering in a Semi-Infinite Medium, *Astrophys. J.* 159, 127—135.

Uesugi, A., and W. M. Irvine (1970): Multiple Scattering in a Plane-Parallel Atmosphere: II. Curves of Growth for Reflection Spectra, *Astrophys. J.* 161, 243—354.

Uesugi, A., W. M. Irvine, and Y. Kawata (1971): Formation of Absorption by Diffuse Reflection in a Semi-Infinite Planetary Atmosphere, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 11, 797—808.

Van de Hulst, H. C. (1948): Scattering in a Planetary Atmosphere, *Astrophys. J.* 107, 220.

Van de Hulst, H. C. (1970): High-Order Scattering in Diffuse Reflection from a Semi-Infinite Atmosphere, *Astron. Astrophys.* 9, 374—379.

Van de Hulst, H. C., and W. M. Irvine (1962): General Report on Radiation Transfer in Planets: Scattering in Model Planetary Atmospheres, *Met Soc. R. Sc. Liege 15th Series, Vol. 7*, 78—98.

3.8. Метод конечных разностей

Auer, L. H., and D. Mihalas (1969): Non-LTE Model Atmosphere III. Complete-Linearization Method, *Astrophys. J.* 158, 641.

Barkstrom, B. R. (1976): A Finite Difference Method of Solving Anisotropic Scattering Problems, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 16, 725—739.

Larsen, J. C., and B. R. Barkstrom (1976): Effects of Realistic Angular Reflection Laws for the Earth's Surface Upon Calculations of the Earth-Atmosphere Albedo, In *Proceedings of the Symposium on Radiation in the Atmosphere*, Garmisch-Partenkirchen, FRG, 451—453.

Mihalas, D., (1970): *Stellar Atmospheres*, Freeman, San Francisco.

Suttles, J. T. (1981): Anisotropy of Solar Radiation Leaving the Earth-Atmosphere System, Ph. D. Thesis, Old Dominion University, Norfolk, Virginia.

3.9. Метод матричного оператора

Гермогенова Т. А. О характере решения уравнения переноса для плоского слоя.— Журнал высшей математики и математической физики, 1961, т. 1, с. 1001.

Aronson, R. (1971): Relations Between the Transfer Matrix Method and Case's Method, *Transp. Theory Statist. Phys.* 1, 209—224.

Aronson, R. (1972): General Solution for Polarized Radiation in a Homogeneous Slab Atmosphere, *Astrophys. J.* 177, 411—421.

Bellman, R., S. Ueno, and R. Vasudevan (1972): Invariant Imbedding and Radiation Dosimetry: VIII. Reflection Function From a Double Layer-Finite Order-Functions, University of Southern California Technical Report No. 72—62, Los Angeles; (1974) *Math. Biosci.* 20, 299—314.

Grant, I. P., and G. E. Hunt (1968): Solution of Radiative Transfer Problem Using the Invariant Sn Method, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 141, 27—41.

Grant, I. P., and G. E. Hunt (1968): Solution of Radiative Transfer Problems in Planetary Atmospheres, *Icarus* 9, 526—534.

Grant, I. P., and G. E. Hunt (1969): Discrete Space Theory of Radiative Transfer: I. Fundamentals, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A313*, 183—197.

Grant, I. P., and G. E. Hunt (1969): Discrete Space Theory of Radiative Transfer: II. Nonnegativity and Stability, *Proc. Roy. Soc. A313*, 199—216.

Grant, I. P., and G. E. Hunt (1969): Discrete Space Theory of Radiative Transfer and Its Application to Problems in Planetary Atmospheres, *J. Atmos. Sci.* 26, 963—972.

Hunt, G. E. (1971): A Review of Computational Technique for Analyzing the Transfer of Radiation Through a Model Cloudy Atmosphere, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 11, 655—690.

Kattawar, G. W. (1973): Theorems of Symmetries and Flux Conservation in Radiative Transfer Using the Matrix Operator Theory, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 13, 145—153.

Kattawar, G. W., S. J. Hitzfelder, and J. Binstock (1973): An Explicit Form of the Mie Phase Matrix for Multiple Scattering Calculations in the I, Q, U and V Representation, *J. Atmos. Sci.* 30, 289.

Kattawar, G. W., and G. N. Plass (1973): Interior Radiances in Optically Deep Absorbing Media: I. Exact Solutions for One-Dimensional, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 13, 1065—1080.

Kattawar, G. W., G. N. Plass, and F. E. Catchings (1973): Matrix Operator Theory: II. Scattering From Maritime Haze, *Appl. Opt.* 12, 1071—1084.

Plass, G. N., G. W. Kattawar, and J. Binstock (1973): Interior Radiances in Optically Deep Absorbing Media: II. Rayleigh Scattering, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 13, 1081—1096.

Plass, G. N., G. W. Kattawar, and F. E. Catchings (1973): Matrix Operator Theory of Radiative Transfer: I. Rayleigh Scattering, *Appl. Opt.* 12, 314—329.

Poon, P. T. Y., and S. Ueno (1973): Scattering Matrix and Doubling Equations for the Scattering and Transmission Functions, *J. Atmos. Sci.* 30, 954—957.

Preisendorfer, R. W. (1965): *Radiative Transfer in Discrete Spaces*, Pergamon Press, New York.

Preisendorfer, R. W. (1968): A Survey of Theoretical Hydrologic Optics, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 8, 325—338.

Redheffer, R. (1962): On the Relation of Transmission-Line Theory to Scattering and Transfer, *J. Math. Phys.* 41, 1—41.

Takashima, T. (1973): Matrix Method Evaluating an Internal Radiation Field in a Plane-Parallel Atmosphere, *Astrophys. Space Sci.* 23, 201—204.

Wang, A. P. I. (1966): Scattering Processes, Ph. D. Thesis, University of California at Los Angeles.

Wang, A. P. I. (1967): Invariant Imbedding and Scattering Processes, *J. Math. Anal. Appl.* 17, 48—60.

Wiscombe, W. J., and B. E. Freeman (1972): A Detailed Radiation Model for Climate Studies: Comparisons With a General Circulation Model Radiation Subroutine Proc Conf. on Atmos. Radiation, Fort Collins, Colorado.

3.10. Метод удвоения или сложения

Иванов В. В. Принципы инвариантности и внутренние поля радиации в полубесконечных атмосферах.— *Астрономический журнал*, 1975, т. 52, с. 217—226.

Danielson R. E., D. R. Moore, and H. C. Van de Hulst (1969): The Transfer of Visible Radiation Through Clouds, *J. Atmos. Sci.* 26, 1078—1087.

Hansen, J. E. (1969): Radiative Transfer by Doubling Very Thin Layers, *Astrophys. J.* 155, 565—573.

Hansen, J. E. (1969): Exact and Approximate Solutions for Multiple Scattering by Cloudy and Hazy Planetary Atmospheres, *J. Atmos. Sci.* 26, 478—487.

Hansen, J. E. (1971): Multiple Scattering of Polarized Light in Planetary Atmospheres: I. The Doubling Method, *J. Atmos. Sci.* 28, 120—125.

Hansen, J. E. (1971): Multiple Scattering of Polarized Light in Planetary Atmospheres: II. Sunlight Reflected by Terrestrial Water Clouds, *J. Atmos. Sci.* 28, 1400—1426.

Hansen, J. E., and D. L. Coffeen (1972): Polarization of Near-Infrared Sunlight Reflected by Terrestrial Clouds, Preprint Volume of Conf. on Atmos. Radiation, Amer. Meteor. Soc., 55—60.

Hansen, J. E., and J. W. Hovenier (1971): The Doubling Method Applied to Multiple Scattering of Polarized Light, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 11, 809—812.

Hansen, J. E., and J. W. Hovenier (1974): Interpretation of the Polarization of Venus, *J. Atmos. Sci.* 31, 1137.

Hovenier, J. W. (1971): Multiple Scattering of Polarized Light in Planetary Atmospheres, *Astron. Astrophys.* 13, 7—29.

- Irvine, W. M. (1968): Multiple Scattering by Large Particles II—Optically Thick Layers, *Astrophys. J.* 152, 823—834.
- Irvine, W. M. (1968): Diffuse Reflection and Transmission by Cloud and Dust Layers, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 8, 471—485.
- Lacis, A. A., and J. E. Hansen (1974): A Parameterization for the Absorption of Solar Radiation in the Earth's Atmosphere, *J. Atmos. Sci.* 31, 118—133.
- Takashima, T. (1973): Matrix Method Evaluating an Internal Radiation Field in a Plane-Parallel Atmosphere, *Astrophys. Space Sci.* 23, 201—204.
- Takashima, T. (1973): Emergent Radiation From an Inhomogeneous Plane-Parallel Planetary Atmosphere Calculated by Using the "Adding" Method, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 13, 1229—1232.
- Takashima, T. (1974): Method of Computing of the Effect of Surface Reflection on the Atmospheric Radiation, *Publ. Astron. Soc. Japan* 26, 361—366.
- Takashima, T. (1974): Evaluation of the Internal Radiation Field in a Composite Planetary Atmosphere With the Lambert Surface Calculated by Matrix Method, *Astrophys. Space Sci.* 30, 309—313.
- Takashima, T. (1975): A New Approach of the Adding Method for the Computations of Emergent Radiation of Inhomogeneous Plane-Parallel Planetary Atmosphere, *Astrophys. Space Sci.* 36, 319—328.
- Takashima, T., C. I. Taggart, and E. G. Morrissey (1976): A Hybrid Mode of Diffuse and Specular Reflector for Computation of the Emergent Radiation by the "Adding" Method, *Astrophys. Space Sci.* 40, 157—165.
- Takashima, T., C. I. Taggart, and E. G. Morrissey (1977): A Method of Computing the Emergent Radiation by the Atmosphere in the Region Ranging From Ultra-violet to Infrared Radiation, *Astrophys. Space Sci.* 49, 331—337.
- Tanaka, M. (1971): Radiative Transfer in Turbid Atmospheres: I Matrix Analysis for the Problem of Diffuse-Reflection and Transmission, *J. Meteor. Soc. Japan* 49, 296—311.
- Tanaka, M. (1971): Radiative Transfer in Turbid Atmospheres: II. Angular Distribution of Intensity of the Solar Radiation Diffusely Reflected and Transmitted by Turbid Atmospheres, *J. Meteor. Soc. Japan* 49, 321—332.
- Tanaka, M. (1971): Radiative Transfer in Turbid Atmospheres: III. Degree of Polarization of the Solar Radiation Diffusely Reflected and Transmitted by Turbid Atmospheres, *J. Meteor. Soc. Japan* 49, 333—342.
- Twomey, S., H. Jacobowitz, and H. G. Howell (1966): Matrix Method for Multiple Scattering Problems, *J. Atmos. Sci.* 23, 289—296.
- Van de Hulst, H. C. (1962): *Multiple Light Scattering Tables, Formulas and Applications*, Vol. 1, section 4.5, Vol. 2, section 15.2.2, Academic Press, New York.
- Van de Hulst, H. C. (1963): A New Look at Multiple Scattering, Goddard Institute for Space Studies, Technical Report.
- Van de Hulst, H. C. (1967): Multiple Scattering in Plane-Parallel Layers, in *Electromagnetic Scattering*, ed. by R. R. Rowell and R. S. Stein, Gordon and Breach, New York, 787—796.
- Van de Hulst, H. C. (1968): Asymptotic Fitting: A Method for Solving Anisotropic Transfer Problems in Thick Layers, *J. Comp. Phys.* 3, 291—306.
- Van de Hulst, H. C. (1970): Some Problems of Anisotropic Scattering in Planetary Atmospheres, in *Planetary Atmospheres*, ed. by C. Sagan, IAU Symposium, Marfa, Texas.
- Van de Hulst, H. C. (1971): Multiple Scattering in Planetary Atmospheres, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 11, 785—795.
- Van de Hulst, H. C., and K. Grossman (1968): Multiple Light Scattering in Planetary Atmospheres in *The Atmospheres of Venus and Mars* ed. by J. C. Brandt and M. B. McElroy, Gordon and Breach, New York, 35—55.
- Whitehill, L. P. (1972): Solar System Applications of Mie Theory and of Radiative Transfer of Polarized Light, Ph. D. Thesis, Cornell University, Ithaca, New York.

3.11. Принципы инвариантности (см. также список литературы к п. 2.4)

Амбарцумян В. А., Мусталь Э. Р., Северный А. Б., Соболев В. В. (ред. Амбарцумян В. А.). Теоретическая астрофизика.— М.: Гостехтеориздат, 1952. 635 с.

Иванов В. В. Принципы инвариантности и внутренние поля радиации в полубесконечных атмосферах.— *Астрономический журнал*, т. 52, 1975, с. 217—226.

Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет.— М.: Наука, 1972, 335 с.

Chandrasekhar, S. (1950): *Radiative Transfer*, Oxford University Press (reprinted by Dover Publishing, Mineola, New York, 1960).

Hovenier, J. W. (1978): A Unified Treatment of the Reflected and Transmitted Intensities of a Homogeneous Plane-Parallel Atmosphere, *Astron Astrophys* 68, 239—250.

Ivanov, V. V. (1975) (in Russian): Invariance Principles and Internal Radiation Fields in Semi-Infinite Atmospheres, *Astron. Zh.* 52, 217—226.

Lenoble, J. (1972): Methode des Principes d'Invariance pour une Couch Semi-Infinie, in "Comparaison des Methodes de Resolution de l'Equation de Transfert: I. Sans Polarisation," Rapport Universite des Sciences et Techniques de Lille, France, December.

Sekera, Z. (1966): Reduction of the Equations of Radiative Transfer for a Plane-Parallel Atmosphere I, Memorandum RM-4951-PR, The Rand Corporation Santa Monica, California.

Sobolev, V. V. (1972) (in Russian): *Light Scattering in Planetary Atmospheres*, Izd. Nauka, Moscow (English translation Pergamon Press, New York, 1975).

Uesugi, A., and W. M. Irvine (1970): Multiple Scattering in a Plane-Parallel Atmosphere. I. Successive Scattering in a Semi-Infinite Medium, *Astrophys. J.* 159, 127—135; II. Curves of Growth for Reflection Spectra, *Astrophys. J.* 161, 243—254.

3.12. Метод инвариантного вложения

Амбарцумян В. А. Рассеяние света планетными атмосферами.— *Астрономический журнал*. 1942, т. 19, с. 30.

Соболев В. В. Перенос радиации в неоднородной среде.— Доклады АН СССР, 19.6, т. III, с. 1000.

Соболев В. В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет.— М.: Гостехтеориздат, 1856. 320 с.

Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет.— М.: Наука, 1972.

Яновицкий Е. Г. Диффузное отражение и пропускание света плоским слоем неоднородной среды с анизотропным рассеянием.— *Астрономический журнал*, 1961, т. 38, № 5, с. 912—919.

Яновицкий Е. Г. Диффузное отражение и пропускание света неоднородной атмосферы, ограниченной отражающей поверхностью.— *Известия АН СССР, сер. геофиз.* 1961, № 7, с. 1140—1146.

Яновицкий Е. Г. Чистое рассеяние в неоднородной полубесконечной атмосфере.— Доклады АН СССР, 1969, т. 189, с. 74—76.

Яновицкий Е. Г. Анизотропное рассеяние света в неоднородной атмосфере. I. Чистое рассеяние.— *Астрономический журнал*, 1971, т. 48, с. 323—332.

Яновицкий Е. Г. Альbedo и освещенность поверхности планеты с неоднородной чисто рассеивающей атмосферой.— *Известия АН СССР, ФАО*, 1972, т. 8, 518—525.

Adams, C. N., and G. W. Kattawar (1970): Solutions of the Equations of Radiative Transfer by an Invariant Imbedding Approach, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 10, 341—356.

Bellman, R. (1969): Invariant Imbedding and Computational Methods in Radiative Transfer, in *Transport Theory*, Vol. 1, SIAM-AMS Proceed. ed by R. Bellman, G. Birkhoff, and I. Abu-Shumays, Providence, Rhode Island.

Bellman, R., H. Kagiwada, R. Kalaba, and S. Ueno (1967): Invariant Imbedding Equations for the Dissipation Functions of an Inhomogeneous Finite Slab With Anisotropic Scattering, *J. Math. Phys.* 8, 2137—2142.

Bellman, R., H. Kagiwada, R. Kalaba, and S. Ueno (1968): A New Derivation of the Integro-Differential Equations for Chandrasekhar X and Y Functions, *J. Math. Phys.* 9, 906—908.

- Bellman, R., and R. Kalaba (1956): On the Principle of Invariant Imbedding and Propagation Through Inhomogeneous Media, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 42, 629-632.
- Bellman, R., R. Kalaba, and M. C. Prestud (1963): *Invariant Imbedding and Radiative Transfer in Slabs of Finite Thickness*, Elsevier Publishing, New York.
- Bellman, R., S. Ueno, and R. Vasudevan (1972): Invariant Imbedding and Radiation Dosimetry: I. Finite Order Scattering and Transmission Functions, *Math. Biosci.* 14, 235-254.
- Bellman, R., S. Ueno, and R. Vasudevan (1972): Invariant Imbedding and Radiation Dosimetry: II. Integral Recurrence Relations for the Finite Order Scattering and Transmission Functions, *Math. Biosci.* 15, 153-162.
- Bellman, R., S. Ueno, and R. Vasudevan (1972): Invariant Imbedding and Radiation Dosimetry: III Integral Recurrence Relations for Finite Order X and Y Functions, *Math. Biosci.* 15, 195-204.
- Bellman, R., S. Ueno, and R. Vasudevan (1973): Invariant Imbedding and Radiation Dosimetry: IV. Finite Order Scattering of Gamma Radiation by a Target Slab, *Math. Biosci.* 17, 89-104.
- Bellman, R., S. Ueno, and R. Vasudevan (1974): Invariant Imbedding and Radiation Dosimetry: VIII. Reflection Function from a Double Layer Finite Order Function, *Math. Biosci.* 20, 299-314.
- Bellman, R., S. Ueno, and R. Vasudevan (1974): Invariant Imbedding and Radiation Dosimetry: IX Inverse Problem of Determining a Plane Source in a Finite Isotropically Scattering Target Slab, *Math. Biosci.* 20, 315-325.
- Bellman, R., S. Ueno, and R. Vasudevan (1975): Invariant Imbedding and Radiation Dosimetry: X. Emergent Intensity of Finite Order Gamma Radiation from a Target Slab With a Plane Source, *Math. Biosci.* 23, 1-9.
- Buell, J., J. Casti, R. E. Kalaba, and S. Ueno (1970): Exact Solution of a Family of Matrix Integral Equations for Multiply Scattered Partially Polarized Radiation: II. *J. Math. Phys.* 11, 1673-1678.
- Buell, J., A. L. Fymat, and R. E. Kalaba (1972): An Initial Value Method for the Ambarzumian Integral Equation, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 12, 769-776.
- Buell, J., R. E. Kalaba, and S. Ueno (1970): Exact Solution of a Family Matrix Integral Equations for Multiply Scattered Partially Polarized Radiation: I, *J. Math. Phys. Sci.* 4, 180-185.
- Busbridge, I. W. (1960). *The Mathematics of Radiative Transfer*, Cambridge University Press, London.
- Busbridge, I. W. (1961): On Inhomogeneous Stellar Atmospheres, *Astrophys. J.*, 133, 198.
- Chandrasekhar, S. (1950): *Radiative Transfer*, Oxford University Press, Oxford (reprinted by Dover Publishing, Mineola, New York, 1960).
- Fymat, A. L., and S. Ueno (1972): Order of Scattering of Partially Polarized Radiation in Inhomogeneous Anisotropically Scattering Atmospheres. I. Fundamentals, *Astrophys. Space Sci.* 30, 3-25.
- Kagiwada, H. H., and R. E. Kalaba (1967): A New Initial Value Method for Internal Intensities in Radiative Transfer, *Astrophys. J.* 147, 301-309.
- Kagiwada, H. H., and R. E. Kalaba (1970): Exact Solution of a Family of Integral Equations of Anisotropic Scattering, *J. Math. Phys.* 11, 1575-1578.
- Kagiwada, H. H., R. E. Kalaba, and R. Segerblom (1968): Flux Equivalences Among Rayleigh, Isotropic, and Other Scattering Models, *J. Comput. Phys.* 3, 159-166.
- Pahor, S., and P. F. Zweifel (1969): Invariant Imbedding and Case Eigenfunctions, *J. Math. Phys.* 10, 581-589.
- Preisendorfer, R. W. (1957): A Mathematical Foundation for Radiative Transfer Theory, *J. Math. Mech.* 6, 685.
- Preisendorfer, R. W. (1958): Invariant Imbedding Relation for the Principles of Invariance, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 44, 320.
- Preisendorfer, R. W. (1958): Functional Relations for the R and T Operators on Plane-Parallel Media, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 44, 323.
- Preisendorfer, R. W. (1958): Time-Dependent Principles of Invariance, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 44, 328.

Preisendorfer, R. W. (1961): Generalized Invariant Imbedding Relation, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 47, 591.

Preisendorfer, R. W. (1965): *Radiative Transfer on Discrete Spaces*, Pergamon Press, New York.

Preisendorfer, R. W. (1968): A Survey of Theoretical Hydrologic Optics, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 8, 325—338.

Sekera, Z. (1963): Radiative Transfer in a Planetary Atmosphere With Imperfect Scattering, The Rand Corporation, Report R-413-PR, Santa Monica, California.

Ueno, S. (1960): The Probabilistic Method for Problems of Radiative Transfer. X. Diffuse Reflection and Transmission in a Finite Inhomogeneous Atmosphere, *Astrophys. J.* 132, 729—745.

Ueno, S. (1974): Scattering and Transmission Matrices of Partially Polarized Light in a Rayleigh Atmosphere Bounded by a Specular Reflector, *Astrophys. Space Sci.* 33, 64—71.

Ueno, S., R. Kalaba, H. Kagiwada, and R. Bellman (1970): Some Mathematical Aspects of Multiple Scattering in a Finite Inhomogeneous Slab With Anisotropic Scattering, *Publ. Astron. Soc. Japan* 22, 75—83.

Ueno, S., S. Mukai, and A. P. Wang (1973): Invariant Imbedding and Chandrasekhar's Planetary Problem of Polarized Light, In *Planets, Stars, Nebulae Studied With Photopolarimetry*, ed. by T. Gehrels, the University of Arizona Press, Tucson, 582—592.

Ueno, S., R. Vasudevan, and R. Bellman (1973): Invariant Imbedding and Radiation Dosimetry: VI. Absorbed Dose of X- and Gamma Radiation in a Target Slab, *Math. Biosci.* 18, 67—75.

Ueno, S., and A. P. Wang (1973): Scattering and Transmission Functions of Radiation by Finite Atmospheres With Reflecting Surfaces, *Astrophys. Space Sci.* 23, 205—219.

3.13. DART-метод

Carlson, B. G. (1971): On a More Precise Definition of the Discrete Ordinates Method. In *Proceedings of the Second Conference on Neutron Transport Theory*, 348-390, ed. by W. L. Hendry, Los Alamos Scientific Lab.

Carlson, B. G., and K. D. Lathrop (1968): Transport Theory, The Method of Discrete Ordinates, In *Computing Methods in Reactor Physics*, Chapter 3, ed. by H. Greenspan et al., Gordon and Breach, New York.

Gray, C. R., H. L. Malchow, D. C. Merritt, R. E. Var, and C. K. Whitney (1973): Aerosol Physical Properties From Satellite Horizon Inversion, NASA CR-112311, July.

Gray, C. R., R. E. Var, and C. K. Whitney (1973): Space Shuttle Ultraviolet Horizon, NASA 9-4065, Task 24A, April.

Lathrop, K. D., and B. G. Carlson (1971): Properties of New Numerical Approximations to the Transport Equation, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 11, 921—948.

Newell, R. E., and C. R. Gray (1972): Meteorological and Ecological Monitoring of the Stratosphere and Mesosphere, NASA CR-2094, August.

Whitney, C. K. (1972): Implications of a Quadratic Stream Definition in Radiative Transfer Theory, *J. Atmos. Sci.* 29, 1520—1530.

Whitney, C. K. (1974): Efficient Stream Distributions in Radiative Transfer Theory, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 14, 591—611.

Whitney, C. K. (1977): Extending Radiative Transfer Model by Use of Bayes, Rule, *J. Atmos. Sci.* 34, 766—772.

Whitney, C. K. (1979): Scattering of Light by Dielectric Particles: Statistical Theory, *J. Opt. Soc. Amer.* 69, 1554—1566.

Whitney, C. K., and H. L. Malchow (1977): Study of Radiative Transfer in Scattering Atmospheres, Report AFGL-TR-78-0101, June.

Whitney, C. K., R. E. Var, and C. R. Gray (1973): Research into Radiative Transfer Modeling and Applications, Report AFCRL-TR-73-0420, July.

4.1. Соотношения подобия

Зеге Э. П. Световое поле в глубоких слоях рассеивающей и поглощающей сред.—Изв. АН СССР, ФАО, т. 7, 1971, с. 121.

Case, K. M., and P. F. Zweifel (1967): *Linear Transport Theory*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.

Hansen, J. E. (1969): Absorption Line Formation in a Scattering Planetary Atmosphere: A Test of Van de Hulst's Similarity Relations, *Astrophys. J.* 158, 337—349.

Van de Hulst, H. C., and K. Grossman (1968): Multiple Light Scattering in Planetary Atmospheres, In *The Atmospheres of Mars and Venus*, ed. J. C. Brandt and M. B. McElroy, Gordon and Breach, New York.

4.2. Приближение Эддингтона

Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет.—М.: Наука, 1972. 335 с.

Irvine, W. M., and J. Lenoble (1973): Solving Multiple Scattering in Planetary Atmospheres, *Proceedings of the UCLA Int. Conference on Radiation and Remote Probing of the Atmosphere*, Western Periodicals Comp., Los Angeles, California, 1—57.

Joseph, J. H., W. J. Wiscombe, and J. A. Weinman (1976): The Delta-Eddington Approximation for Planetary Atmospheres, *Astrophys. J.* 33, 2452—2459.

Kawata, Y., and W. M. Irvine (1970): The Eddington Approximation for Planetary Atmospheres, *Astrophys. J.* 160, 787—790.

Meador, W. E., and W. R. Weaver (1980): Two-Stream Approximations to Radiative Transfer in Planetary Atmospheres: A Unified Description of Existing Methods and a New Improvement, *J. Atmos. Sci.* 37, 630—643.

Shettle, E. P., and J. A. Weinman (1970): The Transfer of Solar Irradiance Through Inhomogeneous Turbid Atmosphere Evaluated by Eddington's Approximation, *J. Atmos. Sci.* 27, 1048.

Zdunkowski, W. G., R. M. Welch, and G. Korb (1980): An Investigation of the Structure of Typical Two-Stream Methods for the Calculation of Solar Fluxes and Heating Rates in Clouds, *Contr. Atmos. Phys.* 53, 147—166.

4.3. Двухпоточковые методы

Зере Э. П. Двухпоточковые приближения в теории переноса.—Препринт Ин-та физики АН БССР, 1971.

Acquista, C., F. House, and J. Jafolla (1981): N-Stream Approximations to Radiative Transfer, *J. Atmos. Sci.* 38, 1446—1451.

Chu, C. M., and S. W. Churchill (1955): Numerical Solution of Problems in Multiple Scattering of Electromagnetic Radiation, *J. Phys. Chem.* 59, 855—863.

Coakley, J. A., and P. Chylek (1975): The Two-Stream Approximation in Radiative Transfer: Including the Angle of the Incident Radiation, *J. Atmos. Sci.* 32, 409—418.

Hense, A., M. Kerchgens, and E. Raschke (1982): An Economical Method for Computing the Radiative Transfer in Circulation Models, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* 108, 231—252.

Irvine, W. M. (1968): Multiple Scattering by Large Particles: II. Optically Thick Layers, *Astrophys. J.* 152, 823.

Irvine, W. M. (1975): Multiple Scattering in Planetary Atmospheres, *Icarus*, 25, 175—204.

Irvine, W. M., and J. Lenoble (1973): Solving Multiple Scattering in Planetary Atmospheres, *Proceedings of the UCLA Int. Conference on Radiation and Remote Probing of the Atmosphere*, Western Periodicals, Los Angeles, California, 1—57.

Kerschgens, M., U. Pilz, and E. Raschke (1978): A Modified Two-Stream Approximation for Computations of the Solar Radiation Budget in a Cloudy Atmosphere, *Tellus*, 30, 429—435.

Korb, C., J. Michalowsky, and F. Moller (1957): Die Absorption der Sonnenstrahlung in der Wolkenfreien und bewolkten Atmosphäre, *Beitr. Phys. Atmos.* 30, 63—77.

Liou, K. N. (1972): Light Scattering by Cirrus Cloud Layers, *Proceedings of the Conference on Atmospheric Radiation*, Fort Collins, Colorado, 121—127.

Liou, K. N. (1973): Transfer of Solar Irradiance Through Cirrus Cloud Layers, *J. Geophys. Res.* 78, 1409—1418.

Liou, K. N. (1974): Analytic Two-Stream and Four-Stream Solutions for Radiative Transfer, *J. Atmos. Sci.* 31, 1473—1475.

Lyzenga, D. R. (1973): Note on the Modified Two-Stream Approximation of Sagan and Pollack, *Icarus*, 19, 240—243.

Meador, W. E., and W. R. Weaver (1980): Two-Stream Approximations to Radiative Transfer in Planetary Atmospheres: A Unified Description of Existing Methods and a New Improvement, *J. Atmos. Sci.* 37, 630—643.

Piotrowski, S. (1956): Asymptotic Case of the Diffusion of Light Through an Optically Thick Scattering Layer, *Acta Astron.* 6, 64.

Sagan, C., and J. B. Pollack (1967): Anisotropic Nonconservative Scattering and the Clouds of Venus, *J. Geophys. Res.* 72, 469—477.

Schaller, E. (1979): A Delta-Two-Stream-Approximation in Radiative Flux Calculations, *Contr. Atmos. Phys.* 52, 17—26.

Schuster, A. (1905): Radiation Through Foggy Atmospheres, *Astrophys. J.* 21, 1.

Zdunkowski, W. G., G. Korb, and C. T. Davis (1974): Radiative Transfer in Model Clouds of Variable and Height Constant Liquid Water Content as Computed by Approximate and Exact Methods, *Beitr. Phys. Atm.* 47, 157—186.

Zdunkowski, W. G., R. M. Welch, and G. Korb (1980): An Investigation of the Structure of Typical Two-Stream Methods for the Calculation of Solar Fluxes and Heating Rates in Clouds, *Contr. Atmos. Phys.* 53, 147—166.

4.4. Приближение экспоненциального ядра

Bigourd, C., C. Devaux, and M. Herman (1973): Albedos plan et spherique—Extension de la Methode de Wang (Noyau Exponentiel), Rapport Universite des Sciences et Techniques de Lille, France, November.

Wang, L. (1972): Anisotropic Nonconservative Scattering in a Semi-Infinite Medium, *Astrophys. J.* 174, 671—678.

4.5. Метод возмущений

Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах звезд и планет.— М.: Наука, 1972. 335 с.

Deuze, J. L., C. Devaux, and M. Herman (1973): Utilisation de la Methode des Harmoniques Spheriques dans les Calculs de Transfert Radiatif. Extension au Cas de Couches Diffusantes d'Adsorption Variable, *Nouv. Rev. Optique* 4, 307—314.

Fymat, A. L. (1970): Spectral Multiple Scattering of Arbitrarily Polarized Light in Inhomogeneous Planetary Atmospheres, JPL Report 98, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California.

Fymat, A. L., and K. D. Abhyankar (1969—1970): Theory of Radiative Transfer in Inhomogeneous Atmospheres: I, II, III, IV, *Astrophys. J.* 158, 315—324, 325—335 (1969); 159, 1009—1018, 1019—1028 (1970).

Van de Hulst, H. C. (1970): Reduction to H-Functions in Radiative Transfer With a General Anisotropic Phase Function, *Astron. Astrophys.* 9, 359—365.

Van de Hulst, H. C., and W. M. Irvine (1962): General Report on Radiation Transfer in Planets: Scattering in Model Planetary Atmospheres, *Mem. Soc. Roy. Soc. 15th Series, Vol. 7*, 78—98.

4.6. Малоугловое приближение

Галли В. Я., Малкова В. С. Угловое распределение света, исходящего из слоев с большой оптической плотностью.— Известия АН СССР, ФАО, 1971, т. 7, с. 1174—1182.

Малкова В. С. Границы применимости малоуглового приближения в облаках.— Известия АН СССР, ФАО, 1972, т. 8, с. 1100—1103.

Романова Л. М. Решение уравнения радиационного переноса при сильно анизотропной индикатрисе рассеяния. Ч. I.— Оптика и спектроскопия, 1962, т. 13, с. 429—435. Ч. II.— Оптика и спектроскопия, 1962, т. 13, с. 819—825.

Романова Л. М. Поле радиации в плоских слоях мутной среды с сильно анизотропным рассеянием.— Оптика и спектроскопия. 1963, т. 14, с. 262—269.

Irvine, W. M. (1968): An Evaluation of Romanova's Method in the Theory of Radiative Transfer, *The Atmospheres of Venus and Mars*, ed. J. B. Brandt and M. B. McElroy, Gordon and Breach, New York.

Irvine, W. M. (1968): Diffuse Reflection and Transmission by Clouds and Dust Layers, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 8, 471—485.

5.1. Однократное рассеяние

Box, M. A., and A. Deepak (1981): An Approximation to Multiple Scattering in the Earth's Atmosphere: Almucantar Radiance Formulation, *J. Atmos. Sci.* 38, 1037—1048.

Deirmendjian, D. (1957): Theory of the Solar Aureole. Part I: Scattering and Radiative Transfer, *Ann. Geophys.* 13, 286—306.

Sekera, Z. (1956): *Recent Developments in the Study of the Polarization of Sky Light*, Advances in Geophysics, Vol. 13, Academic Press, New York, 43—104.

5.2. Асимптотические соотношения

Бирюков Ю. Л., Титарчук Л. Г. Об определении радиационного поля в оптически плотной среде с сильно анизотропным рассеянием.—Космические исследования, 1972, т. 10, с. 400—410.

Гермогенова Т. А. О характере решения уравнения переноса для плоского слоя.—Журнал высшей математики и математической физики, 1961, т. 1, с. 1001—1019.

Гермогенова Т. А. Дискретный спектр характеристического уравнения переноса.—Журнал высшей математики и математической физики, 1974, т. 14, с. 1528.

Гермогенова Т. А. О решении неоднородного уравнения переноса.—Препринт Института прикладной математики АН СССР, 1974, № 133.

Гермогенова Т. А., Коновалов Н. В. Асимптотические характеристики решения уравнения переноса в задаче неоднородного слоя.—Журнал высшей математики и математической физики, 1974, т. 14, с. 928.

Гермогенова Т. А., Коновалов Н. В. Асимптотический метод решения уравнения переноса для плоскопараллельной атмосферы.—Отчет Института прикладной математики АН СССР, подготовленный для Комиссии по радиации, 1975.

Гермогенова Т. А., Коновалов Н. В., Лукашевич Н. Л., Фейгельсон Е. М. Проверка интерпретации оптических измерений с «Венера-8».—Космические исследования, 1977, т. 15, с. 15—755.

Иванов В. В. Асимптотические свойства радиационных полей в полубесконечных атмосферах.—Астрофизика, 1974, т. 10, с. 193—204.

Иванов В. В. Принципы инвариантности и внутренние радиационные поля в полубесконечных атмосферах.—Астрономический журнал, 1975, т. 52, с. 217—226.

Колесов А. К., Соболев В. В. Некоторые асимптотические выражения в теории анизотропного светорассеяния.—Астрофизика, 1969, т. 5, с. 175.

