Й. ДРОНКЕРС

# РАСЧЕТЫ ПРИЛИВОВ

## В РЕКАХ И ПРИБРЕЖНЫХ ВОДАХ

*Перевод с английского*
Б. А. КАГАНА и А. В. НЕКРАСОВА
Под редакцией
К. Д. ТИРОНА

ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД • 1967

УДК 627.163

TIDAL COMPUTATIONS IN RIVERS AND COASTAL WATERS
BY
J. J. DRONKERS

AMSTERDAM
1964

В книге изложены математические и физические основы теории приливов, показано применение этой теории к техническим проблемам в приливных районах морей и рек.

Приводятся основные положения теории приливов. Рассматриваются гидравлические принципы и математические методы определения приливов вдоль побережий, эстуариев и т. д. Обсуждаются как аналитические, так и численные методы расчетов. Особое внимание уделено расчетам явлений, важным для гидротехнических работ.

Монография рассчитана на океанологов, гидрологов, гидротехников, водохозяйственников. Кроме того, она может быть использована как учебное пособие по курсам «Прикладная океанология» и «Водохозяйственные исследования и изыскания» студентами университетов и гидрометеорологических институтов.

2-9-6
79-67

## ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКОВ

Перед исследователями, занимающимися расчетами приливных явлений в эстуариях, реках, каналах и прибрежных водах, встает целый ряд специфических проблем. По сравнению с аналогичными расчетами в открытом глубоком море здесь приходится учитывать деформацию приливной волны на мелководье, адвекцию скорости, нелинейный характер трения, а также эффекты, возникающие при взаимодействии приливной волны и стационарного речного потока. Это усложняет уравнения, описывающие явления, и соответствующие расчеты. Вместе с тем расчеты приливов в узких бассейнах типа каналов несколько упрощаются благодаря тому, что в таких бассейнах можно пренебречь действием силы Кориолиса.

В Советском Союзе расчеты такого рода до сих пор не находили широкого применения. Однако в связи с проектированием и строительством приливных гидроэлектростанций они понадобятся уже в самое ближайшее время. В Нидерландах сами природные условия определили давний и глубокий интерес к проблемам, связанным с приливами в реках и каналах. Многочисленные работы в этой области нашли обобщение в монографии голландского исследователя Й. Дронкерса «Расчеты приливов в реках и прибрежных водах».

Книга начинается общим описанием явления прилива и перечислением различных способов расчета и моделирования этого явления. Подробно разбираются причины приливов, представление прилива с помощью гармонических составляющих, различные способы гармонического анализа. Большое внимание уделяется обоснованию целесообразности гидродинамического и гидравлического моделирования явления. Приводятся основные сведения из гидродинамики, обсуждаются типы волновых движений и подробно анализируются уравнения длинных волн мелкой воды. Решения этих уравнений в зависимости от характера явления и условий, в которых оно протекает, может быть осуществлено тремя различными методами: гармоническим методом, методом характеристик и численным методом.

С помощью гармонического метода обычно получают аналитические решения, описывающие распределение гармонических постоянных приливных составляющих. Применение метода характеристик не связано с ограничением, требующим гармонического характера прилива. Явление рассматривается в целом, а не как сумма отдельных гармонических составляющих. Преимуществом метода характеристик является возможность учета непериодических эффектов, обусловленных, например, метеорологическими причинами. Этот метод позволяет также исследовать перемещения разрывов в движущейся воде. При изложении численных методов расчета приливных явлений автор последовательно проводит мысль о важности и необходимости исследования сходимости решений разностных уравнений к решениям дифференциальных уравнений. Последняя часть работы касается практических приложений этих методов. Рассмотрен целый ряд вопросов, связанных с производством наблюдений, схематизацией эстуариев и русел рек, определением коэффициента Шези, приливными расчетами при перекрытии проходов в дамбах и т. д.

Книга переведена не полностью. В частности, мы сочли возможным опустить те разделы, в которых исследуются причины приливов, разложение приливообразующего потенциала, гармонический анализ приливов, а также некоторые общие вопросы гидродинамики и гидравлики. С этими вопросами читатель может ознакомиться по отечественным и переводным источникам.

*Б. А. Каган, А. В. Некрасов*

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Основы теории приливов были заложены в период подъема классических естественных наук — в годы между появлением работы Коперника и опубликованием «Principia Mathematica» Ньютона в 1687 г. В течение девятнадцатого столетия значение теории приливов для целей навигации все время возрастало. В конце концов прежний качественный подход уступил место количественным методам, основанным на результатах работ Лапласа; например, для описания и предсказания приливов был введен гармонический анализ.

Последние десятилетия ознаменовались началом разработки многих крупных проектов, связанных с дноуглубительными работами, сбросом сточных вод и перекрытием русел рек. В каждом случае при планировании таких проектов возникает необходимость изучения приливных эффектов либо путем расчета, либо с помощью моделей.

Поскольку технические проекты осуществимы лишь в районах ограниченной глубины, то в этой книге рассматриваются главным образом приливные расчеты в прибрежных водах и реках. Приливы в океанах здесь не рассматриваются, однако читатель может ознакомиться с ними по книге «Море», изданной недавно под редакцией М. Н. Хилла, а также по «Физической океанографии» А. Дефанта.

Следует отметить, что под «приливными расчетами» подразумевается как гармонический анализ приливов, так и расчеты распространения приливов.

Исследование приливов в Нидерландах были в значительной степени стимулированы работами Комитета по Зёйдер-Зе под руководством великого физика Х. А. Лоренца (1918—1926). После этого наиболее полное исследоваие по длинным волнам, включая приливы в реках и прибрежных водах, было опубликовано в диссертации Шёнфельда (1951). В качестве введения в приливную гидравлику можно рекомендовать книгу Г. Б. Пиллсбери.

В диссертации Шёнфельда и в работе «Приливные расчеты в мелководных районах» Дронкерса и Шёнфельда (1955) был дан обзор методов приливных расчетов вплоть до 1955 г. С тех пор получило быстрое развитие использование электронных вычислительных машин.

Это оказало влияние на технику приливных расчетов. В данной книге читатель найдет изложение вопросов, связанных с указанным развитием вычислительной математики, хотя теоретические основы ее находятся еще на самой ранней стадии развития.

*ГЛАВА 1*

# УРАВНЕНИЯ ДЛИННЫХ ВОЛН В МЕЛКОЙ ВОДЕ

## 1. ОБОЗНАЧЕНИЯ

На рис. 1.1 приводятся различные обозначения, которые будут использованы в этой главе. В нестационарном потоке $CD$ представляет собой положение среднего уровня, обычно не параллельное дну, $EG$ означает наивысший уровень воды (полная

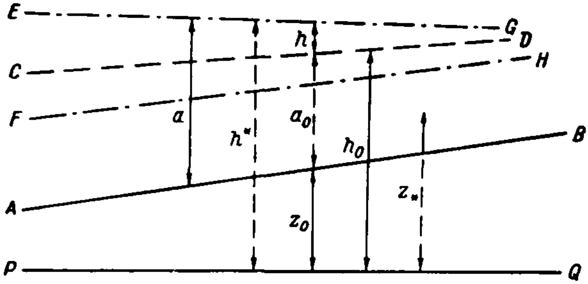



Рис. 1.1.

вода), $FH$ — наинизший уровень (малая вода). Далее, $a$ обозначает расстояние от дна до поверхности воды; $a_0$ — расстояние от дна до среднего уровня; $h^*$ и $h_0$ — те же расстояния от некоторой исходной плоскости $PQ$ в момент $t$ и, наконец, под $h$ понимается высота поверхности волны, отсчитываемая от среднего уровня в момент $t$.

## 2. УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ ДЛЯ ДЛИННЫХ ВОЛН В МОРЕ

Пусть оси $x$ и $y$ декартовой системы координат расположены в исходной горизонтальной плоскости, ось $z$ направлена вертикально вверх. Направление вращения системы координат выбирается против часовой стрелки. Пусть $z_0$ представляет собой ординату дна, отсчитываемую от выбранной исходной плоскости, а $h^*$ — расстояние от этой плоскости до поверхности воды, причем $z_0$ является функцией $x$ и $y$, а $h^*$ — функцией $x$, $y$ и $t$.

Для вывода уравнения неразрывности в рассматриваемом случае длинных волн из уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.1}$$

необходимо потребовать выполнения определенных граничных условий на поверхности и на дне. В качестве последнего мы должны задать условия скольжения или обращения скорости жидкости в нуль. Если положение граничной поверхности описывается уравнением $F(x, y, z, t) = 0$, то в любой точке поверхности соблюдается условие

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} + w\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

так как частица будет оставаться на поверхности, если $F(t+\delta t, x+u\delta t, y+v\delta t, z+w\delta t) = 0$, где $\delta t$ — малый отрезок времени. Поскольку на дне $z = z_0$, то $F = z - z_0(x, y)$ и мы получаем

$$u\frac{\partial z_0}{\partial x} + v\frac{\partial z_0}{\partial y} - w = 0, \tag{2.2}$$

а на свободной поверхности $z = h^*(x, y, t)$

$$\frac{\partial h^*}{\partial t} + u\frac{\partial h^*}{\partial x} + v\frac{\partial h^*}{\partial y} - w = 0. \tag{2.3}$$

Интегрируя (2.1), находим

$$\int_{z_0}^{h^*} \frac{\partial u}{\partial x}\,dz + \int_{z_0}^{h^*} \frac{\partial v}{\partial y}\,dz + w(x, y, h^*) - w(x, y, z_0) = 0. \tag{2.4}$$

Одновременно мы можем записать

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{z_0}^{h^*} u\,dz = u(x, y, h^*)\frac{\partial h^*}{\partial x} - u(x, y, z_0)\frac{\partial z_0}{\partial x} + \int_{z_0}^{h^*} \frac{\partial u}{\partial x}\,dz.$$

Соответствующее соотношение получается и для

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{z_0}^{h^*} v\,dz.$$

Из (2.2), (2.3), (2.4) и приведенных выше соотношений имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{z_0}^{h^*} u\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{z_0}^{h^*} v\,dz + \frac{\partial h^*}{\partial t} = 0. \tag{2.5}$$

Данные непосредственных наблюдений показывают, что в пределах всей толщи мелкого моря вертикальные профили функций $u$ и $v$ являются подобными.

На основании (2.5) можно также записать, что

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial h^*}{\partial t}=0, \qquad (2.6)$$

где $q_x$ и $q_y$ — $x$ и $y$-компоненты полного потока в точке $(x, y)$, проходящего за единицу времени через вертикальное сечение единичной ширины.

В теории длинных волн в мелкой воде часто используют средние по вертикали значения $u$ и $v$. Поэтому если ввести глубину и высоту $h$ поверхности над средним уровнем моря, так чтобы $h^*-z_0=a_0+h$ (см. рис. 1.1), то уравнение неразрывности в море примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}(a_0+h)u+\frac{\partial}{\partial y}(a_0+h)v+\frac{\partial h}{\partial t}=0. \qquad (2.7)$$

Нетрудно видеть, какие упрощения необходимо сделать в (2.6), чтобы получить (2.7). Если предварительно ввести средние значения $u$ и $v$, то наиболее простой способ получения (2.7) сводится к вычислению приращения жидкости в колонке воды прямоугольного сечения $\Delta x\Delta y$. Пренебрегая членами второго порядка малости, имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\{u(a_0+h)\Delta y\}\Delta x+\frac{\partial}{\partial y}\{v(a_0+h)\Delta x\}\Delta y=-\frac{\partial h}{\partial t}\Delta x\Delta y,$$

откуда и следует формула (2.7).

## 3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ДЛИННЫХ ВОЛН В МОРЕ

### 3.1. Общие соображения

Движение воды, которым сопровождается распространение длинных волн, является нестационарным и непрерывно меняющимся. Поскольку поток в обычных условиях резко не меняется, движение можно считать непрерывным. Можно предположить, что ускорение частиц воды в направлении оси $z$ ($\partial w/\partial z$) пренебрежимо мало по сравнению с ускорением силы тяжести $g$, если глубина жидкости мала по сравнению с длиной волны; поэтому член $\partial w/\partial z$ можно опустить. Кроме того, в случае длинных волн можно пренебречь также скоростью частиц воды в направлении $z$, т. е. положить, что $w=0$.

Таким образом, получаются следующие уравнения движения:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho\sum F_x, \tag{3.1}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho\sum F_y, \tag{3.2}$$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho\sum F_z, \tag{3.3}$$

где $u$ и $v$ — горизонтальные компоненты скорости, осредненные по вертикали от дна до поверхности моря.

Если принять во внимание вращение Земли, то в этих уравнениях должна быть учтена сила Кориолиса, о которой будет говориться в следующем параграфе. Впервые это сделано в работе Лапласа. Поскольку компонента силы Кориолиса в вертикальном направлении пренебрежимо мала по сравнению с ускорением $g$, то составляющие этой силы в последующем будут определяться только в направлении осей $x$ и $y$.

Дополнительными внешними силами $\rho\Sigma F$, воздействующими на частицу жидкости, являются: вес единичного объема $\rho g$, сила трения, возникающая у дна и под влиянием действия ветра на водную поверхность. Внутренними силами, обусловленными вязкостью, будем пренебрегать. Так как в этой книге рассматривается движение в реках и прибрежных водах, мы не включили в уравнения движения приливообразующих сил; составляющие этих сил записываются следующим образом:

$$\rho\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \rho\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \rho\frac{\partial V}{\partial z},$$

где $V$ — потенциал суммарной силы Луны и Солнца. Если ось $z$ направлена вертикально вверх, то из (3.3) следует

$$p=\rho g(h^*-z)+p_0, \tag{3.4}$$

где $z=h^*$ — уравнение свободной поверхности относительно исходной плоскости ($PQ$ на рис. 1.1), а $p_0$ — атмосферное давление.

Если свободная поверхность воды совпадает со средним уровнем моря и если средний уровень моря почти горизонтален, то $h^*$ можно заменить на $h$, так что

$$p=\rho g(h-z)+p_0. \tag{3.5}$$

В реальных условиях средний уровень является функцией $x$, $y$. Однако для большинства морей его можно считать горизонтальным.

Из (3.4) и (3.5) следует, что давление в любой точке моря (если исключить из рассмотрения атмосферное давление) прямо пропорционально расстоянию от этой точки до свободной поверхности воды и поэтому равно гидростатическому давлению, соответствующему глубине точки.

В случае штормовых нагонов иногда необходимо рассматривать атмосферное давление $p_0$ как функцию $x$, $y$, $t$. В остальных случаях $p_0$ может приниматься неизменным в пространстве и во времени.

Пусть $\overline{p_0}$ представляет собой среднее значение $p$ в плоскости $x$, $y$ в момент $t$ или значение давления за пределами штормовой зоны. Тогда в области шторма должно выполняться соотношение

$$p = \overline{p_0} + \Delta p_0.$$

Обычно (в зоне депрессии) $\Delta p_0$ заменяют на

$$\Delta p_0 = -\rho g h',$$

где под $h'$ понимают высоту столба воды единичного сечения. Следовательно,

$$p = \overline{p_0} + \rho g (h - h') - \rho g z$$

и соответственно можно записать

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial}{\partial x}(h - h'), \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial}{\partial y}(h - h'). \tag{3.6}$$

В последующих разделах будет подробно рассмотрено влияние силы Кориолиса и трения. В конце главы, в разд. 3.4, будет записан окончательный вид уравнений длинных волн в море.

## 3.2. Горизонтальные компоненты ускорения Кориолиса

В том случае, когда оси декартовых координат закреплены в некоторой точке, движение частицы ускоряется под действием силы, возникающей при вращении Земли вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega$. Благодаря пренебрежению вертикальной составляющей скорости в уравнениях движения можно опустить вертикальную компоненту кориолисова ускорения.

Пусть ось $PZ$ системы координат направлена на север параллельно оси Земли, а $PX$ и $PY$ выбраны так, что $PX$ совпадает с $PY$ при повороте этой оси на 90° в направлении вращения Земли. Кроме того, пусть $OX'$ и $OY'$ обозначают оси неподвижной системы координат, а $\theta$ — угол между $OY'$ и $PY$, положительный в направлении вращения Земли.

На рис. 1.2 показано положение систем координат; $O$ — центр Земли, а $P$ — точка на ее поверхности.

Далее, пусть $d\theta/dt = \omega$ представляет собой угловую скорость вращения Земли, а $(p, q, z)$ — координаты точки $P$. Координаты

$x$, $y$, $x'$, $y'$ связаны между собой следующими соотношениями:

$$x' = p + x\cos\theta - y\sin\theta,$$
$$y' = q + x\sin\theta + y\cos\theta.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt}\cos\theta - \frac{dy}{dt}\sin\theta - (x\sin\theta + y\cos\theta)\,\omega,$$

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{dx}{dt}\sin\theta + \frac{dy}{dt}\cos\theta + (x\cos\theta - y\sin\theta)\,\omega.$$

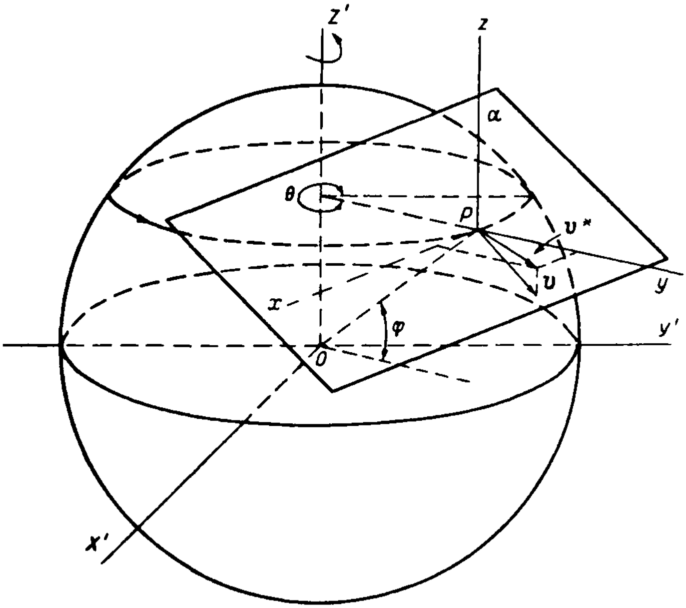



Рис. 1 2.

Тогда значения $dx/dt$, $dy/dt$ являются компонентами вектора скорости $\mathbf{v}^*$, расположенного в плоскости $x$, $y$ подвижной системы, а $dx'/dt$ и $dy'/dt$ — составляющими фактической скорости фиксированной системы. Вектор $\mathbf{v}^*$ является проекцией вектора скорости $\mathbf{v}$ частицы, расположенной в плоскости $\alpha$, горизонтальной к поверхности Земли в точке $P$ (см. рис. 1.2).

Найдем проекции фактической скорости на оси $X$ и $Y$, компонентами которой в фиксированной системе будут $dx'/dt$, $dy'/dt$:

$$\frac{dx'}{dt}\cos\theta + \frac{dy'}{dt}\sin\theta = \frac{dx}{dt} - \omega y,$$

$$-\frac{dx'}{dt}\sin\theta + \frac{dv'}{dt}\cos\theta = \frac{dy}{dt} + \omega x.$$

Аналогично можно определить проекции компонент ускорения частицы $d^2x'/dt^2$, $d^2y'/dt^2$ на ось $X$ подвижной системы. Вычисления дают

$$\frac{d^2x'}{dt^2}\cos\theta+\frac{d^2y'}{dt^2}\sin\theta=\frac{d^2x}{dt^2}-2\omega\frac{dy}{dt}-\omega^2x. \tag{3.7}$$

Таким образом, левая часть уравнения представляет собой проекцию вектора фактического ускорения, выраженного в $x'y'z'$ — системе, на ось $X$ системы $xyz$. Проекция вектора на ось $Y$ записывается в виде

$$-\frac{d^2x'}{dt^2}\sin\theta+\frac{d^2y'}{dt^2}\cos\theta=\frac{d^2y}{dt^2}+2\omega\frac{dx}{dt}-\omega^2y. \tag{3.8}$$

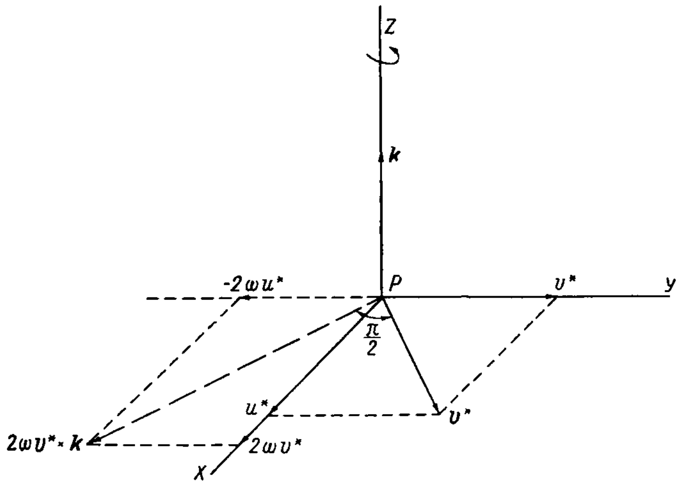



Рис. 1.3.

Следовательно, вектор ускорения в фиксированной системе $d^2x'/dt^2$ и т. д. может быть заменен на вектор в подвижной системе $d^2x/dt^2$ и т. д., если есть центробежное ускорение и ускорение Кориолиса. Компоненты $\omega^2x$ и $\omega^2y$ появились благодаря учету центробежного ускорения, вызванного вращением Земли; они не зависят от скорости $\mathbf{v}^*$ и не требуют дальнейшего обсуждения, поскольку центробежное ускорение включается в наблюдаемое ускорение силы тяжести $g$. Компонентами ускорения Кориолиса являются соответственно $-2\omega v^*$ и $2\omega u^*$, если $u^*=dx/dt$, а $v^*=dy/dt$. Величина этого ускорения составляет $2\omega$ от величины проекции вектора скорости $\mathbf{v}$ на плоскости $XY$. Ускорение Кориолиса перпендикулярно этой проекции и направлено влево от вектора скорости. На рис. 1.3 показано так называемое геострофическое ускорение, которое является не чем иным, как инерционным ускорением. Здесь **k** обозначает единичный вектор в направлении $z$. Геострофическое ускорение по величине равно ускорению Кориолиса, но направлено вправо от вектора скорости. Легко понять, что ускорение Кориолиса для составляющей скорости равно компоненте ускорения Кориолиса для самой скорости. Если обозначить географическую широту места через $\varphi$, то проекция угловой скорости вращения Земли на перпендикулярную ось в точке $P$ будет $\omega \sin\varphi$; следовательно, ускорение Кориолиса в горизонтальной плоскости точки $P$ можно записать как $2\omega \sin\varphi v$. Множитель $2\omega \sin\varphi$ обычно обозначают через $\Omega$. Из предыдущих рассуждений следует, что компоненты силы Кориолиса в системе $xyz$ выражаются следующим образом:

$$-\rho\Omega v \quad \text{и} \quad \rho\Omega u. \tag{3.9}$$

Вывод вертикальной составляющей геострофического ускорения можно найти в книге Праудмэна [102].

### 3.3. Силы, возникающие благодаря придонному трению и действию ветра

Покажем на примере уравнений Навье—Стокса, как представлены в уравнениях движения силы, возникающие благодаря придонному трению и действию ветра.

Рассмотрим сначала придонное трение.

В уравнениях Навье—Стокса трение описывается членами

$$\varepsilon_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

и

$$\varepsilon_1 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \varepsilon_2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Заметим, что коэффициенты $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$, которые обозначают коэффициенты вихревой вязкости в турбулентном потоке, могут иметь различные значения в горизонтальном и вертикальном направлениях, так как протяженность потока в горизонтальной плоскости существенно отличается от протяженности потока в вертикальной плоскости.

В том случае, когда поверхность моря совпадает со средним уровнем, интегрирование этих членов по $z$ от дна до поверхности и деление их на глубину $a_0 + h$ дает

$$\varepsilon_1 \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}\right) + \frac{\varepsilon_2}{a_0 + h}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=h} - \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=-a_0}\right],$$

$$\varepsilon_1 \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2}\right) + \frac{\varepsilon_2}{a_0 + h}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=h} - \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{z=-a_0}\right],$$

где $\bar{u}$ и $\bar{v}$ — средние скорости в пределах всей толщи (от дна до поверхности). Здесь мы пренебрегли членами, содержащими производные от $h$ по $x$ и $y$.

Поскольку члены, содержащие коэффициент $\varepsilon_1$, обычно малы по сравнению с членами, содержащими $\varepsilon_2$, их также можно не учитывать в окончательных уравнениях.

Члены $\varepsilon_2(\partial u/\partial z)_b$ и $\varepsilon_2(\partial u/\partial z)_{-a_0}$ представляют собой соответственно компоненты тангенциального трения на поверхности моря и на дне; их обычно обозначают через $\tau_{s,x}$ и $\tau_{b,x}$. Аналогично определяются $\tau_{s,y}$ и $\tau_{b,y}$.

В экспериментальных и теоретических исследованиях одномерного потока в реках найдено, что придонное трение может быть выражено следующим соотношением:

$$\tau_b = \rho g C^{-2} u^2, \qquad (3.10)$$

где $C$ — коэффициент Шези, а $u$ — средняя по вертикали скорость (мы опустили здесь черточку над $u$).

В океанографических работах и исследованиях в лотках это соотношение записывается следующим образом:

$$\tau_b = \rho \gamma^2 u^2. \qquad (3.11)$$

Отсюда видно, что коэффициент Шези и $\gamma^2$ связаны между собой посредством

$$\gamma^2 = g C^{-2}. \qquad (3.12)$$

Величина коэффициента $C$, а следовательно, и $\gamma$ зависят от отношения высоты шероховатостей дна к глубине, а также от состава грунта.

Эксперименты, выполненные в Нидерландах, показали, что величина $C$ в реках может изменяться в пределах 45—70 м$^{1/2}$/сек. (или 82—127 фут$^{1/2}$/сек.), откуда

$$2 \cdot 10^{-3} < \gamma^2 = g C^{-2} < 5 \cdot 10^{-3}.$$

В подавляющем большинстве случаев величину $C$ принимают равной 50 м$^{1/2}$/сек. (или 90 фут$^{1/2}$/сек.), тем самым полагают, что $\gamma^2 = 4 \cdot 10^{-3}$. Различными исследователями, например Россби [110], Бауденом [7, 9], Ханзеном [56], обнаружено, что в море

$$2{,}4 \cdot 10^{-3} < \gamma^2 < 2{,}8 \cdot 10^{-3}.$$

Расчеты приливов вдоль голландского побережья подтвердили, что величина $C \approx 60$ м$^{1/2}$/сек. (109 фут$^{1/2}$/сек.); это соответствует $\gamma^2 = 2{,}7 \cdot 10^{-3}$. При штормовых нагонах величина $\gamma$, так же как и $C$, может отличаться от указанной выше, поскольку трение ветра о водную поверхность приводит к изменению вертикального профиля скорости. Особенно это заметно вблизи отмелей и берегов, где направление движения в поверхностном слое может отличаться от направления, измеряемого у дна.

