ДИНАМИЧЕСКАЯ МЕТЕОРОЛОГИЯ

ЧАСТЬ I

ЛЕНРЕДИЗДАТ ЦУЕГМС СССР
ЛЕНИНГРАД ★ 1935

ЦЕНТРАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЕДИНОЙ ГИДРО-МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ СЛУЖБЫ СОЮЗА ССР

ГЛАВНАЯ ГЕОФИЗИЧЕСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ

ДИНАМИЧЕСКАЯ МЕТЕОРОЛОГИЯ

ЧАСТЬ I

Под редакцией
Б. И. ИЗВЕКОВА и Н. Е. КОЧИНА

РЕДАКЦИОННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ОТДЕЛ ЦУЕГМС
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ЛЕНИНГРАД 1935

ПОСВЯЩАЕТСЯ
ПАМЯТИ
А. А. ФРИДМАНА

Предисловие

Курс динамической метеорологии, составленный сотрудниками Института Теоретической Метеорологии ГГО имеет целью удовлетворить все растущую потребность в таком руководстве и дать метеорологам по возможности полное и систематическое изложение основных проблем теоретической метеорологии, стоящее на современном уровне науки. Такая книга прежде всего нужна для аспирантов и студентов старших курсов метеорологической специальности, затем она представляет существенный интерес для научных работников в области аэрологии, синоптической метеорологии и климатологии, которые все более и более нуждаются в солидной теоретической базе как для своей повседневной практической так и для специальной научно-исследовательской работы. Наконец, авторы считают, что книга ими составленная будет с интересом прочтена также и гидродинамиками, т. к. многие части ее касаются весьма интересных проблем гидромеханики сжимаемой жидкости, проблем, представляющих большой самостоятельный интерес независимо от приложений к метеорологии. Решения этих вопросов и излагаемые методы могут быть с успехом использованы для практических приложений в других областях.

Динамическую метеорологию с равным правом можно было бы назвать вообще теоретической метеорологией, т. к. она в одинаковой мере опирается в своих выводах на гидродинамику, термодинамику и теоретическую физику. Богатство проблем и возможность применения самых сложных и разнообразных приемов математического исследования составляет существенную черту науки динамической метеорологии. В самом деле, то обстоятельство, что атмосфера представляет собой сжимаемую жидкость, в которой плотность является функцией не только давления, но и температуры (по терминологии Бьеркнеса бароклиническую жидкость) делает науку об атмосфере самой сложной, но вместе с тем самой интересной областью прикладной гидродинамики. Разнообразие форм притока энергии, имеющее место в атмосфере, с одной стороны подводит нас к проблемам термодинамики лучистой энергии, а с другой стороны требует развития математической теории турбулентности сжимаемой жидкости самого общего типа.

Надо сказать, что динамическая метеорология, сравнительно недавно оформившаяся как самостоятельная научная дисциплина, далека от классической законченности и совершенства. В ней наблюдается преобладание поставленных тем над темами законченными и разрешенными. Можно сказать, что наука эта находится в наши дни в периоде самой энергичной и актуальной стройки, и нет сомнения, что прогресс ее в будущем сыграет большую роль в деле усовершенствования предсказаний погоды не только краткосрочных, но также и долгосрочных. Эта последняя проблема, имеющая как известно весьма большое значение для всех сторон хозяйственной жизни общества до сих пор не разрешена удовлетворительно главным образом благодаря отсутствию солидной теоретической базы.

Перед авторами настоящей книги стояла очень трудная задача изложения основ науки, исключительно богатой по своему содержанию, изобилующей проблемами большого интереса и большой сложности и вместе

с тем весьма несовершенной по своему построению. Повидимому, этим об'ясняется малочисленность общих курсов и руководств по динамической метеорологии. Ни одна из существующих в мировой литературе книг по динамической метеорологии (курсы Бьеркнеса, Экснера и Кошмидера) не свободна от существенных недостатков, страдая или отсутствием систематичности (Экснер), или недостаточностью материала (Кошмидер). Самая значительная из них и весьма интересная книга Бьеркнеса, (написанная им в сотрудничестве с его учениками) посвящена главным образом общим вопросам гидродинамики сжимаемой жидкости и только последние ее главы касаются собственно метеорологических проблем. Далее, книга эта содержит изложение идей самого автора, правда, идей получивших руководящее значение в динамической метеорологии, но мало отводит места работам других исследователей.

Предлагаемая книга, без сомнения, также не может быть безупречна. Авторы заранее выражают благодарность читателям, которые прочтут ее критически и поделятся результатами своих размышлений и своими критическими замечаниями.

Остается сказать несколько слов об авторстве отдельных частей книги.

Глава I. Исторический очерк, написана Б. И. Извековым.

Глава II. Общие принципы механики атмосферы—И. А. Кибелем.

Главы III, и IV. Термодинамика атмосферных процессов и лучистая энергия в атмосфере—Б. И. Извековым.

Глава V. Статика атмосферы и условия распределения метеорологических элементов с высотою—Н. Е. Кочиным, Б. И. Извековым и В. А. Давтян.

Главы VI и VII. Кинематика и динамика атмосферы—П. Я. Полубариновой-Кочиной.

Глава VIII. Вязкость и турбулентность написана 3 авторами—Л. В. Келлером, И. А. Кибелем и Б. И. Извековым.

Главы IX и X. Волны и поверхности разрыва в атмосфере — Н. Е. Кочиным.

Глава XI. Общая циркуляция атмосферы—И. А. Кибелем.

Глава XII. Циклоны и антициклоны—О. А. Костаревой.

Глава XIII. Периодические явления в атмосфере—М. А. Омшанским.

Общая редакция книги принадлежала Б. И. Извекову и Н. Е. Кочину.

Все написавшие эту книгу труд свой посвящают памяти безвременно скончавшегося А. А. Фридмана, который почти для всех них являлся учителем и другом. Нет сомнения, что если бы он был среди нас, труд этот был бы выполнен лучше и совершеннее. На многих страницах этой книги авторы пытались дать изложение идей А. А. Фридмана, которые только отчасти были воплощены в его многочисленных напечатанных научных трудах. Высоко талантливый ученый опубликовал при жизни далеко не все, что им было продумано и намечено к исполнению. Если творчество А. А. Фридмана в этой книге нашло себе достаточное выражение, то это даст большое удовлетворение авторам книги и сознание, что проделанный ими в память дорогого учителя труд был предпринят не даром.

Глава I

Исторический очерк

Под названием динамической метеорологии последние 10—20 лет разумеют дисциплину, которая, опираясь на методы математики, теоретической механики и физики, стремится дать теоретическое об'яснение процессов, происходящих в атмосфере. Как самостоятельная научная дисциплина динамическая метеорология еще очень молода. Она выделилась постепенно из общего комплекса метеорологических знаний и насчитывает всего несколько десятилетий самостоятельной жизни. Чтобы говорить об ее историческом развитии, надо сначала говорить о развитии метеорологии вообще, так как с первых же шагов развития науки об атмосфере и атмосферных процессах стали возникать проблемы теоретического характера, решение которых требовали точных математических методов исследования.

Настоящий краткий исторический очерк науки динамической метеорологии отнюдь не претендует на исчерпывающую полноту и имеет целью указать и определить только основные этапы развития. Заметим еще, что самое название „динамическая метеорология" не вполне соответствует характеру изучаемой дисциплины и должно быть заменено названием „теоретическая метеорология".

В древности под метеорологией понимали все явления, происходящие на небе: движение звезд, образование облаков, ветра, выпадение осадков и т. д. Таким образом астрономия и метеорология были одной наукой. Астрономическую и метеорологическую науку роднило с первых шагов не только то, что наблюдения астрономические и метеорологические нужно было производить глядя наверх, но также и то, что обе они ставили своей задачей предсказание явлений.

В Европе систематические наблюдения над погодой (конечно без помощи приборов и наверное весьма грубые и неточные) начались повидимому очень рано: лет за 500 до нашей эры. К этому времени относятся дошедшие до нас каменные дощечки с высеченными на них сведениями астрономического и метеорологического характера (так называемые „парапегмы"). Эти дощечки вывешивались на рынках и площадях, где происходили народные собрания. В них содержались метеорологические данные преимущественно о ветре, а также об осадках, граде и холоде. Эти данные, повидимому, представляли собой выводы из многолетних наблюдений и давали так сказать климатологические характеристики местности. Естественно, что преобладали данные относительно ветра, так как они более всего интересовали греков—народ мореплавателей, и имели для них несомненное практическое значение. В IV столетии до нащей эры Аристотель написал уже трактат по метеорологии (Meteorologica), в котором он развивает свои взгляды на причины явлений погоды. Аристотель еще не вполне уясняет себе, что ветер есть ни что иное, как движущийся воздух. Для своего времени он дал достаточно хорошее об'яснение, сказав, что облака и дождь суть влажное испарение (дыхание) земли, но в соответствии с этим он считает, что ветер есть сухое испарение (?). Тем не менее нельзя отрицать, что в его трактате собран обширный материал относительно различных метеорологических явлений. Он первый дал об'яснение индийского шторма. Его учеником и продолжателем явился

Теофраст, который дал описание ветров а также указал различные признаки погоды, надолго удержавшиеся и применявшиеся часто в различных искаженных формах.

Втечение 2000 лет после Аристотеля мы не видим заметного прогресса в метеорологии. Взглядами Аристотеля питалось средневековье, хотя идеи Аристотеля не могли лечь в основу научного об'яснения фактов, ибо они по существу были неправильны. Верное представление о строении атмосферы и происходящих в ней явлениях возникает только в новое время и начинается с эпохи открытия барометра.

Несмотря на это, практические познания в метеорологии, вообще говоря, существовали и развивались, главным образом, среди мореплавателей и пастухов. Норвежские мореплаватели ходили не только по Северному морю, но добирались также в Шотландию, Гренландию, а в XI в., как в настоящее время точно установлено, достигли берегов Северной Америки. Успех этих дальних экспедиций конечно в сильной степени зависел от практического знания законов природы, что видно и из литературы того времени.

Развитие метеорологических знаний далеко шагнуло вперед в эпоху великих географических открытий. Колумб открыл пассаты еще раньше, чем он открыл Америку. Васко де Гама открыл индийские муссоны. Оба эти великие мореплавателя вложили всю свою волю в то, чтобы заставить своих матросов итти с этими таинственными ветрами, которые внушали всем страх и были так не похожи на ветры, известные по предыдущим плаваниям у берегов Европы. В это же время происходит возрождение науки. Намечаются пути нового научного метода исследования. Труды Галилея закладывают основы динамики, необходимой для дальнейшего развития динамической метеорологии. Появляются первые приборы для производства наблюдений. Уже в последнем десятилетии XVI века Галилей на своих лекциях демонстрировал прибор для измерения температуры — прообраз современного термометра. Только около 1640 года термометр по своей конструкции приблизился к современному термометру. В XVII веке термометры еще были очень редки: они изготовлялись, главным образом, в Италии (флорентийские термометры), ценились весьма дорого и нередко служили подарками от итальянских дворов.

Открытие барометра относится к 1643 году, когда произведен был знаменитый опыт Торичелли. Барометрическая шкала была изобретена Гуком (Hooke) в 1670 г. Тогда же начали пользоваться барометром для целей предсказания погоды. Так высота ртутного столба 29.5 дюймов обозначалась как „переменно“, 29.0—„дождь“, 28.5—„сильный дождь“, 28.0—„буря“, а с другой стороны на 30.0 дюймов ставилось „ясно“, на 30.5—„сухо“ и на 31.0 дюймах—„очень сухо“. Очень скоро было замечено частое несоответствие этих предсказаний с действительной погодой. Поэтому физики того времени предлагали пользоваться барометром с осторожностью и при даче предсказаний возможной погоды руководствоваться наблюдениями не только в одном месте, но также и в окрестности.

Одновременно в науке начинается обсуждение происхождения пассатов, т. е. возникает проблема общей циркуляции атмосферы. В 1686 году ученик и друг Ньютона Галлей (Halley), положил основание динамической метеорологии. Он предпринял путешествие в тропики и производил там наблюдения над пассатами и муссонами. Эти свои наблюдения он сопоставил с законом теплового расширения газов и принципом Архимеда, согласно которому масса расширенного воздуха должна подниматься над более тяжелыми холодными массами. Таким образом он считал, что причиной пассатов является восходящее течение воздуха в экваториальном поясе затишья (doldrum). Токи воздуха, притекающие к экватору с севера и с юга и замещающие эти поднимающиеся массы

воздуха, образуют мощное течение пассатов. Подобным же образом он об'яснил летний муссон как восхождение воздуха над нагретым континентом Азии и ток воздуха, притекающего на замену его с Индийского океана; а зимний муссон—восходящими токами, поднимающимися с океана, так как зимой Индийский океан оказывается более нагретым, чем материк.

Таким образом основание динамической метеорологии совпадает по времени с основанием небесной механики. Как Ньютон связал движение небесных тел с законами падения тел, открытыми Галилеем, на основании его знаменитых экспериментов, так Галлей связал динамику атмосферных процессов с экспериментально установленными законами расширения газов. Однако Ньютон развил теорию всемирного тяготения в строго математической форме, тогда как Галлею удалось дать лишь качественное об'яснение фактов. При этом в дальнейшем об'яснении пассатов и муссонов Галлей пошел по неправильному пути и допустил ряд ошибок. По мнению Галлея, то обстоятельство, что пассаты не являются строго северными и южными ветрами, а дуют с NE и SE, зависит от того что будто бы место в экваториальной зоне, в данный момент подвергающееся наибольшему нагреванию солнцем, вращается вокруг земли с востока на запад. Только 50 лет спустя этот ошибочный взгляд был исправлен его соотечественником и также астрономом Гадлеем (1735) (Эти имена часто путаются в курсах метеорологии). Гадлей (Hadley) об'яснил отклонение пассатов и муссонов правильно, т. е. как следствие вращения земли и того факта, что атмосферные движения наблюдаются с вращающейся земли. Но направляя идеи в надлежащее русло, Гадлей в то же время не сумел их обосновать с точки зрения динамики. Так он принимает, что отклоняются, вследствие вращения земли, N и S ветры, а W и E ветры не отклоняются вовсе. Только когда была доказана теорема Кориолиса (Coriolis), стало возможным правильное представление об отклоняющей силе вращения земли.

После этих великих открытий втечение 100 лет почти не заметно существенного прогресса в теоретической метеорологии. Теоретическая мысль в области чисто метеорологических проблем в XVIII веке не дала больших достижений, ибо самая сложность проблем сильно тормозила их разработку; тем не менее надо отметить, что именно в XVIII и в начале XIX века заложены основы динамической метеорологии. В конце XVIII века Эйлером были даны уравнения гидродинамики, а в начале XIX в. (1821) Навье (Navier) обобщил и распространил Эйлеровы уравнения на случай вязкой жидкости. В начале XIX века была основана термодинамика и таким образом был создан теоретический фундамент для дальнейших исследований.

Практическая метеорология достигла за это время больших успехов; это в значительной степени об'ясняется богатым опытом моряков в их дальних плаваниях. Плавая в тропиках, они познакомились с тропическими ураганами и постепенно открыли их циклоническую структуру. Признаки приближения этих грозных метеорологических явлений были очень важны для моряков, и они старались усвоить знание этих признаков как путем собственных наблюдений, так и путем заимствования у местных жителей. Были произведены первые удачные предсказания и выработаны правила, с помощью которых можно было держаться дальше от опасных циклонических центров. В особенности нужно отметить важные достижения, сделанные лейтенантом (впоследствии адмиралом) Мори (Maury) в Северо-Американских Соединенных Штатах. С 1839 г. он подробно изучал наблюдения над ветрами и воздушными течениями, полученные во время плавания по Атлантическому океану. Это изучение привело его к мысли о коллаборации мореплавателей различных наций в этом направлении. По его почину в 1853 г. в Брюсселе, состоялся конгресс представителей морских наций где был разработан план наблюдений

над ветром во время морских плаваний. В результате своих исследований Мори указал, каким образом, пользуясь благоприятными ветрами, можно было сократить продолжительность больших морских переходов на парусных судах. До него морской переход на паруснике до берегов Австралии брал 124 дня, и столько же времени требовалось на обратный переход. Корабли, направляющиеся к мысу Доброй Надежды, шли обычно прямо вдоль берега западной Африки. Пересекши экватор, они попадали в область юго-восточных пассатов южного полушария, где должны были сильно задерживаться, идя против господствующих ветров. Мори показал, что время перехода может быть сокращено, если корабль пересекает экватор в точке, расположенной значительно западней, идя к берегам южной Америки и огибая затем западный край области высокого давления, расположенной в Южной Атлантике. Благодаря этому предложению морской переход в Австралию вместо 124 дней сократился до 93 дней, а обратный даже до 63 суток.

Важный шаг вперед был сделан Брандесом (Brandes), который в книге „Beiträge z. Witterungskunde" (1820) показал, что депрессии перемещаются, как правило, с запада на восток. Он подробно исследовал большое число замечательных депрессий и иллюстрировал свое исследование первыми синоптическими картами, т. е. картами, на которых были нанесены данные одновременных наблюдений давления, ветра и температуры.

Американский метеоролог Эспи (Espy) в 1841 году опубликовал книгу „The Phylosophy of Storms", в которой он высказывает положение, что в депрессии воздух стремится к центральной области низкого давления, которая является областью восходящих воздушных течений. Таким образом Эспи формулирует впервые основные положения так называемой „конвекционной теории происхождения циклонов", которая держалась в науке до последнего времени. Он первый также указал на важную роль водяного пара в термодинамике атмосферных процессов.

Время около середины XIX столетия отличается большой интенсивностью работ по метеорологии. Многие исследователи изучали отдельные случаи штормов и формулировали общие правила для распределения ветров внутри штормовых областей и перемещения самих областей. Можно сказать, что около 1850 года составилось уже ясное представление о распределении ветров в барической депрессии, близкое к тому, которое было общепринятым в науке до последнего времени.

Однако во всей этой обширной научной работе не хватало об'единяющего начала. Все эти знания основывались на отдельных наблюдениях отдельного человека, отдельного корабля, отдельной станции. Правда, еще в конце XVI века были попытки организации метеорологических сетей и коллаборации в области метеорологических наблюдений. Так Ломоносов как в своих академических речах, так и в печатных статьях указывал на то, что метеорологические наблюдения представляют громадный беспорядочный материал, лишенный какой-либо систематичности. В России того времени эти идеи не могли найти отклика в современном обществе и не были поддержаны государственной властью. Более благоприятную почву нашли идеи, подобные высказанным Ломоносовым, за границей. В 1771 г. немецкий метеоролог Ламберт печатно призывал к изучению „одновременного и последовательного состояния атмосферы и законов, лежащих в основе атмосферных процессов", для чего необходима, по его мнению, организация сети метеорологических станций, по возможности, на всем земном шаре.

В осуществление этих идей в 1780 г. в Пфальце было утверждено Мангеймское метеорологическое общество в виде „метеорологического класса" Академии наук. Это Общество занялось организацией сети станций сначала на территории Германии, а когда Общество обратилось к ученым организациям разных стран, в том числе и к нашей Академии наук, с при-

зывом принять участие в организации метеорологических наблюдений, то стали открываться станции и в других странах, и скоро сеть возросла до 39 станций, которые были оборудованы за счет Общества барометрами, термометрами, дождемерами, испарителями, флюгерами и электрометрами, а иногда и магнитными стрелками. Район сети охватывал громадное пространство от Урала на восток до Кэмбриджа в С.-А. С. Ш. на западе и от Гренландии до Средиземного моря с севера на юг. Россия была представлена тремя станциями: Пишменским заводом на Урале, Москвой и С.-Петербургом. Наблюдения сети были опубликованы в 12 томах (1783—1795), но, разумеется, ввиду редкости такой сети трудно было сделать из этих наблюдений выводы теоретического характера относительно законов воздушных течений.

Весьма замечательные общие идеи теоретического характера были высказаны значительно позднее, в 30-х и 40-х годах XIX столетия. Они связаны в истории метеорологии с именем Дове (Dove), профессора физики в Берлинском университете, 9 лет читавшего там одновременно с Гельмгольцем. Главное сочинение Dove „Meteorologische Untersuchungen" написано им в 1837 году. На основании собственных наблюдений, которые показали ему внезапность типичных изменений погоды (внезапное падение температуры, связанное с внезапным же поворотом ветра, начало и конец дождя) и сопоставления европейских наблюдений с наблюдениями других частей света Дове приписал изменения погоды в умеренной зоне „изменчивому счастию в постоянной борьбе между полярными и экваториальными потоками воздуха". Таким образом, как основной фактор погоды Дове выдвинул ветер и смену воздушных течений, приносящих воздушные массы различной природы, различной потенциальной температуры и влажности.

Одновременно с Дове замечательные по своему времени работы были сделаны германским ученым Блазиусом (Blasius), работавшим в Америке. Он подробно исследовал структуру американских торнадо по тем разрушениям, которые они производили на своем пути. Исследуя условия их образования и передвижения он нашел, что они обычно зарождаются на переднем краю холодной волны. При этом Блазиус дает совершенно ясную картину того, как холодный воздух подтекает под теплый воздух снизу и как образуется наклонная поверхность раздела между холодной и теплой массой. Там, где эта поверхность раздела пересекает земную поверхность, наблюдается резкий поворот ветра и резкий скачок в распределении метеорологических элементов. На такой поверхности раздела может зародиться не один большой вихрь, а целая последовательность вихрей, перемещающихся один вслед за другим. Короче говоря, Блазиус развивает идеи перемещающегося полярного фронта, которые в новой, более совершенной форме возродились в недавнее время в Норвегии, в работах проф. Бьеркнеса и его школы. Книга Блазиуса была напечатана в 1851 г., ценилась и признавалась метеорологами, а потом была основательно забыта наряду с работами Дове.

Взгляды Дове, пророчески предвосхитившие многие новые теоретические построения, господствующие в наше время, вначале были встречены метеорологами весьма сочувственно, а затем подверглись полному отрицанию. На истории этого вопроса следует остановиться несколько подробнее.

Дело в том, что взгляды Дове, весьма остроумные и оригинальные, не были основаны на большом и хорошо разработанном материале. В них отсутствовали по большей части физико-математические доказательства и статистические исследования различных случаев. Для этого не было в то время достаточной почвы, и естественно, что в развитии науки должна была начаться реакция против идей Дове, а некоторые факты и внешние обстоятельства направили метеорологию в совершенно другое русло.

Через несколько лет после выхода в свет книги Дове одно стихийное бедствие ускорило основание „телеграфной“ службы погоды.

Во время Крымской войны союзный англо-французский флот жестоко пострадал от шторма на Черном море, причем погибло много, преимущественно французских, кораблей. Правительство Наполеона III, встревоженное этой неудачей, обратилось к астроному Леверрье (Leverrier) с поручением исследовать вопрос о возможности предотвращения таких событий путем дачи регулярных предсказаний погоды. Леверрье собрал наблюдения со всех станций Европы и показал, что шторм пришел из Англии через всю Европу на Черное море. В своей докладной записке по этому поводу он высказывается за полную возможность осуществлять предсказания погоды, если будет организована достаточно густая сеть станций, которые могли бы передавать данные своих наблюдений в центральное бюро погоды. Через несколько дней после доклада Леверрье Наполеон III поручил ему совместно с директором телеграфа организовать телеграфную службу погоды в целом ряде французских городов. Очень скоро этому примеру последовали другие европейские государства и прежде всего Англия, в которой метеорологическая служба (Meteorological Office) была организована в 1856 г. под управлением адмирала Фицроя. Вскоре после 1860 г. Фицрой на основании ежедневных сообщений станций стал делать ежедневные предсказания погоды, а в 1861 г. ввел в службу погоды систему штормовых сигналов. Прогнозы Фицроя были встречены весьма сочувственно общественным мнением Англии, но вызвали строгую критику со стороны научных кругов.

Окончательная организация международного сотрудничества в области синоптической метеорологии и организация международной сети станций была закреплена международными конгрессами метеорологов в 1872 г. в Лейпциге и в 1873 г. в Вене. Казалось бы, что теоретическая метеорология должна была много выиграть от организации синоптической службы погоды в международном масштабе. Без сомнения такие выгоды и были извлечены отсюда впоследствии, но вначале некоторые обстоятельства сыграли скорее отрицательную роль и привели к временной задержке в развитии правильных теоретических представлений об атмосферных процессах.

Дело в том, что основная метеорологическая сеть вначале и втечение долгого промежутка времени была недостаточно густа. Она давала возможность улавливать лишь общие черты явлений погоды на большой территории, но совершенно не обеспечивала детальных наблюдений. Если бы сеть была более густою, то она без сомнения дала бы возможность установить полную связь явлений погоды с результатами, полученными Блазиусом и Дове. Но при сети станций, расположенных на расстоянии сотен километров одна от другой, совершенно стушевывались важные подробности воздушных потоков, и нигде на карте нельзя было заметить ни разрыва непрерывности, ни раздельных линий, разграничивающих борющиеся потоки полярного и теплого воздуха.

Это обстоятельство было очень неблагоприятно для развития и распространения идей Дове и его школы. Взгляды его целиком были отвергнуты и на долгое время похоронены. Для самого Дове, а также и для Блазиуса это было личной трагедией. Дове, еще недавно пользовавшийся весьма большим авторитетом среди метеорологов Европы и Америки, был при жизни совершенно забыт. Блазиус много лет спустя, уже старым человеком, вернулся в Европу и до конца жизни оставался верен своим взглядам, которые он пытался пропагандировать в печати. Но он не встречал никакого сочувствия, и редакторы влиятельных изданий даже отказывали ему в печатании его статей ввиду агрессивности их тона и постоянных нападок на новое господствовавшее теперь направление в динамической метеорологии.

Другая идея владела теперь умами представителей теоретической и синоптической метеорологии, которые направляли все свое внимание на составление и изучение ежедневных синоптических карт. Это была идея перемещающихся барических особенностей. В то время как Дове и его школа считали ветер основным элементом и в природе воздушных течений искали ключ к объяснению явлений погоды, пришедшее им на смену поколение во главу угла поставило изучение полей давления, как основного фактора смены погоды.

На этом пути в первые годы после основания телеграфной службы все представлялось очень ясным и сулило в дальнейшем очень большие возможности. Это время было временем кажущегося торжества метеорологии, и многие считали, что успех благоприятных предсказаний обеспечен, и что если он еще не достигнут, то причиной этого является только сравнительная редкость станций и малое развитие сети.

Прокладка трансатлантического телеграфного кабеля, в деле которого запросы новой метеорологии также имели значение, еще более окрылила надежды синоптиков и теоретиков науки об атмосфере. Полагали, что после его проведения всякий шторм у берегов Европы может быть предсказан заранее. Но надежды эти далеко не оправдались, и после того, как европейская и американская службы погоды были связаны телеграфом, предсказания погоды не сделались более точными. Дальнейшая работа синоптиков была направлена на то, чтобы заполнить наблюдениями пропасть, разделяющую Европу и Америку, т. е. организовать правильные наблюдения на кораблях, совершающих рейсы по Атлантическому океану. По инициативе датского метеоролога Гофмейера (Hoffmeyer) начато было издание ежедневных синоптических карт Атлантического океана. Работа собирания наблюдений была организована Датским метеорологическим институтом в Копенгагене и Deutsche Seewarte в Гамбурге. Гофмейеровские карты, в которых собран большой и ценный материал наблюдений, выходили вплоть до начала войны 1914—1918 гг.

Но и эти карты, дающие возможность синтеза наблюдений над метеорологическими элементами всего северного полушария, не подвинули вперед дела предсказаний и не приблизили к постижению истинной физической сущности атмосферных процессов. Сэр Н. Шоу говорит, что после того, как эти карты пролежали долгое время на столе у метеорологов и никто не мог найти в них ясных и общих законов, интерес к ним значительно упал. Появилось даже некоторое разочарование, и многие метеорологи обратились к изучению климатологических проблем, считая, что научные методы исследования находят лучшее применение в климатологии, чем в синоптической и динамической метеорологии, проблемы которой по своей сложности еще долгое время не будут доступны серьезному научному исследованию. Семидесятые и восьмидесятые годы характеризуются большим развитием статистико-климатологических институтов; в больших метеорологических обсерваториях все больше культивируются статистико-климатологические методы, а прогнозы погоды и связанные с ними темы теоретического характера отодвигаются на второй план.

Идеи Дове и Блазиуса в 50-х годах и в последующие годы, как сказано выше, вообще находили мало сторонников. Только в Англии адмирал Фицрой (Fitzroy), талантливый организатор и основоположник Службы погоды, во многом примыкал к их взглядам и продолжал в своих работах итти путем, отличным от пути большинства европейских метеорологов. В книге „Weather Book“ (1859—1863 г.) Фицрой излагает взгляды, которые сложились у него еще во время плавания совместно с Дарвином на корабле „Бигль“ (1851—1855). Он так же как и Дове в основном исходит из представления о двух потоках воздуха — полярном и экваториальном. Изучение обширного синоптического материала карт дало ему воз-

можность шире смотреть на вещи, чем смотрел Дове, и в то время как работы Дове страдали некоторой отвлеченностью и оторванностью от наблюдений, работы Фицроя основаны на большом синоптическом опыте и переработке многочисленных материалов наблюдений. Внимательное чтение указанных работ убеждает в том, что Фицрой имел уже вполне ясное представление не только о полярном фронте, но и о зарождении циклонов на этом фронте (циклогенез), о теплых и холодных массах воздуха, окклюзии и т. п. Конечно, эти идеи выражены у него далеко не достаточно ясно. Вместе с тем в своих выводах Фицрой был значительно осторожнее Дове. Так, например, в то время как последний до конца жизни огульно отрицал барический закон ветров, Фицрой считал его „важным и практически полезным" и выражал сожаление, что на него обращают мало внимания.

Но столь, казалось бы, плодотворные и оригинальные по своему времени возрения Фицроя мало воспринимались его современниками и встречали недоверчивое и критическое отношение. В биографиях Фицроя сообщается, что он покончил с собой в припадке умственного расстройства. Известно, что это умственное расстройство было вызвано несправедливыми нападками на его деятельность в качестве руководителя Метеорологического бюро и упреками в неудачности прогнозов. Теоретические работы Фицроя были, также как и работы Дове и Блазиуса, основательно забыты последующим поколением метеорологов, и память о нем сохранилась, главным образом, как об основателе Службы погоды в Англии, не особенно удачно пытавшемся развить и усовершенствовать практику предсказаний погоды.

В самое последнее время, в связи с успехами норвежской школы метеорологов и в связи с распространением Бьеркнесовской теории происхождения циклонов, взгляды Дове и его сторонников вполне реабилитированы, и труды их получили полное признание и поставлены на надлежащую высоту. В лице Дове, Блазиуса, Фицроя современные сторонники теории полярного фронта видят своих непосредственных предшественников, гениальных ученых, силой своей интуиции предвосхитивших развитие науки и намного опередивших научное развитие своей эпохи. В этом признании их заслуг в настоящее время заходят иногда слишком далеко и считают, что все последующее направление в метеорологии, пришедшее на смену Дове и Блазиусу и связанное с развитием телеграфной службы погоды, явилось по самому существу глубоко реакционным и означало шаг назад по сравнению с их работами. В таком безусловном осуждении всего основного направления метеорологии 2-й половины XIX в. содержится все же крупная ошибка. Дело в том, что реакция 50-х годов была совершенно естественна и вызывалась всем ходом развития науки. Для эпохи 60-х, 70-х и 80-х годов взгляды Дове в некоторых отношениях являлись отсталыми и не могли служить основанием для дальнейшего развития. Не нужно прежде всего забывать, что они часто являются мало обоснованными предположениями и остроумными догадками, не проверенными на достаточном материале фактов и, что самое важное, выраженными в весьма категорической и односторонней форме. Так, например, известно, что Дове отвергал всякое значение барического закона в синоптической метеорологии, закона, который, по выражению Кеппена, „по истине можно назвать основой современной метеорологии", и не хотел сознать того, что без изобар и барического закона ветров нельзя было внести ясность в вопрос о нижних течениях воздуха. До конца жизни он оставался при ложном убеждении, что показания барометра ниже всего в середине теплого течения и выше всего в середине холодного течения, что противоречило барометрическим розам ветров, на которые он сам обращал большое внимание (Кеппен).

Кеппен, ставя вопрос, можно ли было без детального изучения синоптических карт и без всей той большой работы, которая была произведена во вто-

рой половине XIX в. прийти к тем результатам, какими обладаем мы в настоящее время в знании динамики атмосферы, приходит к отрицательному ответу и на ряде фактов показывает ошибочность и односторонность взглядов Дове и необходимость реакции в свое время против этих взглядов.

По мнению Кеппена, Дове и его последователи хорошо уяснили понятие воздушных масс различной природы и различного происхождения, но в исследовании их не могли продвинуться дальше, и создавали только путаницу около этих вопросов, так что молодое поколение было вынуждено впоследствии даже избегать старой терминологии, потому что при пользовании ею у читателя оживал весь связанный с нею круг идей и получалась путаница, мешавшая ясному воспринятию новых воззрений. Самое признание заслуг Дове и восстановление его авторитета в современной науке становится возможным только в исторической перспективе колоссальной работы, проделанной позднейшими исследователями над синоптическими картами и детальным изучением по ним явлений смены погоды. Мы добавим еще, что современные достижения динамики атмосферы в чрезвычайно большой степени зависят от развития аэрологии и современных методов исследования свободной атмосферы. Без знания природы инверсий, их происхождения и развития, а равно без знания роли стратосферы (еще далеко недостаточного и в настоящее время) невозможно в наши дни правильное развитие теоретических знаний об атмосфере. Шмаус говорит: „Дове считал ветер тем элементом, от которого зависят все явления погоды; затем наступило время, когда таким основным элементом стали считать давление; в настоящее время в идеях Бьеркнеса и его школы мы снова имеем возвращение к ветру. Круг замкнулся, но как за это время развилась метеорология!“

Таким образом на этой смене научного мировоззрения весьма интересно прослеживается закон диалектического развития в науке.

Отметим дальнейшие главные этапы развития теоретической метеорологии во второй половине XIX века.

В 1857 г. датский метеоролог Бюйс-Баллот (Buys-Ballot) наполовину теоретически и наполовину эмпирически установил закон, названный его именем, в котором выражена в виде простого правила зависимость направления ветра от распределения давления. Закон этот получил всеобщее значение в синоптической метеорологии и до настоящего времени продолжает сохранять это значение.

В 1832 г. появилась фундаментальная теорема Кориолиса о движении относительно вращающейся земли. На основании этой теоремы явилась возможность исправить и привести в надлежащую форму принцип Галлея об отклонении потоков воздуха земным вращением. Теорема Кориолиса с самого начала нашла свое применение в метеорологии, и целый ряд последовавших вскоре за ее открытием работ имеет темой приложение и развитие этого начала к различным воздушным течениям: муссонам, пассатам и наконец к циклонам.

Независимо от Кориолиса один из самых крупных исследователей в области теоретической метеорологии Ферреля (Ferrel) в 1856 г. открыл теорему Кориолиса и приложил ее к изучению атмосферной циркуляции. Он первый дал теоретическую модель общей циркуляции, выраженную помощью уравнений гидродинамики, и построил также гидродинамическую модель циклона; причину происхождения циклона он видит в местном нагревании воздуха, который поднимается вследствие своей под'емной силы, причем окружающие массы стремятся к центру и отклоняются вращением земли. Подобным же образом причиной происхождения антициклонов, согласно его взглядам, является местное охлаждение.

Современниками Ферреля были норвежские ученые Гульдберг и Мон (Guldberg & Mohn), которые также в своих работах старались обосновать исследование атмосферных процессов на гидродинамике и термодина-

мике. Они впервые выдвинули проблему изучения трения, возникающего при движении воздушных потоков, правда, еще ставя вопрос в очень элементарной и недостаточной форме. Конвективная теория циклонов, получившая теоретическое обоснование в работах Ферреля, вначале разделялась также Гульдбергом и Моном, но в дальнейшем, проверяя теорию наблюдениями, они нашли, что теория эта далеко не вполне оправдывается. Восьмидесятые и девятидесятые годы XIX в. внесли уже много изменений во взгляды на строение циклонов. Самые важные выводы были сделаны Ганом (J. Hann) который, в противоположность общепринятым взглядам, пришел к заключению, что воздух в циклонах вообще холоднее окружающей воздушной среды, а в антициклонах наоборот теплее. Холодный воздух как бы всасывается наверх в циклонах и расползается внизу в антициклонах. Ган на основании этого критикует старую теорию образования циклонов и антициклонов и считает их явлениями более сложного характера, развивающимися в качестве вторичных процессов общей циркуляции.

Весьма значительный вклад в науку динамической метеорологии был сделан Гельмгольцем (Helmholtz, 1821—1894). Втечение своей жизни он много раз возвращался к проблемам динамической метеорологии и каждый раз затрагивал и решал весьма существенные проблемы. Как исследователь из посторонней области, физик-теоретик по преимуществу, обладавший гениальной интуицией, он к каждой своей теме устанавливал совершенно новый оргинальный подход, чуждый рутине установившейся в метеорологических работах. Работы Гельмгольца касаются вопросов общей циркуляции атмосферы, роли поверхностей разрыва в динамике атмосферы и теории атмосферных вихрей. В первом своем мемуаре „Ueber atmosphärische Bewegungen“ он исследует вопрос, что собственно мешает воздуху принять те сверхураганные скорости, которые он должен был бы принять соответственно широте места. Он приходит к заключению, что одним трением невозможно об'яснить это изменение скоростей. Общая циркуляция атмосферы должна приводить к образованию поверхностей разрыва, разделяющих потоки воздуха различного происхождения. Такие поверхности разрыва являются более или менее неустойчивыми. Прежде всего на них должны образоваться волны, подобны тем, какие производит ветер на поверхности воды. Образование облаков CiCu и ACu Гельмгольц, как известно, об'яснил волнами, образующимися в слое, разделяющем два воздушных потока. В случае полной неустойчивости получается завихрение различных масс воздуха По мнению Гельмгольца процесс постоянного образования и разрушения поверхностей разрыва происходит в большом масштабе, главным образом, в двух местах: на краю пассатов и в умеренных северных широтах, где холодный воздух, растекающийся от полюса, образует холодные восточные ветры, которые встречаются с более теплыми юго-западными ветрами нижних широт (северное полушарие). Свою статью Гельмгольц заканчивает такими словами: „Из всего вышесказанного я вывожу заключение, что главным препятствием в общей атмосферной циркуляции к тому, чтобы в ней развивались ветры гораздо более сильные, чем наблюдаемые в действительности, служит не столько трение, сколько смешение различных движущихся потоков воздуха и вихри образующиеся на изгибах поверхностей раздела между такими потоками.“ Дальше Гельмгольц говорит, что он намеревается в дальнейшем дать аналитическое исследование таких разрывов непрерывности. Однако, ошибочно было бы утверждать, что Гельмгольц был близок к современным взглядам на теорию полярного фронта и на роль поверхностей разрыва в образовании циклонов и антициклонов. Высказанные им мысли он, повидимому, относил, главным образом, к общей циркуляции атмосферы, и в другой своей работе он говорит о циклонах как о явлениях, совершенно независимых от поверхностей разрыва.

Несомненно два обстоятельства помешали Гельмгольцу продвинуться дальше по пути выяснения роли поверхностей разрыва в образовании барических особенностей. С одной стороны в его время сеть станций, представленная на синоптических картах, которые он внимательно, повидимому, изучал, была не настолько густа, чтобы можно было обнаружить следы этих поверхностей разрыва в форме перемещающихся фронтов, и отсутствовали вовсе аэрологические наблюдения, которые впоследствии дали возможность проследить ход этих поверхностей в свободной атмосфере в виде мощных инверсий со скользящими разнородными потоками воздуха. С другой стороны состояние гидродинамики того времени и самое место, которое занимали здесь выдающиеся работы, самого Гельмгольца касающиеся сохраняемости вихревых линий в несжимаемой и баротропической жидкости, его знаменитые теоремы, дающие гидродинамике формальную красоту и завершенность—все это направляло его мысль к классической гидродинамике и таким образом ограничивало его взгляды и не позволяло ему перейти к исследованию более отвечающих атмосферной действительности бароклинических полей.

Хотя первый метеорологический мемуар Гельмгольца был напечатан в основном метеорологическом журнале „Meteorologische Zeitschrift", тем не менее он не был достаточно хорошо воспринят метеорологами и вряд ли был ими достаточно глубоко понят. Дело в том, что взгляды Гельмгольца ближе стояли к забытым уже воззрениям Дове и Блазиуса, нежели к господствующему в то время в метеорологии направлению. Замечательно, однако, что Гельмгольц не был, повидимому, знаком с работами Блазиуса, в которых поверхностям разрыва приписывалась главная роль в образовании торнадо.

Гельмгольц имел мало учеников среди теоретиков метеорологов. Самым выдающимся из них был М. Маргулес (M. Margules) в Австрии, весьма образованный метеоролог, исследователь большого таланта и большой научной интуиции. Развивая дальше идеи Гельмгольца, Маргулес выдвинул несколько проблем первостепенной важности для теоретической метеорологии. Между прочим он сделал попытку рассмотреть проблему возникновения циклонов с энергетической точки зрения, т. е. он подсчитал количество энергии, освобождающейся при вертикальном смещении воздушных масс, находящихся в неустойчивом равновесии. В этом он совершенно правильно видел главную причину возникновения мощных перемещающихся барических особенностей. Исследуя далее возможность существования стационарных поверхностей разрыва в атмосфере, Маргулес пришел к закону, устанавливающему зависимость угла наклона таких поверхностей от разности в скоростях и в температурах соседних масс воздуха.

Схемы Маргулеса послужили руководящими указаниями для Бьеркнеса и его школы на путях создания современной теории полярного фронта. Эти схемы не потеряли своего значения и теперь и ими постоянно пользуются в синоптической метеорогии и в аэрологии при изучении фронтов и расположения поверхностей разрыва в атмосфере. Надо еще добавить, что Маргулес всюду старается рассматривать атмосферу как сжимаемую жидкость самого общего типа, т. е. такую, в которой плотность зависит не только от давления, но и от температуры.

Работы Маргулеса, написанные трудным языком и недостаточно ясно, не получили при жизни автора большого распространения и влияния. Сам Маргулес, не имея удовлетворения и признания в своей научной работе, отошел от нее под конец жизни, за несколько лет до начала мировой войны. Он пережил войну и скончался всеми оставленный и забытый вскоре после окончания войны в 1920 г., причем недостаточное материальное обеспечение и голод ускорили его смерть.

Наряду с Гельмгольцем другой великий ученый в области теоретической физики Г. Герц (H. Hertz) также оказался не чужд метеорологии. Он выполнил чрезвычайно важную и нужную работу построения адиабат влажного насыщенного парами воздуха (1884 г.). В области термодинамики процессов, связанных с изменениями аггрегатного состояния пара в атмосферном воздухе после Герца много и плодотворно работал Бецольд (Bezold,) введший понятие о потенциальной температуре и псевдоадиабатических процессах изменения состояния влажного воздуха.

В конце XIX века с возникновением и развитием аэрологии. теоретические исследования получают новый мощный импульс.

Уже в конце XVIII века были произведены первые под'емы на воздушных шарах с целью исследования свободной атмосферы. В XIX веке такие полеты производились чаще, в особенности начиная с 50-х годов XIX в., когда в Англии было большое увлечение под'емами на аэростатах. Втечение 15 лет (1852—1867) здесь было совершено 32 под'ема исключительно с научной целью. Большинство из них было произведено гринвичским метеорологом Глешером. Наблюдения, произведенные во время этих под'емов, были использованы рядом ученых и на них втечение продолжительного времени основывались знания о свободной атмосфере. Наибольшая достигнутая высота была около 8700 *м*. Конечно научное значение таких случайных наблюдений было невелико, но во всяком случае под'емы Глешера принесли пользу в том отношении, что выяснили с полной очевидностью необходимость наблюдений в свободной атмосфере.

Первые систематические аэрологические наблюдения, сначала с шарами зондами, а потом со змеями специально разработанной конструкции были произведены Л. Ротч'ем (Lawrence Rotch) в С.А.С.Ш. и затем Тейсеран-де-Бором (Teisserenc de Bort) во Франции, в обоих случаях по их личной инициативе (1893—1894).

В Германии Р. Ассман (R. Assmann), сначала совершенно посторонний метеорологии человек — практикующий врач, отдал всю свою энергию выдающегося исследователя и организатора делу аэрологии, создав аэрологическую обсерваторию в Линденберге. В деле развития международной организации аэрологических наблюдений выдающуюся роль сыграл д-р Хергесель — (Hergesell) — многолетний директор Линденбергской обсерватории. Одним из первых конструкторов змеев-зондов в Европе и первым организатором аэрологических исследований в России был В. В. Кузнецов. В 1909 г. появился, сразу же получивший широкое распространение, метод шаров-пилотов. Особенно расширилось применение этого метода благодаря его практичности и дешевизне перед войной и во время войны 1914—1918 гг., когда для артиллерии и военной авиации понадобилось знание скорости и направления ветра на различных высотах.

Чрезвычайно большим достижением аэрологии явилось открытие стратосферы. Это удалось сделать почти одновременно Ассману в Германии и Тейссеран-де-Бору во Франции. Это открытие было так неожиданно для большинства метеорологов и стояло в такое противоречии с обычными представлениями о неуклонном падении температуры с высотой (инверсии рассматривались как небольшие местные отклонения температуры от общего закона убывания температуры с высотой), что вначале многие из них отказались верить этому факту и об'ясняли его несовершенством регистрации приборов, которые на большой высоте в состоянии обмерзания не могли давать надежных показаний. Многие продолжали считать, что слой постоянной температуры представляет собой обычный слой инверсии конечной толщины, что сказалось в самом термине „верхняя инверсия“, которым до сих пор продолжают иногда не вполне правильно называть стратосферу. Вначале полагали, что теплые воздушные массы статосферы имеют свое происхождение в экваториальном

поясе, откуда они поднимаются и уносятся общей циркуляцией атмосферы. Но, когда дальнейшее развитие аэрологических наблюдений позволило твердо установить существование верхнего изотермического слоя, причем этот слой не удалось пройти даже самыми высокими зондированиями (наибольшая высота зондирования свободной атмосферы, достигнутая свободными шарами-зондами, составляет около 37 *км*), стало ясно, что верхние изотермические слои представляют вообще границу для вертикальной конвекции и не связаны, повидимому, с общей циркуляцией.

Первые попытки теоретического об'яснения существования стратосферы были сделаны Гемфрисом (Humphreys) и Гольдом (Gold) в 1909 г. Оба эти исследователи видели причину существования верхней изотермии в условиях лучистого равновесия, т. е. равновесия между потоками лучистой энергии, притекающей к воздушным массам, и лучистой энергии, излучаемой этими массами. Более совершенное об'яснение, основанное на интегрировании дифференциальных уравнений потоков лучистой энергии, уравнений, незадолго перед тем установленных астрофизиком Шварцшильдом (Schwarzschild) для звездных систем было дано в 1913 г. Эмденом. В настоящее время мы имеем более совершенную теорию верхнего изотермического слоя, в которой учитывается уже и радиация различной длины волны и рассеянная радиация. Однако, и в теперешнем состоянии вопросы лучистого теплообмена в атмосфере представляют еще очень много неясного. До сих пор, например, не имеется удовлетворительного об'яснения для изменения высоты стратосферы с географической широтой. Нижняя граница стратосферы, как известно, оказывается значительно выше над экватором и над тропиками, чем над средними широтами и в особенности над полярными областями. В то время как высота нижней границы стратосферы над полюсами всего около 8 *км*, в средних широтах она составляет примерно около 12 *км*, а над экватором стратосфера поднимается до 18 *км*. В зависимости от этого над полярными областями стратосфера оказывается значительно теплее, чем над экватором. В то время как в арктических странах вблизи полюса низкая стратосфера имеет температуру около —45°С, над экватором температура холодной стратосферы составляет около —80°С. Происходит своего рода компенсация разности температур высоких и низких широт. Несомненно, факт этот имеет весьма существенное значение в тепловом режиме атмосферы и оказывает существенное влияние на общую циркуляцию, но истинной причины этого явления мы вполне не знаем. Также весьма загадочной представляется связь стратосферы с явлениями вторичной циркуляции, циклонами и антициклонами средних широт. Над циклонами стратосфера опускается вниз и нижняя граница ее (тропопауза) оказывается как бы втянутой вниз над областью перемещающейся депрессии, в то время как над барометрическими максимумами тропопауза оказывается поднятой вверх по сравнению с ее нормальным уровнем. Таким образом несомненно, что стратосфера оказывает существенное влияние на процессы образования и развития циклонов, но роль эта тоже остается до сих пор неясной. Некоторые весьма остроумные и интересные соображения на этот счет высказаны были в самое последнее время, о чем будет сказано в соответствующих местах нашей книги. Несомненно, что дальнейшая разработка основных проблем динамической метеорологии должна включить также и теоретическое исследование процессов, происходящих в стратосфере. До сих пор наши знания относительно этих процессов были ничтожны и ограничивались только отдельными и далеко несовершенными зондированиями. Можно сказать, что непосредственное изучение стратосферы начинается только теперь и высокие под'емы стратостатов,, последний из которых по времени и рекордный по достигнутой высоте совершен в 1934 году в СССР, открывают новую эру в изучении высоких слоев атмосферы и несомненно окажут существенную помощь теоретическому исследованию.

Последнее одно или два десятилетия были вообще очень плодотворными и важными для науки об атмосфере. Еще перед мировой войной усиленное развитие авиации и сопутствующее ему развитие теоретической аэродинамики оказали косвенно большое влияние на аэрологию и теоретическую метеорологию. Возникли вновь или получили совершенно новую постановку проблемы, которые и в настоящее время занимают главенствующее значение в теоретической метеорологии и привлекают к себе внимание наиболее талантливых исследователей.

Прежде всего выяснилось, что движения воздуха в особенности в низких слоях атмосферы никоим образом нельзя уподоблять ламинарному потоку, а надо считать, что они имеют турбулентный характер. Атмосфера, можно сказать, пронизана вихревыми шнурами и клубками вихрей, которые пересекают пространство в самых различных направлениях. При этом, повидимому, совершенно не имеет места сохраняемость вихревых линий, которая является характерной чертой динамики идеальной несжимаемой и баротропический жидкости. Вихри непрерывно возникают и разрушаются в атмосфере, отдельные воздушные массы то оказываются захваченными вихрями, то двигаются безвихревым движением. Траектории воздушных частиц оказываются весьма сложными и запутанными кривыми, а скорость весьма разнообразно меняется как по величине, так и по направлению, вследствие чего ветер всегда имеет более или менее порывистый характер; в этой порывистости и сказывается турбулентная структура воздушных течений.

Изменения других метеорологических элементов также происходят не плавно, а отдельными мелкими пульсациями. Скорость ветра, которая измеряется нашими приборами при непосредственных отсчетах и регистрируется нашими самописцами, не есть истинная скорость, а только осредненная, и притом часто весьма несовершенно осредненная по некоторому об'ему и некоторому интервалу времени. То же относится и к другим метеорологическим элементам. Является вопрос, насколько вообще правильно считать, что атмосферные воздушные движения подчиняются уравнениям классической гидродинамики (хотя бы в самой общей форме уравнений вязкой сжимаемой жидкости). Уравнения турбулентного движения имеют другой вид, гораздо более сложный. Для несжимаемой жидкости такая система уравнений была дана еще в 1894 г. О. Рейнольдсом (O. Reynolds) Для сжимаемой жидкости самого общего типа задача установления точной системы уравнений представляет значительные трудности. Повидимому для того, чтобы описать вполне турбулентное движение сжимаемой жидкости, нужно большее число уравнений и большее число характеристик, т. е. величин характеризующих различные свойства турбулентного движения.

Почти одновременно в работах Тэйлора (Taylor) в Англии и Шмидта (Schmidt) в Германии намечены были основные задачи изучения турбулентности в атмосфере. Существенное отличие задач атмосферной турбулентности от задач, которыми занимается аэродинамика, состоит в том, что главное значение здесь, повидимому, представляет влияние турбулентного перемешивания на передачу тепла (конвективная или турбулентная теплопроводность), т. е., другими словами, исследование уравнения притока энергии с точки зрения турбулентности. В этом направлении мы имеем уже ряд существенных достижений. Работы Тейлора, Шмидта и в особенности последовавшие за ними работы Ричардсона (L. Richardson) проливают совершенно новый свет на вопросы передачи и распространения энергии в атмосфере. Эти работы исходят из основных работ О. Рейнольдса, положившего начало статистической теории турбулентности. Основываясь на идеях Рейнольдса о турбулентном характере явления диссипации энергии, Ричардсон в 1922 г. дал практически весьма важный критерий для определения устойчивости турбулентных состояний в атмосфере.

Другое направление в изучении турбулентности связано с теми методами, которые в аэродинамике были с успехом развиты проф. Прандтлем (L. Prandtl) и его школой. Эти методы, в основе которых лежит идея так называемого пограничного слоя Прандтля, в последнее время начинают проникать и в динамическую метеорологию. Сам Прандтль в 1925 г. написал работу о распределении ветра с высотой, в которой в значительной степени исправил результаты Акерблома и Гессельберга, поставив исследование проблемы вязкости в атмосфере с точки зрения теории пограничного слоя. В самое последнее время Прандтль ставит по новому также и проблему общей циркуляции атмосферы. (Bjerknes Festband, Beiträge z. Physik d. freien Atmosphäre 1932).

Развитие динамической метеорологии за последние десятилетия тесно связано с выдающимися работами проф. В. Бьеркнеса (V. Bjerknes) и его школы. Можно сказать что В. Бьеркнес (он родился в 1862 г. и в 1932 г. праздновал свой 70-летний юбилей) представляет в настоящее время центральную фигуру в теоретической метеорологии. Влияние, оказанное им на всех теоретиков-метеорологов Европы и Америки, очень велико. Большое число работающих в области динамической метеорологии ученых является его непосредственными учениками. Заслуга Бьеркнеса состоит в том, что он прочно утвердил в метеорологии методы „физической гидродинамики", по его собственной терминологии, т. е. гидродинамики сжимаемой жидкости самого общего типа, „бароклинической", тогда как до него вопросы динамической метеорологии рассматривались, главным образом, под углом зрения классической гидродинамики или самое большее гидродинамики баротропической жидкости.

Работы В. Бьеркнеса до 1901 г. следуют идеям его отца, знаменитого физика-теоретика С. Бьеркнеса, который занимался исследованием гидродинамических сил, действующих на расстоянии. Обобщая и развивая эти идеи, В. Бьеркнес в 1897 г. пришел к своей знаменитой теореме об образовании вихревых трубок в бароклинической жидкости вследствие пересечения изобарических и изотермических поверхностей. Эта теорема, явившаяся обобщением результатов, полученных Гельмгольцем и Кельвином для случая идеальной и баротропической жидкости, на жидкость бароклиническую, явилась основной теоремой новой гидродинамики, и применения ее в области физики моря и физики атмосферы оказались очень разнообразными и плодотворными.

В области океанографии непосредственным учеником Бьеркнеса явился В. Экман (V. Ekman), который на основании материалов незадолго перед тем законченной экспедиции Нансена, создал свою теорию течений в глубинах океана (1900 г.). Его теория, которая учитывала влияние внутреннего трения и давала в результате изменение вектора скорости течения с глубиной по спирали (так называемая спираль Экмана), была воспринята метеорологами и явилась отправным пунктом для работ новой школы метеорологов по изучению внутреннего трения атмосферы (Ackerbloom, 1908, Hesselberg, 1915).

Применения теоремы Бьеркнеса для атмосферных циркуляций были сделаны другим учеником Бьеркнеса Сандстремом (Sandtstroem), который в ряде работ установил некоторые ценные предложения диагностического характера относительно атмосферных циркуляций и произвел интересные численные подсчеты мощности таких циркуляций для различных типичных случаев.

В 1912 г. проф. Бьеркнес был приглашен в качестве руководителя кафедрой динамической метеорологии в Лейпцигский университет.

В это время его начинают интересовать вопросы научного обоснования прогнозов погоды и он усиленно пропагандирует введение методов гидродинамики в синоптическую метеорологию. В читанных им курсах динамической и синоптической метеорологии он стремится рассматривать проблемы погоды, как задачи гидродинамики сжимаемой жидкости

самого общего типа (бароклинической по его терминологии) в трехмерном пространстве. При этом он широко использует материал аэрологических наблюдений так называемых международных дней, когда по существующему между различными странами соглашению аэрологические наблюдения производятся одновременно на большой территории в целом ряде аэрологических обсерваторий и станций. Памятником этих обширных разработок, которые велись ученнками проф. Бьеркнеса, остались изданные Геофизическим институтом в Лейпциге в период с 1913 по 1919 г. обширные атласы синоптических карт давления и топографии изобарических поверхностей, а равно карты линий тока для различных уровней атмосферы. („Synoptische Darstellungen atmosphärischen Zustände über Europa"). В 1912 г. появляется большой двухтомный курс динамической метеорологии (Dynamische Meteorologie und Hydrographie. I—II. Braunschweig и Washington 1911), вернее начало курса, так как первый том заключает статику, а второй кинематику атмосферных процессов. Третья обещанная часть курса—динамика в то время не появилась в печати. В первом томе автор излагает способы построения карт давления для различных высот на основании аэрологических наблюдений, а во второй части занимается, главным образом, изучением линий тока в свободной атмосфере и предлагает методы построения карт вертикальных течений. Целый ряд выдающихся учеников Бьеркнеса (Гессельберг, Свердруп, Фридман, Венгер и др.) разрабатывают различные отдельные вопросы атмосферной динамики. Так, например, Гессельберг на основе обработки весьма большого материала изучает внутреннее трение в свободной атмосфере и приходит к заключению, что коэффициент трения в свободной атмосфере оказывается весьма большим, в несколько сот тысяч раз больше, чем коффициент трения воздуха, полученный лабораторным путем. Этот результат уже вплотную подводит теоретиков-метеорологов. к проблеме атмосферной турбулентности. Гессельберг совместно с Фридманом производят весьма важную работу обследования порядка малости различных величин изучаемых в динамической метеорологии, а равно их производных по пространственным координатам и по времени. Свердруп изучил весьма обстоятельно североатлантические пассаты и лежащие над ними антипассаты с переходной зоной. Работа его послужила основанием для дальнейших работ по общей циркуляции. Наконец в работах Свердрупа, Бьеркнеса-сына, Сольберга все больше и больше начинает выясняться роль особенных точек и особенных линий (точек и линий сходимости и расходимости) для смены явлений погоды. К 1920 г. становится ясной связь линий сходимости и расходимости с поверхностями разрыва, и в работах исследователей норвежской школы начинает встречаться новый термин „фронт".

В 1917 г. В. Бьеркнес снова возвращается на родину. Летом 1918 г. В. Бьеркнес организует на новых началах практическую службу погоды в г. Бергене. Ближайшими его сотрудниками становятся его сын Я. Бьеркнес (J. Bjerknes) и Г. Сольберг (G. Solberg). Густая сеть станций и климатические особенности норвежского побережья, где особенно остро выявлены конфликты встречающихся разнородных воздушных масс, дали возможность получить новые интересные данные, на основе которых создается в начале 20-х годов новая теория происхождения циклонов. Эта теория, известная под названием теории Бьеркнеса или теории полярного фронта (иногда называют ее теорией норвежской школы, ибо по указанию самого В. Бьеркнеса авторство его в создании этой теории разделили его сын Я. Бьеркнес и Сольберг), получила весьма широкое распространение и вызвала целый ряд дополнительных исследований и возражений. По существу этой теории нам придется говорить много в следующих частях нашей книги. На пути обоснования ее встречаются большие трудности, непреодолимые при современном состоянии анализа, и поэтому многие части ее носят скорее описатель-

ный характер и являются более или менее вероятными гипотезами того, каким образом может развиваться процесс жизни циклона. Особенно спорным и теоретически необоснованным явился вопрос о волновом характере изменений фронта и о самом механизме преобразования волны в замкнутую барическую систему и замкнутый вихрь. Поэтому дальнейшие теоретические исследования были направлены главным образом на вопрос об устойчивости волн на поверхностях разрыва при наличии сил, действующих в атмосфере. Каково бы ни было состояние теории полярного фронта в настоящее время, если даже считать, что она далеко не во всех частях хорошо обоснована, тем не менее приходится признать, что многие ее части чрезвычайно хорошо связывают между собой факты действительности и дают чрезвычайно убедительное толкование тем сложным процессам, которые на основе старых теорий не могли получить достаточного об'яснения. Нет сомнения, что общая концепция этой теории, если в дальнейшем и подвергнется некоторым изменениям, все же повидимому в существенных чертах сохранит свое значение и послужит основой для дальнейшего теоретического обоснования явлений общей и вторичной циркуляции.

Больше всего критики теория Бьеркнеса встретила в Германии и Австрии со стороны старой школы германских метеорологов-теоретиков, группировавшихся около Экснера. Экснер, профессор теоретической метеорологии в Вене, известный целым рядом работ по теоретической метеорологии, значительно видоизменил теорию Бьеркнеса, связав ее с синоптической практикой германских метеорологических институтов. Дефант (Defant) в Вене, а потом в Берлине и Штюве (Stüve) во Франкфурте разрабатывали дальше теорию фронтов, причем Штюве, отказавшись от некоторых широких и слишком по его мнению произвольных обобщений норвежской школы, повел изучение отдельных фронтов и поверхностей разрыва на основе аэрологических наблюдений, строя вертикальные разрезы атмосферы. При этом он и несколько раньше в Англии сэр Н. Шоу стали применять для исследования устойчивости атмосферы весьма плодотворный метод индикаторных диаграмм („тефиграммы").

В заключение скажем несколько слов о литературе общих курсов по динамической метеорологии. Первым систематическим курсом динамической метеорологии был упомянутый курс Бьеркнеса, который начат был изданием в 1912/13 г. Он выходил одновременно в двух изданиях на английском и немецком языках, причем были выпущены только две первые части, содержащие статику и кинематику, снабженные большим атласом, иллюстрирующим графические методы построения карт давления и карт линий тока на различных высотах. Разразившаяся мировая война задержала выход в свет 3-й части, собственно динамики атмосферы. В 1917 г. появилось первое издание книги венского профессора Экснера (Exner „Dynamische Meteorologie"). Второе ее издание, исправленное и значительно дополненное, вышло в свет в 1925 г., уже после появления в печати работ Бьеркнеса и других метеорологов норвежской школы по новой теории циклонов. Книга Экснера в основном отправляется от работ Гельмгольца и Маргулеса, хотя содержит также подробное и критическое изложение идей норвежской школы. Книга эта в настоящее время является наиболее полной сводкой работ по динамической метеорологии, опубликованных до 1925 г.

В 1933 г. появился коллективный труд проф. Бьеркнеса и его учеников: „Physikalische Hydrodynamik mit Anwendungen auf die dynamische Meteorologie. Berlin. Springer Verlag. 1933", представляющий собой обширный трактат по „физической гидродинамике" (согласно терминологии проф. Бьеркнеса) и содержащий полное изложение его идей, причем последняя часть этого трактата посвящена специально динамической метеорологии.

Литература

V. Bjerknes. Physikalische Hydrodynamik mit Anwendungen auf die dynamische Meteorologie. Berlin. Springer Verlag. 1933.
W. Bjerknes. Die Meteorologie als exakte Wissenschaft. Braunschweig. 1913. 16 p.
Bigelow. Tne status of modern Meteorology.—Science, V. XXXII, № 910, № 831, p.p. 775—782.
D. Brunt. Meteorology. London. 1928.
Clouzot. Histoire ot meteorologie. Ann. de la soc. Mat. de France, T. 56, p. 77.
W. H. Dines, Meteorology ancient and moderne.—Nature, 119, 1927, № 3008.
Hellman. Gesetzmässigkeiten im Wechsel der Witterung der Jahrzeiten (1885).
W. Köppen. Dove und wir. „Meteorologische Zeitschrift", 1921, S. 289—292.
W. Köppen. Die Anfänge d. deutschen Wettertelegraphie in d. Jahren 1862—1880. Beiträge z. Physik d. freien Atmosphäre, XIX Bd. Bjerknes Festband 1932.
T. Linke. Meteorologisches Taschenbuch, Leipzig 1931. (Хронологические таблицы).
Marine Meteorology. History aud Progress.—Marine obs. v. 15; № 18.
A. Schmauss. Ursache und Wirkung in der Meteorologie. „Mereorologische Zeitschrift" 1921, S. 11.
Shaw, Napier. Meteorologie ancient aud Modern.—Nature, v. 120, 1927, № 3014, p. 190.
N. Shaw. Manual of Meteorology. Vol. I. Meteorology in History. Cambridge 1926.
Е. И. Тихомиров. Фицрой и современная метеорология. „Метеорологический Вестник", 1932. май

ГЛАВА II

Общие принципы механики атмосферы

§ 1. Введение. В первом приближении земля представляет собой шар радиусом в 6370 *км* [1]), вращающийся вокруг оси, проходящей через полюсы его, обращающийся вокруг солнца и несущийся, вместе с солнечной системой, в мировом пространстве. Атмосфера, окружающая землю, увлекаясь движением земли, подвергается действию целого ряда сил, из которых важнейшей является специальный вид силы Ньютоновского тяготения—земное притяжение. В результате действия этой последней силы атмосфера не может оторваться, по крайней мере, в низких слоях, от поверхности земли. Таким образом, так называемая покоящаяся атмосфера находится на самом деле в беспрестанном движении, следуя за вращением земли, а явление ветра есть результат возникшей в том или ином месте разницы между движением воздуха и движением системы закрепленной на поверхности земли. Только на большой высоте повидимому существует систематическое отставание воздуха от вращения земли [2]), проявляющееся, естественным образом, в виде постоянного ветра, дующего с востока на запад.

На основании законов газовой механики можно с большой вероятностью утверждать, что атмосфера не имеет границы в точном смысле слова, а лишь постепенно переходит в наполненное легчайшими газами мировое пространство. Мы можем только ответить на вопрос о том, на какой высоте еще замечается атмосфера, и это мы можем сделать благодаря существованию известных оптических явлений. Так, наблюдения над сумерками позволяют утверждать что еще на высоте в 214 *км* имеется воздух отражающий свет, возгорание метеоров дает „высоту" в 300 *км*, а наблюдения над северными сияниями делают вероятным существование воздуха еще на 500 *км* над поверхностью земли. Понятие „массы всей атмосферы" не имеет точного смысла, подобно понятию высоты. Масса атмосферы есть, повидимому, величина переменная, ибо земля теряет свою атмосферу, как бы расплескивая ее в мировом пространстве [3]). Грубо можно оценить ее косвенным путем в 52.10^{14} *т*, что составляет меньше чем одну миллионную массы земли. Однако плотность воздуха на больших высотах чрезвычайно мала [4]), и можно считать, что уже девять десятых всей атмосферы заключается между поверхностью земли

---

[1]) Радиус земли у экватора $a_{эк.} = 6378{,}4$ *км*, у полюса же $a_п = 6356{,}5$ *км*. Подробнее о форме земли см. далее § 4 этой главы.

[2]) На это указывают, например, наблюдения над, так называемыми, светящимися облаками, появлявшимися на высоте 70—80 *км* над поверхностью земли.

[3]) Так, на очень большой высоте сила тяжести может оказаться меньшей, нежели центробежная сила, если, конечно, на этой высоте воздух увлекается еще вращением земли.

[4]) Плотность ρ, равная у поверхности земли $\rho = 1{,}3 \cdot 10^{-3} \frac{т}{м^3}$, на высоте 20 *км* обращается в $\rho = 0{,}9 \cdot 10^{-4} \frac{т}{м^3}$, а на высоте в 300 *км*, согласно Эмдену (Emden) будем иметь $\rho = 6{,}7 \cdot 10^{-26} \frac{т}{м^3}$.

и концентрической с ней сферой, проходящей на высоте 20 *км*. Можно утверждать, что атмосфера выше 25—30 *км* не оказывает непосредственного динамического воздействия на лежащие близ поверхности земли воздушные массы. Ничтожная по сравнению с размерами земного шара, примыкающая к земле пленка в 20—25 *км* является ареной явлений. представляющих интерес для динамической метеорологии. Отметим тут же, что даже и в пределах первых 20—25 *км* не все слои воздуха имеют одинаковое влияние на жизнь атмосферы. Так до сих пор не решен в положительном смысле вопрос о влиянии на движение в нижних 10—15 *км* („тропосфера") слоев воздуха, лежащих выше 10—15 *км* („стратосфера"), хотя многие метеорологи склонны видеть возможность, исходя из поведения этих последних масс, получить представление о движении нижних слоев атмосферы.

В пределах нижних 25—30 *км* атмосфера представляет смесь газов, продуктов конденсации водяных паров и взвешенных частиц. Атмосферный воздух в основном составлен из азота, кислорода, аргона, водяных паров и углекислоты. Процентное содержание этих газов меняется от точки к точке (географическая широта места, высота над уровнем моря) и со временем (времена года) [1]). Количество взвешенных частиц очень разнообразно и в общем убывает с высотой.

Кинетическая теория строения материи учит нас, как разбить движение газовых молекул на некое „среднее движение" и на движение, являющееся отклонением от этого среднего. Однако, в то время как скорости среднего движения входят явным образом в дифференциальные уравнения, управляющие перемещением газовых масс, отклонения от этих скоростей, напротив, входят лишь в определенных комбинациях (осредненных) [2]). Этот факт позволяет непосредственно говорить о возможности замены (на предмет количественных построений) газа некоей изменяемой, непрерывной уже средой, движущейся со скоростью, равной скорости среднего движения газа, но находящейся не только под действием внешних, но и специальных внутренних сил. В число последних мы должны включить во-первых силы междумолекулярные, а во-вторых фиктивные силы, получающиеся благодаря присутствию упомянутых выше осредненных комбинаций из отклонений от средних скоростей, силы, как бы порожденные хаотичностью движения отдельных молекул. Внутренние эти силы представляются как силы, действующие на площадку, так же как и их составной элемент—междумолекулярные силы [3]). Среди них мы найдем при более детальном рассмотрении, с одной стороны, силы давле-

---

[1]) Следующая табличка дает представление о среднем годичном процентном составе атмосферы на разных широтах [1]. Выше 30 *км* становится заметным процентное содержание водорода. В пределах нижних двадцати километров состав воздуха можно, повидимому, практически считать независящим от высоты, благодаря вертикальному перемешиванию слоев воздуха.

	Азот	Кислород	Аргон	Водяные пары	Углекислота
0°	75.99	20.44	0.92	2.63	0.02
50°N	77.32	20.80	0.94	0.92	0.02
70°N	77.87	20.94	0.94	0.22	0.03

[2]) Мы имеем ввиду выражения, содержащие парные произведения различных скоростей отклонения. К сожалению, об'ем этой книги не позволяет нам остановиться сколько-нибудь подробнее на выводе упомянутых уравнений движения. Вывод этот можно найти, напр., в книге Jeans. Dynamical theory of Gases.

[3]) Про некий об'ем газа мы можем утверждать, что все междумолекулярные силы действуют на поверхность его со стороны в[illegible]остальной массы газа, ибо междумолекулярные силы, действующие на внутренние частицы об'ема, уничтожаются попарно.

ния („атмосферное давление"), с другой—силы внутреннего трения (или, как еще говорят „силы вязкости"). В этой главе мы дадим подробный вывод уравнений движения сплошной среды, в качестве каковой мы стилизуем смесь газов—атмосферу. Недостаточно однако определить атмосферу как непрерывную изменяемую среду, или, как принято говорить в математике, „жидкость". В самом деле, математики различают жидкости: идеальные и вязкие, жидкости сжимаемые и несжимаемые, обладающие теплопроводностью и не проводящие тепла, с учетом излучения и без такового; далее, говорят о движениях происходящих под действием сил допускающих потенциал, или недопускающих потенциала и т. п. Мы постараемся поэтому хотя бы в общих чертах выявить те свойства, которые характеризуют движения атмосферные и выделяют их из всей совокупности движений различных „жидкостей".

Обратимся сперва к представлению о плотности.

§ 2. Плотность атмосферы. Мы указали во введении к этой главе на то, что можно притти к представлению об атмосфере как о непрерывной изменяемой среде. Мы постараемся теперь дать математическую стилизацию величин, характеризующих динамику и кинематику нашей среды, а также получить уравнения, управляющие изменением этих величин. Начнем с того, что облечем в математическую форму понятия массы и плотности нашей среды. Мы не можем представить себе какой-либо об'ем атмосферы без массы, заполняющей этот об'ем. Масса является, если перевести это на язык формул, некоторой функцией об'ема. Относительно этой функции следует сделать три предположения: 1) она положительна, 2) она аддитивна (масса суммы двух об'емов равна сумме масс этих об'емов) и 3) она стремится к нулю вместе с об'емом, в коем она определена. Обозначим массу, определенную для некоторого об'ема v_d диаметра d, буквой m_d. Предположим, что существует предел

$$\lim_{d \to 0} \frac{m_d}{v_d} = \rho; \tag{1}$$

обозначим его через ρ и назовем плотностью нашей среды в той точке, в кою стягивается об'ем v_d при безграничном уменьшении d до нуля. Определив „плотность" произвольной изменяемой среды, посмотрим, какими свойствами должна быть наделена „плотность" атмосферы. Заметим предварительно, что определенная нами плотность—математическая абстракция, стилизация представления о плотности „физической". Стилизация эта нам нужна для того, чтобы возможно было впоследствии вводить плотность в различные математические рассуждения, в частности в дифференциальные уравнения движения атмосферы.

Математическая плотность определена в каждой точке и в каждый момент времени. Следовательно, вообще говоря, она может считаться функцией от координат и времени. Чтоб узнать, с какой именно функцией нам придется иметь дело, обратимся к физической плотности и из наблюдений, произведенных в свободной атмосфере, выберем характерные для плотности свойства.

Тривиальным является то обстоятельство, что плотность атмосферы убывает с высотой. Одного взгляда на карты изостер (линии равного удельного об'ема) достаточно, чтобы убедиться в том, что плотность меняется также и с долготой и с широтой. Наконец в каждой геометрической точке у поверхности земли плотность меняется со временем (день, ночь, времена года, прохождение циклонов и т. д.). Таким образом невозможно считать, что ρ есть величина постоянная (несжимаемая жидкость), или что атмосфера есть просто неоднородная среда (ρ для данной частицы—не зависит от времени).

Атмосфера есть сжимаемая жидкость. Отметим, однако, одно характерное для атмосферы свойство плотности, которое нам представляется

менее тривиальным, чем выше перечисленные. Целый ряд идей современной синоптической метеорологии связан с представлением о так называемых фронтах. Под последними разумеются некие области более или менее резко определенные, лежащие на поверхности земли и отделяющие две массы воздуха, обладающие различными термическими и динамическими свойствами. Перемещаясь непрерывно на поверхности земли и следя за изменениями плотности атмосферы, мы обнаружим, что, вообще говоря, плотность эта меняется незначительно. Так, порядок величины самой плотности, близ поверхности земли есть 10^{-3} *т/м*³ (точнее об этом в других параграфах этой главы), ее же изменения на протяжении десяти километров обычно не превышают 10^{-6} *т/м*³. Однако, если в пределах упомянутых десяти километров оказалась расположенной область фронта,— изменения плотности могут значительным образом увеличиться и достигнуть 10^{-5} и даже 10^{-4} *т/м*³. Область фронта — узкая полоса. Синоптики опередили математиков и давно уже изображают фронт в виде некоей линии, полученной от пересечения с поверхностью земли воображаемой поверхности, пронизывающей атмосферу. Мы также будем области фронта стилизовать в виде линии, и тогда естественно считать, что плотность вдоль этих линий (и вообще вдоль тех поверхностей, следом коих на поверхности земли являются эти линии) претерпевает разрыв.

Мы примем, что в атмосфере встречаются поверхности, при приближении к которым с разных сторон, мы будем получать различные значения плотности.

Собирая сказанное, заключаем: под плотностью ρ следует разуметь некоторую функцию координат и времени, вообще говоря, непрерывную, но могущую претерпевать разрывы на некоторых поверхностях.

Мы будем считать также, что ρ имеет непрерывные, вообще говоря, производные по координатам и времени (разрывы этих производных могут существовать лишь на некоторых поверхностях).

§ 3. Переменные Лагранжа и Эйлера. Уравнение неразрывности. Мы описали атмосферу как непрерывную изменяемую среду и определили массу и плотность этой среды. Мы постараемся теперь построить дифференциальные уравнения, управляющие движением частиц этой среды. Посмотрим для этого сперва, как можно описать движение сплошной среды.

Отнесем нашу среду к некоторой системе неподвижных декартовых, прямоугольных, прямолинейных координат x, y, z. Рассмотрим бесконечно малую массу среды, заключенную в некоем об'еме $d\tau$; по определению плотности ρ эта масса будет равна $\rho d\tau$. Назовем этот элемент массы жидкой точкой в отличие от точки геометрической. Если среда находится в движении—координаты нашей жидкой точки (координаты центра $d\tau$) будут изменяться со временем. При описании движения сплошной среды обычно предполагается, что существуют три функции:

$$x = x\ (a,\ b,\ c,\ t),\quad y = y\ (a,\ b,\ c,\ t),\quad z = z\ (a,\ b,\ c,\ t) \tag{2}$$

представляющие эти координаты в зависимости от семейства трех параметров $(a,\ b,\ c)$ и от времени (t). При этом параметры имеют одно и то же значение для каждой индивидуальной жидкой точки и проще всего за семейство этих параметров принять, например, координаты жидких точек в некоторый „начальный" момент времени t_0:

$$a = x\ (a,\ b,\ c,\ t_0),\quad b = y\ (a,\ b,\ c,\ t_0),\quad c = z\ (a,\ b,\ c,\ t_0).$$

Если бы каким-нибудь путем мы узнали бы теперь вид функций (2), мы смогли бы тотчас же найти траектории движения любой жидкой точки. В самом деле рассмотрим, например, точку, координаты коей в момент t_0 суть

$$a = \alpha,\quad b = \beta,\quad c = \gamma.$$

Для такой точки $x = x(\alpha, \beta, \gamma, t)$ $y = y(\alpha, \beta, \gamma, t)$, $z = z(\alpha, \beta, \gamma, t)$, и эти формулы дают координаты нашей точки в любой момент времени (t), или, если угодно, уравнение траектории ее в функциях от параметра t.

Про функции (2) будем говорить, что они дают закон движения нашей среды. Их естественно считать непрерывными функциями времени и a, b, c. Последнее означает, что если изменить на малую величину a, b, c, не меняя времени t, то соответствующие значения x, y, z изменятся мало, т. е. что жидкие точки, лежащие в „начале" движения рядом, всегда будут оставаться „рядом". Свойство это характеризует сплошность или непрерывность среды. Применимо ли оно, однако, с точки зрения описания атмосферы? Будут ли две соседние частицы воздуха всегда оставаться „рядом"? Мы примем здесь, что это свойство имеет место, по крайней мере, когда речь идет о движениях больших масштабов. Мы вернемся к этому вопросу в главе о турбулентности. Однако, здесь же отметим, что даже при изучении движения больших масс атмосферы наблюдения, аналогичные тем, о которых говорилось в предыдущем параграфе, приводят к представлению о некоторых поверхностях, отделяющих друг от друга две воздушные массы, из которых каждая движется по своему закону. Две жидкие точки, расположенные вблизи такой поверхности, но по разные стороны от нее (т. е. в разных массах), могут поэтому, находясь в некоторый момент рядом, затем разойтись.

Мы примем таким образом, что три функции (2), представляющие закон движения, суть, вообще говоря, непрерывные функции своих параметров и могут претерпевать разрывы лишь вдоль некоторых поверхностей. Поверхности эти известны в метеорологии под именем поверхностей разрыва Гельмгольца (Helmholtz) или поверхностей разрыва нулевого порядка.

С точки зрения классической механики мы должны еще считать, что функции (2) суть однозначные функции времени t и параметров a, b, c (жидкая точка не может одновременно находиться в двух различных местах). Наконец предположим, что ур-ия (2) можно разрешить относительно a, b, c и что три полученные функции

$$a = a(x, y, z, t), \quad b = b(x, y, z, t), \quad c = c(x, y, z, t) \tag{3}$$

однозначно зависят от x, y, z (непроницаемость среды—в каждой геометрической точке может помещаться лишь одна наделенная своими параметрами a, b, c жидкая частица).

Переходя к первым производным от функций x, y, z предположим сперва, что существуют 9 выражений

$$\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial x}{\partial c}, \frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial b}, \frac{\partial y}{\partial c}, \frac{\partial z}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial b}, \frac{\partial z}{\partial c},$$

и что они суть, вообще говоря, непрерывные функции от a, b, c. Такое представление не будет отвечать действительности в некоторых случаях атмосферных движений, о коих будет сказано в главе о, так называемой, турбулентности. Еще более важными являются три производные от x, y, z по времени t

$$\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Они очевидно представляют три компонента по осям координат скорости движения каждой жидкой частицы (это функции от a, b, c) в каждый момент времени (t) и, таким образом, являются математическим описанием понятия ветра. Эти компоненты будут функциями от a, b, c, t. Назовем

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u(a, b, c, t), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = v(a, b, c, t), \quad \frac{\partial z}{\partial t} = w(a, b, c, t). \tag{4}$$

Три функции u, v, w явным образом зависят лишь от a, b, c, t, поэтому, чтобы в данной геометрической точке определить скорость в данный

момент, следует поступать так: 1) найти которая жидкая точка (точка с какими значениями параметров a, b, c) пройдет через данную геометрическую точку (x, y, z) в этот момент t; 2) вставить найденные значения a, b, c вместе с заданным t в (4). Это означает, что надо вставить в (4) a, b, c, выраженные по формулам (3) через (x, y, z). Предполагая, что это выполнено, получим u, v, w в функциях от x, y, z, t непосредственно (мы сохраним прежние обозначения: u, v, w). Относительно вида функций u, v, w здесь мы не будем делать каких-либо весьма общих предположений, а аналогично тому, что мы предположили относительно ρ и x, y, z, будем считать их вообще непрерывными и если и терпящими разрыв, то лишь на неких поверхностях. Мы будем также считать, что у них существуют первые производные, обладающие теми же свойствами, что и самые функции.

Мы перейдем теперь к установлению одного из основных законов движения сплошных сред, в частности атмосферы—так называемого уравнения неразрывности.

Рассмотрим некий об'ем, конечный или бесконечно малый, составленный из жидких точек. Отделим его воображаемой поверхностью от всей остальной среды и проследим за его движением втечение некоторого промежутка времени. Из свойств функций (2) следует, что об'ем наш хотя и будет деформироваться и принимать может быть весьма прихотливые формы, все же остается об'емом. Мы прибавим сюда еще одно свойство, совершенно необходимое с точки зрения классической физики: будем считать, что масса, заключенная в этом об'еме, сохраняется втечение всего движения. Мы получим отсюда уравнение непрерывности.

Для этого рассмотрим произвольный об'ем T_0 нашей среды в момент времени t_0 (начальный). Обозначив плотность в этот момент через $\rho_0(a, b, c)$ (a, b, c—начальные координаты), найдем массу всего об'ема T_0 в виде

$$\int_{T_0} \rho_0 d\tau_0$$

где $d\tau_0$ элемент об'ема T_0.

Пусть к моменту времени t этот же об'ем, перейдя в другую часть пространства, превратится в T, имея плотность ρ. Мы должны написать (масса сохраняется)

$$\int_T \rho d\tau = \int_{T_0} \rho_0 d\tau_0. \tag{5}$$

С другой стороны координаты жидких частиц в момент t_0 суть (a, b, c), а в момент t—(x, y, z). Поэтому

$$d\tau_0 = dadbdc, \quad d\tau = dxdydz$$

а предполагая, что наша среда движется по закону (2), получим по известной формуле дифференциального исчисления, вводя обозначение

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix},$$

следующее соотношение:

$$\int_{T_0} \rho D d\tau_0 = \int_{T_0} \rho_0 d\tau_0,$$

или

$$\int_{T_0} (\rho D - \rho_0) d\tau_0 = 0.$$

Вспомним теперь, что об'ем T_0 совершенно произволен. Это приводит нас к необходимости считать, что уравнение

$$\rho D - \rho_0 = 0 \tag{6}$$

необходимо должно выполняться во всех точках среды и в любой момент времени. Действительно, допустим противное, т. е. что найдется такая точка пространства (a, b, c) что в ней например $\rho D - \rho_0 > 0$. Если $\rho D - \rho_0$ непрерывная функция от координат, то около точки (a, b, c) мы сумеем найти малый об'ем, в коем $\rho D - \rho_0$ будет еще положительно. Но тогда, выбрав за T_0 этот самый об'ем, мы получим, что

$$\int_{T_0} (\rho D - \rho_0) d\tau_0 > 0$$

будет сам положителен (как сумма положительных слагаемых), а это противоречит тому, что интеграл этот равен, при любом T_0, нулю.

Уравнение (6) есть уравнение непрерывности в форме Лагранжа. Отметим здесь, что по самому ходу доказательства $\rho = \rho(x, y, z, t) = \rho[x(a, b, c, t), \ldots, t]$, а $\rho_0 = \rho[x(a, b, c, t_0), \ldots, t_0] = \rho(a, b, c, t_0)$ (ибо $x(a, b, c, t_0) = a, \ldots$). Уравнение (6) компактное по своей форме, удобно, если известен закон движения. Часто бывает однако так, что известно или отыскивается лишь распределение скоростей (ветра напр.). Мы постараемся придать (6) другую форму, так чтоб туда явно входили лишь проекции скорости и плотность. Предварительно сделаем следующее замечание.

Мы уже видели на примере скорости, что величину, связанную с движением среды, можно задавать двумя способами: как функцию от a, b, c, t (переменных Лагранжа) или как функцию от x, y, z, t (переменных Эйлера), причем переход от одного способа к другому осуществляется при помощи формул (3) или (2).

Допустим, что мы некую величину f (например плотность или скорость) выразили как функцию от $x, y, z, t: f(x, y, z, t)$. В этом случае, беря частную производную от f по времени $\frac{\partial f}{\partial t}$ мы следим за изменением нашей функции в данной геометрической точке. Вспомнив однако, что такие величины как плотность, скорость связаны естественно с жидкими частицами, и желая проследить за изменением, которое претерпевают эти величины относимые к движущейся жидкой точке, мы должны очевидно вставить в f вместо x, y, z, t функции (2).

$$f[x(a, b, c, t), y(a, b, c, t), z(a, b, c, t), t] = f_1(a, b, c, t),$$

а дифференцируя теперь f по времени, получим

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Чтобы отличить эту производную от той, которая получается при рассмотрении изменения величины в данной геометрической точке, условимся обозначать

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dt}.$$

Замечая еще что $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ суть u, v, w для коих готовы выражения в функциях от x, y, z, t можем окончательно написать

$$\frac{df(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Величина f может быть скаляром (напр. плотностью, или компонентом скорости, или температурой) но может также быть и вектором (напр., скоростью). Выражение наше может быть записано короче в векторной

форме: $\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla f$ [1]) (постановка точки между двумя векторами есть знак скалярного произведения), причем в случае если f есть вектор, выражение $\mathbf{V}\cdot\nabla f$ является тоже вектором (это так называемое градиентное произведение).

Производные вида $\frac{df}{dt}$ носят название „индивидуальных" производных от f по времени. В метеорологии они играют исключительную роль.

Вернемся однако к нашему уравнению неразрывности (6) и попытаемся придать ему иную форму. Возьмем для этого индивидуальную производную от его правой и левой части по времени. ρ_0 от времени не зависит, следовательно $\frac{d\rho_0}{dt}=0$ и мы получим

$$\frac{d\rho}{dt}D+\rho\frac{dD}{dt}=0.$$

Но

$$D=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c}\\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c}\\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c}\end{vmatrix},$$

следовательно

$$\frac{dD}{dt}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial a} & \frac{\partial u}{\partial b} & \frac{\partial u}{\partial c}\\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c}\\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c}\\ \frac{\partial v}{\partial a} & \frac{\partial v}{\partial b} & \frac{\partial v}{\partial c}\\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c}\\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c}\\ \frac{\partial w}{\partial a} & \frac{\partial w}{\partial b} & \frac{\partial w}{\partial c}\end{vmatrix}$$

$\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right.$ есть функция от a, b, c, t, поэтому $\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial a}=\frac{\partial^2 x}{\partial a\partial t}=\frac{\partial u}{\partial a}$, и т. д.$\left.\right)$. Мы применим нашу формулу к моменту t_0 когда $x=a$, $y=b$, $z=c$, $\rho=\rho_0$. При этом

$$\frac{\partial x}{\partial a}=1=\frac{\partial y}{\partial b}=\frac{\partial z}{\partial c},\quad \frac{\partial x}{\partial b}=\frac{\partial x}{\partial c}=\frac{\partial y}{\partial a}=\frac{\partial y}{\partial c}=\frac{\partial z}{\partial a}=\frac{\partial z}{\partial b}=0$$

$$D=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1,\ \frac{dD}{dt}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial a}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0&0\\0&\frac{\partial v}{\partial b}&0\\0&0&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{\partial w}{\partial c}\end{vmatrix}=\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial c}.$$

Мы приходим поэтому к уравнению

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{t=t_0}+\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial c}\right)_{t=t_0}=0.$$

Но за момент t_0 может быть взят произвольный момент времени; обозначив его через t, получим

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0. \tag{7}$$

Такова другая форма уравнения непрерывности (форма Эйлера) в которую входят лишь проекции скоростей и плотность. Раскрывая $\frac{d\rho}{dt}$ и, собирая члены, можем написать (7) еще иначе:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}+\frac{\partial\rho w}{\partial z}=0. \tag{8}$$

---

[1]) См. напр. Н. Кочин. Векторное исчисление.

Прежде чем перейти к рассмотрению сил, действующих в атмосфере, остановимся еще на представлении об ускорении жидких частиц. Частицы, двигаясь по закону (2), обладают скоростями $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$ — функциями от a, b, c, t. Ускорение этих частиц поэтому будет иметь компоненты:

$$j_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2},\ j_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},\ j_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$

Если однако считать что $\frac{\partial x}{\partial t} = u = u(x, y, z, t)$, $\frac{\partial y}{\partial t} = v$, $\frac{\partial z}{\partial t} = w$ т. е. ввести x, y, z, а не a, b, c, то для составления компонентов ускорения придется написать

$$j_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{du}{dt},\quad j_y = \frac{dv}{dt},\quad j_z = \frac{dw}{dt}.$$

Т. е. ускорения жидких частиц суть индивидуальные производные скоростей их по времени. Грубой ошибкой было бы ограничиваться, вообще говоря, при изучении атмосферных движений лишь первым членом этих формул и считать за компоненты ускорения $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$. К этому вопросу мы вернемся еще в § 9, а сейчас перейдем к рассмотрению сил, действующих в атмосфере.

§ 4. Силы. Силы, действующие в атмосфере, можно разбить на две группы: силы об'емные, — такие, как сила тяжести, и силы поверхностные — такие, как давление, вязкие силы и т. п.

В этом параграфе мы рассмотрим лишь об'емные, или как их еще называют массовые (действующие на элемент массы) силы. Их принято описывать, вводя так называемые единичные силы (силы, действующие на единицу массы). Так, обозначая компоненты единичной силы через X, Y, Z, получим компоненты соответствуюшей силы действующей на массу, заключенную в об'еме $d\tau$ в виде

$$\rho X d\tau,\ \rho Y d\tau,\ \rho Z d\tau,$$

где ρ плотность среды.

Важнейшими массовыми силами, действующими в атмосфере, являются сила тяжести и разного рода инерционные силы.

Чтоб лучше уяснить себе, как появляются инерционные силы, отметим прежде всего что нам не было бы нужды вовсе их вводить, если бы мы всегда относили движение атмосферы к системе осей, абсолютно неподвижных в пространстве. Тот факт, однако, что земная атмосфера увлекается вращающейся землей, в соединении с тем, что и мы сами производим наблюдения с поверхности вращающейся земли, приводит к тому, что в громадном большинстве случаев, при описании атмосферных движений, бывает удобно пользоваться системой координатных осей, неизменно связанных с вращающейся землей. Напомним теперь две основных теоремы из механики точки. Представим себе две системы координат: неподвижную в пространстве (абсолютную) и движущуюся по отношению к ней заданным образом (относительную). Пусть затем некоторая точка M движется в пространстве и назовем скорость ее по отношению к абсолютной системе через $\mathbf{V}_{абс.}$, а скорость ее по отношению к системе относительной $\mathbf{V}_{отн.}$ Тогда, в силу известной теоремы механики

$$\mathbf{V}_{абс.} = \mathbf{V}_{отн.} + \mathbf{V}_{влеч.}$$

где $\mathbf{V}_{влеч.}$, — так называемая скорость влечения, [1]) т. е. скорость точки, находящейся в данный момент в M и принадлежащей фиктивному твердому телу, неизменно связанному с нашей относительной системой коор-

[1]) Часто употребляется еще термин „скорость переносная".

динат. Заметим еще, что $\mathbf{V}_{влеч.}$ может быть выражено по известной теореме Эйлера так:

$$\mathbf{V}_{влеч.} = \mathbf{V}_0 + [\Omega, \mathbf{r}] \quad (\mathbf{r} \text{ радиус-вектор } M \text{ в относительной системе})$$

где $\mathbf{V}_0$ есть скорость начала координат нашей относительной системы, а Ω мгновенная угловая скорость вращения твердого тела, вросшего в эту систему. Из этой теоремы выводят обычно соотношение, связывающее ускорения в движении абсолютном с ускорениями по отношению к системе относительной:

$$\mathbf{I}_{абс.} = \mathbf{I}_{отн.} + \mathbf{I}_{влеч.} + 2[\Omega, \mathbf{V}_{отн.}] \tag{9}$$

где $\mathbf{I}_{абс.}$ — ускорение точки по отношению к абсолютной системе осей, $\mathbf{I}_{отн.}$ — ускорение по осям относительным, $\mathbf{I}_{влеч.}$ — ускорение по абсолютным осям точки, находящейся в данный момент в M, но неизменно связанной с воображаемым твердым телом, вросшем в относительную систему; наконец Ω попрежнему мгновенная угловая скорость вращения этого последнего тела. Член $2[\Omega, \mathbf{V}_{отн.}]$ носит название ускорения Кориолиса. Эта теорема и приведет нас к необходимости, при описании движения атмосферы по отношению к системе координат относительных (например, вращающихся с землей) рассматривать фиктивные инерционные силы. В самом деле, несколько позднее (см. § 5) мы увидим, что силы и ускорения в движении воздушных частиц (точек) по отношению к системе абсолютно неподвижных осей связаны так называемыми уравнениями движения. Силы $\mathbf{F}$ и ускорения входят в эти последние уравнения совершенно так же, как они входят в уравнения движения точки, именно уравнения эти выглядят (см. стр. 41):

$$\mathbf{F} = \mathbf{I}_{абс.} + \text{другие члены.}$$

Вставим, однако, в эти уравнения выражение $\mathbf{I}_{абс.}$ из (9). Получим

$$\mathbf{F} = \mathbf{I}_{отн.} + \mathbf{I}_{влеч.} + 2[\Omega, \mathbf{V}_{отн.}] + \text{другие члены}$$

или

$$\mathbf{F} - \mathbf{I}_{влеч.} - 2[\Omega, \mathbf{V}_{отн.}] = \mathbf{I}_{отн.} + \text{другие члены.}$$

Ясно поэтому, что если мы пожелаем отвлечься от абсолютной системы и будем изучать движение по отношению к системе относительной, с его скоростями $\mathbf{V}_{отн.}$ и ускорениями $\mathbf{I}_{отн.}$ то все будет происходить так, как если бы вместо прежних внешних сил $\mathbf{F}$ участвовали силы

$$\mathbf{F} - \mathbf{I}_{влеч.} - 2[\Omega, \mathbf{V}_{отн.}]$$

т. е. прибавлялись фиктивные силы

$$-\mathbf{I}_{влеч.} - 2[\Omega, \mathbf{V}_{отн.}] \tag{10}$$

Последние и носят название инерционных сил.

Возвращаясь к нашему вопросу о силах, действующих в атмосфере, рассмотрим сперва подробно случай покоящегося по отношению к поверхности земли воздуха. Рассмотрим систему координат, неизменно связанную с вращающейся землей. По отношению к этой системе (относительной) мы будем иметь в изучаемом случае

$$\mathbf{V}_{отн.} = 0.$$

Таким образом из инерционных сил (10) останется только

$$-\mathbf{I}_{влеч.}$$

Нетрудно рассчитать ее величину. Действительно, движение нашей отно-

сительной системы есть вращение вокруг оси, совпадающей с осью земли, с постоянной угловой скоростью ω:

$$\omega = \frac{2\pi}{86164{,}09}\frac{1}{\text{сек.}} = 7{,}292116 \cdot 10^{-5}\frac{1}{\text{сек.}}$$ [1])

Поэтому скорость влечения $\mathbf{V}_{\text{влеч.}}$ будет для точки M равна просто

$$|\mathbf{V}_{\text{вл.}}| = r\omega \quad (r \text{ расстояние } M \text{ от оси земли})$$

и направлена по касательной к кругу широт, проведенному через точку M, а ускорение влечения равно по величине

$$|\mathbf{I}_{\text{вл.}}| = r\omega^2$$

и направлено вдоль проходящего через точку M радиуса этого круга к оси земли. Итак, единственной инерционной силой, действующей на „покоящуюся" атмосферу будет сила $-\mathbf{I}_{\text{влеч.}}$, равная по величине

$$r\omega^2$$

и направленная по радиусу круга широт, проходящему через рассматриваемую точку покоящейся атмосферы, и притом в направлении от оси земли.

Величина этой силы колеблется между нулем (места близкие к полюсам) и $3{,}385 \cdot 10^{-2}$ м/сек^2 на „границах" атмосферы (20—30 *км* над поверхностью земли) в экваториальной плоскости.

Отметим еще раз, что мы говорим все время об единичных (действующих на единицу массы) силах. Инерционная сила (о которой только что шла речь), действующая на элементарный об'ем $d\tau$, будет

$$-\rho\mathbf{I}_{\text{вл.}}d\tau$$

где ρ плотность в этом об'еме.

Инерционную силу, действующую на каждую точку покоящейся атмосферы, назовем центробежной силой вращения земли.

Кроме инерционной центробежной силы j на каждую точку покоящейся атмосферы действует со стороны земли Ньютонова сила притяжения. Силу эту обычно не отделяют от описанной только что силы j, так что, коль скоро речь идет о силах, действующих на точку, связанную неизменно с поверхностью вращающейся земли, принимается всегда в расчет равнодействующая из двух сил — собственной силы притяжения земли и центробежной силы j. Ускорение этой равнодействующей и называется обычно „ускорением силы тяжести". Так как ускорение силы тяжести имеет порядок $10^1 м^1$ сек$^{-2}$, а ускорение j лишь $10^{-2} м^1$ сек$^{-2}$, то роль этого последнего слагаемого появляющегося благодаря тому, что как земля так и увлекаемый ею воздух вращается, незначительна. Ускорение силы тяжести направлено в каждой точке по нормали к поверхности уровня (тяготения и центробежной силы вместе), проходящей через эту точку. Сама поверхность земли есть одна из таких поверхностей уровня (если бы это было не так, то частица, положенная на поверхность земли, начала бы, под действием тангенциальной составляющей ускорения, по этой поверхности перемещаться). В грубом приближении поверхности уровня можно считать сферами (см. § 1), точнее — это эллипсоиды вращения. Поверхность уровня, проходящая через точку, лежащую на поверхности земного океана, носит особое название: „геоид". Желая еще больше уточнить представление о форме земли, мы должны обратиться к так называемому сфероиду.

---

[1]) Земля обращается вокруг оси за 86400 сек. звездного времени, что составляет 86164,09 сек. среднего времени.

Чтоб получить представление о построении последнего мы должны написать сперва, исходя из выражений для компонентов ускорения силы тяжести, в точке $P(x, y, z)$

$$g_x = k^2 \int \frac{x' - x}{a^3}\, dm + x\omega^2,$$

$$g_y = k^2 \int \frac{y' - y}{a^3}\, dm + y\omega^2,$$

$$g_z = k^2 \int \frac{z' - z}{a^3}\, dm$$

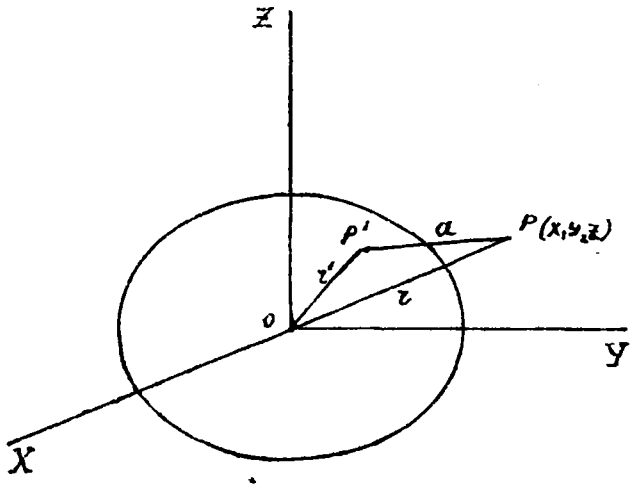

Рис. 1

(k^2 — постоянная гравитации, x', y', z' координаты точек земли, dm элемент массы земли,

$$a^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

начало помещено в центре земли, а ось z — по оси вращения земли), выражение для потенциала силы тяжести: —

$$W = k^2 \int \frac{dm}{a} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Следуя знаменитым работам Clairaut разложим затем $\frac{1}{a}$ по степеням $\frac{1}{r}$ ($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ см. рис. 1). Получим

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n,$$

где $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, а P_n — шаровые функции [1]). Если ограничиться теперь тремя функциями P_0, P_1, P_2 в разложении $\frac{1}{a}$, мы придем к некоему приближенному представлению для W: $W = U$. Поверхность $U = \text{const}$ и называется обычно земным сфероидом [2]). Нужно отметить, что „сфероид" этот очень мало отличен от эллипсоида вращения.

Ускорение силы тяжести есть, очевидно, функция от широты места (это имело бы место не только для сфероида, но уже и для эллипсоида) и от расстояния от поверхности земли (последнее было бы справедливо даже для шара). Эмпирическая формула Гельмерта (ук. лит., 3) достаточно точно представляет изменение ускорения силы тяжести g_0 на уровне моря в функции от географической широты места φ [3])

$$g_0 = 9{,}80616\ (1 - 0{,}002644 \cos 2\varphi + 0{,}00007 \cos^2 2\varphi)\ м^1\ сек.^{-2} \qquad (11)$$

---

[1]) $P_0 = 1$, $P_1 = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'}$, $P_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\frac{(xx' + yy' + zz')^2}{r^2 r'^2}$.

[2]) Выражение для U имеет вид

$$U = \frac{k^2 M}{r} + \frac{k^2}{2r^3}(C - A)(1 - \sin^2\psi) + \frac{\omega^2 r^2}{2}\cos^2\psi$$

где M — масса земли, A и C — постоянные (моменты инерции земли), а ψ — геоцентрическая широта места (т. е. „широта" в сферической системе координат с началом в центре земли, отмеренная от экваториальной плоскости). При этом предполагается, что земля есть, приближенно, тело вращения.

[3]) Мы пользуемся здесь уже не геоцентрической ψ, а географической широтой φ места. Последняя измеряется углом, образуемым с осью вращения земли, плоскостью, касающейся в той точке, где измеряется широта, поверхности земли („горизонтальной плоскостью" данного места) геоцентрическая же широта ψ есть просто сферическая координата точки и оказывается всегда меньше, нежели φ.

Таким образом g_0 меняется от 9,80616 $м^1$ сек$^{-2}$ на экваторе, до 9,83216 $м^1$ сек$^{-2}$ на полюсе. Далее чтоб представить изменение g с высотой, в пределах земной атмосферы, Гельмерт предлагает следующий линейный закон:

$$g = g_0 - 0{,}00000308\ z \tag{12}$$

где z выраженная в метрах высота над поверхностью земли, а g_0—ускорение силы тяжести на поверхности земли. Комбинируя обе эти формулы, мы могли бы без труда построить, обратно, поверхности уровня. К некоторым вопросам, связанным с построением поверхностей уровня гравитационной и центробежной силы, мы еще вернемся позже, в главе о статике.

Построив сперва общую формулу (10), мы предполагали затем, что $V_{отн.} = 0$, т. е. что земная атмосфера неизменно связана с вращающейся землей. Допустим теперь наличие движения частиц воздуха по отношению к поверхности земли. Все движения будем относить к системе осей, неизменно связанных с землей (например, поместим начало в некоторой точке поверхности земли, ось Z направим вертикально вверх, оси X и Y в горизонтальной плоскости). Предполагая, что единственным движением самой земли является попрежнему вращение вокруг ее оси с постоянной угловой скоростью Ω, мы увидим, что на движущуюся частицу воздуха действует теперь новая инерционная сила, так называемая сила Кориолиса, равная удвоенному векторному произведению вектора скорости движения частицы на вектор угловой скорости вращения земли $2[\mathbf{V}, \Omega]$. По осям координат сила эта (отнесенная к единице массы) имеет компоненты $2\omega_z v - 2\omega_y w$, $2\omega_x w - 2\omega_z u$, $2\omega_y u - 2\omega_x v$ где ω_x, ω_y, ω_z—проекции угловой скорости вращения земли на оси координат, а u, v, w, как обычно, проекции на те же оси скорости движения жидкой частицы. Если известен по величине и направлению вектор скорости жидкой частицы, без труда можно построить Кориолисову силу. Для этого следует построить в данной точке вектор скорости и тут же отложить вектор, равный и параллельный угловой скорости вращения земли. Тогда удвоенная площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, и дает величину Кориолисовой силы, направление же ее совпадает с направлением перпендикуляра к площади упомянутого параллелограмма, причем для наблюдателя, стоящего вдоль Кориолисовой силы ногами на площади параллелограмма вектор скорости, путем вращения по часовой стрелке (в случае леворучной системы) на угол меньший чем π может быть совмещен с вектором угловой скорости. Так, например, для точки, движущейся в северном полушарии вдоль меридиана с севера на юг, Кориолисова сила будет направлена по кругу широт и притом с востока на запад.

Кориолисова сила играет исключительную роль в атмосферных явлениях. Ее значение особенно сказывается, когда речь идет о движениях больших масштабов (об этом подробнее см. § 8 этой главы). На протяжении всей книги с ней будет связано большое множество как качественных, так и количественных построений.

Мы предполагали, что единственным движением земли является ее вращение около оси. Однако, земля движется еще вокруг солнца и увлекается движением солнца; инерционные силы будут поэтому иметь более сложный вид, однако прибавочные члены будут настолько ничтожны по величине, что их без ущерба для вычислений можно отбросить.

§ 5. Уравнения движения. Давление. В этом параграфе мы установим дифференциальные уравнения, управляющие движениями атмосферы. Для этого придется прежде всего облечь в математическую форму представление о внутренних силах, действующих на какую либо площадку, вырезанную в атмосфере. Вообразим некую точку атмосферы A (x, y, z), имеющую координаты x, y, z по отношению к системе прямоугольных прямолинейных декартовых осей координат. Через точку A проведем

какую угодно полупрямую l и пусть $d\sigma_l$ есть элементарная площадка, перпендикулярная к l с центром в точке A. Чтоб описать действие внутренних сил в сплошной среде, предполагают обычно, что если внутри сплошной среды выделить мысленно об'ем, ограниченный поверхностью S, в состав которой входит указанная выше площадка, проходящая через точку A, причем полупрямая l направлена внутрь об'ема, то на такую площадку действует сила, направленная не обязательно вдоль l, а составляющая с l угол, вообще говоря, отличный от 0° или 180°. Вектор этой силы, отнесенный к единице площади, обозначим через $\mathbf{P}_l$; он будет, вообще говоря, функцией не только от координат точки A и времени, но и от направления выбранной нами полупрямой l, что мы и отметим, снабдив его значком l. Компоненты этого вектора по осям координат будем называть X_l Y_l Z_l; величина силы, действующей на площадку $d\sigma_l$ будет таким образом

$$\sqrt{X^2_l + Y^2_l + Z^2_l}\, d\sigma_l.$$

Так, например, под буквами X_x, Y_x, Z_x будем разуметь компоненты нашей единичной силы, действующей на площадку, перпендикулярную оси X, т. е. на площадку $dydz$, через X_y, Y_y, Z_y — компоненты силы $\mathbf{P}_y$ действующей на элемент $dxdz$, через X_z, Y_z, Z_z — компоненты силы $\mathbf{P}_z$ действующей на элемент $dxdy$. Сила $\mathbf{P}_l$ носит название напряжения. Отметим еще раз, что можно говорить лишь о напряжениях, действующих на площадку; около каждой точки A может быть построено столько „напряжений", сколько проведено через эту точку направлений l; при этом из данного нами определения $\mathbf{P}_l$ пока еще не следует, что два напряжения, отвечающие одно направлению l, а другое прямо противоположному направлению — l, как-нибудь между собой связаны.

Обозначая вектор единичной силы, действующей на об'ем, через $\mathbf{F}$ а вектор скорости движения воздуха через $\mathbf{V}$, рассмотрим какой-нибудь конечный об'ем атмосферы T, ограниченный поверхностью S, и постараемся записать для него закон сохранения количества движения и закон моментов. Количество движения всего нашего об'ема в момент t будет очевидно вектором $\int\limits_T \mathbf{V}\rho d\tau$, где ρ — плотность, $d\tau$ — элемент об'ема, интеграл распространен на об'ем T, а функции ρ и $\mathbf{V}$ зависят от координат и от времени и берутся в выбранный момент t. Количество движения в момент $t+t'$ представляется в виде $\int\limits_{T'} \mathbf{V}'\rho' d\tau'$, где $\mathbf{V}'$, ρ' и T' представляют вектор скорости, плотность и рассматриваемый об'ем к моменту $t+t'$. Приращение количества движения, получающееся за промежуток времени от t до $t+t'$, представится поэтому в виде.

$$\int\limits_{T'} \mathbf{V}'\rho' d\tau' - \int\limits_T \mathbf{V}\rho d\tau.$$

В этих об'емных интегралах совершим замену переменных, переходя от об'емов T и T' к нашему начальному об'ему T_0. Так как, в силу сохранения массы

$$\rho' d\tau' = \rho d\tau = \rho_0 d\tau_0.$$

(здесь ρ_0 и $d\tau_0$ плотность и элемент об'ема в „начальный момент") получим приращение количества движения в виде

$$\int\limits_{T_0} (\mathbf{V}' - \mathbf{V})\, \rho_0 d\tau_0$$

где для $\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}'$ мы сохраним прежние обозначения. Импульс всех действующих на T сил будет очевидно, за то же время

$$\int_t^{t+t'} \left(\int_T \mathbf{F}\rho d\tau + \int_S \mathbf{P}_n d\sigma \right) dt.$$

где $d\sigma$ элемент поверхности S, ограничивающей T, а $\mathbf{P}_n$ — напряжение, действующее на этот элемент (n — направление внутренней нормали к поверхности $d\sigma$). Теорема о приращении количества движения напишется теперь в виде:

$$\int_{T_0} (\mathbf{V}' - \mathbf{V})\, \rho_0 d\tau_0 = \int_t^{t+t'} \left(\int_T \mathbf{F}\rho d\tau + \int_S \mathbf{P}_n d\sigma \right) dt.$$

Аналогично этому можем написать закон сохранения моментов в виде:

$$\int_{T_0} \left([\mathbf{V}', \mathbf{r}'] - [\mathbf{V}, \mathbf{r}] \right) \rho_0 d\tau_0 = \int_t^{t+t'} \left\{ \int_T [\mathbf{F}, \mathbf{r}]\, \rho d\tau + \int_S [\mathbf{P}_n, \mathbf{r}]\, d\sigma \right\} dt$$

где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ векторы, компоненты коих суть координаты точек об'ема T и T' соответственно. Деля оба наших равенства на t' и переходя к пределу, полагая, что t' стремится к нулю, (мы перейдем затем от T_0 вновь к T, помня что $\rho_0 d\tau_0 = \rho d\tau$, и соберем об'емные интегралы, причем заметим, что

$$\frac{d[\mathbf{V}, \mathbf{r}]}{dt} = \left[\frac{d\mathbf{V}}{dt}, \mathbf{r}\right] + \left[\mathbf{V}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right] = \left[\frac{d\mathbf{V}}{dt}, \mathbf{r}\right], \quad \text{ибо } \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V})$$

получим очевидно следующие равенства

$$\int_T \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} - \mathbf{F} \right) \rho d\tau = \int_S \mathbf{P}_n d\sigma, \quad \int_T \left(\left[\frac{d\mathbf{V}}{dt}, \mathbf{r}\right] - [\mathbf{F}, \mathbf{r}] \right) \rho d\tau = \int_S [\mathbf{P}_n, \mathbf{r}] d\sigma.$$

Итак, для каждого об'ема T, мысленно выделенного из атмосферы, должны выполняться написанные соотношения. Возникает вопрос, нельзя ли построить вместо этого бесчисленного множества уравнений такую единственную систему уравнений, которая была бы всей этой системе эквивалентна. Чтоб на этот вопрос ответить, докажем сперва две теоремы.

Покажем во-первых, что в силу наших уравнений напряжения для двух взаимно противоположных направлений l и $-l$ будут равны по величине и противоположны по направлению, т. е. что $\mathbf{P}_l = -\mathbf{P}_{-l}$. Для этого выберем в качестве об'ема T (каковой может быть взят в атмосфере произвольно) некий шар T_* с центром в точке A, и проведем через A произвольный луч l и диаметральную плоскость E_*, перпендикулярную этому лучу. Два полушара, лежащие по положительному и отрицательному направлению l, обозначим через T'_* и T''_* соответственно, а их поверхности — через S'_* и S''_*. Тогда очевидно должны иметь

$$\int_{T_*} \left(-\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{F} \right) \rho d\tau + \int_{S_*} \mathbf{P}_n d\sigma = \int_{T'_*} \left(-\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \mathbf{F} \right) \rho d\tau + \int_{T''_*} + \int_{S'_*} + \int_{S''_*} = 0,$$

где S_* поверхность всего шара, а n нормаль к $d\sigma$. С другой стороны, беря за T об'емы T'_* и T''_* отдельно, получим два соотношения:

$$\int_{T'_*} \left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) \rho d\tau + \int_{S'_*} \mathbf{P}_n d\sigma + \int_{E_*} \mathbf{P}_l d\sigma = 0$$

$$\int_{T''_*} \left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) \rho d\tau + \int_{S''_*} \mathbf{P}_n d\sigma + \int_{E_*} \mathbf{P}_{-l} d\sigma = 0.$$

Складывая два последних соотношения, придем, принимая во внимание первое соотношение, к равенству

$$\int\limits_{E_*} (\mathbf{P}_l + \mathbf{P}_{-l})\, d\sigma = 0.$$

Так как этр соотношение справедливо в случае шара любого радиуса, т. е. для круга E_* любого диаметра, окружающего точку A, то будем иметь

$$\mathbf{P}_{+l} + \mathbf{P}_{-l} = 0$$

или

$$\mathbf{P}_{+l} = -\mathbf{P}_{-l}\ ^{1)}.$$

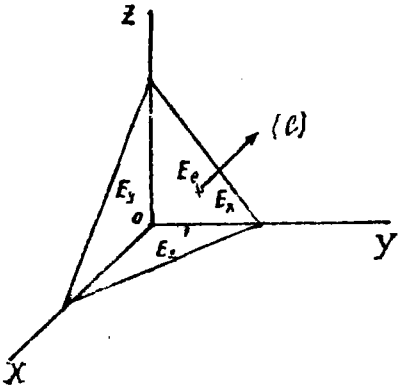

Рис. 2.

Во вторых покажем, как можно, зная напряжения, действующие на три каких-либо взаимно перпендикулярных площадки, проходящих через точку A (например, зная $\mathbf{P}_x$, $\mathbf{P}_y$, $\mathbf{P}_z$), найти напряжение $\mathbf{P}_l$ действующее на произвольную площадку (с нормалью l), проходящую через A. Для этого в качестве об'ема T возьмем некий тетраедр с ребрами, расположенными вдоль осей X, Y, Z, и с вершиной в начале координат. Грани этого тетраедра, лежащие в плоскостях координат назовем E_x, E_y, E_z, а четвертую грань — E_l (нормаль к ней будет l). Тогда должны иметь

$$\int\limits_{T_*} \rho\left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{V}}{dt}\right) d\tau + \int\limits_{E_x} \mathbf{P}_x dydz + \int\limits_{E_y} \mathbf{P}_y dxdz + \int\limits_{E_z} \mathbf{P}_z dxdy - \int\limits_{E_l} \mathbf{P}_l d\sigma = 0$$

где T_* об'ем всего тетраедра, а последний интеграл мы берем со знаком минус в силу равенства $\mathbf{P}_l = -\mathbf{P}_{-l}$, предположив сперва, что $\cos(l, x) > 0$ $\cos(l, y) > 0$, $\cos(l, z) > 0$. Обозначая площадь всей грани E_l через σ, замечаем, что $\sigma = 0\ (h^2)$ (т. е. σ есть величина порядка h^2), где h — расстояние от начала до плоскости E_l; можем очевидно написать

$$\int\limits_{T_*} \rho\left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{V}}{dt}\right) d\tau = 0\ (h^3), \qquad \int\limits_{E_x} \mathbf{P}_x dydz = \mathbf{P}_{0x}\sigma \cos(l, x) + 0\ (h^3)$$

$$\int\limits_{E_y} \mathbf{P}_y dxdz = \mathbf{P}_{0y}\sigma \cos(l, y) + 0\ (h^3), \qquad \int\limits_{E_z} \mathbf{P}_z dxdz = \mathbf{P}_{0z}\sigma \cos(l, z) + 0\ (h^3)$$

$$\int\limits_{E_l} \mathbf{P}_l d\sigma = \mathbf{P}_{0l}\sigma + 0\ (h^3),$$

---

[1]) Действительно, пусть, напротив, в точке A оказалось например, что $(\mathbf{P}_l + \mathbf{P}_{-l})_x > 0$; если $\mathbf{P}_l$ непрерывна, то можно найти такую небольшую область, окружающую A, в коей $(\mathbf{P}_l + \mathbf{P}_{-l})_x > 0$ будет еще положительно. Но тогда, построивши наш шар настолько малого радиуса, чтоб E_* не вышло за пределы упомянутой области, будем необходимо иметь $\int\limits_{E_*} (\mathbf{P}_l + \mathbf{P}_{-l})_x\, d\sigma > 0$, что противоречит доказанному.

где

$$\mathbf{P}_{0x},\ \mathbf{P}_{0y},\ \mathbf{P}_{0z},\ \mathbf{P}_{0l}$$

значения соответствующих векторов в начале координат. Вставляя эти выражения в написанное выше равенство и переходя к пределу, полагая $h \to 0$, мы придем к следующему соотношению:

$$\mathbf{P}_{0x} \cos(l, x) + \mathbf{P}_{0y} \cos(l, y) + \mathbf{P}_{0z} \cos(l, z) - \mathbf{P}_{0l} = 0$$

или, если отбросить значки (начало координат может быть помещено где угодно):

$$\mathbf{P}_l = \mathbf{P}_x \cos(l, x) + \mathbf{P}_y \cos(l, y) + \mathbf{P}_z \cos(l, z). \tag{13}$$

Это соотношение и позволяет, зная $\mathbf{P}_x$, $\mathbf{P}_y$, $\mathbf{P}_z$, найти $\mathbf{P}_l$ при любом l. Мы можем теперь ответить на вопрос о том, возможно ли бесконечное число систем наших уравнений заменить одной системой. Действительно, мы можем теперь преобразовать

$$\int_S \mathbf{P}_n d\sigma = \int_S [\mathbf{P}_x \cos(n, x) + \mathbf{P}_y \cos(n, y) + \mathbf{P}_z \cos(n, z)]\, d\sigma$$

при помощи формулы Грина (Green) к виду

$$\int_S \mathbf{P}_n d\sigma = -\int_T \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial z}\right) d\tau,$$

а вместо

$$\int_S [\mathbf{P}_n, \mathbf{r}]\, d\sigma$$

написать

$$\int_S \{[\mathbf{P}_x, \mathbf{r}] \cos(l, x) + [\mathbf{P}_y, \mathbf{r}] \cos(l, y) + [\mathbf{P}_z, \mathbf{r}] \cos(l, z)\}\, d\sigma =$$

$$= -\int_T \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{P}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{P}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{P}_z\right), \mathbf{r}\right] d\tau - \int_T \left\{\left[\mathbf{P}_x, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right] + \left[\mathbf{P}_y, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\mathbf{P}_z, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right]\right\} d\tau.$$

Вставляя эти выражения в уравнения, дающие закон количества движения и закон моментов, будем иметь

$$\int_T \left[\rho\left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{V}}{dt}\right) - \left(\frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial z}\right)\right] d\tau = 0$$

$$\int_T \left[\left\{\left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)\rho - \left(\frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial z}\right)\right\}, \mathbf{r}\right] d\tau - \int_T \left\{\left[\mathbf{P}_x, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\mathbf{P}_y, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right] + \left[\mathbf{P}_z, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right]\right\} d\tau = 0.$$

Так как об'ем T взят нами произвольным и если считать под'интегральные выражения непрерывными функциями координат, то, как легко убедиться, приемом, приведенным выше в доказательстве равенства $\mathbf{P}_l = -\mathbf{P}_{-l}$, под'интегральные выражения должны обращаться в нуль. Первое векторное соотношение дает нам, таким образом, единственное уже векторное условие, кое должно выполняться в любой момент времени и для всех точек жидкости:

$$\left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)\rho = \frac{\partial \mathbf{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{P}_z}{\partial z}. \tag{14}$$

Это последнее векторное равенство и представляет уравнения движения сплошной среды. В скалярной форме оно даст:

$$\left(X-\frac{du}{dt}\right)\rho=\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z};\ \left(Y-\frac{dv}{dt}\right)\rho=\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z} \quad (15)$$

$$\left(Z-\frac{dw}{dt}\right)\rho=\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}.$$

Обратимся теперь к выражению, получившемуся из теоремы моментов. Если „уравнения движения" выполнены, то 1-й интеграл будет там сам собой обращаться в нуль и нам останется записать лишь, что под'интегральная функция 2-го интеграла есть нуль. Так как вектора $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}$ имеют, очевидно компоненты (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) соответственно, мы придем к следующим трем скалярным условиям:

$$Y_x=X_y,\ Y_z=Z_y,\ X_z=Z_x. \quad (16)$$

Таким образом из девяти величин, характеризующих напряжение в данной точке (X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z, Z_x, Z_y, Z_z) только шесть независимы.

Предположим теперь, что среда наша обладает тем свойством, что какую бы площадку в точке A этой среды мы ни выбирали, всегда напряжение, действующее на площадку эту, будет перпендикулярно к площадке. Легко видеть, что в такой среде $X_x=Y_y=Z_z$, а $X_y=X_z=Y_z=0$. Действительно, рассматривая, например, площадку, перпендикулярную оси X, должны заключить, что лишь $X_x\neq 0$, а $Y_x=Z_x=0$ (ибо напряжение, действующее на эту площадку, будет иметь, по определению, компоненты X_x, Y_x, Z_x, а оно направлено теперь в точности перпендикулярно к площадке, т. е. вдоль оси X). Аналогичным образом найдем, что и $Z_y=0$. Но теперь (по (13)) $X_l=X_x\cos(l, x)$, $Y_l=Y_y\cos(l, y)$, $Z_l=Z_z\cos(l, z)$, где l нормаль к площадке, а так как $\mathbf{P}_l$ направлено, по предположению, по нормали, то $X_l=|\mathbf{P}_l|\cos(l, x)$, $Y_l=|\mathbf{P}_l|\cos(l, y)$, $Z_l=|\mathbf{P}_l|\cos(l, z)$, таким образом $X_x=Y_y=Z_z=|\mathbf{P}_l|$. Обозначим величину напряжения, действующего в данной точке такой среды через $p(x, y, z, t)$. Мы имеем теперь уравнения

$$\left(\mathbf{F}-\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)\rho=\nabla p. \quad (17)$$

В покоящейся земной атмосфере $\left(\mathbf{V}=\frac{d\mathbf{V}}{dt}=0\right)$ свойство нормальности напряжения выполняется вполне точно. При наличии движения приходится, к сожалению, вообще говоря, иметь дело с напряжениями, действующими различно на различно поставленные, хотя и находящиеся в одной и той же точке среды, площадки. Представляется целесообразным отделить в выражениях X_x, . . ., Z_z члены, исчезающие вместе со скоростью, и написать

$$X_x=p+X'_x,\ Y_y=p+Y'_y,\ Z_z=p+Z'_z. \quad (18)$$

Выражение p, стоящее слагаемым во всех этих трех компонентах напряжения, носит название давления. Нам надо теперь постараться выразить X'_x, Y'_y, Z'_z, X_y $(=Y_x)$, Z_x $(=X_z)$, Y_z $(=Z_y)$ непосредственно через компоненты скоростей.

§ 6. Напряжения. Уравнения движения в окончательной форме. В классической механике вязкой жидкости принимается, что все 9 компонентов напряжения являются линейными функциями от „скоростей деформации“ среды. Последние представляют из себя в свою очередь 6 величин, построенных простым образом из различных производных от компонентов u, v, w скоростей жидкости по координатам. Доказывается при этом, что только 6 из величин X'_x, X_y, . . . Z'_z независимы и что (см. предыдущий параграф)

$$Y_x = X_y, \quad Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z.$$

Тогда из изотропности среды следует, что линейные формулы, выражающие все 9 (вернее 6) величин X'_x, . . . , Z'_z через 6 „скоростей деформации“, могут содержать всего лишь 2 различных коэффициента. Наконец, для „газов“ и эти два коэффициента оказываются связанными линейным соотношением, так что существенным является лишь один единственный коэффициент, которому дают название коэффициента вязкости. В этой книге мы не будем останавливаться на физическом обосновании существования и линейности зависимости X'_x, . . . , Z'_z от скоростей деформации. Мы однако здесь же выпишем выражения всех наших 9 величин через скорости деформации и коэффициент вязкости, с тем, чтоб написать уравнения движения (15) в обычной форме. Примем, как обычно что

$$\left.\begin{aligned} &X'_x = \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}; \quad Y'_y = \ldots; \quad Z'_z = \ldots \\ &X_y = Y_x = -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right); \quad X_z = Z_x = \ldots; \quad Y_z = Z_y = \ldots \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

где μ „коэффициент вязкости“. Выражения эти нам надлежит вставить в правые части уравнений (15) и дифференцировать по координатам. Можно ли при этом считать μ постоянным? Если предположить даже, что среда наша однородна в смысле вязкости, то все же, с точки зрения физических представлений о вязкости, μ следует считать функцией от температуры. Так как последняя в атмосфере подвергается изменениям, естественно считать, что и μ есть величина переменная. В этом параграфе мы, однако, оставаясь в духе классической механики вязкой жидкости, предположим, что изменения эти настолько ничтожны, что μ можно совершенно строго считать постоянной величиной. Мы вернемся еще к этому вопросу в § 8. Вставляя выражения (19) в (15) и собирая соответствующие величины, мы без труда приведем уравнения движения к виду

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\left(X - \frac{du}{dt}\right) + \mu\left[\nabla^2 u + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right];$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho\left(Y - \frac{dv}{dt}\right) + \mu\left[\nabla^2 v + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right];$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho\left(Z - \frac{dw}{dt}\right) + \mu\left[\nabla^2 w + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right].$$

Таковы уравнения движения вязкой сжимаемой жидкости—таковы уравнения движения атмосферы. Положим, что мы отнесли движения к системе осей, связанной неизменно с вращающейся землей, расположив оси X и Y в касательной к поверхности земли плоскости и направив ось Z вертикально вверх. Вспоминая, что было сказано в § 4 о силе тяжести и силе Кориолиса, можем написать теперь уравнения движения в виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\left(2v\omega_z - 2w\omega_y - \frac{du}{dt}\right) + \mu\left[\nabla^2 u + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] \\ &\frac{\partial p}{\partial y} = \rho\left(2w\omega_x - 2u\omega_z - \frac{dv}{dt}\right) + \mu\left[\nabla^2 v + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] \\ &\frac{\partial p}{\partial z} = \rho\left(2u\omega_y - 2v\omega_x - \frac{dw}{dt}\right) + \mu\left[\nabla^2 w + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] - g\rho. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Можно придать этим уравнениям более простой вид, выбрав подобающим образом систему координат. Направим ось X вдоль круга широт с запада на восток, а ось Y вдоль меридиана—с севера на юг; тогда

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \omega \cos \varphi, \quad \omega_z = -\omega \sin \varphi,$$

где φ — угол, который составляет с плоскостью экватора линия, соединяющая центр земли с рассматриваемой жидкой частицей. Например, если частица находится близ поверхности земли, φ близко к географической широте места; если частица находится вблизи начала координат, φ близко к географической широте начала.

Мы заключим этот короткий параграф указанием на одно замечательное решение системы (17). Предположим, что атмосфера находится в покое по отношению к поверхности земли, так что

$$u = v = w = 0.$$

В таком случае первые два из уравнений (20) дают

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

А последнее перепишется в виде

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho. \tag{21}$$

Эти два равенства показывают, что p зависит лишь от z и, может быть, от времени. Предположим, что $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$. Тогда $p = p(z)$ значит, в силу (21) и $g\rho$ зависит лишь от z. Мы можем поэтому написать

$$p = \int_z^H g\rho\, dz,$$

где H есть высота, на которой давление обращается в нуль („граница атмосферы"). С другой стороны представим себе некий элементарный параллелепипед с площадью основания параллельной плоскости XY и равной единице, и с высотой $-dz$. В нем заключается масса ρdz; следовательно, действующая на него сила тяжести равна по величине $g\rho dz$ (см. § 4). Интеграл, стоящий в правой части, представляет, очевидно, силу тяжести, действующую на столб воздуха с площадью основания, равной единице, начинающийся на высоте z и простирающийся до пределов атмосферы. Мы приходим таким образом к известной теореме: в случае покоящейся атмосферы давление на высоте z над уровнем поверхности земли равно весу столба воздуха с площадью сечения, равной единице, простирающегося от этой высоты z до пределов атмосферы. Мы еще много раз вернемся к вопросу о том, существенным ли в формулировке этой теоремы является условие, что атмосфера покоится.

§ 7. Уравнение состояния. Бароклинность и баротропность. Уравнения Bjerknes'a. Нами установлено, что кинематические и динамические элементы, характеризующие атмосферные движения, необходимо должны удовлетворять одному уравнению (8) и трем уравнениям (20). Уравнения эти содержат 5 функций: u, v, w, p, ρ, и естественно возникает вопрос, достаточно ли четырех уравнений для определения всех перечисленных функций? Из физики нам известно, что существует еще одно, пятое соотношение, связывающее давление p и плотность ρ—уравнение состояния. Однако, в то время как уравнения (8) и (20) не содержат явным образом температуру T, последняя входит в уравнение состояния наряду

с p и ρ. Так как температура T движущейся атмосферы не может считаться величиной a priori известной, мы, вводя уравнение состояния, хотя и увеличиваем число уравнений движущейся атмосферы до 5, но зато и число неизвестных функций доводим до 6. Как выйти из этого нового затруднения? Наиболее естественный путь есть применение 1-го закона термодинамики, связывающего приток энергии извне с изменением, в жидкой частице, p и T. Особенно плодотворно это оказывается в тех случаях когда приток энергии извне известен (например, в адиабатических процессах, где он равен нулю). Со значительной трудностью, однако, приходится сталкиваться при рассмотрении движения атмосферы, поглощающей излучение и излучающей. Мы обратимся к этому вопросу в соответствующем месте книги, а сейчас вернемся к уравнению состояния.