Коновалов Н. В. Асимптотические свойства односкоростного уравнения переноса в однородном плоскопараллельном слое: задача с азимутальной зависимостью.—Препринт Института прикладной математики АН СССР, 1974, № 65.

Коновалов Н. В. Асимптотические характеристики монохроматических полей радиации в задачах неоднородного плоскопараллельного слоя большой оптической толщины. Ч. II. Вычисление основных параметров и функций.—Препринт института прикладной математики АН СССР, 1974, № 14.

Коновалов Н. В. Интервал справедливости асимптотических выражений для расчетов монохроматического излучения в неоднородном оптически толстом плоскопараллельном слое.—Известия АН СССР, ФАО, 1975, т. 11, с.1263—1271.

Коновалов Н. В. О точности решения уравнения переноса для плоского слоя большой оптической толщины с сильно анизотропным рассеянием.—Препринт Института прикладной математики АН СССР, 1975, № 94.

Масленников М. В. Задачи Милна с произвольной индикатрисой рассеяния.—Доклады АН СССР, 1958. т. 119, с. 895.

Масленников М. В. Задача Милна с анизотропным рассеянием.— Труды Института Стеклова, 1968, № 97.

Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет.— М.: Наука, 1972.

Титарчук Л. Г. Перенос радиации в однослойной сферической планетной атмосфере.— Космические исследования, 1972, т. 10, с. 905—915.

Kuscser, I., and N. J. McCormick (1973): Some Analytical Results for Radiative Transfer in Thick Atmospheres, *Proc. UCLA Int. Conf. on Radiation and Remote Probing of the Atmosphere*, Western Periodicals, Los Angeles, California, 196—226.

Van de Hulst, H. C. (1964): Diffuse Reflection and Transmission by a Very Thick Plane-Parallel Atmosphere With Isotropic Scattering, *Icarus*, 3, 336—361.

Van de Hulst, H. C. (1968): Asymptotic Fitting. A Method for Solving Anisotropic Transfer Problems in Thick Layers, *J. Comput. Phys.* 3, 291—306.

Van de Hulst, H. C. (1968): Radiative Transfer in Thick Atmospheres With an Arbitrary Scattering Function, *Bull. Astron. Inst. Neth.* 20, 77—86.

Van de Hulst, H. C. (1980): *Multiple Light Scattering Tables, Formulas and Applications*, Vol. 1, chap. 5, Academic Press, New York.

6.1. Аппроксимация пика индикатрисы в направлении вперед

Arking, A., and J. F. Potter (1968): The Phase Curve of Venus and the Nature of Its Clouds, *J. Atmos. Sci.* 25, 617—628.

Hansen, J. F. (1969): Radiative Transfer by Doubling Very Thin Layers, *Astrophys. J.* 155, 565—573.

Joseph, J. H., W. J. Wiscombe, and J. A. Weinman (1976): The Delta-Eddington Approximation for Radiative Flux Transfer, *J. Atmos. Sci.* 33, 2452—2459.

McKellar, B. H. J., and M. A. Box (1981): The Scaling Group of the Radiative Transfer Equation, *J. Atmos. Sci.* 38, 1063—1068.

Potter, J. F. (1969): Effect of Cloud Scattering on Line Formation in the Atmosphere of Venus, *J. Atmos. Sci.* 26, 511—517.

Potter, J. F. (1970): The Delta Function Approximation in Radiative Transfer Theory, *J. Atmos. Sci.* 27, 943—949.

Schaller, E. (1979): A Delta-Two-Stream Approximation in Radiative Flux Calculations, *Contr. Atmos. Phys.* 52, 17—26.

Van de Hulst, H. C. (1980): *Multiple Light Scattering Tables, Formulas and Applications*, Vol. 2, chaps. 12 and 14, Academic Press, New York.

Weinman, J. A. (1968): Axially Symmetric Transfer of Light Through a Cloud of Anisotropically Scattering Particles, *Icarus*, 9, 67—73.

Weinman, J. A., J. T. Twitty, S. R. Browning, and B. M. Herman (1975): Derivation of Phase Functions From Multiply Scattered Sunlight Transmitted Through a Hazy Atmosphere, *J. Atmos. Sci.* 32, 577—583.

Wiscombe, W. J. (1977): The Delta-M Method. Rapid Yet Accurate Radiative Flux Calculations for Strongly Asymmetric Phase Function, *J. Atmos. Sci.* 34, 1408—1422.

6.2. Различные аналитические представления для индикатрисы рассеяния

Hansen, J. E. (1969): Exact and Approximate Solution for Multiple Scattering by Cloudy and Hazy Planetary Atmospheres, *J. Atmos. Sci.* 26, 478—487.

Henyey, L. G., and J. L. Greenstein (1941): Diffuse Radiation in the Galaxy, *Astrophys. J.* 93, 70.

Hunt, G. E. (1971): A Review of Computational Techniques for Analyzing the Transfer of Radiation Through a Model Cloudy Atmosphere, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 11, 655—690.

Kagiwada, H., and R. Kalaba (1967): Multiple Anisotropic Scattering in Slabs With Axially Symmetric Fields, Mem. RM 5245-PR, The Rand Corporation, Santa Monica, California.

King, M. D. (1983): Number of Terms Required in the Fourier Expansion of the Reflection Function for Optically Thick Atmospheres, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 30, 143—161.

Reynolds, L. O., and N. J. McCormick (1980): Approximate Two-Parameter Phase Function for Light Scattering, *J. Opt. Soc. Am.* 70, 1206—1211.

Приложение 1А

* Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности.— М.: Наука, 1972. 424 с.

* Шифрин К. С., Гардашев Р. Г. Модельные расчеты отражения света от морской поверхности.— Изв. АН СССР, ФАО, т. 21, № 2, 1985.

* Шифрин К. С., Гардашев Р. Г. Интенсивность света, отраженного от морской поверхности.— Изв. АН СССР, ФАО, 23, № 4, 1985. с. 415—422.

Приложение 1Б

Fymat A. L., S. Ueno (1976): Order of scattering of partially polarized radiation in inhomogeneous, anisotropically scattering atmospheres— II. Reciprocity and symmetry relations, *Astrophys. Space Sci.* 30, 251—273.

Hovenier, J. W. (1969): Symmetry relationships for scattering, polarized light in a slab of randomly oriented particles, *J. Atmos. Sci.* 26, 488.

* Hovenier, J. W., Van de Hulst H. C., der Mee C. V. M. (1986): Conditions for the elements of the scattering matrix, *Astronomy and Astrophysics*, 157, 301—310.

Secera, Z. (1970): Reciprocity relations for diffuse reflection and transmission of radiative transfer in the planetary atmosphere, *Atm. J.*, 162, 3.

Приложение 1В

* Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами.— М.: Мир, 1986. 660 с.

* Шифрин К. С. Рассеяние света в мутной среде.— М., Л.: Гостехиздат, 1951, 288 с.

* Шифрин К. С. (ред.). Таблицы по светорассеянию. Т. 1—5.— Л.: Гидрометеонздат, 1966, 1968, 1971, 1973.

Deirmendjian, D. (1969): Electromagnetic scattering on spherical polydispersions, Elsevier New York.

Kerker, M., editor (1963): Electromagnetic scattering: Proc. Interdisciplinary Conference held at Clarkson College, Potsdam, Pergamon Press, New York.

Van de Hulst, H. C. (1957): Light scattering by small particles, J. Willy, New York.

Часть II

ВВЕДЕНИЕ

Радиационный перенос монохроматического излучения в плоскопараллельной атмосфере может быть рассмотрен многими «стандартными» методами, обзор которых был дан в первой части книги. Однако природные процессы существенно сложнее, чем эти простые модели. Даже для удовлетворительного описания спектрального распределения излучения в полосе поглощающего газа в плоском слое атмосферы необходимо выполнить громоздкие вычисления монохроматического излучения при достаточном числе длин волн. В связи с этим для описания рассеяния с учетом газового поглощения потребовались упрощающие методы. Они рассмотрены в главе 1.*

В случае когда приближение плоскопараллельной атмосферы перестает быть справедливым, трудности решения общего уравнения переноса (часть I, уравнение (1.20)) быстро возрастают.

Горизонтальные неоднородности (см. главу 2) могут быть обусловлены либо граничными условиями (неоднородность подстилающей поверхности), либо горизонтальной изменчивостью свойств атмосферы. Будут рассмотрены два предельных случая: 1) регулярные, или периодические изменения коэффициентов рассеяния или ослабления в горизонтальной плоскости в горизонтально бесконечной атмосфере; 2) присутствие облака конечных размеров, характеристики которого отличны от характеристик окружающего безоблачного пространства. При этом поле облаков относительно правильной формы, расположенных более или менее правильным образом, можно, вероятно, использовать как промежуточный случай по отношению к вышеупомянутым предельным задачам.

При лимбовых наблюдениях и в случаях низкого солнца нельзя пренебрегать сферичностью Земли (см. главу 3).

Наконец, большое практическое значение имеет освещение узким коллимированным пучком, например лазерным лучом, так как лидары широко используются в исследованиях атмосферы (глава 4).

* Дело тут не только в громоздкости расчетов. Для использования уравнения переноса (1.23) нужно знать монохроматические коэффициенты поглощения газов. Из-за тонкой структуры поглощения они часто неизвестны. Из эксперимента мы получаем функцию пропускания конечного спектрального интервала $\Delta\lambda$, непосредственное использование которой в уравнении переноса невозможно. Глава I посвящена методам решения подобных задач. (*Прим. ред. пер.*)

Метод Монте-Карло пригоден без особых изменений для любой геометрической конфигурации. Этим он предпочтительнее, несмотря на то, что его реализации требует больших затрат машинного времени. Метод Монте-Карло обеспечивает опорные точки, необходимые для проверки других методов, основанных обычно на использовании приближенных аналитических решений. Точные аналитические решения пригодны только в очень упрощенных случаях.

Часть II короче части I и может показаться недостаточно полной. Дело в том, что для плоскопараллельных атмосфер теперь существует множество хорошо известных методов; можно их обобщить и в известной мере сравнить между собой. Проблемы, рассмотренные в части II, далеки от разрешения и находятся пока в стадии активных исследований. Однако мы сочли полезным попытаться дать краткий, хотя, разумеется, не полный обзор современного состояния предмета.

На протяжении всей книги сохранялись по возможности постоянные обозначения. Это прежде всего касается основных характеристик атмосферы и радиационного поля. Если в главе допускается отступление от обычных обозначений, то это отмечается в примечании. В некоторых параграфах из-за разнообразия рассмотренных задач и сложности алгебраических преобразований каждый автор был вынужден вводить в дополнение к общепринятым свои собственные обозначения. Они указаны в каждом параграфе особо.

Проблемы рассеяния при наличии газового поглощения

1.1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

В первой части книги мы ограничились обсуждением переноса монохроматического излучения. В случаях когда альбеда однократного рассеяния $\bar{\omega}_0$, индикатриса p и оптическая толщина τ_1 не зависят от частоты в рассматриваемом интервале длин волн, можно пользоваться теми же методами. Такой подход пригоден для континуумного спектра, в котором указанные параметры медленно изменяются в зависимости от длины волны. Эти свойства присущи полосе ультрафиолетового поглощения в озоне; было показано, что в этом случае данные дистанционного зондирования можно обрабатывать с помощью простых приближенных решений уравнений монохроматического переноса.

Однако в ряде задач физики атмосферы Земли и других планет коэффициент поглощения атмосферных линий и полос является быстро изменяющейся функцией частоты. Данные об интенсивности и ширине этих линий позволяют определить термодинамические характеристики слоя, в котором они наблюдаются, и оценить количество содержащихся в нем поглощающих веществ.

В дальнейшем мы будем считать, что быстрое изменение поглощения обусловлено влиянием скорее атмосферных газов, чем аэрозолей. Тогда для определения нужных нам спектральных характеристик следует решать уравнение переноса для данной индикатрисы рассеяния (параметры которой зависят, в первую очередь, от присутствующего в атмосфере аэрозоля) для большого числа значений $\bar{\omega}_0$ и τ_1 . При такой формулировке задачи подразумевается, что атмосферное рассеяние происходит без изменения частоты.

Эту задачу, конечно, можно решить прямым способом, многократно применяя методы, описанные в предыдущих параграфах (каждый раз для новых значений $\bar{\omega}_0$ и τ_1). Фактически так уже делалось — при использовании метода удвоения (см. часть I, п. 3.10) и метода матричных операторов (см. часть I, п. 3.9). Однако повторные вычисления увеличивают затраты машинного времени, поэтому были развиты специальные методы для расчетов спектров.

При вычислении спектров поглощения возникает несколько взаимосвязанных проблем.

1. При определении формы полосы поглощения было бы удобно вместо расчетов независимого решения уравнения переноса I_ν для

большого числа точек, решить уравнение переноса один раз для частоты, не входящей в полосу поглощения, а затем с помощью соответствующей поправки найти интенсивность для любого произвольного значения.

2. Если в используемом датчике ширина интервала $\Delta\nu$ такова, что коэффициент поглощения атмосферы существенно изменяется на протяжении $\Delta\nu$, следует искать соответствующее средневзвешенное значение решений I_ν уравнений монохроматического переноса. Однако нелегко найти способ построения такого среднего, потому что частота входит в I_ν не только через альбедо $\omega_{0,\nu}$, но также через оптическую толщину τ_ν и полную оптическую толщину $\tau_{1,\nu}$.

3. Для того чтобы оценить количество любого абсорбента, содержащегося в атмосфере, расположенной над некоторым заданным уровнем, полезно знать средний путь, пройденный фотонами в атмосфере над этим уровнем. Эта задача связана с проблемой многократного рассеяния, поэтому подобные расчеты — дело непростое.

Мы рассмотрим несколько отдельных подходов к этим проблемам. Выбор подхода зависит от решаемой задачи, требуемой точности и доступного машинного времени. При расчете отражения от полубесконечной однородной рассеивающей атмосферы особенно пригодны метод последовательных порядков рассеяния (см. п. 1.2) и выражение с H -функциями (см. п. 1.3). Они предназначены по существу для выполнения первого из вышеприведенных требований или, по крайней мере, для ускорения расчетов по большому числу $\omega_{0,\nu}$. Метод начальных значений (см. п. 1.4) опирается на ту же самую идею — получить решение при различных $\omega_{0,\nu}$ однократным машинным счетом. Очевидно, что он применим тоже только к полубесконечным однородным атмосферам.

В случае монохроматического излучения поглощение описывается экспоненциальной функцией с коэффициентом поглощения σ_{av} и входит в уравнение переноса через альбедо однократного рассеяния $\bar{\omega}_{0,\nu}$, связанного с σ_{av} . Когда задача состоит в нахождении интенсивности, осредненной по спектральному интервалу $\Delta\nu$, содержащему много линий, поглощение обычно определяют через среднее пропускание, полученное из эксперимента либо вычисленное с помощью тех или иных моделей полос. При этом необходимо разложить функции пропускания по показательным функциям; проблема состоит в нахождении лучшей аппроксимации функции пропускания. Обзор нескольких различных методов приведен в п. 1.5.

Наконец, совершенно иной и оригинальный подход изложен в п. 1.6. Вероятно, он может быть применен более широко. Находят распределение длины пробега фотонов в чисто рассеивающей атмосфере; следовательно, можно вводить и должным образом определить поглощение на пути длиной λ , оценить, является ли оно

экспоненциальным. Описано несколько различных вычислительных схем.

В п. 1.7 введено вероятностное распределение поглощающего вещества.

1.2. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПОРЯДКОВ РАССЕЯНИЯ

Этот метод был описан в части I, п. 3.7 (см. уравнение (3.50)). Решение задачи о переносе монохроматического излучения можно записать в следующем виде:

$$I_{\nu}(\tau_{\nu}; \mu, \varphi; \tau_{1, \nu}) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\omega}_{0, \nu}^n I^{(n)}(\tau_{\nu}; \mu, \varphi; \tau_{1, \nu}), \quad (1.1)$$

где в неявной форме указана зависимость I от частоты ν , которая входит в I через $\bar{\omega}_0$, τ и τ_1 ; $I^{(n)}$ — интенсивность n -кратно рассеянной радиации в консервативном случае ($\bar{\omega}_0 = 1$).

Если нас интересует спектр радиации, отраженной от полубесконечной атмосферы, так что $\tau_{\nu} = 0$ и $\tau_{1, \nu} = \infty$, уравнение (1.1) упрощается:

$$I_{\nu}(0; \mu, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\omega}_{0, \nu}^n I^{(n)}(0; \mu, \varphi). \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) удовлетворяет перечисленным выше требованиям, так как задачу переноса (нахождение $I^{(n)}$) требуется решить только один раз в (континууме); спектральное усреднение сводится просто к усреднению известных величин $\bar{\omega}_{0, \nu}^n$. Среднее число рассеяний $\langle n \rangle$ (и, следовательно, средний оптический путь рассеяния, пройденный отраженными фотонами $\langle \lambda \rangle \approx \langle n \rangle$) легко находится по формуле

$$\langle n \rangle = \sum n \bar{\omega}_0^n I^{(n)} / \sum \bar{\omega}_0^n I^{(n)}. \quad (1.3)$$

Сложность этой процедуры состоит в исключительно медленной сходимости рядов (1.2), если $\bar{\omega}_0 \approx 1$. Однако эту трудность можно, вероятно, преодолеть, если использовать асимптотические выражения для членов $I^{(n)}$ высоких порядков (или для вклада других интересующих нас величин n -х порядков, таких, как атмосферное альbedo). Итак,

$$I^{(n)}(0; \mu, \varphi) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A n^{-3/2} [1 + (D_1/n) + O(n^{-2})], \quad (1.4)$$

где A и D_1 зависят от направления μ, φ и угла падения μ_0, φ_0 , а также от формы индикатрисы рассеяния. Их можно найти, подставляя в уравнение (1.4) вычисленные значения $I^{(n)}$, где n достаточно велико, чтобы обеспечить асимптотический режим. Вы-

числения выполняются с помощью интегральных рекуррентных соотношений.

Функции A и D_1 можно также выразить через коэффициенты G_i в следующих рядах (справедливо для рассеяния, близкого к консервативному):

$$I_\nu = \sum_{i=0}^{\infty} G_i t^i, \quad (1.5)$$

$$t = (1 - \bar{\omega}_0, \nu)^{1/2}. \quad (1.6)$$

в частности,

$$A = G_1 / (2\pi^{1/2}), \quad (1.7)$$

$$D_1 = 3/2 [1/4 - (G_3/G_1)], \quad (1.8)$$

где

$$G_1 = - \frac{16U(\mu)U(\mu_0)}{[3(1-g)]^{1/2}} \quad (1.9)$$

и $g = \beta_1/3$ — показатель асимметрии индикатрисы. Величина U определена в части I, п. 5.2. Для изотопного рассеяния имеем

$$U = \sqrt{3/4 H_0(\mu)}, \quad (1.10)$$

где $H_0 = H(\bar{\omega}_0 = 1)$.

Функцию G_3 можно найти численной подгонкой к результатам расчета; так же можно найти U

Выражению (1.4) эквивалентно следующее выражение:

$$I^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B(n+C)^{-3/2} [1 + O(n^{-2})]. \quad (1.11)$$

Здесь B и C — также функции углов и индикатрис. Если удастся найти константу C , то асимптотическое условие (1.11) может установиться удивительно быстро.

Сумму (1.2) для $n > n^+$, где асимптотические выражения (1.4) или (1.11) относятся к $n > n^+$, часто можно с достаточной точностью аппроксимировать интегралами известного вида, включающими дополнительную функцию ошибок. Подобным же образом могут быть выражены интегральные величины, такие, например, как эквивалентная величина линии. Для изотропного рассеяния и для двух индикатрис, сходных с индикатрисами рассеяния морской дымки и кучевого облака, были опубликованы таблицы значений $I^{(n)}$ для $n < 40$.

1.8. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ H - ИЛИ X -, Y -ФУНКЦИЙ. СООТНОШЕНИЯ ПОДОБИЯ

Отражение от полубесконечной изотропно рассеивающей атмосферы можно выразить через H -функцию (часть I, п. 2.4). В этом случае расчеты облегчаются тем, что имеется множество таблиц

H -функций для большого числа значений $\bar{\omega}_0, \nu$. Более того, зависимость от $\bar{\omega}_0, \nu$ можно аппроксимировать выражением

$$H(\bar{\omega}_0, \mu) \approx \frac{H(1, \mu)}{1 + \mu [3(1 - \bar{\omega}_0)]^{1/2}}. \quad (1.12)$$

Процесс формирования линий в такой атмосфере основательно изучен физиками и математиками. Используя соотношения подобия (см. часть I, п. 4.1), этот анализ можно применить при объяснении аналогичной проблемы для более сложных индикатрис. В связи с этим были выполнены некоторые тесты точности, обеспечиваемой теорией подобия.

Затабулированные H -функции использовались также для полубесконечной атмосферы с рэлеевским рассеянием или с очень простыми (двучленными) индикатрисами. Для описания пропускания и отражения в конечных атмосферах следует применять X - и Y -функции, учитывая зависимость полной оптической толщины от ν .

1.4. МЕТОД ИСХОДНОГО ЗНАЧЕНИЯ

Нелинейные интегральные уравнения для H -функции

$$H(\mu, \bar{\omega}_0) = 1 + \mu H(\mu, \bar{\omega}_0) \int_0^1 \frac{\psi(\mu')}{\mu + \mu'} H(\mu', \bar{\omega}_0) d\mu' \quad (1.13)$$

сводятся к системе Коши, где параметр $\bar{\omega}_0$ является независимой переменной. Следовательно, H -функция получается непосредственно начиная с $H(\mu, \bar{\omega}_0 = 0) = 1$, причем приращение может быть сколь угодно малым.

Этот метод можно, вероятно, распространить и на решение других задач.

1.5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ПРОПУСКАНИЯ СУММОЙ ЭКСПОНЕНТ

Функция пропускания для спектральных интервалов конечной ширины $\Delta\lambda$ для большинства атмосферных газов, а также, по-видимому, почти для всех спектральных интервалов оказывается не экспоненциальной. Однако все существующие методы теоретического исследования переноса излучения в рассеивающей и поглощающей среде основаны на допущении, что перенос радиации подчиняется экспоненциальному закону.

Этот недостаток можно устранить, если записать функцию пропускания $t_{\Delta\lambda}(u)$ (u — длина пути в поглощающей среде) в следующем виде:

$$t_{\Delta\lambda}(u) = \int_0^{\infty} f(k) \exp(-ku) dk. \quad (1.14)$$

Здесь $f(k) dk$ — часть спектрального интервала, в котором значения коэффициента поглощения меняются от k до $k+dk$.

Обычно интеграл в уравнении (1.14) аппроксимируется конечной суммой:

$$t_{\Delta\lambda}(u) = \sum_{i=1}^n a_i \exp(-k_i u). \quad (1.15)$$

Для того чтобы члены этой суммы имели физический смысл, коэффициенты a_i и k_i должны удовлетворять следующим условиям:

$$0 \leq a_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1 \quad (1.16)$$

и

$$k_i \geq 0. \quad (1.17)$$

Коэффициенты k_i по сути идентичны объемному коэффициенту поглощения и измеряются в м^{-1} .

Хотя такие представления любых функций конечными суммами экспонент математически плохо обусловлены, они, тем не менее, применяются при решении различных задач. В данном конкретном приложении можно обосновать это представление, разбив спектральный интервал $\Delta\lambda$ на конечное число подинтервалов, характеристики поглощения которых описываются постоянными коэффициентами k_i . Различные авторы пользовались разными методами представления, погрешность которых составляла от 0,1 до 1 %.

1.6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФОТОНОВ ПО ДЛИНАМ ПРОБЕГОВ

Альтернативный подход к трем проблемам, перечисленным во введении, основан на использовании распределения вероятности $p(\lambda; \tau; \mu; \varphi; \tau_1)$, где $p(\lambda)d\lambda$ — вероятность того, что фотон, внесший вклад в $I_{\omega_0=1}(\tau; \mu; \varphi; \tau_2) = I_1$, с момента попадания в атмосферу проделает в ней оптический путь от λ до $\lambda + d\lambda$. Вероятность распределения $p_{\omega_{0c}}$, связанная аналогичным образом с интенсивностью континуума $I_{\omega_{0c}} < 1$, тоже может быть определена. Однако для простоты изложения ограничимся в приведенных ниже уравнениях величиной $p(\lambda)$, которая, как следует из ранее сказанного, относится к консервативному случаю. Таким образом, $\lambda = l\sigma_s$, где l — геометрический путь, пройденный фотоном, а σ_s — коэффициент рассеяния в атмосфере.

Из физических соображений очевидно, что если известны $p(\lambda)$ и интенсивность I_1 , то интенсивность монохроматического излуче-

ния при произвольном коэффициенте ослабления σ_v определяется следующим образом:

$$I_v(\tau_v; \mu, \varphi; \tau_1, \nu) = \\ = I_1(\tau; \mu, \varphi; \tau_1) \int_0^{\infty} \rho(\lambda; \tau; \mu, \varphi; \tau_1) \exp(-\sigma_v \lambda / \sigma_s) d\lambda. \quad (1.18)$$

В отличие от уравнения (1.1) (см. п. 1.2) это выражение является промежуточным между решением для консервативной атмосферы и решением для атмосферы с такими же физическими характеристиками, но с добавлением молекулярного поглощения; иными словами, τ и τ_1 в правой части выражения (1.18) не зависят от ν , так что (1.18) непосредственно описывает профиль линии.

Рассмотрим конечный спектральный интервал $\Delta\nu$, для которого функция пропускания имеет общий вид $t_{\Delta\nu}(l)$. Тогда уравнение (1.18) можно переписать следующим образом:

$$I_{\Delta\nu} = I_1 \int_0^{\infty} \rho(\lambda) t_{\Delta\nu}(\lambda/\sigma_s) d\lambda. \quad (1.19)$$

Здесь зависимость от угла и оптической толщины не содержится в явном виде, а I_1 — интенсивность, которая будет наблюдаться в интервалах $\Delta\nu$ в отсутствие поглощения. В монохроматическом случае уравнение (1.19) явно сводится к (1.18).

Первый момент

$$\langle \lambda \rangle = \int_0^{\infty} \rho(\lambda) \lambda d\lambda \quad (1.20)$$

представляет собой средний оптический путь, пройденный излучением в атмосфере при $\bar{\omega}_0 = 1$. Это обстоятельство следует иметь в виду при использовании метода в некоторых приложениях (см. ниже).

Данный алгоритм требует решения стандартной задачи переноса любым из обычных методов для получения I_1 и (отдельно) решения задачи определения $\rho(\lambda)$. Задача определения $\rho(\lambda)$ решалась аналитически или численными методами, а также методом Монте-Карло.

1.6.1. Полубесконечные атмосферы

В случае полубесконечной атмосферы можно показать, что для радиации, отраженной после n -го рассеяния, имеем

$$\rho_n(\lambda) = \exp(-\lambda) \lambda^{n-1} / (n-1)! \quad (1.21)$$

Это выражение позволяет непосредственно получать $\rho(\lambda)$ при $\lambda \ll 1$ (когда существенным является лишь рассеяние первого порядка, оно легко находится аналитически). Кроме того, формулу (1.21) можно использовать в некоторых численных методах для обращения преобразования Лапласа.

В другом предельном случае, при $\lambda \gg 1$

$$p(\lambda) \approx (A/I_1) \lambda^{-1/2} [1 + (D_1/\lambda) + O(\lambda^{-2})], \quad (1.22)$$

где A и D_1 — те же самые константы, которые фигурировали в выражении (1.4) (см. п. 1.2).

Несколько отличается асимптотическое разложение вида

$$p(\lambda) \approx B/I_1 (y^{3/2}) [1 + (15/8y^2)\lambda + O(y^{-3/2})], \quad \lambda \gg 1, \quad (1.23)$$

где $y = \lambda + 1 + C$, B и C — те же константы, что и в выражении (1.11). Для изотропного случая при $\lambda > 20$ ошибка составила 1 %.

1.6.2. Метод Монте-Карло

При расчетах $p(\lambda)$ широко применялся метод Монте-Карло. Методика расчетов очень сходна с изложенной в части I, п. 3.1. Единственная дополнительная процедура состоит в обеспечении накопительных ячеек — для регистрации длин путей, пройденных излученными фотонами.

Главное преимущество этого метода — его универсальность; он годится для неоднородных случаев, вертикально и горизонтально неоднородных облачных слоев, для неплоскопараллельных атмосфер. Кроме того, он позволяет находить распределение на любом уровне слоя. Точность метода существенно зависит от числа зарегистрированных фотонов, так же как при расчете радиационного поля.

1.6.3. Обращение преобразования Лапласа

Из выражения (1.18) следует, что

$$R(r) = I_v/I_1 = \int_0^{\infty} p(\lambda) \exp(-r\lambda) d\lambda, \quad R(r) = L_{r,\lambda}[p(\lambda)], \quad (1.24)$$

где $r = \sigma_v/\sigma$ и $L[p]$ — преобразование Лапласа функции p . Для получения $p(\lambda)$ применялось несколько численных методов обратного преобразования Лапласа. В дальнейшем будем считать, что мы имеем набор значений $R(r)$ для $2N$ значений r ; эти значения можно получить, решив любым способом уравнения радиационного переноса (см. часть 1).

Выражая интеграл в уравнении (1.24) с помощью гауссовой квадратуры, получим линейную систему, которую можно обратить и определить $2N$ дискретных значений $p(\lambda)$. Соответствующая матрица, подлежащая обращению, обусловлена исключительно плохо, поэтому для получения хорошо обусловленной системы применяют сглаживание.

При интерполяции $R(r)$ можно использовать трехточечную аппроксимацию, например

$$R(r) = 1/(1 + Br)^C, \quad (1.25)$$

с двумя константами B и C , которые следует определить.

Величины $R(r)$ — это решения стандартной задачи переноса, полученные любым обычным способом. (Заметим, что требуется знать три значения интенсивности: $I(r=0)$, $I(r_1)$ и $I(r_2)$.) По двум значениям $R(r)$ можно определить константы, используя соотношение

$$\frac{\ln(1 + Br_1)}{\ln(1 + Br_2)} = \frac{\ln R(r_1)}{\ln R(r_2)}, \quad (1.26)$$

$$C = \frac{\ln R(r_1)}{\ln(1 + Br_1)}. \quad (1.27)$$

Уравнение (1.26) решается итерациями.

Распределение длины пробега фотона $p(\lambda)$ является обратным преобразованием Лапласа уравнения (1.26):

$$p(\lambda) = a\lambda^b \exp(-c\lambda), \quad (1.28)$$

$$a = 1/B^C \Gamma(C), \quad (1.29)$$

$$b = C - 1, \quad (1.30)$$

$$c = 1/B, \quad (1.31)$$

а $\Gamma(C)$ — гамма-функция от C , удовлетворяющая соотношению $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Средняя оптическая длина пути задается в виде

$$\langle \lambda \rangle = (b+1)/c = BC. \quad (1.32)$$

В случае если альbedo подстилающей поверхности достаточно велико, предложенную процедуру можно применять к атмосфере в два приема, потому что распределение длины пути обладает аддитивностью:

$$I_1 p(\lambda) = I_s p_s(\lambda) + I_R p_R(\lambda), \quad (1.33)$$

где $p_s(\lambda)$ — плотность распределения значений длины пробега фотонов, полученных по значениям $R(r)$ исследуемой атмосферы, при альbedo подстилающей поверхности, равном нулю (I_s — интенсивность соответствующего континуума). Величина $p_R(\lambda)$ определяется по разности значений $R(r)$ для атмосферы, включающей альbedo подстилающей поверхности, и $R(r)$ для той же атмосферы без альbedo (I_R — соответствующая интенсивность континуума).

Погрешность аппроксимирующего выражения (1.25) составляет менее 1% для большинства случаев при значениях r от 0 до 1; с увеличением r точность уменьшается.

Другой подход — это использование Паде-аппроксимации при интерполяции $R(r)$ в виде отношения двух полиномов:

$$R(r) \approx P_{N-1}(r)/Q_N(r). \quad (1.34)$$

Определим обратную разность нулевого порядка:

$$\psi_0^n = \psi_0(r_n) = 1/R(r_n), \quad n = 0, 1, \dots, 2N-1, \quad (1.35)$$

и обратную разность порядка k :

$$\psi_k^n = \psi_k(r_n, \dots, r_{n+k}). \quad (1.36)$$

Функция ψ вычисляется с помощью следующего рекуррентного соотношения:

$$\psi_{k+1}^n = \psi_{k-1}^{n+1} + \frac{r_{n+k+1} - r_n}{\psi_k^{n+1} - \psi_k^n}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N - 2;$$

$$n = 0, 1, \dots, 2N - k - 2. \quad (1.37)$$

Функцию для интерполяции $[f(r) = 1/R(r)]$ можно представить в виде непрерывного отношения с помощью обратных разностей:

$$f(r) = \psi_0^0 + \frac{r - r_0}{\psi_1(r, r_0)}, \quad (1.38)$$

$$\psi_1(r, r_0) = \psi_1^0 + \frac{r - r_1}{\psi_2(r, r_0, r_1) - \psi_1^0}, \quad (1.39)$$

и наконец

$$f(r) = \alpha_0 + \frac{r - r_0}{\alpha_1 + \frac{r - r_1}{\alpha_2 + \frac{r - r_2}{\alpha_3 \dots}}}, \quad (1.40)$$

где

$$\alpha_0 = \psi_0^0, \quad \alpha_1 = \psi_1^0, \quad \alpha_k = \psi_k^0 - \psi_{k-2}^0, \quad k > 1 \quad (1.41)$$

Обрезая бесконечную дробь на порядке k , получаем k -е приближение $f(r)$, которое можно записать как отношение полиномов $A_k(r)/B_k(r)$. Можно показать, что полиномы A_{2k} , A_{2k-1} и B_{2k} имеют степень k , а полиномы B_{2k-1} — степень $k-1$. Поэтому коэффициенты обоих полиномов вычисляются следующим образом.

Имеем

$$A_0(r) = a_0^0 = 0, \quad A_{2k}(r) = \sum_{i=0}^k a_i^{2k} r^i,$$

$$B_0(r) = b_0^0 = 1, \quad B_{2k}(r) = \sum_{i=0}^k b_i^{2k} r^i,$$

$$A_{-1}(r) = a_0^{-1} = 1, \quad A_{2k-1}(r) = \sum_{i=0}^k a_i^{2k-1} r^i,$$

$$B_{-1}(r) = b_0^{-1} = 0, \quad B_{2k-1}(r) = \sum_{i=0}^{k-2} b_i^{2k-1} r^i \quad (1.42)$$

и

$$a_i^{2k-1} = \alpha_{2k-1} a_i^{2k-2} - r_{2k-2} a_i^{2k-3} + a_{i-1}^{2k-3}, \quad i = 0, \dots, k, \quad (1.43)$$

$$a_i^{2k} = \alpha_{2k} a_i^{2k-1} - r_{2k-1} a_i^{2k-2} + a_{i-1}^{2k-2}, \quad i = 0, \dots, k, \quad (1.44)$$

$$b_i^{2k-1} = \alpha_{2k-1} b_i^{2k-2} - r_{2k-2} b_i^{2k-3} + b_{i-1}^{2k-3}, \quad i = 0, \dots, k-1, \quad (1.45)$$

$$b_i^{2k} = \alpha_{2k} b_i^{2k-2} - r_{2k-1} b_i^{2k-2} + b_{i-1}^{2k-2}, \quad i = 0, \dots, k. \quad (1.46)$$

Учитывая характер функции $R(r)$, которая стремится к нулю, когда r стремится к бесконечности, и равна единице при $r = 0$, получим, что соответствующее приближение должно иметь степень $(k-1)/k$. Именно так обстоит в случае A_{2k-1}/B_{2k-1} . Итак, воспользуемся следующей схемой:

1) вычислим обратные разности ψ_k^n с помощью соотношений (1.36)–(1.37);

2) рассчитаем коэффициенты α_k с помощью выражений (1.41);

3) зададим исходные коэффициенты a и b с помощью выражений (1.42);

4) вычислим коэффициенты a и b с помощью выражений (1.43)–(1.46), используя попеременно (1.43) и (1.45), затем (1.44) и (1.46) и т. д. Вычисления останавливаются на порядке $k = N$, когда получены коэффициенты a_i^{2N-1} и b_i^{2N-1} .