Пусть через $\rho F_x^*$ и $\rho F_y^*$ обозначены компоненты объемной силы $F^*$, обусловленной придонным трением, в двухмерном потоке. Тогда

$$\rho F_x^* = -(a_0 + h)^{-1} \tau_{b,x}, \quad \rho F_y^* = -(a_0 + h)^{-1} \tau_{b,y},$$

так как направление $F^*$ противоположно направлению скорости.

Для двухмерного потока должны выполняться следующие соотношения:

$$\rho F_x^* = -\frac{\rho g}{C^2 (a_0 + h)} |\mathbf{v}| u; \quad \rho F_y^* = -\frac{\rho g}{C^2 (a_0 + h)} |\mathbf{v}| v, \quad (3.13)$$

где $|\mathbf{v}|$ — модуль скорости, равный $(u^2 + v^2)^{1/2}$.

Соображения, подобные тем, которые использовались при выводе выражения для придонного трения, могут быть привлечены и для вывода формулы, определяющей воздействие ветра на движение воды. Однако эта задача является более сложной, так как в мелкой воде воздействие ветра на водную поверхность приводит к изменению вертикального распределения скорости.

Следовательно, на наклоне водной поверхности, обусловленном воздействием ветра, сказывается также влияние придонного трения. Поэтому в формуле для расчета воздействия ветра должны одновременно учитываться эффекты придонного и поверхностного трения.

Можно легко показать, что

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \left( \frac{\tau_b}{\tau_s} + 1 \right) \frac{\tau_s}{(a_0 + h) \rho g};$$

здесь использованы обозначения, указанные на рис. 1.1.

Величина коэффициента $(\tau_b/\tau_s)+1$ изменяется в зависимости от состояния потока. Для турбулентного потока величина этого коэффициента, по данным различных исследователей, заключается в диапазоне 1,15—1,30.

Теоретические формулы для расчета воздействия ветрового потока в разное время предлагались Хельстромом [62], Келеганом [76], Тийссе [143] и др.

Для поверхностного трения, обусловленного ветром, эти формулы, так же как и формулы для придонного трения, имеют вид

$$\tau_s = \gamma^2 \rho_a V^2, \quad (3.14)$$

где $\rho_a$ — плотность воздуха, а $V$ — скорость ветра на уровне стандартных измерений. Манк и другие исследователи нашли, что

$$\gamma^2 \approx 0{,}0026$$

для скорости ветра, изменяющейся примерно от 6 до 20 м/сек.

Если положить $\rho_a \approx 1{,}25 \cdot 10^{-3}$ (CGS), то

$$\gamma^2 \rho_a \approx 3{,}2 \cdot 10^{-6}.$$

Подобные же величины коэффициента трения были найдены для Зёйдер-Зе в Нидерландах для моментов до и после перекрытия этого залива. В том случае, когда в $\gamma$ входит множитель $n = (\tau_b/\tau_s) + 1$, представляется, что

$$3{,}5 \cdot 10^{-6} < \gamma^2 \rho_a < 4{,}5 \cdot 10^{-6}.$$

Эта величина найдена для скоростей ветра, изменяющихся в диапазоне между 15 и 25 м/сек. Следует отметить, что глубина Зёйдер-Зе очень мала, она колеблется между 4 и 10 м. Развитие теории взаимодействия ветрового потока с подстилающей водной поверхностью нашло отражение в недавних работах Филлипса [94], Стюарта [133], Шмитца [118, 119], Доррейстейна [28] и Савиля [117].

В озерах и морях, где ветер создает сильное волнение, коэффициент $\gamma^2$ зависит также от высоты, крутизны и скорости распространения волн (см., например, Герритсен [46]).

Из предыдущего обсуждения следует, что компоненты $W^*_x$ и $W^*_y$ силы ветра, отнесенной к единице объема, равны

$$W^*_x = \zeta \frac{V^2}{a_0 + h} \cos \psi, \qquad W^*_y = \zeta \frac{V^2}{a_0 + h} \sin \psi, \tag{3.15}$$

где $V$ — скорость ветра; $\zeta$ определяется из

$$\zeta = \gamma^2 \rho_a, \tag{3.16}$$

а $\psi$ — угол между направлением ветра и осью $x$.

Сравнение значений $\gamma^2$, полученных для рек и морей, показывает, что $\gamma^2$ зависят также от глубины. Для малых глубин $\gamma^2$ в общем будет тем больше, чем меньше глубина. Аналогичная зависимость получена также и для $C$; это видно, например, из формулы $C = 18 \lg 12 a_0 d^{-1}$ и из формулы Маннинга.

Коэффициент $\gamma^2$ зависит от шероховатости дна и состава грунтов; поэтому величину $\gamma^2$ необходимо определять экспериментально, особенно в мелких реках. В более глубоких морях зависимость величины $\gamma^2$ от глубины проявляется слабее.

Наконец, отметим, что на движение воды, и в частности на вертикальное распределение скорости во время прилива, может оказывать влияние проникновение соленых вод; это влияние особенно сильно сказывается в устьях экстуариев и рек. Соленая вода, проникающая вдоль дна, располагается в нижних слоях, а в верхних слоях находится пресная вода стокового происхождения (рис. 1.4). Вследствие перемешивания, происходящего в течение всего приливного периода, плотность воды будет более или менее плавно изменяться.

Поскольку во время прилива водные массы движутся в сторону суши, а во время отлива — в сторону моря, то плотность воды в любой точке будет непрерывно изменяться в течение всего приливного периода.

Особенно сложное движение будет наблюдаться в момент смены течений, когда средняя скорость равна нулю. В этом случае у дна частицы воды могут двигаться вверх по течению, а на поверхности — вниз по течению; это явление может иметь место в течение некоторого промежутка времени до и после момента наступления смены течений. Подробное исследование движения соленой и пресной воды в устьях эстуариев может опираться только на большие ряды наблюдений, так как, по-видимому, этот процесс зависит главным образом от местных особенностей, как это было обнаружено в Роттердамском судоходном канале в Нидерландах. Можно построить трехмерную (в пространстве $xzt$) модель движения соленых и пресных вод в реках, ширина которых не очень велика.

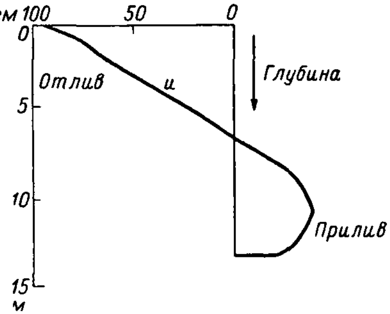



Рис. 1 4.

Всесторонний анализ этого явления можно найти в работах различных авторов, например, Праудмэна [102] (для случая двухмерного водного потока), Шифа и Шёндельфа [120] и Розе [109].

В последнее время был выполнен ряд обширных теоретических исследований этой проблемы; анализ этих работ выходит за рамки книги.

Между тем распространение приливов в устьях рек с достаточной точностью можно исследовать и без учета распределения плотности по глубине — путем подбора соответствующих значений коэффициент $C$. Обоснованием такого метода служат следующие соображения.

Распространение приливных волн определяется главным образом направлением средних скоростей. В момент смены течений придонное трение мало, так что неопределенность в оценке коэффициента трения в этот период является несущественной. Протяженность участка, на котором встречаются соленые и пресные воды, обычно невелика по сравнению с длиной участка реки, подверженного действию прилива. Однако трение влияет на распространение приливной волны в основном в тот период, когда имеют место более сильные скорости, и поэтому изменение коэффициента трения, как показали детальные исследования приливных явлений в устье Роттердамского судоходного канала (Нидерланды), оказывается сравнительно умеренным.

Обзор работ, посвященных изучению циркуляции в эстуариях и турбулентного перемешивания, возникающего в зоне стыка соленых морских и пресных речных вод, можно найти в статье Камерона и Притчарда [142].

Необходимо отметить также, что в воде, плотность которой изменяется с глубиной, на некоторой промежуточной глубине ниже свободной поверхности могут возникать внутренние волны. Они могут развиваться на приливном фронте, возникающем в зоне стыка соленых и пресных вод; амплитуды этих волн могут превосходить амплитуды обыкновенных волн на свободной поверхности (см. [141]). Отмеченное явление в этой книге не рассматривается.

Кроме того, в этом разделе не будет учитываться влияние силы Кориолиса на вертикальное распределение скорости. Это допустимо для мелких вод, например, там, где глубины меньше 15 м. Примером такой области могут служить прибрежные воды Северного моря.

В океанах наряду с силами трения должна учитываться также сила Кориолиса. Фундаментальной работой в этом направлении является работа Экмана [38], в которой впервые исследовано влияние силы Кориолиса на океанические течения и перенос масс, вызываемый ветром в однородном море (см. также работы Дефанта [25], Праудмэна [102], Сен-Гили [114] и Веландера [151]. Поскольку эта книга посвящена изучению приливных явлений в прибрежных водах и реках, мы не будем рассматривать проблемы Экмана и отсылаем интересующихся этим вопросом читателей к книгам Свердрупа, Джонсона и Флеминга [134], Эккарта [141] и работе Фофонова [141], в которых приводятся общие уравнения движения для моря и исследуется динамика океанических течений.

## 3.4. Уравнения движения

После введения силы Кориолиса (см. (3.9), а также эмпирических формул для силы трения $F^*$ и силы ветра $W^*$ [(3.13) и (3.15)] уравнения движения для случая длинных волн, распространяющихся в горизонтальной плоскости в море, в соответствии с (3.1), (3.2) и (3.9) принимают вид

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}-\Omega v\right]=-\rho g\frac{\partial (h-h')}{\partial x}-$$

$$-\frac{\rho g}{C^2(a_0+h)}|\mathbf{v}|u+\frac{\zeta V^2\cos\psi}{a_0+h}, \qquad (3.17)$$

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\Omega u\right]=$$

$$=-\rho g\frac{\partial(h-h')}{\partial y}-\frac{\rho g}{C^2(a_0+h)}|\mathbf{v}|v+\frac{\zeta V^2\sin\psi}{a_0+h}, \qquad (3.18)$$

где $|\mathbf{v}|$ определяется как $(u^2+v^2)^{1/2}$ и, кроме того, предполагается, что исходная плоскость совпадает с плоскостью среднего уровня, которая считается горизонтальной. Далее, под $a_0$ понимается глубина, отсчитываемая от поверхности среднего уровня, а под $a_0+h$ — глубина, отсчитываемая от фактической поверхности воды (см. рис. 1.1).

Уравнение неразрывности, которое вместе с уравнениями движения определяет движение длинных волн в море, дается формулой (2.7).

Если влияние ветра и изменение атмосферного давления малы и ими можно пренебречь, то уравнения (3.17) и (3.18) сводятся к виду

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial t}+v\frac{\partial u}{\partial y}-\Omega v\right]=$$

$$=-\rho g\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{\rho g}{C^2(a_0+h)}|\mathbf{v}|u, \qquad (3.19)$$

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\Omega u\right]=$$

$$=-\rho g\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\rho g}{C^2(a_0+h)}|\mathbf{v}|v. \qquad (3.20)$$

Эти уравнения лежат в основе всех исследований приливов в мелководных морях. Для более глубоководных морей члены, описывающие трение в (3.19) и (3.20), можно заменить линейными членами $\lambda u$ и $\lambda v$ соответственно, где $\lambda$ может быть аппроксимировано в случае преобладающих синусоидальных полусуточных (или суточных) приливов формулой вида

$$\lambda=\frac{8\rho g}{3\pi C^2 a_0}v_m. \qquad (3.21)$$

Здесь под $v_m$ следует понимать среднюю величину максимальной скорости в приливном районе, если в пределах этого района $v_m$ существенно не меняется. Вывод коэффициента $8v_m/3\pi$ можно найти в главе 2, разд. 4.2. При синусоидальных волнах Кельвина соотношение (3.2) представляет собой точную формулу (см. также главу 2, разд. 2.2).

## 4. УРАВНЕНИЯ ДЛИННЫХ ВОЛН В РЕКЕ И ЭСТУАРИИ

В реке вертикальная протяженность потока воды ограничена снизу дном, поэтому движение воды можно считать одномерным. В общем дно рек не является горизонтальным. Если же принять дно горизонтальным и устремить положительное направление оси $x$ вдоль оси русла, в сторону движения потока (при этом считаем, что скорость будет положительной в том же направлении), то уравнения движения для реки, согласно (3.17), (3.18), при $h'=0$ и

$$W_x = \zeta(\cos\psi)V^2 \quad \text{и} \quad W_y = \zeta(\sin\psi)V^2$$

запишутся следующим образом:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -\rho g\frac{\partial h^*}{\partial x} - \frac{\rho g}{C^2 a}|u|u + \frac{W_x}{a}, \tag{4.1}$$

$$\rho\Omega u = -\rho g\frac{\partial h^*}{\partial y} + \frac{W_y}{a}, \tag{4.2}$$

а уравнение неразрывности, которое следует из (2.6) при $q_x = au$, будет выглядеть так:

$$\frac{\partial}{\partial x}(au) + \frac{\partial h^*}{\partial t} = 0. \tag{4.3}$$

Здесь при записи выражения для силы трения $F^*$ использованы формула Шези (3.13) и соотношение $|\mathbf{v}| = |u|$, поскольку для случая приливного потока формула Маннинга обычно не применяется. Множитель $|u|u$ вводится для описания реверсивности потока, который имеет такой характер в период между приливом и отливом; исходная плоскость $PQ$ считается горизонтальной.

Необходимо обратить внимание на то, что уравнение (4.3) оказывается справедливым только в том случае, когда ширина района накопления вод равна ширине потока, и притом ширина потока остается неизменной.

Формула для переменной $b_s$ и $b \neq b_s$ будет дана ниже.

В сравнительно широких реках влияние силы Кориолиса может приводить к заметным различиям в высотах уровня на концах поперечного сечения реки (т. е. на обоих берегах реки), хотя поперечные составляющие скорости или вообще равны нулю, или пренебрежимо малы. Длинные волны с движением частиц только в одном направлении, в которых учитывается поперечная составляющая силы Кориолиса, называются волнами Кельвина (см. главу 2, разд. 2). В реках небольшой ширины можно пренебречь влиянием силы Кориолиса и действием ветра в направлении, перпендикулярном руслу реки; в этом случае уравнение (4.2) можно опустить.

В общем, скорости будут меняться от точки к точке в поперечном сечении реки. В том случае, когда изменения скорости в поперечном сечении по отношению к средней скорости в момент $t$ малы (за исключением районов, непосредственно прилегающих к берегам), мы можем применять уравнение (4.1) для средней скорости $u$. В этом уравнении поперечная неоднородность поля скорости может быть учтена введением поправочных коэффициентов в члены $\partial u/\partial t$ и $u\partial u/\partial x$ в (4.1). Заменим эти члены на $\alpha_1 \partial u/\partial t$ и $\alpha_2 u\partial u/\partial x$, причем $\alpha_1$ определим на основании соотношения

$$\alpha_1 = \frac{\int u_A^2 dA}{uA},$$

где $A$ — площадь поперечного сечения, а $\alpha_2$ дается выражением

$$\alpha_2 = \frac{\int u_A^3 dA}{u^3 A}.$$

При дальнейшем выводе уравнений движения и неразрывности в качестве переменных по $x$ и $t$ можно выбрать либо $h$ и $u$, либо $h$ и $Q$. Здесь $h$ означает высоту волны над средним уровнем, а $Q$ — расход воды в момент $t$.

Приведем сперва вывод уравнений, в которых независимыми переменными являются $h$ и $Q$.

Пусть $A(x, t)$ обозначает площадь поперечного сечения русла реки, а $b_s(x, t)$ — ширину русла; ширина может зависеть также и от высоты волны. Тогда расход $Q$ равен

$$Au = (a_0 + h)\, b_s u.$$

Если превышение дна над исходной горизонтальной плоскостью обозначить через $z_0$, то можно получить (см. рис. 1.1), что

$$h^* = z_0 + a_0 + h. \tag{4.4}$$

Тогда из (4.1) следует, что

$$\alpha_1 \left[\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q}{a_0 + h}\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{Q}{b_s}\frac{\partial b_s}{\partial t}\right] +$$

$$+ \alpha_2 \frac{Q}{A}\left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q}{a_0 + h}\left(\frac{da_0}{dx} + \frac{\partial h}{\partial x}\right) - \frac{Q}{b_s}\frac{\partial b_s}{\partial x}\right] =$$

$$= -gA\left(\frac{dz_0}{dx} + \frac{da_0}{dx} + \frac{\partial h}{\partial x}\right) - \frac{g}{C^2 A (a_0 + h)} |Q|\, Q + \frac{b_s}{\rho} W. \tag{4.5}$$

Поскольку $b_s$ мы считаем функцией $h$, то $\partial b_s/\partial t$ можно заменить на $(\partial b_s/\partial h)\partial h/\partial t$, а $\partial b_s/\partial x$ — на $(\partial b_s/\partial h)\partial h/\partial x$, где $\partial b_s/\partial h$ является известной функцией $h$.

Если $b_s$ не зависит от $x$, то уравнение неразрывности получается из (4.3):

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+b_s\frac{\partial h}{\partial t}=0.$$

Однако в случае, когда $b_s$ зависит от $x$ и, кроме того, между руслом и соседними районами имеет место водообмен, мы не имеем права использовать уравнение (4.3). В этом случае в уравнении (2.7) необходимо сохранить член $\partial(a_0+h)v/\partial y$.

Можно, однако, получить уравнение неразрывности значительно более простым путем. Пусть $b$ обозначает ширину поверхности района накопления воды ($b \geqslant b_s$). Тогда уравнение

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+b\frac{\partial h}{\partial t}=0 \tag{4.6}$$

показывает, что разность расходов воды в двух сечениях $x$ и $x+dx$, а также накопление или потери воды за счет выпадения осадков или понижения уровня должны уравновешивать друг друга.

Если в определенном сечении реки расход воды увеличивается или уменьшается за счет дополнительного стока (например, берегового стока), то уравнение (4.6) для единичного сечения будет иметь вид

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+b\frac{\partial h}{\partial t}+q=0. \tag{4.7}$$

Когда рядом с речным руслом имеется большой район накопления воды, то проток воды или сток из него будет оказывать влияние на движение в главном русле. Это влияние можно учесть в уравнениях движения на основании следующих соображений.

Рассмотрим сперва случай, когда вода поступает из района накопления воды в русло реки, причем уровень воды в реке ниже уровня воды в районе накопления. Скорость воды будет увеличиваться от нуля до значений скорости в русле реки. Количество воды, которое приходится на единицу длины и поступает из района накопления в речное русло, равно $(b-b_s)\partial h/\partial t$, а сила, вызывающая ускорение этого объема воды и отнесенная к единице площади поперечного сечения $A$, равна $\{\rho u(b-b_s)/A\}\partial h/\partial t$. Поскольку движение воды, поступающей из района накопления вод и попадающей в русло, ускоряется исключительно за счет перепада уровней, в уравнении (4.5) необходимо учесть эту дополнительную силу. Возникает вопрос, как далеко будет распространяться влияние этой силы на скорости частиц воды в самом районе накопления.

Очевидно, область влияния будет тем меньше, чем больше скорости частиц в районе накопления воды. Поэтому необходимо ввести коэффициент $j_1$, и тогда дополнительный член, который нужно учесть в левой части (4.1), будет представлен в виде

$$-\rho j_1 u \frac{(b-b_s)}{A}\frac{\partial h}{\partial t}, \tag{4.8}$$

где $0 \leqslant j_1 \leqslant 1$. Этот член имеет отрицательный знак потому, что его влияние противоположно влиянию наклона водной поверхности.

Если уровень в реке выше соответствующего уровня в районе накопления, то вода потечет из русла в район накопления, где ее количество движения будет расходоваться на трение. В этом случае допустимо пренебречь этим членом и положить $j_1=0$.

После внесения (4.8) и замены члена $(Q/A)\partial Q/\partial x$ на $-(bQ/A)\partial h/\partial t$ (в соответствии с (4.6)) уравнение (4.5) запишется в виде

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{da_0}{dx}\right)\left(1-\frac{\alpha_2 Q^2}{g(a_0+h)A^2}\right)-\frac{\alpha_2 Q^2}{gA^2 b_s}\frac{\partial b_s}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x}-$$

$$-\frac{(\alpha_1 b_s+\alpha_2 b)}{gA^2}Q\frac{\partial h}{\partial t}-j_1\frac{(b-b_s)}{gA^2}Q\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\alpha_1 Q}{gb_s A}\frac{\partial b_s}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial t}+$$

$$+\frac{\alpha_1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{1}{C^2A^2(a_0+h)}|Q|Q-\frac{W}{\rho g(a_0+h)}+I=0. \tag{4.9}$$

где $dz_0/dx=I$.

Сравнение в (4.9) следующих друг за другом трех членов, содержащих множитель $\partial h/\partial t$, показывает, что наибольшее значение будет иметь первый член. Только в том случае, когда $b$ значительно больше $b_s$, второй член также может оказаться существенным. В этом случае величина коэффициента $j_1$ будет совершенно неопределенной, так как если вдоль главного русла встречаются большие районы накопления воды и если в этих районах имеется много оврагов, то основная часть воды, поступающая в район накопления или вытекающая из него, будет скапливаться в тех фиксированных точках, где овраги примыкают к основному руслу. В результате вдоль основного русла можно будет наблюдать неправильное распределение скорости, если только оно не приспособится к этому нарушению режима в движении потока. В таких случаях можно разделить всю длину реки на участки, в пределах каждого из которых речное русло и скорость имеют правильное направление, и затем применить уравнения динамики к каждому такому участку в отдельности. В тех местах, где к главному руслу примыкают овраги, величина $Q$ будет изменяться в соответствии со стоком воды из оврагов. Благодаря этому член, содержащий коэффициент $j_1$, обычно опускается. Если этот член является существенным, то величину $j_1$ необходимо определять по данным непосредственных измерений потока, направленного из реки в район накопления или обратно.

В практических приложениях общие уравнения движения (4.9) часто можно упростить на основании следующих соображений.

1. Для рек, не зарегулированных полностью, величина коэффициента $\alpha_1$ имеет порядок 1,03—1,05, а величина коэффициента $\alpha_2$ порядка 1,1—1,2. Поскольку в реках, подверженных влиянию приливов, член Бернулли $\rho u\ \partial u/\partial x$ оказывается зачастую малым по сравнению с другими членами в (4.1), то им часто пренебрегают. Пренебрежение этим членом означает, что в (4.9) формально можно положить $\alpha_2 = 0$.

Из уравнения неразрывности следует, что в случае превышения ширины района накопления над шириной речного русла членом $\rho u\ \partial u/\partial x$ часто нельзя пренебрегать.

Если максимальные скорости во время прилива и отлива остаются примерно одинаковыми или слабо меняются вдоль речного русла, то членом Бернулли $\rho u\ \partial u/\partial x$ можно пренебречь в период максимальных скоростей. Но тогда этим членом допустимо пренебрегать также и в течение всего приливного периода. Если речное русло аппроксимируется некоторым количеством участков, в пределах каждого из которых глубина остается неизменной и при переходе от одного участка к другому меняется скачками, то оказывается, что в большинстве случаев лучше пренебречь членом Бернулли. В противном случае его необходимо учесть не только для каждого участка реки, но также и для областей перехода от одного участка к другому (см. разд. 7). Обычно считают $\alpha_1$ равным единице, не учитывая того обстоятельства, что член $\rho\ \partial u/\partial t$ является одним из главных членов в (4.1). Неопределенность в аппроксимации реального речного русла, а также погрешности, появляющиеся при выборе коэффициента Шези, часто оказываются более важными, чем учет влияния отклонения $\alpha_1$ от единицы (см. главу 5).

2. Часто можно пренебрегать множителем $\dfrac{\alpha_2 Q^2}{g(a_0+h)A^2}$ или $\dfrac{\alpha_2 u^2}{g(a_0+h)}$. Это допустимо всякий раз, когда $u$ мало по сравнению с критической скоростью (см. главу 3, разд. 4). Таким образом,

$$u \ll (g(a_0+h))^{1/2}.$$

Аналогично можно пренебречь членом $\dfrac{\alpha_2 Q^2}{gA^2 b_s}\ \dfrac{\partial b_s}{\partial h}\ \dfrac{\partial h}{\partial x}$, если $\dfrac{\partial \lg b_s}{\partial h} \ll \dfrac{g}{\alpha_2 u^2}$.

3. Хотя член $\frac{\alpha_1 Q}{gAb_s}\frac{\partial b_s}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial t}$ более важен, чем аналогичный член без множителя $\frac{\partial b_s}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x}$, все же им часто можно пренебречь по сравнению с членом $\frac{\alpha_1 b_s}{gA^2}Q\frac{\partial h}{\partial t}$.

4. Наклон дна $I$ приливного русла обычно пренебрежимо мал. Поэтому изменение глубин можно учитывать приближенно, деля реки на участки, в пределах каждого из которых дно может считаться горизонтальным, и поэтому для каждой из них $I=0$.

В силу указанных соображений обычно используется следующее уравнение движения:

$$\underline{\frac{\partial h}{\partial x}}+\frac{da_0}{dx}-\frac{\alpha_2 b+b_s}{gA}\frac{Q}{A}\frac{\partial h}{\partial t}+\underline{\frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t}}+$$
$$+\underline{\frac{1}{C^2A^2(a_0+h)}|Q|Q}-\frac{W}{\rho g(a_0+h)}=0, \qquad (4.10)$$

где $A=(a_0+h)b_s$; $da_0/dx$ — уклон среднего уровня по отношению к дну или некоторой другой горизонтальной плоскости, а $\partial h/\partial x$ — уклон водной поверхности по отношению к среднему уровню.

Уравнение нерезрывности записывается в виде

$$\underline{\frac{\partial Q}{\partial x}}+\underline{b\frac{\partial h}{\partial t}}=0 \qquad (4.6)$$

или в виде (4.7) при наличии бокового стока.

В этих уравнениях подчеркнутые члены обычно являются наибольшими, если воздействие ветра не учитывается. В качестве примера на рис. 1.5 представлены величины различных членов, определяющих разность уровней воды между пунктами Стреефкерк и Кримпен (р. Лек).

Если соображения, приведенные в первом пункте, справедливы, то член $\frac{\alpha_2 b+b_s}{gA}\frac{Q}{A}\frac{\partial h}{\partial t}$ можно заменить на $\frac{b_s}{gA}\frac{Q}{A}\frac{\partial h}{\partial t}$.

Выбирая в качестве независимых переменных $u$ и $h$, запишем в соответствии с (4.1) и (4.4) уравнение движения в виде

$$\underline{\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}}+\frac{\alpha_2 u}{g}\frac{\partial u}{\partial x}=-\left[\underline{\frac{\partial h}{\partial x}}+\frac{da_0}{dx}+I+\right.$$
$$\left.+\underline{\frac{1}{C^2(a_0+h)}|u|u}-\frac{W}{\rho g(a_0+h)}\right], \qquad (4.11)$$

а уравнение неразрывности, согласно (4.6), в виде

$$\frac{\partial Au}{\partial x}+b\frac{\partial h}{\partial t}=0 \qquad (4.12)$$

или

$$\underline{(a_0+h)\,b_s\,\frac{\partial u}{\partial x}}+b_s\left(\frac{da_0}{dx}+\frac{\partial h}{\partial x}\right)u+(a_0+h)\,u\,\frac{\partial b_s}{\partial h}\,\frac{\partial h}{\partial x}+\underline{b\,\frac{\partial h}{\partial t}}=0. \tag{4.13}$$

В этих уравнениях влиянием уклона $I$, а также членом, содержащим множитель $\partial b_s/\partial h$, часто можно пренебречь. Главные члены в этих уравнениях подчеркнуты.