Речь идет об определении трех функций координат и времени: p, ρ, T. Вставим, однако, в эти функции вместо x, y, z выражение этих величин в функциях от a, b, c и t. Мы придем тогда к трем функциям:

$$p=p\ (a,\ b,\ c,\ t),\quad \rho=\rho\ (a, b,\ c,\ t),\quad T=T\ (a,\ b,\ c,\ t).$$

Цель установления уравнения состояния заключается в построении зависимости между p, ρ, T и притом такой, которая не содержит явно время, а характеризует определенную среду втечение всего движения. В общем виде это соотношение, таким образом, следует написать так:

$$F\ (p,\ \rho,\ T,\ a,\ b,\ c)=0. \tag{22}$$

Вхождение a, b, c означает, что мы имеем дело с неоднородной средой, т. е. с такой средой, физические свойства которой меняются от точки к точке.

В классической механике сжимаемой жидкости [1]) предполагается, что уравнение это содержит лишь p и ρ: $f\ (p,\ \rho)=0$.

Движения жидкости с таким уравнением состояния носят название баротропных. Их основное свойство, вытекающее из вида их уравнения состояния, заключается в том, что в них поверхности одинакового давления (изобары) и поверхности равного удельного об'ема $\left(\alpha=\frac{1}{\rho}\right)$ „изостеры"— совпадают. В противоположность этим случаям говорят о бароклинных движениях, если изобары и изостеры пересекаются. Последнее очевидно имеет место, когда уравнение состояния имеет вид (22). Не желая вводить в рассуждение температуру явно, В. Бьеркнес оставляет все же некий простор для возможных температурных воздействий и рассматривает уравнение состояния в виде:

$$f\ (p,\ \rho,\ a,\ b,\ c)=0.$$

Отсюда один шаг до жидкости баротропной—стоит только удалить a, b, c из уравнения. Подобные жидкости В. Бьеркнес называет полубароклинными или жидкостями с ограниченной баротропией. Частным случаем, на котором подробно останавливается В. Бьеркнес, является существование в жидкости слоев, из коих каждый обладает все время собственной температурой и однороден, т. е. каждый баротропен; только на границе, при переходе из одного такого слоя в другой, изобары могут пересекать изостеры [2]).

---

[1]) Случай жидкости несжимаемой получим, если из написанного уравнения выпадает p или p и T.

[2]) Принимается обычно, что на границе давление не может терпеть разрыв (об этом см. гл. IX о разрывах), следовательно разрыв происходит за счет плотности, таким образом одна и та же изобарическая поверхность совпадает с несколькими изостерами.

Возвращаясь к общему случаю (22) спросим себя, прежде всего, какой же вид имеет это уравнение? Для сухого воздуха можно с большой степенью точности считать, что a, b, c выпадают из (22), и оно принимает простую форму:

$$p = R\rho T,$$

где

$$R = 287.04 \frac{м^2}{сек.^2}.$$

Это известный закон Клапейрона для идеальных газов.

В случае „влажного воздуха" (воздуха, содержащего водяные пары) приходится брать уравнение в более общем виде (22).

Мы вернемся к этому в главе III, посвященной термодинамике атмосферы.

Бароклинность атмосферных движений имеет своим результатом одно явление, заставляющее резко отделить движение воздуха от движений жидкостей несжимаемых, или сжимаемых, но баротропных. Мы имеем в виду вопрос о зарождении и об исчезновении существующих в атмосфере вихрей. Последние представляются, как известно, в виде вектора $\Omega = \operatorname{curl} V$ с компонентами

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

(u, v, w — компоненты скоростей) и связаны со скоростью при помощи теоремы Стокса соотношением:

$$\int_L u dx + v dy + w dz = \int\int_\Sigma \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \cos(n, y) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cos(n, z)\right] d\sigma.$$

Здесь интеграл, стоящий слева, берется по произвольному замкнутому контуру L в нашей жидкости, а интеграл, написанный справа, взят по произвольной площади Σ, ограниченной контуром L, причем $d\sigma$ есть элемент поверхности Σ, а нормаль n—направлена в ту сторону пространства, откуда ориентировка контура L кажется направленной по часовой стрелке (в случае леворучной системы координат). В векторном виде это равенство может быть написано так:

$$\Gamma = \int_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \int\int_\Sigma \Omega_n d\sigma$$

($d\mathbf{s}$ — бесконечно малый вектор, расположенный вдоль L, Ω — вихрь, Ω_n — проекция вихря на нормаль к площади $d\sigma$) и прочтено (мы используем при этом известные термины векторного анализа): циркуляция Γ скорости $\mathbf{V}$ по замкнутому контуру L равна потоку вихря Ω через поверхность Σ, ограниченную этим контуром. Ясно, что если вихри в жидкости отсутствуют ($\Omega = \Omega_n = 0$), то циркуляция Γ по любому замкнутому контуру равняется нулю. Рассмотрим какой-нибудь замкнутый контур L и будем следить за движением частиц, его составляющих. Линия L будет всячески деформироваться, но в силу непрерывности законов движения, будет оставаться линией и притом замкнутой. Рассматривая значение Γ для каждого положения L, мы получим, вообще говоря, некоторую функцию от времени: $\Gamma(t)$. Если контур L будет очень малой длины, т. е. площадка Σ будет весьма мала, мы сможем считать, что Γ просто равна

интенсивности вихревой трубки („линии"), проходящей через L[1]). В самом деле, под интенсивностью вихревой трубки разумеют обычно произведение из величины вихря трубки на площадь нормального сечения трубки. Для малой Σ можно написать:

$$\Gamma = \Omega_n \cdot \Sigma,$$

где Σ — величина площади или $\Gamma = \Omega \cos(n, \Omega)\Sigma$, но выражение $\cos(n, \Omega)\Sigma$ представляет, очевидно, как раз площадь нормального уже сечения трубки; отсюда и получается, что циркуляция скорости равна интенсивности соответствующей вихревой трубки. Если интенсивность вихрей сохраняется постоянной (например равна нулю, т. е. вихри отсутствуют), то и $\Gamma(t) = \text{const.}$, и, следовательно, производная $\frac{d\Gamma}{dt}$ будет всегда нулем в этом случае.

Попробуем, однако рассчитать, чему равна $\frac{d\Gamma}{dt}$ в общем случае движения. Чтобы произвести дифференцирование Γ по времени, составим сначала производную от скалярного произведения $\mathbf{V} \cdot \delta\mathbf{S}$; ($\delta\mathbf{S}$ написано для ясности вместо $\mathbf{ds}$, и представляет бесконечно малый вектор, расположенный вдоль контура L). Имеем очевидно

$$\frac{d(\mathbf{V} \cdot \delta\mathbf{S})}{dt} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \delta\mathbf{S} + \mathbf{V} \cdot \frac{d\delta\mathbf{S}}{dt}.$$

(Заметим, что здесь надо брать индивидуальную производную по времени, а не $\frac{\partial}{\partial t}$, ибо мы следим за движением частиц). Но

$$\frac{d\delta\mathbf{S}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} - \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}' - \mathbf{V} = \delta\mathbf{V}$$

($\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ суть радиусы-векторы начала и конца дуги $\delta\mathbf{S}$ соответственно; $\mathbf{V}'$ и $\mathbf{V}$ — скорости в начале и в конце дуги $\delta\mathbf{S}$; $\delta\mathbf{V}$ — изменение скорости при перемещении вдоль L на дугу $\delta\mathbf{S}$); поэтому

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{V} \cdot \delta\mathbf{s}) = \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot \delta\mathbf{s} + \mathbf{V} \cdot \delta\mathbf{V},$$

и значит

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_L \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot d\mathbf{s} + \int_L \mathbf{V} \cdot d\mathbf{V}.$$

Но

$$\mathbf{V} \cdot d\mathbf{V} = \frac{1}{2} d(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V});$$

таким образом

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_L \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot d\mathbf{s} + \frac{1}{2} \int_L d(\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}).$$

Второй из стоящих справа интегралов равен нулю как интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала однозначной функции и таким образом

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_L \frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot d\mathbf{s} \tag{23}$$

т. е. производная по времени от циркуляции скорости по контуру L равна циркуляции ускорения по тому же контуру L. Мы можем теперь вставить в нашу формулу выражение для ускорения, входящее в урав-

[1]) Вихревая трубка, проходящая через L, есть поверхность, образованная всевозможными вихревыми линиями, проходящими через точки контура L, вихревые же линии суть линии вектора Ω, т. е. такие линии, направление касательных к коим совпадает с направлением вектора Ω.

нения движения (20). Чтоб более выпукло указать на влияние бароклинности на изменение циркуляции, мы сделаем два упрощающих предположения: 1) будем считать, что об'емные силы допускают потенциал (так что силу Кориолиса в расчет принимать не будем) и 2) жидкость будем считать идеальной ($\mu=0$). В таком случае

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\nabla U-\frac{1}{\rho}\nabla p$$

где U потенциал внешних сил. С другой стороны, применяя теорему Стокса на этот раз к производной от циркуляции по времени, получим:

$$\frac{d\Gamma}{dt}=\iint_{\Sigma}\left(\operatorname{curl}\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_n d\sigma.$$

Но

$$\operatorname{curl}\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\operatorname{curl}\left(\nabla U-\frac{1}{\rho}\nabla p\right)=-[\nabla\alpha,\ \nabla p]$$

(α — удельный об'ем; $\alpha=\frac{1}{\rho}$); следовательно

$$\frac{d\Gamma}{dt}=-\iint_{\Sigma}[\nabla\alpha,\ \nabla p]_n\, d\sigma. \tag{24}$$

Мы видим, что если бы изостерические и изобарические поверхности совпадали ($\nabla\alpha\parallel\nabla p$, т. е. $[\nabla\alpha,\ \nabla p]=0$), то было бы $\frac{d\Gamma}{dt}=0$. В частности в жидкости несжимаемой, или баротропной, было бы всегда $\nabla\alpha=0$ и $[\nabla\alpha,\ \nabla p]=0$ соответственно, следовательно $\frac{d\Gamma}{dt}=0$ и интенсивность вихрей не могла бы меняться. Напротив, в бароклинной атмосфере $\frac{d\Gamma}{dt}\neq 0$; поэтому даже если в некий момент времени вихри отсутствуют и $\Gamma=0$, то в следующий момент вихри могут появиться, и наоборот, если в некий момент вихри существуют, то они могут исчезнуть. Теорема получающая свое выражение в формуле (24), носит название теоремы В. Бьеркнеса. Она имеет различные приложения в метеорологии (образование бризов, циклонов, пассатов и антипассатов и др.). Мы встретимся в главе III с первыми ее приложениями. В главе VII мы вернемся еще к вопросу об изменении Г, отбрасывая ограничение, поставленное выше — о том, что силы допускают потенциал и привлекая к рассмотрению Кориолисову силу. В этом параграфе мы имеем в виду лишь подчеркнуть разницу между баротропными и бароклинными движениями.

§ 8. Принцип подобия Гельмгольца. Нам предстоит при помощи системы дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial p}{\partial x}&=\rho\left(2v\omega_z-2w\omega_y-\frac{du}{dt}\right)+\mu\left[\nabla^2 u+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x}\ \nabla\cdot V\right],\\
\frac{\partial p}{\partial y}&=\rho\left(2w\omega_x-2u\omega_z-\frac{dv}{dt}\right)+\mu\left[\nabla^2 v+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial y}\ \nabla\cdot V\right],\\
\frac{\partial p}{\partial z}&=\rho\left(2u\omega_y-2v\omega_x-\frac{dw}{dt}\right)+\mu\left[\nabla^2 w+\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial z}\ \nabla\cdot V\right]-\rho g,\\
\frac{\partial\rho}{\partial t}&+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0,
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

изучить атмосферные движения. Задача интегрирования этой системы представляет большие трудности и доведена до конца лишь в небольшом количестве конкретных случаев при упрощающих предположениях или

приближенно. Однако Гельмгольц показал, [1]) не интегрируя системы (25), как можно, применяя так называемый „принцип геометрического подобия", получить ряд замечательных результатов, освещающих качественно вопрос о связи между различными элементами, входящими в самую общую систему (25).

Пусть у нас имеются две вязкие сжимаемые жидкости, движения которых подчиняются уравнениям (25). Спросим себя: при каких условиях эти две жидкости будут совершать движения, геометрически подобные? Обозначим скорости, давление, плотность, координаты, время, коэффициент вязкости для одной жидкости через u, v, w, p, ρ, x, y, z, t, μ, а для другой через U, V, W, P, $\bar{\rho}$, X, Y, Z, T, M соответственно. Мы рассмотрим также случай движения под действием иной, чем на земле силы тяжести (g и G) и при наличии отличной от земной угловой скорости вращения (не ω а $\bar{\omega}$).

Мы привлечем к рассмотрению также и уравнение состояния, причем вместе с Гельмгольцем возьмем его в виде

$$p + c = a^2 \rho$$

где c „внутреннее давление", благодаря присутствию которого даже при $p = 0$ получается конечная плотность, а a^2 постоянная, связанная с изменениями температуры. Гельмгольц берет уравнение состояния в таком виде, чтобы учесть роль сжимаемости. Чем больше c, тем сжимаемость очевидно меньше, чем меньше c тем ближе наша жидкость к идеальному газу ($c = 0$). Для второй жидкости возьмем, вместо c—C, а вместо a^2—A^2. Мы предполагаем, что уравнения наши справедливы как для малых, так и для больших букв. Отсюда мы получаем, что отношения величин, изображаемых большими буквами, к соответственным величинам, изображаемым малыми буквами, каковые отношения мы предполагаем постоянными, — должны быть связаны определенным образом. В самом деле, считая что

$$X = \xi x,\quad Y = \xi y,\quad Z = \xi z,\quad U = nu,\quad V = nv,\quad W = nw,\quad T = \tau t,\quad P = \pi p,\quad \bar{\rho} = r\rho,$$
$$M = q\mu,\quad G = \gamma g,\quad \bar{\omega} = \lambda\omega,\quad C = \varepsilon c,\quad A^2 = \alpha a^2,$$

где ξ, n, τ, π, r, q, γ, λ, ε, α постоянные величины, получим из двух первых уравнений (25), что необходимо должно быть

$$\frac{1}{r}\frac{\pi}{\xi} = \lambda n = \frac{n}{\tau} = \frac{q}{r}\frac{n}{\xi^2};$$

из 3-го

$$\frac{n}{\tau} = \frac{q}{r}\frac{n}{\xi^2} = \frac{1}{r}\frac{\pi}{\xi} = \gamma,$$

из уравнения неразрывности

$$\frac{r}{\tau} = \frac{rn}{\xi}$$

и из уравнения состояния $\pi = \varepsilon = \alpha r$. Мы имеем 10 отношений и 7 равенств; мы можем выразить 7 отношений через отношения длин ξ, скоростей n и плотностей r. Получим

$$\tau = \frac{\xi}{n},\ \pi = n^2 r,\ q = r\xi n,\ \gamma = \frac{n^2}{\xi},\ \lambda = \frac{n}{\xi},\ \varepsilon = n^2 r,\ \alpha = n^2,$$

а предполагая, что обе наши жидкости обладают одной плотностью (и та и другая — воздух), т. е. что $r = 1$:

$$\tau = \frac{\xi}{n},\ \pi = n^2,\ q = \xi n,\ \gamma = \frac{n^2}{\xi},\ \lambda = \frac{n}{\xi},\ \varepsilon = n^2,\ \alpha = n^2.$$

[1]) Sitz. Ber. d. Berl. Akad. d. Wissensch. B. 73 S. 501.

При помощи этих соотношений постараемся решить два вопроса: о возможности подобных движений: 1) с одинаковыми скоростями, но при различных пространственных соотношениях и 2) с разными скоростями, но при одинаковых пространственных соотношениях.

1) Здесь надо положить $n=1$, тогда:

$$\tau=\xi,\ \pi=1,\ q=\xi,\ \gamma=\frac{1}{\xi},\ \lambda=\frac{1}{\xi},\ \varepsilon=\alpha=1.$$

Мы видим, что подобные движения земного воздуха при таких условиях существовать не могут, ибо некоторые из величин, которые следовало бы считать неизменными (силы и вязкость), оказываются зависящими от ξ $\left(\gamma=\frac{1}{\xi},\ \lambda=\frac{1}{\xi},\ q=\xi\right)$.

Это затруднение мы обошли бы, полагая $\xi=1$, но тогда движения были бы не подобными, а просто тождественными.

Мы можем однако сделать несколько следующих ценных заключений. Рассматривая движения больших масс воздуха ($\xi>1$), мы должны также и время измерять большими масштабами ($\tau=\xi>1$), т. е. истинное время играет при движениях больших меньшую роль, чем при движениях маленьких. Второе заключение, значительно более интересное, можно сделать относительно вязкости. Чем больших масштабов движения мы рассматриваем ($\xi>1$), тем больше должно было бы быть и μ ($q=\xi>1$), чтоб оказывать прежний эффект; следовательно старое μ будет играть значительно меньшую роль при движениях больших масштабов. Отсюда путь к возможности пренебречь μ, когда речь идет о движениях больших масс воздуха (Гельмгольц).

Обратное имеет место относительно силы тяжести $\left(\gamma=\frac{1}{\xi}\right)$ и силы Кориолиса $\left(\lambda=\frac{1}{\xi}\right)$. При больших масштабах γ и λ должны были бы стать меньше, чтоб оказывать прежний эффект. Так как на земле они остаются неизменными, мы можем считать, что движения больших масс происходят как бы под действием увеличенной силы тяжести и силы Кориолиса. Значение этих сил таким образом возрастает при увеличении масштабов рассматриваемого движения.

2) Рассмотрим теперь движения, при коих $\xi=1$, но $n\neq1$. Мы получим здесь

$$\tau=\frac{1}{n},\ \pi=n^2,\ q=n,\ \gamma=n^2,\ \lambda=n,\ \varepsilon=n^2,\ \alpha=n^2.$$

Снова приходится заметить, что подобных движений при различных скоростях в воздухе быть не может, ибо для большинства величин (силы и т. д.) в воздухе коэфициент подобия равен 1.

Однако и здесь, как и в предыдущем случае, мы можем высказать несколько замечаний. Пусть например $n>1$, т. е. движения совершается быстрее. Тогда и $q>1$, т. е. внутреннее трение должно было бы возрасти, чтоб движение было подобным, но в воздухе оно постоянно (т. е. $q=1$), следовательно заключаем, что чем быстрее совершается движение, тем меньшее влияние на него оказывает внутреннее трение. То же можно сказать про давление и силы: их действие будет тем меньше, чем быстрее движется воздух. Важнее, однако заключение, которое можно сделать о сжимаемости. У нас $\varepsilon=n^2>1$, т. е. для подобия воздух должен был бы стать менее сжимаемым. Сжимаемость его остается, однако, прежней ($\varepsilon=1$). Отсюда заключаем: при медленных движениях воздух более приближается к жидкости несжимаемой, нежели при быстрых.

Таковы основные качественные заключения, кои можно сделать из рассмотрения уравнений движения атмосферы.

9. Порядок величин метеорологических элементов. Трудности, с которыми сталкивается всякий желающий заняться интегрированием общих уравнений движения атмосферы, заставляют обратиться к упрощающим предположениям. Каковы бы эти предположения ни были: обоснованы ли они качественными соображениями, аналогичными высказанным в предыдущем параграфе, играла ли большую роль при выборе этих предположений чисто математическая сторона вопроса,—во всяком случае мы должны резко разграничивать две постановки задачи. Первая заключается в том, что мы заранее оговариваемся, что решаем некую частную задачу, например мы считаем, что втечение всего движения строго выполняется условие $\mu=0$, т. е. мы сознательно совершенно пренебрегаем вязкостью; или же, например, мы заранее уславливаемся изучить чисто вертикальные токи, считая, что строго выполняются втечение всего движения условия $u=v=0$ и т. д. При этом, если считается, например, что $\mu=0$, то и во всех уравнениях движения полагается $\mu=0$; если считается, что $u=v=0$, то во всех уравнениях движения и в уравнении неразрывности члены, содержащие u и v, пропадают.

Вторая постановка задачи заключается в отыскании решения некоторых приближенных уравнений. Последние строятся, по большей части, из общих уравнений движения и уравнения неразрывности путем отбрасывания тех членов этих уравнений, коими в данной метеорологической задаче можно пренебречь, в виду их малости по сравнению с другими. При этом одна и та же величина. например μ, входящая в разные уравнения, может быть отброшена, как малая по сравнению с соседними величинами, в одном уравнении, но оставлена, как равноправная в другом.

Подобного рода упрощения дифференциальных уравнений движения требуют большой осторожности, причем всякая ошибка тем более усугубляется, что речь идет не о конечных соотношениях, а о дифференциальных уравнениях, которые после упрощения надо будет еще интегрировать.

Несомненно, поэтому, что прежде чем начать упомянутые упрощения, необходимо составить себе полное представление о значении величин, встречающихся в уравнениях при исследовании атмосферы и о пределах, в которых эти численные значения изменяются.

Гессельберг и Фридман (5) построили таблицы изменения величин, встречающихся в динамической метеорологии, а также указали, на отдельных примерах, как можно использовать эти таблицы в целях упрощения дифференциальных уравнений движения атмосферы.

Установим сперва понятие порядка (Grössenordnung) метеорологического элемента. Имеем некоторый метеорологический элемент, например давление. Будем откладывать его по оси абсцисс x и разобьем эту ось на ряд одинаковых интервалов Δx. Взяв какой-нибудь интервал, назовем через A число случаев, когда рассматриваемый нами элемент оказался в этом интервале, и отложим A в качестве ординаты из середины Δx. Кривая соединяющая все такие точки, даст „кривую распределения" нашего элемента. Кривая распределения будет, конечно, несколько различна для разных точек земли; мы можем однако говорить о средних кривых распределения. Обозначим через $A_{x'x''}$ количество случаев, когда величина метеорологического элемента лежала между x' и x'', и определим границы x_1 и x_2, для коих выражения

$$\frac{A_{-\infty x_1}}{A_{-\infty+\infty}} \quad \text{и} \quad \frac{A_{x_2+\infty}}{A_{-\infty+\infty}}$$

равны некоему определенному числу ε. Тогда x_1 и x_2 даст границы для порядка элемента [1]). Так, например, если $\varepsilon=\frac{1}{200}$, x_1 и x_2 дадут интер-

[1]) Гессельберг и Фридман (5) loc.-cit.

вал, внутрь которого наш элемент попадет 99 раз из 100. Необходим слишком большой статистический материал, чтоб возможно было построить точные границы для порядка, поэтому мы будем следующим приближенным образом описывать порядок. Если некоторая величина изменяется очень мало, мы дадим для описания порядка одну лишь цифру: численное значение этой величины, округленное до ближайшей степени цифры 10. Вообще же говоря, нам придется задавать порядок метеорологических величин при помощи двух соседних степеней 10-ти: 10^n и 10^{n+1}; это означает, что численное значение нашей величины есть, вообще говоря, $a \cdot 10^n$, где $0 < a < 10$ и только весьма редко превосходит $5 \cdot 10^{n+1}$.

Основное правило, кое мы будем применять при построении приближенных уравнений, можно высказать теперь так: член, порядок коего заключается между 10^{n-2} и 10^{n-1} может быть отброшен, если он суммируется с членом порядка $10^n - 10^{n+1}$. Ошибка, получающаяся при этом, не превосходит вообще говоря, 2%.

Мы имеем дело с элементами u, v, w, p, ρ, T. Располагая оси X и Y в горизонтальной плоскости и проводя ось Z вертикально вверх, обозначим горизонтальный компонент скорости ветра через v_s, а вертикальный $w = v_z$. Вместо ρ будем рассматривать обратную величину: удельный об'ем

$$\alpha = \frac{1}{\rho}.$$

Мы приведем таблицу порядка этих пяти элементов, причем воспользуемся наблюдениями лишь в пределах 4000 *м* высоты.

Нам необходимо построить не только самые метеорологические элементы, но и их производные по времени и координатам. Однако все метеорологические элементы подвержены весьма быстрым колебаниям во времени и сильным изменениям в пространстве. Если считать, как мы делали до сих пор, что наши дифференциальные уравнения годятся для точного описания подобных действительных изменений метеорологических элементов, то расхождение с эмпирическими данными неизбежно, ибо последние преподносятся всегда в виде непрерывной сглаженной картины, в которой все быстрые и мало протяженные изменения исключены.

Из этого затруднения можно пытаться выйти, строя все более и более густую сеть станций и производя все чаще наблюдения.

Есть, однако, другой путь — интегрированием преобразовать уравнения движения атмосферы так чтоб в них входили лишь осредненные метеорологические элементы — сделать уравнения „макроскопическими". Этот последний путь до сих пор с полной строгостью проделан лишь для некоторых частных случаев. Существуют однако соображения более категорического чем высказанного нами характера, требующие вводить в рассмотрение лишь осредненные метеорологические элементы; мы столкнемся с ними в § 11 и там же укажем на некоторые попытки решения вопроса.

Так или иначе, но работая с эмпирическим материалом, мы всегда должны заменять производные отношением конечных разностей. Мы выберем в качестве разности по длине в горизонтальном направлении s (X или Y мы будем называть просто S) — 10 *км*, а в вертикальном (Z) 100 *м*.[1]) В качестве разности во времени (Δt) выберем 1 час = 3600 сек.

В табл. 1, приведенной ниже, даны в первой строке числовые значения самих метеорологических элементов v_s v_z, p, α, T, во второй строке—

[1]) Мы взяли Δs в 100 раз большее, нежели Δz, потому что изменения метеорологических элементов в горизонтальных направлениях бывают в 100—1000 раз меньшими, нежели в вертикальном.

порядок производных по горизонтальному направлению, в третьей — по вертикальному; в четвертой — по времени и т. д. Из всех наших пяти элементов наименее совершенным образом измеряются первые два, а в особенности второй. Неточность зависит отчасти от того, что измерения ветра производятся по большей части при помощи приборов (так называемых анемометров), связанных с теми или иными специальными установками. В пределах высоты этих установок движение воздуха чрезвычайно усложняется трением о поверхность земли, сопротивлением неподвижных предметов (холмов, построек, деревьев и т. п.), наконец внутренним трением самого воздуха, эффект коего остается даже, если никакого трения о поверхность земли нет. В особенности это относится к вертикальным составляющим ветра. Из наблюдений можем заключить что порядок величины v_z лежит между 10^{-1} и 10^{0} *м*/сек; ибо случаи, когда $v_z > 5$ *м*/сек, наблюдаются весьма редко. Однако v_z подвергается весьма быстрым локальным и временным изменениям. Те осреднения, с которыми мы неизбежно, как мы видели, сталкиваемся при построении различных эмпирических данных, а также косвенные вычисления (из уравнения неразрывности и т. п.) приводят нас к значительно меньшим величинам. Мы будем считать, что выше 500 *м* или в гористых местностях v_z имеет порядок 10^{-2}—10^{-1}, близ поверхности же земли будем уменьшать v_z еще в 10 или 100 раз. Что же касается до v_s то здесь возможны изменения от 1 до 50 *м*/сек и мы должны считать $0(v_s) = 10^{0}$—10^{1}.

Давление может быть измерено значительно более аккуратным образом. В то время как при измерениях скорости ветра возможны ошибки в 20%, метеорологи стараются получить давление с точностью до $\frac{1}{10000}$. В пределах нижних 4000 *м* давление меняется между 110 и 55 $м^{-1}\,т^{1}$ сек$^{-2}$, следовательно порядок его 10^2. Для вычисления удельного об'ема не пользуются какими либо специальными приборами, а просто обращаются к уравнению состояния после того как уже известны p и T $\left(\alpha = \frac{RT}{p}\right)$. Можно считать, что его порядок есть 10^3 $м^3\,т^{-1}$. Абсолютная температура измеряется непосредственно и так же, как и ветер, весьма неточно. Для наших целей однако вполне достаточным является то, что мы о температуре знаем — она может заключаться между 220 и 320 абс., и потому порядок ее 10^2. Скажем еще несколько слов о составлении производных. Производные

$$\frac{\partial v_s}{\partial t},\quad \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2},\quad \frac{\partial p}{\partial t},\quad \frac{\partial T}{\partial t},\quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2},\quad \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$

строятся из регистраций наблюдений. Пример:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p_1 - p_0}{3600},\quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{p_2 - p_1 - (p_1 - p_0)}{(3600)^2}.$$

Из синоптических построений (карт) на поверхности земли и на высоте строятся

$$\frac{\partial v_s}{\partial s},\quad \frac{\partial v_z}{\partial s},\quad \frac{\partial p}{\partial s},\quad \frac{\partial \alpha}{\partial s},\quad \frac{\partial T}{\partial s},\quad \frac{\partial^2 v_s}{\partial s^2},\quad \frac{\partial^2 v_z}{\partial s^2},\quad \frac{\partial^2 p}{\partial s^2},\quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial s^2},\quad \frac{\partial^2 T}{\partial s^2}$$

при этом

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{p_1 - p_0}{10^4},\quad \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} = \frac{p_2 - p_1 - (p_1 - p_0)}{10^8}.$$

Из кривых распределения элементов по вертикальному направлению вычисляется

$$\frac{\partial v_s}{\partial z},\quad \frac{\partial v_z}{\partial z},\quad \frac{\partial p}{\partial z},\quad \frac{\partial \alpha}{\partial z},\quad \frac{\partial T}{\partial z},\quad \frac{\partial^2 v_s}{\partial z^2},\quad \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2},\quad \frac{\partial^2 p}{\partial z^2},\quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z^2},\quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

причем

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p_1 - p_0}{10^2},\quad \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{p_2 - p_1 - (p_1 - p_0)}{10^4}.$$

Из синоптических карт, построенных для разных высот, находим

$$\frac{\partial^2 v_s}{\partial s \partial z},\quad \frac{\partial^2 v_z}{\partial s \partial z},\quad \frac{\partial^2 p}{\partial s \partial z},\quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial s \partial z},\quad \frac{\partial^2 T}{\partial s \partial z}.$$

Из карт изоплет на поверхности земли находим

$$\frac{\partial^2 v_s}{\partial s \partial t},\quad \frac{\partial^2 v_z}{\partial s \partial t},\quad \frac{\partial^2 p}{\partial s \partial t},\quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial s \partial t},\quad \frac{\partial^2 T}{\partial s \partial t}.$$

Наконец из карт изоплет, построенных по высоте, определим

$$\frac{\partial^2 v_s}{\partial z \partial t},\quad \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial t},\quad \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t},\quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial z \partial t},\quad \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial t}.$$

Для нахождения α служит равенство $\alpha = \frac{RT}{p}$.

Таблица 1

	v_s	v_z	p	α	T
	$10^0 - 10^1$	$10^{-2} - 10^{-1}$*	10^2	10^3	10^2
$\frac{\partial}{\partial s}$	$10^{-5} - 10^{-4}$	$10^{-7} - 10^{-6}$*	$10^{-7} - 10^{-6}$	$10^{-5} - 10^{-4}$	$10^{-5} - 10^{-4}$
$\frac{\partial}{\partial z}$	$10^{-3} - 10^{-2}$	$10^{-5} - 10^{-4}$	10^{-2}	10^{-1}	$10^{-3} - 10^{-2}$
$\frac{\partial}{\partial t}$	$10^{-4} - 10^{-3}$	$10^{-6} - 10^{-5}$*	$10^{-5} - 10^{-4}$	$10^{-4} - 10^{-3}$	$10^{-4} - 10^{-3}$
$\frac{\partial^2}{\partial s^2}$	$10^{-10} - 10^{-9}$	$10^{-10} - 10^{-9}$*	$10^{-12} - 10^{-11}$	$10^{-10} - 10^{-9}$	$10^{-10} - 10^{-9}$
$\frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$10^{-5} - 10^{-4}$	$10^{-8} - 10^{-7}$	10^{-6}	10^{-5}	$10^{-5} - 10^{-4}$
$\frac{\partial^2}{\partial s \partial z}$	$10^{-8} - 10^{-7}$	$10^{-10} - 10^{-9}$	$10^{-10} - 10^{-9}$	$10^{-8} - 10^{-7}$	$10^{-8} - 10^{-7}$
$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$	$10^{-8} - 10^{-7}$	$10^{-10} - 10^{-9}$*	$10^{-9} - 10^{-8}$	$10^{-8} - 10^{-7}$	$10^{-8} - 10^{-7}$
$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}$	$10^{-8} - 10^{-7}$	$10^{-11} - 10^{-10}$*	$10^{-10} - 10^{-9}$	$10^{-9} - 10^{-8}$	$10^{-9} - 10^{-8}$
$\frac{\partial^2}{\partial z \partial t}$	$10^{-7} - 10^{-6}$	$10^{-9} - 10^{-8}$	$10^{-9} - 10^{-8}$	$10^{-7} - 10^{-6}$	$10^{-7} - 10^{-6}$

Значек * стоящий справа в столбце v_z означает, что ниже 500 *м* эта величина должна быть уменьшена в 10—100 раз.

В табл. 2 даны значения индивидуальных производных по времени от пяти наших элементов. При вычислении их нам приходится сталкиваться с выражениями вида $v_s \cdot \frac{\partial p}{\partial s}$, и для них получается слишком широкая область изменения если просто перемножать пределы их порядков. Так из табл. 1 мы получили бы, что v_s может достигать значений $5 \cdot 10^1$,

а $\frac{\partial p}{\partial s}=5\cdot 10^{-6}$ и таким образом $v_s\frac{\partial p}{\partial s}$ достигает 10^{-4}. Снизу же, на первый взгляд, надо ограничиться цифрой 10^0. $10^{-7}=10^{-7}$. Вместо порядка— $10^{-7}-10^{-4}$ мы будем брать, однако, $10^{-6}-10^{-5}$ прибегая, для проверки, к непосредственному подсчету значений $v_s\frac{\partial v}{\partial s}$, произведенному на основании анализа карт.

Таблица 2

	v_s	v_z	p	α	T
$\frac{\partial}{\partial t}$	$10^{-4}-10^{-3}$	$10^{-6}-10^{-5}$*	$10^{-5}-10^{-4}$	$10^{-4}-10^{-3}$	$10^{-4}-10^{-3}$
$v_s\frac{\partial}{\partial s}$	$10^{-4}-10^{-3}$	$10^{-6}-10^{-5}$*	$10^{-6}-10^{-5}$	$10^{-4}-10^{-3}$	$10^{-4}-10^{-3}$
$v_z\frac{\partial}{\partial z}$	$10^{-4}-10^{-3}$*	$10^{-6}-10^{-5}$*	$10^{-4}-10^{-8}$*	$10^{-3}-10^{-2}$*	$10^{-4}-10^{-3}$*
$\frac{d}{dt}$	$10^{-4}-10^{-3}$	$10^{-6}-10^{-5}$**	$10^{-4}-10^{-3}$**	$10^{-3}-10^{-2}$	$10^{-4}-10^{-3}$*

* означает что ниже 500 *м* следует уменьшить в 10—100 раз.
** означает что ниже 500 *м* следует уменьшить в 10 раз.

В табл. 3 даны производные от натуральных логарифмов некоторых элементов, ибо часто бывает удобно логарифмировать ту или иную формулу прежде чем дифференцировать.

Таблица 3

	$\frac{\partial}{\partial s}$	$\frac{\partial}{\partial z}$	$\frac{\partial}{\partial t}$	$\frac{d}{dt}$	$\frac{\partial^2}{\partial s^2}$
$\ln p$	$10^{-9}-10^{-8}$	10^{-4}	$10^{-7}-10^{-6}$	$10^{-6}-10^{-5}$	$10^{-14}-10^{-13}$
$\ln\alpha$	$10^{-8}-10^{-7}$	$10^{-5}-10^{-4}$	$10^{-7}-10^{-6}$	$10^{-6}-10^{-5}$	$10^{-13}-10^{-12}$
$\ln T$	$10^{-8}-10^{-7}$	$10^{-5}-10^{-4}$	$10^{-7}-10^{-6}$	$10^{-7}-10^{-6}$	$10^{-13}-10^{-12}$

Продолжение табл. 3

	$\frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$\frac{\partial^2}{\partial s\partial z}$	$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$	$\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}$	$\frac{\partial^2}{\partial z\partial t}$
$\ln p$	10^{-8}	$10^{-12}-10^{-11}$	$10^{-11}-10^{-10}$	$10^{-12}-10^{-11}$	$10^{-11}-10^{-10}$
$\ln\alpha$	$10^{-8}-10^{-7}$	$10^{-11}-10^{-10}$	$10^{-11}-10^{-10}$	$10^{-12}-10^{-11}$	$10^{-10}-10^{-9}$
$\ln T$	$10^{-8}-10^{-7}$	$10^{-11}-10^{-10}$	$10^{-11}-10^{-10}$	$10^{-12}-10^{-11}$	$10^{-10}-10^{-9}$

Что же касается до кинематических элементов, то большое значение имеют дивергенция скорости $\Theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$ и вихрь. В табл. 4 даны Θ, горизонтальные и вертикальные составляющие вихря, а также

и их производные. По поводу составления Θ следует сказать, что здесь мы имеем дело с суммой слагаемых, порядок коих один и тот же: 10^{-5}—10^{-4} (см. табл. 1). Отсюда еще вовсе не следует что и Θ имеет тот же порядок, мы можем лишь считать, что порядок Θ не превышает этой величины, но он может оказаться и значительно меньшим. В качестве контроля можно привлечь к рассмотрению уравнение неразрывности:

$$\Theta = \frac{d\ln\alpha}{dt}.$$

Беря из таблицы 3 порядок $\frac{d\ln\alpha}{dt}$ (10^{-6}—10^{-5}) можно приписать его Θ. Аналогичным образом, вычисляя вертикальную составляющую вихря Ω_z, имеем $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, т. е. Ω_z есть сумма двух членов одного и того же порядка (10^{-5}—10^{-4}). Только непосредственный анализ карт может дать истинный порядок Ω_z.

Таблица 4

		$\frac{\partial}{\partial s}$	$\frac{\partial}{\partial z}$	$\frac{\partial}{\partial t}$	$\frac{d}{dt}$
Θ	10^{-6}—10^{-5}	10^{-11}—10^{-10}	10^{-9}—10^{-8}	10^{-10}—10^{-9}	10^{-10}—10^{-9}
$\Omega_{гор}$	10^{-3}—10^{-2}	10^{-8}—10^{-7}	10^{-5}—10^{-4}	10^{-7}—10^{-6}	10^{-7}—10^{-6}
Ω_z	10^{-5}—10^{-4}	10^{-10}—10^{-9}	10^{-8}—10^{-7}	10^{-9}—10^{-8}	10^{-9}—10^{-8}

В заключение этого параграфа приведем таблицу некоторых постоянных: ω_s, ω_z (проекции угловой скорости вращения земли), μ (коэффициента вязкости), g (ускорения силы тажести), $\frac{\partial g}{\partial s}$, $\frac{\partial g}{\partial z}$ и R.

Таблица 5

ω_s	ω_z	μ	g	$\frac{\partial g}{\partial s}$	$\frac{\partial g}{\partial z}$	R
10^{-4} [1]	10^{-4} [2]	10^{-3}—10^{-2}	10^{1}	10^{-8} [3]	10^{-6}	287.04

Следует особенно подчеркнуть большое число для величины μ, стоящей в нашей таблице. Измерения над коэффициентом вязкости воздуха, поставленные в лабораторной обстановке приводят к значительно меньшим цифрам и дают примерно 10^{-7} $м^{-1}$ $т^{1}$ $с^{-1}$. Величина μ в таблице 5 представляет так называемую „виртуальную" вязкость и получается косвенным путем из осредненных наблюдений над свободной атмосферой. Подробнее об этом будет сказано в главе VIII.

§ 10. Порядок величин метеорологических элементов (продолжение). В этом параграфе мы соберем вместе правила пользования понятием порядка и на примерах покажем, как эти правила прилагаются к дифференциальным уравнениям движущейся атмосферы (см. 5). Для простоты пред-

[1]) Между 20° N и 20° S ω_s меньше.

[2]) Севернее 70° N и южнее 70° S ω_z меньше.

[3]) Между 20° N и 20° S, а также севернее 70° N и южнее 70° S $\frac{\partial g}{\partial s}$ меньше.

положим, что мы имеем дело с уравнением, содержащим лишь три члена (совершенно очевидно, что произвольный случай можно постепенно свести к этому). Запишем его так:

$$A_1 + A_2 = B.$$

1. Если в уравнении встречаются члены различных порядков и если имеется член, порядок коего в 100 (или более) раз меньше наибольшего встречающегося в уравнении порядка, то этим членом можно пренебречь. Например, если A_1 и A_2 имеют порядок от 10^n до 10^{n+1}, а B от 10^{n-2}, до 10^{n-1}, то приближенно можно написать

$$A_1 + A_2 = 0.$$

2. Члены, коими мы пренебрегаем, никак нельзя полагать равными нулю: нужно помнить, что отброшены они лишь при суммировании, по сравнению с другими. Так в предыдущем случае

$$B \neq 0.$$

3. В уравнении должно быть не меньше двух членов более высокого чем остальные порядков. Так, если окажется, например, что только A_1 имеет порядок от 10^n до 10^{n+1}, а A_2 и B заключаются между 10^{n-2} и 10^{n-1}, уравнение приведет нас к противоречию. Правило это полезно при контроле вычислений.

4. При умножении двух членов порядка $10^m - 10^{m+1}$ и $10^n - 10^{n+1}$ мы получим непосредственно порядок произведения в виде $10^{m+n} - 10^{m+n+3}$ (мы пишем 10^{m+n+3}, а не 10^{m+n+2}, ибо возможны члены вида 5.10^{m+1} и 5.10^{n+1}, а их произведение будет 25.10^{m+n+2}, т. е. 10^{m+n+3}). Этот интервал обычно удается сузить, считая, что порядок произведения $10^{m+n+1} - 10^{m+n+2}$. Однако, все же для большей точности следует обратиться непосредственно к эмпирическим данным и рассчитать из них величину произведения.

5. Если некая величина B является суммой двух или большего числа членов, имеющих один и тот же порядок $10^n - 10^{n+1}$, мы можем сделать, вообще говоря, лишь одно заключение: порядок B не превышает $10^n - 10^{n+1}$.

6. Если отдельные члены меняются независимо друг от друга и имеют один и тот же порядок, то и сумма их будет того же порядка; если же между отдельными членами существует зависимость,—порядок их суммы может быть значительно меньшим. На практике бывает весьма трудно сказать, могут ли те или иные члены меняться независимо от других.

7. Уравнение, получаемое путем отбрасывания членов малого порядка, нельзя ни дифференцировать, ни интегрировать. Нужно принимать в расчет всегда полные, точные уравнения и продифференцировав или проинтегрировав их, затем уже упрощать полученные уравнения отбрасыванием членов малого порядка, если таковые члены останутся.

Правила эти применим к некоторым примерам. Рассмотрим сперва общие уравнения движения атмосферы, кои напишем в виде (см. § 6)

$$\frac{du}{dt} = -\alpha\frac{\partial p}{\partial x} + d_x + \alpha R_x, \qquad \frac{dv}{dt} = -\alpha\frac{\partial p}{\partial y} + d_y + \alpha R_y,$$

$$\frac{dw}{dt} = -g - \alpha\frac{\partial p}{\partial z} + d_z + \alpha R_z,$$

где

$$d_x = 2v\omega_z - 2w\omega_y, \qquad d_y = -2u\omega_z, \qquad d_z = 2v\omega_y,$$

$$R_x = \frac{\mu}{3}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\nabla^2 u, \qquad R_y = \frac{\mu}{3}\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\nabla^2 v, \qquad R_z = \frac{\mu}{3}\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\nabla^2 w.$$

Посмотрим, каков порядок членов, стоящих здесь в правой части. На основании табл. 1 и 5 предыдущего параграфа имеем

$$d_x = 10^{-4}(10^0 - 10^1) + 10^{-4}(10^{-2} - 10^{-1}) = (10^{-4} - 10^{-3}) + (10^{-6} - 10^{-5}),$$
$$d_y = 10^4(10^0 - 10^1) = 10^{-4} - 10^{-3}, \quad d_z = 10^{-4}(10^0 - 10^1) = 10^{-4} - 10^{-3}.$$

Таким образом

$$0(d_x) = 10^{-4} - 10^{-3}, \quad 0(d_y) = 10^{-4} - 10^{-3}, \quad 0(d_z) = 10^{-4} - 10^{-3}.$$

Перейдем к членам, содержащим коэффициент вязкости μ. Имеем на основании таблиц 5, 4 и 1:

$$0(R_x) = 0(R_y) = (10^{-3} - 10^{-2})(10^{-11} - 10^{-10}) + (10^{-3} - 10^{-2})[(10^{-10} - 10^{-9}) + (10^{-10} - 10^{-9}) + (10^{-5} - 10^{-4})] = (10^{-13} - 10^{-12}) + (10^{-12} - 10^{-11}) + (10^{-12} - 10^{-11}) + (10^{-7} - 10^{-6}) = (10^{-7} - 10^{-6}),$$
$$0(R_z) = (10^{-3} - 10^{-2})(10^{-9} - 10^{-8}) + (10^{-3} - 10^{-2})[(10^{-10} - 10^{-9}) + (10^{-10} - 10^{-9}) + (10^{-8} - 10^{-7})] = (10^{-11} - 10^{-10}) + (10^{-12} - 10^{-11}) + (10^{-12} - 10^{-11}) + (10^{-10} - 10^{-9}) = 10^{-10} - 10^{-9}.$$

Таким образом приближенно

$$\alpha R_x \backsim \alpha\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = (10^{-4} - 10^{-3}); \quad \alpha R_y \backsim \alpha\mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = (10^{-4} - 10^{-3}), \quad \alpha R_z \backsim$$
$$\backsim \alpha\mu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\mu}{3}\frac{\partial \Theta}{\partial z} = (10^{-7} - 10^{-6}).$$

Отсюда, между прочим, замечаем, что с большой точностью можно считать силы внутреннего трения лежащими в горизонтальной плоскости.

Для контроля оценки выпишем еще оценку ускорений и градиента давления. Из табл. 1 и 2 имеем

$$0\left(\frac{du}{dt}\right) = (10^{-4} - 10^{-3}); \quad 0\left(\frac{dv}{dt}\right) = (10^{-4} - 10^{-3}), \quad 0\left(\frac{dw}{dt}\right) = (10^{-6} - 10^{-5})$$
$$0\left(\alpha\frac{\partial p}{\partial x}\right) = (10^{-4} - 10^{-3}), \quad 0\left(\alpha\frac{\partial p}{\partial y}\right) = (10^{-4} - 10^{-3}); \quad 0\left(\alpha\frac{\partial p}{\partial z}\right) =$$
$$= 10^1, \quad 0(g) = 10^1.$$

Вводя все эти члены в уравнения гидромеханики и пренебрегая членами малых порядков, приходим к следующей упрощенной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = -\alpha\frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega_z v + \alpha\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$
$$\frac{dv}{dt} = -\alpha\frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega_z u + \alpha\mu\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$
$$0 = g + \alpha\frac{\partial p}{\partial z}.$$

При этом первые два из этих уравнений выполняются с точностью до $\frac{1}{100}$, а последнее с точностью до $\frac{1}{1000}$. Получив эти уравнения, следует, прежде чем мы захотим их интегрировать, вспомнить высказанное нами в начале этого параграфа правило седьмое: уравнения нельзя дифференцировать. Действительно желая, например, исключить давление из нашей

системы уравнений, мы не имеем права, вообще говоря, взять перекрестные производные, а должны обратиться к общим, неупрощенным уравнениям.

В качестве 2-го примера рассмотрим, можно ли упростить выражение для индивидуальных производных от v_s, v_z, p, α и T по времени. Посмотрим отдельно, что получится для свободной атмосферы или в горных областях и близ поверхности земли. В свободной атмосфере или горных областях:

$$\frac{dv_s}{dt}=\frac{\partial v_s}{\partial t}+u\frac{\partial v_s}{\partial x}+v\frac{\partial v_s}{\partial y}+w\frac{\partial v_s}{\partial z}.$$

Таблица 1 дает нам для всех этих трех членов один и тот порядок— $10^{-4}-10^{-3}$, следовательно, сумма должна быть оставлена в том виде, в каком она нам дана, то же можно сказать и про $\frac{dv_z}{dt}=\frac{\partial v_z}{\partial t}+u\frac{\partial v_z}{\partial x}+v\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=(10^{-6}-10^{-5})$, $\frac{d\alpha}{dt}=\frac{\partial\alpha}{\partial t}+u\frac{\partial\alpha}{\partial x}+v\frac{\partial\alpha}{\partial y}+v_z\frac{\partial\alpha}{\partial z}$, $\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}$, только $\frac{dp}{dt}$ можно несколько упростить, ибо $\frac{dp}{dt}=\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+v_z\frac{\partial p}{\partial z}=(10^{-5}-10^{-4})+(10^{-6}-10^{-5})+(10^{-6}-10^{-5})+(10^{-4}-10^{-3})$ и для $\frac{dp}{dt}$ можно оставить $\frac{dp}{dt}=\frac{\partial p}{\partial t}+v_z\frac{\partial p}{\partial z}$.

Близ поверхности земли (ровная местность) можно написать $\frac{dv_s}{dt}=\frac{\partial v_s}{\partial t}+u\frac{\partial v_s}{\partial x}+v\frac{\partial v_s}{\partial y}$ (членом $w\frac{\partial v_s}{\partial z}$ можно пренебречь), $\frac{dw_z}{dt}=\frac{\partial v_z}{\partial t}+u\frac{\partial v_z}{\partial x}+v\frac{\partial v_z}{\partial y}+w\frac{\partial v_z}{\partial z}$, $\frac{d\alpha}{dt}=\frac{\partial\alpha}{\partial t}+u\frac{\partial\alpha}{\partial x}+v\frac{\partial\alpha}{\partial y}+w\frac{\partial\alpha}{\partial z}$, $\frac{dT}{dt}=\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}$ (член $w\frac{\partial T}{\partial z}$ можно отбросить), $\frac{dp}{dt}=\frac{\partial p}{\partial t}+u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial p}{\partial z}$.

Мы видим отсюда, что ни в каком случае нельзя отождествлять индивидуальные и локальные (частные) производные по времени. Считая, что $\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}$, где f некий метеорологичсский элемент, мы с тем же правом можем положить просто $\frac{\partial f}{\partial t}=0$. Метеорологические теории, развиваемые на основании предположения $\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}$, имеют ценности ничуть не больше, чем простая теория: „погода не меняется“ (5).

§ 11. Классификация атмосферных движений. Начиная с того момента, как мы вывели уравнения Навье-Стокса, мы не перестаем считать, что движения атмосферы им подчиняются. Основываясь на эмпирических данных, мы показали в §§ 9 и 10, как можно эти уравнения упростить, если речь идет о движениях, происходящих в больших масштабах.

В динамической метеорологии мы сталкиваемся, однако, с изучением отдельных, конкретных атмосферных движений (циклоны, пассаты и т. п.); каждое из таких движений обладает своими особенностями, а потому, обращаясь к общим уравнениям, следует эти особенности отметить, прежде чем приступать к решению задачи. Здесь мы встречаемся с тем типом задач, о котором мы говорили в начале § 9 (там это было названо первой постановкой вопроса). Мы должны, подходя к изучению отдельного процесса, рассмотреть частную задачу, ввести упрощающие предположения, оставить лишь те величины, кои имеют значение для данного процесса, отбросить величины, влияние коих в данной задаче мало и кои, не изменив существенным образом результатов, вошли бы в рассуждения в качестве математического балласта. Построенные таким образом уравнения могут быть затем упрощены еще больше, путем отбрасывания членов

малого порядка и построения уравнений приближенных (на подобие того как мы из общих уравнений Навье-Стокса строили приближенные уравнения § 10). [1]

В этом параграфе мы хотим, имея в виду упомянутую конкретизацию отдельных задач, дать суммарную классификацию всех встречающихся движений земной атмосферы. При этом мы будем говорить здесь, главным образом, о движениях больших масштабов.

Естественно, что классификация, о которой здесь идет речь, должна базироваться на эмпирическом материале. Однако, в то время как данные наблюдений играли лишь вспомогательную роль, когда речь шла об общих уравнениях (упрощали уравнения), теперь эти данные имеют ведущее значение. Более того, в основу всякой конкретной метеорологической задачи должна быть положена некая качественная, построенная из наблюдений над атмосферной действительностью, модель и эту модель надлежит облечь в математическую форму, чтоб затем возможно было применить те или иные упрощенные уравнения механики. Таким образом, первой задачей динамической метеорологии является построение, на основании эмпирического материала, классификации атмосферных движений. Коль скоро такая классификация выполнена, мы можем приступить к решению отдельной проблемы, причем работа наша разобьется на несколько этапов. Именно, мы должны прежде всего найти, какое место занимает наша задача в системе классификации, т. е. какие качественные условия ее характеризуют. Во-вторых, постараться облечь качественные условия, отвечающие задаче, в математическую форму. В третьих — составить уравнения движения, при наличии полученных условий (напр. подчиняя этим условиям уравнения Навье-Стокса или Эйлера). В-четвертых — заняться исследованием этих уравнений, или в их точной форме, или построив из них сперва уравнения приближенные. Непреодолимые математические трудности, с коими приходится сталкиваться при такой постановке вопроса, приводят часто к необходимости отбросить четвертый, а иногда третий и второй этапы решения задачи и обойтись без математики. Именно приходится, установив место, занимаемое нашей проблемой в круге других (в системе классификации), постараться далее построить чисто качественную модель, развивая логически те специальные условия, кои данную модель характеризуют. Такая качественная постановка вопроса сыграла большую роль в деле развития динамической метеорологии: громадное количество результатов, с коими мы встретимся на протяжении этой книги, добыто именно таким путем. Так или иначе, но начинать приходится с классификации. Последнюю можно провести разными способами. Мы остановимся на двух системах: Джефриса (6) и Гемфриса (7). Джефрис предлагает расклассифицировать движения сперва грубо по их горизонтальной протяженности. Он говорит о четырех следующих типах движения: 1. Движения, обнимающие всю земную

[1] Сделаем здесь замечание о возможности замены уравнений движения жидкости вязкой уравнениями Эйлера, имеющими место для идеальной жидкости. „Лабораторная вязкость" воздуха очень мала и атмосфера вдали от поверхности земли могла бы считаться идеальной жидкостью. Только у поверхности имеется нечто подобное „пограничному слою" Прандтля, каковой поставляет различные возмущения типа вихрей, причем эти последние, попав за пределы „пограничного слоя" в свободную атмосферу, начинают в ней существовать, подчиняясь уже уравнениям Эйлера. Таким образом изучать свободную атмосферу — это значит изучать уравнения Эйлера. Отметим здесь же что подобное рассуждение было бы верно, если бы атмосфера всегда подчинялась уравнениям Навье-Стокса с лабораторным коэффициентом μ; на самом деле это едва ли имеет место. Атмосферные движения малых масштабов, о которых мы в последних параграфах не говорили, влияют повидимому, в силу их беспорядочности, на движение атмосферы en grand (среднее), так же, грубо говоря, как молекулярные движения влияют на среднее движение всей совокупности молекул и создают, аналогично молекулярным движениям, некую фиктивную вязкость (так называемую виртуальную вязкость, см. § 9). Мы таким образом приходим вновь к уравнениям Навье-Стокса, но уже с другим коэффициентом вязкости. К этому вопросу мы вернемся в главе VIII о вязкости.

атмосферу. Сюда можно отнести так называемую „общую циркуляцию“ и ее сезонные изменения. 2. Явления масштаба континентов, ежели эти явления существенным образом видоизменяют общую циркуляцию. Примеры: сезонные изменения давления и ветра на больших континентах, в частности муссоны. 3. Явления, захватывающие области, сравнимые, по масштабу, с островами Англии. В этом случае нельзя говорить о влиянии самого острова (в противоположность тому, что было в случае 2, когда сам континент был главным фактором существования явления), ибо влияние даже таких больших островов, как Австралия, все же еще слишком ничтожно. Но сюда следует как раз отнести движущийся циклон умеренных широт. 4. Движения малых масштабов от одного до ста километров (хотя бы в одном направлении). Сюда относятся тропические циклоны, торнадо, ветры. возникающие вследствие присутствия гор, ветры типа фёна [1]. Разбив таким образом движения на группы, мы можем теперь подготовить уравнения движения, исходя из принципа подобия, изложенного в § 8, а также путем аналогичных построений, проводимых для каждой конкретной задачи отдельно. В самом деле, мы имели, например, что чем больше масштабы движения, тем меньшую роль играет вязкость и тем большее значение имеют внешние силы (сила тяжести и сила Кориолиса). Поэтому мы можем ожидать, что, когда речь идет о движениях первого из перечисленных выше, класса, то в уравнениях можно отбросить силы вязкости, но надо оставить силу Кориолиса. Напротив, когда речь идет о движениях малой протяженности, с большой точностью можно отбросить Кориолисову силу, но едва ли всегда можно пренебречь вязкостью. Чтоб решить вопрос окончательно, мы должны обратиться в каждом конкретном случае к уравнениям гидромеханики. Рассмотрим уравнения, упрощенные нами в § 10:

$$\frac{du}{dt} = -\alpha\frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega_z v + \alpha\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\quad \frac{dv}{dt} = -\alpha\frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega_z u + \mu\alpha\frac{\partial^2 v}{\partial z^2};\quad 0 = g + \alpha\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Джефрис предлагает разбить все движения, помимо того как мы это проделали только что, на три класса, в зависимости от того, как можно эти приближенные уравнения упростить еще дальше. Именно, будем сравнивать все члены, входящие в эти уравнения, с величиной градиента давления.

А) Те движения, в коих члены, содержащие силы Кориолиса и вязкие силы, малы по сравнению с градиентом давления, назовем движениями Эйлеровыми $\left(\text{ибо здесь мы приходим к уравнениям Эйлера } \frac{dw}{dt} = 0\right)$. Для таких движений можно написать просто

$$\frac{du}{dt} = -\alpha\frac{\partial p}{\partial x};\quad \frac{dv}{dt} = -\alpha\frac{\partial p}{\partial y},\quad 0 = g + \alpha\frac{\partial p}{\partial z}.$$

В этой главе не место подробно остан[illegible]ться на р[illegible] $u, \Delta v, \ldots$ из на-
возможных движений, подчиняющихся [illegible]динат и [illegible] $(\Delta s, \Delta z, \Delta t)$ по-
все же, сославшись на принцип подоб[illegible]ценка произв[illegible]ных, как мы уже
движения малых масштабов (малое зн[illegible]льших масштабов и для больших
ших скоростей (малое μ), а потому [illegible] хотя бы из величин разностей Δs,
численных выше классов. Типичным[illegible] и при том приближенной). Если бы
тропические циклоны и торнадо к[illegible]щий и начали производить более ча-
[illegible]ожидать получения более точных, но
[illegible]ждения, в коих чле[illegible]ренных значений наших производных.
зумеются движения, в коих чле[illegible] высказать относительно измерения
типа $v_s \frac{\partial v_s}{\partial s}$ и членами, предста[illegible]итов. Приборы дают нам неточные,
[illegible]скорости ветра, давления или темпе-

[1] Заметим, что для описания этих [illegible]ще более и более точные измерения, беря
§ 9 ибо там мы говорили о движениях [illegible] производя все более частые наблюдения,

как уже сказано было в конце § 10, мы не имеем права утверждать, что единственными существующими на поверхности земли движениями Эйлерова типа являются движения циклострофические.

Б) Те движения, в коих члены, содержащие ускорение и вязкие силы, малы по сравнению с силой Кориолиса, назовем геострофическими (терминология Шоу). Здесь можно написать

$$2\omega_z v = \alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \quad -2\omega_z u = \alpha \frac{\partial p}{\partial y}, \quad -g = \alpha \frac{\partial p}{\partial z},$$

откуда следует:

$$u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} = 0,$$

т. е. что горизонтальная составляющая градиента давления направлена перпендикулярно к горизонтальной составляющей ветра. Пересекая поверхности $p(x, y, z, t) = \text{const.}$ плоскостями, параллельными горизонтальной плоскости, мы получим линии (так называемые изобары), нормаль к коим имеет как раз направление вектора с компонентами

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, 0\right).$$

Мы можем, таким образом, сказать, что в случае геострофического движения ветер в каждой точке направлен по касательной к изобаре, проходящей через эту точку. К этому типу принадлежат различные движения 1-го, 2-го и 3-го класса. Наблюдения показывают на самом деле, что (в особенности на больших высотах) ветер очень незначительно отклоняется от изобар. Однако, в каждом отдельном случае необходимо более детальное исследование, причем следует считаться с возможностью существования движений промежуточного типа, в коих кроме силы Кориолиса надо сохранить или ускорения, или вязкие члены.

В) К этому последнему типу Джефрис относит движения, в коих можно пренебречь ускорениями и силами Кориолиса по сравнению с силами вязкости. В таких движениях градиенты давления уравновешиваются силами внутреннего трения и потому Джефрис называет их антитриптическими (τριψισ — трение). Уравнения их имеют вид:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad -g = \alpha \frac{\partial p}{\partial z}.$$

н
но на
разными му к таким движениям принадлежат береговые и морские бризы,
и Гемфри ры гор и долин.
сперва грубо разом, классификация Джефриса идет по двум направлениям:
рех следующи ы она учитывает горизонтальную протяженность явления,
ивает порядок еличин отдельных членов уравнений меха-

[1] Сделаем здесином атме о возмом движении.
вязкой уравнениями ыв ера, имеющи иге (7) движения атмосферы, классифи-
торная вязкость" возду очень мала ающим. Почти все движения, происхо-
могла бы считаться идеальной жидкостью. ы своим происхождением неравномер-
„пограничному слою" Прандтля, каковой по бивает все движения на: 1) происхо-
причем эти последние, попав за пределы 2) вследствие местного охлаждения,
начинают в ней существовать, подчиняясь уж ластей, 4) вследствие охлаждения
чать свободную атмосферу — это значит изучать -либо другими движениями. По-
подобное рассуждение было бы верно, если бы а идет о качественном описании
Навье-Стокса с лабораторным коэффициентом μ; к построению количественных,
Атмосферные движения малых масштабов, о которь с о взаимоотношениях притока
рили, влияют повидимому, в силу их беспорядочн авляет большие трудности и до
(среднее), так же, грубо говоря, как молекулярные остых частных случаях. Что же
всей совокупности молекул и создают, аналогично сь математическая постановка
тивную вязкость (так называемую виртуальную вязко
ходим вновь к уравнениям Навье-Стокса, но уже
К этому вопросу мы вернемся в главе VIII о вязкост

задачи весьма затруднительна, и по этому вопросу получено лишь весьма мало точных результатов, хотя в этом круге идей лежит чрезвычайно важная проблема устойчивости атмосферных движений.

Упомянем еще о той последовательности в описании атмосферных движений, коей придерживается Ган (8). Качественно описав процесс возникновения большинства атмосферных движений (исходя из неравномерности распределения температуры) и остановившись на картинах движений конвекционных, на простейших взаимоотношениях между разностями давлений и ветром, а также на влиянии отклоняющей силы вращения земли на движения, как малых так и больших масштабов, Ган переходит к детальному исследованию двух сортов движений: 1) обладающих дневным периодом (бризы, горные и долинные ветра) и 2) обладающих годичным периодом (муссоны). Далее, посвятив специальную главу общей циркуляции (Luftaustausch zwischen Äquator und Pol), Ган переходит к детальному рассмотрению всевозможных возмущений (Störungen) этой общей циркуляции, относя сюда барометрические минимумы, максимумы, движения, сопровождающиеся незамкнутыми формами изобар, фен, бору, торнадо, тромбы и др.

§ 12. Беспорядочные движения в атмосфере. Турбулентность. До сих пор мы предполагали, что пять функций u, v, w, p, ρ характеризующих движение атмосферы, точно связаны уравнениями Навье — Стокса. Последние

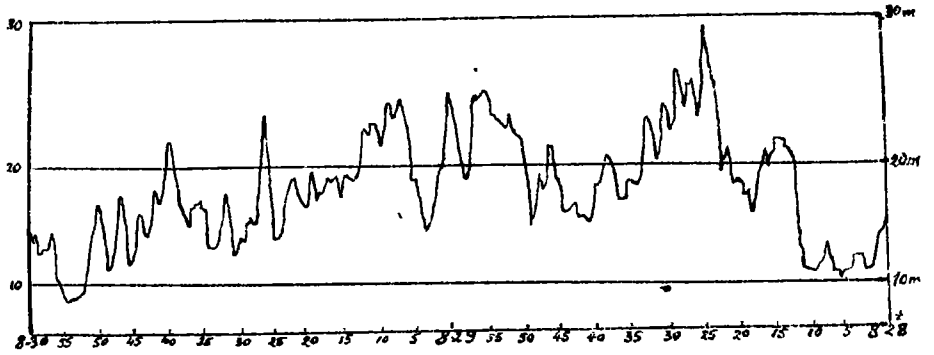

Рис. 3.

содержат производные от этих элементов по координатам и времени и эти производные суть, согласно элементарным правилам дифференцирования, пределы, к коим стремятся отношения приращений наших функций к приращениям независимых переменных, когда эти последние приращения стремятся к нулю. В § 9, желая оценить наши производные, мы заменяли их всюду отношениями конечных разностей, беря разности функций Δu, Δv,... из наблюдений и рассматривая разности координат и времени (Δs, Δz, Δt) порядка 10 *км*, 0,1 *км* и часа. Подобная оценка производных, как мы уже говорили в своем месте, годится для больших масштабов и для больших промежутков времени (что следует уже хотя бы из величин разностей Δs, Δz и Δt) и является лишь сглаженной (и при том приближенной). Если бы мы построили более густую сеть станций и начали производить более частые наблюдения, мы смогли бы ожидать получения более точных, но все же лишь приближенных и сглаженных значений наших производных. Аналогичные соображения можно высказать относительно измерения самих метеорологических элементов. Приборы дают нам неточные, сглаженные значения величины скорости ветра, давления или температуры.

Однако, пытаясь получить все более и более точные измерения, беря все более густую сеть станций и производя все более частые наблюдения,

мы столкнемся очень скоро с новой трудностью. Рассмотрим, например, изменение скорости в некоторой точке со временем. На рис. 3 изображены изменения скорости ветра в течение двух минут: от 8 ч. 28 мин. до 8 ч. 30 мин. 8 февраля 1889 года в Perpignan'е. Очевидно эта кривая представляет величину v в функции от t при заданных значениях x, y, z.

Спросим себя, что нам дадут здесь различные отношения $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, коими мы заменяем производную $\frac{\partial v}{\partial t}$, оценивая ее приближенно. Можем ли мы утверждать, что $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ стремится к некоторой определенной для данного момента величине, по мере уменьшения Δt? Можем ли мы быть уверенными в том, что предел, к которому мы, как нам казалось, стремимся при подобных приближенных оценках, действительно существует? Иначе говоря, существуют ли на самом деле различные члены в формулах Навье-Стокса, если отождествлять их с об'ектами атмосферной действительности.

В 1926 году появилась работа Л. Ричардсона (9) (L. Richardson) по вопросу об атмосферной диффузии. Второй параграф 1-й главы этой статьи озаглавлен: „Обладает ли ветер скоростью"? (Does the wind posess a velocity?).

Вопрос этот, говорит автор, на первый взгляд нелепый, оказывается серьезным при ближайшем рассмотрении. В самом деле, скорость частицы определяется обычно так: пусть частица проходит отрезок Δx (вдоль оси X) за промежуток времени Δt, тогда компонентом по оси X скорости нашей частицы называют производную

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Однако существует ли такой предел, когда речь идет о движении частицы воздуха? Закон движения частицы естественно считать непрерывной функцией времени, но, как хорошо известно математикам, непрерывная функция может не иметь в некоторых точках производной; более того, можно построить такие непрерывные функции, которые ни в одной точке не имеют производной. (См. напр. изложенный Ф. Клейном пример Вейерштрасса:

$$x = kt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(5^n \pi t),$$

где k не зависит от времени. Этот ряд дал бы определенное положение частицы в любой момент, ибо ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$$

сходится и представил бы x как непрерывную функцию от t, но рассчитанное из него $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ не стремится ни к какому пределу).

Предположим что движение частиц воздуха действительно таково, что не сущесвует предела $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, когда $\Delta t \to 0$. Имеем ли мы тогда право пользоваться дифференциальными уравнениями Навье-Стокса? Очевидно нет, ибо уравнения эти были построены в предположении, что существуют первые производные от метеорологических элементов и, что эти производные, также как и самые элементы, суть непрерывные функции координат и времени, мы же видим, что даже уже скорость может оказаться лишенной математического смысла. Но если дифференциальные уравнения механики неприменимы, то что же можем мы предложить взамен?

Представим себе движение воздушных частиц, происходящее по закону

$$x = x(a, b, c, t),\ y = y(a, b, c, t),\ z = z(a, b, c, t).$$

Если a, b, c суть координаты в „начальный“ момент, то

$$x-a,\ y-b,\ z-c$$

будут давать компоненты отклонения частицы от начального положения к моменту t. Назовем осредненными по времени значениями отклонений и обозначим через $\overline{x-a}$, $\overline{y-b}$, $\overline{z-c}$ следующие функции от a, b, c, t и Δt:

$$\overline{x-a}=\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}}[x(a,b,c,\tau)-a]d\tau,\quad \overline{y-b}=\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}}[y(a,b,c,\tau)-b]d\tau,$$

$$\overline{z-c}=\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}}[z(a,b,c,\tau)-c]d\tau,$$

где Δt так называемый интервал осреднения. Даже если $x-a$, $y-b$, $z-c$ не имеют производных по времени, выражения $\overline{x-a}$, $\overline{y-b}$, $\overline{z-c}$ для „средних законов движения“ могут этими производными обладать. Предположим, что это имеет место относительно законов движения воздуха. Приведенный нами выше пример этому условию удовлетворяет. В самом деле:

$$\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{t-\frac{\Delta t}{2}}^{t+\frac{\Delta t}{2}}x\,dt=\frac{1}{\Delta t}\left|\begin{matrix}t+\frac{\Delta t}{2}\\ t-\frac{\Delta t}{2}\end{matrix}\right.\left\{\frac{kt^2}{2}+\sum\left(\frac{1}{10}\right)^n\frac{1}{\pi}\sin 5^n\pi t\right\}=$$

$$=kt+\sum\left(\frac{1}{2}\right)^n 2\frac{\sin\frac{5^n\pi\Delta t}{2}}{5^n\pi\Delta t}\cos 5^n\pi t,$$

причем ряд

$$\frac{\partial\overline{x}}{\partial t}=k-\frac{2}{\Delta t}\sum\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{5^n\pi\Delta t}{2}\sin 5^n\pi t$$

сходится, ибо сходится ряд $\sum\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Можно принять более общее определение осреднения, вводя „плотность“ осреднения $D(\tau)$ и выражая

$$\overline{x-a},\ \overline{y-b},\ \overline{z-c}$$

следующим образом

$$\overline{x-a}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}D(\tau)[x(a,b,c,\tau)-a]d\tau,$$

$$\overline{y-b}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}D(\tau)[y(a,b,c,\tau)-b]d\tau,\quad \overline{z-c}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}D(\tau)[z(a,b,c,\tau)-c]d\tau$$

и предполагая что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}D(\tau)d\tau=1$$

(предыдущий закон получается из этого, если взять $D=0$ вне интервала

$$t-\frac{\Delta t}{2}\leq\tau\leq t+\frac{\Delta t}{2} \text{ и } D(\tau)=\frac{1}{\Delta t}$$

внутри этого интервала).

Затруднение, с которым мы встретились, когда пытались приближаться к производным путем построения все более и более точных наблюдений, отпадает, коль скоро мы примем, что отклонения совершаются в реальных движениях не по закону $x-a$, $y-b$, $z-c$, а по закону, представляющему $\overline{x-a}$, $\overline{y-b}$, $\overline{z-c}$. В самом деле, с одной стороны будет обеспечено существование производных по времени и мы будем знать, что при вычислении $\frac{\Delta\overline{x}}{\Delta t}$ мы действительно приближаемся к некоторому числу, с другой стороны мы имеем возможность, взяв достаточно большой интервал осреднения Δt, производить наблюдения для сравнения с теорией, в соответствии с этим интервалом и может быть не так часто, как мы прежде должны были бы это делать.

То, что мы говорили о функциях $x-a$, $y-b$, $z-c$, можно повторить и про другие гидродинамические элементы u, v, w, p, ρ. Кроме того, можно ввести еще и осреднения по об'ему, так что имея некую функцию $\Phi(x, y, z, t)$ заменить изучение ее рассмотрением функции

$$\overline{\Phi}=\int\int\int\int_{-\infty}^{\infty} D(\xi, \eta, \zeta, \tau)\,\Phi(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, t+\tau)\,d\xi d\eta d\zeta d\tau$$

где D попрежнему есть плотность осреднения и

$$\int\int\int\int_{-\infty}^{\infty} D(\xi, \eta, \zeta, \tau)\,d\xi d\eta d\zeta d\tau=1.$$

Мы получаем, таким образом ответ на поставленный выше вопрос: взамен уравнений (дифференциальных) гидромеханики мы должны построить новые уравнения, в коих, в качестве функций, подлежащих определению, фигурировали бы выражения $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$, $\overline{p}$ и $\overline{\rho}$.

Метод построения средних зачастую является весьма важным подспорьем в решении задач динамической метеорологии, ибо он позволяет широко пользоваться эмпирическим материалом, метод этот принципиально, однако, необходим при изучении движений малых масштабов и притом беспорядочных, быстро меняющихся от точки к точке и со временем. Подобные движения называются „турбулентными". Мы посвящаем им специальную главу, в каковой и вернемся к детальному рассмотрению законов осреднения и соотношений, связывающих осредненные метеорологические элементы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Süring. Leitfaden der Meteorologie.
2. Jeans. Dynamical Theory of Gases. 1924.
3. Encyklopädie d. mathematischen Wissenschaften, Bd. VII. № 2. 1910.
4. V. Bjerknes. Geofysiske Publikationer, vol. V. № 11. Über die hydrodynamische Gleichungen (1929).
5. T. Hesselberg und A. Friedmann. Die Grössenordnung d. meteorologischen Elemente und ihrer räumlichen und zeitlichen Ableitungen. Veröff. d. Geophysik. Inst., Leipzig (1914), H. 6.
6. H. Jeffreys. On the Dynamics of Wind. Quart. Journ. of Meteorology, vol. 48, 1922, p. 29—47.
7. Humphreys. Physics of the air, 1929.
8. Hann-Süring. Lehrbuch der Meteorologie. 1926.
9. L. Richardson. Atmospheric diffusion on a distance neighbour graph, Proc. Roy. Soc. London. vol. CX, 1926. p. 729—757.

Глава III

Термодинамика атмосферы

Изменения состояния атмосферного воздуха должны изучаться в динамической метеорологии вместе и неразрывно с движением воздушных масс. Эти изменения состояния равно как и движение воздушных масс происходят вследствие притока энергии извне или перераспределения энергии внутри воздушной массы. Поэтому мы должны начать наше изучение с общих начал термодинамики, к которым теперь и обратимся.

§ 1. Уравнение состояния атмосферного воздуха. Атмосфера представляет собою смесь различных газов, которые в общем подчиняются тем же законам, каким подчиняются идеальные газы. Приложимость законов идеальных газов к атмосфере осложняется, однако, присутствием в составе атмосферы такого неустойчивого элемента, как водяной пар. Если исключить из рассмотрения водяной пар, то состав атмосферы настолько однородный, что его можно считать постоянным до высоты примерно 20 *км*. Эта смесь газов постоянного состава (78,1% азота, 20,9% кислорода, 0,94% аргона, 0,0033% водорода и 0,0005% гелия) обычно обозначается термином, „сухой воздух".

Вначале мы исследуем температуру, давление и плотность сухого воздуха, а затем введем необходимые коррективы на содержащийся в воздухе водяной пар и наконец на процессы конденсации.

Уравнение состояния для какого нибудь газа или постоянной по своему составу смеси газов, выражает соотношение, которое связывает температуру, давление и плотность единицы массы газа.

Из трех величин p, α и T, характеризующих состояние тела только две будут независимыми переменными. Для всякого тела должна существовать между этими величинами некоторая функциональная зависимость, т. е. должно иметь место уравнение $f(T, p, \alpha) = 0$. Это уравнение и называется уравнением состояния тела.

Для сухого воздуха законы Бойля-Мариотта и Гэ-Люссака дают соотношение $p\alpha = p_0\alpha_0\left(1+\frac{1}{273}t\right)$ где p и α суть давление и удельный об'ем (т. е. об'ем единицы массы газа), а индексы $_0$ относятся к начальному состоянию газа (при температуре 0° С), t — температура в градусах Цельсия. Введя абсолютную температуру $T = t + 273$, можем написать

$$p\alpha = p_0\alpha_0\frac{T}{273}$$

или

$$p\alpha = RT,$$

где

$$R = \frac{p_0\alpha_0}{273}.$$

Если α_0 означает удельный об'ем при стандартном давлении p_0 (например, $p_0 = 760$ *мм* ртутного столба, или $p_0 = 1000$ *мбр.*), то R становится характеристической газовой постоянной данного газа или смеси газов.

Так как при стандартном p_0 величина R зависит только от α_0, которое по закону Авогадро (Avogadro) изменяется обратно пропорционально молекулярному весу газа, то

$$R = \frac{R_a}{M},$$

где R_a есть универсальная газовая постоянная а M молекулярный вес газа или смеси газов.

Соотношение $p\alpha = RT$ или $p = \rho RT$ называется уравнением Клапейрона.

Приведем значения постоянной R для сухого воздуха в различных системах единиц:

p и ρ в *см, гр, сек.*	$R = 2{,}87042.10^6$,
p и ρ в *м, т, сек.*	$R = 287{,}042$,
p в *мбр.*, ρ в *м, кг.*	$R = 2{,}87042$,
p в *мбр.*, ρ в *м, т.*	$R = 2870{,}42$.

§ 2. Первое начало термодинамики. Уравнение притока энергии. Рассмотрим некоторый жидкий об'ем и пусть жидкость, заполняющая этот об'ем, находится в движении под действием об'емных сил F, проекции которых на координатные оси пусть будут X, Y, Z.

Назовем элемент массы через dm, поверхность, заключающую об'ем, занимаемый рассматриваемой массой, обозначим через σ, а элемент поверхности через $d\sigma$. Мгновенные составляющие скорости элемента dm, как всегда, обозначим через u, v, w.

Тогда уравнения движения, в самом общем виде, напишутся, как было показано (Гл. II, § 5), таким образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= X - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right), \\ \frac{dv}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right), \\ \frac{dw}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Умножим эти уравнения соответственно на udm, vdm и wdm и сложим. Тогда получим

$$\frac{d(u^2+v^2+w^2)}{dt}\,\frac{dm}{2} = (Xu + Yv + Zw)\,dm - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}u + \frac{\partial X_y}{\partial y}u + \ldots\right)dm.$$

Проинтегрируем это уравнение по всем элементам dm рассматриваемого жидкого об'ема. Тогда получим

$$\frac{d\mathfrak{T}}{dt} = \iiint (Xu + Yv + Zw)\,dm -$$
$$- \iiint \left[\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right)u + \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)v + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)w\right]d\tau, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

так как $dm = \rho d\tau$, где $d\tau$ есть элемент об'ема. Здесь $\mathfrak{T} = \iiint \frac{u^2+v^2+w^2}{2}\,dm$ означает живую силу (кинетическую энергию) массы M.

Последний интеграл уравнения (2) можно преобразовать таким образом:

$$\iiint\left[\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\right)u+\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)v+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)w\right]d\tau=$$

$$=\iiint\left[\left\{\frac{\partial(X_x u)}{\partial x}+\frac{\partial(X_y u)}{\partial y}+\frac{\partial(X_z u)}{\partial z}\right\}+\right.$$

$$\left.+\left\{\frac{\partial(Y_x v)}{\partial x}+\frac{\partial(Y_y v)}{\partial y}+\frac{\partial(Y_z v)}{\partial z}\right\}+\left\{\frac{\partial(Z_x w)}{\partial x}+\frac{\partial(Z_y w)}{\partial y}+\frac{\partial(Z_z w)}{\partial z}\right\}\right]d\tau-$$

$$-\iiint\left[X_x\frac{\partial u}{\partial x}+Y_y\frac{\partial v}{\partial y}+Z_z\frac{\partial w}{\partial z}+\right.$$

$$\left.+X_y\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+Y_z\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)+Z_x\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]d\tau,$$

ибо (см. § 5, гл. II)

$$X_y=Y_x,\quad X_z=Z_x,\quad Y_z=Z_y.$$

Преобразовав далее первый интеграл последнего выражения по формуле Гаусса, получим:

$$\iiint\left[\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\right)u+\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)v+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)w\right]d\tau=$$

$$=\iint\left[\left\{X_x\cos(\widehat{N,X})+X_y\cos(\widehat{N,Y})+X_z\cos(\widehat{N,Z})\right\}u+\right.$$

$$+\left\{Y_x\cos(\widehat{N,X})+Y_y\cos(\widehat{N,Y})+Y_z\cos(\widehat{N,Z})\right\}v+$$

$$\left.+\left\{Z_x\cos(\widehat{N,X})+Z_y\cos(\widehat{N,Y})+Z_z\cos(\widehat{N,Z})\right\}w\right]d\sigma-\iiint\Omega d\tau,$$

где через Ω для сокращения обозначено выражение:

$$\Omega=X_x\frac{\partial u}{\partial x}+Y_y\frac{\partial v}{\partial y}+Z_z\frac{\partial w}{\partial z}+X_y\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+Y_z\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)+$$

$$+Z_x\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(*)$$

а нормаль N направлена внаружу жидкого об'ема.

Легко понять, что выражения

$$-\left[X_x\cos(\widehat{N,X})+X_y\cos(\widehat{N,Y})+X_z\cos(\widehat{N,Z})\right]d\sigma,$$

$$-\left[Y_x\cos(\widehat{N,X})+Y_y\cos(\widehat{N,Y})+Y_z\cos(\widehat{N,Z})\right]d\sigma,$$

$$-\left[Z_x\cos(\widehat{N,X})+Z_y\cos(\widehat{N,Y})+Z_z\cos(\widehat{N,Z})\right]d\sigma$$

представляют компоненты поверхностных сил, действующих на элемент поверхности $d\sigma$, а

$$-\int\int\int\left[\left\{X_x \cos(N,\widehat{X}) + X_y \cos(N,\widehat{Y}) + X_z \cos(N,\widehat{Z})\right\} u + \ldots\right] d\sigma$$

дает выражение работы всех поверхностных сил, действующих извне на поверхность σ, заключающую жидкий об'ем. В эти поверхностные силы входит давление и сила трения, которые внутри жидкого об'ема нейтрализуются по закону равенства действия и противодействия. Если обозначить проекции всех поверхностных сил, действующих на поверхность σ буквами $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ то уравнение (2) перепишется так:

$$\frac{d\mathfrak{T}}{dt} = \int\int\int_{\tau} (Xu + Yv + Zw)\, dm + \int\int_{\sigma} (\mathfrak{X}u + \mathfrak{Y}v + \mathfrak{Z}w)\, d\sigma + \int\int\int_{\tau} \Omega d\tau. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Два первые интеграла, стоящие в правой части уравнения (3), представляют работу массовых и поверхностных сил, действующих на жидкий об'ем τ. Если помножить обе части уравнения (3) на элемент времени dt, то получим уравнение для изменения кинетической энергии $\mathfrak{T}$ за бесконечно малый промежуток времени

$$d\mathfrak{T} = dS + \left(\int\int\int \frac{\Omega}{\rho} dm\right) dt, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

где dS означает работу, совершаемую всеми силами, действующими на жидкий об'ем τ за элемент времени dt.

Все уравнения сохраняют свое значение, как бы мал или как бы велик не был рассматриваемый об'ем τ. Таким образом последнее уравнение может быть написано и для жидкого бесконечно малого элемента dm. Тогда оно имеет такой вид:

$$d\mathfrak{T} = dS + \frac{\Omega}{\rho} dm dt. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Все изложенное до сих пор представляет простое следствие уравнений движения. Заметим, что для уравнений Навье-Стокса составляющие X_x, X_y, X_z... и т. д. имеют вид:

$$X_x = p + \lambda\Theta - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad X_y = Y_x = -\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$Y_y = p + \lambda\Theta - 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad X_z = Z_x = -\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$Z_z = p + \lambda\Theta - 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}, \qquad Y_z = Z_y = -\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

при чем

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

и по Стоксу

$$\lambda = \frac{2}{3}\mu$$

(см. § 6, гл. II).

Обратимся теперь к первому началу термодинамики, которое в самом общем виде может быть выражено таким образом:

Для всякой материальной системы существует некоторая функция, зависящая от мгновенного состояния системы, называемая полной энергией системы, которая обладает тем свойством, что в каждый элемент времени она возрастает настолько, насколько увеличивается за этот элемент времени сообщенная системе работа и настолько, каков будет приток энергии в виде тепла за этот промежуток времени.

Положим, как обычно, что эта полная энергия состоит из кинетической энергии $\mathfrak{T}$ и внутренней энергии I, которая есть ничто иное, как кинетическая энергия молекулярных движений. Внутренняя энергия тела есть функция состояния тела, т. е. зависит от плотности ρ и температуры T. Для элемента массы dm можно написать выражение внутренней энергии в виде

$$\mathrm{I} = f(\rho, T)\, dm.$$

В элемент времени dt внутренняя энергия элемента dm изменяется на величину

$$df(\rho, T) \cdot dm.$$

Для идеального газа, как показывается в термодинамике, внутренняя энергия элемента dm имеет выражение

$$dm \cdot Ec_v T,$$

где c_v есть теплоемкость при постоянном об'еме, а E — механический эквивалент тепла. Сопоставляя это с предыдущим выражением, получим

$$f(\rho, T) = Ec_v T.$$

Первое начало термодинамики в применении к элементу атмосферного воздуха dm можно написать таким образом

$$d\mathfrak{T} + d\mathrm{I} = dS + EdQdm, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

где dS означает работу совершенную массовыми и поверхностными силами над элементом dm, а $EdQdm$ — приведенное в элемент времени количество тепла.

Вычтем из уравнения (6) уравнение (5). Тогда получим

$$d\mathrm{I} = EdQdm - \frac{\Omega}{\rho} dm \cdot dt; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

разделив на элемент массы dm и элемент времени dt, получим выражение для изменения внутренней энергии единицы массы в единицу времени:

$$\frac{d\mathrm{I}}{dt} = E\frac{dQ}{dt} - \frac{\Omega}{\rho}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7')$$

Выразим функцию Ω через составляющие скорости т. е. подставим в уравнение (*) на место X_x, X_y и т. д. их значения. Тогда получим

$$\Omega = p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - P,$$

где под P разумеются члены, зависящие от трения.

Согласно уравнению неразрывности сжимаемой жидкости

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Поэтому

$$\Omega = -\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} - P.$$

Таким образом, собирая вместе уравнения (5, 6, 7), получим:

1) Выражение уравнения притока энергии (первое начало термодинамики)

$$d\mathfrak{T} + d\mathrm{I} = dS + EdQdm \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

и 2) два отдельных выражения для изменения, с одной стороны, кинетической энергии элемента dm, а с другой стороны внутренней энергии

$$\left.\begin{aligned} d\mathfrak{T} &= dS - dm\frac{pd\rho}{\rho^2} - dm\frac{Pdt}{\rho}, \\ d\mathrm{I} &= EdQdm + dm\frac{pd\rho}{\rho^2} + dm\frac{Pdt}{\rho}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (9 \text{ и } 10)$$

Последние формулы показывают, что внутренняя энергия элемента изменяется в течение элемента времени dt от трех причин: во первых, вследствие притока тепла, во вторых, вследствие сжатия и в третьих, вследствие трения.

Сравнение обоих уравнений показывает, что двухчлен

$$dm\frac{pd\rho}{\rho^2} + dm\frac{Pdt}{\rho}$$

представляет собою обмен кинетической энергии с одной стороны и потенциальной или внутренней энергии с другой.

Величина P, выражающая, сколько кинетической энергии переходит во внутреннюю тепловую энергию путем трения, называется „диссипацией энергии".

Выведем значение этой величины

$$\begin{aligned} -P = {} & \left[\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right]\frac{\partial u}{\partial x} + \left[\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right]\frac{\partial v}{\partial y} + \\ & + \left[\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right]\frac{\partial w}{\partial z} - \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \\ & - \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 - 2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] - \\ & - \mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] \end{aligned}$$

и так как

$$\lambda = \frac{2}{3}\mu,$$

то

$$\begin{aligned} -P = {} & \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 - \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \\ & - \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 - 2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]. \quad \ldots\ldots (11) \end{aligned}$$

Важно отметить тот факт, что в атмосфере всегда происходит рассеяние кинетической энергии. Вблизи земной поверхности кинетическая энергия воздуха теряется от столкновения с препятствиями, каковы скалы, холмы, дома и т. п. или преобразуется в движение деревьев, кустов

или травы или в потенциальную энергию поднятия морских волн и в кинетическую энергию движения поверхностного слоя воды в океане и прочих водных бассейнах.

Остановимся теперь на уравнении (10) и преобразуем его с помощью уравнения Клапейрона. Так как

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad -\frac{p}{\rho^2} d\rho + \frac{1}{\rho} dp = RdT,$$

то

$$dm \cdot \frac{pd\rho}{\rho^2} = dm \cdot \alpha dp - dmRdT,$$

и уравнение (10) принимает вид

$$d\mathrm{I} = EdQdm + \alpha dpdm - RdTdm + \alpha Pdmdt.$$

Разделив на элемент массы dm и элемент времени dt и обозначив через $\mathrm{I} = Ec_v T$ внутреннюю энергию, отнесенную к единице массы, получим

$$\frac{d\mathrm{I}}{dt} = E\frac{dQ}{dt} + \alpha\frac{dp}{dt} - R\frac{dT}{dt} + \alpha P$$

или

$$E\frac{dQ}{dt} + \alpha P = \frac{d\mathrm{I}}{dt} + \left(R\frac{dT}{dt} - \alpha\frac{dp}{dt}\right);$$

приняв далее во внимание дифференциальное соотношение, получаемое из уравнения Клапейрона

$$dp = R(\rho dT + Td\rho),$$

можем переписать предыдущие уравнение в виде

$$E\frac{dQ}{dt} + \alpha P = Ec_v\frac{dT}{dt} + p\frac{d\alpha}{dt}.$$

Помножая на термический коэффициент работы $A = \frac{1}{E}$, будем иметь:

$$\frac{dQ}{dt} + A\alpha P = c_v\frac{dT}{dt} + Ap\frac{d\alpha}{dt}.$$

Если обозначить количество тепла, притекающее в единицу времени к единице об'ема через ε, то $\frac{dQ}{dt} = \alpha\varepsilon$ и

$$\alpha[\varepsilon + A \cdot P] = c_v\frac{dT}{dt} + Ap\frac{d\alpha}{dt}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

В применении к идеальному газу первое начало может быть записано таким уравнением:

$$\left.\begin{aligned} dQ &= c_v dT + Apd\alpha \\ \text{или} \quad EdQ &= Ec_v dT + pd\alpha. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Это уравнение выражает, очевидно, такой процесс. К единице массы газа приводится малое количество тепла dQ. Это тепло отчасти идет на повышение температуры единицы массы, т. е. на увеличение внутренней энергии ее молекул, отчасти на работу расширения газа, причем работа

эта совершается против сил давления. Так как c_v есть теплоемкость при постоянном об'еме, то количество тепла необходимое для того, чтобы поднять температуру на dT, будет $c_v dT$. Второе слагаемое дает элементарную работу расширения при увеличении об'ема на $d\alpha$.

Заметим, что количество тепла dQ не есть полный дифференциал некоторой функции Q, а просто бесконечно малое количество. Оно может выражаться или в тепловых единицах (грамм — калориях) или в механических единицах энергии (эргах или джоулях).

Если принять во внимание уравнение состояния газа $p\alpha = RT$ и следующее из него дифференциальное соотношение

$$p d\alpha + \alpha dp = R dT, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

то уравнение притока энергии можно написать в одном из следующих трех видов:

$$dQ = c_v dT + A p d\alpha, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

$$dQ = c_p dT - A \alpha dp, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

$$dQ = \frac{c_p}{R} p d\alpha + \frac{c_v}{R} \alpha dp. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

При этом теплоемкость при постоянном давлении c_p и теплоемкость при постоянном об'еме c_v связаны известным соотношением

$$c_p - c_v = AR.$$

§ 3. **Адиабатические процессы.** Особый интерес представляют такие изменения состояния газа, при которых теплота не приводится извне и не отнимается от газа. Экспериментально можно было-бы осуществить это условие, если окружить данную массу газа оболочкой, непроницаемой для тепла. Адиабатические процессы, как увидим дальше, играют большую роль в динамической метеорологии.

Ясно, что при адиабатическом процессе три переменные p, α, T не будут независимыми одна от другой, две из них являются функциями третьей. Уравнение состояния и уравнение притока энергии, в котором надо положить $dQ = 0$ дают возможность выразить две из этих переменных через третью. Если в левых частях уравнений (15, 16, 17) мы положим $dQ = 0$ и исключим последовательно при помощи дифференциального уравнения (14) сначала p, потом α и наконец T, то получим три дифференциальных уравнения, в которых переменные легко разделяются. Проинтегрировав эти уравнения, получим следующие три соотношения, связывающие попарно три элемента: давление, удельный об'ем (или плотность) и температуру при адиабатическом изменении единицы массы газа:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\varkappa}, \quad p_1 \alpha_1^{\varkappa} = p_2 \alpha_1^{\varkappa}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\varkappa - 1}, \quad T_1 \alpha_1^{\varkappa - 1} = T_2 \alpha_2^{\varkappa - 1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Здесь

$$\varkappa = \frac{c_p}{c_v}.$$

Для атмосферного воздуха

$$c_p = 0{,}2375, \quad c_v = 0{,}1690, \quad \varkappa = 1{,}41.$$

Если обозначить $\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = \lambda$ (для атмосферного воздуха $\lambda = 0{,}2884$), то третье уравнение получит вид

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\lambda}.$$

Оно носит название уравнения Пуассона (Poisson). Заметим еще, что известные из термодинамики соотношения

$$c_p - c_v = AR$$

и

$$\frac{c_p}{c_v} = \varkappa,$$

дают возможность выразить c_p и c_v через три постоянные A, R и $\varkappa$. Именно:

$$c_p = \frac{AR\varkappa}{\varkappa - 1}, \quad c_v = \frac{AR}{\varkappa - 1}.$$

Укажем еще приближенное значение интеграла, выражающего механическую работу расширения, произведенную при адиабатическом процессе.

Из уравнения (15) имеем

$$pd\alpha = -Ec_v dT.$$

Интегрируя, получим

$$\int_1^2 pd\alpha = Ec_v (T_1 - T_2) = Ec_v T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\lambda}\right],$$

где индексы 1 и 2, относятся к начальному и конечному состояниям при адиабатическом процессе. Зная начальную температуру и давление массы воздуха в начале и в конце процесса, можем вычислить произведенную механическую работу. Удобно воспользоваться разложением правой части в ряд.:

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\lambda} = \left(1 - \frac{p_1 - p_2}{p_1}\right)^{\lambda} = 1 - \lambda\frac{p_1 - p_2}{p_1} - \frac{\lambda}{2\varkappa}\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1}\right)^2 + \ldots$$

откуда

$$1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\lambda} = \lambda\left[\frac{p_1 - p_2}{p_1} + \frac{1}{2\varkappa}\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1}\right)^2 + \ldots\right].$$

Поэтому для механической работы расширения единицы массы газа при адиабатическом процессе получаем следующее выражение:

$$\int_1^2 pd\alpha = \frac{1}{\varkappa} RT_1 \left[\frac{p_1 - p_2}{p_1} + \frac{1}{2\varkappa}\left(\frac{p_1 - p_2}{p_1}\right)^2 + \ldots\right]. \quad (21)$$

§ 4. Политропические изменения состояния. Для данной массы газа может существовать безчисленное множество путей перехода из одного

состояния в другое. Каждый такой путь может быть охарактеризован уравнением, связывающим переменные параметры p, α и T. Так как уравнение состояния газа дает другое такое соотношение, то один из параметров, очевидно, изменяется произвольно, а два другие являются зависимыми и изменяются определенным образом при данном пути перехода.

Простейшие уравнения изменения состояния суть следующие:

1) $p = \text{const}$ — изобары,
2) $T = \text{const}$ — изотермы,
3) $\alpha = \text{const}$ — изостеры,
4) $dQ = \text{const}$ — адиабаты.

Вообще, если изменение состояния характеризуется уравнением

$$p\alpha^k = \text{const}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

где k некоторое постоянное, то процесс называется **политропическим**, а кривая, выражаемая этим уравнением в системе координат (p, α) называется **политропой**.

Напишем три уравнения: 1) уравнение притока энергии, 2) уравнение состояния и 3) уравнение политропы, причем в дифференциальной форме

$$dQ = \frac{c_p}{R}\, pd\alpha + \frac{c_v}{R}\, \alpha dp,$$

$$\alpha dp + pd\alpha = RdT,$$

$$\alpha dp + kpd\alpha = 0.$$

Из второго и третьего получмм

$$(1 - k)\, pd\alpha = RdT,$$

$$(1 - k)\, \alpha dp = -kRdT.$$

Вставляя в первое уравнение, найдем

$$dQ = \frac{c_p - kc_v}{1 - k}\, dT.$$

Если обозначим $\frac{dQ}{dT}$ через γ, то будем иметь

$$\gamma = \frac{c_p - kc_v}{1 - k},$$

откуда

$$k = \frac{c_p - \gamma}{c_v - \gamma}.$$

Так как $\gamma = \frac{dQ}{dT}$ имеет очевидно физическое значение теплоемкости при данном процессе перехода, то можно сказать, что политропическим изменением состояния называется такое, при котором теплоемкость остается постоянной.

В частных случаях: при $k = 0$ получается изобара, при этом $\gamma = c_p$; при $k = \infty$ получается изостера, при этом $\gamma = c_v$; при $k = \varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ получается адиабата, при этом $\gamma = 0$. При $k = 1$ получается изотерма, при этом $\gamma = \infty$.

Предположим теперь, что кривая, характеризующая изменение состояния воздуха с высотою, следует политропе, это значит, что, если

поднимающаяся частица остается в равновесии с окружающей средой, то изменение ее состояния совершается по этой политропе.

Из уравнения

$$dT = -\frac{1-k}{kR}\alpha dp,$$

заменив в нем

$$dp = -\rho g dz,$$

получим

$$dT = \frac{1-k}{kR} g dz,$$

или

$$\frac{dT}{dz} = \frac{g}{R}\left(\frac{1}{k} - 1\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Для $k = \infty$ (однородная атмосфера, плотность не меняется с высотой) получим

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{R};$$

подставляя (в системе *см, гр, сек*)

$$R = 2{,}8704 \cdot 10^6,$$

получим

$$\frac{dT}{dz} = -3^\circ{,}4165 \cdot 10^{-4},$$

т. е. падение температуры в 3,°4 на каждые 100 *м* поднятия.

Такой температурный градиент называется иногда предельным градиентом и раньше предполагали, что такое падение температуры является вообще предельным для возможности равновесия. Однако, как будет далее показано, равновесие оказывается возможным и при градиентах, больших 3,°4 на 100 *м*, хотя равновесие становится неустойчивым уже при градиентах больших 0,981° на 100 *м*. Однако по отношению к такому неустойчивому равновесию градиент 3,°4 на 100 *м* вовсе не представляет предельного значения. На это обстоятельство указал одним из первых А. А. Фридман.

Высота политропической атмосферы H может быть получена, если проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$dz = \frac{R}{g}\frac{k}{1-k} dT$$

в пределах по z от 0 до H и по T от T_0 до 0°.

Тогда получается

$$H = \frac{R}{g}\frac{k}{k-1} T_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Для однородной атмосферы получим

$$H_0 = \frac{R}{g} T_0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

что при

$$R = 2{,}8704 \cdot 10^6$$

и при $T_0 = 273°$ дает

$$H_0 = 7{,}991 \cdot 10^5 \text{ см}.$$

Легко вычислить массу такой однородной атмосферы. Для этого служит формула

$$M = 4\pi \int_a^{a+H} r^2 \rho dr,$$

где a — радиус земного шара, r — расстояние концентрического шарового воздушного слоя от центра земли,

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho\left[(a+H)^3 - a^3\right] = \frac{4}{3}\pi\rho\left(3a^2H_0 + 3aH_0^2 + H_0^3\right),$$

или так как

$$\rho = \frac{p_0}{RT_0},$$

то

$$M = \frac{4}{3}\pi\frac{p_0}{g}\left(3a^2 + 3aH_0 + H_0^2\right) = 4\pi\frac{p_0}{g}\left(a^2 + aH_0 + \frac{1}{3}H_0^2\right),$$

что после подстановки численных значений дает

$$M \cong 5{,}2 \cdot 10^{11} \text{ гр.}$$

Для изотермической атмосферы ($k = 1$) H обращается в бесконечность, а для изменения давления с высотою получается формула

$$\frac{dp}{p} = -\frac{gdz}{RT_0},$$

или после интегрирования

$$\lg p - \lg p_0 = -\frac{g}{RT_0}z,$$

откуда

$$p = p_0 e^{-\frac{z}{H_0}}.$$

Наконец для адиабатической атмосферы ($k = \varkappa$)

$$\frac{dT}{dz} = \frac{g}{R}\left(\frac{1-\varkappa}{\varkappa}\right) = \frac{g}{R}\,\frac{c_v - c_p}{c_p} = -\frac{Ag}{c_p},$$

что дает падение температуры в 0,981° на каждые 100 *м* поднятия (адиабатический вертикальный температурный градиент γ_a). Высота адиабатической атмосферы

$$H_a = \frac{R}{g}\,\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\,T_0 = \frac{c_p}{Ag}\,T_0 = \frac{T_0}{\gamma_a}. \quad \ldots\ldots\ldots (26)$$

В частном случае при $T_0 = 273°$ получается

$$H_a = 2{,}79375 \cdot 10^6 \text{ м},$$

если пренебрегать изменением с высотой ускорения силы тяжести g.

Рассуждения наши должны несколько измениться, если принять во внимание изменение силы тяжести с высотой и внутреннее притяжение масс воздуха. В самом деле в этом случае масса ограниченная сферой радиуса r имеет выражение

$$4\pi \int_0^r \rho r^2 dr,$$

где до земного радиуса a будем иметь постоянную по величине массу земного шара M_1. Сила притяжения, оказываемая этой массой на материальную частицу, находящуюся на уровне r, будет иметь выражение

$$g = \frac{\varepsilon}{r^2} 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr.$$

Если мы переходим от r к $r+dr$, то давление dp уменьшается на величину gdr, т. е.

$$dp = -\frac{4\pi\varepsilon\rho}{r^2} dr \int_0^r \rho r^2 dr. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (27)$$

Для политропической атмосферы

$$p = \frac{p_0}{\rho_0^k} \rho^k.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{p_0}{\rho_0^k} k\rho^{k-2} \frac{d\rho}{dr} = \frac{p_0}{\rho_0^k} \frac{k}{k-1} \frac{d\rho^{k-1}}{dr}.$$

Дифференцируя уравнение (27), получим

$$\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} = -4\pi\varepsilon \int_0^r \rho r^2 dr,$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr}\right) = -4\pi\varepsilon\rho r^2$$

или, вставляя $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr}$,

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{p_0}{\rho_0^k} \frac{k}{k-1} \frac{d\rho^{k-1}}{dr}\right) = -4\pi\varepsilon\rho r^2,$$

$$\frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0^k} \left\{2r \frac{d\rho^{k-1}}{dr} + r^2 \frac{d^2\rho^{k-1}}{dr^2}\right\} = -4\pi\varepsilon\rho r^2,$$

или

$$\frac{p_0}{\rho_0^k} \frac{k}{k-1} \left\{\frac{2}{r} \frac{d\rho^{k-1}}{dr} + \frac{d^2\rho^{k-1}}{dr^2}\right\} = -4\pi\varepsilon\rho.$$

Полагая

$$\rho^{k-1} = u, \qquad \frac{1}{k-1} = n$$

и вводя

$$a^2 = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0^k}},$$

приходим к такому дифференциальному уравнению политропической атмосферы

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} + a^2u^n = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (28)$$

Для величины a^2 можно дать другое выражение, положив $\frac{T_0}{\rho_0^{k-1}} = \Theta_k$, каковую величину назовем „политропической температурой" модуля k. Политропическая температура есть очевидно та температура, которую принимает воздушная масса, если она будет приведена по политропе к плотности, равной единице.

Тогда

$$a^2 = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{k}{k-1}\frac{p_0}{\rho_0^k}} = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{k}{k-1}\frac{RT_0}{\rho_0^{k-1}}} = \frac{4\pi\varepsilon}{\frac{k}{k-1}R\Theta_k} = \frac{k-1}{k}\frac{4\pi\varepsilon}{R\Theta_k}.$$

Дифференциальное уравнение подобного типа подробно исследовал Эмден (Emden) [1]).

Интегрирование уравнения (28) дает возможность найти распределение плотности с высотой в политропической атмосфере. Зная же распределение плотности с высотой легко получить распределение давления и температуры с высотой, ибо

$$p = \frac{p_0}{\rho_0^k}\rho^k$$

и

$$T = \frac{1}{R}\frac{p_0}{\rho_0^k}\rho^{k-1}.$$

Произвольные постоянные при интегрировании уравнения (28) определятся во-первых из условия, что при $r = a$ имеем

$$\rho(a, C_1, C_2) = \rho_0,$$

а с другой стороны вертикальный температурный градиент при $r = a$ определит $\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{r=a}$:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{k-1}{R}\frac{p_0}{\rho_0^2}\left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{r=a}.$$

Для изотермической атмосферы ($k = 1$)

$$a^2 = 0, \quad n = \infty.$$

Но так как при этом $u = \rho^0$, то уравнение теряет свой смысл. Для вывода соответствующего уравнения для изотермической атмосферы напишем:

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{RT}{\rho}\frac{d\rho}{dr} = RT\frac{d\lg\rho}{dr}.$$

Подставляя в основное уравнение получим

$$\frac{d}{dr}\left(r^2RT_0\frac{d\lg\rho}{dr}\right) = -4\pi\varepsilon\rho r^2$$

или, производя дифференцирование,

$$2r\frac{d\lg\rho}{dr} + r^2\frac{d^2\lg\rho}{dr^2} = -\frac{4\pi\varepsilon}{RT_0}\rho r^2,$$

$$\frac{d^2\lg\rho}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\lg\rho}{dr} + b^2\rho = 0,$$

где положено

$$b^2 = \frac{4\pi\varepsilon}{RT_0}.$$

---

[1]) Emden — Gaskugeln. 1911.

Для адиабатической атмосферы ($k=\varkappa$)

$$a^2=\frac{c_p-c_v}{c_p}\frac{4\pi\varepsilon}{R\theta_k}=\frac{A}{c_p}\frac{4\pi\varepsilon}{\theta_k}=\gamma_a\frac{4\pi\varepsilon}{g\theta_k},$$

$$u=\rho^{\varkappa-1},\quad n=\frac{1}{\varkappa-1}=\frac{c_v}{c_p-c_v}.$$

§ 5. Влажность атмосферного воздуха. Пусть e упругость паров, содержащихся в воздухе, а e_m — упругость паров, насыщающих пространство при данной температуре ($e<e_m$). Пусть далее ρ_w — плотность водяного пара. Тогда уравнение состояния водяного пара имеет вид:

$$e=\rho_w R_w T,$$

где R_w — есть газовая постоянная водяного пара. Газовая постоянная, как известно, выражается через молекулярный вес газа по формуле

$$R=\frac{R_a}{M},$$

где R_a есть универсальная постоянная. Поэтому, если обозначить газовую постоянную для сухого воздуха через R', то

$$\frac{R_w}{R'}=1{,}605$$

или обратно

$$\frac{R'}{R_w}=0{,}623,$$

ибо молекулярный вес сухого воздуха $=29{,}8$, а молекулярный вес водяного пара $=18$.

Для водяного пара величина $\rho_w=\frac{e}{R_w T}$ есть абсолютная влажность — масса пара, содержащегося в единице об'ема влажного воздуха.

Отношение массы водяного пара к полной массе влажного воздуха, содержащегося в единице об'ема смеси называется удельной влажностью. Обозначим ее через q

$$q=\frac{\rho_w}{\rho}. \qquad (29)$$

Очевидно также, что $q=\rho_w\cdot\alpha$, т. е. удельная влажность есть масса пара, содержащегося в единице массы влажного воздуха.

Так как для сухого воздуха можем написать

$$p'=R'\rho' T,$$

а по закону Дальтона (Dalton), (закону парциальных давлений)

$$p=p'+e,$$

где p давление влажного воздуха, то

$$p=\rho_w R_w T+\rho' R' T=(\rho_w R_w+\rho' R')\,T.$$

Подставляя $\rho_w=\rho q$, $R_w=1{,}605R'$ получим

$$p=R'T(\rho q\,1{,}605+\rho')=R'T\rho\left(\frac{\rho'}{\rho}+1{,}605q\right).$$

Но

$$\rho = \frac{1}{\alpha}$$

и

$$\rho' = \frac{1-q}{\alpha}.$$

Поэтому

$$\frac{\rho'}{\rho} = 1 - q, \quad p = R'T\rho\,[1 + 0{,}605q]$$

или обозначая $R'\,[1 + 0{,}605q]$ через R будем иметь

$$p = \rho RT.$$

Здесь $R = R'\,[1 + 0{,}605q]$ играет роль газовой постоянной для влажного воздуха.

Можно было бы написать также

$$p = \rho R'T',$$

где T' есть некоторая новая фиктивная температура, которую Bjerknes предложил назвать виртуальной температурой.

Так как $T' = (1 + 0{,}605q)\,T > T$, то влажный воздух легче сухого при одних и тех же температуре и давлении.

Этот факт хорошо известен в метеорологии.

Разделив e на p получим, в силу (29)

$$\frac{e}{p} = \frac{1{,}605\rho_w R'T}{(1 + 0{,}605q)\,\rho R'T} = \frac{1{,}605}{1 + 0{,}605q}\,q,$$

или

$$e + 0.605qe = 1{,}605qp; \quad q = \frac{e}{1{,}605p - 0{,}605e}.$$

Так как e обычно мало сравнительно с p, то довольствуются часто приближенной формулой:

$$q = \frac{5}{8}\,\frac{e}{p}.$$

Напомним, что отношение $\frac{e}{e_m}$ называется относительной влажностью.

Некоторые авторы [например Маргулес (Margules)] пишут R в другом виде; а именно, если вставим в уравнение

$$R = R'\,[1 + 0{,}605q]$$

вместо q его значение, получим:

$$R = R'\left[1 + \frac{0{,}605e}{1{,}605p - 0{,}605e}\right] = R'\left[1 + \frac{0{,}605\,\frac{e}{p}}{1{,}605 - 0{,}605\,\frac{e}{p}}\right] =$$

$$= R'\left[\frac{1{,}605}{1{,}605 - 0{,}605\,\frac{e}{p}}\right],$$

или

$$R = R'\left(\frac{1}{1 - \frac{0{,}605}{1{,}605}\,\frac{e}{p}}\right) = \frac{R'}{1 - 0{,}377\,\frac{e}{p}}.$$

Так как $\frac{e}{p}$ обычно есть малая дробь, то с весьма большой точностью можно написать

$$R = 287{,}026 + 109\,\frac{e}{p}\left(\frac{м^2}{сек^2 \cdot C^\circ}\right).$$

Для воздуха при различных значениях отношения $\frac{e}{p}$ будем иметь

$\frac{e}{p}$	0	0,01	0,02
R	287,026	288,111	289,205.

Коль скоро $e < e_m$, водяной пар не насыщен и согласно данным опыта следует законам газового состояния.

Как известно давление e_m водяного пара, насыщающего пространство, есть функция только одной температуры пара. Оно выражается с большой степенью точности следующей эмпирической формулой Магнуса (Magnus)

$$e_m = 4{,}58 \cdot 10^{\frac{7{,}45t}{235+t}}\ мм \cdot Hg = 6{,}10 \cdot 10^{\frac{7{,}45t}{235+t}}\ мб, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (30)$$

так что при $t^\circ = 0$ давление пара, насыщающего пространство, $e_m = 4{,}58$ *мм* ртут. столба.

Явление насыщения совершенно не зависит от присутствия других газов. Таким образом выражение, что воздух может заключать не больше определенного количества пара, после чего он является насыщенным неточно. Не воздух, а самый водяной пар является насыщенным. Однако такое выражение находит себе некоторое оправдание в том факте, что давление насыщенного водяного пара определяется температурою воздуха, в котором он растворен.

§ 6. Адиабатическое поднятие сухого воздуха. Условия вертикального равновесия сухого атмосферного воздуха. Движения воздушных масс в атмосфере, никоим образом нельзя рассматривать как происходящие без притока или отдачи тепла. Но в первом приближении для движений происходящих на небольшом протяжении и в небольшие сравнительно промежутки времени, можно принимать изменения состояния движущихся воздушных масс адиабатическими. При этом температура поднимающейся сухой массы воздуха должна падать на 0.981° на каждые 100 *м* поднятия. Наблюдения, произведенные во время фена, когда можно бывает на ряде станций проследить температурные изменения спускающейся массы воздуха в общем подтверждают адиабатический характер такого процесса опускания. Интересно заметить, например, что в области Альп температурный градиент спускающегося воздуха на южном склоне оказывается ближе к теоретическому, чем на северном склоне. Фикер [1]) (Ficker) дает этому факту такое об'яснение. При спускании воздушных масс на северном склоне они встречают внизу массы с более низкой температурой, с которыми они постепенно смешиваются. На южной стороне более теплые массы утекают вверх и смешение не имеет места.

Рассмотрим подробнее температурное изменение массы воздуха, поднимающейся адиабатически в среде, в которой вертикальный температурный градиент постоянен и равен γ $\left(-\frac{\partial T}{\partial z} = \gamma\right)$.

---

[1]) H. v. Ficker Transport kalter Luftmassen über die Zentralalpen. Denksch. Wiener Akad. d. Wiss. 80. 1906, S. 101.

По уравнению Пуассона

$$T = T_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}},$$

где p_0 и T_0 относятся к начальному состоянию воздушной массы, а p и T к конечному. Назовем „квазистационарным" такое движение, при котором давление p в каждый момент поднятия равняется давлению окружающей среды $\bar{p}$, а это последнее зависит от закона падения температуры с высотой. Так как вертикальный температурный градиент принимается постоянным, то это равносильно тому, что мы считаем атмосферу политропной, причем модуль политропы k связан с температурным градиентом γ уравнением

$$-\frac{d\bar{T}}{dz} = \gamma = \frac{g}{R}\,\frac{k-1}{k}.$$

Отсюда распределение температуры с высотой в такой атмосфере выражается уравнением

$$\bar{T} = \bar{T}_0 - \frac{g}{R}\,\frac{k-1}{k}\,z.$$

Из уравнения адиабатического изменения поднимающейся массы находим

$$\frac{dT}{T} = \frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\frac{dp}{p},$$

или так как

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\bar{p}}{\bar{p}} = -\frac{\bar{\rho}gdz}{\bar{p}} = -\frac{gdz}{R\bar{T}},$$

то

$$\frac{dT}{T} = -\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\frac{gdz}{R\bar{T}},$$

т. е.

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\,\frac{g}{R}\,\frac{T}{\bar{T}} = -\gamma_a\,\frac{T}{\bar{T}}.$$

Интегрируя от $z=0$ до некоторого z, находим

$$\lg\frac{T}{T_0} = \frac{\gamma_a}{\gamma}\lg\frac{\bar{T}_0-\gamma z}{\bar{T}_0},$$

т. е.

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{\bar{T}_0-\gamma z}{\bar{T}_0}\right)^{\frac{\gamma_a}{\gamma}}$$

или

$$T = T_0\left(\frac{\bar{T}}{\bar{T}_0}\right)^{\frac{\gamma_a}{\gamma}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Это показывает, что температура поднимающейся адиабатически массы воздуха, когда в окружающей атмосфере вертикальный температурный градиент равен γ, зависит, как от этого распределения температуры в окружающей среде, так и от начальной температуры рассматриваемой массы.

Если $T_0 = 283°$, $\overline{T}_0 = 273°$, $\gamma = 0{,}56°$ на 100 *м*. $\gamma_a = 0{,}981°$ на 100 *м*, то при поднятии на

$$\begin{aligned} 100\ м \quad & T = 282{,}2°, \\ 1000\ м \quad & T = 275{,}0°, \\ 10000\ м \quad & T = 205{,}6°. \end{aligned}$$

Если же не принимать в расчет выравнивания давления поднимающейся массы и окружающей атмосферы, т. е. принимать равномерное падение температуры γ_a на каждые 100 *м* поднятия, то при тех же начальных условиях при поднятии на

$$\begin{aligned} 100\ м \quad & T = 282{,}0°, \\ 1000\ м \quad & T = 273{,}2°, \\ 10000\ м \quad & T = 184{,}9°. \end{aligned}$$

Уравнение (31) позволяет найти высоту h, до которой будет подниматься нагретая масса сухого воздуха, пока она не охладится настолько что придет в равновесие с окружающей средой. Для этого очевидно нужно положит $T = \overline{T}$; это дает

$$\overline{T} = T_0 \left(\frac{\overline{T}}{\overline{T}_0} \right)^{\frac{\gamma_a}{\gamma}},$$

$$\overline{T}_0^{\frac{\gamma_a}{\gamma}} = T_0 \overline{T}^{\frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma}},$$

$$\overline{T}_0^{\frac{\gamma_a}{\gamma_a - \gamma}} = T_0^{\frac{\gamma}{\gamma_a - \gamma}} \overline{T}.$$

Вставляя $\overline{T} = \overline{T}_0 - \gamma h$ получим

$$\overline{T}_0^{\frac{\gamma_a}{\gamma_a - \gamma}} = T_0^{\frac{\gamma}{\gamma_a - \gamma}} (\overline{T}_0 - \gamma h).$$

Отсюда находим

$$\gamma h = \overline{T}_0 - \left(\frac{\overline{T}_0^{\gamma_a}}{T_0^{\gamma}} \right)^{\frac{1}{\gamma_a - \gamma}},$$

и окончательно

$$h = \frac{1}{\gamma} \left\{ \overline{T}_0 - \left(\frac{\overline{T}_0^{\gamma_a}}{T_0^{\gamma}} \right)^{\frac{1}{\gamma_a - \gamma}} \right\}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости атмосферы по вертикальному направлению. Рассмотрим движение некоторой массы воздуха по вертикали, для чего напишем уравнение

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Для окружающей среды имеет место равновесие, выражаемое уравнением

$$0 = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z},$$

причем в силу квазистационарности процесса $\bar{p} = p$ и

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho} g.$$

Поэтому

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g + \frac{\bar{\rho}}{\rho} g,$$

т. е.

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g\frac{\bar{\rho} - \rho}{\rho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Но

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{p}}{R\bar{T}} = \frac{p}{R\bar{T}}, \quad \rho = \frac{p}{RT}.$$

Поэтому

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = g\frac{T - \bar{T}}{\bar{T}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Если частица теплее окружающей среды, она получает ускорение вверх, если она холоднее окружающей среды, она получает ускорение вниз, т. е. начинает падать, а если $\bar{T} = T$, то ускорение равно нулю. Если принять во внимание влияние производимой работы расширения на изменение температуры поднимающейся массы, то, согласно выведенному раньше,

$$T = T_0\left(\frac{\bar{T}}{\bar{T}_0}\right)^{\frac{\gamma_a}{\gamma}}.$$

Если принять, что начальные температуры были равны, т. е. если $\bar{T}_0 = T_0$, то предыдущие уравнение напишется так

$$T = T_0\left(\frac{\bar{T}}{\bar{T}_0}\right)^{\frac{\gamma_a}{\gamma}} = T_0\bar{T}\frac{\bar{T}^{\frac{\gamma_a}{\gamma}-1}}{\bar{T}_0^{\frac{\gamma_a}{\gamma}}},$$

или

$$T = \bar{T}\left(\frac{\bar{T}}{\bar{T}_0}\right)^{\frac{\gamma_a}{\gamma}-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Пусть теперь масса получает вертикальный сдвиг вверх. Если $\gamma < \gamma_a$, то $T < \bar{T}$, т. е. $\frac{d^2 z}{dt^2} < 0$ и масса снова опускается вниз. Если она получает вертикальный сдвиг вниз, то $T > \bar{T}$ и масса получает ускорение вверх. Воздух следовательно находится в устойчивом равновесии.

Если начальные температуры не равны, $T_0 \neq \bar{T}_0$, то будет иметь место поднятие или опускание нашей массы до того уровня, где будет

$\overline{T}=T$. Там масса достигает положения равновесия, и равновесие будет устойчивым.

Если $\gamma=\gamma_a$, то уравнение (35) показывает, что воздушная масса повсюду при своем вертикальном смещении будет иметь температуру окружающей среды. Равновесие будет безразличным.

Если $\gamma>\gamma_a$, то при сдвиге вверх $T>\overline{T}$, $\frac{d^2z}{dt^2}>0$, при сдвиге вниз $T<\overline{T}$ и $\frac{d^2z}{dt^2}<0$. Сдвинутая частица продолжает движение вверх или вниз. Здесь имеет место случай неустойчивого равновесия. Градиенты большие γ_a называются сверхадиабатическими градиентами.

Заметим еще, что все сказанное относится к случаю, когда рассматриваемая масса воздуха не получает притока тепла извне и не отдает тепла окружающей среде. Очевидно, что это рассуждение не может относиться к массе воздуха, содержащей пары воды в насыщенном состоянии.

Формулы (33) и (34) были даны Экснером. Заметим, что они дают выражение для вертикального ускорения в зависимости от неоднородности воздуха по горизонтали.

Формулы Экснера очевидно являются выражением принципа Архимеда по отношению к вертикальным смещениям воздушных частиц. В самом деле по принципу Архимеда, примененному к частицам воздуха, занимающим единичный об'ем, получим

$$\rho\frac{d^2z}{dt^2}=P_1-P,$$

где P — вес более легкой частицы, вытесняемой более тяжелою частицей, а P — вес более тяжелой частицы, становящейся на ее место. Но для единичного об'ема

$$P_1=\rho_1 g,$$

$$P=\rho g,$$

откуда сразу получается формула Экснера.

§ 7. Адиабатические изменения влажного воздуха. Поднятие массы влажного воздуха обычно не есть адиабатический процесс. Оно сопровождается всегда притоком или отдачей энергии. Процесс конденсации водяного пара освобождает скрытую теплоту, которая сообщается данной массе газа. Подобное же явление происходит также при наступлении твердой фазы (снега и града). При этом об'ем массы газа изменяется. Сконденсированная или отвердевшая влага в некоторых случаях выпадает в виде осадков, а в других случаях продолжает движение вместе с массой газа. Таким образом в некоторых случаях процесс является обратимым, а в других — необратимым. Процесс этот весьма сложный. Ограничимся здесь простейшей схемой вертикального поднятия влажной воздушной массы, причем будем различать четыре стадии: I) стадию влажного воздуха до конденсации, II) стадию насыщения при температуре выше 0° С (стадию дождя), III) переход через 0° С и IV) стадию насыщения при температуре ниже нуля (стадия снега).

Заметим, что если мы рассматриваем в качестве примеси к единице массы воздуха n единиц массы водяного пара, то для водяного пара уравнение Клапейрона принимает вид:

$$p\alpha=nR_w T,$$

где газовая постоянная R_w может быть найдена из пропорции $\frac{R}{R_w}=\frac{M'}{M}$, если через M и M' обозначить молекулярные веса воздуха и водяного пара.

Так как M (для воздуха) $= 29{,}8$, а M' (для воды) равно 18, то для R_w получается значение около $4{,}6 \cdot 10^6 \frac{см^2}{сек^2 \cdot °C}$. В предыдущем уравнении p означает давление водяного пара, d — удельный об'ем воздуха.

I. При адиабатическом под'еме влажной массы воздуха температура ее падает и на некоторой высоте достигается температура конденсации, т. е. такая температура T_k, при которой упругость e водяного пара становится равной e_m — упругости паров, насыщающих пространство. e_m и $t_k = T_k - 273°$ связаны между собою формулой Магнуса (30):

$$e_m = 4{,}58 \cdot 10^{\frac{7{,}45 t_k}{235 + t_k}},$$

где t_k — температура в градусах Цельсия соответствующая абсолютной температуре T_k.

Представляется важным определить, на какой высоте будут достигнуты условия конденсации, или иначе говоря, на какой высоте будет оканчиваться сухая стадия.

В первом приближении эту высоту можно определить таким образом. Зная упругость паров e у земной поверхности можно найти по таблицам точку росы и принять ее за температуру T_k, при которой начнется конденсация. Это рассуждение будет не вполне правильным, так как при под'еме воздух расширяется, содержащийся в нем водяной пар распространяется на большее пространство, абсолютная влажность, а следовательно и пропорциональная ей упругость пара становится меньше. Таким образом температура начала конденсации становится ниже точки росы, а высота начала конденсации увеличивается. Если не принимать во внимание этого обстоятельства, и в первом приближении считать, что температура падает на 1° при адиабатическом поднятии на 100 *м*, то высота уровня конденсации может быть грубо учтена по такой приближенной формуле

$$h = (t_з - t_k) \cdot 100,$$

где $t_з$ означает температуру у земной поверхности, а t_p — температуру точки росы. На основании указанных выше соображений температура начала конденсации оказывается ниже чем по предварительной формуле. В среднем на один градус понижение составляет около 0,2° С. Поэтому

$$t_з - t_k = \frac{5}{4}(t_з - t_p),$$

где t_k — означает температуру начала конденсации. Тогда

$$h = 125(t_з - t_p).$$

Более точно эту высоту, однако, можно учесть таким образом. Можно считать, как будет показано ниже, что при адиабатическом расширении упругость водяного пара до наступления конденсации связана с изменением его температуры по уравнению Пуассона

$$\frac{e}{e_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\lambda}},$$

где

$$\lambda = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}.$$

Следовательно

$$\lg e - \frac{1}{\lambda} \lg T = \text{const}.$$

Сопоставляя это уравнение с уравнением Магнуса (30), получим два уравнения, из которых можем определить e и T для начала конденсации. Удобнее всего решать эти два уравнения графически. После этого искомая высота начала конденсации приближенно найдется по формуле

$$h = 100\,(t_s - t_k).$$

Самое охлаждение воздуха, содержащего водяной пар при процессе адиабатического его поднятия будет практически то же, что и для сухого воздуха. Если работу расширения влажного воздуха разложим на две части: одну зависящую от расширения 1 *гр* сухого воздуха, а другую, зависящую от содержащегося в нем *w гр* водяного пара. то соответственно этому можем приток энергии разложить на две составные части, которые будут иметь выражения:

$$dQ_1 = c_v dT + Ap' d\alpha,$$
$$dQ_2 = c_{vw} dT + Ae d\alpha.$$

Далее

$$Ae\ d\alpha = Ad(e\alpha) - A\alpha\, de = An\, R_w\, dT - \frac{An\, R_w\, T}{e}\, de.$$

Написав основные уравнения состояния сухого воздуха и пара и взяв логарифмические производные от обоих частей уравнений

$$p' = R'\alpha\, T, \qquad e = n\, R_w \alpha T,$$

легко получим

$$\frac{dp'}{p'} = \frac{de}{e},$$

но,

$$p = p' + e,$$

откуда

$$\frac{dp}{p} = \frac{dp'}{p'} = \frac{de}{e}.$$

Заменяя в уравнении притока энергии $\frac{de}{e}$ через $\frac{dp}{p}$, легко получим

$$dQ_1 = c_p\, dT - AR'\, T \frac{dp}{p},$$

$$dQ_2 = c_{pw}\, n dT - An\, R_w\, T \frac{dp}{p}.$$

Складывая оба выражения и принимая во внимание адиабатический процесс, будем иметь

$$(c_p + nc_{pw})\, dT - AT\, (R' + nR_w)\, \frac{dp}{p} = 0.$$

Отсюда интегрированием получим

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{A(R + nR_w)}{c_p + nc_{pw}}} = \frac{T}{T_0}.$$

При небольших количествах пара показатель в левой части по величине мало отличается от $\frac{AR}{c_p} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = \lambda$. Таким образом практически с очень большой точностью можно принять, что охлаждение следует уравнению Пуассона, и влажная адиабата для воздуха, содержащего водяной пар, до стадии конденсации не отличается от сухой адиабаты.

II. После того, как уровень конденсации достигнут, дальнейшее адиабатическое расширение и поднятие воздуха ведет за собой изменение аггрегатного состояния пара и переход его в воду. При этом освобождается скрытая теплота парообразования, падение температуры замедляется и происходит по псевдоадиабате или влажной адиабате. Допустим, что сконденсированная влага не выпадает в виде осадков, а уносится вместе с воздушной массой вверх. Пусть влажная воздушная масса, содержавшая к моменту начала конденсации весовую единицу (грамм) воздуха и w граммов водяного пара на некотором уровне содержит только w' гр. насыщенного пара, а $w''=w-w'$ гр. сконденсировалось и обратилось в воду.

Давление на некоторой высоте будет

$$p=p'+e,$$

где p' давление сухого воздуха и e — давление насыщенного водяного пара (при заданном T оно вычисляется по формуле Магнуса).

Уравнения состояния принимают вид

$$p'\alpha=R'T$$

для сухого воздуха,

$$e\alpha=w'R_w T$$

для водяного пара, где α удельный об'ем сухого воздуха; отсюда

$$\frac{p'}{e}=\frac{R'}{w'R_w}$$

и

$$w'=\frac{R'e}{R_w p'}.$$

Чтоб определить w' надо знать e, а для этого нужно знать T — температуру воздушной массы, поднявшейся до уровня h, где давление p.

Приток тепла для сухого воздуха равен

$$dQ_1=c_p dT-AR'T\frac{dp'}{p'}.$$

Приток тепла для водяного пара слагается из двух частей dQ_2 и скрытой теплоты rdw'', освобождающейся благодаря конденсации

$$rdw''+dQ_2=s_1w''dT+s_2w'dT,$$

где s_1 — теплоемкость воды;

s_2 — теплоемкость водяного пара при условии, что водяной пар остается насыщенным несмотря на повышение температуры от притока тепла и что об'ем его изменяется таким образом, что конденсация также не наступает; в этом члене также учитывается работа, затраченная на изменение об'ема;

r — скрытая теплота парообразования зависит от температуры T. Так как $dw''=-dw'$, то

$$-rdw'+dQ_2=s_1w''dT+s_2w'dT,$$
$$dQ_2=s_1(w-w')dT+s_2w'dT+rdw'.$$

Как известно, элементарный приток тепла, деленный на температуру есть полный дифференциал функции S, дающей значение энтропии

$$dS=\frac{(s_2-s_1)w'+s_1w}{T}dT+\frac{r}{T}dw',$$

откуда

$$\frac{(s_2-s_1)\,w'+s_1w}{T}=\frac{\partial S}{\partial T}\qquad \frac{r}{T}=\frac{\partial S}{\partial w'},$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial T\partial w'}=\frac{\partial}{\partial w'}\left\{\frac{(s_2-s_1)\,w'+s_1w}{T}\right\}=\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{r}{T}\right),$$

$$\frac{s_2-s_1}{T}=\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{r}{T}\right).$$

Тогда можно написать

$$\frac{dQ_2}{T}=w'\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{r}{T}\right)dT+\frac{s_1}{T}\,wdT+\frac{r}{T}dw'.$$

Замечаем, что выражение $\frac{r}{T}dw'+w'\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{r}{T}\right)dT$ представляет собою полный дифференциал $d\left(\frac{w'r}{T}\right)$. Поэтому напишем

$$\frac{dQ_2}{T}=\frac{s_1w}{T}dT+d\left(\frac{w'r}{T}\right),$$

или

$$dQ_2=s_1wdT+Td\left(\frac{w'\cdot r}{T}\right).$$

Сложив это с притоком тепла к сухому воздуху

$$dQ_1=c_pdT-AR'T\frac{dp'}{p'},$$

получим уравнение

$$dQ=(c_p+s_1w)\,dT+Td\left(w'\cdot\frac{r}{T}\right)-AR'T\frac{dp'}{p'}.$$

Если процесс адиабатический, то

$$(c_p+s_1w)\,dT+Td\left(w'\cdot\frac{r}{T}\right)=AR'T\frac{dp'}{p'},$$

$$(c_p+s_1w)\frac{dT}{T}+d\left(w'\cdot\frac{r}{T}\right)=AR'\frac{dp'}{p'}.$$

Так как $c_p+s_1w=\text{const}$, то интегрируя от начального состояния получим

$$(c_p+s_1w)\lg\frac{T}{T_0}+\left(w'\frac{r}{T}-w_0'\frac{r_0}{T_0}\right)=AR'\lg\frac{p'}{p_0'}.$$

Вводя обозначения для постоянных

$$\frac{c_p+s_1w}{AR'}=b,\qquad \frac{Mr_0}{AR_w}=a_0,\qquad \frac{Mr}{AR_w}=a$$

(M модуль десятичном логарифмов) получим:

$$b\,\mathrm{Lg}_{10}\frac{T}{T_0}+a\frac{e}{Tp'}-a_0\frac{e_0}{T_0p_0'}=\mathrm{Lg}_{10}\frac{p'}{p_0'}$$

или

$$b\,\mathrm{Lg}_{10}T+\frac{ae}{Tp'}-\mathrm{Lg}_{10}p'=b\,\mathrm{Lg}_{10}T_0+\frac{ae_0}{T_0p_0'}-\mathrm{Lg}_{10}p_0'=\text{const}.$$

Если p' задано, то присоединяя к написанному уравнению уравнение Магнуса можно определить T и e. Решение получается путем последовательных приближений или графически.