Затем функция $R(r)$ аппроксимируется рациональным отношением $P_{N-1}(r)/Q_N(r)$, часто называемым Паде-аппроксимацией второго рода. Распределение значений длины пробега фотонов $p(\lambda)$ является обратным преобразованием Лапласа этого отношения:

$$p(\lambda) = L_{r,\lambda}^{-1} [P_{N-1}(r)/Q_N(r)],$$

$$p(\lambda) = \sum_{m=1}^N A_m \exp(\gamma_m \lambda), \quad (1.47)$$

где γ_m — m -й корень полинома $Q_N(r)$,

$$A_m = P_{N-1}(\gamma_m)/Q_N^m(\gamma_m), \quad (1.48)$$

$$Q_N^m(x) = Q_N(x)/(x - \gamma_m), \quad (1.49)$$

Из условия нормировки $p(\lambda)$ получаем

$$\sum A_m/(-\gamma_m) = 1. \quad (1.50)$$

Этот метод не пригоден для полубесконечной консервативной среды, где уместно использовать $\chi(p(\lambda))$ для слабого непрерывного поглощения:

$$p(r, \lambda) = \exp(-r\lambda) p(r=0, \lambda) \Big/ \int_0^{\infty} p(r=0, \lambda) \exp(-r\lambda) d\lambda. \quad (1.51)$$

На практике вычисления можно проводить для очень слабого непрерывного поглощения ($\bar{\omega}_{0c} \approx 10^{-4}, 10^{-5}$).

1.6.4. Применение распределения фотонов по длине пробега

Среднее значение интенсивности в спектральном интервале было задано уравнением (1.19).

В случае слабого поглощения $t_{\Delta\nu}(u) \approx Su$, где S — интенсивность спектральной линии (в случае изолированной линии) или $S = (1/\Delta\nu) \sum_i S_i$, например для случайной модели линий, а u — количество поглощенного газа; $I_{\Delta\nu}$ можно записать в виде

$$I_{\Delta\nu} = I_1 S \langle \lambda \rangle / \sigma_s, \quad (1.52)$$

где $\langle \lambda \rangle$ — средний оптический путь, определенный уравнением (1.20).

Из свойств преобразования Лапласа находим

$$\langle \lambda \rangle = -1/I \left(\frac{dI(r)}{dr} \right)_{r=0}. \quad (1.53)$$

Приближенное аналитическое выражение для $\langle \lambda \rangle$ можно получить, используя формализм приближенного метода для потока (часть I, глава 4).

При сильном поглощении выражения для $I_{\Delta\nu}$ зависят от формы крыльев линии. Однако асимптотическое разложение эквивалентной ширины линии Фойгта аналогично разложению линии Лоренца:

$$W = 2(S\alpha u)^{1/2}, \quad (1.54)$$

где α — полуширина линии Лоренца. Тогда эквивалентная ширина сильной линии для рассеивающей атмосферы равна

$$W = \int_0^{\infty} \rho(\lambda) 2(\rho S \alpha \lambda / \sigma_s)^{1/2} d\lambda, \quad (1.55)$$

где ρ — концентрация поглощающего газа. Итак,

$$W = 2(S\alpha \rho \Lambda / \sigma_s)^{1/2}, \quad (1.56)$$

где

$$\Lambda = \left(\int_0^{\infty} \rho(\lambda) \lambda^{1/2} d\lambda \right)^2 \quad (1.57)$$

есть квадрат среднего корня из длины пути.

1.7. ВЕРОЯТНОСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОГЛОЩАЮЩЕГО ВЕЩЕСТВА

Рассмотрим конечную вертикальную неоднородную атмосферу и обозначим количество поглощающего газа между уровнями z и $z + dz$ через $du(z)$. Аппроксимируем зависимость поглощения от температуры и давления «масштабной аппроксимацией»:

$$t_{\Delta\nu}(z_1, z_2) = \exp \left[-\sigma_\nu \int_{z_1}^{z_2} \left(\frac{p(z)}{p_0} \right)^{\alpha_\nu} \left(\frac{T(z)}{T_0} \right)^{\beta_\nu} du(z) \right]. \quad (1.58)$$

Затем можно определить вероятность $p(u)du$ того, что на произвольном уровне атмосферы z в направлении (ϑ, φ) количество газа, с которым встретится наблюдаемый радиационный пучок, составит от u до $u + du$, так что

$$I_v = I_1 \int_0^{\infty} p(u) \exp(\sigma_v u) du, \quad (1.59)$$

где I_1 — интенсивность континуума; следовательно,

$$p(u) \equiv p(u, z_1, \mu, \varphi). \quad (1.60)$$

Для среднего пропускания по широкому спектральному интервалу

$$I_{\Delta v} = I_1 \int_0^{\infty} p(u) t_{\Delta v}(u) du. \quad (1.61)$$

Очевидно, что те же методы вычислений пригодны для распределения поглощающего вещества и для распределения длины пробега фотонов в однородной атмосфере; в этом случае $p(u) \equiv p(\lambda)$. Интерес заключается в вычислении синтетических спектров в неоднородных рассеивающих атмосферах или в расчете радиационного баланса.

Можно полагать, что все приближенные методы (приближение Эддингтона, метод экспоненциального ядра, двухпотокное приближение и т. п.), описанные в части I, глава 4, позволяют определять вектор F_1 потока F_1 на различных высотах как для восходящего, так и для нисходящего излучения в виде решения линейной системы:

$$AF_1 = S; \quad (1.62)$$

S — вектор источника с единственным ненулевым элементом, представляющим параллельное освещение на верхней границе атмосферы; A — матрица, элементы которой являются аналитическими функциями от ω_{0c} , μ_0 , g и $\Delta\tau$ для слоев, расположенных между двумя расчетными уровнями. Если рассмотреть условие, эквивалентное (1.53),

$$\langle u \rangle = -\frac{1}{F_1} \left(\frac{dF(k)}{dk} \right)_{\bar{k}=0}, \quad (1.63)$$

то можно показать, что

$$\left(\frac{dF(k)}{dk} \right)_{\bar{k}=0} = -A^{-1} \left[\frac{dA}{d(\Delta\tau)} \Big|_{\omega_{0c} \Delta\tau = c^{te}} \Delta_D u F_1 \right]; \quad (1.64)$$

$\Delta_D u$ — диагональная матрица количества поглощающего газа между расчетными уровнями. Аналитические выражения для элементов $A = dA/d(\Delta\tau) \Big|_{\omega_{0c} \Delta\tau = c^{te}}$ обычно сложны, но тесно свя-

заны с элементами A , и параллельные вычисления A и \dot{A} являются довольно эффективными. Главное преимущество этого метода

очевидно: можно получить значения $\langle u \rangle$ для большого числа поглощающих газов (если необходимо, с различными масштабными коэффициентами давления) при очень незначительных затратах машинного времени, если известны A , \dot{A} и F_1 . Объясняется это тем, что матричное умножение не представляет сложности (Δ_{Di} диагональна) и что мы уже знаем свойства A^{-1} из вычислений F_1 . Очевидно, этот метод имеет ограниченное применение, но на практике это можно компенсировать вышеописанным вычислением для нескольких масштабов количества одного и того же газа или даже расширением метода, что дает более высокие порядки распределения $p(u)$ (включая новые производные от A).

Горизонтально
неоднородные атмосферы,
освещенные
солнечным излучением

2.1. ОБЩИЙ АНАЛИЗ

Рассмотрим атмосферу, ограниченную двумя бесконечными параллельными плоскостями, верхняя граница которой однородно освещается параллельным пучком радиации. Поток радиации на единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения излучения, равен πF . Будем считать, что в атмосфере источники излучения отсутствуют.

В соответствии с определениями, принятыми в части I, общее уравнение переноса можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} & (1 - \mu^2)^{1/2} \cos \varphi \frac{\partial I(x, y, z; \mu, \varphi)}{\partial x} + \\ & + (1 - \mu^2)^{1/2} \sin \varphi \frac{\partial I(x, y, z; \mu, \varphi)}{\partial y} + \mu \frac{\partial I(x, y, z; \mu, \varphi)}{\partial z} = \\ & = -\sigma_e(x, y, z)[I(x, y, z; \mu, \varphi) - J(x, y, z; \mu, \varphi)], \end{aligned} \quad (2.1)$$

где положение точки в атмосфере определено координатами (x, y, z) , а направление распространения радиации — направляющими косинусами

$$\alpha = (1 - \mu^2)^{1/2} \cos \varphi; \quad \beta = (1 - \mu^2)^{1/2} \sin \varphi; \quad \gamma = \mu. \quad (2.2)$$

Функция источника описывается выражением

$$\begin{aligned} J(x, y, z; \mu, \varphi) = & \frac{\bar{\omega}_0(x, y, z)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 p(x, y, z; \mu, \varphi; \mu', \varphi') I(x, y, \\ & z; \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' + \frac{\bar{\omega}_0(x, y, z)}{4\pi} p(x, y, z; \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) \pi F(x, y, z), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где (μ_0, φ_0) относится к направлению падающего пучка; $\pi F(x, y, z)$ — поток прямой радиации в точке (x, y, z) .

Граничные условия записываются следующим образом: $I^- = 0$ на верхней границе атмосферы; I^+ у подстилающей поверхности определяются отражательными свойствами последней.

В простейшем случае атмосфера горизонтально однородна, так что σ_e, ω_0 и индикатриса рассеяния не зависят от x, y ; тогда неоднородность поля радиации обусловлена неоднородностью подстилающей поверхности и вводится в задачу через граничные условия.

Этот случай рассмотрен в п. 2.2. Простые случаи можно решать точными аналитическими методами, но чаще прибегают к приближенным методам. Практическое приложение таких задач — спутниковое наблюдение за объектами, расположенными на поверхности Земли.

Если атмосфера однородна, следует рассмотреть два предельных случая: бесконечные по горизонтали атмосферы с периодической однородностью (см. п. 2.3) и облако конечных размеров, расположенное в атмосфере, которая в других отношениях однородна (см. п. 2.4). Наконец, при изучении радиационного баланса Земли большое значение имеет ансамбль большого числа облаков конечного размера (см. п. 2.5), расположенных в правильном порядке или хаотически.

2.2. ОДНОРОДНЫЕ АТМОСФЕРЫ НАД НЕОДНОРОДНОЙ ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

2.2.1. Аналитическое решение для изотропного рассеяния

Рассмотрим однородную непоглощающую атмосферу с изотропным рассеянием над неоднородной поверхностью. Будем считать, что поверхность отражает по закону Ламберта с коэффициентом яркости q , который является функцией переменной x .

Уравнение переноса можно записать в виде

$$\begin{aligned} \cos \theta \frac{\partial I(z, x; \theta, \varphi)}{\partial z} + \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial I(z, x; \theta, \varphi)}{\partial x} = \\ = -\sigma_e [I(z, x; \theta, \varphi) - J(z, x; \theta, \varphi)]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Определим оптическую толщину*

$$\tau = \int_0^z \sigma_e dz \quad (2.5)$$

и назовем τ_1 полной оптической толщиной. Введем характерную длину l_0 вдоль оси x и обозначим

$$\xi = x/l_0. \quad (2.6)$$

Запишем

$$\delta = \sigma_e l_0 (\tau_1 - \tau). \quad (2.7)$$

Уравнение для восходящей I^+ и нисходящей I^- радиации можно записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta \frac{\partial I^+}{\partial \tau} + \frac{\sin \theta \cos \varphi}{\delta (\tau_1 - \tau)} \frac{\partial I^+}{\partial \xi} = J - I^+, \\ -\cos \theta \frac{\partial I^-}{\partial \tau} + \frac{\sin \theta \cos \varphi}{\delta (\tau_1 - \tau)} \frac{\partial I^-}{\partial \xi} = J - I^-, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 0 < \theta < \pi/2, \\ \mu = \cos \theta > 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

* $\tau_1 - \tau = \int_z^\infty \sigma_e dz$ соответствует определению оптической толщины в части I и используется чаще.

где

$$J(\tau, \xi) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (I^+ + I^-) \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi + \frac{\pi F}{4} \exp[-(\tau_1 - \tau) \sec \vartheta_0]. \quad (2.9)$$

Граничные условия записываются в виде

$$I^-(\tau_1 \xi; \vartheta, \varphi) = 0, \\ \pi I^+(0, \xi; \vartheta, \varphi) = q(\xi) \left[\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I^-(0, \xi; \vartheta, \varphi) \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi + \right. \\ \left. + \pi F \cos \vartheta_0 \exp(-\tau_1 \sec \vartheta_0) \right]. \quad (2.10)$$

Предположим, что коэффициент яркости можно представить в следующем виде:

$$q(\xi) = q_0 + \sum_{n=1}^m (p_n \cos n\xi + q_n \sin n\xi). \quad (2.11)$$

Воспользуемся аналогичным разложением для яркостей:

$$I^+ = A_0^{(1)} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^{(1)} \sin n\xi + B_n^{(1)} \cos n\xi], \quad (2.12)$$

$$I^- = A_0^{(2)} + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^{(2)} \sin n\xi + B_n^{(2)} \cos n\xi].$$

С помощью (2.12) и (2.8) получим для коэффициентов A_n и B_n следующие условия:

$$\cos \vartheta \frac{\partial A_0^{(1)}}{\partial \tau} + A_0^{(1)} = R_0(\tau),$$

$$\cos \vartheta \frac{\partial A_n^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{n \sin \vartheta \cos \vartheta}{\delta(\tau_1 - \tau)} B_n^{(1)} + A_n^{(1)} = \bar{R}_n,$$

$$\cos \vartheta \frac{\partial B_n^{(1)}}{\partial \tau} + \frac{n \sin \vartheta \cos \vartheta}{\delta(\tau_1 - \tau)} A_n^{(1)} + B_n^{(1)} = \bar{\bar{R}}_n, \dots$$

$$-\cos \vartheta \frac{\partial A_0^{(2)}}{\partial \tau} + A_0^{(2)} = R_0(\tau),$$

$$-\cos \vartheta \frac{\partial A_n^{(2)}}{\partial \tau} - \frac{n \sin \vartheta \cos \vartheta}{\delta(\tau_1 - \tau)} B_n^{(2)} + A_n^{(2)} = \bar{R}_n,$$

$$-\cos \vartheta \frac{\partial B_n^{(2)}}{\partial \tau} + \frac{n \sin \vartheta \cos \vartheta}{\delta(\tau_1 - \tau)} A_n^{(2)} + B_n^{(2)} = \bar{\bar{R}}_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.13)$$

где

$$R_0(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} [A_0^{(1)} + A_0^{(2)}] \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi + \frac{\pi F}{4} \exp [-(\tau_1 - \tau) \sec \vartheta_0],$$

$$\bar{R}_n(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} [A_n^{(1)} + A_n^{(2)}] \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi,$$

$$\bar{R}_n(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} [B_n^{(1)} + B_n^{(2)}] \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi. \quad (2.14)$$

Граничные условия при $\tau = \tau_1$ имеют вид

$$A_0^{(2)}(\tau_1, \vartheta) = A_n^{(2)}(\tau_1, \vartheta) = B_n^{(2)}(\tau_1, \vartheta) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

При $\tau = 0$ граничные условия можно написать следующим образом:

$$\begin{aligned} A_0^{(1)} &= q_0 \pi F \cos \vartheta_0 \exp(-\tau_1 \sec \vartheta_0) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[q_0 A_0^{(2)} + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j^{(0)} A_j^{(2)} + \beta_j^{(0)} B_j^{(2)}) \right] \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi, \\ A_n^{(1)} &= q_n \pi F \cos \vartheta_0 \exp(-\tau_1 \sec \vartheta_0) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[q_n A_0^{(2)} + q_0 A_n^{(2)} + \sum_{j=1}^{\infty} (\bar{\alpha}_j^{(n)} A_j^{(2)} + \bar{\beta}_j^{(n)} B_j^{(2)}) \right] \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi, \\ B_n^{(1)} &= p_n \pi F \cos \vartheta_0 \exp(-\tau_1 \sec \vartheta_0) + \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \left[p_n A_0^{(2)} + q_0 B_n^{(2)} + \sum_{j=1}^{\infty} (\bar{\alpha}_j^{(n)} A_j^{(2)} + \bar{\beta}_j^{(n)} B_j^{(2)}) \right] \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi, \\ &n = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Здесь мы введем новые коэффициенты с помощью соотношений:

$$\sin n\xi \sin m\xi = \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{a}_{nm}^{(k)} \sin k\xi + \bar{a}_{nm}^{(k)} \cos k\xi),$$

$$\sin n\xi \cos m\xi = \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{b}_{nm}^{(k)} \sin k\xi + \bar{b}_{nm}^{(k)} \cos k\xi),$$

$$\cos n\xi \cos m\xi = \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{c}_{nm}^{(k)} \sin k\xi + \bar{c}_{nm}^{(k)} \cos k\xi), \quad n, m = 1, 2, \dots, \quad (2.17)$$

$$\alpha_j^{(0)} = \sum_{k=1}^m (q_k \bar{a}_{jk}^{(0)} + p_k \bar{b}_{jk}^{(0)}), \quad \beta_j^{(0)} = \sum_{k=1}^m (q_k \bar{b}_{kj}^{(0)} + p_k \bar{c}_{jk}^{(0)}),$$

$$\bar{\alpha}_j^{(i)} = \sum_{k=1}^m (q_k \bar{a}_{jk}^{(i)} + p_k \bar{b}_{jk}^{(i)}), \quad \bar{\beta}_j^{(i)} = \sum_{k=1}^m (q_k \bar{b}_{kj}^{(i)} + p_k \bar{c}_{jk}^{(i)}),$$

$$\bar{\alpha}_j^{(i)} = \sum_{k=1}^m (q_k \bar{a}_{jk}^{(i)} + p_k \bar{b}_{jk}^{(i)}), \quad \bar{\beta}_j^{(i)} = \sum_{k=1}^m (q_k \bar{b}_{kj}^{(i)} + p_k \bar{c}_{jk}^{(i)}),$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.18)$$

После сложных алгебраических преобразований систему (2.13) можно проинтегрировать, а коэффициенты A_n и B_n выразить через более простые функции. Окончательный результат задается формулами

$$\begin{aligned}
 I^+(\tau, \xi; \vartheta, \varphi) &= 2 \exp(-\tau \sec \vartheta_0) \eta \left[\bar{H}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} H_n \sin n \times \right. \\
 &\times \left. \left(\xi + \frac{\operatorname{tg} \vartheta \cos \varphi}{\delta} \ln \frac{\tau_1 - \tau}{\tau_1} \right) + \bar{H}_n \cos n \left(\xi + \frac{\operatorname{tg} \vartheta \cos \varphi}{\delta} \ln \frac{\tau_1 - \tau}{\tau_1} \right) \right] + \\
 &+ \sec \vartheta \int_0^{\tau} \exp[-(\tau - t) \sec \vartheta] \left\{ \lambda(t) + \eta \sum_{n=0}^{\infty} \left[\bar{H}_n \sin n \left(\xi + \frac{\operatorname{tg} \vartheta \cos \varphi}{\delta} \times \right. \right. \right. \\
 &\times \left. \left. \ln \frac{\tau_1 - \tau}{\tau_1 - t} \right) + \bar{H}_n \cos n \left(\xi + \frac{\operatorname{tg} \vartheta \cos \varphi}{\delta} \ln \frac{\tau_1 - \tau}{\tau_1 - t} \right) \right] R_n^{(0)}(t) \right\} dt, \\
 I^-(\tau, \xi; \vartheta, \varphi) &= \sec \vartheta \int_{\tau}^{\tau_1} \exp[-(t - \tau) \sec \vartheta] \times \\
 &\times \left\{ \lambda(t) + \eta \sum_{n=0}^{\infty} \left[\bar{H}_n \sin n \left(\xi - \frac{\operatorname{tg} \vartheta \sin \varphi}{\delta} \ln \frac{\tau_1 - \tau}{\tau_1 - t} \right) + \right. \right. \\
 &\left. \left. + \bar{H}_n \cos n \left(\xi - \frac{\operatorname{tg} \vartheta \sin \varphi}{\delta} \ln \frac{\tau_1 - \tau}{\tau_1 - t} \right) \right] R_n^{(0)}(t) \right\} dt, \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

где

$$\eta = \frac{\pi F}{2} \cos \vartheta_0 \exp(-\tau_1 \sec \vartheta_0) + \int_0^{\tau_1} E_2(t) \lambda(t) dt, \quad (2.20)$$

$$\lambda(\tau) = \frac{\pi F}{4} \exp[-(\tau_1 - \tau) \sec \vartheta_0] + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_1} E_1(|\tau - t|) \lambda(t) dt, \quad (2.21)$$

$$R_0^{(0)}(\tau) = E_2(\tau) + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_1} E_1(|\tau - t|) R_0^{(0)}(t) dt, \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}
 R_n^{(0)}(\tau) &= \psi_2^{(n)}\left(\tau, \frac{1}{\delta} \ln \frac{\tau_1 - \tau}{\tau_1}\right) + \frac{1}{2} \int_0^{\tau_1} \psi_1^{(n)}\left(|\tau - t|, \frac{1}{\delta} \ln \frac{\tau_1 - \tau}{\tau_1 - t}\right), \\
 &R_n^{(0)}(t) dt, \quad \bar{R}_n^{(0)} = \bar{R}_n^{(0)} = R_n^{(0)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

Постоянные H_0 , H_n и \bar{H}_n определяются бесконечной системой алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 q_0 &= H_0(1 - q_0 D_0) - \sum_{j=1}^{\infty} [\bar{H}_j \alpha_j^{(0)} + \bar{H}_j \beta_j^{(0)}] D_j, \\
 q_n &= -H_0 q_n D_0 + \bar{H}_n(1 - q_0 D_n) - \sum_{j=1}^{\infty} [\bar{H}_j \bar{\alpha}_j^{(n)} + \bar{H}_j \bar{\beta}_j^{(n)}] D_j,
 \end{aligned}$$

$$p_n = -H_0 p_n D_0 + \bar{H}_n (1 - q_0 D_n) - \sum_{j=1}^{\infty} [\bar{H}_j \bar{\alpha}_j^{(n)} + \bar{H}_j \bar{\beta}_j^{(n)}] D_j, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.24)$$

где
$$D_0 = \int_0^{\tau_1} E_2(t) R_0^{(0)}(t) dt,$$

$$D_n = \int_0^{\tau_1} \psi_2^{(n)}\left(t, \frac{1}{\delta} \ln \frac{\tau_1}{\tau_1 - t}\right) R_0^{(0)}(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

Обычная интегральная экспоненциальная функция имеет вид

$$E_n(x) = \int_0^{\infty} \frac{\exp(-sx)}{s^n} ds; \quad (2.26)$$

$\psi_n^{(m)}$ — функция, выражающаяся через Бесселеву функцию J_0 следующим образом:

$$\psi_n^{(m)}(x, y; \beta) = \int_0^{\infty} \exp(-x \sqrt{s^2 + \beta^2}) J_0(mys) \frac{s ds}{(s^2 + \beta^2)^{(n+1)/2}}, \quad x > 0; \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.27)$$

Для получения численных результатов функции $\psi_n^{(m)}$ необходимо табулировать. Результаты были получены для

$$q(\xi) = q_0 + q_1 \sin \xi. \quad (2.28)$$

В литературе имеются и другие приближения и обобщения, в том числе случаи резкой неоднородности коэффициента яркости и отклонения отражаемости от закона Ламберта.

2.2.2. Приближенные методы

Все приближенные методы основываются на прослеживании последовательности взаимодействий фотона с атмосферой и с подстилающей поверхностью. Цель задачи — восстановить истинную отражаемость земли ρ_r в наблюдаемой точке по кажущейся отражаемости *

$$R(\mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) = \frac{\pi I^*(0; \mu, \varphi)}{\mu_0 \pi F}, \quad (2.29)$$

измеренной со спутника. Району, окружающему точку наблюдения, присваивается некая средняя отражаемость $\bar{\rho}$, и R можно выразить в виде

$$R(\mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) = R_a(\mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) + \rho_r(\mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) \times \frac{T_a(\mu_0) \exp(-\tau/\mu)}{1 - \bar{\rho} A_{sa}} + \bar{\rho} \frac{T_a(\mu_0) t_a(\mu)}{1 - \bar{\rho} A_{sa}}, \quad (2.30)$$

* Эта функция R соответствует функции S , поделенной на $4\mu_0\mu$ [см. часть I, уравнение (1.31)].

где R_a — отражаемость атмосферы над черной подстилающей поверхностью; T_a , t_a и A_{sa} — суммарное пропускание, пропускание рассеянной радиации и сферическое альbedo, определенное в части I формулами (1.17), (1.18) и (1.19) для атмосферы над черной подстилающей поверхностью.

Для каждой конкретной реальной ситуации требуется наилучшим образом выбрать ρ . Результаты можно уточнить, если учесть зависимость отражающих свойств поверхности от направления. Задачу можно решать с помощью различных методов (сложения, инвариантного вложения и т. д.).

2.3. АТМОСФЕРЫ С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

В этом параграфе мы рассмотрим горизонтально бесконечные атмосферы, оптические характеристики которых плавно изменяются в горизонтальной плоскости.

2.3.1. Принципы инвариантности

Ищется точное аналитическое уравнение для функции S с помощью принципов инвариантности. Аналогичный подход возможен с применением техники инвариантного вложения.

Рассмотрим рассеивающую атмосферу, ограниченную плоскостями $z = 0$ и $z = z_1$, верхняя граница которой $z = 0$ освещена параллельным пучком.*

Будем считать, что коэффициент рассеяния σ_s — функция координаты x , а индикатриса рассеяния и коэффициент поглощения постоянны. Можно определить функцию отражения S , которая теперь зависит от x , формулой

$$I^+(0, x; \Omega) = \frac{1}{\mu} S(z_1, x; \Omega, \Omega_0) \pi F, \quad (2.31)$$

где Ω соответствует (μ, φ) **.

Если мы хотим сформулировать принципы инвариантности, подобные тем, что приведены в части I, п. 3.11, заметим, что слой на уровне z больше не освещен однородно, так как $I^-(z, x; \Omega)$ является функцией x . Следовательно, необходимо расширить класс рассматриваемых задач.

Назовем теперь $I[z, x; \Omega; f(x, \Omega')]$ и $S[z, x, \Omega; f(x, \Omega')]$ яркостью и функцией отражения, отвечающими освещению параллельным пучком, направленным под углом Ω' , с потоком излучения f , зависящим от x .

* Ось z ориентирована сверху вниз, но I^+ относится к восходящей радиации, а I^- — к нисходящей в соответствии с общепринятыми обозначениями.

** Отметим, что это определение S отличается от общего определения в части I (см. уравнение (1.31) с множителем 4 π).

Соотношение (2.31) принимает вид

$$I^+ [0, x, \Omega; \pi F \delta(\Omega - \Omega_0)] = \frac{1}{\mu} S(z_1, x, \Omega; \pi F \delta(\Omega - \Omega_0)), \quad (2.32)$$

и принцип инвариантности, соответствующий уравнению (3.80) в части I, будет описываться следующим уравнением:

$$I^+ [z, x, \Omega; \pi F \delta(\Omega - \Omega_0)] = \frac{1}{\mu} S \{(z_1 - z), x, \Omega; I_{unc}^- [z, x, \Omega; \pi F \delta(\Omega - \Omega_0)]\} + \frac{1}{\mu} \int_{1/2 \text{ space}} S \{(z_1 - z), x, \Omega; I^- [z, x, \Omega'; \pi F \delta(\Omega - \Omega_0)]\} d\Omega', \quad (2.33)$$

где I_{unc}^- — поток прямой радиации, поступившей на уровень z .

Из-за нелинейности I уравнение (2.33) в общем виде плохо подходит для получения уравнения для S .

Предположим теперь, что горизонтальные изменения σ_s можно представить усеченными рядами Фурье:

$$\sigma_s(x) = \sigma_0 \left[1 + \varepsilon \sum_{n=1}^{n_1} (a_n \cos n \omega x + b_n \sin n \omega x) \right] = \sigma_0 [1 + \varepsilon f(x)]. \quad (2.34)$$

Введем подобное же разложение для яркости:

$$I [z, x, \Omega; \pi F \delta(\Omega - \Omega_0)] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \left\{ \tilde{I}_q [z, \Omega; \pi F \delta(\Omega - \Omega_0)] \cos q \omega x + I_q [z, \Omega; \pi F \delta(\Omega - \Omega_0)] \sin q \omega x \right\}, \\ I_{unc}^- [z, x, \Omega; \pi F \delta(\Omega - \Omega_0)] = \\ = \pi F \delta(\Omega - \Omega_0) \sum_{q=-\infty}^{\infty} [\bar{\psi}_q(z, \Omega_0) \cos q \omega x + \psi_q(z, \Omega_0) \sin q \omega x]. \quad (2.35)$$

Введем также следующие определения:

$$S_p^c(z_1, x, \Omega, \Omega') = \mu I^+ [z = 0, x, \Omega; \cos p \omega x \delta(\Omega - \Omega')], \\ S_p^s(z_1, x, \Omega, \Omega') = \mu I^+ [z = 0, x, \Omega; \sin p \omega x \delta(\Omega - \Omega')]. \quad (2.36)$$

Заметим, что

$$I^+ [z = 0, x, \Omega; a \cos p \omega x \delta(\Omega - \Omega')] = \\ = a I^+ [z = 0; x, \Omega; \cos p \omega x \delta(\Omega - \Omega')], \\ I^+ [z = 0, x, \Omega; b \sin p \omega x \delta(\Omega - \Omega')] = \\ = b I^+ [z = 0, x, \Omega; \sin p \omega x \delta(\Omega - \Omega')]. \quad (2.37)$$

Теперь выражение (2.33) приобретает вид

$$I^+ [z, x, \Omega; \pi F \delta(\Omega - \Omega_0)] = \frac{\pi F}{\mu} \sum_q [\bar{\psi}_q(z, \Omega_0) S_q^c(z_1 - z, x, \Omega, \Omega_0) + \\ + \psi_q(z, \Omega_0) S_q^s(z_1 - z, x, \Omega, \Omega_0)] + \\ + \frac{1}{\mu} \int_{1/2 \text{ space}} \sum_q \left\{ \tilde{I}_q^- [z, \Omega', \pi F \delta(\Omega - \Omega_0)] S_q^c(z_1 - z, x, \Omega, \Omega') + \right. \\ \left. + I_q^- [z, \Omega', \pi F \delta(\Omega - \Omega_0)] S_q^s(z_1 - z, x, \Omega, \Omega') \right\} d\Omega'. \quad (2.38)$$

Теперь следует ввести систему уравнений, аналогичных (2.38) и относящихся к слою, освещенному на уровне $z = 0$ пространственно модулированными потоками. Введем следующие обозначения:

$$I[z, x, \Omega; \cos p\omega x \delta(\Omega - \Omega_0)] = I_p^c(z, x, \Omega, \Omega_0), \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

$$I[z, x, \Omega; \sin p\omega x \delta(\Omega - \Omega_0)] = I_p^s(z, x, \Omega, \Omega_0), \quad p = 1, 2, \dots, \quad (2.39)$$

$$I_q^{c(s)}(z, x, \Omega, \Omega_0) =$$

$$= \sum_{q=-\infty}^{\infty} [\tilde{I}_{pq}^{c(s)}(z, \Omega, \Omega_0) \cos q\omega x + I_{pq}^{c(s)}(z, \Omega, \Omega_0) \sin q\omega x]. \quad (2.40)$$

Функции отражения и прямая радиация также могут быть представлены рядами Фурье:

$$S_q^{c(x)}(z, x, \Omega, \Omega') =$$

$$= \sum_r [\tilde{S}_{qr}^{c(s)}(z, \Omega, \Omega') \cos r\omega x + S_{qr}^{c(s)}(z, \Omega, \Omega') \sin r\omega x], \quad (2.41)$$

$$I_{uns}^{c(s)}(z, x, \Omega) = \delta(\Omega - \Omega_0) \sum_q [\tilde{\Psi}_{pq}^{c(s)}(z, \Omega_0) \cos q\omega x +$$

$$+ \Psi_{pq}^{c(s)}(z, \Omega_0) \sin q\omega x]. \quad (2.42)$$

Введем векторы $I_{pq}^c = (\tilde{I}_{pq}^c, I_{pq}^c)$, $I_{pq}^s = (\tilde{I}_{pq}^s, I_{pq}^s)$ и аналогично $\Phi_{pq}^{c(s)}$, $S_{pq}^{c(s)}$. Из уравнения переноса следует, что $I_{pq}^s = -\hat{S}_2 S_{pq}^c$ и т. д., где \hat{S}_2 — матрица: $\hat{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Обозначим $I_{pq}^c = I_{pq}$ и т. д. Обобщенный принцип инвариантности выражается системой векторных уравнений:

$$I_{pr}^+(z, \Omega, \Omega_0) = \frac{1}{\mu} \sum_q \left\{ [S_{qr}(z_1 - z, \Omega, \Omega_0) \cdot \hat{u}_2] \Phi_{pq}(z, \Omega_0) + \right.$$

$$\left. + \int_{1/2 \text{ space}} [S_{qr}(z_1 - z, \Omega, \Omega') + \hat{u}_2] I_{pq}^-(z, \Omega', \Omega_0) d\Omega' \right\}, \quad (2.43)$$

где $S \cdot \hat{u}_2$ — скалярное произведение численного вектора S и матричного вектора $\hat{u}_2 = (\hat{e}, -s_2)$, $\hat{e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Аналогичным образом можно получить и другие принципы инвариантности.

Дифференцируя систему (2.43) по z , переходя к пределу $z \rightarrow 0$ и используя эти уравнения переноса для I_{pr} , получаем следующую систему для функций S :

$$\frac{\partial S_{pr}}{\partial \tau_1} + \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu_0} \right) S_{pr}(\tau_1, \Omega, \Omega_0) + N(p \operatorname{tg} \vartheta_0 \sin \varphi_0 + r \operatorname{tg} \vartheta \sin \varphi) \hat{s}_2 S_{pr} =$$

$$= \bar{\omega}_0 \left\{ p(-\Omega, \Omega_0) \delta_{pr} e_1 + \int [S_{pr}(\Omega, \Omega') p(\Omega', \Omega_0) + S_{pr}(\Omega', \Omega_0) \times \right.$$

$$\left. \times p(\Omega, \Omega') \right] \frac{d\Omega'}{\mu'} + \sum_{q=-\infty}^{\infty} \iint [S_{qr}(\Omega, \Omega') \hat{u}_2] S_{pq}(\Omega'', \Omega_0) p(\Omega', -\Omega'') \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{d\Omega' d\Omega''}{\mu' \mu''} \left. \right\} + \varepsilon \frac{\bar{\omega}_0}{2} \sum_{k=0}^1 \sum_{n=1}^{n_1} [a_n \hat{e} + (-1)^k b_n \hat{s}_2] \left\{ p(-\Omega, \Omega_0) \times \right. \\
& \times \delta_{p, r+(1-2k)n} e_1 - \frac{1}{\mu} S_{p, r+(1-2k)n}(\Omega, \Omega_0) - \frac{1}{\mu_0} S_{p-(1-2k)n, r}(\Omega, \Omega_0) + \\
& + \int [p(\Omega, \Omega') S_{p, r+(1-2k)n}(\Omega', \Omega_0) + p(\Omega', \Omega_0) S_{p-(1-2k)n, r}(\Omega, \Omega')] \times \\
& \times \frac{d\Omega'}{\mu'} + \sum_{q=-\infty}^{\infty} \iint [S_{qr}(\Omega, \Omega') \cdot \hat{u}_2] S_{p, q+(1-2k)n}(\Omega'', \Omega_0) \times \\
& \left. \times p(\Omega', -\Omega'') \frac{d\Omega' d\Omega''}{\mu' \mu''} \right\}, \quad (2.44)
\end{aligned}$$

где $\tau_1 = (\sigma_0 + \sigma_a) z_1$, $\bar{\omega}_0 = \sigma_0 / (\sigma_0 + \sigma_a)$, $N = \omega / (\sigma_0 + \sigma_a)$, p — индикатриса рассеяния, δ_{pr} — дельта-функция Кронекера; все интегралы берутся по полупространству. Система (2.44) является обобщением уравнения для функции отражения S в однородной задаче. Было рассмотрено решение системы (2.44) методом возмущения в применении к простому случаю полубесконечного слоя с изотропным рассеянием.