Выбор той или иной системы уравнений [(4.10, (4.6) или (4.11), (4.13)] зависит от используемого метода расчета и средств автоматизации вычислений.

Если расчеты выполняются на электронной вычислительной машине, то одинаково успешно можно использовать обе системы

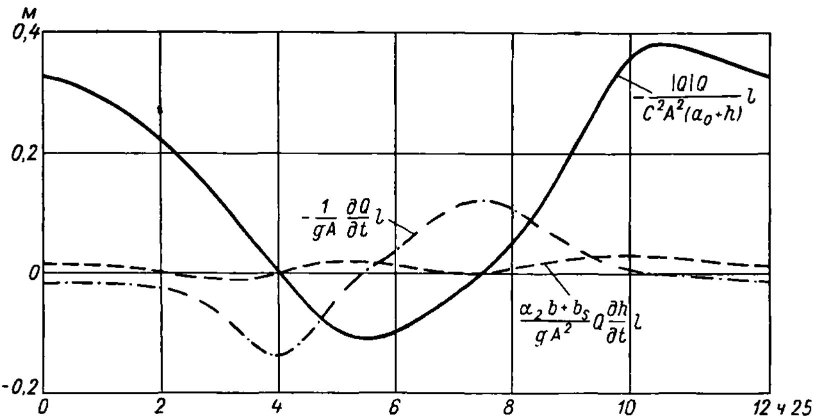



Рис. 1.5.

и выбор является исключительно делом вкуса, так как в этом случае объем вычислений обычно не вызывает серьезных затруднений. Однако если желательно упростить уравнение движения, то предпочтение следует отдать уравнениям (4.10) и (4.6), так как в этом случае используется точное уравнение неразрывности. Это даст возможность менять аппроксимацию речного русла или величину $C$ и тем самым в некоторой степени компенсировать те наиболее существенные ошибки, которые возникают из-за упрощения уравнения (4.10).

Другим преимуществом системы (4.10), (4.6) является то, что условия, которым требуется удовлетворить в месте слияния рек, оказываются более простыми в системе $h$, $Q$, чем в системе $h$, $u$. Эти условия будут рассмотрены в следующем параграфе.

Уравнения (4.10) и (4.6) предпочтительны при производстве расчетов на электрических арифмометрах. Если необходимо использовать более точное уравнение (4.9), то для разветвленной речной сети производство расчетов на арифмометре становится невозможным.

*Замечания.* 1. В уравнение для длинных волн (4.1) не включена центробежная сила. Действие этой силы приводит к возникновению разности уровней воды на противоположных берегах реки. Оценку величины этой силы можно получить, если исходить из выражения $\rho u^2 b_s/R^*$, где $R^*$ — радиус кривизны излучины реки, $u$ — средняя скорость одномерного потока.

Хотя эффект этой силы обычно имеет лишь локальное значение, в сильно меандрирующих реках он может вызвать незарегулирование стока.

2. В эстуариях эффект центробежной силы обычно более важен, чем эффект силы Кориолиса, так как направление последней меняется от прилива к отливу.

3. На прибрежных отмелях влияние поверхностных волн может стать заметным в пределах всей толщи воды. В этом случае будет наблюдаться искажение длинных волн и, когда глубина окажется достаточно малой, произойдет их разрушение.

Существенное различие теорий поверхностных и длинных волн заключается в том, что в коротких волнах вследствие значительно больших наклонов водной поверхности нельзя пренебрегать вертикальными скоростями.

## 5. РАЗРЫВЫ В ДВИЖЕНИИ ДЛИННЫХ ВОЛН

В морях и прибрежных водах приливы можно представить в виде суммы синусоид. На мелководье, где имеет место искажение приливной волны, число таких синусоид может значительно возрасти.

Когда приливная волна распространяется вверх по реке, искажение часто проявляется в уменьшении интервала времени между малой и полной водой и соответственно в увеличении интервала времени между полной водой и последующей малой водой. При некоторых условиях крутизна кривой уровня между малой и полной водой может стать такой большой, что в некоторых специфических точках произойдет конечный разрыв уровня и в результате нам будет казаться, будто стена воды стремительно мчится вверх по реке. Это явление, называемое бором, подробно обсуждается в главе 4, разд. 12. Замечательно, что существование этого явления не связано с наличием разрывов в профиле дна.

Очевидно, конечные разрывы в приливном движении могут наблюдаться также и тогда, когда в некоторых точках имеет место резкое изменение профиля дна; этот случай будет рассмотрен в следующем разделе.

Разрывы наблюдаются тогда, когда приливная волна проникает в верховье реки, где имеют место большие уклоны дна, а движение воды происходит в критическом или сверхкритическом режиме (см. главу 3, разд. 4). В таких случаях приливная волна не может продвинуться дальше и в некоторой промежуточной точке может возникнуть разрыв в уровне или так называемый гидравлический прыжок.

В общем, переход от докритического к критическому режиму потока и наоборот будет приводить к появлению разрывов уровня или временных и пространственных производных. Это можно наблюдать, например, в потоке над плотиной с высоким гребнем.

Хорошо известно, что разрывы в движении воды будут появляться также и тогда, когда затвор плотины внезапно открывается или закрывается, что приводит к образованию волны перемещения, распространяющейся вдоль реки. Для предотвращения повреждений барж и лодок затвор плотины обычно открывают медленно. В этом случае крутизна волны перемещения оказывается не такой большой, чтобы это движение можно было рассматривать как разрывное движение. Математически это движение можно описать, используя принцип суперпозиции большого числа малых возмущений.

Разрывы могут быть чисто локальными, как это имеет место в случае потока над плотиной с высоким гребнем. При этом движение приливной волны по обе стороны от гребня изменяется постепенно, а на самом гребне плотины уровень претерпевает разрыв.

В большинстве случаев местоположение прыжка известно заранее, но иногда (когда образование прыжка зависит от высоты прилива) оно может оказаться неизвестным. Примером может служить образование прыжка у затвора, который открывается или закрывается в тот момент, когда уровень воды достигает некоторой установленной отметки.

При наличии бора его местоположение и момент образования заранее предсказать нельзя. Это обстоятельство представляет собой одну из основных трудностей расчета бора. Более подробно об этом можно прочесть в главе 3, разд. 12.

Ясно, что в тех точках и в те моменты времени, где и когда появляются разрывы в уровне, а следовательно, и в скорости приливные уравнения, полученные в предыдущем разделе, не могут быть использованы, поскольку теперь производные от $h$ и $Q$ оказываются неопределенными. Поэтому эти уравнения необходимо заменить другими соотношениями. Обычно не представляет труда получить соотношение, заменяющее уравнение неразрывности. Уравнение движения заменяется формулой, которая следует из хорошо известного закона Ньютона. Найденное таким образом соотношение представляет собой связь между скоростью и уровнем воды с одной и с другой стороны от разрыва. Поскольку вертикальные ускорения в разрыве должны быть бесконечно большими, существование резких разрывов оказывается невозможным; горизонтальная протяженность области разрыва очень ограничена.

При использовании закона сохранения импульса обычно привлекают различные упрощающие предположения, не всегда полностью соответствующие действительности. Закон сохранения импульса получается из закона Ньютона:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x,$$

где $F_x$ — $x$-я компонента внешних сил, действующих на массу. Аналогичные соотношения записываются для компонент вдоль осей $y$ и $z$.

Закон сохранения импульса можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\sum m_i\frac{dx_i}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\sum m_i u_{x_i}\right)=\sum\frac{d}{dt}\left(m_i u_{x_i}\right)=\sum F_{x_i}.$$

Здесь суммирование производится всегда по одному и тому же числу точек $m_i$, $x$-координаты этих точек обозначены через $x_i$. Преимуществом применения закона сохранения импульса является то, что при этом появляется возможность пренебречь всеми внутренними силами, как, например, силой турбулентной вязкости. Импульс потока, проходящего через сечение русла за единицу времени, выражается через $\rho Qu$, где $Q$ — расход, а $u$ — средняя скорость.

Если необходимо учесть влияние распределения скорости по глубине, то выражение для импульса можно представить в виде $\alpha_3\rho Qu$. Изменение импульса за единицу времени равно равнодействующей всех внешних сил, действующих на массу воды.

Применим закон сохранения импульса для описания движения разрывного возмущения, образующегося в определенном месте и в определенный момент времени. На рис. 1.6 показано распространение волны большой крутизны. Пусть $c$ обозначает скорость распространения. Тогда $c(t_2-t_1)$ представляет собой расстояние, которое прошла волна за время $t_2-t_1$.

Пусть $u_1$ обозначает среднюю скорость в сечении за волной, а $u_2$ — среднюю скорость на фронте волны. Тогда очевидно, что объем воды единичной ширины $(a_1u_1-a_1u_2)$ равен $c\Delta$, где $\Delta=a_1-a_2$ — высота волны. Следовательно, соотношение

$$a_1(u_1-c)=a_2(u_2-c) \tag{5.1}$$

заменяет собой уравнение неразрывности в случае движущегося разрыва, если одновременно предполагается, что боковой сток отсутствует.

Остановимся теперь на допущениях, которые положены в основу применения уравнения сохранения импульса.

Пусть разрыв имеет место в точке $x_0$ между двумя вертикальными плоскостями, расположенными в точках $x_1$ и $x_2 = x_1 + \Delta x$ ($x_1 < x_2$). Пусть дно горизонтально, а $\Delta x$ представляет собой такое наикратчайшее расстояние от места разрыва, в пределах которого скорости на сечениях $x_1$ и $x_2$ можно считать равными друг другу и горизонтальными. Следовательно, в точках $x_1$ и $x_2$ можно пренебречь вертикальными ускорениями. Эти допущения означают, что давление в плоскостях $x_1$ и $x_2$ остается гидростатическим. И, наконец, пусть в пределах участка ($x_1$, $x_2$) придонным трением можно пренебречь.

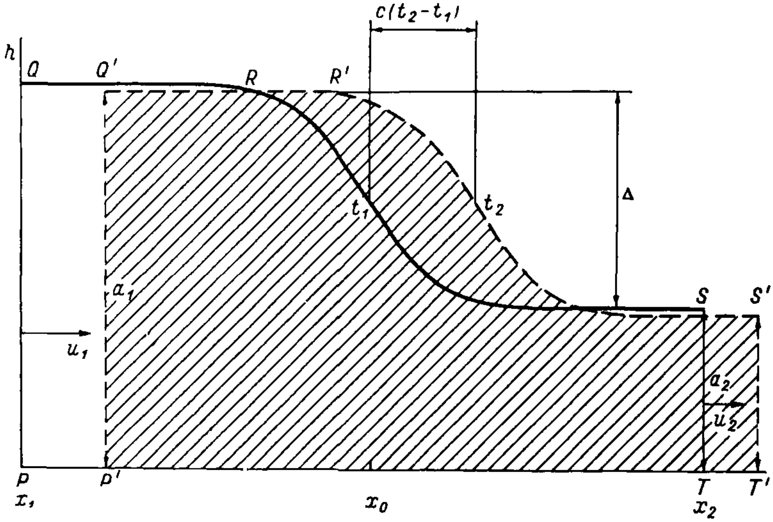



Рис. 1.6.

Применим теперь уравнение сохранения импульса, которое в частном случае устанавливает, что произведение силы $F$ на отрезок времени, в течение которого действует эта сила, равно изменению произведения массы $M$ (вода на участке $x_1$, $x_2$) на скорость $u$. Отсюда

$$F\,dt = d\,(Mu).$$

В движущейся системе на единицу ширины приходится

$$d\,(Mu) = \rho q\,[(u_2 - c) - (u_1 - c)] = -\rho q\,(u_1 - u_2).$$

Поэтому результирующая сила $F$, обусловленная разностью сил давления на концах участка, равна

$$F = \frac{1}{2}\rho g\,(a_1^2 - a_2^2).$$

Тогда соотношение, заменяющее собой уравнение движения, сведется к виду

$$\frac{1}{2} g\left(a_1^2 - a_2^2\right) = -q\left(u_1 - u_2\right), \tag{5.2}$$

где

$$q = a_1\left(u_1 - c\right) = a_2\left(u_2 - c\right). \tag{5.3}$$

Если силой трения $\rho F^*$ пренебрегать нельзя, то (5.2) заменяется на

$$F^* + \frac{1}{2} g\left(a_1^2 - a_2^2\right) = -q\left(u_1 - u_2\right). \tag{5.4}$$

Соотношения (5.2) и (5.3) вновь будут получены в разд. 9 этой главы с использованием лагранжевых координат.

## 6. УСЛОВИЯ В МЕСТЕ СЛИЯНИЯ ПРИТОКОВ

Пусть положительным направлением в каждом из притоков считается направление в сторону слияния. Тогда суммарный расход

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + \ldots = 0. \tag{6.1}$$

В противном случае в уравнение (6.1) входили бы отрицательные величины.

Рассмотрим условия, которым должен удовлетворять уровень воды в месте слияния притоков реки. Пусть $u_1$, $u_2$, $u_3$ и $u_4$ — скорости на соответствующих сечениях вблизи места слияния. На каждом из этих сечений уровень воды будет различным, и поэтому будет наблюдаться разность напоров. Вдоль участка $PQ$ (рис. 1.7) уравнение движения можно использовать в виде (4.1).

Так как длина участка мала, то влиянием трения и члена $\rho \dfrac{\partial u}{\partial t}$ можно пренебречь. Следовательно, вдоль $PQ$ неоднородность в распределении скорости в сечении и уменьшение потерь напора (если они имеют место) можно учесть введением коэффициента $\eta$:

$$h_4^* - h_1^* = \frac{\eta}{2g}\left(u_1^2 - u_4^2\right) \quad \text{или} \quad h_4^* + \frac{\eta}{2g} u_4^2 = h_1^* + \frac{\eta}{2g} u_1^2, \tag{6.2}$$

что справедливо и для участка слияния, причем напоры энергии $H_i$ будут равны

$$H_1 = H_2 = H_3 = H_4 = \ldots \tag{6.3}$$

Однако в действительности направление потока в месте слияния притоков является довольно сложным и запутанным. Так, например, если скорость в четвертом притоке меньше, чем в первом, то в области слияния этих двух притоков будет иметь место диссипация энергии. Опыт учит нас, что величина коэффициента $\eta$ может быть значительно меньше единицы, однако в действительности точное значение $\eta$ зачастую остается неизвестным (см. разд. 7). И наоборот, если $u_4 > u_1$ (движение воды ускоряется), можно использовать соотношение (6.2), хотя значение $\eta$ и будет близким к единице.

Отсюда видно, что величина $\eta$ изменяется в течение приливного периода и является функцией времени. Если приливной поток движется от $P$ к $Q$ и $u_4 > u_1$, то мы должны положить $\eta \approx 1$. Однако во время отлива поток направлен в обратную сторону, и в том случае, когда $u_4 < u_1$, можно считать, что $\eta \approx 0$.

Необходимо заметить, что при бесконечно малом расстоянии между точками *1* и *4* может наблюдаться скачок, а следовательно, и конечный разрыв как в уровне, так и в скорости. Однако в реальных условиях изменения профилей уровня и скорости в пределах конечного, но все же небольшого расстояния обычно носят плавный характер.

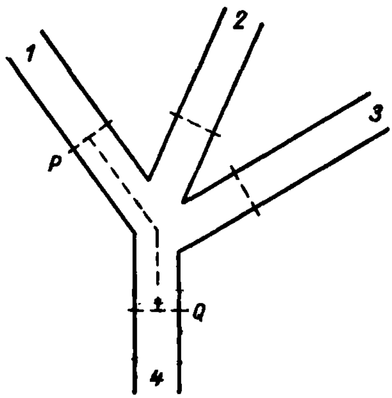


Рис. 1.7.

Даже в том случае, когда профили резко изменяются, переход от высокого уровня к низкому на очень небольшом расстоянии происходит довольно постепенно, так как вертикальные ускорения частиц воды остаются конечными. Кроме того, вследствие изменения направления потока в излучине реки могут приобрести значение центробежные силы, а это повлияет на направление градиента уровня в месте слияния.

Если разности скоростей в месте слияния в определенный момент времени малы, то членом Бернулли можно пренебречь. Тогда

$$h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = \dots \qquad (6.4)$$

Для определения точных значений уровня в месте слияния необходимо учесть силу Бернулли, а также центробежную силу. Однако они имеют лишь локальное значение, и поэтому искажение приливных явлений за счет пренебрежения этими силами будет сосредоточено в пределах небольшого участка. Приведенные соображения можно использовать также для тех участков реки, где имеют место изменения профиля русла. Если эти изменения малы, то и влияние их на уровень будет небольшим.

Однако если в каком-либо месте профиль значительно сужен (например, в результате строительства там плотины) или когда эта теснина располагается в пределах застойного участка реки (например, в месте слияния рек), то в зоне перехода членом Бернулли пренебрегать нельзя. С этой проблемой мы столкнемся в следующем параграфе.

## 7. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ РЕЗКИХ ИЗМЕНЕНИЙ ПРОФИЛЯ РЕЧНОГО РУСЛА

### 7.1. Общие соображения

Уравнение (4.1), приведенное в разд. 4, справедливо для плавно меняющихся поперечных профилей реки. Для участков резкого изменения профиля (узкости или расширения) необходимо вывести другое уравнение.

Пусть $(x_1 - \Delta_1,\ x_1 + \Delta_2)$ — координаты района, в котором наблюдается довольно значительное изменение профиля (рис. 1.8). Пусть это изменение будет таким, чтобы профиль на участке $(x_0,\ x_1 - \Delta_1)$ существенно не отличался от профиля на участке $(x_1 + \Delta_2,\ x_2)$; здесь $x_1$ — координата того места, где изменение профиля максимально. Такие условия встречаются, например, в районе плотины, где дно искусственно поднято над естественным речным дном. Наряду с этим ширина речного русла может уменьшаться при неизменной глубине, а также могут иметь место одновременные изменения глубины и ширины русла реки. Последний случай обычно встречается в районе порогов.

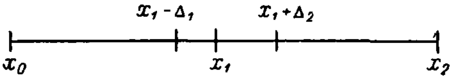


Рис. 1.8.

Изменение профиля на участке $(x_1 - \Delta_1,\ x_1)$ может остаться постоянным в пределах всего участка $(x_1,\ x_2)$. Дальнейшие построения будут ограничены следующими упрощающими предположениями:

а) в области изменения профиля поток находится в докритическом режиме;

б) переходная зона, в которой наблюдается изменение профиля, имеет достаточно большую протяженность, для того чтобы поток в центре области исследования успел стать однородным и в то же время наклон водной поверхности оставался достаточно малым.

Далее допустим, что точки $x_1 - \Delta_1$ и $x_1 + \Delta_2$ располагаются в непосредственной близости от центра $x_1$, где характеристики потока аналогичны соответствующим характеристикам на сечениях $(x_0,\ x_1 - \Delta_1)$, $(x_1 + \Delta_2,\ x_2)$.

Если поток направлен от точки $x_0$ к точке $x_2$, то на участке $(x_1 - \Delta_1, x_1)$, где находится узкость, поток будет ускоряться. В точке $x_1$ скорость достигнет максимальной величины и будет сохраняться неизменной в пределах небольшого участка $(x_1, x_1 + \Delta')$, где $\Delta'$ может оказаться того же порядка, что и $\Delta_2$. Далее будет наблюдаться уменьшение скорости, причем это уменьшение будет происходить до тех пор, пока скорость не достигнет своей обычной для участка $(x_1 + \Delta_2, x_2)$ величины. Гидравлические условия в районе ускорения потока существенно отличаются от условий в районе замедления. Увеличение скорости обычно происходит постепенно, так что значительных потерь энергии не наблюдается. На участке замедления потери энергии обычно очень велики из-за сильной турбулизации потока и образования вихрей. Образование вихрей зависит от местных условий, а их местоположение определяется из наблюдений. В том случае, когда для решения ряда инженерных задач влияние вихрей необходимо знать заранее, представляется целесообразным исследовать эту проблему на гидравлических моделях.

При определенных условиях потери энергии можно определить теоретически; об этом будет сказано в конце параграфа.

Уровень воды будет постепенно понижаться вдоль участка $(x_1 - \Delta_1, x_1 + \Delta_2)$ до той точки, в которой скорость оказывается наибольшей; за этой точкой уровень будет постепенно повышаться, пока не достигнет обычной для участка $(x_1 + \Delta_2, x_1)$ отметки.

На движение воды в районе сужения профиля влияют следующие факторы:

1) сжатие потока в области втекания,
2) распределение скорости на поперечном сечении,
3) придонное трение,
4) потери энергии на участке $(x_1, x_1 + \Delta_2)$, где поток замедляется, так что скорость его уменьшается от некоторой максимальной величины до величины, обычной в нижней (или верхней) части реки.

### 7.2. Район втекания и поток над гребнем

Предположим, что перенос воды через сечение велик по сравнению с объемом воды в области накопления, так что уравнение неразрывности может быть заменено уравнением

$$Q(x_1 - \Delta_1) = Q(x_1) = Q(x_1 + \Delta_2). \tag{7.1}$$

Допустим также, что ширина района накопления равна ширине потока. Рассмотрим движение воды на участке $(x_1 - \Delta_1, x_1)$, в пределах которого наблюдается ускорение потока.

На основании предположений «а» и «б», сделанных в разд. 7.1, мы можем использовать уравнение движения (4.1) для случая приливного потока в виде

$$\alpha_1 \frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t} + \underline{\alpha_2 \frac{u}{g}\frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{u^2}{C^2 a} = -\underline{\frac{\partial h^*}{\partial x}}, \tag{7.2}$$

где $u$ — средняя скорость, а $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — параметры, учитывающие неравномерность распределения скорости на поперечном сечении; подчеркнутые члены являются наиболее существенными. Допустим, что протяженность узкости такова, что величина производной $\partial u/\partial t$ мала по сравнению с величиной $u\ \partial u/\partial x$. Тогда

$$\int\limits_{x_1-\Delta_1}^{x_1} \alpha_1 \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\max} dx \ll \frac{1}{2}\alpha_2 \left[u^2(x_1) - u^2(x_1-\Delta_1)\right]_{\max}$$

и (7.2) может быть заменено соотношением

$$\frac{\partial h^*}{\partial x} + \frac{\alpha_2}{g} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u^2}{C^2 a} = 0, \tag{7.3}$$

аналогичным уравнению для стационарного потока. В уравнении (7.3) частные производные пишутся для того, чтобы подчеркнуть зависимость всех переменных от времени, которое входит параметрически.

Найдем решение уравнения (7.3).

Пусть $a_{00}$, $b_{00}$ и $A_{00}$ — соответственно средняя глубина, ширина потока и площадь сечения на участке $(x,\ x_1-\Delta_1)$, а $a_{02}$, $b_{02}$ и $A_{02}$ — соответствующие величины на участке $(x_1+\Delta_2,\ x_2)$, относящиеся к среднему уровню в пределах участка $(x_1-\Delta_1,\ x_1+\Delta_2)$. Уровень воды в момент $t$, отсчитываемый от среднего его положения, обозначается через $h_0$ на участке $(x_0,\ x_1-\Delta_1)$ и через $h_2$ на участке $(x_1+\Delta_2,\ x_2)$. Предположим, что в переходном районе средняя глубина меняется линейно от $a_{00}$ в точке $x_1-\Delta_1$ до $a_{01}$ в точке $x_1$, а ширина — от $b_{00}$ до $b_{01}$; в пределах этого участка величины $a_{01}$ и $b_{01}$ можно считать неизменными. Высота уровня воды $h$ на этом участке также определяется относительно среднего уровня. В силу предположения «а» в переходной зоне $(x_1-\Delta_1,\ x_1)$ критический поток не может наблюдаться.

Исключая пока из рассмотрения придонное трение, из (7.3) получаем

$$\eta\left[u^2(x_1-\Delta_1) - u^2(x_1)\right] = 2g\left[h(x_1) - h(x_1-\Delta_1)\right], \tag{7.4}$$

где безразмерный эмпирический коэффициент $\alpha_2$ заменен на $\eta$. Это сделано для того, чтобы учесть влияние сжатия в области втекания.

После введения

$$u(x_1-\Delta_1)=\frac{Q}{b_{00}(a_{00}+h(x_1-\Delta_1))},$$

$$u(x_1)=\frac{Q}{b_{01}(x_1)(a_{01}(x_1)+h(x_1))} \tag{7.5}$$

вместо (7.4) можно записать

$$\eta\left[\{b_{00}(a_{00}+h(x_1-\Delta_1))\}^{-2}-\{b_{01}(x_1)(a_{01}(x_1)+h(x_1))\}^{-2}\right]Q^2=$$
$$=2g(h(x_1)-h(x_1-\Delta_1)). \tag{7.6}$$

Для переходной зоны, имеющей геометрически правильную форму, оценку параметра $\eta$ можно найти, исходя из теоретических соображений. Однако на практике этот параметр определяется по данным фактических измерений скорости и уровня воды или по данным опытов на гидравлической модели.

Приближенную оценку величины члена трения для участка $(x_1-\Delta_1, x_1)$ можно получить из соотношения

$$I=\frac{1}{C^2}\int\limits_{x_1-\Delta_1}^{x_1}\frac{u^2(x)}{a_{01}(x)+h(x)}dx.$$

Следовательно, можно предположить, что $u(x)$ также меняется линейно от $u(x_1-\Delta_1)$ до $u(x_1)$. Тогда

$$u(x)=u(x_1-\Delta_1)+[u(x_1)-u(x_1-\Delta_1)]\frac{x-(x_1-\Delta_1)}{\Delta_1}.$$

Аналогичное выражение оказывается справедливым и для $a_{01}(x)+h(x)$. После подстановки этого выражения в интеграл можно легко получить оценку $I$. Уравнение (7.4) тогда перепишется следующим образом:

$$\eta[u^2(x_1-\Delta_1)-u^2(x_1)]=2g[h(x_1)-h(x_1-\Delta_1)]+I; \tag{7.7}$$

соответственно изменится и соотношение (7.6).

Для плотины с длинным горизонтальным гребнем уравнение (7.3) можно проинтегрировать, после чего мы получим точное выражение для члена трения.

## 7.3. Район оттока

Рассмотрим участок $(x_1, x_1+\Delta_2)$, где скорость потока уменьшается. Как уже упоминалось, при определенных условиях уменьшение скорости сопровождается значительными потерями энергии, которые можно приближенно рассчитать, используя закон сохранения импульса.

Поэтому применим закон сохранения импульса к массе воды, заключенной между сечениями $x_1$ и $x_1+\Delta_2$, и сделаем следующие предположения.

1. Между точками $x_1$ и $x_1+\Delta_2$ имеет место резкое изменение глубины, как это показано на рис. 1.9.

2. Вертикальные ускорения в точках $x_1$ и $x_1+\Delta_2$ пренебрежимо малы по сравнению с $g$.

3. Распределение давления в точках $x_1$ и $x_1+\Delta_2$ является гидростатическим.