Если допустить, что процесс происходит псевдоадиабатически, т. е. влага по мере образования выпадает в виде дождя, то в уравнении будут отсутствовать члены, относящиеся к жидкой фазе, т. е. члены, умножающиеся на s_1, и уравнение примет вид

$$\frac{c_p}{AR'} \operatorname{Lg}_{10} \frac{T}{T_0} + \frac{M}{AR_w}\left(\frac{e}{Tp'} - \frac{e_0 r_0}{T_0 p_0'}\right) = \operatorname{Lg}_{10} \frac{p'}{p_0'},$$

или

$$c_p \operatorname{Lg}_{10} T - AR' \operatorname{Lg}_{10} p' + M\frac{R'}{R_w} \frac{er}{Tp'} = \text{const}.$$

III. Новая стадия начнется, когда поднимающаяся масса воздуха при своем адиабатическом охлаждении достигнет температуры 0° С. В течение этой стадии происходит конденсация пара при температуре 0°, при которой пары воды прямо переходят в состояние снега и происходит замерзание содержащейся в воздухе жидкой влаги. при чем образуется лед. Отсюда название третьей стадии — стадия града, Она продолжается до тех пор, пока вся жидкая влага находящаяся в воздухе замерзнет, так что к началу четвертой стадии на лицо имеется только две фазы: газообразная (пар) и твердая (град и снег).

В течение третьей стадии присутствуют все три фазы: твердая, жидкая и газообразная. Во все время третьей стадии температура равна нулю. Если же процесс носит псевдоадиабатический характер, т. е. влага по мере образования выпадает в виде дождя, то третья стадия отсутствует и стадия дождя прямо переходит в IV стадию — снеговую.

Если же капли воды уносятся вместе с воздушной массой вверх. то процесс осложняется. Благодаря замерзанию выделяется скрытая теплота таяния льда, за счет этой теплоты происходит испарение и стадия замерзания затягивается.

Пусть теперь на каждый грамм сухого воздуха приходится w' граммов пара, w'' граммов воды и w''' граммов льда, так что

$$w' + w'' + w''' = w.$$

Очевидно должно существовать равенство между скрытой теплотой замерзания σ с одной стороны и работой расширения и теплом затраченным на испарение с другой стороны. Это можно выразить написавши уравнение

$$\sigma dw''' = ART \frac{d\alpha}{\alpha} + rdw'.$$

При этом очевидно

$$T = T_0 = 273° \text{ abs.},$$

$$p\alpha = RT_0 = \text{const}, \quad \frac{d\alpha}{\alpha} = -\frac{dp}{p},$$

где α и p можно относить к сухому воздуху и поэтому можно писать $\frac{dp'}{p'}$

$$-ART_0 \frac{dp'}{p'} + rdw' - \sigma \cdot dw''' = 0.$$

Деля на T_0 и интегрируя получим:

$$-AR \lg \frac{p'}{p_0'} + \frac{r}{T_0} w' - \frac{\sigma}{T_0} w'' = \frac{r}{T_0} w_0' - \frac{\sigma}{T_0} w_0''',$$

где индекс $_0$ относится к началу стадии, когда еще нет льда, поэтому можно положить $w_0''' = 0$. Индекс $_1$ пусть обозначает конец стадии, когда уже нет воды. Поэтому $w_1'' = 0$.

Уравнение перепишется так, если перейти от натуральных логарифмов к десятичным:

$$-\frac{AR}{M}\,\mathrm{Lg}_{10}\frac{p_1}{p_0'}+\frac{r}{T_0}(w_1'-w_0')-\frac{\sigma}{T_0}\cdot w_1'''=0,$$

$$-\frac{AR}{M}\,\mathrm{Lg}_{10}\frac{p_1'}{p_0'}+\frac{r}{T_0}(w_1'-w_0')-\frac{\sigma}{T_0}(w-w_1')=0,$$

ибо

$$w_1'''=w-w_1'.$$

В момент начала III стадии

$$w_0'=\frac{Re_0}{R_w(p_0-e_0)}=\frac{Re_0}{R_w p_0'}.$$

В момент конца III стадии

$$w_1'=\frac{Re}{R_w(p_1-e)}=\frac{Re}{R_w p_1'}.$$

Поэтому

$$\mathrm{Lg}_{10}\frac{p_1'}{p_0'}+\frac{M\sigma}{ART_0}w-\frac{M}{AR}\frac{w_1'}{T_0}(\sigma+r)+\frac{Mr}{ART_0}w_0'=0,$$

$$\mathrm{Lg}_{10}\frac{p_1'}{p_0'}+\frac{M\sigma}{ART_0}w-\frac{M}{A}\frac{e}{p_1'R_wT_0}(\sigma+r)+\frac{Me_0r}{AT_0R_wp_0'}=0$$

или

$$\mathrm{Lg}_{10}\,p_1'-\frac{e}{p_1'}\frac{M(r+\sigma)}{AR_wT_0}=\mathrm{Lg}_{10}\,p_0'-\frac{e_0Mr}{p_0'AR_wT_0}-w\frac{M\sigma}{ART_0}.$$

Это уравнение выражает связь между наружным давлением воздуха в начале и в конце III стадии, следовательно дает мощность этой стадии, которая определяется количеством замерзающей воды, что в свою очередь зависит от начальной температуры и влажности.

IV. Снеговая стадия. Когда вся вода замерзла и при дальнейшем поднятии массы воздуха температура ее начинает спускаться ниже нуля, наступает четвертая стадия — стадия снега. При этом происходит сублимация водяного пара и он прямо обращается в снег, минуя жидкую фазу. Процесс подобен процессу, происходящему при второй стадии, только вместо удельной теплоемкости воды приходится рассматривать удельную теплоемкость льда (s_0), а вместо скрытой теплоты испарения освобождается скрытая теплота сублимации

$$(c_p+s_0w)\,\mathrm{Lg}_{10}\frac{T}{T_0}+\frac{MR}{R_w}\left(\frac{re}{Tp'}-\frac{r_0e_0}{T_0p_0'}\right)=AR\,\mathrm{Lg}_{10}\frac{p'}{p_0'}.$$

Это уравнение для четвертой стадии перепишется таким образом

$$\left(\frac{c_p+s_0w}{AR}\right)\mathrm{Lg}_{10}\frac{T}{T_0}+\frac{M}{AR_w}\left(\frac{(r+\sigma)e}{Tp'}-\frac{(r_0+\sigma)e_0}{p_0'T_0}\right)=\mathrm{Lg}_{10}\frac{p'}{p_0'}.$$

По исследованиям Фьельстада (Fjelstad) $r+\sigma$, имеет постоянное значение, равное 680 *кал.*

$$\left(\frac{c_p+s_0w}{AR}\right)\mathrm{Lg}_{10}\frac{T}{T_0}+\frac{M(r+\sigma)}{AR_w}\left(\frac{e}{p'T}-\frac{e_0}{p_0'T_0}\right)=\mathrm{Lg}_{10}\frac{p'}{p_0'},$$

где $p_0'=p_1'$ из предыдущей стадии,

$$T_0=0^\circ\,\mathrm{C}=273^\circ\ \mathrm{abs},$$
$$e_0=e_m \text{ при } 0^\circ\mathrm{C}.$$

Если процесс происходит псевдоадиабатически, то выпадает член содержащий s_0

$$\frac{c_p}{AR}\mathrm{Lg}_{10}\frac{T}{T_0}+\frac{M}{AR_w}(r+\sigma)\left(\frac{e}{p'T}-\frac{e_0}{p_0'T_0}\right)=\mathrm{Lg}_{10}\frac{p'}{p_0'}.$$

Обозначая коэффициент при $\mathrm{Lg}_{10}\frac{T}{T_0}$ через b, а $\frac{M}{AR_w}(r+\sigma)$ через a напишем:

$$b\,\mathrm{Lg}_{10}T+\frac{ae}{p'T}-\mathrm{Lg}_{10}p'=b\,\mathrm{Lg}_{10}T_0+\frac{ae_0}{p_0'T_0}-\mathrm{Lg}_{10}p_0'=\mathrm{const}.$$

Вспоминая все сказанное раньше, можно сказать, что сухая стадия характеризуется уравнениями

$$\mathrm{Lg}_{10}p-a\,\mathrm{Lg}_{10}T=\mathrm{const}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

а дождевая и снеговая стадия (II и IV) характеризуются уравнениями

$$\mathrm{Lg}_{10}p'-b\,\mathrm{Lg}_{10}T-\frac{ce}{Tp'}=\mathrm{const} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

и III стадия

$$\mathrm{Lg}_{10}p_1'-\frac{e_1}{p_1'}\frac{M(r+\sigma)}{AR_wT_0}=\mathrm{const}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

Здесь a, b, c численные коэффициенты, p — полное давление, а p' — парциальное давление сухого воздуха.

Термодинамика адиабатических изменений состояния подиимающегося влажного воздуха была исследована Ганом (Hann), Guldberg'ом и Mohn'ом и др. Исчерпывающие литературные справки находятся в статье Neuhof'a: „Adiabatische Zustandsänderungen feuchter Luft" (Königl. Preuss. Meteor. Inst. Abhandl. Bd. I, 1901).

Г. Герц (H. Hertz) построил графическую таблицу с помощью которой можно следить за изменениями состояния адиабатически расширяющегося влажного воздуха, не производя каждый раз утомительных вычислений. Эта таблица охватывает температурный интервал от 30° до —20° С и давление между 800 и 300 *мм* ртутного столба. Bezold обратил внимание на то обстоятельство, что изменения состояния влажного воздуха представляют процессы необратимые, так как по большей части сопровождаются выпадением осадков, благодаря чему изменяется содержание воздуха. Предельный случай, когда выпадает вся конденсирующаяся влага был назван им „псевдоадиабатическим процессом" и был потом подробно исследован Нейгофом (Neuhof).

Нейгоф построил графики, выражающие связь между высотою поднятия и температурой. Он дал таблицу адиабатических изменений влажного воздуха, охватывающую интервал от +30° С до —30° С и давление от 760 до 300 *мм* ртутного столба.

В последнее время новые таблицы были расширены и вычислены д-ром Фьельстадом (Fjeldstad). За единицы давления и температуры приняты миллибар и градус Цельсия. Координатами приняты давление и температура. Для давления взят интервал от 1100 до 200 *мбр*, а для температуры интервалы от —60° до 40°. Эти интервалы указаны были автору как желательные проф. Бьеркнесом (Geofisiske Publikationer, vol. III, No. 13).

Разсмотрим две задачи, относящиеся к адиабатическому изменению состояния влажного воздуха, имеющие большое практические значение.

Пусть требуется определить температуру конденсации T_k для массы воздуха, расположенной у земной поверхности и имеющей начальную температуру T_0, начальное давление p_0 и относительную влажность δ, если эта масса поднимается вверх, изменяя свое состояние по адиабатическому закону

$$\frac{T}{T_0}=\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\lambda},$$

Для решения задачи служат очевидно такие уравнения:

1) Уравнение связывающее удельную влажность q с упругостью паров e_m насыщаюших пространство

$$q=\frac{1}{1{,}605\frac{p_k}{e_m}-0{,}605},$$

где p_k давление соответствующее уровню конденсации, ибо при p_k и T_k — давлении и температуре, соответствующим уровню конденсации δ становится равным единице.[1])

2) Уравнение Магнуса,

$$e_m=6{,}10\cdot 10^{\frac{7{,}45\,t_k}{235+t_k}}\ мб,$$

где $t_k=T_k-273°$.

3) Уравнение Пуассона

$$\frac{T_k}{T_0}=\left(\frac{p_k}{p_0}\right)^{\lambda}.$$

Из этих трех уравнений определяются неизвестные величины:

$$T_k,\ p_k\ \text{и}\ e_m\ ^{*}).$$

Проще всего сначала исключить p_k по уравнению

$$p_k=p_0\left(\frac{T_k}{T_0}\right)^{\frac{1}{\lambda}}=m\,T_k^{\frac{1}{\lambda}},$$

где

$$m=\text{const}=p_0\,T_0^{-\frac{1}{\lambda}}.$$

---

[1]) Удельная влажность q находится по относительной влажности δ и начальным температуре и давлению t_0 и p_0 по формулам

$$q=\frac{\delta}{1{,}605\frac{p_0}{e_{m,\,o}}-0{,}605\,\delta}$$

$$e_{m,o}=6{,}10\cdot 10^{\frac{7{,}45t_0}{235+t_0}}.$$

Здесь $e_{m,o}$ означает упругость паров насыщающих при температуре T_0, тогда как e_m выражает эту упругость при искомой температуре T_k. Для той же цели весьма удобна номограмма предложенная Дизингом (Diesing) (см. приложение I).

Вставляя это в два другие уравнения, получим

$$(1+0{,}605\ q)\ e_m = 1{,}605\, qm T_k^{\frac{1}{\lambda}}$$

$$\frac{7{,}45\ t_k}{235+t_k} = \mathrm{Lg}_{10}\ e_m - \mathrm{Lg}_{10}\ 6{,}10.$$

Решая эти два уравнения, получим t_k и e_m. Решение может быть выполнено графически. Легко видеть, что об'единяя постоянные, можем написать систему в виде:

$$T_k = a e_m^{\lambda} \qquad \frac{a_1 + c_1 T_k}{b_1 + c_1 T_k} = \lg e_m$$

или исключая T_k получим для определения e_m одно уравнение

$$\frac{a_1 + a_2 e_m^{\lambda}}{b_1 + b_2 e_m^{\lambda}} = \lg e_m. \qquad \text{Полагая } e_m^{\lambda} = u$$

получим

$$\frac{a_1 + a_2\ u}{b_1 + b_2\ u} = \lg\ u.$$

Это уравнение легко решить графически, найдя пересечение кривых

$$v = \frac{a_1 + a_2\ u}{b_1 + b_2\ u}, \qquad v = \lg\ u,$$

после чего температура конденсации T_k найдется по формуле

$$T_k = au.$$

После этого, зная действительное распределение температуры и следовательно давления с высотой соответствующее данному случаю, находят высоту конденсации h, как ту высоту, на которой давление равно p_k.

Обычно, впрочем, высоту конденсации находят приближенно более простым способом. Принимают сначала, что падение температуры поднимающейся адиабатически массы воздуха не зависит от вертикального градиента окружающей атмосферы, т, е. пишут

$$T_k = T_0 - \gamma_a\ h$$

или

$$h = \frac{T_0 - T_k}{\gamma_a},$$

а величину T_k находят просто как температуру точки росы. Практически температура точки росы находится по таблицам. После этого вводят поправку на расширение поднимающейся массы. В среднем на один градус понижение составляет около 0.2° С. Поэтому вместо $T_0 - T_k$ надо взять $\frac{5}{4}\ (T_0 - T_k)$ следовательно искомая высота начала конденсации

$$h = \frac{5}{4}\ \frac{T_0 - T_k}{\gamma_a}.$$

Принимая $\gamma_a = 0{,}01$, $\quad h = 125\ (T_0 - T_k)$ метров. [1])

Пусть теперь требуется ответить на такой вопрос:

II. На сколько градусов надо нагреть влажную массу воздуха (например, лежащую у земной поверхности) с на-

[1]) См. страннцу 88, где решена та же задача, но только при условии задания упругости паров у земной поверхности. Практически бывает известна относительная влажность.

чальной температурой $\overline{T}_0$ и начальным давлением p_0 для того, чтобы, нагревшись, она поднялась бы до того уровня, который соответствует началу конденсации содержащихся в ней паров. При этом пусть в атмосфере вертикальный температурный градиент постоянный ($=\gamma$).

Задача может быть решена таким образом: температура поднимающейся сухой массы воздуха, сухой в том смысле, что пары в ней содержащиеся не достигли состояния насыщения, выражается уравнением (31)

$$T = T_0 \left(\frac{\overline{T}}{\overline{T}_0}\right)^{\frac{\gamma_a}{\gamma}}.$$

В этом уравнении надо положить $T = \overline{T} = T_k$ причем T_k есть температура конденсации, которая находится по правилам, указанным в 1-й задаче. Отсюда определяем T_0

$$T_0 = T_k \left(\frac{\overline{T}_0}{\overline{T}_k}\right)^{\frac{\gamma_a}{\gamma}},$$

после чего искомая величина нагрева

$$\Delta T_0 = T_0 - \overline{T}_0 = T_k \left(\frac{\overline{T}_0}{\overline{T}_k}\right)^{\frac{\gamma_a}{\gamma}} - \overline{T}_0.$$

Высота под'ема находится как высота, соответствующая температуре T_k, по действительной кривой распределения температуры.

§ 8. Условия вертикального равновесия влажного воздуха. Влажно-неустойчивое равновесие. В § 7 было выведено уравнение для адиабатического изменения состояния влажного насыщенного воздуха (дождевая стадия)

$$c_p \lg T - AR \lg p + 0{,}623 \frac{er}{pT} = \text{const}.$$

Здесь p означает, собственно говоря, парциальное давление сухого воздуха, но с очень большой точностью можно считать его равным общему давлению смеси воздуха и содержащегося в нем несконденсировавшегося пара, e — максимальная упругость паров, которая есть функция температуры, r — скрытая теплота испарения, $q = 0{,}623 \frac{e}{p}$.

Дифференцируя по p получим

$$\frac{c_p}{T}\frac{dT}{dp} - \frac{AR}{p} + r\left(\frac{\frac{dq}{dp}T - q\frac{dT}{dp}}{T^2}\right) = 0 \text{ [1]},$$

где

$$\frac{dq}{dp} = 0{,}623\left(\frac{\frac{de}{dp}p - e}{p^2}\right) = \frac{q}{e}\frac{de}{dT}\frac{dT}{dp} - \frac{q}{p}.$$

Внося это в предыдущее уравнение, получим

$$c_p \frac{dT}{dp} - \frac{A}{p} + r\left(\frac{q}{e}\frac{de}{dT}\frac{dT}{dp} - \frac{q}{p} - \frac{q}{T}\frac{dT}{dp}\right) = 0.$$

Решая относительно $\frac{dT}{dp}$, будем иметь

$$\frac{dT}{dp} = \frac{\frac{A}{p} + \frac{rq}{p}}{c_p + \frac{rq}{e}\frac{de}{dT} - \frac{rq}{T}}$$

[1]) Здесь r считается не зависящим от T, а следовательно и от p.

или, полагая $dp = -\bar{\rho} g dz$, где $\bar{\rho}$ плотность окружающей воздушной среды,

$$\frac{dT}{dz} = -\bar{\rho} g \frac{\frac{A}{\varepsilon} + \frac{rq}{p}}{c_p + \frac{rq}{e}\frac{de}{dT} - \frac{rq}{T}}.$$

Так как

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho} = \frac{T}{\bar{T}}$$

и

$$\frac{\bar{\rho}}{p} = \frac{1}{RT},$$

то окончательно

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g\left(A + \frac{rq}{RT}\right)}{c_p - \frac{rq}{T} + \frac{rq}{e}\frac{de}{dT}} \cdot \frac{T}{\bar{T}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (39)$$

Эта формула показывает, что падение температуры при адиабатическом под'еме насыщенного воздуха отличается от падения температуры для сухого воздуха. Оно зависит от многих факторов и притом довольно сложно, а именно — от давления p (через посредство q), а следовательно и от высоты z, от температуры T самой поднимающейся массы, от температуры $\bar{T}$ окружающей воздушной среды.

Для $q = 0$ формула (39) переходит в формулу (40)

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{Ag}{c_p}\frac{T}{\bar{T}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (40)$$

или, если пренебречь разницей между T и $\bar{T}$,

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{Ag}{c_p}.$$

Вообще же, если $q > 0$, то оказывается, что

$$\left|\frac{dT}{dz}\right| < \frac{Ag}{c_p}\frac{T}{\bar{T}}.$$

Если восхождение влажного воздуха будет происходить при температуре ниже 0° С, т. е. при $T < 273°$, то к теплоте, выделяющейся при конденсации паров, прибавится еще теплота выделяющаяся при замерзании воды и следовательно охлаждение будет меньше.

Следующая таблица, заимствованная из Гана (Hann — Lehrbuch d. Meteorologie) представляет изменение температуры насыщенного воздуха с высотой в градусах на каждые 100 *м* поднятия, как функцию начального давления и температуры.

Давление	Высота	Температура								
		−10°	−5°	0°	+5°	+10°	+15°	+20°	+25°	+30°
760	20	0.76	0.69	0.63	0.60	0.54	0.49	0.45	0.41	0.38
700	680	0.74	0.68	0.62	0.59	0.53	0.48	0.44	0.40	0.37
600	1 910	0.71	0.65	0.58	0.55	0.49	0.44	0.40	0.37	—
500	3 360	0.68	0.62	0.55	0.52	0.46	0.41	0.38	—	—
400	5 150	0.63	0.57	0.50	0.47	0.42	0.38	—	—	—
300	7 430	0.57	0.51	0.44	0.42	—	—	—	—	—
200	10 670	0.49	0.43	0.38	—	—	—	—	—	—

В случае когда $\overline{T}=T$, т. е. когда температура данной частицы во все время процесса одинакова с температурой окружающей среды, предыдущая формула упрощается и пишется так

$$-\frac{\partial T}{\partial z}=\gamma_{\text{ар}}=\frac{g\left(A+\frac{rq}{RT}\right)}{c_{\text{р}}-\frac{rq}{T}+\frac{rq}{e}\frac{de}{dT}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

Рассмотрение величины понижения температуры адиабатически поднимающегося влажного воздуха показывает, что условия устойчивости таких насыщенных масс значительно отличаются от условий устойчивости сухих масс воздуха. Предел устойчивости для влажного воздуха меняется в зависимости от температуры и давления и может случиться, что в воздушной среде, распределение температуры оказывается устойчивым для сухой массы и неустойчивым для массы насыщенного воздуха. Это случится очевидно тогда, когда вертикальный температурный градиент среды γ будет заключаться между сухим адиабатическим вертикальным температурным градиентом $\gamma_{\text{а}}$ и влажным адиабатическим градиентом $\gamma_{\text{ра}}$

$$\gamma_{\text{ра}}<\gamma<\gamma_{\text{а}}.$$

В этом случае влажная масса воздуха, поднятая [1]) до высоты, на которой пары, в ней заключающиеся, будут насыщать пространство, окажется там в положении неустойчивого равновесия и дальше будет продолжать движение вверх в силу своей неустойчивости. Например, если на высоте свыше 3 400 *м* вертикальный температурный градиент равен 0,8, а начальные температура и давление поднимающейся воздушной массы равны —10° и 500 *мм*, то насыщенный воздух окажется на этой высоте в состоянии неустойчивого равновесия, и достаточно будет малейшего импульса, чтобы такие неустойчивые массы начали подниматься вверх без притока энергии. Такое состояние атмосферы Ревсдаль (Refsdal) называет „влажно-неустойчивым". Оно встречается в атмосфере довольно часто и повидимому именно таким образом могут освобождаться большие количества энергии и переходить из потенциальной формы в кинетическую. Важность изучения таких состояний атмосферы стала ясна в последнее время. Отсюда становится видно, какое большое значение имеет присутствие водяного пара в атмосфере и как оно влияет на вертикальную устойчивость воздушных масс.

§ 9. Внутренняя энергия. Энтропия. Второе начало термодинамики. Первое начало термодинамики в самом общем виде было формулировано нами в § 2 (стр. 71).

Полная энергия состоит из кинетической энергии $\mathfrak{T}$ и внутренней энергии I, которая есть ничто иное, как кинетическая энергия молекулярных движений. Внутренняя энергия I есть функция состояния тела, т. е. она зависит от двух параметров α, T, или α, p или p, T.

В применении к единице массы или вообще к элементу массы атмосферного воздуха можем таким образом написать

$$d\mathfrak{T}+d\mathrm{I}=dW+EdQ,$$

где dW означает работу, совершенную об'емными и поверхностными силами над данной массой воздуха, а EdQ приведенное количество тепла.

Если рассматривать массу воздуха в состоянии покоя, не подверженную внутренним силам, то

$$EdQ=d\mathrm{I}-dW.$$

[1]) Например нагретая и вследствие этого поднявшаяся до уровня конденсации или вытолкнутая другими движущимися массами до этого уровня.

Рассмотрим отдельно внутреннюю энергию газа и работу его против внешних сил (работу расширения).

Пусть газ расширяется в пустой сосуд, причем стенки сосуда вовсе не пропускают тепла. Далее пусть эти стенки твердые и следовательно при расширении газ не производит работы. На основании первого закона термодинамики внутренняя энергия газа при этом не меняется. Если за независимые параметры выберем α и T, то

$$\mathrm{I}(\alpha_2, T_2) - \mathrm{I}(\alpha_1, T_1) = 0.$$

Опыты, произведенные Гэ-Люссаком и Джоулем над расширением газа в пустоту, свидетельствуют, что расширение происходит изотермически. Но, если $T_1 = T_2$, то равенство становится возможным при единственном условии, что I вовсе не зависит от α, а является функцией только от температуры. Итак для газа $\mathrm{I} = \mathrm{I}(T)$.

Рассмотрим теперь такой процесс, при котором переменный параметр α остается постоянным. При этом газ не совершает работы и следовательно $W = 0$, а поэтому все притекающее тепло идет на увеличение внутренней энергии. Следовательно в механических единицах

$$d\mathrm{I} = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{\alpha = \mathrm{const}} dT.$$

Назовем $\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_{\alpha = \mathrm{const}}$ удельной теплоемкостью газа при постоянном об'еме и обозначим ее через c_v; тогда

$$d\mathrm{I} = c_v dT, \qquad \mathrm{I} = \int c_v dT.$$

Для идеального газа величина c_v считается не зависящей от температуры. Для сухого и чистого воздуха

при $t = 0°$ $\quad c_v = 0{,}1719$ кал. гр.$^{-1}$ град.$^{-1}$
„ $t = 100°$ $\quad c_v = 0{,}1726$ „ „ „

Таким образом с высокой степенью точности можно считать c_v для сухого воздуха постоянным.

Найдем теперь выражение для элементарной работы единицы массы газа. Опять примем за переменные параметры α и T. Механическая работа, которую совершает газ, выражается в его расширении против сил давления окружающей газовой среды. Пусть внешнее давление будет $\bar{p}$. Тогда работа совершаемая газом $dW = A\bar{p}d\alpha$. Будем считать, что давление массы p в каждый момент процесса ничтожно мало отличается от внешнего давления $\bar{p}$ и положим приближенно

$$p = \bar{p}.$$

Такое условие называется квазистатическим условием, а процесс — квазистатическим процессом. Все наши дальнейшие рассуждения будут относиться к процессам квазистатическим, при которых нет разницы между внутренним и наружным давлением любого элемента массы воздуха. Иными словами мы будем принимать, что давление не терпит разрыва. При квазистатических изменениях

$$dW = Apd\alpha.$$

Ясно, что dW не есть полный дифференциал, ибо p не является функцией одного только α.

При изотермическом расширении $T = \mathrm{const}$ и

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} pd\alpha = RT \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\alpha} = RT \lg \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

При изобарическом расширении $p = \text{const}$ и

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} p d\alpha = p(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Легко убедиться из теоретических соображений, что для идеального газа расширение в пустоту без притока тепла должно совершаться изотермически. В самом деле в этом случае $\bar{p} = 0$ и dQ равно 0. Так как внешняя работа обращается в нуль, то из уравнения притока энергии следует, что $dT = 0$ т. е. расширение происходит изотермически.

Напишем уравнение притока энергии для идеального газа в виде

$$dQ = c_p\, dT - ART \frac{dp}{p}.$$

Можно преобразовать это уравнение таким образом, что в него будут входить только полные дифференциалы. В самом деле, разделим обе части уравнения на T. Тогда получим

$$\frac{dQ}{T} = c_p \frac{dT}{T} - AR \frac{dp}{p}$$

или

$$\frac{dQ}{T} = c_p\, d \lg T - AR\, d \lg p.$$

Так как в правой части стоят полные дифференциалы, то $\frac{dQ}{T}$ есть также полный дифференциал некоторой функции S, которая называется энтропией.

Заметим, что уравнение выведено для идеального газа и для случая квазистатических изменений состояния. По второму началу термодинамики $\frac{dQ}{T}$ будет полным дифференциалом не только для идеального газа, но и для всякого реального газа, лишь бы изменения состояния его происходили квазистатически (это соответствует принятой в термодинамике терминологии обратимого термодинамического процесса).

Как известно существует несколько формулировок второго начала термодинамики.

Второй принцип термодинамики в форме, данной В. Томсоном (W. Thomson'ом,) выражается таким образом: „Невозможно осуществить термодинамическую машину, которая при любом повторении цикла совершала бы работу поднятия исключительно за счет непрерывного отнятия тепла от источника“, в этом состоит условие невозможности perpetuum mobile второго рода.

Можно однако принять за второе начало термодинамики положение, что выражение $\frac{dQ}{T}$ есть полный дифференциал некоторой функции S. Отсюда обратно можно вывести положение Томсона о невозможности perpetuum mobile 2-го рода.

„Существует некоторая функция мгновенного состояния (т. е. функция, зависящая от переменных параметров состояния системы), полный дифференциал которой равен безконечно малому количеству теплоты, получаемому при квазистатическом изменении системы, деленному на температуру, при которой эта теплота сообщается. Эта функция по Клаузиусу называется энтропией“.

Формулировка, данная Клаузиусом (в 1881 г.) и известная под названием принципа Клаузиуса, говорит, „что в природе не может существовать такого процесса, каким бы способом его не старались воспроизвести, который отнимал бы некоторое количество тепла от более холодного резервуара и вводил бы это количество тепла в более

теплый резервуар, причем процесс происходил бы сам по себе, т. е. не сопровождался бы отнятием тепла от другого более теплого резервуара и передачей его более холодному.»

При обратимых круговых процессах энтропия системы остается постоянной, а при необратимых она растет. Процессы, происходящие в природе, по существу необратимы (хотя бы в силу трения и происходящей при этом диссипации энергии), а процессы обратимые представляют лишь идеальный предельный случай.

В термодинамике доказывается, что энтропия системы равна сумме отдельных значений энтропии составных частей системы. Если имеем систему, состоящую из двух тел различной температуры и изолированную от внешнего пространства, и рассмотрим эту систему в двух последовательных состояниях, причем в промежутке времени от первого состояния до второго бесконечно малое количество теплоты перешло от первого тела с температурой T_1 ко второму телу с температурой T_2. то, согласно принципу Клаузиуса такой переход возможен только в том случае если $T_1 > T_2$. При этом энтропия первого тела уменьшается на величину $\frac{dQ}{T_1}$, а энтропия второго тела возрастает на величину $\frac{dQ}{T_2}$; тогда $-\frac{dQ}{T_1}+\frac{dQ}{T_2}>0$, т. е. при переходе количества тепла dQ от одного тела системы к другому общая энтропия системы возрастает. Возрастание энтропии происходит благодаря тому, что рассматриваемый процесс есть процесс необратимый. Если бы процесс был обратим, то тепло стало бы переходить от более холодного тела к более теплому, что противоречит принципу Клаузиуса.

К числу необратимых процессов надо причислить вызываемое трением превращение работы в эквивалентное количество теплоты.

Пусть теперь имеется произвольная система, которая может быть и не изолирована от внешнего пространства. Пусть система перешла из некоторого положения, которое мы назовем первым, в другое, которое назовем вторым. Пусть первому состоянию соответствует некоторое определенное значение общей энтропии системы S_1, а второму состоянию значение общей энтропии S_2.

Теплоту, участвующую в теплообмене, мы можем считать состоящею из суммы бесконечно большого числа бесконечно малых порций тепла, которые можно будет считать положительными, если они поглощаются системой и — отрицательными, если они отдаются системой. Обозначим через $\Delta S'$ увеличение энтропии, происходящее за время перехода системы из состояния 1 в состояние 2 вследствие теплообмена между отдельными частями системы, находящимися при различной температуре, и через $\Delta S''$ — увеличение энтропии за тот же промежуток времени, происходящее вследствие трения и диссипации энергии. Тогда

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} + \Delta S' + \Delta S'' = S_2 - S_1.$$

как сказано выше

$$\Delta S' \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \Delta S'' \geqslant 0,$$

поэтому должно быть

$$S_2 - S_1 \geqslant \int_1^2 \frac{dQ}{T} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (42)$$

Это соотношение представляет собою так называемое неравенство Клаузиуса. В случае полной обратимости, т. е. когда нет теплообмена

между различными частями системы и нет некомпенсированного перехода работы в теплоту оно обращается в равенство:

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

т. е. в случае обратимого процесса алгебраическая сумма всех подведенных извне к системе количеств теплоты, деленных каждое на соответствующую температуру, равна приращению энтропии, а в случае не вполне обратимых процессов приращение энтропии больше чем эта сумма. В дифференциальной форме неравенство Клаузиуса пишется так:

$$dQ \leqslant TdS.$$

Если система вполне изолирована от внешнего пространства, причем в этом случае становится невозможен теплообмен между системой и внешней средой, левая часть неравенства обращается в нуль и получается

$$S_2 - S_1 \geqslant 0,$$

или

$$S_2 \geqslant S_1.$$

Энтропия единицы массы газа определена, как некоторая функция состояния

$$S = f(T, \alpha).$$

Каждой точке плоскости α, p отвечает вполне определенное значение энтропии (равным образом каждой точке плоскости p, T или T, α). По какому бы пути масса газа не приходила к состоянию, характеризуемому параметрами α и p, значение энтропии при этом состоянии остается одинаковым.

Заметим еще, что кривые одинакового значения энтропии, которые мы будем называть изентропами, совпадают с адиабатами, но только для квазистатических (обратимых) процессов. Если же изменение состояния происходит без соблюдения квазистатического условия (например, в случае расширения газа в пустоту), хотя бы и без притока тепла, энтропия массы газа может измениться. В дальнейшем мы всегда будем рассматривать квазистатические изменения состояния и соответственно с этим будем считать, что изентропы совпадают с адиабатами.

Для идеального газа, не содержащего паров воды, из уравнения

$$dS = c_p \frac{dT}{T} - AR \frac{dp}{p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

интегрированием получаем выражение энтропии как функции p и T

$$S = c_p \lg \frac{T}{T_0} - AR \lg \frac{p}{p_0}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

Согласно предложению Н. Шоу (Sir N. Shaw) (1928) в метеорологии принято за начальное состояние при определении энтропии принимать $T_0 = 100°$ abs и $p_0 = 1\,000$ *мбр*. Таким образом

$$S = c_p \lg \frac{T}{100} - AR \lg \frac{p}{1000},$$

причем

$$[S] = \left[\frac{\text{кал.}}{\text{гр.} \cdot \text{град.}}\right].$$

В механических единицах

$$S = E c_p \lg \frac{T}{100} - R \lg \frac{p}{1000},$$

причем S выражается в *см*$^2 \cdot$ *сек*$^{-2} \cdot$ *град.*$^{-1}$. Полагая

$$E = 4{,}186 \cdot 10^7 \text{ эрг./кал.}$$
$$c_p = 0{,}2405 \text{ кал./гр. град.}$$
$$R = 2{,}868 \cdot 10^6 \text{ эрг./гр. град.}$$

и переходя к десятичным логарифмам, напишем

$$S = 2{,}3181 \operatorname{Log}_{10} \frac{T}{100} - 0{,}6604 \operatorname{Log}_{10} \frac{p}{1000} \qquad [S] = \left[\frac{\text{джоуль}}{\text{гр.} \cdot \text{град.}}\right].$$

(Таблица численных значений энтропии дана в конце книги).

Итак энтропия, как функция состояния данной массы газа, выражается уравнением

$$S = c_p \lg T - AR \lg p + \text{const}.$$

На основании уравнения Клапейрона для идеального газа можно получить еще такие два выражения для энтропии в переменных (α, T) и в переменных (α, p)

$$S = c_v \lg T + AR \lg \alpha + \text{const} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (46)$$
$$S = c_p \lg \alpha + c_v \lg p + \text{const}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

§ 10. Потенциальная температура. Для того, чтобы сравнить энергию нескольких воздушных масс сухого воздуха, находящихся при различных давлениях и температурах, обычно поступают таким образом:

Адиабатическим процессом приводят их к одинаковому давлению и сравнивают полученную температуру. За нормальное давление, к которому нужно привести газ обычно принимается или давление в 760 *мм* ртутного столба или давление в 1000 *мбр*. Назовем это давление буквой P. Полученная при таком адиабатическом процессе температура называется потенциальной температурой данной массы газа. Потенциальная температура, как будет выяснено далее, играет важную роль в исследовании атмосферных процессов. Мы будем обозначать ее буквой ϑ.

Из уравнения Пуассона сразу получаем

$$\vartheta = T\left(\frac{P}{p}\right)^{\lambda}, \qquad \lambda = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

Важность понятия потенциальной температуры станет ясна, если принять во внимание связь, которая существует между потенциальной температурой и энтропией данной массы газа. Обратимся к выяснению этой связи.

Взяв логарифм от обоих частей уравнения (48) получим

$$\lg \vartheta = \lg T - \lambda \lg p + \lambda \lg P.$$

Дифференцируя это соотношение, будем иметь

$$d \lg \vartheta = d \lg T - \lambda d \lg p.$$

Умножая на c_p и приняв во внимание, что

$$\lambda c_p = c_p - c_v = AR,$$

получим

$$c_p d \lg \vartheta = c_p d \lg T - AR d \lg p.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (44) выражающим дифференциал энтропии, замечаем, что дифференциалы dS и $d(c_p \lg \vartheta)$ равны,

откуда заключаем, что функции состояния S и $c_p \lg \vartheta$ разнятся на некоторую постоянную

$$S = c_p \lg \vartheta + B,$$

или

$$\vartheta = Ce^{\frac{S}{c_p}}.$$

Значение постоянных C и B очевидно определяется нулевым значением энтропии. C есть такое значение ϑ, при котором энтропия обращается в нуль. Если в выражении потенциальной температуры опять принять за нормальное давление

$$P = 1000 \text{ мбр},$$

то

$$\vartheta = T\left(\frac{1000}{p}\right)^{\lambda}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

Согласно Шоу $S = 0$ при $p = 1000$ *мбр*. $T = 100°$.
В этом случае $\vartheta = 100°$. Следовательно постоянная $C = 100$ и

$$\vartheta = 100 \cdot e^{\frac{S}{c_p}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

Частица воздуха нагревается приблизительно на 1° при опускании на 100 *м*. Таким образом, если она на высоте z имела температуру T, то, опустившись к уровню моря, она примет температуру $\left(T + \frac{z}{100}\right)$. Так как вообще говоря, на уровне моря господствует давление p_0, отличное от 1000 *мбр*, то, чтобы довести частицу до давления в 1000 *мбр*, нужно сжать ее на $\left(\frac{1000 - p_0}{12}\right)$ *мбр*, вследствие чего получается еще повышение температуры на $\left(\frac{1000 - p_0}{12}\right)$ °C. Таким образом приближенное значение потенциальной температуры будет

$$\vartheta = T + \frac{z}{100} + \frac{1000 - p_0}{12}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

Например, если

$$z = 2360, \quad t = -5°,0, \quad p_0 = 976 \text{ мбр},$$

то потенциальная температура массы газа равна

$$-5{,}0 + 23{,}6 + 2{,}0 = 20{,}6.$$

Приближенная формула эта годится примерно до высоты 5000 *м*. Так например при $p_0 = 1000$ *мбр*, $t_0 = 0$ °C, $\gamma = 6$ °C/*км* находим такие разности между истинным значением потенциальной температуры воздуха на высотах $z = 2{,}5$; 5,0 и 10,0 *км* и значением, вычисленным по приближенной формуле:

$z =$	2,5	5,0	10,0 *км*.
$\vartheta - \vartheta'$	0,4	1,8	8,1

Вообще потенциальная температура играет ту же роль для свободной атмосферы, как обычная температура для однородной жидкости. Покажем, что равновесие ненасыщенной массы воздуха будет устойчивым, безразличным или неустойчивым в зависимости от того, будет ли потенциальная температура расти, оставаться неизменной или убывать с высотой.

Рассмотрим, как изменяется с высотой потенциальная температура слоев воздуха, если постоянный вертикальный температурный градиент равен γ. В каждом слое

$$\bar{\vartheta} = \bar{T}\left(\frac{P}{\bar{p}}\right)^{\lambda} = \bar{\vartheta}(z)$$

$$\frac{1}{\bar{\vartheta}}\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial z} = \frac{1}{\bar{T}}\frac{\partial\bar{T}}{\partial z} - \frac{\lambda}{\bar{p}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}.$$

Но

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho}g = -\frac{g\bar{p}}{R\bar{T}},$$

$$\frac{1}{\bar{\vartheta}}\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial z} = \frac{1}{\bar{T}}\frac{\partial\bar{T}}{\partial z} + \frac{\lambda g}{R\bar{T}} = \frac{1}{\bar{T}}\left(\frac{\lambda g}{R} + \frac{\partial\bar{T}}{\partial z}\right),$$

или

$$\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial z} = \frac{\bar{\vartheta}}{\bar{T}}(\gamma_a - \gamma). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

Отсюда следует, что при

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial z} > 0 & \text{равновесие устойчиво,} \\ \frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial z} = 0 & \text{равновесие безразличное} \\ \frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial z} < 0 & \text{равновесие неустойчивое.} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (53)$$

Потенциальную температуру массы воздуха в свободной атмосфере можно рассматривать, как метеорологический элемент, который хотя и не наблюдается прямо, но удобно вычисляется по наблюдениям температуры и давления, подобно тому как вычисляется например удельный об'ем. Для удобного вычисления потенциальной температуры по обычной температуре и давлению построена таблица с двумя входами, приложенная в конце книги. Для той же цели может служить специальная адиабатная бумага, предложенная Штюве, о чем будет сказано несколько далее.

Если воздух не сухой, но содержит пары воды, то в выражении потенциальной температуры

$$\vartheta = T\left(\frac{P}{p}\right)^{\lambda}$$

коэффициент λ изменяется в зависимости от содержания паров, однако, изменения этого коэффициента настолько малы, что, покуда не начинается конденсация, можно при определении потенциальной температуры считать воздух сухим. При этом ошибки, происходящие от пренебрежения влажностью не превосходят точности наблюдений. В самом деле, влияние малых изменений показателя λ не имеет большого значения. Оно могло бы оказывать влияние на величину ϑ только в случае большого содержания пара. Но это имеет место только при высоких температурах в самых низких слоях атмосферы. В этом случае однако давление p близко к стандартному давлению и отношение $\frac{P}{p}$ близко к единице. Таким образом изменение λ опять таки оказывает малое влияние на величину $\frac{\vartheta}{T}$ и следовательно на величину ϑ. При малых p, при значениях отношения $\frac{P}{p}$ превышающих заметно единицу, т. е. на больших высотах имеют место низкие температуры. Вместе с тем удельная влажность падает, так что λ становится близким к значению его для сухого воздуха.

Следующая таблица показывает, как изменяется λ при увеличении удельной влажности

$q = 1$ *гр/кгр*	$\lambda = 0{,}28840$
5 „	$\lambda = 0{,}28841$
10 „	$\lambda = 0{,}28842$
30 „	$\lambda = 0{,}28843$

Если положить λ равным не 0,2884, а 0,2885, то вычисление потенциальной температуры на 12 *км* высоты даст разность между двумя результатами в 0,05°. Но для вычисления потенциальной температуры с точностью до 0,1° требуется измерение температуры тоже с точностью 0,1° и давления с точностью 0,2 *мбр*. Эта точность при аэрологических наблюдениях является трудно достижимой. Таким образом практически потенциальная температура влажного воздуха может рассматриваться как потенциальная температура сухого воздуха вплоть до самого начала конденсации.

Наряду с изобарическими, изотермическими и изостерическими поверхностями можно рассматривать также поверхности одинаковой потенциальной температуры, которые очевидно являются также поверхностями одинаковых значений энтропии и потому могут быть названы изентропическими поверхностями.

Воздушная частица, движущаяся без притока и без отдачи тепла (адиабатически), сохраняет постоянной свою потенциальную температуру. Такие движения без притока энергии или вернее с малым притоком энергии, которым можно пренебречь, повидимому часто имеют место в атмосфере. Поэтому в первом приближении мы можем считать, что частицы, образующие изентропическую поверхность, все время остаются на этой поверхности, и следовательно перемещение изентропических поверхностей в свободной атмосфере происходит таким образом, что эти поверхности состоят все время из одних и тех же частиц. (Некоторые авторы выражаются не совсем правильно, говоря, что воздушные массы обычно и легче всего перемещаются по изентропическим поверхностям). Отсюда ясно, почему бывает полезно и выгодно пользоваться поверхностями одинаковой потенциальной температуры в метеорологии и аэрологии.

Разсмотрение изентропических поверхностей вместо горизонтальных поверхностей или поверхностей уровня для черчения на них синоптических карт представляет многие существенные преимущества. Для того, чтобы построить топографию такой изентропической поверхности на обычной карте т. е. высоту ее залегания над различными точками, надо знать значения давления и температуры на станциях и значения вертикального температурного градиента; отсюда уже легко вычислить значения энтропии для разных высот и построить топографические карты различных изентропических поверхностей.

Аэрологические наблюдения на достаточно густой сети дают возможность приблизительно строить карты таких поверхностей. Увеличение числа наблюдений без сомнения даст возможность строить их точнее.

При этом некоторые авторы для обозначения поверхности дают значения потенциальной температуры в градусах, а другие (например Шоу) значения энтропии, причем $\vartheta = 100\, e^{\frac{S}{c_p}}$.

На рис. 4 изображена карта одной из изентропических поверхностей для северного полушария по Шоу. На такой карте изотермы совпадают с изобарами, а также и с изостерами. Внизу приведена топография этой поверхности, т. е. высота ее залегания в километрах над различными станциями северного полушария. Кривые. начерченные на карте, изображают изотермы через 10°С. Они же являются изобарами, значение которых указано в соответствующей строке и они же являются изостерами, значения которых также даны в 3-ей строке.

Изентропическая поверхность 11,25 10^6 $\frac{\text{эрг.}}{\text{град.}}$ (нормальный летний режим).

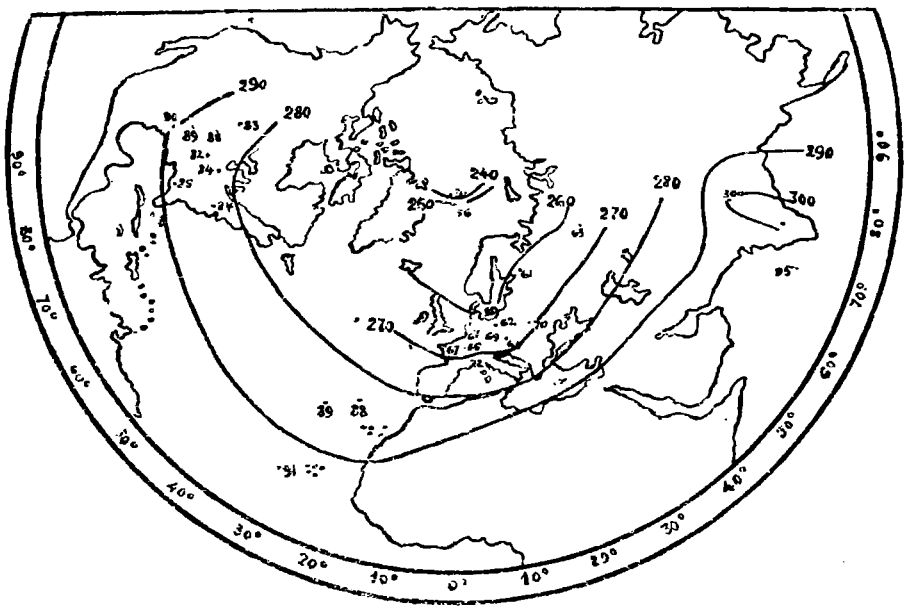

Рис. 4.

Изотермы (которые вместе с тем являются изобарами и изостерами) начерчены на изентропической поверхности 11,25 10^6 $\frac{\text{эрг}}{\text{град.}}$ Мелкие цифры изображают температуры на земной поверхности, причем начальная цифра 2 всюду опущена.

Высота изентропической поверхности над различными станциями в *км*.

Агра (Индия)	0,43	Англия	3,7
Пуна (Индия)	1,0	Мюнхен	3,7
Батавия (Ява)	1,5	Париж	3,9
Сев.-Атлант. Океан 10—26 N	1.5	Уккль (Бельгия)	4,0
Гресбак (Техас)	1,6	Страссбург	4,1
Сев.-Атлант. Океан 20—40 N	1,7	Цюрих	4,1
Брокен Арроу (Оклагома)	1,7	Вена	4,2
Дрексель (Небраска)	1,8	Свердловск	4,3
Сев.-Атлант. Океан 30—35 N	1,9	Линденберг (Берлин)	4,4
Лисбург	2,1	Слуцк (Ленинград)	4,5
Маунт Ведер (Виргиния)	2,3	Гамбург	4,8
Вудсток (Онтарио)	2,8	Арктика	4,9
Павия (Италия)	3,4	Шпицберген	6,8
Нижний Ольчедаев (СССР)	3,6		

Изобары	925	850	750	650	575	500	425	*мбр*
Изотермы	300	290	280	270	260	250	240	град.
Изопикны	1075	1025	925	850	775	700	625	*гр/м*³

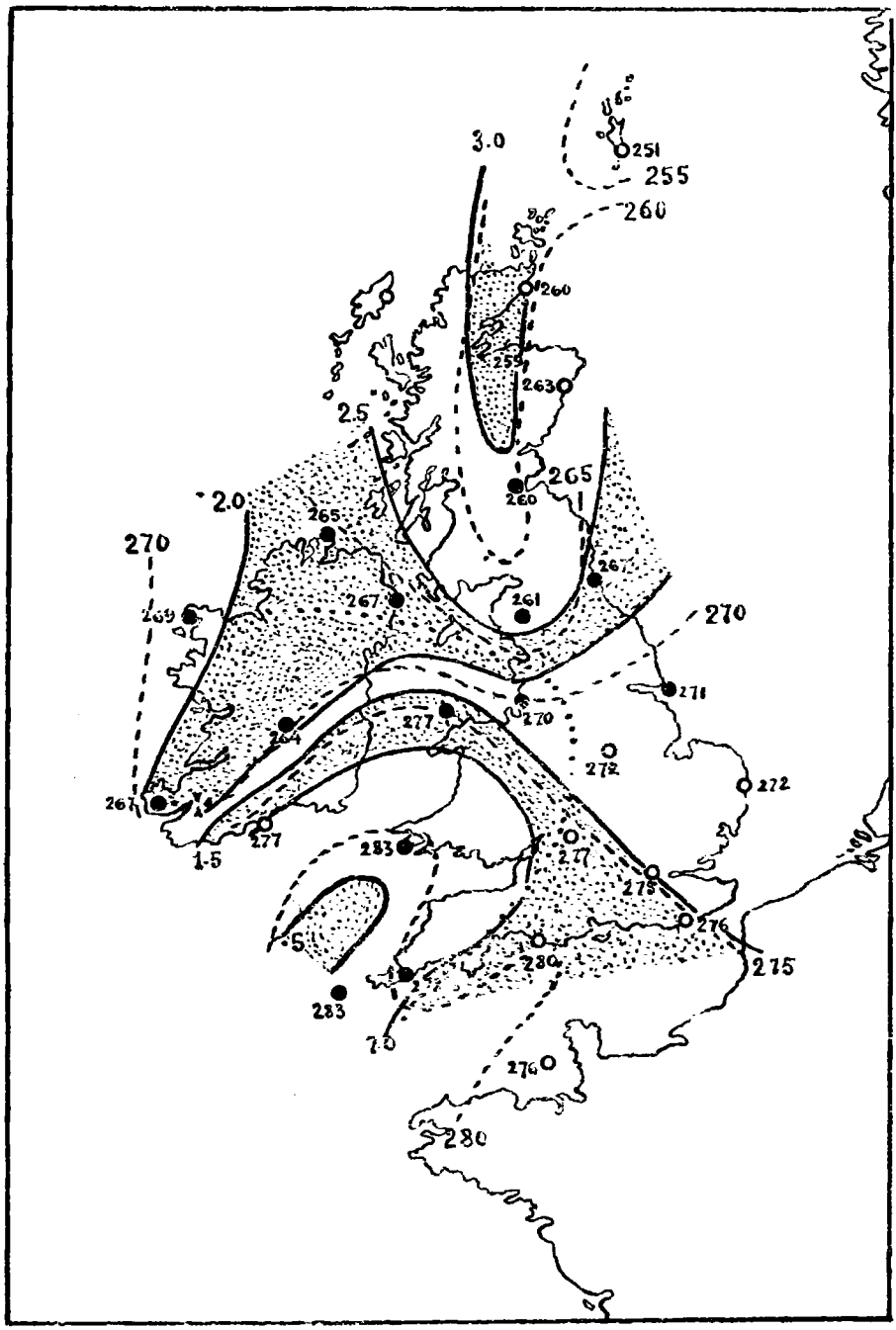

Рис. 5.

Контуры изентропической поверхности 10,75 мегаэргов на единицу температуры — сплошные линии, изотермы, изобары и изостеры—прерывные линии, центр депрессии обозначен крестом, две пунктирные линии — изобары на уровне моря, черные кружки — места выпадения осадков.

Атмосферные возмущения очевидно соответствуют складкам и неправильностям в ходе изентропических поверхностей и удобно могут быть изучены с помощью карт, отнесенных к таким поверхностям.

Следующий рисунок представляет синоптическую карту 12/XI 1901 08^h, отнесенную к определенной изентропической поверхности. Температуры точек этой поверхности нанесены цифрами близ соответствующих станций. Непрерывные линии обозначают линии уровня изентропической поверхности, причем области между последовательными линиями заштрихованы. Они показывают, что наибольшее возвышение (3 *м*) находится на севере и вся поверхность наклонена к югу. Изотермы (изобары) нанесены пунктирными линиями. Косой крест на SW Ирландии указывает центр значительной депрессии (11—13/XI 1901 г.). Замкнутые кривые с овальными черточками пунктира изображают изобары на земной поверхности, охватывающие область минимума (28,9 и 29,3 дюйма) и взятые с обычной синоптической карты этого дня. Места выпадения осадков обозначены черными кружками. Интересно, что эти места хорошо совпадают с направлением склонов изентропической поверхности, по которым происходит вертикальное скольжение масс.

Изентропическими поверхностями атмосфера является расслоенной в горизонтальном направлении и при стационарном состоянии слоев всякое движение, если оно совершается без притока энергии, может иметь место главным образом в изентропическом слое. Такое тепловое разслоение атмосферы имеет иногда настолько резко выраженный характер, что существенно меняется обычное представление о восходящих токах. Что восходящие токи существуют и играют большую роль в атмосферных процессах, не подлежит никакому сомнению. Об этом определенно свидетельствуют факты развития кучевых облаков и выпадения осадков. Значительное количество выпадающих осадков можно об'яснить, только допустив, что большие массы воздуха, поднимаясь вверх, охлаждаются вследствие адиабатического расширения, но самый механизм таких восходящих токов мы должны представлять себе не как прорыв больших масс воздуха вертикально вверх, а скорее как скольжение вдоль изентропических поверхностей с очень небольшим горизонтальным уклоном. Изентропические поверхности действуют как физические преграды, для поднимающихся масс воздуха. Даже если происходит конденсация, и вследствие освобождающейся скрытой теплоты энтропия растет, количество этого притекающего к данной массе тепла обычно невелико и достаточно бывает только для того, чтобы передвинуть массу воздуха лишь до соседних близких изентропических поверхностей. Поднятия больших воздушных масс через окружающую атмосферу случаются редко и об'ясняются особыми условиями. Для этого нужно, чтобы расслоение атмосферы было ослаблено т. е. чтобы энтропия мало росла с высотою, т. е. нужно наличие больших вертикальных температурных градиентов. Тогда, если воздух сильно нагрет и имеет большое количество паров, которые, конденсируясь, дают ему большой приток тепла, может случиться, что он начнет быстро подниматься на сравнительно большие высоты. Эти условия очевидно могут иметь место главным образом в экваториальных и тропических странах. Так повидимому об'ясняются тропические бури, а также частые шквалы и ливни в экваториальном поясе.

При нисходящих токах, когда нет конденсации и следовательно нет заметного притока энергии влияние теплового расслоения еще заметнее. Воздух опускается в окружающей среде не частями, а в виде оседания или скольжения целого большого столба. Внизу такого столба воздух расползается над прилегающими массами атмосферы, а над этим местом медленно опускается как одно целое.

Если большие массы воздуха переносятся в горизонтальном направлении без заметного притока или потери тепла, то они сохраняют свое первоначальное расслоение. Если встречаются два больших потока, скажем

экваториального и полярного воздуха, то расслоение в них не будет одинаковым. По счастливому сравнению Симпсона (Simpson) здесь имеется аналогия того, что происходит при соседстве двух различных слоистых горных пород разного геологического строения. Поверхность, по которой встречаются эти две массы воздуха, можно уподобить геологическому сбросу. В теплой массе соответствующие изентропические слои лежат ниже, чем в холодной. Если поверхность раздела является неустойчивой, то более холодная масса медленно понижается и подтекает в виде клина под теплую массу, которая, отчасти поднимаясь, тянется вверх для замещения оседающего холодного воздуха. Центр тяжести всей системы при этом понижается и освобождается потенциальная энергия, которая переходит в кинетическую энергию и поддерживает дальнейшее перемещение масс. Скользящее движение прекращается тогда, когда либо изентропические поверхности одного значения соединятся с двух сторон на поверхности раздела, либо тогда, когда теплый воздух весь поднимется и расположится над холодным. Массы придут в равновесие, в общем не смешиваясь друг с другом.

Пусть влажная масса воздуха, содержащая водяной пар в ненасыщенном состоянии, поднимается вверх. Тогда вначале изменение ее состояния будет происходить по сухой адиабате до тех пор, пока не будет достигнуто состояние насыщения, после чего изменение будет происходить по влажной адибате. На рис. 6, где координатами служат температура T и высота z, поднятие массы воздуха изображено ломаной линией 012. Пусть температура массы у земной поверхности будет T_0, на уровне z_1 $T_1 = T - \gamma_a z_1$ и на уровне z_2 $T_2 = T_1 - \gamma_{ap}(z_2 - z_1)$. Если теперь, достигнув

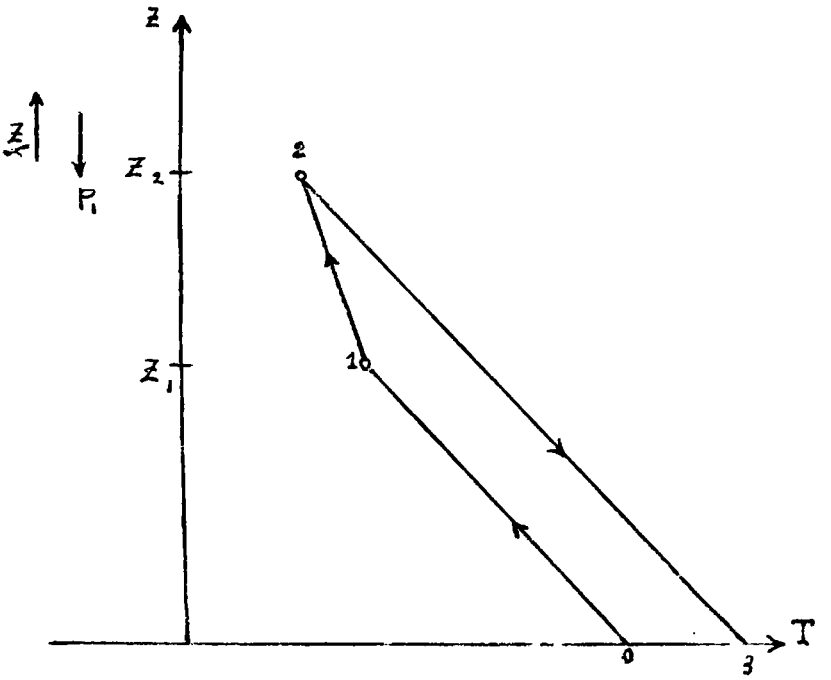

Рис. 6.

уровня z_2 масса воздуха начнет опускаться, то изменение ее температуры будет существенно различно, смотря по тому. выпал ли сконденсированный пар в виде осадков или остался в данной массе воздуха. Если имеет место второе, то весь процесс совершается в обратном порядке,

т. е. влага опять при опускании начнет испаряться, на что требуется тепло, так что поднятие температуры при опускании частицы происходит замедленно. Воздушная масса перемещается по влажной адиабате до тех пор, пока вся влага не превратится в пар; затем изменение состояния при опускании будет следовать по сухой адиабате. Частица придет в свое первоначальное положение с тою же самой температурой, при какой она начала свой под'ем. Если же, напротив, вся влага при самой конденсации выпадает (на участке 1, 2) то опускание из положения 2 будет происходить по сухой адиабате, и частица придет вниз с температурой $T_3 > T_0$. Повышение температуры $T_3 - T_0$ в точности равно тому повышению температуры, которое сообщила бы массе газа на уровне 0, т. е. при постоянном давлении, теплота, выделенная при конденсации влаги.

Процесс, при котором частица возвращается в исходное положение с повышенной температурой, назван Бецольдом (Bezold) „псевдоадиабатическим" процессом.

Штюве (Stüve) (1927 г.) ввел понятие о псевдопотенциальной температуре, которую он определяет, как потенциальную температуру массы воздуха, когда весь содержащийся в ней пар сконденсировался и передал скрытую теплоту конденсации воздушной массе. По определению Штюве

$$\vartheta_a = \vartheta + \frac{r}{c_p} q. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

Подобно тому как потенциальная температура массы сухого воздуха остается постоянной при всех адиабатических процессах, также и псевдопотенциальная температура не меняется при процессах псевдоадиабатических.

Если мы нанесем в системе координат T, p адиабаты ϑ и ϑ_a, то они взаимно параллельны, т. е. всегда отстоят на одинаковом расстоянии и это расстояние, измеренное при одном и том же давлении, т. е. по горизонтали равно $\frac{r}{c_p} q$, где q есть удельная влажность в начальном состоянии.

При стационарном движении, как известно, линии тока совпадают с траекториями частиц. Таким образом можно пользоваться псевдопотенциальной температурой для того, чтобы провести линии тока в стационарном поле, даже в том случае, когда происходит конденсация и выпадают осадки, чего нельзя делать с потенциальной температурой.

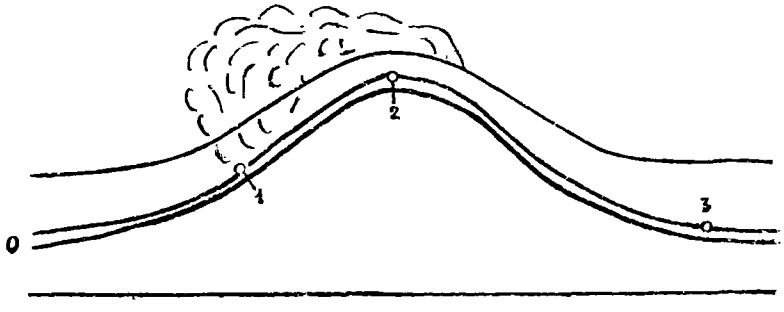

Рис. 7.

Рассмотрим, например, явление фена, предполагая весь процесс стационарным. На подветренной стороне воздушные массы поднимаются, причем содержащийся в них водяной пар в большой части конденсируется и выпадает в виде дождя. С противоположного склона горы воздушные массы стекают без заметного завихрения и приходят вниз с температурой, более высокой по сравнению с той, какую они имели на подветренном склоне на том же уровне. Явление таким образом в точности отвечает

только что разобранной модели. Вдоль участка пути 0—1 потенциальная температура постоянна $\vartheta = \vartheta_0$; равным образом постоянна она на участке 2—3 $\vartheta = \vartheta_3 \neq \vartheta_0$. Разность температур между подветренной и заветренной стороной $\vartheta_3 - \vartheta_0 = \frac{r}{c_p}(q_0 - q_3)$, так как $q_0 - q_3$ представляет собой выпавшее количество влаги. Таким образом $\vartheta_3 = \vartheta_0 + \frac{r}{c_p}(q_0 - q_3)$; далее

$$\vartheta_{a_3} = \vartheta_3 + \frac{r}{c_p} q_3 = \vartheta_0 + \frac{r}{c_p} q_0 - \frac{r}{c_p} q_3 + \frac{r}{c_p} q_3 = \vartheta_0 + \frac{r}{c_p} q_0 = \vartheta_{a0}.$$

Это означает, что псевдопотенциальная температура вдоль линии тока осталась постоянной, как это и должно быть.

Понятием псевдопотенциальной температуры Штюве пользуется также при проведении поверхностей разрыва на вертикальных атмосферных разрезах. Если теплый воздух поднимается вверх по поверхности разрыва над холодной воздушной массой, то очевидно, как и в предыдущем примере его псевдопотенциальная температура остается постоянной. Если мы имеем несколько расположенных один над другим слоев инверсий, то определив псевдопотенциальную температуру можно узнать, какие инверсии над разными пунктами образуют одну и ту же поверхность скольжения. Вдоль такой поверхности скольжения псевдопотенциальная температура должна оставаться постоянной, коль скоро поверхность скольжения совпадает со стационарной поверхностью тока и коль скоро мы имеем дело с однородной массой, расположенной вдоль поверхности скольжения.

§ 11. Графические методы изображения изменения состояния массы воздуха. Адиабатные бумаги. Имея кривые температуры и давления на обыкновенной метеорограмме змейкового или зондового под'ема можно по точкам построить кривую состояния для атмосферы.

Для этого удобно воспользоваться особого рода бланками, например полулогарифмической бумагой с специально нанесенными сетками линий.

Пусть по оси абсцисс отложены температуры (от —45° до 35°), а по оси ординат — логарифмы давления (от 1050 *мбр.* до 500 *мбр.*). Такая шкала дает возможность наносить данные под'емов до высоты 7—8 *км* [1]).

Сплошные кривые, идущие под углом около 30°, представляют сухие адиабаты. Эти кривые мало отличаются от прямых. Пунктирные кривые идущие в том же направлении под несколько большим углом представляют влажные адиабаты. Сплошные линии, идущие почти вертикально и имеющие индексы от 0,1 до 40 представляют собою удельную влажность σ в *гр* на *кг* воздуха. Эта удельная влажность рассчитана для насыщенного воздуха; другими словами, кривые удельной влажности проведены так, что нанося на диаграмму точку с координатами T и p, мы по значению проходящей через эту точку кривой удельной влажности узнаем одновременно содержание водяных паров в 1 *кг* массы при 100% влажности. Такая диаграмма введена в практику Ревсдалем (1930 г.) и названа им эмаграммой (Energie-Massen-Diagramm), так как она дает возможность легко производить подсчеты энергии воздушных масс.

В § 6 было дано выражение силы, действующей на единицу массы при движении по вертикали, если движение это квазистационарное, т. е. в каждый момент давление частицы равно давлению окружающей среды

$$F = \frac{d^2z}{dt^2} = g\frac{T - \overline{T}}{\overline{T}}.$$

Таким образом работа силы на вертикальном перемещении dz равна

$$Fdz = g\frac{T - \overline{T}}{\overline{T}} dz = g\frac{T - \overline{T}}{\overline{T}} \frac{dz}{dp} dp. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

[1]) См. приложение I в конце книги.

Вставляя сюда

$$\frac{dz}{dp} = -\frac{1}{\bar{\rho} g} = -\frac{R\bar{T}}{gp}$$

получим

$$Fdz = -(T - \bar{T})\frac{Rdp}{p} = -R(T - \bar{T})\, d \lg p, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (66)$$

т. е. элементарная работа силы пропорциональна дифференциалу площади заключенной на эмаграмме между кривой состояния для атмосферы, кривой,

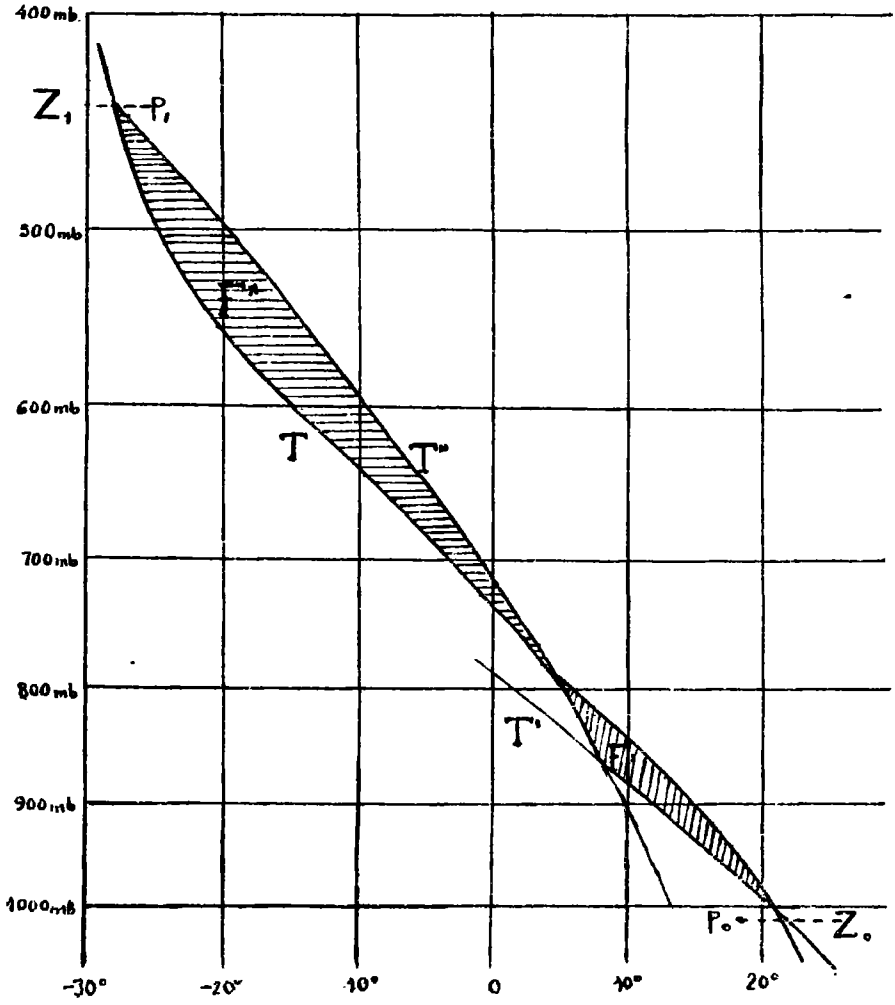

Рис. 8. Эмаграмма количества энергии на единицу массы.

изображающей изменения состояния, рассматриваемой массы воздуха и двумя бесконечно близкими горизонталями. При под'еме вверх работа положительна при $T > \bar{T}$, т. е. в этом случае она производится внешними силами и отрицательна при $T < \bar{T}$, т. е. в этом случае она производится за счет энергии воздушной массы. Полная же работа изображается на эмаграмме площадью, заключеной между сухой и влажной адиабатой с одной стороны, кривой состояния с другой и ограниченной сверху и

снизу горизонталями, соответствующими начальному и конечному положению воздушной массы.

На чертеже 8, площадь F', заключенная между кривой состояния и кривыми сухой и влажной адиабаты дает меру работы, которую надо затратить для поднятия массы воздуха, а площадь F'' между кривой состояния и влажной адиабатой дает меру энергии, освободившейся при поднятии неустойчивой воздушной массы, насыщенной парами.

Разность площадей $F''-F'$ дает меру количества энергии, освобождающейся, если воздушная частица движется с уровня, соответствующего давлению p_0 до уровня, соответствующего давлению p. Эту энергию Ревсдаль называет энергией неустойчивости (Labilitätsenergie).

По эмаграмме можно решить ряд интересных практических задач и произвести подсчеты свободной энергии, освободившейся вследствие влажно неустойчивого состояния воздушных масс.

Так, например, чтобы узнать на сколько градусов надо нагреть воздушную массу, находившуюся вначале на уровне, отвечающем точке $(p_0, \overline{T}_0)$ кривой для того, чтобы поднявшись и адиабатически расширившись, она пришла в равновесие с окружающей средой как раз в тот момент, когда пары в ней содержащиеся придут в состояние насыщения, надо очевидно поступить таким образом. Зная удельную влажность поднимающейся массы воздуха, найдем точку пересечения кривой состояния с кривой максимальной удельной влажности насыщения $\sigma=q$. Следуя из этой точки вниз по сухой адиабате до точки пересечения ее с горизонтальной кривой, соответствующей p_0, непосредственно определим величину нагревания

$$\Delta T_0 = T_0 - \overline{T}_0.$$

Чтобы узнать до какой высоты надо поднять массу воздуха из ее первоначального положения без притока энергии так, чтобы, изменяя свое состояние адиабатически, она пришла в равновесие с окружающей средой, надо очевидно, из данной точки кривой состояния $(p_0, \overline{T}_0)$ следовать сначала по сухой адиабате до пересечения с упомянутой кривой насыщения σ. После этого поднимающаяся масса будет следовать по влажной адиабате и пусть влажная адиабата пересекает снова кривую состояния в точке $(p_1, \overline{T}_1)$. Это и будет уровень до которого надо поднять массу. Если выше этого уровня атмосфера влажно-неустойчива, то насыщенная масса будет подниматься дальше, пока снова не прийдет в равновесие с окружающей средой на некоторой высоте, которая определяется точкой $(p_2, \overline{T}_2)$, в которой кривая состояния снова пересекает влажную адиабату, направляясь вверх.

Иногда бывает выгодно рассматривать энергию, отнесенную к единице об'ема. Для того, чтобы составить выражение элементарной работы поднятия в этом случае, надо полученное ранее выражение элементарной работы помножить на массу, занимаемую единицей об'ема, т. е. на плотность ρ. Тогда

$$F\rho dz = -R(T-\overline{T})\frac{\rho}{p}dp = -\frac{(T-\overline{T})}{T}dp.$$

Если в известном ряде, сходящемся при $|x|<1$

$$\lg(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots,$$

положить

$$1-x = \frac{\overline{T}}{T},$$

и

$$x = 1 - \frac{\overline{T}}{T} = \frac{T - \overline{T}}{T},$$

то

$$\lg \frac{T}{\overline{T}} = \frac{T - \overline{T}}{T} + \frac{(T - \overline{T})^2}{2T^2} + \frac{(T - \overline{T})^3}{3T^3} + \ldots$$

Ошибка, которую мы сделаем, если напишем $\lg \frac{T}{\overline{T}}$ вместо $\frac{T - \overline{T}}{T}$ будет в процентах составлять приблизительно $100 \frac{T - \overline{T}}{2T}$. Во влажно неустойчивых массах $T - \overline{T}$ только в редких случаях достигает 10°, и поэтому ошибка, которая получится, если $\frac{T - \overline{T}}{T}$ заменить через $\lg \frac{T}{\overline{T}}$ не будет превышать 2%, т. е. не будет иметь существенного значения в приближенных метеорологических подсчетах. Поэтому можно написать

$$F\rho dz = -\lg \frac{T}{\overline{T}} dp = -\left\{ \lg T - \lg \overline{T} \right\} dp. \quad \ldots \ldots \quad (67)$$

На диаграммной бумаге с линейной шкалой давления и логарифмической шкалой температуры элементарная работа выражается площадью между двумя изобарами p и $p + dp$ и двумя изотермами $\overline{T}$ и T.

Величина этой площади равна численному значению $\lg \frac{T}{\overline{T}} dp$. Полная работа поднятия от уровня с давлением p_0 до уровня с давлением p_1 выражается значением интеграла

$$- \int_{p_0}^{p_1} \lg \frac{T}{\overline{T}} dp, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (68)$$

т. е. величиною площади между кривыми состояния воздушной массы и атмосферы и двумя изобарами p_0 и p_1.

Положительные количества энергии на этой диаграммной бумаге выйдут несколько преувеличенными, а отрицательные — несколько преуменьшенными. Но, как сказано, ошибка эта невелика и в приблизительных метеорологических подсчетах ею можно пренебречь. Впрочем легко ввести нужную поправку, если желательно получить большую точность.

Для наглядного представления условий устойчивости воздуха при данном распределении температуры весьма удобно также пользоваться индикаторными диаграммами, предложенными Шоу и названными им „тэфиграммами“ [1]).

В тэфиграмме мы имеем координатную сетку, в которой по оси абсцисс, направленной в левую сторону, нанесены температуры T, а по оси ординат значения энтропии сухого воздуха, которую Шоу обозначает не через S, как обычно принято, а через φ. Из соотношения $\varphi - \varphi_0 = c_p \ln \frac{\vartheta}{\vartheta_0}$ ($\varphi = c_p \ln \vartheta + \text{const}$) следует, что горизонтальные линии, т. е. изэнтропы, одновременно являются изотермами потенциальной температуры, т. е. соответствуют адиабатическому изменению состояния массы воздуха. Вертикальные линии представляют собою изотермы $T = \text{const}$. Линейной шкале энтропии соответствует логарифмическая шкала потенциальной температуры. Обе шкалы нанесены по вертикали.

---

[1]) См. приложение II в конце книги.

На тэфиграмме наносятся еще дополнительные системы кривых. Прежде всего наносятся изобары, уравнение которых имеет вид

$$\varphi = 2{,}318 \log \frac{T}{100} - 0{,}660 \log \frac{p}{1000},$$

где p — давление в миллибарах. Изобары представляются на сетке семейством кривых, которые поднимаются с правой стороны снизу и направляются налево кверху, ибо, как показывает уравнение, при постоянном p энтропия φ растет с возрастанием температуры T. Пользуясь этой системой кривых, можно легко по тэфиграмме найти значение энтропии, отвечающее данным значениям давления и температуры. Например для $T = 250°$, $p = 400$ *мбр*

$$\varphi = 1{,}19 \frac{\text{джоулей}}{\text{гр. град.}}.$$

Далее, сеть изобар и изэнтроп дает возможность определить температуру, как функцию давления при адиабатическом процессе, т. е. решить графически уравнение Пуассона.

Если, например, исходим из первоначальных значений $p_0 = 900$ *мбр*. $T_0 = 290°$, то, следуя по горизонтальной изэнтропе направо, найдем, что при $p = 535$ *мбр*, $T = 250°$ и т. д.

Вторая система кривых, которые наносятся на тэфиграмме, суть адиабаты насыщенного воздуха. Это будут кривые, которые при убывании температуры поднимаются к большим значениям энтропии, т. е. следуют поднимаясь слева направо. В самом деле, легко понять, что влажную адиабату можно получить из сухой, если принять во внимание, что при конденсации выделяется скрытая теплота, которая притекает к данной массе влажного воздуха. Таким образом, если мы будем рассматривать сухую массу воздуха, которая проходит те же изменения состояния, что и влажная масса, изменяющая свое состояние адиабатически, то эта сухая масса должна все время получать приток тепла $dq = -d(r\sigma)$, и энтропия ее должна расти по закону

$$d\varphi = \int \frac{dq}{T} = -\int \frac{d(r\sigma)}{T} > 0.$$

Точно влажные адиабаты могут быть получены, если в координатную сетку температуры и давления на тэфиграмме мы внесем парные значения величин T и p, соответствующие дождевой стадии (§ 7).

При понижении температуры, когда удельная влажность падает, влажные адиабаты заметно приближаются к сухим и направляются параллельно оси абсцисс.

Продвигаясь по влажной адиабате, мы можем решить задачу о нахождении температуры влажной массы воздуха при понижении ее давления. Так, например, исходя из начальных данных $p_0 = 900$ *мбр*, $T_0 = 290{,}5°$, найдем, что при $p = 500$ *мбр*, $T = 266°$.

Наконец, третья система кривых, начерченных на тэфиграмме, есть система линий, дающих максимальную удельную влажность насыщения

$$\sigma = \frac{e_m}{1{,}605p - 0{,}605e_m},$$

где e_m — упругость паров, насыщающих пространство, есть функция только от температуры T. Это суть линии слегка наклоняющиеся направо вверх от вертикали. На бланках тэфиграмм они нанесены пунктиром. Они могут быть проведены таким образом: определим точку росы T_p при постоянном давлении. Точку на тэфиграмме определяем, следуя изобаре до пересечения с изотермой T_p. Место этих точек встречи для разных значений давления p даст искомую кривую.

Тэфиграмма весьма удобно может служить для диагноза состояния атмосферы в данный момент времени над данным местом, а также и для целей прогноза погоды. Для этого данные аэрологических наблюдений, дающие параллельные значения температуры и давления, наносятся на бланк тэфиграммы. Эта запись дает непрерывную кривую, характеризующую состояние атмосферы в данный момент времени над данным местом. Ход этой кривой в различных участках дает возможность судить, насколько атмосфера является устойчивой или неустойчивой на различных высотах. Там, где кривая при понижающемся давлении, т. е. при увеличении высоты направлена на диаграмме слева направо вниз (на рис. 9 участок *BC*) равновесие будет во всяком случае неустойчивым, ибо в этой области, как легко понять, вертикальный температурный градиент оказывается больше сухого адиабатического. Там, где кривая направляется справа налево вверх, например, (как на участке *DE*), во всяком случае имеет место устойчивое равновесие, ибо температура в этом случае растет с убыванием давления, т. е. имеет место инверсия. Наконец там, где кривая имеет направление слева направо вверх (как например на участках *AB* и *CD*) может иметь место устойчивое или неустойчивое равновесие, смотря потому, будет ли воздух насыщенным или нет. Если воздух насыщен, то устойчивое равновесие может получиться только в том случае, если кривая поднимается слева направо вверх круче, чем влажная адиабата (как например на участке *CD*) и равновесие будет неустойчивым, если кривая спускается под влажную адиабату (на чертеже участок *AB*).

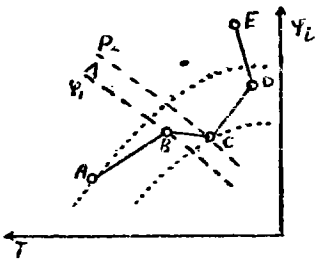

Рис. 9.

Как указал Шоу и позднее точно показал Россби (Rossby), тэфиграмма дает возможность графически определить количество энергии, которое может освободиться при нарушении неустойчивого равновесия атмосферы в тех ее участках, где неустойчивое равновесие имеет место, и таким образом может служить для целей прогноза погоды. В самом деле элемент площади на тэфиграмме должен измеряться в таких единицах:

$$[Td\varphi]=\left[\text{град.}\ \frac{\text{джоуль}}{\text{гр.}\cdot\text{град.}}\right]=\left[\frac{\text{джоуль}}{\text{гр.}}\right],$$

т. е. он дает меру удельной энергии. 1 *кв. см* площади на рис. 9 представляет энергию в 2.10^5 эрга на грамм сухого воздуха.

Можно задать вопрос, какова будет работа, необходимая для того, чтобы массу воздуха передвинуть скажем из точки *A* в точку *B*. Эта работа будет очевидно зависеть от вида кривой, характеризующей состояние атмосферы между точками *A* и *B*.

Ранее (66) нами было выведено выражение для элементарной работы, которую производят внешние силы при вертикальном поднятии единицы массы воздуха на элемент высоты dz

$$dW=R\ (\overline{T}-T)\,d\lg p.$$

Следовательно полная работа перемещения единицы массы воздуха выражается интегралом

$$W=\int_{p_1}^{p_2} R\,(\overline{T}-T)\,d\lg p,$$

где нижний предел p_1 означает давление на нижнем уровне, при начале поднятия, а верхний предел p_2 — давление на верхнем уровне.

Так как, выражая φ в тепловых единицах,

$$d \lg p = \frac{1}{AR}[c_p d \lg T - d\varphi],$$

то

$$W = \frac{1}{A}\int (T - \overline{T})\, d\varphi - \frac{c_p}{A}\int (T - \overline{T})\, d \lg T.$$

Если теперь обратимся к тэфиграмме (рис. 10) и рассмотрим работу на участке ADB, то найдем, что первый член правой части нашего выражения есть ничто иное, как помноженная на постоянный множитель величина площади, заключенной между влажной адиабатой CDB и кривой состояния ADB. На участке AD этот интеграл имеет положительное значение, что соответствует затраченной работе поднятия воздушной массы, находящейся в положении устойчивого равновесия, а на участке DB этот интеграл имеет знак минус, что соответствует освобождающейся энергии неустойчивого состояния.

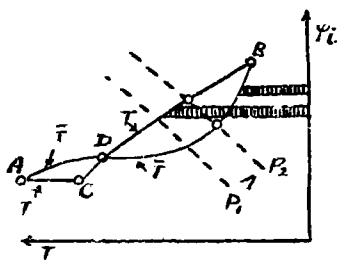

Рис. 10.

Легко показать, что второй интеграл обращается в нуль.

В самом деле интеграл

$$\int (T - \overline{T})\, d \lg T = \int\limits_{(ACDB)} T d \lg T - \int\limits_{(ADB)} \overline{T} d \lg T = \int\limits_{(ACDB)} T d \lg T + \int\limits_{(BDA)} T d \lg T,$$

т. е. представляет собою интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала $Td \lg T$. Следовательно он равен нулю.

Интеграл $\int (T - \overline{T})\, d\varphi$ представляет величину площади, которая заключается между кривой состояния и кривой индивидуального изменения. Таким образом $W > 0$ при $T > \overline{T}$ и $W < 0$ при $T < \overline{T}$.

В первом случае это указывает на освобождающуюся энергию, а во втором случае на то, что нужно приложить работу, чтобы перевести частицу из 1-го во 2-ое положение. В нашем примере $\overline{T} > T$ на участке AD и $\overline{T} < T$ на участке DB. При сдвиге воздушной массы от A до B очевидно $W > 0$, ибо величина площади DB будет больше площади треугольника ACD; таким образом при сдвиге из положения A в положение B освобождается энергия, измеряемая разностью площади DB и площади треугольника ACD.

Если мы будем измерять φ и W в соответствующих единицах, а именно φ в $\frac{\text{джоуль}}{\text{гр. град.}}$, а W в $\frac{\text{джоуль}}{\text{гр.}}$, то будем иметь, что

$$W = \int (T - \overline{T})\, d\varphi.$$

Эта же самая формула будет иметь меето, если φ измерять в $\frac{\text{кал.}}{\text{гр. град.}}$, но тогда и W получится в $\frac{\text{кал.}}{\text{гр.}}$.

Таким образом, имея иа диаграмме Шоу кривую состояния, т. е. кривую изменения метеорологических элементов с высотой над данным местом, можно по ходу этой кривой сделать заключение об устойчивости или неустойчивости отдельных слоев воздуха и даже подсчитать количество энергии, которое необходимо затратить для поднятия масс воздуха в первом случае, или которое освобождается при поднятии

неустойчивых масс во втором случае, т. е. иначе говоря, с помощью тэфиграммы можно составить диагноз состояния атмосферы и даже сделать некоторый возможный прогноз погоды на ближайшее время.

Примеры таких диагнозов по тэфиграммам даны в конце книги.

Dines в Англии и Alvord и Smith в САСШ изучили большое число тэфиграмм, построенных по зондовым под'емам в летние дни, характеризовавшиеся вообще неспокойным состоянием атмосферы и выпадением большого количества осадков. Alvord и Smith приходят к заключению, что грозы, сопровождаемые бурными пертурбациями в атмосфере, могут быть предсказаны на основании анализа тэфиграмм примерно за 6 часов до их наступления. Если на тэфиграммах утренних под'емов обозначались большие заштрихованные площади, соответствующие неустойчивому состоянию атмосферы и большим количествам энергии, которая при таком неустойчивом состоянии может освободиться, то с большой вероятностью можно было предсказать грозу и шторм в течение следующего дня. Они полагают, что фронтальные возмущения в атмосфере, связанные с перемещением поверхностей разрыва, также могут быть обнаружены на тэфиграммах, по крайней мере, за 6 часов до приближения фронта к станции наблюдения.

Однако, надо сказать, что в действительности вертикальные перемещения больших масс воздуха в атмосфере происходят гораздо сложнее. Большие воздушные массы не поднимаются как целое, а с другой стороны наряду с поднятием происходит вытеснение других воздушных масс и опускание их вниз. Создаются местные малые циклы и сложная система вихрей и весь процесс принимает в большой или в меньшей степени характер турбулентного перемешивания. Поэтому численные подсчеты освобождающейся энергии на эмаграммах и тэфиграммах имеют условное значение, т. е. просто дают некоторую общую характеристику неустойчивости атмосферы над данным местом. Эти подсчитанные по тэфиграммам и эмаграммам количества освобождающейся энергии обычно являются несколько преувеличенными.

С помощью тэфиграммы удобно решаются графически две рассмотренных уже ранее задачи:

1. На сколько градусов надо поднять температуру массы воздуха, находящегося у земной поверхности (давление p_0, температура $\overline{T}_0$ и удельная влажность q) для того, чтобы эта масса сделавшись неустойчивой, поднялась до такой высоты, на которой находящиеся в ней пары стали-бы насыщать пространство?

Рассматривая кривую состояния, изображающую действительное распределение температуры в вертикальной колонне атмосферы, найдем точку пересечения этой кривой с соответствующей кривой максимальной удельной влажности насыщения σ. От этой точки следуем по сухой адиабате влево до пересечения с той изобарой, которая соответствует давлению у земной поверхности (p_0). Соответствующая этой точке температура T_0 и будет искомая температура, до которой нужно нагреть массу воздуха внизу. Разность $T_0 - \overline{T}_0$ дает искомое нагревание в градусах.

2. На какую высоту надо механически поднять влажную массу воздуха из ее первоначального положения, чтобы достигнуть высоты, на которой она сделается влажно неустойчивой и будет дальше продолжать движение вверх в силу неустойчивого равновесия?

Задача решается таким образом. Из данной точки, лежащей на кривой действительного распределения температуры, следуем по сухой адиабате до пересечения ее с кривой насыщения удельной влажности $\sigma = q$. Отсюда продолжаем перемещаться по влажной адиабате до пересечения с кривой состояния. Если при этом пересечении кривая состоя-

ния будет опускаться ниже влажной адиабаты, то точка пересечения и будет искомой точкой. Сразу находим соответствующие ей координаты — температуру и энтропию и обычным способом можем определить ее высоту. Дальше наша масса, сделавшись неустойчивой, будет сама подниматься вверх, изменяя свое состояние по влажной адиабате до тех пор пока кривая состояния атмосферы не пересечет эту влажную адиабату, поднимаясь над нею вверх. Очевидно, площадь, заключенная между кривой состояния, сухой и влажной адиабатой от исходной точки до первой точки пересечения дает выражение затрачиваемой на поднятие работы, а площадь между первой и второй точкой пересечения дает выражение энергии, освобождающейся при поднятии массы, принявшей положение неустойчивого равновесия.

Штюве (Stüve) предложил другой способ графического изображения атмосферного состояния [1]). В его диаграмме образца 1927 года координатами являются температура (от—50° до 40°) и величина p^{λ} выраженная в миллибарах (шкала давлений охватывает промежуток от 1000 *мбр* до 200 *мбр*. Параллельно нанесена шкала в *мм* ртутного столба). Так как адиабаты сухого воздуха (а также с большой степенью точности и адиабаты влажного воздуха) выражаются уравнением Пуассона.

$$\frac{T^{\lambda}}{p^{\lambda}} = \text{const},$$

то на диаграмме они представляются прямыми, проходящими через начало координат, т. е. точку ($p=0$, $T=0$), которая не изображена (не умещается) на диаграмме. Эти прямые вместе с тем суть прямые равных значений потенциальной температуры, ибо

$$\vartheta = T\frac{P^{\lambda}}{p^{\lambda}},$$

и при постоянных ϑ это уравнение дает те же самые прямые.

Влажные адиабаты насыщенного парами воздуха изображаются уравнением (§ 7)

$$\operatorname{Lg} T - \lambda \operatorname{Lg} p + \frac{MRer}{c_p R_w T p} = \text{const},$$

где

$$e = f(T).$$

На бланках прямые сухих адиабат нанесены зелеными линиями, а кривые насыщенных адиабат красными линиями.

Адиабатная бумага Штюве особенно удобна для определения потенциальной температуры по данным метеорограмм. В самом деле, нанося точки метеорограммы, соответствующие разным высотам, т. е. разным парам значений p и T, можем непосредственно находить соответствующие значения потенциальной температуры.

Особенно удобно произвести такое нанесение предварительно перед построением тэфиграммы. Нанеся точки на адиабатическую бумагу Штюве и прочитав непосредственно соответствующие им значения потенциальной температуры, по таблице находим для них значения энтропии φ, после чего, зная координаты T и φ, наносим их прямо на тэфиграмму и получаем кривую состояния.

§ 12. Энергетика атмосферы.

Обратимся к уравнению (8).

$$dS + EdQdm = d\mathfrak{T} + dI,$$

которое выражает первое начало термодинамики. Оно может быть в общем виде формулировано таким образом. Работа всех об'емных и по-

[1]) См. приложение III в конце книги.

верхностных сил, приложенных в элемент времени dt к элементу жидкого об'ема dm, сложенная со всей притекающей к этому жидкому элементу теплотой, равна изменению кинетической и внутренней энергии элемента.

Напишем уравнение в другом виде, введя новые обозначения и относя все к жидкому об'ему, имеющему массу, равную единице и к единице времени. Тогда

$$\frac{dS}{dt}+E\frac{dQ}{dt}=\frac{d\mathfrak{T}}{dt}+\frac{d\Pi}{dt}.$$

Положим

$$\frac{dQ}{dt}=\alpha\varepsilon.$$

Далее, согласно (3) и (4),

$$\frac{dS}{dt}=\int\int\int_{\tau}(Xu+Yu+Zw)\,dm+\int\int(\mathfrak{X}u+Yu+\mathfrak{Z}w)\,d\sigma,$$

где X, Y, Z проэкции об'емных сил, а $\mathfrak{X}$, Y, $\mathfrak{Z}$ проэкции сил поверхностных, действующих на поверхность σ, ограничивающую жидкий об'ем τ.

В качестве об'емной силы мы рассматриваем силу тяжести, проэкции которой на координатные оси при надлежащем выборе этих осей напишутся так:

$$X=0 \qquad Y=0 \qquad Z=-g.$$

Что касается поверхностных сил, то таковыми нужно считать давление p, действующее на поверхность σ, ограничивающую об'ем и силу поверхностного трения, также действуюшего на пограничной поверхности σ. Называя проэкции этой последней силы через R_x, R_y, R_z напишем, принимая во внимание, что давление направлено по нормали к поверхности:

$$\mathfrak{X}=-p\cos(N,X)+R_x,\quad \mathfrak{Y}=-p\cos(N,Y)+R_y,\quad \mathfrak{Z}=-p\cos(N,Z)+R_z.$$

Тогда

$$\frac{dS}{dt}=-\int\int\int_{\tau}gw\,dm-\int\int_{\sigma}p\,[\cos(N,X)\,u+\cos(N,Y)\,v+\cos(N,Z)\,w]\,d\sigma+$$

$$+\int\int_{\sigma}(R_xu+R_yv+R_zw)\,d\sigma$$

или

$$\frac{dS}{dt}=-\int\int\int_{\tau}g\frac{dz}{dt}dm-\int\int_{\sigma}pV\cos(\vec{V},N)\,d\sigma+\int\int_{\sigma}RV\cos(\vec{R},\vec{V})\,d\sigma.$$

Введем понятие о потенциальной энергии жидкого об'ема, определив ее, как $\mathfrak{P}=\int\int\int gz\,dm$. Тогда

$$\frac{dS}{dt}=-\frac{d\mathfrak{P}}{dt}-\int\int_{\sigma}pV_n\,d\sigma+\int\int_{\sigma}RV\cos(\vec{R},\vec{V})\,d\sigma.$$

Вставляя это выражение $\frac{dS}{dt}$ в уравнение притока энергии получаем

$$E\frac{dQ}{dt}=\frac{d\mathfrak{T}}{dt}+\frac{d\Pi}{dt}+\frac{d\mathfrak{P}}{dt}+\int\int_{\sigma}pV_n\,d\sigma-\int\int_{\sigma}RV\cos(\vec{R},\vec{V})\,d\sigma. \quad . \; . \; (69)$$

Это уравнение выражает, что теплота, приведенная к единице массы воздуха, равна приращению кинетической, потенциальной и внутренней энергий, сложенному с работой сил давления и сил поверхностного трения, которую данная масса совершает по отношению к окружающей ее воздушной среде.

Очевидно, что это уравнение справедливо не только для единицы массы, но для всякой массы, заполняющей жидкий об'ем.

Преобразуем работу сил давления по теореме Гаусса:

$$\iint_{\sigma} pV_n d\sigma = \iiint_{\tau} \operatorname{div}(p\vec{V})d\tau = \iiint_{\tau} (\operatorname{grad} p, \vec{V})\, d\tau + \iiint_{\tau} p \operatorname{div}\vec{V} d\tau.$$

Тогда получим

$$E\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathfrak{T} + \mathfrak{P} + \mathrm{I}) + \iiint_{\tau} (\operatorname{grad} p, \vec{V})\, d\tau +$$

$$+ \iiint_{\tau} p \operatorname{div}\vec{V} d\tau - \iint_{\sigma} RV \cos(\vec{R}, \vec{V})\, d\sigma. \quad \ldots\ldots (70)$$

Рассмотрим выражение

$$\iiint_{\tau} \frac{d(p\alpha)}{dt} \rho d\tau = \iiint_{\tau} \frac{dp}{dt} d\tau + \iiint_{\tau} \frac{p}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt} d\tau =$$

$$= \iiint_{\tau} \frac{\partial p}{\partial t} d\tau + \iiint_{\tau} (\operatorname{grad} p, \vec{V})\, d\tau + \iiint_{\tau} p \cdot \operatorname{div}\vec{V} \cdot d\tau.$$

Подставляя в предыдущее равенство, получим

$$E\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathfrak{T} + \mathfrak{P} + \mathrm{I}) - \iiint_{\tau} \frac{\partial p}{\partial t} d\tau +$$

$$+ \iiint_{\tau} \frac{d(p\alpha)}{dt} \rho d\tau - \iint_{\sigma} R \cdot V \cos(\vec{R}, \vec{V})\, d\sigma. \quad \ldots\ldots (71)$$

Если количество паров в воздухе не меняется и пары далеки от состояния насыщения, то можно рассматривать данную массу воздуха, как массу сухого воздуха. В этом случае

$$\mathrm{I} = \frac{c_v}{A} \iiint_{\tau} T dm = \frac{c_v}{A} \iiint_{\tau} T\rho d\tau.$$

Если прибавим к обеим частям

$$\iiint_{\tau} p d\tau = \iiint_{\tau} p\alpha\rho d\tau,$$

то найдем, что

$$\mathrm{I} + \iiint_{\tau} p d\tau = \iiint_{\tau} \left(\frac{c_v}{A} T + p\alpha\right) \rho d\tau =$$

$$= \iiint_{\tau} \frac{c_v + AR}{A} T\rho d\tau = \frac{c_p}{A} \iiint_{\tau} T\rho d\tau = \frac{c_p}{c_v} \mathrm{I} = \varkappa \mathrm{I}.$$

Отсюда для жидкого об'ема

$$\frac{dI}{dt}+\int\int\int\frac{d(p\alpha)}{dt}\rho d\tau=\varkappa\frac{dI}{dt}.$$

Вставляя в уравнение (71), получим новое преобразование уравнения притока энергии

$$E\frac{dQ}{dt}=\frac{d}{dt}(\mathfrak{T}+\mathfrak{P}+\varkappa I)-\int\int\int_{\tau}\frac{\partial p}{\partial t}d\tau-\int\int_{\sigma}RV\cos(\vec{R},\vec{V})d\sigma. \quad (72)$$

В динамической метеорологии рассматривается обычно упрощенная форма уравнения притока энергии, которая получается, если будем считать движение стационарным $\left(\frac{\partial p}{\partial t}=0\right)$, адиабатическим $\left(\frac{dQ}{dt}=0\right)$ и без трения ($R=0$). Тогда

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{T}+\mathfrak{P}+\varkappa I)=0.$$

Отсюда для любого жидкого элемента при этих условиях

$$\mathfrak{T}+\mathfrak{P}+\varkappa I=\text{const}.$$

Если отнесем это к единице массы, то напишем еще проще

$$\frac{1}{2}V^2+\mathfrak{P}+\varkappa I=\text{const}.$$

Если заменить в этой формуле c_p через c_v+AR, то получим

$$\frac{1}{2}V^2+\mathfrak{P}+I+\frac{AR}{c_v}I=\text{const}.$$

Заменив в последнем члене I через Ec_vT получим

$$\frac{1}{2}V^2+gz+I+RT=\text{const},$$

или

$$\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}V^2+gz+Ec_vT=\text{const}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (73)$$

Уравнение (73) есть ничто иное, как известное уравнение Бернулли. Из него можно сделать некоторые любопытные выводы. Так как

$$\frac{p}{\rho}+Ec_vT=\left(R+\frac{c_v}{A}\right)T=\frac{c_p}{A}T,$$

то из (73) следует, что

$$\frac{dT}{dt}=-\frac{A}{c_p}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}V^2+gz\right).$$

Отсюда интегрированием находим

$$T=T_0-0{,}001004\left(\frac{1}{2}V^2+gz\right).$$

При очень медленном движении можно пренебречь кинетической энергией. Тогда

$$T=T_0-0{,}001004gz.$$

Приближенно это дает падение температуры в 1° на 100 метров поднятия. Мы приходим таким образом к результату, котоый был найден раньше (§ 4). Совершенно ясно, что причина падения температуры при адиабатическом поднятии заключается в работе расширения.

Наоборот, если положим $z = \text{const}$ т. е. рассмотрим движение единицы массы воздуха вдоль поверхности уровня, то

$$T = T_0 - \frac{A}{2}\frac{V^2}{c_p} = T_0 - 0{,}000502\,V^2.$$

Это дает такие значения для падения температуры при различных скоростях ветра

$V =$	10	50	100	500	738 *m/sec.*
$\Delta T =$	— 0,05	— 1,26	— 5,02	— 126	— 273 °C.

Скорости порядка 50 *м/сек.* в атмосферных движениях могут возникнуть лишь в самых исключительных случаях, например в ураганах. В лабораториях подобные скорости могут быть получены экспериментальным путем при вытекании воздуха из узких отверстий под большим давлением.

Рассмотрим теперь другое упрощение уравнения притока энергии, а именно рассмотрим замкнутую жидкую массу. Будем называть замкнутой такую жидкую массу, которая ограничена или твердыми стенами или неизменяемыми поверхностями тока. В обоих случаях имеет место кинематическое условие, что нормальная составляющая скорости обращается в нуль на поверхности, ограничивающей такой жидкий об'ем.

Покажем, что в этом случае в уравнении притока энергии можно заменить все индивидуальные производные по времени частными производными.

В самом деле рассмотрим интеграл

$$\frac{d}{dt}\iiint_\tau L\,dm = \frac{d}{dt}\iiint_\tau L\rho\,d\tau,$$

где L есть некоторая скалярная величина, а интеграл распространен на жидкий об'ем τ, тогда

$$\frac{d}{dt}\iiint_\tau L\rho\,d\tau = \iiint_\tau \frac{dL}{dt}\rho\,d\tau = \iiint_\tau \frac{\partial L}{\partial t}\rho\,d\tau + \iiint_\tau (\operatorname{grad} L, \vec{V})\,\rho\,d\tau.$$

Но

$$\frac{\partial L}{\partial x}u\rho = \frac{\partial(\rho L u)}{\partial x} - L\frac{\partial(u\rho)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}v\rho = \frac{\partial(\rho L v)}{\partial y} - L\frac{\partial(v\rho)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}w\rho = \frac{\partial(\rho L w)}{\partial z} - L\frac{\partial(w\rho)}{\partial z}.$$

Таким образом

$$\frac{d}{dt}\iiint_\tau L\rho\,d\tau = \iiint_\tau \frac{\partial L}{\partial t}\rho\,d\tau + \iiint_\tau \operatorname{div}(\rho L\vec{V})\,d\tau - \iiint_\tau L\operatorname{div}(\rho\vec{V})\,d\tau.$$

Но для замкнутого об'ема

$$\iiint_\tau \operatorname{div}(\rho L\vec{V})\,d\tau = \iint_\sigma \rho L V_n\,d\sigma = 0,$$

и следовательно

$$\frac{d}{dt}\iiint_\tau L\rho\,d\tau = \iiint_\tau \frac{\partial L}{\partial t}\rho\,d\tau - \iiint_\tau L\operatorname{div}(\rho\vec{V})\,d\tau.$$

Но в силу уравнения неразрывности

$$\operatorname{div}(\rho V) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\tau} L\rho d\tau = \iiint\limits_{\tau} \frac{\partial L}{\partial t}\rho d\tau + \iiint\limits_{\tau} L\frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

или

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\tau} L\rho d\tau = \iiint\limits_{\tau} \frac{\partial(\rho L)}{\partial t} d\tau = \frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\tau} \rho L d\tau.$$

Если жидкий об'ем ограничен твердыми стенками, то интегрирование производится по постоянному об'ему.

Уравнение (69) в этом случае, если еще считать, что трение отсутствует, напишется таким образом

$$E\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{T} + \mathfrak{P} + \mathrm{I}).$$

При адиабатических изменениях его можно записать еще так

$$\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{P} + \mathrm{I}).$$

Всякое изменение потенциальной или внутренней энергии такой замкнутой воздушной массы сопровождается соответствующим увеличением ее кинетической энергии.

Рассмотрим вертикальную колонну воздуха с основанием равным кв. единице и ограниченную с боков твердыми стенками. Тогда для нее

$$\mathfrak{P} + \mathrm{I} = \iiint\limits_{\tau} gz\rho d\tau + \frac{c_v}{A}\iiint\limits_{\tau} T\rho d\tau = \int\limits_0^\infty gz\rho dz + \frac{c_v}{A}\int\limits_0^\infty T\rho dz.$$

Но

$$\rho g = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

и следовательно

$$\mathfrak{P} = -\int\limits_0^\infty z\frac{\partial p}{\partial z} dz = -[zp]_0^\infty + \int\limits_0^\infty p dz$$

или так как на верхнем пределе $zp = 0$, а на нижнем $z = 0$, то

$$\mathfrak{P} = \int\limits_0^\infty p dz = R\int\limits_0^\infty \rho T dz = R\int\limits_0^\infty T dm = \frac{AR}{c_v}\mathrm{I}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

Отсюда отношение внутренней энергии к потенциальной

$$\frac{\mathrm{I}}{\mathfrak{P}} = \frac{c_v}{AR},$$

что для сухого воздуха составляет

$$\frac{0{,}1681}{0{,}0689} = 2{,}44.$$

Для влажного воздуха газовая постоянная оказывается несколько больше, поэтому можно положить в среднем для атмосферы

$$\frac{\mathrm{I}}{\mathfrak{P}} = 2{,}4.$$

В вертикальной колонне воздуха, в которой не происходит обмена с окружающей средой (которая ограничена твердыми стенками), внутренняя и потенциальная энергии находятся в постоянном соотношении.

Это положение известно под именем теоремы Маргулеса. Некоторые авторы называют его теоремой Дайнса (Dines).

Если в такой колонне воздуха некоторое количество кинетической энергии возникает за счет потенциальной энергии положения, то одновременно должно развиться количество кинетической энергии в 2, 4 раза больше за счет внутренней энергии системы.

§ 13. **Теория Маргулеса.** Уравнения (73) наводят на мысль об'яснить возникновение и развитие воздушных течений в атмосфере таким путем, что кинетическая энергия этих воздушных течений получается за счет запасов потенциальной и внутренней энергии воздушных масс. Всякое уменьшение запаса потенциальной и внутренней энергии обуславливает возрастание кинетической энергии. Если замкнутая масса первоначально находится в состоянии неустойчивого равновесия, то достаточно весьма малых смещений, чтобы произошло перераспределение масс, при котором потенциальная энергия массы достигает значения „minimum"; при этом изменении потенциальной энергии и сопровождающем его изменении внутренней энергии растет кинетическая энергия, и масса ранее находившаяся в покое начинает двигаться. Если в начале процесса масса находилась в покое, хотя и в неустойчивом равновесии, то обозначая индексом 1 величины, относящиеся к начальному состояния, а индексом 2 величины, относящиеся к конечному состоянию, будем иметь

$$\frac{M}{2}V^2 = (\mathfrak{P} + I)_1 - (\mathfrak{P} + I)_2,$$

или

$$\frac{M}{2}V^2 = \frac{c_p}{A}\int (T_1 - T_2)\,\rho dz = \frac{c_p}{A}\int (T_1 - T_2)\,dm. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

Отсюда следует, что если средняя температура столба воздуха меняется, то возникает кинетическая энергия.

Маргулес произвел подробные подсчеты для определения величины освобождающейся кинетической энергии для различных случаев перераспределения воздушных масс. Он рассматривал несколько схем, из которых самыми типичными являются две. Первая схема соответствует тому случаю, когда в большой массе воздуха, залегающей над земной поверхностью, в каждой вертикальной колонне имеется одно и то же вертикальное распределение масс, т. е. давление и температура не зависят от горизонтальных координат, а только лишь от вертикальной координаты z. Но вертикальное распределение вначале неустойчиво и вследствие такой неустойчивости происходит такое перемещение, что нижние потенциально более теплые слои поднимаются наверх, а верхние, потенциально более холодные, опускаются вниз, после чего система принимает положение устойчивого равновесия.

Вторая схема Маргулеса соответствует случаю когда в каждой вертикальной колонне равновесие устойчивое, но существует асимметрия в горизонтальных плоскостях. Холодные массы лежат бок о бок с теплыми, вследствие чего происходит образование барических градиентов и перемещение масс, связанное с изменением потенциальной энергии системы. Эти два случая неустойчивого равновесия представляют собой только простейшие типы явлений такого рода. В действительности в атмосфере повидимому может иметь место одновременно то и другое условие, благодаря чему процесс обмена энергии внутри воздушных масс становится очень сложным.

Пусть, например, (рис. 11) пространство под поршнем вертикальной перегородкой разделено на 2 части. В левой половине воздух поддерживается при более низкой температуре, чем в правой. Внешнее давление сверху одинаковое для обоих. Тогда очевидно в нижней части первой камеры давление будет больше, чем в нижней части второй. Предположим, что сначала воздух находится в состоянии безразличного равновесия в каждой камере, а потом перегородка быстро убирается. Тогда начнется перетекание, и холодный воздух займет пространство внизу камеры, а теплый воздух поднимется наверх, причем холодный воздух сожмется, а теплый расширится. Если давление в верхней части камеры увеличится, то поршень, который мы должны представить себе наверху, должен приподняться. Когда поршень поднимается, то воздух, находящийся в камере, производит работу поднятия, если же поршень опускается, то работа совершается внешней атмосферой.

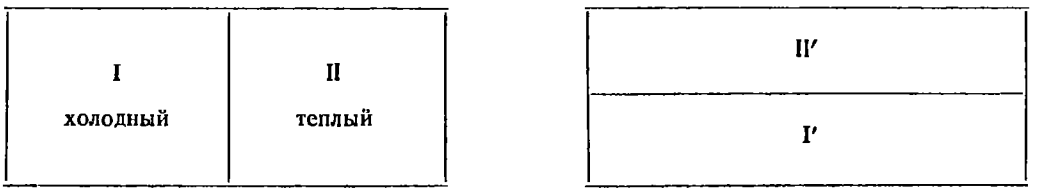

Рис. 11

При подсчете общего количества развившейся кинетической энергии это обстоятельство также должно быть принято во внимание, но для простейших приблизительных подсчетов можно считать, что поршень остается неподвижным. Производя самый подсчет получающейся вследствие перераспределения масс кинетической энергии, Маргулес показал что если, например, принять начальную разность температур, в 10° в каждом горизонтальном уровне, то получаются такие результаты:

$h = 2000$	3000	6000 *м*	
$V = 13$	16	23 *м/сек*	

где h есть высота перегородки, а V развивающаяся скорость.

Конечно, условия, которые действительно имеют место в атмосфере, гораздо сложнее. Если вначале процесса можно еще в идеализированной схеме допустить возможность существования поверхности раздела подобной вертикальной стенке, то уже никак нельзя сказать, что поверхность раздела может быть удалена сразу. На самом деле, если возникает разность в распределении давления в горизонтальном слое, то воздух приходит в движение постепенно, и поверхность раздела, как это показал сам Маргулес, под влиянием отклоняющей силы вращения земли, должна принять наклонное положение. Так как благодаря внутреннему трению и турбулентности процесс перераспределения масс всегда сопровождается диссипацией энергии, часть потенциальной энергии переходит прямо в теплоту.

В общем процесс, соответствующий схеме, рис. 12, надо представлять таким образом. Когда вертикальная перегородка удалена, то вследствие наличия горизонтального градиента давления холодный воздух начинает двигаться по направлению к камере II, где он вначале сжимает теплый воздух до тех пор, пока давление не примет одно и то же значение во всем горизонтальном слое. В продолжении этой стадии процесса возникает небольшое количество кинетической энергии, которое и обнаруживается в этих горизонтальных перемещениях. Когда давление в каждом горизонтальном уровне выравнивается, то граничная поверхность будет проходить примерно по линии AB как показано на рис. 12. Так как воздух в камере 2 адиабатически сжимается, то температура его воз-

растает. Маргулес полагает, что вначале воздух находился в состоянии безразличного равновесия, и так как в камере 2 сжатие, а следовательно и повышение температуры возрастает сверху вниз, то равновесие по вертикали становится неустойчивым. Наоборот, воздух в камере 1 охлаждается и при этом тем больше, чем ниже уровень в камере. Поэтому положение в этой камере становится более устойчивым. В дальнейшем очевидно может развиться замкнутая циркуляция. Воздух в камере 2, находящийся в неустойчивом равновесии начнет подниматься вверх и на его место снизу начнут притекать массы холодного воздуха. Отсюда становится понятным, что только часть потенциальной энергии преобразуется прямо в кинетическую энергию горизонтальных движений. Значительная (может быть большая) часть запасов потенциальной энергии идет на поддержание циркуляции, т. е. тратится на работу расширения и местные изменения давления в вертикальной колонне воздуха, переходит потом в кинетическую энергию вертикальных движений и, наконец, просто диссипируется в силу турбулентности и внутреннего трения.

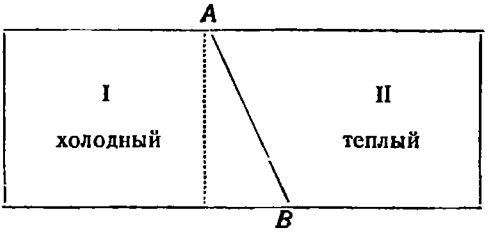

Рис. 12

В работах Маргулеса была впервые сделана попытка выяснить вопрос о взаимном преобразовании различных форм энергии в атмосфере. Особенное внимание Маргулес обратил на вопрос изменения вертикального напластования масс различной потенциальной температуры, причем эти изменения ведут к освобождению больших количеств потенциальной энергии и преобразованию ее в другие виды. Он хорошо выяснил понятия о различных формах энергии и устранил путаницу, которая господствовала в этом вопросе до него. Старые взгляды на вопрос о происхождении воздушных течений, взгляды, которые нередко повторяются и сейчас, сводятся к тому, что источником кинетической энергии мощных воздушных течений в атмосфере является поле распределения давления. В горизонтальных градиентах давления как в натянутых упругих пружинах заключаются запасы потенциальной энергии, способные приводить в движение большие воздушные массы с большими скоростями. Выравнивание горизонтальных градиентов, сопровождающее перемещение больших воздушных масс, согласно старым воззрениям, вполне должно было об'яснить и качественно и количественно всю энергию атмосферных движений замкнутой системы, например, циклона. Однако, такие взгляды по существу были ошибочны. Увеличение давления в данной массе газа может происходить без возрастания температуры. Оно появляется в результате сжатия, и давлению, как таковому, нельзя приписывать потенциальную энергию. Одно из основных свойств идеального газа состоит в том, что энергия содержащаяся в определенной массе газа является функцией только его температуры, и если температура остается неизменной, то энергия не будет изменяться при изменениях давления. Маргулес показал, что та работа, которая получается при перемещении воздушных масс под действием градиентов давления, получается за счет запасов потенциальной энергии внешних частей атмосферы. Горизонтальные смещения сопровождаются всегда опусканием и поднятием воздушных масс в каких нибудь других частях атмосферы. В конечном счете кинетическая энергия движущихся масс

получается из потенциальной энергии положения и от внешнего притока тепла, благодаря которому повышается температура воздушной массы, т. е. увеличивается ее внутренняя энергия, которая потом уже переходит в энергию движения. Поле давления имеет здесь только посредствующее значение: через посредство возникающих в нем градиентов давления совершается горизонтальный перенос масс. Самые градиенты являются выражением разницы в потенциальной энергии соседних вертикальных столбов воздуха.

Маргулес произвел подробные подсчеты для сравнения энергии горизонтального распределения давления, заключающейся в областях, занятых большими циклонами, с той кинетической энергией, которая соответствует имеющимся градиентам давления. Он рассматривал идеализированную модель циклона, строя ее по возможности близко к реальным условиям. Он нашел, что эта энергия горизонтального распределения давления оказывается далеко недостаточной для того, чтобы об'яснить всю кинетическую энергию, развивающуюся в циклоне. Таким путем может быть об'яснено только около 5% общего запаса кинетической энергии.

Самые схемы Маргулеса, о которых мы упоминали, конечно представляются весьма условными. Они никоим образом не могут служить для об'яснения действительных процессов, сопровождающих возникновение и развитие циклона. Маргулес рассматривает воздушные массы, ограниченные твердыми стенками, и внезапное мгновенное перемещение масс. При этом он не следит за самым процессом, а рассматривает только начальное и конечное состояния системы. Эти схемы с бо́льшим правом могут быть применены к об'яснению явлений тропических бурь и мелких тропических циклонов, где имеет место очень быстрое поднятие воздуха. Что касается энергии больших циклонов средних широт, то обмен энергии в них происходит вообще гораздо сложнее.

§ 14. Уравнение притока энергии в синоптической метеорологии и значение его для диагноза и прогноза погоды. Рассмотрим уравнение притока энергии в атмосфере при упрощающем предположении об отсутствии трения. Тогда можем написать:

$$\frac{dQ}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} - \frac{ART}{p} \frac{dp}{dt}.$$

Уравнение принимает особенно простой вид если ввести потенциальную температуру (p измеряется в миллибарах)

$$\frac{dQ}{dt} = c_p \left(\frac{p}{1000}\right)^{\lambda} \frac{d\vartheta}{dt} = c_p T \frac{d \lg \vartheta}{dt}.$$

Первое выражение показывает, как при данном давлении p повышается потенциальная температура вследствие притока тепла, а второе показывает, как при данной температуре от этого притока тепла возрастает энтропия.

Если движение горизонтальное и изменение состояния частицы адиабатическое, то

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0$$

и, выражая ϑ через p и T, получим

$$\frac{dT}{dt} = \frac{ART}{c_p p}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y}\right).$$

Величина, стоящая в скобках, выражает изменение давления горизонтально движущейся частицы. Порядок этой величины для атмосферных движений в среднем в системе *м., т., сек.* 10^{-5}.

Если движение вертикальное в стационарном поле давления, то таким же путем получаем

$$\frac{dT}{dt}=\frac{AR}{c_p}\frac{T}{p}w\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Величина $w\frac{\partial p}{\partial z}$ в свободной атмосфере в среднем порядка 10^{-4}, т. е. приблизительно в 10 раз больше, чем изменение давления частицы, движущейся горизонтально. Более быстрые и резкие изменения температуры происходят следовательно при вертикальных движениях масс воздуха.

Из уравнения (72), пренебрегая членами трения, относя все члены к единице массы и выражая Q и c_p в механических единицах, легко получить такое выражение

$$\frac{dT}{dt}=\frac{1}{c_p}\frac{dQ}{dt}-\frac{1}{c_p}\frac{d}{dt}(\mathfrak{T}+\mathfrak{P})+\frac{\alpha}{c_p}\frac{\partial p}{\partial t}.$$

Уравнение показывает, что изменение температуры движущейся массы воздуха зависит от трех причин:

1) От притока тепла $\frac{1}{c_p}\frac{dQ}{dt}$ посредством теплопроводности, конвекции или радиации. Единица энергии в системе *м. т. с. (килоджоуль)* сообщает единице массы воздуха повышение температуры в 0,001004 C°

$$\left(\frac{1}{c_p}=0{,}001004^\circ \text{ в системе } м.\ т.\ с.\right).$$

2) От потери кинетической и потенциальной энергии воздуха; величина соответствующего изменения температуры равна

$$-\frac{1}{c_p}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}V^2+\mathfrak{P}\right).$$

3) Благодаря местному изменению давления. Если показание барометра в данном месте повышается на 1 *мбр* в сек., то температура протекающих через это место воздушных масс будет подниматься на 0,1° C в секунду.

Изучим теперь от каких факторов зависит изменение температуры в данном месте. Для этого, развернув уравнение (76), оставим в левой части его только частную производную температуры по времени

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{c_p}\frac{dQ}{dt}+\frac{RT}{c_p p}\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{RT}{c_p p}(\vec{V},\ \mathrm{grad}\,p)-(\vec{V},\ \mathrm{grad}\,T),\quad \ldots (78)$$

т. е. температурное изменение в данной точке зависит от:

1) притока тепла $\frac{1}{c_p}\frac{dQ}{dt}$,

2) адиабатического нагревания и охлаждения, которое выражается членом $\frac{RT}{c_p p}\frac{\partial p}{\partial t}$,

3) горизонтальной конвекции, или, как принято говорить в метеорологии, адвекции

$$\left(\vec{V},\ \frac{RT}{c_p p}\ \mathrm{grad}\,p-\mathrm{grad}\,T\right).$$

Если ввести потенциальную температуру

$$\vartheta=T\left(\frac{1000}{p}\right)^{\lambda}$$

и воспользоваться дифференциальным соотношением

$$\frac{1}{\vartheta}\operatorname{grad}\vartheta=\frac{1}{T}\operatorname{grad}T-\frac{R}{pc_p}\operatorname{grad}p,$$

то этот адвекционный член можно написать проще:

$$\left(\vec{V},\ \frac{RT}{c_p p}\operatorname{grad}p-\operatorname{grad}T\right)=-\frac{T}{\vartheta}\left(\vec{V},\ \operatorname{grad}\vartheta\right),$$

и уравнение (78) получает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{c_p}\frac{dQ}{dt}+\frac{RT}{c_p p}\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{T}{\vartheta}\left(\vec{V},\ \operatorname{grad}\vartheta\right).$$

Отсюда видно, что приток масс из областей с высокой потенциальной температурой вызывает повышение температуры в данной точке, а приток масс с низкой сравнительно потенциальной температурой вызывает понижение температуры. Адиабатическое нагревание от сжатия и адиабатическое охлаждение от расширения, выражаемые вторым членом, имеют малое значение в сравнении с адвекционным членом.

Если мы выделим вертикальную конвекцию, то можем написать предыдущее уравнение в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{c_p}\frac{dQ}{dt}+\frac{RT}{c_p p}\frac{\partial p}{\partial t}-T\left(\frac{\partial(\lg\vartheta)}{\partial x}u+\frac{\partial(\lg\vartheta)}{\partial y}v\right)-Tw\frac{\partial\lg\vartheta}{\partial z},$$

или, заменяя $\lg\vartheta$ через $\lg p$ и $\lg T$,

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{c_p}\frac{dQ}{dt}+\frac{RT}{c_p p}\frac{\partial p}{\partial t}+$$

$$+\frac{\alpha}{c_p}\left(u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}\right)-\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\alpha}{c_p}w\frac{\partial p}{\partial z}-w\frac{\partial T}{\partial z}.$$

Заменяя здесь $\alpha\frac{\partial p}{\partial x}$, $\alpha\frac{\partial p}{\partial y}$ и $\alpha\frac{\partial p}{\partial z}$ из уравнений движения получим

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{c_p}\frac{dQ}{dt}-\frac{1}{c_p}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}V^2\right)+\frac{\alpha}{c_p}\frac{\partial p}{\partial t}-w(\gamma_a-\gamma)-\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right),\quad(79)$$

где $\gamma_a=\frac{g}{c_p}$ есть адиабатический вертикальный температурный градиент.

Уравнение выведено для сухой атмосферы, но оно может быть дополнено, если в член $\frac{dQ}{dt}$ ввести скрытую теплоту конденсации.

Если имеет место только вертикальная конвекция, т. е. если можно положить $u=v=0$ и пренебречь членом, содержащим вертикальное ускорение, и если имеют место адиабатические условия и стационарное поле давления, то можно приближенно написать

$$\frac{\partial T}{\partial t}=-w(\gamma_a-\gamma).\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(80)$$

При устойчивом равновесии в атмосфере $(\gamma_a-\gamma>0)$ получается местное понижение температуры в случае восходящего тока и повышение температуры в случае нисходящего тока.

Тот же самый вид будет иметь последнее приближенное уравнение и в случае псевдоадиабатических изменений состояния, если вместо

адиабатического вертикального температурного градиента γ_a в правой части уравнения подставить псевдоадиабатический градиента

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -w(\gamma_a' - \gamma).$$

Знак локального температурного изменения, обусловленного восходящим или нисходящим током, будет зависеть от разности градиентов $\gamma_a' - \gamma$.

Что касается вертикальной конвекции, то при градиентах меньших адиабатического ($\gamma < \gamma_a$) нисходящий ток ($w < 0$) дает повышение температуры, что имеет место например при фене, а также в нисходящих потоках воздуха в антициклоне. При этом воздух не падает вниз в силу своей тяжести, а медленно спускается, нагреваясь. Причиной такого опускания может являться депрессия, развивающаяся на некотором расстоянии. Если же вертикальный температурный градиент больше адиабатического ($\gamma > \gamma_a$), то нисходящие токи вызывают понижение температуры. Такое явление имеет место, например, когда тяжелые холодные массы воздуха скапливаются на возвышенном плато и потом обрушиваются в долину, при чем адиабатического нагревания оказывается недостаточно, чтобы эти падающие массы приняли температуру окружающего воздуха. Характерный пример такого явления представляет Новороссийская бора.

В последнее время метеорологи новой школы начинают придавать все большее и большее значение горизонтальной конвекции. Прочность горизонтального расслоения атмосферы и сохранение структуры поверхностей равной потенциальной температуры сказывается также и на явлениях горизонтального переноса масс. Особенной стойкостью по мнению синоптиков отличаются экваториальные массы, притекающие из южных более теплых широт. В самом деле, охлаждение этих масс, которым сопровождается протекание их по поверхности, имеющей более низкую температуру, ограничивается только тонким поверхностным слоем и не распространяется далеко в толщу массы, по причине отсутствия вертикальной конвекции.

Полярные массы обладают меньшей устойчивостью своего строения, так как, двигаясь на юг в более теплые широты и нагреваясь от поверхности земли, они подвергаются сильной конвекции и таким образом быстрее разрушаются.

Гольди (Goldy) утверждает, например, что нет необходимости, чтобы характерные черты, свойственные высоким давлениям, именно теплая тропосфера и холодная и высокая стратосфера развивались-бы в наших широтах посредством вертикальной конвекции или вообще в силу местных причин. Они могут об'ясняться тем, что вся масса кроме самого нижнего тонкого слоя пришла из более южных широт, где эти особенности строения существовали с самого начала. Подобным же образом характерные особенности низкого давления получают свое развитие в полярном воздухе, когда он находится еще в северных широтах. Еще раньше возникновения идей норвежской школы (в 1913 г.), когда самые термины „экваториальный и полярный воздух" не употреблялись в метеорологии, было указано на тот факт, что стратосфера обычно ниже и теплее на западной стороне циклона, чем на восточной, но что дальше к востоку она вновь становится низкой и теплой. Это означает, что стратосфера низка и тепла над теми областями, которые состоят из полярного воздуха, сохранившего свою природную структуру. Гольди обращает внимание на возможные случаи, когда воздух экваториальной тропосферы может залегать над некоторой толщей воздуха полярной стратосферы. Такие случаи были проверены отдельными аэрологическими

наблюдениями. Так 5/X 1911 г. шары зонды, поднятые одновременно в Париже и в Уккле, дали записи, находившиеся в полном согласии, причем было отмечено:

1) падение температуры от 281° до 226° на высоте 8,6 *км*.

2) приблизительно изотермические условия вверху до 11 *км* (температура около 227°).

3) Вторичное падение температуры до высоты 15 *км*, где была наблюдена температура 218°.

4) Слабая инверсия до высоты 21,4 *км*, где записи прекратились. На конечной высоте наблюдалась температура около 221°.

При этом поднятия шаров пилотов в Копенгагене и Уккле дали определенное указание на разрыв в скорости ветра на высоте около 11 *км*. Ниже этого уровня ветер был восточный, около 15 *м/сек.*, от 11 *км* до 15 *км* над Копенгагеном дул WSW 2 *м/сек.* и в Уккле был ESE 5 *м/сек.*

Данные верхних слоев вместе с анализом карт подтверждают, что над Бельгией находился полярный воздух до высоты 11 *км*, причем полярная стратосфера начиналась на высоте 8,6 *км*. По данным записи Deutsche Seewarte нижняя граница стратосферы залегала на высоте 8,95 *км*. Весьма вероятно, что выше находился воздух экваториального происхождения, который мог пройти по северной стороне обширного антициклона в сев. Атлантике или непосредственно с восточной части Средиземного моря. Часть этого воздуха примерно от 11 до 15 *км* есть экваториальная тропосфера, а выше 15 *км* — экваториальная стратосфера.