2.3.2. Возмущение и малоугловое приближение

Рассмотрим атмосферу, ограниченную двумя бесконечными параллельными плоскостями и равномерно освещенную на верхней границе параллельным пучком. Пусть коэффициент рассеяния флукутирует в направлении оси x , так что

$$\sigma_s(x) = \sigma_0(1 + \varepsilon \cos \omega x), \quad 0 < \varepsilon < 1. \quad (2.45)$$

Предполагается, что коэффициент поглощения и индикатриса рассеяния постоянны во всей атмосфере. Метод возмущения состоит в разложении яркости следующим образом:

$$I(z, x; \vartheta, \varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i I_i(z, x; \vartheta, \varphi), \quad (2.46)$$

где I_0 — решение для однородного слоя с $\sigma_s = \sigma_0$. Разлагая далее I_i в ряды Фурье:

$$\begin{aligned}
I_i(z, x; \vartheta, \varphi) = \sum_{r=0}^{\infty} \left[\tilde{I}_i^{(r)}(z; \vartheta, \varphi) \cos r\omega x + I_i^{(r)}(z; \vartheta, \varphi) \sin^2 r\omega x \right] \\
\text{при } i > 0, \quad (2.47)
\end{aligned}$$

получаем систему уравнений для определения $\tilde{I}_i^{(r)}$ и $I_i^{(r)}$.

Если индикатриса рассеяния сильно вытянута вперед, можно учитывать только радиацию, рассеянную под малыми углами вокруг падающего луча. Как и в однородном случае (см. часть I, п. 4.6), мы будем считать $\mu = \mu_0$ и примем граничные условия в виде

$$I_i^{(r)}(0; \vartheta, \varphi) = 0, \quad I_i^{(r)}(0; \vartheta, \varphi) = 0 \quad \text{при } -1 < \cos \vartheta < 1. \quad (2.48)$$

Аналитическое решение было найдено для $i = 1$ и $i = 2$. При условиях (2.48) получается точное решение, если ε достаточно мало.

2.3.3. Асимптотический метод

Пусть коэффициент рассеяния σ_s в полубесконечном слое мутной среды с изотропной индикатрисой рассеяния изменяется вдоль оси x следующим образом:

$$\sigma_s = \sigma_s(x) = \sigma_0(1 + \varepsilon \cos \omega x). \quad (2.49)$$

Верхняя граница $z=0$ этого слоя освещена потоком F , модулированным в общем в направлении оси x , так что

$$F = F(x) = A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (A_p \cos p\omega x + B_p \sin p\omega x). \quad (2.50)$$

Нас интересует асимптотика интенсивности света $I(z, x, \Omega)$ на больших оптических расстояниях $\tau = \sigma_0 z \gg 1$.**

Начнем с уравнения радиационного переноса, используя разложения интенсивности света в ряды по возмущающей величине ε :

$$I = \sum_l \varepsilon^l I_l, \quad (2.51)$$

а затем в ряды Фурье по x :

$$I_l(\tau, \xi, \Omega) = \sum_r \left[\tilde{I}_l^{(r)}(\tau, \Omega) \cos N\xi + I_l^{(r)}(\tau, \Omega) \sin N\xi \right], \quad (2.52)$$

где $\xi = \sigma_0 x$, $N = \omega / (\sigma_0 + \sigma_a)$, σ_a — коэффициент поглощения. Найдем рекуррентные соотношения для преобразований Лапласа от $\tilde{I}_l^{(r)}$, $I_l^{(r)}$. Аналитические свойства этих преобразований определяются корнями характеристического уравнения

$$1 - \frac{\bar{\omega}_0}{2\sqrt{s^2 - r^2 N^2}} \ln \frac{r + \sqrt{s^2 - r^2 N^2}}{1 - \sqrt{s^2 - r^2 N^2}} = 0, \quad (2.53)$$

где $\bar{\omega}_0 = \sigma_0 / (\sigma_0 + \sigma_a)$ — среднее альbedo однократного рассеяния. Обсудим два особых случая. Во-первых, рассмотрим освещение однородного слоя ($\varepsilon = 0$) модулированным потоком ($A_p \neq 0$, $B_p \neq 0$). В этом случае пространственные гармоники $\tilde{I}^{(r)}$, $I^{(r)}$ ослабляются при $\tau \rightarrow \infty$ быстрее, чем $I^{(0)}$, так что при этом световое поле постепенно перестает зависеть от x . Такой режим соответствует асимптотическому поведению интенсивности света в однородном поле, освещенном $F = A_0$. Во-вторых, рассмотрим освещение неоднородного слоя ($\varepsilon \neq 0$) однородным потоком ($A_p = 0$, $B_p = 0$, $p > 1$). Если $\bar{\omega}_0 = 1$, то интенсивность света при $\tau \rightarrow \infty$ пространственно однородна и не зависит от Ω . Если $\bar{\omega}_0 < 1$, то можно наблюдать изменчивость света вдоль оси x на всех уровнях при больших x .

* Ось z направлена вниз.

** Здесь τ — оптическая глубина, обусловленная только рассеянием.

2.3.4. Преобразование Фурье

Фурье-преобразованием можно воспользоваться для преобразования двумерной задачи в одномерную. С его помощью рассматривается атмосфера, нормально освещенная на верхней границе потоком $F(x)$, являющимся функцией горизонтальной ординаты четвертого порядка. Однако представляется затруднительным распространить метод на более сложные задачи или более высокие порядки приближения.

2.4. ОБЛАКА КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ

Однородное облако конечной горизонтальной протяженности рассматривалось с помощью двух различных подходов: один из них основан на дельта-приближении Эддингтона, другой начинается с разложения на сферические гармоники, ограниченного первым порядком. В обоих подходах используется приведенное ниже разложение яркости (2.60) и дается дифференциальное уравнение второго порядка (2.74) или (2.94), подлежащее решению совместно с граничными условиями (2.78) — (2.81) или (2.105) — (2.110). Способы решения уравнения в указанных методах несколько различаются.

2.4.1. Дельта-приближение Эддингтона в трех измерениях

Стандартное приближение Эддингтона, описанное в части I (п. 4.2), предполагает разложение яркости с двумя членами

$$I(\tau; \mu, \varphi) = I_0(\tau) + \mu I_1(\tau); \quad (2.54)$$

соответственно усекается и аппроксимируется индикатриса рассеяния:

$$p(\Theta) = 1 + \beta_1 \cos \Theta = 1 + 3g \cos \Theta. \quad (2.55)$$

Дельта-метод Эддингтона связывает приближение Эддингтона с дельта-приближением переднего пика индикатрисы рассеяния (часть I, п. 6.1). Иными словами,

$$p(\cos \vartheta) = 2\pi A \delta(1 - \cos \vartheta) \delta(\varphi) + (1 - A/2)(1 + 3g' \cos \vartheta), \quad (2.56)$$

где

$$g' = \frac{g - (A/2)}{1 - (A/2)}. \quad (2.57)$$

Это требует нового масштаба для коэффициента ослабления

$$\sigma'_e = \left(1 - \bar{\omega}_0 \frac{A}{2}\right) \sigma_e \quad (2.58)$$

и для альbedo однократного рассеяния

$$\bar{\omega}'_0 = \frac{\bar{\omega}_0 [1 - (A/2)]}{[1 - \bar{\omega}_0 (A/2)]}. \quad (2.59)$$

В решении трехмерной задачи с помощью дельта-приближения Эддингтона сохраняется та же индикатриса рассеяния (2.56) и используется обобщенное разложение яркости:

$$I(x, y, z; \mu, \varphi) = I^0(x, y, z) + I_x(x, y, z) \nu \cos \varphi + I_y(x, y, z) \nu \sin \varphi + I_z(x, y, z) \mu, \quad (2.60)$$

где

$$\nu = (1 - \mu^2)^{1/2}, \quad (2.61)$$

а φ отсчитывается от оси x .

Если ограничиться задачей изолированного однородного облака, то при использовании разложения (2.60) функцию источника можно представить в следующем виде:

$$J(x, y, z; \mu, \varphi) = \bar{\omega}_0 \left(I_0 + g' (I_x \nu \cos \varphi + I_y \nu \sin \varphi + I_z \mu) + \frac{\bar{\omega}_0'}{4\pi} \{1 + 3g' [\mu \mu_0 + \nu \nu_0 \cos(\varphi - \varphi_0)]\} \pi F(x, y, z) \right). \quad (2.62)$$

Умножив уравнение переноса на $d\mu d\varphi$, $\nu \cos \varphi d\mu d\varphi$, $\nu \sin \varphi d\mu d\varphi$, $\mu d\mu d\varphi$ и проинтегрировав по 4π , получим:

$$\frac{\partial I_x}{\partial x} + \frac{\partial I_y}{\partial y} + \frac{\partial I_z}{\partial z} = -3\sigma_e' (1 - \bar{\omega}_0') I_0 + \frac{3\sigma_e' \bar{\omega}_0'}{4} F(x, y, z), \quad (2.63)$$

$$\frac{\partial I_0}{\partial x} = -\sigma_e' (1 - \bar{\omega}_0' g') I_x + \frac{3\sigma_e' g'}{4} \nu_0 \cos \varphi_0 F(x, y, z), \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial I_0}{\partial y} = -\sigma_e' (1 - \bar{\omega}_0' g') I_y + \frac{3\sigma_e' \bar{\omega}_0' g'}{4} \nu_0 \sin \varphi_0 F(x, y, z), \quad (2.65)$$

$$\frac{\partial I_0}{\partial z} = -\sigma_e' (1 - \bar{\omega}_0' g') I_z + \frac{3\sigma_e' \bar{\omega}_0' g'}{4} \mu_0 F(x, y, z). \quad (2.66)$$

Решение этих уравнений требует информации о геометрии облака, поскольку следует определить граничные условия и перенос прямой радиации к уровню z .

К настоящему времени этот метод применялся к отдельному однородному кубообразному облаку с горизонтальными размерами X_0 и Y_0 и вертикальной протяженностью Z_0^* . Облако ориентировано так, что вершина и одна боковая плоскость (плоскость y, z) кубоида освещена солнечным пучком (направление (μ_0, φ_0) , освещенность πF).

Задача упрощается, если рассматривать освещение каждой поверхности отдельно, а затем суммировать полученные результаты:

$$I = \frac{\mu_0 X_0 Y_0}{\mu_0 X_0 Y_0 + \nu_0 Z_0 Y_0} I^{(T)} + \frac{\mu_0 Z_0 Y_0}{\mu_0 X_0 Y_0 + \nu_0 Z_0 Y_0} I^{(S)}, \quad (2.67)$$

где $I^{(T)}$ — решение только для освещенной верхушки облака, а $I^{(S)}$ — только для освещенной боковой стороны. В действительности $I^{(S)}$ можно получить из $I^{(T)}$ соответствующим вращением си-

* Ось z направлена от вершины облака вниз.

стемы координат. Мы ограничимся в дальнейших рассуждениях решением $I^{(r)}$.

Средняя яркость прямого солнечного излучения, проходящего через любую плоскость x, y внутри облака, задается следующим выражением:

$$\bar{F}(z) = \begin{cases} \mu_0 \pi F (1 - z/X_0 \cos \theta_0) \exp(-\sigma'_e z/\mu_0), & 0 \leq z \leq X_0 \cos \theta_0, \\ 0, & z \geq X_0 \cos \theta_0. \end{cases} \quad (2.68)$$

Следующее приближение состоит в замене наклонного солнечного луча лучом, перпендикулярным верхней плоскости:

$$(\mu_0 = 1, \nu_0 = 0) \text{ при } F(x, y, z) = \bar{F}(z). \quad (2.69)$$

Затем, используя уравнения (2.63) — (2.66), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_x}{\partial x} + \frac{\partial I_y}{\partial y} + \frac{\partial I_z}{\partial z} &= 3\sigma'_e (1 - \bar{\omega}_0) I_0 + \frac{3\sigma'_e \bar{\omega}_0}{4\pi} \pi F (1 - z/X_0 \operatorname{ctg} \theta_0) \times \\ &\times \exp(-\sigma'_e z/\mu_0) \text{ при } 0 \leq Z \leq Z_0^*, \\ &= 3\sigma'_e (1 - \bar{\omega}_0') I_0 \text{ при } Z_0^* \leq Z \leq Z_0, \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial I_0}{\partial x} = -\sigma'_e (1 - \bar{\omega}_0' g') I_x, \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial I_0}{\partial y} = -\sigma'_e (1 - \bar{\omega}_0' g') I_y, \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_0}{\partial z} &= -\sigma'_e (1 - \bar{\omega}_0' g') I_z + \frac{3\sigma'_e \bar{\omega}_0' g'}{4\pi} \mu_0 \pi F (1 - z/X_0 \operatorname{ctg} \theta_0) \times \\ &\times \exp(-\sigma'_e z/\mu_0) \text{ при } 0 \leq z \leq Z_0^*, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial I_0}{\partial z} = -\sigma'_e (1 - \bar{\omega}_0' g') I_z \text{ при } Z_0^* \leq z \leq Z_0, \quad (2.73)$$

где $Z_0^* = \min(X_0 \operatorname{ctg} \theta_0, Z_0)$. Продифференцировав уравнения (2.71) — (2.73) и воспользовавшись выражением (2.70), получим:

$$\nabla^2 I_0 - \lambda^2 I_0 = \begin{cases} -(\kappa - \eta z/X_0 \operatorname{ctg} \theta_0) \exp(-\sigma'_e z/\mu_0), & 0 \leq z \leq Z_0^*, \\ 0, & Z_0^* \leq z \leq Z_0, \end{cases} \quad (2.74)$$

где

$$\lambda^2 = 3\sigma_e'^2 (1 - \bar{\omega}_0) (1 - \bar{\omega}_0' g'), \quad (2.75)$$

$$\kappa = \frac{3\sigma_e'^2 \bar{\omega}_0'}{4\pi} \pi F \left(1 - \bar{\omega}_0' g' + \frac{g' \nu_0}{\sigma_e' x_0} \right), \quad (2.76)$$

$$\eta = \frac{3\sigma_e'^2 \bar{\omega}_0'}{4\pi} \pi F (1 - \bar{\omega}_0' g' + g'). \quad (2.77)$$

Граничные условия отражают тот факт, что на границах облака отсутствует рассеянное облучение, и имеют следующий вид:

$$\left(hI_0 - \frac{\partial I_0}{\partial x}\right)_{x=0} = 0; \quad \left(hI_0 + \frac{\partial I_0}{\partial x}\right)_{x=X_0} = 0, \quad (2.78)$$

$$\left(hI_0 - \frac{\partial I_0}{\partial y}\right)_{y=0} = 0; \quad \left(hI_0 + \frac{\partial I_0}{\partial y}\right)_{y=Y_0} = 0, \quad (2.79)$$

$$\left(hI_0 - \frac{\partial I_0}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{3\sigma'_e \bar{\omega}'_0 g'}{4\pi} \mu_0 \pi F, \quad (2.80)$$

$$\left(hI_0 + \frac{\partial I_0}{\partial z}\right)_{z=Z_0} =$$

$$= \begin{cases} \frac{3\sigma'_e \bar{\omega}'_0 g'}{4\pi} \mu_0 \pi F (1 - Z_0/X_0 \operatorname{ctg} \theta_0) \exp(-\sigma'_e Z_0/\mu_0), & Z_0 \leq X_0 \operatorname{ctg} \theta_0, \\ 0, & Z_0 \geq X_0 \operatorname{ctg} \theta_0. \end{cases} \quad (2.81)$$

Здесь $h = 3\sigma'_e(1 - \bar{\omega}'_0 g')/2$.

Следовательно, можно получить решение уравнения (2.74) в виде

$$I_0(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\xi_m \xi_n \cos[\xi_m(x - X_0/2)] \cos[\xi_n(y - Y_0/2)]}{[\xi_m X_0 + \sin(\xi_m X_0)] [\xi_n Y_0 + \sin(\xi_n Y_0)]} I_{mn}(z), \quad (2.82)$$

где ξ_m и ξ_n — собственные значения уравнений

$$\xi_m \sin(\xi_m X_0/2) = h \cos(\xi_m X_0/2), \quad (2.83)$$

$$\xi_n \sin(\xi_n Y_0/2) = h \cos(\xi_n Y_0/2). \quad (2.84)$$

и

$$I_{mn}(z) = \begin{cases} \alpha_1 \exp[-\Lambda(Z_0^* - z)] + \alpha_2 \exp(-\Lambda z) + \alpha_3 \exp(-\sigma'_e z/\mu_0) + \\ + \alpha_4 z \exp(-\sigma'_e z/\mu_0), & 0 \leq z \leq Z_0^*, \\ \beta_1 \exp[-\Lambda(Z_0 - z)] + \beta_2 \exp[-\Lambda(z - Z_0^*)], & Z_0^* \leq z \leq Z_0, \end{cases} \quad (2.85)$$

где

$$\Lambda^2 = \lambda^2 + \xi_m^2 + \xi_n^2, \quad (2.86)$$

а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1$ и β_2 — константы для данного I_{mn} , которые находятся из граничных условий. После этого, используя уравнения (2.71) и (2.73) вместе с выражением (2.82), легко найти I_x, I_y и I_z .

Сравнение потоков, полученных этим приближенным аналитическим методом и методом Монте-Карло, обычно дает хорошее совпадение (расхождение — около 1 %); исключение — случаи, когда оптическая толщина составляет менее 10.

2.4.2. Приближение Y_1

Общее интегродифференциальное уравнение (см. часть I, уравнение (1.20))

$$\Omega \nabla I(\mathbf{r}, \Omega) = -\sigma_e(\mathbf{r}) [I(\mathbf{r}, \Omega) - J(\mathbf{r}, \Omega)] \quad (2.87)$$

сводится к системе дифференциальных уравнений заданием рядов для интенсивности и индикатрисы рассеяния:

$$I(\mathbf{r}, \Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sqrt{2n+1} I_n^m(\mathbf{r}) Y_n^m(\Omega), \quad (2.88)$$

$$P(\Omega, \Omega') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\beta=-n}^n \frac{\bar{\omega}_n}{2n+1} Y_n^\beta(\Omega) Y_n^{\beta*}(\Omega'), \quad (2.89)$$

$$P(\Omega, \Omega_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\beta=-n}^n \frac{\bar{\omega}_n}{2n+1} Y_n^\beta(\Omega) Y_n^{\beta*}(\Omega_0), \quad (2.90)$$

где $Y_n^m(\Omega)$ — перенормированные сферические гармонические функции. Они нормализованы так, чтобы

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} Y_n^m(\Omega) Y_\alpha^\beta(\Omega) d\Omega = \delta_m^\beta \delta_n^\alpha, \quad (2.91)$$

где δ_n^α — дельта-функция Кронекера, равная нулю при $n \neq \alpha$ и единице при $n = \alpha$. Излучение попадает на верхнюю границу облака, расположенную на уровне z_1 , солнечным пучком πF , падающим в направлении (μ_0, φ_0) .

Подставляя в уравнение (2.87) уравнения (2.88)–(2.90) и используя уравнение (2.91), получаем бесконечный набор парных дифференциальных уравнений в частных производных для моментов I_α^β , которые можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\alpha+1} \left[\sqrt{(\alpha+\beta+1)(\alpha-\beta+1)} \frac{\partial}{\partial z} I_{\alpha+1}^\beta + \sqrt{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)} \times \right. \\ & \times \frac{\partial}{\partial z} I_{\alpha-1}^\beta - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left\{ \sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-2)} I_{\alpha-1}^{\beta-1} - \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta+1)} I_{\alpha+1}^{\beta-1} \right\} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \times \right. \\ & \left. \times \left\{ \sqrt{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)} I_{\alpha-1}^{\beta+1} - \sqrt{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)} I_{\alpha+1}^{\beta+1} \right\} \right] = \\ & = -\sigma_e \left[1 + \frac{\bar{\omega}_\alpha}{2\alpha+1} \right] I_\alpha^\beta + \sigma_e \frac{\bar{\omega}_\alpha}{2\alpha+1} \sqrt{1/(2\alpha+1)} Y_\alpha^{\beta*}(\Omega_0) S(z), \quad (2.92) \end{aligned}$$

где

$$S(z) = \pi F \exp[-\sigma_e(z_1 - z)/\mu_0]/4\pi. \quad (2.93)$$

Индекс α в этом наборе принимает все целые значения: $\alpha = 0, 1, 2, \dots$, а β принимает все значения от $-\alpha$ до α . Точное решение этой бесконечной системы уравнений неизвестно. Для получения приближенного решения необходимо обрезать набор на некотором значении α . Вообще можно сформировать Y_n -приближение, отбросив моменты высокого порядка, начиная с I_{N+1}^β и выше.

Поскольку точное решение еще более сложного приближенного решения уравнения (2.92) недоступно, применим Y_1 -приближение.

В этом случае разложение в ряд интенсивности обрезается так, что сохраняются только значения $\alpha = 0, 1$; все коэффициенты с более высокими значениями индексов считаются тождественно равными нулю. В Y_1 -приближении уравнение (2.92) сводится к дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка:

$$\nabla_{\tau}^2 I_0^0(\tau_x, \tau_y, \tau_z) - \eta^2 I_0^0(\tau_x, \tau_y, \tau_z) = \chi S(z), \quad (2.94)$$

где

$$d\tau_x = -\sigma_e dx; \quad d\tau_y = -\sigma_e dy; \quad d\tau_z = -\sigma_e dz; \\ \chi = -3\bar{\omega}_0 [1 + g(1 - \bar{\omega}_0)], \quad (2.95)$$

$$\eta^2 = 3(1 - \bar{\omega}_0)(1 - g\bar{\omega}_0) \quad (2.96)$$

и

$$\nabla_{\tau}^2 = \partial^2/\partial\tau_x^2 + \partial^2/\partial\tau_y^2 + \partial^2/\partial\tau_z^2. \quad (2.97)$$

Теперь задача сводится к решению уравнения (2.94) с соответствующими граничными условиями.

Физический смысл граничных условий для настоящей модели состоит в том, что снаружи ни на одну из границ облака не поступает никакой рассеянной радиации. Если доступно только конечное число моментов, то, как очевидно, это условие явно невозможно выполнить в точности. Поэтому используется приближенный метод, в котором это условие сводится к следующему требованию:

$$\int_{\mathbf{n} \cdot \Omega < 0} (\mathbf{n} \cdot \Omega) I(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega = 0, \quad (2.98)$$

которое известно как условие Маршака.

С помощью уравнения (2.98) можно записать шесть граничных условий для границ облака:

$$I_0^0(\tau_x, \tau_y, 0) - 2I_1^0(\tau_x, \tau_y, 0) = 0, \quad \tau_z = 0, \quad (2.99)$$

$$I_0^0(\tau_x, \tau_y, a) + 2I_1^0(\tau_x, \tau_y, a) = 0, \quad \tau_z = a, \quad (2.100)$$

$$I_0^0(\tau_x, 0, \tau_z) - \sqrt{2}i [I_1^1(\tau_x, 0, \tau_z) + \Gamma_1^{-1}(\tau_x, 0, \tau_z)] = 0, \quad \tau_y = 0, \quad (2.101)$$

$$I_0^0(\tau_x, b, \tau_z) + \sqrt{2}i [I_1^1(\tau_x, b, \tau_z) + \Gamma_1^{-1}(\tau_x, b, \tau_z)] = 0, \quad \tau_y = b, \quad (2.102)$$

$$I_0^0(0, \tau_y, \tau_z) - 2 [I_1^{-1}(0, \tau_y, \tau_z) - \Gamma_1^{-1}(0, \tau_y, \tau_z)] = 0, \quad \tau_x = 0, \quad (2.103)$$

$$I_0^0(c, \tau_y, \tau_z) + 2 [I_1^{-1}(c, \tau_y, \tau_z) - I_1^1(c, \tau_y, \tau_z)] = 0, \quad \tau_x = c. \quad (2.104)$$

Здесь I_0^0 , I_1^1 и I_1^{-1} — моменты разложения интенсивности. Они задаются величиной I_0^0 и ее производными. С помощью этих соотношений граничные условия сводятся к следующим:

$$\frac{\partial I_0^0}{\partial \tau_z} - h I_0^0 = P_1, \quad \tau_z = 0, \quad (2.105)$$

$$\frac{\partial I_0^0}{\partial \tau_z} + h I_0^0 = P_1 \exp(-a/\nu_0), \quad \tau_z = a, \quad (2.106)$$

$$\frac{\partial I_0^0}{\partial \tau_x} - h I_0^0 = -P_2 \exp(-\tau_z/\nu_0), \quad \tau_x = 0, \quad (2.107)$$

$$\frac{\partial I_0^0}{\partial \tau_x} + h I_0^0 = -P_2 \exp(-\tau_z/\nu_0), \quad \tau_x = c, \quad (2.108)$$

$$\frac{\partial I_0^0}{\partial \tau_y} - h I_0^0 = -P_3 \exp(-\tau_z/\nu_0), \quad \tau_y = 0, \quad (2.109)$$

$$\frac{\partial I_0^0}{\partial \tau_y} + h I_0^0 = -P_3 \exp(-\tau_z/\nu_0), \quad \tau_y = b, \quad (2.110)$$

где

$$h = 3(1 - g\bar{\omega}_0)/2, \quad P_1 = \omega_1 F \mu_0/4, \quad P_2 = \bar{\omega}_1 \cos \theta_0 \cos \varphi_0 F/4, \\ P_3 = \bar{\omega}_1 \sin \theta_0 \sin \varphi_0 F/4. \quad (2.111)$$

Граничные условия (2.05) — (2.110) являются граничными условиями типа Робина. Они также называются граничными условиями третьего рода.

Описанная система дифференциальных уравнений и граничных условий сходна с задачами Штурма — Лиувилля. Задача решается методом разделения переменных. Решение для $I_0^0(\tau_x, \tau_y, \tau_z)$ имеет вид

$$I_0^0(\tau_x, \tau_y, \tau_z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \sin \frac{n\pi}{b} \tau_y \left(\cos \lambda_n \tau_z + \frac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n \tau_z \right) \times \right. \\ \times [C_{nm} \exp(k_{nm} \tau_x) + D_{nm} \exp(-k_{nm} \tau_x)] + \sin \frac{m\pi}{b} \tau_y \times \\ \times \left(\cos \lambda'_n \tau_x + \frac{h}{\lambda'_n} \sin \lambda'_n \tau_x \right) [C'_{nm} \exp(k'_{nm} \tau_z) + D'_{nm} \exp(-k'_{nm} \tau_z)] + \\ + \left(\cos \lambda_n \tau_z + \frac{h}{\lambda_n} \sin \lambda_n \tau_z \right) \left(\cos \lambda'_n \tau_x + \frac{h}{\lambda'_n} \sin \lambda'_n \tau_x \right) \times \\ \left. \times [E_{nm} \exp(k''_{nm} \tau_y) + F_{nm} \exp(-k''_{nm} \tau_y) + T_{nm}] \right\}, \quad (2.112)$$

где λ_n и λ'_n — собственные значения,

$$k_{nm} = \sqrt{\eta^2 + (m\pi/b)^2 + \lambda_n^2}, \quad k'_{nm} = \sqrt{\eta^2 + (m\pi/b)^2 + \lambda_n'^2},$$
$$k''_{nm} = \sqrt{\eta^2 + \lambda_n^2 + \lambda_n'^2}, \quad (2.113)$$

C_{nm} , D_{nm} , C'_{nm} , D'_{nm} , E_{nm} , F_{nm} и T_{nm} известные константы.

С помощью выражения для $I_0(\tau_x, \tau_y, \tau_z)$ вычисляются другие моменты и могут быть определены уходящие потоки и интенсивности. Для двумерного облака были выполнены проверки, и результаты оказались удовлетворительными.

2.5. ПОЛЕ РАЗОРВАННЫХ ОБЛАКОВ

2.5.1. Правильное расположение

Методы, развитые в п. 2.4 для отдельного облака конечных размеров, были распространены на правильно расположенные кубообразные облака. Они учитывают как затенение прямой солнечной радиации соседними облаками, так и освещение боков облака радиацией, рассеянной соседним облаком.

2.5.2. Статистические модели

Перенос радиации в поле разорванной облачности (например, в кучевых облаках) зависит от оптических свойств отдельных облаков и от структуры облачного поля. В настоящее время разработаны два основных пути исследования статистических параметров радиационного поля в атмосфере с разорванной облачностью:

1) статистические модели радиационного поля, в которых поток радиации от индивидуального облака полагается известным — либо из экспериментальных данных, либо с помощью другого статистического метода; осредненные характеристики и изменчивость радиационного поля вычисляются исходя из данных о статистических характеристиках поля облачности;

2) приближенное решение уравнения переноса для атмосферы со статистическим распределением параметров.

2.5.2.1. Стохастическая структура потоков радиации в атмосфере с разорванной облачностью (или с облаками конечного размера)

Стохастическая структура разорванной облачности. В однородной воздушной массе метеорологические параметры характеризуются небольшими горизонтальными и временными градиентами. Изменчивость потоков радиации вызвана только изменчивостью облачного покрова. Поэтому для установления статистических характеристик потоков радиации необходимо исследовать статистические характеристики облачного поля. Для описания разорванной облачности в виде стохастического поля требуется знать функции плотности вероятности распределения размеров облаков: $p(a)$ — для высоты основания облаков, $p(h)$ — для вертикальной

мощности облаков, $p(l)$ — для расстояния между облаками, а также взаимосвязь этих функций. Иными словами, необходимо знать трехмерную функцию распределения $p(a, h, l)$, а также иметь информацию о форме облаков. Эти функции можно установить с помощью экспериментальных данных или теоретических моделей.

При статистических исследованиях разорванной облачности мы прибегали к следующим упрощающим предположениям:

1) облачное поле постоянно во времени; «замороженный» облачный покров движется над наблюдателем со скоростью v — в теории турбулентности это предположение носит название гипотезы Тэйлора, оно позволяет перейти от временной переменной t в облачном покрове к расстоянию $s = vt$;

2) облачное поле однородно и изотропно;

3) основания облаков расположены на некоторой высоте z над подстилающей поверхностью (в горизонтальной плоскости);

4) положение солнца фиксировано в направлении θ_0, φ_0 ;

5) в случае коротковолновой радиации мы пренебрегаем увеличением облачности при приближении к горизонту, иными словами, считаем, что облака имеют форму тарелок и имеют только горизонтальные размеры;

6) облака непрозрачны для прямой солнечной радиации.

Введем характеристики разорванной облачности.

Пусть $\xi(\theta, \varphi, t)$ — случайная функция, описывающая присутствие кучевого облака в направлении θ, φ в момент t ; θ — зенитный угол; φ — азимут; $\xi(\theta, \varphi, t) = 1$, если облако находится в направлении θ, φ ; $\xi(\theta, \varphi, t) = 0$, если облако отсутствует. При $\theta = 0$ случайная функция $\xi(0, t)$ описывает присутствие кучевого облака в зените наблюдателя.

Пусть $n_{\theta, \varphi} = \overline{\xi(\theta, \varphi, t)}$ — математическое ожидание ξ в направлении θ, φ . Функция $C_{\theta, \varphi} = 1 - n_{\theta, \varphi}$ описывает вероятность того, что линия визирования свободна от облачности в направлении θ, φ .

Пусть $n_0 = \overline{\xi(\theta, t)}$ — «абсолютное» количество облаков: вероятность присутствия кучевого облака в зените наблюдателя можно истолковать как относительную долю большой площади, покрытой прямоугольной проекцией конфигурации облаков.

Назовем $N(t)$ «относительным» количеством облаков — это доля полусферы (с наблюдателем в центре), покрытая проекцией облачной конфигурации в момент t . Обозначив математическое ожидание $N(t)$ через n , получим:

$$n = \overline{N(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} n_{\theta, \varphi} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (2.114)$$

Пренебрегая зависимостью от азимута, находим:

$$n = \int_0^{\pi/2} n_0 \sin \theta \, d\theta. \quad (2.115)$$

Следует отметить, что при определении относительного количества облаков как основания облаков, так и их боковые грани проектируются на полусферу; при определении абсолютного количества проектируются только основания. Поэтому при наличии разорванной облачности значения n всегда больше соответствующих значений абсолютного количества облаков n_0 :

$$0 \leq n_0 \leq n \leq 1;$$

тогда, очевидно,

$$\lim_{h \rightarrow 0} n = n_0. \quad (2.116)$$

Исследовалась взаимосвязь величин n и n_0 ; оказалось, что различие их максимально в случае $0,1 \leq n \leq 0,4$. Была предложена эмпирическая формула

$$n = n_0 + a_1(1 - n_0)(n_0)^{a_2}, \quad (2.117)$$

где, по нашим предварительным оценкам,

$$0,5 \leq a_1 \leq 0,8, \quad 0,8 \leq a_2 \leq 1,0.$$

Пусть $\sigma_{n_0}^2(t)$ — изменчивость (называемая также дисперсией) случайной функции $\xi(0, t)$. Можно легко показать, что

$$\sigma_{n_0}^2 = n_0 - n_0^2. \quad (2.118)$$

Пусть $r_{n_0}(t)$ — автокорреляционная функция случайного процесса $\xi(0, t)$, нормированного на $\sigma_{n_0}^2$. Для определения $r_{n_0}(t)$ используется простая модель разорванной облачности. В этой модели облачный покров рассматривается как верхняя часть случайной поверхности с нормальным распределением, имеющей на данном уровне поперечный разрез, так что поверхность над разрезом совпадает с границей облака. Из этой модели следует, что

$$r_{n_0}(t) = \frac{2}{\pi} \arcsin [F(t)], \quad (2.119)$$

где $F(t)$ — корреляционная функция нормальной поверхности. Экспериментальные данные позволили установить, что функция $F(t)$ имеет следующий вид:

$$F(t) = \exp(-\alpha t), \quad (2.120)$$

где значение α (мин⁻¹) определяется по формуле

$$\alpha = 0,27 + 0,8(n_0 - 0,5)^2. \quad (2.121)$$

Для средних широт, где $0,3 < n_0 < 0,7$, можно приблизительно принять $\alpha = 0,3$ мин⁻¹.

Статистическая структура потоков прямой, рассеянной и суммарной радиации

В этом разделе мы представим формулы для определения статистических характеристик (математическое ожидание, изменчивость, корреляционная функция) потоков прямой, рассеянной и суммарной радиации при наличии кучевой облачности.