4. Сила трения на участке $(x_1, x_1+\Delta_2)$ пренебрежимо мала.

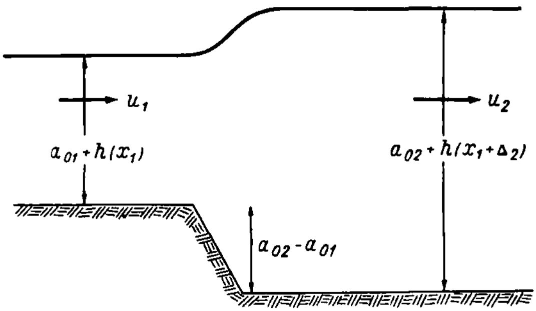



Рис. 1.9.

5. Силой поверхностного натяжения на участке между точками $x_1$ и $x_1+\Delta_2$ можно пренебречь.

Тогда из закона сохранения импульса получаем следующее соотношение:

$$\frac{1}{2}\rho g\left[(a_{02}+h(x_1))^2-(a_{02}+h(x_1+\Delta_2))^2+\right.$$
$$\left.+\beta\frac{u_1^2}{g}(a_{02}-a_{01})\right]=\alpha_3\rho Q(u_2-u_1), \tag{7.8}$$

где слева стоит результирующая сил давления, действующих соответственно в точках $x_1$ и $x_1+\Delta_2$, а справа — изменение импульса за единицу времени. Член, содержащий коэффициент $\beta$, является поправкой к величине силы давления; при резком изменении профиля этот коэффициент оказывается малым (см., например, Егера [70]).

Различие в распределении скоростей в плоскости сечений $x_1$ и $x_1+\Delta_2$ можно учесть заменой правой части уравнения (7.8) на

$$\alpha_3'\rho Q u_2-\alpha_3''\rho Q u_1.$$

Можно выразить $u_1$ и $u_2$ через $Q$ посредством (7.5) и соотношения

$$u_2 = Qb_{02}^{-1}(a_{02} + h(x_1 + \Delta_2))^{-1}.$$

Тогда для правой части (7.8) получаем

$$\alpha_3 \rho Q(u_1 - u_2) = \alpha_3 \rho Q^2 \left[ b_{01}^{-1}(a_{01} + h(x_1))^{-1} - \right.$$
$$\left. - b_{02}^{-1}(a_{02} + h(x_1 + \Delta_2))^{-1} \right]. \tag{7.9}$$

Следовательно, после исключения $b_{01}(x_1)(a_{01}(x_1) + h(x_1))$ и $h(x_1)$ уравнения (7.6), (7.8) и (7.9) будут определять связь между уровнями воды в точках $x_1 - \Delta_1$ и $x_1 + \Delta_2$.

**Окончательные уравнения.** Выше было показано, что различные факторы можно учесть теоретически. Однако на практике различия между фактическими условиями и теоретическими предположениями зачастую так велики, что приходится учитывать влияние различных факторов введением эмпирических коэффициентов.

В практических расчетах при наличии сужения профиля точно можно рассчитать только наиболее существенную силу — силу Бернулли. Остальные факторы учитываются посредством введения эмпирического коэффициента $\eta$. Поэтому формулу для всего участка $(x_1 - \Delta_1,\ x_1 + \Delta_2)$ запишем следующим образом:

$$\eta Q^2 \left[ b_{00}^{-2}(a_{00} + h(x_1 - \Delta_1))^{-2} - b_{01}^{-2}(a_{01} + h(x_1 + \Delta_2))^{-2} \right] =$$
$$= 2g[h_2 - h_0], \tag{7.10}$$

где $b_{00}$, $a_{00}$ и $b_{01}$, $a_{01}$ определены выше, а $h_0 - h_2$ представляет собой перепад уровней на участке изменения профиля. Это соотношение справедливо только тогда, когда коэффициент $\eta$ соответствующим образом изменен.

При движении приливного потока через проход (рис. 1.10) можно использовать формулы для прилива и отлива, которые приводятся ниже.

Во время прилива поток направлен вверх по течению от $C$ до $D$ (рис. 1.10). Опыт учит нас, что площадь поперечного сечения потока будет минимальной у плотины со стороны реки (точка $B$). В соответствии с (7.10) можно записать уравнение

$$\eta_1 Q^2 \left[ b_s^{-2}(C)(a_0(C) + h(C))^{-2} - b_s^{-2}(AB)(a_0(AB) + h(D))^{-2} \right] =$$
$$= 2g(h(D) - h(C)). \tag{7.11}$$

При отливе минимальная глубина будет иметь место в точке $A$ плотины со стороны моря, и поэтому

$$\eta_2 Q^2 \left[ b_s^{-2}(D)(a_0(D) + h(D))^{-2} - b_s^{-2}(AB)(a_0(AB) + h(C))^{-2} \right] =$$
$$= 2g(h(C) - h(D)), \tag{7.12}$$

где $b_s(AB)$ и $a_0(AB)$ — средние значения ширины и толщины потока на гребне плотины.

Мы ввели различные коэффициенты для прилива и отлива (соответственно $\eta_1$ и $\eta_2$) и предположили, что в $C$ и $D$ средние уровни являются горизонтальными. В противном случае в правые части уравнений (7.11) и (7.12) необходимо было бы ввести поправочные члены. Для других участков реки остаются справедливыми обычные приливные уравнения, например (4.10) и (4.6). Решение этих уравнений определяет уровень воды и скорость потока в $C$ как функции уровня и скорости на участке, расположенном ниже прохода. Соответственно уровень воды и скорость выше

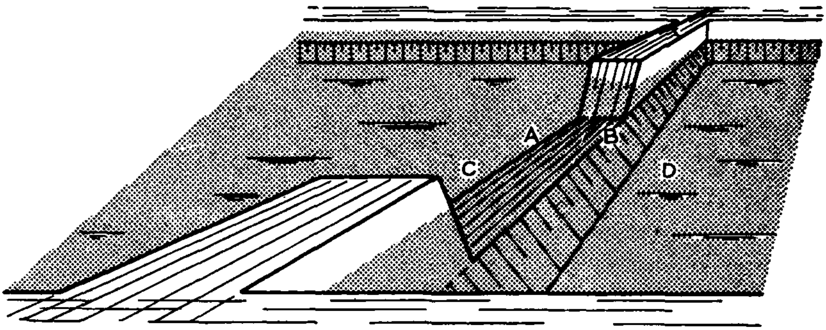



Рис. 1.10.

$D$ определяют уровень и скорость в самой точке $D$. Уровни воды по обе стороны от плотины (согласно (7.11) или (7.12) и условию $Q_C = Q_D$) связаны между собой. Таким образом, получаем сложную систему уравнений для определения уровня воды и расходов вдоль всей реки.

## 8. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ И УРАВНЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРИЛИВНЫХ ВОЛН

Распространение приливных волн описывается дифференциальными уравнениями, полученными в разд. 3 и 4. В морях и прибрежных водах движение приливного потока определяется уравнениями (2.7), (3.19), (3.20); в широких эстуариях, длина которых соизмерима с их шириной, справедливы уравнения (4.1), (4.2) и (4.3) (или 4.6)), а для рек можно использовать уравнения (4.11) и (4.12) (или (4.13)). Для того чтобы решить эти уравнения, необходимо добавить граничные условия. На границе с морем требуется знать изменение уровня в течение приливного периода. Границы, отделяющие прибрежные воды от открытой части моря, обычно выражены нечетко, и поэтому их выбор определяется практическими соображениями. Переход от моря или прибрежной области к реке хорошо заметен. Условия на твердом контуре прибрежной области могут быть различными. В устье приливной реки величина расхода должна асимптотически стремиться к величине речного стока.

На практике расчет распространения приливного потока обычно выполняется для интервала времени $t_0 < t < t_1$. Очевидно, что для однозначного определения потока одних граничных условий недостаточно. Необходимо знать особые условия приливного движения в момент $t = t_0$, т. е. так называемые начальные условия, под которыми понимают значения уровня и скорости в момент $t = t_0$. Для задания этих начальных условий одних прямых измерений мало. В разд. 2 главы 4 мы вернемся к этой проблеме и укажем пути преодоления этих затруднений.

Однако при чисто периодическом приливе необходимость в задании начальных условий отпадает, так как в этом случае условия периодичности уровня и расхода заменяют начальные условия. Для однозначного определения прилива в исследуемом районе граничные и начальные условия должны удовлетворять определенным математическим требованиям; например, функции должны быть непрерывными и дифференцируемыми.

Однако в некоторые моменты могут появляться разрывы, перемещающиеся вдоль рек (см. разд. 5). Кривая $x = \Gamma(t)$ на плоскости $x$, $t$, по которой перемещается разрыв, делит приливной район на две части. Для $x > \Gamma(t)$ или $x < \Gamma(t)$ приливные уравнения остаются в силе. На самой кривой уравнение для высоты разрыва определяет связь между уровнями воды по обе стороны от $\Gamma$. Это уравнение и уравнение неразрывности могут рассматриваться как внутренние граничные условия на кривой $\Gamma$.

До сих пор мы имели дело с уравнениями в форме Эйлера. Для сравнения в следующем разделе приводятся уравнения в форме Лагранжа.

## 9. УРАВНЕНИЯ В ФОРМЕ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ПОТОКА

Описание одномерного движения жидкости в форме Лагранжа основывается на рассмотрении изменения во времени траекторий, скоростей и ускорений индивидуальных частиц жидкости. Описание движений в форме Эйлера основывается на рассмотрении скоростей, ускорений и т. д. в данной точке пространства.

Системой Лагранжа очень удобно описывать разрывы в движении воды, поэтому воспользуемся этой системой при изучении одномерного стационарного потока.

Пусть положение частицы в момент $t = t_0$ обозначается через $r$, а ее положение в момент $t$ — через $x$. Положение $x$ частицы в момент $t$ будет зависеть от $r$ и $t$; тогда $x(r, t)$ — изменение положения частицы во времени, записанное в форме Лагранжа.

Скорость $u$ частицы в момент $t$ равна

$$\frac{\partial x}{\partial t} = u. \tag{9.1}$$

Следовательно, уравнение движения записывается так:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho F \tag{9.2}$$

или

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho F \frac{\partial x}{\partial r}, \tag{9.2'}$$

где через $p$ обозначено давление, а через $\rho F$ — внешняя сила, действующая на единицу объема. Если дно горизонтально, а $a(r, t)$ представляет собой глубину, то

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho g \frac{\partial a}{\partial r}. \tag{9.3}$$

При записи (9.3) сделано предположение о том, что скорости всех частиц по вертикали одинаковы.

Если пренебречь вертикальными скоростями и ускорениями, то закон сохранения вещества в системе Лагранжа сведется к очень простому виду.

Пусть $\Delta r$ — длина основания некоторого объема воды единичной ширины в момент $t=t_0$, $a(r, t_0)$ — высота (глубина). Пусть в момент $t$ длина основания этого объема станет равной $\Delta x$, а его высота — $a(r, t)$.

Поскольку $a(r, t_0)\Delta r = a(r, t)\Delta x$, то уравнение неразрывности примет вид

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{a(r, t_0)}{a(r, t)}. \tag{9.4}$$

Тогда, используя (9.2′), (9.3) и (9.4), уравнение движения можно записать так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{a(r, t)}{a(r, t_0)} \frac{\partial a}{\partial r} + F \tag{9.5}$$

или, объединяя (9.1) и (9.4), имеем

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{a(r, t_0)}{a^2(r, t)} \frac{\partial a}{\partial t}. \tag{9.6}$$

Множитель $a(r, t_0)$ можно исключить, введя новую лагранжеву координату $y$, которая определяется соотношением

$$dy = a(r, t_0)\, dr.$$

Следовательно,

$$y = \int_{r_0}^{r} a(r,\ t_0)\,dr.$$

Тогда (9.5) и (9.6) сведутся к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + ga\frac{\partial a}{\partial y} = F' \tag{9.7}$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{a^2}\frac{\partial a}{\partial t} = 0. \tag{9.8}$$

Теперь можно вновь получить уравнения, описывающие разрывное движение. Эти уравнения ранее имели вид (5.2) и (5.3). Пусть $M$ представляет собой массу воды, проходящую за единицу времени через поверхность разрыва. Как это следует из (5.3), $M$ в системе Эйлера равна $-q$. Тогда $u$ и $a$ зависят только от $y$ и $t$:

$$z = y - Mt. \tag{9.9}$$

Если внешними силами, подобными силе трения, можно пренебречь, то уравнения (9.7) и (9.8) переписываются в виде

$$M\frac{\partial u}{\partial z} - ga\frac{da}{dz} = 0, \tag{9.10}$$

$$\frac{du}{dz} - \frac{M}{a^2}\frac{da}{dz} = 0. \tag{9.11}$$

Следовательно,

$$-Mu + \frac{1}{2}ga^2 = c_1, \quad u + \frac{M}{a} = c_2,$$

где $c_1$ и $c_2$ — константы.

Пусть $u_1$ и $a_1$ — скорость и глубина в области потока за разрывом, а $u_2$ и $a_2$ — соответствующие величины перед разрывом. Тогда мы можем записать:

$$u_1 + \frac{M}{a_1} = u_2 + \frac{M}{a_2}, \tag{9.12}$$

$$-Mu_1 + \frac{1}{2}ga_1^2 = -Mu_2 + \frac{1}{2}ga_2^2. \tag{9.13}$$

Если обе части соотношения (9.12) равны $c$, уравнение (5.3) сводится к виду

$$M = -q = a_1(c - u_1) = a_2(c - u_2). \tag{9.14}$$

Уравнение (9.13), которое следует из (5.2), переписывается тогда следующим образом:

$$\frac{1}{2}g\left(a_1^2 - a_2^2\right) = -q\,(u_1 - u_2).$$

## ГЛАВА 2

# ГАРМОНИЧЕСКИЙ МЕТОД

В этой главе будут выведены формулы для расчета распространения астрономического прилива и соответствующих мелководных составляющих.

При расчете распространения приливной волны в конкретном районе практически невозможно учесть многие составляющие прилива. Число рассматриваемых компонент прилива зависит от длительности интервала времени, для которого надо знать картину распространения. Если этот интервал равен всего лишь суткам, то мы можем представить прилив на границе между нашим районом и морем с помощью ряда Фурье с основной частотой, равной частоте наиболее существенной компоненты прилива. Тогда влияние остальных компонент прилива представляется членами того же ряда Фурье.

Однако если рассматривается период в 14 или 15 дней, в течение которого прилив непрерывно изменяется от квадратурного до сизигийного, то надо учитывать более чем одну основную компоненту прилива. Наиболее важные из этих компонент — это полусуточные составляющие $M_2$, $S_2$, $K_2$ и $N_2$ и суточные составляющие $O_1$ и $K_1$. Для практических целей обычно можно объединить составляющие $M_2$ и $N_2$, а также $K_2$ и $S_2$, поскольку соответствующие частоты в каждой паре различаются лишь незначительно. Аналогичным образом можно объединить компоненты $O_1$ и $K_1$. Следовательно, на практике распространение прилива будет рассчитываться с частотами объединенных составляющих $M_2 — N_2$, $K_2 — S_2$ и $O_1 — K_1$. Амплитуды и фазы этих объединенных волн на границах должны быть выбраны так, чтобы они возможно точнее соответствовали фактическому приливу.

Вычисление приливов чаще всего производится для средних и экстремальных условий 14-дневного периода: для промежутка, для сизигии и для квадратуры. Прилив на каждый из таких дней будет представлен рядом Фурье, аналогично тому как это делается для отдельного дня. В каждом случае основная частота будет частотой волны $M_2$, но амплитуды и фазы составляющих будут различными для каждого из трех дней. Рассчитав прилив на эти три дня, мы можем определить нужные нам величины для других дней 14-дневного периода путем интерполяции.

В различных разделах этой главы будет последовательно изложено применение гармонического метода с использованием комплексных функций.

Поскольку гармонические волны представляют собой решения некоторых линейных дифференциальных уравнений в частных производных, то будет показано, как можно получить такие уравнения из уравнений движения (глава 1, (4.10)) и неразрывности (глава 1, (4.6)). Этот процесс называется линеаризацией уравнений прилива. Наиболее трудной проблемой при этом является линеаризация члена сопротивления, особенно множителя $|u|u$ или $|Q|Q$, для которого в разд. 4.2, 6.1 и 6.8 будут даны два способа аппроксимации.

Мы начнем с рассмотрения наиболее простой задачи — расчета главной составляющей прилива в реке, т. е. полусуточной волны $M_2$ (разд. 3, 4, 5), а затем перейдем к расчету распространения главной составляющей прилива вместе с ее самой существенной обергармоникой, т. е. волн $M_2$ и $M_4$ (разд. 6). Можно рассматривать также две объединенные составляющие одного типа, но с неодинаковой частотой, например $M_2$ и $S_2$. Речной сток также существенно влияет на распространение приливной волны, так что необходимо исследовать и эту сторону вопроса.

Методы расчета распространения полусуточных составляющих можно применять и к районам, где преобладает суточный прилив. В тех районах, где полусуточный и суточный приливы примерно одинаково важны, решение значительно усложняется. Возможность применения гармонического метода становится проблематичной, и в этих случаях целесообразно использовать численные методы, рассмотренные в главе 4. Эти же методы лучше применять в тех случаях, когда требуется исследовать обергармоники более высоких порядков ($M_8$ и далее).

Распространение отдельных составляющих прилива определяется решениями линейных уравнений. В принципе эти решения получаются с помощью итерационного метода, поскольку факторы, которые характеризуются коэффициентами уравнений, могут считаться постоянными в пределах участка ограниченных размеров (разд. 3.3, 5.2 и 6). Указанные факторы зависят от скорости течения и амплитуды колебаний уровня, соответствующих рассматриваемой приливной гармонике, и от аналогичных величин, соответствующих другим гармоникам, и это определяет взаимодействие между различными гармониками. Коэффициенты зависят также от размеров канала. Нелинейные приливные колебания в каналах рассматривали Крайсс [77] и Ловелл [86].

Прежде чем приступить к указанной основной задаче, мы рассмотрим в общих чертах распространение простой гармонической волны в канале, причем сначала начнем с небольшого канала, где силой Кориолиса можно пренебречь (разд. 1), а уже затем перейдем к более широкому каналу, где эту силу надо учитывать (разд. 2). В разд. 1 при рассмотрении характерных особенностей распространения простой гармонической волны в узком канале не учитываются искажения за счет нелинейных эффектов. Приводится полное решение, так как анализ такого случая может дать представление об основных закономерностях поведения прилива в узком канале. Необходимые формулы могут быть получены и всесторонне проанализированы сравнительно простым путем.

Поскольку гармонические волны представляют собой решения линейных дифференциальных уравнений в частных производных, то это значит, что коэффициенты уравнений и характеристики профиля канала постоянны. Далее пренебрегаем членами второго порядка, а фрикционный член заменяем линейным членом (т. е. принимаем линейный закон трения). На практике все величины нужно подобрать так, чтобы они наилучшим образом отвечали действительным условиям. В первую очередь рассматривается известный случай канала, закрытого с одного конца. Затем исследуются приливные колебания уровня в канале, открытом с обоих концов, если на этих концах прилив известен. Такая ситуация складывается в канале, пересекающем перешеек, например в канале Кейп-Код (см. обширное исследование Парсонса [92]) и в Панамском канале (см. Эйнштейн и Фукс [36]).

Распространение гармонической волны в реке со значительным стоком исследовать этим способом не удается, так как существенным фактором в таком распространении является взаимодействие между стоком и приливом. Предметом исследования является соотношение между амплитудами колебаний в замкнутом конце реки и в устье, причем это соотношение рассматривается как функция длины канала, сопротивления в нем и частоты приливного колебания. В устье определяется соотношение между амплитудами стока и колебаний уровня. Для канала, открытого с обоих концов, рассмотрен специальный случай, когда на одном из концов вертикальные колебания уровня пренебрежимо малы.

В последних исследованиях было рассмотрено поведение длинных волн в каналах переменного поперечного сечения, закрытых с одной стороны. Если характеристики поперечного сечения (глубина, ширина или и то, и другое вместе) изменяются с расстоянием специальным образом, например линейно, или если ширина изменяется с расстоянием экспоненциально, то распространение приливной волны можно описать аналитически, с помощью математических формул. Такие случаи рассмотрены рядом авторов (Шёнфельд [125], Доррестейн [27] и др., см.

ссылки в разд. 1.4). Если зависимость поперечного сечения от $x$ нельзя выразить простой формулой, то его надо аппроксимировать, задавая постоянный профиль в пределах каждого из ряда коротких участков, на которые разбивается река. Этот приближенный метод будет изложен в разд. 1.2.

Рассматриваемая гармоническая волна не обязательно должна быть приливной волной. Ряд формул может быть использован также и для расчета сейш в закрытых каналах или заливах. Такие сейши часто имеют периоды от нескольких минут до получаса.

Оказывается, что в заливе или закрытом канале может произойти значительное увеличение амплитуды — это зависит от соотношения между длиной канала и длиной волны. Если период волны приближается к одному из периодов свободных продольных колебаний канала, то имеет место значительный рост амплитуды. Это явление представляет собой разновидность резонанса, проявляющегося особенно резко, когда отношение длины канала к длине волны составляет одну четверть, три четверти и т. д. Следовательно, колебания коротких периодов (от 10 минут до 1 часа) могут сильно возрастать в каналах сравнительно небольшой длины, например в гаванях.

Приливные волны, однако, имеют очень низкую частоту и, следовательно, большую длину, которая пропорциональна приливному периоду. Поэтому в коротких каналах увеличение приливных волн будет сравнительно невелико. Метеорологические эффекты могут привести к возникновению волн с более высокой частотой, и тогда определенные обстоятельства могут вызвать значительный рост амплитуды такой волны. Вторым фактором, определяющим степень увеличения амплитуды, является трение — отношение коэффициента трения к частоте оказывается особенно важным параметром. Это обстоятельство будет рассмотрено на примерах в разд. 1.3.

В эстуариях с широкими устьями и в прибрежных водах в приливных уравнениях необходимо учитывать силу Кориолиса. Поэтому в разд. 2 дано введение в теорию распространения гармонической волны в широком канале, берега которого параллельны. Из-за учета силы Кориолиса решения тут гораздо сложнее, чем в разд. 1, где эта сила не учитывается.

Вблизи берегов и в эстуариях с практической точки зрения представляют интерес волны Кельвина, в которых движения параллельны берегам. Поэтому в этот раздел включено краткое рассмотрение таких волн.

В остальной части главы мы будем иметь дело только с одномерным потоком.

Для ознакомления с теорией рядов Фурье можно отослать читателя, например, к работам Карслоу [13], Черчилла [14, 15] и Пайпера [97].

# 1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОСТОЙ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

## 1. 1. Решение приливных уравнений

Хотя в этом параграфе речь пойдет главным образом о гармонических волнах с частотами приливных составляющих, однако результаты будут пригодны также и для длинных волн с самыми разнообразными частотами. Поэтому могут рассматриваться, например, движения, имеющие период в несколько минут.

Вместо приливных уравнений (глава 1, (4.10) и (4.6)) для расчета распространения простой гармонической волны используются следующие упрощенные уравнения:
уравнение неразрывности

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+b_0\frac{\partial h}{\partial t}=0, \qquad (1.1)$$

и уравнение движения

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\lambda Q+gA_0\frac{\partial h}{\partial x}=0, \qquad (1.2)$$

в котором постоянный коэффициент $\lambda$ заменяет коэффициент $g|Q/C^2A\,(a_0+h)$ в члене сопротивления в уравнении движения (4.10) в главе 1. В разд. 4.2 этой главы для случая простой гармонической волны определено приближенное выражение для $\lambda$, позволяющее получить наиболее близкое соответствие рассчитанного движения волны с действительным, а именно использована хорошо известная формула, полученная Лоренцем [85] (см. также Тийссе [139]):

$$\lambda=\frac{8}{3\pi}\,gQ_m/C^2A_0a_0,$$

где $Q_m$ — максимальная величина $|Q|$ (см. также разд. 8). В действительности величина $Q_m$ изменяется вдоль реки, и поэтому рассматривается средняя величина $Q_m$. Далее принимается, что коэффициенты $A_0$ и $a_0$ постоянны и равны средним величинам $A$ и $a$.

Пусть вертикальное приливное колебание уровня в устье реки будет

$$h_1(0,\ t)=h_1(0)\cos\omega t. \qquad (1.3)$$

Это движение вызывает вынужденное периодическое во времени колебание в канале. Оно будет непрерывно поддерживаться движением в море; следовательно, движение в канале не погасится трением.

Выражение (1.3) можно представить в комплексной форме следующим образом:

$$h_1(0,\ t)=H_1(0)e^{i\omega t}+c.\ c., \qquad (1.4)$$

где $c.c.$ — сопряженная комплексная функция $H_{-1}(0)e^{-i\omega t}$. Далее, $H_1(0)=H_{-1}(0)=\frac{1}{2}h_1(0)$.

Предположим, что начальный момент ($t=0$) совпадает с моментом полной воды, так что в выражении (1.4) $H_1(0)=H_{-1}(0)$ — вещественная величина. Такое предположение, однако, не является обязательным, так как в противном случае $H_1(0)$ и $H_{-1}(0)$ будут комплексными функциями, для которых соотношение $|H_1(0)|=|H_{-1}(0)|=\frac{1}{2}h_1(0)$ сохраняет законность.

Выражение (1.3) можно представить, таким образом, в виде

$$h_1(0,\ t)=\operatorname{Re}h_1(0)e^{i\omega t}.$$

Однако эта форма обычно не употребляется, потому что если требуется найти произведение функций типа $h_1(0,\ t)$ или возвести их в степень, то уравнение (1.4) дает более обозримые результаты.

Решение уравнений (1.1) и (1.2) для гармонической волны записывается в виде

$$h_1(x,\ t)=H_1(x)e^{i\omega t}+H_{-1}(x)e^{-i\omega t}, \tag{1.5}$$

$$Q_1(x,\ t)=Q_1(x)e^{i\omega t}+Q_{-1}(x)e^{-i\omega t}. \tag{1.6}$$

Комплексные функции $H_1(x)$ и $Q_1(x)$ определяются следующим образом. Дифференцируя (1.2) по $x$, а (1.1) по $t$, можно исключить $Q$. Затем простая подстановка приводит к дифференциальному уравнению в частных производных для $h_1$:

$$\frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2}+\lambda\frac{\partial h_1}{\partial t}=c_0^2\frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2}, \tag{1.7}$$

где $c_0^2=gA_0/b_0$; $c_0$ — скорость распространения волны, если $\lambda=0$. Уравнение для $Q_1(x,\ t)$ имеет такой же вид.

Если (1.5) подставить в (1.7), то получим следующее уравнение для $H_1$:

$$c_0^2\frac{d^2H_1}{dx^2}+(\omega^2-\lambda\omega i)H_1=0. \tag{1.8}$$

Хорошо известно, что общее решение этого уравнения будет

$$H_1(x)=C_1e^{kx}+C_2e^{-kx}, \tag{1.9}$$

где $C_1$ и $C_2$ — комплексные постоянные интегрирования. Комплексная константа $k$ определится путем подстановки $H_1$ в (1.8). Тогда из

$$c_0^2k^2+\left(\omega^2-i\lambda\omega\right)=0$$

находим

$$k = \pm \frac{\omega}{c_0}\left(-1 + i\frac{\lambda}{\omega}\right)^{1/2} = \pm \frac{\omega}{c_0}(\sigma + i\beta). \qquad (1.10)$$

Таким образом, безразмерный параметр

$$s_1 = \frac{\lambda}{\omega} \qquad (1.11)$$

оказывается одним из тех, которые определяют характер распространения гармонической волны.