§ 15. Общие соображения о замкнутых атмосферных циклах. Энергетика атмосферы естественно приводит к двум основным задачам. Первая из них состоит в том, чтобы ответить на вопрос: из каких источников образуются в атмосфере огромные количества кинетической энергии мощных воздушных потоков общей циркуляции и более мелких вторичных циклов. Вопрос этот отчасти был рассмотрен в предыдущих параграфах. Вторая задача, очевидно, состоит в исследовании вопроса: каким образом используется эта кинетическая энергия, т. е. как происходит работа тех атмосферных машин, посредством которых тепло преобразуется в работу и кинетическая энергия снова переходит в тепло. Уже в параграфе 13 было упомянуто, что обмен потенциальной энергии на кинетическую должен, повидимому, происходить в действительности в форме некоторого замкнутого цикла, т. е. в форме стационарной циркуляции. Понятие „циркуляция“ вообще является очень распространенным в метеорологии и существование замкнутых циклов в движении воздушных масс было открыто давно. Строго говоря, впрочем, существование замкнутых круговых процессов (стационарных циркуляций) в атмосфере не доказано и мы не знаем точно, как эти процессы происходят. Но ввиду того, что с некоторым приближением можно сказать, что атмосфера в целом находится в стационарном состоянии движения, мы необходимо отсюда должны вывести заключение о существовании таких замкнутых циклов, в которых совершается работа. Хотя мы и не знаем в точности, как происходят такие процессы в атмосфере, тем не менее главные черты их становятся для нас ясны, если мы наблюдаем только некоторые части этих циклов. Так, например, исследуя восходящий поток воздуха, мы можем не знать каким образом и в каком месте происходит опускание этих масс. т. е. замыкание цикла и тем не менее, на основании нашего знания термодинамических замкнутых циклов можем все таки сделать важные заключения относительно этого тока.

Здесь мы укажем только некоторые общие свойства стационарных атмосферных циркуляций, рассматриваемых как термодинамические машины, работа которых основывается на силе тяжести и использовании притока энергии в форме тепла. Основной принцип был высказан сначала

Сандстремом (Sandström) (1915—1916) и Бьеркнесом (Bjerknes (1916) и впоследстви и был точно формулирован Венгером (Wenger).

В главе II (§ 7) была выведена теорема Бьеркнеса, выражающая производную от циркуляции по замкнутому жидкому контуру

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\int \alpha \delta p.$$

Укажем здесь некоторые важные случаи, в которых интеграл правой части может быть преобразован, причем получаются важные результаты. Рассмотрим четырехугольный жидкий контур, ограниченный двумя изобарами $p = \text{const}$ и двумя изостерами $\alpha = \text{const}$. Пересечем далее этот контур сетью кривых $p = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$ так, что две последовательные изобары разнятся на единицу давления и также две последовательные изостеры разнятся на единицу удельного об'ема. Тогда при интегрировании по контуру интегралы по изобарам равны нулю ($\delta p = 0$) и

$$\int \alpha \delta p = \int_2^3 + \int_4^1 = (\alpha + n)\,[(p - m) - p] + \alpha\,[p - (p - m)] = (\alpha + n - \alpha)(-m),$$

т. е.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = n \cdot m. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (80)$$

Число $n \cdot m$ равно числу площадок, ограниченных линиями $p = \text{const}$ $\alpha = \text{const}$ т. е. равно числу единичных изобаро-изостерических соленоидов, заключающихся внутри данного жидкого контура. Такой путь интегрирования и такая формулировка теоремы указаны Бьеркнесом.

Сандстрем (Sandstroem) указал другой путь интегрирования, состоящий из двух вертикалей и двух изобар (см. рис. 13). Так как на изобарах $\delta p = 0$, то интеграл

$$\int \alpha \delta p = \int_2^3 \alpha \delta p + \int_4^1 \alpha \delta p.$$

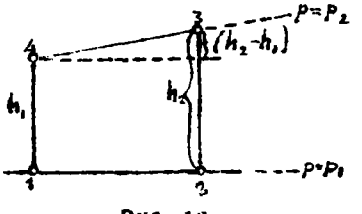

Рис 13.

Но на вертикалях можно положить

$$\delta p = -\rho g \delta z.$$

Поэтому

$$\int \alpha \delta p = -g \int_2^3 \delta z - g \int_4^1 \delta z = -g\,(h_2 - h_1).$$

Следовательно

$$\frac{d\Gamma}{dt} = g\,(h_2 - h_1). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (81)$$

Если $h_2 > h_1$, то $\frac{d\Gamma}{dt} > 0$ и следовательно получается ускорение циркуляции в направлении 1, 2, 3, 4.

Наконец, в том же случае двух изобар и двух вертикалей можно указать еще другую форму уравнения циркуляции. так как $p\alpha = RT$

то

$$\alpha \delta p = \frac{RT}{p} \delta p = RT\ \delta \lg p$$

Поэтому

$$\frac{d\Gamma}{dt}=-\int_2^3 \alpha\delta p-\int_4^1 \alpha\delta p=-R\int_2^3 T\delta \lg p-R\int_4^1 T\delta lgp,$$

или называя средние температуры вертикалей через $\overline{T}_{2,3}$ и $\overline{T}_{1,4}$ положим

$$\frac{d\Gamma}{dt}=R\lg\frac{p_2}{p_3}(\overline{T}_{2,3}-\overline{T}_{1,4})=R\lg\frac{p_2}{p_3}\Delta T$$

Величина стоящая в правой части последнего управления табулирована в конце книги для различных промежутков изменения давлений и для различных разностей температур.

Если движущаяся жидкая частица совершает круговой процесс в термодинамическом смысле, то тепло, сообщенное ей, равняется совершенной ею работе. При этом, как показал Сандстрем, можно установить полезную аналогию аналитического представления такого цикла с теоремой циркуляции. Для выяснения этой аналогии мы обратимся к параллельному выводу обоих положений.

Для вывода теоремы циркуляции исходным пунктом является уравнение движения, а для вывода теоремы работы уравнение притока энергии в обычной их форме.

$$\frac{d\vec{V}}{dt}=-\operatorname{grad}\Phi-\alpha\operatorname{grad}p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (82A)$$

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{dl}{dt}+Ap\frac{d\alpha}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (82B)$$

Умножим первое векторное уравнение скалярно на линейный элемент $\vec{\delta r}$ жидкой кривой, а второе скалярное уравнение на элемент времени dt, после чего получим

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt},\vec{\delta r}\right)=-\delta\Phi-\alpha\delta p,$$

$$dQ=dl+Apd\alpha.$$

Первое уравнение интегрируем по замкнутому жидкому контуру в пространстве, а второе уравнение интегрируем по времени от t_1 до t_2, причем во втором случае предполагаем, что движущаяся частица совершает замкнутый термодинамический цикл, так что состояние ее в конечный момент t_2, то же, что в начальный момент t_1. Тогда

$$\int_{(c)}\left(\frac{d\vec{V}}{dt},\vec{\delta r}\right)=-\int\alpha\delta p, \qquad Q=A\int pd\alpha.$$

Заменяя в левой части первого уравнения циркуляцию ускорения производной от циркуляции скорости, а во втором уравнении выражая тепло Q в механических единицах, получим

$$\frac{d\Gamma}{dt}=-\int\alpha\delta p, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (83A)$$

$$Q=\int pd\alpha. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (83B)$$

Если произвести интегрирование по частям, то эти уравнения можно заменить такими:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int p\delta\alpha \quad . \; . \; . \; (84A); \qquad Q = -\int \alpha dp \quad . \; . \; . \; (84B)$$

Таким образом оба положения, по существу различные, как оказывается, имеют совершенно сходные математические выражения, в особенности если сопоставить вместе (83А) и (84*B*) или (84А) и (83*B*).

Левые части различаются различными значками дифференциалов: δ и d. Это различие значков указывает на то, что в уравнении (А) интегрирование производится по замкнутому жидкому контуру в пространстве для некоторого определенного момента времени t, а в уравнении *B* разумеется интегрирование по времени. Но если мы будем изменение состояния частицы протекающее во времени, разсматривать как процесс, происходящий в пространстве и сопровождающийся движением частицы по некоторой кривой, то интегрирование во втором уравнении также можно считать пространственным. В этом случае только кривая вообще не будет замкнутой, и вообще кривая интегрирования не связана с термодинамическим процессом, к которому относится уравнение.

Если путь частицы в пространстве в этом случае окажется замкнутым, то частица вовсе не возвращается в свое первоначальное состояние и на диаграмме изменение ее состояния не будет изображаться замкнутым циклом. Если же круговой процесс, выражаемый уравнением (83*B*) или (84*B*) изобразить термодинамической диаграммой (p, α), то кривая на диаграмме должна быть замкнутой. Интеграл в правой части будет тогда равен площади, ограниченной этой замкнутой кривой, причем направление обхода соответствует знаку интеграла.

Таким образом прямым $p = \text{const}$ на диаграмме отвечают изобарические поверхности в пространстве, и прямым $\alpha = \text{const}$ изостерические поверхности. Когда движущаяся частица при своем движении пересекает изобарическую поверхность, принимая то давление, которое соответствует этой изобарической поверхности, то на диаграмме кривая изменения состояния частицы пересекает соответствующую прямую $p = \text{const}$.

Существенная разница между траекторией частицы в пространстве и кривой ее изменения состояния на диаграмме ясна. Замкнутым кривым круговых циклов на диаграмме обычно соответствуют незамкнутые траектории в пространстве.

Можно однако на нашей диаграмме изобарические кривые чертить горизонтальными прямыми, а изостерическим кривым придать наклон, соответствующий действительному наклону изостерических поверхностей в пространстве. Тогда диаграмма имеет вид системы соленоидов. Каждому действительному изобаро-изостерическому соленоиду отвечает криволинейный параллелограмм на диаграмме. Кривая изменения состояния однозначно переносится с одной диаграммы на другую; замкнутая кривая, изображающая замкнутый цикл на первой прямоугольной диаграмме, перейдет также в замкнутую кривую на второй косоугольной диаграмме.

Число, выражающее площадь, ограниченную замкнутой кривой на первой диаграмме будет теперь равно числу изобаро-изостерических соленоидов, охваченных кривой на второй диаграмме. Таким образом работу при замкнутом цикле мы также можем выражать числом изобаро-изостерических соленоидов.

Так как работа частицы положительна, когда она расширяется под высоким давлением и сжимается под низким давлением, то положительное направление обхода по замкнутой кривой кругового цикла на диаграмме будет направление обхода от $\text{grad}p$ к $\text{grad}\alpha$. Поэтому устанавливается то же правило знаков, как в теореме динамической циркуляции.

При каждом замкнутом цикле, изображенном термодинамической диаграммой, на каждую единицу движущейся массы преобразовывается в механическую работу количество тепла, равное числу $N(\alpha, -p)$ изобаро-изостерических соленоидов, заключенных внутри замкнутой кривой, причем положительный или отрицательный знак берется сообразно тому, будут ли соленоиды опоясываться в положительном направлении от grad$p$ к gradα или наоборот.

Уравнения (83) и (84) можно написать теперь в таком виде

$$\frac{d\Gamma}{dt} = N(\alpha, -p) \qquad (85A); \qquad\qquad Q = N(\alpha, -p) \qquad (85B)$$

Несмотря на замечательную аналогию обоих выражений нужно помнить существенную разницу. Первое уравнение выражает гидродинамическую теорему циркуляции и здесь $N(\alpha, -p)$ есть число соленоидов, охваченных жидким контуром в пространстве. Второе уравнение дает выражение работы единицы массы жидкости при замкнутом цикле, когда воздушная масса двигаясь в пространстве по своей траектории (вообще говоря не замкнутой) приходит к своему начальному состоянию, определяемому теми же значениями температуры и давления.

В одном случае однако происходит важное упрощение, которым часто пользуются в метеорологии. Предполагаем, что система соленоидов в атмосфере неподвижна; замкнутому термодинамическому циклу на диаграмме отвечает тогда замкнутая траектория частицы в пространстве. Тогда можно высказать такое положение:

Если система соленоидов в пространстве остается неподвижной, то при полном обходе частицы по замкнутой траектории количество тепла, преобразовывающееся в работу равно числу соленоидов, охваченных траекторией. (При этом имеет место указанное выше правило знаков).

Ясно, что это последнее положение является более специальным, чем общая теорема циркуляции, так как в теореме циркуляции не вводится никаких предположений о неподвижности соленоидов. Однако в динамической метеорологии это положение имеет широкое применение, например при изучении общей циркуляции атмосферы, где систему соленоидов можно считать неизменной. Еще более частная форма получается, если принять, что не только соленоиды, но и линии тока не меняют своего положения в пространстве, т. е. течение происходит в замкнутой системе трубок. Если разсмотреть трубку элементарного сечения, в которой заключается M единиц массы и если в такой трубке единица массы совершается полный цикл, то все M единиц массы в трубке также совершают полный цикл. Таким образом, предполагая, что трубка охватывает N неподвижных изобаро-изостерических соленоидов, можем сказать, что в этом случае MN единиц тепла преобразуется в работу. Это можно формулировать таким образом:

При течении в неподвижной замкнутой трубке, охватывающей $N(\alpha, -p)$ изобаро-изостерических соленоидов в неподвижном соленоидальном поле на каждую единицу массы, проходящую элементарное сечение трубки $N(\alpha, -p)$ единиц тепла преобразуется в работу.

Образование, развитие и разрушение так называемых фронтов в циклонах связано с уничтожением системы соленоидов и происходящим при этом преобразовании потенциальной энергии соленоидов в кинетическую энергию ветров. (см. гл. XIII). Происходящий при этом обмен энергии можно учесть с помощью теоремы циркуляции и теоремы работы.

В следующих главах нашей книги будет подробно выяснено, при каких условиях две разнородные массы находятся в равновесии одна относительно другой, образуя при этом наклонную поверхность разрыва и систему изобаро-изостерических соленоидов, которая поддерживается в равновесии благодаря отклоняющей силе вращения земли. Но когда на такой поверхности разрыва распространяются возмущения характера волн, то возникает на фронте или поверхности разрыва с одной стороны скольжение вверх теплого воздуха относительно холодного (на поверхности так называемого теплого фронта и в нижней части поверхности холодного фронта) и скольжение вниз теплого воздуха относительно холодного (в верхней части поверхности холодного фронта). Во время процесса окклюзии соленоидальное поле постепенно уничтожается, и сначала происходит переход потенциальной энергии в кинетическую энергию, а затем постепенно наступает смерть циклона и потеря кинетической энергии путем трения и диссипации.

Для того, чтобы получить некоторый приблизительный количественный результат, характеризующий превращения энергии в циклонах, вообразим себе термодинамическую машину, состоящую из замкнутой трубки, одно колено которой с восходящими воздушными массами расположено в теплой стороне поверхности фронта, а другая часть с нисходящими массами лежит в холодной стороне фронта. Пусть вертикальные размеры трубки будут около 8 *км*. Далее пусть в нижней горизонтальной части трубки т. е. вблизи земной поверхности произошло уже перемешение холодных и теплых масс, т. е. поверхность разрыва нарушена и воздух там протекает без резких изменений состояния. Если в такой трубке получится нарушение равновесия и разовьется замкнутый ток, то в восходящей части будет происходить адиабатическое охлаждение, а в нисходящей части—адиабатическое нагревание.

Это будет иметь следствием постепенное уничтожение системы соленоидов и такое полное уничтожение наступает уже после того, как будет пройден не весь цикл, а некоторая часть его.

Собственно говоря, выравнивание температур будет происходить не одновременно на всех уровнях. В течение некоторого времени первоначальное поле соленоидов будет перестроено, так что в одних местах получится поле положительного, а в других местах — поле отрицательного знака. Если предположить, что движение жидкости будет все же происходить в тех же трубках, то циркуляция будет увеличиваться до тех пор пока число положительных соленоидов не сравняется с числом отрицательных соленоидов. К этому моменту кинетическая энергия достигает максимума.

В действительности, в атмосфере, где не существует трубок с твердыми стенками, вертикальная циркуляция прекратится раньше на тех уровнях, где раньше произойдет выравнивание температур. Таким образом единый замкнутый ток разбивается на несколько токов, и кинетическая энергия, порождаемая вертикальной циркуляцией, будет неравномерно распределена на разных уровнях. Равным образом, при отсутствии вертикальных стенок в атмосфере, отклоняющая сила вращения земли сообщит воздушным массам горизонтальные скорости. Однако работа отклоняющей силы вращения земли всегда равна нулю, так что последнее обстоятельство можно не учитывать в дальнейшем вычислении кинетической энергии.

Ради простоты примем, что температура в части трубки с восходящим течением распределяется по влажной адиабате. Таким образом влажный воздух в состоянии насыщения поднимаясь снизу вверх не изменяет распределения температуры в трубке. Необходимо, при этом, чтобы температура и влажность воздуха, притекающего снизу из трубки с нисходящим потоком оставались бы постоянными. Для того, чтобы это имело место в отношении температуры достаточно предположить,

что в нижней части трубки нисходящего тока будет сухой адиабатический вертикальный температурный градиент.

Для сохранения постоянной влажности необходимо предположить, что в нижней части цикла происходит непрерывное увлажнение спускающегося сухого воздуха до состояния насыщения.

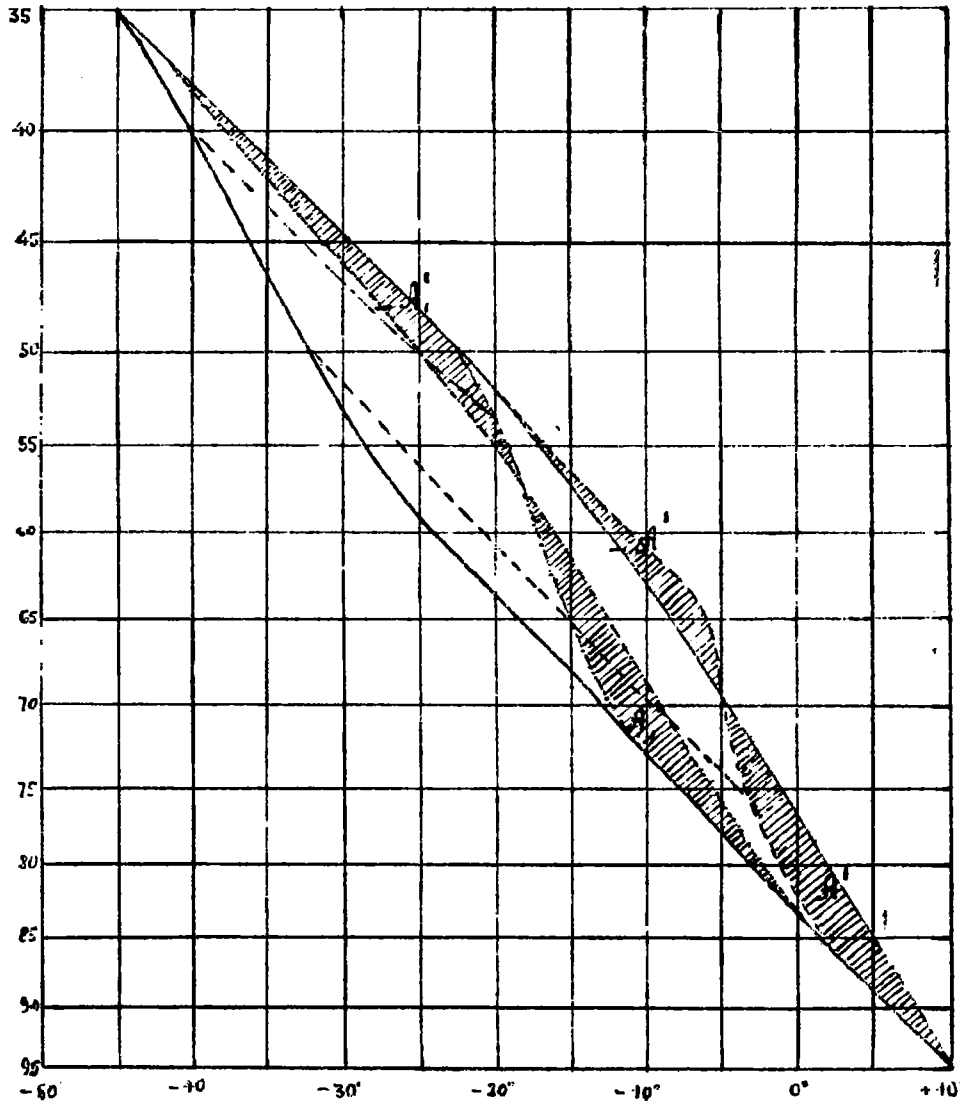

Рис. 14

Пример вычисления кинетической энергии при замкнутом круговом цикле.

Сплошные линии — начальное температурное распределение в обоих коленах трубки тока.
Штриховые линии — температурное распределение в колене нисходящего движения после 0,225 полного обхода.
Пунктирные линии — температурное распределение в обоих коленах после 0,117 полного обхода без конденсации.

В верхней части кривой нисходящего цикла должен образоваться градиент меньший адиабатического, и спускающиеся по сухой адиабате массы должны поэтому производить там местное нагревание.

На прилагаемом чертеже изображен такой замкнутый цикл. Кривая изменения состояния охватывает 1816 соленоидов. При полном цикле находящиеся внизу воздушные частицы поднимаются на высоту, соответствующую изменению давления на 60 *сбр.* и потом снова опускаются к уровню прежнего давления. Следовательно, например, одной десятой цикла отвечает поднятие на 12 *сбр.*, ибо при этом через каждое поперечное сечение трубки проходит 0,1 всей циркулирующей массы. Диаграмма наглядно показывает, что после опускания на 27 *сбр*, что соответствует 0,225 полного цикла, температурное распределение в колене с опускающимся воздухом, которое представлено штрихованной кривой будет таково, что кривая эта пересечется с кривой восходящего тока приблизительно на 70 *сбр.* Площади A и A', равные по величине и считающиеся с разным знаком, в сумме дадут нуль и таким образом число охваченных соленоидов также будет равно нулю. В этот момент достигнутая средняя кинетическая энергия на единицу массы очевидно выразится так

$$\frac{1}{2} V^2 = 0{,}225 \frac{N}{2} = 0{,}225 \frac{1816}{2} = 204\ м^2/сек.^2$$

Отсюда получается $V \simeq 20$ *м/сек*, что отвечает сильному ветру, часто наблюдаемому в больших циклонах. Полученная кинетическая энергия должна быть прибавлена к ранее существовавшей кинетической энергии воздушных потоков, таким образом число 20 *м/сек.* должно быть еще увеличено.

Таким образом возникновение больших циклонических бурь, сопровождаемых шкваловыми ветрами, может быть об'яснено тем, что быстро движущийся воздушный поток втягивается еще в большой замкнутый цикл в сильном соленоидальном поле.

Такие сильные соленоидальные поля, где происходит сгущение большого числа соленоидов обычно связаны с полярным фоонтом. Чем больше число оказывающихся в замкнутом цикле соленоидов и чем большая доля полного процесса проходит до уничтожения соленоидов, тем больше получается в результате кинетическая энергия. Бержерон и Свобода[1]) (Bergeron und Swoboda) произвели подсчет соленоидов в меридиональном сечении для полярного фронта 10/II 1923 года. При этом ширина фронта на земной поверхности была около 110 *км* и наклон фронта $\frac{1}{110}$. Они рассматривали изотермо-изэнтропические соленоиды (T, ϑ) в меридиональном вертикальном сечении; N означает число соленоидов, которые помещаются на вертикальной площадке 1 *км* высоты и основанием в один градус широты. Направление циркуляции получается против часовой стрелки от *grad* ϑ к *grad* T если смотреть с запада (см. рис. 15).

	Широта	N
К югу от поверхности разрыва . .	40°—50°	0,7
У поверхности разрыва	50°	65,0
Первая зона холодного воздуха . .	50°—54°	2,5
„ „ „ „ . .	54°—61°	1,5
„ „ „ „ . .	61°—70°	1,0

Присутствие водяного пара в рассмотренном цикле сильно повышает количество кинетической энергии. Если мы рассмотрим прежнюю схему распределения температур, но с воздухом повсюду сухим, совершающим круговой процесс, то происходящее в восходящем токе сухого воздуха адиабатическое охлаждение приводит к гораздо более быстрому уничтожению соленоидов, чем в случае циркулирующего влажного воздуха.

[1]) Veröff. d. Geophys. Inst. Leipzig Zweite Serie. Bd. III. H. 2.

В самом деле в этом случае оказывается достаточным поднятие на 14 *сбр* в одном колене и опускание на 14 *сбр* в другом, т. е. всего 0,117 полного цикла, чтобы первоначальное температурное распределение заменилось новым, при котором алгебраическая сумма всех опоясанных соленоидов равна нулю. (На рисунке новые пунктирные кривые, кривые, характеризующие температурное распределение после 0,117 полного цикла пересекаются приблизительно на 57,6 *сбр*, причем площадя A_1 и A_1' равны и число опоясанных соленоидов равно нулю). При этом кинетическая энергия достигает своего максимума $\frac{1}{2} V^2 = 0{,}117 \frac{N}{2}$, откуда $V = 14{,}6$ *м/сек.*

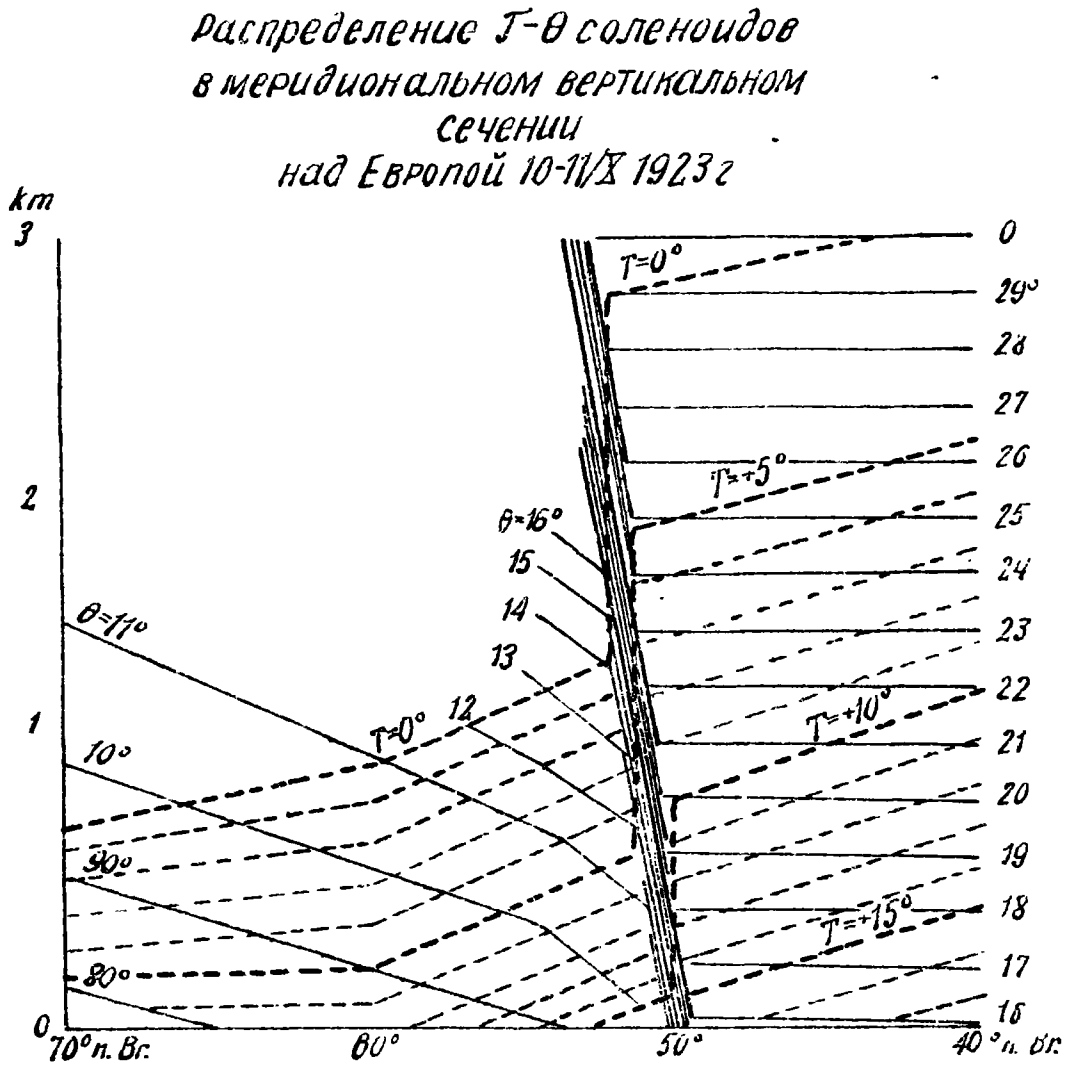

Рис. 15

Таким образом в примере с влажным воздухом получается приблизительно вдвое большее количество кинетической энергии, чем в примере с сухим воздухом. На самом деле очевидно имеют место некоторые средние условия. Во всяком случае большая сухость воздуха встречается только в сильно континентальном климате. В условиях морского климата

умеренной зоны только вблизи поверхности земли, приблизительно до 500 *м* высоты атмосфера остается безоблачной, т. е. только в самых нижних частях рассматриваемой термодинамической машины можно говорить о восходящих токах сухого воздуха.

Начальные вертикальные температурные градиенты также имеют большое значение и от них сильно зависит количество освобождающейся канетической энергии. Чем устойчивее будет вертикальное напластование воздушных масс тем меньшей доли полного цикла оказывается достаточной для полного уничтожения соленоидов. Таким образом фронты и связанные с ними сгущения соленоидов в стратосфере дают меньше энергии, чем фронтальные поверхности соответствующих соленоидальных полей в тропосфере.

Нередки случаи, в особенности в циклонах полярного фронта, когда в тропическом влажном воздухе получается влажно неустойчивое равновесие ($\gamma_a' < \gamma < \gamma_a$). При этом могут освобождаться большие количества кинетической энергии, соответствующие большим долям круговых циклов в соленоидальном поле. Ревсдаль показал, что циклоны с влажно-неустойчивыми теплыми воздушными массами могут давать быстрое увеличение кинетической энергии. Оклюдированные циклоны при благоприятных обстоятельствах могут даже возрождаться с образованием вторичных соленоидальных полей.

Пусть рассматривается циркуляция по замкнутой линии тока, причем движение предполагается стационарным. Мы можем представить себе такую циркуляцию так, что происходит непрерывный приток тепла в одном месте нашей замкнутой струи и отдача тепла в другом месте. В этом случае циркуляция должна усиливаться, но вместе с усилением циркуляции растет сила трения, замедляющая циркуляцию, и в результате могут наступить стационарные условия при которых поле линий тока остается неизменным.

При этом очевидно

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\Gamma}{\partial t} = 0.$$

При стационарном поле скоростей изменения давления вдоль жидкой линии, по которой происходит интегрирование, одинаковы с изменением давления самой частицы, так, что

$$-\int \alpha \frac{\delta p}{\delta s} \delta s = -\int \alpha \frac{dp}{ds} ds$$

выражает работу сил давления. Эта работа должна быть положительна, ибо она на самом деле направлена на преодоление сил трения. Следовательно

$$-\int \alpha dp > 0 \quad \text{или} \quad \int \alpha dp < 0.$$

Основываясь на этом положении Сандстрем доказал такую теорему, которая потом была уточнена Венгером.

В атмосфере может образоваться замкнутая стационарная циркуляция только тогда, если источник тепла находится при высоком давлении, а холодильник при низком давлении. Так как более низкое давление обычно соответствует более высокому уровню (исключения могут представиться только в случаях, когда циркуляция имеет очень большое горизонтальное протяжение), то эту теорему часто формулируют таким образом:

В замкнутой стационарной атмосферной циркуляции источник тепла лежит всегда ниже холодильника.

В самом деле рассмотрим круговой процесс, состоящий из двух адиабат и двух изобар. Воздушная масса нагревается при постоянном

давлении и от этого расширяется, потом адиабатически изменяет свое состояние до встречи с холодильником. Здесь она охлаждается и сжимается и снова адиабатически возвращается к исходному состоянию, т. е. источнику тепла (цикл Карно). Возьмем два случая:

1) Пусть приток тепла происходит при низком давлении $p_1 < p_2$ (см. рис. 16). Имеем в источнике тепла расширение по изобаре *ab*, затем перемещение по адиабате *bc*, в холодильнике сжатие по изобаре *cд* и адиабатическое изменение *дa* к начальному состоянию. Вычисляем интеграл

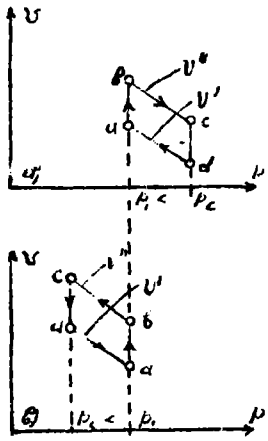

Рис. 16

$$\int \alpha dp = \int_b^c \alpha_2\, dp + \int_d^a \alpha_1\, dp = \int_{p_1}^{p_2} (\alpha_2 - \alpha_1)\, dp.$$

Но dp всегда > 0 и $\alpha_2 - \alpha_1 > 0$ на всем пути интегрирования. Таким образом давление не производит работы и циркуляция становится невозможной.

Иначе обстоит дело, если $p_1 > p_2$. Тогда опять

$$\int \alpha dp = \int_b^c \alpha_2\, dp + \int_d^a \alpha_1\, dp = \int_{p_1}^{p_2} (\alpha_2 - \alpha_1)\, dp.$$

В этом случае всегда $dp < 0$, а $\alpha_2 - \alpha_1 > 0$ на всем пути интегрирования:

$$\int \alpha dp < 0$$

и циркуляция оказывается возможной.

Сандстрем произвел интересные опыты с целью наглядной иллюстрации своей теории. Он взял стеклянный сосуд (50 *см* длины и 5 *см* ширины) наполненный жидкостью и поместил с боков источник тепла и холодильник. Жидкость находилась при комнатной температуре T, а источник тепла и холодильник представляли собою свернутые спирально тонкие трубки в которых протекала жидкость при температурах T_1 и T_2 соответственно больше и меньше T.

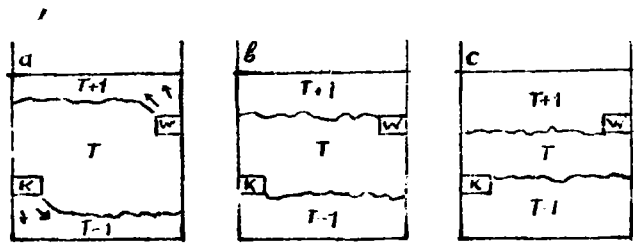

Рис. 17

Вначале он помещал холодильник внизу, а нагреватель наверху (см. рис. 17). Тогда возникал слабый ток в результате которого устанавливались сначала положение *b*, а потом положение *c*. Вровень с нагревателем и холодильником располагались поверхности раздела жидкости, отделяющие холодную жидкость внизу, от промежуточного слоя жидкости комнатной температуры и далее промежуточный слой от верхнего слоя более теплой жидкости. Жидкость оставалась в покое и достигнутое состояние было стационарным в том смысле, что при дальнейшем действии нагревателя и охладителя оно изменялось очень медленно.

Другое наблюдалось, если источник тепла располагался ниже холодильника. Последовательные этапы развивающейся циркуляции изображены на рис. 18. Все большее количество жидкости втягивается в цир-

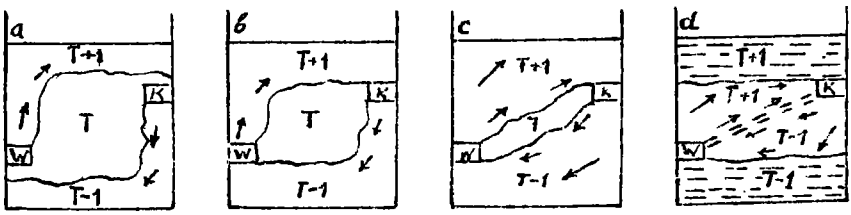

Рис. 18.

куляцию и область занятая водными массами температуры T все сокращается и наконец вовсе исчезает. Выше уровня холодильника располагаются массы температуры T_2, а ниже уровня источника тепла — массы температуры T_1, те и другие в спокойном состоянии. Циркуляция происходит только в слое лежащем между нагревателем и холодильником. Тепло продолжает притекать вниз и отдается наверху, при этом оно переходит в кинетическую энергию движения. Циркуляция непрерывно получает ускорение, но при этом возрастает влияние трения, и стационарное состояние достигается тогда, когда обе причины уравновешивают друг друга.

Сандстрем рассмотрел расположение источников тепла и холода в атмосфере и возникающие благодаря им стационарные атмосферные циркуляции. Зимою в Европе такой низко расположенный источник тепла заключается в Гольфстреме, а выше его расположенными холодильниками — являются Альпы и Скандинавские горы, а равно и Гренландия. Он произвел даже приблизительные подсчеты работы, которую производит эта циркуляция, при предположении, что циркуляционные токи распространяются до высоты 3 *км* и что воздушные массы, протекающие над Гольфстремом нагреваются на 9°. Подсчеты дали 7.10^9 *лошадиных сил.* (1 *лош. сила* $= 7.36 \times 10^9$ *эрг/сек.*).

Так как при обратимом круговом процессе каждая частица циркулирует между температурой T_w (нагревателя) и температурой T_k (холодильника), то термодинамический коэффициент полезного действия всей термодинамической машины будет

$$\eta = \frac{T_w - T_k}{T_w}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (86)$$

т. е. такая доля приведенного тепла при этом цикле преобразуется в механическую работу. Выражая T_w и T_k через потенциальную температуру ϑ, которая на пути от нагревателя к холодильнику остается постоянной получим

$$T_w = \vartheta \left(\frac{p_w}{1000}\right)^{\lambda}, \qquad T_k = \vartheta \left(\frac{p_k}{1000}\right)^{\lambda},$$

где p_w и p_k означают давления в точках нагревателя и холодильника. Отсюда

$$\eta = 1 - \left(\frac{p_k}{p_w}\right)^{\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (87)$$

Наконец, можно вывести еще третье выражение для этого коэффициента через динамические высоты H_w и H_k нагревателя и холодильника.

Так как для адиабатического изменения

$$\frac{dT}{dz}=-\frac{g}{R}\frac{c_p-c_v}{c_p}=-\frac{\lambda}{R}g,$$

или

$$dT=-\frac{\lambda}{R}dH,$$

где H — геопотенциал[1]), то

$$T=T_0-\frac{\lambda}{R}H,$$

или, вводя высоту адиабатической атмосферы $H_a=\frac{T_0R}{\lambda}$, получим

$$T=\frac{\lambda}{R}(H_a-H) \quad \text{и} \quad \eta=\frac{H_k-H_w}{H_a-H_w} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (88)$$

Полученные формулы показывают что коэффициент полезного действия возрастает с убыванием температуры холодильника, или с убыванием давления p_k, или же с возрастанием динамической высоты H_k.

Если $T_k=0$ или $p_k=0$ или $H_k=H_a$ то $\eta=1$ т. е. если холодильник находился бы на верхней границе адиабатической атмосферы, то все тепло забираемое внизу от нагревателя преобразовалось бы в кинетическую энергию циркуляции и не существовало бы передачи тепла от нагревателя к холодильнику.

Если присоединить уравнение притока энергии к системе уравнений гидродинамики сжимаемой жидкости и добавить уравнение неразрывности, то получается система 6 уравнений, в которых неизвестными функциями от времени и координат будут компоненты скоростей u, v, w и динамические элементы: давление p, температура T и удельный об'ем α. При этом левая часть уравнения притока энергии, содержащая ε — величину притока энергии в единице об'ема, должна быть заданной функцией координат и времени или же заданной функцией давления p и температуры T. Интегрирование уравнений гидродинамики без уравнения притока энергии дает неполное решение вопроса. Для получения полного решения в этом случае число неизвестных должно быть уменьшено. Так например, может быть задано распределение температуры, т. е. T как функция от времени и координат как это будет сделано, например, при рассмотрении вопроса об общей циркуляции атмосферы.

Однако полное решение задачи для атмосферы чрезвычайно затрудняется тем обстоятельством, что до сих пор не удалось найти простого выражения для величины притока энергии. Приток энергии в атмосфере осуществляется трояким путем. Если оставить в стороне чистую теплопроводность, которая для весьма подвижного газа, каким является воздух, повидимому, не имеет большого значения, то надо считать, что передача тепла в атмосфере осуществляется тремя путями: 1) конвекцией (так называемая конвективная теплопроводность. которая зависит от турбулентного состояния атмосферы), 2) путем излучения и поглощения лучистой энергии и 3) путем конденсации содержащихся в воздухе паров воды, причем воздуху передается освобождающаяся скрытая теплота, и путем испарения содержащейся в воздухе влаги, причем от воздуха отнимается потребная для этого скрытая теплота испарения. Все эти троякого рода процессы очень сложны и математическое выражение их крайне

---

[1]) См. гл. V.

затруднительно. В главе VIII мы будем подробнее говорить о законах турбулентного перемешивания воздушных масс и о попытках установления уравнений конвективной или турбулентной теплопередачи. В следующей главе IV мы исследуем проблему распространения лучистой энергии в атмосфере, сложность которой состоит в том, что поглощающие и излучающие части земной атмосферы (водяной пар, углекислота, пыль и др. посторонние примеси) обладают сложным избирательным поглощением, различным в различных частях спектра. Благодаря этому проблема распространения лучистой энергии может быть разрешена, и то лишь приблизительно, только при некоторых средних условиях, имеющих место для всей атмосферы в целом или для больших ее участков. В настоящей главе мы остановились довольно подробно на роли влажности в атмосферных процессах. Но и здесь характер явления теплопередачи в процессах конденсации и испарения настолько сложен, что нет возможности выразить величину ε какой либо простой функцией температуры и давления.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. Bjerknes, J. Bjerknes, H. Solberg, T. Bergeron — Physikalische Hydro dynamik mit Anwendungen auf die dynamische Meteorologie. Berlin, 1933.
2. H. Koschmieder — Dynamische Meteorologie, Leipzig 1933.
3. C. Neumann — Ueber die Bewegung der Wärme in compressiblen oder auch uncompressiblen Flüssigkeiten („Berichte über die Verhandlungen der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Math-Phys. Kl. 1894).
4. S. N. Shaw — Manual of Meteorology. Vol. III, Cambridge 1930.
5. A. Refsdal — Zur Thermodynamik d. Atmosphäre (Geofysiske Publikasjoner Vol. IX, N 2, Oslo, 1932).
6. J. E. Fjeldstad — Graphische Methoden z. Ermittelung adiabatischer Zustandsänderungen feuchter Luft (Geofysiske Publikasjoner Vol. III, N 13, Oslo 1925).
7. M. Margules — Über die Energie der Stürme. Jahrb. d. k. Zentralanstalt f. Met. und Geodyn. Wien, 1903.
8. F. M. Exner — Dynamische Meteorologie. Wien, 1925.
9. G. Stüve — Potentielle und pseudopotentielle Temperatur (Beiträge z. Physik. d. freien Atmospäre. Bd. XIII, H. 3, Leipzig 1927).
10. L. Weickmann — Aufbau d. Atmosphäre. (Lehrbuch d. Geophysik. Lief. 4—5. Berlin 1927).
11. V. H. Ryd — The Energy of the Winds. (Publikationer d. Danske Meteorologiske Institut, № 7, Kjobenhavu 1927).
12. A. Wegener — Thermodynamik der Atmosphäre (Handbuch d. Physik. Bd. XI Berlin. Springer Verlag. 1926).
13. R. Wenger — Über thermodynamische Maschinen, die unter Mitwirkung der Schwerkraft arbeiten. (Phys. Zeitschrift XVII, 1916).
14. Ertel. — Thermodynamische Begründung der atmosphärischen Stabilitätskriterien. (Met. Zeitschr. H. 5., 1933).

ГЛАВА IV

Лучистая энергия

§ 1. Лучистая энергия и ее распространение. Тепловая энергия может распространяться без посредства материальной среды, при этом она предварительно должна быть превращена в лучистую энергию.

Способность тел превращать присущий им запас тепловой энергии (или часть этого запаса) в форму лучистой энергии обусловливается строением молекул и атомов этих тел. Этот процесс превращения тепловой энергии в лучистую энергию называется излучением. Лучистая энергия испускаемая излучателем распространяется как электромагнитные волны, которые различаются по своей длине.

Современная физика установила, что явления волнового распространения тепла, света, электрических и магнитных напряжений в эфире имеют одну и ту же природу электромагнитных волн, которые различаются между собою только длиной волны. В настоящее время известны электромагнитные волны длиною от $3 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^{-12}$ *м* или $3 \cdot 10^4$ *м* — $- 0{,}02 \cdot A°$. Напомним, что 1 *мм* $= 1000\,\mu$ (микронов), $1\mu = 1000\,\mu\mu$ (миллимикронов), $1\,\mu\mu = 10A°$ (онгстремов). Эти колебания распределяются по роду их физического действия следующим образом.

Волны радио . . . . . $= 30\,000 - 10$ *м*

Электрические волны Герца . . . . . $= 10$ *м* $- 3$ *мм*.

Далее идет мало исследованный промежуток, заключающий длины волн от $\lambda = 3$ *мм* до $\lambda = 0{,}343$ *мм* $= 343\mu$.

Инфракрасные лучи . . . . . $\lambda = 343\mu - 0{,}76\mu$

Световые лучи, воспринимаемые глазом. . . . . $\lambda = 0{,}76\mu - 0{,}4\mu$

Ультрафиолетовая радиация. . . $\lambda = 0{,}4\mu - 0{,}014\mu$ и частично до $75A°$

Далее идет неисследованный промежуток $75A° - 20A°$, далее рентгеновские лучи от $20A°$ до $0{,}071A°$. Еще меньшими длинами волн обладают лучи γ (радиоактивные) и лучи космические.

Излучение тела представляет собой особую форму распространения энергии и согласно закону сохранения энергии может происходить только при затрате эквивалентного количества энергии в той или иной форме (тепловой, химической или электрической).

Излучать могут только материальные частицы, а не геометрические об'емы или поверхности. Когда поверхность какого либо тела пропускает через себя часть лучей, идущих извнутри наружу, а часть лучей отражает обратно внутрь тела, то принято условно говорить, что поверхность данного тела излучает тепло наружу.

Количество энергии, излучаемое в виде волн, длина которых заключается между λ и $\lambda + d\lambda$, в единицу времени элементарным об'емом однородного излучающего тела, пропорционально этому об'ему $d\tau$

$$dE = e_\lambda d\tau \cdot d\lambda \, . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Конечная величина e_λ называется коэффициентом лучеиспускания данного тела для длины волны λ.

Лучеиспускание элемента зависит от процессов протекающих внутри него. Принято считать, что излучение данного тела зависит только от его температуры.

Энергия отдельных лучей распределяется в спектре излученной энергии разнообразно, т. е. лучи различных длин волн в спектре могут иметь различную интенсивность.

Распространение лучей внутри однородной, изотропной и неподвижной среды происходит прямолинейно и с постоянной скоростью, не зависящей от направления луча. Луч при переходе из одной среды в другую, также однородную и изотропную, меняет на границе между ними и направление и интенсивность. Вообще часть лучистой энергии отражается от пограничной поверхности, а часть проходит через нее. Отражение и преломление может быть „чистым", либо „рассеянным" („диффузным").

В первом случае вся падающая энергия отражается или же проходит внутрь тела. Во втором случае лучистый поток рассеивается в ту и другую среду в разные стороны и с различной интенсивностью.

Поверхность, дающая чистое отражение и чистое преломление, называется „гладкой", если же наблюдается явление рассеивания, то поверхность называется „шероховатой".

Если гладкая поверхность полностью отражает все падающие на нее лучи, она называется „зеркальной". Шероховатая поверхность, отражающая полностью падающие на нее лучи, называется белой; шероховатая поверхность, поглощающая все лучи и не отражающая ни одного, называется черной. В природе не существует абсолютно черных тел, однако, представление о подобном теле можно получить, если в каком либо полом теле проделать небольшое отверстие и внутренние стенки этого тела держать при постоянной температуре. Лучи, попадающие внутрь такого тела через отверстие могут выйти обратно только после большого числа отражений от внутренних стенок. Так как при каждом отражении имеет место частичное поглощение интенсивности луча, то при выходе наружу интенсивность потока оказывается весьма близкой к нулю. Из существующих тел сажа и платиновая чернь дают около 98% поглощения.

При поглощении лучистой энергии она должна по закону сохранения энергии превратиться в другую форму. Поэтому поглощать тепловые лучи могут только материальные частицы. Поглощение лучистой энергии характеризуется тем, что каждый луч на известном участке пути претерпевает падение напряжения. Для малых участков пути можно считать падение напряжения пропорциональным длине пути луча. Если интенсивность в начале участка обозначить через I и падение интенсивности на участке ds через dI, то

$$dI = -\beta_\lambda \cdot I \cdot ds. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Коэффициент β_λ называется коэффициентом поглощения данной среды для лучей с длиной волны λ. Если среда не поглощает лучей, то $\beta = 0$. Если у среды коэффициенты поглощения только для некоторой ограниченной области неравны нулю, то говорят, что среда обладает селективной или избирательной поглощательной способностью.

Атмосферный сухой воздух почти не поглощает лучистой энергии ни в какой области волн. Водяной пар и углекислота поглощают значительное количество лучей, и это обстоятельство оказывается очень важным для термодинамики атмосферы.

Интегрируя обе части равенства (2) в пределах от нуля до s, получим выражение для интенсивности выходящего луча

$$I_2 = I_1 e^{-\beta_\lambda s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Здесь интенсивность падающего луча обозначается через I_1, а интенсивность выходящего луча через I_2. Таким образом

$$I_1 - I_2 = I_1 (1 - e^{-\beta_\lambda s}),$$

откуда

$$\frac{I_1 - I_2}{I_1} = 1 - e^{-\beta_\lambda s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Эту величину — отношение поглощенного тепла ко всему излучению, падающему на тело, обозначают через A и называют поглощательной способностью тела или калорическим поглощением.

Кирхгоф (Kirchhoff) первый показал, что отношение лучеиспускательной способности E к поглощательной способности A какого либо тела не зависит от свойств самого тела, т. е. представляет собой постоянную величину. Для абсолютно черного тела по определению $A = 1$. Следовательно величина отношения $\frac{E}{A}$ равняется калорическому испусканию абсолютно черного тела. В этом состоит закон Кирхгофа. Надо заметить, что он является точным только для случая монохроматической радиации, т. е. излучения волн одной и той же длины.

Излучение лучистой энергии представляет собой весьма сложный процесс. Даже у однородного и изотропного тела лучеиспускательная и поглощательная способности зависят от длины волны излучаемой радиации, от температуры излучения и от физических свойств тела. Для абсолютно черного тела вид функции излучения

$$E = f(\lambda, T),$$

был предметом исследования целого ряда выдающихся физиков. Окончательно вид этой функции был установлен Планком (Planck) в 1900 г., который на основании соображений об электромагнитной природе излучения вывел такую формулу для излучения абсолютно черного тела

$$\boxed{dE_{\lambda T} = 2\frac{v^2 h}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{vh}{\lambda kT}} - 1}d\lambda,} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

эта форма дает неполяризованное излучение единицы поверхности абсолютно-черного тела, абсолютной температуры T в области спектра $d\lambda$ в пространственный угол 1 перпендикулярно к поверхности, причем постоянные, входящие в формулу, имеют такие значения:

$v = 3 \cdot 10^{10} \frac{см}{сек.}$ — скорость света;

$h = 6{,}525 \cdot 10^{-27}$ *эрг. сек.* — так называемая постоянная Планка „действие".

T — абсолютная температура;

$k = 1{,}369 \cdot 10^{-16}$ *эрг./град.* — так называемая постоянная Больцмана, выражающая газовую постоянную R для одной молекулы;

λ — длина волны.

В полусферу излучается количество радиации $\pi E_{\lambda T}$.

В дальнейшем мы будем писать формулу Планка в виде:

$$dE_{\lambda T} = \frac{C}{\lambda^5}\left(e^{\frac{c}{\lambda T}} - 1\right)^{-1} d\lambda, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

где постоянные C и c имеют такие значения

$$C = 1{,}683 \cdot 10^5 \qquad = 2\nu^2 h$$
$$c = 1{,}432 \cdot 10^4, \qquad = \frac{\nu h}{k}$$

если, как принято в метеорологии, выражать радиацию в $\frac{кал.}{мин./см^2}$, а длину волны λ в микронах (μ) вместо *см*.

Уравнение Планка дает распределение энергии в спектре, абсолютно черного тела, т. е. зависимость напряжения отдельных лучей от длины их волны.

Излучение лучистой энергии газами отличается от излучения твердых тел тем, что газы не дают непрерывного спектра. Согласно закону Кирхгофа, если газ поглощает лучи какой нибудь длины волны, то он должен испускать такие же лучи. Если в какой либо части спектра газ поглощает все лучи, то излучение его в этой части спектра соответствует излучению абсолютно черного тела, т. е. для этой части спектра газ излучает как черное тело.

Количество всей излучаемой энергии быстро растет вместе с температурой. Еще в 1878 г. Стефан (Stefan) опытным путем нашел, что полное количество излучаемой телом энергии пропорционально 4-ой степени абсолютной температуры тела

$$Q = \sigma T^4, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

где σ постоянный коэффициент, зависящий от природы излучающего тела. Несколько позднее в 1884 г. Больцман (Boltzmann) вывел этот закон для абсолютно черного тела на основании законов термодинамики. Легко получить этот закон из формулы Планка. В самом деле для того, чтобы найти полное излучение надо проинтегрировать $dE_{\lambda T}$, умножив его на π, по всему спектру, т. е. в пределах от $\lambda = 0$ до $\lambda = \infty$.

Тогда мы получим

$$E = C\pi \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^5\left(e^{\frac{c}{\lambda T}} - 1\right)},$$

или, введя подстановку $\frac{c}{\lambda T} = u$,

$$E = \frac{AC\pi}{c^4} T^4 = \sigma T^4,$$

где

$$A = \int_0^\infty \frac{u^3 du}{e^u - 1} = 6.494$$

и

$$\sigma = \frac{AC\pi}{c^4} = 0{,}8260 \cdot 10^{-10} \left(\frac{кал.}{см^2\ мин.\ град.^4}\right).$$

Закон Стефана-Больцмана показывает, что общее количество излучаемой энергии быстро возрастает с температурой. Однако этот закон не указывает нам как распределяется энергия по спектру.

Закон Стефана-Больцмана является вполне точным законом для абсолютно черного тела. В применении к физическим телам он верен только с известными ограничениями. Это происходит вследствие большой сложности процессов лучеиспускания, имеющих место в различных физических телах. Несомненно, что физические тела поглощают только часть падающей радиации, остальная часть отражается телами и проходит через них. Если не принимать во внимание теплопрозрачности для многих твердых тел, то закон Кирхгофа позволяет утверждать, что при данной длине волны излучения тело излучает такую часть энергии, излучаемой при той же температуре абсолютно черным телом, какую оно поглощает при падении на его поверхность радиации той же длины волны. Отсюда следует, что все тела излучают меньше, чем излучает абсолютно черное тело при той же температуре.

Что касается газов, которые дают линейчатый спектр излучения, то закон Стефана-Больцмана к ним, строго говоря, неприменим. Однако в дальнейшем мы все же будем применять этот закон для излучения атмосферы, как это обычно делается в приближенных подсчетах.

Длина волны, соответствующая наибольшему излучению абсолютно черного тела, обратно пропорциональна абсолютной температуре

$$\lambda_m T = a, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

где $a = \text{const}$. В этом состоит так называемый закон Вина (Wien). Постоянная Вина связана с постоянной Планка простым соотношением. В принятой в метеорологии системе единиц

$$a = 2880 \text{ град. } \mu.$$

Интенсивность излучения при λ_{max}

$$E_{max} = 5{,}98 \cdot 10^{-15}\, T^5 \text{ кал. мин.}^{-1} \text{ см}^{-2}.$$

Укажем еще другую, приближенную формулу Вина для монохроматического излучения. Если в формуле Планка (6) λT мало в сравнении с c, то приближенно

$$dE_{\lambda T} = 1{,}683 \lambda^{-5} e^{-\frac{1.432 \cdot 10^4}{\lambda T}} \cdot 10^5 d\lambda \text{ (}\lambda\text{ выражено в }\mu\text{)} \ldots\ldots \quad (9)$$

Ошибка для $\frac{dE_{\lambda T}}{d\lambda}$ меньше 5%, если $\lambda < \frac{4750}{T}$. Внутри области применения этой формулы

$$\lg \frac{dE_{\lambda T_1}}{dE_{\lambda T_2}} = 1{,}432 \cdot 10^4 \cdot \frac{\Delta T}{\lambda T_m^2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

где

$$\Delta T = T_1 - T_2 \quad \text{и} \quad T_m = \sqrt{T_1 T_2}.$$

§ 2. Общие соображения о притоке лучистой энергии и балансе ее в земной атмосфере. Главным и, можно сказать, единственным источником энергии, притекающей к земле и поддерживающей температуру земли и ее водной и воздушной оболочки является солнце. В самом деле, тепловое излучение луны и звезд не имеет никакого значения в энергетике земного шара. Равным образом роль внутренних источников энергии весьма незначительна. Тепло, притекающее к земной поверхности из

недр земли, составляет меньше одной десятимиллионной доли энергии, притекающей от солнца. Исследования температурного градиента и коэффициентов теплопроводности земной коры показывают, что изменения температуры земной поверхности, обусловленные притоком тепла изнутри, имеют порядок 0,1°С. Влияние таких изменений температуры земной поверхности на земную атмосферу совершенно неощутимо.

Приток тепла от солнца в форме лучистой энергии обусловливает весь тепловой режим земного шара в целом и его атмосферы. Неодинаковость нагревания различных зон является причиной общей атмосферной циркуляции, на которую налагаются вторичные и местные циркуляции. Состав и строение различных слоев атмосферы определяют распространение в ней лучистой энергии и распределение температуры в толще атмосферы, как по высоте, так и по географическим широтам. Поэтому учение о распространении лучистой энергии в атмосфере является одной из основных глав теоретической метеорологии, с которой должно начинаться ее изучение.

Весьма тонкие и детальные исследования солнечного спектра, произведенные за последние годы многими исследователями (особенно надо отметить работы Аббота (Abbot) и его сотрудников в САСШ) показывают, что излучение солнца можно считать приблизительно соответствующим излучению абсолютно черного тела температуры около 6000° abs. Максимум солнечного излучения при этом находится в области длин волн от 0,5—0,6 μ, т. е. в той области спектра, в которой наш глаз обладает наибольшей чувствительностью, что конечно не является случайным обстоятельством, а указывает на приспособляемость организмов к физическим условиям среды.

Многолетними наблюдениями астрофизической Обсерватории Смитсонианского Института в Вашингтоне и Обсерватории на г. Вильсон в Калифорнии установлено, что, количество лучистой энергии, падающей на 1 *кв. см.* поверхности, расположенной на границе атмосферы и ориентированной перпендикулярно к направлению падающей радиации, составляет около 2 *гр. кал.* в минуту. Величина эта, как известно, называется солнечной постоянной. Если она и изменяется в зависимости от изменения солнечной деятельности (что связано, как известно, с количеством солнечных пятен), то во всяком случае изменения эти весьма незначительны. Мы будем в дальнейшем считать солнечную постоянную действительно постоянной и обозначать ее через J_0[1]). Если бы не существовало земной атмосферы, то интенсивность радиации, падающей на единицу площади земной поверхности, выразилась бы как $J_0 \sin \alpha$, где α есть угловое расстояние солнца над горизонтом, которое зависит от времени года, времени суток и географической широты места. Легко рассчитать, что во время равноденствий, когда солнце движется по экватору, количество радиации, падающей на единицу земной поверхности в течение одного дня, составляло бы (при условии отсутствия земной атмосферы) $458{,}4\, J_0 \cos \varphi$ *гр. кал.*, где φ — географическая широта. Наибольшее значение получается на экваторе, в то время как на полюсах оно равно нулю. В действительности, вследствие изменения склонения солнца, земные полюсы получают солнечную радиацию в течение полугода, причем приток радиации к полюсам достигает максимума во время соответствующего солнцестояния и составляет в это время около 25% суточного количества радиации получаемого на экваторе. Дефант (Defant) дает такую таблицу для количества радиации, падающей в течение года на *см*² на различных широтах (числа выражают радиацию в *кг. кал.* на *см*² при условии отсутствия атмосферы).

---

[1]) Более точная величина среднего значения солнечной постоянной по Абботу $1{,}95 \frac{гр.\ кал.}{см^2\ мин}$ или $1{,}35.10^6$ *эрг. см*$^{-2}$ *сек*$^{-1}$.

Количество солнечной энергии, падающей на 1 *см*² земной поверхности на различных широтах в *кг кал.*

Широта	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Летом за 1/2 года	160.5	169	173.5	173	169	160.5	149	139	134	133
Зимой за 1/2 года	160.5	146	129.5	109	84	58.5	33	13	4	0
За весь год . .	321	315	303	282	253	219	182	152	138	133

Отсюда видно, что годовое количество притекающей солнечной радиации на полюсе составляет 40% количества ее, притекающей на экваторе. Однако, радиация, падающая в больших широтах, обладает малой эффективностью и дает малое нагревание земной поверхности, вследствие большого отражения от поверхности снега и льда. Наибольшее уменьшение величины притока энергии от экватора к полюсам получается между пятидесятой и шестидесятой параллелью. Это соответствует тому факту, что между этими широтами средний температурный градиент по направлению от экватора к полюсу наибольший. Равным образом в этих широтах имеет место наиболее интенсивный перенос тепла от экватора к полюсам. а также связанная с ним повышенная циклоническая и штормовая деятельность атмосферы.

Однако не вся лучистая энергия, притекающая к земной атмосфере, вступает в нее и претерпевает в атмосфере дальнейшие изменения. Часть ее отражается атмосферой и особенно облаками, а также отчасти земной поверхностью, льдом, снегом и водою, а часть рассеивается частицами воздуха и непоглощенная уходит снова в междупланетное пространство. Эта обратно отданная радиация составляет альбедо земли и является ее физической характеристикой. Альбедо земной поверхности и облаков может быть изучено и изучается физическими методами, и поэтому имеется возможность оценить полное альбедо земли. Определения альбедо имеются у разных исследователей и дают несколько колеблющиеся результаты. По последним определениям оно составляет около 0,43 количества всей падающей радиации. Остальные 57% вступают в систему земля — атмосфера, причем непосредственно атмосферой поглощается только весьма малая доля этой радиации, главная же часть достигает поверхности земли, поглощается ею и излучается снова в атмосферу, как длинноволновая радиация, соответственно низкой температуре излучающей поверхности. Эту длинноволновую радиацию земная атмосфера, благодаря содержанию в воздухе водяного пара, а также углекислоты, хорошо поглощает, а следовательно и снова излучает. Обратные потоки длинноволновой радиации, направляющиеся из атмосферы к поверхности земли повышают температуру земной поверхности, так что температура ее оказывается значительно выше той, которая получилась бы при отсутствии атмосферы, поглощающей длиноволновую радиацию. Таким образом действие атмосферы можно, как хорошо известно, уподобить парнику или теплице.

Сообщим некоторые общие данные относительно баланса лучистой энергии в земной атмосфере. Данные эти заимствованы из доклада Альта (E. Alt), сделанного им на собрании Германского Метеорологического Общества в 1929 г.[1])

В течение 24 часов солнце посылает на каждый *кв. см.* земной поверхности 720 *гр. кал.*, если примем сначала, что земная атмосфера отсутствует и что солнечная постоянная равна 2 *гр. кал. мин.*$^{-1}$ *см*$^{-2}$. На дальнейшем своем пути через атмосферу этот общий поток радиации подвергается процессам поглощения, диффузного и прямого отражения. Если мы возьмем за единицу 7,2 *гр. кал.* и будем выражать в дальнейшем

[1]) Z. Geophysik. 1929. H. 8. s. 385.

интенсивность всех потоков в этой мере, то приток солнечной энергии на верхней границе атмосферы выразится числом 100. Из них 24 единицы отражаются обратно в междупланетное пространство облаками и другими частицами, находящимися в атмосфере, 14 единиц вступают в атмосферу, где преобразуются, главным образом, в тепловую энергию и в малой степени в химическую энергию, 23 единицы, проходя всю толщу атмосферы, достигают земной поверхности и оставшиеся 39 единиц рассеиваются в атмосфере путем диффузного отражения от газовых молекул и мельчайших частиц, взвешенных в атмосфере. Из этих 39 единиц рассеянной радиации 19 единиц уходят назад в междупланетное пространство, а 20 единиц достигают земной поверхности.

Таким образом благодаря прямому и рассеянному отражению возвращается обратно $24+19=43$ единицы всей притекающей радиации. Поэтому принято считать, что альбедо земли равно 0,43.

Такое же самое количество 43 единицы, а именно 23 единицы прямой и 20 единиц рассеянной радиации достигает поверхности земли.

В первом приближении мы можем считать поверхность земли как черную излучающую поверхность, имеющую температуру 288° abs. Эта поверхность излучает темную (длинноволновую) радиацию в мировое пространство, температуру которого надо считать равной нулю. По закону Стефана получается, что эта излучаемая радиация составляет приблизительно 115 единиц.

Максимум интенсивности этой длинноволновой радиации лежит приблизительно при 9000 или 10000 $\mu\mu$. Она очень сильно поглощается атмосферой, главным образом, входяшим в состав атмосферы водяным паром и углекислотой. Таким образом только незначительная часть ее (около 11 единиц) уходит в междупланетное пространство, а большая часть, около 104 единиц, преобразуется в тепловую энергию.

Кроме этого притока тепла атмосфера еще получает около 16 единиц энергии в результате происходящих в ней процессов конденсации. Тепло, затраченное на испарение влаги с земной поверхности и с поверхности водных бассейнов, переходит в атмосферу после того, как поднятый водяной пар, конденсируясь, освобождает это тепло.

Таким образом земная атмосфера получает 14 единиц тепла поглощением прямой солнечной радиации, 104 единицы поглощением темной (длинноволновой) земной радиации и 16 единиц в результате освобождающейся скрытой теплоты испарения, а всего 134 единицы. В силу условия лучистого равновесия такое же количество тепла должно быть отдано атмосферой путем излучения длинноволновой радиации отчасти к земной поверхности, а отчасти в междупланетное пространство. Если мы положим интенсивность потока, направленного к земле, равной 88 единицам, а интенсивность потока направленного в междупланетное пространство равной 46 единицам, то полностью удовлетворим требованию теплового баланса всей системы земля — атмосфера.

Таким образом первоначально принятый приток энергии к верхней границе атмосферы в 100 тепловых единиц компенсируется коротковолновым и длинноволновым излучением в междупланетное пространство.

При этом атмосфера получает поглощением и притоком скрытой теплоты конденсации 134 единицы, которые она отдает в форме длинноволновой радиации.

Земная поверхность получает 23 единицы от прямой и 20 единиц от рассеянной диффузной солнечной радиации, далее, 88 единиц она получает от темной радиации атмосферы, что вместе составляет 131 единицу. Она отдает обратно 115 единиц длинноволновым изучением, 16 единиц вследствие процессов испарения и всего таким образом 131 единицу.

Наконец с верхней границы атмосферы уходит в междупланетное пространство $24+19+11+46=100$ единиц, т. е. столько же, сколько получается от солнца.

Это схематическое представление кругооборота солнечной энергии в системе земля и ее атмосфера естественно относится только к земле как к целому и представляет средний результат для большого промежутка времени. Оно дает нам представление о порядке величины различных потоков радиации.

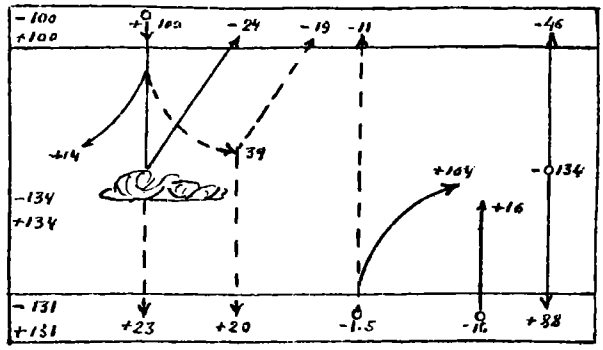

Рис. 19. Тепловой баланс атмосферы по Alt'у.

§ 3. Поглощение и излучение длинноволновой радиации в земной атмосфере. Коротковолновая радиация, идущая от солнца, почти не поглощается атмосферой, что же касается длинноволновой радиации, излучаемой земной поверхностью, то поглощение ее в атмосфере значительное и это поглощение происходит главным образом за счет водяного пара и в меньшей степени за счет углекислоты. Можно считать, что газы, составляющие главным образом атмосферу — азот и кислород при температурах, господствующих в атмосфере почти не поглощают длинноволновой радиации, а следовательно и не излучают ее. Поглощательная же способность водяного пара представляет сложную функцию длины волны. Поглощение лучистой энергии водяным паром было изучено достаточно подробно, а в последнее время результаты Геттнера в несколько схематизированном и упрощенном виде были применены Симпсоном к вопросу о преобразовании лучистой энергии в земной атмосфере. Согласно Симпсону можно принять, что столб воздуха, содержащий водяной пар в количестве эквивалентном 0,3 *мм* осадков, поглощает сполна всю радиацию в пределах длин волн 5,5 — 7 μ и свыше 14 μ, а также некоторую долю радиации в промежутке 11—14 μ. Существует область спектра 8—11 μ для которой водяной пар является совершенно прозрачным. Это обстоятельство имеет большое значение для атмосферы, т. к. максимум интенсивности земной радиации падает на длину волны около 10 μ и таким образом как раз лежит в этой области спектра.

Поглощение углекислотою происходит главным образом в полосе спектра около 15 μ. Симпсон принимает, что внутри этих областей поглощения водяной пар излучает поглощаемую радиацию как абсолютно черное тело при той же температуре. Прилагаемый рисунок заимствованный из упомянутой статьи Симпсона изображает поглощение радиации в земной атмосфере. (см. рис. 20).

Земную поверхность можно считать абсолютно черным телом, излучающим при температуре 280° abs. Она излучает с единицы поверхности в единицу времени количество энергии, которое изображается площадью, ограниченною кривой *ABCDEFGH*. Полоса заштрихованная горизонтальными черточками (8,5—11 μ) дает количество энергии вовсе не поглощаемой атмосферой. Эта радиация, как только покидает земную поверхность так уходит в космическое пространство и таким образом совершенно теряется для земли. Исключение может представиться в том слу-

чае, когда она может быть отражена облаками к поверхности земли и вторично, хотя бы отчасти, там поглощена. В областях спектра от 7—8½ μ и от 11—14 μ происходит частичное поглощение радиации. Это суть площади криволинейных трапеций *MBCN* и *PDEQ*. Остается радиация, изображенная площадями *ABM* и *QEF* поглощаемая, как сказано, водяным паром в количестве соответствующем около 0,3 *мм* осадков. Такое количество пара в тропических странах, обладающих большой влажностью воздуха, содержится в столбе воздуха поперечного сечения 1 *см*² и всего 10 *м* высоты, а в самых сухих областях земного шара — в столбе высотой около 1000 *м* над земной поверхностью.

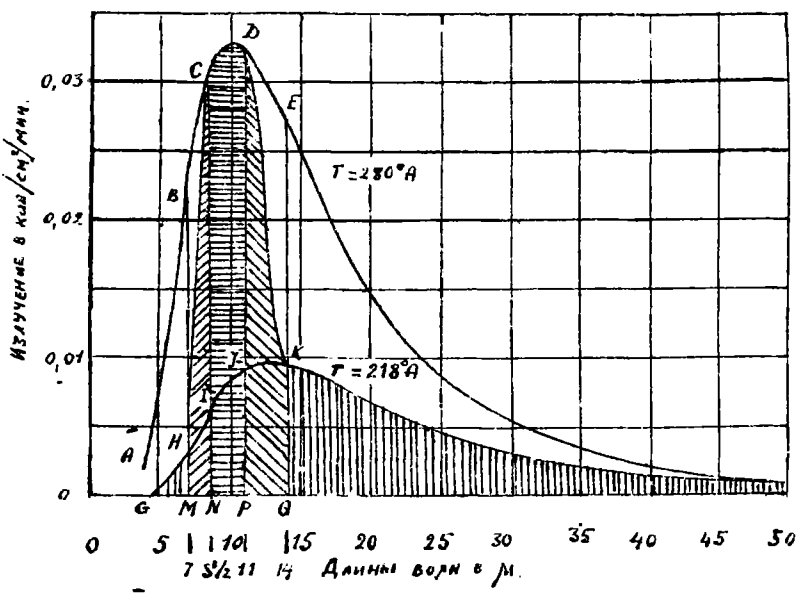

Рис. 20.

Таким образом большая часть длинноволновой радиации излучаемой земной поверхностью поглощается нижними слоями атмосферы, и только небольшая ее часть безпрепятственно покидает землю и уходит в междупланетное пространство. Принято говорить, что водяной пар придает сухому воздуху свойство поглощать и излучать длинноволновую радиацию, но необходимо подчеркнуть, что в свою очередь сухой воздух сообщает содержащемуся в нем пару повышенную теплоемкость, так как, хотя он сам и не принимает участия в поглощении и лучеиспускании (если не считать незначительного поглощения и лучеиспускания углекислоты), но воспринимает вместе с водяным паром всякий приток или потерю тепла.

Нижняя кривая на фиг. *GHIJKF* дает по Симпсону излучение стратосферы и соответствует распределению энергии в спектре абсолютно черного излучателя температуры 218° abs. Максимум интенсивности излучения при этом падает на длину волны около 12½ μ.

Так как вследствие избирательного поглощения в излучении стратосферы вовсе отсутствует излучение в области 8½—11 μ, и отчасти отсутствует излучение в областях 7—8½ μ, то полное излучение стратосферы изображается площадями *GHM* + *QKF* и частью площадей *MHIN* и *PIKQ*. Полное излучение в междупланетное пространство посылаемое земной поверхностью и атмосферой приближенно представляется поэтому всей заштрихованной площадью *GHCDKF*.

В приближенных подсчетах можно считать, что слой воздуха, содержащий 0,3 *мм* осадков поглощает всю радиацию в пределах 5,5—7 μ и свыше 14 μ, а поглощением водяного пара вне этих пространств можно пренебречь вовсе, и считать что во всей остальной части спектра атмосфера является вполне прозрачной средой. Более точное исследование показывает, что больше 80% энергии, которую может поглощать водяной пар содержится в пределах от 5,5—7 μ и свыше 14 μ. Это процентное соотношение еще повышается если принять во внимание поглощение CO_2, максимум которого приходится на 15 μ. В нижних слоях земной атмосферы содержится около 0,45% по весу CO_2, так что 1 *см*³ воздуха содержит 6.10^{-7} гр. CO_2. По Симпсону столб воздуха сечением 1 *см*², содержащий 0,06 гр. CO_2 поглощает 88% падающей радиации. В нижних слоях атмосферы столб воздуха высотой 1 *км* содержит достаточное для этого количество углекислоты.

Из изложенного ясно, насколько сложна проблема изучения судьб лучистой энергии в земной атмосфере, и насколько попытки ее разрешения далеки от совершенства. Нужно сказать, что мы не имеем в этой области точной математической теории, а должны довольствоваться, главным образом, описаниями качественного характера и соображениями, основанными на данных теоретической физики, которые позволяют составить верное представление о существе процессов преобразования лучистой энергии, но не дают исчерпывающего и точного ответа на многие вопросы.

Две основные проблемы намечаются в этой области. Во-первых, об'яснить с точки зрения лучистого равновесия основные черты распределения температуры по вертикали в различных широтах земного шара и дать теоретическое об'яснение факту существования слоя верхней инверсии (стратосферы).

Во-вторых, проследить судьбы длинноволновой радиации излучаемой земной поверхностью поглощаемой многократно и снова излучаемой нижними слоями земной атмосферы, содержащими водяной пар и углекислоту. С этим связан как видно и вопрос об общем балансе лучистой энергии на земле. Постоянство средней температуры атмосферы показывает, что земля отдает в мировое пространство столько же лучистой энергии сколько она получает от солнца. Эта уходящая радиация различным образом распределяется по земному шару и от этого распределения очевидно зависит общая циркуляция атмосферы.

Обе задачи представляют большие трудности и для решения их требуется знание:

1) состава земной атмосферы на различных высотах, т. е. главным образом количества водяных паров в атмосфере на разных высотах.

2) коэффициента поглощения газов входящих в состав атмосферы в различных частях спектра

3) альбедо земли (отражательной способности земной поверхности, атмосферы и облаков).

4) перемешивающего действия ветра, т. е. турбулентности различных слоев атмосферы.

Все эти факторы известны далеко недостаточно и учесть их влияние представляется весьма трудным.

Разсмотрим сначала первую, а потом вторую проблему.

§ 4. Об'яснение существования стратосферы на основании теории лучистого равновесия.

В 1913 г. Эмден построил дифференциальные уравнения лучистого равновесия земной атмосферы и решил вопрос о вертикальном распределении температуры в земной атмосфере при лучистом равновесии при наличии некоторых упрощающих предположений.

1. Радиация делится на коротковолновую ($0 < \lambda < 2\mu$) и длинноволновую ($2\mu < \lambda < \infty$). Как та, так и другая распространяются только в вертикальном направлении. Поток радиации направляющийся сверху (A) имеет происхождении от солнца (главным образом коротковолновая радиация) и от водяного пара, — единственной составной части атмосферы, способной поглощать и излучать радиацию. Поток радиациии направляющийся снизу (B) исходит от земной поверхности и водяного пара, находящегося в атмосфере.

Введем в рассмотрение эквивалентную толщину слоя поглощающего газа, которая определяется таким образом. Пусть над единицей площади земной поверхности расположен столб поглощающего газа массы a гр. Это весовое количество, будучи приведено к нормальным условиям давления и температуры дает столб высотою b *см*. Эту величину можно назвать эквивалентной толщиной для данного газа. Очевидно эквивалентную толщину можно рассматривать не только над земной поверхностью, но и над любым уровнем атмосферы, если известен закон изменения плотности с высотой. В самом деле если плотность газа $\rho(z)$, то эквивалентная толщина на уровне z будет $x = \int_z^\infty \rho(z)dz$ или $x = x_b - \int_0^z \rho(z)dz$, где x_b есть эквивалентная толщина отсчитываемая от земной поверхности (или от уровня моря) т. е. для всей толщи атмосферы. Эквивалентная толщина вводится как вертикальная координата вместо действительной высоты z.

2. Поглощение радиации в земной атмосфере водяным паром происходит по закону Бугера

$$I = I_0 e^{-\alpha m},$$

где I_0 означает величину радиации, приходящей на верхнюю границу слоя, а I означает величину радиации после прохождения этого слоя, m — величину пропорциональную толщине слоя и плотности водяного пара, α — коэффициент поглощения, который имеет одно значение α_1 для коротковолновой радиации и другое значение α_2 для длинноволновой радиации.

3. Плотность ρ водяного пара в зависимости от высоты выражается эмпирической формулой (согласно Гану)

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-\frac{z}{1}} = \rho_0 \cdot 10^{-\frac{z}{6000}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

4. Водяной пар излучает радиацию как черное тело по закону Стефана-Больцмана

$$E = k\sigma T^4, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

причем температура излучения T зависит от высоты слоя z. Эту зависимость T от z и требуется определить, т. е. требуется найти распределение температуры при условии лучистого равновесия всех слоев.

Возьмем бесконечно тонкий слой на высоте z над земной поверхностью толщиной dz и подсчитаем приращение радиации в об'еме воздуха с горизонтальным сечением площади единицы и высотою dz, причем рассмотрим отдельно приращение радиации A, идущей сверху вниз и приращение радиации B, идущей снизу вверх.

Поглощение в бесконечно тонком слое по закону Бугера будет иметь выражение

$$dI = -I_0 e^{-\alpha m} \alpha dm = -I\alpha dm = -I\alpha\rho dz \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Излучение бесконечно тонкого слоя равно

$$dE = \alpha\rho\sigma T^4 dz \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Поэтому, для величины dA легко напишем выражение

$$dA = A_{z+dz} - A_{(z)} = \alpha_1\rho A_1 dz + \alpha_2\rho A_2 dz - \alpha_2\rho\sigma T^4 dz, \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

где A_1 есть коротковолновая часть радиации A, A_2 — длинноволновая ее часть.

Для величины dB таким же образом получим

$$dB = B_{(z+dz)} - B_{(z)} = -\alpha_2\rho B dz + \alpha_2\rho\sigma T^4 dz. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

Условие лучистого равновесия состоит в следующем

$$dA = dB \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

т. е. лучистая энергия не накопляется в бесконечно тонком слое. Это условие приводит к такому

$$A - B = R \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

т. е. в вертикальной колонне воздуха, отнесенной к единице основания, существует постоянная разность между радиацией, направленной к земле, и радиацией, направленной вверх. В одних местах земли эта разность положительна в других отрицательна, причем среднее значение этой разности по всей земле должно конечно равняться нулю.

Если принять во внимание, что $A = A_1 + A_2$, то

$$B = A_1 + A_2 - R. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

Вводя вместо z новую независимую переменную m, так называемую оптическую массу, представляющую количество водяного пара в вертикальном столбе воздуха единичного поперечного сечения от данного уровня z до верхней границы атмосферы, так что

$$m = \int_z^\infty \rho(z)dz, \quad dm = -\rho dz$$

и исключая B из системы уравнений (13, 15), находим

$$\left.\begin{aligned} dA &= A_{m+dm} - A_m = -\alpha_1 A_1 dm - \alpha_2 A_2 dm + \alpha_2\sigma T^4 dm \\ dB &= B_{m+dm} - B_m = \alpha_2 A_1 dm + \alpha_2 A_2 dm - \alpha_2 R dm - \alpha_2\sigma T^4 dm \end{aligned}\right\} . \quad (17)$$

Складывая оба уравнения, получим

$$2dA = (\alpha_2 - \alpha_1)\; A_1 dm - \alpha_2 R dm,$$

или

$$\frac{dA}{dm} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\; A_1 - \frac{\alpha_2}{2}\; R. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

Принимая солнечную постоянную равной 1.953 $\frac{гр.\ кал.}{см^2\ мин.}$ и альбедо земли равным 0.43 получим, что на 1 *кв. см.* на верхней границе атмосферы падает 1.953 (1—0,43) $\frac{гр.\ кал.}{см^2\ мин.}$. Умножая это на площадь поперечника земли πr^2 и деля на $4\pi r^2$, полную поверхность земного шара, получим, что в среднем на 1 $см^2$ поверхности в атмосферу поступает от солнца количество

$$I = \frac{1{,}953\,\pi r^2}{4\,\pi r^2}\;(1-0{,}43) = 0{,}278\;\frac{гр.\ кал.}{см^2/мин.}$$

коротковолновой солнечной радиации. Так как можно считать, что вся коротковолновая радиация солнечного происхождения (водяной пар излучает только длинноволновую радиацию), то

$$A_1 = Ie^{-\alpha_1 m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Вставляя это выражение в уравнение (18), получим

$$\frac{dA}{dm} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} Ie^{-\alpha_1 m} - \frac{\alpha_2}{2} R,$$

где I и R—постоянные. Интегрируя, получим для A выражение

$$A = -\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1} \frac{Ie^{-\alpha_1 m}}{2} - \frac{\alpha_2}{2} Rm + K, \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

где K—постоянная интегрирования. Для определения K положим $m = 0$ и $A(z) = 0$ (верхняя граница атмосферы).

Тогда

$$A = A_1 = I,$$

откуда

$$I = -\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1} \frac{I}{2} + K,$$

$$K = \frac{I}{2} \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1}$$

и окончательно

$$A = \frac{I}{2}\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 m}\right) - \frac{\alpha_2}{2} Rm,$$

или

$$A = \frac{I}{2}\left(2 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 m}\right) - \frac{\alpha_2}{2} Rm. \quad \ldots\ldots \quad (21)$$

Определив A из второго уравнения системы (17), мы можем определить излучение σT^4, как функцию от m, или как функцию от высоты, если известна зависимость ρ от z.

Последнюю легко найти на основании формулы Гана. В самом деле масса водяного пара от уровня z до определенной высоты атмосферы выразится по формуле

$$m(z) = \int_z^\infty \rho dz = \int_z^\infty \rho_0 e^{-\frac{z}{l}} dz = -l\rho_0 \left[e^{-\frac{z}{l}}\right]_z^\infty = l\rho_0 e^{-\frac{z}{l}}.$$

Массу пара M в колонне воздуха с поперечным сечением, равным единице, найдем, если в последней формуле положим $z = 0$, тогда получим $M = l\rho_0$. Зная из наблюдений M и ρ_0 отсюда определим постоянную l. Тогда будет известна зависимость ρ от z. Так как M и ρ_0 различны для разных широт, то и величина l, а следовательно и зависимость ρ от z получается различной. Из уравнения (13) имеем

$$\sigma T^4 = B - \frac{1}{\alpha_2} \frac{dB}{dm}$$

или, полагая

$$B = A - R, \qquad \frac{dB}{dm} = \frac{dA}{dm},$$

$$\sigma T^4 = A - \frac{1}{\alpha_2} \frac{dA}{dm} - R.$$

Вставляя вместо A его значение, получим

$$\sigma T^4 = \frac{I}{2}\left(2 + \frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1} e^{-\alpha_1 m} - \frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2} e^{-\alpha_1 m}\right) - \frac{\alpha_2}{2} Rm - \frac{R}{2}$$

или, вводя $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = n$,

$$\sigma T^4 = \frac{I}{2}\left[1 + \frac{1}{n} - e^{-\alpha_1 m}\left(\frac{1}{n} - n\right)\right] - \frac{R}{2}(1 + \alpha_2 m). \quad . \; . \quad (22)$$

Эмден вычислил температуры для разных высот, положив всюду $R = 0$, т. е. по формуле

$$\sigma T^4 = \frac{I}{2}\left[1 + \frac{1}{n} - e^{-\alpha_1 m}\left(\frac{1}{n} - n\right)\right]. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

При этом на больших высотах, когда m стремится к нулю

$$\sigma T^4 = \frac{I}{2}(1 + n). \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24)$$

Для вычислений по этим формулам кроме законов распределения водяного пара (I, ρ_0) надо знать еще величину n, которая может быть определена из таких соображений.

Коротковолновая радиация слабо поглощается земной атмосферой и большая часть всей поступающей от солнца радиации достигает земной поверхности. Эта радиация главным образом коротковолновая. Эмден приближенно принимает:

$$e^{-\alpha_1 M_0} = 0{,}9.$$

Что касается длинноволновой радиации, то по актинометрическим данным только 10% ее достигает земной поверхности. Поэтому

$$e^{-\alpha_2 M_0} = 0{,}1.$$

Отсюда

$$\alpha_1 M_0 = 0{,}105, \qquad \alpha_2 M_0 = 2{,}30,$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = n = 0{,}0406,$$

т. е. длинноволновая радиация поглощается приблизительно в 22 раза лучше коротковолновой.

Зохер (Socher) (1924 г.) вычислил с помощью формул Эмдена температуры на различных высотах и получил следующие значения:

Высота в *км*	0	0,6	1,3	1,8	2,4	3,1	4,2	6	10	∞
Температура	—2°	—11°	—22°	—28°	—34°	—41°	—49°	—58°	—66°	—68°

Здесь прилагается график распределения температуры по вертикали по Эмдену (рис. 21).

Теория Эмдена дает таким образом удовлетворительное об'яснение распределению температуры по высоте.

Она хорошо об'ясняет такие основные факты наблюдений.

1. Приблизительное постоянство температуры на больших высотах (стратосфера).

2. Среднее значение этой температуры —66° (известно, что наблюденная температура в стратосфере колеблется между —85° в тропиках и —50° в полярных широтах).

3. Нижняя граница стратосферы получается на высоте около 10 *км*.

Главные недостатки теории Эмдена состоят в следующем.

1. Не учитывается вовсе диффузная радиация.

2. Не учитывается поглощение углекислотой.

3. Поглощение радиации водяным паром предполагается одинаковым для всех длин волн большой длины ($\lambda > 2\mu$), т. е. совершенно не принимается во внимание избирательное поглощение.

4. Плотность водяного пара предполагается повсюду на земном шаре одинаково изменяющейся по высоте. Поэтому вертикальное распределение температуры получается одинаковым для всех широт земного шара.

5. Повсюду на земном шаре полагается $R=0$, что справедливо для земли в целом, но вовсе не обязательно для отдельных мест земного шара. На земле могут существовать области где $R<0$ (области преобладающего излучения в междупланетное пространство) и области где $R>0$ (преобладающего притока энергии от солнца). Можно a priori сказать, что величина R зависит от широты. Если принять, что повсюду $R=0$ то отсутствует горизонтальный перенос тепла от экватора к полюсу.

6. Не приняты во внимание вертикальные течения, т. е. не учитывается влияние конвективного перемешивания в нижних слоях атмосферы. Поэтому вертикальный температурный градиент в нижних слоях атмосферы по теории Эмдена оказывается слишком большим и не соответствующим действительности.

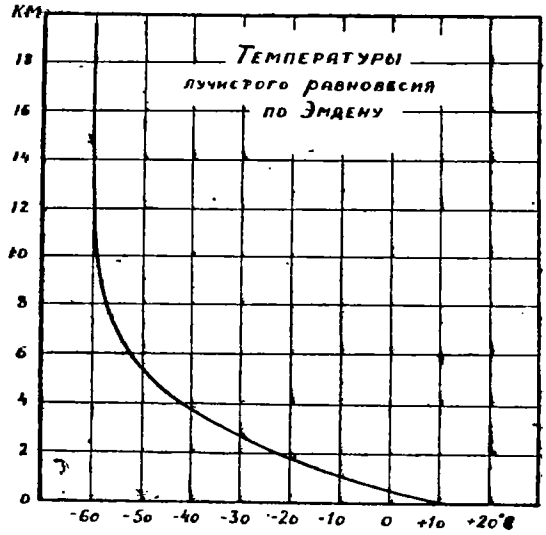

Рис. 21.

Таким образом теория Эмдена относится к средним условиям всей земли в целом и решает вопрос только в первом приближении. Например, она совершенно не дает об'яснения тому факту, почему над экватором стратосфера поднята выше и холоднее, а над полюсами она лежит ниже и соответственно теплее.

Влияние вертикальных течений в нижних слоях атмосферы на вертикальное распределение температуры было рассмотрено в 1914 г. А. А. Фридманом в работе „Sur la distribution de la temperature aux diverses hauteurs". (Геофизический сборник, том I, вып. I).

Он предполагает, что излучение как коротковолновое солнечное, так и длинноволновое земное — серое, т. е. коэффициент α как в том так и в другом случае не зависит от длины волны λ и не зависит также от высоты z поглощающего слоя. При этих предположениях А. А. Фридман строит систему уравнений гидродинамики и притока лучистой энергии, причем учитывает слабые вертикальные течения в атмосфере. Эту систему он интегрирует особыми бесконечными рядами.

Результаты его вычислений, сопоставленные с результатами Эмдена, показали лучшее согласие с действительностью в нижних слоях атмосферы. В то время как температурные градиенты, полученные Эмденом, оказались очень велики у поверхности земли и давали картину неустойчивого равновесия в нижних слоях атмосферы, числовые результаты Фридмана дали температурные градиенты более близкие к действительности. Это становится вполне понятным, если принять во внимание, что большие градиенты, полученные Эмденом, указывают на не-

устойчивое равновесие воздуха в нижних слоях атмосферы, а следовательно на необходимость возникновения турбулентности и вертикальных токов. Наоборот для стратосферы, где вертикальные токи почти отсутствуют, градиенты, полученные Эмденом, ближе соответствуют тем, которые наблюдаются в действительности.

А. А. Фридман еще раз вернулся к этой теме в 1920 г.; улучшив математическую сторону работы, он дал значительно более простое разложение в ряды искомых величин, представляющее возможность доказать сходимость этих рядов. Это доказательство сходимости отсутствовало в первой работе.

Вопрос о вертикальном распределении температуры в земной атмосфере при наличии лучистого равновесия в недавнее время был снова рассмотрен Гульбертом (Hulburt) с учетом избирательного поглощения.

Так же, как и Эмден, Гульберт рассматривает только вертикальные потоки радиации вверх и вниз, но принимает во внимание избирательное поглощение согласно такой упрощенной схеме, заимствованной у Симпсона. Устанавливаются три большие области поглощения 1) 5 μ—8 μ принадлежащая водяному пару, 2) 12 μ — 16 μ, принадлежащая водяному пару и углекислоте и 3) 16 μ—20 μ, где опять поглощающим агентом является водяной пар. Он принимает солнечную постоянную $I_0 = 1{,}35.10^6 \frac{эрг}{см^2\,сек}$ в области спектра от 0,3 μ до 3 μ и считает, что облака и земная поверхность отражают 32% этого количества радиации. Земная атмосфера принимается вполне прозрачной, поэтому 68% достигают земли. Эту дробь (68%) обозначим через P. Совершенно такими же соображениями как и раньше получаем для среднего количества коротковолновой солнечной радиации, падающей на 1 $см^2$ поверхности, выражение $\frac{I_0 P}{4}$ $эрг.\ сек^{-1}$.

Эта поглощенная энергия излучается земной поверхностью в форме радиации большой длины волны. Часть радиации в области спектра 8—11 μ и всех длин волн $< 5\,\mu$ вовсе не поглощается атмосферой и таким образом сразу покидает ее пределы, а остальная часть поглощается [1]), и для поглощения Гульберт принимает некоторый средний по всему спектру коэффициент α. Если обозначить излучение земной поверхности через E_0, то первая часть радиации будет ϕE_0 а вторая, — поглощаемая атмосферой $(1-\phi)\ E_0$ где ϕ есть некоторая правильная дробь, зависящая от температуры T_0 излучающей земной поверхности.

Вводя опять вместо высоты z в качестве координаты оптическую массу или эквивалентную толщину m уравнением $m = \int\limits_z^\infty \rho(z)dz$ или $m = M - \int\limits_0^z \rho(z)dz$, можно таким образом построить дифференциальное уравнение лучистого равновесия в бесконечно тонком слое dm.

Рассмотрим потоки радиации для бесконечно тонкого слоя dm, расположенного на уровне, определяемом данным значением координаты m. Радиацию, притекающую снизу вверх к нижней границе слоя, будем обозначать попрежнему через B, а радиацию, притекающую сверху вниз к верхней границе слоя — через A. Тогда в слое толщиной dm происходит поглощение радиации B в количестве $B\alpha dm$ и поглощение радиации A в количестве $A\alpha dm$ (рис. 22).

---

[1]) Мы будем в дальнейшем для сокращения называть эту поглощаемую атмосферой длинноволновую радиацию — ω-радиацией.

Такое количество радиации излучается слоем в окружающее пространство, причем это излучение двухстороннее, т. е. происходит с верхней границы слоя вверх и с нижней границы слоя вниз. Таким образом надо считать, что как с верхней так и с нижней границы слоя излучение составляет $^1/_2\ \alpha\ (A+B)\,dm$. Примем, что слой излучает как абсолютно-черное тело с температурой слоя T. Тогда, учитывая, что излучение происходит не по всему спектру, а только в части поглощаемой w-радиации, можно выразить величину излучения формулой Стефана $E = f\alpha\sigma T^4 dm$, где σ постоянная формулы Стефана, а f правильная дробь, выражающая отношение излучаемой слоем энергии к общему количеству энергии, излучаемому абсолютно-черным телом при данной температуре T, т. е. f есть некоторая функция от T. Зная кривую распределения энергии в спектре абсолютно-черного тела (кривую Планка), можно составить таблицы или построить график f как функции от T.

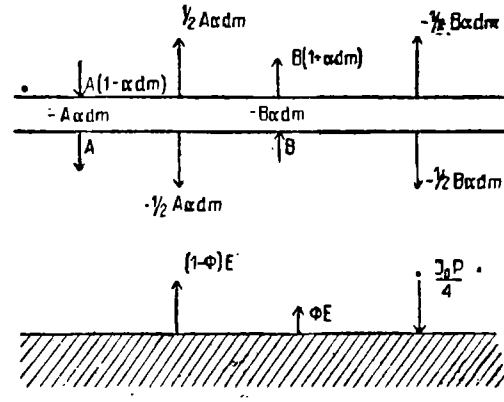

Рис. 22.

Для этого очевидно при каждой температуре надо взять отношение площади, ограниченной кривой распределения энергии, за вычетом области 8 μ—11 μ к полной площади, т. е.

$$f = 1 - \frac{\int_{8\mu}^{11\mu}}{\int_{-\infty}^{\infty}}.$$

Уравнение излучения слоя принимает поэтому вид:

$$^1/_2\,\alpha\,(A+B)\,dm = \sigma T^4 \alpha f dm,$$

или просто

$$A + B = 2\sigma f T^4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Далее, принцип лучистого равновесия требует, чтобы для каждого уровня $B - A = \text{const}$.

Значение этой постоянной легко найдем, если примем во внимание, что на верхней границе атмосферы поток w-радиации вниз равен нулю (на верхней границе атмосферы вся A-радиация коротковолновая) и поток B-радиации равен $\frac{I_0 P}{4} - \phi E_0$. Следовательно всегда

$$B - A = \frac{I_0 P}{4} - \phi E_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Рассмотрим теперь приращение радиации при прохождении слоя снизу вверх. Из чертежа легко видеть, что это приращение напишется так:

$$dB = B_{m+dm} - B_m = B(1 + \alpha dm) - \frac{1}{2}\,B\alpha dm - \frac{1}{2}\,A\alpha dm - B$$

(при этом принимается во внимание, что m возрастает сверху вниз).

Последнее выражение по упрощении дает

$$dB = \frac{1}{2}\alpha(B - A)dm,$$

или на основании (26)

$$dB = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{I_0P}{4} - \phi E_0\right),$$

откуда по интегрировании получаем

$$B = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{I_0P}{4} - \phi E_0\right)m + C.$$

Постоянная C определяется из условия, что на верхней границе (при $m = 0$) $B = \frac{I_0P}{4} - \phi E_0$, отсюда

$$C = \frac{I_0P}{4} - \phi E_0 \text{ и } B = \left(\frac{I_0P}{4} - \phi E_0\right)\left(1 + \frac{1}{2}\alpha m\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Тогда из (26) сейчас же находится A

$$A = B - \frac{I_0P}{4} - \phi E_0 = \left(\frac{I_0P}{4} - \phi E_0\right)\frac{1}{2}\alpha m.$$

После этого (25) дает

$$2\sigma f T^4 = \left(\frac{I_0P}{4} - \phi E_0\right)(1 + \alpha m). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

На земной поверхности, т. е. при $m = M$, $B = (1 - \phi)E_0$.

Отсюда $(1 - \phi)E_0 = \left(\frac{I_0P}{4} - \phi E_0\right)\left(1 + \frac{1}{2}\alpha M\right)$, или

$$E_0 = \frac{I_0P}{4}\,\frac{1 + \frac{1}{2}\alpha M}{1 + \frac{1}{2}\phi\alpha M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Так как $E_0 = \sigma T_0^4$ (считая излучение земной поверхности излучением абсолютно-черного тела), то

$$T_0^4 = \frac{I_0P}{4\sigma}\,\frac{1 + \frac{1}{2}\alpha M}{1 + \frac{1}{2}\phi\alpha M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Вставляя (29) в (28), получим такое выражение для температуры на любой высоте

$$T^4 = \frac{I_0P}{8\sigma f}\,\frac{1 - \phi}{1 + \frac{1}{2}\phi\alpha M}(1 + \alpha m). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Из уравнений (30) и (31) вычисляются T_0 и T последовательными приближениями. Каждому значению T_0 отвечает определенное значение дроби ϕ, которое легко находится из кривой Планка. Путем проб при заданных постоянных I_0, P, σ, α и M находят пару значений T_0 и ϕ удовлетворяющих уравнению (30). Тем самым находится средняя температура земной поверхности, удовлетворяющая условиям лучистого равновесия. При значениях постоянных, принятых Гульбертом получается $T_0 = 306°$, каковая температура оказывается на 19° выше принимаемого обычно среднего значения температуры земной поверхности.

С полученным значением ϕ входят в уравнение (31) и по графику или по таблице подыскивают пары значений f и T, удовлетворяющих этому уравнению для различных значений m. Таким образом оказывается возможным построить кривые зависимости температуры от m, а следовательно и от высоты z, которая легко вычисляется по m, если известно распределение поглощающей субстанции с высотой.

По вычислениям Гульберта полученная им кривая мало соответствовала действительному среднему распределению температуры с высотой. Именно, вычисления дали, что в нижнем слое до высоты 5 *км* вертикальные температурные градиенты оказались очень значительны и атмосфера не находилась в статическом равновесии. Очевидно самое условие лучистого равновесия не имеет места для нижних слоев и необходимо изменить постановку задачи, рассматривая область лучистого равновесия не с самой земной поверхности, а начиная с некоторого уровня z_0. Тогда получается несколько измененная система дифференциальных уравнений, решая которые методом последовательных приближений можно снова определить совместно температуру земной поверхности T_0 и температуру T на любом уровне, отвечающем оптической массе m.

Оказывается, что кривые распределения температуры, удовлетворяющие условиям равновесия атмосферы (т. е. не дающие в нижних слоях особенно больших вертикальных температурных градиентов, больших адиабатического) получаются, если принять, что граница между конвективным и лучистым равновесием находится на высоте 9—12 *км*. Тогда получается кривая распределения температуры с высотой, очень близкая к действительной средней температурной кривой средних широт. Температура земной поверхности получается около 290°. Таким образом лучистое равновесие должно получаться только начиная с определенной высоты 9—12 *км*, а ниже температурное распределение регулируется вертикальной конвекцией. Теоретические кривые, далее, дают в области лучистого равновесия, т. е. в стратосфере почти постоянное значение температуры, что хорошо согласуется с действительностью. Если температуру поверхности земли принять более высокой, например $T_0 = 300°$, то в нижних слоях получается неустойчивое равновесие, т. е. градиенты больше адиабатического. Если же температура T_0 ниже 290°, то радиация уменьшается, и простые вычисления показывают, что баланса лучистой энергии не существует, так как количество входящей в атмосферу радиации оказывается больше выходящей. Это очевидно невозможно, так как имело бы следствием перегревание земли и ее атмосферы, чего на самом деле не наблюдается.

Интересно, что увеличение или уменьшение количества углекислоты вдвое по сравнению с действительным ее содержанием в атмосфере дает в первом случае повышение а во втором случае понижение температуры земной поверхности приблизительно на 4°С. Если количество углекислоты утроится или же с другой стороны сведется к нулю, то изменение температуры составит около 7°. Такое изменение средней годовой температуры земли во всяком случае может оказать влияние на климат. Существует старая гипотеза в свое время выдвинутая Тиндалем (в 1861 г.) и потом пропагандированная Аррениусом о связи ледниковых периодов с изменением содержания углекислоты в атмосфере. В последнее время эта гипотеза отвергалась как несостоятельная. Однако, вышеприведенные подсчеты показывают, что такое влияние содержания углекислоты в атмосфере на климат земного шара вполне возможно, в особенности если принять еще во внимание косвенное влияние, которое сказывается изменением состояния снежного покрова, а следовательно изменением альбедо и лучеиспускательной способности земной поверхности.

Что касается озона, находящегося согласно современным взглядам в сравнительно высоких слоях земной атмосферы (на высоте 30 *км* и выше над земной поверхностью), то влияние его на общий температурный

режим земли и ее атмосферы повидимому незначительно. Полное отсутствие его сказалось бы в понижении средней температуры земной поверхности на 1°—2° С, что конечно не играет существенной роли для лучистого равновесия атмосферы. Полосы поглощения озона лежат, главным образом, в ультра-фиолетовой части спектра (от $\lambda = 2300 - 2900$ Å) и одна в инфракрасной ($\lambda = 8{,}5 - 10{,}5\ \mu$). Поглощение ультрафиолетовой радиации озоном повидимому имеет существенное значение для химических и биологических процессов происходящих на земле, но не для общего температурного режима земли и ее атмосферы.

Путь исследования, опирающийся на данные физики, в настоящее время надо предпочесть попыткам математического решения вопроса, ибо постановка проблемы настолько сложна и настолько еще неопределенна, что всякое математическое исследование поневоле должно ограничивать задачу и вводить разные упрощающие предположения, которые разумеется в значительной степени отражаются на результатах, лишая их достаточной полноты и общности. Значение физического исследования, касающегося главным образом вопросов избирательного поглощения в различных слоях атмосферы несомненно очень велико. Благодаря новым работам в этой области (Simpson'a, Mügge, Roberts'a, Albrecht'a) сильно расширяется и крепнет теоретическая база и все больше уясняется физическая сущность процессов. С этой точки зрения предыдущие работы, имевшие даже лучшую математическую обработку (например, работа Эмдена), являются уже устаревшими, так как постановка вопроса в них с физической точки зрения является недостаточной и не отвечающей современному состоянию наших знаний.

§ 5. Судьбы длинноволновой радиации в земной атмосфере. Уходящая радиация. В § 2 было показано, что 46 единиц длинноволновой радиации земного происхождения после всякого рода преобразований и многократного поглощения и излучения слоями атмосферы должны уходить из земной атмосферы в межпланетное пространство для того чтобы существовал баланс лучистой энергии для всего земного шара.

Возникает вопрос, какова вообще судьба длинноволновой радиации, посылаемой земной поверхностью и многократно поглощаемой и снова излучаемой слоями атмосферы, содержащими водяной пар и углекислоту? От каких слоев атмосферы в конечном счете излучаются эти 46 единиц длинноволновой радиации, которые потом покидают земную атмосферу?

Очевидно, что нижние слои атмосферы и облака нижних слоев в общем получают от земли больше длинноволновой радиации чем отдают обратно земле. Только в случаях больших мощных инверсий потоки лучистой энергии направленные к земле будут больше потоков притекающих к этим слоям от земли. Быть может это отчасти имеет место в полярных областях, где всегда существует слой приземной инверсии. Облака нижних слоев атмосферы излучают обычно при температуре более низкой чем земная поверхность, и поэтому их излучение, направленное к земле, меньше чем излучение, притекающее к ним от земли.

Таким образом отдача длинноволновой радиации в междупланетное пространство происходит от более высоких слоев земной атмосферы. В самом деле нижние слои вообще богаты содержанием водяного пара, и поэтому слой некоторой конечной толщины поглощает всю длинноволновую радиацию, притекающую снизу. Но по мере увеличения высоты содержание пара уменьшается, и мощность слоя способного поглотить всю идущую снизу радиацию все возрастает, и наконец на некоторой высоте количество паров уменьшается настолько, что его оказывается недостаточным для того, чтобы поглотить всю притекающую снизу длинноволновую радиацию. С этого уровня длинноволновая радиация начинает прорываться вверх и уходить в межпланетное пространство. Вопрос о высоте этого слоя наибольшей отдачи лучистой энергии в меж-

планетное пространство, повидимому, выясняется только в последнее время.

Симпсон предполагал, что стратосфера содержит еще настолько значительное количество паров, что может поглощать всю радиацию притекающую с ее нижней границы от тропосферы. Таким образом излучение в мировое пространство начинается по Симпсону уже в стратосфере. Это очень облегчает вопрос, и поэтому Симпсон мог построить для уходящей радиации ту модель, которая изображена на рис. 20. Полное излучение в мировое пространство от земной поверхности и атмосферы изображается заштрихованной площадью *GHCDKT*, причем температура земной поверхности составляет 280° abs. а температура стратосферы 218° abs.

Вследствие избирательного поглощения уходящее излучение состоит из радиации $8^1/_2$—11 μ, уходящей от земной поверхности, и из радиации длин волн $< 7\,\mu$ и $> 14\,\mu$, исходящей от стратосферы. В области 7—$8^1/_2\,\mu$ и 11—14 μ оно идет отчасти от земной поверхности, отчасти от стратосферы, что показано участками *MHCN* и *PDKQ* заштрихованной площади. Однако позднейшие исследования внесли корректив в результаты Симпсона. Более детальное изучение избирательного поглощения показывает, что для каждой длины волны при данном распределении температуры и влажности с высотой существует своя высота, соответствующая наибольшей отдаче длинноволновой радиации в мировое пространство

Робертс (Roberts) и Альбрехт (Albrecht) показали, что самое большое возрастание потока уходящей радиации происходит в слое, лежащем на высоте 6—10 *км*, т. е. в средних широтах в верхних слоях тропосферы, а в тропиках значительно ниже тропопаузы (у экватора этот слой лежит между 9—12 *км* высоты, тогда как тропопауза расположена на высоте 17 *км*). По Альбрехту оказывается, что излучение этого слоя вообще не зависит существенно от географической широты места и от времени года и соответствует приблизительно слою с давлением пара от 0,15 *мм* до 0,015 *мм*, что соответствует температуре слоя —40°C—60°C, так как для таких именно границ температуры указанное давление пара соответствует состоянию насыщения. Таким образом на приведенном рисунке Симпсона вместо спектральной кривой распределения соответствующей температуре $T = 218$ abs. надо было бы взять кривую соответствующую температуре около 223° abs., что однако количественно мало меняет результат.

Перейдем теперь к рассмотрению диффузной радиации (см. рис. 23).

Рассмотрим поток энергии, который получается в атмосфере от излучения некоторой черной поверхности (например, поверхности земли или облака). Обозначим излучение квадратной единицы черной поверхности, распространяющееся в верхнюю полусферу через I_λ. При этом значок λ указывает, что рассматривается излучение в области длин лучей от λ до $\lambda + d\lambda$. Тогда излучение, распространяющееся в пространственный угол $d\Omega$ под углом ϑ к отвесной линии выразится через $\frac{I_\lambda}{\pi}\cos\vartheta\, d\Omega$, а на шаровую зону радиуса 1 через

$$S_{\lambda,\vartheta} = \frac{I_\lambda}{\pi} 2\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \cos\vartheta = 2I_\lambda \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

В самом деле, если проинтегрируем это выражение, то опять получим полную величину излучения в полусферу

$$2I_\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta = I_\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Если принять для I_λ формулу Планка

$$I_\lambda = \frac{52{,}904}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{1{,}436}{\lambda T}} - 1} \frac{кал}{мин.\ см^2}$$

и проинтегрировать по всему спектру, то получим

$$\int_{\lambda=0}^{\infty} I_\lambda\, d\lambda = \sigma T^4 = 8{,}3 \cdot 10^{-11}\, T^4 \frac{кал}{мин.\ см^2}$$

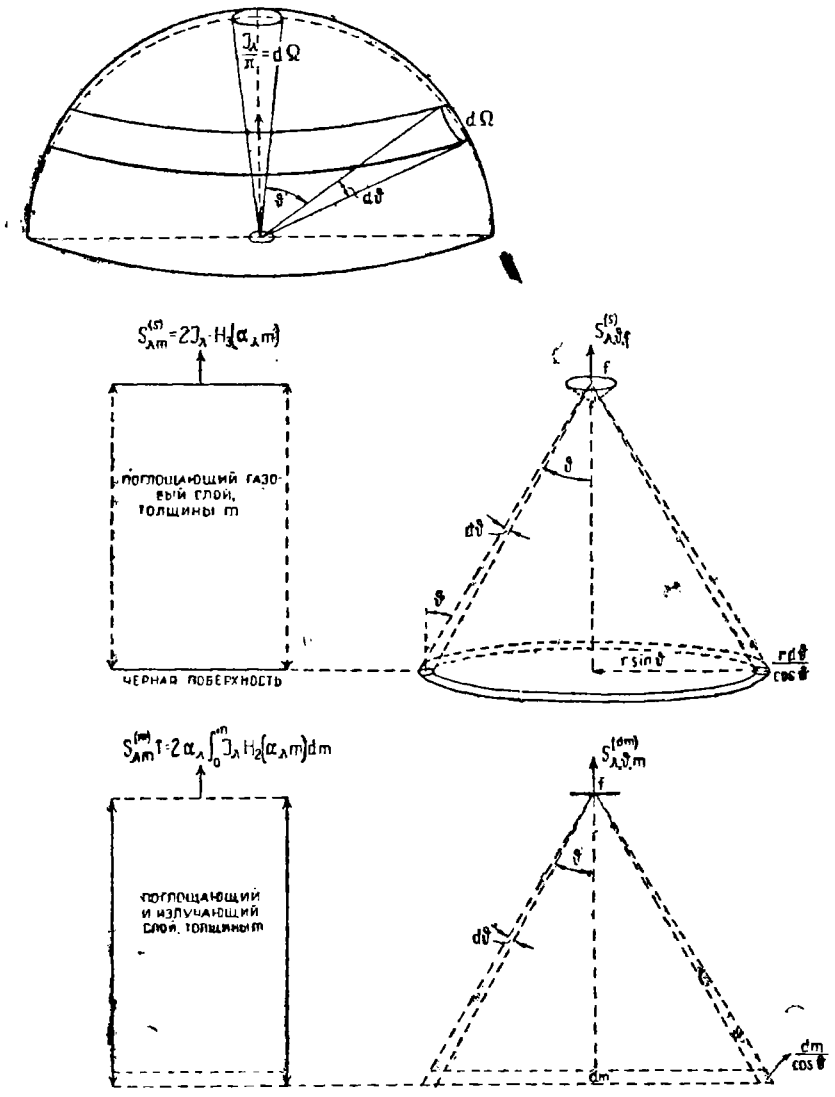

Рис. 23.

Пусть теперь рассматривается некоторая точка (элемент поверхности) в атмосфере и спрашивается, какое количество радиации получает этот элемент от расположенной внизу излучающей плоской поверхности бесконечного протяжения. Пусть промежуточное пространство представляется сначала пустым. Из рассматриваемой точки f круговое бесконечно тонкое кольцо излучающей поверхности, находящейся от точки f на расстоянии r, усматривается под углом ϑ. Окружность кольца

имеет длину $2\pi r \sin\vartheta$, а ширина кольца равна $r d\vartheta \cdot \frac{1}{\cos\vartheta}$. Поэтому площадь кольца равна $F = 2\pi r^2 \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} d\vartheta$.

Согласно вышесказанному излучаемая с этой площади под углом ϑ к нормали радиация, отнесенная к телесному углу, равному единице, будет иметь выражение

$$\frac{I_\lambda}{\pi} F \cos\vartheta = 2r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, I_\lambda, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

а так как элемент площади, рассматриваемый в точке f, величину которого мы примем равной единице, виден из любой точки площади кольца F под углом $\frac{\cos\vartheta}{r^2}$, то радиация, происходящая от площади F и проходящая через элемент f, будет иметь выражение

$$S^{(s)}_{\lambda,\vartheta\uparrow} = 2I_\lambda \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta.$$

Если же между излучающей поверхностью и точкой находится поглощающий слой величины m с коэффициентом поглощения α_λ для лучей длины волны λ, то точка получает количество радиации

$$S^{(s)}_{\lambda,\vartheta,m\uparrow} = 2I_\lambda \sin\vartheta \cos\vartheta e^{-\frac{\alpha_\lambda m}{\cos\vartheta}} d\vartheta \quad \ldots\ldots\ldots (35)$$

Согласно Гольду (Gold) положим

$$\frac{1}{\cos\vartheta} = \xi,$$

т. е.

$$d\xi = \frac{\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta} d\vartheta.$$

Тогда полный поток радиации, направленный через элемент f вверх, напишется так

$$S^{(s)}_{\lambda,m\uparrow} = 2I_\lambda \int\limits_{\vartheta=0}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cos\vartheta e^{-\frac{\alpha_\lambda m}{\cos\vartheta}} d\vartheta = 2I_\lambda \int\limits_1^\infty \frac{e^{-\alpha_\lambda m \xi}}{\xi^3} d\xi \quad \ldots\ldots (36)$$

Согласно Гольду

$$\int\limits_{\xi=1}^{\xi=\infty} \frac{e^{-\alpha_\lambda m \xi}}{\xi^n} d\xi$$

обозначается через $H_n(\alpha_\lambda m)$.

Тогда

$$S^{(s)}_{\lambda,m\uparrow} = 2I_\lambda H_3(\alpha_\lambda m) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

Функции этого рода играют важную роль в теории лучистого равновесия.[1])

Рассмотрим теперь диффузную радиацию, исходящую от разных слоев атмосферы. Вместо излучающей черной плоскости бесконечного протяжения рассмотрим в качестве излучателя бесконечно тонкий газовый слой. Он отделен от воспринимающего элемента нашей поверхности f поглощающим слоем m того же газа. Кольцеобразный элемент этого газового слоя имеет площадь (см. рис. 23).

$$F = 2\pi r \sin\vartheta \frac{r}{\cos\vartheta} d\vartheta.$$

В отличие от черной излучающей поверхности, рассмотренной *ранее*, этот слой излучает радиацию пропорционально толщине ее dm, и по закону Кирхгофа также пропорционально коэффициенту поглощения α_λ. Для радиации, излучаемой в направлении угла ϑ, получится поэтому выражение

$$\frac{I_\lambda}{\pi} F \frac{dm}{\cos\vartheta} \alpha_\lambda \cos\vartheta, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

---

[1]) Укажем некоторые свойства функций, введенных Гольдом, которые играют большую роль при изучении рассеянной радиации

$$H_n(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t^n} dt.$$

Интеграл этот имеет смысл при $z > 0$ и при всяком n. Если же $z = 0$, то должно быть $n > 1$. При $z < 0$ интеграл не имеет смысла.

1) $$H_n(z) = \frac{1}{1-n}\int_1^\infty e^{-zt} dt^{1-n} = \frac{1}{1-n}\left\{\left[\frac{e^{-zt}}{t^{n-1}}\right]_1^\infty + z\int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t^{n-1}} dt\right\}$$

или

$$H_n(z) = \frac{1}{n-1}\left\{e^{-z} - z H_{n-1}(z)\right\}.$$

2) $$H_1(z) = \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t} dt.$$

Полагая $-zt = u$, найдем

$$H_1(z) = \int_{-z}^{-\infty} \frac{e^u}{u} du = -\int_{-\infty}^{-z} \frac{e^t}{t} dt = -Ei(-z),$$

т. е. $H_1(z)$ выражается через известную функцию интеграл-логарифм:

$$Ei(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{e^t}{t} dt.$$

3) Применяя предыдущую формулу понижения порядка, находим

$$H_2(z) = e^{-z} - z H_1(z) = e^{-z} + z\, Ei(-z),$$

$$H_3(z) = \frac{1}{2}\left\{e^{-z} - z H_2(z)\right\} = \frac{1}{2}\left\{e^{-z}(1-z) - z^2 Ei(-z)\right\}.$$

$$H_4(z) = \frac{1}{3}\left\{e^{-z} - z H_3(z)\right\} = \frac{1}{6}\left\{e^{-z}(2-z+z^2) + z^3 Ei(-z)\right\} \text{ и т. д.}$$

ибо толщина слоя в направлении угла ϑ будет $\frac{dm}{\cos\vartheta}$. В расстоянии r после поглощения в промежуточном газовом слое получим, рассматривая радиацию проходящую через горизонтальный элемент f единичной площади:

$$S^{(dm)}_{\lambda,\vartheta,m} = \frac{I_\lambda}{\pi} F \frac{\alpha_\lambda\, dm}{\cos\vartheta} \cos\vartheta \frac{1}{r^2} e^{-\frac{\alpha_\lambda m}{\cos\vartheta}} \cos\vartheta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (39)$$

Индекс (dm) сверху обозначает, что речь идет о собственном излучении бесконечно тонкого слоя dm. Введя выражение для F

$$F = 2\pi r^2 \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} d\vartheta,$$

получим

$$S^{(dm)}_{\lambda,\vartheta,m\uparrow} = 2I_\lambda \alpha_\lambda\, dm \sin\vartheta\, e^{-\frac{\alpha_\lambda m}{\cos\vartheta}} d\vartheta, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (40)$$

и интегрируя по полусфере

$$S^{(dm)}_{\lambda,m\uparrow} = 2I_\lambda \alpha_\lambda\, dm \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\, e^{-\frac{\alpha_\lambda m}{\cos\vartheta}} d\vartheta, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (41)$$

---

4) Вообще при n целом положительном

$$H_n(z) = e^{-z}\left\{\frac{1}{n-1} - \frac{z}{(n-1)(n-2)} + \ldots + (-1)^{n-2}\frac{z^{n-2}}{n-1!}\right\} + (-1)^n \frac{z^{n-1}}{n-1!} Ei - z.$$

5) Путем последовательного интегрирования по частям формулы (2) легко получить асимптотическое разложение

$$H_1(z) \cong e^{-z}\left\{\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1\cdot 2}{z^3} - \ldots\ldots\right\},$$

и аналогичные разложения для всех функций $H_n(z)$.

Например

$$H_3(z) \cong \frac{1}{2}\left\{e^{-z}(1-z) + z^2 e^{-z}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1\cdot 2}{z^3} - \frac{1\cdot 2\cdot 3}{z^4} + \ldots\right)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-z}\left(\frac{2}{z} - \frac{6}{z^2} + \ldots\right)$$

или

$$H_3(z) \cong e^{-z}\left(\frac{1}{z} - \frac{3}{z^2}\right).$$

6)
$$H_n(0) = \int_1^\infty \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{n-1} \quad (n > 1).$$

7)
$$H_n(\infty) = \lim_{z\to\infty} \int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t^n} dt = 0.$$

8)
$$\frac{dH_n(z)}{dz} = -\int_1^\infty \frac{e^{-zt}}{t^{n-1}} dt = -H_{n-1}(z).$$

9)
$$\int_z^\infty H_n(z)dz = -\int_z^\infty H'_{n+1}(z)dz = H_{n+1}(z).$$

10)
$$\int_0^q f(z)H_2(z)dz = -\int_0^q f(z)H_3'(z)dz = -[f(z)H_3(z)]_0^q + \int_0^q f'(z)H_3(z)dz =$$

$$= f(0)H_3(0) - f(q)H_3(q) + \int_0^q f'(z)H_3(z)dz = \frac{1}{2}f(0) - f(q)H_3(q) + \int_0^q f'(z)H_3(z)dz.$$

и опять можно написать, введя функцию H

$$S^{(dm)}_{\lambda,m\uparrow} = 2I_\lambda \alpha_\lambda \, dm \, H_2(\alpha_\lambda m). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (42)$$

Последнее выражение очевидно представляет радиацию тонкого слоя dm через поглощающий слой толщины m, получаемую элементом f.

Отсюда можно получить величину собственного излучения всего слоя конечной толщины m, которое направлено вверх Для этого надо проинтегрировать по всем бесконечно тонким слоям dm в пределах от 0 до m

$$S^{(m)}_{\lambda,m,\uparrow} = 2\alpha_\lambda \int_0^m I_\lambda H_2(\alpha_\lambda m) dm. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (43)$$

При этом очевидно функция излучения I_λ зависит от излучающей массы, т. е. другими словами она есть функция температуры, меняющейся с высотой.

Равным образом соответственными рассуждениями мы могли бы вывести выражение для собственного излучения атмосферы, направленного вниз.

Для вычисления полного потока длинноволновой радиации мы должны еще проинтегрировать по всему спектру. Тогда получается для полного потока длинноволновой радиации, излучаемой земной поверхностью, выражение

$$S^{(s)}_{m\uparrow} = 2\int_0^\infty I_\lambda H_3(\alpha_\lambda m) \, d\lambda \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (44)$$

и для потока радиации, излучаемой слоем массы m, выражение

$$S^{(m)}_{m\uparrow} = 2\int_0^m \int_0^\infty \alpha_\lambda I_\lambda H_2(\alpha_\lambda m) \, d\lambda \, dm \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (45)$$

Для выражения потока радиации, направленного сверху вниз (так называемое Gegenstrahlung), нужно в предыдущей формуле переменное m считать возрастающим сверху вниз.

Следующая таблица дает значения функций $H_3(t)$, $H_1(t) = -El(-t)$, $El(t)$ и $\frac{1}{2}e^{-\frac{3t}{2}}$, последнее для сравнения с $H_3(t)$.

t	$H_3(t)$	$\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{2}t}$	$H_1(t)$	$El(t)$
0	0.500	0.500	$+\infty$	$-\infty$
0.01	0.490	0.493	4.038	— 4.018
0.05	0.455	0.464	2.468	— 2.368
0.1	0.416	0.430	1.823	— 1.623
0.2	0.352	0.370	1.223	— 0.822
0.5	0.222	0.236	0.560	+ 0.454
1.0	0.110	0.112	0.219	+ 1.859
1.5	0.057	0.053	0.100	3.301
2.0	0.030	0.025	0.049	4.495
5.0	0.001	0.000	0.001	40.185

Этот результат может быть написан также в одной из двух форм:

$$\bar{S}=2I(T)H_3\left(\frac{\alpha}{k}\right)+2\sum_{1}^{\infty}\frac{\gamma^n}{(n-1)!}I^{(n)}(T)\left\{\int_0^{m_0}\frac{z_0^{n-1}H_3(\alpha m)dm}{1+km}+\int_0^{m}\frac{(-\bar{z})^{n-1}H_3(\alpha m)dm}{1-km}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n}(-\bar{h})^n H_3\left(\frac{\alpha}{k}\right)\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

или

$$\bar{S}=2I(T_0)H_3\left(\frac{\alpha}{k}\right)+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma^n}{(n-1)!}I^{(n)}(T)\left\{\int_0^{m_0}\frac{z_0^{n-1}H_3(\alpha m)}{1+km}dm+\right.$$

$$\left.+\int_0^{\bar{m}}\frac{(-\bar{z})^{n-1}H_3(\alpha m)dm}{1-km}+\frac{1}{n}(-\bar{h})^n H_3\left(\frac{\alpha}{k}\right)-\frac{1}{n}h_0^n H_3\left(\frac{\alpha}{k}\right)\right\}. \quad (49)$$

Воспользуемся выражением (48), не содержащим явно T_0 и $\bar{T}$.

Для удобства численных подсчетов можем положить $\xi=km$ и $\varepsilon=\frac{\alpha}{k}$.

Тогда

$$\bar{S}=2I(T)H_3(\varepsilon)+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma^n I^{(n)}(T)}{(n-1)!}\left\{\frac{1}{k}\int_0^{\xi_0}z_0^{n-1}\frac{H_3(\varepsilon\xi)}{1+\xi}d\xi+\frac{1}{k}\int_0^{\bar{\xi}}(-z)^{n-1}\frac{H_3(\varepsilon\xi)}{1-\xi}d\xi+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n}(-\bar{h})^n H_3(\varepsilon)\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

Легко видеть что $\bar{\xi}<1$. Тогда подинтегральная функция во втором интеграле не обращается в бесконечность внутри области интегрирования.

Коэффициент при $2\gamma I'(T)$ в этом разложении равен

$$\frac{1}{k}\left\{\int_0^{\xi_0}\frac{H_3(\varepsilon\xi)}{1+\xi}d\xi+\int_0^{\bar{\xi}}\frac{H_3(\varepsilon\xi)}{1-\xi}d\xi\right\}-\bar{h}H_3(\varepsilon).$$

Робертс (1930 г.) произвел подробные численные подсчеты уходящей радиации этим методом. Исследование порядка первого из отброшенных членов ряда содержащего γ^2, показывает, что этот член составляет около $\frac{1}{10}$ предыдущего, содержащего γ в первой степени.

Вычислив $\bar{S}$ для различных высот можно составить значения производной $\frac{d\bar{S}}{dz}$ для разных высот. Оказывается, что эта последняя величина в верхних слоях атмосферы всегда положительна, ибо S растет с высотой, приближаясь асимптотически к некоторому значению. Величина $\frac{d\bar{S}}{dz}$ имеет слабый максимум, положение которого зависит от строения атмосферы, т. е. от распределения по высоте излучающего и поглощающего агента— водяного пара и от распределения температуры по высоте. Достигнув максимума величина $\frac{dS}{dz}$ с возрастанием z стремится к нулю. Величина охлаждения, рассчитываемая на единицу массы воздуха, как легко понять, равна $\frac{1}{\rho}\frac{dS}{dz}$. Таким образом в верхних слоях тропосферы эта величина положительна, т. е. верхние слои тропосферы являются резервуарами

охлаждения, тогда как в нижних слоях наоборот получается избыток притока тепла. На некоторой высоте быстрое падение производной $\frac{dS}{dz}$ оказывается более значительным чем уменьшение плотности с высотою и таким образом получается слой максимального охлаждения.

Существенный результат всего исследования состоит в том, что существует непрерывное возрастание потока стремящейся вверх радиации до тропопаузы. Начиная с высоты 2 *км* от земной поверхности это возрастание приблизительно постоянно и составляет около $1{,}6 \cdot 10^{-4}$ *кал. см*$^{-2}$ *сек*$^{-1}$, что означает приблизительную величину потери от слоя толщиною в 1 *км*. Кривая конечно характеризует только некоторые средние условия излучения и диффузного распространения радиации от слоя к слою. В действительности уходящая радиация в слоях может увеличиваться или уменьшаться в зависимости от других факторов, влияние которых не учтено, как например, от испарения и конденсации, горизонтальных и вертикальных течений воздуха и от турбулентности. Надо еще добавить, что модель дает некоторое искажение по мере приближения к стратосфере, так как нельзя считать k в подсчетах постоянным по той причине, что плотность водяного пара падает более быстро на больших высотах, чем это следует по принятому показательному закону, и так как влияние углекислоты, которое исследованием Робертса вовсе не учитывается, становится более заметным с увеличением высоты.

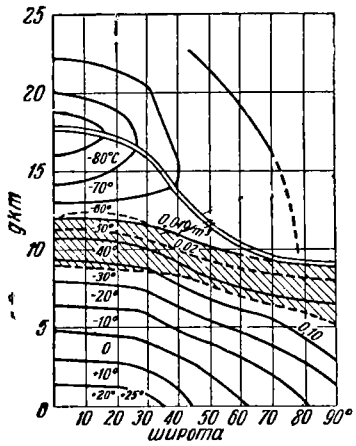

Рис. 24.

К совершенно аналогичным результатам пришел Альбрехт (Albrecht) другим методом. Он показал, что самое большое возрастание потоков уходящей радиации происходит в слое, лежащем на высоте от 6 до 10 *км*, т. е. в средних широтах в верхних слоях тропосферы, а в тропиках значительно ниже тропопаузы (у экватора этот слой лежит между 9—12 *км* высоты, тогда как тропопауза расположена на высоте 17 *км*).

Рис. 24 заимствованный из работы Альбрехта дает расположение слоя излучения в сопоставлении с вертикальным распределением температуры по широтам. Последнее, т. е. вертикальное распределение температуры по широтам нанесено по новейшим данным Раманатана. В умеренных широтах этот слой естественно связан с верхней границей тропосферы, и стратосфера залегает непосредственно над ним. В тропиках и у экватора сказывается влияние сильной вертикальной конвекции, которая преодолевает верхнюю границу слоя максимального излучения, в силу чего тропопауза отодвигается значительно выше этого слоя. Температура верхних слоев тропосферы в тропиках и у экватора таким образом оказывается ниже нормальной температуры лучистого равновесия, и эти слои получают лучистой энергии от выше и ниже лежащих слоев больше чем отдают. Температура лучистого равновесия нижних слоев стратосферы оказывается у экватора ниже чем у полюсов. Только на высоте около 26 *км* тропическая стратосфера приобретает температуру лучистого равновесия, одинаковую с температурой средних широт. Такое об'яснение однако нельзя считать удовлетворительным, так как оно опирается на существование некоторого постоянного не меняющегося с высотой слоя наибольшего излучения, а существование этого слоя получается в свою очередь как следствие некоторых определенных предпосылок относительно распределения температуры и содержания пара с высотой.

Наблюдаемое в умеренных широтах годичное изменение температуры стратосферы с максимумом при летнем солнцестоянии и минимумом при

зимнем солнцестоянии об'ясняется годовыми изменениями в поглощаемой атмосферой прямой коротковолновой радиации солнца. Это поглощение хотя незначительное все же существует и составляет около 4% всей радиации, падающей на верхнюю границу земной атмосферы. Суточная величина поглощения этой радиации зависит от склонения, солнца, и таким образом всюду кроме экваториальной зоны должна иметь максимум во время летнего солнцестояния и минимум во время зимнего солнцестояния, причем годовая амплитуда должна возрастать от экватора к полюсам, что и наблюдается на самом деле.