Прямая радиация. Поскольку мы считаем облака непрозрачными для прямого солнечного излучения, то поток прямой радиации, приходящей на горизонтальную плоскость $S'(t)$, должен иметь форму прямоугольного импульсного сигнала. Таким образом, $S'(t) = \text{const} = S'_c$, когда в направлении θ_0, φ_0 облака отсутствуют, и $S'(t) = 0$ при наличии облака. Отсюда

$$S'(t) = [1 - \xi(\theta_0, \varphi_0, t)] S'_c, \quad (2.122)$$

что позволяет найти математическое ожидание $m_{S'}$ и дисперсию $\sigma_{S'}^2$ для потока прямой радиации:

$$m_{S'} = (1 - n_{\theta_0}) S'_c, \quad (2.123)$$

$$\sigma_{S'}^2 = (n_{\theta_0} - n_{\theta_0}^2) (S'_c)^2, \quad (2.124)$$

где n_{θ_0} — вероятность наличия облака в направлении зенитного угла θ_0 . В первом приближении, особенно при $\theta_0 < 60^\circ$ и очень тонком облачном слое,

$$n_{\theta_0} = n_0. \quad (2.125)$$

Отсюда вместо выражений (2.123) и (2.124) получаем

$$m_{S'} = (1 - n_0) S'_c, \quad (2.126)$$

$$\sigma_{S'}^2 = n_0 (1 - n_0) (S'_c)^2. \quad (2.127)$$

Из выражений (2.122) и (2.125) следует, что корреляционную функцию $r_{S'}(t)$ потока прямой радиации можно представить формулами (2.119) и (2.120):

$$r_{S'}(t) = \frac{2}{\pi} \arcsin \exp(-at), \quad (2.128)$$

где a задается формулой (2.121).

Формулы (2.126), (2.127) и (2.128) описывают статистическую структуру потока прямой радиации.

Рассеянная радиация. Полный поток рассеянной радиации $D(t)$ в момент t описывается следующим выражением:

$$D(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I(\theta, \varphi, t) \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi, \quad (2.129)$$

где $I(\theta, \varphi, t)$ — полная интенсивность рассеянной радиации, приходящей из направления θ, φ . При разорванной облачности можно записать для $I(\theta, \varphi, t)$:

$$I(\theta, \varphi, t) = [I_n(\theta) - I_c(\theta)] \xi(\theta, \varphi, t) + I_c(\theta), \quad (2.130)$$

где интенсивности рассеянной радиации, приходящей от ясного неба $I_c(\theta)$ и от облака $I_n(\theta)$, считаются не зависящими от азимута φ . Разность $I_n(\theta) - I_c(\theta)$ максимальна в зените ($\theta = 0$) и уменьшается по мере приближения к горизонту. В плоскопараллельной модели $I_n(\theta) - I_c(\theta) = 0$ при $\theta = 90^\circ$. В качестве первого приближения предположим, что

$$I_n(\theta) - I_c(\theta) = (I_n^* - I_c^*) \cos \theta, \quad (2.131)$$

где постоянные I_n^* и I_c^* — полная интенсивность рассеянной радиации для облачного и безоблачного неба в зените соответственно.

Теперь уравнение (2.129) принимает вид

$$D(t) = (I_n^* - I_c^*) \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \xi(\vartheta, \varphi, t) \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi + D_c, \quad (2.132)$$

где D_c — поток рассеянной радиации от ясного неба. Проведем статистическое осреднение уравнения (2.132). В результате получим математическое ожидание m_D для потока рассеянной радиации:

$$m_D = \frac{2}{3} \pi (I_n^* - I_c^*) n_0 + D_c. \quad (2.133)$$

Для нахождения корреляционной функции потока $D(t)$ рассмотрим уравнение (2.132) как линейное интегральное преобразование случайной функции $\xi(\vartheta, \varphi, t)$ и воспользуемся методом фильтрации спектральных плотностей. Спектр энергетической плотности $S_{2, n_0}(\omega_1, \omega_2)$ случайной функции ξ является двумерным преобразованием Фурье от корреляционной функции r_{n_0} . Пренебрегая зависимостью от азимута и используя гипотезу Тэйлора, можно ввести частоту ω :

$$\omega = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2}. \quad (2.134)$$

Тогда $S_{2, n_0}(\omega_1, \omega_2)$ сведется к однородному преобразованию Хэнкеля (Бесселя):

$$S_{2, n_0}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} r_{n_0}(t) J_0(\omega t) t dt, \quad (2.135)$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, а индекс 2 подчеркивает подобие одномерного преобразования Хэнкеля и двумерного преобразования Фурье.

Используя для $r_{n_0}(t)$ формулы (2.119) и (2.120), найдем:

$$S_{2, n_0}(\omega) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} \frac{\alpha i}{(\alpha^2 i^2 + \omega^2)^{3/2}}, \quad (2.136)$$

где $\varphi^{(i)}(0)$ — i -я производная нормальной функции распределения.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2} x^2\right) dx. \quad (2.137)$$

Корреляционная функция потока рассеянной радиации получается обратной трансформацией Хэнкеля после фильтрации спектра энергетической плотности:

$$r_D(t) = \frac{2\pi}{K_E(Z_t)} \int_0^{\infty} H_2^2(\omega) S_{2, n_0}(\omega) J_0(\omega t) \omega d\omega. \quad (2.138)$$

Здесь Z_t — высота основания облаков в единицах времени (минуты):

$$Z_t = \frac{Z}{v} \quad (2.139)$$

(например, при $Z = 1$ км и скорости облачного покрова $v = 0,4$ км·мин⁻¹, $Z_t = 2,5$ мин); $K_E(Z_t)$ — коэффициент эффективности, описывающий уменьшение дисперсии $\sigma_D^2(Z_t)$ потока рассеянной радиации при увеличении Z_t :

$$K_E(Z_t) = \frac{\sigma_D^2(Z_t)}{\sigma_D^2(Z_t=0)} = 2\pi \int_0^\infty H_2^2(\omega) S_{2, n_0}(\omega) \omega d\omega. \quad (2.140)$$

В равенстве (2.140) $H_2(\omega)$ — спектральная характеристика линейного интегрального преобразования (2.132):

$$H_2(\omega) = (\omega Z_t + 1) \exp(-\omega Z_t). \quad (2.141)$$

Наконец, приведем формулы для определения дисперсии $\sigma_D^2(Z_t)$ и спектра плотности $S_{2D}(\omega)$ рассеянной радиации:

$$\sigma_D^2(Z_t) = \frac{4}{9} \pi^2 (I_n^* - I_c^*)^2 \sigma_{n_0}^2 K_E(Z_t), \quad (2.142)$$

$$S_{2, D}(\omega) = \frac{1}{K_E(Z_t)} H_2^2(\omega) S_{2, n_0}(\omega). \quad (2.143)$$

Формулы (2.135) и (2.138), (2.142) и (2.143) описывают статистическую структуру потока рассеянной радиации.

Суммарная радиация. Из формулы для суммарного потока радиации $Q(t)$ в момент t

$$Q(t) = S'(t) + D(t) \quad (2.144)$$

следует, что математическое ожидание m_Q суммарной радиации является суммой математических ожиданий $m_{S'}$ в формуле (2.126) и m_D в формуле (2.133):

$$m_Q = m_{S'} + m_D. \quad (2.145)$$

Используя формулу (2.144), получим корреляционную функцию r_Q суммарной радиации:

$$r_Q(t) = \frac{\sigma_{S'}^2 r_{S'}(t) + \sigma_D^2 r_D(t) + \sigma_D \sigma_{S'} [r_{D, S'}(t) + r_{D, S'}(-t)]}{\sigma_Q^2}, \quad (2.146)$$

где σ_Q^2 — дисперсия суммарной радиации:

$$\sigma_Q^2 = \sigma_{S'}^2 + \sigma_D^2 + 2\sigma_D \sigma_{S'} r_{D, S'}(t=0). \quad (2.147)$$

Функция взаимной корреляции $r_{D, S'}(t)$ между потоками прямой и рассеянной радиации имеет вид

$$r_{D, S'}(t) = r_{D, S}(0)(\tau), \quad (2.148)$$

где $r_{D, S(0)}$ — функция взаимной корреляции между потоками рассеянной и прямой радиации для особого случая, когда положение солнца фиксировано в зените ($\theta_0 = 0$), а

$$\tau = \left[t^2 + \frac{Z^2 \operatorname{tg}^2 \theta_0}{v^2} - 2 \frac{tZ \operatorname{tg} \theta_0}{v_0} \cos(\varphi_v - \theta_0) \right]^{1/2}. \quad (2.149)$$

Здесь φ_v — азимутальная составляющая скорости ветра $v/v_1 \varphi_v$ облачного покрова, а φ_0 — азимут солнца. Уравнение для расчета взаимной корреляции $r_{D, S(0)}(t)$ имеет вид

$$r_{D, S(0)}(\tau) = \pm \frac{2\pi}{\sqrt{K_E(Z_t)}} \int_0^\infty H_2(\omega) S_{2, n_0} J_0(\omega t) \omega d\omega, \quad (2.150)$$

где

$$r_{D, S(0)}(\tau) < 0 \quad \text{при } I_n^* > I_c^*, \quad (2.151)$$

$$r_{D, S(0)}(\tau) > 0 \quad \text{при } I_n^* < I_c^*.$$

Как указывалось выше, формулы для расчета статистических характеристик потоков коротковолновой радиации выводятся с привлечением некоторых упрощающих предположений, которые позволяют простыми способами выполнять полное статистическое исследование методом корреляционного анализа. Из этого следует, что точность гарантирована лишь «в первом приближении».

2.5.2.2. Приближенное решение уравнения переноса при наличии разорванной облачности (или при конечном размере облака)

При использовании стохастической модели делается предположение о том, что локальное распределение облачных элементов является случайным, а глобальное распределение — правильным. Предполагается, что плоскопараллельный облачный слой освещен сверху параллельным пучком солнечной радиации и что рассеяние и поглощение происходят только в облачных элементах, так что вне облаков $\sigma_e = \sigma_s = 0$. В отношении структуры облачности делаются следующие предположения:

1) количество облаков или частота появления облаков не зависят от высоты в слое $0 < z < H$, $\rho(z) = \rho = \text{const}$;

2) облачное поле не зависит от азимута;

3) вероятность $Q(S)$ одновременного наличия облачных элементов в двух точках, расположенных в слое на расстоянии S одна от другой, описывается выражением

$$Q(S) = \exp(-aS)\rho + [1 - \exp(-aS)]\rho^2, \quad (2.152)$$

где a — параметр, характеризующий средние размеры облака.

Последнее предположение было тщательно исследовано с помощью различных стохастических моделей облачного слоя. Допустим, что облака имеют случайные радиусы, центры облаков распределены по закону Пуассона, а радиусы облачных элементов

распределены как $f(r) = Ce^{-Cr}$, где $1/C$ — средний радиус облака. Тогда

$$Q(S) = \tilde{Q}(S) = 1 - 2(1 - \rho) + (1 - \rho)^{C/4} \{ S \exp[-(C/2)] + 4/C \exp[-C(S/2)] - 8/C \}. \quad (2.153)$$

Лучшие приближения (в смысле квадратичного среднего) к $\tilde{Q}(S)$ с использованием (2.152) были найдены для нескольких значений ρ : их точность составляла 1—2 %.

Был разработан метод решения уравнения радиационного переноса в описанной выше стохастической среде и найдены простые алгоритмы в транспортном приближении переноса, т. е. когда индикатриса рассеяния может быть представлена выражением

$$p(\theta, \varphi, \theta', \varphi') = (1 - \beta)/4\pi + \beta\delta(\theta - \theta', \varphi - \varphi'), \quad 0 < \beta < 1. \quad (2.154)$$

Здесь параметр β характеризует вытянутость индикатрисы рассеяния, а δ — дельта-функция.

В расчетах использовались следующие параметры: 1) коэффициент рассеяния σ_s (км^{-1}); 2) коэффициент поглощения σ_a (км^{-1}); 3) параметр β ; 4) параметр a , характеризующий средние размеры облака; 5) толщина облачного слоя H (км) (или оптическая толщина τ); 6) альбедо земной поверхности A ; 7) количество облаков ρ ; 8) зенитный угол солнца θ_0 ; 9) угол наблюдения θ ; 10) солнечная постоянная πF .

Было получено аналитическое выражение для среднего значения прямой солнечной радиации, пропущенной через разорванную облачность:

$$\bar{I}_0(z) = \pi F \frac{\rho(\sigma_a + \sigma_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \left\{ \frac{\sigma_a + \sigma_1 - \lambda_1}{\lambda_2} \exp[(\lambda_2/\mu_0)(z - H)] + \frac{\lambda_2 - \sigma_a - \sigma_1}{\lambda_1} \exp[(\lambda_1/\mu_0)(z - H)] \right\}, \quad (2.155)$$

где

$$\sigma_1 = \sigma_s(1 - \beta), \quad \mu_0 = \cos \theta_0,$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \{ \sigma_a + \sigma_1 + a \pm [(\sigma_a + \sigma_1 + a^2) - 4a\rho(\sigma_a + \sigma_1)]^{1/2} \}. \quad (2.156)$$

Восходящий и нисходящий потоки описываются выражениями

$$\Phi^+(z) = \pi F \frac{\sigma_1(\sigma_a + \sigma_1)}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \int_0^z \left\{ \frac{a\rho - \lambda_1}{\lambda_1} E_0[\lambda_1(z - \xi)] + \frac{\lambda_2 - a\rho}{\lambda_2} E_0[\lambda_2(z - \zeta)] \right\} W(\xi) d\xi, \quad (2.157)$$

$$\Phi^-(z) = \pi F \frac{\sigma_1(\sigma_a + \sigma_1)}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \int_z^H \left\{ \frac{a\rho - \lambda_1}{\lambda_1} E_0(\lambda_1|z - \zeta|) + \frac{\lambda_2 - a\rho}{\lambda_2} E_0(\lambda_2|z - \zeta|) \right\} W(\zeta) d\zeta + \bar{I}_0(z)|\mu_0|. \quad (2.158)$$

Здесь

$$E_0(t) = 1 - \int_0^t E(l) dl = \exp(-t) - tE(t),$$

$$E(t) = \int_t^\infty \frac{\exp(-S)}{S} dS, \quad t > 0. \quad (2.159)$$

Вспомогательная функция $W(z)$ определяется как решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода:

$$W(z) = \int_0^H g(|z - \zeta|) W(\zeta) d\zeta + V(z), \quad (2.160)$$

где

$$g(t) = \frac{\sigma_1}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} [(\alpha\rho - \lambda_1) E(\lambda_1 t) + (\lambda_2 - \alpha\rho) E(\lambda_2 t)], \quad (2.161)$$

$$V(z) = \frac{4\pi}{\lambda_2 - \lambda_1} \{(\sigma_a + \sigma_1 - \lambda_1) \exp[(\lambda_2/|\mu_0|)(z - H)] + (\lambda_2 - \sigma_a - \sigma_1) \exp[(\lambda_1/|\mu_0|)(z - H)]\}. \quad (2.162)$$

Интенсивность рассеянной радиации может быть определена по аналогичным формулам, в которых используется функция $W(z)$.

Эти уравнения выведены при $A=0$. При ламбертовом отражении от земной поверхности с альбедо $A > 0$ потоки радиации можно рассчитать по следующим формулам:

$$\Phi_A^+(z) = \Phi^+(z) \frac{A\Phi^-(0)}{1 - A\Phi^-(0)} \varphi^+(z), \quad (2.163)$$

$$\Phi_A^-(z) = \Phi^-(z) + \frac{A\Phi^-(0)}{1 - A\Phi^-(0)} \varphi^-(z). \quad (2.164)$$

Выражения для $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$ имеют вид

$$\varphi^+(z) = \frac{\sigma_1(\sigma_a + \sigma_1)\rho}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \int_0^z \left\{ \frac{\alpha\rho - \lambda_1}{\lambda_1} E_0[\lambda_1(z - \zeta)] + \frac{\lambda_2 - \alpha\rho}{\lambda_2} E_0[\lambda_2(z - \zeta)] \right\} \widetilde{W}(\zeta) d\zeta + \frac{\rho(\sigma_a + \sigma_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} \left\{ \frac{\alpha - \lambda_1}{\lambda_1} E_{-1}(\lambda_1 z) + \frac{\lambda_2 - \alpha\rho}{\lambda_2} E_{-1}(\lambda_2 z) \right\}, \quad (2.165)$$

$$\varphi^-(z) = \frac{\sigma_1(\sigma_a + \sigma_1)\rho}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} \int_0^H \left\{ \frac{\alpha\rho - \lambda_1}{\lambda_1} E_0(\lambda_1 |z - \zeta|) + \frac{\lambda_2 - \alpha\rho}{\lambda_2} E_0(\lambda_2 |z - \zeta|) \right\} \widetilde{W}(\zeta) d\zeta. \quad (2.166)$$

Здесь

$$E_{-1}(t) = 1 - 2 \int_0^t E_0(l) dl = \exp(-t) - tE_0(t). \quad (2.167)$$

Вспомогательная функция $\tilde{W}(z)$ является решением уравнения (2.160), где $V(z)$ заменяется на выражение

$$\tilde{V}(z) = \frac{2}{\lambda_2 - \lambda_1} [(a - \lambda_1) E_0(\lambda_2 z) + (\lambda_2 - a) E_0(\lambda_1 z)]. \quad (2.168)$$

Представив ядро как сумму экспонент:

$$W(z) = \int_0^H \sum_{j=1}^M a_j \exp(-b_j |z - \zeta|) W(\zeta) d\zeta + a_0 \exp(-b_0 z), \quad (2.169)$$

можно найти численное решение уравнения (2.160).

Были выполнены численные эксперименты.

2.6. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Метод Монте-Карло описан в части I. Использование метода Монте-Карло для расчетов переноса радиации в облаках является по существу прямым моделированием физических процессов, происходящих с радиацией. Граничные условия определяются реальными границами системы. Фотоны, поступающие из источника в рассматриваемую область, двигаются в определенном направлении. Устанавливается расстояние, пройденное фотонами до момента взаимодействия, после чего выбирается тип взаимодействия. В случае рассеяния определяется новое направление движения фотона после рассеяния. Эта процедура повторяется до тех пор, пока фотон не испытает поглощения или не выйдет за границу области. Если оптическая толщина велика и вычислительное время становится слишком большим, то фотонам приписывают вес, соответствующей доле действительной энергии фотонов, которая сохраняется после каждого взаимодействия. Затем столкновение фотонов допускается до тех пор, пока вся их энергия не будет исчерпана. Полученный результат приблизительно совпадает с тем, который дает прямое воспроизведение.

В изолированном облаке без поглощения моделируются только пути, пройденные фотонами между взаимодействиями, и изменение направлений, вызванное столкновениями.

Моделирование расстояния, пройденного между столкновениями, производится непосредственно, так как доля радиации, пропущенной на некоторое расстояние, является одновременно вероятностью того, что фотон пройдет это самое расстояние. Соотношение

$$PR = \exp(-\tau) = \exp\left(-\int_0^s \sigma_s ds\right) \quad (2.170)$$

связывает вероятность PR с оптической толщиной τ или объемным коэффициентом рассеяния σ_s и расстоянием s . При моделировании для PR выбирается случайное число RN и расстояние до столкновения вычисляется из соотношения

$$\int_0^s \sigma_e ds = \tau = -\ln(1 - RN). \quad (2.171)$$

Индикатриса однократного рассеяния $P(\alpha)$ характеризует угловое распределение радиации после того, как факт рассеяния имел место. Угол рассеяния α измеряется от направления распространения света до рассеяния к направлению движения фотона после столкновения. Нормированная индикатриса рассеяния

$$\int P(\alpha) d\omega = 1$$

не зависит от второго угла, который необходимо знать для определения направления распространения после столкновения. Этот второй угол γ случайным образом выбирается равным от 0 до 2π . Вероятность того, что фотон будет рассеян в угле от 0 до α , задается уравнением

$$PP(\alpha) = 2\pi \int_0^{\alpha} P(\alpha) d(\cos \alpha). \quad (2.172)$$

Следовательно, угол α находят, выбирая случайное значение для $PP(\alpha)$ и решая уравнение (2.172) для верхнего предела взаимодействия.

Метод Монте-Карло применялся для конечных облаков различной конфигурации и для полей конечных облаков.

Глава 3

Сферические атмосферы планет, освещенные солнечным пучком

3.1. ОБЩИЙ АНАЛИЗ

Случай сферической атмосферы с функцией источника и граничными условиями, удовлетворяющими той же самой радиальной симметрии, изучался рядом авторов. Эта задача, соответствующая освещению центральным изотропным точечным источником, или однородно излучающим ядром, возникает в исследованиях радиационного переноса в звездных атмосферах и нейтронного переноса в сферических реакторах.

В отличие от этой относительно простой задачи «сферической геометрии» в атмосферах Земли и других планет мы имеем дело со сферической оболочкой, освещенной однородным параллельным пучком солнечного излучения. В этом случае задача сферических атмосфер не является больше задачей сферической симметрии.

К счастью, радиус Земли (и других планет) достаточно велик по сравнению с толщиной атмосферы, что позволяет в большинстве случаев использовать приближение плоскопараллельной атмосферы. Однако от такого приближения приходится отказаться в ряде задач, когда либо направление падающего излучения, либо направление приемника наблюдения близко к горизонту. Сюда входят все задачи, связанные с сумерками, с терминатором, с лимбовыми измерениями; это обстоятельство становится существенным во многих задачах дистанционного зондирования, основанных на таких измерениях.

Выберем сначала систему координат так, чтобы ее центр совпадал с центром планеты, а ось z была направлена к подсолнечной точке; падающий солнечный луч параллелен оси и имеет обратное направление.

Назовем (r, Θ_0, Φ_0) координатами M (или r), а $(1, \Theta_0, \Phi_0)$ — координатами Ω ; начало отсчета азимута произвольно.*

Тогда общее уравнение переноса можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \left\{ [\cos \Theta \cos \Theta_0 + \sin \Theta \sin \Theta_0 \cos (\Phi_0 - \Phi)] \frac{\partial}{\partial r} - \right. \\ & - \frac{1}{r} [\cos \Theta \sin \Theta_0 - \sin \Theta \cos \Theta_0 \cos (\Phi_0 - \Phi)] \frac{\partial}{\partial \Theta_0} - \\ & \left. - \frac{1}{r} \frac{\sin \Theta}{\sin \Theta_0} \sin (\Phi_0 - \Phi) \frac{\partial}{\partial \Phi_0} \right\} I(r, \Theta_0, \Phi_0; \Theta, \Phi) = \\ & = -\sigma_e(\Theta_0, \Phi_0) [I(r, \Theta_0, \Phi_0; \Theta, \Phi) - J(r, \Theta_0, \Phi_0; \Theta, \Phi)], \quad (3.1) \end{aligned}$$

* $r = a + z$, где a — радиус Земли, z — высота в атмосфере.

а функцию источника J — в виде

$$J(r, \Theta_0, \Phi_0; \Theta, \Phi) = \frac{\bar{\omega}_0(r, \Theta_0, \Phi_0)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} p(r, \Theta_0, \Phi_0; \Theta, \Phi; \Theta', \Phi') \times \\ \times I(r, \Theta_0, \Phi_0; \Theta', \Phi') \sin \Theta' d\Theta' d\Phi' + \frac{\bar{\omega}_0(r, \Theta_0, \Phi_0)}{4} \times \\ \times p(r, \Theta_0, \Phi_0; \Theta, \Phi) \pi F \exp[-T(r, \Theta_0, \Phi_0)], \quad (3.2)$$

где $\pi F \exp[-T(r, \Theta_0, \Phi_0)]$ — прямое солнечное излучение, достигшее через сферическую атмосферу точки M ; T — оптическая толщина слоя над точкой M , измеренная по направлению солнечного пучка.

В качестве граничных условий задаются отражение от подстилающей поверхности и отсутствие выходящей солнечной радиации на верхней границе атмосферы.

Задача несколько упрощается, если подстилающая поверхность однородна, а свойства атмосферы зависят только от высоты (сферическая стратификация). Тогда

$$\bar{\omega}_0(r, \Theta_0, \Phi_0) = \bar{\omega}_0(r),$$

$$\sigma_e(r, \Theta_0, \Phi_0) = \sigma_e(r),$$

$$p(r, \Theta_0, \Phi_0; \Theta, \Phi; \Theta', \Phi') = p(r; \Theta, \Phi; \Theta', \Phi'). \quad (3.3)$$

Земной диаметр, проходящий, через подсолнечную точку, является осью симметрии.

Хотя уравнение (3.1) имеет простейшую форму, во многих случаях (особенно когда требуется сравнение с плоскопараллельным приближением) предпочтительнее связать систему сферических координат с локальной вертикальной осью OM . В этой системе направление Ω определяется зенитным углом ϑ и азимутальным углом φ , отсчитанным от произвольного начала; назовем $\vartheta_0 = \pi - \Theta_0$ и φ_0 координатами солнечного луча. Тогда M задается радиус-вектором r и косвенно (ϑ_0, φ_0).

С помощью некоторых очевидных соотношений сферической тригонометрии можно записать уравнение (3.1) (как и прежде, $\mu = \cos \vartheta_1$, $\mu_0 = \cos \vartheta_0$) в виде

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{(1 - \mu^2)^{1/2} (1 - \mu_0^2)^{1/2}}{r} \times \right. \\ \left. \times \left[\cos(\varphi - \varphi_0) \frac{\partial}{\partial \mu_0} + \frac{\mu_0}{1 - \mu_0^2} \sin(\varphi - \varphi_0) \frac{\partial}{\partial (\varphi - \varphi_0)} \right] \right\},$$

$$I(r; \mu_0, \varphi_0; \mu, \varphi) = -\sigma_e(r) [I(r; \mu_0, \varphi_0; \mu, \varphi) - J(r; \mu_0, \varphi_0; \mu, \varphi)], \quad (3.4)$$

где

$$J(r; \mu_0, \varphi_0; \mu, \varphi) = \frac{\bar{\omega}_0(r)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 p(r; \mu, \varphi; \mu', \varphi') I(r; \mu_0, \varphi_0; \\ \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' + \frac{\bar{\omega}_0(r)}{4\pi} p(r; \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) F \exp[-T(r, \mu_0)]. \quad (3.5)$$

Здесь мы предполагаем, что имеет место сферическая стратификация (удовлетворяется система (3.3)).

Как и в случае плоскопараллельной геометрии, можно формально интегрировать уравнение (3.4) и получить I через функцию источника J . Введя эти выражения в формулу (3.5), получим интегральное уравнение для J . Однако эти уравнения весьма запутаны и использовать их стоит только в случае однократного рассеяния (см. п. 3.2) или в связи с некоторыми упрощающими приближениями (см. п. 3.4).

3.2. ОДНОКРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ

Для оптически тонких атмосфер, как и для плоскопараллельных, радиационное поле можно аппроксимировать частью поля, обусловленной только однократным рассеянием.

Без учета многократного рассеяния функция источника (3.5) приобретает вид

$$J(r; \mu_0, \varphi_0; \mu, \varphi) = \frac{\bar{\omega}_0(r)}{4} p(r, \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) F \exp[-T(r, \mu_0)]. \quad (3.6)$$

Пусть s — расстояние от точки рассеяния до точки наблюдения, l — длина пути солнечного луча в атмосфере, γ — угол рассеяния. Тогда уравнение переноса можно записать в виде

$$\frac{dl(s)}{ds} = -\sigma_e(s) [I(s) - J(s)], \quad (3.7)$$

где

$$J(s) = \frac{\bar{\omega}_0(s)}{4} p(s, \gamma) F \exp\left[-\int_0^l \sigma_e(l') dl'\right]. \quad (3.8)$$

Формальное интегрирование дает

$$I(M, \vartheta) = \frac{1}{4} \int_0^\infty \omega(s) \sigma_e(s) p(s, \gamma) F \exp\left[-\int_0^l \sigma_e(l') dl'\right] \times \\ \times \exp\left[-\int_0^s \sigma_e(s') ds'\right] ds. \quad (3.9)$$

Учет эффекта рефракции при переносе солнечного излучения улучшает результаты. Численные расчеты с использованием уравнения (3.9) проводятся непосредственно.

3.3. ИНВАРИАНТНОЕ ВЛОЖЕНИЕ

Метод инвариантного вложения пригоден при выводе функционального уравнения для функции отражения сферической атмосферной оболочки. Были получены формулы, но численное решение представляется трудным и никогда не реализовывалось.

3.4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

В приближенном методе точно рассчитывается рассеяние первого порядка и приближенно — рассеяние более высокого порядка, причем в разложении индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра сохраняются только первые два члена:

$$p(\gamma) = 1 + \beta_1 \cos \gamma. \quad (3.10)$$

В этом случае функцию источника можно представить в виде

$$J = \bar{\omega}_0 L + \bar{\omega}_0 \beta_1 H \cos \vartheta + \bar{\omega}_0 \beta_1 G \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi_0) + \\ + \frac{\bar{\omega}_0}{4} F [1 - \beta_1 \cos \vartheta \cos \vartheta_0 - \beta_1 \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)] \exp(-T), \quad (3.11)$$

где

$$L = \int I \frac{d\omega}{4\pi}, \quad H = \int I \cos \vartheta \frac{d\omega}{4\pi}, \quad G = \int I \sin \vartheta \cos \varphi \frac{d\omega}{4\pi}. \quad (3.12)$$

Умножая уравнение (3.4) последовательно на $d\omega/4\pi$, $(\cos \vartheta) \times (\cos \vartheta)$ и $(\sin \vartheta \cos \varphi) (\sin \vartheta \cos \varphi)$ и интегрируя по всем направлениям, после некоторых упрощений получаем:

$$\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{2}{r} H - \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \vartheta_0} - \frac{\cos \vartheta_0}{r} G = \\ = -\sigma_e (1 - \bar{\omega}_0) L + \frac{\sigma_e \bar{\omega}_0}{4} F \exp(-T), \quad (3.13)$$

$$(3 - \bar{\omega}_0 \beta_1) H = -\frac{1}{\sigma_e} \frac{\partial L}{\partial r} - \frac{\bar{\omega}_0}{4} F \beta_1 \cos \vartheta_0 \exp(-T), \quad (3.14)$$

$$(3 - \bar{\omega}_0 \beta_1) G = \frac{1}{\sigma_e r} \frac{\partial L}{\partial \vartheta_0} - \frac{\bar{\omega}_0}{4} F \beta_1 \sin \vartheta_0 \exp(-T). \quad (3.15)$$

Предположив далее, что σ_e является функцией только r и что множитель $(3 - \bar{\omega}_0 \beta_1)$ постоянен в атмосфере, можно исключить H и G и получить одно уравнение для L :

$$\Delta L - \frac{1}{\sigma_e(r)} \frac{\partial \sigma_e(r)}{\partial r} \frac{\partial L}{\partial r} = \sigma_e^2 (k^2 L - f), \quad (3.16)$$

где Δ — оператор Лапласа

$$k^2 = (3 - \bar{\omega}_0 \beta_1) (1 - \bar{\omega}_0) \quad (3.17)$$

и

$$f = \frac{\bar{\omega}_0}{4} F \exp(-T) \left(3 - \bar{\omega}_0 \beta_1 + \frac{\beta_1 \sin \vartheta_0}{\sigma_e r} \frac{\partial T}{\partial \vartheta_0} - \frac{\beta_1 \cos \vartheta_0}{\sigma_e} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (3.18)$$

Воспользовавшись выражением

$$T(r, \vartheta_0) = \int_{r \cos \vartheta_0}^{\infty} \sigma_e [(r^2 \sin^2 \vartheta_0 + z'^2)^{1/2}] dz', \quad (3.19)$$

найдем:

$$f = \frac{\bar{\omega}_0}{4} F \exp(-T) [3 + (1 - \bar{\omega}_0) \beta_1]. \quad (3.20)$$

Величину L можно найти, решая уравнение (3.16) с соответствующими граничными условиями, задав закон изменения σ_e в зависимости от r . Были выполнены расчеты для случаев $\sigma_e = \text{const}$ и для σ_e , убывающего по экспоненте с ростом r . По значениям L получают H , G , а затем, используя выражения (3.14), (3.15) и (3.17), — J . Теперь из (3.4) можно получить яркость. Другой подход к решению (3.4) с (3.5) основан на использовании численных методов.

3.5. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

В части I отмечалось наличие трех различных методов Монте-Карло: двух прямых и одного обратного. Основная особенность обратного метода Монте-Карло состоит в том, что путь фотона прослеживается в обратном направлении от приемника до источника. Это в точности эквивалентно обращению времени и не эквивалентно взаимной перестановке приемника и источника. Такой способ исключает некоторые трудности, возникающие при использовании прямого метода, и хорошо подходит к сферической атмосферной оболочке. Континуумные яркости можно вычислять с большой точностью при сравнительно малом числе «историй» фотонов. Этот метод успешно применялся при расчетах для условий сумерек и анализе лимбовых наблюдений.

3.6. РЕШЕНИЕ НЕПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ DART

Метод DART был описан в части I. Реализация метода DART завершается вычислительной программой, действующей достаточно быстро в применении к практическим задачам, требующим громоздких расчетов, например обращению данных рассеяния в исследованиях атмосферы или созданию больших системных каталогов для космической навигации.

Указанные приложения метода DART нуждаются в моделях, для которых плоскопараллельная геометрия непригодна даже в грубом приближении, так как они содержат угол наблюдения и/или направление падающего на планету излучения.

В то время как задача рассеяния как таковая решается множеством различных методов, кривизна Земли вносит дополнительные сложности, которые превосходят возможности большинства методов. Методы Монте-Карло и DART обеспечивают численно сходные результаты, но они существенно различаются затратами времени, со значительным преимуществом в пользу DART-метода.

Для получения параметров яркости и поляризации при 50 направлениях сканирования или 50 углах солнечного склонения за-

трачивается доля минуты. Обычно 50 точек достаточно для построения вполне подробной кривой.

Если в части I обсуждалась дискретизация основного уравнения радиационного переноса методом DART, то здесь мы сосредоточимся на приемах, связанных со сферической геометрией, необходимых при лимбовых и суммарных наблюдениях.

В DART-методе все подходы к задачам сферической геометрии основаны на использовании теоремы Байеса из теории вероятности. По существу оценка Байеса основана на предварительной оценке функции плотности вероятности, включающей любые общие характеристики, которые могут дать общие физические рассуждения. Эта предварительная оценка корректируется информацией, полученной из эксперимента: в результате формируется вторичная, конечная оценка. Если результаты эксперимента содержат много информации, то она доминирует во вторичной оценке, если информации мало, то первичная оценка доминирует над вторичной.

В случае радиационного переноса оценке подлежит зависимость яркости от Ω . Эксперимент при этом есть численное моделирование дискретной модели радиационного переноса, а информация, которую он обеспечивает, — дискретный набор интенсивности входящего потока. Предварительная информация масштабируется соразмерно этим потокам; она умножается на линейную комбинацию потоков с коэффициентами, являющимися нормированными непрерывными убывающими функциями углов между потоками и Ω , так что потоки вблизи Ω доминируют в оценках для Ω . При большом числе потоков коэффициентные функции полностью определяют окончательную оценку, но если потоков мало, то предварительная оценка сохраняет существенное влияние на конечную оценку.

В численных оценках по радиационному переносу, как правило, вычислительное время находится в сильной зависимости от числа задействованных потоков. По практическим соображениям DART-метод в настоящее время ограничен лишь 12 потоками. По этой причине предварительная оценка, используемая в формулировке яркости, имеет очень большое значение. По этой же причине вся остальная часть этого обсуждения сосредоточена на соображениях, обосновывающих предварительную оценку и ее реализацию. Физические соображения, лежащие в основе предварительной оценки, весьма просты:

1) полная радиация не может быть меньше, чем радиация, вычисленная по модели однократного рассеяния;

2) многократно рассеянная радиация возрастает с увеличением оптической глубины в направлении наблюдения, вплоть до ее экспоненциального насыщения;

3) в случае входящей радиации единичной интенсивности при отсутствии поглощения на подстилающей поверхности выходящий поток должен быть пропорционален входящему потоку.

Реализация этих простых идей связана со множеством проблем моделирования, которые обсуждаются ниже.