Дальнейшие вычисления показывают, что

$$\sigma = \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 + s_1^2\right)^{1/2}\right]^{1/2}; \quad \beta = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 + s_1^2\right)^{1/2}\right]^{1/2}. \qquad (1.12)$$

Для различных дополнительных вычислений отметим следующие важные соотношения:

$$\sigma^2 + \beta^2 = \left(1 + s_1^2\right)^{1/2}, \quad \sigma^2 - \beta^2 = -1. \qquad (1.13)$$

Если $\lambda \ll \omega$ (следовательно, $s_1$ мало), то $\sigma$ и $\beta$ можно приближенно выразить в виде

$$\sigma \approx \frac{1}{2} s_1, \quad \beta \approx 1 + \frac{1}{8} s_1^2 \approx 1.$$

Поскольку $\lambda$ зависит от глубины и максимальной скорости, то указанное условие будет выполняться всякий раз, когда амплитуда волны мала по сравнению с глубиной или когда частота относительно велика, как в случае сейш. Чтобы найти общее решение для простой гармонической волны, которое удовлетворяло бы (1.7), получим с помощью (1.5), (1.9) и (1.10)

$$h_1(x, t) = H_{11} e^{\omega\sigma x/c_0 + i\omega(t + \beta x/c_0)} + H_{12} e^{-\omega\sigma x/c_0 + i\omega(t - \beta x/c_0)} + \text{c. c.}, \qquad (1.14)$$

где $H_{11}$ и $H_{12}$ — постоянные интегрирования, удовлетворяющие, согласно (1.4), соотношению

$$H_{11} + H_{12} = H_1(0). \qquad (1.15)$$

Вещественная форма выражения (1.14) будет

$$h_1(x, t) = h_{11} e^{\omega\sigma x/c_0} \cos\omega\left(t + \frac{\beta}{c_0}x\right) +$$

$$+ h_{12} e^{-\omega\sigma x/c_0} \cos\omega\left(t - \frac{\beta}{c_0}x\right) = h_{11}(x, t) + h_{12}(x, t). \qquad (1.16)$$

Таким образом, при безграничном увеличении $x$ величина $h_{11}(x, t)$ безгранично возрастает, а $h_{12}(x, t)$ стремится к нулю.

Предположим, что гармоническая волна возникла в какой-то точке канала, бесконечно продолжающегося в положительном и отрицательном направлениях. Тогда, из-за диссипации энергии, вызванной трением, амплитуда бегущих волн будет уменьшаться по мере их удаления от источника. Волна, бегущая в положительном направлении, $h_{12}(x, t)$, стремится к нулю, когда $x$ стремится к $+\infty$, а волна, бегущая в отрицательном направлении, $h_{11}(x, t)$, стремится к нулю, когда $x$ стремится к $-\infty$. Поэтому мы определяем $h_{11}(x, t)$ как гармоническую волну, бегущую в отрицательном направлении, а $h_{12}(x, t)$ как гармоническую волну, бегущую в положительном направлении; их называют прогрессивной ($h_{12}$) и ретрогрессивной ($h_{11}$) волнами. Скорости их распространения равны $c_0/\beta$.

Из (1.2), (1.5) и (1.6) следует, что

$$Q_1(x, t) = -\frac{gA_0}{\lambda+\omega i}\frac{dH_1}{dx}e^{i\omega t} + c.\ c.$$

Используя (1.10) и (1.14), находим, что

$$Q_1(x, t) = -\frac{b_0c_0i}{\sigma+i\beta}\left[H_{11}e^{\omega\sigma x/c_0+i\omega(t+\beta x/c_0)} - \right.$$

$$\left. - H_{12}e^{-\omega\sigma x/c_0+i\omega(t-\beta x/c_0)}\right] + c.\ c. \qquad (1.17)$$

Выражения (1.14) и (1.17) для $h_1(x, t)$ и $Q_1(x, t)$ можно привести к более простому виду. Величины $H_{11}$ и $H_{12}$ связаны соотношениями (1.15) и

$$H_{11} - H_{12} = \frac{-\beta+i\sigma}{b_0c_0}Q_1(0), \qquad (1.18)$$

которое следует из (1.17) при $x=0$. Решая систему (1.15) и (1.18) относительно $H_{11}$ и $H_{12}$, находим

$$H_{11} = \frac{1}{2}H_1(0) - \frac{1}{2}Q_1(0)\frac{\beta-i\sigma}{b_0c_0},$$

$$H_{12} = \frac{1}{2}H_1(0) + \frac{1}{2}Q_1(0)\frac{\beta-i\sigma}{b_0c_0}.$$

Вводя эти выражения в (1.14) и (1.17), получим

$$h_1(x, t) = \left\{H_1(0)\operatorname{ch}kx + Q_1(0)\frac{ki}{\omega b_0}\operatorname{sh}kx\right\}e^{i\omega t} + c.\ c., \qquad (1.19)$$

$$Q_1(x, t) = \left\{Q_1(0)\operatorname{ch}kx - H_1(0)\frac{\omega b_0 i}{k}\operatorname{sh}kx\right\}e^{i\omega t} + c.\ c. \qquad (1.20)$$

Напомним, что в сопряженные функции надо подставить величины, сопряженные с $k$ (см. (1.10)). Отсюда с помощью (1.5) и (1.6) функции $H_1(x)$ и $Q_1(x)$ определяются как

$$H_1(x) = H_1(0)\operatorname{ch} kx + Q_1(0)\frac{ki}{\omega b_0}\operatorname{sh} kx, \tag{1.21}$$

$$Q_1(x) = Q_1(0)\operatorname{ch} kx - H_1(0)\frac{\omega b_0 i}{k}\operatorname{sh} kx. \tag{1.22}$$

## 1.2. Расчет распространения простой гармонической волны в канале

Формулы (1.21) и (1.22) получены для приливного движения в канале с постоянным поперечным сечением и постоянной шириной района накопления. На практике такой случай встречается редко. Обычно поперечные размеры канала надо рассматривать как функции от $x$. Если мы разделим канал на участки так, чтобы в пределах каждого из них поперечные размеры можно было считать постоянными, то в каждом из таких однородных участков вертикальные и горизонтальные приливные колебания можно представить с помощью формул, аналогичных (1.21) и (1.22), если $H_1(0)$ и $Q_1(0)$ заменить их значениями в начале каждого участка.

Пусть $l_1$ — длина первого участка, а $H_1(l_1)$ и $Q_1(l_1)$ — значения $H_1$ и $Q_1$ на конце этого участка. Тогда мы можем выразить $H_1(l_1)$ и $Q_1(l_1)$ через соответствующие значения в начале участка с помощью (1.21) и (1.22). На следующем участке справедливы аналогичные соотношения с новыми значениями $k$ и $b_0$. Таким образом, $H_1(l_2)$ и $Q_1(l_2)$ на конце второго участка можно выразить через $H_1(l_1)$ и $Q_1(l_1)$. Исключая $H_1(l_1)$ и $Q_1(l_1)$, можно выразить $H_1(l_2)$ и $Q_1(l_2)$ через $H_1(0)$ и $Q_1(0)$, и это соотношение будет опять линейным. Продолжая действовать таким образом, мы можем выразить величины $H_1(l_n)$ и $Q_1(l_n)$ на $n$-м участке в виде линейной функции от $H_1(0)$ и $Q_1(0)$ с помощью коэффициентов всех $n$ участков:

$$\begin{aligned} H_1(l_n) &= A_n H_1(0) + B_n Q_1(0), \\ Q_1(l_n) &= C_n Q_1(0) + D_n H_1(0). \end{aligned} \tag{1.23}$$

Предположим, что $H_1(0)$ известно в начале, а $Q_1(l_n)$ — в конце реки (на конце замкнутого канала $Q_1(l_n) = 0$). Тогда мы можем рассчитать $H_1(l_n)$ и $Q_1(0)$ с помощью (1.23). Если известны $H_1(0)$ и $Q_1(0)$, то мы можем вычислить любые $H_1(l_n)$ и $Q_1(l_n)$; следовательно, в начале и конце всех участков мы найдем комплексные амплитуды $H_1$ и $Q_1$.

Было показано, что на каждом участке имеют место две гармонические волны, бегущие соответственно в положительном и отрицательном направлениях. Рассмотрим канал, состоящий из двух участков, соединяющихся при $x=x_1$. Тогда волна будет распространяться из первого участка во второй. Из-за различия площадей поперечных сечений двух участков к этой волне добавятся проходящая волна во втором участке и бегущая назад отраженная волна в первом участке. Мы говорим, что в месте сочленения участков происходит частичное отражение. Гармонические волны, бегущие в положительном направлении, могут отличаться друг от друга в двух смежных участках; это же утверждение справедливо и для волн, бегущих в отрицательном направлении. В уравнениях (1.21) и (1.22), определяющих распространение приливной волны на участке, бегущие гармонические волны рассматриваются как простые гармонические. В следующем разделе мы столкнемся со специальными случаями распространения приливных волн в каналах.

## 1.3. Некоторые примеры решения краевых граничных задач

В этом разделе рассчитывается распространение простой гармонической волны в предположении, что в устье реки известны вертикальные колебания уровня $h_1$. Рассматриваются следующие примеры.

1. В устье реки задан расход

$$Q_1(0,\ t)=q_1(0)\cos(\omega t+\beta(0)).$$

2. При $x=l$ канал замкнут, так что $Q_1(l)=0$.
3. При $x=l$ известен вертикальный прилив

$$h_1(l,\ t)=h_1(l)\cos(\omega t+\alpha(l)).$$

Например, если перешеек пересечен каналом и на обоих концах ($x=0$ и $x=l$) колебания уровня определяются морским приливом.

Очевидно, что случай 2 является частным видом случая 3, так как можно выбрать $h_1(l,\ t)$ таким образом, чтобы $Q_1(l,\ t)=0$. Однако случай 2 очень важен с практической точки зрения и поэтому рассматривается отдельно.

*Пример 1. В устье реки известны колебания уровня и расход (вертикальный и горизонтальный прилив).*

Это очень простой случай; распространение приливной волны рассчитывается с помощью выражений (1.21) и (1.22), в которых все величины известны. Колебания уровня и расход на конце $n$-го участка находятся путем операций, описанных в разд. 1.2 (см. (1.23)).

*Пример 2. Канал замкнут, а в устье канала известны колебания уровня.*

## а. *Общие формулы*

Рассмотрим случай канала с постоянным поперечным сечением, который замкнут при $x=l$ и имеет там расход $Q(l)=0$. В соответствии с (1.20) сразу же можно найти расход $Q_1(0, t)$ в устье реки. Получаем, что комплексная амплитуда расхода в устье будет

$$Q_1(0)=H_1(0)\frac{\omega b_0 i}{k}\,\mathrm{th}\,kl.$$

Подстановка в (1.21) и (1.22) теперь дает

$$H_1(x)=H_1(0)\frac{\mathrm{ch}\,k(x-l)}{\mathrm{ch}\,kl}, \tag{1.24}$$

$$Q_1(x)=-H_1(0)\frac{\omega b_0 i}{k}\frac{\mathrm{sh}\,k(x-l)}{\mathrm{ch}\,kl}. \tag{1.25}$$

Подставляя эти выражения в (1.5) и (1.6), можно определить вещественные функции $h_1(x, t)$ и $Q_1(x, t)$.

Тогда из уравнения (1.5), используя, кроме того, соотношение

$$h_1(x,\ t)=2\,\mathrm{Re}\left\{H_1(x)\,e^{i\omega t}\right\}=2\left\{\mathrm{Re}\,H_1(x)\right\}\cos\omega t - \\ -2\left\{\mathrm{Im}\,H_1(x)\right\}\sin\omega t$$

и вводя величину $s_2$, определяемую как

$$s_2=\frac{2\omega l}{c_0}=\frac{4\pi l}{L}, \tag{1.26}$$

где $L$ — длина волны, получим

$$h_1(x,\ t)=h_1(0)\frac{A\cos\omega t+B\sin\omega t}{\mathrm{ch}\,s_2\sigma+\cos s_2\beta}, \tag{1.27}$$

где

$$A=2\left[\varphi_1(l)\varphi_1(x-l)+\varphi_2(l)\varphi_2(x-l)\right].$$
$$B=-2\left[\varphi_1(l)\varphi_2(x-l)-\varphi_2(l)\varphi_1(x-l)\right] \tag{1.28}$$

и

$$\varphi_1(x)=\mathrm{ch}\,\frac{1}{2}s_2\sigma\frac{x}{l}\cos\frac{1}{2}s_2\beta\frac{x}{l},$$

$$\varphi_2(x)=\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}s_2\sigma\frac{x}{l}\sin\frac{1}{2}s_2\beta\frac{x}{l}. \tag{1.29}$$

Аналогично из (1.6) и (1.25) следует, что

$$Q_1(x,\ t)=h_1(0)\frac{b_0 c_0}{\sigma^2+\beta^2}\,\frac{C\cos\omega t+D\sin\omega t}{\mathrm{ch}\,s_2\sigma+\cos s_2\beta}, \tag{1.30}$$

где

$$C = 2\sigma\{\varphi_1(l)\varphi_3(x-l) - \varphi_2(l)\varphi_4(x-l)\} - $$
$$- 2\beta\{\varphi_1(l)\varphi_4(x-l) + \varphi_2(l)\varphi_3(x-l)\}, \tag{1.31}$$
$$D = 2\beta\{-\varphi_1(l)\varphi_3(x-l) + \varphi_2(l)\varphi_4(x-l)\} - $$
$$- 2\sigma\{\varphi_1(l)\varphi_4(x-l) + \varphi_2(l)\varphi_3(x-l)\}.$$

Здесь

$$\varphi_3(x) = \operatorname{ch}\frac{1}{2}s_2\sigma\frac{x}{l}\sin\frac{1}{2}s_2\beta\frac{x}{l},$$
$$\varphi_4(x) = \operatorname{sh}\frac{1}{2}s_2\sigma\frac{x}{l}\cos\frac{1}{2}s_2\beta\frac{x}{l}. \tag{1.32}$$

При выводе были использованы хорошо известные формулы:

$$2\operatorname{ch}^2\frac{1}{2}s_2\sigma = 1 + \operatorname{ch}s_2\sigma; \quad 2\operatorname{sh}^2\frac{1}{2}s_2\sigma = -1 + \operatorname{ch}s_2\sigma.$$

### б. *Специальный случай при отсутствии трения*

Рассмотрение теоретического случая без силы трения помогает глубже понять приливные явления, потому что приближение к такому состоянию имеет место всегда, когда сила сопротивления мала.

Если сила сопротивления равна нулю, так что $\lambda=0$ и, таким образом, параметр $s_1=0$, то величины $\sigma$ и $\beta$ будут равны соответственно единице и нулю. Тогда из (1.27) и (1.30) следует, что

$$h_1(x, t) = h_1(0)\frac{\cos\frac{\omega}{c_0}(x-l)}{\cos\frac{\omega}{c_0}l}\cos\omega t \tag{1.33}$$

и

$$Q_1(x, t) = b_0c_0h_1(0)\frac{\sin\frac{\omega}{c_0}(x-l)}{\cos\frac{\omega}{c_0}l}\sin\omega t. \tag{1.34}$$

Решения (1.33) и (1.34) описывают *стоячие волны*. Амплитуды изменяются вдоль $x$ по синусоиде, т. е.

$$h_1(x) = h_1(0)\left|\frac{\cos\frac{\omega}{c_0}(x-l)}{\cos\frac{\omega}{c_0}l}\right|, \tag{1.35}$$

$$Q_1(x) = b_0c_0h_1(0)\left|\frac{\sin\frac{\omega}{c_0}(x-l)}{\cos\frac{\omega}{c_0}l}\right|. \tag{1.36}$$

Для стоячих волн разность фаз уровня и расхода составляет $\pi/2$. Стоячее колебание характеризуется сменой течения при полной и малой воде. Самые сильные течения имеют место при среднем уровне. Если

$$\frac{\omega}{c_0} l \neq (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad (n=0,\ 1,\ 2, \ldots),$$

то во всех точках $x = l - \frac{c_0}{\omega}(2n+1)\frac{\pi}{2}$ амплитуда колебаний уровня равна нулю, а амплитуда расхода (течения) максимальна (предполагается, что канал достаточно длинный, чтобы такие места в нем были). Эти точки называются *узлами* вертикального прилива. Наконец, в точках

$$x = l - \frac{c_0}{\omega} n\pi \qquad (n=0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

амплитуда расхода (течений) равна нулю. Эти точки называются *узлами* горизонтального прилива или *пучностями* вертикального прилива.

В устье канала будет узел расхода, если $l = n\pi c_0/\omega$ ($n=0$, 1, 2, ...). В этом случае $h_1(l)$ и $h_1(0)$ равны. Если $l \neq n\pi c_0/\omega$, то амплитуда на замкнутом конце всегда будет больше, чем в устье, в соответствии с

$$h_1(l) = \frac{h_1(0)}{\left|\cos \frac{\omega}{c_0} l\right|}. \tag{1.37}$$

В предыдущем разделе мы предполагали, что в канале существуют вынужденные колебания, создаваемые приливным движением внешнего моря. В таком канале могут существовать и *свободные колебания*. Обозначим частоту свободного колебания через $\omega_0$. По определению, такие колебания могут развиваться независимо от прилива в море. Если канал замкнут на одном конце, свободные колебания должны представлять собой стоячие волны с узлом горизонтального прилива на замкнутом конце и с узлом вертикального прилива в устье. Частоты таких движений будут зависеть от длины канала. Эти частоты можно легко найти следующим образом. Согласно (1.19) и (1.20), где $k = i\omega_0/c_0$ при отсутствии трения, свободные колебания определяются следующими формулами:

$$h_1(x,\ t) = -Q_1(0)(c_0 b_0)^{-1}\left(\operatorname{sh} i \frac{\omega_0}{c_0} x\right) e^{i\omega_0 t} + c.\ c., \tag{1.38}$$

$$Q_1(x,\ t) = Q_1(0)\left(\operatorname{ch} i \frac{\omega_0}{c_0} x\right) e^{i\omega_0 t} + c.\ c., \tag{1.39}$$

в то время как при $x=l$ должно удовлетворяться условие $Q_1(x, t)=0$. Отсюда

$$\operatorname{ch} i\frac{\omega_0}{c_0}l=\cos\frac{\omega_0}{c_0}l=0,$$

так что

$$\omega_0=(2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{c_0}{l} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Этим выражением определяются частоты свободных колебаний. Длина канала $l$ будет составлять $^1/_4$, $^3/_4$ или $^5/_4$ и т. д. длины волны $L=2\pi c_0/\omega_0$.

Свободные колебания описываются стоячими волнами

$$h_1(x,\ t)=2Q_1(0)(c_0b_0)^{-1}\sin\frac{\omega_0}{c_0}x\sin\omega_0 t, \tag{1.40}$$

$$Q_1(x,\ t)=2Q_1(0)\cos\frac{\omega_0}{c_0}x\cos\omega_0 t. \tag{1.41}$$

В частном случае, когда вынужденные колебания имеют тот же период, что и свободные $\left(\omega_0=\frac{1}{2}\pi(2n+1)c_0/l\right)$, из (1.33) и (1.34) следует, что прилив становится бесконечно большим. Мы говорим, что в этом случае имеет место полный резонанс. К счастью, благодаря трению прилив всегда остается конечным, но возможны случаи, когда колебания уровня у замкнутого конца канала значительно возрастают при условиях резонанса. Подобным же образом течения в устье могут быть сильными, если сила сопротивления мала. Тогда нельзя пренебрегать членом Бернулли.

В конце этого раздела будет рассмотрено существование узлов в случае, когда силой сопротивления в канале пренебречь нельзя.

### в. *Амплитуды гармонической волны при наличии трения*

Из (1.27) и (1.30) можно найти амплитуды функций $h_1(x,\ t)$ и $Q_1(x,\ t)$, т. е. величины $h_1(x)$ и $Q_1(x)$. Стандартные вычисления дают

$$h_1(x)=h_1(0)\left[\operatorname{ch} s_2\sigma\left(1-\frac{x}{l}\right)+\cos s_2\beta\left(1-\frac{x}{l}\right)\right]^{1/2}\times$$
$$\times\left[\operatorname{ch} s_2\sigma+\cos s_2\beta\right]^{-1/2}, \tag{1.42}$$

$$Q_1(x)=h_1(0)\,b_0c_0(\sigma^2+\beta^2)^{-1/2}\left[\operatorname{ch} s_2\sigma\left(1-\frac{x}{l}\right)-\right.$$
$$\left.-\cos s_2\beta\left(1-\frac{x}{l}\right)\right]^{1/2}\left[\operatorname{ch} s_2\sigma+\cos s_2\beta\right]^{-1/2}. \tag{1.43}$$

Эти формулы можно получить непосредственно из (1.24) и (1.25), используя соотношение $h_1^2(x)=4H_1(x)H_{-1}(x)$ и соответствующее выражение для $Q_1^2(x)$. Рассмотрим сначала поведение амплитуды $h_1(l)$ в замкнутом конце канала при различных $l$ или $\omega$.

При $x=l$ выполняется соотношение

$$h_1(l)=h_1(0)\,2^{1/2}(\operatorname{ch} s_2\sigma+\cos s_2\beta)^{-1/2}, \tag{1.44}$$

где $s_2=2\omega c_0^{-1}l$.

Влияние постоянного коэффициента сопротивления $\lambda$ проявляется через коэффициенты $\sigma$ и $\beta$, которые зависят от параметра $s_1=\lambda\omega^{-1}$ (см. (1.11) и (1.13)). Если $s_1\neq 0$, то амплитуда колебаний уровня в замкнутом конце всегда остается конечной. Сравнение (1.37) с (1.44) показывает, что $h_1(l)$ будет меньше, чем соответствующая величина при отсутствии трения. Далее, $h_1(l)$ есть осциллирующая функция от $\cos s_2\beta$, стремящаяся к нулю, если $l$, а следовательно, и $s_2$ безгранично возрастают. Асимптотическое поведение $h_1(l)$ описывается формулой

$$h_1(l)\approx 2h_1(0)\,e^{-1/2 s_2\sigma}\left(1-e^{-s_2\sigma}\cos s_2\beta\right). \tag{1.45}$$

Для малых $l$, таких, при которых $s_2\sigma$ и $s_2\beta$ малы по сравнению с единицей, можно использовать приближенную формулу

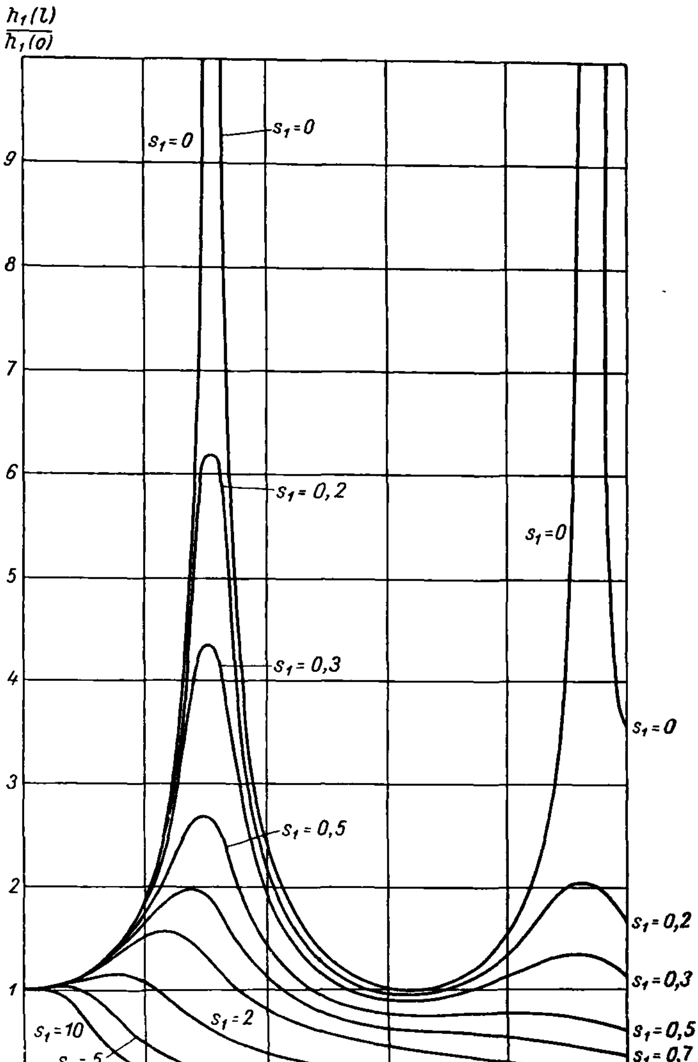
$$h_1(l)\approx h_1(0)\left[1+\frac{1}{8}s_2^2\right], \tag{1.46}$$

которая получена с помощью соотношения (1.13).

В случае сейш с относительно высокой частотой $\omega$ величина $s_1$ обычно мала для сравнительно глубоких каналов, а $s_2$ может быть относительно велика. Тогда $\beta\approx 1$, а $s_2\sigma\approx\frac{1}{2}s_2s_1=l\lambda/c_0$ (см. (1.13)). Из (1.44) затем следует, что значительный рост амплитуды всегда может иметь место в каналах сравнительно небольшой длины, т. е. в гаванях.

На рис. 2.1 соотношение $h_1(l)/h_1(0)$ (уравнение (1.44)) показано как функция от $s_2=2\omega l/c_0$. Кривые вычислены для следующих значений параметра $s_1$: 0; 0,2; 0,3; 0,5; 0,7; 1; 2; 5 и 10. Величина $s_1$ будет больше, если сопротивление в канале возрастает или частота $\omega$ гармонической волны уменьшается при незначительном изменении $\lambda$, т. е. когда происходит переход от волн короткого периода, типа сейш, к волнам длинного периода, типа приливных.

В п. «б» примера 2 было показано, что если $s_1=0$, то $h_1(l)$ будет бесконечно большим для $s_2=\pi$, $3\pi$ и т. д. или, выражая все через длину волны $L=2\pi c_0/\omega$, для $l=L/4$, $3L/4$ и т. д. Если $s_1\neq 0$, то $h_1(l)$ будет оставаться конечным для любых $l$, но при опреде-



h₁(l)/h₁(o)
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
s₁ = 0
s₁ = 0
s₁ = 0,2
s₁ = 0,3
s₁ = 0,5
s₁ = 0
s₁ = 0
s₁ = 0,2
s₁ = 0,3
s₁ = 0,5
s₁ = 0,7
s₁ = 1
s₂
s₁ = 2
s₁ = 10
s₁ = 5
2
π
4
6
2π
8
3π
10
1/4 L
1/2 L
3/4 L


Рис. 2.1.