Можно дать приближенный ответ на вопрос как распределяется уходящая радиация по земному шару, т. е. как зависит она от широты места. Ответ на этот вопрос становится возможным, так как альбедо для различных широт может быть приближенно подсчитано, а средние температуры земной поверхности на различных широтах позволяют вычислить поток не поглощаемой радиации для различных зон земной поверхности; эта непоглощаемая радиация значительно меняется количественно в зависимости от широты. Наконец уходящая длинноволновая радиация по Альбрехту определяется главным образом физическими условиями слоя наибольшего излучения и приблизительно постоянна для всех широт. Труднее учесть радиацию облаков, непоглощаемую земной атмосферою так как это излучение происходит при различных температурах, плохо поддающихся определению. Однако, все-таки приблизительный подсчет возможен, и в следующей таблице приведены, по Альбрехту, средние годовые данные для различных широт, выраженные в системе единиц *м*, *т*, *сек*, т. е. в килоджоулях на 1 $м^2$ в *сек*.

Отсюда видно, что на полюсах имеется потеря тепла лучеиспусканием, а в тропиках наоборот приток тепла и граница между этими поясами, где приток равен потере лежит приблизительно при $37^1/_2°$ широты.

Широта в градусах	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
Притекающая лучистая энергия	236.4	232.6	223.0	207.1	186.2	161.9	134.3	111.7	100.4
Излучаемая лучистая энергия	209.2	208.4	205.0	197.5	189.5	179.9	170.7	161.1	153.6
Разность	27.2	24.3	18.0	— 9.6	— 3.3	— 18.0	— 36.4	— 49.1	— 53.1

Если различать в уходящей радиации три составляющие ее части, то в отдельности относительно каждой из них можно сказать следующее. Первая составная часть, т. е. радиация длины волн 8—11 μ, исходящая от земной поверхности, для которой атмосфера вполне прозрачна, убывает от экватора к полюсам вместе с убыванием средней температуры земной поверхности. Это излучение исходит только от земной поверхности (и отчасти от облаков), а водяной пар и вообще сама атмосфера вовсе не излучают этой радиации, так как ее и не поглощают. Вторая и третья составные части уходящей радиации, т. е. радиация, вполне поглощаемая и отчасти поглощаемая атмосферой, приблизительно одинаковы по всему земному шару и мало зависят от широты.

Если сопоставить данные последней таблицы с вертикальным распределением потоков уходящей радиации, то можно прийти к такому заключению относительно распределения в атмосфере источников тепла и холодильников. Холодильником является прежде всего слой наибольшего излучения длинноволновой радиации, а также нижележащие слои воздуха в полярных областях вплоть до земной поверхности Источники тепла в земной атмосфере расположатся отчасти выше, отчасти ниже

холодильников. Самая большая область нагревания располагается в нижних слоях атмосферы на экваторе, у тропиков и отчасти в умеренных широтах. Источником тепла здесь служит длинноволновое излучение земной поверхности, а также немаловажную роль играют большие количества освобождающейся внутри этой области теплоты конденсации. Кроме этой области источником тепла представляется также самый верхний слой тропосферы над экватором и над тропиками, настолько холодный, что он менее излучает тепла, чем поглощает от нижележащих слоев тропосферы и вышележащих нижних слоев стратосферы.

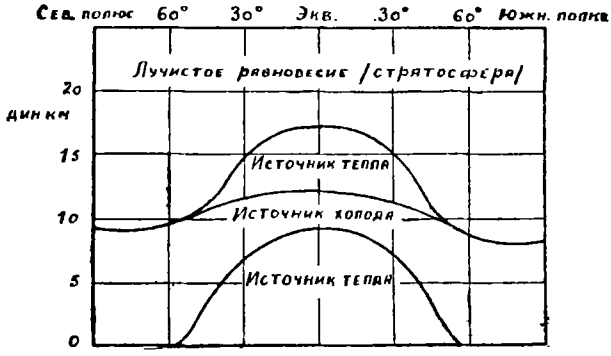

Рис. 25.

Около времени летнего солнцестояния, как утверждает Симпсон, происходит смещение этих областей. В это время область нагревания сдвигается к полюсу в северном полушарии, так что в больших широтах северного полушария только слой наибольшего излучения длинноволновой радиации, да, быть может, только тонкий прилегающий к земле слой полярной атмосферы могут рассматриваться как холодильники. В это же время в южном полушарии господствует зима. и область положительного притока энергии отступает к экватору примерно до широты 15°*S*.

Распределение источников тепла и холодильников во время зимнего солнцестояния очевидно дает обратную картину. Впрочем необходимо заметить, что условия притока энергии в северном и южном полушарии несколько разнятся, вследствие того, что южнополярная зона холоднее чем северополярная. Поэтому радиация исходящая от земной поверхности слабее в южной полярной зоне чем в северной и следовательно уходящая радиация южного полушария несколько меньше теплоотдачи северного полушария (см. рис. 25а).

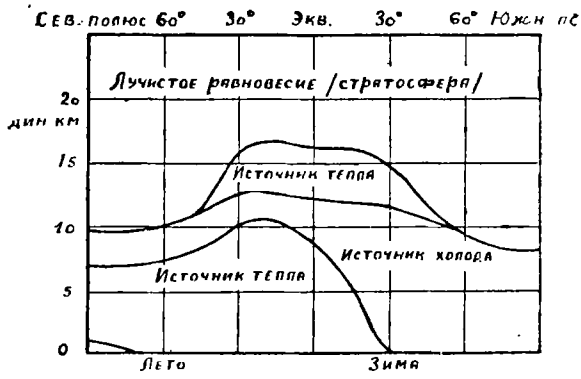

Рис. 25а.

Высота и температура стратосферы зависят от географической широты. В северном полушарии летом нижняя граница стратосферы поднимается от 10—11 *км* над уровнем моря на широте 60°, до 15—17 *км* на экваторе, причем температура ее меняется при этом от —45°С до —70° —80°С. Наоборот, по направлению к полюсу высота нижней границы стратосферы понижается до 6—7 *км*, а иногда и менее, а температура ее повышается. Таким образом, происходит своеобразное обращение температур верхних слоев по сравнению с нижними. На экваторе и в тропиках имеет место холодная и высокая стратосфера, а над полюсами теплая и низкая. Следуя, например, по меридиану на высоте 20 *км* мы получим непрерывное возрастание температуры от экватора к полюсам и притом весьма значительное, доходящее до 40°. Такое изменение высоты и температуры стратосферы по широте имеет место во все вре-

мена года в обоих полушариях. Однако, причина этого явления до сих пор в точности неизвестна. Как было говорено выше, повидимому, она заключается в повышенной радиации нижних слоев атмосферы и увеличенной влажности верхних слоев. Высокая температура экваториального пояса вызывает большую вертикальную конвекцию. Благодаря поднятию больших масс влажного воздуха происходит обычная конденсация паров и густая облачность. Облака перехватывают значительную часть радиации, идущей снизу, отчасти отражают ее, а отчасти поглощают. Отраженная снизу радиация повышает температуру нижележащих слоев тропосферы, а поглощенная часть радиации, повидимому, главным образом, тратится на парообразование во влажных и облачных массах, а не поднимает значительно температуру облаков. Таким образом, высокие облака экваториальной и тропической зоны и большая влажность воздуха на больших высотах как бы поднимают уровень эффективного излучения длинноволновой радиации; вследствие этого уменьшается ее интенсивность, и таким образом высота нижней границы стратосферы отодвигается вверх, а температура ее соответственно уменьшается.

Тепло, поглощенное нижними слоями атмосферы в экваториальной и тропической зоне, усиливает междузональную циркуляцию в тропическом поясе, а также и перенос тепла от экватора по направлению к полюсам.

В средних и больших широтах также может по временам развиваться значительная облачность, но там она обычно приводит к понижению стратосферы, а не к повышению ее. Причина этого заключается в том, что облака здесь стоят низко, влажный слой невелик и незначителен, а следовательно эффективно излучающая поверхность становится теплее, а не холоднее чем в нормальных условиях без повышения облачности, а поэтому стратосфера сравнительно тепла и залегание ее низко.

Наконец на температуру и высоту залегания стратосферы могут оказывать влияние местные различия в содержании пара в стратосфере, но абсолютная влажность в ней весьма незначительна вследствие крайне низких температур и, как известно, облака вообще не образуются выше нижней границы стратосферы, за исключением загадочных серебристых облаков на больших высотах (около 70 *км*), которые наблюдаются весьма редко и которые, повидимому, имеют природу совершенно отличную от облаков тропосферы и совершенно другие причины происхождения.

§ 6. Приближенное уравнение притока лучистой энергии в атмосфере. Представляется очень важным найти форму уравнения притока лучистой энергии, т. е. ближе выразить в этом случае величину ε (гл. III). Попытка такого рода сделана Брунтом (Brunt), который установил при некоторых предположениях форму уравнения, сходную с уравнением теплопроводности. При этом Брунт исходит из положений Симпсона, что столб воздуха, содержащий пары в количестве эквивалентном 0,3 *мм* осадков, поглощает вполне всю радиацию с длинами волн между 5,5 μ и 7 μ и свыше 14 μ, а также некоторую долю радиации, заключающуюся в промежутке 11 μ—14 μ. Область спектра 8 μ—11 μ представляет радиацию, для которой атмосфера является вполне прозрачной средой. Внутри соответствующей области поглощения излучение водяного пара можно вполне приравнять излучению абсолютно черного тела при той же температуре.

Легко получить длину вертикального столба воздуха, содержащего 0,3 *мм* осадков. Пусть эта длина равна l. Тогда цилиндр сечением в 1 *кв. см* содержит 0,03 l водяного пара. Обозначим давление его через e, плотность через ρ_e. Пусть T — абсолютная температура и R газовая постоянная для водяного пара ($R = 4.62.10^6$ в системе *см-г-сек.*). Тогда

$$l\rho_e = 0{,}03; \qquad l = \frac{0{,}03}{\rho_e} = \frac{0{,}03}{e} RT = 139 \frac{T}{e} \text{ см.} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (51)$$

Если принять $T=275°$, $e=1$ *мбр*, то $l=380$ *м*. Замечая, что в нижних слоях атмосферы давление паров e примерно порядка 10 *мбр*, а часто и больше, можем считать, что величина e имеет порядок около 40 *м*. Для слоя такой толщины можно принять повсюду одинаковую температуру равную средней температуре слоя.

Разделим теперь атмосферу на слои переменной толщины, так чтобы в каждом столбике с площадью основания 1 *кв. см*, содержались 0,03 *г* воды. Толщина каждого слоя $l=b\frac{T}{e}$, где b есть постоянная равная 13,9. Пусть (рис. 26) на рисунке AB означает верхнюю границу r-го слоя (начиная от поверхности земли). Назовем через E_r w-радиацию, проходящую в направлении снизу вверх через AB. Согласно нашей гипотезе, вся эта радиация излучается частицами, расположенными между AB и CD, нижней границей r-го слоя. Таким же образом w-радиация E_{r+1}, проходящая сверху вниз через уровень AB, излучается частицами, лежащими целиком в $r+1$-м слое. Общий поток w-радиации, направляющейся через AB вверх, напишется как разность

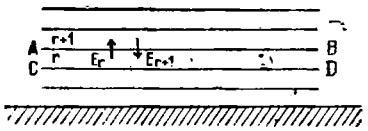

Рис. 26.

$$F_r = E_r - E_{r+1} = -\Delta E_r .$$

Считая E_r функцией температуры, можем написать

$$F_r = -\frac{\Delta E}{\Delta T}(T_{r+1} - T_r) = -\frac{\Delta E}{\Delta T}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\Delta T}{\Delta z} l\right)_{r+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta T}{\Delta z} l\right)_r\right\} \simeq -\frac{\partial E}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z} l = -\frac{\partial E}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z}\frac{bT}{e} = -k\frac{\partial T}{\partial z}, \quad . \; . \; . \quad (52)$$

где k есть переменная величина $k=\frac{\partial E}{\partial T}\frac{bT}{e}$.

Здесь приближенно положено $\frac{\Delta T}{\Delta z} \simeq \frac{\partial T}{\partial z}$, т. е. считается, что температурный градиент приблизительно постоянен и температура есть линейная функция высоты. Равным образом отношение в конечных разностях $\frac{\Delta E}{\Delta T}$ заменено производной $\frac{\partial E}{\partial T}$, ибо зависимость $\frac{\partial E}{\partial T}$ от T также оказывается почти линейной функцией и сравнительно мало изменяется для не очень больших изменений T.

В самом деле, Симпсон находит такие значения E для различных температур

температура	200° abs	220°	270°	295°
$\frac{\partial E}{\partial T}\times 10^3$	1,6	2,0	3,0	3,5

Эти значения хорошо выражаются такой формулой

$$10^3 \cdot \frac{\partial E}{\partial T} = 3{,}0 + 0{,}02\,(T - 270°).$$

Если принять $T=275°$ abs, $e=5$ *мбр*, что соответствует относительной влажности 70%, то значение k будет в системе сантиметр, минута, грамм-калория

$$3.10^{-3} \cdot 139 \cdot \frac{275}{5} \simeq 23.$$

С полученным значением k можно вычислить поток w-радиации вверх, соответствующий любому значению вертикального температурного градиента. Так, например, если принять адиабатический градиент — $\frac{\partial T}{\partial z} = \gamma_a = 10^{-4}$, то вертикальный поток равен $2{,}3 \cdot 10^{-3}$.

Брунт приближенно считает солнечную постоянную равной 2 *г-кал*. Тогда, осредняя эту величину за сутки (день и ночь), а также и по широте и приняв во внимание альбедо (0,43), получим величину 0,275 $\frac{\text{г-кал}}{\text{мин. см}^2}$ Таково будет среднее количество входящей в атмосферу лучистой энергии и, очевидно, такое же количество лучистой энергии должно отдаваться обратно в мировое пространство. При наших предположениях относительно k и вертикального температурного градиента в нижних слоях атмосферы поток w-радиации, уходящей вверх, составляет всего около $^1/_{100}$ этого количества (не принимая во внимание радиации, проходящей атмосферу без поглощения, т. е. радиации в области от $8^1/_2$ μ до 11 μ).

Поток лучистой энергии в атмосфере всегда направлен в сторону падения температуры, что означает тенденцию к выравниванию температуры слоев, т. е. к изотермии. На высоте $z + dz$ вертикальный поток лучистой энергии равен

$$-k\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)dz.$$

Отсюда приток энергии в слое толщины dz равен

$$-k\frac{\partial T}{\partial z} - \left[-k\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)dz\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)dz. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Таким образом призма, имеющая основанием *см*^{2}, а высотою dz получает количество тепла $\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)dz$, а единица об'ема получает $\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)$. С другой стороны количество энергии, притекающей к единице массы в единицу времени (1 *сек*), равно $c_p\frac{\partial T}{\partial t}$, а для единицы об'ема в 1 минуту оно выражается как $60\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}$.

По Гану значение e у земной поверхности относится к значению на высоте $^1/_2$ *км* и на высоте 1 *км*, как числа 1,0 : 0,83 : 0,68. Наблюдения часто показывают еще более медленное падение e с высотой. Штейнер по анализу под'емов в Ростоке находит, что давление пара меняется очень слабо до высоты 600 *м*.

Таким образом получается приближенное уравнение для притока лучистой энергии в атмосфере

$$60\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) = b\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{T}{e}\frac{\partial E}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

Если считать k за постоянную, то

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{b}{60\rho c_p}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{T}{e}\frac{\partial E}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \frac{k}{60\rho c_p}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

Заметим, что величина k повидимому мало меняется в нижних слоях атмосферы, тогда как $\frac{\partial T}{\partial z}$ может меняться очень значительно, в особенности у земной поверхности.

Если положить $\frac{k}{60\rho c_p} = K_R$, то уравнение примет вид вполне аналогичный уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K_k\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Если принять $\rho = 0{,}00125$ $c_p = 0{,}24$, то для величины K_R получается численное значение $K_R = 1{,}3 \cdot 10^3$. K_R изменяется обратно пропорционально давлению паров e (последнее входит знаменателем в величину k). Поэтому для больших значений e K_R может быть значительно меньше найденного значения, но даже и в таком случае коэффициент K_R значительно превосходит аналогичный коэффициент для молекулярной теплопроводности, значение которого 0,16 в тех же единицах.

Коэффициент K_R называется (по Брунту) коэффициентом лучистого рассеяния.

Вывод уравнения (55) основывался на таком допущении, что как выше так и ниже того уровня, на котором рассматривается поток лучистой энергии, существует полностью слой воздуха, содержание пара в котором эквивалентно 0,3 *мм* влаги выпавшей в виде осадков. Поэтому для высот меньших l, значение которого определено выше, требуется дополнительное исследование. Если рассматриваемая поверхность AB расположена непосредственно над земной поверхностью имеющей температуру T_s, то поток w-радиации направляющийся от этого уровня вверх будет $E(T_s)$, а поток радиации направляющейся вниз будет $E(T_1)$, где T_1 есть средняя температура слоя, лежащего над земной поверхностью и имеющего толщину l. Суммарный поток вверх равен

$$E(T_s) - E(T_1) = -\Delta E = -\frac{\Delta E}{\Delta T} \cdot \frac{\Delta T}{\Delta z} \Delta z = -\frac{\partial E}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \Delta z,$$

где $\Delta z = \frac{l}{2} = \frac{bT}{2e}$, т. е. поток этот равен

$$\frac{dE}{dT} \cdot \frac{dT}{dz} \frac{bT}{2e} = \frac{1}{2} k \frac{dT}{dz} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

Если мы рассмотрим уровень $z < l$, то поток радиации направленной вверх будет таков, как если бы часть $\frac{l-z}{l}$ полного излучающего слоя была заключена в безконечно тонком слое поверхности земли. Если по прежнему T_s означает температуру земной поверхности, а T — температуру на уровне z, то средняя температура этого слоя, излучающего как черное тело равна

$$\frac{T + T_s}{2} \frac{z}{l} + T_s \frac{l-z}{l} \simeq T + \frac{\partial T}{\partial z} \left(-z + \frac{z^2}{2l}\right),$$

где положено

$$\frac{\partial T}{\partial z} \quad \frac{T - T_s}{z}.$$

На основании уравнения (52) находим выражение потока w-радиации, направленного вверх с уровня z

$$-\frac{\partial E}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \left\{ \frac{l}{2} + \left(z - \frac{z^2}{2l} \right) \right\} = -\frac{\partial E}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \frac{l^2 + 2lz - z^2}{2l}.$$

При $z = 0$ это выражение совпадает с (56), а при $z = l$ совпадает со стандартной формой уравнения, что и требуется. Таким образом в нижнем слое толщины l значение k убывает непрерывно от его значения при $z = l$ до половины этого значения при $z = 0$. Отсюда можно заключить, что если существуют стационарные условия лучистого равновесия, так что поток, направленный вверх (уходящая радиация), одинаков на всех высотах, то вертикальный температурный градиент $\frac{\partial T}{\partial z}$ на высоте вдвое

меньше чем у поверхности земли. Весьма возможно, что это достигается в инверсиях в ясные летние ночи, когда условия близки к стационарным.

Можно приложить уравнение Брунта к теоретическому об'яснению ночной инверсии.

Уравнение $\frac{\partial T}{\partial t}=K\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ при постоянном K и при граничном и начальном условиях

$$T(t,0)=\varphi(t) \qquad \text{и} \qquad T(0,z)=f(z)$$

имеет решение вида

$$T(t,z)=\frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\int_0^\infty\left[e^{-\frac{(z-\lambda)^2}{4kt}}-e^{-\frac{(z+\lambda)^2}{4kt}}\right]f(\lambda)\,d\lambda+$$

$$+\frac{z}{2\sqrt{k\pi}}\int_0^t e^{-\frac{z^2}{4k(t-\lambda)}}(t-\lambda)^{-\frac{3}{2}}\varphi(\lambda)\,d\lambda.$$

При этом второй интеграл можно преобразовать, вводя новую переменную

$$\mu=\frac{z}{2\sqrt{k(t-\lambda)}}, \qquad 4k(t-\lambda)=\frac{z^2}{\mu^2}, \qquad t-\lambda=\frac{z^2}{4k\mu^2}, \qquad \lambda=t-\frac{z^2}{4k\mu^2},$$

$$d\lambda=\frac{z^2 d\mu}{2k\mu^3}.$$

Тогда

$$T(t,z)=\frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\int_0^\infty\left[e^{-\frac{(z-\lambda)^2}{4kt}}-e^{-\frac{(z+\lambda)^2}{4kt}}\right]f(\lambda)\,d\lambda+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{z}{2\sqrt{kt}}}^\infty e^{-\mu^2}\varphi\left(t-\frac{z^2}{4k\mu^2}\right)d\mu,$$

или, полагая для сокращения $\frac{z}{2\sqrt{kt}}=\zeta$,

$$T(t,z)=\frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\int_0^\infty\left[e^{-\frac{(z-\lambda)^2}{4kt}}-e^{-\frac{(z+\lambda)^2}{4kt}}\right]f(\lambda)d\lambda+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_\zeta^\infty e^{-\mu^2}\varphi\left(t-\frac{\zeta^2 t}{\mu^2}\right)d\mu.$$

Если в начальный момент температура на земной поверхности T_s и вертикальный температурный градиент $\gamma=\text{const}$, то можно положить

$$T=T_s-\gamma z+\theta(t,z),$$

и задача сведется к нахождению $\theta(t,z)$, удовлетворяющего уравнению

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=K\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}$$

и начальному и граничному условиям

$$\theta(0,z)=f(z)=0 \qquad \text{и} \qquad \theta(t,0)=\varphi(t).$$

Для ночной инверсии можно предположить равномерное охлаждение со скоростью p° С в сек., т. е. принять

$$\varphi(t)=-p^\circ t.$$

Тогда

$$T(t, z) = T_s - \gamma z - \frac{2p^\circ}{\sqrt{\pi}} \int_\zeta^\infty e^{-\mu^2} \left(t - \frac{\zeta^2 t}{\mu^2}\right) d\mu,$$

т. е.

$$T(t, z) = T_s - \gamma z - \frac{2p^\circ t}{\sqrt{\pi}} \int_\zeta^\infty e^{-\mu^2} \left(1 - \frac{\zeta^2}{\mu^2}\right) d\mu,$$

где

$$\zeta = \frac{z}{2\sqrt{kt}}.$$

Разбивая на два интеграла и интегрируя по частям, находим

$$T(t, z) = T_s - \gamma z - \frac{2p^\circ t}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_\zeta^\infty e^{-\mu^2} d\mu - \zeta^2 \int_\zeta^\infty e^{-\mu^2} \frac{d\mu}{\mu^2} \right\}.$$

Но

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\zeta^\infty e^{-\mu^2} d\mu = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\zeta e^{-\mu^2} d\mu,$$

$$\int_\zeta^\infty e^{-\mu^2} \frac{d\mu}{\mu^2} = -\int_\zeta^\infty e^{-\mu^2} d\left(\frac{1}{\mu}\right) = -\left[\frac{e^{-\mu^2}}{\mu}\right]_\zeta^\infty - 2\int_\zeta^\infty e^{-\mu^2} d\mu = \frac{e^{-\zeta^2}}{\zeta} - 2\int_\zeta^\infty e^{-\mu^2} d\mu.$$

Поэтому

$$T(t, z) = T_s - \gamma z - \frac{2p^\circ t}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_\zeta^\infty e^{-\mu^2} d\mu - \zeta e^{-\zeta^2} + 2\zeta^2 \int_\zeta^\infty e^{-\mu^2} d\mu \right\} =$$

$$= T_s - \gamma z - \frac{2p^\circ t}{\sqrt{\pi}} \left\{ (1 + 2\zeta^2) \int_\zeta^\infty e^{-\mu^2} d\mu - \zeta e^{-\zeta^2} \right\} =$$

$$= T_s - \gamma z - p^\circ t \left\{ (1 + 2\zeta^2) \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\zeta e^{-\mu^2} d\mu \right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \zeta e^{-\zeta^2} \right\}.$$

Выражение, стоящее под знаком фигурной скобки, представляет функцию от ζ [назовем ее $\psi(\zeta)$], которая легко может быть вычислена для различных значений ζ, так как для интеграла Гаусса $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\zeta e^{-\mu^2} d\mu$ имеются, как известно, таблицы. Итак

$$T(t, z) = T_s - \gamma z - p^\circ t \psi(\zeta).$$

При $\zeta = 0{,}5$ $\psi(\zeta) = 0{,}28$, т. е. на высоте $z = \sqrt{kt}$ сказывается 28% эффекта, имеющего место у земной поверхности в тот же момент времени.

Выше было указано, что величина K имеет порядок 10^3 (подсчеты дали $K = 1{,}3 \cdot 10^3$). Там же было указано, что это значение быть может является чрезмерно большим для многих случаев. Примем K вдвое меньше, т. е. положим $K = 625$. Тогда высота, до которой поверхностное изменение температуры распространяется в t секунд, вычислится по формуле $z^2 = 4kt$ или $z = \sqrt{4.625\, t} = 50\sqrt{t}$ *см* или $z = 0{,}5\sqrt{t}$ в *м*.

Следующая таблица дает толщу слоя и соответствующие промежутки времени в сек., за которые распространяется охлаждение равное 0,1 падения температуры у земной поверхности

Толща слоя	Время
50 *см*	1 сек.
1 *м*	4 „
5 „	100 „
10 „	$6^1/_2$ мин.
30 „	60 мин.— 1 час.
100 „	11 час.

Эти данные довольно хорошо согласуются с наблюдениями. Например, Джонсон (Johnson) в 1929 г. подробно исследовал ночную инверсию в Porton'е до высоты 17 *м* над земной поверхностью.

Если принять наше среднее значение коэффициента, то инверсия должна была бы распространиться до 17 *м* приблизительно через интервал времени в 20 *мин.* после образования ее у земной поверхности. Такой же результат дали и наблюдения Джонсона [1]).

Как известно, весьма больших значений может достигать вертикальный температурный градиент у самой земной поверхности, в послеполуденные часы в жаркие летние дни в слое от $^1/_2$ до 2 *м* высоты над земной поверхностью. Вертикальные температурные градиенты, как показывают наблюдения могут в 100—200 раз превосходить адиабатический градиент γ_a. Возникает вопрос, каково наибольшее возможное значение вертикального температурного градиента в этом приземном слое.

Было показано, что излучаемый горизонтальной поверхностью земли поток *w*-радиации (т. е. радиации, которая может быть поглощенной воздушным слоем содержащим 0,3 *мм* осадков) имеет выражение

$$-k\frac{\partial T}{\partial z}\ кал/см^2\ мин;$$

k при температуре воздушного столба 275° abs можно положить равным

$$\frac{115}{e},$$

где e — давление водяного пара в *мбр* и T — абсолютная температура на высоте z от поверхности земли. Как было показано, среднее количество притекающей радиации составляет 0,275 *кал/см*^{2} *мин.* Однако это количество, представляющее результат осреднения для дня и ночи и для различных широт оказывается слишком малым для интересующих нас случаев послеполуденных часов. Если принять его равным 0,290 *кал/см*^{2} *мин*, что более соответствует условиям послеполуденного летнего времени для Англии (Брунт), то, как было дано выше для потока диффузной *w*-радиации, распространяющегося вверх от земной поверхности, получим уравнение

$$-\frac{1}{2}k\frac{\partial T}{\partial z}=0{,}29.$$

Если вертикальный температурный градиент превзойдет величину, определенную этим уравнением, то количество радиации, уносимой вверх, возрастает по сравнению с тем количеством, которое соответствует стационарным условиям, а это возрастание радиации вызовет уменьшение вертикального температурного градиента до его критического значения.

---

[1]) Johnson — A study of the vertical gradient of temperature in the Atmosphere near the Ground. M. O. Geophysical Memor. № 46 (1929).

Таким образом наибольшее возможное значение вертикального температурного градиента у земной поверхности будет

$$0 \cdot 29 \cdot 2 \frac{1}{k} = \frac{0{,}29 \cdot 2e}{115},$$

что дает величину в 50 *e* раз большую сухого адиабатического градиента (10^{-4} °C на 1 *см*). Если $e = 10$ *мбр*, то наибольший возможный градиент будет в 500 раз больше адиабатического. Быть может при благоприятных условиях градиент может возрасти еще вдвое, т. е. превысить адиабатический в 1000 раз, что составит разность в 1°C на *см*.

Конечно нельзя утверждать, что существование таких градиентов динамически возможно. Здесь совершенно не учитывается устойчивость отдельных слоев и турбулентное перемешивание, которое в этом случае как раз должно сильно развиваться. Речь идет о наибольшем возможном с точки зрения лучистого равновесия вертикальном температурном градиенте тонкого слоя воздуха, прилегающего к земной поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. F. Albrecht.—Der Wärmeumsatz durch die Wärmestrahlung des Wasserdampfes in d. Atmosphäre. (Zeitschrift f. Geophysik, Jahrg. 6, S. 421, 1930).
2. D. Brunt.—Some Phenomena connected with the Transfer of Heat by Radiation and Turbulence in the Lower Atmosphere. [Proc. Roy. Soc. London. A. Vol. 124, p. 201 (1929) и A. Vol. 130 № 812. p. 98 (1930)].
3. R. Emden.—Über Strahlungsgleichgewicht und atmosphärische Strahlung. [Sitzungsberichte d. Bayerischen Akademie d. Wissenschaften. Math-Phys. Klasse 1913 (55)].
4. G. Hettner.—Über das Absorptionsspektrum des Wasserdampfes. (Annalen d. Physik 4. Folge, Bd. 55, 1918).
5. E. O. Hulburt.—Temperature of the Lower Atmosphere of the Earth. (The Physical Review. Vol. 38, № 10, 1932).
6. A. Friedmann.—Sur la distribution de la temperature aux diverses hauteurs. (Геофизический Сборник. Том I, Вып. I. 1914).
7. А. А. Фридман.—О распределении температуры с высотой при наличности лучистого теплообмена земли и солнца. (Известия Физической Обсерватории, год I, № 2. Петроград 1920).
8. R. Mügge & F. Möller.—Über Abkühlungen in d. freien Atmosphäre infolge d. langwelligen Strahlung des Wasserdampfes. (Meteorologische Zeitschrift. H. 3, 1932).
9. R. Mügge & F. Möller.—Zur Berechnung v. Strahlungsströmen und Temperaturänderungen in Atmosphären von beliebigem Aufbau. (Zeitschrift f. Geophysik. Jahrg. 8, H. 1/2)
10. Ramanathan.—Effect of radiation in the equilibrium of the higher layers of the troposphere and the nature of the transition from troposphere to stratosphere. (Beiträge z. Physik d. freien Atmosphäre. XVIII Bd. H. 3, 1932).
11. O. F. T. Roberts.—On the radioactive diffusion in the atmosphere. [Proc. Roy. Soc. Edinburgh 50, Part 3, № 19 (1930)].
12. G. S. Simpson.—Some studies in terrestrial radiation. (Memoirs of the Royal Meteorological Society. Vol. II, № 16, 1928).
13. G. S. Simpson.—Further Studies in terrestrial Radiation. (Memoirs of the Royal Meteorological Society. Vol. III. № 21, 1928.
14. G. S. Simpson.—The distribution of terrestrial Radiation. (Memoirs of the Royal Meteorological Society. Vol. III, № 23, 1929).

ГЛАВА V

Изменение температуры и давления с высотой в свободной атмосфере

§ 1. Основное уравнение статики. Основные уравнения гидродинамики как идеальной так и вязкой сжимаемой жидкости, выведенные во второй главе, принимают для случая равновесия жидкости следующую простую форму

$$\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p=\mathbf{F} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

или, в проекциях на координатные оси

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=X,\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=Y,\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=Z, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

где p — давление, ρ — плотность жидкости, вообще говоря, в различных точках различные, а $\mathbf{F}$ есть внешняя сила, отнесенная к единице массы, величины же X, Y, Z представляют проекции этой силы на оси координат.

Применим эти уравнения к случаю равновесия атмосферы, рассматривая последнюю, как покоющуюся сжимаемую жидкость. Единственной силой, которую надо принимать во внимание в этом случае, является сила тяжести, направленная вертикально вниз, причем ускорение, вызываемое этой силой, численно равно $g=9{,}81$ *м/сек*^{2}.

Направляя ось OZ вертикально вверх и принимая, удобства ради, что начало координат лежит на поверхности земли, получим для проекций силы тяжести, отнесенной к единице массы, выражения

$$X=0,\qquad Y=0,\qquad Z=-g. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Уравнения равновесия атмосферы принимают вид

$$\frac{\partial p}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial p}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Из первых двух уравнений следует, что p зависит только от z. Поэтому поверхности одинакового давления, называемые изобарическими поверхностями, будут горизонтальными плоскостями. Так как g мы будем считать временно постоянной величиной или зависящей только от z в силу убывания ускорения силы тяжести обратно пропорционально квадрату расстояния от центра земли, то из последнего уравнения (4) видно, что $\rho=-\frac{1}{g}\frac{\partial p}{\partial z}$ будет зависеть только от z, так что и изостерические поверхности (поверхности равного удельного об'ема следовательно равной плотности) будут тоже горизонтальными плоскостями. Наконец из уравнения Клапейрона

$$p=R\rho T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

следует, что температура T зависит только от z и следовательно изотермические поверхности тоже суть горизонтальные плоскости.

Мы приходим таким образом к выводу, что основными уравнениями статики является уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

выражающее в дифференциальной форме закон убывания давления с высотой, и уравнение Клапейрона (5). Подчеркнем, что полученные нами выводы нужно видоизменить в тех случаях, когда мы рассматриваем равновесие влажного воздуха или когда нужно учитывать изменение g в зависимости от горизонтальных координат x и y. На этих случаях мы несколько остановимся в дальнейшем.

Интегрируя полученное уравнение (6) в пределах от z_1 до z_2, получим

$$p(z_1) - p(z_2) = \int_{z_1}^{z_2} g\rho dz. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Правая часть этого равенства представляет очевидно вес цилиндрического вертикального столба воздуха, заключенного между горизонтальными плоскостями $z = z_1$, $z = z_2$ и имеющего поперечное сечение равное единице.

Принимая в частности $z_1 = 0$, $z_2 = z$, получим, обозначая p (0) через p_0:

$$p(z) = p_0 - \int_0^z g\rho dz.$$

Может случиться, что на некоторой высоте $z = h$ давление обратится в нуль. Эту высоту h мы будем тогда называть высотой атмосферы, а плоскость $z = h$ — верхней границей атмосферы. В этом случае мы имеем

$$p_0 = \int_0^h g\rho dz, \quad p(z) = \int_z^h g\rho dz, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

т. е. давление на какой-либо высоте z равно весу того столба воздуха, поперечного сечения равного единице, который простирается от высоты z до верхней границы атмосферы. При этом тот частный случай, когда давление p, уменьшаясь с высотой, стремится при $z \to \infty$ к 0, мы рассматриваем как частный случай атмосферы бесконечно большой высоты.

Пренебрегая изменением g с высотой, будем считать g постоянным.

Рассмотрим прежде всего тот частный случай, когда ρ есть постоянная величина, независящая от высоты (однородная атмосфера). Конечно в действительной атмосфере такое обстоятельство не имеет места и предположение о постоянстве ρ может быть использовано разве лишь для приближенных расчетов в случае очень тонких слоев.

Интегрируя уравнение (6) в предположении $\rho = \rho_0 = \text{const}$ и принимая во внимание, что $p = p_0$ при $z = 0$, получим

$$p = p_0 - \rho_0 g z, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

так что в однородной атмосфере давление есть линейная функция от высоты. Давление обращается в нуль на высоте

$$h_0 = \frac{p_0}{g\rho_0}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

которая носит поэтому название „высоты однородной атмосферы". В силу уравнения Клапейрона мы получим другое выражение для h_0

$$h_0 = \frac{RT_0}{g}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Величина h_0, не имея физического значения, тем не менее очень часто встречается при различного рода вычислениях. Для температуры $T_0 = 273°$ С ее численным значением является

$$h_0 = \frac{287 \cdot 273}{9{,}8} \simeq 7990 \text{ м} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

Возвращаясь к общему случаю, заменим в формуле (6) плотность ρ выражением, получающимся для нее из уравнения Клапейрона $p = R\rho T$; в результате получим

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{gp}{RT}$$

или

$$\frac{\partial \ln p}{\partial z} = -\frac{g}{RT}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Интегрируя это уравнение от 0 до z, получим

$$\ln p - \ln p_0 = -\frac{g}{R}\int_0^z \frac{dz}{T} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

и, избавляясь от логарифмов,

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{g}{R}\int_0^z \frac{dz}{T(z)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Полученное равенство называется барометрической формулой. Она позволяет, зная распределение температуры с высотой, вычислить зависимость давления от высоты. После этого из уравнения Клапейрона (5) нетрудно найти и зависимость плотности от высоты.

Разберем несколько частных случаев.

Предположим сперва, что температура не зависит от высоты $T = T_0 = \text{const}$ (изотермическая атмосфера). В этом случае очевидно получим формулу

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{gz}{RT_0}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

показывающую, что давление зависит от высоты по экспоненциальному закону. Отметим, что при $z = h_0 = \frac{RT_0}{g}$ будем иметь $p(h) = \frac{p_0}{e}$, т. е. на высоте однородной атмосферы давление в e раз меньше, чем на земле.

Очевидно, высота изотермической атмосферы равна бесконечности. Распределение плотности в изотермической атмосфере определяется формулой

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-\frac{gz}{RT_0}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

получающейся из (16) и уравнения Клапейрона (5). В этой формуле ρ_0 обозначает плотность на поверхности земли. Таким образом плотность в изотермической атмосфере меняется по тому же закону, что и давление.

Интегрируя равенство (13) в пределах от z_1 до z_2 и считая, что в пределах этого слоя температура не меняется, получим

$$\ln p(z_1) - \ln p(z_2) = \frac{g}{RT}(z_2 - z_1)$$

или, обозначая $p(z_1) = p_1$ и $p(z_2) = p_2$:

$$z_2 - z_1 = \frac{RT}{g}\ln\frac{p_1}{p_2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Подставляя здесь $T=273\left(1+\frac{t}{273}\right)$, где t — обычная температура в °C, и полагая $\frac{p_1}{p_2}=n$, будем иметь

$$z_2-z_1=7990\ln n+\frac{t}{273}7990\ln n. \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

Эта формула позволяет очень просто определять толщину изотермического слоя по давлениям на его границах. В частности таким способом можно производить обработку метеорограмм, доставляющих нам совместные значения температуры и давления. Разбив кривую температуры на небольшие участки, по возможности с постоянным температурным градиентом и снимая с метеорограммы значения давлений, соответствующих концам этих участков и значения средних температур этих участков, определяют по предыдущей формуле толщины слоев воздуха, соответствующих взятым участкам температур. Зная эти толщины, легко установить для каждой высоты соответствующие ей значения давления и температуры. Относительно ошибки, делаемой при замене некоторого слоя изотермическим, мы говорим ниже.

Для небольших высот формулу (19) можно упростить еще более. А именно воспользуемся формулой

$$\ln\frac{p_1}{p_2}=\ln\frac{(p_1+p_2)+(p_1-p_2)}{(p_1+p_2)-(p_1-p_2)}=\ln\left(1+\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2}\right)-\ln\left(1-\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2}\right);$$

так как

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots\right)-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\ldots\right)=$$

$$=2x+\frac{2}{3}x^3+\ldots,$$

то приближенно будем иметь

$$\ln\frac{p_1}{p_2}=2\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2},$$

причем ошибка не превосходит 1% даже для слоев воздуха в 2 *км* толщиной.

Формула (18) принимает поэтому вид

$$z_2-z_1=16\,000\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2}(1+0{,}00366\,t). \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

Эта формула известна под именем формулы Бабине.

В частности ею можно воспользоваться для вычисления барометрической ступени, т. е. высоты того слоя воздуха, разность давлений на концах которого составляет 1 *мбр*. В этом случае без большой погрешности можно принять в знаменателе формулы Бабине $p_1=p_2=p$, в результате чего получим для барометрической ступени формулу

$$z_2-z_1=\frac{8000}{p}(1+0{,}00366\,t) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Например, при температуре $t=0$ °C и при давлении 1000 *мбр* барометрическая ступень равна 8 *м*; при $p=900$ *мбр* она равна 8,89 *м* и т. д.

В качестве второго частного случая рассмотрим тот, когда температура убывает с высотой по линейному закону

$$T=T_0-\gamma z, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

где γ — температурный градиент, считаемый постоянным.

Подставляя это выражение в (15), в силу равенства

$$\int_0^z \frac{dz}{T} = \int_0^z \frac{dz}{T_0 - \gamma z} = -\frac{1}{\gamma} \ln \frac{T_0 - \gamma z}{T_0},$$

получим

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\gamma}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

Наконец, уравнение Клапейрона позволяет определить

$$\rho(z) = \frac{p(z)}{RT(z)} = \rho_0 \left(1 - \frac{\gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\gamma} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Нетрудно выразить p и ρ в функции T:

$$p = p_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\gamma}}, \qquad \rho = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\gamma} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

или ρ и T в функции p:

$$T = T_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R\gamma}{g}}, \qquad \rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1 - \frac{R\gamma}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Так как кривые $y = Cx^n$ называются политропами, то атмосферу с постоянным вертикальным градиентом называют политропной атмосферой. Высота ее равна $z = \frac{T_0}{\gamma}$, так как на этой высоте давление p обращается в нуль.

Если температурный градиент равен адиабатическому температурному градиенту $\gamma = \gamma_a = \frac{Ag}{c_p}$, то соотношение между p и T принимает вид

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\gamma_a}} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{c_p}{AR}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

совершенно аналогичный формуле Пуассона (гл. III, § 3). Однако, нужно подчеркнуть коренную разницу между формулой (27) и формулой Пуассона. Последняя определяет ту связь, которая существует между давлением и температурой некоторой определенной частицы при ее адиабатических изменениях с течением времени; формула же (27) определяет связь между давлением и температурой вдоль некоторой вертикали в один определенный момент времени и вне связи с тем, какие процессы будут происходить с рассматриваемой колонной воздуха.

Для расчета давления на высоте z по формуле (25) достаточно знать давление и температуру на земле (p_0 и T_0) и температуру T на высоте z, причем γ определяется по формуле

$$\gamma = \frac{T_0 - T}{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Если задано распределение температуры с высотой, причем температура меняется, то мы можем разбить весь столб воздуха промежуточными точками $z_1, z_2, \ldots z_{k-1}$, температуры в которых обозначим через $T_1, T_2, \ldots T_{k-1}$ на k слоев, в каждом из которых можно уже, с некоторым приближением, принять, что температура падает линейно,

причем вертикальный температурный градиент в этих слоях равен соответственно

$$\gamma_1 = \frac{T_1 - T_0}{z_1} \qquad \gamma_2 = \frac{T_2 - T_1}{z_2 - z_1} \quad \ldots \quad \gamma_k = \frac{T - T_{k-1}}{z - z_{k-1}}.$$

Тогда очевидно будем иметь

$$p_1 = p_0\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\gamma_1}}, \quad p_2 = p_1\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{g}{R\gamma_2}}, \ldots \quad p_k = p_{k-1}\left(\frac{T}{T_{k-1}}\right)^{\frac{g}{R\gamma_k}},$$

и, перемножая эти равенства, получим приближенную формулу

$$p = p_0\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\gamma_1}}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{g}{R\gamma_2}} \ldots \left(\frac{T}{T_{k-1}}\right)^{\frac{g}{R\gamma_k}} \ldots \quad (29)$$

Возвращаемся к общей барометрической формуле

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{g}{R}\int_0^z \frac{dz}{T(z)}} \ldots \quad (30)$$

Чтобы придать этой формуле более наглядный вид, введем „среднюю температуру T_m барометрической формулы“, определив ее равенством

$$\frac{z}{T_m} = \int_0^z \frac{dz}{T(z)}, \ldots \quad (31)$$

тогда барометрическая формула принимает вид формулы для изотермической атмосферы

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{gz}{RT_m}} \ldots \quad (32)$$

Величина T_m есть так называемая средняя гармоническая, а не обычная средняя арифметическая

$$T'_m = \frac{1}{z}\int_0^z T(z)dz. \ldots \quad (33)$$

Можно показать, что всегда, за исключением случая $T = \text{const}$, будет

$$T'_m > T_m. \ldots \quad (34)$$

Это вытекает из так называемого неравенства Шварца-Буняковского:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx,$$

справедливого для любых двух функций $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемых вместе с их квадратами [1]), причем при непрерывности функций $f(x)$ и $g(x)$

---

[1]) Доказательство этого неравенства весьма просто. Обозначим $A = \int_a^b f^2(x)dx$, $B = \int_a^b f(x)g(x)dx$, $C = \int_a^b g^2(x)dx$ и рассмотрим, вводя параметр z, выражение $I(z) = \int_a^b [f(x) + zg(x)]^2 dx = A + 2Bz + Cz^2$. Очевидно I при всех z не отрицательно, но, как известно, это может быть только в случае, когда $AC - B^2 \geq 0$. Если $AC - B^2 = 0$, то $A + 2Bz + Cz^2$ имеет двойной корень z_0 и $I(z_0) = 0$, что может быть только при $f(x) + z_0 g(x) \equiv 0$.

знак равенства может иметь место только, когда отношение $\frac{g(x)}{f(x)}$ есть постоянная величина.

Приняв в этом неравенстве $f(x)=\sqrt{T(x)}$, $g(x)=\frac{1}{\sqrt{T(x)}}$, получим

$$z^2 \leq \int_0^z T(z)dz \int_0^z \frac{dz}{T(z)}$$

или, при наших обозначениях,

$$1 \leq \frac{T'_m}{T_m}, \quad T_m \leq T'_m,$$

причем знак равенства может иметь место только для $T(z)=\text{const}$.

Для случая линейного падения температуры с высотой $T=T_0-\gamma z$ очень легко оценить ошибку, которую мы делаем в определении p, заменяя T_m на T'_m. В рассматриваемом случае очевидно имеем

$$T_m' = T_0 - \frac{\gamma z}{2} = \frac{T_0+T}{2}, \quad \gamma = \frac{T_0-T}{z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Для средней же температуры барометрической формулы будем иметь

$$\frac{z}{T_m} = \int_0^z \frac{dz}{T_0-\gamma z} = -\frac{1}{\gamma}\ln\left(1-\frac{\gamma z}{T_0}\right) = -\frac{1}{\gamma}\ln\frac{T}{T_0} \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

Введя обозначение

$$\alpha = \frac{T_0-T}{T_0+T} = \frac{\gamma z}{2T_m'}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

заметим, что

$$\ln\frac{T}{T_0} = \ln\frac{T_0+T-(T_0-T)}{T_0+T+(T_0-T)} = \ln(1-\alpha) - \ln(1+\alpha) =$$

$$= -2\left(\alpha + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} + \ldots\right).$$

Поэтому равенство (36) принимает вид

$$\frac{z}{T_m} = \frac{2\alpha}{\gamma}\left(1+\frac{\alpha^2}{3}+\frac{\alpha^4}{5}+\ldots\right) = \frac{z}{T_m'}\left(1+\frac{\alpha^2}{3}+\frac{\alpha^4}{5}+\ldots\right)$$

или

$$T_m' = T_m\left(1+\frac{\alpha^2}{3}+\frac{\alpha^4}{5}+\ldots\right). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

Получилось, как и должно быть, $T_m' > T_m$. Величина α всегда мала. Даже при разности температур $T_0 - T = 60\,°C$ и при $T_m' = 240°$, что дает $T_0 = 270°$, $T = 210°$ мы имеем $\alpha = \frac{1}{8}$, $\frac{\alpha^4}{5} < 5.10^{-5}$ и следовательно $T_m \frac{\alpha^4}{5} < 0{,}02\,°C$. Поэтому с совершенно достаточной во всех вычислениях точностью мы имеем

$$T_m' = T_m\left(1+\frac{\alpha^2}{3}\right)$$

и по той же причине

$$T_m = T_m'\left(1-\frac{\alpha^2}{3}\right). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

или, вставляя значение α,

$$T_m = T_m' - \frac{\gamma^2 z^2}{12 T_m'}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Эта простая формула дает возможность вычислять по средней арифметической температуре среднюю температуру барометрической формулы T_m для случая постоянного температурного градиента.

Теперь легко оценить и ошибку, делаемую нами в определении p. В самом деле, из формулы (32) следует, что, если средняя температура столба воздуха получит приращение ΔT_m, то давление p получает приращение

$$\Delta p = p_0 \frac{gz\Delta T_m}{RT_m^2} e^{-\frac{gz}{RT_m}} = \frac{gpz\Delta T_m}{RT_m^2}.$$

В нашем случае, обозначая через p' то давление, которое получается на высоте z при применении средней арифметической, будем иметь

$$p' - p \simeq \frac{gpz(T'_m - T_m)}{RT_m^2} \simeq \frac{gpz\alpha^2}{3RT_m} \simeq \frac{gp\gamma^2 z^3}{12RT_m^3} \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

Нижеследующая табличка показывает величину расхождений $T_m' - T_m$ и $p' - p$ при различных γ и z и при $p_0 = 1000$ *мбр*, $T_0 = 273°$:

	км	2.5	5.0	7.5	10.0
$\gamma = 0{,}005° \frac{C}{м}$	$(T_m' - T_m)$°C	0.05	0.20	0.47	0.84
	$p' - p$ *мбр*	0.04	0.26	0.68	1.18
$\gamma = 0{,}01° \frac{C}{м}$	$(T_m' - T_m)$°C	0.20	0.84	1.99	3.73
	$p' - p$ *мбр*	0.18	1.18	3.10	5.55

Отсюда можно вывести заключение, что применение средней арифметической вместо средней гармонической допустимо разве только лишь для слоев воздуха не толще 5 километров. При большей толщине слоя рекомендуется разбить его на несколько отдельных слоев, например k, толщины которых пусть будут $h_1, h_2, \ldots h_k$, а средние температуры (арифметические) $T_1', T_2' \ldots T'_k$, тогда будем иметь с достаточной точностью

$$p = p_0 e^{-\frac{g}{R}\left[\frac{h_1}{T_1'} + \frac{h_2}{T_2'} + \ldots + \frac{h_k}{T_k'}\right]} \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

Здесь очевидно скомбинировано применение средней арифметической и средней гармонической. Для вычисления средних арифметических, например

$$T_1' = \frac{1}{h_1} \int_0^{h_1} T(z)dz,$$

можно воспользоваться обычным правилом трапеций.

До сих пор мы не учитывали влияния влажности воздуха и убывания силы тяжести с высотой на изменение давления с высотой. Примем теперь во внимание эти два обстоятельства. Вывод основывается на тех же двух уравнениях. Первое из них есть

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

где однако теперь нужно принять g зависящим от высоты z и именно, убывающим с высотою обратно пропорционально квадрату расстояния до центра земли [1]). Обозначая средний радиус земли через a, будем иметь

$$g = g_0 \frac{a^2}{(a+z)^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (44)$$

где g_0 — ускорение силы тяжести на уровне моря — зависит от широты места φ. Согласно формуле Гельмерта имеем

$$g_0 = 9{,}80616\,(1 - 0{,}002644 \cos 2\varphi + 0{,}000007 \cos^2 2\varphi). \quad \ldots \quad (45)$$

Вторым из нужных нам уравнений является уравнение Клапейрона

$$p = R\rho T, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (46)$$

причем газовая постоянная R для влажного воздуха имеет выражение

$$R = \frac{R_0}{1 - 0{,}377 \frac{e}{p}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (47)$$

где R_0 — газовая постоянная для сухого воздуха, e — упругость водяных паров.

Воспользовавшись всеми этими уравнениями после небольших преобразований, получаем

$$\frac{\partial \ln p}{\partial z} = -\frac{g_0}{R_0 T}\left(1 - 0{,}000000314\, z\right)\left(1 - 0{,}377 \frac{e}{p}\right), \quad \ldots \quad (48)$$

где T и e мы должны считать известными функциями от z. Полученное уравнение можно проинтегрировать последовательными приближениями. Именно, сначала интегрируем уравнение

$$\frac{\partial \ln p}{\partial z} = -\frac{g_0}{R_0 T};$$

полученное значение $p(z)$ подставляем в уравнение (48), которое интегрируем еще раз. Но обычно ограничиваются применением приближенной формулы, которую получают путем замены величин, входящих в правую часть уравнения (48), их средними арифметическими значениями. Обозначая эти средние значения соответственно через

$$T_m = 273\,(1 + 0{,}00366\, t_m), \quad z_m, \quad \left(\frac{e}{p}\right)_m,$$

вводя в формулу (48) вместо натуральных логарифмов десятичные ($\ln p = 2{,}3026 \lg_{10} p$) и замечая, что

$$\frac{287 \cdot 273 \cdot 2{,}3026}{9{,}806} = 18400,$$

получаем формулу

$$\frac{\partial b g_{10} p}{\partial z} = -\frac{(1 - 0{,}000000314 z_m)\left[1 - 0{,}377\left(\frac{e}{p}\right)_m\right](1 - 0{,}002644 \cos 2\varphi)}{18400\,(1 + 0{,}00366\, t_m)}.$$

Интегрируя это равенство в пределах от z_1 до z_2, получим

$$\lg_{10} \frac{p_1}{p_2} = \frac{1 - 0{,}377\left(\frac{e}{p}\right)_m}{18400\,(1 + 0{,}00366 t_m)}\,(1 - 0{,}000000314\, z_m)\,[1 - 0{,}002644 \cos 2\varphi](z_2 - z_1). \quad (49)$$

Вычисление по этой формуле значительно упрощается при употреблении особых специально для этой цели составленных таблиц. Нужно,

---

[1]) В § 4 мы еще остановимся на выводе этого уравнения в том случае, когда принимается во внимание переменность ускорения силы тяжести g.

однако, отметить, что пользование этой формулой целесообразно только при очень точных вычислениях, когда исходные данные известны с достаточной точностью, например, получились путем осреднения ряда наблюдений. В большинстве же случаев влиянием влажности и изменения силы тяжести можно пренебречь в сравнении с имеющейся неточностью в знании распределения температуры с высотою. В этом случае мы получим формулу

$$\lg_{10} p_1 - \lg_{10} p_2 = \frac{z_2 - z_1}{18400\,(1 + 0{,}00366\, t_m)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

Смотря по тому, какие величины, входящие в формулу (49) или более грубую (50), нам известны, и какая ищется, мы получаем возможность решать при помощи этой формулы различные задачи.

Если известна высота столба, средние его температура и влажность и одно из давлений p_1 или p_2, то мы получаем возможность определить другое давление. Выше подробно рассматривался вопрос об определении давления наверху, когда известно давление на поверхности земли. Но может возникнуть и обратный вопрос, когда речь идет о приведении давления к уровню моря или к какому-либо другому уровню.

Когда известны давления на обоих границах воздушного столба и распределение температуры и влажности с высотой и ищется высота этого столба, то мы получаем задачу о барометрическом нивеллировании.

Во многих случаях бывает важно знать среднюю температуру столба воздуха. Ее можно вычислить по формуле (50), если известны давления на уровнях, ограничивающих этот столб воздуха.

Наконец мы упоминали уже по поводу формулы (19), в сущности эквивалентной формуле (50), о применении ее для обработки метеорограмм. В этом случае мы имеем заданными давления на концах некоторого слоя и распределение температуры в зависимости от давления: требуется определить толщину этого слоя. Об этой задаче, грубо приближенное решение которой указано в связи с формулой (19), мы еще подробно будем говорить в § 4.

§ 2. Зависимость между изменениями давления на земле и на высоте и средней температурой воздушного столба. Барометрическая формула

$$p = p_0 e^{-\frac{g}{R}\int_0^h \frac{dz}{T}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

в которую, вводя среднюю температуру T_m формулой

$$T_m = \frac{h}{\int_0^h \frac{dz}{T}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

можно также переписать в виде

$$p_h = p_0 e^{-\frac{gh}{RT_m}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

позволяет установить зависимость между изменениями давления на верхнем и нижнем концах столба воздуха высотой h и изменением средней температуры T_m этого столба воздуха.

Действительно, прологарифмировав предыдущее выражение, получим

$$\ln p_h = \ln p_0 - \frac{gh}{RT_m}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

Положим теперь, что через некоторый промежуток времени Δt значения давлений на высотах $z = 0$, $z = h$ и значение средней темпера-

туры столба воздуха высотой h изменились и сделались соответственно равными $p_0+\delta p_0$, $p_h+\delta p_h$, $T_m+\delta T_m$, где очевидно δp_0 и δp_h суть местные изменения давления за промежуток времени Δt.

Подставляя эти новые значения величин p_h, p_0 и T_m в формулу (54), получим

$$\ln(p_h+\delta p_h)=\ln(p_0+\delta p_0)-\frac{gh}{R}\frac{1}{T_m+\delta T_m}.$$

Вычитая из этого равенства формулу (54), после небольших преобразований получим

$$\ln\left(1+\frac{\delta p_h}{p_h}\right)=\ln\left(1+\frac{\delta p_0}{p_0}\right)+\frac{gh}{RT_m}\frac{\delta T_m}{T_m+\delta T_m}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Если можно пренебречь квадратами величин

$$\frac{\delta p_h}{p_h},\ \frac{\delta p_0}{p_0}\ \text{и}\ \frac{\delta T_m}{T_m}$$

в сравнении с их первыми степенями, то окончательно получится

$$\frac{\delta p_h}{p_h}=\frac{\delta p_0}{p_0}+\frac{gh}{RT_m{}^2}\delta T_m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Мы нарочно столь подробно остановились на выводе этой формулы, чтобы подчеркнуть, что она применима во всех тех случаях, когда в начальном и конечном состоянии рассматриваемой колонны воздуха имеет место барометрическая формула. Формула (56) будет справедлива при этом последнем предположении, даже в том случае, если мы рассматриваем два состояния колонны воздуха для двух моментов, разделенных, например, промежутком времени в один месяц. За этот промежуток времени весь воздух в столбе будет заменен другим, с другим распределением температуры, но формула (56) тем не менее, будет иметь место. Отсюда следует, что ни в коем случае нельзя говорить о причинной зависимости изменения давления p_h от изменения давления p_0 или наоборот. Оба изменения давления как δp_0 так и δp_h, а равно и изменение средней температуры δT_m являются одновременными следствиями процессов, протекающих в атмосфере. При этом каковы бы эти процессы не были, величины δp_0, δp_h и δT_m удовлетворяют уравнению (56).

Однако, зная две из этих величин и выводя из уравнения (56) третью, мы можем высказать только некоторую догадку о процессах, происходящих в атмосфере, так как к одним и тем же значениям δp_0, δp_h и δT_m могут привести самые разнообразные процессы.

Разберем пару примеров. Пусть, например, средняя температура всего столба воздуха за некоторый небольшой промежуток времени Δt не изменилась, так что $\delta T_m=0$; в этом случае формула (56) дает

$$\delta p_0=\frac{p_0}{p_h}\delta p_h, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

откуда видно, что увеличение давления наверху на величину δp_h сопровождается гораздо большим увеличением давления внизу. Так, например, если на высоте $h=12$ *км* давление изменилось от 200 до 201 *мбр*, так что $p_h=200$ *мбр*, $\delta p_h=1$ *мбр*, а давление на земле равно $p_0=1000$ *мбр*, то изменение давления на земле будет равно $\delta p_0=5$ *мбр*. Эти изменения можно представить себе образовавшимися таким образом: допустим например, что на уровне 12 *км* притекли со стороны холодные массы воздуха в таком количестве, что давление под ними должно увеличиться на 5 *мбр*; воздух ниже 12 *км* под этим добавочным давлением осядет, так что из вновь притекших масс часть окажется ниже 12-километрового уровня и только часть окажется выше этого уровня; какая именно часть

притекших масс осядет ниже 12 *км* зависит от характера притока тепла; если бы процесс происходил адиабатически, то воздух, при опускании, приходил бы на каждый уровень с температурой большей той, которая имелась на этом уровне первоначально, т. е. средняя температура воздуха T_m должна была бы повыситься. Для того, чтобы средняя температура воздуха осталась бы без изменения, необходимо чтобы колонна воздуха потеряла некоторое количество тепла например, на испарение находящихся в этой колонне капелек воды. В случае когда $\delta T_m = 0$, 80% вновь притекших выше 12-километрового уровня масс опустится ниже этого уровня и только 20% окажется выше него, поэтому давление на высоте 12 *км* повысится только на 1 *мбр*, а давление на земле на 5 *мбр*. Но можно представить себе и другие процессы, которые приводят к тем же самым результатам, например, можно представить себе что все притекающие массы входят в рассматриваемую колонну воздуха с боков, притом 20% выше 12-километрового уровня, а 80% ниже и т. д.

В качестве второго примера рассмотрим тот, когда давление на земле не меняется, так что $\delta p_0 = 0$. В этом случае формула (56) дает

$$\delta p_h = \frac{g h p_h}{R T_m^2} \delta T_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

и следовательно с увеличением средней температуры воздушного столба увеличивается и давление на верхней границе этого столба.

Рассмотрим, например, такой процесс. Пусть в силу нагревания нижних слоев воздуха происходит его расширение, тогда очевидно каждая частица воздуха смещается вверх и давление в каждой точке увеличится в силу того, что над каждым уровнем окажется воздуха больше чем было первоначально; давление же на земле остается без изменения, ибо мы предполагаем, что никакого притока воздуха со стороны или оттока в сторону не происходит и потому вес столба воздуха, лежащего над квадратной единицей поверхности земли, остается без изменения.

В качестве примера возьмем $p_0 = 1000$ *мбр*, $T_m = 273°$, $h = 1$ *км*, $p_h = 883$ *мбр*; тогда по формуле (58) повышению средней температуры $\delta T_m = 1°$ С отвечает повышение давления $\delta p_h = 0{,}40$ *мбр*. Легко подсчитать, далее, насколько при этом расширении воздуха переместятся вверх частицы воздуха, лежавшие первоначально на уровне 1 *км*. В самом деле по барометрической формуле на высоте $z = h$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho_h = -g\frac{p_h}{RT_h};$$

с другой стороны, те частицы, которые первоначально находились на уровне $z = h$ и которые после расширения воздуха сместились вверх на величину, которую мы обозначим через δh, сохраняют свое первоначальное давление p_h, ибо над ними и после расширения воздуха лежит та же масса воздуха, что и первоначально. Поэтому очевидно имеем приближенную формулу

$$\delta h = \frac{\delta p_h}{g\rho_h} = \frac{\delta p_h \cdot RT_h}{g p_h} = \frac{T_h h}{T_m^2}\,\delta T_m \simeq \frac{h}{T_m}\delta T_m,$$

откуда, при выбранных значениях величин, получим $\delta h = 3{,}67$ *м*.

Разобранный нами процесс об'ясняет суточный ход давления воздуха на горных станциях в спокойные безоблачные дни. Если давление внизу остается неизменным, то в спокойные безоблачные дни по формуле (58) должно быть $\delta p_h > 0$ в часы после полудня, ибо в силу нагревания воздуха средняя температура столба воздуха повышается: $\delta T_m > 0$; в предутренние же часы должно быть $\delta p_h < 0$, ибо $\delta T_m < 0$. И действительно,

суточный ход давления на горных станциях показывает при упомянутых выше условиях минимум в утренние часы и максимум в часы после полудня.

Нет нужды повторять, что и при других процессах давление на земле может оказаться неизменяющимся.

Рассмотрим в качестве третьего примера тот, когда давление на верхней границе нашего столба остается неизменным, так что $\delta p_h = 0$. В этом случае формула (56) дает

$$\delta p_0 = -\frac{g h p_0}{R T_m^2} \delta T_m, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

откуда видно, что увеличение средней температуры всей воздушной колонны влечет за собой уменьшение давления на земле, и, наоборот, уменьшение первой вызывает увеличение последнего.

Одним из процессов, к которым применима только что полученная формула, является прорыв холодных масс воздуха. Предположим, по Кеппену[1]), что прорыв этот происходит таким образом, что холодная масса, перемещаясь строго горизонтально, замещает теплые массы в рассматриваемой колонне воздуха. Если в некоторый момент высота холодной массы над рассматриваемым местом будет равна h, то на высоте h никакого изменения не будет и следовательно мы можем применить формулу (59). Так например, если $p_0 = 1000$ *мбр*, $T_m = 273°$, $h = 3$ *км*, $\delta T_m = -5°$ C, то формула (59) дает $\delta p_0 = 6{,}87$ *мбр*.

Можно применить полученную формулу и в обратном порядке

$$h = -\frac{R T_m^2}{g p_0} \frac{\delta p_0}{\delta T_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

для определения высоты прорвавшихся холодных масс воздуха, если известны δp_0 и δT_m.

Во всех рассмотренных примерах мы разбирали процессы в общих чертах, в соответствии с тем, что нас интересовала только общая зависимость (56), связывающая между собой величины δp_0, δp_h и δT_m, являющиеся результатом каких-то атмосферных процессов, фиксировать которые ближе, зная только эти величины, мы не можем

§ 3. Изменения состояния вертикального столба воздуха при адиабатических его изменениях. Для более детального изучения изменения состояния вертикального столба воздуха мы должны сделать определенное предположение о том процессе, в результате которого это изменение получается.

Мы сейчас подробно рассмотрим один частный процесс изменения состояния вертикального столба воздуха[2]).

Рассмотрим вертикальную колонну сухого воздуха, площадь поперечного сечения которой, всюду одинаковую, примем, простоты ради, равной 1 *кв. м*. Допустим, что через боковую поверхность этой колонны не происходит ни притока ни оттока воздуха, так что совершенно не изменяя процесса можно было бы считать нашу колонну воздуха ограниченной с боков твердыми стенками. Предположим далее, что весь процесс происходит адиабатически, так что приток тепла от каких бы то ни было причин (радиации, теплопроводности, турбулентного перемешивания, конденсации и испарения) отсутствует.

Элементы, относящиеся к начальной стадии процесса, обозначим через $p(z)$, $T(z)$ и $\rho(z)$ для высоты z; через p_0, T_0 и ρ_0 для $z = 0$ (поверхности земли) и через p_h, T_h и ρ_h для уровня $z = h$.

---

[1]) См. напр. H. Koschmieder, Dynamische Meteorologie, S. 57, 1933.

[2]) См. напр. L. Steiner, Druck und Temperaturänderungen in der Atmosphaere, Meteorologische Zeitschrift, 1926, S. 271—276; C. G. Rossby, Zustandsänderungen in atmosphärischen Luftsäulen, Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre, Bd. XIII, S. 163—174, 1927 и H. Koschmieder, Dynamische Meteorologie, S. 120.

Предположим теперь, что в нашей колонне выше уровня $z=h$ происходит увеличение воздушных масс. Тогда начнется процесс оседания воздуха в нашей колонне, причем будут изменяться и температуры частиц воздуха. Рассмотрим то распределение элементов, которое получится после окончания процесса. В этой окончательной стадии процесса обозначим величины элементов, отвечающие высоте z, через $T'(z)=T(z)+\delta T(z)$, $p'(z)=p(z)+\delta p(z)$, $\rho'(z)=\rho(z)+\delta\rho(z)$, где знак δ указывает на местное изменение элемента.

Напротив полное или индивидуальное изменение элемента мы будем обозначать знаком d. Частицы, находившиеся в начале процесса на уровне z, будут в конце процесса лежать на уровне z'. Для ясности мы будем обозначать изменение z-ой координаты какой-либо частицы за время процесса через $d_i z=z'-z$.

Если f какой-либо из элементов, характеризующих частицу, то между полным и местным изменением f будет иметь место следующая очевидная зависимость

$$df=f'(z')-f(z)=f'(z')-f(z')+f(z')-f(z)=\delta f(z')+\int_z^{z'}\frac{\partial f}{\partial z}dz, \qquad (61)$$

или, имея в виду малость смещений частиц $z'-z$, приближенно

$$df(z)=\delta f(z)+\frac{\partial f}{\partial z}d_i z. \qquad (62)$$

Наша задача состоит в вычислении местных и индивидуальных изменений давления и температуры. Мы предполагаем при этом конечно, что никакого перемешивания воздуха не происходит, так что частица, лежащая ниже другой частицы, и после окончания процесса будет лежать ниже последней. Но тогда ясно, что поскольку при равновесии давление какой-либо частицы равно весу столба воздуха (единичного поперечного сечения), лежащего над этой частицей, постольку индивидуальное изменение давления всех частиц, лежащих первоначально между уровнями $z=0$ и $z=h$, должно быть одинаковым

$$dp(z)=dp_0=dp_h \qquad (63)$$

и должно быть равно весу той массы воздуха, которая была в результате процесса прибавлена к рассматриваемой нами колонне воздуха. Так как на поверхности земли $z'=z=0$, то ясно, что для поверхностных частиц местное и индивидуальное изменения всех элементов, в частности давления, совпадают

$$dp_0=\delta p_0 \qquad (64)$$

Итак при притоке масс выше уровня $z=h$, все частицы ниже этого уровня получают одно и то же индивидуальное изменение давления, равное притом местному изменению на поверхности земли.

Теперь легко вычислить индивидуальное изменение температуры. В силу предположения об адиабатичности процесса, имеем что

$$d[c_p \lg T(z)-AR\lg p(z)]=0, \qquad (65)$$

откуда легко получим, что

$$dT=\frac{ART\delta p_0}{c_p p} \qquad (66)$$

Из уравнения Клапейрона $p=R\rho T$ легко теперь вычислить индивидуальное изменение плотности

$$d\rho=\frac{1}{R}d\frac{p}{T}=\frac{1}{RT}dp-\frac{p}{RT^2}dT, \qquad (67)$$

откуда, пользуясь формулой $c_p - AR = c_v$, получим

$$d\rho = \frac{c_v\,\delta p_0}{RTc_p} = \frac{\delta p_0}{\varkappa RT} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (68)$$

Легко теперь вычислить смещение какой-либо частицы $d_i z = z' - z$. В самом деле, рассмотрим слой воздуха толщиной dz, лежащий между уровнями z и $z + dz$, масса этого слоя равна $\rho(z)dz$; после окончания процесса частицы, составлявшие этот слой, составят слой воздуха толщиной dz', масса которого равна $\rho'(z')dz'$ и так как масса указанного слоя не может измениться, то

$$\rho'(z')\,dz' = \rho(z)dz, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69)$$

откуда

$$dz' = \frac{\rho(z)}{\rho'(z')}\,dz,$$

но в силу (68)

$$\rho'(z') = \rho(z) + \frac{1}{\varkappa RT(z)}\,\delta p_0 = \rho(z)\left[1 + \frac{1}{\varkappa p(z)}\,\delta p_0\right];$$

поэтому

$$dz' = \left[1 - \frac{1}{\varkappa p(z)}\,\delta p_0\right] dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

и после интегрирования в пределах от 0 до z

$$z' - z = -\frac{\delta p_0}{\varkappa}\int_0^z \frac{dz}{p(z)}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

Теперь нетрудно на основании формулы (62) вычислить локальные изменения температуры и давления; обозначим для краткости температурный градиент через γ

$$-\frac{\partial T}{\partial z} = \gamma, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (72)$$

тогда будем иметь

$$\delta T = dT + \gamma(z' - z) = \left\{\frac{ART}{c_p\,p} - \frac{\gamma}{\varkappa}\int_0^z \frac{dz}{p}\right\}\delta p_0 \quad \ldots\ldots \quad (73)$$

и воспользовавшись тем, что

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho = -\frac{gp}{RT},$$

$$\delta p = dp + \frac{gp}{RT}(z' - z) = \left\{1 - \frac{gp}{\varkappa RT}\int_0^z \frac{dz}{p}\right\}\delta p_0 \quad \ldots\ldots \quad (74)$$

Вычислим далее индивидуальное изменение вертикального температурного градиента γ. Заметим при этом, что в то время, как до сих пор во всех приводимых нами формулах мы пренебрегали величинами порядка $\left(\frac{\delta p_0}{p}\right)^2$ в сравнении с $\frac{\delta p_0}{p}$, мы дадим для индивидуального изменения γ совершенно точную формулу, справедливую при любом значении δp_0.

В силу адиабатичности процесса мы имеем формулу Пуассона

$$\frac{T'(z')}{T(z)} = \left(\frac{p'(z')}{p(z)}\right)^{\frac{AR}{c_p}} = \left(\frac{p'(z')}{p(z)}\right)^{\frac{R\gamma_a}{g}}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (75)$$

откуда, логарифмируя и затем дифференцируя,

$$\left(\frac{1}{T'}\frac{\partial T'}{\partial z'} - \frac{R\gamma_a}{gp'}\frac{\partial p'}{\partial z'}\right) dz' = \left(\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{R\gamma_a}{gp}\frac{\partial p}{\partial z}\right) dz, \quad \ldots \quad (76)$$

где, как выше, dz' толщина того слоя, в который перешел слой толщины dz. Воспользовавшись теперь очевидными формулами

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial z'} = -g\rho', \frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho, \ \rho' dz' = \rho dz \\ p' = R\rho' T', p = R\rho\, T, \ \frac{\partial T'}{\partial z'} = -\gamma' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (77)$$

получим искомую формулу

$$\frac{1}{p'}(\gamma' - \gamma_a) = \frac{1}{p}(\gamma - \gamma_a) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (78)$$

или

$$\gamma' - \gamma = \frac{\delta p_0}{p}(\gamma - \gamma_a). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (79)$$

Формула (78), являющаяся частным случаем более общей формулы, принадлежащей M. Margules'y [1]), определяет изменение вертикального температурного градиента после вертикального смещения столба воздуха. Из нее следует, что если воздух находится в устойчивом состоянии ($\gamma < \gamma_a$), то при сжатии воздуха или, что то же, опускании его ($\delta p_0 > 0$), вертикальный температурный градиент уменьшается, т. е. столб воздуха приближается к изотермическому состоянию.

При поднятии воздуха вертикальный температурный градиент будет увеличиваться, приближаясь к адиабатическому. Если воздух находится в неустойчивом состоянии ($\gamma > \gamma_a$), то при опускании воздуха вертикальный температурный градиент будет еще более возрастать. Наконец, если воздух находится в безразличном состоянии равновесия ($\gamma = \gamma_a$), то после его поднятия или опускания вертикальный температурный градиент останется без изменения.

Дадим наконец формулу для изменения средней температуры столба воздуха T_m.

Проще всего эту формулу получить из формулы (56) предыдущего параграфа, где все величины нам известны [δp_h по формуле (74)]. Производя вычисление, получим

$$\delta T_m = \frac{RT_m^2}{gh}\left\{\frac{\delta p_h}{p_h} - \frac{\delta p_0}{p_0}\right\} = \frac{RT_m^2}{gh}\left\{\frac{1}{p_h} - \frac{1}{p_0} - \frac{g}{\varkappa R T_h}\int_0^h \frac{dz}{p}\right\}\delta p_0 \ . \quad (80)$$

Steiner (l. c.) произвел для $p_0 = 1013$ *мбр* $= 760$ *мм Hg*, $T_0 = 285°C$, $\gamma = 0{,}006°C/м$ численные вычисления, на основании которых можно составить следующую табличку, в наглядной форме представляющую все полученные нами результаты.

z(*км*)	T(°C)	p(*мбр*)	$\frac{dT}{\delta p_0}\left(\frac{°C}{мбр}\right)$	$\frac{\delta T}{\delta p_0}\left(\frac{°C}{мбр}\right)$	$\frac{z-z'}{\delta p_0}\left(\frac{м}{мбр}\right)$	$\frac{\delta T_m}{\delta p_0}\left(\frac{°C}{мбр}\right)$ при $z=h$	$\frac{\delta p_0}{\delta p(z)}$	$\frac{p_0}{p(z)}$
0	285	1013	0.081	0.081	0.0	0.081	1	1
2	273	795	0.099	0.090	1.5	0.086	1.19	1.28
4	261	613	0.122	0.100	3.7	0.091	1.41	1.65
6	249	469	0.153	0.116	6.2	0.097	1.68	2.16
8	237	355	0.193	0.134	9.8	0.105	2.00	2.85
10	225	264	0.246	0.159	14.5	0.115	2.38	3.84

[1]) M. Margules, Ueber die Aenderung des vertikalen Temperaturgefälles durch Zusammenrückung oder Ausbreitung einer Luftmasse, Meteorologische Zeitschrift, Bd. 23, 1906, S. 251.

Сделаем одно замечание по поводу вычисления этой таблички. Во все наши формулы входит один только интеграл $\int_0^z \frac{dz}{p}$, который в предположении постоянного температурного градиента γ очень легко вычислить, ибо по формуле (23) § 1

$$p(z) = p_0 \left(\frac{T_0 - \gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\gamma}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (81)$$

и следовательно

$$\int_0^h \frac{dz}{p} = \frac{\left[\left(\frac{T_0}{T_h}\right)^{\frac{g}{R\gamma}-1} - 1\right] RT_0}{(g - R\gamma)\, p_0} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

Полученные нами результаты позволяют оценить сравнительную важность различных членов, входящих в общую формулу (56) предыдущего параграфа:

$$\delta p_0 = p_0 \frac{\delta p_h}{p_h} - \frac{gh\, p_0}{RT_m^2} \delta T_m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (83)$$

Рассмотрим такой пример: пусть $h = 8$ *км*, $p_0 = 1013$ *мбр*, $p_0 = 355$ *мбр*, $T_m = 261°$, $\delta p_8 = 1$ *мбр*. В этом случае согласно вышеприведенной табличке $\delta p_0 = 2{,}00$ *мбр*, $\delta T_m = 2 \times 0{,}105 = 0{,}210°$ С. Как бы ни казалось малым это повышение температуры всего столба воздуха, влияние его на изменение давления внизу весьма велико. В самом деле, если бы мы имели $\delta T_m = 0$, что было бы, например, если все местные изменения температуры $\delta T = 0$, то согласно формуле (83) мы имели бы

$$\delta p_0 = \frac{p_0}{p_h} \delta p_h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (84)$$

и в данном случае $\delta p_0 = 2{,}85$ *мбр*. Значения коэффициентов $\frac{p_0}{p_h}$ для различных высот h приведены в последнем столбце таблицы.

В нашем же случае адиабатического процесса мы должны учесть еще член $\frac{gh p_0}{RT_m^2} \delta T_m = 4{,}05 \times 0{,}210 = 0{,}85$ *мбр*. В результате получается, как и должно быть, $\delta p_0 = 2{,}85 - 0{,}85 = 2{,}00$ *мбр*.

Два последних столбца нашей таблички позволяют произвести подобное сравнение для других высот. Предпоследний столбец этой таблички дает значение $\frac{\delta p_0}{\delta p_h}$ для случая выше изученного адиабатического процесса, последний же столбец дает значение того же отношения в предположении, что $\delta T_m = 0$. Как видим, результаты получаются совершенно различными, поэтому упрощенной формулой (84) можно пользоваться разве лишь только для очень небольших высот (не больше 1 *км*) и то с ошибкой в несколько процентов.

Совершенно аналогично тому, как мы рассмотрели адиабатический процесс, происходящий от того, что выше некоторого уровня произошло накопление добавочных масс воздуха, мы могли бы изучить целый ряд других процессов. Например, мы могли бы исходить из задания вызванных каким-то притоком тепла индивидуальных изменений температуры для всех частиц. Или еще иначе, мы могли бы рассматривать адвекцию масс в горизонтальном направлении, считая, что добавочные массы воздуха входят (или выходят) в нашу колонну воздуха не только сверху, но и с боков. Аналитически такую адвекцию можно определить функцией $\Pi(z)$, показывающей, насколько увеличился вес столба воздуха (единич-

ного поперечного сечения) над частицами, которые первоначально лежали на уровне z[1]).

В дальнейшем в теории муссонов нам понадобится формула, определяющая изменение давления наверху воздушного столба, если известно изменение давления на земной поверхности, а также местные изменения температуры δT на всех высотах. Эта формула легко может быть получена из формулы (83), если мы сумеем определить в последней формуле изменение средней температуры воздушного столба δT_m. Но средняя температура воздушного столба T_m была определена формулой

$$\frac{h}{T_m} = \int_0^h \frac{dz}{T},$$

откуда сразу следует, по обычному правилу варьирования, в силу того что

$$\delta \frac{1}{T} = -\frac{1}{T^2}\,\delta T,$$

следующее соотношение

$$h\frac{\delta T_m}{T_m^2} = \int_0^h \frac{\delta T}{T^2}\,dz.$$

Подставляя это выражение в формулу (83) и решая последнюю относительно δp_h, получим искомую формулу

$$\delta p_h = \frac{p_h}{p_0}\,\delta p_0 + \frac{g p_h}{R}\int_0^h \frac{\delta T}{T^2}\,dz \quad \ldots\ldots\ldots \quad (85)$$

Не останавливаясь на соответствующих вычислениях в других случаях, мы хотим подчеркнуть только одно обстоятельство. Если вертикальная воздушная колонна находится в равновесии, то ее состояние вполне характеризуется одной функцией от вертикальной координаты z. Например, зная вертикальное распределение температуры $T(z)$, мы тем самым знаем и распределение плотности и давления. Отсюда следует, что для задания изменения состояния столба воздуха тоже нужно задать только одну функцию. Выбирая, например, за эту функцию как раз $\Pi(z)$, мы видим, что всякое изменение состояния вертикальной колонны воздуха мы можем истолковать горизонтальной адвекцией. Но это истолкование носит формальный характер в том смысле, что, с таким же самым правом, мы можем это изменение состояния воздушного столба об'яснить и другими процессами, например, надлежащим притоком или оттоком тепла, соединенным с притоком масс воздуха выше определенного уровня и т. д. Одним словом, знание распределения плотности, давления и температуры в воздушной колонне до начала и после конца процесса не определяет полностью самого процесса, о котором мы, на основании только этих данных, можем строить лишь некоторые догадки. Для более детального знания этого процесса нам необходимо иметь добавочные сведения о тех вертикальных и горизонтальных течениях, которые имели место во время процесса, о характере притока тепла и т. д.

Возвращаемся к нашей основной задаче об адиабатическом сжатии колонны воздуха. При наших вычислениях мы считали величину $\frac{\delta p_0}{p_0}$ малой в том смысле, что пренебрегали квадратом этой величины в сравнении с ее первой степенью. Как мы особо отметили, формула Маргулеса

---

[1]) C. G. Rossby. Studies on the Dynamics of the Stratosphere, Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre, Bd. 14, 1928, p. 240—265.

(79) была нами выведена совершенно точно, без этого ограничительного предположения. Эта формула определяет изменение вертикального температурного градиента для каждой отдельной частицы. Экснер указал на желательность обобщения этого результата на случай слоя воздуха конечной толщины [1]). B. Haurwitz рассмотрел этот вопрос, указав как меняется распределение вертикального температурного градиента в вертикальном столбе воздуха после его смещения вверх или вниз на конечное расстояние при условии адиабатичности процесса [2]).

Мы дадим совершенно иное, чем у Гаурвица, изложение этого вопроса.

Заметим прежде всего, что задача об опускании колонны воздуха без растекания воздуха в стороны через боковые границы этой колонны, эквивалентна рассмотренной нами выше задаче об адиабатическом сжатии столба воздуха. Действительно, рассматривая опускание колонны воздуха, мы должны, очевидно, представлять себе, что освобождающееся наверху пространство занимается втекающими сюда с боков потоками воздуха, тяжесть которых и вызывает увеличение давления каждой частицы опускающегося столба воздуха.

Итак мы получаем нашу старую задачу, которую мы теперь должны решить уже совершенно точно, предполагая δp_0 конечной величиной. Мы сделаем теперь еще одно добавочное предположение, а именно мы будем считать, что до начала процесса сжатия вертикальный температурный градиент нашего столба воздуха был всюду постоянным и равнялся γ, так что распределение температуры давалось формулой

$$T = T_0 - \gamma z.$$

Если $\gamma = \gamma_a$, то по формуле Маргулеса

$$\gamma' - \gamma = \frac{\delta p_0}{p}(\gamma - \gamma_a), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (86)$$

γ' окажется равным γ_a и задачу нечего решать.

Пусть теперь $\gamma \neq \gamma_a$. В этом случае γ' есть монотонная функция от z'.

В самом деле из формулы Маргулеса ясно видно, во-первых, что разность $\gamma' - \gamma$ все время сохраняет свой знак, а во-вторых, что при увеличении z', т. е. при увеличении z и следовательно при уменьшении $p(z)$, эта разность, по численному своему значению, все время увеличивается. Поэтому $\gamma'(z')$ можно взять за независимую переменную вместо z'. Такой выбор независимой переменной является для рассматриваемой задачи очень удобным. Вводя для краткости вместо γ' другое обозначение u

$$u = \gamma'(z') = -\frac{\partial T'}{\partial z'}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (87)$$

будем, прежде всего, из формулы Маргулеса иметь

$$p(z) = \frac{(\gamma - \gamma_a)\,\delta p_0}{u - \gamma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (88)$$

и, следовательно, помня, что индивидуальное изменение давления $p'(z') - p(z)$ одно и то же для всех частиц и равно локальному изменению δp_0 давления при $z = 0$, легко найдем, что

$$p'(z') = p(z) + \delta p_0 = \frac{u - \gamma_a}{u - \gamma}\,\delta p_0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (89)$$

---

[1]) F. M. Exner, Dynamische Meteorologie, 2 Aufl. 1925, S. 57—59.

[2]) B. Haurwitz, Ueber die Aenderung des Temperaturgradienten in Luftsäulen von endlicher Höhe bei vertikaler Verschiebung, Annalen der Hydrographie und maritimen Meteorologie, 1931, S. 22—25.

Теперь обычная формула

$$\frac{\partial \ln p'}{\partial z'} = -\frac{g}{RT'},$$

дает нам

$$\left(\frac{1}{u-\gamma_a} - \frac{1}{u-\gamma}\right)\frac{\partial u}{\partial z'} = -\frac{g}{RT'}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (90)$$

откуда, помня, что

$$u = -\frac{\partial T'}{\partial z'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (91)$$

получаем для определения $T'(z')$ дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\left(\frac{1}{\frac{\partial T'}{\partial z'} + \gamma_a} - \frac{1}{\frac{\partial T'}{\partial z'} + \gamma}\right)\frac{\partial^2 T'}{\partial z'^2} = -\frac{g}{RT'}. \quad \ldots\ldots \quad (92)$$

Будем искать его решение в виде ряда, расположенного по возрастающим степеням z':

$$T'(z') = a_0 + a_1 z' + a_2 z'^2 + \cdots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (93)$$

Очевидно $a_0 = T'(0)$; но, в силу адиабатичности процесса,

$$T'(z') = T(z)\left[\frac{p'(z')}{p(z)}\right]^{\frac{AR}{c_p}} = T(z)\left[\frac{p'(z')}{p(z)}\right]^{\frac{R\gamma_a}{g}}$$

и следовательно при $z' = z = 0$ будем иметь

$$a_0 = T_0\left(\frac{p_0 + \delta p_0}{p_0}\right)^{\frac{R\gamma_a}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (94)$$

Так как

$$a_1 = \left\{\frac{dT'(z')}{dz'}\right\}_{z'=0} = -\gamma'(0),$$

то из формулы Маргулеса при $z = 0$ сразу получим

$$a_1 = -\gamma + \frac{\delta p_0}{p_0}(\gamma_a - \gamma). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (95)$$

Наконец $a_2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{d^2T'}{dz'^2}\right\}_{z'=0}$ легко найти из уравнения (92):

$$a_2 = \frac{g(\gamma^a - \gamma)\delta p_0}{2RT_0 p_0}\left[1 + \frac{\delta p_0}{p_0}\right]^{1 - \frac{R\gamma_a}{g}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (96)$$

Ограничиваясь первыми тремя членами разложения (93), получаем кривые распределения температуры в окончательной стадии процесса в виде парабол. На рис. 27 начерчены эти кривые пунктиром для $T_0 = 273°$ C, $\gamma = 0{,}005° \frac{C}{м}$, $\frac{\delta p_0}{p_0} = \pm 0{,}2$ (что соответствует опусканию и соответственно поднятию колонны воздуха примерно на 2 *км*). Из этих чертежей видно (это можно впрочем доказать и аналитически), что если столб воздуха находится в состоянии устойчивого равновесия ($\gamma < \gamma_a$), то при опускании столба воздуха температурный градиент его уменьшается, притом тем сильнее, чем выше берется частица, и на некоторой высоте

у нас может образоваться даже инверсия. Наоборот, при поднятии воздуха ($\delta p_0 < 0$) температурный градиент увеличивается, приближаясь к адиабатическому, особенно в верхних слоях. Аналогичные результаты получаются и для неустойчивого равновесия ($\gamma > \gamma_a$). Только тут наоборот при опускании воздуха температурный градиент увеличивается, удаляясь от адиабатического, притом особенно сильно в верхних слоях, а при поднятии воздуха температурный градиент уменьшается, приближаясь к адиабатическому, причем опять-таки больше всего градиент подходит к адиабатическому в верхних слоях. Резюмируя, можем высказать общее правило: при адиабатическом опускании сухой колонны воздуха последняя удаляется от состояния безразличного равновесия, особенно в верхних частях, наоборот при адиабатическом поднятии сухой колонны воздуха колонна приближается к состоянию безразличного равновесия, особенно в верхних частях.

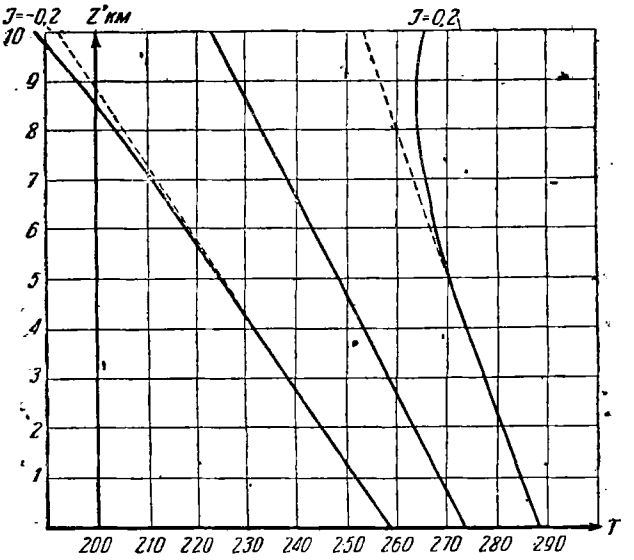

Рис. 27.

При большой величине отношения $\frac{\delta p_0}{p_0}$ вместо разложения $T'(z')$ в ряд (93) лучше воспользоваться другим его представлением.

Перемножая левые и правые части формул (90) и (91), получим

$$\frac{g}{R}\frac{\partial \lg T'}{\partial z'} = u\left(\frac{1}{u-\gamma_a} - \frac{1}{u-\gamma}\right)\frac{\partial u}{\partial z'} = \left(\frac{\gamma_a}{u-\gamma_a} - \frac{\gamma}{u-\gamma}\right)\frac{\partial u}{\partial z'}.$$

Обращая теперь внимание на формулу (88), введем вместо u новую переменную υ, определяя ее формулой

$$\upsilon = \frac{(u-\gamma)p_0}{(\gamma-\gamma_a)\delta p_0} = \frac{p_0}{p(z)}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (97)$$

из которой видно, что υ всегда больше или равно 1, причем при $z=0$ имеем, что $\upsilon = 1$.

Производя в предыдущем равенстве замену u на υ, после простых преобразований получим

$$\frac{g}{R}\frac{\partial \lg T'}{\partial z'} = \left(\frac{\gamma_a \delta p_0}{p_0 + \upsilon\delta p_0} - \frac{\gamma}{\upsilon}\right)\frac{\partial \upsilon}{\partial z'}.$$

Интегрируя это уравнение и замечая, что при $z'=0$, т. е. при $z=0$ должно быть $\upsilon = 1$ и $T'(0) = T_0\left(1+\frac{\delta p_0}{p_0}\right)^{\frac{R\gamma_a}{g}}$, мы получим

$$\frac{g}{R}\lg T'(z') = \frac{g}{R}\lg T_0 + \gamma_a \lg\left(1+\upsilon\frac{\delta p_0}{p_0}\right) - \gamma \lg \upsilon.$$

Избавляясь от логарифмов, найдем

$$T'(z') = T_0\left(1+\upsilon\frac{\delta p_0}{p_0}\right)^{\frac{R\gamma_a}{g}} \upsilon^{-\frac{R\gamma}{g}}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (98)$$

Из формулы (90) очевидно следует

$$\frac{dz'}{du}=\frac{RT'(z')(\gamma_a-\gamma)}{g(\gamma_a-u)(u-\gamma)};$$

вводя в эту формулу вместо u переменную υ, легко получим

$$\frac{dz'}{d\upsilon}=\frac{RT'(z')}{g\upsilon\left[1+\upsilon\frac{\delta p_0}{p_0}\right]}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (99)$$

внося сюда значение $T'(z')$ и интегрируя по υ в пределах от 1 до υ, окончательно найдем

$$z'=\frac{RT_0}{g}\int_1^{\upsilon}\left(1+\upsilon\frac{\delta p_0}{p_0}\right)^{\frac{R\gamma_a}{g}-1}\upsilon^{-1-\frac{R\gamma}{g}}d\upsilon \quad \ldots\ldots \quad (100)$$

Формулы (98) и (100) дают в параметрическом виде искомое распределение температуры. Вычисление интеграла производится очень быстро при помощи формулы Симпсона. Полученные таким способом две кривые для тех же значений переменных, что и выше, начерчены сплошными линиями на рис. 27. Приводимая ниже табличка дает значения температур и вертикальных температурных градиентов для ряда высот:

$\zeta=0.2$

z' км	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\gamma'\frac{°C}{100\,м}$	0.400	0.384	0.365	0.342	0.314	0.278	0.232	0.171	0.091
$T'(z')$ °C	288.0	284.0	280.2	276.8	273.6	270.6	268.1	266.1	264.8

$\zeta=-0.2$

z' км	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\gamma'\frac{°C}{100\,м}$	0.600	0.611	0.624	0.637	0.652	0.669	0.687	0.706	0.726
$T'(z')$ °C	255.7	249.7	243.5	237.2	230.8	224.1	217.2	210.3	203.2

В заключение настоящего параграфа заметим, что в § 6 будет подробно рассмотрен вопрос об одном обобщении формулы Маргулеса (78). Мы предполагали до сих пор, что вертикальный столб воздуха смещаясь вверх или вниз не изменяет своего поперечного сечения. Маргулес же рассмотрел также и тот случай, когда рассматриваются вертикальные смещения столба воздуха переменного по высоте сечения.

§ 4. Геопотенциал и его применения к статике атмосферы. В предыдущих параграфах мы подробно рассмотрели вопрос о зависимости давления в некоторой точке от высоты этой точки. Все наши рассуждения относились при этом к одной определенной вертикальной линии. Однако, если мы расширим постановку задачи и поставим вопрос о проведении изобарических поверхностей во всем пространстве, подобно тому, как на синоптических картах проводятся изобарические линии, то, как

показал V. Bjerknes, [1]) для правильного теоретического, а в большой мере и практического, решения этого вопроса необходимо ввести в рассмотрение понятие потенциала силы тяжести или, как его называют иначе, геопотенциала.

Что сила тяжести имеет потенциал, следует из общей теории тяготения. Напомним, что проекции X, Y, Z, напряжения силы тяжести $\mathbf{F}$, т. е. силы тяжести, действующей на единицу массы, являются взятыми со знаком минус производными от потенциала силы тяжести Φ (опять-таки отнесенного к единице массы) по осям координат

$$X=-\frac{\partial\Phi}{\partial x},\quad Y=-\frac{\partial\Phi}{\partial y},\quad Z=-\frac{\partial\Phi}{\partial z};\quad \mathbf{F}=-\operatorname{grad}\Phi \quad . . \quad (101)$$

Эти соотношения связаны с другим основным свойством потенциала

$$\int_{M_1}^{M_2} Xdx+Ydy+Zdz=\Phi(M_1)-\Phi(M_2),$$

имеющим следующее механическое значение: разность значений потенциала Φ в начальной точке M_1 и в конечной точке M_2 некоторого пути численно равна работе, которую совершает на этом пути сила тяжести при перемещении единицы массы из точки M_1 в точку M_2, причем эта работа не зависит от вида пути, соединяющего точки M_1 и M_2.

Поверхности $\Phi=\text{const}$ носят название поверхностей уровня. Поверхность океанов (в некотором среднем их состоянии) является одной из поверхностей уровня, которая носит название геоида: значение потенциала Φ на этой поверхности мы примем равным нулю.

Сила тяжести $\mathbf{F}$ (отнесенная к единице массы) направлена в каждой точке перпендикулярно к поверхности уровня, проходящей через эту точку; обозначая через n направление нормали к поверхности уровня в сторону возрастания Φ, будем иметь

$$g=\frac{\partial\Phi}{\partial n}, \quad . . . . . \quad (102)$$

где g — абсолютная величина $\mathbf{F}$.

Таким образом направление отвесной линии, т. е. направление силы тяжести совпадает с направлением нормали к поверхности уровня, проходящей через рассматриваемую точку. Расстояние между двумя соседними поверхностями уровня, отвечающими значениям Φ и $\Phi+\delta\Phi$, равно очевидно

$$\delta n=\frac{\delta\Phi}{g}; \quad . . . . . \quad (103)$$

следовательно это расстояние больше там, где g меньше, и обратно. Но отсюда следует, что если значение g меняется вдоль поверхности уровня (как оно и есть на самом деле), то n не будет являться уже нормалью к соседней поверхности уровня. Допустим например, что мы в некоторой точке поверхности геоида провели нормаль к этой поверхности и взяли ее за ось OZ. Тогда направление этой нормали отклоняется от направления отвесной линии во всех точках (вообще говоря), кроме точки $z=0$. Правда, даже на высоте 20 *км* это отклонение не превосходит $^1/_2$ секунды дуги, поэтому только что упомянутые нормали к поверхности геоида мы будем тоже называть вертикалями и будем по ним отсчитывать вертикальную координату z, полагая $z=0$ на уровне моря. Так как $\cos(\widehat{n,z})$ почти не отличается от 1 (в силу крайней малости угла $(\widehat{n,z})$), то

[1]) V. Bjerknes. Dynamische Meteorologie u. Hydrographie. Erster Teil-Statik der Atmosphäre, Braunschweig, 1912. Эта книга содержит ряд таблиц, на которые мы в дальнейшем ссылаемся.

$Z = -g \cos(\widehat{n,z})$ можно с ничтожнейшей погрешностью считать равным $Z = -g$, так что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = g, \qquad \Phi = \int_0^z g\,dz. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (104)$$

Поверхности уровня, согласно высказанному, отличаются от поверхностей $z = \text{const}$, т. е. поверхностей равной высоты над уровнем моря. Правда, это отличие очень мало; так например, поверхность уровня, лежащая над полюсом на высоте 20 *км*, будет лежать над экватором только метров на 100 выше. Однако, принципиально важно изобарические поверхности и вообще все результаты аэрологического зондирования атмосферы связывать с поверхностями уровня, а не с поверхностями равной высоты.

Для этой цели V. Bjerknes систематически пользуется особой единицей потенциала силы тяжести, к рассмотрению которой мы и перейдем.

Выберем, как обычно, метр за единицу длины и секунду за единицу времени; тогда из формулы (104) ясно, что за единицу потенциала силы тяжести Φ надо взять $\frac{м}{сек^2} \cdot м = \frac{м^2}{сек^2}$. V. Bjerknes назвал эту величину динамическим дециметром. Основанием для этого ему послужило то обстоятельство, что если бы в формуле (104) можно было взять $g = 10$ *м/сек*^{2}, то при $z = 0{,}1$ *м* $= 1$ *дцм* мы получили бы как раз $\Phi = 10 \times 0{,}1 = 1\ \frac{м^2}{сек^2}$, т. е. при $g = 10$ *м/сек*^{2} один динамический дециметр равен разности потенциалов в двух точках, отстоящих по вертикали на один дециметр длины. Величину, превосходящую динамический дециметр в 10 раз, V. Bjerknes называет динамическим метром. При $g = 9{,}8$ *м/сек*^{2} получаем формулу

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \int_{z_1}^{z_2} g\,dz = 9{,}8\,(z_2 - z_1), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (105)$$

где z выражено в метрах, Φ—в динамических дециметрах. Будем выражать потенциал в динамических метрах и будем значение потенциала обозначать в этом случае буквой H. Очевидно, что

$$\Phi = 10H, \qquad H = \frac{1}{10}\Phi. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (106)$$

Предыдущее равенство примет вид

$$H_2 - H_1 = 0{,}98(z_2 - z_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (107)$$

и обратно

$$z_2 - z_1 = 1{,}02\,(H_2 - H_1), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (108)$$

т. е. с точностью до 2% разность значений потенциала в двух точках, выраженная в динамических метрах, равна разности высот в этих точках, выраженной в обычных метрах.

Но нельзя говорить, что динамический метр в 1,02 раза больше геометрического метра, ибо динамический метр есть единица потенциала и имеет совершенно другую размерность $\left(\frac{L^2}{T^2}\right)$, чем обычный метр (размерность которого есть L). Поэтому данные Бьеркнесом названия „динамические метр и дециметр" кажутся нам очень неудобными.

Бьеркнес составил специальные таблицы для перехода от обычных метров к динамическим и обратно при различных значениях g (таблицы $3M$, $4M$, $5M$ и $6M$) с учетом изменения g с высотой.

Поверхности уровня

$$H = 0,\ 1000,\ 2000$$

и т. д. динамических метров, называются главными поверхностями уровня или главными эквипотенциальными поверхностями. Как мы знаем, эти поверхности проходят приблизительно на высоте 0, 1, 2 . . . километров, причем от полюса они повышаются к экватору.

Точно также Бьеркнес называет изобарические поверхности

$$p = 1100,\ 1000,\ 900 \ldots 100\ \textit{мбр}$$

главными изобарическими поверхностями. Вспомним, что в системе MTS (метр, тонна, секунда) единицей давления служит сантибар = 10 миллибарам (*мбр*).

Напишем теперь основные уравнения статики с помощью геопотенциала.

Принимая во внимание уравнение (1) и уравнение (2) § 1, получим

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x},\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y},\quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z},\quad \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = -\operatorname{grad}\Phi, \qquad (109)$$

откуда, составляя полные дифференциалы, найдем

$$\frac{1}{\rho}dp = -d\Phi \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (110)$$

Это уравнение дает в простейшем виде ту внутреннюю связь, которая существует в случае равновесия атмосферы между полем давления, полем плотности и полем геопотенциала.

Из этого уравнения сразу следует, что если $\Phi = \text{const}$, т. е. $d\Phi = 0$, то $dp = 0$ и следовательно $p = \text{const}$. Таким образом, в случае равновесия давление p есть функция одного только геопотенциала Φ

$$p = f(\Phi) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (111)$$

Но из уравнения (110) ясно тогда, что

$$\rho = -f'(\Phi), \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (112)$$

так что и плотность тоже есть функция только одного Φ. Отсюда сразу следует такой результат.

В случае равновесия атмосферы изобарические, эквипотенциальные и изопикнические, [1]) а следовательно и изостерические поверхности совпадают между собой.

Этот результат можно уточнить, дав количественные оценки. Для этого введем понятие об единичном слое, назвав, например, единичным изобарическим слоем слой между двумя изобарическими поверхностями, которым отвечают значения давлений p_0 и $p_0 + 1$ и т. д.

Обозначая, как обычно, $\frac{1}{\rho}$ через α и интегрируя уравнение (110), которое принимает вид

$$d\Phi = -\alpha dp \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (113)$$

в пределах от p_1 до $p_2 = p_1 + 1$, получаем

$$\Phi_2 - \Phi_1 = -\alpha_m, \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (114)$$

---

[1]) Поверхности равной плотности.

где α_m — некоторое среднее значение α в рассматриваемом единичном изобарическом слое. Итак, в состоянии равновесия, число эквипотенциальных единичных слоев, содержащихся в единичном изобарическом слое, равно некоторому среднему значению удельного об'ема в этом слое.

Аналогично, интегрируя уравнение $dp = -\rho d\Phi$ в пределах от Φ_1 до $\Phi_2 = \Phi_1 + 1$, получим

$$p_2 - p_1 = \rho_m, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (115)$$

т. е. в состоянии равновесия, число изобарических единичных слоев, содержащихся в единичном эквипотенциальном слое, равно некоторому среднему значению плотности в этом слое.

Полученный нами результат о совпадении изобарических и эквипотенциальных поверхностей и указывает на принципиальную важность введения эквипотенциальных поверхностей, ибо равновесие нарушается тогда, когда появляется разность давлений в какой-либо из поверхностей одинакового уровня. Желая аналитически представить состояние атмосферы, даваемое аэрологическими зондажами, мы должны за основные поверхности брать именно поверхности постоянного уровня. Прежде чем сказать несколько слов об этом, остановимся на тех методах обработки аэрологических данных, которые были предложены в свое время Бьеркнесом.

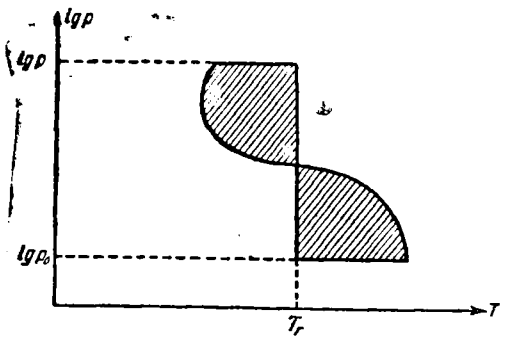

Рис. 28.

Интегрируя уравнение (110) в пределах от p_0 до p и измеряя геопотенциал динамическими метрами, т. е. вводя H вместо Φ, будем иметь

$$H_{p_0}^{p} = -\frac{1}{10}\int_{p_0}^{p} \frac{1}{\rho}\, dp, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (116)$$

где $H_{p_0}^{p}$ — число динамических метров между нижней и верхней поверхностями уровня (давления на которых суть p_0 и p). По уравнению состояния влажного воздуха

$$\frac{1}{\rho} = R\frac{T_r}{p}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (117)$$

где T_r — виртуальная температура (см. § 5, гл. III), для вычисления которой Бьеркнесом тоже даны таблицы (7*М* и 8*М*).

Поэтому

$$\boxed{H_{p_0}^{p} = -\frac{R}{10}\int_{p_0}^{p} T_r\, d\ln p} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (118)$$

Строя по оси абсцисс нормальную шкалу для T, а по оси ординат логарифмическую шкалу для p, определим среднюю виртуальную температуру $\overline{T}_r$ из условия, чтобы площади, образованные кривой, выражающей зависимость между T_r и p,[1]) двумя линиями $p = \text{const}$ и $p_0 = \text{const}$ и

[1]) Эта кривая может быть получена из аэрологических данных.

прямой $T=\overline{T}_г$, лежащие справа от прямой $T=\overline{T}_г$, равнялись бы таким же площадям, лежащим слева от этой прямой (рис. 28). Тогда будет

$$\int_{p_0}^{p} \overline{T}_г \, d\ln p = \overline{T}_г \int_{p_0}^{p} d\ln p = \overline{T}_г \ln \frac{p}{p_0}$$

и если еще обозначить $\overline{T}_г = 273 + \overline{t}_г$ и вспомнить, что $R=287$, то формула (118) примет вид

$$\boxed{H^p_{p_0} = 28{,}7(273+\overline{t}_г)\ln\frac{p_0}{p} = 7836\ln\frac{p_0}{p} + \frac{7836}{273}\overline{t}_г \ln\frac{p_0}{p}} \quad . \; . \quad (119)$$

Положим

$$h^p_{p_0} = 7836 \ln \frac{p_0}{p}, \qquad \Delta h = h^p_{p_0} \frac{\overline{t}_г}{273} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (120)$$

Введем вспомогательную изобарическую поверхность 1100 *мбр* (измеряя давление в миллибарах) и протабулируем выражение

$$h^p_{1100} = 7836 \ln \frac{1100}{p} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (121)$$

Это сделано Бьеркнесом в его таблице 11* *М*, дающей, как видно из (119), расстояние в динамических метрах[1]) произвольной изобарической поверхности $p = \text{const}$ от изобарической поверхности $p = 1100$ *мбр* в изотермической атмосфере. $t_г = 0°$ С.

Очевидно мы имеем

$$h^p_{p_0} = h^p_{1100} - h^{p_0}_{1100} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (122)$$

Зная $h^p_{p_0}$ и $\overline{t}_г$, по формуле (120), можем вычислить Δh. Бьеркнес опять избегает всяких вычислений, протабулировав это выражение (таблица 12 *М*). В результате получаем

$$H^p_{p_0} = h^p_{p_0} + \Delta h. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (123)$$

Найдя $H^p_{p_0}$, можем перейти к обычному расстоянию между изобарическими поверхностями $p_0 = \text{const}$ и $p = \text{const}$. Заметим, что весь метод представляет собой развитие и уточнение метода Emden'a (формула (19) § 1).

Если нам надо вычислить целый ряд динамических высот, отвечающих различным точкам кривой, связывающей температуру и давление (например если мы желаем определить высоты всех главных изобарических поверхностей, а также все те высоты, на которых температурная кривая имеет резкие изломы), то мы поступаем совершенно аналогично, располагая конечно все вычисления в одну табличку. При этом можно пользоваться обыкновенной шкалой для p, так как в силу гораздо меньшей толщины слоев, которые приходится в этом случае рассматривать, средние виртуальные температуры легко определить и при помощи нормальной шкалы для p.

Наконец, если нас интересуют только динамические высоты главных изобарических поверхностей, то можно воспользоваться таблицей Бьеркнеса 10 *М*, которая дает расстояние в динамических метрах

---

[1]) Опять напоминаем, что под расстоянием в динамических метрах мы понимаем не обычное расстояние, а разность значений потенциала в соответствующих точках.

между любыми двумя последовательными главными изобарическими поверхностям для любых виртуальных температур. Принцип составления этой таблицы очевидно таков: если мы составляем табличку для поверхностей $p_0 = 700$ *мбр* и $p = 600$ *мбр*, то мы должны протабулировать функцию

$$H_{700}^{600} = 28{,}7 \ \ln \frac{7}{6} (273 + \bar{t}_r) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (124)$$

Получив одним из указанных методов динамические высоты главных изобарических поверхностей во всех тех пунктах, где были аэрологические под'емы, мы можем перейти к синоптическому представлению поля давления и поля плотности во всей атмосфере.

В основе этого представления лежит следующий принцип. В явлениях сравнительно большого масштаба, как циклоны и т. п. в которых горизонтальные размеры значительно превосходят вертикальные, условия равновесия приблизительно выполняются вдоль каждой вертикали, если же мы перемещаемся в горизонтальном направлении, то состояние равновесия будет медленно изменяться от одной вертикали к другой. Поясним этот принцип. Если бы мы имели строгое равновесие, то определив давление, плотность и температуру вдоль какой-либо вертикали, мы нашли бы, что они строго удовлетворяют барометрической формуле и кроме того, мы сразу бы могли определить давление, плотность и температуру в любой точке пространства, ибо на одной и той же поверхности уровня, эти величины должны иметь постоянные значения. На самом деле, в силу отсутствия строгого равновесия изобарические и изотермические поверхности не будут совпадать с эквипотенциальными поверхностями, а будут их пересекать. Однако, это пересечение происходит под столь малыми углами, что мы можем в окрестности рассматриваемой вертикали считать наше условие равновесия (совпадение изоповерхностей) выполненным. Но когда мы отойдем от нашей вертикали на значительное расстояние, расхождение поверхностей сделается заметным, и мы вдоль новой вертикали получим распределение элементов, совершенно отличное от распределения элементов вдоль первоначальной вертикали. Отсюда, следовательно, и понятие вертикали мы можем трактовать в очень широком смысле. Называя критическим наибольший угол, под которым могут пересекаться изобарическая поверхность и поверхность уровня, мы может рассматривать как квазивертикальную кривую всякую кривую, угол наклона которой к горизонту всюду велик в сравнении с упомянутым критическим углом. Высказанный выше принцип применим очевидно и к квазивертикальным кривым. Это очень важно, так как подъем шаров зондов происходит очевидно по квазивертикальным кривым.

Синоптическое представление поля давления и поля плотности во всей атмосфере можно дать при помощи карт абсолютной и относительной топографии изобарических поверхностей. Карта абсолютной топографии какой-либо главной изобарической поверхности строится таким образом: на карту наносятся динамические высоты этой поверхности, вычисленные для всех обработанных станций, и проводятся линии, соединяющие одни и те же высоты. При этом, чтобы по возможности увеличить число данных, широко пользуются экстраполяцией, делая некоторые допущения о вертикальном температурном градиенте и т. п. и используя наземные наблюдения. Набор таких карт для всех 10 главных изобарических поверхностей дает очевидно полную картину распределения давления в атмосфере. Карта относительной топографии строится таким же образом, только на нее наносятся динамические толщины слоя между двумя последовательными главными изобарическими поверхностями. Так как по (114) эти толщины численно равны средним значениям удельных объемов воздуха в рас-

сматриваемом слое, то набор карт относительной топографии определяет поле плотности в атмосфере.

Совершенно аналогично можно построить карты абсолютного давления для различных поверхностей уровня, а также карты, дающие разности абсолютных давлений для двух последовательных главных поверхностей уровня. Эти карты также дают возможность охарактеризовать поле давления и масс в атмосфере. Получать данные для этих карт несколько сложнее, впрочем от карт абсолютной и относительной топографии изобарических поверхностей нетрудно перейти к картам абсолютного давления для поверхностей уровня, на чем мы ближе не останавливаемся.

Значение геопотенциала в данной точке свободной атмосферы, а следовательно, и высоту точки зондирования над уровнем моря очень удобно можно определить с помощью тэфиграммы.

В самом деле, беря основное дифференциальное уравнение для геопотенциала

$$d\Phi = -\alpha\, dp = -RT\, d\ln p$$

и заменяя в нем $d\ln p$ по формуле

$$d\ln p = \frac{1}{\lambda}\left\{d\ln T - d\ln\vartheta\right\},$$

где

$$\lambda = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = \frac{AR}{c_p},$$

получим

$$d\Phi = \frac{R}{\lambda}\, T\, d\ln\vartheta - \frac{R}{\lambda}\, dT$$

или, так как,

$$\frac{AR}{\lambda}\, d\ln\vartheta = c_p\, d\ln\vartheta = dS,$$

то

$$d\Phi = T\frac{dS}{A} - \frac{c_p}{A}\, dT = \frac{TdS - c_p\, dT}{A} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (125)$$

Отсюда, интегрируя в пределах от нижнего давления p_0 до верхнего давления p_1, причем нижнему давлению соответствует температура T_0, а верхнему давлению—температура T_1, получим, выражая S и c_p в механических единицах:

$$\Phi_1 - \Phi_0 = \int_{T_0}^{T_1} TdS + c_p\,(T_0 - T_1). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (126)$$

На тэфиграмме (рис. 29) первый член очевидно представляет площадь, ограниченную слева кривой, изображающей для данного слоя изменение температуры в атмосфере, а справа—ограниченную прямой изотермой абсолютного нуля. Сверху и снизу площадь ограничена двумя изэнтропами, проходящими через точки кривой, соответствующие значениям $T = T_0$ и $T = T_1$. Очевидно, что для того чтобы подсчитать величину площади, не нужно чтобы на тэфиграмме была проведена изотерма абсолютного нуля. Обычно на бланке тэфиграммы изотерма наименьшей температуры составляет 200° abs.

Площадь, выражаемая интегралом $\int_{T_0}^{T_1} TdS$, представляет, как легко понять, количество тепла, которое должно сообщаться поднимающейся массе воздуха для того, чтобы в каждой стадии своего поднятия эта масса находилась в равновесии с окружающей ее воздушной средой.

Площадь может быть измерена планиметром или другим каким-либо способом. Например, можно взять разность значений энтропий $S_1 - S_0$, умножить ее на разность значений температур $T_1 - T_0$ и вычесть из произ-

ведения величину площади, ограниченной справа кривой состояния, слева вертикалью, проходящей через нижнюю точку, и сверху горизонталью проходящей через верхнюю точку.

В системе *см-г-сек.* 1 *см*^{2} обычной диаграммы соответствует 3,72 · 10^6 *эргов* энергии на 1 *г*, а $c_p = 0{,}2417 \times 4{,}18 \times 10^7 = 1{,}010.10^7$ *эрг/г*.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Поднятие в изотермической атмосфере, имеющей температуру 280° из точки с давлением 1000 *мбр* в точку с давлением 600 *мбр*.

Первый член представляется площадью *APCB* и к этому надо прибавить 20×4 *см*^{2} (до абсолютного нуля), что составит 112 *см*^{2}.

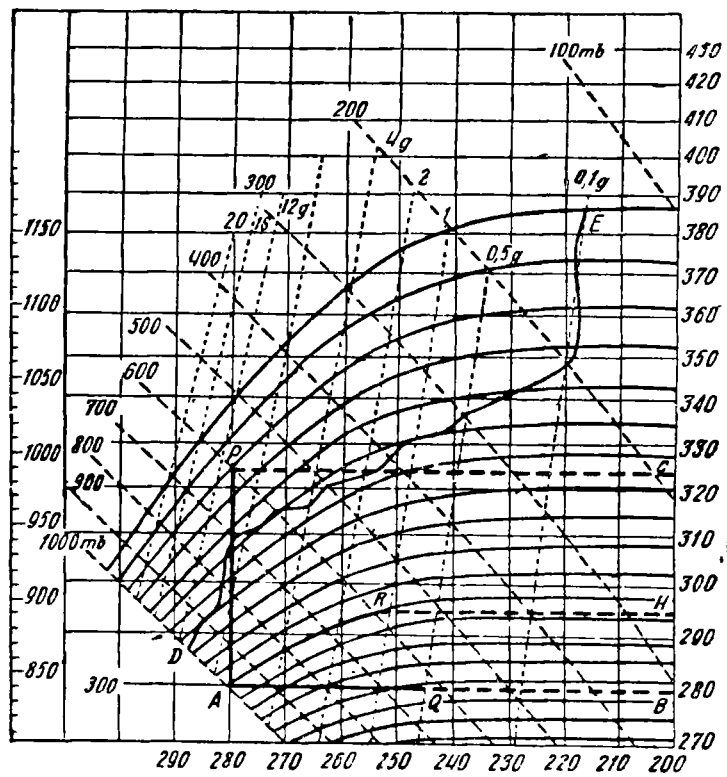

Рис. 29.

Эта площадь эквивалентна для сухого воздуха 112.3,72 · 10^6 *эргов* = = 4,165.10^8 *эрг* на *г* или 4165 динамических метров. Второй член отсутствует, ибо атмосфера предполагается изотермической.

Пример 2. Поднятие в адиабатической сухой атмосфере из точки, имеющей температуру 280° и давление 1000 *мбр* до уровня, соответствующего давлению 600 *мбр*.

Конечная температура равна 241°.

Первый член отсутствует, а второй равен

$$1{,}010 \times 10^7 \times (280 - 241) = 3{,}939 \times 10^8 \frac{эрг}{г},$$

что соответствует 3939 динамическим метрам.

Пример 3. Поднятие в атмосфере с влажным адиабатическим температурным градиентом при тех же начальных и конечных условиях под'ема.

Здесь при вычислении появляются оба члена. Площадь *ARBH* равна 10,2 *см*^{2}, а дополнительная площадь до абсолютного нуля равна 30 *см*^{2}.

Таким образом полная площадь равна 40,2 *см*² или $1{,}4950 \times 10^8$ *эрг* на 1 *г*. Второй член $1{,}010 \times 10^7 \times 26$ или $2{,}626 \times 10^8$ *эрг* на 1 *г*. Сумма обоих членов дает $4{,}121 \times 10^8$ *эрг* на *г* или 4121 динамических метров.

Пример 4. Предлагается вычислить высоты в динамических метрах для нескольких точек зондажа 14/VII 1924 г. в Страсбурге. Кривая изменения состояния с высотой изображена тэфиграммой (рис. 29).

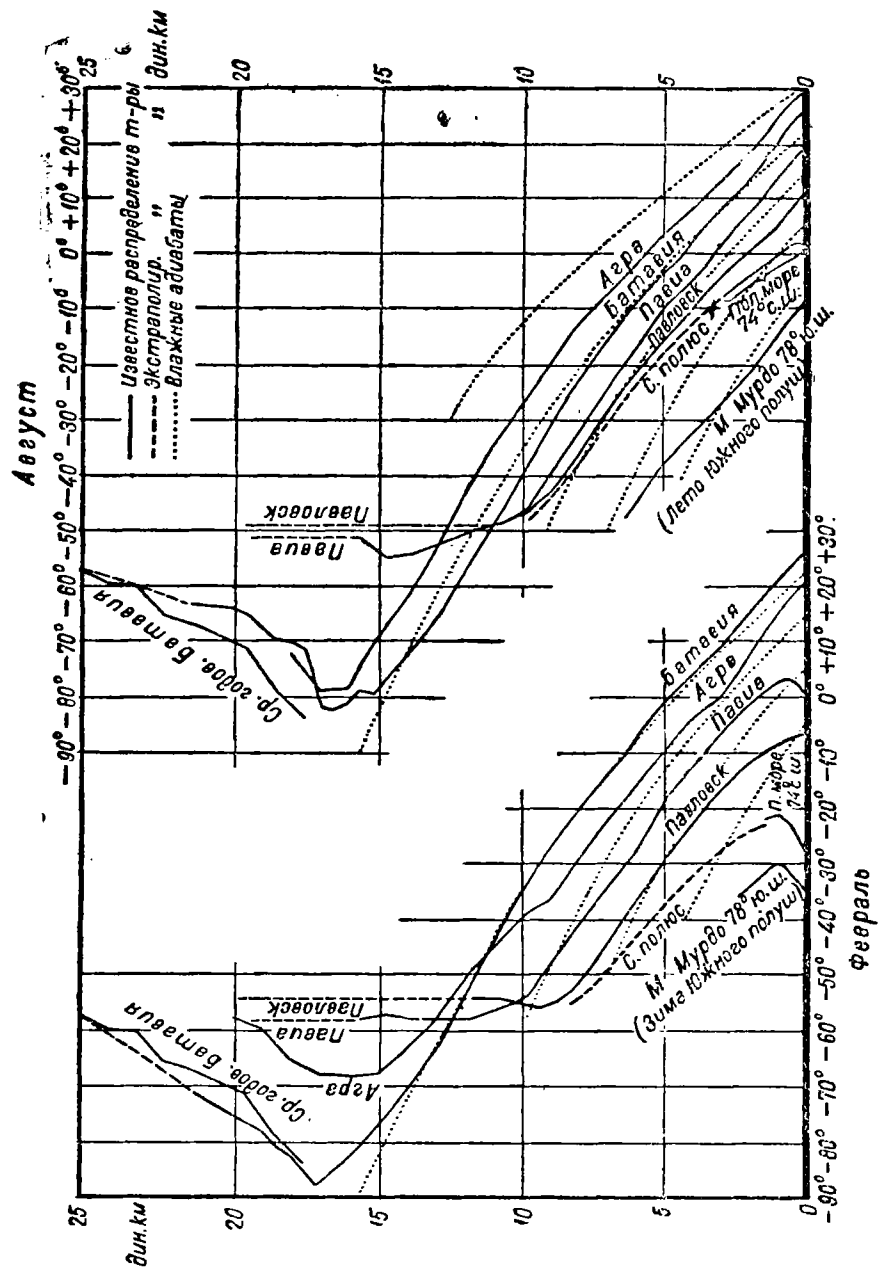

Рис. 30.

§ 5. Распределение температуры по высоте в свободной атмосфере. Вертикальное распределение температуры с высотой имеет много особенностей, связанных с географическим положением места наблюдения временем года, временем дня и т. п. На прилагаемом рис. 30 даны для примера средние кривые вертикального распределения температуры для 5 пунктов: 1. Полярное море у берегов Восточной Сибири, приблизи-

тельно 74° сев. шир. 2. Павловск — 60° сев. шир. 30° вост. долг. 3. Павия — 45° сев. шир., 9° вост. долг. — самая южная аэрологическая обсерватория в Европе. 4. Агра — 27° сев. шир., 78° вост. долг. (Сев. Индия) и 5. Батавия (Ява) — 6° южн. шир., 107° вост. долг. Кривые в левой части чертежа дают распределение температуры в феврале, самом холодном зимнем месяце в северном полушарии, а направо — в августе, самом теплом месяце для многих пунктов сев. полушария.

В общем, если не принимать в расчет самых нижних слоев, прилежащих к земной поверхности, падение температуры в свободной атмосфере составляет около 0,5°—0,6° на каждые 100 *м* поднятия. Однако на некоторой высоте это падение температуры прекращается и заменяется сравнительно слабым повышением, переходящим постепенно в изотермию. Это повышение особенно хорошо заметно в тропиках и в южных широтах и менее заметно в северных широтах. Там имеют место скорее случайные изменения температуры. Во всяком случае нижняя граница слоя, в котором прекращается падение температуры, совершенно ясна на всех кривых. Если рассматривать метеорограммы отдельных под'емов, то эта граница слоя прекращения понижения температуры очень резка и дает характерный излом на кривой. В средних же кривых, представленных на чертеже, эти изломы сглажены ввиду того, что они соответствуют высотам несколько изменяющимся от одного случая к другому. Граница эта называется тропопаузой (термин этот был введен N. Shaw). Вследствие резкого характера изменения хода кривой можно считать, как это обычно и делается в теоретических исследованиях, тропопаузу поверхностью разрыва первого порядка, т. е. такой поверхностью, на которой температура и ветер не терпят разрыва (т. е. не изменяются резко, скачком), а первые производные их терпят разрыв (т. е. вертикальный температурный градиент изменяется скачком). Область, лежащая ниже тропопаузы, характеризуемая убыванием температуры с высотой, называется тропосферой, а область выше тропопаузы называется стратосферой. Верхняя граница этой области, в которой температура не понижается, до сих пор не найдена даже самыми высокими наблюдениями. Как было выше указано, существование стратосферы было установлено в первых годах настоящего столетия почти одновременно Ассманом в Германии и Тейсеран-де-Бором во Франции.

Высота тропопаузы подвергается изменениям в течение года. Летом она несколько больше, чем зимой. Средние из аэрологических наблюдений показывают, что выше всего она расположена в августе и ниже всего в феврале.

Следующая таблица (составленная по Гольду для средней Европы, по данным Раманатана для Индии и по данным Ван-Беммелена для Явы) дает высоту нижней границы стратосферы для февраля и для августа.

На основании этой таблицы вычерчены два чертежа, изображающие положение тропопаузы в меридиональном сечении для февраля и для августа (рис. 31 и 32).

Зимою не только в полярных областях, где поверхность земли покрыта снегом и льдом, но и в умеренных широтах нижний примыкающий к земле слой оказывается холоднее вышележащих слоев. Это происходит благодаря сильному остыванию земной поверхности и потере тепла лучеиспусканием. Такой слой приземной инверсии в полярных областях достигает мощности 1 *км*, а в умеренных зонах меньше.

Летом приземная инверсия сохраняется только в полярных областях, и слой ее уменьшается до нескольких сот метров толщиною. В умеренных зонах приземная инверсия исчезает. Теперь инверсия в полярных зонах объясняется уже не выстыванием земной поверхности, а наоборот нагреванием более высоких слоев, в то время как к нижним слоям это нагревание не может распространяться, ибо они соприкасаются с вечными

льдами. Подобные же инверсии получаются летом также над водными поверхностями морских холодных течений.

Вследствие того, что стратосфера в тропиках и в экваториальной зоне расположена значительно выше чем в средних широтах, температура стратосферы оказывается там ниже, чем в средних широтах. Происходит своего рода компенсация теплых и холодных воздушных масс (холодная тропосфера и низкая, а поэтому теплая стратосфера—у полюсов; теплая тропосфера и высокая, а поэтому холодная стратосфера — на тропиках и у экватора). При дальнейшем возрастании высот, как показывают наблюдения, в малых широтах и на экваторе получается слабое повышение температуры, в то время как в больших широтах и у полюсов не наблюдается изменения температуры. Поэтому на больших высотах 25—26 *дин км* вероятно наступает полное выравнивание температуры от экватора до 60° северной широты (трудно говорить о больших широтах вследствие малого количества наблюдений). При этом температура в этом слое около 25—26 *дин км* равна 50—60° С. Нужно сказать вообще, что наблюдения в высоких слоях атмосферы очень немногочисленны и часто не вполне надежны.

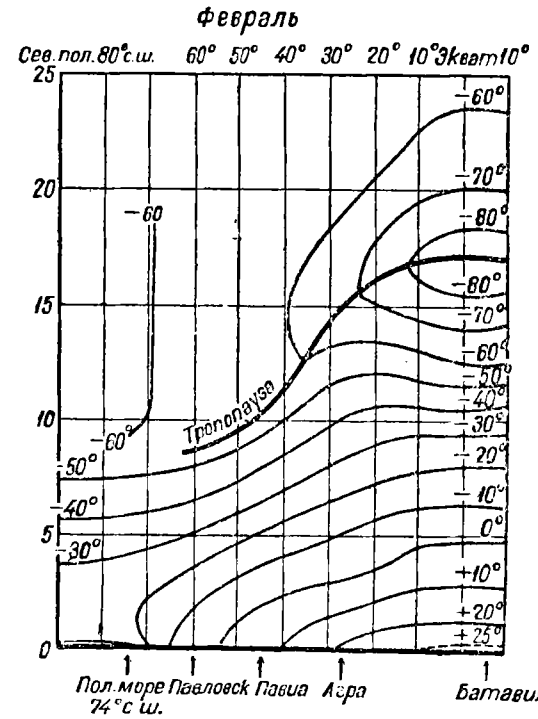

Рис. 31.

Температура стратосферы несколько повышается в летние месяцы и понижается в зимние месяцы. Это имеет место не только в малых, но и в больших широтах и даже у полюсов. При этом интересно, что годовая амплитуда у полюсов оказывается даже больше, чем в средних широтах. Летние максимумы и зимние минимумы температуры стратосферы совпадают со временем летнего и зимнего солнцестояния, в то время как в тропосфере они, как известно, всегда запаздывают.

Все эти данные относятся главным образом к северному полушарию. Что касается южного полушария, то сеть аэрологических станций там очень редка и мы имеем очень мало наблюдений и поэтому очень мало данных для общих выводов. Вообще надо сказать, что о строении атмосферы и в особенности ее верхних слоев в южном полушарии мы составляем понятие главным образом по аналогии с более знакомым нам северным полушарием, экстраполируя выводы, относящиеся к одной полусфере на другую. Однако необходимо заметить, что имеющиеся немногие сравнительно данные наблюдений показывают, что атмосфера южного полушария имеет существенные особенности. Все температурные контрасты выражены в южном полушарии сильнее, например, антарктическое лето в свободной атмосфере оказывается в среднем на 15—20° холоднее, чем арктическое лето. Высота тропопаузы в Антарктике, повидимому, по крайней мере на 2 *км* ниже высоты ее над северным полюсом земли. Эти факты, без сомнения очень важные, которые теперь не могут быть учтены, с тече-

нием времени могут пролить новый свет на вопросы общей циркуляции и вторичных циркуляций в южном полушарии.

Ввиду большого значения, которое представляет влажно-неустойчивое состояние атмосферы для равновесия воздушных масс, интересно проследить, где на земном шаре и в какое время имеют место благоприятные условия для развития влажной неустойчивости. Если мы попрежнему назовем через γ_{pa} влажный адиабатический вертикальный градиент, то как было отмечено выше, влажно-неустойчивое распределение температуры характеризуется неравенством

$$\gamma_{pa} < \gamma < \gamma_a.$$

В полярных областях, как правило, среднее вертикальное распределение температуры таково, что $\gamma < \gamma_{pa}$, так что влажная неустойчивость отсутствует. Исключение может представиться, конечно, в отдельных случаях, когда холодные воздушные потоки соприкасаются с более теплым открытым морем.