Однократное рассеяние — простая в своей основе задача, которую можно решить почти точно, с полной сферической геометрией, рефракцией, реальной атмосферой, поглощением и излучением, а также с рассеянием, детальными данными по индикатрисе рассеяния с учетом поляризации и с любым законом отражения от подстилающей поверхности. Если воспользоваться этим обстоятельством и сохранить дискретное моделирование радиационного переноса для рассеяния второго и более высоких порядков, можно получить значительный выигрыш в точности. Программа расчета однократного рассеяния, применяемая в DART-методе, представляет интерес, так как ее можно использовать в любой другой методике. Преимущества этой процедуры могут быть весьма значительными, особенно при моделировании методом Монте-Карло.

Простой подход к задаче однократного рассеяния возможен при соответствующей модели изменения атмосферных составляющих по высоте. При использовании DART-метода атмосфера представляется в виде концентрических сферических слоев, каждый из которых характеризуется коэффициентом ослабления для рэлеевского рассеяния, аэрозоля и озона и показателем преломления; внутри данного слоя все эти параметры считаются постоянными. Постоянство параметров позволяет написать простое выражение для приращения яркости на приемнике, обусловленного приращением пути, пройденного в слое. Это выражение представляет собой произведение локальной индикатрисы рассеяния и ослабления, проинтегрированного по оптической толщине рассеяния. Интеграл ослабления можно выразить через ослабление в ближнем и дальнем концах приращения:

$$\frac{\Delta [\exp(-\tau_s - \tau_d)]}{\Delta(\tau_s + \tau_d)} \sigma_e(r) |\Delta r|. \quad (3.21)$$

Здесь индексы s и d обозначают измерения от источника до точки рассеяния и от приемника до точки рассеяния. Легко получить аналитическое выражение без ошибок численного интегрирования.

Остается рассмотреть многократное рассеяние с двумя или более рассеяниями в направлениях, отличных от направления распространения света. Потoki, полученные в результате этих расчетов, сопоставляются с предварительной оценочной функцией. Функция предварительной оценки включает все величины, зависящие от кривизны пути; таким образом, вычисление потока оказывается простой геометрической задачей. Следует отметить, что при таком разделении задачи не обязательно вычислять потоки непременно DART-методом. Можно воспользоваться любым общепринятым способом численного моделирования радиационного переноса в плоскопараллельной атмосфере. Иными словами, применение правила Байеса в конечном счете позволяет построить послойные профили методами удвоения или матричного оператора.

Эффект кривизны сказывается сильнее всего на больших сканируемых оптических глубинах и соответствующих направлениях облучения. С учетом этого обстоятельства предварительная оценка

возрастает с увеличением оптической глубины в направлении сканирования до экспоненциального насыщения.

Использование правила Байеса в задачах радиационного переноса имеет следующие преимущества:

1) для моделирования радиационного переноса достаточно относительно небольшого числа потоков и любых моделей плоской атмосферы;

2) можно беспрепятственно обращаться к полному динамическому диапазону, составляющему примерно 9 или 10 порядков величины; именно такая амплитуда характерна для распределения яркости при лимбовых наблюдениях и в сумерки;

3) особенно важно то, что решение не подвержено статистическим флуктуациям, которые становятся непреодолимыми в методе Монте-Карло на нижнем крае динамического диапазона;

4) выходом является гладкая кривая, на которой отчетливо проявляются особенности, связанные с атмосферными возмущениями.

Глава 4

Освещение узким коллимированным пучком

4.1. ОБЩАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Рассмотрим освещение узким коллимированным пучком, например прожекторным или лазерным лучом. Будем считать, что атмосфера вблизи луча плоскопараллельна. Основной интерес представляет либо диффузный перенос луча сквозь среду, либо рассеяние света назад, как при лидарном дистанционном зондировании.

Рассмотрим пучок радиации бесконечно малого поперечного сечения, но с конечной интенсивностью πF . Пучок падает на верхнюю границу атмосферы $z = z_1$. Положение точки в освещенной атмосфере определяется прямоугольными координатами (x, y, z) , а направление Ω определяется углом ϑ с осью z (или $\mu = \cos \vartheta$) и азимутом φ , отсчитываемым от оси x .

Можно записать уравнение переноса

$$\begin{aligned} \cos \vartheta \frac{\partial I}{\partial z}(z, x, y; \mu, \varphi) + \sin \vartheta \cos \varphi \frac{\partial I}{\partial x}(z, x, y; \mu, \varphi) + \\ + \sin \vartheta \sin \varphi \frac{\partial I}{\partial y}(z, x, y; \mu, \varphi) = \\ = -\sigma_e(z, x, y)[I(z, x, y; \mu, \varphi) - J(z, x, y; \mu, \varphi)] \end{aligned} \quad (4.1)$$

с функцией источника

$$\begin{aligned} J(z, x, y; \mu, \varphi) = \frac{\bar{\omega}_0(x, y, z)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 p(x, y, z; \mu, \varphi; \mu', \varphi') \times \\ \times I(z, x, y; \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' \end{aligned} \quad (4.2)$$

и граничными условиями

$$I(z_1, x, y; \mu, \varphi) = \pi F \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \\ \text{при } \mu < 0,$$

$$I(0, x, y; \mu, \varphi) = 0 \quad \text{при } \mu > 0. \quad (4.3)$$

Здесь (x_0, y_0) — координаты точки вхождения радиационного пучка на верхней границе среды $z = z_1$, величина (μ_0, φ_0) относится к направлению падающего пучка.

Атмосфера может быть неоднородной. Чаще всего ее полагают плоскопараллельной, с возможной вертикальной стратификацией, но с постоянной индикатрисой рассеяния.

Если атмосфера однородна, можно ввести полную оптическую глубину τ_1 и оптическую глубину τ :

$$\tau_1 = \sigma_e z_1, \quad \tau = \sigma_e (z_1 - z). \quad (4.4)$$

Оптические расстояния по осям x и y соответственно будут иметь вид

$$\xi = \sigma_e x, \quad \eta = \sigma_e y. \quad (4.5)$$

Может оказаться, что удобнее использовать цилиндрические координаты, связанные с осью z , проходящей через точку падения пучка в атмосферу. Будем считать, что падающий пучок находится в плоскости xz . Пусть (z, ρ, ζ) — цилиндрические координаты точки M . Направление Ω определяется, как обычно, через $\theta = \arccos \mu$ и азимут φ ; более удобно использовать $\psi = \varphi - \zeta$ — азимут, отнесенный к рассматриваемой точке. Отметим, что для падающего луча $\psi_0 = -\zeta$.

Уравнение переноса в применении к данной системе координат будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} & \cos \theta \frac{\partial I}{\partial z}(z, \rho, \zeta; \mu, \psi) + \sin \theta \cos \psi \frac{\partial I}{\partial \rho}(z, \rho, \zeta; \mu, \psi) + \\ & + \frac{1}{\rho} \sin \theta \sin \psi \left[\frac{\partial I}{\partial \zeta}(z, \rho, \zeta; \mu, \psi) - \frac{\partial I}{\partial \psi}(z, \rho, \zeta; \mu, \psi) \right] = \\ & = \sigma_e(z, \rho, \zeta) [I(z, \rho, \zeta; \mu, \psi) - J(z, \rho, \zeta; \mu, \psi)], \end{aligned} \quad (4.6)$$

где

$$\begin{aligned} J(z, \rho, \zeta; \mu, \psi) = & \frac{\bar{\omega}_0(z, \rho, \zeta)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 p(z, \rho, \zeta; \mu, \psi; \mu', \psi') \times \\ & \times I(z, \rho, \zeta; \mu', \psi') d\mu' d\psi'. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Уравнение (4.6) нужно решать с граничными условиями

$$\begin{aligned} I(z_1, \rho, \zeta; \mu, \psi) &= \pi F \delta(\rho) \delta(\zeta) \delta(\mu - \mu_0) \delta(\psi) \quad \text{при } \mu < 0, \\ I(0, \rho, \zeta; \mu, \psi) &= 0 \quad \text{при } \mu > 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

В оптически тонких атмосферах однократное рассеяние может служить хорошим приближением для суммарной интенсивности, и оно действительно используется в большинстве работ по лидарному зондированию. Для уточнения можно привлечь рассеяние второго-третьего порядков. В случае когда падающий луч направлен вдоль оси z , возникает цилиндрическая симметрия, упрощающая задачу.

4.2. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ МОМЕНТОВ

Рассмотрим следующую задачу: прожекторный луч бесконечно малых угловых и линейных размеров падает на границу плоского однородного слоя мутной среды. Нас интересует пространственная структура светового поля, генерируемого стационарным лучом как внутри слоя, так и на его границах. Удобно использовать уравне-

ние радиационного переноса (4.1) в системе прямоугольных координат

$$\mu \frac{\partial I}{\partial \tau} + (1 - \mu^2)^{1/2} \sin \varphi \frac{\partial I}{\partial \xi} + (1 - \mu^2)^{1/2} \cos \varphi \frac{\partial I}{\partial \eta} + I(\tau, \xi, \eta, \mu, \varphi) = \\ = \frac{\bar{\omega}_0}{4\pi} \int_0^1 \int_{-1}^1 P(\mu, \mu'; \varphi - \varphi') I(\tau, \xi, \eta; \mu', \varphi') d\varphi' d\mu',$$

$$I(0, \xi, \eta, \mu, \varphi) = \pi F \delta(\xi - \xi_0) \delta(\eta - \eta_0) \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad \mu > 0, \\ I(z_1, \xi, \eta, \mu, \varphi) = 0, \quad \mu < 0^* \quad (4.9)$$

с определениями (4.4) и (4.5). Здесь ξ_0, η_0 — координаты точки падения прожекторного луча.

Для описания пространственного расширения узкого светового луча введем поперечные пространственные моменты интенсивности

$$I_{nk}(\tau, \mu, \varphi) = \iint_{-\infty}^{\infty} \xi^n \eta^k I(\tau, \xi, \eta, \mu, \varphi) d\xi d\eta. \quad (4.10)$$

С помощью этих моментов можно получить следующие величины: I_{00} — суммарную интенсивность светового пятна на плоскости $r = \text{const}$, координаты «центра тяжести» светового пятна на этой плоскости:

$$\bar{\xi} = I_{10}/I_{00}, \quad \bar{\eta} = I_{01}/I_{00}. \quad (4.11)$$

Дисперсии, описывающие эффективные размеры светового пятна на плоскости $\tau = \text{const}$, определяются выражениями

$$D_\xi = \bar{\xi}^2 - \bar{\xi}^2, \quad \bar{\xi}^2 = I_{20}/I_{00}, \\ D_\eta = \bar{\eta}^2 - \bar{\eta}^2, \quad \bar{\eta}^2 = I_{02}/I_{00}. \quad (4.12)$$

Допустим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta^k [\xi^n I(\tau, \xi, \eta, \mu, \varphi)]_{\xi = \pm \infty} d\eta = 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \xi^n [\eta^k I(\tau, \xi, \eta, \mu, \varphi)]_{\eta = \pm \infty} d\xi = 0, \quad (4.13)$$

тогда из уравнения (4.9) следует, что моменты I_{nk} удовлетворяют уравнениям

$$\mu \frac{\partial I_{nk}}{\partial \tau} + I_{nk} = \frac{\bar{\omega}_0}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} p(\mu, \mu', \varphi - \varphi') I_{nk}(\tau, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' + \\ + (1 - \mu^2)^{1/2} (n \sin \varphi I_{n-1, k} + k \cos \varphi I_{n, k-1}) \quad (4.14)$$

с граничными условиями

* μ считается положительным в случае, если оно направлено вниз, а φ отсчитывается от оси y .

$$I_{nk}(0, \mu, \varphi) = \pi F \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \varphi_{nk}(\xi_0, \eta_0), \quad \mu > 0,$$

$$I_{nk}(\tau_1, \mu, \varphi) = 0, \quad \mu < 0.$$

$$\varphi_{nk} = \begin{cases} 1, & n, k = 0, \\ \xi_0^n, \eta_0^k, & n, k \neq 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Система уравнений (4.14) является рекуррентной. Разумеется, необходимо предварительно получить функцию I_{00} , являющуюся эквивалентом решения уравнения переноса в равномерно освещенном однородном слое.

4.2.1. Решение в малоугловом приближении

Простейшее решение системы (4.14) получается в малоугловом приближении. Предположим, что индикатриса рассеяния $p(\vartheta)$ сильно вытянута в направлении вперед. Тогда можно использовать малоугловое приближение для получения I_{nk} вблизи освещенной границы $\tau = 0$ для малых углов рассеяния. Можно заменить в уравнении (4.14) $\mu_0(\partial/\partial\tau)$ на $\mu(\partial/\partial\tau)$, а вместо граничных условий (4.15) принять

$$I_{nk}(0, \mu, \varphi) = \pi F \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \varphi_{nk}(\xi_0, \eta_0), \quad -1 < \mu < 1. \quad (4.16)$$

Решение в малоугловом приближении можно получить в следующем виде:

$$I_{nk}(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{l=0}^{l^*} \sum_{m=l}^{m^*} \left[\tilde{Q}_m^l(\tau) \cos l\varphi + Q_m^l(\tau) \sin l\varphi \right] p_m^l(\mu), \quad (4.17)$$

где $p_m^l(\mu)$ — присоединенные функции Лежандра, $\tilde{Q}_m^l(\tau)$, $Q_m^l(\tau)$ — линейные комбинации функций $\exp(\omega_0 \gamma_r \tau)$, а γ_r — коэффициенты в разложении индикатрисы

$$p(\vartheta) = \sum_r (2r+1) \gamma_r P_r(\cos \vartheta). \quad (4.18)$$

Решение (4.17) может быть получено численно элементарным образом.

4.2.2. Решение в асимптотическом случае

Вычисление I_{nk} для больших оптических толщин возможно при применении преобразования Лапласа к уравнению (4.14). При этом оказывается, что функции

$$\varphi_{nk}(s, \mu, \varphi) = \int_0^{\infty} \exp(-s\tau) I_{nk}'(\tau; \mu, \varphi) d\tau \quad (4.19)$$

удовлетворяют интегральному уравнению

$$(1 + s\mu)\varphi_{nk}(s, \mu, \varphi) = \frac{\bar{\omega}_0}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} p(\mu, \mu', \varphi - \varphi') \varphi_{n\pm}(s, \mu', \varphi') d\mu' d\varphi' + \\ + n \sin \varphi (1 - \mu^2)^{1/2} \varphi_{n-1, k}(s, \mu, \varphi) + \\ + k \cos \varphi (1 - \mu^2)^{1/2} \varphi_{n, k-1}(s, \mu, \varphi). \quad (4.20)$$

Формулу для расчета величины I_{nk} получают, используя преобразование Лапласа:

$$I_{nk}(\tau, \mu, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \exp(s\tau) \varphi_{nk}(s, \mu, \varphi) ds. \quad (4.21)$$

Асимптотическое поведение I_{nk} при $\tau \gg 1$ определяется из оценки φ_{nk} на полюсе, соответствующем минимальному абсолютному значению. В этом случае можно получить аналитические выражения.

4.3. ИНВАРИАНТНОЕ ВЛОЖЕНИЕ И ПРИНЦИПЫ ИНВАРИАНТНОСТИ

Радиация, уходящая через верхнюю и нижнюю границы рассеивающего слоя, может быть выражена через функции пропускания (T) и отражения (S), определенные в части I, п. 1.6.

Инвариантное вложение и принципы инвариантности приводят к одним и тем же уравнениям для функций S и T . Их можно использовать как в прямоугольной (x, y, z) , так и в цилиндрической (z, ρ, ζ) системах координат.

4.3.1. Процесс инвариантного вложения

Будем использовать цилиндрическую формулировку задачи и выразим угловое распределение радиации, выходящей через границу z_1 , с помощью функции рассеяния S , помня, что I зависит от μ_0 следующим образом:

$$I(z_1, \rho, \zeta; +\mu, \psi) = \frac{F}{4\mu} S(z_1, \rho; \mu, \psi; \mu_0, \zeta). \quad (4.22)$$

Будем полагать, что индикатриса рассеяния всюду постоянна, но с целью общности допустим, что коэффициент рассеяния $\sigma_s(z, \rho, \zeta)$ и коэффициент ослабления $\sigma_e(z, \rho, \zeta)$ — переменные величины. Если присоединить к верхней границе $z = z_1$ плоский слой бесконечно малой толщины Δz , оптические свойства которого отличны от свойств остальной оптической среды, то диффузная отражательная способность изменится.

Рассуждая так же, как и в одномерном случае, после проведения всех операций, сопровождающих прохождение радиации через добавочный слой геометрической толщины Δz , получим:

$$\begin{aligned}
& I \left[z_1 + \Delta z, \rho + (\operatorname{tg} \vartheta \cos \psi + \operatorname{tg} \vartheta_0 \cos \zeta) \Delta z; \mu, \psi + (\operatorname{tg} \vartheta_0 \sin \zeta - \right. \\
& \quad \left. - \operatorname{tg} \vartheta \sin \psi) \frac{\Delta z}{\rho}; \mu_0, \zeta + (\operatorname{tg} \vartheta \sin \psi - \operatorname{tg} \vartheta_0 \sin \zeta) \frac{\Delta z}{\rho} \right] = \\
& = I(z_1, \rho; \mu, \psi; \mu_0, \zeta) \left(1 - \frac{\sigma_e(z_1, 0, 0)}{\mu_0} \Delta z \right) \left(1 - \frac{\sigma_e(z_1, \rho, \zeta)}{\mu} \Delta z \right) + \\
& + \frac{F}{4\mu} \delta(\rho) \delta(\zeta) \sigma_s(z_1, \rho, \zeta) \rho(\mu, \psi; -\mu_0, \zeta) \Delta z + \frac{1}{4\pi} \sigma_s(z_1, \rho, \zeta) \frac{\Delta z}{\mu} \times \\
& \times \int_0^{12\pi} \int_0^{2\pi} \rho(\mu, \psi; \mu'', \psi'') I(z_1, \rho; \mu'', \psi''; \mu_0, \zeta) d\mu'' d\psi'' + \frac{1}{4\pi} \sigma_s(z_1, \\
& 0, 0) \Delta z \int_0^{12\pi} \int_0^{2\pi} I(z_1, \rho; \mu, \psi; \mu', \varphi') \rho(-\mu', \psi'; -\mu_0, \zeta) \frac{d\mu'}{\mu} d\varphi' + \\
& + \frac{\Delta z}{F} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \sigma_s(z_1, \rho', \zeta') \rho' d\rho' d\zeta' \int_0^{12\pi} \int_0^{2\pi} I(z_1, r; \mu, \psi + \xi; \mu', \psi') \times \\
& \times \frac{d\psi'}{\mu'} d\varphi' \int_0^{12\pi} \int_0^{2\pi} \rho(-\mu', \psi'; \mu'', \psi'') I(\zeta_1, \rho'; \mu'', \psi''; \mu_0, \zeta') \frac{d\mu''}{\mu''} d\psi'', \\
\end{aligned} \tag{4.23}$$

где r и ξ заданы выражениями

$$r = [\rho^2 + \rho'^2 + 2\rho\rho' \cos(\zeta' - \zeta)]^{1/2}, \tag{4.24}$$

$$\sin \xi = \rho' \sin(\zeta' - \zeta) / r. \tag{4.25}$$

Первый член правой части уравнения (4.23) относится к фотонам, прошедшим через слой $(z_1, z_1 + \Delta z)$ без столкновений. Они внесли вклад в число фотонов, отраженных от $(0, z_1)$, которые затем снова прошли сквозь слой среды толщиной Δz , избежав взаимодействий. Второй член описывает вклад в отраженную радиацию, переносимую фотонами, которые отразились непосредственно от слоя. Третий член связан с фотонами, которые прошли сквозь слой, изменив при этом свое состояние, отразились от $(0, z_1)$ и затем прошли сквозь слой без взаимодействий. Два последних члена учитывают фотоны, которые пересекли $(0, z_1)$, не испытав взаимодействия в слое $(z_1, z_1 + \Delta z)$, но при последующем отражении вступили во взаимодействие со слоем $(z_1, z_1 + \Delta z)$. Характерной особенностью задачи прожекторного луча является пятый член, содержащий интеграл по поверхности. Устремив $\Delta z \rightarrow 0$ в уравнении (4.23) и воспользовавшись уравнением (4.22), получим:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial S}{\partial z_1}(z_1, \rho; \mu, \psi; \mu_0, \zeta) + (\operatorname{tg} \vartheta \cos \psi + \operatorname{tg} \vartheta_0 \cos \zeta) \frac{\partial S}{\partial \rho} + \\
& + \frac{1}{\rho} (\operatorname{tg} \vartheta \sin \psi - \operatorname{tg} \vartheta_0 \sin \zeta) \left(\frac{\partial S}{\partial \zeta} - \frac{\partial S}{\partial \psi} \right) + \\
& + \left(\frac{\sigma_e(z_1, \rho, \zeta)}{\mu} + \frac{\sigma_e(z_1, 0, 0)}{\mu_0} \right) S = \sigma_s(z_1, \rho, \zeta) \delta(\rho) \delta(\zeta) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times p(\mu, \psi; -\mu_0, \zeta) + \frac{1}{4\pi} \sigma_s(z_1, 0, 0) \int_0^{12\pi} \int_0^0 S(z_1, \rho; \mu, \psi; \mu', \zeta') \times \\
& \times p(-\mu', \zeta'; -\mu_0, \zeta) \frac{d\mu'}{\mu'} d\zeta' + \frac{1}{4\pi} \sigma_s(z_1, \rho, \zeta) \int_0^{12\pi} \int_0^0 p(\mu, \psi; \mu'', \psi'') \times \\
& \times S(z_1, \rho; \mu'', \psi''; \mu_0, \zeta) \frac{d\mu''}{\mu''} d\psi'' + \frac{1}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^0 \int_0^{12\pi} \int_0^0 \int_0^0 S(z_1, r; \\
& \mu, \psi + \xi; \mu', \psi') \sigma_s(z_1, \rho', \zeta') p(-\mu', \psi'; \mu'', \psi'') S(z_1, \rho'; \mu'', \psi''; \\
& \mu_0, \zeta') \rho' d\rho' d\zeta' \frac{d\mu'}{\mu'} d\psi' \frac{d\mu''}{\mu''} d\psi''. \quad (4.26)
\end{aligned}$$

Уравнение (4.26) является требуемым интегродифференциальным уравнением для функции рассеяния. В случае однородности коэффициенты σ_e и σ_s являются постоянными и уравнение (4.26) можно упростить.

Введя $\tau_1 = \sigma_e z_1$, $R = \sigma_e \rho$ и альбедо однократного рассеяния $\bar{\omega}_0 = \sigma_s / \sigma_e$, получим (4.26) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial S}{\partial \tau_1}(\tau_1, R; \mu, \psi; \mu_0, \zeta) + (\operatorname{tg} \vartheta \cos \psi + \operatorname{tg} \vartheta_0 \cos \zeta) \frac{\partial S}{\partial R} + \\
& + \frac{1}{R} (\operatorname{tg} \vartheta \sin \psi - \operatorname{tg} \vartheta_0 \sin \zeta) \left(\frac{\partial S}{\partial \zeta} - \frac{\partial S}{\partial \psi} \right) + \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu_0} \right) S = \\
& = \bar{\omega}_0 \left[\delta(\rho) \delta(\zeta) p(\mu, \psi; -\mu_0, \zeta) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{12\pi} \int_0^0 S(\tau_1, R; \mu, \psi; \mu', \zeta') \times \right. \\
& \times p(-\mu', \zeta'; -\mu_0, \zeta) \frac{d\mu'}{\mu'} d\zeta' + \frac{1}{4\pi} \int_0^{12\pi} \int_0^0 p(\mu, \psi; \mu'', \psi'') S(\tau_1, R; \mu'', \\
& \psi''; \mu_0, \zeta) \frac{d\mu''}{\mu''} d\psi'' + \frac{1}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^0 \int_0^{12\pi} \int_0^0 \int_0^0 S(\tau_1, R; \mu, \psi + \xi; \mu', \psi') \times \\
& \times p(-\mu', \psi', \mu'', \psi'') S(z_1, R'; \mu'', \psi''; \mu_0, \zeta') \times \\
& \left. \times R' dR' d\zeta' \frac{d\mu'}{\mu'} d\psi' \frac{d\mu''}{\mu''} d\psi'' \right]. \quad (4.27)
\end{aligned}$$

Для функции пропускания T можно получить уравнение, аналогичное (4.27).

4.3.2. Использование преобразования Лапласа

Для двумерной задачи * в однородной атмосфере с изотропным рассеянием как инвариантное вложение, так и принципы инвари-

* Эта задача соответствует коллимированному лучу с бесконечно малым поперечным сечением по оси x (падающим в точку $x=0, z=z_1$), но с бесконечно большим поперечным сечением с однородным потоком вдоль оси y .

антности позволяют получить уравнение для S , которое значительно проще, чем в трехмерной задаче. Это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \tau_1}(\tau_1, \xi; \mu, \psi; \mu_0, \zeta) + (\operatorname{tg} \vartheta \cos \psi \operatorname{tg} \vartheta_0 \cos \zeta) \frac{\partial S}{\partial \xi} + \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu_0}\right) S = \\ = \bar{\omega}_0 \left[\delta(\xi) + \frac{1}{4\pi} \int_0^{12\pi} \int_0^{12\pi} S(\tau_1, \xi; \mu, \psi; \mu', \psi') \frac{d\mu'}{\mu'} d\psi' + \right. \\ \left. + \frac{1}{4\pi} \int_0^{12\pi} \int_0^{12\pi} S(\tau_1, \xi; \mu'', \psi''; \mu_0, \zeta) \frac{d\mu''}{\mu''} d\psi'' + \right. \\ \left. + \frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{12\pi} \int_0^{12\pi} \int_0^{12\pi} S(\tau_1, \xi - \xi'; \mu, \psi; \mu', \psi'') S(\tau_1, \xi', \mu'', \psi''; \right. \\ \left. \mu_0, \zeta) d\xi' \frac{d\mu'}{\mu'} d\psi'' \frac{d\mu''}{\mu''} d\psi' \right]. \quad (4.28) \end{aligned}$$

Определим теперь двухстороннее преобразование Лапласа функции S в однородной среде с изотропным рассеянием следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma(\tau_1, p; \mu, \psi; \mu_0, \zeta) = L_p[S(\tau_1, \xi; \mu, \psi; \mu_0, \zeta)] = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau_1, \xi; \mu, \psi; \mu_0, \zeta) \exp(-p\xi) d\xi. \quad (4.29) \end{aligned}$$

Уравнение для σ можно найти в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \tau_1} + (\operatorname{tg} \vartheta \cos \psi + \operatorname{tg} \vartheta_0 \cos \zeta) p \sigma + \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu_0}\right) \sigma = \\ = \bar{\omega}_0 \left[1 + \frac{1}{4\pi} \int_0^{12\pi} \int_0^{12\pi} \sigma(\tau_1, p; \mu, \psi; \mu', \psi') \frac{d\mu'}{\mu'} d\psi' + \right. \\ \left. + \frac{1}{4\pi} \int_0^{12\pi} \int_0^{12\pi} \sigma(\tau_1, p; \mu'', \psi''; \mu_0, \zeta) \frac{d\mu''}{\mu''} d\psi'', + \frac{1}{16\pi^2} \int_0^{12\pi} \int_0^{12\pi} \int_0^{12\pi} \int_0^{12\pi} \right. \\ \left. \times \sigma(\tau_1, p; \mu, \psi; \mu', \psi') \sigma(\tau_1, p; \mu'', \psi''; \mu_0, \zeta) \frac{d\mu'}{\mu'} d\psi' \frac{d\mu''}{\mu''} d\psi'' \right] \quad (4.30) \end{aligned}$$

в предположении, что $S(\tau_1, \pm\infty; \mu, \psi; \mu_0, \zeta) = 0$.

Из-за отсутствия в уравнении (4.26) двух частных производных и интеграла свертки непосредственное его решение не представляется возможным. Однако уравнение (4.30) допускает численное решение для функции S . Численное обращение двухстороннего преобразования Лапласа обеспечивает нам искомую интенсивность отраженного излучения на верхней границе.

4.3.3. Принципы инвариантности для моментов

Рассмотрим однородную задачу в прямоугольной системе координат. Так же, как в п. 4.2, будем пользоваться оптическими длинами τ , ξ , η и определим моменты функций S и T уравнениями, аналогичными уравнению (4.10). Будем считать для простоты, что S и T зависят только от одной горизонтальной координаты ξ , как в п. 4.3.2, и, следовательно, учтем только моменты S_{n0} и T_{n0} , $n = 0, 1, 2$. Записав принципы инвариантности для S и T и проинтегрировав по плоскости (ξ, η) , найдем уравнения для S_{n0} и T_{n0} . Функции S_{00} , T_{00} удовлетворяют известным нелинейным уравнениям Амбарцумяна—Чандрасекара. Для $S_{n0} = S_n$, $T_{n0} = T_n$, $n = 1, 2$, имеем новые линейные рекуррентные уравнения ($\xi_0 = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial \tau_1} + \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu_0} \right) S_1(\tau_1, \Omega, \Omega_0) = \int A(\tau_1, \Omega, \Omega') S_1(\tau_1, \Omega', \Omega_0) \frac{d\Omega'}{\mu'} + \\ + \int A(\tau_1, \Omega_0, \Omega') S_1(\tau_1, \Omega', \Omega) \frac{d\Omega'}{\mu'} + \\ + (\operatorname{tg} \vartheta \sin \varphi + \operatorname{tg} \vartheta_0 \sin \varphi_0) S_1(\tau_1, \Omega, \Omega_0), \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_1}{\partial \tau_1} = \int B(\tau_1, \Omega, \Omega') T_1(\tau_1, \Omega', \Omega_0) \frac{d\Omega'}{\mu'} + \int B(\tau_1, \Omega_0, \Omega') \times \\ \times T_1(\tau_1, \Omega', \Omega) \frac{d\Omega'}{\mu'} + \frac{\bar{\omega}_0}{4\pi} \rho(\Omega, -\Omega_0) (\operatorname{tg} \vartheta \sin \varphi + \operatorname{tg} \vartheta_0 \sin \varphi_0) \tau_1 \times \\ \times \exp \left[-\tau_1 \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu_0} \right) \right] + \exp \left(-\frac{1}{\mu} \right) \frac{\bar{\omega}_0}{4\pi} \int \rho(\Omega, -\Omega') T_1(\tau, \Omega', \Omega_0) \times \\ \times \frac{d\Omega'}{\mu'} + \exp \left(-\frac{\tau_1}{\mu_0} \right) \frac{\bar{\omega}_0}{4\pi} \int T_1(\tau_1, \Omega, \Omega') \rho(\Omega', -\Omega_0) \frac{d\Omega'}{\mu'} \operatorname{tg} \vartheta \sin \varphi \tau_1 \times \\ \times \exp \left(-\frac{\tau_1}{\mu} \right) B(\tau_1, \Omega_0, \Omega) + \operatorname{tg} \vartheta_0 \sin \varphi_0 \tau_1 \exp \left(-\frac{\tau_1}{\mu_0} \right) B(\tau_1, \Omega, \Omega_0), \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \tau_1} + \frac{1}{\mu} T_1(\tau_1, \Omega, \Omega_0) - \int A(\tau_1, \Omega, \Omega') T_1(\tau_1, \Omega', \Omega_0) \frac{d\Omega'}{\mu'} + \\ + \int B(\tau_1, \Omega_0, \Omega') S_1(\tau_1, \Omega', \Omega) \frac{d\Omega'}{\mu'} + \\ + \exp \left(-\frac{\tau_1}{\mu_0} \right) \frac{\bar{\omega}_0}{4\pi} \int S_1(\tau_1, \Omega, \Omega') \rho(\Omega', -\Omega_0) \frac{d\Omega'}{\mu'} + \\ + \operatorname{tg} \vartheta \sin \varphi T_0(\tau_1, \Omega, \Omega_0) + \operatorname{tg} \vartheta_0 \sin \varphi_0 \tau_1 \exp \left(-\frac{\tau_1}{\mu_0} \right) A(\tau_1, \Omega, \Omega_0), \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial \tau_1} + \frac{1}{\mu_0} T_1(\tau_1, \Omega, \Omega_0) = \int A(\tau_1, \Omega_0, \Omega') T_1(\tau_1, \Omega', \Omega) \frac{d\Omega'}{\mu'} + \\ + \int B(\tau_1, \Omega, \Omega') S_1(\tau_1, \Omega', \Omega_0) \frac{d\Omega'}{\mu'} + \exp \left(-\frac{\tau_1}{\mu} \right) \frac{\bar{\omega}_0}{4\pi} \times \\ \times \int \rho(-\Omega, \Omega') S_1(\tau_1, \Omega', \Omega_0) \frac{d\Omega'}{\mu'} + \operatorname{tg} \vartheta_0 \sin \varphi_0 T_0(\tau_1, \Omega, \Omega_0) + \\ + \operatorname{tg} \vartheta \sin \varphi \tau_1 \exp \left(-\frac{\tau_1}{\mu} \right) A(\tau_1, \Omega_0, \Omega). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Несколько более сложные уравнения получаются для S_2 и T_2 . Они включают те же самые функции:

$$A(\tau_1, \Omega, \Omega') = \frac{\tilde{\omega}_0}{4\pi} \left[p(\mu, \mu', \varphi, \varphi') + \int S_0(\tau_1, \Omega, \Omega'') p(-\mu'', \mu', \varphi'', \varphi') \frac{d\Omega''}{\mu''} \right],$$

$$B(\tau_1, \Omega, \Omega') = \frac{\tilde{\omega}_0}{4\pi} \int T_0(\tau_1, \Omega, \Omega'') p(\mu'', -\mu', \varphi'', \varphi') \frac{d\Omega''}{\mu''}. \quad (4.35)$$

Из уравнений (4.33)–(4.36) следует, что выполняются принципы обратимости:

$$S_1(\tau_1, \Omega, \Omega_0) = S_1(\tau_1, \Omega_0, \Omega), \quad T_1(\tau_1, \Omega, \Omega_0) = T_1(\tau_1, \Omega_0, \Omega). \quad (4.36)$$

Аналогично

$$S_2(\tau_1, \Omega, \Omega_0) = S_2(\tau_1, \Omega_0, \Omega), \quad T_2(\tau_1, \Omega, \Omega_0) = T_2(\tau_1, \Omega_0, \Omega). \quad (4.37)$$

Функции $S_n, T_n, n = 1, 2$, можно разложить в двойные тригонометрические ряды:

$$S_1(\tau_1, \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) = \sum_{m, l=0}^{\infty} [g_{ml}^{S_1}(\tau_1, \mu, \mu_0) \cos m\varphi \sin l\varphi_0 + g_{im}^{S_1}(\tau_1, \mu_0, \mu) \sin m\varphi \cos l\varphi_0],$$

$$T_1(\tau_1, \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) = \sum_{m, l=0}^{\infty} [g_{ml}^{T_1}(\tau_1, \mu, \mu_0) \cos m\varphi \sin l\varphi_0 + g_{im}^{T_1}(\tau_1, \mu_0, \mu) \sin m\varphi \cos l\varphi_0],$$

$$S_2(\tau_1, \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) = \sum_{m, l=0}^{\infty} [p_{ml}^{S_2}(\tau_1, \mu, \mu_0) \cos m\varphi \cos l\varphi_0 + s_{ml}^{S_2}(\tau_1, \mu_0, \mu) \sin m\varphi \sin l\varphi_0],$$

$$T_2(\tau_1, \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) = \sum_{m, l=0}^{\infty} [p_{ml}^{T_2}(\tau_1, \mu, \mu_0) \cos m\varphi \cos l\varphi_0 + s_{ml}^{T_2}(\tau_1, \mu, \mu_0) \sin m\varphi \sin l\varphi_0]. \quad (4.38)$$

В частности, для изотропного рассеяния имеем:

$$S_1(\tau_1, \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) = g_{0l}^{S_1}(\tau_1, \mu, \mu_0) \sin \varphi_0 + g_{0l}^{S_1}(\tau_1, \mu_0, \mu) \sin \varphi,$$

$$T_1(\tau_1, \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) = g_{0l}^{T_1}(\tau_1, \mu, \mu_0) \sin \varphi_0 + g_{0l}^{T_1}(\tau_1, \mu_0, \mu) \sin \varphi,$$

$$S_2(\tau_1, \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) = p_{00}^{S_2}(\tau_1, \mu, \mu_0) + p_{02}^{S_2}(\tau_1, \mu, \mu_0) \cos 2\varphi_0 + p_{20}^{S_2}(\tau_1, \mu, \mu_0) \cos 2\varphi + s_{11}^{S_2}(\tau_1, \mu, \mu_0) \sin \varphi \sin \varphi_0 + O[\exp(-\tau_1/\mu_0)],$$

$$T_2(\tau_1, \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) = p_{00}^{T_2}(\tau_1, \mu, \mu_0) + p_{02}^{T_2}(\tau_1, \mu, \mu_0) \cos 2\varphi_0 + p_{20}^{T_2}(\tau_1, \mu, \mu_0) \cos 2\varphi + s_{11}^{T_2}(\tau_1, \mu, \mu_0) \sin \varphi \sin \varphi_0 + O[\exp(-\tau_1/\mu_0)]. \quad (4.39)$$

При условии $\tau_1 \gg 1$ для изотропного рассеяния функции $g_{01}^{S_i}$, $g_{01}^{T_i}$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu_0}\right) g_{01}^{S_i}(\tau_1, \mu, \mu_0) &= 2\pi A(\tau_1, \mu) \int_0^1 g_{01}^{S_i}(\tau_1, \mu', \mu_0) \frac{d\mu'}{\mu'} - \\ &- 2\pi B(\tau_1, \mu) \int_0^1 g_{01}^{T_i}(\tau_1, \mu', \mu_0) \frac{d\mu'}{\mu'} + \operatorname{tg} \vartheta_0 S_0(\tau_1, \mu, \mu_0), \\ \frac{\partial g_{01}^{T_i}}{\partial \tau_1} + \frac{1}{\mu_0} g_{01}^{T_i}(\tau_1, \mu, \mu_0) &= 2\pi B(\tau_1, \mu) \int_0^1 g_{01}^{S_i}(\tau_1, \mu', \mu_0) \frac{d\mu'}{\mu'} + \\ &+ \operatorname{tg} \vartheta_0 T_0(\tau_1, \mu, \mu_0). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A(\tau_1, \mu) &= \frac{\bar{\omega}_0}{4\pi} \left[1 + 2\pi \int_0^1 S_0(\tau_1, \mu, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \right], \\ B(\tau_1, \mu) &= \frac{\bar{\omega}_0}{2} \int_0^1 T_0(\tau_1, \mu, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Для изотропного рассеяния и $\tau_1 \gg 1$

$$\begin{aligned} S_0(\tau_1, \mu, \mu_0) &= \frac{\bar{\omega}_0}{4\pi} \frac{\mu\mu_0}{\mu + \mu_0} H(\mu) H(\mu_0) - \frac{1}{\pi} \mu\mu_0 U(\mu) U(\mu_0) \times \\ &\times \frac{MN \exp(-2k\tau_1)}{1 - N^2 \exp(-2k\tau_1)}, \\ T_0(\tau_1, \mu, \mu_0) &= \frac{1}{\pi} \mu\mu_0 U(\mu) U(\mu_0) \frac{M \exp(-2k\tau_1)}{1 - N^2 \exp(-2k\tau_1)}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Здесь $H(\mu)$ это H -функция, $U(\mu)$ — решение проблемы Милна, k — корень характеристического уравнения, M и N — постоянные (см. часть I, п. 5.2).