ленных значениях $l$ будет принимать некоторые максимальные значения. Например, при $s_1 > 0{,}5$ будет только один максимум. Величина этого максимума будет уменьшаться с увеличением величины $s_1$, а его местоположение будет находиться на все более коротком расстоянии $l$. В более длинных каналах амплитуда будет стремиться к нулю при $l \to \infty$.

Интересно также рассмотреть амплитуду приливного расхода в устье реки как функцию длины реки $l$ или частоты гармонического прилива $\omega$, или обеих этих величин. Из (1.43) следует, что

$$Q_1(0) = h_1(0)\, b_0 c_0 \left(1 + s_1^2\right)^{-1/4} (\mathrm{ch}\,\sigma s_2 - \cos\beta s_2)^{1/2} \times$$
$$\times (\mathrm{ch}\,\sigma s_2 + \cos\beta s_2)^{-1/2}. \tag{1.47}$$

Для достаточно больших значений $l$, а следовательно, и $s_2$ осциллирующая функция $\cos\beta s_2\,\mathrm{ch}^{-1}\,\sigma s_2$ может быть приближенно заменена на $2e^{-\sigma s_2}\cos\beta s_2$. Следовательно, мы можем положить

$$Q_1(0) = h_1(0)\, b_0 c_0 \left(1 + s_1^2\right)^{-1/4} \left(1 - 2e^{-s_2\sigma}\cos s_2\beta\right). \tag{1.48}$$

Асимптотическая (предельная) величина $Q_1(0)$ будет

$$Q_1(0) = h_1(0)\, b_0 c_0 \left(1 + s_1^2\right)^{-1/4} \tag{1.49}$$

и функция $Q_1(0)$ будет осциллировать около этой величины, причем амплитуда колебания будет уменьшаться по мере возрастания $l$.

Для малых значений $l$, когда $\sigma s_2$ и $\beta s_2$ малы, мы можем приближенно положить

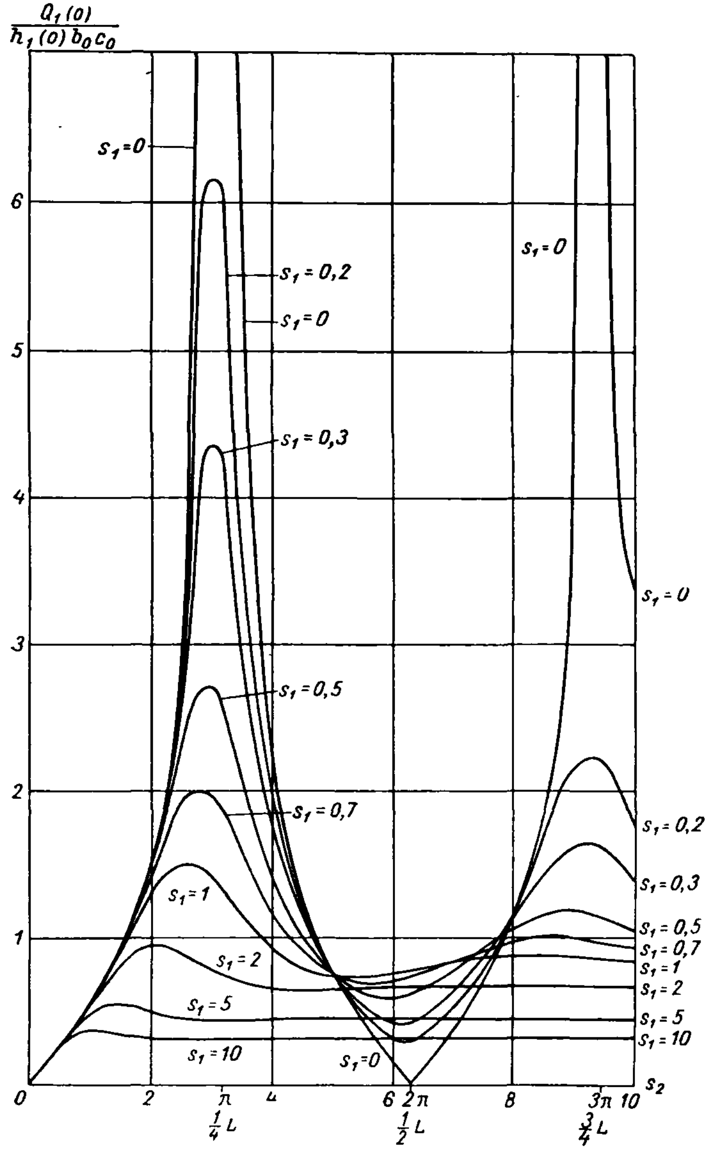
$$Q_1(0) = \frac{1}{2} h_1(0)\, b_0 c_0 s_2 \left[1 + \frac{1}{8} s_2^2\right].$$

Дальнейшее упрощение дает

$$Q_1(0) = h_1(0)\, \omega b_0 l. \tag{1.50}$$

На рис. 2.2 показана величина $Q_1(0)/h_1(0)\, b_0 c_0$ как функция $s_2$ в соответствии с (1.47) для тех же значений $s_1$, что и на рис. 2.1.

С помощью этих графиков можно показать, что если реку сделать короче (например, отгородив часть ее), то течения в устье не обязательно станут слабее. Например, в Нидерландах, когда залив Зёйдер-Зе был перегорожен, течения в проливах, соединяющих Зёйдер-Зе с морем, возросли (см. Лоренц [85], Тийссе [140]). До этого величины $s_1$ и $s_2$ были определены как 1,5 и 6, а после перегораживания Зёйдер-Зе эти величины в оставшейся части (Вадден-Зе) составляли 2 и 1,5. Рисунок 2.2 показывает, что максимальное течение в устье такого морского залива действительно увеличивается. Это явление можно физически объяснить следующим образом. До перегораживания прилив в значительной степени гасился в Зёйдер-Зе и Вадден-Зе,



$\frac{Q_1(0)}{h_1(0)\,b_0 c_0}$
6
5
4
3
2
1
0
2
π
4
6 2π
8
3π 10
$\frac{1}{4}L$
$\frac{1}{2}L$
$\frac{3}{4}L$
$s_2$
$s_1=0$
$s_1=0,2$
$s_1=0$
$s_1=0,3$
$s_1=0,5$
$s_1=0,7$
$s_1=1$
$s_1=2$
$s_1=5$
$s_1=10$
$s_1=0$
$s_1=0$
$s_1=0$
$s_1=0,2$
$s_1=0,3$
$s_1=0,5$
$s_1=0,7$
$s_1=1$
$s_1=2$
$s_1=5$
$s_1=10$


Рис. 2.2.

а после перегораживания прилив в оставшейся части сильно увеличился. Кроме того, вследствие значительных размеров Зёйдер-Зе возвратно-поступательное движение частиц воды в большей части этого бассейна в течение приливного периода не сказывалось на течениях в устьях.

Когда осуществление Дельта-плана в Нидерландах будет завершено и размеры речной системы, свободно связанной с Роттердамским судоходным каналом, увеличатся, течения в ее устье станут слабее. Произойдет явление, обратное тому, которое явилось результатом перегораживания Зёйдер-Зе.

*Пример 3. На обоих концах канала известны колебания уровня.*

Пусть $h_1(0, t)$ и $h_1(l, t)$ известны. Комплексная форма записи $h_1(l, t)$ будет

$$h_1(l,\ t) = H_1(l)e^{i\omega t} + c.\ c., \tag{1.51}$$

где $H_1(l) = \frac{1}{2}h_1(l)e^{i\alpha}$, а $\alpha$ представляет собой разность фаз колебаний в обоих концах. Из (1.21) следует, что $Q_1(0)$ в устье равно

$$Q_1(0) = \frac{\omega b_0 i}{k}\left(-\frac{H_1(l)}{\operatorname{sh} kl} + H_1(0)\operatorname{cth} kl\right).$$

Отсюда после подстановки в (1.19) и (1.20) получаем

$$h_1(x,\ t) = \left\{H_1(l)\frac{\operatorname{sh} kx}{\operatorname{sh} kl} - H_1(0)\frac{\operatorname{sh} k(x-l)}{\operatorname{sh} kl}\right\}e^{i\omega t} + c.\ c., \tag{1.52}$$

$$Q_1(x,\ t) = -\frac{b_0\omega i}{k}\left\{H_1(l)\frac{\operatorname{ch} kx}{\operatorname{sh} kl} - H_1(0)\frac{\operatorname{ch} k(x-l)}{\operatorname{sh} kl}\right\}e^{i\omega t} + c.\ c. \tag{1.53}$$

С помощью выражения

$$h_1(x,\ t) = 2\operatorname{Re}\left\{H_1(l)\frac{\operatorname{sh} kx}{\operatorname{sh} kl} - H_1(0)\frac{\operatorname{sh} k(x-l)}{\operatorname{sh} kl}\right\}e^{i\omega t}$$

мы можем найти вещественную форму, т. е.

$$\begin{gathered} h_1(x,\ t) = \{[h_1(l)A_1(x) - h_1(0)A_2(x-l)]\cos\omega t + \\ + [h_1(l)B_1(x) - h_1(0)B_2(x-l)]\sin\omega t\}(\operatorname{ch} s_2\sigma - \cos s_2\beta)^{-1}, \end{gathered} \tag{1.54}$$

где

$$\begin{gathered} A_1(x) = 2[P(x)\cos\alpha - R(x)\sin\alpha], \quad A_2(x) = 2P(x), \\ B_1(x) = -2[P(x)\sin\alpha + R(x)\cos\alpha], \quad B_2(x) = -2R(x); \\ P(x) = \varphi_3(l)\varphi_3(x) + \varphi_4(l)\varphi_4(x), \\ R(x) = \varphi_4(l)\varphi_3(x) - \varphi_3(l)\varphi_4(x). \end{gathered} \tag{1.55}$$

Определение $\varphi(x)$ было дано в (1.29) и (1.32). Аналогичным путем получаем

$$Q_1(x,\ t) = b_0 c_0 (\sigma^2 + \beta^2)^{-1} \{[h_1(l) C_1(x) - h_1(0) C_2(x-l)] \cos \omega t + \\ + [h_1(l) D_1(x) - h_1(0) D_2(x-l)] \sin \omega t\} (\operatorname{ch} s_2\sigma - \cos s_2\beta)^{-1}, \quad (1.56)$$

где

$$C_1(x) = 2[\sigma S(x) - \beta T(x)] \cos\alpha + 2[\beta S(x) + \sigma T(x)] \sin\alpha,$$
$$C_2(x) = 2[\sigma S(x) - \beta T(x)],$$
$$D_1(x) = 2[\beta S(x) + \sigma T(x)] \cos\alpha - 2[\sigma S(x) - \beta T(x)] \sin\alpha, \quad (1.57)$$
$$D_2(x) = 2[\beta S(x) + \sigma T(x)],$$
$$S(x) = -\varphi_3(l)\varphi_1(x) + \varphi_4(l)\varphi_2(x),$$
$$T(x) = \varphi_4(l)\varphi_1(x) + \varphi_3(l)\varphi_2(x).$$

Используя (1.56) и (1.57), можно рассчитать расходы $Q(0,\ t)$ и $Q(l,\ t)$ на обоих концах канала.

Кроме того, нам понадобятся формулы для амплитуд функции $h(x,\ t)$ и $Q(x,\ t)$. Квадраты амплитуд определяются из следующих выражений:

$$h_1^2(x)(\operatorname{ch} s_2\sigma - \cos s_2\beta) = h_1^2(0)\left[\operatorname{ch} s_2\sigma\left(1 - \frac{x}{l}\right) - \cos s_2\beta\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right] + \\ + h_1^2(l)\left[\operatorname{ch} s_2\sigma \frac{x}{l} - \cos s_2\beta \frac{x}{l}\right] - 2h_1(0)h_1(l) \times \\ \times \left[\cos\alpha\left\{\cos\frac{1}{2}s_2\beta \operatorname{ch}\frac{1}{2}s_2\sigma\left(1 - \frac{2x}{l}\right) - \right.\right. \\ \left. - \operatorname{ch}\frac{1}{2}s_2\sigma\cos\frac{1}{2}s_2\beta\left(1 - \frac{2x}{l}\right)\right\} + \sin\alpha\left\{\sin\frac{1}{2}s_2\beta \operatorname{sh}\frac{1}{2} \times \right. \\ \left.\left. \times s_2\sigma\left(1 - \frac{2x}{l}\right) - \operatorname{sh}\frac{1}{2}s_2\sigma\sin\frac{1}{2}s_2\beta\left(1 - \frac{2x}{l}\right)\right\}\right]; \quad (1.58)$$

$$Q_1^2(x)(\operatorname{ch} s_2\sigma - \cos s_2\beta) = b_0^2 c_0^2(\sigma^2 + \beta^2)^{-1} \times \\ \times \left(h_1^2(0)\left[\operatorname{ch} s_2\sigma\left(1 - \frac{x}{l}\right) + \cos s_2\beta\left(1 - \frac{x}{l}\right)\right] + \right. \\ + h_1^2(l)\left[\operatorname{ch} s_2\sigma\frac{x}{l} + \cos s_2\beta\frac{x}{l}\right] - \\ - 2h_1(0)h_1(l)\left[\cos\alpha\left\{\cos\frac{1}{2}s_2\beta\operatorname{ch}\frac{1}{2}s_2\sigma\left(1 - \frac{2x}{l}\right) + \right.\right. \\ \left. + \operatorname{ch}\frac{1}{2}s_2\sigma\cos\frac{1}{2}s_2\beta\left(1 - \frac{2x}{l}\right)\right\} + \\ + \sin\alpha\left\{\sin\frac{1}{2}s_2\beta\operatorname{sh}\frac{1}{2}s_2\sigma\left(1 - \frac{2x}{l}\right) + \right. \\ \left.\left.\left. + \operatorname{sh}\frac{1}{2}s_2\sigma\sin\frac{1}{2}s_2\beta\left(1 - \frac{2x}{l}\right)\right\}\right]\right). \quad (1.59)$$

Эти уравнения значительно упрощаются, если на одном конце
Примером может служить Панамский канал, где прилив со
колебания уровня пренебрежимо малы и $h_1(0)$ или $h_1(l)$ можно положить равным нулю.
стороны Атлантики очень мал. Для этого канала приближенная оценка дает $s_2=1{,}5$, $s_1=1$. На рис. 2.3 показан ход уровня моря вдоль канала, построенный на основе названных величин. Здесь принято, что амплитуда прилива со стороны Атлантики равна нулю.

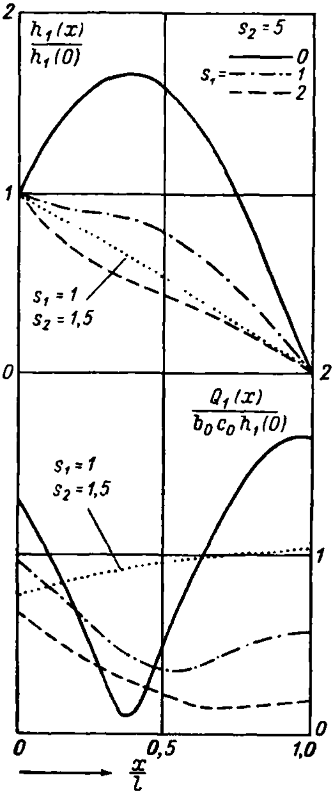



Рис. 2.3.

Другие примеры даны на рис. 2.4—2.6, где показано распределение величин $h_1(x)$ и $Q_1(x)$ для следующих случаев: $s_2=5$, а $s_1=0$, 1 и 2, что соответствует в случае волны $M_2$ каналам, имеющим, например, длину $l$, равную 165 км, при средней глубине 9 м. Если величину $\omega$ — частоту колебания — принять в 10 раз большей, чем частота волны $M_2$, то длину канала надо взять равной 16,5 км.

На всех этих рисунках амплитуда на одном конце канала равна условной единичной высоте. Это — непринципиальное ограничение, так как прилив в канале определяется главным образом именно соотношением приливов на его концах. Это соотношение зависит от амплитуд и разности фаз $\alpha$ между колебаниями уровня на каждом из концов.

Поэтому на рис. 2.4—2.6 рассматриваются случаи, когда $h_1(l)/h_1(0)$ равно $^1/_2$ и 1, и для каждого случая номерами *1*, *2*, *3*, *4* и *5* обозначены кривые, соответствующие $\alpha=0$, $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$ и $\pi$. На рис. 2.3, где величина $h_1(l)$ принята равной нулю, кривые даны для $s_2=5$ и $s_1=0$, 1 и 2 соответственно.

В общем, не существует таких мест, где амплитуда $h_1(x)$ или расход $Q_1(x)$ равнялись бы нулю, кроме тех случаев, когда амплитуды на обоих концах канала и разность фаз удовлетворяют уравнениям, которые будут получены ниже. Предположим, что параметры $s_1$ и $s_2$ известны. Тогда расход $Q_1(x)$ будет равен нулю в определенной точке $x=x_0$ при условии, что отношение $h_1(l)/h_1(0)$ удовлетворяет квадратному уравнению, которое следует из (1.59) при $Q_1(x_0)=0$. Дискриминант $D$ этого уравнения будет

$$D = -\left[\cos\alpha\left\{\sin\frac{1}{2}s_2\beta\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}s_2\sigma\left(1-\frac{2x_0}{l}\right)+\right.\right.$$
$$\left.+\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{2}s_2\sigma\sin\frac{1}{2}s_2\beta\left(1-\frac{2x_0}{l}\right)\right\}-\sin\alpha\left\{\cos\frac{1}{2}s_2\beta\,\mathrm{ch}\,\frac{1}{2}\times\right.$$
$$\left.\left.\times\, s_2\sigma\left(1-\frac{2x_0}{l}\right)+\mathrm{ch}\,\frac{1}{2}s_2\sigma\cos\frac{1}{2}s_2\beta\left(1-\frac{2x_0}{l}\right)\right\}\right]^2. \quad (1.60)$$

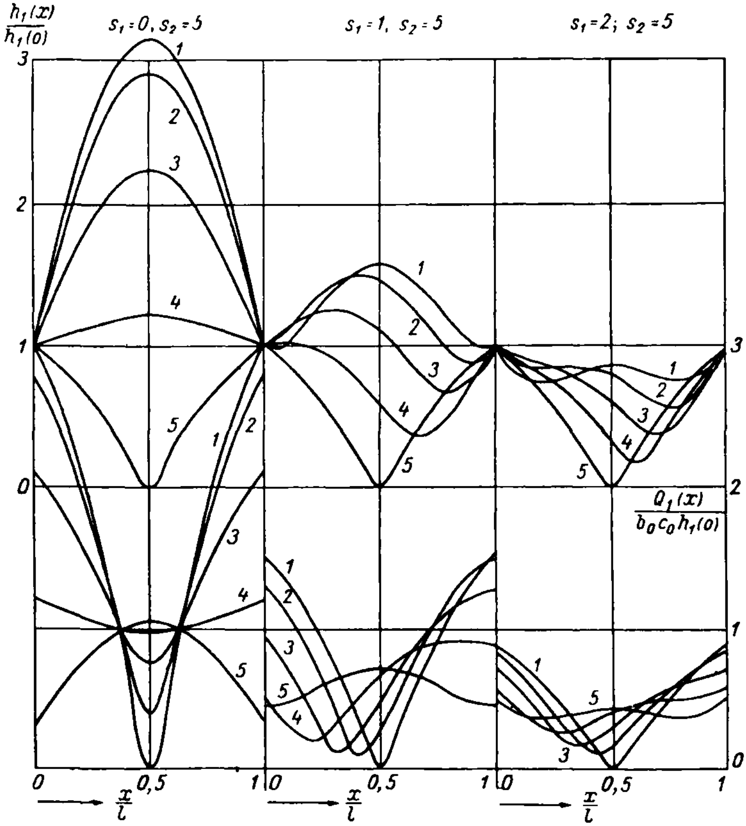


Рис. 2.4.

Поскольку $D \leqslant 0$, решение для $h_1(l)/h_1(0)$ может быть получено только при $D=0$. Тогда разность фаз $\alpha$ определяется из выражения для $\mathrm{tg}\,\alpha$, которое следует из (1.60), если $D=0$. Для $h_1(l)/h_1(0)$ получаем следующее соотношение:

$$h_1(l) = h_1(0)\frac{\left(B_1^2+B_2^2\right)^{1/2}}{A}, \quad (1.61)$$

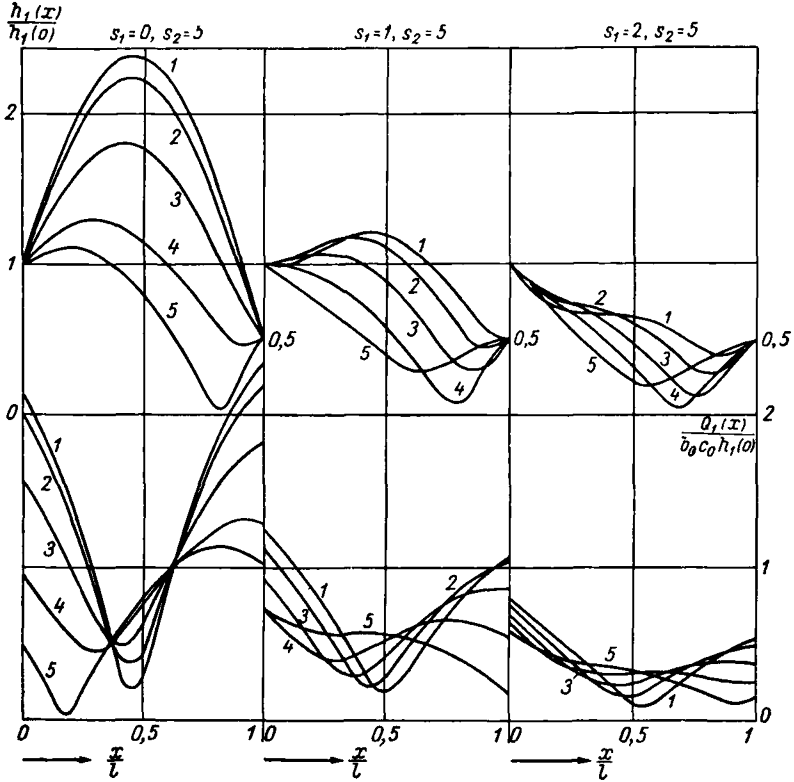

$\frac{h_1(x)}{h_1(0)}$
$s_1=0,\ s_2=5$
$s_1=1,\ s_2=5$
$s_1=2,\ s_2=5$
$\frac{Q_1(x)}{b_0 c_0 h_1(0)}$
$\frac{x}{l}$

Рис. 2.5.

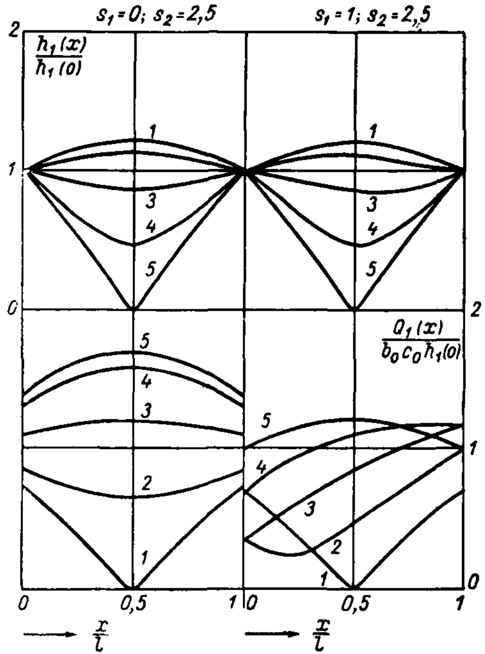

$s_1=0;\ s_2=2,5$
$s_1=1;\ s_2=2,5$
$\frac{h_1(x)}{h_1(0)}$
$\frac{Q_1(x)}{b_0 c_0 h_1(0)}$
$\frac{x}{l}$

Рис. 2.6.

где $B_1$ — коэффициент при $\cos\alpha$ в (1.60), $B_2$ — коэффициент при $\sin\alpha$ в (1.60), а величина $A$ определяется как

$$A = \operatorname{ch} s_2\sigma \frac{x_0}{l} + \cos s_2\beta \frac{x_0}{l}.$$

Очевидно, $h_1(l)$ можно подобрать так, чтобы на одном конце канала выполнялось равенство $Q_1(l)=0$ или $Q_1(0)=0$. Если $x_0=l$ подставить в (1.61), то снова получим уравнение (1.44).

## 1.4. Распространение гармонической волны в каналах с поперечным сечением, постепенно изменяющимся по определенному закону

В природе площадь поперечного сечения реки при среднем уровне ($A_0(x)$) обычно уменьшается с удалением от устья. При определенном виде функции $A_0(x)$ можно получить точные решения упрощенных приливных уравнений (1.1) и (1.2), в которых член, учитывающий сопротивление, принят линейным. Такие случаи, однако, редко встречаются в природных условиях, и поэтому нам обычно приходится применять метод, описанный в разд. 1.2, т. е. разделять реку на ряд участков, так чтобы в пределах каждого участка площадь поперечного сечения можно было считать постоянной.

В данном разделе мы сначала рассмотрим некоторые случаи, для которых можно получить точные решения. Эти решения довольно сложны. Они соответствуют случаю канала, замкнутого на конце. После этого граничные условия позволят нам получить формулы для приливного движения, пригодные для практического использования.

Пусть ширина района накопления $b_0$ и площадь поперечного сечения $A_0$ являются функциями от $x$, определенными при среднем уровне.

Исключая $Q$ из (1.1) и (1.2), получим дифференциальное уравнение:

$$gA_0 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + g\frac{dA_0}{dx}\frac{\partial h}{\partial x} - b_0 \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \lambda b_0 \frac{\partial h}{\partial t} = 0. \qquad (1.62)$$

Пусть $A_0$ и $b_0$ линейно уменьшаются по мере роста $x$, т. е.

$$A_0 = A_{00}(1-\alpha x), \quad b_0 = b_{00}(1-\beta x), \quad \alpha \geqslant 0, \quad \beta \geqslant 0, \qquad (1.63)$$

где $A_{00}$ и $b_{00}$ определены в устье реки ($x=0$). В конце реки, длина которой $l$, должно быть $\alpha l < 1$ и $\beta l < 1$.

Тогда комплексная амплитуда $H_1(x)$ гармонической волны (1.5) должна удовлетворять уравнению

$$(1-\alpha x)\frac{d^2 H_1}{dx^2} - \alpha\frac{dH_1}{dx} + \frac{b_{00}}{gA_{00}}(\omega^2 - i\lambda\omega)(1-\beta x)H_1 = 0. \qquad (1.64)$$

Общее решение этого уравнения может быть записано в форме

$$H_1 = e^{kx} f_1(x) + e^{-kx} f_2(x), \tag{1.65}$$

где $k^2$ удовлетворяет соотношению

$$k^2 + p = 0, \tag{1.66}$$

где $p = g^{-1} b_{00} A_{00}^{-1} (\omega^2 - i\lambda\omega)$.

Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ могут быть представлены в виде степенного ряда

$$f_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{1.67}$$

и аналогичного ряда для $f_2(x)$.