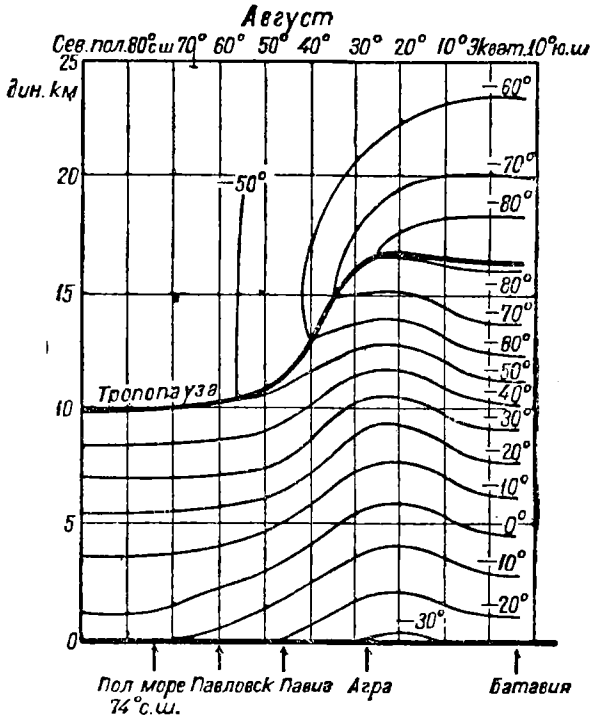

Рис. 32.

То же самое нужно сказать относительно зимнего режима Европейского материка ($\gamma < \gamma_{pa}$), но летом вертикальный температурный градиент нередко бывает близок к влажному адиабатическому, особенно в южной Европе. Часто наблюдается, что вертикальный температурный градиент колеблется, принимая значения то несколько больше, то несколько меньше γ_{pa}, так что влажно-неустойчивое напластование летом в Европе представляет нередкое явление. Над океаном в умеренных широтах могут образоваться влажно неустойчивые слои и зимой, когда холодные массы с охлажденного континента протекают над теплой сравнительно поверхностью океана или моря, вследствие чего вертикальный температурный градиент растет.

В тропиках и нижних слоях тропосферы влажная неустойчивость вследствие сильного нагревания земной поверхности представляет почти постоянное явление. Только на некоторой высоте от земной поверхности γ становится меньше γ_{pa}. Эта верхняя граница влажной неустойчивости лежит, например, в Агре в феврале приблизительно на 3 *км* высоты, а в августе на 13 *км* высоты; в Батавии она круглый год держится на высоте 12—13 *км*. При этом влажная неустойчивость постепенно уменьшается с высотой, так что слои 3—13 *км* обладают только слабой влажной неустойчивостью, и часто находятся в индиферентном состоянии ($\gamma \cong \gamma_{pa}$).

Географическое распределение влажной неустойчивости повидимому вполне определяется распределением притока лучистой энергии.

В тропиках нижние слои тропосферы имеют избыток в притекающей радиации, а слои 9—12 *км* высоты, наоборот, имеют дефицит. В средних широтах в течение жарких летних месяцев получаются подобные же соотношения в количествах притекающей и отдаваемой лучистой энергии, только в ослабленной по сравнению с тропиками форме.

Далее на образование областей влажно-неустойчивого равновесия в атмосфере оказывают влияние воздушные течения. Увеличенный вертикальный температурный градиент, а следовательно условия, благоприятные для образования влажной неустойчивости, будут получаться при вторжении холодных потоков воздуха на высоте без наличия аналогичного потока в нижних слоях. Во-вторых, в благоприятном смысле действует вертикальное расширение, с которым связано раздвигание изэнтропических поверхностей в вертикальном направлении.

Обратное влияние, удаляющее от состояния влажной неустойчивости, оказывает приток теплых масс на высоте (адвективное нагревание) без соответствующего нагревания внизу, или вертикальные токи внизу, типичные для больших антициклонических областей, при которых, как было показано выше, уменьшается вертикальный температурный градиент, а вместе с тем и вероятность наступления влажно-неустойчивого состояния.

Необходимым условием для воздушных пертурбаций и действительной неустойчивости воздушных масс по вертикали является достаточное содержание водяных паров в атмосфере для того, чтобы поднимающиеся массы могли достигнуть состояния насыщения. В этом смысле воздушные течения, приходящие с моря и несущие воздух, богатый водяными парами, дают более благоприятные условия для образования влажной неустойчивости, чем сухие потоки, приходящие с континента.

§ 6. Инверсии. Кривые вертикального распределения температуры для отдельных случаев зондирования атмосферы представляют особенности, которые обычно сглаживаются на средних кривых. Далеко не всегда на таких кривых мы имеем неуклонное падение температуры. Часто встречаются отдельные слои, где падение температуры уменьшается (слои с малым вертикальным температурным градиентом) или вовсе прекращается (изотермия) или даже появляется обратный ход температуры, т. е. температура начинает расти с высотой (инверсия).

Инверсиями в свободной атмосфере называются слои, в которых обычное падение температуры с высотой заменяется повышением температуры. Существование таких слоев связано со многими важными процессами атмосферной динамики. Инверсии имеют широкое распространение в атмосфере. Аэрологические наблюдения показывают, что они встречаются на разных высотах, обладают различной мощностью и различной продолжительностью во времени.

Большое статистическое исследование относительно инверсий было произведено В. Пепплером (W. Peppler), по многолетним данным аэрологической обсерватории в Линденберге.[1]) Он использовал наблюдения змейковых подъемов в Линденберге 1910—1916 гг. Всего было рассмотрено 6802 змейковых подъема, из которых 1092 высотою до 4100 *м* и 120 высотою до 5500 *м*. Пепплер дает такую таблицу относительно частоты инверсий в процентах для слоев различной высоты (см. стр. 224).

Числа таблицы показывают, что в общем число инверсий уменьшается с высотой. Далее, имеются определенные высоты, соответствующие максимумам инверсий. Эти высоты соответствуют средним высотам различных типов облаков. Наиболее важные максимумы частот соответствуют высотам 1500 и 2500 *м*.

Частота быстро убывает, начиная с 3000 *м*, и становится весьма мала на высотах свыше 4000 *м*.

---

[1]) Beiträge z. Physik d. freien Atmosphäre. Bd. X, H. 3).

Повторяемость инверсий по Пепплеру

Высота над уровнем моря в *км*	Частота инверсий в %	Высота над уровнем моря в *км*	Частота инверсий в %
0,12	34,9	2,9	8,5
0,3	11,8	3,1	6,6
0,5	7,2	3 3	6,4
0,7	8,1	3,5	4,0
0,9	8,2	3,7	4,2
1,1	8,2	3,9	4,9
1,3	11,5	4,1	2,4
1,5	7,6	4,3	3,8
1,7	8,8	4,5	1,4
1,9	9,4	4,7	1,6
2,1	9,4	4,9	0,8
2,3	10,6	5,1	0,0
2,5	6,4	5,3	1,7%
2,7		5,5	

Большие инверсии ($>3°$ C) на высотах, больших 900 *м*, чаще всего встречаются осенью, а второй максимум частоты для них падает на апрель. Причина этому заключается, повидимому, в частых прорывах холодного полярного воздуха у земной поверхности весною (в апреле) и подобных же прорывах теплого экваториального воздуха в более высоких слоях, причем такие прорывы теплого воздуха имеют максимум повторяемости в осенние месяцы.

Средняя толщина инверсионного слоя составляет около 220 *м* в слоях, ближайших к земной поверхности, и убывает до 150 *м* на высоте около 3 *км*.

Другая таблица Пепплер'а, также из указанной выше работы, дает характеристику мощности инверсий для различных высот.

Средняя величина и мощность инверсий по Пепплеру

Высота над уровнем моря в *км*	Средняя величина инверсий в °C	Средняя мощность слоя инверсий в *м*
0,12	—	—
—	1,9	217
0,9	—	—
—	1,0	203
1,5	—	—
—	0,7	186
2,5	—	—
>2,5	0,5	154

Таблица показывает, что с увеличением высоты инверсии становятся не только более редкими, но также и менее мощными.

Малые вертикальные температурные градиенты, изотермия, а тем более обращенные вертикальные температурные градиенты, характеризующие повышение температуры с высотой, указывают вообще на неблаго-

приятные условия для вертикальных восходящих и нисходящих токов и оказывают препятствие для развития вертикальной конвекции и турбулентного перемешивания. Поэтому обычно слой, располагающийся над инверсией, обладает стойким незавихренным движением воздуха. Возрастание температуры вместе с падением давления дает $\left(\rho = \frac{p}{RT}\right)$ сильное падение плотности с высотой. Инверсии суть, таким образом, слои увеличенного падения плотности. Так как взаимодействие между слоями, лежащими над инверсией и ниже инверсии, вообще затруднено, то эти слои заметно различаются по своим физическим свойствам. Не только температура, но также и направление и скорость ветра в слоях под инверсией и выше инверсии оказываются различными. Наверху скорость обычно бывает больше, причем она резко меняется скачком при прохождении через верхнюю границу инверсии. Направление ветра при этом также меняется, причем ветер обычно отклоняется вправо.

Изменение абсолютной влажности мало отличается от нормального, но относительная влажность вследствие повышения температуры с высотой и убывания абсолютной влажности сильно падает в области инверсии. Восходящие токи воздуха и вообще турбулентное перемешивание задерживаются у нижней границы инверсии. Поэтому здесь получаются удобные условия для образования облаков. Как утверждают Кеппен (Köppen), приблизительно половина всех наблюденных инверсий располагается над облаками. Чаще всего вертикальное изменение температуры в области инверсии имеет такой характер. Внизу под инверсией имеется невозмущенный температурный градиент, более или менее близкий к нормальному, выше наступает изотермия, которая постепенно переходит в инверсию. Слой, лежащий выше области инверсии, также характеризуется малым температурным градиентом. Нормальный вертикальный градиент обычно достигается лишь на высоте нескольких сот метров над инверсией.

Есть еще одна особенность инверсий, которая, повидимому, связана с тем, что на поверхности разрыва двух разнородных жидких сред, обладающих различными скоростями, образуются, как показал Гельмгольц, волны, подобно тому, как образуются волны на свободной поверхности моря под влиянием движения воздушной среды, расположенной над ней.

Гидродинамическую теорию таких волн для поверхности разрыва, образованной двумя несжимаемыми идеальными жидкостями, дал Гельмгольц. Впоследствии эта теория была дополнена и обобщена другими исследователями (см. подробнее главу IX нашей книги). Укажем здесь только, что весьма характерным явлением для такого рода инверсий с образующимися на них волнами являются располагающиеся правильными грядами облака A-Cu и Ci Cu, которые согласно Гельмгольцу и представляют собою такие реализованные атмосферные волны, на гребнях которых вследствие поднятия воздуха и сопровождающего его охлаждения происходит конденсация паров воды. На записях регистрационных аэрологических приборов такие гряды облаков (Luftwogen) обнаруживают малые периодические колебания температуры. При прохождении аэроплана через слой таких облаков, всегда ощущаются более или менее правильные ритмические удары и попеременные броски вверх и вниз. Но и в тех случаях, когда не имеет места образование правильных волн, все же в инверсиях, где два воздушных слоя различной плотности и температуры залегают один над другим, эти слои обычно обладают еще и различными движениями, т. е. скорости ветра в слое над инверсией и под инверсией разнятся по величине и направлению. Это также сказывается отдельными бросками, которые испытывает проходящий через слой инверсии аэроплан или зондирующий аэрологический прибор. Записи метеорографов часто показывают при прохождении через слой инверсии,

в особенности при прохождении через слой максимальной скорости ветра, неправильные, быстро чередующиеся, изменения давления и температуры.

Вертикальное распределение температуры претерпевает очень большие изменения в непосредственной близости с земной поверхностью, причем в прилежащих к земной поверхности слоях вертикальный температурный градиент не только может быть равен адиабатическому, но может в отдельных случаях значительно превосходить его. Причина этому лежит в интенсивном нагревании земной поверхности, а от нее и прилежащих слоев в жаркое время года и в жаркие часы дня и в связанной с этим нагреванием вертикальной конвекции. Вследствие быстрого нагревания земной поверхности повышается температура прилежащих к поверхности масс воздуха, которые приходят в состояние неустойчивого равновесия. Там, где имеет место наиболее сильное нагревание, и там, где оно распространяется на наибольшую толщу воздушного слоя, воздушные массы приходят в движение и поднимаются вверх до тех пор, пока не придут в равновесие с окружающей средой. Вертикальному поднятию воздуха может благоприятствовать также рельеф местности. На замену поднявшихся масс начинает притекать воздух из областей менее нагретых, причем над этими областями начинается течение воздушных масс вниз. Это хорошо известное и многократно описанное в курсах метеорологии явление называется конвекцией.

Рис. 33.

Пусть вначале воздух у поверхности земли имел температуру 20°, а вертикальный температурный градиент составлял 0,6° на 100 *м* высоты. Пусть конвекция начинается тогда, когда температура приземных масс повысится на 1°. Следовательно воздух начинает свое поднятие при температуре 21° и при этом охлаждается адиабатически. Простой подсчет показывает, что равновесие для него наступит на высоте 250 *м* при температуре 18,5°. Но нагревание у земной поверхности продолжается, и если рассматриваемая частица снова вернется к земной поверхности, то, нагревшись там до 22°, она вторично поднимется уже на более высокий уровень и придет в равновесие с окружающей средой только на высоте 500 *м* при 17° С. Таким образом конвекция будет распространяться на все более и более высокие слои и будет захватывать все большие и большие массы воздуха. При этом на некотором уровне распространения конвекции будет достигнута конденсация и начнется связанный с нею приток тепла, отчего уменьшится потеря в температуре поднимающей воздушной массы и поднятие ее сразу значительно возрастет.

Простой подсчет в нашем случае показывает, что если конденсация начнется на высоте 1200 *м*, то интенсивное вертикальное поднятие воздушных масс распространяется до 9000 *м* высоты, и только на этом уровне будет достигнуто равновесие. Пока уровень конденсации не до-

стигнут, конвекция распространяется вверх медленно, и вся масса воздуха, охваченная конвекцией прочно прогревается и принимает вертикальный градиент, близкий к адиабатическому. Но как только на верхнем уровне слоя, охваченного конвекцией, начинается конденсация, тогда наступает влажно-неустойчивое равновесие и воздух устремляется с ускорением вверх, прокладывая путь для дальнейшего продвижения вверх нижележащих масс. Все бо̀льшие и бо̀льшие массы воздуха вовлекаются в этот бурный вертикальный поток, и происходит образование cumulus'ов, которые в случаях сильной влажной неустойчивости могут перейти в Cu-Nb грозового типа. При этом циркуляция прекращается, так как поднимающийся воздух при конденсации повышает свою потенциальную температуру и достигает равновесия только на значительной высоте, там где его потенциальная температура равняется потенциальной температурой окружающей среды. Нагревание всего нижележащего слоя при этом происходит медленно и достигается не скоро.

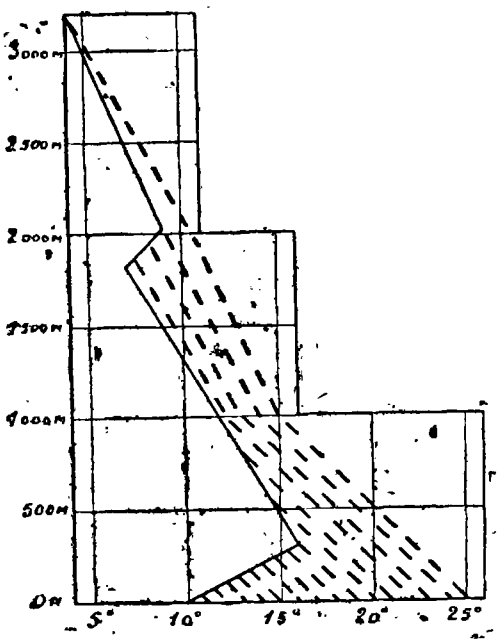

Рис. 34.

На прилагаемых рисунках первоначальное распределение температуры представляется сплошной линией, а кривые изменения температуры поднимающихся масс воздуха даны штриховыми линиями. На рис. 33 представлены три случая, соответствующие начальным температурам 0°, 10°, 20°. Положение равновесия достигается тем скорее, чем ниже первоначальная температура, так как при более низких температурах абсолютная влажность воздуха меньше и конденсационные адиабаты мало отличаются от сухих. Поэтому зимою облака конвекции (Cu) обладают значительно меньшей мощностью, чем летом.

Рис. 34 хорошо иллюстрирует роль инверсий как преграждающих слоев в распространении конвекции. Он изображает распределение температуры по вертикали, причем на земле температура 10° С. Непосредственно над землей распространяется наземная инверсия до высоты 300 *м*. На этой высоте температура составляет 16°. Далее она убывает до высоты 1800 *м* на 7°. На высоте 1800 *м* начинается вторая инверсия, дающая повышение температуры на 2° в слое толщиной 200 *м*. Начиная с высоты 2000 *м* (верхняя граница инверсии) температурный градиент составляет 4° на 100 *м* поднятия. Эта температурная кривая представлена на чертеже сплошной ломаной линией. Кривые изменения состояния поднимающегося воздуха изображены пунктиром и нанесены для всех значений наземных температур от 16 до 25° через 1°. Если изменение высоты распространения конвекции при повышении начальной температуры на 1° назвать „конвекционной ступенью", то рис. 34 ясно показывает, что вначале в области нижней инверсии эта ступень очень мала (около 33 *м*). Когда конвекция преодолевает слой нижней инверсии и распространяется выше, конвекционная ступень возрастает до 250 *м*. Пусть на высоте 1000 *м* начинается конденсация. Конвекционная ступень сразу быстро возрастает, но конвекционные токи встречают вторую инверсию и конвективная ступень снова падает, пока не будет преодолена верхняя инверсия, после чего ступень опять становится большой и достигает величины около 1000 *м*. При этом предполагается ради упрощения, что повы-

шение температуры у земной поверхности повышает давление пара ровно настолько, что высота уровня конденсации не меняется. На самом деле это, конечно, не имеет места, и с возрастанием давления пара высота уровня конденсации медленно возрастает.

Преграждающее действие слоев инверсии на распространение вертикальной конвекции можно наблюдать на характерных формах столообразных Cu, верхние части которых оказываются плоско срезанными на одном и том же уровне, и этот уровень очевидно определяется нижней границей инверсии, через которую конвекция не может проникнуть. Такие же характерные черты имеют так называемые наковальничные Cu, и только при очень сильных конвекционных токах инверсия преодолевается и получаются характерные формы наковальни.

Фронтальные инверсии. Большие и мощные инверсии, залегающие над обширными пространствами земной поверхности и отличающиеся устойчивостью и продолжительностью существования, находят, повидимому, свое объяснение в факте встречи больших и мощных разнородных потоков воздуха: теплых, приходящих из тропических широт, и холодных, имеющих полярное происхождение, причем воздушные массы обоих потоков текут рядом друг с другом, не смешиваясь и не проникая одна в другую в течение более или менее продолжительного промежутка времени.

Такие мощные разнородные потоки представляют весьма характерное явление динамики атмосферы в средних широтах. Они появляются здесь, как мы увидим впоследствии, как вторичное явление общей циркуляции атмосферы. Новейшая синоптика приписывает им весьма большое значение. Борьбою и сменой этих течений полярного и тропического воздуха определяются основные черты синоптических процессов и смена погоды в средних широтах обоих полушарий. Несомненна также их связь с образованием и развитием перемещающихся барических особенностей (циклонов и антициклонов), о чем подробно будет говориться в гл. XII нашей книги.

Здесь заметим только, что поверхность раздела таких двух разнородных масс, образующих инверсию (теплый слой залегает над холодным как более легкий), обычно имеет слабый угол наклона к земной поверхности. Как будет показано, такой наклон является необходимым условием равновесия разнородных воздушных масс. В случае неустойчивости вдоль поверхности раздела возникает скольжение воздушных масс, причем в некоторых случаях теплый верхний воздух скользит вверх, а лежащий над ним холодный вниз, а в других случаах, наоборот, теплый воздух сползает вниз, а холодный поднимается под поверхностью раздела вверх. Поднятие воздушных масс сопровождается охлаждением и процессами конденсации. Поэтому выше или ниже таких инверсионных слоев обычно происходит образование облаков с характерными формами развития.

Антициклональная инверсия. Остановимся несколько подробнее на одном важном случае образования инверсии в атмосфере, связанном с опусканием слоев воздуха, которое не сопровождается их взаимным перемешиванием. Так образуются мощные большие инверсии в устойчивых антициклонах.

Предположим, что обширная масса воздуха опускается без нарушения горизонтального распределения слоев, причем окружающая атмосфера находится в состоянии покоя. Это опускание представляет адиабатический процесс, причем давление в опускающейся массе воздуха изменяется в соответствии с обычным гидростатическим уравнением. Пусть далее опускание сопровождается горизонтальным растеканием воздуха, так что отдельные слои уменьшаются в толщине и распространяются на большие горизонтальные площади.

Возьмем слой, прилежащий к изобарической поверхности p, площади поперечного сечения Q, в котором вертикальный температурный гра-

диент $-\frac{dT}{dz}=\gamma$ (рис. 35). Пусть после опускания этот слой имеет давление p, площадь поперечного сечения Q' и вертикальный температурный градиент $-\frac{dT'}{dz'}=\gamma'$. Тогда, вводя в рассмотрение потенциальную температуру ϑ слоя, которая остается неизменной, можем написать (см. гл. III)

$$\frac{d\vartheta}{dz}=\frac{\vartheta}{T}(\gamma_a-\gamma),\quad \frac{d\vartheta}{dz'}=\frac{\vartheta}{T'}(\gamma_a-\gamma').$$

Но $\frac{d\vartheta}{dz'}=\frac{d\vartheta}{dz}-\frac{dz}{dz'}$. Далее, так как масса слоя сохраняется неизменной, то

$$\rho\cdot Q\cdot dz=\rho'\cdot Q'\cdot dz',$$

откуда

$$\frac{dz}{dz'}=\frac{\rho'\cdot Q'}{\rho\cdot Q}=\frac{p'\cdot T\cdot Q'}{p\cdot T'\cdot Q},$$

ибо

$$\rho=\frac{p}{RT}.$$

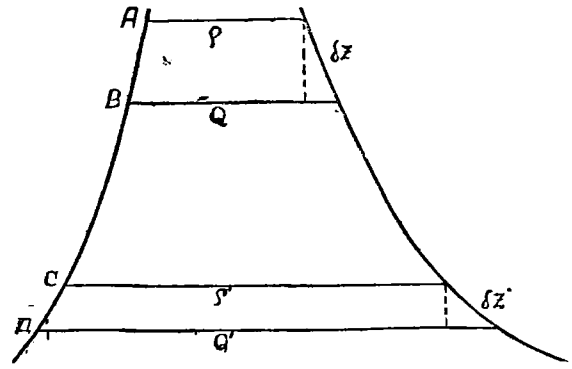

Рис. 35.

Следовательно

$$\frac{d\vartheta}{dz'}=\frac{d\vartheta}{dz}\cdot\frac{p'\cdot T\cdot Q'}{p\cdot T'\cdot Q}=\frac{\vartheta}{T}(\gamma_a-\gamma)\frac{p'\cdot T\cdot Q'}{p\cdot T'\cdot Q}=\frac{\vartheta}{T'}(\gamma_a-\gamma')$$

или

$$(\gamma_a-\gamma)\frac{p'\cdot T\cdot Q'}{p\cdot T'\cdot Q}=\frac{T}{T'}(\gamma_a-\gamma'),$$

откуда

$$\gamma'=\gamma_a-\frac{p'\cdot Q'}{p\cdot Q}(\gamma_a-\gamma).$$

Если, как обычно, $\gamma<\gamma_a$, то при $\frac{Q\cdot p'}{Q\cdot p}>1$, γ' станет меньше γ, т. е. падение температуры с высотой уменьшится, в некоторых случаях, когда $\frac{Q'\cdot p'}{Q\cdot p}=\frac{\gamma_a}{\gamma_a-\gamma}$ может наступить изотермия, а при значениях $\frac{Q'\cdot p'}{Q\cdot p}>\frac{\gamma_a}{\gamma_a-\gamma}$ — даже инверсия.

Так, например, если положить $\gamma_a=1°C/100$ *м*, то получим следующую таблицу:

	$\frac{Q'\cdot p'}{Q\cdot p}$	2	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	
$\gamma=0{,}8°/100$	γ'	0,6	0,4	0,9	0,93	C°/100 *м*
$\gamma=0{,}6°/100$	γ'	0,2	—0,2	0,8	0,87	C°/100

Наоборот при $\frac{Q'\cdot p'}{Q\cdot p}<1$ мы имеем $\gamma'>\gamma$.

Обычно условие $\frac{Q'\cdot p'}{Q\cdot p}>1$ отвечает опусканию и нисходящему потоку воздуха, а условие $\frac{Q'\cdot p'}{Q\cdot p}<1$ отвечает поднятию и восходящему потоку.

При опускании обычно происходит растекание и $\frac{Q'}{Q} > 1$ и, равным образом, $\frac{p'}{p} > 1$. При поднятии $\frac{p'}{p} < 1$ и обычно $\frac{Q'}{Q} < 1$. Однако следует отметить один случай, когда при поднятии может получиться горизонтальное растекание масс, а именно, когда восходящий ток достигает нижней границы стратосферы, устойчивое распределение температуры в которой препятствует дальнейшему вертикальному поднятию. Тогда восходящие воздушные массы растекаются под нижней границей стратосферы. Поэтому при больших значениях $\frac{Q'}{Q}$, даже при поднятии, величина $\frac{Q' \cdot p'}{Q \cdot p}$ может сильно возрасти и может получиться инверсия. Это, повидимому, имеет место на самом деле, и такими восходящими токами с сильным горизонтальным растеканием можно объяснить существование слабых инверсий у верхней границы тропосферы. Существование могучих восходящих токов у нижней границы стратосферы очень отчетливо наблюдалось во время вулканических извержений, когда восходящий столб теплого воздуха, окрашенный в темный цвет присутствием мелкого вулканического пепла, поднимался до больших высот, соответствующих нижней границе стратосферы, и там расплывался, принимая столообразную форму.

Возвращаясь к случаям инверсий заметим, что такое опускание, сопровождаемое растеканием, вполне характерно для устойчивых антициклонов средних широт. При этом опускающийся воздух адиабатически нагревается и осушается и, таким образом, тело антициклона является теплым и сухим. В соответствии с этим, как известно, антициклоны характеризуются сухой и ясной погодой. Однако в ясные зимние дни происходит интенсивное лучеиспускание с поверхности земли и сильное охлаждение как самой земной поверхности, так и непосредственно прилегающего к ней слоя; образуется как бы холодная шапка воздуха, отличающаяся большой устойчивостью. Теплые массы, опускаясь сверху и встречая этот охлажденный нижний слой, растекаются уже не над самой земной поверхностью, а над верхней границей охлажденного слоя. Инверсия усиливается, и так как опускающиеся теплые массы имеют большую абсолютную влажность, то при соприкосновении с холодными приземными массами происходит интенсивная конденсация и развитие облачного слоя на поверхности раздела. Этот тип погоды очень характерен для некоторых продолжительных зимних антициклонов. Внизу господствует очень низкая температура и сплошная облачность. Но стоит, например, воздухоплавателю подняться на небольшую высоту, он проходит облачный слой с сильной температурной инверсией, выше которой простирается теплое тело антициклона с нисходящими токами воздуха высокой температуры и малой относительной влажности, что дает наверху теплую, ясную и сухую погоду.

Изложенные здесь теоретические соображения были даны Margules'ом.[1])

Опускание воздушных масс в антициклонах имеет часто весьма большие размеры. Шоу утверждает, на основании некоторых подсчетов, что на большой площади высокого давления со слабыми горизонтальными течениями опускание воздушных масс составляет около 80 *м* в сутки. Относительная влажность над антициклональной инверсией обыкновенно ниже 30%, а иногда доходит до 10%. Если принять, как это чаще всего бывает, среднюю высоту антициклональной инверсии в 1,5 *км*, то воздух, который вначале был насыщен, а потом стал опускаться до уровня 1,5 *км*, причем относительная его влажность стала 25%, должен был бы опуститься вниз на 2 *км*. Если принять относительную влажность в конце 10%, то потребовалось бы опускание на 3,5 *км*, причем на этом

[1]) „Meteorologische Zeitschrift" 1906.

пути адиабатическое нагревание составило бы около 34° С. Редко наблюдающаяся относительная влажность в 1% указывает на опускание воздуха с границы стратосферы.

Инверсии этого типа не ограничиваются областью антициклона, а могут образоваться во всякой массе воздуха, которая почему-либо продолжительно опускается. Обыкновенно антициклональные инверсии горизонтальны, в то время как инверсии фронтальные имеют наклон, меньший $^1/_{200}$. Некоторые инверсии, связанные с фронтами, но лежащие ниже настоящих фронтальных инверсий, также имеют малые наклоны, хотя весьма возможно, что они происходят от опускания воздушных масс.

Как на возможную причину образования инверсий можно еще указать на разную степень нагревания сухих и облачных масс воздуха. Предположим, например, что происходит медленное опускание большой воздушной массы, в верхней части которой имеется облачный слой, а нижняя часть свободна от облаков. Пусть вначале вершина облака находилась на высоте 3 *км* при температуре —7° С и давлении 700 *мбр*, причем не существовало инверсии в промежуточном слое между сухой и влажной массой. Пусть происходит опускание, в результате чего получается снижение верхнего уровня облака до высоты 1,5 *км*. При таком снижении температура облачной массы поднимается до +3° С, а температура лежащей непосредственно над ней сухой массы—до +9° С, что дает инверсию около 6°. Если облачный слой не сплошной, а прерывистый, то инверсия уменьшается. Здесь мы имеем случай, когда наличие облачного слоя является причиной инверсии. Связь между облаками и инверсиями вообще очень тесна.

Правда, при опускании больших облачных масс происходит испарение и удаление от состояния насыщения. Облако должно рассеиваться и постепенно исчезать. В упомянутом примере, когда насыщенный воздух нагревается при спускании с —7° С до +3° С, для того чтобы поддержать состояние насыщения, надо было бы добавить около 2,2 *г* влаги на 1 *кг* воздуха. Но такое обогащение может иметь место на самом деле, если, например, опускание происходит над поверхностью океана.

Джиблет (Giblett) показал,[1]) что воздух, пройдя 1000 *км* над океаном со скоростью 5 *м/сек*, т. е. в течение 55 часов, обогащается водяным паром в количестве, соответствующем 4 *мм* выпадающих осадков. При сильных ветрах и большой турбулентности такое обогащение может произойти в более короткий промежуток времени. Опускание на 1,5 *км* в течение 55 часов представляет конечно очень медленный процесс, но мощные облачные слои и мощные инверсии развиваются именно при таком медленном опускании.

Ночные инверсии. Инверсии иного типа обязаны своим происхождением охлаждению слоев воздуха вместе с земной поверхностью вследствие потери тепла излучением. Такие инверсии развиваются у земной поверхности и усиливаясь постепенно распространяется кверху.

В ясные холодные ночи земная поверхность сильно охлаждается вследствие излучения, и от нее охлаждение распространяется на прилегающие слои воздуха. Так возникают ночные инверсии. Условиями благоприятными для них очевидно являются: ясная погода и достаточная сухость воздуха, отсутствие ветра и турбулентного перемешивания, открытый характер земной поверхности,—все что создает благоприятные условия для сильного ночного охлаждения. Наоборот защита земной поверхности растительностью (лес, трава, кустарники), облака низких ярусов, влажность почвы и прилегающих к ней воздушных слоев и, наконец, турбулентное перемешивание препятствуют развитию ночных инверсий. Ночные инверсии дают иногда значительные повышения температуры с высотой, но распространяются не высоко: обычно на высоту несколь-

---

[1]) Proc. R. Soc. v. 99 (A) 1921, стр. 472—490.

ких сот метров над земной поверхностью. Они сопровождаются иногда заморозками, гибельными для злаков и растений.

Ночные инверсии обычно дают такой ход изменения температуры с высотой. Наибольшее повышение температуры происходит в нижнем слое у самой земной поверхности, и при чистом типе инверсии повышение постепенно замедляется до некоторой высоты *H*, где наступает изотермия, после чего обыкновенно температура начинает падать со значительным градиентом, соответствующим приемлемым условиям. Если же в слое инверсии развивается максимум ветра, а в вышележащем и нижележащем слоях развивается турбулентное перемешивание, то в нижних, прилежащих к земной поверхности слоях, вследствие адиабатического охлаждения поднимающихся масс воздуха, может появиться положительный вертикальный градиент, т. е. падение температуры вместо возрастания. Вместе с тем градиент в слое, лежащем выше инверсии, может усилиться вследствие опускания и адиабатического нагревания выше лежащих масс воздуха. Мощные ночные инверсии зимой распространяются нередко до высоты 1500 *м*.

На море, при прохождении над охлажденной водной поверхностью теплого воздушного потока, может образоваться инверсия. Происхождение такой инверсии, очевидно, имеет сходство с происхождением ночной инверсии, так как в обоих случаях получается охлаждение воздушного слоя снизу от соприкосновения с холодной поверхностью. Если воздух влажный, то развивается конденсация. Так образуются большие морские туманы. Таково, например, происхождение больших туманов над Нью-Фаундлендскими отмелями в зимнее время года. Охлаждение при этом ограничивается сравнительно тонким слоем.

Если инверсия развивается на высоте нескольких десятков метров без ветра, то над большими городами дым городских и заводских топок поднимается до нижней границы слоя инверсии и, задерживаясь там, расстилается под ним горизонтально, образуя плотный навес мглы и тумана. Таковы условия происхождения знаменитых лондонских туманов, в которых часто главную роль играет даже не собственно туман, а мгла, расстилающаяся над городом и усиливающаяся преграждающим конвекцию инверсионным слоем.

Динамические инверсии. W. Peppler в 1913 г. обратил внимание на возможность образования инверсии вследствие резкого изменения скорости и направления ветра с высотой.

Пусть имеется горизонтальный слой с резко выраженным максимумом ветра. Такой слой оказывает согласно Пепплеру подсасывающее действие на соседние вышележащий и нижележащий слои. На рис. 36 пусть прямая *BB* изображает начальное распределение температуры по высоте с вертикальным температурным градиентом 0,75°. На высоте 100 *м* имеется теплый слой с максимумом ветра, оказывающий подсасывающее действие на соседние слои. Внизу и вверху развиваются вертикальные течения и турбулентное перемешивание, причем вертикальный температурный градиент возрастает и приближается к адиабатическому. По истечении некоторого времени температурное состояние в нижних слоях изобразится прямой *AC*, а температурное состояние в верхнем слое прямой *BC'*. В преграждающем слое с максимумом ветра должна таким образом развиться инверсия, что выражается участком кривой *CC'*.

Если в начальном состоянии вертикальный температурный градиент был значительный и приближался к адиабатическому, то очевидно нет причин для образования инверсии, но чем меньше в начальном состоянии вертикальный температурный градиент, тем больше шансов, что при существовании слоя с максимумом ветра в этом слое разовьется инверсия. Если восходящие течения в нижней части атмосферы сопровождаются конденсацией и образованием облаков, то облака образуются непосредственно под слоем максимума ветра. Рис. 36 предста-

вляет распределение температуры с высотою в этом случае. В облачном слое вертикальный температурный градиент приближается к влажному адиабатическому γ_{pa}. Таким образом по сравнению с предыдущим случаем, когда облачного слоя нет, инверсия оказывается несколько ослабленной.

Наибольший скачок температуры оказывается непосредственно над облаками, и он усиливается еще испарением с поверхности облака.

Такие инверсии Пепплер[1]) предложил назвать динамическими инверсиями. Они существенно отличны по своему происхождению от больших фронтальных инверсий и от инверсий антициклонального типа, связанных с опусканием больших масс воздуха. Происхождение их, по мнению Пепплера, обусловлено существованием слоя с максимумом ветра и его подсасывающим влиянием на выше и ниже лежащие слои. В дальнейшем их развитии играет роль турбулентное перемешивание. Однако теоретическое обоснование самого факта подсасывающего действия ламинарного потока отсутствует. С точки зрения гидродинамики вопрос о подсасывающем действии такого потока представляется невыясненным. Поэтому правильнее было бы говорить просто о различной степени турбулентности в горизонтальных слоях как о причине, вызывающей такого рода инверсии.

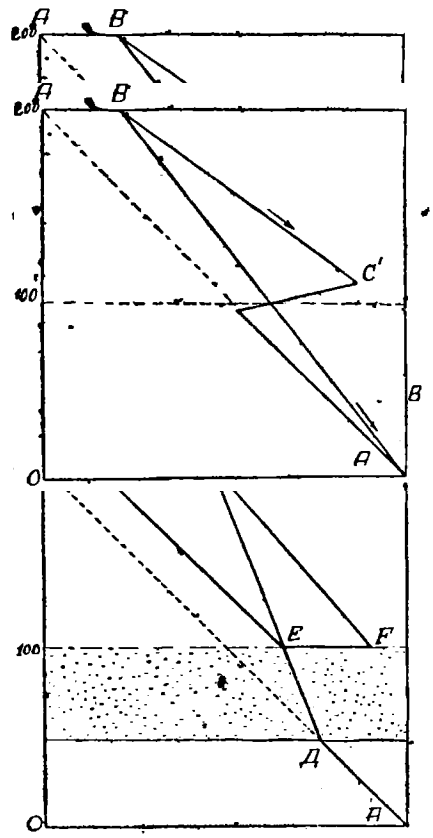

Рис. 36.

Весенняя инверсия. П. А. Молчанов обратил внимание на характерную форму инверсии, связанную с весенним таянием снега. Если турбулентный поток воздуха несет массы с температурой выше нуля, то начинающееся интенсивное таяние снега вызывает поглощение скрытого тепла и охлаждение прилежащих к земле масс воздуха. Вследствие этого образуется сильная инверсия на высоте нескольких сот метров над земной поверхностью, которая действует как слой преграды для турбулентного перемешивания. Ниже этого слоя инверсии турбулентное перемешивание развивается особенно интенсивно, и таким образом идет постоянный приток тепла от выше лежащих слоев к снежному покрову, и происходит усиленное таяние, которое, в свою очередь, вызывает новое охлаждение нижних слоев и тем самым усиливает и отодвигает вверх нижнюю границу инверсии. Потенциальная температура воздуха выше инверсии при этом достигает 8—10° выше нуля. Такие инверсии можно назвать снежными или весенними инверсиями. Этим объясняется тот факт, что весною наиболее сильное таяние снега и разрушение ледяного покрова водоемов происходит не в ясные солнечные дни с нормальным вертикальным распределением температуры, а, наоборот, в облачные дни и связано с существованием сильной инверсии и интенсивным турбулентным перемешиванием.

Инверсии и турбулентное перемешивание. Инверсии и облака. Турбулентное перемешивание имеет благоприятные условия

[1]) W. Peppler. Zur Kenntnis der Temperaturinversionen. (Die Arbeiten des Königl. Preussischen Aeronautischen Observatoriums bei Lendenberg im Jahre 1912 VIII. Bd. 1913, S. 255).

для развития, когда вертикальный температурный градиент среды больше адиабатического (т. е. когда потенциальная температура убывает с высотой) и турбулентное перемешивание затруднено, если вертикальные температурные градиенты малы, а, следовательно, особенно затруднено в слоях изотермии и инверсии. Существенная разница такой конвекции, обусловленной механическим перемешиванием, от рассмотренной ранее конвекции, вызванной нагреванием земной поверхности и прилежащих к ней воздушных слоев состоит в том, что частицы здесь не возвращаются к своему первоначальному уровню, но остаются в новой среде, причем температурные разности частиц и окружающей среды выравниваются.

Если рассматривать обычные нормальные условия вертикального распределения метеорологических элементов, при которых потенциальная температура растет с высотой ($\gamma < \gamma_a$), а удельная влажность убывает, то очевидно частица, поднятая от своего начального уровня и охлаждающаяся адиабатически во время своего поднятия, попадает в более сухую и теплую среду. Задерживаясь в этой среде, она передает среде водяной пар, а от этой окружающей среды берет тепло и, нагреваясь, приходит в равновесие с окружающей средой. Частица же, перенесенная турбулентным перемешиванием вниз, наоборот, оказывается теплее окружающей среды, но зато беднее содержанием водяного пара. Она, таким образом, приносит в нижележащий слой тепло и повышает температуру этого слоя и вместе с тем понижает среднюю удельную влажность слоя. Таким образом благодаря турбулентному перемешиванию тепло непрерывно переносится вниз, а водяной пар наверх. Предельное положение, к которому ведет процесс, будет очевидно: одинаковая потенциальная температура и одинаковая удельная влажность во всем слое, подвергающемся турбулентному перемешиванию. Другими словами, это предельное положение характеризуется адиабатическим вертикальным температурным градиентом и возрастанием относительной влажности с высотой.

Если, например, в таком предельном достигнутом положении температура на высоте 1000 *м* 10° и на высоте 2000 *м* 0°, а удельная влажность во всем слое 4,8 *г/кг*, то относительная влажность на высоте 1000 м будет 57%, а на высоте 2000 *м* 100%. Штюве считает такое соотношение в числах относительной влажности весьма характерным. Оно часто встречается для слоев порядка 1 *км* толщины со средней температурой 5° С. В следующей небольшой таблице даны числа, выражающие отношение $\frac{R_a}{R_0}$ (R_a — относительная влажность на нижней границе слоя, а R_0—относительная влажность на верхней границе) для различных средних температур слоя.

t C° =	30	20	10	0	—10	—20	—30
$\frac{R_a}{R_0}$ =	0,63	0,60	0,58	0,55	0,52	0,45	0,43

Интересно отметить, что вертикальный градиент относительной влажности в этом случае возрастает с уменьшением температуры. Следовательно действие турбулентного перемешивания в смысле повышения относительной влажности верхних слоев оказывается больше зимой, чем летом.

Такие процессы, очевидно, имеют место в случаях динамических инверсий, о которых говорит Пепплер. Если, например, имеются две поверхности разрыва (или два инверсионных слоя), то в пространстве между этими поверхностями развивается энергичное турбулентное перемешивание. Благодаря этому под верхней поверхностью относительная влажность сказывается значительно больше и условия для развития конденсации и облачного слоя более благоприятны. Если слой конденсации не очень

толст, то появляются облака типа Cu. Соответственно высоте слоя структура их получает характер A-Str, A-Cu или Ci-Cu. Если же инверсия наклонна, и в слое, лежащем под ней, в котором получается увеличенная относительная влажность, развивается скольжение воздушных масс вверх, то процессы конденсации и образования облаков становятся более интенсивными.

Если насыщение не вполне достигнуто, но все же под поверхностью разрыва имеется максимум относительной влажности, то образование облаков может произойти в случае поднятия всей массы. Пусть благодаря каким-нибудь процессам, например, благодаря вклиниванию внизу новых масс воздуха, вся масса, содержащая инверсионный слой, будет поднята и займет более высокое положение. Тогда вследствие адиабатического охлаждения всей массы в целом, конденсация разовьется именно в слоях, лежащих непосредственно под инверсией. Инверсия будет как бы проявлена в атмосфере, подобно тому, как проявляется снимок на фотографической пластинке. Облака, возникающие при этом, имеют очевидно слоистую структуру.

Если, например, обширная воздушная масса тянется вверх вдоль поверхности разрыва и в этой массе содержится слой инверсии, под которым располагается слой максимальной относительной влажности, то благодаря общему поднятию всей массы конденсация начинается именно в этом верхнем слое, а не вблизи поверхности скольжения. Таким образом возникают Ci—Str, появление которых предшествует теплому фронту.

Нередко бывает, что мощный Cu при своем поднятии вытесняет вверх лежащие над ним воздушные массы. Если в этих выше лежащих массах есть инверсионные слои с располагающимися под ними слоями максимальной относительной влажности, то в этих слоях начинается конденсация и образуются облака. Так возникают зонтичные cirrus'ы над грозовыми cumulus'ами. Вероятно такое же происхождение имеют A-Cu и Str-Cu, развивающиеся по соседству с грозовыми Cu-Nb, вследствие вынужденного поднятия масс воздуха, содержащих слабые уже выродившиеся инверсии.

В некоторых случаях, если турбулентное перемешивание слабо в слоях ниже слоя инверсии и там не образуется достаточно сильных восходящих токов влажного воздуха, а верхний слой теплого воздуха, лежащий над инверсией, богат содержанием пара, облака могут развиваться в верхнем слое. В особенно больших размерах такое образование облаков в верхнем теплом слое происходит на поверхностях скольжения, разделяющих две различные по своей природе массы воздуха, на так называемых фронтальных поверхностях.

Рассмотрим типичную кривую состояния, когда облака расположены ниже слоя инверсии (рис. 37). Максимальная относительная влажность (полное насыщение или даже пересыщение) будет лежать в верхней части облака, так как здесь температура достигает минимума. В слое непосредственно под инверсией относительная влажность быстро растет с высотой, тогда как над слоем облаков при переходе в область инверсии она очень быстро падает. Таким образом на верхней границе такого облачного слоя, т. е. на нижней границе слоя инверсии, получаются весьма благоприятные условия для образования гельмгольцевских волн.

Благодаря выпадению осадков относительная влажность все время возрастает с течением времени книзу от инверсии, и область 100%-относительной влажности или пересыщения распространяется книзу, но максимум пересыщения всегда остается на верхней границе облачного слоя.

На рис. 37*в* представлен другой случай, когда образование облаков начинается в теплом влажном воздухе над инверсией. 100%-относительная влажность при этом начинается от верхней границы слоя инверсии и распространяется до некоторой высоты, зависящей от градиента влажности теплой воздушной массы. Максимум пересыщения вследствие убы-

вания температуры с высотой опять-таки располагается вначале на верхней границе облачного слоя. Ввиду выпадения осадков и оседания облачной массы насыщение и пересыщение распространяется вниз в область инверсии и, благодаря убыванию температуры вниз, в инверсионном слое там начинается образование вторичного максимума влажности. При этом там образуется состояние благоприятное для развития облаков Mam.-Cu. Когда относительная влажность достигает 100% в самой нижней, т. е. в самой холодной части инверсии (стадия III на рис. 37*в*), то и максимум пересыщения достигает своего самого низкого положения (наиболее благоприятные условия для образования облаков Mam.-Cu). Если потом происходит дальнейшее опускание нижней границы 100%-относительной влажности, то максимум пересыщения все же будет держаться на ниж-

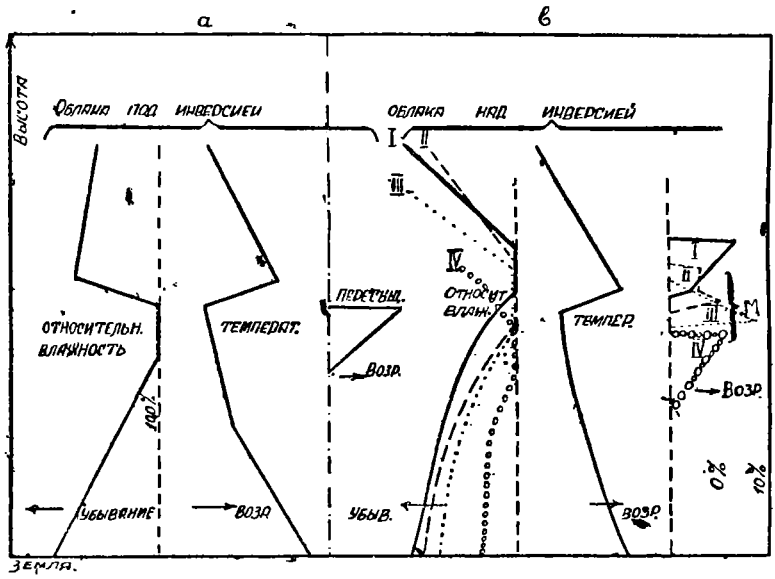

Рис. 37.

ней границе инверсии, и это положение максимума пересыщения на верхней границе насыщенного слоя будет существовать и при дальнейшем спускании (стадия *IV*). При этом дальнейшем спускании форма Mam.-Cu постепенно исчезает и переходит в S.-Cu.

Маргулес указал на возможность образования инверсии над облачным слоем, причем такая инверсия может развиваться постепенно и в однородном вначале воздушном слое. Для этого не требуется непременно предполагать с самого начала существования различных масс воздуха и фронтальной поверхности между ними.

Пусть поверхность уровня представляет такую поверхность, при прохождении которой снизу вверх наблюдается сильное (сначала) падение влажности. Такое обстоятельство часто может быть связано с температурной инверсией.

Устойчивое равновесие будет в том случае, когда плотность в верхнем слое меньше, чем в нижнем. Называя плотность и температуру под поверхностью раздела через ρ_1, T_1, а плотность и температуру над поверхностью раздела через ρ_2, T_2 и принимая во внимание равенство давлений, будем иметь

$$R_1T_1 < R_2T_2,$$

где R_1 и R_2 — газовые постоянные нижнего и верхнего слоя — различные в силу различного содержания в слоях водяного пара.

Если верхний слой богаче содержанием пара ($R_2 > R_1$), то может быть $T_2 < T_1$, т. е. может удерживаться падение температуры с высотой.

Если же, наоборот, более богатый содержанием пара воздух лежит внизу $R_1 > R_2$, то непременным условием равновесия будет температурный скачок $T_2 > T_1$.

Действительно при полетах много раз наблюдалось, что верхняя граница облаков часто бывает поверхностью разрыва температуры.

Восходящие массы, в которых часть содержащегося пара конденсируется, приходят в состояние равновесия только тогда, когда встречают при своем поднятии слой меньшей плотности. Если этот слой более сухой, то на границе слоев образуется температурный скачок. Если на границе обоих слоев плотность одинакова, то получается еще одно условие равновесия. Вертикальный температурный градиент в верхнем слое у самой границы не может быть больше влажного адиабатического градиента. Иначе частица влажного воздуха поднимаясь оказалась бы легче окружающего воздуха и стала бы подниматься дальше.

Маргулес приводит следующие примеры:

I. Влажный почти насыщенный воздух располагается над сухим.

Пусть $T_2 = 283°$, $p = 720$ *мм* рт. ст., $e = 9$ *мм* рт. ст.

Тогда надо положить $R_1 = R'$,

$$R_2 = \frac{R'}{1 - 0{,}3767\,\frac{9}{720}} \cong R'\left(1 + 0{,}3767\,\frac{1}{80}\right).$$

Наибольшее возможное значение $T_1 = 284{,}3°$.

II. Сухой воздух располагается сверху над слоем влажного, почти насыщенного.

Пусть $T_1 = 283$, $p = 720$ *мм*, $e = 9$ *мм*.

Надо положить $R_2 = R'$,

$$R_1 = R'\left(1 + 0{,}3767\,\frac{1}{80}\right) = R'(1 + 0{,}00471).$$

Наибольшее возможное значение $T_2 = 284{,}3°$.

Если верхний слой имеет относительную влажность 50%, то температурный скачок составляет по меньшей мере 0,6°.

Исследование температурной кривой над инверсией часто затрудняется тем обстоятельством, что зондирующий аппарат проходя облачный слой, лежащий на верхней границе инверсии, покрывается осадками, которые при дальнейшем поднятии испаряются, и это испарение происходит за счет тепла, отнимаемого от тела термометра. Таким образом термометр действует как влажный термометр и дает уменьшенные показания температуры. Подобное же искажение показаний получается, когда регистрирующий прибор спускаясь входит в облачный слой. Эти погрешности наблюдений могут быть отчасти устранены, если при исследовании температурной кривой в области выше облачного слоя пользоваться наблюдениями спуска, а для температурной кривой ниже облачного слоя— наблюдениями поднятия.

Перечислим теперь главные причины образования инверсий.

1. Встреча холодных и теплых масс воздуха, в течение продолжительного времени не смешивающихся друг с другом и образующих поверхность разрыва (большие фронтальные инверсии в циклонах).

2. Опускание масс воздуха, сопровождаемое адиабатическим нагреванием (большие антициклональные инверсии).

3. Турбулентность механического происхождения, развивающаяся с обеих сторон преграждающего слоя (динамические инверсии Пепплера).

4. Охлаждение воздушных слоев путем отдачи тепла посредством лучеиспускания вверх. (Ночные инверсии, развивающиеся вследствие охлаждения нижних слоев, прилежащих к земной поверхности).

Третий фактор быть может не является сам по себе мощным фактором, создающим инверсии, но, наверное, он всегда сопутствует большим инверсиям первого, второго и четвертого типа и усиливает их, так как увеличивает вертикальные температурные градиенты в слоях, лежащих непосредственно над инверсией и под инверсией.

Равным образом радиация с поверхности облачного слоя может влиять в смысле усиления инверсии.

ЛИТЕРАТУРА

Кроме указанных в тексте исследований.

1. V. Bjerknes — Dynamische Meteorologie und Hydrographie. Erster Teil. Statik der Atmosphäre und der Hydrosphäre. Braunschweig. 1912.

2. H. Koschmieder — Dynamische Meteorologie. Leipzig. 1938.

3. П. А. Молчанов. — Аэрология. Отд. Гострансиздат. Москва. 1931.

4. G. Stüve. — Wolken und Gleitflächen. (Arbeiten d. Preusz. Aeronaut. Observatoriums. Lindenberg. Bd XV).

5. W. Kopp. — Aerologie einiger Wolkenfermen und Wellensysteme in d. Atmosphäre. (Beitr. 2. Phys. d. fr. Atm. Leipzig. 1927. Bd. XIII, H. 3).

6. Tor. Bergeron. — Лекции об облаках и практическом анализе карты, прочитанные в 1932 г. в Центр. бюро погоды СССР (перев. под редакцией Хромова). Изд. ЦУЕГМС. М. 1934.

ГЛАВА VI

Кинематика атмосферных движений

§ 1. Введение. В этой главе мы рассмотрим следующие вопросы: 1) построение карт линий тока и изучение особенностей линий тока, 2) вычисление вертикальных течений по методу Маргулеса, основанному на использовании уравнения неразрывности, 3) изучение плоского движения с применением к некоторым случаям атмосферных движений, 4) теорию А. А. Фридмана порывистости ветра, основанную на рассмотрении вихревых цепочек Кармана.

Прежде чем перейти к изложению перечисленных вопросов, отметим следующее.

В метеорологической практике приходится иметь дело главным образом со средними значениями скорости ветра. Приборы, с помощью которых определяются скорость и направление ветра, производят осреднение этих величин как по объему, так и по времени. При построении линий тока и вычислении вертикальных скоростей мы имеем дело именно со средней скоростью ветра. Однако, в последнее время приобретает все большее значение вопрос об определении мгновенных скоростей, для чего существуют специальные приборы—„микроанемографы", характеризующие так называемую порывистость ветра. Вопрос о структуре (можно сказать—„микроструктуре") ветра имеет большое значение в практике воздухоплавания и авиации, где порывистость ветра является часто препятствием для удачного под'ема и спуска летательного аппарата. В настоящее время структура ветра представляется в столь сложном виде, что математически настроенный ум может даже поставить вопрос о том, существует ли скорость ветра, т. е. существует ли производная пути движущейся частицы по времени [Л. 1]. Предполагая, что эта скорость существует, мы в последнем параграфе этой главы рассматриваем именно мгновенную скорость ветра.

§ 2. Линии тока. Линией тока рассматриваемого движения называется линия, в каждой точке которой направление касательной совпадает с направлением скорости в этой точке.

Для стационарного движения, т. е. такого, в котором скорости не зависят от времени, линии тока совпадают с траекториями частиц. Для нестационарного движения это совпадение, вообще говоря, не имеет места: линии тока зависят от времени, и вся картина линий тока меняется от одного момента времени к другому. Таким образом, линии тока дают лишь некоторую геометрическую характеристику движения в данный момент времени. Приведем пример, принадлежащий В. Бьеркнесу: если твердое тело движется поступательно, то его частицы могут описывать всевозможные траектории, линиями же тока являются параллельные прямые (так как в каждый момент времени все точки тела имеют одинаковую скорость), меняющиеся со временем.

Для вывода дифференциальных уравнений линий тока заметим, что касательная к линии тока в точке (x, y, z) жидкости имеет направляющие косинусы, пропорциональные дифференциалам: dx, dy, dz (рис. 38). Если

составляющие скорости по осям координат обозначить через u, v, w, то условие параллельности (в данном случае—условие совпадения) касательной к линии тока и вектора скорости даст

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Уравнения (1) и являются искомыми дифференциальными уравнениями линий тока. Если u, v, w зависят от времени, то оно при интегрировании рассматривается как параметр.

Сопоставим с уравнениями линий тока уравнения траекторий частиц жидкости

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=u\,(x, y, z, t),\\ \frac{dy}{dt}&=v\,(x, y, z, t),\\ \frac{dz}{dt}&=w\,(x, y, z, t).\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

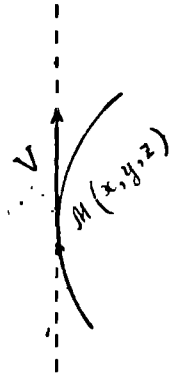

Рис. 38.

Их можно переписать в виде пропорционального ряда

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}=dt. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

В этих уравнениях, в отличие от уравнений линий тока, t рассматривается как независимая переменная.

В качестве примера предлагается найти линии тока и траектории частиц для движения

$$\left.\begin{aligned}u&=k,\\ v&=mt,\\ w&=0,\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

(k и m постоянные).

Ответ: траектории—параболы:

$$y=\frac{m}{2}\left(\frac{x-a}{k}\right)^2+b$$

(a и b—произвольные постоянные), линии тока—прямые:

$$y=\frac{m}{k}tx+c$$

(c—произвольная постоянная),

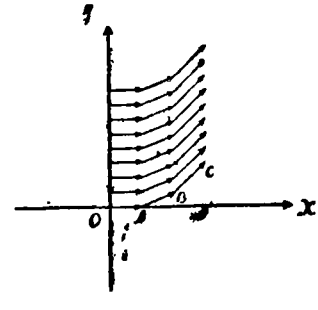

Рис. 39.

при $t=0$ линии тока параллельны оси x, при возрастании t они поворачиваются и при $t\longrightarrow\infty$ стремятся стать параллельными оси y.

Этот же результат можно получить и без интегрирования, рассматривая уравнения (4) непосредственно. Именно, видно, что при $t=0$ скорости всех частиц параллельны оси x, следовательно за весьма малый промежуток времени частица, находящаяся в начале координат, переместится в точку A, в момент Δt (отсчитываемый от начального $t=0$), все частицы будут иметь скорость: $u=k$, $v=m\Delta t$, $w=0$, и частица из точки A будет перемещаться по направлению AB, и т. д. Предельное положение ломаной $OABC$ дает траекторию частицы; линии же тока в различные моменты времени параллельны соответственно отрезкам OA, AB, BC . . . (рис. 39).

Для предсказания погоды имеют важное значение траектории частицы, так как по ним можно судить о перемещении холодных и теплых масс

воздуха, фронтов и т. д. Но построение траекторий требует изучения ряда карт для различных моментов времени, для построения же линий тока достаточно одной карты скоростей. Линии тока характеризуют лишь тенденцию частиц двигаться в определенном направлении, и только для стационарных движений они совпадают с траекториями частиц. Атмосферные движения не являются, конечно, стационарными, но весьма часто изменение скорости со временем происходят сравнительно медленно, и, следовательно, линии тока сохраняются некоторое время (порядка нескольких часов).

Так как на поверхности земли вертикальная скорость $w = 0$, то соответствующие линии тока являются плоскими линиями. Их дифференциальные уравнения можно переписать так

$$\frac{dx}{u(x, y, 0, t)} = \frac{dy}{v(x, y, 0, t)} = \frac{dz}{0} \quad (5)$$

(в выражениях для u и v положено $z = 0$).

Для местностей гористых, где могут существовать вынужденные рельефом вертикальные течения, уравнения (5) несправедливы, и их можно употреблять лишь с известной степенью приближения.

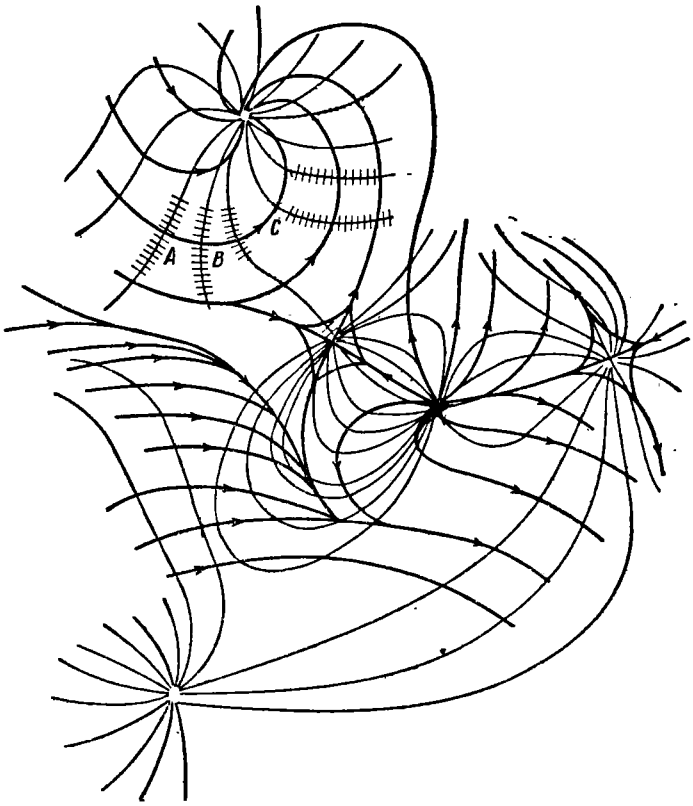

Рис. 40.

Вычерчивание карт линий тока в метеорологии впервые было применено Рене де Соссюром в 1898 г., но получило распространение лишь после появления книги В. Бьеркнеса „Dynamische Meteorologie und Hydrographie“ в 1912 г.

Укажем, каким образом производится построение линий тока. Допустим, что имеем метеорологическую карту с нанесенными на ней векторами скорости ветра. Применим данный Сандстремом [Л. 2] метод изогон, т. е. линий одинакового направления ветра. А именно, соединим плавной линией точки, в которых ветер имеет, например, южное направление, и на этой линии нанесем целый ряд черточек, параллельных этому направлению; то же проделаем с другими направлениями. Получаем картину, изображенную на рис. 40. Возьмем теперь произвольную точку A плоскости и проведем через нее отрезок AB параллельный ближайшим к ней черточкам; из точки B проводим аналогичным образом отрезок BC и т. д. Сглаживая на-глаз ломаную $ABC\ldots$, получим линию тока. Беря вместо точки A другие точки плоскости, можем провести ряд других линий тока.

§ 3. Особенности линий тока на плоскости. Рассматривая карты линий тока (см. например рис. 40), замечаем на них ряд особенных точек и линий. Мы дадим классификацию особенностей плоского движения, осно-

ванную на теории критических или особенных точек дифференциального уравнения.

Пусть имеем дифференциальное уравнение линий тока на плоскости:

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v},$$

причем допустим, что u и v разлагаются в ряды Тейлора вблизи рассматриваемой точки плоскости. Из теории дифференциальных уравнений известно, что если в рассматриваемой точке функции u и v не обращаются в нуль одновременно, то через эту точку проходит одна и только одна интегральная кривая дифференциального уравнения. Для нас будут представлять интерес как-раз те точки, в которых обе составляющие скорости обращаются одновременно в нуль; такие точки называются критическими или особенными точками дифференциального уравнения.

Представляется интересным рассмотреть подробно коллинеарное движение, т. е. движение, скорости которого являются линейными функциями координат:

$$u=a_0+a_1x+a_2y,$$
$$v=b_0+b_1x+b_2y.$$

Это движение можно рассматривать как первое приближение для ряда случаев, когда u и v суть ряды, расположенные по целым положительным степеням x и y или $x-a$, $y-b$, где a и b—заданные числа.

Для нахождения критической точки коллинеарного движения нужно решить систему уравнений

$$a_0+a_1x+a_2y=0,$$
$$b_0+b_1x+b_2y=0.$$

Обозначая координаты критической точки через (x_1, y_1), будем иметь

$$x_1=\frac{b_0a_2-a_0b_2}{a_1b_2-a_2b_1}, \qquad y_1=\frac{a_0b_1-a_1b_0}{a_1b_2-a_2b_1}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Если $a_1b_2-a_2b_1$ отлично от нуля, то существует критическая точка на конечном расстоянии. Перенесем в нее начало координат. Тогда можем переписать дифференциальное уравнение коллинеарного движения так:

$$\frac{dx}{a_1x+a_2y}=\frac{dy}{b_1x+b_2y}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Умножим числитель и знаменатель первого из отношении (7) на произвольное число h_1, второго отношения—на число h_2 и составим производную пропорцию

$$\frac{dx}{a_1x+a_2y}=\frac{d(h_1x+h_2y)}{h_1(a_1x+a_2y)+h_2(b_1x+b_2y)}.$$

Подберем теперь числа h_1 и h_2 так, чтобы знаменатель полученного отношения равнялся произведению некоторого числа ω на h_1x+h_2y, т. е. чтобы

$$h_1(a_1x+a_2y)+h_2(b_1x+b_2y)=\omega(h_1x+h_2y). \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Тогда сможем написать

$$\frac{dx}{a_1x+a_2y}=\frac{d(h_1x+h_2y)}{\omega(h_1x+h_2y)}=\frac{d\xi}{\omega\xi},$$

где

$$\xi=h_1x+h_2y.$$

Для определения h_1 и h_2 имеем уравнения, которые получаются приравниванием коэфициентов при x и y в левой и правой частях уравнения (8):

$$\left.\begin{aligned}(a_1-\omega)h_1+b_1h_2=0,\\ a_2h_1+(b_2-\omega)h_2=0.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(9)$$

Для того, чтобы эта система однородных уравнений имела решения отличные от нуля, необходимо равенство нулю определителя, составленного из коэфициентов при h_1 и h_2.

$$\Delta(\omega)=\begin{vmatrix}a_1-\omega & b_1\\ a_2 & b_2-\omega\end{vmatrix}=0.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(10)$$

Последнее уравнение называется характеристическим. Рассмотрев различные случаи, которые могут встретиться при отыскании его корней, получим различные виды критических точек.

Предположим, прежде всего, что корни характеристического уравнения простые вещественные. Полагая в уравнениях (9) $\omega=\omega_1$, получим для h_1 и h_2 (вернее для их отношения) решения h_1' и h_2'; полагая $\omega=\omega_2$, получим: $h_1=h_1''$, $h_2=h_2''$. Составив функции

$$\xi=h_1'x+h_2'y,\quad \eta=h_1''x+h_2''y,$$

можем уравнение (7) заменить таким:

$$\frac{d\xi}{\omega_1\xi}=\frac{d\eta}{\omega_2\eta}.$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$\xi=C\eta^{\frac{\omega_1}{\omega_2}},$$

или

$$h_1'x+h'_2y=C(h''_1x+h''_2y)^{\frac{\omega_1}{\omega_2}}.$$

Если ω_1 и ω_2 одного знака, то получаем кривые, проходящие через критическую точку; к числу интегральных линий принадлежат две прямые

$$\xi=h'_1x+h'_2y=0,\qquad \eta=h_1''x+h_2''y=0.$$

Такая особенная точка называется узлом (рис. 41, *1*).

Если ω_1 и ω_2 разного знака, то имеем гиперболообразные кривые. Только две линии

$$\xi=0\quad\text{и}\quad\eta=0$$

проходят через особенную точку. Такая точка называется нейтральной или гиперболической (рис. 41, *2*). Прямые $\xi=0$ и $\eta=0$ являются асимптотами остальных линий тока.

Если характеристическое уравнение имеет кратный корень

$$\omega_1=\omega_2,$$

то из системы уравнений (9) определяется только одна пара значений h: h_1' и h_2'. Для определения значений h_1'' и h_2'' можно вместо уравнения (8) составить несколько более сложное:

$$h_1''(a_1x+a_2y)+h_2''(b_1x+b_2y)=\omega_1(h_1''x+h_2''y)+h_1'x+h_2'y.$$

Сравнивая коэфициенты при x и y, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}(a_1-\omega_1)h_1''+b_1h_2''=h_1',\\ a_2h_1''+(b_2-\omega_1)h_2''=h_2''.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(11)$$

Найдя h_1'' и h_2'' из последней системы, и обозначая попрежнему

$$h_1'x+h'_2y=\xi,\qquad h_1''x+h_2''y=\eta,$$

сможем заменить уравнение (7) таким:

$$\frac{d\xi}{\omega_1\xi}=\frac{d\eta}{\omega_1\eta+\xi}.$$

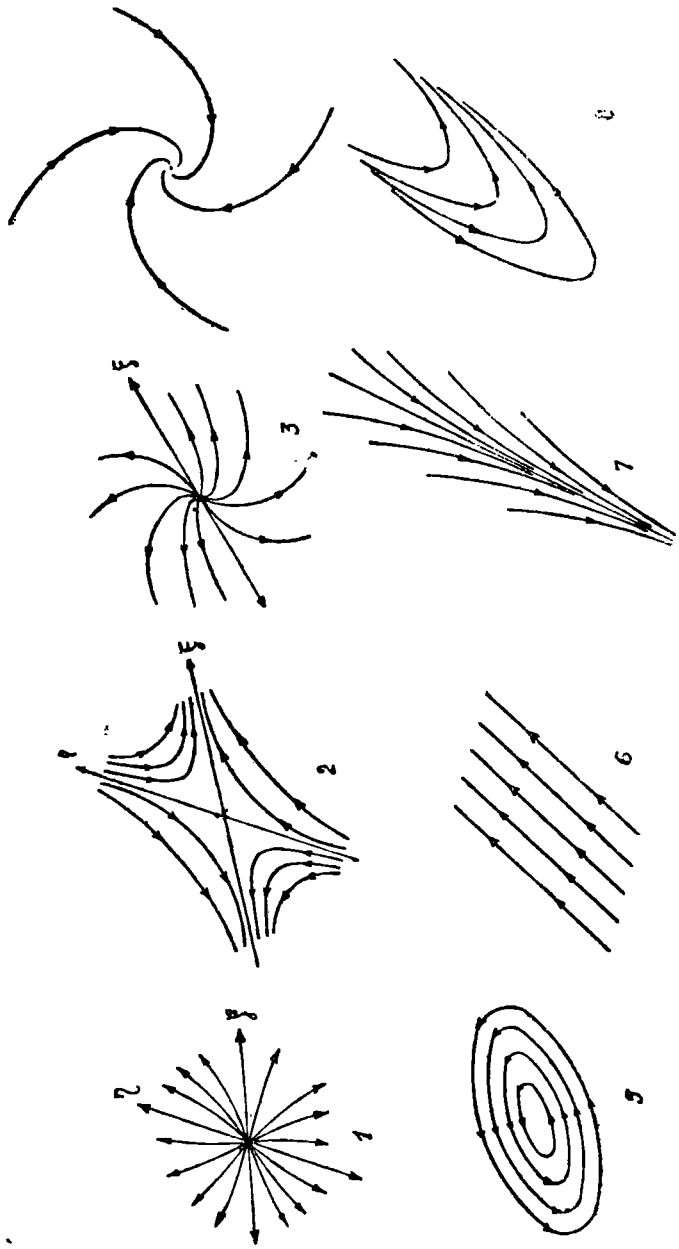

Рис. 41.

При помощи подстановки: $\eta=\xi t$ найдем общий интеграл этого уравнения

$$\xi=Ce^{\omega_1\frac{\eta}{\xi}}.$$

Здесь получаем кривые, проходящие через начало координат. При $C=0$ имеем $\xi=0$—прямую, проходящую через начало, которой касаются ее интегральные кривые (рис. 41, *3*). Критическая точка является узлом.

Перейдем, наконец, к случаю комплексных корней характеристического уравнения:

$$\omega_1 = a + bi, \qquad \omega_2 = a - bi.$$

Общий интеграл будет

$$\xi^{a-bi} = C_1 \eta^{a+bi}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

где ξ и η — комплексные сопряженные линейные функции от x и y, так что

$$\xi = m_1 x + m_2 y + i(l_1 x + l_2 y),$$

$$\eta = m_1 x + m_2 y - i(l_1 x + l_2 y).$$

Логарифмируя уравнение (12) и полагая

$$\xi = re^{i\varphi}, \qquad \eta = re^{-i\varphi},$$

получим

$$b \log r = a\varphi + b \log C,$$

где C — произвольная постоянная, или

$$r = Ce^{\frac{a}{b}\varphi}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

причем

$$r = \sqrt{(m_1 x + m_2 y)^2 + (l_1 x + l_2 y)^2},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{l_1 x + l_2 y}{m_1 x + m_2 y}.$$

Линии тока представляют собою спирали; начало координат является асимптотической точкой спиралей. Такого рода критическая точка называется фокусом (рис. 41, *4*).

Если корни характеристического уравнения чисто мнимые:

$$\omega = \pm bi,$$

то уравнение (13) дает

$$r = C,$$

т. е. систему эллипсов или окружностей. Критическая точка называется центром (рис. 41 и 42, *5*).

Обратимся теперь к случаю, когда в выражениях (6) для координат критической точки знаменатель равен нулю:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0.$$

Если при этом и числители (6) равны нулю, т. е.

$$b_0 a_2 - a_0 b_2 = 0, \qquad b_0 a_1 - a_0 b_1 = 0,$$

то

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_0}{a_0} = k,$$

где k — коэфициент пропорциональности. Дифференциальное уравнение линий тока перепишется в этом случае так:

$$\frac{dx}{a_0 + a_1 x + a_2 y} = \frac{dy}{k(a_0 + a_1 x + a_2 y)},$$

или

$$dx = \frac{dy}{k}.$$

Общий интеграл его: $y = kx + C$ представляет семейство параллельных прямых. Если считать условно, что параллельные прямые пересекаются на бесконечности, то будем иметь бесконечно удаленную критическую точку (рис. 41, *6*).

Рассмотрим, наконец, случай, когда в формулах (6) только знаменатель равен нулю, из числителей же хоть один отличен от нуля, например

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0, \qquad a_0b_2 - a_2b_0 \neq 0,$$

так что из двух коэфициентов a_2 и b_2 по крайней мере один отличен от нуля; пусть $a_2 \neq 0$.

Так как

$$-\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = k,$$

то уравнение линий тока в этом случае можно переписать так:

$$\frac{dx}{a_1x + a_2y + a_0} = \frac{dy}{k(a_1x + a_2y) + b_0}.$$

Здесь следует различать два подслучая:

$$k \neq -\frac{a_1}{a_2} \quad \text{и} \quad k = -\frac{a_1}{a_2}.$$

В первом подслучае подстановка

$$a_1x + a_2y = z$$

приводит к общему интегралу

$$a_1x + a_2y + \frac{a_1a_0 + a_2b_0}{a_1 + b_2} = Ce^{h_1x + h_2y},$$

где h_1 и h_2—постоянные, зависящие от a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2. Имеем здесь логарифмические кривые, асимптотически приближающиеся к прямой

$$a_1x + a_2y + \frac{a_1a_0 + a_2b_0}{a_1 + b_2} = 0.$$

Эта прямая является линией сходимости или расходимости, в зависимости от того, как направлены скорости—к асимптоте или от асимптоты. На рис. 41, *7* изображена линия сходимости.

Во втором подслучае, когда $k = -\frac{a_1}{a_2}$, та же подстановка

$$a_1x + a_2y = z$$

приводит к общему интегралу

$$(a_0 + a_1x + a_2y)^2 = 2(a_1a_0 + a_2b_0)x + C,$$

определяющему семейство парабол.

В этом случае будем говорить, что имеем бесконечно удаленную критическую точку (рис. 41, *8*).

Таким образом, исследование коллинеарного движения приводит к особенностям такого рода:

1. Узел (случаи 1, 3).
2. Нейтральная или гиперболическая точка (случай 2).
3. Фокус (случай 4). На метеорологической карте фокус трудно отличим от узла.
4. Центр (случай 5).
5. Линия сходимости или расходимости (случай 7).
6. Бесконечно-удаленная точка (случаи 6 и 8).

Ниже будет указано значение критических точек для исследования атмосферных явлений. Теперь же по поводу нашей классификации критических точек мы заметим следующее: она является исчерпывающей лишь для коллинеарного движения. Что касается не коллинеарных дви-

жений, то для довольно широкого класса скоростей она дает возможность определить характер особенных точек. А именно, если для точки $x=a$, $y=b$, в которой $u=0$ и $v=0$ одновременно, функции u и v разлагаются в ряды

$$u=a_1(x-a)+a_2(y-b)+\varphi(x-a,\ y-b),$$
$$v=b_1(x-a)+b_2(y-b)+\psi(x-a,\ y-b),$$

причем a_1, a_2, b_1, b_2 не равны нулю одновременно, и не связаны зависимостью: $\frac{a_1}{b_2}=\frac{a_2}{b_2}$, то можно доказать, что характер особенности в точке $(a,\ b)$ будет таким же, как в рассмотренных выше случаях 1—5. При этом характеристические прямые заменяются кривыми.

Если имеются еще точки, в которых $u=v=0$, и если около этих точек также имеют место разложения указанного вида, то можем определить характер особенности в этих точках.

Так, Веренскиольд (Werenskiold) [Л. 3] рассматривает примеры дифференциальных уравнений линий тока, в которых u и v имеют следующие значения:

1)
$$u=(x+a)^2+(y+a)^2-r^2,$$
$$v=(x-a)^2+(y-a)^2-r^2, \qquad r^2>2a^2.$$

Здесь

$$x=\pm\sqrt{\frac{r^2}{2}-a^2},\ y=\mp\sqrt{\frac{r^2}{2}-a^2}$$

координаты двух точек, в которых $u=v=0$. Одна из точек нейтральная, другая—центр (рис. 42, *1*).

2) Во-вторых, возьмем

$$u=-x^2-(y+a)^2+r^2,$$
$$v=x^2+(y-a)^2-r^2, \qquad r^2>a^2.$$

Здесь $x=\pm\sqrt{r^2-a^2}$, $y=0$ — координаты критических точек. Из них одна—узел, другая—нейтральная точка (рис. 42, *2*).

3) Если бы для случая 1) взять $r^2=2a^2$, то обе критические точки совпали бы, и мы получили бы одну точку: $x=0$, $y=0$, с особенностью, изображенной на рис. 42, *3*.

4) Если в случае 2 взять $r^2=a^2$, то обе критические точки сольются в одну: $x=0$, $y=0$. На рис. 42, *4* видно, как выглядит особенная точка.

В случаях 3 и 4 мы имеем особенные точки, не вошедшие в классификацию особых точек коллинеарного движения. Дело в том, что здесь при исследовании критической точки нельзя ограничиться членами первого порядка в разложении скоростей, ибо имеем пропорциональность между коэфициентами этих членов.

Действительно, для случая 2

$$u=(x-a)^2+(y-b)^2-2a^2=-2ax-2ay+x^2+y^2;$$
$$v=(x+a)^2+(y+b)^2-2a^2=2ax+2ay+x^2+y^2.$$

Если ограничиться членами первой степени в разложении u и v по степеням x, y, то получим

$$\frac{dx}{-2ax-2ay}=\frac{dy}{2ax+2ay},$$

или

$$-dx=dy.$$

Последнее дифференциальное уравнение не имеет особых точек на конечном расстоянии, тогда как исходное движение имеет критическую точку $x=0$, $y=0$.

Следовательно, для решения вопроса о характере особенности мы должны привлечь к рассмотрению, кроме членов первого порядка, и члены второго порядка относительно x и y. Если считать особенную точку коллинеарного движения (находящуюся на конечном расстоянии) особенностью первого порядка, то в рассматриваемых нами случаях 3 и 4 мы имеем дело с особенностями второго порядка, поскольку для их исследования необходимо взять члены до второго порядка включительно.

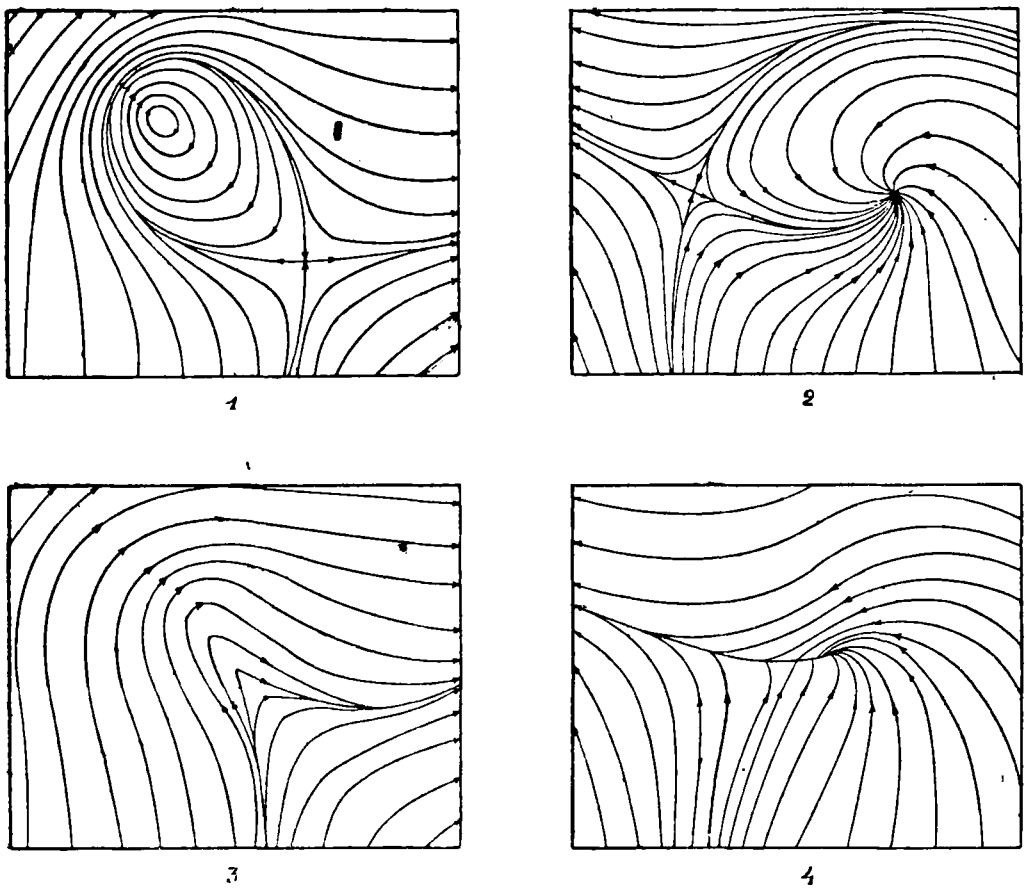

Рис. 42.

Вместе с тем обнаруживается, что при построении метеорологических карт встречаются особенности, не вошедшие в нашу классификацию критических точек коллинеарного движения. Однако, трудно дать исчерпывающую классификацию особенностей линий тока, которая исходила бы из некоторого единого принципа. Поэтому некоторые авторы рассматривают отдельные примеры дифференциальных уравнений или для получения особенностей более сложного вида складывают более простые поля линий тока (например Гессельберг [Л. 4]; см. дальше § 4).

Мы можем несколько расширить классификацию особенностей линий тока, рассмотрев критические точки второго порядка для движения, в котором u и v являются однородными полиномами второй степени относительно x и y, т. е. критические точки дифференциального уравнения:

$$\frac{dx}{a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2} = \frac{dy}{a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

Этот случай представляет некоторый интерес потому, что если в разложениях в ряд Тейлора для скоростей имеем одновременно

$$a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0,$$

то разложения начинаются с членов второй степени относительно $x - a$, $y - b$.

Уравнения (14) дают первое приближение к такого рода движению, так как в них мы берем для u и v члены только второго порядка, отбрасывая более высокие степени координат.

Укажем здесь главнейшие случаи особенностей второго порядка, когда u и v однородные функции координат:

1) нейтральная точка. Около нее линии тока — гиперболообразные линии с тремя асимптотами (рис. 43, *1*);

2) соединение узла с нейтральной точкой (рис. 43, *2*).

3) узел типа двойного источника, состоящий из замкнутых линий (рис. 43, *3*).

4) узел, имеющий одну систему замкнутых и одну систему незамкнутых линий (рис. 43, *4*).

Особенности более высокого порядка представляют меньший интерес как потому, что они реже встречаются (чем выше порядок особенности, тем большее число коэфициентов в рядах Тейлора должно обращаться в нуль), так и потому, что они представляют комбинации более простых случаев. Так, например, среди особенностей третьего порядка возможна изображенная на рис. 43, *5*.

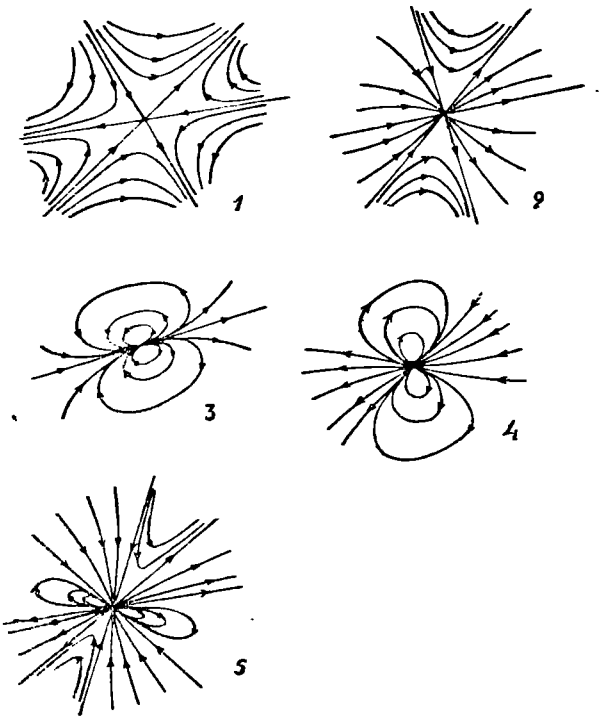

Рис. 43.

Рассмотрим, наконец, линии тока движения, для которого

$$u = k, \qquad v = a_1 x^2 + b_1 xy + c_1 y^2;$$

для них дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = ax^2 + bxy + cy^2, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

где

$$a = \frac{a_1}{k}, \quad b = \frac{b_1}{k}, \quad c = \frac{c_1}{k}.$$

Некоторые интегральные линии этого типа рассматривал Веренскиольд [Л.3].

Мы применим к изучению (15) метод изогон. Именно, построим линии

$$ax^2 + bxy + cy^2 = \text{const},$$

на которых $y' = \text{const}$, т. е. угловой коэфициент касательной имеет постоянное значение. Изогоны представляют собою эллипсы, гиперболы или параллельные прямые (если $ax^2 + bxy + cy^2$ есть полный квадрат).

На рис. 44, *1* имеем случай, когда изогоны—эллипсы, а на рис. 44, *2* изогоны—гиперболы. Особый интерес представляет следующий случай, когда изогоны—параллельные прямые. В этом случае можно переписать уравнение (15) так:

$$\frac{dy}{dx} = m\,(y - kx)^2.$$

Изогоны

$$m\,(y - kx)^2 = C$$

дают прямые $y - kx = \pm\sqrt{\frac{C}{m}}$, симметрично расположенные относительно прямой $y - kx = 0$. На последней прямой $y' = 0$, на двух симметричных прямых y' одно и то же: $y' = C$. Если $C = k$, то направление касательных к интегральным кривым совпадает с направлением изогон; эти изогоны являются асимптотами интегральных линий (рис. 44, *3*). Если $k < 0$, то асимптот нет (рис. 44, *4*), за исключением случая, когда $k = 0$: здесь ось x является асимптотой интегральных линий (рис. 44, *5*).

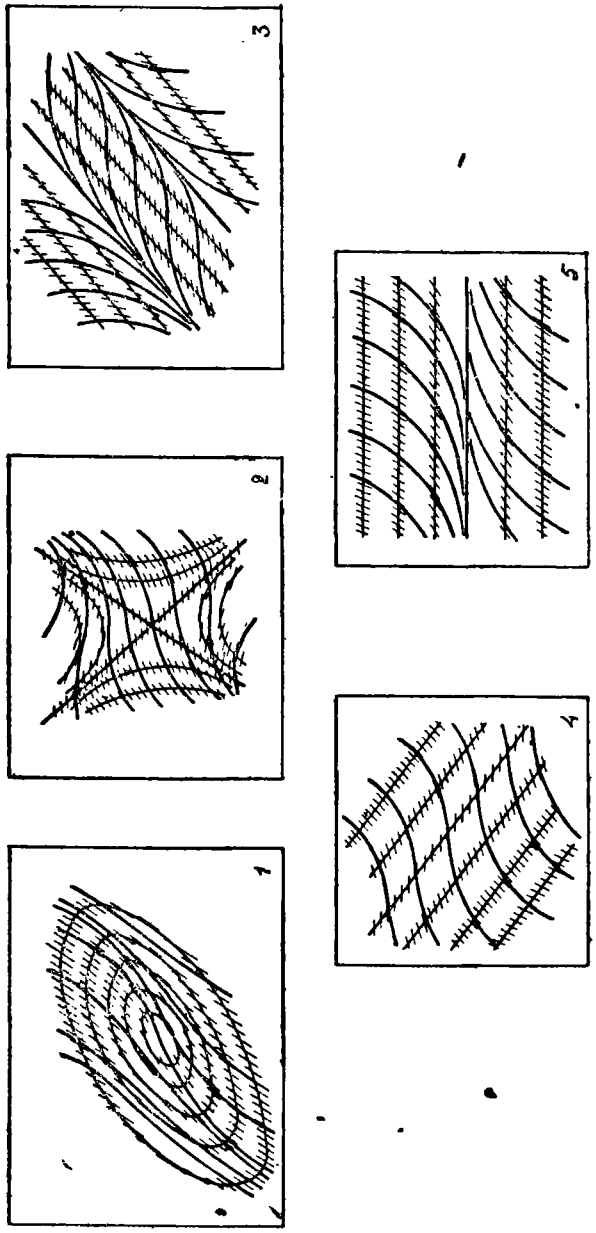

Рис. 44.

При построении метеорологических карт линий тока трудно было бы установить, имеем ли мы в рассматриваемой области дело со случаями 1, 2, 4 или 5; лишь случай 3 является существенно отличным от остальных. При этом случай 3 можно рассматривать как соединение двух движений с асимптотическими линиями.

Если подойти к уравнению (15) с точки зрения определения характера особых точек, то нужно заметить, что на конечном расстоянии для него мы не имеем особых точек, так как u не может равняться нулю. Тогда можно обратиться к исследованию особых точек этого уравнения на бесконечности, для чего, согласно общей теории особых точек дифференциального уравнения, следует сделать замену переменных.

$$x = \frac{1}{z}, \quad y = \frac{t}{z}.$$

Некоторый интерес представляют исследования при помощи этого метода случая 3 и частного его подслучая 5. А именно, уравнение

$$\frac{dy}{dx} = m(y - kx)^2$$

приводится, с помощью указанной подстановки, к виду

$$\frac{dt}{z^2 t - m(t-k)^2} = \frac{dz}{z^3}.$$

Критической точкой этого уравнения является точка $z=0$, $t=k$. Возвращаясь к переменным x, y, видим, что особая точка есть бесконечно удаленная точка, лежащая в направлении

$$\frac{y}{x} = t = k,$$

т. е. параллельно прямой $y = kx$. А это как раз есть направление асимптот рис. 3. Очевидно, что случай 5 получается из случая 3 при $k=0$.

Обратимся к более детальному изучению тех особенностей линий тока, которые часто встречаются на метеорологических картах.

Прежде всего остановимся несколько подробнее на рассмотрении узловой точки. Допустим, что имеем точку сходимости, т. е. такую, к которой притекают массы воздуха. Если бы движение жидкости являлось плоско-параллельным, т. е. одинаковым для всех горизонтальных плоскостей, параллельных рассматриваемой, и притом стационарными, то была бы справедлива теорема о том, что через каждое сечение между двумя бесконечно близкими линиями тока проходит в единицу времени одно и то же количество жидкости, т. е. имеет место равенство

$$q\rho V = \text{const},$$

где q — величина отрезка AB (рис. 45), ρ — плотность жидкости, V — скорость. Если считать, что плотность ρ постоянна, то по мере приближения к узловой точке, вследствие уменьшения q, должна возрастать скорость. Однако в узловой точке скорость равна нулю (мы из этого исходили, давая определение критической точки). Следовательно, движение около узла не может быть плоским, другими словами, должны иметь место вертикальные течения. Если узловая точка находится на поверхности земли, то вертикальные течения должны быть восходящими, если на некоторой высоте над землей, то могут быть и нисходящими.

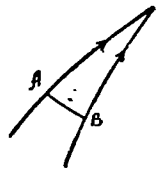

Рис. 45.

Если узел является точкой расходимости, то, очевидно, у поверхности земли должны быть нисходящие течения.

Аналогичные рассуждения могут быть применены и к линиям сходимости и расходимости, около которых, у поверхности земли, должны наблюдаться соответственно восходящие и нисходящие вертикальные течения.

В случае волновых движений в атмосфере наблюдаются иногда целые системы параллельных асимптотических линий—поочередно линий сходимости и расходимости (вроде рис. 44, *3*).

Сравнение карты линий тока с картой изобар обнаруживает обычно хорошее совпадение максимумов с точками расходимости и минимумов—с точками сходимости линий тока. Асимптотические линии связаны с местами прохождения гроз и ливней. Иногда асимптотические линии обусловливаются рельефом местности. Так, Дефант [Л. 5] построил карты средних линий тока по месяцам. На этих картах имеется асимптотическая линия в области Альп и Карпат.

Гессельберг и Свердруп [Л. 6] собрали большой материал, относящийся к области Аллеганских гор в Северной Америке и Альп в Европе. Обнаруживается, что горные массивы изменяют общее направление воз-

душных течений и обусловливают распределение точек сходимости и расходимости. Авторы разделили рассмотренные случаи на четыре типа:

1. На подветренной стороне имеется расхождение линий тока (обычная картина на северной стороне Альпийского хребта).

2. Расхождение линий тока и вихрь с горизонтальной осью на подветренной стороне.

3. Линии тока проходят параллельно горному хребту, а над хребтом поворачивают в направлении перпендикулярном ему.

4. В редких случаях горы не оказывают влияния на линии тока.

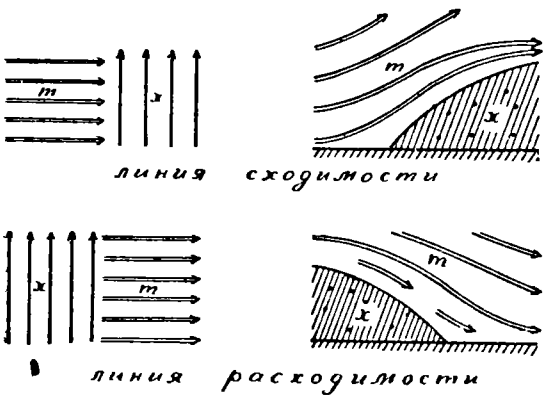

Рис. 46.

Что касается точек сходимости и расходимости, то замечено, что в холодное время года местные точки сходимости появляются над долинами и морскими бухтами, а точки расходимости—над горами.

Отметим, что гиперболические точки связаны, по мнению Бержерона, с местами образования и разрушения фронтов [Л. 7]. О них подробнее будет сказано в § 5.

Кроме рассмотренных особенностей линий тока в метеорологии встречаются еще так называемые односторонние линии сходимости и расходимости. Они получаются в том случае, когда имеются две смежные области—с холодными и теплыми массами воздуха, причем теплые массы поднимаются вверх и обтекают область холодного воздуха (рис. 46). При соприкосновении теплого воздуха с нижними более холодными слоями происходит конденсация паров, т. е. образование облаков, причем возможно выпадение осадков.

В случае нестационарного движения холодные массы могут подтекать под теплые и приподнимать теплый воздух. Это проникновение холодных масс отличается бурным характером и сопровождается узкой полосой осадков, грозовыми явлениями (шквалами). По Бьеркнесу, линии сходимости первого типа характеризует передний (теплый фронт циклона, второго типа—задний (холодный) фронт.

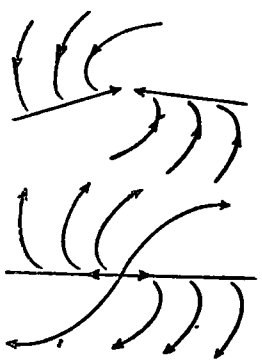

Рис. 47.

Отметим, что в атмосфере часто наблюдаются случаи, аналогичные приведенному выше, наличия двух движений в двух областях, разделенных некоторой поверхностью. При этом теоретически возможны всевозможные комбинации из перечисленных выше типов движения. Мы укажем здесь особенно важный случай, когда в точке сходимости встречаются две линии сходимости или в точке расходимости—две линии расходимости (рис. 47).

§ 4. Линии тока на различных высотах. При изучении атмосферных движений в верхних слоях атмосферы некоторые исследователи рассматривают карты линий тока на различных высотах. В частности, эти линии тока могут иметь практическое значение для воздухоплавания—в вопросе о выборе высоты, на которой имеется более спокойное движение воздуха, а также для определения такого направления движения дирижабля, при котором можно получить некоторый выигрыш во времени.

Интересный пример применения линий тока к изучению воздушных течений на уровне cirrus'ов представляет работа Гессельберга [Л. 4]. По данным относительно движения cirrus'ов построен целый ряд карт линий тока, причем последние в общем имеют более простой вид, чем на земной поверхности; правда нужно отметить, что на высоте имеется малое число данных, что влияет на точность построения карт.

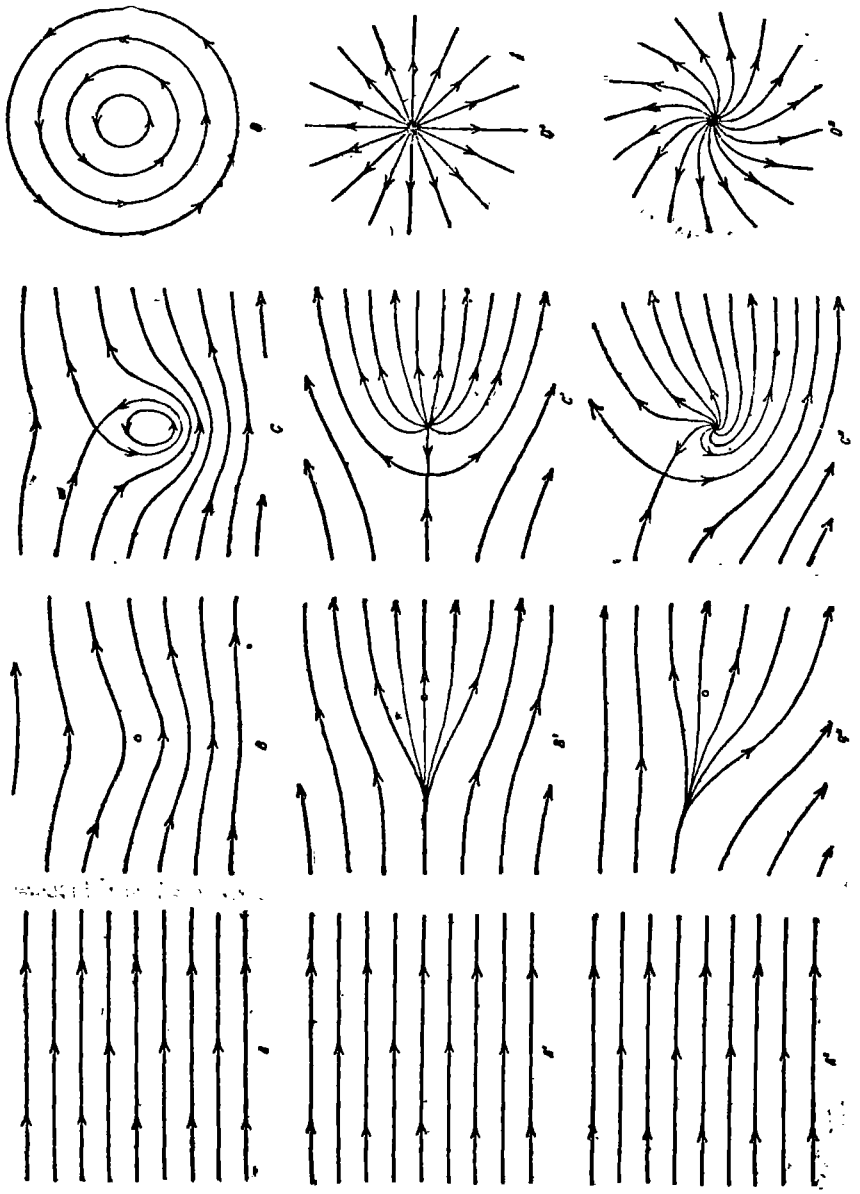

Рис. 48.

Типы особенностей, которые получаются на высоте cirrus'ов, могут быть получены путем графического сложения прямых линий с тремя типами линий: окружностей, пучка прямых и спиралей, которые, впрочем, дают результаты, мало отличные от пучка прямых. На чертеже представлены линии тока на уровне cirrus'ов над барометрическим минимумом; над максимумом получаются такие же линии тока, однако с противоположным направлением.

Случаи B и C получены путем наложения на переносное движение (параллельные прямые A) движения вращательного (окружности D); разница между случаями B и C та, что в случае B влияние вращательного движения гораздо слабее. Случаи B' и C' соответствуют сложению параллельных прямых с линиями пучка D', случаи B'' и C''—тех же параллельных прямых с линиями D''. В качестве примера графического сложения разберем подробно один случай, предпослав ему общее определение графического сложения скалярных полей.

Пусть имеем функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$.
Построим изолинии этих функций, т. е. линии, вдоль которых φ и ψ имеют постоянные значения:

$$\varphi(x,y)=C_1 \text{ и } \psi(x,y)=C_2.$$

Требуется построить семейство линий

$$\varphi(x,y)+\psi(x,y)=C,$$

где C так же, как C_1 и C_2, произвольная постоянная. Пусть на чертеже (рис. 49) построены линии $\varphi(x,y)=C_1$ для C_1 принимающего ряд значений: $C_1=1, 2, 3, 4$..... То же сделано для уравнения $\psi(x, y)=C_2$, причем $C_2=4, 5, 6, 7$.

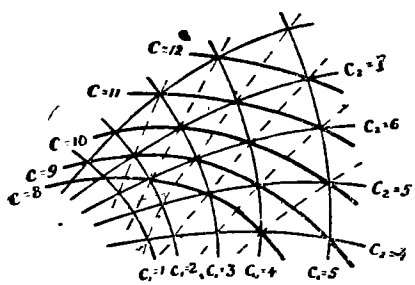

Рис. 49.

Для построения линии $\varphi(x,y)+\psi(x,y)=C$ при $C=8$ следует отметить точки, в которых $C_1+C_2=8$; это будут, очевидно, точки пересечения линии $C_1=4$ с линией $C_2=4$, линии $C_1=3$ с $C_2=5$ и т. д. Проведя через отмеченные точки плавную линию (это будет „диагональная" линия системы криволинейных четырехугольников), получим кривую, для которой $C=8$. Аналогично построены линии $C=9, 10, 11$.

Отметим попутно, что для построения изолиний разности данных функций

$$\varphi(x,y)-\psi(x,y)=C$$

достаточно провести „диагональные" линии другой системы криволинейных четырехугольников (пунктирные линии рис. 49).
На рис. 50 построены линии

$$y+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$$

по системам линий

$$y=C_1;\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C_2.$$

Это как раз линии тока типа C' (рис. 48).

Линии вида B' получены таким же способом, т. е. путем сложения параллельных линий и пучка прямых, только параллельные линии должны быть гораздо гуще, или, наоборот, линии пучка—реже.

По поводу карт линий тока на различных высотах отметим следующее: так как вертикальная скорость, вообще говоря, отлична от нуля, то линии тока, построенные по горизонтальной скорости ветра, представляют некоторую математическую фикцию. Если мы рассмотрим проекции пространственных линий тока на горизонтальную плоскость, то увидим, что они совпадают с плоскими линиями тока вообще говоря, лишь в двух случаях: 1) если u и v не зависят от z и 2) если $w=0$ для рассматриваемой плоскости.

Рассмотрим пример, подтверждающий сказанное.

Пусть $u = az + b$, $v = k$, $w = m$, где a, b, k и m—постоянные. Уравнения (1) имеют вид

$$\frac{dx}{az+b} = \frac{dy}{k} = \frac{dz}{m}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

они дают, после интегрирования, такие уравнения линий тока:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{2}z^2 + bz &= mx + C_1 \\ my &= kz + C_2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

где C_1 и C_2—произвольные постоянные.

Это—параболы, расположенные в плоскостях, параллельных оси x и

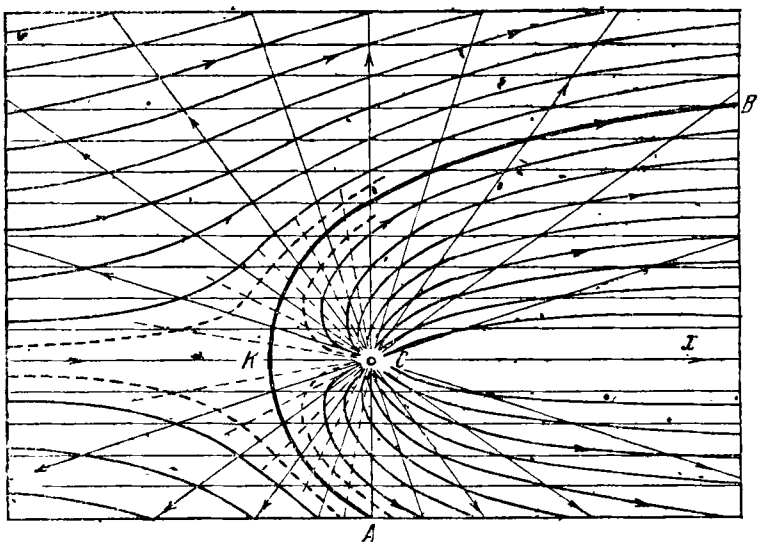

Рис. 50.

наклоненных к горизонтальной плоскости xoy. Проекции этих парабол получим, исключая z из уравнений (17), что дает такие параболы:

$$\frac{a}{2k^2}(my - C_2)^2 + \frac{b}{k}(my - C_2) = mx + C_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Если мы станем строить линии тока по способу, применяемому в метеорологии, то это соответствует интегрированию дифференциального уравнения:

$$\frac{dx}{az+b} = \frac{dy}{k},$$

причем z считается постоянной — это высота рассматриваемой горизонтальной плоскости. Получаем прямые линии

$$kx = (az + b)\,y + C,$$

отличающиеся от парабол (18).

Так как на больших высотах вертикальная скорость обычно мала, то метеорологические карты линий тока должны давать картину, близкую к действительности. Сомнение могут вызывать лишь места около особых точек линий тока, где могут быть значительные вертикальные течения.

§ 5. Линии тока в пространстве. До сих пор мы рассматривали линии тока как плоские линии, лежащие в горизонтальных плоскостях. В действительности линии тока представляют собою пространственные кривые,

но, очевидно, что, по данным метеорологических наблюдений над скоростью ветра, строить пространственные линии тока чрезвычайно трудно. Поэтому особенно интересной представляется модель линий тока в пространстве над Атлантическим океаном, построенная Свердрупом [Л. 12], причем в работе Свердрупа имеются стереоскопические снимки модели. Линии тока построены по средним из наблюдений над скоростью ветра (горизонтальной) за летние месяцы, причем вертикальная скорость ветра вычислялась по способу, который будет у нас рассмотрен в следующем параграфе.

Построение линий тока в пространстве соответствует интегрированию системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}. \qquad (19)$$

Подобно тому, как это было сделано в § 4 для плоского движения, мы можем дать классификацию особенностей линий тока коллинеарного движения в пространстве, которое можно рассматривать как первое приближение к более общему случаю, когда скорости разлагаются в ряды по целым степеням разностей $x-a$, $y-b$, $z-c$. Итак, пусть имеем:

$$\begin{aligned} u &= a_0+a_1x+a_2y+a_3z,\\ v &= b_0+b_1x+b_2y+b_3z,\\ w &= c_0+c_1x+c_2y+c_3z. \end{aligned} \qquad (20)$$

Если система уравнений

$$\begin{aligned} a_0+a_1x+a_2y+a_3z&=0,\\ b_0+b_1x+b_2y+b_3z&=0,\\ c_0+c_1x+c_2y+c_3z&=0, \end{aligned}$$

имеет решение (x_0, y_0, z_0), то это решение дает критическую точку линий тока; если система несовместна, то критической точки на конечном расстоянии нет. Применяя тот же метод, что при исследовании особенностей коллинеарного движения на плоскости, мы должны составить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_1-\omega & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2-\omega & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3-\omega \end{vmatrix}=0$$

и найти его корни. Если три корня: ω_1, ω_2, ω_3 окажутся вещественными различными, то система уравнений (19), которая в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{dx}{a_1x+a_2y+a_3z}=\frac{dy}{b_1x+b_2y+b_3z}=\frac{dz}{c_1x+c_2y+c_3z}$$

(здесь мы считаем $a_0=b_0=c_0=0$), может быть приведена к простейшему виду

$$\frac{d\xi}{\omega_1\xi}=\frac{d\eta}{\omega_2\eta}=\frac{d\zeta}{\omega_3\zeta}, \qquad (21)$$

где

$$\begin{aligned} \xi &= h_1'x+h_2'y+h_3'z,\\ \eta &= h_1''x+h_2''y+h_3''z,\\ \zeta &= h_1'''x+h_2'''y+h_3'''z; \end{aligned}$$

h—постоянные величины, определяемые из системы уравнений

$$\begin{aligned} (a_1-\omega)h_1+b_1h_2+c_1h_3&=0,\\ a_2h_1+(b_2-\omega)h_2+c_2h_3&=0,\\ a_3h_1+b_3h_2+(c_3-\omega)h_3&=0, \end{aligned}$$

если в эту систему подставить последовательно

$$\omega=\omega_1,\ \omega=\omega_2,\ \omega=\omega_3.$$

Система (21) имеет, очевидно, решением такие уравнения:

$$\xi^{\frac{1}{\omega_1}} = c_1 \eta^{\frac{1}{\omega_2}}, \quad \eta^{\frac{1}{\omega_2}} = c_2 \zeta^{\frac{1}{\omega_3}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Каждое из этих уравнений определяет цилиндрическую поверхность с направляющей, лежащей соответственно в плоскости $\xi\eta$ и $\eta\zeta$ и обра-

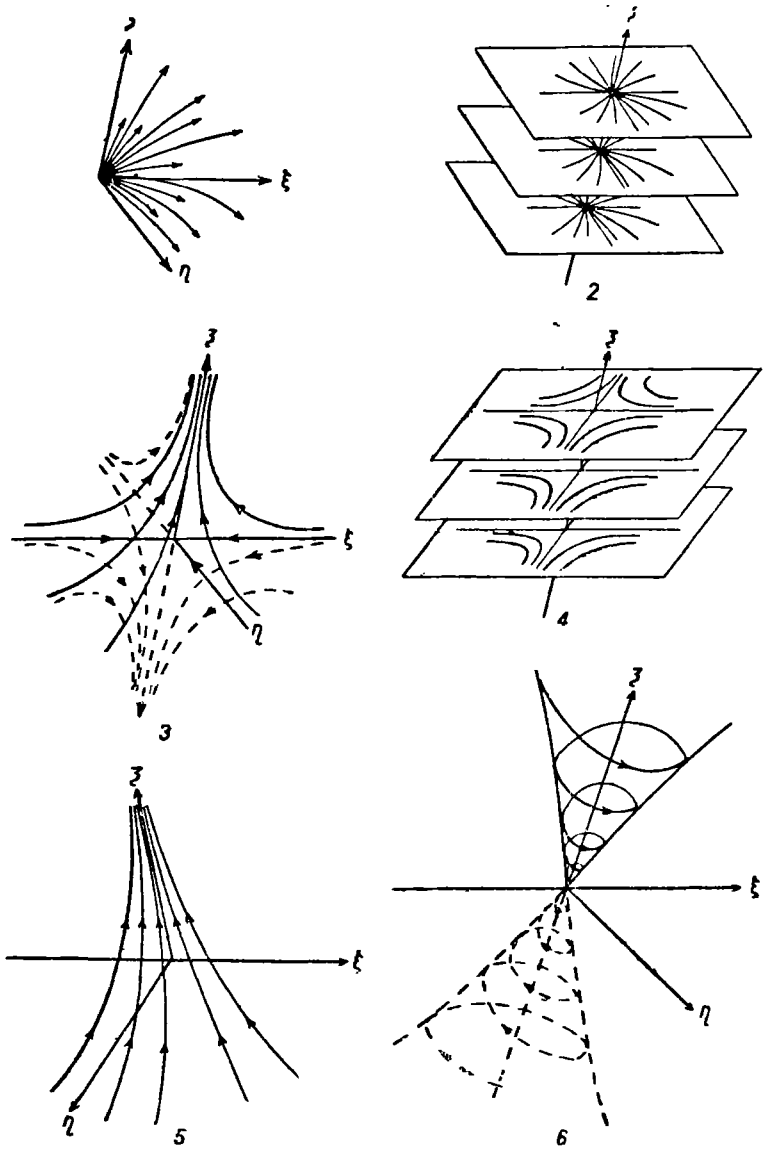

Рис. 51а.

зующей параллельной оси ζ (для поверхности $\xi^{\frac{1}{\omega_1}} = c_1 \eta^{\frac{1}{\omega_2}}$) и оси ξ (для поверхности $\eta^{\frac{1}{\omega_2}} = c_2 \zeta^{\frac{1}{\omega_3}}$).

Если ω_1, ω_2 и ω_3 все одного знака, то цилиндрические поверхности, а вместе с тем и все интегральные линии, проходят через начало координат—имеем узловую точку (рис. 51а, *1*). Если два корня, например, ω_2 и ω_3 разных знаков, тогда как ω_1 и ω_2 одного знака, то первое из уравне-

ний (22) дает попрежнему цилиндрические поверхности, проходящие через ось ζ, а второе—гиперболообразные цилиндры. Линии тока приближаются асимптотически с одной стороны к оси ζ, с другой—к плоскости $\xi\eta$ (рис. 51а, *3*).

Исследуя подобным же образом остальные случаи коллинеарного движения, придем к заключению, что они могут быть разделены на четыре группы:

I. Имеется узловая точка или узловая линия (рис. 51а, *1* и *2*). В частности, если узловой линией является ось z, а линии тока—плоские кривые, лежащие в горизонтальных плоскостях, то этот же случай со-

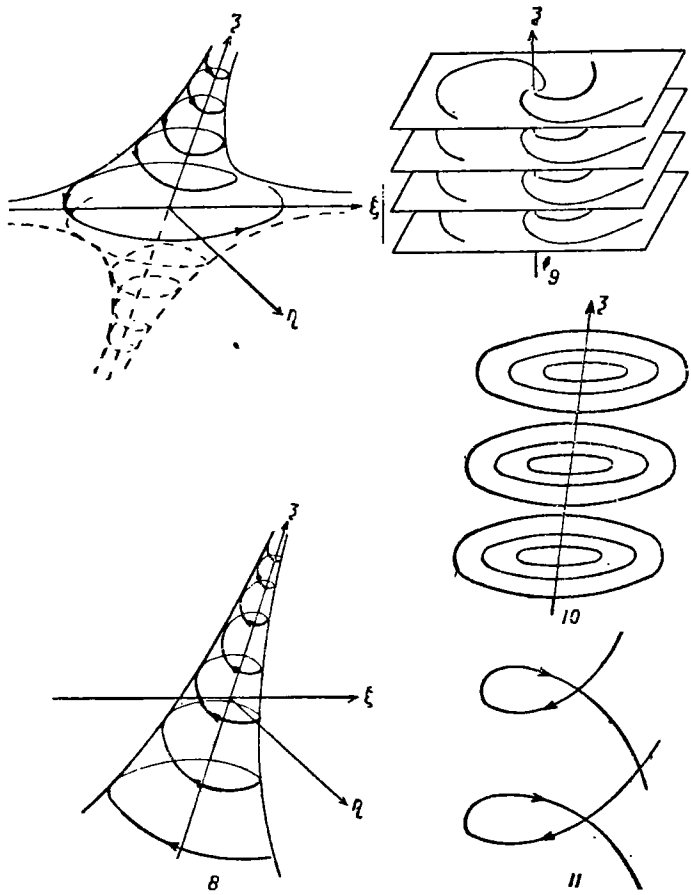

Рис. 51b.

ответствует плоскому движению, рассмотренному нами раньше в § 4. Группа первая характеризуется тем, что корни характеристического уравнения вещественны и одного знака.

II. Имеется асимптотическая линия или плоскость (или и то и другое). Линии тока или асимптотически приближаются к оси и плоскости (можно их назвать пространственными гиперболами, рис. 51а, *3*); здесь начало координат является нейтральной точкой. Или линии тока—плоские гиперболы, совокупность нейтральных точек которых образует нейтральную ось (рис. 51а, *4*); частный случай—плоское движение с нейтральной точкой. Или, наконец, имеем в пространстве „логарифмические" кривые, имеющие общую асимптоту—линию сходимости или расходимости (рис. 51а, *5*). Случаи этой группы характеризуются тем, что для них корни характеристического уравнения разных знаков.

III. Эта группа определяется тем, что характеристическое уравнение имеет комплексные корни. В качестве линий тока получаются кривые, напоминающие конические винтовые линии, для которых особая точка является асимптотической (рис. 51а, *6*).

Другой случай рассматриваемой группы: кривые суживаются в одном направлении к асимптотической линии, и расширяются в противоположном направлении, приближаясь асимптотически к некоторой плоскости (рис. 51b, *7*). Наконец, имеется третий случай—винтовых линий, имеющих асимптотическую прямую, но не имеющих асимптотической плоскости (рис. 51b, *8*). Сюда же относится частный случай—плоские спирали, фокусы которых лежат на одной оси (рис. 51b, *9*).

К третьему типу можно отнести случай, когда характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни. Здесь получаются замкнутые линии—эллипсы, лежащие в параллельных плоскостях; центры этих эллипсов образуют линию центров (рис. 51b, *10*).

IV. Сюда мы отнесем случай, стоящий обособленно, когда нуль—трехкратный корень характеристического уравнения, причем нет особой точки на конечном расстоянии. Здесь линиями тока являются линии пересечения цилиндров, имеющих направляющими параболы второго и третьего порядка (рис. 51b, *11*).

Рассматривая чертежи пространственных линий тока в коллинеарном движении, видим, что большинство из них представляет линии, встречающиеся в атмосферной действительности при тех или иных условиях. Особенный интерес представляют гиперболические линии (рис. 51а, *3*). Т. Бержерон [Л. 7] придает большое значение такого рода линиям тока в вопросе о генезисе фронтов. Для получения гиперболических линий тока Бержерон исходит из следующего: допустим, что в нашем поле скоростей происходит „растяжение“ скорости параллельно оси x, т. е., другими словами, что проекция скорости на ось x имеет вид:

$$u = ax, \ a > 0.$$

Далее, пусть имеем „сжатие“ параллельно оси z, т. е.

$$w = -cz, \ c > 0,$$

и, наконец, паралелльно оси y имеем хотя бы опять растяжение:

$$v = by, \ b > 0.$$

Тогда, интегрируя уравнения линий тока:

$$\frac{dx}{ax} = \frac{dy}{by} = \frac{dz}{-cz},$$

получим

$$x^{\frac{1}{a}} = Ay^{\frac{1}{b}}, \ x^{\frac{1}{a}} z^{\frac{1}{c}} = B,$$

где A и B—произвольные постоянные. Проекции этих линий на плоскость xz (а также на плоскость yz) представляют гиперболические линии, проекции на плоскость xy—параболообразные линии (рис. 52).

В пространстве линии имеют вид, изображенный на рис. 51а, *3*, только все оси должны быть взаимно перпендикулярны. Впрочем, Бержерон указывает, что обычно как раз наблюдается асимметричный случай, который можно считать соответствующим косоугольным осям координат. Существенным для теории образования и разрушения фронтов является характер перемещения линий (а в пространстве—поверхностей) в таком поле линий тока.

Если имеем чистое „растяжение“, например, параллельно оси x, т. е. если

$$u = ax, \ v = 0, \ w = 0,$$

то в таком поле скоростей прямые будут поворачиваться вокруг точек пересечения их с осью y, стремясь стать параллельно оси растяжения. т. е. оси x (см. рис. 50, A).

В случае чистого „сжатия“, например, параллельно оси z, т. е. для движения со скоростями

$$u = 0, \ v = 0, \ w = -cz,$$

прямые в поле скоростей будут поворачиваться вокруг точки пересечения с осью x, причем будут стремиться совпасть с осью x, т. е. стать перпендикулярно к оси „сжатия“ (см. рис. 50, B). Следовательно, расстояние между двумя параллельными прямыми стремится к нулю.

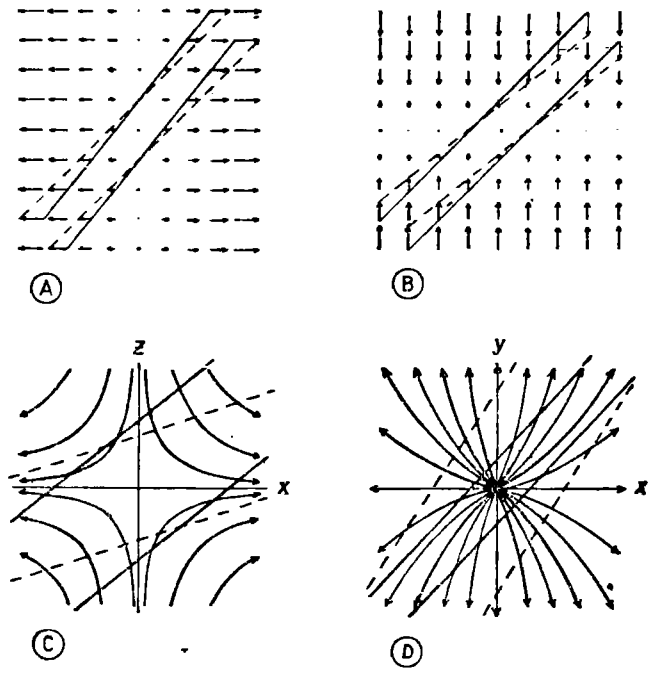

Рис. 52.

В случае, когда имеет место „сжатие“ или „растяжение“ по двум направлениям, можно сформулировать правило перемещения прямой в рассматриваемом поле скоростей, если считать „растяжение“ отрицательным „сжатием“, таким образом: прямые поворачиваются так, что стремятся стать перпендикулярными к оси большего сжатия. Если сжатия по обеим осям одинаковы (по величине и по знаку), то прямые в таком поле не поворачиваются.

Допустим, что мы имели в некоторый момент времени параллельные прямые, почти перпендикулярные к линии наибольшего сжатия, тогда такие прямые будут с течением времени сближаться; если же вначале прямые были перпендикулярны к другой оси, то они будут в течение некоторого промежутка времени удаляться друг от друга; когда же их поворот достигнет определенной величины, они начнут сближаться. Только прямые, точно перпендикулярные оси растяжения, будут все время удаляться друг от друга.

Если теперь рассмотреть плоскость в трехмерном поле скоростей, в котором происходят сжатия и растяжения по всем трем осям, то придем к результату: плоскость поворачивается, стремясь стать перпендикулярной к оси наибольшего „сжатия“, причем две плоскости в общем случае стремятся сблизиться.

Допустим теперь, по Бержерону, что поверхности равной потенциальной температуры суть параллельные плоскости. Если не имеем дела с исключительным случаем, то в конце концов эти плоскости будут сближаться, стремясь стать перпендикулярно к оси наибольшего сжатия. Градиент потенциальной температуры будет поэтому возрастать и рано или поздно перпендикулярно к этой оси возникнет фронтальная зона или фронт, в то время как перпендикулярно другим осям будет разрушение фронта.

В качестве примера Бержерон рассматривает двумерное поле деформации, с горизонтальной и наклонной осями деформации. Если горизонтальная ось есть ось сжатия, а наклонная—ось растяжения (рис. 53, *1*), то имеем фронтообразующее поле, в противном случае (рис. 53, *2*)—фронторазрушающее и образующее инверсии.

Из других линий тока, представленных на рис. 51 a и b, можно отметить линии типа *6*, *7* и *8*; подобного вида линии наблюдаются в смерчах и циклонах.

В качестве примера особенной точки второго порядка для линий тока в пространстве рассмотрим движение, которое может служить моделью кучевого облака и которое можно назвать двойным источником в пространстве.

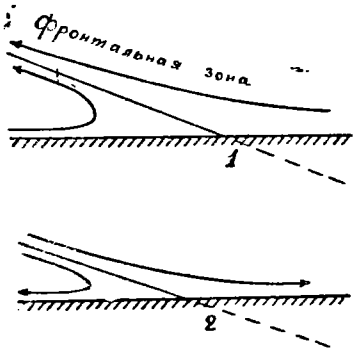

Рис. 53.

Если движение таково, что линии тока представляют пучок прямых, проходящих через некоторую точку, например начало координат, причем скорость в любой точке пространства обратно пропорциональна квадрату расстояния от начала координат (при этих условиях будет выполнено уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости), то говорят, что имеем в пространстве источник или сток, смотря по тому, от начала координат или к нему направлены скорости. Проекции скорости такого движения равны

$$u=-\frac{ax}{r^3},\quad v=-\frac{ay}{r^3},\quad w=-\frac{az}{r^3},$$

(при $a>0$—сток).

Если теперь представить себе, что на оси z, вблизи от начала координат, помещены источник и сток равной интенсивности, которая определяется коэфициентом a, и расстояние между источником и стоком устремлено к нулю, то получим так называемый двойной источник или дублет. В этом случае скорости будут иметь потенциал $-\frac{az}{r^3}$, так что

$$u=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{az}{r^3}\right)=\frac{3axz}{r^5},\quad v=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{az}{r^3}\right)=\frac{3ayz}{r^5},\quad w=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{az}{r^5}\right)=$$
$$=\frac{a(2z^2-x^2-y^2)}{r^5}.$$

Дифференциальные уравнения линий тока, после сокращения на $\frac{a}{r^5}$, будут иметь вид

$$\frac{dx}{3xz}=\frac{dy}{3yz}=\frac{dz}{2z^2-x^2-y^2}.$$

После интегрирования этой системы получим:

$$y=c_1x,\ [z^2+(1+c_1^2)x^2]^3=c_2x^4.$$

Видим, что линии тока представляют собою плоские кривые, лежащие в плоскостях $y=c_1x$. В плоскости $y=0$, т. е. при $c_1=0$, имеем такие линии тока:

$$(z^2+x^2)^3=c_2x^4,$$

или, если ввести полярные координаты

$$x=r\cos\Theta,\ z=r\sin\Theta,\ r^2=c_2\cos^4\Theta,$$

т. е.

$$r=c\cos^2\Theta.$$

В каждой из плоскостей $y=c_1x$ линии тока имеют такой же вид, как в плоскости $y=0$ (рис. 54). Как раз такого вида линии тока имеют место в кучевых облаках.

§ 6. Определение вертикальной скорости из уравнения неразрывности. Метод нахождения вертикальной скорости с помощью уравнения неразрывности был дан Маргулесом [Л. 8]; Бьеркнесу [Л. 9] принадлежит разработка графического способа, основанного на формуле Маргулеса; усовершенствование метода Маргулеса дано Береком [Л. 10]; К. Н. Васильев [Л. 11] рассмотрел вопрос об интервале высот, для которого применим метод Маргулеса. В гл. II мы имели вывод уравнения неразрывности. Дадим здесь другой вывод уравнения неразрывности, основанный на применении формулы Гаусса. Определим количество жидкости, протекающей в единицу времени через заданную произвольно поверхность S. Возьмем элемент поверхности dS; в некоторой точке внутри элемента возьмем вектор скорости V. Через промежуток времени dt частицы

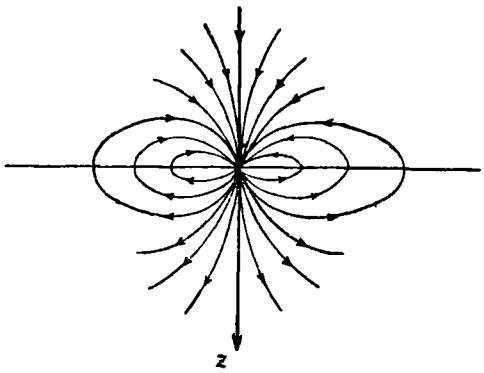

Рис. 54.

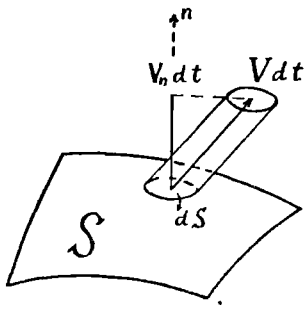

Рис. 55.

составлявшие элемент dS, передвинутся на отрезок Vdt, а потому количество жидкости dQ, протекшее через элемент dS за промежуток времени dt будет равно массе жидкости, занимающей об'ем цилиндра (рис. 55), имеющего основанием dS и высотой—проекцию Vdt на нормаль к площадке dS, т. е. $v_n dt$ (v_n—нормальная составляющая скорости). Поэтому

$$dQ=\rho v_n dt dS,$$

где ρ—плотность жидкости.

Если поверхность S замкнута, то будем считать положительным направление внешней нормали: тогда dQ будет положительно, если жидкость через элемент dS вытекает из об'ема, ограниченного поверхностью S, и отрицательно,—если втекает.

Количество жидкости, протекающей через поверхность σ в единицу времени, выразится интегралом

$$Q=\iint\limits_{(\sigma)} \rho v_n d\sigma.$$

Найдем другое выражение Q, исходя из следующего: пусть σ есть замкнутая поверхность, ограничивающая об'ем τ. Количество жидкости в об'еме τ есть интеграл

$$\iiint\limits_{(\tau)} \rho d\tau.$$

Через промежуток времени dt плотность изменит свою величину и будет равна $\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}dt$, а потому количество жидкости в об'еме τ через промежуток времени dt будет

$$\iiint\limits_{(\tau)}\left(\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}dt\right)d\tau.$$

Изменение количества жидкости за этот промежуток будет

$$\iiint\limits_{(\tau)}\frac{\partial\rho}{\partial t}dtd\tau,$$

изменение же, отнесенное к единице времени, т. е. величина Q будет равна:

$$Q=-\iiint\limits_{(\tau)}\frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau.$$

Перед интегралом взят знак минус потому, что если жидкость вытекает из об'ема τ, то плотность уменьшается, $\frac{\partial\rho}{\partial t}<0$, а величина Q, согласно условию, указанному выше, в случае вытекания считается положительной.

Приравнивая теперь найденные два выражения для Q, получим:

$$\iint\limits_{(\sigma)}\rho v_n d\sigma=-\iiint\limits_{(\tau)}\frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau.$$

По формуле Гаусса двойной интеграл, взятый по замкнутой поверхности σ, равен интегралу, взятому по об'ему τ, ограниченному поверхностью σ, от расхождения того вектора, нормальная составляющая которого стоит под знаком двойного интеграла. Поэтому

$$\iint\limits_{(\tau)}\rho v_n d\sigma=\iiint\limits_{(\tau)}\operatorname{div}(\rho V)\,d\tau.$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство и перенося оба члена равенства в одну сторону, найдем

$$\iiint\limits_{(\tau)}\left[\operatorname{div}(\rho V)+\frac{\partial\rho}{\partial t}\right]d\tau=0.$$

Равенство этого интеграла нулю справедливо для любого об'ема, поэтому должна равняться нулю подинтегральная функция [1])

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho V)=0. \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

Это и есть уравнение неразрывности для общего случая сжимаемой жидкости. Напишем его в раскрытом виде

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0. \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (24)$$

Беря производную произведения в трех последних членах, и делая перегруппировку членов, получим

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0.$$

Выражение, стоящее в первой скобке, есть индивидуальная производная

---

[1]) Строгое обоснование этого рассуждения приведено в гл. II, при выводе уравнений движения.

плотности, которую мы обозначаем $\frac{d\rho}{dt}$ (см. гл. II, стр. 31); выражение, стоящее во второй скобке, есть расхождение скорости. Поэтому можно представить уравнение неразрывности в такой форме:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} V = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

Переписав это уравнение таким образом

$$\operatorname{div} V = -\frac{d\rho}{\rho\, dt},$$

можем выразить зависимость между скоростью и плотностью так:

Расхождение скорости дает относительное изменение, отнесенное к единице времени, плотности элемента жидкости.