Для решения уравнения (4.40) найдем сначала функции

$$\begin{aligned} \alpha(\tau_1, \mu_0) &= \int_0^1 g_{01}^{S_i}(\tau_1, \mu', \mu_0) \frac{d\mu'}{\mu'}, \\ \beta(\tau_1, \mu_0) &= \int_0^1 g_{01}^{T_i}(\tau_1, \mu', \mu_0) \frac{d\mu'}{\mu'}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Тогда, опуская члены порядка $\exp(-\tau_0/\mu_0)$, находим:

$$\begin{aligned} g_{01}^{S_i}(\tau_1, \mu, \mu_0) &= \frac{1}{4\pi} \frac{\mu\mu_0}{\mu + \mu_0} H_0(\mu) H_0(\mu_0) \sin \vartheta_0 \left\{ \frac{2\mu_0}{1 + 2\mu_0} + \frac{\mu}{\mu + \mu_0} - \right. \\ &- \left. \frac{1}{\tau_1 + \delta} (\mu + \mu_0) \left(\frac{2\mu_0}{1 + 2\mu_0} + 1 \right) \left[1 + \frac{1}{3} k^2 (\tau_1 + \delta)^2 \right] \right\}, \\ g_{01}^{T_i}(\tau_1, \mu, \mu_0) &= \frac{1}{4\pi} \mu\mu_0 H_0(\mu) H_0(\mu_0) \sin \vartheta_0 \frac{1}{\tau_1 + \delta} \left(\frac{2\mu_0}{1 + 2\mu_0} + 1 \right) \times \\ &\times \left[1 - \frac{1}{6} k^2 (\tau_1 + \delta)^2 \right] \left\{ 1 - \frac{\mu_0}{\tau_1 + \delta} \left[1 + \frac{1}{3} k^2 (\tau_1 + \delta)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Здесь $\bar{\delta}$ — экстраполированная длина Милна, $k \leq 1/\tau_1^2$, $H_0 = H(\omega_0 = 1)$. Координаты ξ «центра тяжести» светового пятна описываются формулами для отражения

$$\bar{\xi}_S(\tau_1, \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) = S_1/S_0,$$

для пропускания

$$\bar{\xi}_T(\tau_1, \mu, \varphi; \mu_0, \varphi_0) = T_1/T_0. \quad (4.45)$$

Соответствующие выражения для $\bar{\eta}_S$ и $\bar{\eta}_T$ можно получить, заменив в формулах (4.45) $\pi/2 - \varphi$ на φ и $\pi/2 - \varphi_0$ на φ_0 .

Интересно отметить, что при $\tau_1 \rightarrow \infty$ координаты «центра тяжести» светового пятна становятся не зависящими от τ_1 и описываются следующими выражениями ($k \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_S(\mu, \mu_0, \varphi, \varphi_0) &= \sin \varphi (1 - \mu^2)^{1/2} \left(\frac{\mu_0}{\mu + \mu_0} + \frac{2\mu}{1 + 2\mu} \right) + \\ &+ \sin \varphi_0 (1 - \mu_0^2)^{1/2} \left(\frac{\mu}{\mu + \mu_0} + \frac{2\mu_0}{1 + 2\mu_0} \right), \\ \bar{\xi}_T(\mu, \mu_0, \varphi, \varphi_0) &= \sin \varphi (1 - \mu^2)^{1/2} \left(1 + \frac{2\mu}{1 + 2\mu} \right) + \\ &+ \sin \varphi_0 (1 - \mu_0^2)^{1/2} \left(1 + \frac{2\mu_0}{1 + 2\mu_0} \right). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Для полубесконечного слоя имеем

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_S^\infty(\mu, \mu_0, \varphi, \varphi_0) &= \sin \varphi (1 - \mu^2)^{1/2} \left[\frac{2\mu}{1 + 2\mu} + \frac{\mu_0}{\mu + \mu_0} - \right. \\ &- \left. k(\mu + \mu_0) \left(1 + \frac{2\mu}{1 + 2\mu} \right) \right] + \sin \varphi_0 (1 - \mu_0^2)^{1/2} \left[\frac{2\mu_0}{1 + 2\mu_0} + \right. \\ &+ \left. \frac{\mu}{\mu + \mu_0} - k(\mu + \mu_0) \left(1 + \frac{2\mu_0}{1 + 2\mu_0} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.47)$$

если $k \ll 1$.

Для определения эффективных размеров светового пятна, определяемого пространственной дисперсией пучка, необходимо решить другую систему уравнений (для ρ_{mn}^S и ρ_{mn}^T). В предельном случае $\tau_1 \gg 1$ можно найти приближенные аналитические выражения.

4.4. РАССЕЯНИЕ В ПРЯМОМ И ОБРАТНОМ НАПРАВЛЕНИИ В МАЛОУГЛОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим сначала рассеяние в обратном направлении узко коллимированного луча, нормально падающего вдоль оси z в положительном направлении и возвращающегося в направлении $z = 0$. Лидарный источник расположен на расстоянии $z = -R_c$, а точка на высоте z находится на расстоянии $R = z + R_c$ от источника. Лидар получает короткие импульсы.

Рассмотрим сначала полное нестационарное трехмерное уравнение радиационного переноса:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \cos \vartheta \frac{\partial I}{\partial z} + \sin \vartheta \cos \varphi \frac{\partial I}{\partial x} + \sin \vartheta \sin \varphi \frac{\partial I}{\partial y} + \sigma_e I = \\ = \bar{\omega}_0 \sigma_e \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi \frac{p(\vartheta', \varphi'; \vartheta, \varphi)}{4\pi} I(x, y, z; \vartheta', \varphi', t) \sin \vartheta' d\vartheta'. \quad (4.48)$$

Здесь c — скорость света, t — время, $z = R - R_c$ — глубина проникновения; координатная ось ориентирована в направлении распространения света. Отклонения от оси распространения, вызванные рассеянием под малыми углами, приводят к растяжению по времени обратного лидарного сигнала. Оценку этого растяжения по времени можно получить, используя среднее смещение по радиусу Δr , вызванное однократным малоугловым рассеянием вперед коллимированного луча. Среднее расстояние l , пройденное однократно рассеянной радиацией до места, где произошло рассеяние назад на глубине проникновения z , примерно равно

$$l \sim (z^2 + \langle \Delta r^2 \rangle)^{1/2} \sim z + \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta r^2 \rangle}{z}. \quad (4.49)$$

Затем с помощью выражения (4.49) можно оценить дополнительное время, необходимое для прихода обратного сигнала:

$$\delta t \sim \frac{2(l-z)}{c} \sim \frac{1}{3} \frac{\beta z^2 \langle \vartheta_f^2 \rangle}{c}, \quad (4.50)$$

где $\langle \vartheta_f^2 \rangle$ — дисперсия угла рассеяния для узкого дифракционного пика. Для слабого тумана отставание оказывается равным порядка 10^{-8} с, т. е. мало по сравнению с типичным временем прохода сигналов лидара. Следовательно, удобно разделить временную и пространственную зависимость рассеянной радиации I :

$$I(x, y, z, \vartheta, \varphi, t) = \tilde{I}(x, y, z, \vartheta, \varphi) \delta(z - ct), \quad (4.51)$$

где \tilde{I} учитывает только пространственную зависимость рассеянной радиации, а $\delta(z - ct)$ — дельта-функция Дирака. Из приближенной формулы (4.51) следует, что радиация, рассеянная в прямом направлении, после отставания по времени t проникает до $z = ct$, и временное расширение, вызванное рассеянием под малыми углами, пренебрежимо мало.

Радиация, рассеянная под большими углами (кроме углов, близких к $\vartheta \sim \pi$), считается устраненной с пути распространения излучения лидара; следовательно, она не вносит вклад в обратный лидарный сигнал. Поэтому рассеянную радиацию можно представить в виде суммы, в которой первое слагаемое — энергия \hat{I} , рассеянная под малыми углами, а второе — энергия \bar{I} , рассеянная под большими углами:

$$\tilde{I}(x, y, z, \vartheta, \varphi) = \hat{I}(x, y, z, \vartheta, \varphi) + \bar{I}(x, y, z, \vartheta, \varphi). \quad (4.52)$$

Аналогичным образом можно представить индикатрису рассеяния в прямом направлении.

Малоугловое решение ограничивается излучением, рассеянным под малыми углами в прямом направлении; исключение составляет случай рассеяния под большим углом, когда рассеянная радиация направляется назад, к приемнику. Часть уравнения (4.48), ответственная за малоугловое рассеяние, имеет вид

$$\frac{\partial \hat{I}}{\partial z} + \eta \frac{\partial \hat{I}}{\partial x} + \zeta \frac{\partial \hat{I}}{\partial y} + \sigma_e \hat{I} = \bar{\omega}_0 \sigma_e \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{I}(x, y, z, \eta', \zeta') \times \\ \times \frac{\rho(\eta', \zeta'; \eta, \zeta)}{4\pi} d\eta' d\zeta', \quad (4.53)$$

где $\eta = \vartheta \cos \varphi$; $\zeta = \vartheta \sin \varphi$; $\Theta_2 = (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2$ — угол рассеяния; $\bar{\omega}_0 [\rho(\Theta)/4\pi] = \sum_{i=1}^l (a_i \gamma_{f,i} / \pi) \exp[-\gamma_{f,i} \Theta^2]$ — мультигауссово приближение к индикатрисе рассеяния вперед.

Имеется решение в виде ряда Неймана для вклада многократного малоуглового рассеяния N -го порядка в обратный сигнал моностатического лидара. Это решение включает все комбинации рассеяний вперед и одно рассеяние назад с последующими $m = N - n - 1$ рассеяниями вперед на обратном пути к приемнику.

Решение в виде ряда Неймана (или решение в виде суммы последовательных рассеяний) уравнения (4.53) ищут в виде

$$\hat{I} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{I}_n, \quad (4.54)$$

где

$$\frac{\partial \hat{I}_n}{\partial z} + \eta \frac{\partial \hat{I}_n}{\partial x} + \zeta \frac{\partial \hat{I}_n}{\partial y} + \sigma_e \hat{I}_n = (1 - \delta_{n,0}) \sigma_e \sum_{i=1}^l \frac{a_i \gamma_{f,i}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \times \\ \times \exp\{-\gamma_{f,i} [(\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2]\} \hat{I}_{n-1}(\eta', \zeta') d\eta' d\zeta'. \quad (4.55)$$

Индекс n означает число малоугловых рассеяний в прямом направлении, $\sigma_{n,m}$ — дельта-функция Кронекера.

Уравнение (4.55) можно решить аналитически, если применить двумерное преобразование Фурье к \hat{I}_n , определенному следующим образом:

$$\hat{i}_n(x, p, q, \eta, \zeta) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{I}_n(x, y, z, \eta, \zeta) \exp[\hat{j}(xy + qy)] dx dy, \quad (4.56)$$

где $\hat{j}^2 = -1$. Затем уравнение (4.55) преобразуют:

$$\frac{\partial \hat{i}_n(z_{n+1})}{\partial z_{n+1}} + \hat{i}_n(z_{n+1}) [\sigma_e(z_{n+1}) - \hat{j}(\eta p + \zeta q)] = \\ = (1 - \delta_{n,0}) \sigma_e(z_{n+1}) \sum_{i=1}^l \frac{a_i \gamma_{f,i}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\gamma_{f,i} [(\eta' - \eta)^2 + \\ + (\zeta' - \zeta)^2]\} \hat{i}_{n-1}(x_n, \eta', \zeta') d\eta' d\zeta', \quad (4.57)$$

где z_n и z_{n+1} — координаты точек n -го и $(n+1)$ -го рассеяний. Излучение $I(x, y, z, \theta, \varphi, t)$ исходит в виде узкого по времени импульса и в виде узко коллимированного луча из точки $z = -R_c$ с гауссовым распределением на излучателе. Граничные условия, применимые к основанию облака, должны описать эффекты гауссового распределения луча на излучателе. Они задаются соотношением:

$$\hat{i}_0(z_1 = 0, p, q, \eta, \zeta) = \frac{\gamma t}{2\pi^2} \exp[-\gamma t(\eta^2 + \zeta^2) + \hat{j}(\eta p + \zeta q) R_c]. \quad (4.58)$$

Из формул (4.57) и (4.58) следует, что для $n > 0$

$$\hat{i}_n(z_{n+1}, p, q, \eta, \zeta) = \int_0^{z_{n+1}} \hat{J}_{n-1}(z_n, p, q, \eta, \zeta) \times \exp \left\{ \int_{z_n}^{z_{n+1}} [\sigma_e - \hat{j}(\eta p + \zeta q)] dz \right\} dz_n, \quad (4.59)$$

где

$$\hat{J}_{n-1}(z_n, p, q, \eta, \zeta) = \sigma_e(z_n) \sum_{i=1}^I \frac{a_i \gamma_{f,i}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{i}_{n-1}(z_n, p, q, \eta', \zeta') \times \exp\{-\gamma_{f,i}[(\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2]\} d\eta' d\zeta'. \quad (4.60)$$

Множественно рассеянная радиация проникает в среду до глубины $z = R - R_c$, где она рассеивается назад. Индикатриса рассеяния в обратном направлении может быть представлена мультигауссовой функцией:

$$\frac{\hat{p}(\pi - \theta)}{4\pi} = \sum_{s=1}^S \frac{p_s(\pi)}{4\pi} \exp\{-\gamma_{b,s}[(\eta' + \eta)^2 + (\zeta' + \zeta)^2]\}, \quad (4.61)$$

где (η', ζ') — направление радиации, распространяющейся вперед, а (η, ζ) — направление радиации после однократного рассеяния под большим углом, так что

$$(\pi - \theta)^2 = (\eta' + \eta)^2 + (\zeta' + \zeta)^2. \quad (4.62)$$

Для излучения, вернувшегося назад, к приемнику, после m малых угловых рассеяний в прямом направлении, выполняется граничное условие

$$\hat{i}_{n,0}(R - R_c, p, q, \eta, \zeta) = \sigma_e(R - R_c) \sum_{s=1}^S \frac{\hat{p}_s(\pi)}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \times \hat{i}_n(R - R_c, p, q, \eta', \zeta') \exp\{-\gamma_{b,s}[(\eta' + \eta)^2 + (\zeta' + \zeta)^2]\} d\eta' d\zeta'. \quad (4.63)$$

Соотношение (4.63) можно трактовать как представление источника направленной назад радиации.

Радияция, рассеянная назад, должна удовлетворять уравнению, сходному по форме с уравнением (4.57). Из этого следует, что для трансформированного излучения, выходящего из облака в обратном направлении после дополнительных m прямых рассеяний, будет выполняться условие

$$\hat{i}_{n,m}(z_{n+m+1} = 0, p, q, \eta, \zeta) = \int_0^{R-R_c} \hat{j}_{n,m-1}(z_{n+m}, p, q, \eta, \zeta) \times \\ \times \exp \left\{ - \int_0^{z_{n+m}} [\beta - \hat{j}(\eta p + \zeta q)] dz \right\} dz_{n+m}, \quad (4.64)$$

где

$$\hat{j}_{n,m-1}(z_{n+m}, p, q, \eta, \zeta) = \sigma_e(x_{n+m}) \sum_{i=1}^l \frac{\alpha_i \gamma_{f,i}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \times \\ \times \hat{i}_{n,m-1}(z_{n+m}, p, q, \eta', \zeta') \exp \{-\gamma_{f,i} [(\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2]\} d\eta' d\zeta'. \quad (4.65)$$

Радияция, собираемая приемником лидара, будет определяться выражением

$$P_N = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} P_{n,m} \delta_{n,N-m-1}, \quad (4.66)$$

где

$$P_{n,m} = \int_{-\psi}^{\psi} \int_{-\psi}^{\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{i}_{n,m}(z=0, x, y, \eta, \zeta) \times \\ \times \tilde{R}(z=0, x, y, \eta, \zeta) dx dy d\eta d\zeta, \quad (4.67)$$

а $\tilde{R}(z=0, x, y, \eta, \zeta)$ — функция чувствительности приемника. Поместим приемник не на оси, а в точке $z = -R_c$, $x = x_0$, $y = y_0$. Тогда функция чувствительности приемника на границе облака будет иметь вид

$$\tilde{R}(z=0, x, y, \eta, \zeta) = \\ = \begin{cases} \frac{1}{\pi \psi^2} \delta[R_c \eta - (x - x_0)] \delta[R_c \zeta - (y - y_0)], & \eta^2 + \zeta^2 \leq \psi^2, \\ 0, & \eta^2 + \zeta^2 > \psi^2. \end{cases} \quad (4.68)$$

Уравнения (4.67) и (4.68) решаются непосредственно через их трансформанты Фурье, так что

$$P_{n,m} = \int_{-\psi}^{\psi} \int_{-\psi}^{\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{i}_{n,m}(z=0, p, q, \eta, \zeta) \tilde{r}(z=0, p, q, \eta, \zeta) \times \\ \times dp dq d\eta d\zeta, \quad (4.69)$$

где преобразование функции чувствительности описывается выражением

$$\begin{aligned} \bar{r}(z=0, p, q, \eta, \zeta) = \\ = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2\psi^2} \exp \left\{ +jR_c \left[p \left(\eta + \frac{x_0}{R_c} \right) + q \left(\zeta + \frac{y_0}{R_c} \right) \right] \right\}, & \eta^2 + \zeta^2 \leq \psi^2, \\ 0, & \eta^2 + \zeta^2 > \psi^2. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.70)$$

Аналогичными методами можно исследовать перенос лазерного луча. Для определения характеристик ослабления рассеивающей среды по измерениям ослабления лазерного луча, проходящего в среде, часто пользуются законом Бэра—Бугера, согласно которому излучение ослабляется как $\exp(-\tau)$, где τ —оптическая глубина в среде, пройденная лучом. В принципе закон Бэра—Бугера пригоден лишь для условий, когда в приемник приходит только прямое излучение. Однако вследствие того, что приемник, производящий измерения пропускания, должен иметь конечное поле зрения (т. е. принимать излучение из конуса конечных размеров), в детектор вместе с прямым излучением неизбежно поступает некоторое количество рассеянной радиации. Следовательно, для выяснения истинных ослабляющих характеристик рассеивающей среды следует вводить в закон Бэра—Бугера поправку на рассеяние вперед. Задача рассеяния вперед в малоугловом приближении широко изучалась с помощью ряда методов, таких как метод разложения в ряды, метод интегрирования по бесселевым функциям и метод Монте-Карло.

4.5. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Метод Монте-Карло был описан выше и по существу неизменен для любой геометрии. Он использовался в задачах лазерного или прожекторного луча.

4.6. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ

В п. 4.4. приведено нестационарное уравнение переноса (4.48). Некоторые авторы решали эту нестационарную задачу либо с помощью метода Монте-Карло, либо развитием аналитических методов, описанных для стационарного случая.

1. *Общий раздел*

- * Вайнберг А., Вигнер Е. Физическая теория ядерных реакторов/Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1961. 732 с.
- * Владимиров В. С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц.— Труды МИАН, вып. 61, 1961.
- * Исмару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах.— М.: Мир.
- * Марчук Г. И. Численные методы расчета ядерных реакторов.— М.: Атомиздат, 1958.
- * Марчук Г. И., Лебедев В. И. Численные методы в теории переноса электронов — М.: Атомиздат, 1971. 496 с.
- * Lenoble J. (Ed.), Geleyn J.— F. (Ed.) (1989): IRS-88: Current problems in atmospheric radiation, Deepak Publ., Hampton, 678 p.

1.1. *Формулировка задачи. Точное решение*

- Hansen, J. E. (1969): Absorption Line Formation in a Scattering Atmosphere: A Test of Van de Hulst's Similarity Relations. *Astrophys. J.*, 158, 337—349.
- Hunt, G. E. (1972): Formation of Spectral Lines in Planetary Atmospheres. Part I: Theory for Cloudy Atmospheres; Application to Venus. *J. Quant. Spectros. Radiat. Transfer*, 12, 387—404.
- Hunt, G. E. (1972): Formation of Spectral Lines in Planetary Atmospheres. Part II: Spectroscopic Evidence for the Structure of the Visible Venus Cloud. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 12, 405—419.
- Regas, J., and C. Sagan (1970): Line Formation in Planetary Atmospheres. Part I: The Reflecting Model. Comments, *Astrophys. Space Phys.*, 2, 116—120.
- Regas, J., and C. Sagan (1970): Line Formation in Planetary Atmospheres. Part II: The Scattering Model. Comments, *Astrophys. Space Phys.*, 2, 138—143.
- Sagan, C., and J. Regas (1970): Line Formation in Planetary Atmospheres. Part III: Refinements Due to Inhomogeneity and to Anisotropic Scattering. Comments, *Astrophys. Space Phys.*, 2, 161—166.
- Whitehill, L. P., and J. F. Hansen (1973): On the Interpretation of the "Inverse Phase Effect" for CO₂ Equivalent Widths on Venus. *Icarus*, 20, 146—152.

1.2. *Метод последовательных порядков рассеяния*

- Соболев В. В. Рассеяние света в планетных атмосферах.— М.: Наука, 1972. 335 с.
- Kawata, Y., and A. Appleby (1974): Erratum. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 14, 243.
- Uesugi A., and W. M. Irvine (1969): Computation of Synthetic Spectra for a Semi-infinite Atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, 26, 973—978.
- Uesugi, A., and W. M. Irvine (1970): Multiple Scattering in a Plane-parallel Atmosphere. Part I: Successive Scattering in a Semi-infinite Medium. *Astrophys. J.*, 159, 127—135.
- Uesugi, A., and W. M. Irvine (1970): Multiple Scattering in a Plane-parallel Atmosphere. Part II: Curves of Growth for Reflection Spectra. *Astrophys. J.*, 161, 243—254.

Uesugi, A., W. M. Irvine, and Y. Kawata (1971): Formation of Absorption Spectra by Diffuse Reflection in a Semi-infinite Planetary Atmosphere. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 11, 797—808. (See tabular errata in Kawata and Appleby, 1974.)

Van de Hulst, H. C. (1970): High-order Scattering in Diffuse Reflection From a Semi-infinite Atmosphere. *Astron Astrophys.*, 9, 374—379.

1.3. Использование H - или X -, Y -функций

Belton, M. J. S. (1968): Theory of the Curve of Growth and Phase Effects in a Cloudy Atmosphere: Application to Venus. *J. Atmos. Sci.*, 25, 596—609.

Belton, M. J. S., D. M. Hunten, and R. M. Goody (1968): Quantitative Spectroscopy of Venus in the Region 8000—11000 Å. In *The Atmospheres of Venus and Mars*, ed. by J. L. Brandt and M. B. McElroy, Gordon and Breach, New York, pp. 69—97.

Chamberlain, J. W. (1965): The Atmospheres of Venus Near Her Cloud Tops. *Astrophys. J.*, 141, 1184—1205.

Chamberlain, J. W. (1970): Behavior of Absorption Lines in a Hazy Planetary Atmospheres *Astrophys. J.*, 159, 137—158.

Chamberlain, J. W., and G. P. Kuiper (1965): Rotational Temperature and Phase Variation of the Carbon Dioxide Bands of Venus *Astrophys. J.*, 124, 399—405.

Hansen, J. E. (1969): Absorption Line Formation in a Scattering Atmosphere: A Test of Van de Hulst's Similarity Relations. *Astrophys. J.*, 158, 337—349.

Lenoble, J. (1968): Absorption Lines in the Radiation Scattered by a Planetary Atmosphere. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 8, 641—654.

Van de Hulst, H. C. (1952): Scattering in the Atmospheres of the Earth and the Planets. In *The Atmospheres of the Earth and Planets*, ed. by G. R. Kuiper, 2nd ed., Chicago University Press, Chicago, Illinois, pp. 49—111.

Van de Hulst, H. C., and K. Grossman (1968): Multiple Scattering in Planetary Atmospheres. In *The Atmospheres of Venus and Mars*, ed. by J. C. Brandt and M. B. McElroy, Gordon and Breach, New York, pp. 35—55.

1.4. Метод исходного значения

Buell, J., R. Kalaba, and A. Fymat (1972): An Initial Value Method for the Ambarzumian Integral Equation. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 12, 769—776.

1.5. Представление функции пропускания суммой экспонент

Arking, A., and R. Grossman (1972): The Influence of Line Shape and Band Structure on Temperatures in Planetary Atmospheres. *J. Atmos. Sci.*, 29, 937—949.

Avrett, E., and D. Hummer (1965): Non-coherent Scattering. II: Line Formation With a Frequency Independent Source Function. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 130, 295.

Bakan, S., P. Koepke, and H. Quenzel (1978): Radiation Calculations in Absorption Bands: Comparison of Exponential Series and Path Length Distribution. *Contr. Atmos. Phys.*, 51, 28—30.

Cantor, D. G., and J. W. Evans (1970): On Approximation by Positive Sums of Powers. *Siam J. Appl. Math.*, 18, 380—388.

Chandrasekhar, S. (1935): The Radiation Equilibrium of the Outer Layer of a Star With Special Reference to the Blanquening Effect of the Reverse Layer. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 95, 21.

Domato, G. A. (1974): Frequency Integration for Radiative Transfer Problems Involving Homogeneous Non-gray Gases: The Inverse Transmission Function *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 14, 935—942.

Domato, G. A., and W. C. Wang (1974): Radiative Transfer in Homogeneous Non-gray Gases With Non-isotropic Particle Scattering. *J. Heat Trans., ASME Trans.*, August, 385—390.

Hansen, J. E., G. Russel, D. Rind, P. Stone, A. Lacis, S. Lebedeff, R. Ruedy, and L. Travis (1983): Efficient Three-dimensional Global Models for Climate Studies: Models I and II. *Mon. Weather Rev.*, 111, 609—662.

Hunt, G. E., and I. P. Grant (1969): Discrete Space Theory of Radiative Transfer and Its Application to Problems in Planetary Atmospheres. *J. Atmos. Sci.*, 26, 963—972.

Kerschgens, M. (1975): Berechnungen der absorption solarer strahlung in der troposphäre. Master's Thesis, University of Cologne, West Germany.

Kerschgens, M., E. Raschke, and U. Reuter (1976): The Absorption of Solar Radiation in Model Atmospheres. *Contr. Atmos. Phys.*, 69, 81—97.

Lacis, A. A., and J. E. Hansen (1974): A Parameterization for the Absorption of Solar Radiation in the Earth's Atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, 31, 118—133.

Lacis, A. A., W. C. Wang, and J. E. Hansen (1979): Correlated k Distribution Method for Radiative Transfer in Climate Models: Application to Effect of Cirrus Clouds on Climate. NASA CP-2029 (E. R. Kreing, ed.), 416 pp.

Malkmus, W. (1967): Random Lorenz Band Model With Exponential Tailed S^{-1} Line Intensity Distribution Function. *J. Opt. Soc. Am.*, 51, 323—329.

Raschke, E., and U. Stucke (1973): Approximations of Band Transmission Functions by Finite Sums of Exponential. *Contr. Atmos. Phys.*, 46, 203—212.

Wang, W. C., and P. B. Ryan (1983): Overlapping Effect of Atmospheric H_2O , CO_2 and O_3 on the CO_2 Radiative Effect. *Tellus*, 35B, 81—91.

Wiscombe, W. J., and J. W. Evans (1977): Exponential-sum Fitting of Radiative Transmission Function. *J. Comp. Phys.*, 24, 416—444.

Yamamoto, G., M. Tanaka, and S. Asano (1970): Radiative Transfer in Water Clouds in the Infrared Region. *J. Atmos. Sci.*, 27, 282—292.

1.6. Распределение по длинам пробегов

Дианов-Клоков В. И., Озеренский А. П. Расчет плотности лучистой энергии и эквивалентные траектории для некоторых облачных моделей.— *Известия АН СССР, ФАО*, 1977, т. 13, с. 315.

Дианов-Клоков В. И., Евстратов Н. А., Малков И. П., Озеренский А. П. Расчет диапазона распределения фотонов и эффективная длина пробега фотонов для некоторых двухслойных облачных моделей.— *Известия АН СССР, ФАО*, 1974, т. 10, с. 728.

Каргин Б. А., Краснокутская Л. Д., Фейгельсон Е. М. Отражение и поглощение энергии солнечного излучения облачными слоями.— *Известия АН СССР, ФАО*, 1972, т. 8, с. 505.

Романова Л. М. Распределение фотонов по длинам пробегов в плоском слое однородной мутной среды.— *Известия АН СССР, ФАО*, 1965, т. 1, с. 1022.

Романова Л. М. Предельные случаи функции распределения фотонов по длинам пробегов.— *Известия АН СССР, ФАО*, 1965, т. 1, с. 599.

Романова Л. М. Нестационарное световое поле в глубине мутной среды, освещенной узким лучом.— *Известия АН СССР, ФАО*, 1965, т. 1, с. 599.

Романова Л. М. Нестационарное световое поле в глубине мутной среды, освещенной узким лучом.— *Известия АН СССР, ФАО*, 1969, т. 5, с. 463.

Appleby, J. F., and W. M. Irvine (1973): Path Length Distributions of Photons Diffusely Reflected From a Semi-infinite Atmosphere. *Astrophys. J.*, 183, 337.

Bakan, S., and H. Quenzel (1976): Path Length Distribution of Photons Scattered in Turbid Atmospheres. *Contr. Atmos. Phys.*, 49, 272—284.

Bakan, S., and H. Quenzel (1978): Calculation of Atmospheric Water Vapor Absorption Including Multiple Scattering. *Contr. Atmos. Phys.*, 51, 15—27.

Bellman, R., R. E. Kalaba, and J. A. Lockett (1966): *Numerical Inversions of the Laplace Transform*. American Elsevier Publishing Co., New York.

Chamberlain, J. W., and H. B. McElroy (1966): Diffuse Reflection by an Inhomogeneous Planetary Atmosphere. *Astrophys. J.*, 144, 1148.

Fouquart, Y. (1974): Utilisation des approximants de Padé pour l'étude des largeurs équivalentes des raies formées en atmosphère diffusante. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 14, 497.

Fouquart, Y. (1975): Contribution à l'étude des Spectres Réfléchis par les Atmosphères Planétaires Diffusantes: Application à Venus. Thesis, Université des Sciences et Techniques de Lille, 12 mars 1975, 225 pp.

Fouquart, Y., B. Bonnel, and J. J. Morcrette (1976): Parameterization of Fluxes and Heating Rates in a Cloudy Atmosphere. *Proc. Symp. Radiation in the*

Atmosphere, Garmisch-Partenkirchen. FRG, 19—28 August (H. J. Bolle, ed.), Science Press, Princeton, 483—485.

Fouquart, Y., and J. Lenoble (1973): Formation des raies spectrales et étude des courbes de croissance dans une atmosphère diffusante semi-infinie. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 13, 447.

Heinrich, M. (1972): Transmission und Absorption von Volken unter Berücksichtigung der Tropfen und Banden Absorption. Ph. D. Thesis, University of Kiel.

Irvine, W. M. (1964): The Formation of Absorption Band and the Distribution of Photon Optical Paths in Scattering Atmosphere. *Bull. Astron. Inst. Neth.* 17, 266.

Irvine, W. M. (1966): The Distribution of Photon Optical Paths in a Scattering Atmosphere. *Astrophys. J.*, 144, 1140.

Irvine, W. M. (1967): Absorption Bands and Optical Paths in a Nonconservative Scattering Atmosphere. *Astrophys. J.*, 167, 1193.

Irvine, W. M. (1968): Diffuse Reflection and Transmission by Clouds and Dust Layers. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 8, 471.

Penner, S. S. (1959): *Quantitative Molecular Spectroscopy and Gas Emissivities*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, 587 pp.

1.7. Вероятностное распределение поглощающего вещества

Buriez, J. C., and Y. Fouquart (1980): Generalization of the Curtis-Godson Approximation to Inhomogeneous Scattering Atmospheres. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 24, 407—419.

Fouquart, Y., and B. Bonnel (1979): Computations of Solar Heating of the Earth's Atmosphere: A New Parameterization. *Contr. Atmos. Phys.*, 53, 35—62.

Geleyn, J.-F., and A. Hollingsworth (1979): An Economical Analytical Method for the Computation of the Interaction Between Scattering and Line Absorption of Radiation. *Contr. Atmos. Phys.*, 52, 1—16.