Так как при $\alpha = \beta = 0$ решение (1.65) должно свестись к (1.9), то оказывается, что в (1.67) величина $a_1$ должна быть равна нулю. Подставляя (1.65) и (1.67) в (1.64), находим следующие выражения для $a_2$, $a_3$ и $a_4$:

$$a_2 = \frac{\alpha k}{2}, \quad a_3 = \frac{\alpha^2 k}{3} - \frac{k^2(\alpha + \beta)}{3!},$$

$$\alpha_4 = \frac{\alpha^3 k}{4} + \frac{2k^3(\alpha + \beta)}{4!} - \frac{k^2 \alpha}{4!}(2\alpha + 3\beta). \tag{1.68}$$

Читатель легко может найти выражения для остальных коэффициентов при $n \geqslant 5$ в (1.67) по следующей рекуррентной формуле:

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} - (n+1)(\alpha n + \alpha - 2k)a_{n+1} - \\ - (2n+1)\alpha k a_n - k^2(\alpha - \beta)a_{n-1} = 0. \tag{1.69}$$

Коэффициенты для $f_2(x)$ находятся путем замены $k$ на $-k$ в (1.68) и (1.69).

Ряд будет сходиться при всех значениях $x \leqslant l$, так как мы предположили, что $\alpha l < 1$ и $\beta l < 1$.

Решение краевой задачи того же типа, что и в разд. 1.3, находится способом, который был изложен в этом разделе на различных примерах в применении к каналам постоянного поперечного сечения. Однако формулы становятся гораздо более сложными, поэтому при практическом использовании учитываются лишь немногие члены ряда.

Более простые решения для распространения гармонической волны были получены для перечисленных ниже специальных случаев различными авторами — Евангелисти [39], Шёнфельдом [125], Перроудом [93], Доррестейном [27]. Последний обобщил также результаты разных исследователей и дал примеры численных расчетов. Поведение длинных волн в воронкообразных каналах различной формы, замкнутых на одном конце, было рассмотрено Ламбом [79] в предположении, что трение отсутствует.

Заключительная часть настоящего раздела касается только методов, использованных в указанных работах. Более подробные сведения можно найти в первоисточниках.

Пусть $a_0$ — средняя глубина, а $b_0$ — ширина района накопления, которая равна ширине потока. Расстояние будем отсчитывать от конца замкнутого канала. Рассмотрим следующие случаи:

1) $a_0=\text{const}$, $b_0=px$;
2) $a_0=rx$, $b_0=\text{const}$;
3) комбинацию случаев 1 и 2;
4) $a_0=rx^n$, $b_0=px^m$.

Во всех этих случаях $p$ и $r$ — константы. Соответствующие решения могут быть выражены в бесселевых функциях с комплексными аргументами. Это можно показать, введя в дифференциальное уравнение (1.2) (где $b_0$ и $A_0=a_0b_0$ определены согласно сделанным допущениям) новую независимую переменную $s$, которая определяется как $s=f(x)$. Тогда $f(x)$ может быть подобрана соответствующим образом в зависимости от распределения $b_0$ и $A_0$ вдоль $x$. Так как $\partial h/\partial x=(\partial h/\partial s)/(ds/dx)$ и т. д., то находим (см. (1.62)), что комплексная амплитуда $H_1(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$gA_0\left(\frac{ds}{dx}\right)^2\frac{d^2H_1}{ds^2}+\left(g\frac{dA_0}{dx}\frac{ds}{dx}+gA_0\frac{d^2s}{dx^2}\right)\frac{dH_1}{ds}+ \\ +(b_0\omega^2-\lambda b_0 i)H_1=0. \tag{1.70}$$

Если $s=f(x)$ является решением дифференциального уравнения

$$b_0\omega^2-\lambda b_0 i=gA_0\left(\frac{ds}{dx}\right)^2,$$

то (1.70) превращается в более простое уравнение

$$\frac{d^2H_1}{ds^2}+F(s)\frac{dH_1}{ds}+H_1=0, \tag{1.71}$$

где $F(s)$ можно определить путем некоторых выкладок, а $x$ выражается через $s$ с помощью функции, обратной по отношению к $s=f(x)$. Ясно, что эти действия можно выполнить лишь при специальном виде функций $A_0(x)$ и $b_0(x)$. Читатель может проверить, что это действительно возможно для указанных выше случаев 1—4. В этой связи мы снова отсылаем всех интересующихся этим вопросом к упомянутым выше источникам.

Хорошо известно, что решение уравнения (1.71) при специальном виде функции $F(s)$ может быть выражено через табличные функции. Для указанных выше случаев найдены следующие выражения для $F(s)$: для случаев 1 и 2 $F(s)=1/s$, для случая 3 $F(s)=3/s$. Случай 4, который изучали Евангелисти, Шёнфельд и Ичие, более сложен, и его рассмотрение слишком длинно, чтобы приводить его здесь.

Случай, когда глубина постоянна, а ширина изменяется по закону $b=b_0e^{-\alpha x}$ (в устье $x=0$), изучен более подробно различными авторами, а именно Пиллсбери [96], Перроудом [93] и Оттером [91].

Часто оказывается, что сечение реки в эстуарии изменяется экспоненциально вверх по течению. Это приблизительно справедливо для таких рек, как Темза и Делавэр. Оттер и Пиллсбери применили свои теоретические выкладки к этим природным объектам. Пиллсбери исследовал вопрос о постоянстве течений в эстуарии реки Делавэр по мере продвижения вверх по реке. Он определил специальную форму замкнутого канала с постоянной глубиной, которую тот должен иметь, чтобы простая гармоническая волна создавала во всем канале приливы постоянной амплитуды и течения одинаковой силы. Отсюда он нашел, что ширина действительно должна изменяться экспоненциально.

## 2. ПРОСТАЯ ГАРМОНИЧЕСКАЯ ВОЛНА В ДВУХМЕРНОМ ПРЯМОУГОЛЬНОМ ЗАЛИВЕ

Вообще говоря, границы моря состоят из береговой черты и линии, отделяющей это море от других бассейнов.

На сплошной береговой черте течение, направленное по нормали к берегу, должно быть равно нулю, т. е.

$$v_n=0.$$

Вдоль границы с соседним морем (жидкой границы) выполняется условие для уровня

$$h=h(x,\ y,\ t),$$

где $x$ и $y$ удовлетворяют уравнению граничной линии

$$f(x,\ y)=0.$$

Одних граничных условий достаточно для определения движения только в случае периодического прилива. В противном случае приходится задавать начальные условия, а именно $h$, $u$ и $v$ по всему морю в момент $t_0$.

Волновое движение в море может быть возбуждено двумя путями: либо волнами, которые существуют в другом бассейне и проникают в наше море через жидкую границу, либо в результате влияния возбуждающих сил, действующих в пределах нашего моря, например астрономических приливообразующих сил или сил, обусловленных полем ветра над морем.

С математической точки зрения волна первого типа вводится граничными условиями, а волна второго типа — членами дифференциальных уравнений.

Наконец, нам приходится рассматривать свободные колебания в море. Такие колебания представляют собой обобщение понятия свободных колебаний, которые могут существовать в каналах, замкнутых на одном конце (см. разд. 1.2). Такие колебания могут быть вызваны воздействием ветра. Они наблюдаются на последней стадии штормового нагона, когда ветер стихает, и определяются решениями однородных дифференциальных уравнений и однородными граничными условиями.

В узких каналах скорости в основном направлены параллельно друг другу и в любой момент уровень воды в направлении поперек канала горизонтален.

В более широких каналах уровень и скорости будут неодинаковыми в поперечных направлениях из-за влияния силы Кориолиса на движение воды. В общем, скорость в любой точке будет иметь компоненты, направленные как вдоль, так и поперек канала. Вблизи берегов, очевидно, скорости будут направлены параллельно береговой черте.

В этом разделе мы рассмотрим только случай, когда берега широкого канала параллельны друг другу. Кроме того, мы снова примем, что трение линейно зависит от скорости и, более того, что глубина канала постоянна.

Если длина канала велика по сравнению с шириной, то продольные компоненты скорости будут значительнее, чем поперечные. В этом случае поток в канале будет определяться главным образом так называемыми волнами Кельвина. В такой волне скорости повсюду параллельны, однако их величина от точки к точке изменяется. Скорости в поперечном направлении описываются волнами Пуанкаре, с этими волнами связаны также и компоненты течений в продольном направлении.

Точное определение движений воды в двухмерных бассейнах, даже прямоугольных, представляет собой очень трудную задачу.

В следующей части этого раздела показано, как можно описать распространение простой гармонической волны в бесконечном канале с параллельными берегами. Затем рассматривается вопрос о свободных колебаниях в прямоугольном бассейне, и, наконец, в разд. 2.3 приводится более подробное исследование волны Кельвина.

## 2.1. Распространение простой гармонической волны в бесконечном канале

Возьмем систему координат, как показано на рис. 2.7, где $DE$ и $CF$ — параллельные берега бесконечного канала. Воспользуемся уравнениями движения (3.19) и (3.20) главы 1, разд. 3.4 и уравнением неразрывности (2.7) из той же главы. В случае линейного закона трения будем иметь

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda\right)q_x-\Omega q_y+ga_0\frac{\partial h}{\partial x}=0,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda\right)q_y+\Omega q_x+ga_0\frac{\partial h}{\partial y}=0, \tag{2.1}$$

где $\lambda$ — коэффициент трения, а $\Omega$ — параметр Кориолиса. Кроме того, $q_x=a_0u$ и $q_y=a_0v$. Предполагается, что амплитуда колебаний уровня мала по сравнению с глубиной $a_0$ и что $u$ и $v$ — средние скорости по вертикали от поверхности до дна. Уравнение неразрывности будет

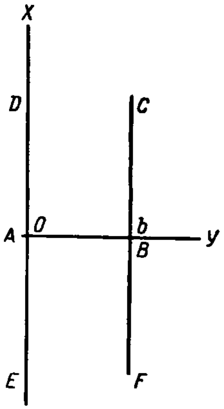



Рис. 2.7.

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial h}{\partial t}=0. \tag{2.2}$$

Граничные условия:

$$q_y=0 \quad \text{при} \quad y=0 \quad \text{и} \quad y=b.$$

Введем теперь следующие величины:

$$x\to\pi^{-1}bx', \qquad y\to\pi^{-1}by',$$
$$q_x\to a_0c_0u', \qquad q_y\to a_0c_0v',$$
$$t\to\pi^{-1}bc_0^{-1}t', \qquad h\to a_0h'; \quad c_0^2=ga_0. \tag{2.3}$$

Тогда уравнения (2.1) превратятся в

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'}+\lambda\right)u'-\Omega v'+\frac{\partial h'}{\partial x'}=0,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial t'}+\lambda\right)v'+\Omega u'+\frac{\partial h'}{\partial y'}=0, \tag{2.4}$$

а (2.2) превратится в

$$\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial h'}{\partial t'}=0. \tag{2.2'}$$

Граничные условия на берегах канала приобретают вид

$$v'=0 \quad \text{при} \quad y'=0 \quad \text{и} \quad y'=\pi. \tag{2.5}$$

Поскольку уравнения (2.2′) и (2.4) линейны относительно $u'$, $v'$ и $h'$, мы можем рассматривать гармоническую волну, которую можно записать в виде

$$u'=u_1(x',\ y')e^{i\omega t'}+c.\ c.,$$
$$v'=v_1(x',\ y')e^{i\omega t'}+c.\ c.,$$
$$h'=H_1(x',y')e^{i\omega t'}+c.\ c. \tag{2.6}$$

Комплексные амплитуды этих функций ($u_1$, $v_1$ и $H_1$) будут удовлетворять следующим уравнениям, получающимся из (2.4) и (2.2′):

$$(i\omega + \lambda) u_1 - \Omega v_1 + \frac{\partial H_1}{\partial x'} = 0,$$

$$\Omega u_1 + (i\omega + \lambda) v_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y'} = 0, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x'} + \frac{\partial v_1}{\partial y'} + i\omega H_1 = 0. \tag{2.8}$$

Эти уравнения можно привести к еще более простому виду с помощью комплексного преобразования величин $\omega$, $\Omega$ и $H_1$ (см. Вельткамп [147]), причем граничные условия остаются прежними. Для такого преобразования мы полагаем

$$\omega' = \omega\alpha, \quad \Omega' = \Omega\alpha^{-1}, \quad H_1' = H_1\alpha^{-1}, \tag{2.9}$$

где $\alpha = (1 - (i\lambda/\omega))^{1/2}$. Уравнения (2.7) преобразуются (если временно опустить все индексы) в

$$i\omega u_1 - \Omega v_1 + \frac{\partial H_1}{\partial x} = 0,$$

$$\Omega u_1 + i\omega v_1 + \frac{\partial H_1}{\partial y} = 0, \tag{2.10}$$

в то время как (2.8) остается без изменений — в нем лишь опускаются индексы. Можно видеть, что (2.10) сразу же следует из (2.7), если положить $\lambda = 0$; следовательно, в результате такого преобразования исключается фактор, учитывающий трение.

Исключая из (2.8) и (2.10) $v_1$ и $H_1$, или $u_1$ и $H_1$, или $u_1$ и $v_1$, соответственно получаем следующие уравнения:

$$\Delta u_1 - k^2 u_1 = 0, \tag{2.11}$$

$$\Delta v_1 - k^2 v_1 = 0, \tag{2.12}$$

$$\Delta H_1 - k^2 H_1 = 0, \tag{2.13}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad k^2 = \Omega^2 - \omega^2. \tag{2.14}$$

В дальнейшем мы используем также следующие соотношения. Из (2.8) и (2.10) следует, что

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} + \omega^2 H_1 = i\omega \frac{\partial v_1}{\partial y} + \Omega \frac{\partial v_1}{\partial x}, \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \omega^2 u_1 = -i\omega\Omega v_1 - \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \, \partial y}. \tag{2.16}$$

Пусть один из берегов совпадает с осью $x$. Тогда с учетом преобразования (2.3) ординаты двух берегов будут $y=0$ и $y=\pi$. На этих берегах поперечные скорости равны нулю. Поскольку практически $v_1(x, y)$ является непрерывной функцией от $x$ и $y$, все производные которой существуют (на границах приходится рассматривать только односторонние производные), то $v_1(x, y)$ может быть представлена рядом Фурье, содержащим только функции синуса

$$v_1 = \sum_{n=1}^{\infty} v_{1,n}(x) \sin ny, \tag{2.17}$$

или в комплексной форме

$$v_1 = -\frac{1}{2} i \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_{1,n}(x) e^{iny}, \tag{2.18}$$

при условии, что

$$v_{1,-n}(x) = -v_{1,n}(x); \quad v_{1,0} = 0. \tag{2.19}$$

Подстановка в дифференциальное уравнение (2.12) показывает, что $v_{1,n}(x)$ должна удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 v_{1,n}}{dx^2} - \nu_n^2 v_{1,n} = 0, \tag{2.20}$$

где

$$\nu_n = (\Omega^2 - \omega^2 + n^2)^{1/2}.$$

Отсюда

$$v_{1,n}(x) = C_n^+ e^{\nu_n x} + C_n^- e^{-\nu_n x}.$$

Обозначим это выражение через

$$v_{1,n}(x) = C_n^{\pm} e^{\pm \nu_n x}, \tag{2.21}$$

где $C_n^+$ и $C_n^-$ — константы, удовлетворяющие соотношению

$$C_{-n}^{\pm} = -C_n^{\pm}. \tag{2.22}$$

Следовательно,

$$v_1 = -\frac{1}{2} i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left( C_n^+ e^{\nu_n x} + C_n^- e^{-\nu_n x} \right) e^{iny} \tag{2.23}$$

и $v_1$ представляет собой линейную комбинацию элементарных решений вида

$$e^{\pm \nu_n x} \sin ny \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2.24}$$

которые называются волнами Пуанкаре [98].

Решения для $u_1$ и $H_1$ получаются путем подстановки (2.18) и (2.21) в (2.15) и (2.16). Тогда находим, что

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial x^2} + \omega^2 H_1 = \frac{1}{2} i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{\pm} (\omega n \mp \nu_n \Omega) e^{\pm \nu_n x + iny}, \qquad (2.15')$$

где нужно суммировать как члены с коэффициентами $C_n^+$, так и члены с коэффициентами $C_n^-$. Решение этого уравнения есть сумма решения соответствующего однородного уравнения (без правой части) и частного решения полного неоднородного уравнения.

Решение неоднородного уравнения имеет вид

$$H_{1,1} = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{\pm \nu_n x + iny}. \qquad (2.25)$$

После подстановки (2.25) в (2.15′) становится ясно, что (2.25) будет частным решением (2.15′) в том случае, если

$$A_n = \frac{1}{2} i C_n^{\pm} (\omega n \mp \nu_n \Omega)(n^2 + \Omega^2)^{-1}. \qquad (2.26)$$

Поскольку $v_1$ удовлетворяет уравнению (2.12), то (2.25) будет также удовлетворять (2.13). Общее решение однородной части уравнения (2.15′) будет

$$H_{1,2} = e^{i\omega x} f_1(y) + e^{-i\omega x} f_2(y),$$

где $f_1(y)$ и $f_2(y)$ — функции от $y$. Поскольку $H_{1,2}$ также должно удовлетворять (2.13), то $f_1(y)$ и $f_2(y)$ должны быть решениями уравнения

$$\frac{d^2 f}{dy^2} - \Omega^2 f = 0.$$

Отсюда

$$f = D^+ e^{\Omega y} + D^- e^{-\Omega y},$$

где $D^+$ и $D^-$ — константы. Следовательно, решение однородного уравнения будет суммой четырех членов:

$$H_{1,2} = D_1^{\pm} e^{i\omega x \pm \Omega y} + D_2^{\pm} e^{-i\omega x \pm \Omega y},$$

где $D_1^{\pm}$ означает соответственно константы $D_1^+$ и $D_1^-$.

Аналогичным образом можно найти, что решение для $u_1$, которое удовлетворяет (2.11) и (2.16), будет

$$u_1 = u_{1,1} + u_{1,2},$$

где

$$u_{1,1} = -\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n^{\pm}\,(\Omega\omega \pm n\nu_n)\,(n^2+\Omega^2)^{-1}\,e^{\pm\nu_n x + iny} \qquad (2.27)$$

и

$$u_{1,2} = E_1^{\pm}\,e^{i\omega x \pm \Omega y} + E_2^{\pm}\,e^{-i\omega x \pm \Omega y}.$$

Поскольку функции $u_{1,2}$ и $H_{1,2}$ должны быть решениями уравнения (2.10), если $v_1=0$, то оказывается, что

$$E_1^- = D_1^- = E_2^+ = D_2^+ = 0; \quad E_1^+ = -D_1^+; \quad E_2^- = D_2^-;$$

тогда

$$u_{1,2} = C^{\pm}\,e^{\pm(i\omega x + \Omega y)},$$

$$H_{1,2} = \mp\, C^{\pm}\,e^{\pm(i\omega x + \Omega y)}, \qquad (2.28)$$

откуда определяются константы $C^{\pm}$:

$$C^+ = E_1^+ \quad \text{и} \quad C^- = E_2^-.$$

Функции $H_{1,2}$ и $u_{1,2}$ представляют собой комплексные амплитуды величин $h$ и $u$ в так называемых *волнах Кельвина*, названных так потому, что выражения (2.28) впервые были получены лордом Кельвином.

Отметим, что формула для волны Кельвина соответствует формуле для волн Пуанкаре, если $\Omega$ заменить на $in$, а $i\omega$ на $\nu_n$.

Следовательно, включив множитель $(n^2+\Omega^2)^{-1}$ в константы $C_n^{\pm}$, мы получим следующее общее решение для бесконечного канала:

$$u_1 = -\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{\pm}\,(\Omega\omega \pm n\nu_n)\,e^{\pm\nu_n x + iny} + C^{\pm}\,e^{\pm(i\omega x + \Omega y)}, \qquad (2.29)$$

$$v_1 = -\frac{1}{2}\,i\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n^{\pm}\,(n^2+\Omega^2)\,e^{\pm\nu_n x + iny}, \qquad (2.30)$$

$$H_1 = \frac{1}{2}\,i\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{\pm}\,(\omega n \mp \nu_n\Omega)\,e^{\pm\nu_n x + iny} \mp C^{\pm}\,e^{\pm(i\omega x + \Omega y)}. \qquad (2.31)$$

Затем надо найти суммы как для членов с верхним знаком, так и для членов с нижним знаком.

При выводе этих уравнений использованы соотношения (2.23), (2.25), (2.26), (2.27) и (2.28).

Используя (2.22) и соотношение $\nu_{-n}=\nu_n$, мы можем также записать:

$$u_1 = -\sum_{n=1}^{\infty} C_n^{\pm}(i\Omega\omega \sin ny \pm n\nu_n \cos ny)e^{\pm\nu_n x} + \underline{C^{\pm} e^{\pm(i\omega x+\Omega y)}}, \tag{2.32}$$

$$v_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{\pm}(n^2+\Omega^2)\sin ny e^{\pm\nu_n x}, \tag{2.33}$$

$$H_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{\pm}(i\omega n \cos ny \pm \Omega\nu_n \sin ny)e^{\pm\nu_n x} \mp \underline{C^{\pm} e^{\pm(i\omega x+\Omega y)}}, \tag{2.34}$$

причем суммирование здесь также надо проводить как по знакам плюс, так и по знакам минус. Уравнения (2.32)—(2.34) справедливы, если не учитываются силы трения ($\lambda=0$). В противном случае мы должны проделать обратное преобразование (см. (2.9)), а в уравнениях (2.32)—(2.34) тогда всюду следует поставить $\omega'$, $\Omega'$ и $H'_1$ вместо $\omega$, $\Omega$ и $H_1$, а также $x'$ и $y'$ вместо $x$ и $y$. Если мы хотим теперь выразить уравнения (2.32)—(2.34) через первоначальные величины $\omega$, $\Omega$ и $H_1$, то оказывается, что $\nu_n$ будет иметь вид

$$\nu_n = \left[\omega^2\Omega^2 + (n^2-\omega^2)(\omega^2+\lambda^2) + i\lambda\omega(\Omega^2+\omega^2+\lambda^2)\right]^{1/2}(\omega^2+\lambda^2)^{-1/2}, \tag{2.35}$$

и, таким образом, $\nu_n$ можно выразить в обычной комплексной форме: $\nu_n=a+ib$.

Далее, члены $\Omega'\omega'$, $n^2+\Omega'^2$, $\omega'n$ и $\Omega'\nu'_n$ в тех частях решения (2.32)—(2.34), которые не подчеркнуты и относятся к волнам Пуанкаре, преобразуются соответственно в $\Omega\omega$, $[(n^2+\Omega^2)\omega^2+ n^2\lambda^2+i\Omega^2\lambda\omega](\lambda^2+\omega^2)^{-1}$, $n(\omega^2-i\lambda\omega)^{\frac{1}{2}}$ и $\Omega(\omega^2+\lambda^2)^{-\frac{1}{2}}(\omega^2+i\lambda\omega)^{\frac{1}{2}}\nu_n$, где $\nu_n$ определяется выражением (2.35). Наконец, $H'_1$ надо заменить на $(\omega^2+\lambda^2)^{-\frac{1}{2}}(\omega^2+i\lambda\omega)^{\frac{1}{2}}H_1$. После этого функции $u_{1,1}$, $v_{1,1}$ и $H_{1,1}$ будут выражены через $\omega$, $\Omega$ и $x'$, $y'$.

Аналогично $u_{1,2}$ и $H_{1,2}$, соответствующие подчеркнутым членам в (2.32) и (2.34), также должны быть выражены через первоначальные величины $\omega$, $\Omega$ и $H_{1,2}$. Непосредственные вычисления показывают, что если ввести временнýю переменную, то скорость $u'_2(x', y', t')$ в волне Кельвина определяется выражением

$$u'_2 = u'_{1,2}e^{i\omega t'} + c.\ c.$$

или

$$u'_2 = C^{\pm} e^{\pm[(a_1x'+a_2y')+i(b_1x'+b_2y')]+i\omega t'} + c.\ c. \tag{2.36}$$

и подобным же образом имеем для уровня

$$h_2' = \mp \frac{(\omega - i\lambda)^{1/2}}{\omega^{1/2}} C^{\pm} e^{\pm [(a_1 x' + a_2 y') + i(b_1 x' + b_2 y')] + i\omega t'} + c.\ c., \tag{2.37}$$

где $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ и $s$ определяются следующим образом:

$$a_1 = \left[\frac{1}{2}\omega(s - \omega)\right]^{1/2}, \quad a_2 = \frac{\Omega}{s}\left[\frac{1}{2}\omega(s + \omega)\right]^{1/2},$$

$$b_1 = \left[\frac{1}{2}\omega(s + \omega)\right]^{1/2}, \quad b_2 = \frac{\Omega}{s}\left[\frac{1}{2}\omega(s - \omega)\right]^{1/2}, \tag{2.38}$$

$$s = (\omega^2 + \lambda^2)^{1/2}.$$

Затем в (2.36) и (2.37) надо сложить члены с верхними знаками с членами с нижними знаками.

В случае когда рассматриваются уравнения (2.4) и (2.2′), выражения (2.36)—(2.38) определяют волну Кельвина.

После обратного преобразования (см. (2.3)) получаем уравнения, с помощью которых волна Кельвина выражается в первоначальных переменных $x$, $y$, $t$, $q_x$ и $q_y$. Тогда в (2.38) $a_1$ и т. д. надо заменить на $a_1/c_0$ и т. д., где $c_0 = (ga_0)^{\frac{1}{2}}$. Тем же путем получаем и уравнения для волн Пуанкаре.

В этом разделе было рассмотрено волновое движение в бесконечном канале. Решение становится очень сложным, если ввести граничные условия, например, если надо определить волновое движение в канале конечной длины, который на одном конце замкнут, а другим сообщается с морем, так что вертикальные движения в канале зависят от таких же движений в море. До настоящего времени аналитические решения были получены только для специальных случаев. Сошлемся в этой связи на исследования Ламба [79], Дефанта [24], Тейлора [135, 136] и Праудмэна [101, 102]. Ван Данциг, Ловерье и Вельткамп выполнили многочисленные исследования для прямоугольной модели Северного моря в случае штормовых нагонов и для других связанных с этим задач [22, 23, 81, 147, 148, 106].

Наконец, исследованию влияния силы Кориолиса на приливной поток в экспоненциальном эстуарии посвящена работа Аббота [1]. Влияние силы Кориолиса на приливные течения исследовал Сен-Гили [113].

Обзор теорий, рассматривающих приливные волны в двухмерных бассейнах, можно найти в книгах Дефанта [25] и Тораде [138].

## 2.2. Волна Кельвина

Формулы (2.36), (2.37) и (2.38), определяющие волну Кельвина в комплексной форме, преобразуются в вещественную форму следующим образом:

$$h_2' = 2\,\mathrm{Re} \mp \frac{(\omega - i\lambda)^{1/2}}{\omega^{1/2}} C^{\pm} \times$$
$$\times \exp\{\pm [(a_1x' + a_2y') + i(b_1x' + b_2y')] + i\omega t'\}. \qquad (2.39)$$

Подобная же формула получится и для $u_2'$, в то время как $v_2' = 0$.