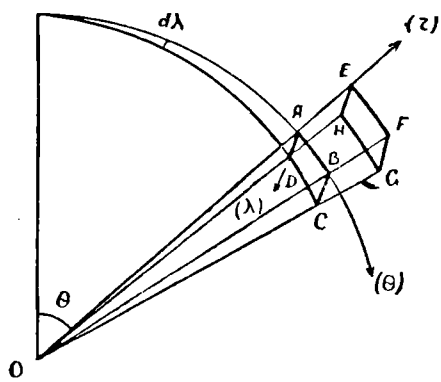

Рис. 56.

Очевидно, что для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности принимает вид

$$\operatorname{div} V = 0.$$

Если рассматриваются атмосферные движения на большом участке земной поверхности, когда нельзя пренебрегать кривизной этой поверхности, следует применять уравнение неразрывности в сферических координатах.

Для вывода этого уравнения возьмем элементарный об'ем $ABCDEFGH$ (рис. 56) и подсчитаем поток вектора ρV через все грани этого об'ема.

Обозначим через v_r составляющую скорости по направлению радиуса вектора, через v_λ—составляющую по параллели, v_θ—составляющую по меридиану. λ обозначает долготу точки, θ—дополнение широты; широту будем обозначать через φ. AB и CD—дуги меридиана, равные $rd\theta$; AD и BC—дуги параллели; $AD = r\sin\theta\, d\lambda$, $AE = DH = dr$.

Поток вектора ρV через грань $ABCD$ равен

$$-(\rho v_r) \cdot \text{пл. } ABCD = -(\rho v_r r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\lambda)_1,$$

поток через грань $EFGH$ равен

$$(\rho v_r r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\lambda)_2.$$

Поток через обе грани

$$(\rho v_r r^2 \sin\theta\, d\lambda\, d\theta)_2 - (\rho v_r r^2 \sin\theta\, d\lambda\, d\theta)_1 = \frac{\partial(\rho v_r r^2 \sin\theta\, d\lambda\, d\theta)}{\partial r}\, dr =$$

$$= \frac{\partial(\rho v_r r^2)}{\partial r} \sin\theta\, d\lambda\, d\theta\, dr.$$

Аналогично получим для потока через грани $AEHD$ и $BFGC$ выражение

$$\frac{\partial(\rho v_\theta \sin\theta)}{\partial\theta}\, r dr d\theta\, d\lambda,$$

и для суммы потоков через грани $AEFB$ и $DHGC$

$$\frac{\partial(\rho v_\lambda)}{\partial\lambda}\, r dr d\theta\, d\lambda.$$

Поток через всю поверхность, ограничивающую элементарный об'ем, равен

$$\left[\frac{\partial(\rho v_r r^2)}{\partial r}\sin\theta+\frac{\partial(\rho v_\theta \sin\theta)}{\partial\theta}r+\frac{\partial(\rho v_\lambda)}{\partial\lambda}r\right]drd\theta\,d\lambda.$$

С другой стороны, изменение массы жидкости внутри элементарного об'ема будет

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t}r^2\sin\theta\,drd\theta\,d\lambda,$$

и следовательно уравнение неразрывности, после сокращения на $r^2\sin\theta drd\theta d\lambda$, будет иметь вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial(\rho v_r r^2)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v_\lambda)}{\partial\lambda}=0.$$

Если вертикальная скорость отсутствует, т. е. если $v_r=0$, то имеем:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\rho v_\lambda)}{\partial\lambda}=0.$$

Если $\rho=\text{const}$, то уравнение примет вид

$$\operatorname{div} V=0,$$

причем

$$\operatorname{div} V=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(v_\theta\sin\theta)}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}=\frac{v_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}.$$

Если вместо θ ввести широту φ, связанную с θ равенством

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi,$$

то расхождение скорости (при $v_r=0$) будет таково:

$$\operatorname{div} V=\frac{\partial v_\varphi}{r\partial\varphi}+\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}-\frac{v_\varphi\operatorname{tg}\varphi}{r}. \quad \ldots\ldots\ldots (26)$$

Этой формулой для div V пользуется Sverdrup [Л. 12] при вычислении вертикальной скорости ветра над Атлантическим океаном. При этом он подвергает ее дальнейшим преобразованиям такого рода: прежде всего, полагает $r=R$, где R—средний радиус кривизны земли. Тогда последним членом формулы (26) можно пренебречь, если угол φ не очень близок к 90°.

Получим

$$\operatorname{div} V=\frac{\partial v_\varphi}{R\partial\varphi}+\frac{1}{R\cos\varphi}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}.$$

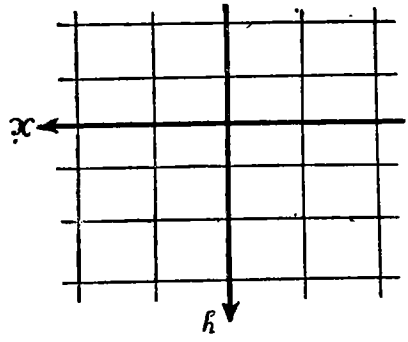

Рис. 57.

Далее, допустим, что имеем Меркаторскую проекцию области, занятой нашим движением, т. е. имеем карту, к которой экватор представлен прямой линией—осью x, главный меридиан—осью y (рис. 57). Как известно, имеем такие соотношения между координатами в Меркаторской проекции и географическими координатами точки:

$$x=mR\lambda,\qquad y=mR\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right),$$

где m—масштаб карты на экваторе.

Дифференцируя эти соотношения, найдем

$$R\cos\varphi\, d\lambda = \frac{\cos\varphi\, dx}{m},\quad R d\varphi = \frac{\cos\varphi\, dy}{m},$$

вследствие чего div V примет вид

$$\operatorname{div} V = \frac{m}{\cos\varphi}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27)$$

причем положено: $v_x = v_\lambda$, $v_y = v_\varphi$. Это и есть окончательная формула для div V, которой пользуется Sverdrup при вычислении вертикальной скорости (см. ниже стр. 268—269).

Вернемся теперь к уравнению неразрывности в форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

и проинтегрируем все члены по высоте z в пределах от 0 до некоторой данной высоты h

$$\int_0^h \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dz + \int_0^h \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dz + \int_0^h \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\, dz + \rho_h w_h - \rho_0 w_0 = 0. \ldots (29)$$

Здесь в последнем члене интегрирование уже выполнено, причем ρ_h, w_h означают плотность и вертикальную скорость на высоте h, ρ_0, w_0—на поверхности земли. Вводя для среднего значения функции f обозначение $\overline{f}$, а именно, полагая

$$\overline{f} = \frac{1}{h}\int_0^h f dz, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (30)$$

можем написать такие формулы:

$$\int_0^h \frac{\partial \rho}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^h \rho\, dz = h\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{h}\int_0^h \rho\, dz\right) = h\,\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t},$$

$$\int_0^h \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\, dz = h\,\frac{\partial(\overline{\rho u})}{\partial x},\quad \int_0^h \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\, dz = h\,\frac{\partial(\overline{\rho v})}{\partial y};$$

поэтому из уравнения (29) получаем выражение для w_h:

$$\rho_h w_h = \rho_0 w_0 - h\left(\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho u})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho v})}{\partial y}\right). \quad \ldots\ldots\ldots (31)$$

Введем обозначение V_s для вектора горизонтальной скорости, с составляющими u и v. Тогда формулу (31) можно переписать так:

$$\rho_h w_h = \rho_0 w_0 - h\left(\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div} \overline{\rho V_s}\right). \quad \ldots\ldots\ldots (32)$$

Если поверхность земли горизонтальна, то $w_0 = 0$, что дает

$$\rho_h w_h = -h\left(\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div} \overline{\rho V_s}\right); \quad \ldots\ldots\ldots (33)$$

если поверхность негоризонтальна, то w_0 представляет вертикальную скорость, обусловливаемую рельефом местности (мы считаем ось z направленной по вертикали, т. е. по направлению радиуса земли).

Если рассматриваемое движение стационарно, то $\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t}=0$, и формула (33) еще более упрощается:

$$\rho_h w_h = -h \operatorname{div} \overline{\rho V_s}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

Впрочем исследования Гессельберга и Фридмана [Л. 15] о порядке величин, входящих в уравнение гидродинамики, показывают, что в уравнении неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho V = 0$$

можно пренебречь первым членом по сравнению со вторым, причем делаемая ошибка не превосходит 1%. Поэтому можно считать уравнение (34) справедливым и для нестационарного движения.

Если вместо плотности ввести удельный об'ем ω_h, то последняя формула приобретает вид:

$$w_h = -h\omega_h \operatorname{div} \overline{\rho V_s}. \quad \ldots\ldots (35)$$

Преобразуем теперь расхождение плоского вектора к виду, удобному для графических построений.

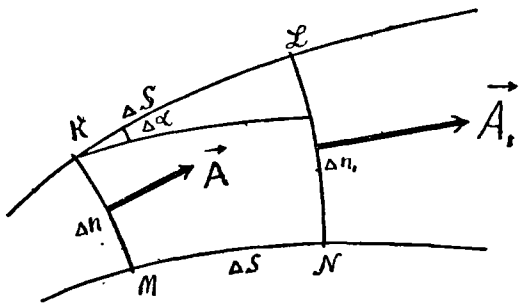

Рис. 58.

Пусть будут KL и MN (рис. 58) близкие между собою векториальные линии вектора A, т. е. линии, в каждой точке которых направление касательной совпадает с направлением вектора A; KM и LN—линии ортогональные к векториальным. Тогда—$A\,\Delta n$ будет представлять собою поток вектора A через отрезок KM, $A_1\,\Delta n_1$—поток вектора через отрезок LN. Расхождение же вектора A есть поток вектора через контур $KLMN$, отнесенный к единице площади, т. е.

$$\operatorname{div} A = \lim_{\Delta n \to 0} \frac{A_1\,\Delta n_1 - A\,\Delta n}{\Delta n\,\Delta s}.$$

Преобразуем правую часть написанного равенства так:

$$\lim \frac{A_1\,\Delta n_1 - A\,\Delta n}{\Delta n\,\Delta s} = \lim \frac{(A_1 - A)\,\Delta n}{\Delta n\,\Delta s} + \lim \frac{A_1(\Delta n_1 - \Delta n)}{\Delta n\,\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta s} +$$

$$+ \lim_{\Delta n \to 0} A_1 \frac{\Delta \alpha}{\Delta n} = \frac{\partial A}{\partial s} + A \frac{d\alpha}{dn},$$

где $\Delta\alpha = \frac{\Delta n_1 - \Delta n}{\Delta s}$ есть угол между линиями тока KL и MN; он равен углу между касательными к ортогональной линии KM в точках K и M, поэтому производная $\frac{d\alpha}{dn}$ есть не что иное как кривизна линии ортогональной к векториальным линиям. Введя обозначение

$$\frac{d\alpha}{dn} = \delta, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

можем написать такую формулу:

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A}{\partial s} + A\,\delta. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

Применим ее к вектору $\overline{\rho V_s}$:

$$\operatorname{div} \overline{\rho V_s} = \frac{\partial \overline{\rho V_s}}{\partial s} + \overline{\rho V_s} \cdot \delta$$

(очевидно, что в этом случае векториальные линии суть линии тока).

Тогда формула (35) примет вид

$$w_h = -h\omega_h \left(\frac{\partial \overline{\rho V_s}}{\partial s} + \overline{\rho V_s} \cdot \delta \right) \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

Существенным является вопрос о том, при каких условиях можем мы вычислять вертикальную скорость по этой формуле [Л. 8].

Рассмотрим формулу (38) в двух частных предположениях:

1) Линии тока параллельны друг другу, т. е. $d\alpha = 0$, а следовательно $\delta = 0$, и, кроме того, ρ не зависит от s (т. е. плотность постоянна вдоль линии тока). Тогда формула (38) дает

$$w_h = -h\omega_h \frac{\partial \overline{\rho V_s}}{\partial s}.$$

Так как осреднение ρV_s произведено только по высоте, то можно переставить знак дифференцирования со знаком осреднения

$$\frac{\partial \overline{\rho V_s}}{\partial s} = \overline{\frac{\partial \rho V_s}{\partial s}}.$$

Далее, вследствие предположенной независимости ρ от s имеем

$$\overline{\frac{\partial \rho V}{\partial s}} = \overline{\rho \frac{\partial V}{\partial s}},$$

так что

$$w_h = -h\omega_h \overline{\rho \frac{\partial V_s}{\partial s}}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (39)$$

Для упрощения вычислений, имея ввиду лишь грубую оценку, предположим, что ρ имеет постоянное значение, равное ρ_h, тогда его можно вынести из-под знака осреднения и написать

$$w_h = -h\omega_h \rho_h \overline{\frac{\partial V_s}{\partial s}} = -h \overline{\frac{\partial V_s}{\partial s}},$$

так как $\omega_h \rho_h = 1$ или $w_h = -h \overline{\frac{\Delta V}{\Delta s}}$.

Пусть $w_h = 0{,}1$ *м/сек*, $h = 1$ *км*, $\Delta s = 10$ *км*. Тогда $|\Delta V| = 1$ *м/сек*, следовательно, среднее изменение горизонтальной скорости на протяжении 10 *км* должно равняться 1 *м/сек* для того, чтобы вертикальная скорость получилась порядка 0,1 *м/сек*.

2) Предположим, что вдоль линии тока ρ и V_s сохраняют постоянные значения, тогда формула (39) дает

$$w_h = h\omega_h \overline{\rho V_s} \cdot \delta = -h\omega_h \overline{\rho V_s} \cdot \frac{d\alpha}{dn}$$

(последнее равенство основано на формуле 36).

Полагая опять $\rho = \rho_h$, и имея в виду, что $\rho_h \omega_h = 1$, получим

$$w_h = -h \overline{V_s} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\Delta n}.$$

Пусть $w = 0{,}1$ *м/сек*, $h = 1$ *км*, $\overline{V} = 1$ *м/сек*, $\Delta n = 1$ *км* (т. е. расстояние между соседними линиями тока равно 1 *км*), тогда найдем

$$|\Delta\alpha| = 0{,}1 \text{ радиана, т. е. около } 6^\circ.$$

Следовательно, расхождение линий тока должно быть порядка нескольких градусов, чтобы вертикальная скорость была порядка 0,1 *м/сек*.

В общем формула (39) может быть применена для грубого вычисления вертикальной скорости при существующей точности в определении горизонтальной скорости. С этим результатом интересно сопоставить то обстоятельство, что из уравнения неразрывности Маргулес получил формулу для $\frac{\partial p}{\partial t}$, т. е. изменения давления с временем, но для вычисления по этой формуле требуется знать, горизонтальную скорость с очень большой точностью, недостижимой на практике, и следовательно формула для $\frac{\partial p}{\partial t}$ совсем непригодна для вычислений.

Отметим, что при вычислении по формуле (38) необходимо знать распределение количества движения ρV_s по высоте, так как $\overline{\rho V_s}$ представляет собою среднее значение величины ρV_s в интервале от 0 до h, однако обычно не имеется достаточных сведений о распределении значений метеорологических элементов по высоте. В своей статье „О приложимости уравнений неразрывности к определению вертикальных течений в свободной атмосфере“ [Л. 11] К. Н. Васильев ставит вопрос о том, для какого интервала высот будет применима формула (35), если в ней заменить среднее значение $\overline{\rho V_s}$ значением $\rho_0 V_0$ количества движения на поверхности земли, т. е. положить

$$w_h = -h\omega_h \operatorname{div}(\rho_0 V_0).$$

Оказывается, что последняя формула применима лишь для интервала высот порядка 1 *м*.

Заметим, что Маргулес употребляет способ осреднения величины ρV_s отличный от изложенного нами, именно он полагает

$$\overline{u} = \frac{\int_0^h g\rho u dz}{\int_0^h g\rho dz}, \quad \overline{v} = \frac{\int_0^h g\rho v dz}{\int_0^h g\rho dz};$$

обозначая, далее

$$\int_0^h g\rho dz = p_0 - p_h = \overline{p}, \text{ [1]}$$

причем $\overline{p}$ есть вес столба воздуха высоты h с площадью основания равной единице, получим вместо формулы (35) такую:

$$w_h = -\frac{\omega_h}{g} \operatorname{div}\left(\overline{p} \cdot \overline{V}_s\right).$$

Обратимся теперь к графическим методам построения w_h.

Допустим, что мы имеем карты горизонтальных скоростей для различных высот и хотим построить карту вертикальной скорости на высоте h. Тогда, согласно формуле (38), мы должны сначала построить карту осредненных по высоте значений количества движения $\overline{\rho V_s}$, затем построить:

[1]) Равенство получается в результате интегрирования уравнения равновесия атмосферы:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho.$$

1) карту $\frac{\partial \rho V_s}{\partial s}$ производных от среднего количества движения вдоль линии тока, 2) карту произведений $\overline{\rho V_s} \cdot \delta$, где δ — кривизна линий ортогональным линиям тока, 3) графически сложить системы линий пп. 1 и 2 и, наконец 4) умножить линии п. 3 на $-h\omega_h$.

В § 4 этой главы мы уже говорили о графическом сложении полей. Разберем теперь вопрос о графическом умножении. Графическое умножение поля функции $\varphi(x,y)$ и поля функции $\psi(x,y)$ означает следующее: по данным семействам линий

$$\varphi(x,y) = \text{const}, \quad \psi(x,y) = \text{const},$$

построить линии

$$\varphi(x,y)\,\psi(x,y) = \text{const}.$$

Для решения этой задачи достаточно представить константы правых частей данных уравнений в виде показательных функций, например, положить

$$\varphi(x,y) = 10^{C_1} \quad \psi(x,y) = 10^{C_2},$$

тогда

$$\varphi(x,y) \cdot \psi(x,y) = 10^{C_1 + C_2}.$$

Этот прием, как видим, сводит графическое умножение к графическому сложению, так как, логарифмируя последнее уравнение, найдем: $\log_{10}\varphi + \log_{10}\psi = C_1 + C_2$. На рис. 59 построены линии:

$$x = \text{const} = 10^{C_1}, \quad y = \text{const} = 10^{C_2}.$$

Проведя диагонали тех четырехугольников, для которых $C_1 + C_2$ равно одному и тому же значению, получим гиперболы, отвечающие уравнению

$$xy = \text{const} = 10^{C_1 + C_2}.$$

Перейдем теперь к графическому дифференцированию функции $\varphi(x,y)$ по данному направлению s, т. е. к построению скалярного поля функции $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$. Для этого построим изолинии данной функции:

$$\varphi(x,y) = \text{const},$$

затем линии, вдоль которых будем производить дифференцирование (в применении к построению вертикальной скорости это будут линии тока). Обозначим значение функции $\varphi(x,y)$ в точке A через φ_1 (причем $\varphi_1 = C_1$, в точке B — через φ_2 ($\varphi_2 = C_2$).

Дугу AB заменяем отрезком Δs. Будем иметь приближенно:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\Delta s} = \frac{C_2 - C_1}{\Delta s}.$$

Примем, что полученное по этой формуле число есть значение производной в точке C, лежащей посредине дуги AB. Около точки C напишем найденное для $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ значение; то же самое проделаем для ряда других дуг Δs, и таким образом будем иметь поле значений производной $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$, имея которое уже нетрудно провести изолинии производной, т. е. линии, для которых $\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \text{const}$.

Упомянем еще о графическом способе Бьеркнеса определения кривизны линий [Л. 9]. Он состоит в том, что на прозрачной пластинке, на которой построена система концентрических окружностей, подбирают ту из окружностей, которая ближе всего соприкасается с данной линией

около рассматриваемой точки; величина, обратная радиусу этой окружности, будет кривизной кривой в данной точке. На рис. 60 построены линии одинаковой кривизны для данного семейства линий; на последних стрелкой указано положительное направление этих линий. Нулевая линия представляет собою геометрическое место точек перегиба данного семейства кривых. Линии с пометкой *a* и —*a* (например, *1* и —*1*, и *2* —*2*, и т. д. представляют геометрические места точек, в которых кривизна равна по абсолютному значению, направления же вогнутости различны. Именно, если положительное направление дуги и направление нормали *n* (считаемое положительным в сторону вогнутости кривой) соответствуют положительным направлениям осей *x* и *y*, то кривизна берется со знаком плюс (+), в противном случае кривизна берется со знаком минус (—) (рис. 61).

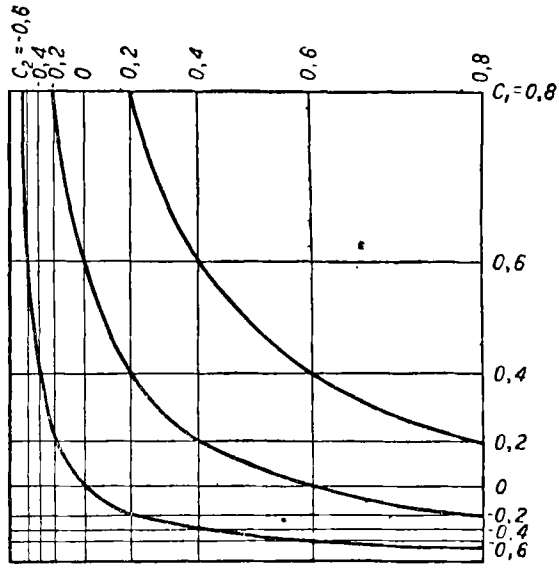

Рис. 59.

В формулу для вычисления вертикальной скорости ветра входит кривизна линий, ортогональных к линиям тока: $\delta = \frac{d\alpha}{nd}$ где dn — отрезок нормали между соседними линиями тока, $d\alpha$ — „расхождение" двух соседних линий тока, т. е. угол между касательными к линиям тока, проведенными в точках пересечения линий тока с ортогональной к ним линией (рис. 58). Для построения изолиний величины δ проводят систему линий, ортогональных к данному семейству и строят изолинии кривизны ортогональных кривых по указанному выше способу; можно, впрочем, ортогональные линии не строить, а подбирать на пластинке окружность, ортогональную, например, к трем соседним линиям тока.

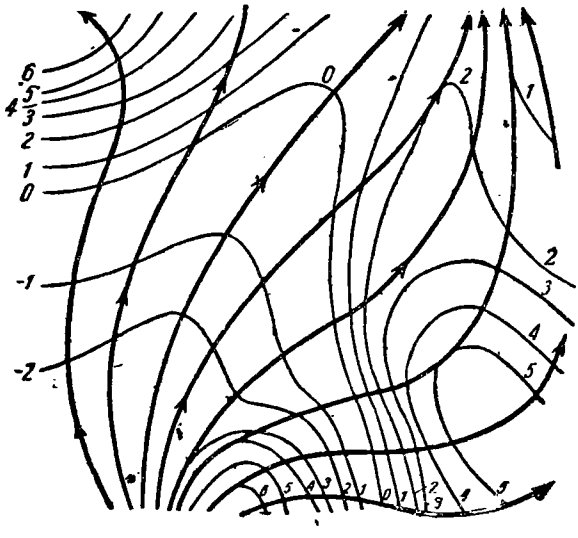

Рис. 60.

В качестве иллюстрации изложенного способа построения вертикальных скоростей приведем карту изолиний вертикальной скорости, построенную К. Н. Васильевым [Л. 11] (рис. 62). С ней сопоставлена карта облачности и осадков, причем обнаруживается, что по большей части в областях восходящих течений ($w > 0$) имеется значительная облачность или осадки, в областях нисходящих течений — небольшая облачность или ее отсутствие.

§ 7. Определение средних значений вертикальной скорости. Если поставить задачу о вычислении на высоте *h* среднего по некоторой площади зна-

чения вертикальной скорости, то эта задача может быть решена таким путем. Будем рассматривать столб воздуха высоты h, ограниченный сбоку цилиндрической поверхностью, направляющая которой параллельна оси z, снизу—горизонтальной плоскостью (поверхность земли), и сверху—горионтальной плоскостью $z=h$ (рис. 63). Рассмотрим нормальную составляющую скорости ветра v_n во всех точках этой поверхности и составим поверхностный интеграл или поток вектора ρV через нашу замкнутую поверхность, т. е. интеграл

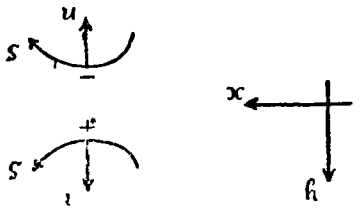

Рис. 61.

$$\int\int \rho v_n dS;$$

ρ — плотность воздуха, ρV—количество движения единицы объема.

Если ограничиться случаем стационарного движения, то этот интеграл должен равняться нулю, так как он представляет разность между количествами жидкости, втекающей и вытекающей через рассматриваемую поверхность в единицу времени. Разобьем нашу поверхность S на три поверхности: σ_0 и σ_2 — горизонтальные площадки и σ_1 — боковая поверхность цилиндра. Тогда можем написать

$$\int\int_{\sigma_0} \rho v_n dS + \int\int_{\sigma_1} \rho v_n dS + \int\int_{\sigma_2} \rho v_n dS = 0.$$

Для площадки σ_0 нормальная составляющая скорости $V_n=0$, так как это есть вертикальная скорость на поверхности земли, равная нулю. Для точек поверхности σ_2 имеем: $V_h=w_h$, где w_h — вертикальная скорость на высоте h. Поэтому последняя формула дает

$$\int\int_{\sigma_2} \rho w_h dS = -\int\int_{\sigma_1} \rho V_n dS.$$

Предполагая, что плотность ρ зависит только от высоты, будем иметь на высоте h значение плотности ρ_h, которое можно вынести за знак интеграла:

$$\rho_h \int\int_{\sigma_2} w_h dS = -\int\int_{\sigma_1} \rho V_n dS.$$

Введем теперь среднее значение вертикальной скорости, причем осреднение произведем по площади σ:

$$\overline{w_h} = \frac{1}{\sigma}\int\int_{\sigma_2} w_h dS.$$

Тогда получим

$$\rho_h \sigma \overline{w_h} = -\int\int_{\sigma_2} \rho V_n dS,$$

откуда

$$\overline{w_h} = -\frac{1}{\rho_h \sigma}\int\int_{\sigma_1} \rho V_n dS. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

Чтобы дать удобный способ вычисления по формуле (40), рассмотрим два случая.

1. Высота h настолько мала, что можно считать V_n не меняющейся по высоте, и зависящей следовательно лишь от координат x и y; ρ можно считать постоянным. Тогда, полагая элемент dS цилиндрической поверхности равным

$$dS = hdl,$$

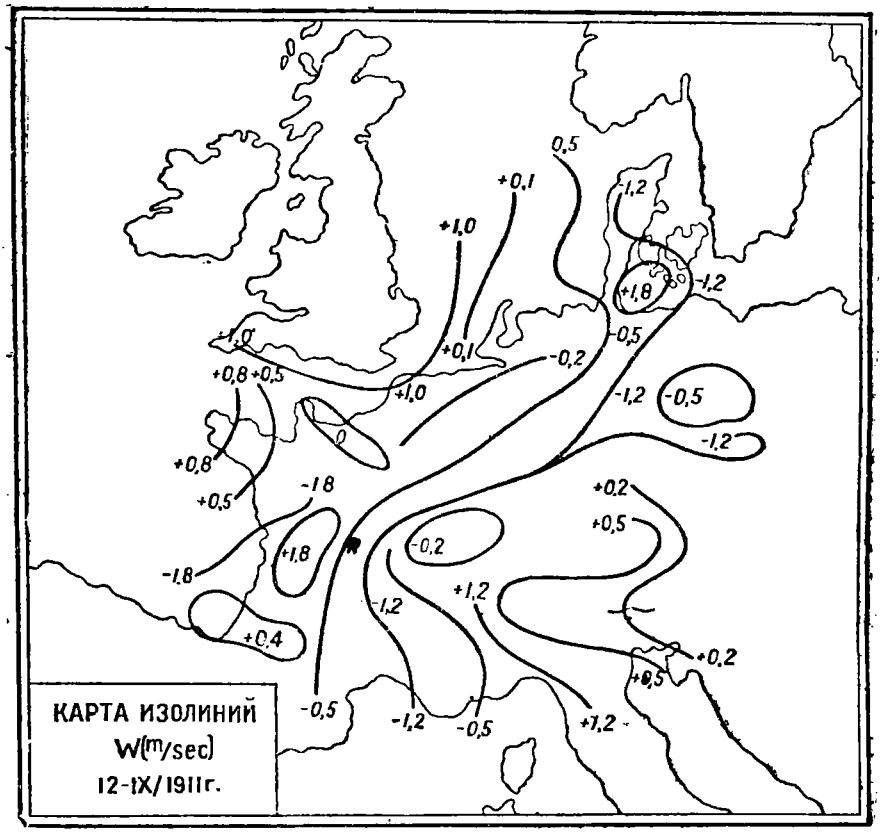

Рис. 62a.

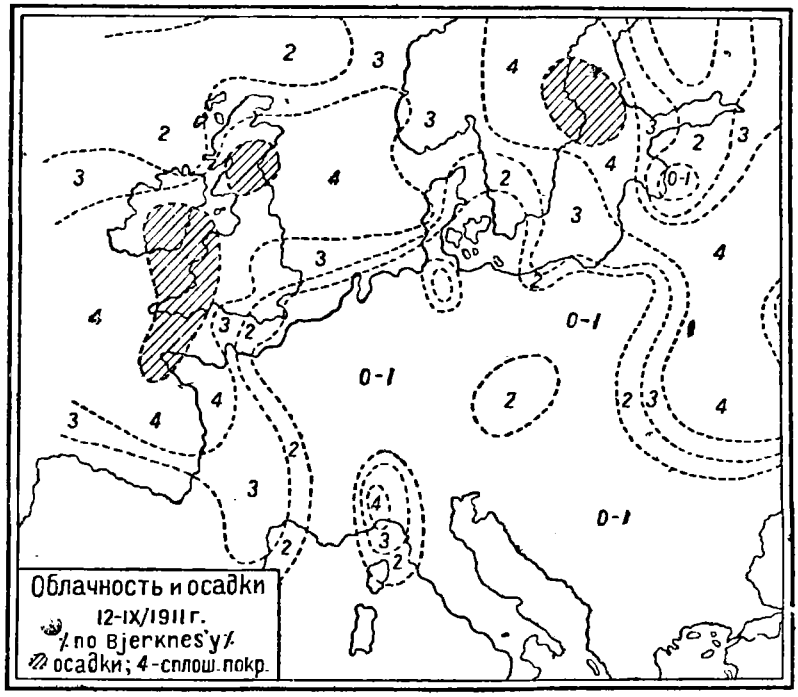

Рис. 62b.

где dl—элемент длины кривой L—направляющей нашего цилиндра, можем заменить интеграл на поверхности σ криволинейным интегралом по кривой L:

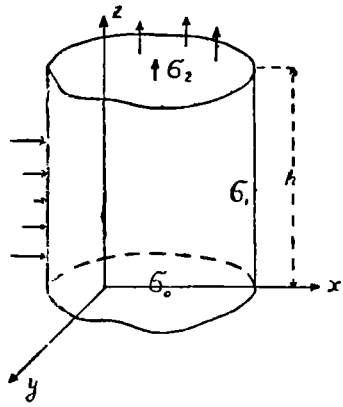

Рис. 63.

$$\iint_{\sigma_1} \rho V_n dS = h \int_L \rho V_n dl = h\rho \int_L V_n dl.$$

В последнем интеграле ρ (будем считать, что это плотность на поверхности земли), как постоянная вдоль кривой L, вынесена за знак интеграла.

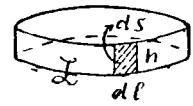

Рис. 64.

Теперь для $\overline{w}$ имеем

$$\overline{w}_h = -\frac{h\rho}{\sigma\rho_h} \int_L V_n dl. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (41)$$

Криволинейному интегралу

$$\int_L V_n dl,$$

играющему некоторую роль и в дальнейшем, дадим специальное название: протечение по контуру L, и обозначим его буквой P:

$$P = \int_L V_n dl.$$

Приближенно он равен сумме нормальных составляющих скорости, умноженных на отрезки дуги между выбранными точками кривой L:

$$P = \Sigma V_n \Delta l.$$

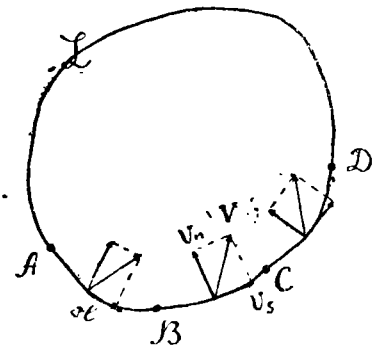

Рис. 65.

Вводя среднее значение $\overline{v}_n$, можно написать другую формулу

$$P = \int_L V_n dl = \overline{v}_n \cdot l, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (42)$$

где l—длина кривой L.

Если точки кривой, в которых рассматриваются скорости, находятся на равном расстоянии друг от друга, то $\overline{v}_n$ есть просто среднее арифметическое.

Подставляя в формулу (41) выражение (42), можем написать

$$\overline{w}_h = -\frac{h\rho l}{\rho_h \sigma} \overline{v}_n. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (43)$$

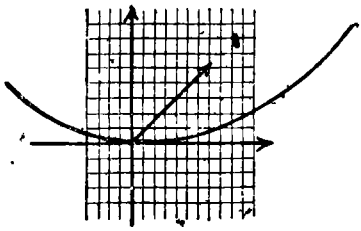

Рис. 66.

Укажем на возможный способ определения нормальной v_n, а заодно и касательной составляющей скорости v_s по данному контуру. Нужно на прозрачной пластинке построить возможно мелкую сеть квадратиков с двумя более толстыми перпендикулярными линиями (рис. 66) и подгонять эту сеть к контуру L в точке A, где построен вектор скорости AB так, чтобы одна сторона квадратов была касательной к L, другая—нормальной к L; для нахождения

v_n и v_s останется лишь подсчитать числа клеточек по основным перпендикулярам.

2. В общем случае, когда высота h настолько велика, что нельзя считать ρ и v_n не зависящими от z, можно разбить промежуток $(0, h)$ на k высот, таких, что в каждом из полученных промежутков высоты ρ и v_n не зависят от z; тогда боковая цилиндрическая поверхность σ_1 разобьется на ряд цилиндрических поверхностей с высотами Δh_1, Δh_2,.... Δh_k и интеграл формулы (40) можно разбить на сумму интегралов:

$$\int\int_{\sigma_1} \rho v_n dS = \rho_1 \Delta h_1 \int_{L_1} v_{n_1} dl + \rho_2 \Delta h_2 \int_{L_2} v_{n_2} dl + \rho_k \Delta h_k \int_{L_k} v_{nk} dl.$$

Длины всех контуров: L_1, L_2,..., L_k одинаковы и равны l, поэтому

$$\int\int_{\sigma_1} \rho v_n dS = l \sum_{i=1}^{k} \rho_i \Delta h_i \overline{v_{ni}},$$

и в соответствии с формулой (40) получаем такую формулу для вычисления $\overline{w_h}$;

$$\overline{w_h} = -\frac{l}{\rho_h \sigma} \sum_{i=1}^{k} \rho_i \Delta h_i \overline{v_{ni}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (44)$$

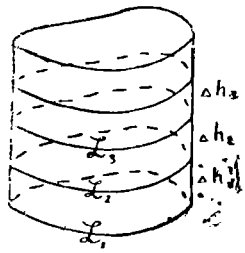

Рис. 67.

Заметим, что составляющая V_n считается положительной, если она направлена в сторону внешней нормали к контуру L, и отрицательной—если она направлена внутрь контура.

Формулы (43) и (44) для определения средней вертикальной скорости являются гораздо более точными, чем формула (38) для определения вертикальной скорости в одном определенном пункте. В этом заключается большое преимущество формул (43) и (44) в сравнении с (38).

§ 8. Циркуляция и протечение. Циркуляцией C скорости по замкнутому контуру называется криволинейный интеграл

$$C_L = \int_L v_s dl, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (45)$$

где v_s есть касательная к кривой, L составляющая скорости, dl элемент дуги кривой L.

Протечением (как мы видели уже в предыдущем параграфе) по контуру L называется криволинейный интеграл от нормальной составляющей скорости

$$P_L = \int_L v_n dl. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (46)$$

Пользуясь теоремой о среднем, можем написать такие выражения для C и P:

$$C = \overline{v_s} \int_L dl = \overline{v_s} \cdot l, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (47)$$

$$P = \overline{v_n} \int_L dl = \overline{v_n} \cdot l, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (48)$$

где v_s и v_n — средние значения касательной и нормальной к контуру составляющих скорости, l — длина кривой L. Циркуляция и протечение могут служить характеристиками циклона или антициклона, так как циркуляция определяет среднее состояние вращения, можно сказать „завихренность“

в рассматриваемой области, а протечение определяет средний поток скорости через контур, ограничивающий область.

В предыдущем параграфе было указано, как можно просто производить разложение скорости на касательную и нормальную к контуру составляющие. Отметим, что если имеющиеся на карте вектора скорости неравномерно распределены вдоль контура, то лучше пользоваться не формулами (47) и (48), но такими приближенными формулами:

$$C = \Sigma v_s \Delta l, \quad P = \Sigma v_n \Delta l,$$

где Δl длины отрезков AB, BC..., построенных так, что точки A, B, являются серединами дуг между соседними векторами (рис. 65). Идея введения циркуляции и протечения в качестве характеристик атмосферных движений, принадлежащая А. А. Фридману, использована в работе Лорис-Меликова и Синягина [Л. 16].

§ 9. Некоторые сведения из гидродинамики. Плоское движение несжимаемой жидкости. Изложим некоторые основные определения из области гидродинамики.

Вихрем скорости называется вектор Ω с составляющими по осям координат:

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \ldots\ldots \quad (49)$$

где u, v, w, суть составляющие скорости частицы жидкости.

Физическое значение вихря таково: допустим, что рассматриваемая частица жидкости внезапно затвердеет, причем внешний по отношению к частице объем жидкости исчезнет, тогда вихрь по величине будет равен удвоенной угловой скорости вращения частицы, а по направлению совпадет с ее осью вращения.

Следует различать вращательное движение жидкости и вихревое, так как эти два понятия могут не совпадать. Приведем примеры.

1. Движение, параллельное оси x, со скоростями, пропорциональными расстоянию от оси x

$$u = ay, \quad v = 0, \quad w = 0,$$

не вращательное, но вихревое, так как для него

$$\xi = \eta = 0, \quad \zeta = -a.$$

2. Движение по окружностям со скоростями, обратно пропорциональными расстоянию от начала координат, есть вращательное, но безвихревое движение, ибо здесь имеем:

$$u = \frac{ay}{r^2}, \quad v = -\frac{ax}{r^2}, \quad w = 0, \quad \xi = \eta = \zeta = 0.$$

3. Движение по окружностям со скоростями, пропорциональными расстоянию от начала координат, есть вращательное и вихревое.

$$u = -ay, \quad v = ax, \quad w = 0, \quad \xi = \eta = 0, \quad \zeta = 2a;$$

частицы движутся по окружности, оставаясь все время обращенными одной и той же стороной к центру окружностей, так что, когда частица вернется в исходное положение, то она за это время повернется на угол в 360°.

Вихревыми линиями называются линии, в каждой точке которых направление касательной совпадает с направлением вихря. Их дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

Мы видим, что определение вихревых линий имеет аналогию с определением линий тока.

Для плоско-параллельного движения, параллельного плоскости xoy, составляющие скорости имеют вид

$$u = u(x, y, t), \quad v = v(x, y, t), \quad w = 0;$$

нетрудно видеть, что тогда горизонтальные составляющие вихря равны нулю, а вертикальная составляющая зависит от x, y, t:

$$\xi = \eta = 0, \quad \zeta = \zeta(x, y, t).$$

Следовательно, уравнение вихревых линий будет

$$\frac{dx}{0} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{\zeta(x, y, t)},$$

откуда получается

$$x = C_1, \; y = C_2 \; (C_1, C_2 — \text{произвольные постоянные}).$$

Таким образом видим, что вихревые линии представляют собою прямые параллельные оси z.

Рис. 68.

Вихревой трубкой называется поверхность, которая строится таким образом: возьмем в жидкости произвольную замкнутую кривую и через каждую ее точку проведем вихревую линию: совокупность этих линий и образует вихревую трубку (рис. 68).

Теорема Стокса в применении к вектору скорости может быть сформулирована таким образом: циркуляция скорости по замкнутому контуру равна потоку вихря через любую поверхность, ограниченную этим контуром:

$$C_L = \int_L v_S dl = \int\int_S \Omega_n dS; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (51)$$

здесь S — рассматриваемая поверхность, dS — элемент поверхности, Ω_n — нормальная к этой поверхности составляющая вихря.

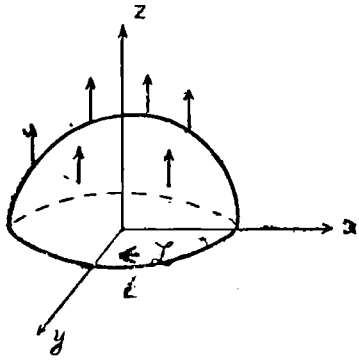

Рис. 69.

Равенство (51) можно переписать в развернутом виде:

$$C_L = \int_L u dx + v dy + w dz =$$

$$= \int\int_S \xi dydz + \eta dxdz + \zeta dxdy. \ldots \quad (52)$$

Приведем простой пример, иллюстрирующий смысл формулы (52).

Дано движение: $u = -ay$, $v = ax$, $w = 0$. Здесь мы имеем: $\xi = \eta = 0$, $\zeta = 2a$.

Пусть кривая L—окружность радиуса R в плоскости xy, а поверхность—полусфера, опирающаяся на L (рис. 69).

Тогда

$$C_L = \int_L u dx + v dy + w dz = a \int_L (-y dx + x dy).$$

Напишем уравнение окружности в параметрической форме:

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t.$$

Вычислив dx и dy, преобразуем выражение $xdy - ydx$ к виду

$$-ydx + xdy = + R^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = + R^2 dt.$$

Получим

$$C_L = aR^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi aR^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

С другой стороны

$$\iint_S \xi\, dydz + \eta\, dxdz + \zeta\, dxdy = 2a \iint_S dxdy.$$

Последний интеграл по поверхности S представляет собою проекцию площади этой поверхности на плоскость xy, т. е. площадь круга радиуса R (на этом примере ясно, что поверхность S может быть произвольною поверхностью, опирающейся на окружность L).

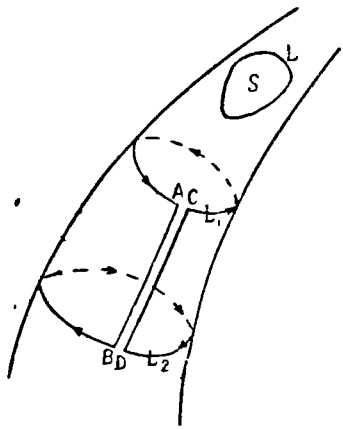

Рис. 70

Следовательно, рассматриваемый интеграл равен

$$2a\pi R^2,$$

что совпадает с выражением (53) для циркуляции.

Если за контур L принимать кривые, лежащие на поверхности вихревой трубки, то можно получить следующие две теоремы:

1. Циркуляция по кривой, лежащей на поверхности вихревой трубки, и могущей непрерывной деформацией быть стянутой в точку, равна нулю. Действительно, если имеем кривую L на поверхности вихревой трубки (рис. 70), то за поверхность S можем принять часть поверхности вихревой трубки, ограниченной кривой L. Но во всех точках поверхности вихревой трубки нормальная составляющая вихря Ω_n равна нулю, поэтому и циркуляция, на основании формулы (51), будет равна нулю.

2. Циркуляция по контуру, проведенному на вихревой трубке, охватывающему ее один раз и не могущему быть стянутым в точку, есть величина постоянная вдоль всей вихревой трубки. Теорема будет доказана, если покажем, что $C_{L1} = C_{L2}$, где L_1 и L_2 — контуры, изображенные на рис. 70. Проведем на вихревой трубке линии AB и CD бесконечно близкие между собой. Тогда циркуляция по замкнутому контуру, состоящему из L_1 (мы обходим L_1 в направлении по часовой стрелке) DC, L_2 (этот контур проходит против часовой стрелки) и BA, равна нулю, согласно теореме 1. Но интегралы по DC и BA, взятые по линиям, проходимым в противоположных направлениях, сокращаются; остаются интегралы по L_1 и L_2, сумма которых равна нулю; если мы переменим направление обхода на L_2, т. е. будем обходить контур L_2 по часовой стрелке, то интеграл по L_2 изменит знак, т. е. мы будем иметь

$$C_{L1} - C_{L2} = 0,$$

откуда $C_{L1} = C_{L2}$, *г* и т. д.

Из этой теоремы следует, что циркуляция по замкнутому контуру, охватывающему вихревую трубку, есть величина, характеризующая данную вихревую трубку. Мы будем обозначать эту циркуляцию через C. Из формулы (51), для достаточно тонкой вихревой трубки, можно вывести приближенную формулу:

$$C = \Omega_n dS, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

где dS — площадь поперечного сечения трубки.

Рассмотрим плоское безвихревое движение несжимаемой жидкости. Для него имеем два уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (55)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (56)$$

из которых первое выражает условие равенства вихря нулю, второе есть уравнение неразрывности.

Уравнение (55) показывает, что $udx+vdy$ есть полный дифференциал:

$$udx+vdy=d\varphi,$$

откуда

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v=\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (57)$$

и следовательно скорость имеет потенциал $\varphi(x, y, t)$.

Уравнение (56) показывает, что $udy-vdx$ есть полный дифференциал; положим

$$udy-vdx=d\psi, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (58)$$

тогда

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (59)$$

Если выражения (57) для u и v подставить в формулу (56), то увидим, что потенциал скорости φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0.$$

Точно так же, подставляя формулы (59) в уравнение (55), найдем что функция ψ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\psi=0.$$

Сравнивая выражения для u и v, даваемые формулами (57) и (59), получим уравнения Коши—Римана

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Докажем, что кривые $\psi=\text{const}$ являются линиями тока рассматриваемого движения. Действительно, из уравнения линий тока

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}$$

получаем

$$udy-vdx=d\psi=0$$

[на основании (58)].

Уравнение $\psi=\text{const}$ есть общий интеграл уравнения линий тока; функция ψ носит название **функции тока**.

Как известно из теории функций комплексного переменного, функции φ и ψ, удовлетворяющие условиям Коши—Римана (при непрерывности производных $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, . . .), можно рассматривать как вещественную и мнимую части некоторой функции $f(z)$ комплексного переменного $x+iy$:

$$\varphi+i\psi=f(z).$$

Эта функция называется **комплексным потенциалом**. Ее производная по z дает комплексную скорость

$$\frac{df(z)}{dz}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}=u-iv.$$

Для полного определения функций φ и ψ нужно задать условия на границах: например $\frac{d\varphi}{dn}$, т. е. производную φ по нормали на стенках сосуда, в котором заключена жидкость, или скорость на ∞, если жидкость занимает бесконечный об'ем.

Если рассматриваемая область односвязна и скорость на бесконечности равна нулю, то можно доказать, что жидкость будет находиться в покое. Для многосвязной области, кроме условий на границах, необходимо задать циркуляции по контурам, не могущим быть стянутыми в точку. Заметим, что циркуляция по контуру L для плоского движения может быть написана так:

$$C_L = \int_L v_S dl = \int_L u dx + v dy;$$

так как наше движение имеет потенциал, то

$$C_L = \int_L \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = \int_L d\varphi.$$

Если φ — однозначная функция, то интеграл по замкнутому контуру от $d\varphi$ должен равняться нулю, если φ — многозначна, то C_L, вообще говоря, отлично от нуля.

Обратимся к рассмотрению некоторых случаев плоского безвихревого движения.

1. Точечный вихрь. Пусть комплексный потенциал $f(z)$ будет

$$f(z) = \frac{C}{2\pi i} \lg z. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

Отделяя вещественную и мнимую части, получим

$$f(z) = \frac{C}{2\pi i}\left(\lg r + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right) = \frac{C}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{C_i}{2\pi} \lg r = \varphi + i\psi,$$

отсюда

$$\varphi = \frac{C}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \quad \psi = -\frac{C}{2\pi} \lg r.$$

Уравнения линий тока и линий равного потенциала

$$\psi = \text{const} \quad \text{и} \quad \varphi = \text{const}$$

приводят к таким уравнениям:

$$r = \text{const} \quad \text{и} \quad \frac{y}{x} = \text{const},$$

что дает для линий тока окружности с центром в начале координат, а для линий равного потенциала—прямые, проходящие через начало (рис. 71).

Вычислим циркуляцию по замкнутому контуру, окружающему начало

$$C_L = \int_L u dx + v dy = \int_L d\varphi = \frac{C}{2\pi} \int_L d\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right).$$

При обходе по контуру $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ увеличивается на 2π, поэтому последний интеграл дает

$$C_L = C,$$

т. е. коэфициент C есть не что иное, как циркуляция по любому контуру, окружающему начало.

Вихрей в нашем движении мы не имеем, но имеем циркуляцию отличную от нуля. Начало координат является точкой разветвления комплекс-

ного потенциала $\frac{C}{2\pi i}\lg z$. Говорят, что в начале координат имеем **точечный вихрь**. Комплексная скорость равна

$$u-iv=\frac{df}{dz}=\frac{C}{2\pi i}\frac{1}{z}.$$

Видим, что величина скорости в любой точке жидкости

$$\left|\frac{C}{2\pi iz}\right|=\frac{|C|}{2\pi r}$$

обратно пропорциональна расстоянию точки от вихря.

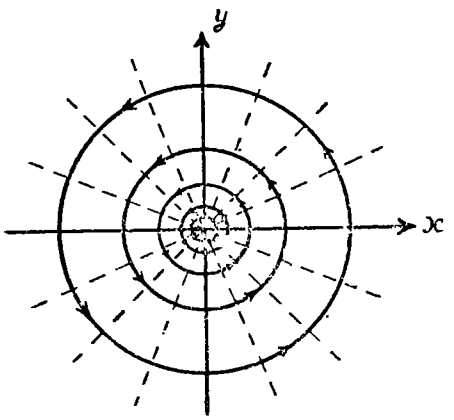

Рис. 71.

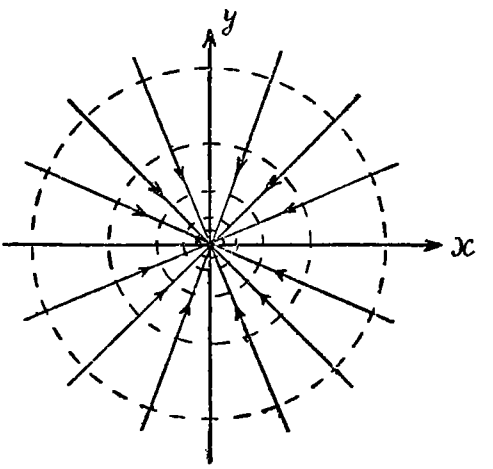

Рис. 72.

2. **Источник. Функция**

$$f(z)=\frac{P}{2\pi}\lg z=\frac{P}{2\pi}\left(\lg r+i\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right), \quad \ldots\ldots \quad (61)$$

(P—вещественное число)
определяет движение, в котором линии тока суть прямые

$$\frac{y}{x}=\text{const},$$

линии равного потенциала—окружности

$$r=\text{const},$$

так как здесь

$$\varphi=\frac{P}{2\pi}\lg r, \qquad \psi=\frac{P}{2\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Говорят, что точка O является **источником** или **стоком**, смотря по тому, направлены ли скорости от начала координат или к началу (рис. 72). Нетрудно убедиться в том, что P есть протечение по замкнутому контуру, окружающему источник. Действительно,

$$P_L=\int_L v_n dl=\int_L udy-vdx=\int_L\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial x}dx=\int_L d\psi=$$

$$=\frac{P}{2\pi}\int_L d\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)=P.$$

3. **Вихреисточник.** Сложив комплексные потенциалы двух предыдущих примеров, получим:

$$f(z)=\frac{C+Pi}{2\pi i}\lg z=\frac{C+Pi}{2\pi i}\left(\lg r+i\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right). \quad \ldots\ldots \quad (62)$$

Здесь линии тока будут

$$\psi = \frac{P}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \frac{C}{2\pi} \lg r = \text{const},$$

линии равного потенциала

$$\varphi = \frac{P}{2\pi} \lg r + \frac{C}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \text{const}.$$

Те и другие линии представляют собой логарифмические спирали (рис. 73). Вихреисточник является простейшей моделью циклона или антициклона.

4. Два вихря могут служить простейшей моделью двух центров—максимумов или минимумов, или максимума с минимумом. Особый интерес здесь представляет вопрос о перемещении вихрей.

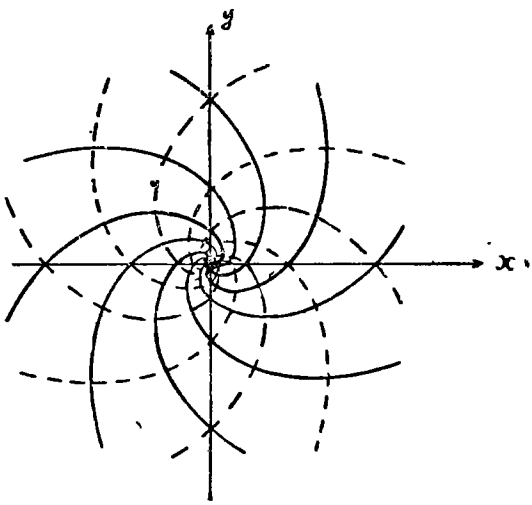

Рис. 73.

Комплексный потенциал двух вихрей, находящихся в точках z_1 и z_2, имеет вид:

$$f(z) = \frac{C_1}{2\pi i} \lg (z - z_1) + \frac{C_2}{2\pi i} \lg (z - z_2), \quad . \; . \; . \quad (63)$$

где C_1—циркуляция первого вихря, C_2—второго.

Комплексная скорость в любой точке плоскости равна

$$u - iv = \frac{df}{dz} = \frac{C_1}{2\pi i} \frac{1}{z - z_1} + \frac{C_2}{2\pi i} \frac{1}{z - z_2}.$$

Чтобы получить скорость в точке z_1, рассуждаем так: один вихрь не перемещается в жидкости (вихрь сам на себя не действует), поэтому в выражении $u - iv$ первый член следует отбросить, а во втором положить $z = z_1$.

Получим скорость в точке z_1:

$$u_1 - iv_1 = \frac{C_2}{2\pi i} \frac{1}{z_1 - z_2}.$$

Аналогично, для скорости в точке z_2 будем иметь

$$u_2 - iv_2 = \frac{C_1}{2\pi i} \frac{1}{z_2 - z_1}.$$

Очевидно, что комплексная скорость $u - iv$ есть производная по времени от $\bar{z}$, где $\bar{z} = x - iy$:

$$u - iv = \frac{d\bar{z}}{dt}.$$

Следовательно предыдущие два уравнения можно переписать так:

$$\frac{d\bar{z}_1}{dt} = \frac{C_2}{2\pi i} \frac{1}{z_1 - z_2}, \qquad \frac{d\bar{z}_2}{dt} = \frac{C_1}{2\pi i} \frac{1}{z_2 - z_1}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (64)$$

Умножая первое из этих уравнений на C_1, второе на C_2 и складывая,

получим

$$C_1\frac{d\bar{z}_1}{dt}+C_2\frac{d\bar{z}_2}{dt}=0,$$

откуда, после интегрирования, найдем

$$C_1\bar{z}_1+C_2\bar{z}_2=\text{const}.$$

Отделяя вещественную и мнимую части, будем иметь два интеграла дифференциальных уравнений движения двух вихрей:

$$C_1x_1+C_2x_2=\text{const};\qquad C_1y_1+C_2y_2=\text{const}.$$

Перепишем последние уравнения, разделив их на сумму C_1+C_2:

$$\frac{C_1x_1+C_2x_2}{C_1+C_2}=\text{const},\qquad \frac{C_1y_1+C_2y_2}{C_1+C_2}=\text{const}.$$

Полученные уравнения показывают, что точка с координатами

$$x_C=\frac{C_1x_1+C_2x_2}{C_1+C_2},\qquad y_C=\frac{C_1y+C_2y_2}{C_1+C_2},$$

которую называют „центром инерции" вихрей, остается неподвижной во все время движения.

Далее вычтем уравнения (64) одно из другого:

$$\frac{d(\bar{z}_1-\bar{z}_2)}{dt}=\frac{C_1+C_2}{2\pi i}\,\frac{1}{z_1-z_2}.$$

Заменяя все комплексные величины в этом уравнении им сопряженными, получим

$$\frac{d(z_1-z_2)}{dt}=-\frac{C_1+C_2}{2\pi i}\,\frac{1}{\bar{z}_1-\bar{z}_2}.$$

Умножим теперь первое уравнение на z_1-z_2, второе на $\bar{z}_1-\bar{z}_2$ и сложим:

$$(z_1-z_2)\frac{d(\bar{z}_1-\bar{z}_2)}{dt}+(\bar{z}_1-\bar{z}_2)\frac{d(z_1-z_2)}{dt}=0,$$

откуда, после интегрирования, найдем

$$(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=\text{const}.$$

Наконец подставим $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, получим окончательно

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=\text{const}.$$

Этот интеграл указывает на то, что расстояние между двумя вихрями остается неизменным во все время движения. Следовательно, два вихря вращаются вокруг „центра инерции", оставаясь на одинаковом расстоянии друг от друга. В частном случае, когда $C_1=-C_2$, т. е., когда вихри имеют одинаковую циркуляцию, но противоположное вращение, неподвижная точка—„центр инерции" находится на бесконечности (знаменатель C_1+C_2 обращается в нуль). В этом случае скорости обоих вихрей, как нетрудно показать, равны и направлены перпендикулярно к линии, соединяющей вихревые центры.

Известно, что минимумы (или максимумы) перемещаются, причем скорость их перемещения зависит, с одной стороны, от термических воздействий, с другой стороны, от динамических воздействий других минимумов; последнее воздействие как-раз такого же характера, как при движении двух вихрей, именно, каждый из двух минимумов, действующих друг на друга, перемещается в направлении ветров второго минимума.

Заметим, что ближе к действительности было бы рассматривать минимумы не как вихри, а как вихреисточники. Если имеем два вихреисточника с заданными интенсивностью и циркуляцией, то можно определить траектории их центров путем приближенного или графического интегрирования, исходя из того, что каждый центр под влиянием другого перемещается по диагонали прямоугольника, сторонами которого являются протечение и циркуляция другого вихреисточника, причем скорость перемещения обратно пропорциональна расстоянию между вихреисточниками. На рис. 74 изображены вихреисточники z_1 и z_2.

Чтобы определить скорость в точке z_1, соединяем z_1 и z_2; по этой прямой откладываем протечение P_2 в соответствующем направлении (на чертеже имеем в точке z_2 сток, для источника P_2 было бы направлено в противоположную сторону), C_2 откладываем по перпендикуляру к P_2, диагональ, построенную на P_2 и C_2, укорачиваем в отношении $1/r$, где r есть расстояние z_1 z_2, и получаем вектор скорости V_1. Умножив его на промежуток времени Δt, получим смещение Δs_1 точки z_1 за этот промежуток времени. Проделав то же самое по отношению к точке z_2, получим ее смещение Δs_2 под влиянием вихреисточника z_2. Затем можно повторить все построение, исходя из новых положений вихреисточников и т. д.

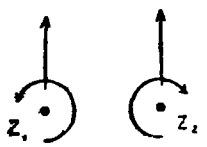

Рис. 74.

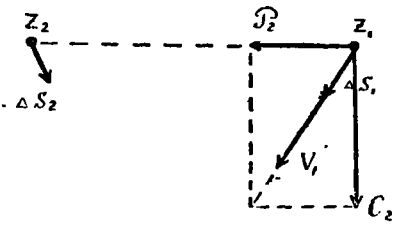

Рис. 75.

Этот метод может быть применен к исследованию перемещения вторичного минимума под влиянием главного, причем обычно воздействием вторичного минимума на главный можно пренебречь.

§ 10. Линии тока в вертикальной плоскости. Вопрос о линиях тока в вертикальной плоскости изучался различными авторами в такой постановке: имеется горный хребет или последовательность параллельных друг другу хребтов, которые обтекаются ветром, перпендикулярным к линии хребта. Спрашивается, каковы будут линии тока в плоскости, перпендикулярной направлению хребта? Дело в том, что восходящие вертикальные течения на одной стороне горы играют большую роль в образовании осадков в горной области; решив вопрос об обтекании горы, можно вычислить количество выпадающих осадков. Такая задача для бесчисленного множества параллельных хребтов решалась Покельсом [Л. 17]; Фикер [Л. 18] проследил ряд траекторий аэростата, перемещавшегося над Альпами при южном ветре и построил схему линий тока в вертикальной плоскости над гребнями гор и долинами.

Прежде чем перейти к исследованиям Покельса, рассмотрим в качестве примера простейшую модель обтекания горы с образованием вихря с горизонтальной осью, параллельной направлению горного хребта. Будем считать, что наша стилизованная гора имеет вид бесконечного, лежащего горизонтально, кругового полуцилиндра, в сечении которого вертикальной плоскостью, перпендикулярной его оси, получается полукруг.

Дополним этот полукруг до круга, отразив верхнюю полуокружность в оси x (см. на чертеже пунктирную линию), и рассмотрим обтекание этого круга, симметричное относительно оси x. Очевидно тогда, что наша задача обтекания горы эквивалентна задаче симметричного обтекания цилиндра, сечение которого изображено на чертеже.

Как известно из гидродинамики, эта задача решается с помощью комплексного потенциала

$$f(z)=v\left(z+\frac{r^2}{z}\right), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

где v—скорость на бесконечности, r—радиус цилиндра. Зная $f(z)$, можем найти скорость, определить линии тока и т. д. (рис. 76).

Вторая задача—обтекание горы с образованием вихря с горизонтальной осью, параллельной линии хребта, тоже может быть решена с помощью метода отражения (рис. 77).

Именно, отразим точку A—центр вихря—в круге, радиус которого примем равным r_0. Иными словами, применим к точке A преобразование

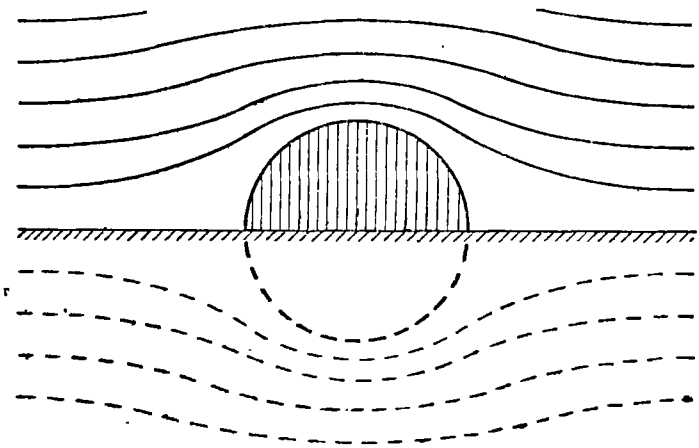

Рис. 76.

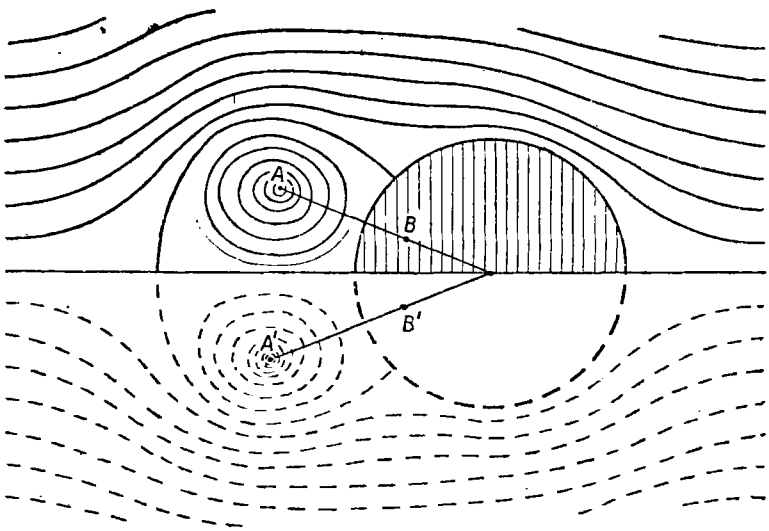

Рис. 77.

инверсии, которое состоит в том, что точка A переходит в точку B, лежащую на линии OA, причем

$$OB \cdot OA = r_0^2;$$

отсюда $OB = \frac{r_0^2}{R}$, где $R = OA$. Если угол OA с осью x есть ψ, то комплексная координата A может быть представлена в виде $z_1 = Re^{i\psi}$, отражение B точки A в окружности радиуса r_0 будет иметь комплексную координату

$$\frac{r_0^2}{R} e^{i\psi}.$$

Теперь отразим обе точки—A и B в оси x; модули комплексных чисел, соответствующих этим точкам, будут соответственно те же, что у A и B, аргумент же будет—ψ, следовательно, координата точки A_1 будет $Re^{-i\psi}$, а точки B_1 $\frac{r_0^2}{R}e^{-i\psi}$. Если вихрь A имеет интенсивность C, то интенсивность вихря A_1 будет—C, для вихря B она равна C, для вихря B_1 равна—C. Прибавляя к комплексному потенциалу простого обтекания [формула (65)] потенциалы введенных нами четырех вихрей, получим

$$f(z)=v\left(z+\frac{r_0^2}{z}\right)+\frac{C}{2\pi i}\ln\frac{(z-Re^{i\psi})\left(z-\frac{r_0^2}{R}e^{-i\psi}\right)}{\left(z-\frac{r_0^2}{R}e^{i\psi}\right)(z-Re^{-i\psi})}\quad\ldots\ldots(66)$$

Беря производную по z, найдем комплексную скорость $u-iv$ в любой точке жидкости. Особый интерес представляет случай, когда вихрь на склоне горы остается неподвижным. Условия для этого можно получить, приравнивая нулю скорость вихря A; они сводятся к двум уравнениям:

$$2R^2\sin\psi=R^2-r_0^2,\qquad \frac{C}{2\pi}=2vR\sin\psi\left[\left(\frac{r_0}{R}\right)^4-1\right].\quad\ldots\ldots(67)$$

Первое уравнение, выражающее зависимость между r_0 и ψ (при постоянном R), представляет кривую в полярных координатах, на которой должен обязательно лежать вихрь A, если он неподвижен, второе уравнение дает циркуляцию, когда определены r_0 и ψ.

Перейдем теперь к задаче Покельса об обтекании последовательности горных хребтов. Рассмотрим в плоскости xz безвихревое движение сжимаемой жидкости, имеющее потенциал скорости φ, так что

$$u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Предполагая движение стационарным, и следовательно $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$, будем иметь уравнение неразрывности

$$\operatorname{div}\rho V=0,$$

или

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0.$$

Подставляя вместо u и w их выражения через потенциал скорости, найдем:

$$\rho\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\rho}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\rho}{\partial z}.$$

Сделаем предположение, что плотность ρ зависит только от высоты, и что, следовательно, $\frac{\partial\rho}{\partial x}=0$. Далее, из уравнения Клапейрона

$$\rho=\frac{p}{RT}$$

получаем, считая температуру постоянной

$$\frac{\partial\rho}{\partial z}=\frac{1}{RT}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Далее, из условия равновесия

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-g\rho$$

найдем

$$\frac{\partial\rho}{\partial z}=-\frac{g}{RT}\rho=-k\rho,\quad\text{где } k=\frac{g}{RT}.$$

Подставляя это выражение в уравнение неразрывности и произведя сокращения, получим окончательно дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = k \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (68)$$

Покельс подбирает такое решение этого уравнения, которое дает волнообразные линии тока, одна из которых должна дать профиль горной системы. Именно, если взять $\varphi = a(x - be^{-nz} \cos mx)$, то составляющие скорости будут

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = a(1 + bme^{-nz} \sin mx), \quad \ldots \ldots \ldots (69)$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = abne^{-nz} \cos mx, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (70)$$

где a, b, m, n—постоянные, связанные с постоянной k уравнением

$$n^2 + kn - m^2 = 0.$$

Из уравнения линий тока

$$\frac{dx}{u} = \frac{dz}{w}$$

можно найти приближенно, что

$$z = z_0 + \frac{bn}{m} \sin mxe^{-r(z - z_0)} e^{-nz_0}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (71)$$

где $r = n + \frac{k}{2}$.

При $z_0 = 0$ имеем линию горного профиля:

$$z = \frac{bn}{m} \sin mxe^{-rz}, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (72)$$

т. е. синусоидальную линию с бесчисленным множеством вершин и впадин. При возрастании z_0 для линий тока получаются синусоидальные линии с убывающей амплитудой (рис. 78).

Определим значения постоянных, входящих в полученные уравнения. Прежде всего a есть горизонтальная скорость при $x = 0$, т. е. на середине склона горы; $m = \frac{2\pi}{L}$, где L—расстояние между соседними вершинами (длина волны). Далее, вычисления показывают, что

$$n = -\frac{k}{2} + \sqrt{\frac{k^2}{4} + m^2},$$

$$r = n + \frac{k}{2}.$$

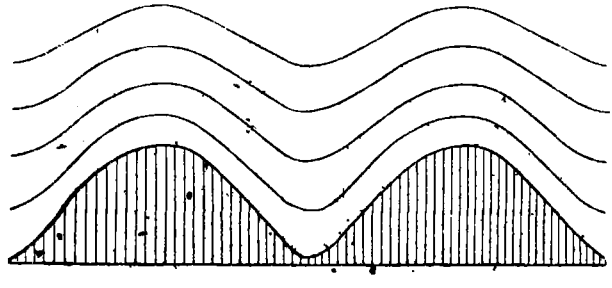

Рис. 78.

Горизонтальная скорость возрастает с высотой и имеет наибольшее значение на вершине, наименьшее—во впадине. Вертикальная скорость имеет наибольшие значения при $x = 0$ — положительное для наветренной стороны, отрицательное—для подветренной стороны.

§ 11. Вихревые цепочки. При исследовании вопроса о порывистости ветра нам понадобятся некоторые сведения из теории вихревых цепочек, которые мы здесь и излагаем.

Рассмотрим бесконечный ряд точечных вихрей, расположенных на одной прямой на одинаковом расстоянии l друг от друга, и имеющих одинаковую интенсивность C. Пусть имеем вихри в точках z_0, z_1, z_{-1}, z_2, z_{-2}, ... (рис. 79).

Тогда комплексный потенциал $f(z)$ скорости, вызываемой этими вихрями, равен сумме потенциалов отдельных вихрей (см. формулу 60). Мы его можем написать так:

$$f(z)=\frac{C}{2\pi i}\left\{\lg\frac{(z-z_0)\pi}{l}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\lg\left(\frac{z-z_k}{-lk}\right)+\lg\frac{z-z_{-k}}{lk}\right]\right\}. \quad . \; . \; . \; (73)$$

Мы разделили разности $z-z_k$ на $-lk$, $z-z_{-k}$ на lk и умножили $z-z_0$ на $\frac{\pi}{l}$, что равносильно введению постоянного слагаемого в функцию $f(z)$, которую достаточно определить с точностью до произвольной постоянной.

Уравнение (73) приводится к виду

$$f(z)=\frac{C}{2\pi i}\lg\left\{\frac{(z-z_0)\pi}{l}\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z-z_k}{-lk}\right)\left(\frac{z-z_{-k}}{lk}\right)\right\}. \; . \; . \; . \; . \; . \; (74)$$

Так как $z_k=z_0+lk$, $z_{-k}=z_0-lk$, то предыдущее выражение преобразуется к такому:

$$f(z)=\frac{C}{2\pi i}\lg\left\{\frac{\pi(z-z_0)}{l}\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-\left(\frac{z-z_0}{lk}\right)^2\right]\right\}. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (75)$$

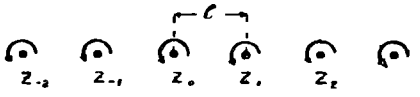

Рис. 79.

Применяя формулу, представляющую разложение $\sin\pi x$ в бесконечное произведение

$$\sin\pi x=\pi x\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right),$$

найдем

$$f(z)=\frac{C}{2\pi i}\lg\sin\frac{\pi}{l}(z-z_0). \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (76)$$

Беря от $f(z)$, производную, получим комплексную скорость

$$u-iv=\frac{df}{dz}=\frac{C}{2li}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{l}(z-z_0). \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (77)$$

Выражение комплексной скорости можно получить иначе как сумму скоростей, вызываемых отдельными вихрями; тогда получим:

$$u-iv=\frac{C}{2\pi i}\left\{\frac{1}{z-z_0}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-z_0-kl}+\frac{1}{z-z_0+kl}\right)\right\}. \quad . \; . \; . \; (78)$$

Чтобы найти скорость перемещения самой вихревой цепочки, т. е. скорость каждого из вихрей, ее составляющих, достаточно рассмотреть, как перемещается точка z_0, так как очевидно, что все вихри должны перемещаться с одинаковой скоростью. Скорость же в точке z_0 происходит от влияния всех вихрей, кроме самого вихря z_0. Поэтому в формуле (78) следует положить $z=z_0$ во всех членах, кроме первого, который следует отбросить. Получим, что скорость вихря z_0 равна нулю, так как в формуле (78) при $z=z_0$ члены попарно сократятся. Таким образом, одна вихревая цепочка остается неподвижной, что можно было предвидеть, так как на точку z_0 действуют попарно вихри z_1 и z_{-1}, z_2 и z_{-2}, и т. д., в противоположных направлениях.

Две вихревые цепочки. Пусть имеем две параллельные цепочки вихрей, причем расстояние между двумя соседними вихрями обоих рядов равно l, расстояние между цепочками—h, интенсивность вихрей

верхней цепочки—C_1, нижней—C_2. Одним из вихрей верхнего ряда пусть будет z_1, ближайший к нему вихрь нижнего ряда—z_2. Очевидно, что для комплексного потенциала будем иметь

$$(z) = \frac{C_1}{2\pi i} \lg \sin \frac{\pi}{l}(z - z_1) + \frac{C_2}{2\pi i} \lg \sin \frac{\pi}{l}(z - z_2). \quad . \; . \; . \; . \; (79)$$

Выясним, как будут перемещаться в жидкости рассматриваемые вихревые цепочки. Очевидно, что все вихри первой цепочки будут двигаться с одинаковой скоростью, также все вихри второй цепочки должны перемещаться одинаково. Поэтому каждую цепочку можно рассматривать, как одно целое, и достаточно исследовать скорости двух вихрей, например z_1 и z_2. Вихрь z_1 будет перемещаться лишь под влиянием второй цепочки, так как одна цепочка, как мы видели, не перемещается. Следовательно, скорость $u_1 - iv_1$ вихря получим, если в выражении скорости

$$u - iv = \frac{df}{dz} = \frac{C_1}{2li} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}(z - z_1) + \frac{C_2}{2li} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}(z - z_2) \quad . \; . \; . \; . \; (80)$$

выкинем первое слагаемое и положим $z = z_1$ во втором слагаемом:

$$u_1 - iv_1 = \frac{C_2}{2li} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}(z_1 - z_2). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (81)$$

Аналогично для вихря z_2 будем иметь

$$u_2 - iv_2 = \frac{C_1}{2li} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}(z_2 - z_1) = -\frac{C_1}{2li} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}(z_1 - z_2). \quad . \; . \; . \; (82)$$

Таковы скорости цепочек. Для нас представляется интересным рассмотреть условия „твердости“ цепочек, т. е. условия неизменности растояний между всеми вихрями цепочек во все время движения. Очевидно, для „твердости“ цепочек необходимо, чтобы скорости их перемещения были одинаковы:

$$u_1 - iv_1 = u_2 - iv_2.$$

Сравнивая выражения (81) и (82), находим, что для этого должно выполняться соотношение

$$C_1 = -C_2,$$

т. е. интенсивности цепочек должны быть одинаковы по величине и противоположны по знаку. Мы будем в дальнейшем писать C вместо C_1, рассматривая твердые цепочки.

Положим теперь, что обе цепочки перемещаются параллельно оси x. В этом случае должно быть

$$v_1 = v_2 = 0.$$

Обозначим $z_1 - z_2 = b + hi$ (рис. 80).

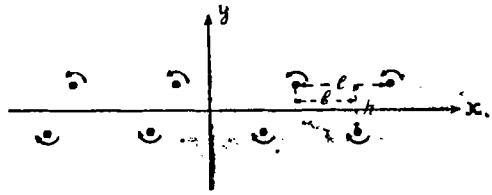

Рис. 80.

Отделяя вещественную и мнимую части $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}(b + hi)$, будем иметь:

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}(b + hi) = \frac{\sin \frac{2\pi b}{l}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi h}{l} - \cos \frac{2\pi b}{l}} - i \frac{\operatorname{sh} \frac{2\pi h}{l}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi h}{l} - \cos \frac{2\pi b}{l}}, \quad . \; . \; (83)$$

где $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Поэтому получаем:

$$u_1 = u_2 = \frac{C}{2l} \frac{\operatorname{sh} \frac{2\pi h}{l}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi h}{l} - \cos \frac{2\pi b}{l}}, \quad v_1 = v_2 = -\frac{C}{2l} \frac{\sin \frac{2\pi b}{l}}{\operatorname{ch} \frac{2\pi h}{l} - \cos \frac{2\pi b}{l}}.$$

Так как по условию $v_1 = v_2 = 0$, то необходимо

$$\sin \frac{2\pi b}{l} = 0,$$

откуда или $b = 0$ или $b = \frac{l}{2}$. В первом случае получаем расположение цепочек, называемое симметричным: под каждым вихрем одного ряда имеется вихрь другого ряда. Во втором случае имеем шахматное расположение вихрей, т. е. такое, в котором посредине между каждыми двумя вихрями одного ряда находится вихрь другого ряда. Нетрудно видеть, что скорости перемещения цепочек будут

$$u_1 = \frac{C}{2l} \operatorname{cth} \frac{\pi h}{l} \text{ для симметричного порядка} \quad \ldots \quad (84)$$

$$u_1 = \frac{C}{2l} \operatorname{th} \frac{\pi h}{l} \text{ для шахматного порядка.} \quad \ldots \quad (85)$$

В дальнейшем под цепочками Кармана мы будем понимать две цепочки, расположенные в симметричном или шахматном порядке. Впервые такие цепочки были изучены Карманом и Рубахом в применении к вопросу о сопротивлении, испытываемом цилиндром, движущимся в жидкости при наличии образования позади него вихрей.

Карман и Рубах изучали вопрос об устойчивости вихревых цепочек, который состоит в следующем: под влиянием некоторых воздействий все или некоторые вихри цепочек могут получить малые смещения, тогда может оказаться, что вихри с течением времени будут оставаться вблизи тех положений, которые они имели бы, если бы двигались, не подвергаясь смещениям; в этом случае говорят, что движение устойчивое. Если же смещенные вихри будут удаляться от положений, отвечающих невозмущенному состоянию, то движение называется неустойчивым.

Результаты исследования кармановских цепочек на устойчивость таковы: симметричное расположение является неустойчивым; для шахматного расположения найдено необходимое условие устойчивости:

$$\operatorname{ch} \frac{\pi h}{l} = \sqrt{2}, \quad \ldots \quad (86)$$

из которого получается такая зависимость между величинами h и l, т. е. расстоянием между цепочками и расстоянием между соседними вихрями каждой цепочки:

$$\frac{h}{l} = 0{,}2806\ldots$$

§ 12. Теория порывистости ветра А. А. Фридмана. Под порывистостью ветра мы понимаем явление беспорядочного отклонения величины и направления ветра от среднего значения. Период и амплитуда этих отклонений зависят от различных обстоятельств: так, в общем, с увеличением средней скорости ветра увеличивается амплитуда отклонений и уменьшается период; с увеличением высоты над земной поверхностью порывистость уменьшается, причем иногда это уменьшение происходит постепенно; иногда же на определенной высоте (обычно в слое инверсии температуры) наступает резкое уменьшение порывистости ветра. Однако, в некоторых случаях, например в циклонических областях, бывает, что порывистость меняется с высотой неправильным образом, имея и на значительных высотах (2—3 *км*) большие значения. Совершенно очевидно важное значение для авиации и воздухоплавания определения зон сильной и слабой порывистости ветра, поэтому представляет интерес хотя бы грубая теория порывистости.

А. А. Фридман [Л. 13] делает предположение, что порывистость ветра обусловлена периодическими системами вихревых линий, которые проносятся в атмосфере.

В главе о динамике атмосферы будет показано, что в атмосфере вихри с горизонтальными составляющими имеют большое значение. Поэтому мы ограничимся рассмотрением вихрей с горизонтальной осью. Предположим, что в воздухе проносятся вихревые цепочки, тогда они в месте наблюдения будут давать периодические изменения скорости ветра. Требуется по характеру порывистости ветра определить высоту на которой находятся вихревые цепочки, их интенсивность и расстояние между отдельными вихрями цепочек.

Простейшее допущение, что порывистость ветра вызывается одной цепочкой, находящейся над местом наблюдения, не целесообразно, ибо, как мы видели, одна вихревая цепочка, оставаясь неподвижной, не может дать периодических колебаний скорости. Следовательно, приходится допустить существование по крайней мере двух цепочек. Мы рассмотрим задачу для случая двух цепочек с шахматным расположением вихрей. Выберем оси координат таким образом: ось x расположена посредине между двумя рядами вихрей, ось y направлена вниз, и притом так, чтобы она проходила через место наблюдения, координаты которого будут, следовательно, (o, y). Другими словами, y есть высота вихревого слоя над местом наблюдения (рис. 81).

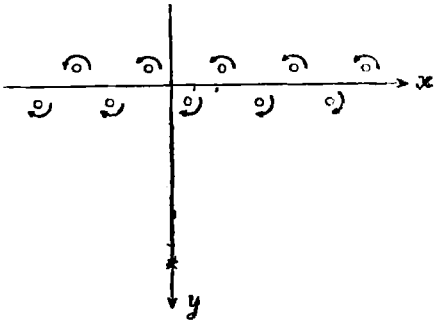

Рис. 81.

Мы будем считать, что из наблюдений могут быть определены следующие величины:

1. Скорость перемещения вихревых нитей, которую мы обозначим через q; на основании некоторых средних наблюдений она равна примерно $^2/_3$ средней скорости ветра.
2. Период колебаний скорости ветра T.
3. Амплитуда порывистости ветра A.

Наша задача состоит в определении величин: l—расстояния между соседними вихрями одного ряда, h—расстояния между двумя цепочками, y—высоты вихревого слоя и C—интенсивности вихрей. Для шахматного расположения задача решается полностью. Именно, имеем, очевидно

$$l = qT; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (87)$$

далее, из условия устойчивости шахматной системы вихрей:

$$h = 0{,}281\, l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (88)$$

Для определения циркуляции C воспользуемся формулой (85), в которой вместо u_1 будем писать q:

$$q = \frac{C}{2l} \operatorname{th} \frac{\pi h}{l}.$$

Имея в виду условие устойчивости

$$\operatorname{ch} \frac{\pi h}{l} = \sqrt{2},$$

найдем, что

$$\operatorname{th} \frac{\pi h}{l} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

и следовательно

$$q = \frac{C}{2\sqrt{2}\, l},$$

откуда

$$C = 2\sqrt{2}\, lq. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (89)$$

Чтобы определить высоту y вихревого слоя над местом наблюдения, выведем, прежде всего, формулы для составляющих скорости в точке $(0, y)$, где производятся наблюдения. С этой целью перепишем формулу (80) (полагая $C_1 = -C_2 = C$)

$$u - iv = \frac{C}{2li} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}(z - z_1) - \frac{C}{2li} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}(z - z_2)$$

и определим входящие в нее значения z, z_1 и z_2.

В точке наблюдения имеем: $z = yi$. Пусть z_1 обозначает комплексную координату того вихря нижнего ряда, который в начальный момент времени находился на оси y, т. е. в точке $\frac{hi}{2}$. Так как все вихри перемещаются параллельно оси x, со скоростью q, то выражение z_1 к моменту времени t будет

$$z_1 = qt + \frac{hi}{2}.$$

Пусть будет z_2 тот вихрь верхнего ряда, который находится ближе всего справа от вихря z_1. Тогда, так как он сдвинут относительно z_1 на отрезок $\frac{l}{2}$, имеем

$$z_2 = qt + \frac{l}{2} - \frac{h}{2} i.$$

Подставляя теперь найденные z, z_1 и z_2 в формулу для $u - iv$, получим:

$$u - iv = \frac{C}{2li} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}\left[i\left(y - \frac{h}{2}\right) - qt\right] - \frac{C}{2li} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{l}\left[i\left(y + \frac{h}{2}\right) - qt - \frac{l}{2}\right]. \quad (90)$$

Применяя к cotangens'ам от комплексного аргумента формулу преобразования

$$\operatorname{ctg}(a + bi) = \frac{\sin 2a}{\operatorname{ch} 2b - \cos 2a} - i \frac{\operatorname{sh} 2b}{\operatorname{ch} 2b - \cos 2a}$$

и отделяя затем в выражении (90) вещественную часть от мнимой, найдем

$$u = \frac{C}{2l}\left\{\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l}(2y + h)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l}(2y + h) + \cos \frac{2\pi q}{l} t} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l}(2y - h)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l}(2y - h) - \cos \frac{2\pi q}{l} t}\right\},$$

$$v = \frac{C}{2l}\left\{\frac{\sin \frac{2\pi q}{l} t}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l}(2y + h) + \cos \frac{2\pi q}{l} t} + \frac{\sin \frac{2\pi q}{l} t}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l}(2y + h) - \cos \frac{2\pi q}{l} t}\right\}.$$

Если построить график горизонтальной скорости u, то это будет как раз график теоретической порывистости ветра. Если амплитуду колебаний u приравняем полученной из наблюдений амплитуде A, то будем иметь уравнение, из которого можно найти y. Нетрудно показать, что если место наблюдения находится под цепочками, а не между ними, т. е. если $y + \frac{h}{2}$ и $y - \frac{h}{2}$ положительны, то максимум и минимум величины u осуществляются тогда, когда $\cos \frac{2\pi q}{l} t = \mp 1$.

Обозначая через u_{max}—наибольшее, а u_{min}—наименьшее значения u, получим для амплитуды

$$A = u_{max} - u_{min} = \frac{C}{2l}\left\{\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l}(2y + h)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l}(2y + h) - 1} - \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{l}(2y + h)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{l}(2y + h) + 1} - \right.$$

$$-\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(2y-h)}{1+\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(2y-h)}+\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(2y-h)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}(2y-h)-1}\Bigg\}\ldots\ldots\ldots(91)$$

Из уравнения (91) и надлежит определить y. Делая в правой части уравнения приведение к общему знаменателю и пользуясь тем что $\operatorname{ch}^2 x-1=\operatorname{sh}^2 x$, получим

$$\frac{lA}{C}=\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(2y+h)}+\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{l}(2y-h)}.$$

Преобразуя далее sh суммы и разности и избавляясь от знаменателей, получим такое уравнение:

$$\operatorname{sh}^2\frac{2\pi y}{l}-\frac{2C}{lA}\operatorname{ch}\frac{\pi h}{l}\operatorname{sh}\frac{2\pi y}{l}-\operatorname{sh}^2\frac{\pi h}{l}=0.$$

Вспоминая, что из условия устойчивости: $\operatorname{ch}\frac{\pi h}{l}=\sqrt{2}$, и следовательно $\operatorname{sh}^2\frac{\pi h}{l}=1$, перепишем последнее уравнение так:

$$\operatorname{sh}^2\frac{2\pi y}{l}-\frac{2C\sqrt{2}}{lA}\operatorname{sh}\frac{2\pi y}{l}-1=0.$$

Решая это квадратное относительно $\operatorname{sh}\frac{2\pi y}{l}$ уравнение, найдем

$$\operatorname{sh}\frac{2\pi y}{l}=\frac{C\sqrt{2}}{lA}+\sqrt{\frac{2C^2}{l^2A^2}+1}=\frac{4q}{A}+\sqrt{\frac{16q^2}{A^2}+1}\ldots\ldots(92)$$

Из этого уравнения можем определить высоту y вихревого слоя над местом наблюдения.

Если взять случай, когда средняя скорость ветра—5 *м/сек*, средняя амплитуда порывов — 4 *м/сек*, средний период — 1 мин. и принять $q=3\frac{1}{3}$ *м/сек*, то вычисление по формулам (87), (88), (89) и (92) приводит к таким величинам:

$$l=200\ м;\quad h=56\ м;\quad C=188{,}0\ м^2/сек;\quad y=83\ м.$$

В заключение этого параграфа приведем соображения проф. А. А. Саткевича относительно методов определения скоростей, основанных на теории кармановских вихрей [Л. 14]. Опыты, родоначальником которых является Струхаль, показывают, что если струну вращать в воздухе вокруг оси, параллельной струне, то струна будет звучать, причем частота звука N, определяющая его высоту, будет зависеть только от скорости вращения струны и от толщины струны; именно, по опытам Струхаля

$$\frac{ND}{v}=0{,}20,$$

откуда $v=5ND$, где v—скорость перемещения струны, или скорость движения воздуха относительно струны, N—частота звука, D—диаметр проволоки.

Этому явлению звучания струны (сюда относится, между прочим, гудение телеграфных проводов при ветре) дается такое об'яснение: с обеих сторон проволоки срываются поочередно вихри Кармана, которые и создают звучание, причем частота отрыва вихрей пропорциональна высоте звука. Если считать N равным как раз частоте отрыва вихрей, то для получения формулы для N рассуждаем так.

Пусть струна, поперечное сечение которой изображено на рис. 82, перемещается в направлении, указанном стрелкой, со скоростью v. За проволокой образуются вихревые нити, параллельные проволоке, причем

эти нити (на чертеже—точки) перемещаются со скоростью u относительно жидкости (при изучении кармановских вихрей мы видели, что два ряда вихрей перемещаются в жидкости под взаимным влиянием друг на друга). Тогда относительная скорость перемещения проволоки относительно вихрей будет $v-u$. Если обозначить через T промежуток времени, за который успеет образоваться пара вихрей, и через l—расстояние между соседними вихрями одного ряда, то будем иметь

Рис. 82.

$$T(v-u)=l,$$

а так как частота $N=\frac{1}{T}$, то

$$N=\frac{v-u}{l}.$$

Умножив обе части этого равенства на $\frac{D}{v}$ и сделав преобразования, получим

$$\frac{ND}{v}=\frac{D}{l}\left(1-\frac{u}{v}\right).$$

По теории Кармана величины $\frac{D}{l}$ и $\frac{u}{v}$ зависят только от формы обтекаемого тела, и, в частности, для цилиндрических тел кругового сечения одинаковы при любых размерах тел, поэтому видим, что величина $\frac{ND}{v}$ является постоянной. Согласно опытам Кармана над цилиндром

$$\frac{l}{D}=4{,}3,\quad \frac{u}{v}=0{,}14,$$

откуда

$$\frac{ND}{v}=\frac{0{,}86}{4{,}3}=0{,}20.$$

Этот результат, как видим, согласуется с результатом Струхаля, полученным экспериментально.

Уже Струхаль предлагал звуковой метод определения скорости воздуха—по измерениям высоты звука проволоки, помещаемой в поток воздуха; этот метод должен давать мгновенные значения скорости, тогда как анемометр сглаживает скорости. Согласно А. А. Саткевичу „вопрос можно поставить шире, а именно, распространить метод на измерения скоростей движения любой жидкой среды—воздушной или водной, применяя измерительные приемы колебаний обтекаемого тела или самой среды самого различного характера—флажки, маятниковые контакты, световые зайчики, электрические вибраторы, звукомерители и т. д. Вероятно можно, в частности, придумать приборы простого характера, пригодные для быстрых полевых полуинструментальных измерений“ [Л. 14].

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Richardson. Atmospheric Diffusion shown on a Distance—Neighbour Graph. Proceedings of the royal Soc. of London 1926, Vol. CX, S. A.

2. Sandström. Über die Bewegung der Flüssigkeiten, Ann. d. Hydrogr. u. marit. Meteor. 1909, S. 242.

3. W. Werenskiold. Mean monthly air transport over the North Pacific ocean, Geofysiske Publikationer Vol. II, № 9, Kristiania, 1922.

4. Th. Hesselberg. Die Luftbewegungen im Cirrusniveau, Veröff. d. Geophys. Inst. Leipzig, II S. H. 1.

5. A. Defant. Die Windverhältnisse im Gebiete der ehemaligen Öster.-Ungar. Monarchie, Anhang zum Jahrbuch der Zentr. Anst. f. Met. u Geodyn. 1924.

6. Th. Hesselberg u. H. Sverdrup. Über den Einfluss der Gebirge auf die Luftbewegung längs der Erdoberfläche und auf die Druckverteilung, Veröff. d. Geophys. Inst. Leipzig, S. 2, H. 4, 1914.

7. Tor Bergeron. Über die dreidimensional verknüpfende Wetteranalyse, IT. S. 73 и след.

8. Margules. Über die Beziehung zwischen Kontinuitätsgleichung. Festschrift Ludewig Boltzmann, 1904.

9. V. Bjerknes. Dynamic Meteorology and Hydrographie, Part. II. Kinematics.

10. M. Bereck. Die Bestimmung der Vertikalkomponente der ausgeglichenen Bewegung in der Atmosphäre..., Veröff. des Geophysik. Inst. d. Univers. Leipzig, 1919, Bd. 2, H. 6.

11. К. Н. Васильев. О приложимости уравнений неразрывности к определению вертикальных течений в свободной атмосфере, Журн. Геофизики и Метеорологии, 1926, стр. 99.

12. Sverdrup. Der nordatlantische Passat, Veröff. d. Geophys. Inst. d. Univers. Leipzig, 1917, Bd. II, H. 1.

13. A. Friedmann. Über atmosphärische Wirbel und die Turbulenz des Windes, Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre, 1924, H. 4.

14. А. А. Саткевич. Анализ принципиальных положений существующих вихревых теорий обтекания. 1933, изд. ЛУКГВФ.

15. Hesselberg und Friedmann. Die Grössenordnung der meteorologischen Elemente und ihrer räumlichen und zeitlichen Ableitungen, Veröff. d. Geophys. Inst. d. Univers. Leipzig, 1913, II S.

16. Loris-Melikof und Sinjagin. Numerische Charakteristiken der Zyklone und Antizyklone und ihre synoptische Interpretation, Gerlands Beiträge zur Geophysik, 1930.

17. F. Pockels. Theorie der Niederschlagsbildung an Gebirgen, Annalen der Physik, 1901, Bd. 4, S. 459.

18. Ficker. Meteorologische Zeitschrift, 1913, S. 243, 609.

ГЛАВА VII

Динамика атмосферы (гидродинамика идеальной жидкости).

§ 1. Уравнения гидродинамики. Бароклинические и баротропические жидкости. Идеальной жидкостью называется такая жидкость, в которой внутренними силами являются нормальные давления. Идеальная жидкость противопоставляется вязкой, в которой кроме нормальных давлений имеются еще тангенциальные силы трения или вязкости. Реальные жидкости являются вязкими, однако, во многих случаях силами вязкости можно пренебречь и рассматривать жидкость как идеальную. Так, в гл. II было указано, что для атмосферных движений, происходящих на больших пространствах, силами вязкости можно пренебрегать.

В гл. II были выведены уравнения движения вязкой жидкости, из которых, полагая $\mu = 0$, получаем уравнения движения идеальной жидкости:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{F}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

где $\mathbf{V}$—вектор скорости, ρ—плотность, p—давление, $\mathbf{F}$—вектор объемных сил.

В раскрытом виде уравнения (1) таковы:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + F_x, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial u}v + \frac{\partial v}{\partial z}w &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + F_y, \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + F_z. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Эти уравнения содержат пять функций координат и времени: три составляющие скорости: u, v, w, плотность ρ и давление p.

В гл. VI было выведено уравнение неразрывности

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}\mathbf{V} = 0$$

или

$$\frac{d\lg\rho}{dt} + \operatorname{div}\mathbf{V} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

В случае несжимаемой жидкости, т. е. такой, плотность которой постоянна,

$$\frac{d\lg\rho}{dt} = 0, \quad (4)$$

и уравнение (3) дает

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = 0.$$

В этом случае уравнение неразрывности, вместе с уравнениями (1), дает четыре уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \mathbf{F} \\ \operatorname{div}\mathbf{V} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

определяющих четыре функции: u, v, w и p (ρ есть известная постоянная).

В общем случае, когда ρ не постоянна, жидкость называется сжимаемой; для нее четырех уравнений: (1) и (3) недостаточно для определения пяти функций, поэтому к уравнениям гидродинамики присоединяют еще уравнение состояния (см. гл. II), выражающее зависимость между величинами p, ρ и T, где T—температура. Здесь следует различать два рода жидкостей по отношению к происходящему в них движению:

1) Баротропическая жидкость. Так называется жидкость в том случае, если уравнение состояния представляет зависимость между p и ρ (следовательно, не содержит температуры).

$$f(p, \rho)=0. \qquad (6)$$

Тогда уравнения (1), (3) и (6) образуют систему пяти уравнений с пятью неизвестными функциями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p+\mathbf{F} \\ \frac{d\lg\rho}{dt}+\operatorname{div}\mathbf{V} &= 0 \\ f(p, \rho) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Примеры баротропических жидкостей: если процессы в жидкости происходят изотермически, то в качестве уравнения состояния имеем уравнение Бойля-Мариотта

$$\frac{p}{p_0}=\frac{\rho}{\rho_0}.$$

Для адиабатического процесса имеем уравнение

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{C_p}{C_v}},$$

где C_p и C_v суть теплоемкости, соответственно при постоянном давлении и постоянном объеме.

2) Жидкость называется бароклинической, если уравнение состояния представляет зависимость между p, ρ и T, а может быть и другими величинами (например, соленостью для морской воды):

$$f(p, \rho, T)=0. \qquad (8)$$

В этом случае у нас появляется новая, шестая переменная величина—T. Недостающее уравнение берется из термодинамики, именно, уравнение притока тепла:

$$\varepsilon=\rho C_v\frac{dT}{dt}-\frac{Ap}{\rho}\frac{d\rho}{dt}. \qquad (9)$$

Здесь ε—количество тепла, получаемого или отдаваемого в единицу времени единицей объема, C_v—теплоемкость при постоянном объеме, A—термический эквивалент работы. Таким образом, в самом общем случае движения идеальной сжимаемой жидкости имеем шесть уравнений, определяющих движение жидкости:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\nabla p+\mathbf{F} \\ \frac{d\lg\rho}{dt}+\operatorname{div}\mathbf{V} &= 0 \\ f(p, \rho, T) &= 0 \\ \varepsilon &= \rho C_v\frac{dT}{dt}-\frac{Ap}{\rho}\frac{d\rho}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

А. А. Фридман кроме понятия несжимаемая жидкость предла-

гал ввести понятие о несжимаемом движении, т. е. таком движении, для которого

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

хотя плотность ρ не является постоянной. При выполнении условия (11) условие неразрывности (3) дает

$$\frac{d \lg \rho}{dt} = 0 \text{ или } \frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Это условие в развернутом виде имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u + \frac{\partial \rho}{\partial y} v + \frac{\partial \rho}{\partial z} w = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

Оно показывает, что плотность является постоянной для каждой частицы во все время ее движения, но, однако, от частицы к частице плотность может меняться. Несжимаемость движения есть следствие кинематических свойств движения, а не физических свойств жидкости.

Примеры несжимаемого движения: горизонтальный ветер постоянного направления, причем скорость его может меняться с высотой и временем:

$$u = u(z, t), \; v = 0, \; w = 0.$$

Очевидно, что $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$.

Более общий пример: горизонтальная скорость зависит только от высоты и времени, вертикальная—от x, y, t.

$$u = u(z, t), \; v = v(z, t), \; w = w(x, y, t).$$

Здесь также $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$, т. е. движение несжимаемо.

Вернемся к общему случаю движения несжимаемой жидкости. Для определения функций: u, v, w и p системы дифференциальных уравнений (5) недостаточно, нужно давать еще дополнительные условия: так называемые начальные и граничные условия. Задать начальные условия значит задать для некоторого момента времени $t = t_0$ u, v, w и p как функции координат:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t_0) &= \Phi_1(x, y, z), \\ v(x, y, z, t_0) &= \Phi_2(x, y, z), \\ w(x, y, z, t_0) &= \Phi_3(x, y, z), \\ p(x, y, z, t_0) &= \Phi_4(x, y, z). \end{aligned}$$

Граничные условия бывают нескольких видов. Так, на неподвижной стенке нормальная составляющая скорости равна нулю:

$$v_n = 0;$$

это значит, что жидкость может только скользить вдоль стенки. Если уравнение поверхности стенки есть $F(x, y, z) = 0$, то условие того, что вектор скорости у стенки лежит в касательной плоскости к поверхности, дает такое уравнение:

$$\frac{\partial F}{\partial x} u + \frac{\partial F}{\partial y} v + \frac{\partial F}{\partial z} w = 0.$$

Если стенка перемещается, то уравнение ее поверхности содержит время

$$F(x, y, z, t) = 0.$$

Здесь имеем такое условие для стенки: точка (x, y, z), находившаяся в момент t на стенке, в момент $t + dt$ также должна быть на поверхности, т. е.

$$F(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) = 0.$$

Вычитая из этого уравнения предыдущее: $F(x, y, z, t)=0$, деля на dt и переходя к пределу $dt \to 0$, получим:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}u+\frac{\partial F}{\partial y}v+\frac{\partial F}{\partial z}w=0.$$

На свободной поверхности жидкости, граничащей с пустотой, воздухом, или с другой жидкостью, давление должно быть равно нулю или атмосферному, или давлению другой жидкости. Это условие дает уравнение свободной поверхности.

В этой главе мы рассмотрим целый ряд частных решений уравнений гидродинамики, представляющих интерес для динамической метеорологии.

§ 2. Градиентный ветер. Градиентным ветром называется ветер, дующий по изобаре. Рассмотрим прежде всего частный случай движения: горизонтальное прямолинейное стационарное движение с ускорением, равным нулю:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt}=0.$$

Полагая в системе уравнений (22) гл. II, т. е. уравнений движения вязкой жидкости на вращающейся земле, $w=0$ (горизонтальное движение), $\mu=0$ (считаем жидкость идеальной), $\frac{du}{dt}=\frac{dv}{dt}=\frac{dw}{dt}=0$ (так как по условию $\frac{dV}{dt}=0$) и $\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$ (стационарное движение), получим:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=2\rho v\Omega_z, \quad \frac{\partial p}{\partial y}=-2\rho u\Omega_z;$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\rho(2u\Omega_y-2v\Omega_x)-\rho g, \quad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y})=0.$$

(Ω_x, Ω_y, Ω_z — составляющие вектора угловой скорости вращения земли).

В третьем уравнении первые два члена правой части малы по сравнению с последним, поэтому ими можно пренебречь. Тогда будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} 2v\Omega_z&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ -2u\Omega_z&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\ -g&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}&=0\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Умножая первое из уравнений (13) ан $\frac{\partial p}{\partial y}$, второе на $-\frac{\partial p}{\partial x}$ и складывая, получим

$$u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}=0.$$

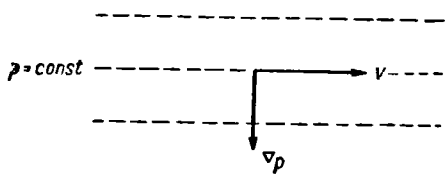

Рис. 83.

Это уравнение выражает условие перпендикулярности вектора скорости градиенту давления. Но градиент давления есть вектор, направленный по нормали к изобарическим поверхностям, а в случае плоского движения—к изобарам. Следовательно, в рассматриваемом случае вектор скорости направлен по изобаре (рис. 83).

В первых двух уравнениях (13) перенесем члены из правой части в левую; получим

$$\left.\begin{aligned} 2v\Omega_z + \left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 0 \\ -2u\Omega_z + \left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Первые слагаемые этих уравнений являются составляющими отклоняющей силы вращения земли, которую мы обозначим через **A** (A_x, A_y); вторые слагаемые представляют составляющие градиента давления **G**, именно „метеорологического" градиента (отнесенного к единице массы), отличающегося знаком от „гидродинамического" градиента (∇p):

$$\mathbf{G}_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \mathbf{G}_y = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Вектор **G** направлен в сторону убывания давления, тогда как вектор ∇p $\left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}\right)$ направлен в сторону возрастания p.

Уравнения (14) могут быть теперь написаны в векторной форме

$$\mathbf{A} + \mathbf{G} = 0,$$

которая показывает, что вектора **A** и **G** равны по величине и противоположно направлены. Так как в северном полушарии отклоняющая сила

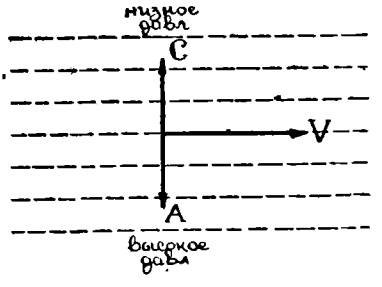

Рис. 84a.

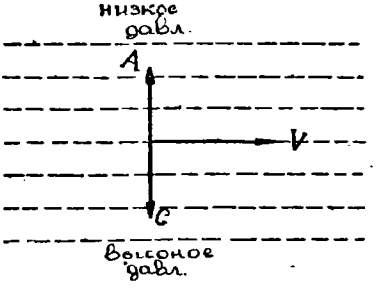

Рис. 84b.

направлена вправо от направления движения, то вектор **G** направлен влево На рис. 84a пунктирные линии представляют изобары: имеем вектор **V** направленный по изобаре, вектор **A** ему перпендикулярный и направленный вправо, если смотреть по направлению скорости; вектор **G** равен по величине **A**; он направлен от большего давления к меньшему, поэтому направо от **V** имеем область высокого давления, налево—низкого. В южном полушарии имеем обратную картину, изображенную на рис. 84b.

Этот результат совпадает с имеющим широкое применение в метеорологии законом Бюйс-Балло (Buys-Ballot):

Если стать спиной к градиентному ветру, то в северном полушарии высокое давление будет направо, в южном—налево.

Отметим, что формулы (14) дают возможность вычислить скорость градиентного ветра по градиенту давления. Например, если считать ось x направленной по направлению ветра, то второе из уравнений (14) можно переписать так:

$$2V|\Omega_z| = \left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}\right|,$$

где V—величина скорости ветра, n—направление нормали к изобаре. Выражая Ω_z—составляющую вектора вращения земли по вертикали в дан-

ной точке земной поверхности через величину этого вектора ω и широту φ места, около которого изучается движение, будем иметь

$$|\Omega_z| = \omega \sin \varphi \text{ (для северного полушария);}$$

$$V = \frac{G}{2\omega \sin \varphi}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

где G—величина градиента давления.

Наблюдения показывают, что скорость ветра у земной поверхности приблизительно вдвое меньше вычисленной по последней формуле, на море расхождение между наблюденной и теоретической скоростью меньше, а начиная с высоты 100 *м* расхождения почти нет. Это указывает на большую роль внутреннего трения, которое не учтено в нашем исследовании (см. гл. VIII).

Мы рассмотрели случай прямолинейного градиентного ветра. Теперь поставим задачу: отыскать все случаи градиентного ветра для плоского стационарного движения.

Теперь в первых двух уравнениях (13) нужно прибавить члены $-\frac{du}{dt}$ и $-\frac{dv}{dt}$. Получим

$$\left.\begin{aligned} -\frac{du}{dt} + 2v\Omega_z &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ -\frac{dv}{dt} - 2u\Omega_z &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\ -g &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

При этом $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$ (стационарное движение). Условие поставленной нами задачи говорит, что линии тока должны совпадать с изобарами.

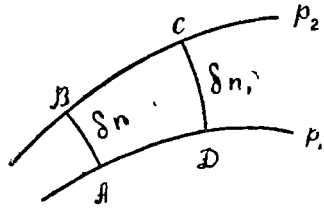

Рис. 85.

Пусть линии рис. 85 представляют собою две линии тока и вместе с тем две изобары, δn—элемент линии ортогональной к изобарам. Тогда $\frac{\partial p}{\partial n}\delta n = \text{const}$ или $|\nabla p|\,\delta n = \text{const}$ вдоль рассматриваемых линий. С другой стороны, уравнение неразрывности показывает, так как расхождение вектора $\rho\mathbf{V}$ равно нулю, что поток вектора $\rho\mathbf{V}$ через контур площадки $ABCD$ равен нулю, или иначе

$$\rho v \delta n = \rho_1 v_1 \delta n_1 = \text{const}$$

вдоль линий тока. Мы видим, что как величина вектора $\frac{1}{\rho}\nabla p$, так и величина v обратно пропорциональны ρ и δn:

$$\frac{1}{\rho}|\nabla p| = \frac{k_1}{\rho \delta n}, \quad v = \frac{k_2}{\rho \delta n} \; (k_1,\ k_2\text{—постоянные}).$$

Следовательно величина $\frac{1}{\rho}|\nabla p|$ пропорциональна скорости v:

$$\frac{1}{\rho}|\nabla p| = k_3 v \quad (k_3 \text{ — постоянная}).$$

Далее, как градиент давления, так и вектор отклоняющей силы вращения земли перпендикулярны вектору скорости. Напишем уравнение плоского движения нашего случая в векторной форме:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -2[\Omega, \mathbf{V}] - \frac{1}{\rho}\nabla p. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Так как оба вектора правой части перпендикулярны скорости и по величине пропорциональны скорости, то и вектор ускорения $\frac{dV}{dt}$ перпендикулярен вектору скорости и по величине ему пропорционален (рис. 86).

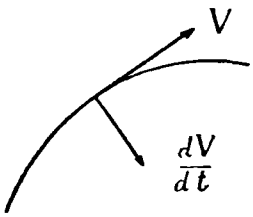

Рис. 86.

Разложим вектор ускорения на касательную и нормальную к линии тока составляющие. Как известно, первая составляющая равна $\frac{dv}{dt}$, где v—величина скорости, вторая равна $\frac{v^2}{R}$, где R—радиус кривизны линии тока. Так как у нас вектор ускорения направлен по нормали, то $\frac{dv}{dt}=0$, и следовательно $v=\text{const}$ вдоль линии тока. Далее, нормальная составляющая $\frac{v^2}{R}$ должна быть пропорциональна скорости

$$\frac{v^2}{R}=kv,$$

где k—постоянная.

Так как v постоянно вдоль линии тока, то отсюда следует, что $R=\text{const}$ вдоль линии тока, и следовательно линии тока представляют собою окружности.

Если все вектора, входящие в уравнение (17), спроектировать на нормаль к линии тока, то получим

$$\frac{v^2}{R}=-2\Omega_z v+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18$$

С помощью этого равенства мы проверим, выполняется ли закон Бюйс-Балло в общем случае градиентного ветра, когда движение происходит по окружностям. Решим уравнение (18) относительно $2\Omega_z v$:

$$-2\Omega_z v=\frac{v^2}{R}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

и рассмотрим два случая:

1) $\frac{\partial p}{\partial n}<0$, т. е. давление убывает с возрастанием n; имеем минимум (циклон). Оба члена правой части положительны, следовательно v отрицательно; движение происходит по окружности по часовой стрелке. Правило Бюйс-Балло выполняется. Отклоняющая сила **A** в северном полушарии направлена направо относительно направления **V**, градиент давления **G** и центробежная сила **Z**, величина которой равна $\frac{v^2}{R}$, направлены влево. Для южного полушария имеем обратную картину (рис. 87, на верху).

На рис. 87 буква **B** означает высокое, буква **H**—низкое давление.

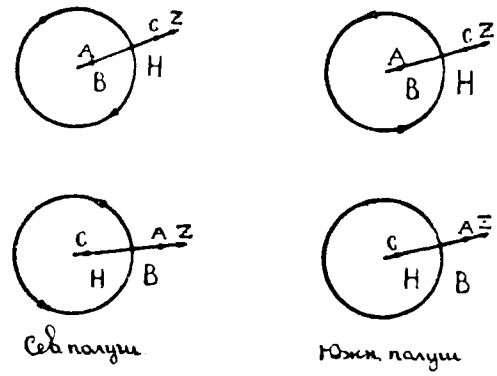

Рис. 87.

2) $\frac{\partial p}{\partial n}>0$. Здесь следует различать два случая. Во-первых, центробежная сила по величине меньше градиента давления:

$$\frac{v^2}{R}<\left|\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}\right|.$$

Тогда правая часть (19) отрицательна, и в левой части v должно быть больше нуля. Так как внутри окружности давление выше, чем вне (антициклон), то видим, что закон Бюйс-Балло выполняется.

Расположение векторов **A**, **G** и **Z** (центробежная сила) см. на рис. 87 (внизу).

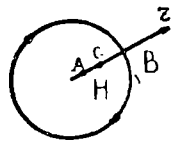

Рис. 88.

Во-вторых, может оказаться, что центробежная сила больше величины градиента давления. Тогда правая часть (19) положительна, и из левой части следует, что v отрицательно. Имеем аномальный случай: минимум давления с антициклональным вращением по часовой стрелке. Он изображен отдельно на рис. 88. Есть предположение, что такие движения могут иметь место в тромбах. Смерчи с антициклоническим вращением наблюдались.

§ 3. Вихри в идеальной сжимаемой жидкости. Теоремы Гельмгольца. Теорема Бьеркнеса. Напомним, что вихрем скорости мы называем (см. гл.—II, 6) вектор Ω с составляющими

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad \ldots\ldots (20)$$

Вихрь скорости характеризует вращение отдельных частиц жидкости и равен удвоенному вектору угловой скорости частицы, какую она имела бы, если бы внезапно затвердела. В виду важности значения вихрей в атмосферных движениях, в этом параграфе мы подробно рассмотрим вопросы об условиях сохранения вихрей, а также их возникновения и разрушения.

В гл. VI, 8 были даны определения вихревой линии и вихревой трубки. Мы доказали, что циркуляция одинакова для всех контуров, охватывающих данную вихревую трубку. Мы видели, что для вихревой трубки основной величиной, характеризующей ее, является циркуляция скорости по контуру, охватывающему трубку.

Посмотрим теперь, как изменяется циркуляция скорости со временем.

Мы имели, по определению циркуляции

$$C = \int_L u dx + v dy + w dz = \int_L (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}); \quad \ldots\ldots (21)$$

L—произвольный замкнутый контур; символ $(A \cdot B)$ обозначает скалярное произведение векторов (A и B).

Вычислим производную C по времени.

Для этого вычислим полную производную по t от подынтегрального выражения.

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}) = \frac{d\mathbf{V}}{dt} d\mathbf{s} + \mathbf{V} \frac{d}{dt}(d\mathbf{s}) = \frac{d\mathbf{V}}{dt} d\mathbf{s} + \mathbf{V} \frac{d\mathbf{V}}{dt}\ ^{1)}.$$

Поэтому

$$\frac{dC}{dt} = \int_L \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} d\mathbf{s}\right) + \int_L \left(\mathbf{V} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt}\right).$$

Второй интеграл правой части, взятый по замкнутому контуру, равен нулю, так как подынтегральное выражение его есть полный дифференциал

$$(\mathbf{V} \cdot d\mathbf{V}) = \frac{1}{2} dv^2.$$

Поэтому остается

$$\frac{dC}{dt} = \int_L \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \cdot d\mathbf{s}\right). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Интеграл правой части представляет собою циркуляцию ускорения, а по тому равенство (21) выражает следующую теорему:

---

[1]) Более детальный вывод см. например [Л. 2], стр. 161.

Производная по времени от циркуляции скорости по замкнутому контуру равна циркуляции ускорения по этому контуру.

Делая различные предположения о характере рассматриваемого движения, мы получим целый ряд важных следствий из этой теоремы. Согласно уравнениям движения, имеем

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p.$$

Предположим, прежде всего, что силы $\mathbf{F}$, действующие на единицу массы жидкости, имеют потенциал U, так что

$$\mathbf{F} = \nabla U,$$

и, кроме того, что жидкость баротропическая, т. е. что плотность есть известная функция давления [см. уравнение (6)]:

$$\rho = f(p).$$

При этих предположениях имеем

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \nabla U - \frac{1}{\rho}\nabla p,$$

$$\frac{dC}{dt} = \int_L \left((\nabla U - \frac{1}{\rho}\nabla p)\cdot ds\right) =$$

$$= \int_L \left[\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right)\right] =$$

$$= \int_L dU - \int_L \frac{dp}{\rho} = \int_L dU - \int_L \frac{dp}{f(p)} \quad \ldots\ldots\ldots (23)$$

Оба последние интеграла равны нулю, так как это интегралы от полных дифференциалов по замкнутому контуру. Таким образом $\frac{dC}{dt} = 0$, или $C = \text{const}$.

Этот результат носит название теоремы Томсона:

Производная по времени от циркуляции по любому замкнутому контуру равна нулю, если жидкость баротропическая и внешние силы консервативны.

Из этой теоремы, в качестве следствий, можно вывести теорему Лагранжа и теоремы Гельмгольца.

Теорема Лагранжа: Если в некоторый момент времени в баротропической жидкости, при наличии лишь консервативных сил, не было вихрей, то их не будет во все время движения.

Действительно, если в некоторый момент времени $C = 0$, то, так как $C = \text{const}$, необходимо $C = 0$ все время.

Теорема Гельмгольца о сохранении вихревых линий и поверхностей: Частицы жидкости, образующие в некоторый момент времени вихревую линию или вихревую поверхность, во все время движения образуют вихревую линию или поверхность (при условии баротропичности жидкости и консервативности внешних сил).

Вихревая поверхность есть поверхность, составленная из вихревых линий, проходящих через произвольную линию в пространстве (если эта линия замкнута, то вихревая поверхность образует вихревую трубку).

Возьмем бесконечно малый контур L на вихревой поверхности S. Имеем, по формуле Стокса.

$$C_L = \iint_{(S)} \Omega_n dS,$$

где Ω_n—нормальная к поверхности S составляющая вихря. Но эта составляющая равна нулю, так так вектор Ω касателен к вихревой поверхности.

В следующий момент времени жидкая линия L примет положение L', причем L' будет лежать на поверхности S', образованной теми частицами, которые раньше лежали на поверхности S (рис. 89).

По теореме Томсона циркуляция не меняется с течением времени, а так как C_L равнялось нулю, то и $C_{L'}=0$. Но по теореме Стокса

$$C_{L'}=\int\int_{S'}\Omega_n dS,$$

откуда следует, что

$$\Omega_n=0$$

в точках поверхности S', и значит S' есть вихревая поверхность.

Вихревую линию можно рассматривать как пересечение двух вихревых поверхностей, которые во время движения жидкости переходят в вихревые же поверхности, линия же пересечения последних есть вихревая линия. Таким образом, действительно, имеет место сохраняемость вихревых линий.

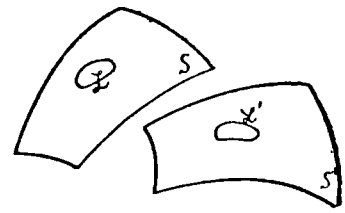

Рис. 89.

Теорема Гельмгольца о сохранении интенсивности вихревых трубок. Интенсивность вихревой трубки во все время движения остается постоянной (попрежнему предполагаем, что жидкость баротропична и внешние силы имеют потенциал).

Эта теорема представляет непосредственное следствие теоремы Томсона о сохранении циркуляции, так как интенсивность вихревой трубки есть циркуляция по контуру, охватывающему трубку.

Теорема В. Бьеркнеса. Если жидкость бароклинична, т. е. если плотность зависит не только от давления (например, и от температуры, или влажности и т. д.), то в формуле (23)

$$\int_L \frac{dp}{\rho}$$

не равен нулю, так как $\frac{dp}{\rho}$ не есть полный дифференциал, и мы имеем для производной по времени от циркуляции скорости

$$\frac{dC}{dt}=-\int_L \frac{dp}{\rho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Бьеркнес дал истолкование правой части этого уравнения, носящее название теоремы Бьеркнеса.

Введем вместо плотности удельный объем:

$$\omega=\frac{1}{\rho}.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{dC}{dt}=-\int_L \omega dp \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Рассмотрим изобарические поверхности $p=\text{const}$ и изостерические поверхности, т. е. поверхности равного удельного объема: $\omega=\text{const}$. В случае баротропической жидкости, для которой $\omega=\Phi(p)$, изобарические

и изостерические поверхности совпадают между собой, в случае же бароклинической жидкости эти поверхности пересекаются. Проведем систему изобарических поверхностей для значений p, отличающихся друг от друга на единицу, и систему изостерических поверхностей для значений ω, отличающихся друг от друга на единицу (рис. 90). Эти поверхности разобьют пространство на трубки, которые называются единичными изобаро-изостерическими трубками.

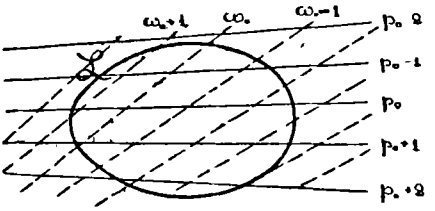

Рис. 90.

Вычислим значение интеграла $-\int \omega dp$ по контуру l, охватывающему единичную изобаро-изостерическую трубку, и ориентированному против часовой стрелки (рис. 91 а); на линиях LM и KN $p=\text{const}$, следовательно $dp=0$. На линии KL $\omega=\omega_0+1$, по линии MN $\omega=\omega_0$. Поэтому

$$-\int\limits_{KL} \omega dp = -(\omega_0+1)\int\limits_{p_0+1}^{p_0} dp = \omega_0+1,$$

$$-\int\limits_{MN} \omega dp = -\omega_0\int\limits_{p_0}^{p_0+1} dp = -\omega_0,$$

следовательно

$$-\int\limits_{l} \omega dp = \omega_0+1-\omega_0 = 1,$$

В случае, изображенном на рис. 91а, направление обхода по контуру l совпадает с направлением от ∇p к $\nabla\omega$.[1]) Если бы поворот от ∇p к $\nabla\omega$

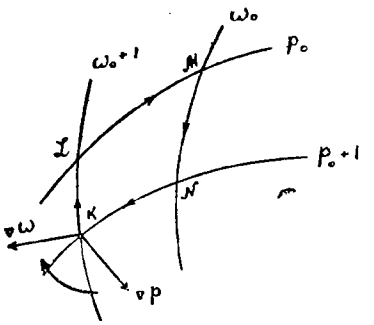

Рис. 91а.

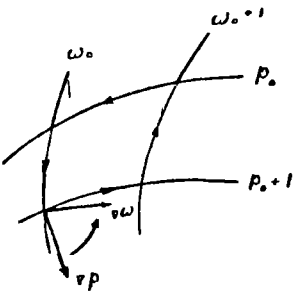

Рис. 91b.

происходил в противоположном направлении (см. рис. 91b), то для рассматриваемого интеграла мы получили бы -1.

$$-\int\limits_{l} \omega dp = -1.$$

Будем называть единичную трубку положительной, если $-\int\limits_{l} \omega dp = +1$, и отрицательной, если $-\int \omega dp = -1$.

---

[1]) Напомним, что ∇p направлен всегда в сторону возрастающих давлений, в отличие от метеорологического градиента давления, направленного в сторону убывающих p.

Если данный контур L охватывает N' положительных трубок и N'' отрицательных, то контур L можно разбить с помощью вспомогательной линии, разделяющей область положительных трубок от области отрицательных трубок, на два контура, L' и L'' (рис. 92). Тогда будем иметь

$$\int_L \omega dp = -\int_{L'} \omega dp - \int_{L''} \omega dp = N' - N''.$$

Следовательно, производная циркуляции по времени определится формулой

$$\frac{dC}{dt} = N' - N''. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

Получаем таким образом теорему Бьеркнеса:

Производная по времени от циркуляции скорости по жидкому контуру L равна разности числа положительных и отрицательных единичных изобаро-изостерических трубок, охватываемых контуром L.

Теорема Бьеркнеса имеет важное значение при рассмотрении вопроса о возникновении вихрей. Дело в том, что по теореме Стокса, циркуляция скорости по контуру L равна потоку вихря через произвольную поверхность S, опирающуюся на контур L:

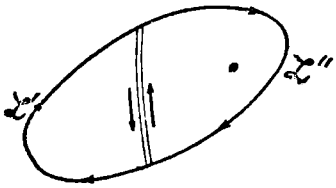

Рис. 92.

$$C_L = \iint_S \Omega_n dS.$$

Следовательно, теорема Бьеркнеса может быть сформулирована так:

Производная по времени от потока вихря через жидкую поверхность S равна разности между числами положительных и отрицательных единичных изобаро-изостерических трубок, пересекающих поверхность S.

Таким образом, теорема Бьеркнеса указывает причину возникновения вихрей в идеальной сжимаемой бароклинической жидкости, при наличии только консервативных внешних сил: вихри образуются вследствие пересечения изобарических и изостерических поверхностей.

Если в начальный момент времени движения жидкости не было, но изобарические и изостерические поверхности пересекались, то в моменты времени, близкие к начальному, будут образовываться вихревые трубки, близкие к изобаро-изостерическим трубкам, которые не будут сохраняться, так что в последующие моменты времени вихревые трубки будут состоять из других жидких частиц.

Применем теорему Бьеркнеса к объяснению некоторых атмосферных движений.

Допустим, что некоторая площадь на земле подверглась местному нагреванию. Согласно уравнению Клапейрона, имеем

$$p\omega = RT.$$

Давление мало меняется с изменением температуры, удельный же объем изменяется почти пропорционально температуре. Поэтому изобарические поверхности будут близки к горизонтальным плоскостям, изостерические же поверхности будут вогнуты кверху, т. е. в нагретой области они будут итти низко, в ненагретых участках—высоко, так как в нагретом месте удельный объем велик, и в ненагретой области такое же значение удельного объема будет наверху. Образуются изобаро-изостерические трубки, а потому возникает циркуляция (рис. 93) в направлении от ∇p к $\nabla \omega$.

В центре возникает восходящее течение воздуха, на границах—нисходящее, снизу воздух притекает к области, наверху—расходится от центра к периферии.

Аналогичным образом можно объяснить явления муссонов, которые обязаны своим возникновением неравномерному нагреванию суши и моря зимой и летом, и бризов, происходящих от неравномерного нагревания суши и воды ночью и днем.

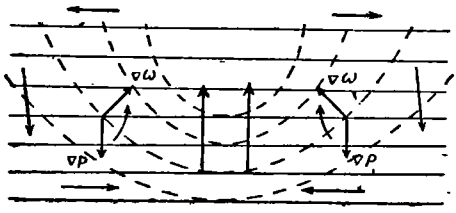

Рис. 93.

На рис. 94 и 95 имеем схемы бриза ночью и днем. Днем изотермические поверхности поднимаются над сушей, ночью над морем; значения удельного объема возрастают днем от моря к суше, ночью—наоборот.

Направление от ∇p к $\nabla\omega$ указывает, в каком направлении должна происходить циркуляция.

Перейдем, наконец, к рассмотрению циркуляции в атмосфере, окружающей землю.

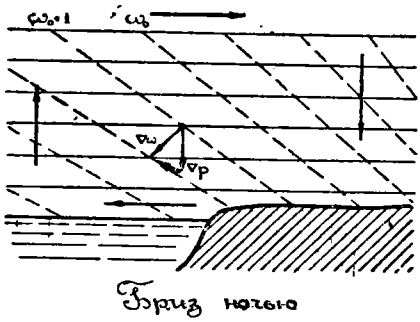

Рис. 94.

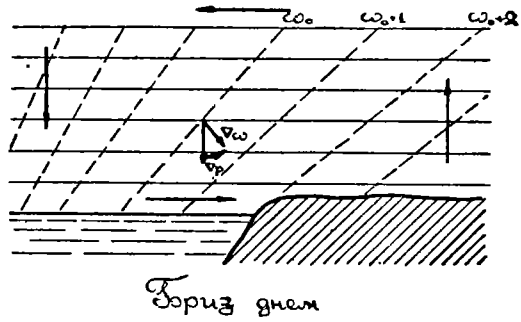

Рис. 95.

Давление с широтой мало меняется, так что изобарические поверхности можно считать совпадающими с поверхностями уровня. Изостерические же поверхности поднимаются от экватора к полюсу, так как удельный объем, вследствие значительной разницы температур, у экватора больше, чем у полюса.

Направление циркуляции соответственно направлению от ∇p к $\nabla\omega$ будет таким: от экватора воздух поднимается и вверху растекается к северным и южным широтам, у полюсов опускается, и внизу течет к экватору. Таким образом, имеем схему пассатов и антипассатов (рис. 96).

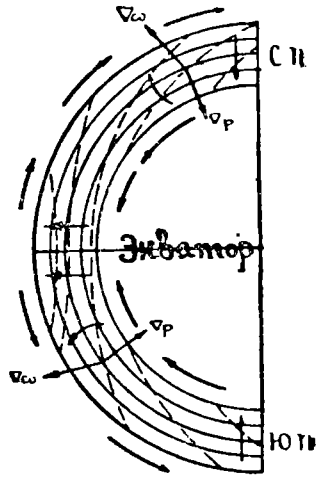

Рис. 96.

До сих пор мы предполагали, что внешние силы в движущейся жидкости консервативны, т. е. сила F имеет потенциал. Если рассматривать движение воздуха над вращающейся землей, то имеем уравнения для относительного движения в такой форме (см. гл. II):

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -W - 2[\Omega, \mathbf{V}] - \frac{1}{\rho}\nabla p, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

где

$$W = U - \frac{\omega^2 R^2}{2},$$

т. е. W есть потенциал силы тяжести, слагающийся из силы притяже-

ния к центру земли и центробежной силы, происходящей от вращения земли, $-2[\Omega, \mathbf{V}]$—сила Кориолиса, Ω—вектор угловой скорости вращения земли; R—расстояние движущейся точки от центра земли.

Применяя теорему о том, что производная по времени от циркуляции скорости равна циркуляции ускорения, получим в случае относительного движения, на основании уравнения (27)

$$\frac{dC}{dt} = -\int_L (\nabla W, d\mathbf{s}) - 2\int_L ([\Omega, \mathbf{V}] \cdot d\mathbf{s}) - \int_L \frac{dp}{\rho}.$$

Так как первый интеграл равен нулю (интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала), то остается

$$\frac{dC}{dt} = -2\int_L ([\Omega, \mathbf{V}] \cdot d\mathbf{s}) - \int_L \frac{dp}{\rho} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

Выясним значение первого интеграла. Тройное произведение $([\Omega, \mathbf{V}], d\mathbf{s})$ представляет собою объем параллелепипеда, построенного на векторах Ω, $\mathbf{V}$ и $d\mathbf{s}$, взятого со знаком плюс или минус в зависимости от того, ориентированы ли векторы Ω, $\mathbf{V}$ и $d\mathbf{s}$ как координатные оси в рассматриваемой системе координат или нет.

Как известно из векторного исчисления, в скалярно-векториальном произведении можно делать циклическую перестановку векторов, и в частности, можно написать

$$([\Omega, \mathbf{V}], d\mathbf{s}) = (\Omega, [\mathbf{V}, d\mathbf{s}]);$$

тогда

$$\int_L ([\Omega, \mathbf{V}], d\mathbf{s}) = \int_L (\Omega, [\mathbf{V}, d\mathbf{s}]) = (\Omega, \int_L [\mathbf{V}, d\mathbf{s}]).$$

Ω мы вынесли за знак интеграла, так как Ω—вектор постоянный по величине и направлению. Чтобы дать истолкование последнему интегралу, спроектируем на плоскость экватора, параллельно земной оси, контур L; проекцию его обозначим через L', проекцию скорости $\mathbf{V}$ через V', проекцию $d\mathbf{s}$ через $d\mathbf{s}'$ (рис. 97). Объем параллелепипеда $(\Omega, \mathbf{V}, d\mathbf{s})$ равен произведению величины вектора Ω на площадь сечения, перпендикулярного Ω, а последняя площадь равна площади, построенной на векторах $d\mathbf{s}'$ и $\mathbf{V}'$.