2.2. Однородные атмосферы над неоднородной подстилающей поверхностью

Малкевич М. С. Влияние неоднородной подстилающей поверхности на светорассеяние в атмосфере.—Известия АН СССР, сер. геофиз., 1957, с. 628—643.

Малкевич М. С. Влияние горизонтальных изменений альbedo подстилающей поверхности на светорассеяние в однородной атмосфере.—Известия АН СССР, сер. геофиз., с. 995—1005.

Малкевич М. С. Приближенный метод включения горизонтальных изменений альbedo подстилающей поверхности в задачах атмосферного светорассеяния.—Известия АН СССР, сер. геофиз., 1960, с. 288—298.

Малкевич М. С. Влияние неортоотропной подстилающей поверхности на светорассеяние в атмосфере.—Известия АН СССР, ср. геофиз., 1960, с. 440—447.

Deschamps, P. Y., M. Herman, J. Lenoble, D. Tanre, and M. Viollier (1980): Atmospheric Effects in Remote Sensing of Ground and Ocean Reflectances. In *Remote Sensing of Atmospheres and Oceans*, ed. by A. Deepak, Academic Press, New York, pp. 115—148.

Kaufman, Y. J. (1979): Effect of the Earth's Atmosphere on Contrast for Zenith Observation. *J. Geophys. Res.*, 84, 3165—3172.

Kaufman, Y. J. (1982): Solution of the Equation of Radiative Transfer for Remote Sensing Over Nonuniform Surface Reflectivity. *J. Geophys. Res.*, 87, 4137—4147.

Kaufman, Y. J., and J. M. Joseph (1982): Determination of Surface Albedos and Aerosol Extinction Characteristics From Satellite Imagery. *J. Geophys. Res.*, 87, 1287—1299.

Mekler, Y., and Y. J. Kaufman (1980): The Effect of Earth's Atmosphere on Contrast Reduction for a Nonuniform Surface Albedo and "Two Halves" Field. *J. Geophys. Res.*, 85, 4067—4083.

Odell, A. P., and J. A. Weinman (1975): The Effect of Atmospheric Haze on Images of the Earth's Surface. *J. Geophys. Res.*, 80, 5035—5040.

Tanre, D., M. Herman, and P. Y. Deschamps (1981): Influence of the Background Contribution Upon Space Measurements of Ground Reflectance. *Appl. Opt.*, 20, 3676—3684.

Tanre, D., M. Herman, and P. Y. Deschamps (1983): Influence of the Atmosphere on Space Measurements of Directional Properties. *Appl. Opt.*, 22, 733—741.

Tanre, D., M. Herman, P. Y. Deschamps, and A. deLeffe (1979): Atmospheric Modeling for Space Measurements of Ground Reflectances, Including Bidirectional Properties. *Appl. Opt.*, 18, 3587—3594.

Ueno, S. (1977): Contrast Transmittance at the Top of an Atmosphere Bounded by a Horizontally Nonuniform Diffuse Reflector. *Proc. 10th Lunar and Planetary Symposium*, Tokyo, 11—13 July, pp. 166—170.

Ueno, S., Y. Haba, Y. Kawata, T. Kusaka, and Y. Terashita (1978): The Atmospheric Blurring Effect on Remotely Sensed Earth's Imagery. In *Remote Sensing of the Atmosphere: Inversion Methods and Applications*, ed by A. L. Fumât and V. E. Zvev, Elsevier Science Publishing Co., Amsterdam, pp. 305—319.

Van Blerkom, D. J. (1971): The Effect of Haze on the Visibility of Martian Surface Features. *Icarus*, 14, 235—244.

2.3. Атмосферы с горизонтальной неоднородностью

Романова Л. М. Перенос радиации в горизонтально неоднородной рассеивающей среде.—Известия АН СССР. ФАО, 1975, т. 11, с. 809—819.

Романова Л. М. Принципы инвариантности для горизонтально неоднородной мутной среды.—Известия АН СССР. ФАО, 1976, т. 12, с. 820—833.

Романова Л. М. Асимптотика интенсивности света в горизонтально неоднородных рассеивающих слоях.—Известия АН СССР. ФАО, т. 14, с. 170—176.

Романова Л. М., Тарабукина Т. М. Отражение света однородным облаком при горизонтально неоднородном освещении.—Известия АН СССР. ФАО, 1980, т. 16, с. 1163—1172.

Романова Л. М., Тарабукина Т. М. Отражение света освещенным солнцем горизонтально неоднородным облаком.—Известия АН СССР. ФАО, 1981, т. 17, с. 27—38.

Bellman, R., R. Kalaba, and S. Ueno (1963): Invariant Imbedding and Diffuse Reflection From a Two-dimensional Flat Layer. *Icarus*, 1, 297—303.

Jefferies, J. T. (1955): Radiative Transfer in Two Dimensions. *Opt. Acta*, 2, 163—167.

Ueno, S. (1976): Invariant Imbedding and Diffuse Reflection of Radiation by Multidimensional Slabs. *Memoirs of KANZAWA Institute of Technology*, AN⁶, Ogigaoka Nonoichi, Ishikawa, Japan, June, 41 pp.

2.4. Облака конечных размеров

Arduini, R. F. (1977): Application of the Diffusion Approximation to the Transfer of Visual Radiation in Clouds of Finite Size. M. S. Thesis, George Washington University, Washington, DC, 33 pp.

Davies, R. (1976): The Three-dimensional Transfer of Solar Radiation in Clouds. Ph. D. Thesis, University of Wisconsin, Madison 220 pp.

Davies, R. (1978): The Effect of Finite Geometry on the Three-dimensional Transfer of Solar Irradiance in Clouds. *J. Atmos. Sci.*, 35, 1712—1725.

Davies, R., and J. A. Weinman (1976): Results from Two Models of the Three-dimensional Transfer of Solar Radiation in Finite Clouds. *Proc. of Symp. on Radiation in the Atmosphere*, Garmisch Partenkirchen, ed. by H. J. Bolle, Science Press, Princeton, pp. 225—227.

Giovanelli, R. G. (1959): Radiative Transfer in Nonuniform Media. *Aust. J. Phys.*, 12, 164—170.

Harshvardhan, J. A. Weinman, and R. Davies (1981): Transport of Infrared Radiation in Cuboidal Clouds. *J. Atmos. Sci.*, 38, 2500—2513.

Joseph, J. H., W. J. Wiscombe, and J. A. Weinman (1976): Solar Flux Transfer Through Turbid Atmospheres Evaluated by the Delta-Eddington Approximation. *J. Atmos. Sci.*, 33, 2452—2459.

Liou, K. N., and S. C. Ou (1979): Infrared Radiative Transfer in Finite Cloud Layers. *J. Atmos. Sci.*, 36, 1985—1996.

Ou, S. C., and K. N. Liou (1980): Numerical Experiments on the Helmholtz Equation Derived from the Solar Radiation Transfer Equation in Three-dimensional Space. *Appl. Math. Comput.*, 7, 155—175.

Varma, S. K. S. (1977): Solar Radiation Transfer in Two-dimensional Clouds. Ph. D. Thesis, University of Utah, Salt Lake City, Utah.

Varma, S. K. S. (1978): Solar-radiation Transfer in Two-dimensional Clouds: Y-approximation. *Proc. 3rd Radiation Conference AMS*, Davis, California.

Weinman, J. A., Harshvardhan, and W. S. Olson (1981): Infrared Radiation Emerging From Smoke Produced by Brush Fires. *Appl. Opt.*, 20, 199—206.

2.5. Поле разорванных облаков

Авасте О. А., Вайникко Г. М. В кн.: Светящиеся облака — оптические свойства.— Таллинн, 1973, с. 98—117.

Авасте О. А., Вайникко Г. М. Результаты расчетов потоков солнечной радиации, отраженной и пропущенной разорванными облаками.— Труды МГК СССР, сер. Метеорология, 1973, с. 52—84.

Авасте О. А., Вайникко Г. М. Перенос солнечной радиации в разорванных облаках.— Известия АН СССР. ФАО, 1974, т. 10, с. 1054—1061.

Алленов М. И., Чубаков Л. Г., Куус А. Б. Стохастическая структура облачных и радиационных полей — Труды ИФА АН СССР, 1972.

Вайникко Г. М. Уравнение средней интенсивности радиации в разорванных облаках.— Труды МГК СССР, Метеорология, 1973, т. 21, с. 28—51.

Вайникко Г. М., Карпенко Л. С., Шильман А. А. Решение интегрального уравнения с экспоненциальным ядром.— Труды АН ЭССР, сер. физ. и мат., т. 25, 1976, с. 118—123.

Глазов Г. Н., Титов Г. А. Уравнение корреляционной функции для интенсивности радиации в разорванных облаках.— Изв. АН СССР, ФАО 1976, т. 12, с. 963—968.

* Левин Б. Р. Теоретические основы статической радиотехники. Кн. 1.— М.: Советское радио, 1969. 752 с.

Мулламаа У. А. Р., Сулев М. А., Пылдмаа В. К. и др. Стохастическая структура облачных и радиационных полей.— Труды ИФА АН ЭССР, 1972.

Нийликс Х. И. Тепловое излучение атмосферы в условиях частичной облачности.— Изв. АН СССР, ФАО, 1968, т. 4, с. 383—396.

Нийликс Х. И. Вычисление средних нисходящих потоков радиации в атмосфере больших территорий.— Изв. АН СССР, ФАО. 1968, т. 4, с. 518—524.

Нийликс Х. И. Облачные характеристики в задачах радиационной энергетики в атмосфере Земли.— Изв. АН СССР, ФАО, 1972, т. 8, с. 270—281.

Clauben, M. (1982): On the Radiative Interaction in Three-dimensional Cloud Fields. *Contr. Atmos. Phys.*, 55, 158—169.

Gube, M., J. Schmetz, and E. Raschke (1980): Solar Radiative Transfer in a Cloud Field. *Contr. Atmos. Phys.*, 53, 24—34.

Harshvardhan, and J. A. Weinman (1982): Infrared Radiative Transfer Through a Regular Array of Cuboidal Clouds. *J. Atmos. Sci.*, 39, 431—439.

Levine, B. (1973): (In French) *Theoretical Basis of the Statistical Radiotechnique*. Tome I, Mir, Moscow.

O'Neill, E. L. (1963): *Introduction to Statistical Optics*. Reading, Palo Alto, London.

Planck, V. G. (1969): The Size Distribution of Cumulus Clouds in Representative Florida Populations. *J. Appl. Meteor.*, 8, 56—67..

Weinman, J. A. and Harshvardhan (1982): Solar Reflection From a Regular Array of Horizontally Finite Clouds. *Appl. Opt.*, 21, 2940—2944.

2.6. Метод Монте-Карло (облака)

Бусыгин В. П., Евстратов Н. А., Фейгельсон Е. М. Оптические свойства кучевых облаков и радиационных потоков для кучевого облачного покрова.— Изв. АН СССР. ФАО, 1973, т. 9, с. 1142—1151.

Aida, M. (1977): Scattering of Solar Radiation as a Function of Cloud Dimensions and Orientation. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 17, 303—310.

Appleby, J. F., and D. J. Van Blerkom (1975): Absorption Line Studies of Reflection From Horizontally Inhomogeneous Layers. *Icarus*, 24, 51.

Davies, R. (1975): Three-dimensional Transfer of Solar Radiation in Terrestrial Clouds. Second Conf. on Atmos. Rad., 29—31 October, Arlington, Virginia, Amer. Meteor. Soc., 239 pp.

Davies, R. (1976): The Three-dimensional Transfer of Solar Radiation in Clouds. Ph. D. Thesis, University of Wisconsin, Madison, 220 pp.

Davies, R. (1978): The Effect of Finite Geometry on the Three-dimensional Transfer of Solar Irradiance in Clouds. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1712—1725.

Ebel, D. M., and T. B. McKee (1983): Diurnal Radiance Patterns of Finite and Semi-infinite Clouds in Observations of Cloud Field. *J. Clim. Appl. Meteor.*, **22**, 1056—1064.

McKee, T. B., and S. K. Cox (1974): Scattering of Visible Radiation by Finite Clouds. *J. Atmos. Sci.*, **31**, 1885—1892.

McKee, T. B., and J. T. Klehr (1977): Radiative of Cloud Geometry. *Proc. of the Symposium Radiation in the Atmosphere*, Garmisch Partenkirchen FRG, 19—28 August 1976, ed. by H. J. Bolle, pp. 217—219.

McKee, T. B., M. DeMaria, J. A. Kuenning, and S. K. Cox (1983): Comparison of Monte Carlo Calculations With Observations of Light Scattering in Finite Clouds. *J. Atmos. Sci.*, **40**, 1016—1023.

Van Blerkom, D. J. (1971): Diffuse Reflection From Clouds With Horizontal Inhomogeneities. *Astrophys. J.*, **166**, 235.

Welch, R. M., and W. G. Zdunkowski (1981): The Effect of Cloud Shape on Radiative Characteristics. *Contr. Atmos. Phys.*, **54**, 482—491.

Welch, R. M., and W. G. Zdunkowski (1981): The Radiative Characteristics of Noninteracting Cumulus Cloud Fields, Part I: Parameterization for Finite Clouds. *Contr. Atmos. Phys.*, **54**, 258—272. Part II: Calculations for Cloud Field. *Contr. Atmos. Phys.*, **54**, 273—285.

3.1. Сферические планетные атмосферы — общий анализ

Соболев В. В., Рассеяние света в атмосферах планет.— М.: Наука, 1972. 335 с.

Lenoble, J., and Z. Sekera (1961): Equation of Radiative Transfer in a Planetary Spherical Atmosphere. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **47**, 372—378.

3.2. Однократное рассеяние (сферические атмосферы)

Минин И. Н. Рассмотрение рефракции в задачах оптики планетных атмосфер.— Изв. АН СССР. ФАО. 1974, т. 9, с. 929—836.

Фесенков Ф. Г. О теории яркости дневного неба в случае сферической земли.— *Астрономический журнал*, 1955, т. 32, с. 265—281.

Adams, C. N., G. N. Plass, and G. W. Kattawar (1974): The Influence of Ozone and Aerosols on the Brightness and Color of the Twilight Sky. *J. Atmos. Sci.*, **31**, 1662—1674.

Dave, J. V., and C. L. Mateer (1968): The Effect of Stratospheric Dust on the Color of the Twilight Sky. *J. Geophys. Res.*, **73**, 6897—6913.

Hulburt, E. O. (1953): Explanation of the Brightness and Color of the Sky Particularly the Twilight Sky. *J. Opt. Soc. Am.*, **43**, 113—118.

3.3. Инвариантное вложение

Bailey, P. B. (1964): A Rigorous Derivation of Some Invariant Imbedding Equations of Transport Theory, *J. Math. Anal. Appl.*, **8**, 144—169.

Bellman, R. E., H. H. Kagiwada, and R. E. Kalaba (1966): Invariant Imbedding and Radiative Transfer in Spherical Shells. *J. Comp. Phys.*, **1**, 245—256.

Bellman, R. E., H. H. Kagiwada, and R. E. Kalaba (1969): Diffuse Reflection of Solar Rays by a Spherical Shell Atmosphere. *Icarus*, **11**, 417—423.

Ueno, S., H. H. Kagiwada, and R. E. Kalaba (1969): Radiative Transfer in Spherical Shell Atmospheres With Radial Symmetry. Report RM 6061 P. R., The Rand Corporation, Santa Monica, California.

3.4. Приближенные аналитические методы (сферические атмосферы)

Гермогенова Т. А., Копрова Л. И., Сушкевич Т. А. Изучение угловой, пространственной и спектральной структуры поля яркости Земли для репрезентативной модели сферической атмосферы.— Изв. АН СССР. ФАО, 1969, т. 5. с. 1266—1277.

Минин И. Н., Соболев В. В. Рассеяние света в сферической атмосфере. I.— Искусственные спутники Земли, № 14.

Минин И. Н., Соболев В. В. О теории светорассеяния в планетных атмосферах.— *Астрономический журнал*, 1963, т. 40, с. 496.

Минин И. Н., Соболев В. В. Светорассеяние в сферической атмосфере.— *Космические исследования*, 1963, т. 40, с. 496.

Минин И. Н., Соболев В. В. Светорассеяние в сферической атмосфере.— *Космические исследования*, 1963, т. 1, с. 267.

Минин И. Н., Соболев В. В. Светорассеяние в сферической атмосфере. III.— *Космические исследования*, 1964, т. 2, с. 610.

Смоктый О. И. Многократное рассеяние света в однородной сферически симметричной планетной атмосфере.— *Изв. АН СССР. ФАО*, т. 3, № 3, с. 245—257.

Смоктый О. И. Многократное рассеяние света в неоднородной сферически-симметричной атмосфере.— *Изв. АН СССР, ФАО*, т. 3, № 5, 1967, с. 496.

Смоктый О. И. Светорассеяние в сферической атмосфере, содержащей аэрозоли.— *Изв. АН СССР. ФАО*, 1969, т. 5, с. 1, 46—62.

* Смоктый О. И. Моделирование полей излучения в задачах космической спектрофотометрии.— *Л.: Наука*, 1986. 352 с.

Соболев В. В. Рассеяние света в планетных атмосферах.— *М.: Наука*, 1972. 335 с.

3.5. Метод Монте-Карло (сферические атмосферы)

Ануфриев В. С., Назаралиев М. А. Новая модификация метода Монте-Карло для решения задач теории светорассеяния в сферической атмосфере.— *Изв. АН СССР. ФАО*, 1973, т. 9, с. 820—828.

Марчук Г. И., Михайлов Г. И. Результаты решения некоторых задач атмосферной оптики методом Монте-Карло.— *Изв. АН СССР. ФАО*, 1967, т. 3, с. 394—401.

Михайлов Г. А., Назаралиев М. А. Расчеты поляризации света в сферической атмосфере методом Монте-Карло.— *Изв. АН СССР. ФАО*, 1971, т. 7, с. 377—395.

Назаралиев М. А., Сушкевич Т. А. Расчеты характеристик поля многократно рассеянной радиации в сферической атмосфере.— *Изв. АН СССР. ФАО*, 1975, т. 11, с. 705—717.

Adams, C. N., and G. W. Kattawar (1978): Radiative Transfer in Spherical Shell Atmospheres: I. Rayleigh Scattering. *Icarus*, 35, 139—151.

Collins, D. G., W. G. Blattner, W. B. Wells, and H. G. Horak (1972): Backward Monte Carlo Calculations of the Polarization Characteristics of the Radiation Emerging From Spherical Shell Atmospheres. *Appl. Opt.*, 11, 2684—2696.

Kattawar, G. W., and C. N. Adams (1978): Radiative Transfer in Spherical Shell Atmospheres: II. Asymmetric Phase Functions. *Icarus*, 35, 436—449.

3.6. Решение неплоскопараллельных задач методом DART

Gray, C. R., H. L. Malchow, D. C. Merritt, R. E. Var, and C. K. Whitney (1973): Aerosol Physical Properties from Satellite Horizon Inversion. NASA Contractor Report 112311.

Gray, C. R., R. E. Var, and C. K. Whitney (1973): Space Shuttle Ultraviolet Horizon Report. NASA Report on Contract NASA 9-4065, Task 24A.

Newell, R. E., and C. R. Gray (1972): Meteorological and Ecological Monitoring of the Stratosphere and Mesosphere. NASA Contractor Report-2094.

Whitney, C. (1972): Implications of a Quadratic Stream Definition in Radiative Transfer Theory. *J. Atmos. Sci.*, 29, 1520—1530.

Whitney, C. (1974): Efficient Stream Distributions in Radiative Transfer Theory. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 14, 591—611.

Whitney, C. K., R. E. Var, and C. R. Gray (1973): Research into Radiative Transfer Modeling and Applications. AFCRL Contractor Report AFCRL-TR-73-0420.

4.1. Освещение узким коллимированным лучом — общая формулировка

Chandrasekhar, S. (1958): On the Diffuse Reflection of a Pencil of Radiation by a Plane Parallel Atmosphere. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 44, 933—940.

4.2. Уравнение для моментов (узкий луч)

Браво-Животовский Д. М., Долин Л. С., Лучинин А. Г., Савельев В. А. Структура узкого светового луча в морской воде.— Изв. АН СССР. ФАО, 1969, т. 5, с. 160—167.

Романова Л. М. Световое поле в глубоких слоях мутной среды, освещенной узким лучом.— Изв. АН СССР. ФАО, 1968, т. 4, с. 311—320.

Романова Л. М. Световое поле в пограничном слое мутной среды с сильным анизотропным рассеянием, освещенной узким лучом.— Изв. АН СССР. ФАО, 1968, т. 4, с. 1185—1195.

Романова Л. М. Некоторые характеристики светового поля, генерированного точечным коллимированным стационарным источником света, в облаках и туманах.— Изв. АН СССР. ФАО, 1971, т. 7, с. 1153—1162.

4.3. Инвариантное вложение и принципы инвариантности (узкий луч)

Романова Л. М. Эффективный размер светового пятна на границах толстого мутного слоя, освещенного узким лучом.— Изв. АН СССР. ФАО, 1971, т. 7, с. 410—420.

Романова Л. М. Отражение и пропускание узкого светового луча толстым слоем мутной среды с изотропным рассеянием и поглощением.— Изв. АН СССР. ФАО, 1973, т. 9, с. 198—203.

Соболев В. В., Рассеяние радиации в среде большой оптической толщины с анизотропным рассеянием.— Доклады АН СССР, 1968, т. 178, № 1.

Bellman, R., R. Kalaba, and S. Ueno (1962): Invariant Imbedding and Diffuse Reflection of Radiation From a Collimated Point Source. I and II, Rand Corporation RM-3141 ARPA, Santa Monica, California.

Bellman, R., R. Kalaba, and S. Ueno (1962): Invariant Imbedding and Diffuse Reflection of Radiation From a Collimated Point Source. III, Rand Corporation RM-3165 ARPA, Santa Monica, California.

Bellman, R., R. Kalaba, and S. Ueno (1963): On the Diffuse Reflection of Parallel Rays by an Inhomogeneous Flat Layer as a Limiting Process. *J. Math. Anal. Appl.*, 7, 91—99.

Chandrasekhar, S. (1958): On the Diffuse Reflection of a Pencil of Radiation by a Plane Parallel Atmosphere. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 44, 933—940.

4.4. Рассеяние в прямом и обратном направлении в малоугловом приближении (узкий луч)

Браво-Животовский Д. М., Долин А. С., Лучинин А. Г., Савельев В. А. Структура узкого светового луча в морской воде.— Изв. АН СССР, ФАО, 1969, т. 5, с. 160—167.

* Долин Л. С. Рассеяние светового луча в слое облачной среды.— Изв. ВУЗов, Радиофизика, 1964, т. 7, с. 380—382.

Долин Л. С. Распространение узкого светового луча в среде с сильным анизотропным рассеянием.— Изв. ВУЗов, Радиофизика, 1966, т. 9, с. 67—71.

Долин Л. С. О распространении узкого светового луча в среде с сильным анизотропным рассеянием.— Изв. ВУЗов, Радиофизика, т. 9, 1966, № 1, с. 61—71.

Arnush, D. (1972): Underwater Light Beam Propagation in the Small-angle-scattering Approximation. *J. Opt. Soc. Am.*, 62, 1109—1111.

Box, M. A., and A. Deepak (1981): Small-Angle Approximation to the Transfer of Narrow Laser Beams in Anisotropic Scattering Media. NASA Contractor Report 3407.

Box, M. A., and A. Deepak (1981): Limiting Cases of the Small-angle-Scattering Approximation Solutions for the Propagation of Laser Beams in Anisotropic Scattering Media. *J. Opt. Soc. Am.*, 71, 1534—1539.

Bucher, E. A. (1973): Computer Simulation of Light Pulse Propagation for Communication Through Thick Clouds. *Appl. Opt.*, 12, 2391—2400.

Bucher, E. A., and R. M. Lerner (1973): Experiments on Light Pulse Communication and Propagation Through Atmospheric Clouds. *Appl. Opt.*, 12, 2401—2414.

Deepak, A., and U. O. Farrukh (1984): Multiple Scattering Effects for Laser Beam Propagation in Snow. *Proc. of SPIE, Vol. 414*, 103—107.

Deepak, A., U. O. Farrukh, and A. Zardecki (1982): Significance of Higher Order Multiple Scattering for Laser Beam Propagation Through Hazes, Fogs, and Clouds. *Appl. Opt.*, **21**, 439—447.

Deepak, A., A. Zardecki, U. O. Farrukh, and M. A. Box (1982): Multiple Scattering Effects of Laser Beams Traversing Dense Aerosols. In *Atmospheric Aerosols: Their Formation, Optical Properties and Effects*, Spectrum Press, Hampton, Virginia, pp. 185—225.

Fante, F. L. (1973): Propagation of Electromagnetic Waves Through Turbulent Plasma Using Transparent Theory, *IEEE A&P*, **21**, 750—755.

Heggstad, H. M. (1971): Multiple Scattering Model for Light Transmission Through Optically Thick Clouds. *J. Opt. Soc. Am.*, **61**, 1293—1300.

Mooradian, G. C., M. G. Geller, L. B. Stotts, D. H. Stephens, and R. A. Krautwald (1979): Blue-green Pulse Propagation Through Maritime Fogs. *Appl. Opt.*, **18**, 429—448.

Scott, W. T. (1963): The Theory of Small-angle Multiple Scattering of Fast Charged Particles. *Rev. Mod. Phys.*, **35**, 231—313.

Shipley, S. T. (1978): The Measurement of Rainfall by Lidar. Ph. D. Thesis, University of Wisconsin, Madison.

Stotts, L. B. (1977): The Radiance Produced by Laser Radiation Traversing a Particulate Multiple-scattering Medium. *J. Opt. Soc. Am.*, **67**, 815—819.

Stotts, L. B. (1979): Limitations of Approximate Fourier Techniques in Solving Radiative Transfer Problems. *J. Opt. Soc. Am.*, **69**, 1719—1723.

Tam, W. G., and A. Zardecki (1979): Light Beam Propagation in Particulate Media. *J. Opt. Soc. Am.*, **69**, 68—70.

Tam, W. G., and A. Zardecki (1979): Multiple Scattering of a Laser Beam by Radiational and Advective Fogs. *Opt. Acta*, **26**, 659—670.

Tam, W. G., and A. Zardecki (1979): Iterative Method for Treating Multiple Scattering in Fogs. *Can J. Phys.*, **57**, 1301—1308.

Tam, W. G., and A. Zardecki (1982): Multiple Scattering Corrections to the Beer-Lambert Law; 1. Open Detector. *Appl. Opt.*, **21**, 2405—2412.

Weinman, J. A. (1976): Effects of Multiple Scattering on Light Pulses Reflected by Turbid Atmospheres. *J. Atmos. Sci.*, **33**, 1763—1771.¹

Weinman, J. A. (1984): A Review of the Theory of Multiple Scattering of Lidar Beams in Clouds. In *Clouds: Their Formation, Optical Properties and Effects*, Academic Press, New York.

Weinman J. A., and S. T. Shipley (1972): Effects of Multiple Scattering on Laser Pulses Transmitted Through Clouds. *J. Geophys. Res.*, **77**, 7123—7128.

Weinman, J. A., J. T. Twitty, S. R. Browning, and B. M. Herman (1975): Derivation of Phase Functions for Multiply Scattered Sunlight Transmitted Through a Hazy Atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **32**, 577—583.

Zardecki, A., and A. Deepak (1983): Forward Multiple Scattering Corrections as a Function of the Detector Field of View. *Appl. Opt.*, **22**, 2970—2976.

4.5. Метод Монте-Карло (узкий луч)

Зере Е. П., Иванов А. П., Каргин Б. А., Кацев И. Л. Коэффициенты ослабления и рассеяния водной среды или атмосферы от кратковременного расширения отраженного пульсирующего сигнала.—Изв. АН СССР. ФАО, 1971. т. 7, с. 750—757.

Aruga, T., T. Igarashi (1981): Narrow Beam Light Transfer in Small Particles: Image Blurring and Depolarization. *Appl. Opt.*, **20**, 2698—2705.

Blattner, W. G., D. G. Collins, and M. B. Wells (1974): The Effects of Multiple Scattering on Backscatter Lidar Measurements in Fog. Radiation Research Associates, Inc., Fort Worth, Texas. Project Report RRA-T 7402.

Bucher, E. A. (1971): Monte Carlo Simulation of Light Pulse Propagation Through Thick Clouds. *J. Opt. Soc. Am.*, **61**, 1549.

Bucher, E. A. (1973): Computer Simulation of Light Pulse Propagation for Communication Through Thick Clouds. *Appl. Opt.*, **12**, 2391—2400.

Collins, D. G., and M. B. Wells (1965): Monte Carlo Codes for the Study of Light Transport, Vols. 1 and 2. Radiation Research Associates, Inc., Fort Worth, Texas. Project Report RRA-T 54.

Kunkel, K. E. (1974): Monte Carlo Analysis of Multiple Scattered Lidar Returns. M. S. Thesis, Department of Meteorology, University of Wisconsin, Madison, 91 pp.

Kunkel, K. E., and J. A. Weinman (1976): Monte Carlo Analysis of Multiple Scattered Lidar Returns. *J. Atmos. Sci.*, 33, 1772—1781.

Plass, G. N., and G. W. Kattawar (1971): Reflection of Light Pulses From Clouds, *Appl. Opt.*, 10, 2304—2310.

Zuev, V. E., G. G. Zadde, G. G. Matvienko, and A. I. Popkov (1974): Remote Sounding of Hydrometeors With a Polarizing Lidar. Sixth Conf. on Laser Radar Studies of the Atmosphere, Sendai, Japan.

4.6. Нестационарные задачи (узкий луч)

Зере Е. П., Иванов А. П., Каргин Б. А., Катцев И. Л. Коэффициенты ослабления и рассеяния водной среды или атмосферы от кратковременного расширения отраженного пульсирующего сигнала.— Изв. АН СССР. ФАО, 1971, т. 7, с. 750—757.

Кочетков В. М. Рассеяние в обратном направлении узкого луча радиации в мутной среде.— Изв. АН СССР. ФАО, 1970, т. 6, с. 591—603.

Bellman, R., R. Kalaba, and S. Ueno (1963): Invariant Imbedding and Time-dependent Diffuse Reflection of a Pencil of Radiation by a Finite Inhomogeneous Flat Layer. *J. Math. Anal. Appl.*, 7, 310—321.

Bucher, E. A. (1973): Computer Simulation of Light Pulse Propagation for Communication Through Thick Clouds. *Appl. Opt.*, 12, 2391—2400.

Cai, Q., and K. N. Liou (1981): Theory of Time-dependent Multiple Backscattering From Clouds. *J. Atmos. Sci.*, 38, 1452—1466.

Matsumoto, M. (1980): The Similarity Principle in the Non-stationary Radiation Field. *Publ. Astron. Soc. Japan*, 32, 629—638.

Разное (узкий луч)

Кацев И. Л. Отражение узкого светового луча от однородной изотропно рассеивающей среды.— Изв. АН СССР. ФАО, 1972, т. 10, с. 425—430.

Beckett, P., P. J. Foster, V. Hutson, and R. L. Moss (1974): Radiative Transfer for a Cylindrical Beam Scattered Isotropically. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 14, 1115—1125.

Eloranta, E. W. (1972): Calculation of Doubly Scattered Lidar Returns. Ph. D. Thesis, University of Wisconsin, Madison, 115 pp.

Liou, K. N., and R. M. Shotland (1971): Multiple Backscattering and Depolarization From Water Clouds for a Pulsed Laser. *J. Atmos. Sci.*, 28, 772—784.

Rybicki, G. B. (1971): The Searchlight Problem With Isotropic Scattering. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 11, 827—849.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Альbedo 23, 75
— однократного рассеяния 21
— сферическое 23
- Вектор-параметр Стокса 22, 156
Вычислительное время 43, 47, 54, 56, 66, 92
- Газовое поглощение 184
Горизонтально неоднородные атмосферы 198
Граничные условия 24
- Двухпотоковое приближение 65, 75, 115
Дивергенция потока 23
Дискретные ординаты 47, 92
- Задача Милна 38, 68, 84
- Изотропия 21
Инвариантное вложение 63, 68, 204, 229, 239
Индикатриса рассеяния 21, 155
— — Хеньи—Гринштейна 90
- Квадратичная формула Гаусса 47
Конечные разности 58, 92, 128
Консервативный случай 21
Коэффициент ослабления 21
— поглощения 21
— рассеяния 21
- Лазерное излучение 235
Линия поглощения 184
Луч прожектора 235
- Малоугловое приближение 80
Матрица отражения 26
Матрица пропускания 26
Метод асимптоты 81, 92, 208, 238
Метод Винера—Хопфа 32, 38
Метод возмущения 78, 207
— дельта Эддингтона 75, 76, 115, 209
— исходного значения 188
— матрицы переноса 36
— матричного оператора 61, 66, 92
— Монте-Карло 42, 92, 191, 225, 231, 251
— сложения 64, 128
— сопряженных уравнений 50
— удвоения 64, 115, 138
— DART 69, 92, 231
— FN 51, 92, 128
- Неоднородная подстилающая поверхность 199
Нестационарные задачи 251
- Облака конечных размеров 209
Однократное рассеяние 81, 229
Оптическая глубина толщины 21
Отражение от поверхности 151
- Паде-аппроксимация 192
Параметры Стокса 22, 156
Показатель асимметрии 27, 73
Полиномы Лежандра 27, 39, 45, 48, 73, 90
Поляризация 22
Последовательное рассеяние 56, 92, 186
— восходящий, нисходящий 23
Поток 23, 115, 138
— восходящий, нисходящий 23
— результирующий 23
— сферический 23
Правило Байеса 70
Правильное расположение (облаков) 216
Представление суммой экспонент 188
Преобразование Лапласа 32, 191, 241
Приближение Эддингтона 73, 115
— экспоненциального ядра 76, 115
Принцип взаимности 26, 61, 67
— инвариантности 38, 57, 63, 66, 204, 239, 243
- Разорванная облачность 216
Рассеяние Ми 156
Распределение поглощающего вещества 195
— по длинам пробегов 189
— фотонов по длинам пробегов 189
- Скорость нагревания 23
Собственные функции 30, 46, 51
Соотношения взаимности 152
— инвариантности 152
— подобия 73, 187
— симметрии 154
Статистические модели (облаков) 216
Сферические атмосферы 227
Сферические гармоники 45, 50, 53, 92, 213
- Тепловая эмиссия 29
Терминология и единицы 20
- Узкий луч 235
Уравнение для моментов 236, 243
— переноса 24
— Шустера—Шварцвальда 56
Условие Маршака 46
- Фазовая матрица рассеяния 21, 155
Функция источника 22
— отражения 26
— пропускания 26
— Чандрасекара 32, 38, 41, 67, 187
— Н-функция 32, 38, 41, 67, 187
— ХУ-функции 32, 38, 187
Фурье-преобразование 27
— ряды 32, 209
- Численное сравнение 91
- Яркость 22, 128
— рассеянного излучения 25
— спектрального излучения 22
— суммарного излучения 25

Монография

Перенос радиации в рассеивающих и поглощающих атмосферах. Стандартные методы расчета

Редактор О. В. Лапина. Художник Б. Л. Каганович. Художественный редактор
Е. Н. Чукаева. Технический редактор Н. В. Морозова. Корректор И. Б. Михайлова.

ИБ № 1869

Сдано в набор 04.05.90. Подписано в печать 02.10.90. Формат 60×90^{1/16}. Бумага книжная.
Гарнитура литературная. Печать высокая. Печ. л. 16,5. Кр.-отт. 16,5. Уч.-изд. л. 19,81.
Тираж 1330 экз. Индекс МОЛ-7. Заказ № 119. Цена 3 р. 30 к. Гидрометеонздат, 199226.
Ленинград, ул. Беринга, 38.

Ленинградская типография № 8 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Государственного комитета СССР по печати. 190000, Ленинград, Прачечный переулоч, 6.