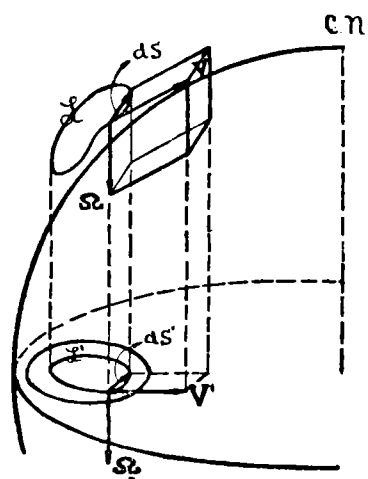

Рис. 97.

Обозначим через Σ' вектор площади, ограниченной контуром L'. Величина этого вектора должна равняться величине площади, ограниченной линией L', а направлен он перпендикулярно плоскости экватора, причем, если контур L' обходится против часовой стрелки, если смотреть на него с северного полюса, то Σ направлен, как и Ω, от северного полюса к южному; если L' обходится по часовой стрелке, то Σ направлен в противоположную сторону. За промежуток времени dt точки этого контура переместятся на вектор $\mathbf{V}'dt$, и приращение площади Σ' будет равно пределу суммы площадок, причем произвольная из этих площадок может быть изображена вектором $[\mathbf{V}'dt, d\mathbf{s}']$, т. е.

$$d\Sigma' = \int_{L'} [\mathbf{V}'dt, d\mathbf{s}'],$$

откуда

$$\frac{d\Sigma'}{dt} = \int\limits_{L'} [\mathbf{V}', d\mathbf{s}'].$$

Далее, так как $(\Omega, [\mathbf{V}, d\mathbf{s}]) = (\Omega, [\mathbf{V}', d\mathbf{s}'])$ (это равенство выражает, что объем, построенный на Ω, $\mathbf{V}$, $d\mathbf{s}$ равен объему, построенному на векторах Ω, $\mathbf{V}'$, $d\mathbf{s}'$), то можем написать

$$\int\limits_{L} ([\Omega, \mathbf{V}], d\mathbf{s}) = \int\limits_{L} (\Omega, [\mathbf{V}, d\mathbf{s}]) = \int\limits_{L'} (\Omega, [\mathbf{V}', d\mathbf{s}']) =$$

$$= (\Omega \int [\mathbf{V}', d\mathbf{s}']) = \left(\Omega, \frac{d\Sigma'}{dt}\right) = \pm\, \Omega \frac{d\Sigma'}{dt}.$$

Последнее равенство вытекает из того, что вектора Ω и Σ', а следовательно Ω и $\frac{d\Sigma'}{dt}$, оба направлены параллельно земной оси, а потому их скалярное произведение равно произведению их величин, взятому со знаком плюс, если векторы Ω и Σ' одинаково направлены (т. е. оба от северного полюса к южному) и со знаком минус, если Σ' направлен от южного полюса к северному. Чтобы не иметь дела с двумя знаками, условимся считать величину Σ' положительной в первом случае и отрицательной—во втором. Тогда будем иметь

$$\int\limits_{L} ([\Omega, \mathbf{V}]\, d\mathbf{s}) = \Omega \frac{d\Sigma'}{dt}.$$

Внося это выражение в формулу (28) и вспоминая, что по теореме Бьеркнеса последний член этой формулы равен $N' - N''$ (разности между числом положительных и отрицательных изобаро-изостерических единичных трубок), получим

$$\frac{dC}{dt} = -2\Omega \frac{d\Sigma'}{dt} + N' - N''. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

Таким образом, изменение циркуляции зависит не только от пересечения изобарических и изостерических поверхностей, но и от изменения со временем площади, ограниченной проекцией на плоскость экватора контура L, по которому берется циркуляция.

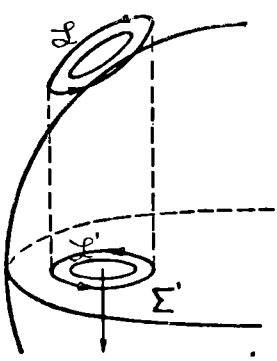

Рис. 98.

Посмотрим, как влияет добавочный член $-2\Omega \frac{d\Sigma'}{dt}$ на изменение циркуляции в циклоне.

Пусть будет L—окружность, лежащая в нижних слоях воздуха, центр которой совпадает с центром циклона; за положительное направление контура L примем направление, противоположное движению часовой стрелки (рис. 98). Так как в нижних слоях циклона воздух притекает к центру, то имеем сужение контура L. Площадь Σ' при нашем условии положительна, следовательно, $-2\Omega \frac{d\Sigma'}{dt}$ положительно, что влечет увеличение циркуляции. Но увеличение циркуляции означает, что у нас появляется составляющая скорости ветра, направленная вдоль контура против часовой стрелки. Следовательно, в циклоне скорость воздуха, идущего к центру, имеет составляющую вправо, что и обусловливает спиралевидный характер линий тока.

Теперь рассмотрим влияние изменения площади Σ' на изменение циркуляции в пассатах. Здесь за контур L возьмем окружность, лежащую в нижних слоях атмосферы и охватывающую всю землю в виде параллели (рис. 99).

Направление обхода возьмем с запада на восток. Благодаря течению воздуха от полюса к экватору, контур L расширяется с течением времени, площадь Σ' увеличивается, $-2\Omega\frac{d\Sigma'}{dt}$ будет меньше нуля, следовательно циркуляция уменьшается. Это означает, что должна иметься восточная составляющая ветра, что действительно и наблюдается, так как в пассатах дуют ветры с северо-востока.

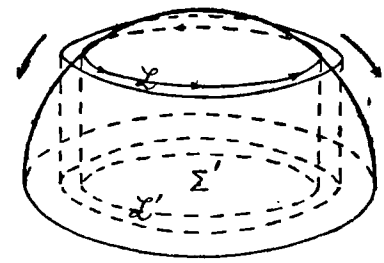

Рис. 99.

§ 4. Условие сохраняемости векториальных линий. Теоремы Гельмгольца утверждают, что в баротропической жидкости, при наличии консервативных сил, имеет место сохраняемость, во время движения, вихревых линий, а также сохраняемость интенсивности вихревых трубок. Вихревые линии являются частным случаем векториальных линий, т. е. линий, в каждой точке которых направление касательной совпадает с направлением некоторого вектора, поле которого задано. Так, линии тока являются векториальными линиями вектора скорости, вихревые линии — векториальными линиями вектора вихря. Векториальной трубкой называется поверхность, образованная совокупностью векториальных линий, проходящих через произвольно взятую замкнутую линию. А. А. Фридман поставил общую задачу об условиях, при которых имеет место сохраняемость, во время движения, векториальных линий, а также интенсивностей векториальных трубок. В этом направлении мы докажем теоремы:

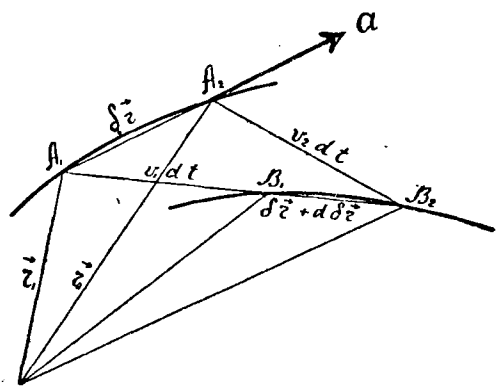

Рис. 100.

Теорема I. Необходимое и достаточное условие сохраняемости векториальных линий вектора **a** состоит в выполнении равенства

$$\left[\frac{d\mathbf{a}}{dt}-(a,\nabla)\mathbf{V},\mathbf{a}\right]=0. \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Докажем необходимость условия.

Рассмотрим приращение $\delta\mathbf{r}$ радиуса вектора вдоль векториальной линии в момент времени t (рис. 100): $\delta\mathbf{r}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$.

Положим $\delta\mathbf{r}=\varepsilon\mathbf{a}$, где ε—малая скалярная величина. Тогда $\delta x=\varepsilon a_x$, $\delta y=\varepsilon a_y$, $\delta r=\varepsilon a_z$. К моменту времени $t+dt$ вектор $\delta\mathbf{r}$ получит приращение $d\delta\mathbf{r}$, причем

$$d\delta\mathbf{r}=d(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)=d\mathbf{r}_2-d\mathbf{r}_1=\left(\frac{d\mathbf{r}_2}{dt}-\frac{d\mathbf{r}_1}{dt}\right)dt=(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1)\,dt.$$

Здесь $\mathbf{v}_2$—вектор скорости частицы, находившейся в момент t в точке A_2, $\mathbf{v}_1$ — вектор скорости частицы в точке A_1. Пользуясь для $\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1$ первыми членами разложения в ряд Тейлора, можем написать

$$d\delta\mathbf{r}=\left(\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial z}dz\right)dt=\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x}\varepsilon a_x+\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial y}\varepsilon a_y+\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial z}\varepsilon a_z=\varepsilon\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{V}dt.$$

К моменту $t+dt$ вектор $\delta\mathbf{r}$ перейдет в вектор

$$\delta\mathbf{r}+d\delta\mathbf{r}=\varepsilon\mathbf{a}+\varepsilon(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{V}dt, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31):$$

вектор $\mathbf{a}$ перейдет в $\mathbf{a}+d\mathbf{a}=\mathbf{a}+\frac{d\mathbf{a}}{dt}dt$.

Частицы, находившиеся в момент времени t на векториальной линии, например частицы A_1 и A_2, к моменту $t+dt$ перейдут в точки (например B_1 и B_2), лежащие на некоторой жидкой линии, может быть уже не векториальной. Если же эта жидкая линия есть векториальная линия, то касательная к ней должна совпадать по направлению с вектором $\mathbf{a}+d\mathbf{a}$, т. е. вектор $\delta\mathbf{r}+d\delta\mathbf{r}$ должен быть параллелен вектору $\mathbf{a}+d\mathbf{a}$. Условие параллельности двух векторов состоит в равенстве нулю их векториального произведения, следовательно

$$[\delta\mathbf{r}+d\delta\mathbf{r},\ \mathbf{a}+d\mathbf{a}]=0,$$

или, подставляя найденное значение вектора $\delta\mathbf{r}+d\delta\mathbf{r}$ из равенства (31):

$$\left[\mathbf{a}+(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{V}dt,\ \mathbf{a}+\frac{d\mathbf{a}}{dt}dt\right]=0$$

(на ε сокращено).

Это произведение равно сумме четырех векториальных произведений: $[\mathbf{a},\mathbf{a}]$, которое равно нулю, произведения $\left[(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{V}dt,\frac{d\mathbf{a}}{dt}dt\right]$, которое считаем равным нулю, так как оно дает бесконечно малый вектор второго порядка малости относительно dt.

Остаются два слагаемых:

$$\left[\mathbf{a},\frac{d\mathbf{a}}{dt}dt\right]+[(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{V}dt,\mathbf{a}]=0.$$

Сокращая на dt и переставляя члены в первом слагаемом, получим

$$-\left[\frac{d\mathbf{a}}{dt},\mathbf{a}\right]+[(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{V},\mathbf{a}]=0$$

или

$$\left[\frac{d\mathbf{a}}{dt}-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{V},\mathbf{a}\right]=0,$$

что и требовалось доказать.

Вместо вектора

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}-(\mathbf{a},\nabla)\mathbf{V}$$

А. А. Фридман рассматривает вектор $\mathbf{H}=\operatorname{helm}\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{a}}{dt}-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{V}+\mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{V}$. Очевидно, что условие сохраняемости вихревых линий может быть написано в форме

$$[\mathbf{H},\mathbf{a}]=0,$$

так как $[\mathbf{H},\mathbf{a}]=\left[\frac{d\mathbf{a}}{dt}-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{V}+\mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{V}\right)=\left[\frac{d\mathbf{a}}{dt}-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{V},\mathbf{a}\right]+$

$$+[\mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{V},\mathbf{a}]=\left[\frac{d\mathbf{a}}{dt}-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{V},\mathbf{a}\right]=0$$

(вследствие параллельности векторов $\mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{V}$ и $\mathbf{a}$ имеем: $[\mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{V},\mathbf{a}]=0$).

На доказательстве достаточности найденного условия мы не останавливается, отсылая к книге А. А. Фридмана [Л. 1].

Вторая теорема Гельмгольца выводится обычно в предположении, что установлена первая, т. е. доказывается, что интенсивность вихревых трубок, при условии сохраняемости вихревых линий, остается неизменной. Однако, эта теорема может рассматриваться независимо от первой, если под интенсивностью I бесконечно тонкой векториальной трубки понимать поток вектора $\mathbf{a}$ через сечение, нормальное к вихревой трубке, т. е. полагать

$$I=\iint_{\sigma} a_n\,d\sigma.$$

где a_n—нормальная к площадке составляющая вектора a, которую можно представить в виде скалярного произведения вектора а на единичный вектор нормали к площадке σ:

$$a_n = (\mathbf{a}, \mathbf{n}),$$

и следовательно

$$I = \iint_{\sigma} (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma.$$

Когда частица, через которую проходила площадка σ, займет новое положение, причем площадка σ перейдет в σ', то поток вектора **a** будет

$$I' = \iint_{\sigma'} (\mathbf{a}', \mathbf{n}')\, d\sigma.$$

Это будет интенсивностью векториальной трубки, проходящей через контур площадки σ', хотя σ', вообще говоря, не будет нормальным сечением новой векториальной трубки, и новая трубка может не состоять из тех жидких частиц, которые составляли первоначальную векториальную трубку (рис. 101). Может быть, однако, что интенсивность I' равна интенсивности I. В этом случае мы будем говорить о сохранении интенсивности векториальных трубок.

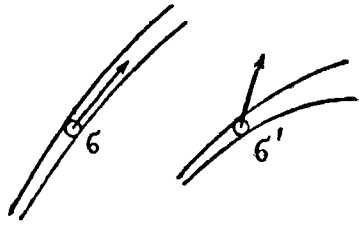

Рис. 101.

Теорема II. Необходимым и достаточным условием сохраняемости интенсивности векториальных трубок вектора **a** является выполнение равенства

$$(\mathbf{H}, \mathbf{a}) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

где

$$\mathbf{H} = \operatorname{helm} \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} - (\mathbf{a}, \nabla)\, \mathbf{V} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{V}.$$

Действительно возьмем производную по времени от интенсивности I

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\iint (\mathbf{a}, \mathbf{n})\, d\sigma\right).$$

В векториальном исчислении выводится формула для последней производной, на основании которой получаем

$$\frac{dI}{dt} = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathbf{a}, \mathbf{V}] + \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{a}, \mathbf{n}\right) d\sigma.\ ^{1)}$$

Так как σ — бесконечно малая площадка, то для выполнения условия:

$$\frac{dI}{dt} = 0$$

необходимо

$$\left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathbf{a}, \mathbf{V}] + \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{a}, \mathbf{n}\right) = 0.$$

Так как вектор **a** параллелен нормали, то в последнем равенстве вместо вектора **n** можно поставить **a**, и тогда получим условие сохраняемости интенсивности векториальной трубки в виде

$$\left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathbf{a}, \mathbf{V}] + \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{a}, \mathbf{a}\right) = 0.$$

---

[1]) См. [Л. 3], стр. 235 (3 издание).

Остается показать, что первый из множителей скалярного произведения можно заменить вектором **H**. Для этого воспользуемся формулой из векториального анализа (см. [Л. 3], стр. 118)

$$\operatorname{curl}[\mathbf{a}, \mathbf{V}] = (\mathbf{V}\cdot\nabla)\,\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{V} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{V} - \mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{a};$$

подставив это выражение $\operatorname{curl}[\mathbf{a}, \mathbf{V}]$ в указанный множитель и сократив члены: $\mathbf{V}\operatorname{div}\mathbf{a}$ и $-\mathbf{V}\operatorname{div}\mathbf{a}$, получим

$$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathbf{a}\cdot\mathbf{V}] + \mathbf{V}\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\,\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{V} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{V} =$$

$$= \frac{d\mathbf{a}}{dt} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{V} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{V} = \mathbf{H} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

и, следовательно, условие сохраняемости интенсивности векториальной трубки можно переписать таким образом:

$$\left(\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{V} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{V}, \mathbf{a}\right) = 0$$

или

$$(\mathbf{H}, \mathbf{a}) = 0.$$

Достаточность этого условия мы также не будем доказывать [Л. 1].

Теорема III. Необходимое и достаточное условие сохраняемости векториальных линий и одновременно интенсивности векториальных трубок состоит в равенстве нулю вектора H:

$$\mathbf{H} = 0,$$

где

$$\mathbf{H} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{V} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{V} = \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t} + \operatorname{curl}[\mathbf{a}, \mathbf{V}] + \mathbf{V}\operatorname{div}\mathbf{a}.$$

Необходимость условия очевидна, так как для одновременного выполнения условий сохраняемости векториальных линий вектора **a** и интенсивности векториальных трубок должны быть равны векториальное и скалярное произведения векторов **H** и **a**;

$$[\mathbf{H}, \mathbf{a}] = 0, \quad (\mathbf{H}, \mathbf{a}) = 0,$$

откуда следует, что $\mathbf{H} = 0$.

Этому условию можно дать другой вид. Действительно, имеем:

$$\mathbf{H} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{V} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{V} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (34)$$

Из уравнения неразрывности

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}.$$

Умножив все члены уравнения (34) на $\frac{1}{\rho}$ и заменив $\operatorname{div}\mathbf{V}$ на $-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$, получим

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\mathbf{a}}{dt} - \frac{1}{\rho^2}\mathbf{a}\frac{d\rho}{dt} - \frac{1}{\rho}(\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{V} = 0,$$

или

$$\frac{d\left(\frac{\mathbf{a}}{\rho}\right)}{dt} - \left(\frac{\mathbf{a}}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathbf{V} = 0.$$

На основании теорем Гельмгольца мы знаем, что в идеальной жидкости, при наличии лишь консервативных сил, вихревые линии и интенсивности вихрей обладают свойством сохраняемости. Поэтому

если за вектор **a** принять вихрь скорости Ω, то последнее уравнение примет вид:

$$\frac{d\left(\frac{\Omega}{\rho}\right)}{dt}-\left(\frac{\Omega}{\rho}\cdot\nabla\right)\mathbf{V}=0.$$

Это есть система уравнений, известных под названием уравнений Гельмгольца.

Применим теперь теорему I к выводу условий сохраняемости линий тока.

Положим $\mathbf{a}=\mathbf{V}$. Так как

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)\,\mathbf{V},$$

то

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt}-(\mathbf{V}\cdot\nabla)\,\mathbf{V}=\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t},$$

а потому условие сохраняемости линий тока будет

$$\left[\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t},\mathbf{V}\right]=0,$$

что равносильно уравнениям

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{u}=\frac{\frac{\partial v}{\partial t}}{v}=\frac{\frac{\partial w}{\partial t}}{w},$$

или

$$\frac{\partial\lg u}{\partial t}=\frac{\partial\lg v}{\partial t}=\frac{\partial\lg w}{\partial t}.$$

Приравняв каждое из этих отношений произвольной функции координат и времени $\frac{\partial\psi\,(x,y,z,t)}{\partial t}$, после интегрирования по времени, получим

$$\lg u=\psi\,(x,y,z,t)+f_1\,(x,y,z),$$
$$\lg v=\psi\,(x,y,z,t)+f_2\,(x,y,z),$$
$$\lg w=\psi\,(x,y,z,t)+f_3\,(x,y,z),$$

где ψ — произвольная функция четырех аргументов, f_1, f_2, f_3—произвольные функции координат. Из последних равенств получаем

$$u=e^{\psi}\,e^{f_1}=\varphi\,(x,y,z,t)\,F_1\,(x,y,z),$$
$$v=e^{\psi}\,e^{f_2}=\varphi\,(x,y,z,t)\,F_2\,(x,y,z),$$
$$w=e^{\psi}\,e^{f_3}=\varphi\,(x,y,z,t)\,F_3\,(x,y,z).$$

Таким образом, мы имеем сохраняемость линий тока в случае, если составляющие скорости пропорциональны функциям от координат. Очевидно, что в этом случае уравнения линий тока

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w}$$

будут

$$\frac{dx}{F_1\,(x,y,z)}=\frac{dy}{F_2\,(x,y,z)}=\frac{dz}{F_3\,(x,y,z)},$$

т. е. линии тока таковы, как если бы движение было стационарным.

Особенный интерес представляет рассмотрение условий сохраняемости вихревых линий, к чему мы теперь и обращаемся. Итак, пусть $\mathbf{a}=\Omega=\operatorname{curl}\mathbf{V}$.

Будем рассматривать введенный выше вектор **H** как оператор, производимый над вектором **a**, и обозначим его, по А. А. Фридману, через helm **a**:

$$\mathbf{H}=\operatorname{helm}\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{a}}{dt}-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{V}+\mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{V}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t}+\operatorname{curl}[\mathbf{a},\mathbf{V}]+\mathbf{V}\operatorname{div}\mathbf{a}.\quad.\quad.\ (35)$$

Для вихря скорости имеем

$$\text{helm curl } \mathbf{V} = \frac{\partial \text{ curl } \mathbf{V}}{\partial t} + \text{curl } [\text{curl } \mathbf{V}, \mathbf{V}] = \text{curl } \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + [\text{curl } \mathbf{V}, \mathbf{V}]\right).$$

Возьмем составляющую по оси x вектора $[\text{curl } \mathbf{V}, \mathbf{V}]$

$$[\text{curl } \mathbf{V}, \mathbf{V}]_x = \text{curl}_y \mathbf{V} \cdot w - \text{curl}_z \mathbf{V} \cdot v = \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) w - \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) v =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial z} w + \frac{\partial u}{\partial y} v - \frac{\partial w}{\partial x} w - \frac{\partial v}{\partial x} v.$$

Прибавим и вычтем в правой части $\frac{\partial u}{\partial x} u$; получим

$$[\text{curl } \mathbf{V}, \mathbf{V}]_x = \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2).$$

Прибавляя это выражение к $\frac{\partial u}{\partial t}$, видим, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} + [\text{curl } \mathbf{V}, \mathbf{V}]_x = \frac{du}{dt} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2 + v^2 + w^2).$$

Рассмотрим аналогичным образом две другие составляющие, найдем

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + [\text{curl } \mathbf{V}, \mathbf{V}] = \frac{d\mathbf{V}}{dt} - \frac{1}{2} \nabla V^2.$$

Так как вихрь от градиента равен нулю, то у нас остается лишь $\text{curl } \frac{d\mathbf{V}}{dt}$, а потому окончательно имеем

$$\text{helm curl } \mathbf{V} = \text{curl } \frac{d\mathbf{V}}{dt}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (36)$$

Условие сохраняемости вихревых линий теперь может быть написано таким образом:

$$\left[\text{curl } \frac{d\mathbf{V}}{dt}, \mathbf{V}\right] = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (37)$$

Оно показывает, что вихрь ускорения параллелен вектору скорости.

Условие сохраняемости интенсивности бесконечно тонких вихревых трубок будет

$$\left(\text{curl } \frac{d\mathbf{V}}{dt}, \mathbf{V}\right) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

т. е. вихрь ускорения должен быть ортогонален вектору скорости.

Если выполняются оба условия сохраняемости, и интенсивностей, и вихревых линий, то

$$\text{curl } \frac{d\mathbf{V}}{dt} = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (39)$$

Обращаясь к уравнениям движения идеальной жидкости, имеем

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\omega \nabla p + \mathbf{F}.$$

Если силы консервативны и жидкость несжимаема, то

$$\text{curl } \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\omega \text{ curl } (\nabla p) \equiv 0,$$

и, следовательно, обе теоремы Гельмгольца имеют место.

В случае сжимаемой жидкости ($\mathbf{F}$—консервативна)

$$\text{curl } \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\text{ curl } (\omega \nabla p) = [\nabla p, \nabla \omega].$$

Если $\operatorname{curl}\frac{d\mathbf{V}}{dt}=0$, то $[\nabla p, \nabla\omega]=0$, и следовательно ∇p параллелен $\nabla\omega$; в этом случае изобарические и изостерические поверхности совпадают.

§ 5. Условия динамической возможности движения сжимаемой жидкости. В случае сжимаемой жидкости мы имеем, как указывалось в начале этой главы, уравнения движения и уравнение неразрывности

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt}=-\omega\nabla p+\mathbf{F}, \qquad (40)$$

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\operatorname{div}\mathbf{V}=0. \qquad (41)$$

Будем называть u, v, w кинематическими элементами движения, ω и p—динамическими элементами. Поставим вопрос: можно ли произвольно задать скорости u, v, w, т. е. при любых ли скоростях уравнения гидродинамики будут удовлетворяться, или, иначе, всегда ли возможно, по заданным скоростям, найти из уравнений движения динамические элементы p и ω? Рассматривая несжимаемую жидкость, при наличии лишь консервативных сил, мы приходим к отрицательному ответу, т. е. убеждаемся, что для возможности определения p из уравнений движения (ω здесь заданная постоянная) необходимо, чтобы скорости удовлетворяли некоторому условию.

Действительно, беря curl от обеих частей уравнения (40), мы получаем

$$\operatorname{curl}\frac{d\mathbf{V}}{dt}=-\omega\operatorname{curl}\nabla p+\operatorname{curl}\mathbf{F}=0,$$

т. е. вектор ускорения должен удовлетворять условию, что его вихрь равен нулю.

Например, в несжимаемой жидкости невозможно вращательное движение с такими составляющими скорости

$$u=-\lambda(z)\,y, \quad v=\lambda(z)\,x, \quad w=0, \qquad (42)$$

где λ—угловая скорость вращения вокруг оси z—зависит от z, и возможно такого рода движение при λ постоянном. В самом деле, хотя условие несжимаемости выполнено, так как $\operatorname{div}\mathbf{V}\equiv 0$, однако здесь

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}u+\frac{\partial u}{\partial y}v+\frac{\partial u}{\partial t}w=-\lambda^2(z)\,x,$$

$$\frac{dv}{dt}=-\lambda^2(z)\,y, \quad \frac{dw}{dt}=0,$$

$$\operatorname{curl}_x\frac{d\mathbf{V}}{dt}=-2\lambda(z)\,\lambda'(z)\,y, \quad \operatorname{curl}_y\frac{d\mathbf{V}}{dt}=-2\lambda(z)\,\lambda'(z)\,x, \quad \operatorname{curl}_z\frac{d\mathbf{V}}{dt}=0,$$

видим, что $\operatorname{curl}\frac{d\mathbf{V}}{dt}$ вообще не равен нулю. Другими словами, мы не можем определить давления из уравнений

$$\frac{du}{dt}=-\omega\frac{\partial p}{\partial x},$$
$$\frac{dv}{dt}=-\omega\frac{\partial p}{\partial y},$$
$$\frac{dw}{dt}=-\omega\frac{\partial p}{\partial z},$$

так как в нашем случае

$$\omega\frac{\partial p}{\partial x}=\lambda^2(z)\,x,$$
$$\omega\frac{\partial p}{\partial y}=\lambda^2(z)\,y,$$
$$\omega\frac{\partial p}{\partial z}=0.$$

Левые части являются составляющими градиента, тогда как правые таковыми не являются, поэтому давление не может быть определено, как функция координат, если только λ не равно постоянной.

Можно сказать, что в случае несжимаемой жидкости движение, определяемое уравнениями (42), является динамически возможным при $\lambda = \text{const}$, при $\lambda = \lambda(z)$ оно динамически невозможно.

В общем случае несжимаемой жидкости имеем такие условия динамической возможности движения, т. е. условия, налагаемые на вектор скорости:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \text{ и } \operatorname{curl} \frac{d\mathbf{V}}{dt} = 0.$$

А. А. Фридман поставил задачу об отыскании условий динамической возможности движения сжимаемой жидкости и получил результаты, которые позволяют во многих случаях отыскивать частные решения уравнений гидродинамики.

Перепишем уравнения движения (40) таким образом:

$$\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \omega \nabla p. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

Введем вектор, называемый динамическим градиентом:

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} - \frac{d\mathbf{V}}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

Введем еще обозначение

$$\mathbf{H} = -\operatorname{curl} \mathbf{G} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44')$$

Назовем $\mathbf{H}$ турбулизирующим вектором.

Имеем на основании (43)

$$\mathbf{H} = -\operatorname{curl} \mathbf{F} + \operatorname{curl} \frac{d\mathbf{V}}{dt}.$$

Вспоминая формулу (36) предыдущего параграфа, напишем

$$\mathbf{H} = -\operatorname{curl} \mathbf{F} + \operatorname{helm} \operatorname{curl} \mathbf{V}.$$

Другое выражение H получим, рассматривая правую часть формулы (44')

$$\mathbf{H} = -\operatorname{curl}(\omega \nabla p) = [\nabla p, \nabla \omega] \quad \text{[см. ниже формулу (*)]}.$$

Вывод условий динамической возможности сводится к последовательному исключению динамических элементов p и ω из уравнений гидромеханики. С этой целью перепишем уравнение гидромеханики в векторной форме так:

$$\nabla p = \frac{\mathbf{G}}{\omega},$$

и возьмем curl от обеих его частей; так как $\operatorname{curl} \nabla p = 0$, то получаем

$$\operatorname{curl} \frac{\mathbf{G}}{\omega} = 0,$$

или, пользуясь формулой векторного анализа

$$\operatorname{curl}(\psi \mathbf{a}) = \psi \operatorname{curl} \mathbf{a} + [\nabla \psi, \mathbf{a}], \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

где ψ — скаляр, и имея в виду, что у нас $\nabla \psi = \nabla \frac{1}{\omega} = -\frac{1}{\omega^2} \nabla \omega$,

$$\frac{1}{\omega} \operatorname{curl} \mathbf{G} - \frac{1}{\omega^2} [\nabla \omega, \mathbf{G}] = 0.$$

Вспоминая значение вектора $\mathbf{H}$, напишем

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{\omega} [\nabla \omega, \mathbf{G}] = [\mathbf{G}, \nabla \lg \omega].$$

Положим теперь

$$\lg \omega = \varphi.$$

Тогда результат исключения p представим в окончательной форме так:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{G}, \nabla\varphi]. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (45)$$

Это условие является не только необходимым, но и достаточным для возможности определения p из уравнений гидродинамики, так как из него вытекает, что $\operatorname{curl} \frac{\mathbf{G}}{\omega} = 0$, а тогда, как известно, можно найти такую функцию $p\ (x, y, z, t)$, чтобы

$$\nabla p = \frac{\mathbf{G}}{\omega}.$$

Для определения φ имеем теперь уравнение (45) и уравнение неразрывности, которое можно переписать так:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (V, \nabla\varphi) = \operatorname{div} \mathbf{V}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

Уравнение (45) показывает, что вектор $\mathbf{H}$ перпендикулярен к вектору $\mathbf{G}$, следовательно скалярное произведение этих векторов равно нулю:

$$(\mathbf{H}, \mathbf{G}) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

или, иначе, $(\operatorname{curl} \mathbf{G}, \mathbf{G}) = 0$.

Чтобы получить уравнение, из которого удобно было бы найти φ, преобразуем уравнение (45), умножая обе его части векториально на $\mathbf{V}$:

$$[\mathbf{V}, \mathbf{H}] = [\mathbf{V}, [\mathbf{G}, \nabla\varphi]].$$

Применяя формулу векторного исчисления [1])

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}\,(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}\,(\mathbf{ab}),$$

будем иметь

$$[\mathbf{V}, \mathbf{H}] = \mathbf{G}\,(\mathbf{V}, \nabla\varphi) - \nabla\varphi\,(\mathbf{V}, \mathbf{G}).$$

Уравнение неразрывности (46) позволяет исключить $(\mathbf{V}, \nabla\varphi)$ из полученного нами равенства

$$(\mathbf{V}, \nabla\varphi) = \operatorname{div} \mathbf{V} - \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

что дает

$$[\mathbf{V}, \mathbf{H}] = \mathbf{G} \operatorname{div} \mathbf{V} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\mathbf{G} - \nabla\varphi \cdot (\mathbf{V}, \mathbf{G}) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

Множитель при $\nabla\varphi$ А. А. Фридман обозначает через μ:

$$\mu = (\mathbf{V}, \mathbf{G})$$

и называет мерой диссипативности.

Мы ограничимся рассмотрением случая общего движения, когда μ отлично от нуля. Тогда уравнение (48) можно решить относительно $\nabla\varphi$:

$$\nabla\varphi = \frac{[\mathbf{H}, \mathbf{V}] + \mathbf{G} \operatorname{div} \mathbf{V}}{\mu} - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,\frac{\mathbf{G}}{\mu}.$$

Для определения φ мы получаем, таким образом, три скалярных уравнения, заключающихся в последнем векториальном уравнении. Поэтому между векторами

$$\frac{[\mathbf{H}, \mathbf{V}] + \mathbf{G} \operatorname{div} \mathbf{V}}{\mu} = \alpha \quad \text{и} \quad -\frac{\mathbf{G}}{\mu} = \beta$$

---

[1]) См. [Л. 3], стр. 55.

должна существовать зависимость. Последнее уравнение перепишем в новых обозначениях:

$$\nabla\varphi = \alpha + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

и возьмем curl от обеих его частей. Так как curl $\nabla\varphi = 0$, то будем иметь

$$\operatorname{curl}\left(\alpha + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = 0.$$

Curl суммы заменяем суммой вихрей, затем применяем формулу, которую мы уже употребляли для curl $\psi\mathbf{a}$; получим

$$\operatorname{curl}\mathbf{a} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\operatorname{curl}\beta + \left[\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi, \beta\right] = 0.$$

Но из уравнения (49)

$$\frac{\partial\nabla\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\beta}{\partial t} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\beta,$$

следовательно

$$\left[\frac{\partial\nabla\varphi}{\partial t}, \beta\right] = \left[\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \beta\right] + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\left[\frac{\partial\beta}{\partial t}, \beta\right],$$

поэтому будем иметь

$$\operatorname{curl}\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\left\{\operatorname{curl}\beta + \left[\frac{\partial\beta}{\partial t}, \beta\right]\right\} + \left[\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \beta\right] = 0;$$

наконец, вводя обозначения

$$\gamma = \operatorname{curl}\alpha + \left[\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \beta\right].$$

$$\delta = \operatorname{curl}\beta + \left[\frac{\partial\beta}{\partial t}, \beta\right],$$

напишем

$$\gamma + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\delta = 0.$$

Это уравнение указывает на параллельность векторов γ и δ, т. е. на то, что

$$[\gamma, \delta] = 0.$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда $\delta \neq 0$ (общее нормальное движение). В этом случае из последнего уравнения можно определить одну и только одну скалярную величину λ так, что

$$\gamma + \lambda\delta = 0.$$

С помощью найденного λ и векторов α и β составим вектор σ

$$\sigma = \alpha + \lambda\beta;$$

λ у нас будет служить для определения $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, σ—для определения $\nabla\varphi$.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \lambda;$$

$$\nabla\varphi = \sigma.$$

Из этих четырех скалярных уравнений мы сможем определить φ, если будут выполнены такие условия:

$$\operatorname{curl}\nabla\varphi = \operatorname{curl}\sigma = 0$$

и

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \frac{\partial\nabla\varphi}{\partial t} = \nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \nabla\lambda,$$

т. е. если

$$\operatorname{curl} \sigma = 0 \text{ и } \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \nabla \lambda.$$

Собирая выведенные формулы, можем высказать такую теорему:

Необходимыми и достаточными условиями динамической возможности уравнений гидромеханики сжимаемой жидкости в случае общего нормального движения являются три группы условий:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & (\mathbf{H}, \mathbf{G}) = 0, \\ \text{(II)} & [\gamma, \delta] = 0; \\ \text{(III)} & \operatorname{curl} \sigma = 0, \ \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \nabla \lambda. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (50)$$

Достаточность этих условий проверяется таким образом: из уравнений (III) возможно определить функцию $\varphi(x, y, z, t)$, удовлетворяющую условиям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lambda, \ \nabla \varphi = \alpha + \lambda \beta.$$

Следовательно, φ будет удовлетворять уравнениям (49), а тогда, так как $\mu \neq 0$, будет выполняться условие (48), и возможно будет определять функцию p, удовлетворяющую уравнению

$$\nabla p = \frac{\mathbf{G}}{\omega}, \text{ где } \omega = e^{\varphi}.$$

Условия динамической возможности позволяют решать задачу, имеющую большое значение для построения моделей атмосферных движений. А именно, задают поле скоростей, причем в этом задании остается некоторый произвол. Затем составляют уравнения I, II, III, для чего последовательно определяют динамический градиент $\mathbf{G}$ (внешние силы должны быть заданы) и турбулизирующий вектор $\mathbf{H}$ и проверяют условие (I); если оно не выполняется тождественно, то дает уравнение для скоростей. Затем вычисляется μ, составляются векторы α, β, по ним—векторы γ и δ и проверяются условия (II). Они или выполняются тождественно, или налагают новые ограничения на скорости. Затем находят λ из условия

$$-\frac{\gamma_x}{\delta_x} = -\frac{\gamma_y}{\delta_y} = -\frac{\gamma_z}{\delta_z} = \lambda,$$

строят вектор

$$\sigma = \alpha + \lambda \beta,$$

проверяют условия (III).

После этого определяют $\varphi = \lg \omega$, а следовательно, и ω из уравнений

$$\nabla \varphi = \sigma, \ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lambda,$$

откуда получаем для ω:

$$\omega = Ce^{\int \sigma_x \, dx + \sigma_y \, dy + \sigma_z \, dz + \lambda \, dt}$$

где σ_x, σ_y, σ_z — составляющие вектора σ, C — произвольная постоянная.

p определим из векторного уравнения

$$\nabla p = \frac{\mathbf{G}}{\omega},$$

откуда

$$p = \int \frac{G_x \, dx + G_z \, dy + G_z \, dz}{\omega} = \frac{1}{C} \int e^{-\int \sigma_x dx + \sigma_y \, dy + \sigma_z + dz + \lambda dt} (G_x \, dx + G_y \, dy + G_z \, dz) + p_0(t),$$

где $p_0(t)$—произвольная функция времени.

Рассмотрим в качестве примера применения изложенного метода случай прямолинейного движения со скоростью, зависящей только от высоты и времени:

$$u=0, \quad v=v(z, t), \quad w=0.$$

Единственной внешней силой пусть у нас будет сила тяжести. Вычислим составляющие динамического градиента

$$\mathbf{G}=\mathbf{F}-\frac{d\mathbf{V}}{dt}: G_x=0, \; G_y=\frac{dV}{dt}, \quad G_z=0.$$

Далее, найдем турбулизирующий вектор $\mathbf{H}=-\operatorname{curl}\mathbf{G}$:

$$H_x=-\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t}, \; H_y=H_z=0.$$

Условие (I): $(\mathbf{H}, \mathbf{G})=0$ выполняется тождественно.

Перейдем к составлению векторов

$$\alpha=\frac{[\mathbf{H}, \mathbf{V}]+\mathbf{G}\operatorname{div}\mathbf{V}}{\mu} \text{ и } \beta=-\frac{\mathbf{G}}{\mu}.$$

Так как

$$\mu=(\mathbf{V}, \mathbf{G})=u\,G_x+v\,G_y+w\,G_z=-v\frac{\partial v}{\partial t},$$

$\Theta=\operatorname{div}\mathbf{V}=0$, то имеем

$$\alpha_x=0, \quad \alpha_y=0, \quad \alpha_z=\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t}\cdot\frac{1}{\frac{\partial v}{\partial t}}, \quad \beta_x=0, \quad \beta_y=-\frac{1}{v}, \quad \beta_z=-\frac{g}{v\frac{\partial v}{dt}}$$

Далее, построим векторы γ и δ:

$$\gamma=\operatorname{curl}\alpha+\left[\frac{\partial\alpha}{\partial t}, \beta\right], \quad \delta=\operatorname{curl}\beta+\left[\frac{\partial\beta}{\partial t}, \beta\right].$$

Будем иметь

$$\gamma_x=\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t}}{\frac{\partial v}{\partial t}}\right)=\frac{\frac{\partial^3 v}{\partial z \partial t^2}\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}{v\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2}, \; \gamma_y=\gamma_z=0,$$

$$\delta_x=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{v}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{v}\right)\frac{g}{v\frac{\partial v}{\partial t}}-\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{g}{v\frac{\partial v}{\partial t}}\right)=-\frac{\frac{\partial v}{\partial z}}{v^2}+g\frac{\frac{\partial^2 v}{\partial t}}{v^2\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2}.$$

Очевидно, что условие

$$[\gamma, \delta]=0$$

выполняется тождественно. Далее

$$\lambda=-\frac{\gamma_x}{\delta_x}=\frac{\left(\frac{\partial^3 v}{\partial z \partial t^2}\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)v}{\frac{\partial v}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2-g\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t}}.$$

Если составить вектор $\sigma=\alpha+\lambda\beta$, то

$$\sigma_x=0, \quad \sigma_y=-\frac{\lambda}{v}, \quad \sigma_z=\frac{v\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t}-g\lambda}{v\frac{\partial v}{\partial t}}.$$

Условие $\operatorname{curl}\sigma=0$ дает

$$\operatorname{curl}_x\sigma=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\lambda}{v}\right)=0, \; \operatorname{curl}_y\sigma=\operatorname{curl}_z\sigma=0.$$

Из первого уравнения получаем

$$\frac{\lambda}{v} = \beta,$$

где β—произвольная функция t.

Далее условие $\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \nabla\lambda$ сводится к уравнениям

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\lambda}{v}\right) = \frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_z}{\partial t} = \frac{\partial\lambda}{\partial z}.$$

Второе уравнение указывает, что $\frac{\lambda}{v}$ не зависит от t и следовательно есть постоянная:

$$\frac{\lambda}{v} = \beta = \text{const},$$

что в раскрытом виде дает такое уравнение

$$\frac{\partial^3 v}{\partial z \partial t^2}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t}\frac{\partial^2 v}{t\partial^2} = \beta\left[\frac{\partial v}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 - g\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] \quad \ldots\ldots (51)$$

Условие $\frac{\partial\sigma_z}{\partial t} = \frac{\partial\lambda}{\partial z}$ выполняется тождественно.

Перепишем выражения для σ и λ так:

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = -\beta, \quad \sigma_z = \frac{\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} - g\beta}{\frac{\partial v}{\partial t}}, \quad \lambda = v\beta.$$

Дифференциальное уравнение (51) имеет бесчисленное множество решений. Положим, например, что v зависит от высоты линейным образом:

$$v = m(t)\,z + n(t),$$

где m и n—функции t. Беря производные от v и подставляя их в уравнение (51), получим

$$m''(n'z + n') - m'(m''z + n'') = \beta\,[m(m'z + n')^2 - g(m''z + n'')].$$

Это уравнение должно выполняться тождественно относительно z, а потому должны равняться коэфициенты левой и правой части при одинаковых степенях z и свободный член.

При z^2 имеем: $\beta\, mm'^2 = 0$, откуда

или 1) $\beta = 0$ или 2) $m' = 0$ или 3) $m = 0$.

Коэфициент при z равен

$$2\beta m m' n' - gm'' = 0.$$

В случае первом имеем $m'' = 0$, т. е. $m = C_1 t + C_2$, в случае втором и третьем соотношение выполняется тождественно. Далее, свободный член равен

$$m''n' - m'n'' - \beta m n'^2 - \beta g n'' = 0.$$

В случае первом имеем $m'n'' = 0$, откуда $n'' = 0$, т. е.

$$n = D_1 t + D_2,$$

и следовательно

$$v = (C_1 t + C_2)\,z + D_1 t + D_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (52)$$

В случае втором получаем: $mn'^2 + gn'' = 0$, причем

$$m = \text{const}.$$

Поэтому

$$-\frac{n''}{n'^2}=\frac{m}{g},\quad n=\frac{g}{m}\ln(mt+k)+C\ (C \text{ и } k\text{—произвольные постоянные}),$$

и окончательно

$$v=mz+\frac{g}{m}\ln(mt+k)+C. \qquad (53)$$

Наконец, если в случае третьем $m=0$, то имеем, что $n''=0$, т. е. $n=D_1t+D_2$ — это частный случай первого случая, при $C_1=C_2=0$. Итак, видим, что возможны лишь два вида движения со скоростью $v=m\ (t)\,z+n\ (t)$:

$$v=(C_1t+C_2)\ z+D_1t+D_2, \qquad (54)$$

и

$$v=mz+\frac{g}{m}\ln(mt+k)+C, \qquad (55)$$

где C_1, C_2, C, D_1, D_2. m, k—постоянные.

Для случая первого, когда $\beta=0$

$$\sigma_x=\sigma_y=0,\quad \sigma_z=\frac{C_1}{C_1z+D_1};\ \lambda=0.$$

Следовательно

$$\omega=\omega_0\ e^{\int\sigma_x\,dx+\sigma_y\,dy+\sigma_z\,dz+\lambda\,dt}=\omega_0 e^{\int\frac{C_1dz}{C_1z+D_1}}=\omega_0\,(C_1z+D_1)$$

$$p=\int\frac{G_x\,dx+G_y\,dy+G_z\,dz}{\omega}=-\int\frac{(C_1z+D_1)\,dy+gdz}{\omega_0\,(C_1z+D_1)}=$$

$$=-\frac{y}{\omega_0}-\frac{g}{\omega_0C_1}\ln(C_1z+D_1)+p_0\,(t).$$

В случае (53)

$$\sigma_x=0,\quad \sigma_y=-\beta,\quad \sigma_z=-\beta\ (mt+k),\quad \lambda=\beta\left[mz+\frac{g}{m}\ln(mt+k)+C\right];$$

$$\omega=\omega_0\ e^{\beta\,(C_1t+kz-y+mtz)}\,(mt+k)^{\frac{\beta}{m}(k+gt)};$$

$$p=-\omega_0\int e^{-\beta\,(C_1t+kz-y+mtz)}\,(mt+k)^{-\frac{\lambda}{m}(k+gt)}\left(\frac{gdy}{mt+k}+gdz\right).$$

§ 6. О теоретических моделях атмосферных движений. Адиабатическое движение с образованием вихрей. В этом параграфе мы рассмотрим некоторые случаи движений, представляющих большой интерес для динамической метеорологии, так как эти движения представляют аналогии с атмосферными движениями и являются стилизацией атмосферных движений, или, как мы будем говорить — моделями атмосферных движений. Построение этих моделей позволяет иногда разрешать некоторые принципиальные вопросы, примером чего может служить адиабатическое движение, рассмотренное Н. Е. Кочиным [Л. 4].

Теорема Бьеркнеса (см. § 4 этой главы) говорит, что в общем случае движения сжимаемой жидкости, под действием консервативных сил, если только жидкость бароклиническая, т. е. давление зависит не только от плотности, но и от температуры, возможно возникновение и разрушение вихрей. Можно поставить вопрос о том, не является ли это обстоятельство, т. е. отсутствие сохраняемости вихревых линий и интенсивностей вихревых трубок следствием наличия притока энергии, другими словами, будет ли иметь место теорема Бьеркнеса при отсутствии притока энергии, т. е. в случае адиабатического движения. Оказывается, что имеет место, т. е. что можно указать пример адиабатического движения, для которого условие сохраняемости вихревых линий не выполняется.

Именно такой пример дает движение, в котором частицы вращаются вокруг оси z в горизонтальных плоскостях, с угловой скоростью $\lambda(z)$, зависящей от высоты

$$u = -\lambda(z)\,y, \qquad v = \lambda(z)\,x, \qquad w = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

Мы видели, что для несжимаемой жидкости такое движение является динамически возможным лишь при $\lambda = \text{const}$ (см. § 5 этой главы). Покажем, что в сжимаемой жидкости, при наличии силы тяжести, это движение динамически возможно.

Прежде всего отметим, что движение „несжимаемое“ (см. § 1 этой главы), т. е. для него

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Поэтому уравнение неразрывности

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega \operatorname{div} \mathbf{V}$$

даст

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} u + \frac{\partial \omega}{\partial y} v + \frac{\partial \omega}{\partial z} w = 0.$$

Составим теперь динамический градиент $\mathbf{G} = \mathbf{F} - \frac{d\mathbf{V}}{dt}$ и турбулизирующий вектор $\mathbf{H} = -\operatorname{curl} \mathbf{G}$. Их составляющие будут

$$G_x = \lambda^2(z)\,x, \quad G_y = \lambda^2(z)\,y, \quad G_z = -g,$$
$$H_x = 2\lambda(z)\,\lambda'(z)\,y, \quad H_y = -2\lambda(z)\,\lambda'(z)\,x, \quad H_z = 0.$$

Рассмотрим условия динамической возможности (см. предыдущий параграф) в форме, содержащей $\varphi = \lg \omega$

$$[\mathbf{G}, \nabla\varphi] = \mathbf{H}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \operatorname{div} \mathbf{V}.$$

В раскрытом виде они дают четыре уравнения:

$$\lambda^2(z)\,y \frac{\partial \varphi}{\partial z} + g \frac{\partial \varphi}{\partial y} - 2\lambda(z)\,\lambda'(z)\,y = 0;$$
$$-g \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \lambda^2(z)\,x \frac{\partial \varphi}{\partial z} + 2\lambda(z)\,\lambda'(z)\,x = 0;$$
$$\lambda^2(z)\,x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \lambda^2(z)\,y \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0;$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \lambda(z)\,y \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda(z)\,x \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$

Если первое уравнение умножить на $\lambda^2(z)\,x$, второе на $\lambda^2(z)\,y$ и сложить, то получим третье. Поэтому имеем всего три уравнения.

$$g \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda^2(z)\,x \frac{\partial \varphi}{\partial z} - 2\lambda(z)\,\lambda'(z)\,x = 0,$$
$$g \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \lambda^2(z)\,y \frac{\partial \varphi}{\partial z} - 2\lambda(z)\,\lambda'(z)\,y = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Последнее из уравнений показывает, что φ не зависит от времени. Первые два уравнения оказываются совместными, так как скобки Пуассона для них тождественно равны нулю. Следовательно дальнейших условий динамической возможности составлять не нужно — движение динамически возможно. Решая полученную для φ систему уравнений, найдем

$$\varphi = 2 \lg \lambda(z) + L_1(\sigma),$$

где L—произвольная функция аргумента σ, при чем

$$\sigma = \frac{x^2+y^2}{2} - g\int\frac{dz}{\lambda^2(z)}.$$

Вспоминая, что $\varphi = \lg\omega$, найдем

$$\omega = \lambda^2(z)\,M(\sigma), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

где M — произвольная функция σ.

Давление определится по формуле

$$p = \int\frac{G_x\,dx + G_y\,dy + G_z\,dz}{\omega} = \int\frac{x\,dx + y\,dy - \frac{g}{\lambda}\,dz}{M(\sigma)} = \int\frac{d\sigma}{M(\sigma)} =$$
$$= N(\sigma) + p_0(t). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

Выберем теперь из движений рассматриваемого вида адиабатическое движение, т. е. такое, для которого приток тепла ε равен нулю (см. гл. III). Мы имели для адиабатического процесса

$$c_v\,\omega\frac{dp}{dt} + c_p\,p\frac{d\omega}{dt} = 0$$

Так как у нас $\frac{d\omega}{dt} = 0$, то из уравнения притока энергии имеем

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x}u + \frac{\partial p}{\partial y}v + \frac{\partial p}{\partial t}w = 0.$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{\partial p}{\partial x}u + \frac{\partial p}{\partial y}v + \frac{\partial p}{\partial t}w \equiv 0,$$

поэтому остается

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0,$$

и следовательно

$$p = N(\sigma) + p_0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

где p_0 — постоянная.

Итак имеем адиабатическое движение со скоростями

$$u = -\lambda(z)\,y, \quad v = \lambda(z)\,x, \quad w = 0,$$

с давлением и удельным объемом, определяемыми соответственно формулами (59) и (58). Покажем, что условие сохраняемости вихревых линий

$$[\mathbf{H}, \operatorname{curl}\mathbf{V}] = 0$$

не выполнено. Действительно составляющие вихря у нас равны

$$\xi = -\lambda'(z)\,x, \quad \eta = -\lambda'(z)\,y, \quad \zeta = 2\lambda(z).$$

Величины H_x, H_y, H_z мы имели раньше. Так как составляющие векторного произведения $[\mathbf{H}, \operatorname{curl}\mathbf{V}]$ равны

$$[\mathbf{H}, \operatorname{curl}\mathbf{V}]_x = -4\lambda^2\lambda'\,x,$$
$$[\mathbf{H}, \operatorname{curl}\mathbf{V}]_y = 4\lambda^2\lambda' y,$$
$$[\mathbf{H}, \operatorname{curl}\mathbf{V}]_z = -2\lambda\lambda'^2(x^2+y^2),$$

то видим, что они обращаются в нуль лишь при $\lambda = \text{const}$, в общем же случае отличны от нуля. Нетрудно убедиться в том, что условие сохраняемости интенсивности вихревых трубок выполняется:

$$(\mathbf{H}, \operatorname{curl}\mathbf{V}) = 0,$$

следовательно интенсивность вихря отдельной частицы остается неизменной.

Рассмотрим подробнее вихревые линии нашего движения. Дифференциальное уравнение вихревых линий

$$\frac{dx}{\xi}=\frac{dy}{\eta}=\frac{dz}{\zeta}$$

дает

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=-\frac{\lambda'(z)\,dz}{2\lambda(z)},$$

откуда после интегрирования будем иметь

$$y=C_1x,\quad y=\frac{C_2}{\sqrt{\lambda(z)}}.$$

Видим, что вихревые линии суть плоские кривые, расположенные в вертикальных плоскостях $y=C_1x$, проходящих через ось z. Если в некоторый момент времени t рассмотрим частицы, находящиеся в плоскости yoz, на вихревой линии ABC..., то в последующий момент времени t_1 эти частицы расположатся на жидкой линии $A_1\,B_1\,C_1$, причем эта линия уже не будет лежать в вертикальной плоскости, так как частицы $A\ B\ C$... вращаются с различными угловыми скоростями $\lambda\ (z)$, и значит не будет вихревой линией. Вихревой же линией, проходящей через точку A_1, будет линия $A_1\,D$, лежащая в плоскости, проходящей через ось z, и состоящая из других жидких частиц, не входивших (кроме A_1) в состав линии ABC... Точно так же через точки B_1, C_1... будут проходить новые вихревые линии. Можно построить около линии ABC бесконечно тонкую вихревую трубку, затем около каждой точки: A_1, B_1, C_1,... построить вихревые трубки на тех площадках, в которые переходят площадки, находившиеся в соответствующих точках A, B, C,... первоначальной вихревой трубки (рис. 102).

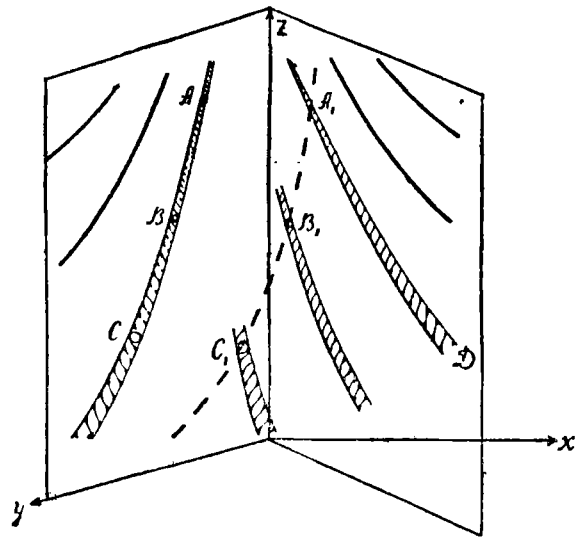

Рис. 102.

Условие (**H**, curl **V**) $=0$ означает, что интенсивности этих вихревых трубок равны интенсивности трубки ABC.

Таким образом приведенный пример представляет адиабатическое движение сжимаемой жидкости, в котором происходит образование и разрушение вихрей.

§ 7. Теоретическая модель перемещающегося циклона. Применяя метод условий динамической возможности движения, Н. Е. Кочин рассмотрел движение типа вращающейся жидкости, при котором в каждой горизонтальной плоскости имеем вращение около перемещающегося центра [Л. 5]. Пусть координаты перемещающегося центра вращения будут $a\ (z, t)$, $b\ (z, t)$, z, угловая скорость вращения — $\zeta\ (z)$, тогда скорость частицы будет слагаться из скорости перемещения центра и скорости вращения вокруг рассматриваемого центра. Поэтому

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial a}{\partial t} - \zeta(y-b), \\ v &= \frac{\partial b}{\partial t} + \zeta(x-a), \\ w &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (60)$$

Здесь a и b—функции z и t, ζ — функция одного z.

Н. Е. Кочин показал невозможность движения при ζ зависящем от времени. Мы не останавливаемся на этом доказательстве вследствие его громоздкости, а сразу принимаем $\zeta = \zeta(z)$.

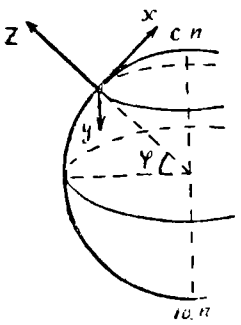

Рис. 103.

Будем считать, что на жидкость действует сила тяжести (в которую включена центробежная сила вращения земли), и инерционная сила вращения земли, равная

$$-2\,[\Omega, \mathbf{V}],$$

где Ω — вектор угловой скорости вращения земли, направленный параллельно земной оси от северного полюса к южному (в левой системе координат). Рассматривая движение на широте φ (положительной — для северного, отрицательной — для южного полушария) будем считать ось z направленной вверх по вертикали, ось x—к северу по меридиану, ось y — к востоку по параллели (рис. 103). Тогда составляющие силы $\mathbf{F}$, действующей на движущиеся частицы, будут

$$F_x = 2\lambda_3 v, \quad F_y = -2\lambda_3 u, \quad F_z = -g - 2\lambda_1 v;$$

λ — угловая скорость вращения земли, $\lambda_1 = -\lambda\cos\varphi$, $\lambda_3 = -\lambda\sin\varphi$.

Задача сводится к определению функций a, b, ζ, удовлетворяющих условиям динамической возможности движения.

Обозначив, для краткости

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} + \zeta b &= \xi(z, t), \\ \frac{\partial b}{\partial t} - \zeta a &= \eta(z, t), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (61)$$

перепишем уравнения (60) так:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\zeta y + \xi, \\ v &= \zeta x + \eta, \\ w &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (62)$$

Выпишем теперь составляющие динамического градиента $\mathbf{G} = \mathbf{F} - \frac{d\mathbf{V}}{dt}$ и турбулизирующего вектора $\mathbf{H} = -\operatorname{curl}\mathbf{G}$

$$G_x = \psi x + A, \quad G_y = \psi y + B, \quad G_z = -2\lambda_1\zeta x + C,$$

$$H_x = \frac{\partial\psi}{\partial z} y + \frac{\partial B}{\partial z}, \quad H_y = -\frac{\partial\psi}{\partial z} x - \frac{\partial A}{\partial z} - 2\lambda_1\zeta, \quad H_z = 0.$$

Здесь

$$\psi = \zeta(\zeta + 2\lambda_3), \quad A = (\zeta + 2\lambda_3)\eta - \frac{\partial\xi}{\partial t},$$

$$B = -(\zeta + 2\lambda_3)\xi - \frac{\partial\eta}{\partial t}, \quad C = -g - 2\lambda_1\eta.$$

Условие динамической возможности

$$(\mathbf{H}, \mathbf{G}) = 0$$

дает

$$(\psi x+A)\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}y+\frac{\partial B}{\partial z}\right)+(\psi y+B)\left(-\frac{\partial\psi}{\partial z}x-\frac{\partial A}{\partial z}+2\lambda_1\zeta\right)=0.$$

Так как это условие должно быть выполнено тождественно относительно x и y, то должны быть равны нулю коэфициенты при xy, x, y и свободный член. При xy имеем тождественный нуль, другие члены будут

$$\psi\frac{\partial B}{\partial z}-B\frac{\partial\psi}{\partial z}=0,$$

$$A\frac{\partial\psi}{\partial z}-\psi\frac{\partial A}{\partial z}-2\lambda_1\zeta\psi=0,$$

$$A\frac{\partial B}{\partial z}-B\frac{\partial A}{\partial z}-2\lambda_1\zeta B=0.$$

Первое из этих уравнений дает после интегрирования

$$B=-\psi q_2(t),$$

где q_2 — произвольная функция времени, третье уравнение сводится ко второму и дает после интегрирования

$$A=-\psi q_1(t)-2\lambda_1\psi\int_0^z\frac{dz}{\zeta+2\lambda_3};$$

q_1 — произвольная функция t.

Обозначая $\int_0^z\frac{dz}{\zeta+2\lambda_3}=X(z)$ и вспоминая выражения для A и B, получим

$$\left.\begin{aligned}&(\zeta+2\lambda_3)\,\xi+\frac{\partial\eta}{\partial t}=\psi q_2(t),\\&(\zeta+2\lambda_3)\,\eta-\frac{\partial\xi}{\partial t}=-2\lambda_1\psi X(z)-\psi q_1 t).\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(63)$$

Остальные условия динамической возможности: II и III, выполняются тождественно, что нетрудно проверить. Величина $\mu=(\mathbf{V},\mathbf{G})$ оказывается отличной от нуля, так что имеем дело с общим нормальным движением.

Подставляя в уравнение (4) вместо ξ и η их значения по формулам (3), получим для определения $a(z,t)$ и $b(z,t)$ систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 b}{\partial t^2}+2\lambda_3\frac{\partial a}{\partial t}+\psi b=\psi q_2(t),\\&\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}-2\lambda_3\frac{\partial b}{\partial t}+\psi a=\psi q_1(t),+2\lambda_1\psi X(z).\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(64)$$

Общий интеграл этой системы имеет вид

$$\left.\begin{aligned}a(z,t)&=\alpha(z,t)+A_1\cos\zeta t+B_1\sin\zeta t+A_2\cos(\zeta+2\lambda_3)+B_2\sin(\zeta+2\lambda_3)t,\\b(z,t)&=\beta(z,t)+A_1\sin\zeta t-B_1\cos\zeta t-A_2\sin(\zeta+2\lambda_3)t+B_2\cos(\zeta+2\lambda_3)t:\end{aligned}\right\}\quad.(65)$$

$\alpha(z,t)$, $\beta(z,t)$ являются частными решениями, которые можно найти путем квадратур, когда известен общий интеграл однородной системы. A_1, B_1, A_2, B_2—произвольные фукции z.

Во вращательном движении рассматриваемого типа любая частица жидкости может быть принята за центр вращения. Если принять за центр вращения, лежащий в плоскости $z=\text{const}$ частицу, описывающую траекторию

$$\left.\begin{aligned}a&=\alpha(z,t)+A_2\cos(\zeta+2\lambda_3)t+B_2\sin(\zeta+2\lambda_3)t,\\b&=\beta(z,t)-A_2\sin(\zeta+2\lambda_3)t+B_2\cos(\zeta+2\lambda_3)t,\end{aligned}\right\},\quad\ldots\ldots(66)$$

то формулы (60) для u, v, w примут вид:

$$\left.\begin{aligned} u &= -\zeta y + \frac{\partial\alpha}{\partial t} + \zeta\beta - 2(\zeta+2\lambda_3)A_2\sin(\zeta+2\lambda_3)t + 2(\zeta+\lambda_3)B_2\cos(\zeta+2\lambda_3)t, \\ v &= \zeta x + \frac{\partial\beta}{\partial t} - \zeta\alpha - 2(\zeta+\lambda_3)A_2\cos(\zeta+2\lambda_3)t - 2(\zeta+\lambda_3)B_2\sin(\zeta+2\lambda_3)t, \\ w &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (67)$$

Мы ограничимся рассмотрением случая, когда не имеют места одновременные равенства

$$q_1 = \text{const},\ q_2 = \text{const},\ A_2 = B_2 = 0$$

(здесь получается стационарный циклон или антициклон).
Тогда для определения удельного объема вычисляем σ и λ, для чего предварительно находим векторы α и γ. Оказывается, что

$$\alpha_x = \alpha_y = 0,\ \alpha_z = \frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial z},$$
$$\gamma_x = \gamma_y = \gamma_z = 0.$$

Так как $\lambda = -\frac{\gamma_x}{\delta_x}$, то имеем: $\lambda = 0$.

Далее,

$$\sigma_x = \alpha_x + \lambda\beta_x = 0,\ \sigma_y = \alpha_y + \lambda\beta_y = 0,\ \sigma_z = \alpha_z + \lambda\beta_z = \frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Условие $\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \nabla\lambda$ оказывается выполненным.

Находим теперь удельный объем

$$\omega = Ce^{\int \sigma_x dx + \sigma_y dy + \sigma_z dz + \lambda dt} = Ce^{\int \frac{d\psi}{\psi}} = C\psi = C\zeta(\zeta+2\lambda_3) \quad \ldots (68)$$

Видим, что удельный объем зависит только от высоты, так как ζ есть функция только z. Можно задать распределение ω с высотой в соответствии с действительными условиями, и определить затем $\zeta(z)$ из уравнения (9).

Давление находим по формуле

$$p = \int \frac{G_x dx + G_y dy + G_z dz}{\omega} + p_0(t) = \frac{1}{2C}\Big\{[x - 2\lambda_1 X(z) - q_1(t)]^2 +$$
$$+ [y - q_2(t)]^2 - 2\int_0^z \frac{g dz}{\psi} - 4\lambda_1 \int_0^z \frac{\eta + \zeta q_1 + 2\lambda\zeta X(z)}{\psi} dz + p_0(t), \quad \ldots (69)$$

($p_0(t)$ — произвольная функция t).

Перейдем теперь к подробному рассмотрению тех результатов, к которым нас привело применение условий динамической возможности.

Рассматриваемое движение является бароклиническим, так как изобарические и изостерические поверхности пересекаются. Действительно, изостерические поверхности $\omega = \text{const}$ суть горизонтальные плоскости $z = \text{const}$, так как ω зависит только от z; изобарические поверхности определяются уравнением (69), если в нем положить $p = \text{const}$. Эти поверхности похожи на параболоиды, причем они изменяются со временем. В пересечении последних с горизонтальными плоскостями получаем семейство изобар, представляющих концентрические окружности с центром в точке

$$x_0 = 2\lambda_1 X(z) + q_1(t), \quad y_0 = q_2(t).$$

Эту точку (по терминологии Shaw) называют динамическим центром на высоте z. Геометрическое место динамических центров называется динамической осью.

Если обозначить давление в динамическом центре через p_1, расстояние произвольной точки $M(x, y, z)$ до динамического центра (x_0, y_0, z), лежащего в одной горизонтальной плоскости с точкой M, через r

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2,$$

то формула (69) может быть переписана так:

$$p = \frac{r^2}{2C} + p_1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (70)$$

Из нее следует, что при $C > 0$ имеем минимум давления в динамическом центре (циклон), при $C < 0$ — максимум (антициклон).
Барометрический градиент

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{r}{C}$$

возрастает к периферии.

Из формулы для удельного объема

$$\omega = C\zeta\,(\zeta + 2\lambda_3)$$

теперь можем вывести следующие заключения: так как ω всегда больше 0, то для циклона ($C > 0$) должно быть:

$$\text{или } \zeta < 0 \text{ или } \zeta > -2\lambda_3 \ (\lambda_3 \text{ — отрицательно}).$$

В последнем случае вращение происходит по часовой стрелке, вследствие чего циклон называется аномальным, в случае же $\zeta < 0$ будем называть циклон нормальным.

Так как для антициклона $C < 0$, то ζ должно удовлетворять неравенствам

$$0 < \zeta < 2\lambda_3.$$

Н. Е. Кочин вычислил значения C в зависимости от ζ при $\omega = 800$; система единиц взята геофизическая: метр, тонна (масса), секунда, следовательно, удельный объем дается числом кубических метров в тонне массы воздуха, давление определяется в сантибарах, причем сантибар равен приблизительно 7,5 *мм* ртутного столба.

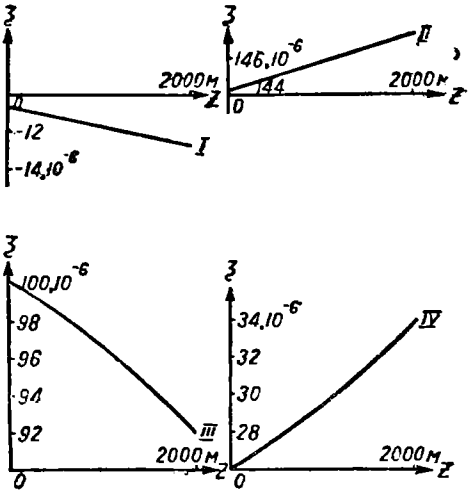

Рис. 104.

На рис. 104 представлена зависимость ζ от z, причем изменение ω с высотой принято такое, какое имеет место при адиабатическом равновесии атмосферы, т. е. когда температура падает на 1° при подъеме на 100 *м*. График I соответствует $C = 5.10^{11}$ и нормальному циклону, график II — $C = 3.10^{11}$, аномальный циклон; на графиках III и IV $C = -3.10^{11}$ (в антициклоне одному значению C отвечают два значения ζ).

Далее для выбранных четырех значений C построена динамическая ось, т. е. геометрическое место центров минимума или максимума давления для разных высот, согласно уравнениям

$$x_0 = 2\lambda_1 X(z) + q_1(t), \qquad y_0 = q_2(t).$$

Это плоская кривая, лежащая в плоскости меридиана, и сохраняющая свою форму, перемещаясь параллельно самой себе. Точку пересечения динамической оси с земной поверхностью называют **центром циклона** или **антициклона**.

Скорость перемещения центра имеет составляющие

$$C_x = \frac{dq_1(t)}{dt}, \quad C_y = \frac{dq_2(t)}{dt}.$$

На рис. 105 построены четыре оси, отвечающие выбранным значениям I—IV для C. Для нормального циклона динамическая ось отклонена к северу и немного вогнута к оси z (на чертеже эта вогнутость не может быть обнаружена), в случае аномального циклона ось отклонена к югу

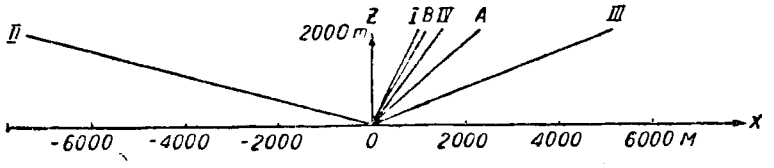

Рис. 105.

и обращена вогнутостью к оси z; в случае антициклона динамическая ось проходит или в секторе XOA или в секторе AOB, причем XOA—$^1/_2$ tg φ, $\angle XOB = \varphi$; в обоих случаях вогнутость оси обращена к OA.

Выбрав закон изменения $q_1(t)$ и $q_2(t)$, можем затем по формулам (7) найти траекторию центра вращения. Так, взяв прямолинейное равномерное движение центра циклона

$$q_1(t) = m_1 t, \quad q_2(t) = m_2(t),$$

найдем, по формулам (7), что траектория центра вращения—укороченная или удлиненная циклоида. На рис. 106 представлена траектория центра

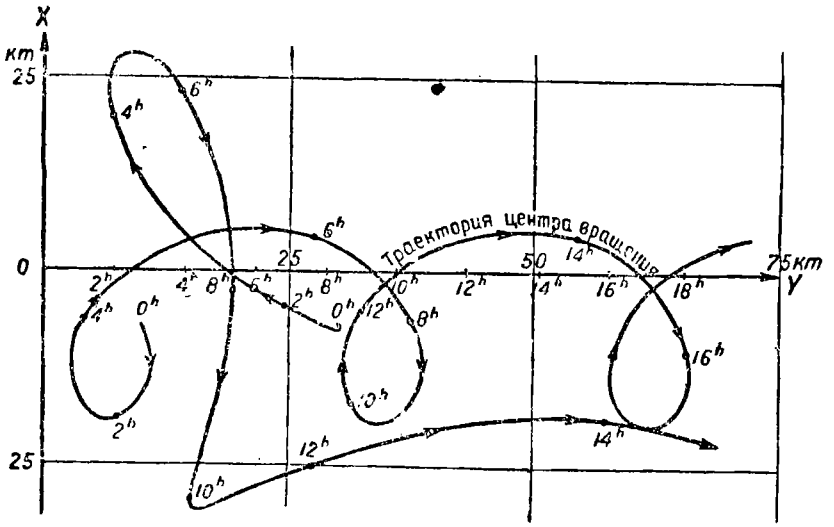

Рис. 106.

вращения и траектория частицы, отстоящей от центра вращения на 20 *км*, при $m_1 = 0$, $m_2 = 1$,

$$A_2(0) = 0, \quad B_2(0) = 10\,000, \quad \zeta(0) = -10^{-4}.$$

Исследования Shaw и Lempfert'a (см. [Л. 6] или [Л. 7]) показали, что траектории частиц воздуха обладают такими петлями и точками возврата, какие видны на рис. 106.

Далее, на рис. 107 имеем линии пересечения изобарических, изостерических и изотермических поверхностей с вертикальной плоско-

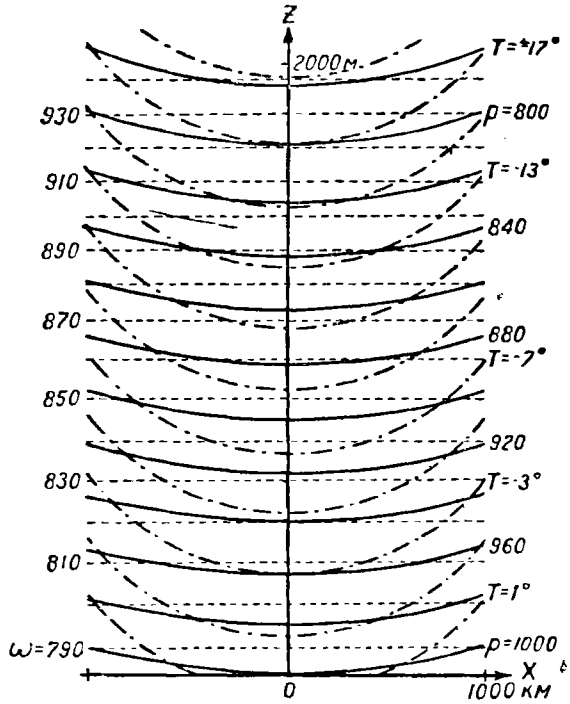

Рис. 107.

стью для частного циклона, в котором взято $c = 5.10^{11}$, $\varphi = 60°$ северной широты, что дает $\lambda_3 = -6{,}3.10^{-5}$. Распределение ω с высотой взято согласно табличке

Высота в *м*	Удельный объем	Угловая скорость
z	ω	ζ
0	784,0	$-1{,}14 \times 10^{-5}$
400	812,6	—1,18
800	842,7	—1,22
1200	874,5	—1,26
1600	908,0	—1,30
2000	943,0	—1,35

В этой же табличке приведены значения угловой скорости.

При этом для вычисления изобарических поверхностей было использовано уравнение

$$\frac{1}{2C}\left\{[x - q_1(t) - 2\lambda_1 X(z)]^2 + [y - q_2(t)]^2 - 2\int \frac{gdz}{\psi}\right\} + p_0 = \text{const.}$$

Это уравнение получается из уравнения (69), если в последнем пренебречь членом, содержащим множитель $-4\lambda_1$,

так как этот член мал по сравнению с $-2\int_0^z \frac{gdz}{\psi}$.

Для получения изотермических поверхностей нужно решить относительно T уравнение Клапейрона: $p\omega = RT$ и подставить значения ω и p. Тогда найдем

$$T = \frac{\psi}{2R}\left\{[x - q_1(t) - 2\lambda_1 X(z)]^2 + [y - q_2(t)]^2 - 2\int_0^z \frac{g\,dz}{\psi}\right\} + \frac{C\psi}{R} p_0.$$

На чертеже заштрихованы сечения изобаро-изостерических трубок.

Представляется интересным определить поверхность равного притока энергии. Для этого возьмем уравнение притока энергии

$$\varepsilon = \frac{c_v}{\omega}\frac{dT}{dt} + \frac{Ap}{\omega}\frac{d\omega}{dt} = \frac{c_v}{R}\frac{dp}{dt} + \frac{c_p}{\omega R}\frac{d\omega}{dt}.$$

Так как у нас $\frac{d\omega}{dt} = 0$, то остается взять производную T по времени. Получим

$$\varepsilon = \frac{c_v}{CR}\left\{\left[\xi - \zeta q_2 - \frac{dq_1}{dt}\right][x - 2\lambda_1 X(z) - q_1] + \right.$$

$$\left. + \left[\eta + \zeta q_1 + 2\lambda_1 \zeta X(z) - \frac{dq_2}{dt}\right](yq_2) - 2\lambda_1 \int_0^z \frac{\frac{\partial\eta}{\partial t} + \zeta\frac{dq_1}{dt}}{\psi} dz + C\frac{dp_0}{dt}\right\}.$$

Был взят частный случай

$$q_1 = 0, \quad q_2 = 5t, \quad A_2(z) = 25\,(z + 1000), \quad B_2(z) = 0,$$

вычислено ε в момент времени $t = 0$

$$\varepsilon = -\frac{c_v}{CR}\left[\frac{10\lambda_3}{\zeta + 2\lambda_2} + 50\,(\zeta + \lambda_3)(z + 1000)\right] y.$$

Поверхности

$$\varepsilon = \text{const}$$

являются гиперболическими цилиндрами с образующими, параллельными меридиану. Горизонтальная плоскость на высоте 228 *м* есть поверхность нулевого притока тепла; эта плоскость делит область циклона на четыре части: переднюю нижнюю и верхнюю заднюю—с отрицательным ε, переднюю верхнюю и заднюю нижнюю с $\varepsilon > 0$. В среднем для величины притока тепла имеем 10^{-6} больших калорий на кубический метр воздуха в единицу времени, что хорошо согласуется с атмосферной действительностью.

Рассмотрим теперь кинематическую картину движения. Точку с координатами $\alpha(z, t)$, $\beta(z, t)$, z назовем **вторичным центром вращения**. Из формулы (7) видно, что центр вращения описывает около вторичного центра окружность с угловой скоростью $-(\zeta + 2\lambda_3)$, все же прочие частицы вращаются около центра вращения с угловой скоростью ζ, так что траектории частиц имеют циклоидальный характер, что мы видели выше. Линии тока определяются уравнениями

$$\frac{dx}{-\zeta(y - y_c)} = \frac{dy}{\zeta(x - x_c)} = \frac{dz}{0},$$

где $x_c = -\frac{\eta}{\zeta}$, $y_c = \frac{\xi}{\zeta}$ — координаты мгновенного центра. Интегрирование уравнений линий тока дает окружности

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = \text{const}, \quad z = \text{const}.$$

Вычислим теперь составляющие вихря

$$\Omega_x = -\frac{d\zeta}{dz}x - \frac{\partial\eta}{\partial z} = -\zeta'(x - x_\Omega),$$
$$\Omega_y = -\frac{d\zeta}{dz}y + \frac{\partial\xi}{\partial z} = -\zeta'(y - y_\Omega),$$
$$\Omega_z = 2\zeta(z).$$

Точку с координатами

$$x_\Omega = -\frac{\frac{\partial \eta}{\partial z}}{\zeta'} \quad y_\Omega = -\frac{\frac{\partial \xi}{\partial z}}{\zeta'}$$

Н. Кочин называет центром распределения вихрей; в этой точке вихрь направлен по вертикали (так как в ней $\Omega_x = \Omega_y = 0$).

Остановимся, наконец, на введенном Н. Кочиным понятии о скорости распространения циклона, т. е. скорости движения центра циклона в массе жидкости. При изучении циклона считают, что рассматриваемое движение захватывает некоторую ограниченную часть жидкости— область циклона, и что на периферии этой области движение переходит в другие формы. Примем, что к области циклона принадлежат частицы, лежащие внутри круга радиуса ρ, с центром в динамическом центре. Во время движения область циклона не будет состоять из одних и тех же частиц: некоторые частицы будут отставать и выходить из области. Другие будут захватываться циклоном. Этот процесс может быть охарактеризован рассмотрением скорости распространения циклона, которая представляет собою разность между скоростью перемещения центра циклона в момент времени t и скоростью той частицы жидкости, которая в момент t совпадала с динамическим центром. Составляющие последней скорости получим, положив $x = x_0$, $y = y_0$ в формулах (62):

$$u_0 = -\zeta y_0 + \xi = -\zeta q_2 + \xi,$$
$$v_0 = \zeta x_0 + \eta = \zeta q_1 + 2\lambda_1 \zeta X(z) + \eta.$$

Составляющие скорости перемещения центра циклона, как мы видели выше, равны

$$C_x = \frac{dq_1}{dt}, \quad C_y = \frac{dq_2}{dt}.$$

Поэтому составляющие d_x, d_y скорости распространения циклона будут

$$d_y = C_x - u_0 = \frac{dq_1}{dt} + \zeta q_2 - \xi,$$
$$d_y = C_y - v_0 = \frac{dq_2}{dt} - \zeta q_1 - 2\lambda_1 \zeta X(z) - \eta.$$

Видим, что, вообще говоря, скорость распространения не равна нулю, следовательно, мы имеем дело не только с перемещением масс, но и с перемещением явления циклона.

§ 8. Изменение скорости ветра с высотой. В этом параграфе мы рассмотрим, на простейшем примере движения с прямолинейными изобарами, зависимость скорости ветра на различных высотах от барического градиента, т. е. изменения давления в горизонтальной плоскости. Эта задача была решена С. И. Троицким.[1] Выпишем первые два из уравнений (13), т. е. уравнений установившегося движения с прямолинейными изобарами:

$$\left.\begin{aligned} 2v\,\Omega_z &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ -2u\,\Omega_z &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

Здесь горизонтальная скорость ветра на любой высоте сравнительно просто зависит от горизонтального градиента давления на той же высоте. Поэтому, если известна зависимость давления от горизонтальных координат x и y, то будет известно и распределение горизонтальной скорости.

---

[1] П. Н. Тверской.—Курс геофизики, ч. II, изд. 2-е 1934 г., стр. 186.

В главе V была дана гипсометрическая формула, выражающая давление в функции температуры и выведенная в предположении, что температура меняется с высотой по линейному закону (первая из формул (25) гл. V):

$$p = p_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{g}{R\gamma}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (72)$$

где γ—температурный градиент, т. е. падение температуры в градусах на 100 метров высоты, g—ускорение силы тяжести, R—газовая постоянная. T и T_0 связаны таким образом:

$$T = T_0 - \gamma(z - z_0) = T - \gamma\Delta z. \quad \text{Здесь } \Delta z = z - z_0, \ldots\ldots \quad (73)$$

где z и z_0 высоты, которым соответствуют температуры T и T_0.

Перепишем уравнения (71), решая их относительно u и v (74)

$$u = -\frac{1}{2\rho\Omega_z}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad v = \frac{1}{2\rho\Omega_z}\frac{\partial p}{\partial x}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (74)$$

Если давление и составляющие скорости на высоте z_0 обозначить соответственно через p_0, u_0, v_0, то уравнения (74) для высоты z_0 будут:

$$u_0 = -\frac{1}{2\rho_0\Omega_z}\frac{\partial p_0}{\partial y}, \quad v_0 = \frac{1}{2\rho_0\Omega_z}\frac{\partial p}{\partial x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (75)$$

Вычитая почленно уравнения (75) и (74), получим:

$$\left.\begin{aligned} u - u_0 &= -\frac{1}{2\Omega_z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial y}\right), \\ v - v_0 &= \frac{1}{2\Omega_z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial x}\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (76)$$

Логарифмируя уравнение (72) и дифференцируя затем по x найдем:

$$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{p_0 p^0}\frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{g}{\gamma R}\left(\frac{1}{T}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{T_0}\frac{\partial T_0}{\partial x}\right).$$

Так как, согласно (73), $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T_0}{\partial x}$, а $\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} = \frac{\gamma\Delta\Delta 2}{TT_0}$, то нетрудно получить:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p}{p_0}\frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{pg\Delta z}{RTT_0}\frac{\partial T_0}{\partial x}.$$

Наконец, заменяя на основании уравнения Клапейрона RT на $\frac{p}{\rho}$, получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p}{p_0}\frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\rho g\Delta z}{T_0}\frac{\partial T}{\partial x};$$

и аналогично

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p}{p_0}\frac{\partial p_0}{\partial y} + \frac{\rho g\Delta z}{T_0}\frac{\partial T}{\partial y}.$$

Подставляя эти выражения в формулы (76), найдем:

$$u - u_0 = -\frac{1}{2\Omega_z}\left(\frac{g\Delta z}{T_0}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{p}{\rho p_0}\frac{\partial p_0}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial y}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\Omega_z}\left[\frac{g\Delta z}{T_0}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho}\frac{\rho_0}{p_0} - 1\right)\right].$$

На основании уравнения Клапейрона

$$\frac{p\rho_0}{\rho p_0} = \frac{T}{T_0}$$

и

$$\frac{p\rho_0}{\rho p_0}-1=\frac{T-T_0}{T_0}=-\frac{\gamma\Delta z}{T_0},$$

откуда

$$u-u_0=-\frac{1}{2\Omega_z}\frac{g\Delta z}{T_0}\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\gamma\Delta z}{T_0}\frac{1}{2\Omega_z}\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial y}.$$

На основании первого из уравнений (75)

$$u-u_0=-\frac{1}{2\Omega_z}\cdot\frac{g\Delta z}{T_0}\frac{\partial T}{\partial y}-\frac{\gamma\Delta z}{T_0}u_0$$

или

$$u-u_0\left(1-\frac{\gamma\Delta z}{T_0}\right)=-\frac{g\Delta z}{2\Omega_z T_0}\frac{\partial T}{\partial y}\quad\ldots\ldots\quad(77)$$

Аналогично

$$v-v_0\left(1-\frac{\gamma\Delta z}{T_0}\right)=\frac{g\Delta z}{2\Omega_z T_0}\frac{\partial T}{\partial x}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(78)$$

Обозначим через $\Delta\mathbf{C}$ вектор, составляющие которого суть

$$u-u_0\left(1-\frac{\gamma\Delta z}{T_0}\right),$$

и

$$v-v_0\left(1-\frac{\gamma\Delta z}{T_0}\right).$$

Этот вектор равен

$$\Delta\mathbf{C}=\mathbf{V}-\mathbf{V}_0\left(1-\frac{\gamma\Delta z}{T_0}\right)=\Delta\mathbf{V}+\frac{\gamma\Delta z}{T_0}\mathbf{V}_0.$$

где $\mathbf{V}$—вектор горизонтальной скорости, $\Delta\mathbf{V}$—изменение этого вектора с высотой.

Заметим, что $\Delta\mathbf{C}$ мало отличается от $\Delta\mathbf{V}$, так как обычно $\frac{\gamma\Delta z}{T_0}$ мало по сравнению с единицей.

Далее, введем среднюю температуру Θ слоя, толщина которого есть Δz.

$$\Theta=\frac{T_0+T}{2}=T_0-\frac{\gamma\Delta z}{2}.$$

Очевидно,

$$\frac{\partial\Theta}{\partial x}=\frac{\partial T}{\partial x};\quad\frac{\partial\Theta}{\partial y}=\frac{\partial T}{\partial y}.$$

Вектор, составляющие которого суть $-\frac{\partial\Theta}{\partial x}$ и $-\frac{\partial\Theta}{\partial y}$, обозначим через $\mathbf{\Gamma}$. Это есть температурный градиент, отсчитываемый в сторону падения температуры и направленный по нормали к средней изотерме слоя. Величина $\mathbf{\Gamma}$ равна абсолютному значению $\frac{\partial\Theta}{\partial n}$, т. е. производной от Θ по нормали n изотерме.

Обозначим через α угол между $\Delta\mathbf{C}$ и осью x, через β—угол между $\mathbf{\Gamma}$ и той же осью. Тогда:

$$u-u_0\left(1-\frac{\gamma\Delta z}{T_0}\right)=\Delta C\cos\alpha,$$

$$v-v_0\left(1-\gamma\frac{\Delta z}{T_0}\right)=\Delta C\sin\alpha,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial\Theta}{\partial n}\cos\beta=-\Gamma\cos\beta,$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{\partial\Theta}{\partial n}\sin\beta=-\Gamma\sin\beta$$

и (77) и (78) можно переписать так:

$$\Delta C \cos\alpha = \frac{g\,\Delta z}{2\,\Omega_z\,T_0}\,\Gamma \sin\beta,$$

$$\Delta C \sin\alpha = -\frac{g\,\Delta z}{2\,\Omega_z\,T_0}\,\Gamma \cos\beta,$$

или:

$$\Delta C \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{g\,\Delta z}{2\,\Omega_z\,T_0}\,\Gamma \sin\beta,$$

$$\Delta C \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \frac{g\,\Delta z}{2\,\Omega_z\,T_0}\,\Gamma \cos\beta.$$

Из этих равенств видно, что величины векторов ΔC и Γ связаны соотношением:

$$\Delta C = \frac{g\,\Delta z}{2\,\Omega_z\,T_0}\,\Gamma,$$

а углы α и β таким соотношением:

$$\frac{\pi}{2}+\alpha=\beta.$$

Последнее равенство показывает, что вектор **Г** перпендикулярен вектору Δ**C**.

Нетрудно рассмотреть различные частные случаи расположения барического и температурного градиентов, и приняв во внимание, что в рассматриваемом случае скорость ветра V_0 направлена по изобаре, определить направление вектора Δ**C**, *а следовательно* и вектора **C**. Особенный интерес представляет случай, когда **Г** и **G** (барический градиент) направлены в противоположные стороны. Тогда скорость ветра будет уменьшаться с высотой, меняя на некоторой высоте свое направление на обратное. Получается обращение ветра (рис. 108).

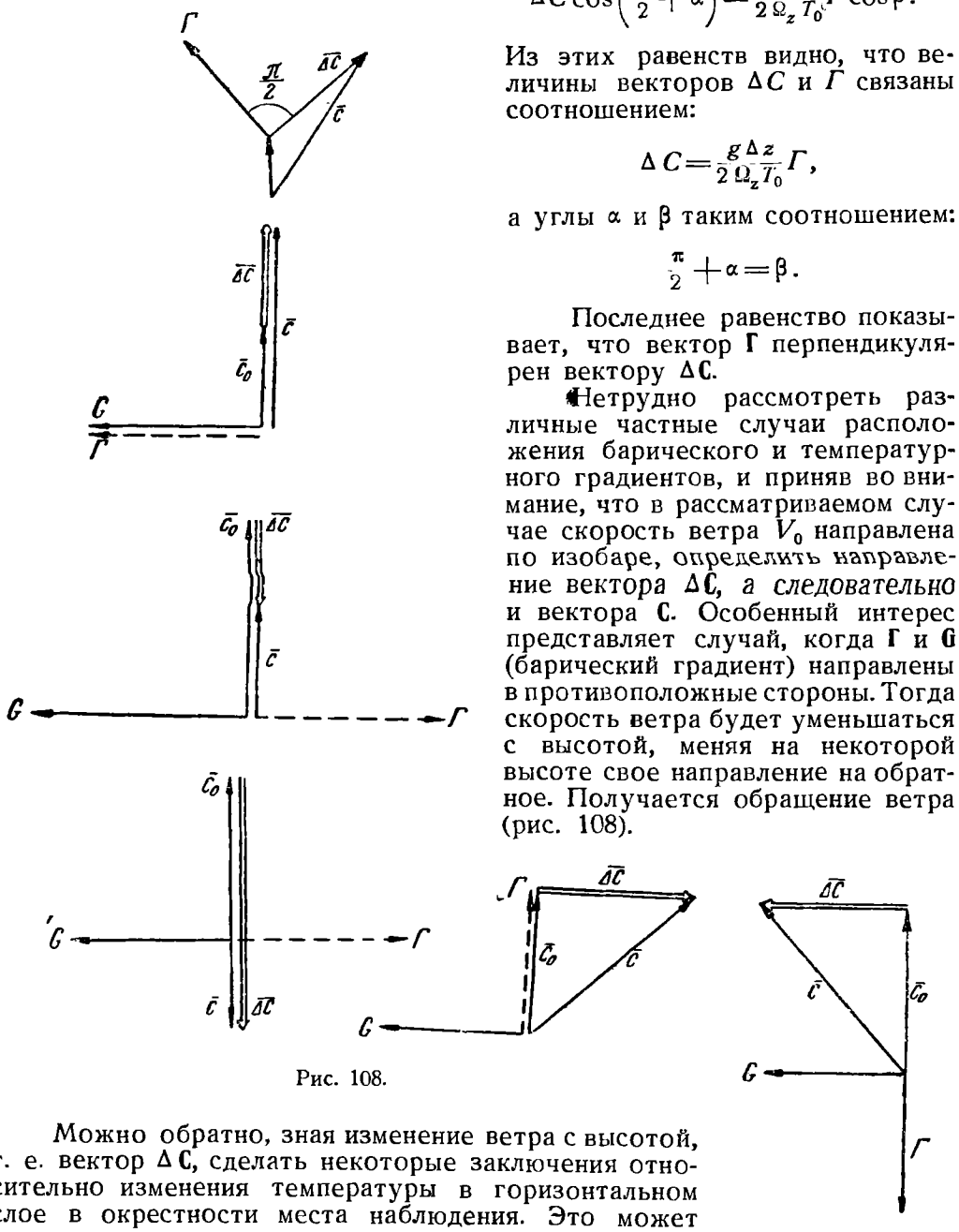

Рис. 108.

Можно обратно, зная изменение ветра с высотой, т. е. вектор Δ**C**, сделать некоторые заключения относительно изменения температуры в горизонтальном слое в окрестности места наблюдения. Это может иметь некоторое значение в вопросе о предсказании

погоды по обрезанной карте, т. е в случае, когда требуется установить хотя бы приближенно распределение температуры и давления в окрестности места наблюдения, причем нет данных соседних станций, а имеются только аэрологические наблюдения в данном пункте (хотя бы только самые простые шаро-пилотные наблюдения над ветром). Синоптическая карта данной местности может быть таким образом экстраполирована, если имеется ряд аэрологических станций, расположенных по границе освещенной наблюдениями местности.

Примечание. В гл. VI — VII удельный объем обозначается согласно Фридману буквой ω.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Фридман. Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости. 1934.
2. Н. Кочин и Н. Розе. Введение в теоретическую гидромеханику. 1932.
3. Н. Кочин. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. 1934.
4. N. Kotschin. Über einen Fall der adiabatischen Bewegung, Zeitschrift für Physik, 1923, Bd. 17, H. 1.
5. Н. Кочин. Теоретическая модель перемещающегося циклона, Геофизический сборн. 1924.
6. Shaw and Lempfert. The Life History of Surface Air Currents, 1916.
7. Shaw. Manual of Meteorology, Volume IV, 1931.
8. B. Iswekow. Das verallgemeinerte Margulessche Problem. Annalen d. Hydrographie. 1924. H. X.

Таблица 1

Значения главнейших постоянных

$$\pi = 3{,}14159; \quad \pi^2 = 9{,}8696; \quad \frac{4}{3}\pi = 4{,}18879; \quad 4\pi = 12{,}566$$

$$\lg \pi = 0{,}49715; \quad \frac{\pi}{\sqrt{g}} = 1{,}0026; \quad \frac{g}{\pi^2} = 0{,}9936.$$

$$e = 2{,}71828; \quad e^{-1} = 0{,}36788; \quad \lg e = 0{,}43429.$$

$$\mathrm{Mod} = \frac{1}{\lg e} = 2{,}3026 \quad \lg \mathrm{Mod} = 0{,}36222 \quad (\ln x = \mathrm{Mod} \cdot \lg x).$$

Единица угла (дуга равна радиусу): $\Phi = 57{,}296°$
$\Phi^2 = 3283.$

Наибольший радиус земли	6378,0	км
Наименьший „ „	6356,8	„
Средний „ „	6367,5	„

Угловая скорость вращения земли: $\Omega = 7{,}29 \times 10^{-5}$ сек.$^{-1}$.

Газовая постоянная R для воздуха:

p и ρ в м, кг, сек.	287,042
„ см, г, сек.	$2{,}87042 \times 10^6$
p в мб, ρ в м, m, сек.	2870,42
„ ρ в м, кг, сек.	2,87042
„ ρ в см, г, сек.	$2{,}87042 \times 10^3$.

Механический эквивалент тепла:

$$E = 426{,}9 \text{ г веса. м} = 4{,}186 \cdot 10^7 \text{ эрг.}$$

$$1 \text{ эрг} = 1{,}0198 \times 10^{-3} \text{ см, г-вес.} = 1 \text{ г см}^2 \text{ сек}^{-2} = 10^{-7} \text{ джоулей} =$$
$$= 0{,}2383 \cdot 10^{-7} \text{ г-кал}$$

$$1 \text{ г-кал} = 4{,}186 \times 10^7 \text{ эргов} = 4{,}184 \text{ джоуля}$$
$$1 \text{ г-кал/мин} = 0{,}0697 \text{ ватт.}$$

Средняя солнечная постоянная I_0

по Смитсониевской шкале $= 1{,}940$ г-кал см$^{-2}$ мин.$^{-1}$

по Онгстрему $= 1{,}871$ г=кал см$^{-2}$ мин.$^{-1}$.

Постоянная σ в законе излучения Стефана Больцмана:

$1{,}38 \cdot 10^{-12}$ г/кал. см$^{-2}$ сек.$^{-1}$ град.$^{-4}$

$0{,}826 \cdot 10^{-10}$ г/кал. см$^{-2}$ мин.$^{-1}$ град.$^{-4}$

$5{,}77 \cdot 10^{-5}$ эрг. см$^{-2}$ сек.$^{-1}$ град.$^{-4}$

$5{,}77 \cdot 10^{-12}$ ватт. см$^{-2}$ град.$^{-4}$.

Теплоемкость при постоянном давлении

при 0° c : $c_p = 0{,}240$.

Теплоемкость при постоянном объеме

при 0° c : $c_v = 0{,}171$.

$$\frac{c_p}{c_v} = \chi = 1{,}40. \qquad \frac{c_p}{c_p - c_v} = \frac{\chi}{\chi - 1} = \frac{c_p g}{AR} = 3{,}48$$

$$c_p - c_v = \frac{AR}{g} = 0{,}069 \qquad \frac{c_v}{c_p - c_v} = \frac{1}{\chi - 1} = \frac{c_v g}{AR} = 2{,}48$$

$$\lambda = \frac{c_p - c_v}{c_p} = \frac{\chi - 1}{\chi} = 0{,}288.$$

Таблица 2

Нормальные значения силы тяжести

$g_{45} = 9{,}8062 \text{ m} \cdot \text{sec}^{-2}$

$\varphi =$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
0	9,780	9,782	9,786	9,793	9,802	9,811	9,819	9,826	9,831
2 000	9,774	9,776	9,780	9,787	9,796	9,804	9,813	9,820	9,824
4 000	9,768	9,770	9,774	9,781	9,789	9,798	9,807	9,814	9,818
6 000	9,762	9,763	9,768	9,775	9,783	9,792	9,801	9,808	9,812
8 000	9,756	9,757	9,762	9,768	9,777	9,786	9,794	9,801	9,806
10 000	9,749	9,751	9,755	9,762	9,771	9,780	9,788	9,795	9,800
12 000	9,743	9,745	9,749	9,756	9,765	9,774	9,782	9,789	9,794
14 000	9,737	9,739	9,743	9,750	9,758	9,768	9,776	9,783	9,787
16 000	9,731	9,732	9,737	9,744	9,752	9,761	9,770	9,777	9,781
18 000	9,725	9,726	9,731	9,738	9,746	9,755	9,764	9,771	9,775
20 000	9,719	9,720	9,725	9,732	9,740	9,749	9,757	9,764	9,769
22 000	9,712	9,714	9,718	9,725	9,734	9,743	9,751	9,758	9,763
24 000	9,706	9,708	9,712	9,719	9,728	9,737	9,745	9,752	9,756
26 000	9,700	9,702	9,706	9,713	9,722	9,730	9,739	9,746	9,750
28 000	9,694	9,696	9,700	9,707	9,715	9,724	9,733	9,740	9,744
g/g_{45}	0,9974	0,9976	0,9980	0,9987	0,9995	1,0005	1,0013	1,0020	1,0024

Таблица 3

Отклоняющая сила вращения земли, центробежная сила в момент вращения

Радиус земли (шара) $= 6{,}367 \times 10^6$ м. Скорость вращения земли $\Omega = 7{,}29 \cdot 10^{-5}$ сек$^{-1}$

Географическая широта в градусах	Отклоняющая сила		Центробежная сила			
	гориз.	вертик.	полная	горизонтальная	вертикальная	момент вращения
	$2\,\Omega \sin\varphi$ / $\times 10^{-4}$	$2\,\Omega \cos\varphi$ / $\times 10^{-4}$	$2\,\Omega^2 \cos\varphi$ / м/сек$^{-2}$	$R\Omega^2 \sin\varphi \cos\varphi$ / м/сек$^{-2}$	$R\Omega^2 \cos^2\varphi$ / м/сек$^{-2}$	$R^2\,\Omega \cos^2\varphi$ / м^2/сек$^{-1}$
0	0,000	1,458	0,0338	0,0000	0,0338	296×10^7
5	0,127	1,452	0,0337	0,0029	0,0336	293
10	0,253	1,436	0,0333	0,0057	0,0328	287
15	0,377	1,408	0,0327	0,0084	0,0316	276
20	0,499	1,370	0,0318	0,0108	0,0298	261
25	0,616	1,321	0,0307	0,0129	0,0279	243
30	0,729	1,263	0,0293	0,0146	0,0254	222
35	0,837	1,194	0,0277	0,0158	0,0227	198
40	0,937	1,117	0,0259	0,0166	0,0199	173
45	1,031	1,031	0,0239	0,0168	0,0169	148
50	1,117	0,937	0,0218	0,0166	0,0140	122
55	1,194	0,837	0,0194	0,0158	0,0111	97
60	1,263	0,729	0,0169	0,0146	0,0085	74
65	1,321	0,616	0,0143	0,0129	0,0060	53
70	1,370	0,499	0,0116	0,0108	0,0040	35
75	1,408	0,377	0,0088	0,0084	0,0023	19,8
80	1,436	0,253	0,0057	0,0057	0,0010	8,9
85	1,452	0,127	0,0030	0,0029	0,0003	2,2
90	1,458	0,000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0

Таблица 4

Плотность воздуха в кг/м³

Давление в мб	Виртуальная температура в °С											
	— 70	— 60	— 50	— 40	— 30	— 20	— 10	0	10	20	30	40
100	0,172	0,164	0,156	0,150	0,143	0,138	0,132	0,128	0,123	0,119	0,115	0,111
200	0,343	0,327	0,312	0,299	0,287	0,275	0,265	0,255	0,246	0,238	0,230	0,223
300	0,514	0,491	0,468	0,449	0,430	0,413	0,397	0,383	0,369	0,357	0,345	0,334
400	0,686	0,654	0,625	0,598	0,573	0,550	0,530	0,510	0,492	0,475	0,460	0,446
500	0,858	0,818	0,781	0,748	0,717	0,689	0,662	0,648	0,615	0,594	0,575	0,556
600	1,030	0,981	0,937	0,897	0,860	0,826	0,795	0,766	0,738	0,713	0,689	0,668
700	1,202	1,146	1,095	1,047	1,004	0,965	0,927	0,894	0,862	0,833	0,805	0,779
800	1,374	1,310	1,250	1,197	1,146	1,102	1,059	1,020	0,986	0,952	0,920	0,891
900	1,544	1,472	1,406	1,345	1,290	1,2 9	1,192	1,148	1,108	1,071	1,035	1,002
1000	1,715	1,635	1,562	1,495	1,434	1,376	1,325	1,276	1,230	1,190	1,150	1,113
1100	1,887	1,801	1,720	1,645	1,578	1,515	1,459	1,405	1,354	1,308	1,265	1,225

Таблица 5

Высота однородной атмосферы (в метрах)

Темпер. С°	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
— 30	7113	7084	7054	7025	6996	6966	6937	6908	6878	6849
— 20	7405	7376	7347	7318	7289	7260	7230	7200	7171	7142
— 10	7689	7668	7639	7610	7581	7552	7522	7492	7463	7434
— 0	7991	7962	7932	7903	7874	7844	7815	7786	7756	7727
+ 0	7991	8020	8049	8078	8108	8138	8167	8196	8225	8254
+ 10	8283	8312	8341	8370	8400	8430	8459	8488	8517	8546
+ 20	8576	8605	8634	8664	8693	8722	8752	8781	8810	8840
+ 30	8869	8898	8927	8956	8986	9016	9045	9074	9103	9132

Таблица 6

Виртуальная температура насыщенного воздуха при данном давлении

Давление мб	Температура °C																	
	—50	—40	—30	—20	—15	—10	—5	—2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
200	0,0	0,1	0,2															
250	0,0	0,0	0,1	0,4														
300	0,0	0,0	0,1	0,3														
350	0,0	0,0	0,1	0,3	0,5													
400	0,0	0,0	0,1	0,2	0,4	0.6												
450	0,0	0,0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,9											
500	0,0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,8	1,1	1,3									
550	0,0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5					
600	0,0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,7	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,9	2,0
650	0,0	0,0	0,1	0,2	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,9
700	0,0	0,0	0,1	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
750	0,0	0,0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
800	0,0	0,0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	0,8	0,9	1,0	1,1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
850	0,0	0,0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,9	1,0	1,1	1,2	1,2	1,3	1,4
900	0,0	0,0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,5	0,6	0,7	0,8	0,8	0,9	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
950	0,0	0,0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,6	0,7	0,7	0,8	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1	1,2	1,3
1000	0,0	0,0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,7	0,8	0,8	0,9	1,0	1,1	1,1	1,2
1050	0,0	0,0	0,0	0,1	0,2	0,2	0,4	0,5	0,6	0,6	0,7	0,7	0,8	0,9	0,9	1,0	1,1	1,2
1100	0,0	0,0	0,0	0,1	0,2	0,2	0,4	0,5	0,6	0,6	0.7	0,7	0,8	0,8	0,9	1,0	1,0	1,1

Давление мб	Температура °C																			
	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
650	2,0	2,2	2,3	2,5	2,7	2.8	3,0	3,2	3,5	3,7										
700	1,9	2,0	2,1	2,3	2,5	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,7	3,9	4,2	4,5	4,8					
750	1,7	1,9	2,0	2,1	2,3	2,5	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,7	3,9	4,2	4,5	4,8	5,1	5,4	5,7	6,1
800	1,6	1,8	1,9	2,0	2,2	2,3	2,5	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,7	3,9	4,2	4,5	4,7	5,0	5,4	5,7
850	1,5	1,6	1,8	1,9	2,0	2,2	2,3	2,5	2,7	2,8	3,0	3,2	3,4	3,7	3,9	4,3	4,5	4,7	5,1	5,4
900	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,2	2,3	2,5	2,7	2,9	3,0	3,3	3,5	3,7	4,0	4,2	4,5	4,8	5,1
950	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,1	2,2	2,4	2,5	2,7	2,9	3,1	3,3	3,5	3,8	4,0	4,2	4,5	4,8
1000	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	2,0	2,1	2,3	2,4	2,6	2,7	2,9	3,1	3,3	3,6	3,8	4,0	4,3	4,6
1050	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,8	1,9	2,0	2,1	2,3	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,1	4,3
1100	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,2	2,3	2,5	2,7	2,8	3,0	3,3	3,4	3,7	3,9	4,1

Давление мб	Температура °C																			
	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
800	6,1	6,5	6,9	7,3	7,8															
850	5,7	6,1	6,5	6,9	7,3	7,8	8,3	8,8	9,3	9,9										
900	5,4	5,7	6,1	6,5	6,9	7,3	7,8	8,3	8,8	9,3	9,9	10,4	11,1	11,7	12,4					
950	5,1	5,4	5,8	6,1	6,5	6,9	7.4	7,8	8,3	8,8	9,3	9,9	10,5	11,1	11,7	12.4	13,1	13,9	14,7	15,6
1000	4,8	5,2	5,5	5,8	6,2	6,6	7,0	7,4	7,9	8,3	8,8	9,4	9,9	10,5	11,1	11,8	12,5	13,2	14,0	14,8
1050	4,6	4,9	5,2	5,5	5,9	6,3	6,7	7,1	7,5	7,9	8,4	8,9	9,4	10,0	10,6	11,2	11,9	12,5	13,3	14,0
1100	4,4	4,7	5,0	5,3	5,6	6,0	6,3	6,7	7,1	7,6	8,0	8,5	9,0	9,5	10,1	10,7	11,3	11,9	12,6	13,4

Пример:

Давление 871 мб; температура . . . . . 14,2°. Таблица 6 дает 2,0
63% от 2,0 дает . . . . . 1,3°

Виртуальная температура . . . 15,5° для воздуха с температурой 14,2° C и 63% относительной влажности при давлении 871 мб.

Таблица 7

Вычисление абсолютной влажности по давлению пара

$$\rho_w = \frac{0{,}623\,\rho_0}{p_0\,(1+\alpha\,t)} \cdot e \text{ g/м}^3$$

если e в мм Hg, $p_0 = 760$ мм : $\rho_w = K$ мм $\cdot\, e$;

если e в мб $p_0 = 1000$ мбар : $\rho_w = K$ мб $\cdot\, e$;

t	K мм	K мб	t	K мм	K мб	t	K мм	K мб
— 75	1,46	1,10	— 35	1,22	0,91	5	1,04	0,78
— 70	1,42	1,07	— 30	1,19	0,88	10	1,02	0,77
— 65	1,39	1,04	— 25	1,17	0,875	15	1,00	0,76
— 60	1,36	1,02	— 20	1,14	0,86	20	0,99	0,74
— 55	1,32	1,00	— 15	1,12	0,84	25	0,97	0,735
— 50	1,30	0,97	— 10	1,10	0,825	30	0,95	0,72
— 45	1,27	0,95	— 5	1,08	0,81	35	0,94	0,705
— 40	1,24	0,93	0	1,06	0,795	40	0,92	0,695

Таблица 8

Вычисление удельной влажности по давлению водяного пара

$$q = K\,(e,\,p) \cdot e, \text{ где } K\,(e,\,p) = \frac{0{,}623}{p - 0{,}377\,e}$$

(e и p в одних и тех же единицах). Значения $K\,(e,\,p)$

Давление воздуха p	Давление пара e						
	1	5	10	15	20	25	30
1050	0,00594	0,00594	0,00595	0,00596	0,00598	0,00598	0,00599
1000	0624	0624	0626	0627	0628	0629	0,630
950	0656	0657	0659	0660	0661	0662	0663
900	0692	0694	0695	0697	0698	0699	0701
850	0734	0735	0736	0738	0740	0741	0742
800	0779	0781	0782	0784	0786	0788	0790
750	0832	0833	0835	0837	0840	0842	0843
700	0891	0892	0895	0897	0900	0902	0904
650	0960	0961	0964	0967	0970	0973	—
600	0,0104	0,0104	0,0105	0,0105	0,0105	0,0105	—
550	113	114	114	114	115	—	—
500	125	125	126	126	127	—	—
450	138	139	140	140	—	—	—
400	158	156	157	158	—	—	—
350	178	179	180	—	—	—	—
300	208	209	210	—	—	—	—
250	249	251	—	—	—	—	—
200	312	314	—	—	—	—	—
150	416	421	—	—	—	—	—
100	0,0625	0,0635	—	—	—	—	—

Таблица 9

Влажноадиабатические градиенты (°С на 100 дин. м.).

Темпер. °С	Давление в миллибарах									
	1000	900	800	700	600	500	400	300	200	100
40	0,315	304	293	282	269	255	241	223	198	155
35	0,337	326	313	300	285	271	256	234	210	166
30	0,366	452	338	321	304	287	269	247	221	176
25	0,400	384	366	347	329	309	286	262	233	189
20	0,440	422	402	382	359	335	309	280	246	204
15	0,487	468	446	422	397	369	338	303	265	217
10	0,539	520	498	471	442	411	375	335	290	232
5	0,596	578	555	527	497	460	420	375	318	250
0	0,659	640	616	587	554	517	472	422	354	271
— 5	0,723	705	680	653	619	579	536	480	405	304
— 10	0,780	762	741	717	687	650	603	543	461	343
— 15	0,833	819	802	780	753	720	677	615	532	397
— 20	0,879	867	853	835	815	785	746	692	609	465
— 25	0,913	904	893	880	863	842	811	764	690	537
— 30	0,941	936	929	920	907	890	866	829	765	629
— 35	0,964	961	956	948	939	927	910	883	835	710
— 40	0,978	976	972	968	962	954	942	922	886	800
— 45	0,989	988	986	983	979	973	964	952	931	870
— 50	0,995	994	993	991	988	984	979	971	956	909
— 55	0,999	998	997	995	994	991	988	983	972	941
— 60	1,001	1,001	1,000	1,000	0,999	0,998	0,996	0,992	0,985	0,966
— 65	1,003	1,002	1,002	1,002	1,002	1,001	1,000	0,999	0,995	0,985

Таблица 10

Вычисление потенциальной температуры

$\vartheta = T\left(\frac{p_0}{p}\right)^{0,288}$, где $p_0 = 1000$ мб. Таблица для $\left(\frac{p_0}{p}\right)^{0,288}$

P в мб	00	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	∞	3,767	3,085	2,745	2,528	2,370	2,252	2,151	2,070	2,001
100	1,943	1,888	1,842	1,800	1,762	1,726	1,695	1,666	1,639	1,613
200	1,590	1,568	1,547	1,527	1,501	1,491	1,474	1,458	1,445	1,428
300	1,414	1,401	1,388	1,376	1,365	1,353	1,342	1,332	1,321	1,312
400	1,302	1,293	1,285	1,276	1,267	1,259	1,251	1,244	1,236	1,228
500	1,221	1,214	1,207	1,200	1,194	1,188	1,182	1,176	1,170	1,164
600	1,159	1,153	1,148	1,142	1,137	1,132	1,127	1,122	1,118	1,113
700	1,108	1,104	1,099	1,095	1,091	1,086	1,082	1,078	1,074	1,070
800	1,066	1,062	1,059	1,055	1,051	1,048	1,044	1,041	1,037	1,034
900	1,031	1,028	1,024	1,021	1,018	1,015	1,012	1,009	1,006	1,003
1000	1,000	0,997	0,994	0,991	0,988	0,985	0,982	0,979	0,976	0,973

Если давления даны в мм ртутного столба (b), то

$$p = \frac{1000\ b}{750,1}.$$

При пользовании вычислительной линейкой точнее вычисляется

$$\vartheta = T + T\left[\left(\frac{p_0}{p}\right)^{0,288} - 1\right].$$

Таблица 11

Энтропия см. г. сек. $g \cdot 10^6$ (по Штюве)

$$E = c_p \ln \vartheta + \text{const} \cdot E_{\vartheta = 100} = 0$$

ϑ_{273}	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
— 100	5,453	397	340	282	224	165	105	044	·982	·918
— 90	6,011	·956	·901	·846	·791	·735	·679	·622	·566	·509
— 80	541	489	437	385	332	279	226	173	119	065
— 70	7,042	·993	·944	·895	·845	·795	·745	·694	·643	·592
— 60	519	472	425	378	331	283	235	187	139	091
— 50	976	931	886	841	796	750	704	658	612	566
— 40	8,413	370	327	284	241	197	153	109	065	021
— 30	831	790	749	708	666	624	582	540	498	456
— 20	9,232	193	153	114	074	034	·994	·954	·913	·872
— 10	618	580	542	504	465	426	388	349	310	271
— 0	988	952	916	879	842	805	768	731	694	656
0	988	024	060	096	132	168	204	240	275	310
10	10,345	380	415	450	485	520	555	590	624	658
20	692	726	760	794	827	860	893	926	959	992
30	11,025	058	091	123	155	187	219	251	283	315
40	347	379	411	443	474	505	536	567	598	629
50	660	691	722	752	783	813	843	873	903	934
60	964	994	024	054	083	113	143	172	201	230
70	12,259	288	317	346	374	402	431	459	487	515
80	543	571	599	627	655	082	710	738	735	793
90	820	848	875	902	929	956	983	010	037	064
100	13,090	117	144	171	197	223	250	276	302	328
110	354	380	406	432	458	483	509	535	561	586
120	611	637	662	682	712	737	762	787	812	837
130	861	886	911	935	959	983	008	032	056	080
140	14,104	128	152	176	200	224	248	272	296	319
150	342	366	389	413	436	459	483	506	529	552
160	575	598	621	·644	666	689	712	734	757	779
170	802	825	847	869	891	913	935	957	979	000

Таблица 12

Излучение при разных температурах

$E = \sigma T^4$ (где $\sigma = 0{,}826 \cdot 10^{-10}$) в кал. 1 на см² в мин.

Темп. °C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
— 40	0,244	239	235	231	227	223	219	216	212	208
— 30	288	283	279	274	270	265	261	256	252	248
— 20	339	333	328	323	318	312	308	303	298	293
— 10	395	389	384	378	372	366	360	355	349	344
— 0	459	452	446	439	432	426	420	414	407	401
+ 0	459	466	472	479	486	493	500	508	515	522
+ 10	530	537	545	553	560	568	576	584	592	601
+ 20	609	617	626	634	643	651	660	669	678	687
+ 30	696	706	715	724	734	743	753	762	772	782

$t =$	— 50	— 55	— 60	— 65	— 75° C		
$E =$	0,204	0,187	0,170	0,155	0,140		
$t =$	40	45	50	55	60	65	70° C
$E =$	0,792	0,844	0,899	0,956	1,015	1,078	1,143

Таблица 13

Интенсивность излучения абсолютно-черного тела при абсолютной температуре T
(в единицу телесного угла) в 10² кал. см$^{-2}$, мин.$^{-1}$, для $\Delta\lambda = 1\,\mu$ (по Планку)

λ $T =$ $t =$	313° 40	293° 20	273° 0	253° —20	233° —40	213° —60	193° абс. — 80°C
3 μ	0,017	0,006	0,002	0,000	0	0	0
4	0,181	0,083	0,034	0,012	0,004	0,001	0
5	0,580	0,311	0,152	0,066	0,025	0,008	0,002
6	1,069	0,636	0,322	0,176	0,078	0,030	0,009
7	1,469	0,941	0,564	0,312	0,156	0,068	0,025
8	1,706	1,155	0,738	0,440	0,238	0,116	0,040
9	**1,792**	1,265	0,849	0,535	0,310	0,163	0,076
10	1,765	**1,289**	0,809	0,593	0,365	0,205	0,102
11	1,669	1,252	**0,902**	**0,618**	0,397	0,234	0,124
12	1,537	1,179	0,872	0,615	**0,409**	0,253	0,141
13	1,314	1,088	0,822	0,594	0,408	**0,261**	0,152
14	1,246	0,989	0,761	0,563	0,396	**0,261**	**0.158**
16	0,980	0,798	0,632	0,484	0,355	0,245	**0,158**
18	0,765	0,634	0,514	0,404	0,305	0,219	0,148
20	0,597	0,502	0,414	0,332	0,257	0,190	0,133
22	0,468	0,408	0,333	0,271	0,214	0,162	0,117
24	0,371	0,319	0,269	0,222	0,178	0,137	0,101
26	0,296	0,256	0,218	0,182	0,148	0,116	0,087
28	0,238	0,208	0,178	0,150	0,123	0,098	0,075
30	0,192	0,170	0,146	0,124	0,103	0,083	0,064
34	0,131	0,116	0,101	0,087	0,073	0,060	0,047
40	0,077	0,069	0,061	0,051	0,045	0,038	0,031
50	0,036	0,033	0,029	0,026	0,022	0,019	0,016
60	0,019	0,017	0,016	0,014	0,012	0,011	0,009
70	0,011	0,010	0,009	0,008	0,007	0,006	0,005
80	0,007	0,006	0,006	0,005	0,004	0,004	0,003
100	0,003	0,003	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002

Таблица 14

Значения функций $H_2(x)$, $H_3(x)$ и $E_i(-x)$
(см. стр. 172 текста)

x	$H_2(x)$	$H_3(x)$	$Ei(-x)$	x	$H_2(x)$	$H_3(x)$	$Ei(-x)$
0	1,0	0,5	$-\infty$	1,9	0,04279	0,03414	—0,0562
0,01	0,94967	0,49028	—4,0379	2,0	0,03754	0,03013	—0,0489
0,02	0,91310	0,48097	—3,3547	2,1	0,03298	0,02660	—0,0426
0,03	0,88167	0,47200	—2,9591	2,2	0,02899	0,02352	—0,0372
0,04	0,85354	0,46332	—2,6813	2,3	0,02551	0,02079	—0,0325
0,05	0,82783	0,45492	—2,4679	2,4	0,02246	0,01840	—0,0284
0,06	0,80405	0,44676	—2,2953	2,5	0,01981	0,01626	—0,0249
0,07	0,78184	0,43883	—2,1508	2,6	0,01746	0,01443	—0,0218
0,08	0,76096	0,43112	—2,0269	2,7	0,01542	0,01279	—0,0192
0,09	0,74125	0,42361	—1,9187	2,8	0,01360	0,01136	—0,0169
0,10	0,72255	0,41629	—1,8229	2,9	0,01204	0,01005	—0,0148
0,15	0,64103	0,38228	—1,4645	3,0	0,01067	0,00889	—0,0130
0,20	0,57419	0,35195	—1,2227	3,1	0,00943	0,00791	—0,0115
0,25	0,51773	0,32468	—1,0443	3,2	0,00835	0,00703	—0,0101
0,30	0,46911	0,30004	—0,9057	3,3	0,00738	0,00626	—0,0089
0,35	0,42672	0,27767	—0,7942	3,4	0,00655	0,00556	—0,0079
0,40	0,38936	0,25729	—0,7024	3,5	0,00580	0,00494	—0,0070
0,45	0,35624	0,23866	—0,6253	3,6	0,00515	0,00440	—0,0062
0,50	0,32663	0,22161	—0,5598	3,7	0,00457	0,00392	—0,00545
0,55	0,30008	0,20595	—0,5034	3,8	0,00406	0,00348	—0,00482
0,60	0,27617	0,19155	—0,4544	3,9	0,00360	0,00310	—0,00427
0,65	0,25457	0,17829	—0,4115	4,0	0,00320	0,00276	—0,00378
0,70	0,23492	0,16607	—0,3738	4,1	0,00284	0,00246	—0,00335
0,75	0,21714	0,15476	—0,3403	4,2	0,00253	0,00219	—0,00297
0,80	0,20085	0,14432	—0,3106	4,3	0,00225	0,00195	—0,00263
0,85	0,18602	0,13465	—0,2840	4,4	0,00200	0,00174	—0,00234
0,90	0,17248	0,12567	—0,2601	4,5	0,00178	0,00155	—0,00207
0,95	0,15998	0,11738	—0,2387	4,6	0,00158	0,00138	—0,00184
1,00	0,14848	0,10970	—0,2194	4,7	0,00141	0,00123	—0,00164
1,10	0,12827	0,09589	—0,1860	4,8	0,00126	0,00110	—0,00145
1,2	0,11111	0,08393	—0,1584	4,9	0,00112	0,00098	—0,00129
1,3	0,09638	0,07362	—0,1355	5,0	0,000998	0,000874	—0,00115
1,4	0,08392	0,06456	—0,1162	6,0	0,000318	0,000284	—0,00036
1,5	0,07313	0,05672	—0,1000	7,0	0,000103	0,000094	—0,000116
1,6	0,06380	0,04991	—0,0863	8,0	0,000034	0,000033	—0,000038
1,7	0,05578	0,04393	—0,0746	9,0	0,000011	0,000012	—0,000012
1,8	0,04882	0,03871	—0,0647	10,0	0,000003	0,000006	—0,000004

Таблица 15

Обращение метрических высот в динамические метры

В среднем вычитается около 2% высоты. Точное значение множителя берется из следующей таблицы как арифметическое среднее верхнего и нижнего числа

	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
От	2,19	2,18	2,14	2,07	1,98	1,89	1,81	1,74	1,69%
2000	2,26	2,24	2,20	2,13	2,04	1,96	1,87	1,80	1,76
4000	2,32	2,30	2,26	2,19	2,11	2,02	1,93	1,86	1,82
6000	2,38	2,37	2,32	2,25	2,17	2,08	1,99	1,92	1,88
8000	2,44	2,43	2,38	2,32	2,23	2,14	2,06	1,99	1,94
10000	2,51	2,49	2,45	2,38	2,29	2,26	2,12	2,05	2,00
12000	2,57	2,55	2,51	2,44	2,35	2,26	2,18	2,11	2,06
14000	2,63	2,61	2,57	2,50	2,42	2,32	2,24	2,17	2,13
16000	2,69	2,68	2,63	2,56	2,48	2,39	2,30	2,23	2,19
18000	2,75	2,74	2,69	2,62	2,54	2,45	2,36	2,29	2,25
20000	2,81	2,80	2,75	2,68	2,60	2,51	2,43	2,36	2,31
22000	2,88	2,86	2,82	2,75	2,66	2,57	2,49	2,42	2,37
24000	2,94	2,92	2,88	2,81	2,72	2,63	2,55	2,48	2,44
26000	3,00	2,98	2,94	2,87	2,78	2,70	2,61	2,54	2,50
28000	3,06	3,04	3,00	2,93	2,85	2,76	2,67	2,60	2,56

Пример. На широте 40° получается для высоты 14 000 м над уровнем моря

$$14\,000 - \frac{1{,}98 + 2{,}42}{2} \cdot \frac{14\,000}{100} = 13\,692 \text{ дин. м.}$$

Таблица 16

Обращение динамических метров в геометрические

Для этого нужно прибавить около 2% к геопотенциалу. Точное значение множителя берется из таблицы

Дин. м	φ =	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
0		2,24	2,23	2,19	2,11	2,02	1,93	1,84	1,77	1,72
2 000		2,31	2,29	2,25	2,18	2,09	2,00	1,91	1,83	1,79
4 000		2,38	2,35	2,31	2,24	2,16	2,06	1,97	1,90	1,85
6 000		2,44	2,42	2,38	2,30	2,22	2,12	2,03	1,96	1,92
8 000		2,50	2,49	2,44	2,37	2,28	2,19	2,10	2,03	1,98
10 000		2,57	2,55	2,51	2,44	2,34	2,25	2,17	2,09	2,04
12 000		2,64	2,62	2,57	2,50	2,41	2,31	2,23	2,16	2,11
14 000		2,70	2,68	2,64	2,56	2,48	2,38	2,29	2,22	2,18
16 000		2,76	2,75	2,70	2,63	2,54	2,45	2,35	2,28	2,24
18 000		2,83	2,82	2,76	2,69	2,60	2,51	2,42	2,35	2,30
20 000		2,90	2,88	2,83	2,75	2,67	2,57	2,49	2,42	2,36
22 000		2,97	2,94	2,90	2,82	2,73	2,64	2,55	2,48	2,43
24 000		3,03	3,01	2,96	2,89	2,80	2,70	2,62	2,54	2,50
26 000		3,09	3,07	3,03	2,95	2,86	2,77	2,68	2,60	2,56
28 000		3,16	3,14	3,09	3,02	2,93	2,84	2,74	2,67	2,63

Приложение к стр. 220

Высота нижней границы стратосферы

	Февраль	Средн. год.	Август
Павловск	8,6	9,4	10,2 дин. м.
Павия	10,0	10,8	11,6
Агра	15,0		16,5 дин. м.
Батавия	17,1		16,2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.

Предисловие 5

Глава I. Исторический очерк 7

Литература 24

Глава II. Общие принципы механики атмосферы . . . . . —
§ 1. Введение 25
§ 2. Плотность атмосферы 27
§ 3. Переменные Лагранжа и Эйлера. Уравнение неразрывности 28
§ 4. Силы 33
§ 5. Уравнения движения. Давление 37
§ 6. Напряжения уравнения движения в окончательной форме 43
§ 7. Уравнение состояния. Бароклинность и баротропность. Уравнения Bjerknesa 44
§ 8. Принцип подобия Гельмгольца 48
§ 9. Порядок величин метеорологических элементов 51
§ 10. Порядок величин метеорологических элементов (продолжение) 56
§ 11. Классификация атмосферных движений 59
§ 12. Беспорядочные движения в атмосфере. Турбулентность 63
Литература 66

Глава III. Термодинамика атмосферы.
§ 1. Уравнение состояния атмосферного воздуха 67
§ 2. Первое начало термодинамики. Уравнение притока энергии 68
§ 3. Адиабатические процессы 74
§ 4. Политропические изменения состояния 75
§ 5. Влажность атмосферного воздуха 81
§ 6. Адиабатическое поднятие сухого воздуха. Условия вертикального равновесия сухого атмосферного воздуха 83
§ 7. Адиабатические изменения влажного воздуха 87
§ 8. Условия вертикального равновесия влажного воздуха. Влажно-неустойчивое равновесие 97
§ 9. Внутренняя энергия. Энтропия. Второе начало термодинамики 99
§ 10. Потенциальная температура 104
§ 11. Графические методы изображения изменения состояния массы воздуха. Адиабатитные бумаги 113
§ 12. Энергетика атмосферы 121
§ 13. Теория Маргулеса 127
§ 14. Уравнение притока энергии в синоптической метеорологии и значение его для диагноза и прогноза погоды 130
§ 15. Общие соображения о замкнутых атмосферных циклах 134
Литература 147

Глава IV. Лучистая энергия.
§ 1. Лучистая энергия и ее распространение 148
§ 2. Общие соображения о притоке лучистой энергии и балансе ее в земной атмосфере 152
§ 3. Поглощение и излучение длинноволновой радиации в земной атмосфере . . 156
§ 4. Объяснение существования стратосферы на основании теории лучистого равновесия 158
§ 5. Судьба длинноволновой радиации в земной атмосфере. Уходящая радиация . 168
§ 6. Приближенное уравнение притока лучистой энергии в атмосфере 181
Литература 188

Глава V. Изменение температуры и давления с высотой в свободной атмосфере.
§ 1. Основное уравнение статики 189
§ 2. Зависимость между изменениями давления на земле и на высоте и средней температурой воздушного столба 198
§ 3. Изменения состояния вертикального столба воздуха при адиабатических его изменениях 201
§ 4. Геопотенциал и его применение в статике атмосферы 210
§ 5. Распределение температуры по высоте в свободной атмосфере 219
§ 6. Инверсии 223

Глава VI. Кинематика атмосферных движений.
§ 1. Введение 239
§ 2. Линии тока 239
§ 3. Особенности линий тока на плоскости 241
§ 4. Линии тока на различных высотах 252
§ 5. Линии тока в пространстве 255
§ 6. Определение вертикальной скорости из уравнения неразрывности 262
§ 7. Определение средних значений вертикальной скорости 271
§ 8. Циркуляция и протечение 275
§ 9. Некоторые сведения из гидродинамики. Плоское движение несжимаемой жидкости 276
§ 10. Линии тока в вертикальной плоскости 287
§ 11. Вихревые цепочки 284
§ 12. Теория А. А. Фридмана порывистости ветра 290
Литература 294

Глава VII. Динамика атмосферы. (Гидродинамика идеальной жидкости).
§ 1. Уравнения гидродинамики. Бароклинические и баротропические жидкости . 296
§ 2. Градиентный ветер 299
§ 3. Вихри в идеальной сжимаемой жидкости. Теоремы Гельмгольца. Теорема Бьеркнеса . . . . . —
§ 4. Условие сохраняемости векториальных линий 311
§ 5. Условия динамической возможности движения сжимаемой жидкости . . . 317
§ 6. О теоретических моделях атмосферных движений. Адиабатическое движение с образованием вихрей 325
§ 7. Теоретическая модель перемещающегося циклона 327
§ 8. Изменение скорости ветра с высотой 336
Литература. 339
Таблицы. 340

Цена 10 р. 50 к.

СКЛАД ИЗДАНИЙ РЕДИЗДАТА ЦУЕГМС СССР
В. О., ГСП 445, 2 ЛИНИЯ, Д. 21, ТЕЛ. 2-57-29.