Затем находим, что

$$h_2' = h_{21}\cos\omega t' + h_{22}\sin\omega t', \qquad (2.40)$$

где

$$h_{21} = e^{(a_1x' + a_2y')}[A_1\cos(b_1x' + b_2y') + B_1\sin(b_1x' + b_2y')] +$$
$$+ e^{-(a_1x' + a_2y')}[C_1\cos(b_1x' + b_2y') + D_1\sin(b_1x' + b_2y')]. \qquad (2.41)$$

Для $h_{22}$ получаем аналогичное выражение, только $A_1$ будет в нем заменено на $B_1$, $B_1$ на $-A_1$, $C_1$ на $-D_1$ и $D_1$ на $C_1$.

Функция $u_2'$ определяется аналогичным образом:

$$u_2' = u_{21}\cos\omega t' + u_{22}\sin\omega t',$$

а в выражении (2.41) надо будет множители $A_1$, $B_1$, $C_1$ и $D_1$ заменить на $A_2$, $B_2$, $C_2$ и $D_2$. Тогда в соответствии с (2.4) при условии, что в нем $v' = 0$, должны выполняться следующие соотношения:

$$A_2 = -s^{-1}(b_1A_1 + a_1B_1); \quad B_2 = -s^{-1}(b_1B_1 - a_1A_1),$$
$$C_2 = s^{-1}(b_1C_1 - a_1D_1); \quad D_2 = s^{-1}(b_1D_1 + a_1C_1). \qquad (2.42)$$

Постоянные $A_1, \ldots, D_1$ определяются из граничных условий. Пусть колебания уровня известны на обоих концах канала в одной точке, например в $x' = x_1'$, $y' = 0$ и в $x' = x_2'$, $y' = 0$. Тогда с помощью (2.40) получаем четыре уравнения для четырех констант $A_1, \ldots, D_1$ (2.41) и соответствующие уравнения для $h_{22}$. Тем самым выражение для волны Кельвина определяется полностью.

Пусть канал открыт с обоих концов и связан обоими концами с морем, так что колебания уровня в устьях определяются приливом в море. Тогда различия между действительными колебаниями уровня и теми, которые определяются волной Кельвина, покажут, в какой степени движение в канале аппроксимируется такой волной. В точках, где колебания уровня приняты в качестве граничных условий для волны Кельвина, такие различия будут, очевидно, равны нулю.

Из выражений (2.40)—(2.42) следует также, что движение воды в прямоугольном канале, замкнутом на одном конце, не может быть полностью описано сочетанием волн Кельвина, поскольку у замкнутого конца скорости, перпендикулярные поперечной стенке, должны быть равны нулю, а в случае комбинации волн Кельвина скорость может быть равна нулю только в одной точке. В таком бассейне, особенно у его замкнутого конца, должны существовать поперечные скорости, так что приходится рассматривать волны Пуанкаре.

Так как течения у берегов параллельны береговой черте, то приливное движение в некоторой прибрежной полосе можно аппроксимировать волнами Кельвина. Ширина такой полосы зависит от ряда условий, определяющих приливные движения в остальной части моря. С удалением от берега возрастает роль течений, перпендикулярных к берегу. Однако на практике оказывается, что даже в широких каналах, таких, как Ла-Манш и южная часть Северного моря (между голландским и английским побережьями), волны Кельвина являются преобладающими (см. также Кадзиура [73]).

Еще одним характерным обстоятельством при рассмотрении волн Кельвина является возможность существования так называемых амфидромических точек, в которых амплитуда колебаний уровня равна нулю. Тогда в соответствии с (2.40) должно выполняться соотношение

$$h_{21}=h_{22}=0.$$

Простые вычисления показывают, что в этом случае должно удовлетворяться соотношение

$$e^{2(a_1x'+a_2y')}=\left(\frac{C_1^2+D_1^2}{A_1^2+B_1^2}\right)^{1/2} \tag{2.43}$$

и что

$$\operatorname{tg}2(b_1x'+b_2y')=\frac{A_1D_1+B_1C_1}{A_1C_1-B_1D_1}. \tag{2.44}$$

Отсюда следует, что амфидромическая точка находится на пересечении двух прямых линий, определяемых уравнениями

$$a_1x'+a_2y'+c_1=0; \quad b_1x'+b_2y'+\alpha=\frac{1}{2}\pi k;$$

$$k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\dots, \tag{2.45}$$

где $c_1$ и $\alpha$ — константы, определяемые с помощью (2.43) и (2.44). Для каждого значения $k$ получается одна точка.

Укажем, что условия, определяющие амфидромическую точку, могут быть выражены через комплексные константы $C^+$ и $C^-$ из (2.39). После некоторых преобразований получаем

$$e^{2(a_1x'+a_2y')}=\left|\frac{C^-}{C^+}\right|;\quad 2(b_1x'+b_2y')=\arg\frac{C^-}{C^+}.$$

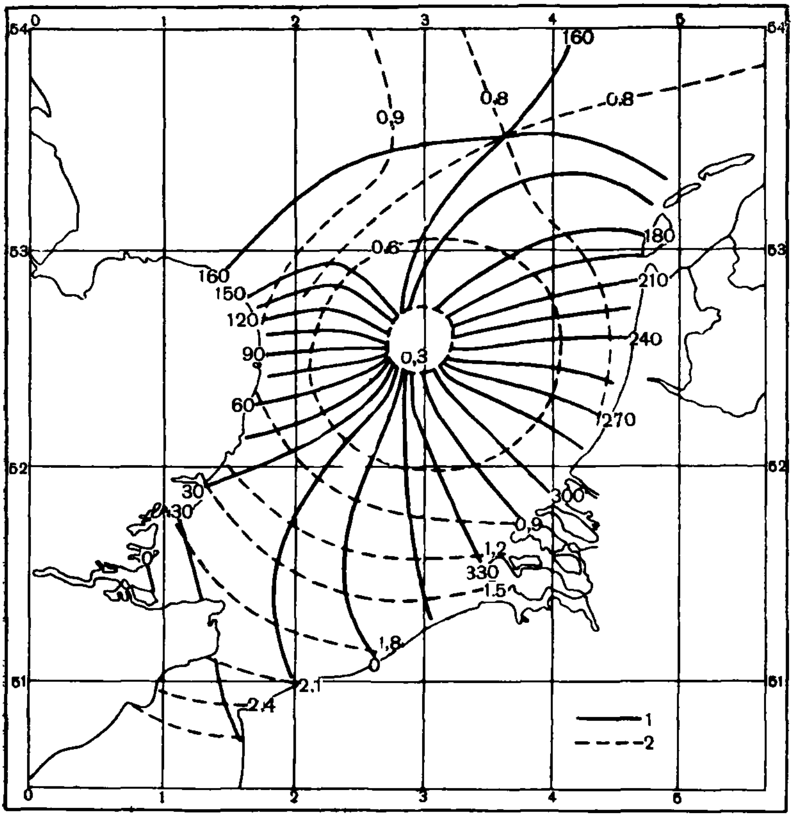



Рис. 2.8.
*1 — изофазы (град), 2 — изоамплитуды (м).*

Амфидромические точки существуют в различных морях, например в Северном море, где преобладает составляющая $M_2$. Фаза уровня изменяется вокруг амфидромической точки; в северном полушарии ($\Omega>0$) она увеличивается при движении по часовой стрелке, а в южном полушарии ($\Omega<0$) — при движении против часовой стрелки.[1] Если $\Omega=0$ (на экваторе), то сила Кориолиса отсутствует и волна Кельвина превращается в гармоническую волну, рассмотренную в разд. 1, а амфидромические точки — в узловые точки или в случае широкого канала — в узловые линии.

На рис. 2.8 показана амфидромическая точка в южной части Северного моря. Кроме того, проведены изофазы полусуточного лунного прилива $M_2$. Эти линии аналогичны линиям одновременного наступления полной воды, так называемым котидальным линиям. Показаны также изоамплитуды, соединяющие точки с одинаковыми амплитудами. Эти линии называются линиями равной величины прилива, если рассматривается двойная амплитуда (см. Праудмэн и Дудсон [104]). Изоамплитуды и котидальные линии дают информацию о географическом распределении гармонических постоянных (см., например, [5]).

Векторы течений, обусловленных какой-либо гармоникой, описывают эллипсы в различных пунктах моря. Для волны $M_2$ такие эллипсы в Северном море рассчитал Ганзен [59], а в Ирландском море — Бауден [8].

В каналах, у которых длина превосходит ширину, волны Пуанкаре могут играть существенную роль как у замкнутого конца, так и у устья. В промежуточном участке движение определяется главным образом волнами Кельвина.

## 3. РАСЧЕТ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРИЛИВА В РЕКЕ С ПОМОЩЬЮ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД ФУРЬЕ

### 3.1. Предварительные замечания о разложении отдельных членов в ряд Фурье

Пусть $h(0, t)$ — уровень, колеблющийся относительно среднего положения в устье реки при $x=0$ и представляющий собой непрерывную функцию времени. Тогда выражение

$$h(0, t)=\sum_{n=1}^{\infty} h_n(0)\cos(n\omega t+\alpha_n(0))=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(h_n'(0)\cos n\omega t+h_n''(0)\sin n\omega t\right) \qquad (3.1)$$

---

[1] Говоря о фазе колебания в фиксированной точке, вызванного гармонической приливной волной, автор имеет в виду интервал времени (или соответствующий угол) между началом отсчета времени ($t=0$) и моментом *предыдущей* (а не последующей, как обычно принято) полной воды. Этим объясняется необычная формулировка «правила фаз» для амфидромии в зависимости от полушария, а также оцифровка изофаз на рис 2.8. (*Прим. перев.*)

представляет собой разложение этой функции в ряд Фурье, где $\omega$ — частота главной приливной составляющей, а $h_n(0)$ и $\alpha_n(0)$ — соответственно амплитуда и фаза гармонической составляющей $h_n$. Для волны $M_2$ $\omega = 2\pi/T = 1{,}405 \cdot 10^{-4}$ рад/сек. Коэффициенты $h'_n(0)$ и $h''_n(0)$ определяются с помощью соотношений

$$h'_n(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} h(0, t) \cos n\omega t \, d\omega t,$$

$$h''_n(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} h(0, t) \sin n\omega t \, d\omega t.$$

Мы можем, таким образом, представить колебания уровня и расход в реке с помощью рядов Фурье

$$h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) \cos(n\omega t + \alpha_n(x)), \tag{3.2}$$

$$Q(x, t) = Q_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(x) \cos(n\omega t + \beta_n(x)), \tag{3.3}$$

где $Q_0$ — расход за счет стока, обычно постоянный за время приливного периода и известный для большей части реки.

Для гармонического анализа удобнее использовать комплексную форму записи

$$h_n(x) \cos(n\omega t + \alpha_n(x)) = H_n(x) e^{in\omega t} + H_{-n}(x) e^{-in\omega t}, \tag{3.4}$$

где

$$H_n(x) = \frac{1}{2} h_n(x) e^{i\alpha_n(x)}; \quad H_{-n}(x) = \frac{1}{2} h_n(x) e^{-i\alpha_n(x)}, \tag{3.5}$$

так что

$$h_n(x) = 2 \, | H_n(x) |. \tag{3.6}$$

Ряды Фурье (3.2) и (3.3) в комплексной форме будут

$$h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x) e^{in\omega t} + c.\ c., \tag{3.7}$$

$$Q(x, t) = Q_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x) e^{in\omega t} + c.\ c., \tag{3.8}$$

где $c.\ c.$ — комплексный сопряженный член $H_{-n}(x) e^{-in\omega t}$ и т. д. Подставляя (3.7) и (3.8) в приливные уравнения, можно вывести уравнения для функций $H_n(x)$ и $Q_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

В этой главе мы рассмотрим следующие уравнения: уравнение движения

$$\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{da_0}{dx}+I+\frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t}-\frac{(\alpha_2 b+b_s)}{gA^2}Q\frac{\partial h}{\partial t}+$$
$$+\frac{1}{C^2(a_0+h)A^2}|Q|Q=0, \tag{3.9}$$

и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+b\frac{\partial h}{\partial t}=0. \tag{3.10}$$

Сравнение с уравнением движения (4.10), данным в главе I, показывает, что мы игнорируем здесь как член, учитывающий влияние ветра, так и еще менее важные члены, т. е.

$$-\frac{Q^2}{g(a_0+h)A^2}\frac{\partial h}{\partial x}\quad \text{и} \quad -\dot{j}_1\frac{u(b-b_s)}{gA}\frac{\partial h}{\partial t}.$$

В реках с приливами дно обычно можно считать горизонтальным, так что член $I$ можно исключить из рассмотрения. Если перечисленные члены все же должны быть рассмотрены, то это не влияет на излагаемую ниже методику — она остается пригодной.

Заметим, что уравнения (3.9) и (3.10) нелинейны в двух отношениях: во-первых, коэффициенты уравнений зависят от расстояния и от времени и, во-вторых, член, учитывающий сопротивление, нелинеен относительно зависимой переменной $Q$. Поэтому эти уравнения надо преобразовать, прежде чем мы введем в них функции (3.7) и (3.8). Для этого преобразования мы должны сначала получить разложения в ряд Фурье коэффициентов уравнений.

Величины $b$ и $b_s$, входящие в коэффициенты уравнений, зависят от $x$ и $t$. Кроме того, в коэффициенты входит величина $A$ — площадь поперечного сечения, т. е. $A=(a_0+h)b_s$, где $a_0$ — средняя глубина. Зависимость от $t$ обусловлена изменением во времени положения уровня, поэтому мы можем рассматривать $b$, $b_s$ и $A$ как функции от $x$ и $h$, а не от $x$ и $t$.

Разложение в ряд Фурье коэффициентов уравнения (3.9) можно произвести разными способами. Можно, например, умножив все члены на $A^2(a_0+h)$, найти ряды Фурье, соответствующие коэффициентам членов уравнения, путем перемножения рядов Фурье, соответствующих сомножителям, из которых коэффициенты состоят. Однако удобнее сразу найти ряды Фурье, соответствующие коэффициентам уравнений. Для этого мы должны оценить интегралы, необходимые для определения коэффициентов Фурье. Например, для коэффициента $[A^2(a_0+h)]^{-1}$ мы должны вычислить

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos n\omega t}{(a_0+h)^3 b_s^2(x,\ h)}\,d\omega t \qquad (n=1,\ 2,\ldots),$$

а также аналогичный член, в котором $\cos n\omega t$ заменен на $\sin n\omega t$. Если $n=0$, то множитель $1/\pi$ надо заменить на $1/2\pi$.

### 3.2. Вывод уравнений для гармонических компонент $H$ и $Q$

Получив указанным выше способом различные ряды Фурье, действуем далее следующим образом.

В соответствии с (3.9) и (3.10) ряды, соответствующие коэффициентам, надо умножить на ряды, соответствующие одной из следующих функций: $\partial h/\partial t$, $Q\partial h/\partial t$, $\partial Q/\partial t$, $\partial Q/\partial x$ или $|Q|Q$. Оказывается, что удобнее рассматривать коэффициенты и зависимые переменные $h$ или $Q$ и их производные в комплексной форме. Тогда полученные уравнения будут содержать члены, не зависящие от $t$, и члены с множителями $e^{in\omega t}$ и $e^{-in\omega t}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$. Очевидно, что алгебраическая сумма членов без $t$ равна нулю, как и сумма членов, содержащих $e^{in\omega t}$, где $n$ фиксировано. Таким путем получается $n+1$ уравнение. Сумма членов, содержащих $e^{-in\omega t}$, определяет соответствующие сопряженные уравнения.

После подстановки рядов Фурье, соответствующих $h$, $Q$ и $b(x,\ h)$, в уравнение неразрывности получаем еще $n$ уравнений. Теперь из общего количества $2n+1$ уравнения надо определить $Q_0$, $H_p$ или $a_0$ и $Q_p$ $(p=1,\ \ldots,\ n)$.

Одно из существенных преимуществ, которые дает использование комплексных величин, состоит в том, что нет необходимости рассматривать уравнение для сопряженных функций $H_{-p}$ и $Q_{-p}$. Если уравнения для $H_p$ и $Q_p$ решены, то соответствующие сопряженные функции получаются путем замены $i$ на $-i$. Если решение уравнения для $H_n(x)$ записывается в форме

$$H_n(x)=p_n(x)+ir_n(x), \tag{3.11}$$

то вещественные функции $h_n(x)$ и $a_n(x)$ (см. (3.2)) можно получить прямо из (3.5), т. е.

$$p_n(x)=\frac{1}{2}h_n(x)\cos\alpha_n(x); \qquad r_n(x)=\frac{1}{2}h_n(x)\sin\alpha_n(x). \tag{3.12}$$

Нахождение этих решений обычно представляет собой нелегкую задачу, так как уравнения нелинейны относительно $H_p$ и $Q_p$, поскольку имеются произведения $H_p$ и $Q_p$, а также величины, связанные с другими приливными составляющими. Однако уравнения вполне могут быть названы квазилинейными, так как дифференциальные отношения $dH_p/dx$ и $dQ_p/dx$ присутствуют в линейной форме. Решение поэтому удается получить только с помощью итерационного процесса.

## 3.3. Итерационный метод как средство получения решений уравнений

Чтобы получить однозначное решение уравнений для $h$ и $Q$, которые выражены с помощью рядов Фурье, надо задать граничные условия для $h$ и $Q$ на основании фактических данных. В большинстве случаев $h$ известно в устье, а $Q$ — в верхнем конце реки.

Если $h$ и $Q$ известны в устье, то итерационный процесс можно вести следующим образом. Следует так выбрать интервалы значений $x$, так называемые отсеки, чтобы для каждого такого участка величины коэффициентов Фурье для $b$ и $b_s$ можно было приближенно заменить их средними для интервала значениями. Рассмотрим сначала интервал в начале реки. Величины $H_p$, от которых зависят коэффициенты, берутся равными их величине в устье реки. Нелинейные члены, учитывающие эффект трения в динамических уравнениях, линеаризируются с помощью принятых ориентировочных величин $Q_p$ и $H_p$ таким образом, что в уравнении в каждом члене остается только один множитель $H_p$ или $Q_p$ в виде функции от $x$.

После этих действий мы получаем линейные уравнения и можем непосредственно решить их относительно $H_p$ и $Q_p$ на конце первого участка. Затем первоначально принятые (ориентировочные) величины $H_p$ и $Q_p$ можно подправить, заменяя их средними из рассчитанных величин и величин, известных в начале сечения. Это дает возможность получить новое решение. Эта операция повторяется, пока не достигается удовлетворительное совпадение между принятыми величинами $H$ и $Q$, используемыми для линеаризации, и вычисленными величинами. Затем находят решение для $H_p$ и $Q_p$ на конце первого участка. То же самое можно сделать на втором участке и т. д. — до самого конца реки.

Если $h$ известно в устье реки, а $Q$ — в другом месте, то описанный процесс последовательных приближений следует несколько изменить. Река разбивается на ряд участков, для которых можно принять средние величины $b$, $b_s$ и $A$. Указанные выше ориентировочные значения коэффициентов Фурье $H_p$ и $Q_p$, необходимые для линеаризации, надо теперь задать одновременно во всех участках реки. Это особенно трудно, если мы мало знаем заранее о характере приливных движений в реке. Обычно величины, заданные таким образом, очень грубы, особенно когда верхний конец реки не замкнут, как чаще всего и бывает на реках с заметным стоком. После первого решения линейной системы аппроксимация может быть улучшена и можно получить новый, более близкий к действительности результат. Итерации продолжаются, пока разность между ориентировочными и рассчитанными значениями не станет малой. Сходимость такого процесса исследовать трудно.

На практике, однако, очень часто один из членов ряда Фурье преобладает над другими. Для полусуточного прилива преобладающей часто бывает объединенная волна $M_2 + S_2$, а для суточного прилива — волны $O_1$ и $K_1$.

Когда существует преобладающая компонента, мы можем сначала рассчитать распространение этой волны, пренебрегая другими компонентами. Расчет этой главной составляющей следует вести так же, как было показано выше, только теперь число ориентировочных величин сильно сокращается. После завершения итерационного процесса результаты подставляются в полные приливные уравнения, и тогда можно определить все остальные члены ряда Фурье (так называемые обергармоники). Если необходимо, то в нелинейные члены соответствующих компонент обергармоник можно ввести новые ориентировочные величины. С предварительным решением вторичной системы мы возвращаемся к главной гармонике, чтобы определить степень влияния на нее со стороны обергармоники. Это новое решение дает нам улучшенные значения для главной составляющей, с помощью которых мы затем улучшаем предварительное решение для обергармоники. Этот итерационный метод продолжается до тех пор, пока не достигаются достаточно точные решения и для главной составляющей, и для обергармоники.

В ряды Фурье для $A$, $b_s$ и $b$ мы вводим только главную составляющую колебаний уровня $h$, пренебрегая остальными компонентами. Для вычисления обергармоники мы снова вводим нужную ориентировочную величину, необходимую для получения линеаризированных уравнений. Дальнейшее решение приливной задачи находится с помощью обычного итерационного процесса.

Если в граничных значениях $h$ и $Q$ члены ряда Фурье уменьшаются по величине с ростом частоты, то можно предположить, что такая же зависимость имеет место в приливных движениях повсюду вдоль реки. Тогда может оказаться, что легче сначала рассчитать последовательные составляющие отдельно, одну за другой. После этого рассматривается полная система, но факторы, которые раньше задавались путем ориентировочной оценки, теперь заменяются величинами, полученными на основании предыдущего расчета.

В следующих разделах мы выведем подробные уравнения для приливных составляющих с помощью метода, описанного в предыдущем разделе, предполагая, что роль составляющих уменьшается с ростом частоты.

## 4. УРАВНЕНИЯ ГЛАВНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ПРИЛИВА В РЕКАХ

Обычно главной составляющей прилива является астрономическая волна $M_2$. Мы сначала рассмотрим реку со стоком (внутриматериковым стоком, как иногда говорят). Вначале не будем учитывать влияние обергармоник на главную составляющую.

### 4.1. Разложение коэффициентов в ряд Фурье

В этом случае мы не используем комплексных функций при разложении в ряд Фурье коэффициентов приливных уравнений, поэтому и уровень $h(x, t)$, и расход $Q(x, t)$ будут определяться выражениями

$$h(x, t) = h_1(x)\cos(\omega t + \alpha_1(x)), \tag{4.1}$$

$$Q(x, t) = Q_0(x) + q_1(x)\cos(\omega t + \beta_1(x)), \tag{4.2}$$

где $h_1(x)$ и $q_1(x)$ положительны.

Соответствующее разложение для $b(x, h)$, $b_s(x, h)$ дает

$$b(x, h) = b_0(x) + b_1(x)h_1(x)\cos\theta, \tag{4.3}$$

$$b_s(x, h) = b_{s0}(x) + b_{s1}(x)h_1(x)\cos\theta, \tag{4.4}$$

где $\theta$ определяется выражением

$$\theta = \omega t + \alpha_1(x)$$

и

$$b_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} b(x, h)\,\alpha\theta; \quad b_1(x)h_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} b(x, h)\cos\theta\, d\theta. \tag{4.5}$$

Очевидно, что в (4.3) и (4.4) нет нужды рассматривать члены с $\sin\theta$ и т. д., так как соответствующий интеграл Фурье равен нулю. Аналогичные соотношения будут выполняться для $b_{s0}(x)$ и $b_{s1}(x)h_1(x)$. Для площади поперечного сечения русла реки $A$ из выражений $A = b_s(a_0 + h)$ и $A_0(x) = b_{s0}a_0$ следует, что

$$A(x, h) = \left[A_0(x) + \frac{1}{2} b_{s1}(x) h_1^2(x)\right] +$$
$$+ [b_{s0}(x) + a_0(x) b_{s1}(x)]\, h_1(x)\cos\theta + \frac{1}{2} b_{s1}(x) h_1^2(x)\cos 2\theta. \tag{4.6}$$

Поскольку амплитуда прилива $h_1(x)$ составляет лишь небольшую долю средней глубины реки $a_0$, а $b_{s1}(x)$ обычно значительно меньше, чем $b_{s0}(x)$, то мы можем приближенно заменить (4.6) на

$$A(x,\ h)=A_0(x)+[b_{s0}(x)+a_0(x)\,b_{s1}(x)]\,h_1(x)\cos\theta, \tag{4.7}$$

причем при вычислении главной составляющей прилива членом с $\cos 2\theta$ можно пренебречь.

Дальнейшее разложение коэффициентов уравнения (3.9) производится следующим образом. Для коэффициента при четвертом члене мы можем записать

$$\frac{1}{gA(x,\ h)}=m_0(x)+m_1(x)\,h_1(x)\cos\theta, \tag{4.8}$$

где

$$m_0(x)=\frac{1}{2g\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\theta}{A(x,\ h)},\qquad m_1(x)\,h_1(x)=\frac{1}{g\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos\theta}{A(x,\ h)}\,d\theta. \tag{4.9}$$

Если мы подставим сюда (4.7) и оценим получающиеся при этом интегралы, то найдем

$$m_0(x)=\frac{1}{gA_0}(1-z)^{-1/2},$$

$$m_1(x)=-\frac{2}{gA_0a_0z}\left[(1-z)^{-1/2}-1\right]\left(1+\frac{b_{s1}a_0}{b_{s0}}\right), \tag{4.10}$$

где

$$z=\frac{h_1^2}{a_0^2}\left(1+\frac{b_{s1}a_0}{b_{s0}}\right)^2. \tag{4.11}$$

Оценка первого интеграла производится путем введения новой переменной $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta=t$. Для второго интеграла можно записать

$$\int\limits_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos\theta}{A(x,\ h)}\,d\theta=-2\pi g z^{-1/2}m_0(x)+z^{-1/2}A_0^{-1}\int\limits_{-\pi}^{+\pi}d\theta.$$

Дальнейшее упрощение (4.10) дает

$$m_0(x)=\frac{1}{gA_0}\left(1+\frac{h_1^2}{2a_0^2}\right);\qquad m_1(x)=-\frac{1}{gA_0a_0}\left(1+\frac{3}{4}\frac{h_1^2}{a_0^2}\right). \tag{4.12}$$

Поскольку член $-gA^{-2}(\alpha_2b+b_s)Q\partial h/\partial t$ в уравнении движения обычно играет меньшую роль, чем другие, то изменение $A$ и $(\alpha_2b+b_s)$ в зависимости от времени можно не рассматривать.

Разложение коэффициента при шестом члене уравнения (3.9), $[C^2(a_0+h)A^2]^{-1}$, производится до третьего члена ряда Фурье, так как при значительных приливах этот член существенно изменяется по величине:

$$r = \frac{1}{C^2(a_0+h)A^2} = r_0(x) + r_1(x)h_1(x)\cos\theta + \\ + \frac{1}{2}r_2(x)h_1^2(x)\cos 2\theta, \tag{4.13}$$

где

$$r_0(x) = \frac{1}{2\pi C^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\theta}{(a_0+h)A^2};$$

$$r_1(x)h_1(x) = \frac{1}{\pi C^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos\theta}{(a_0+h)A^2}d\theta;$$

$$\frac{1}{2}r_2(x)h_1^2(x) = \frac{1}{\pi C^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos 2\theta}{(a_0+h)A^2}d\theta. \tag{4.14}$$

Для оценки этих интегралов мы снова вводим функцию $z$, определяемую соотношением (4.11). Тогда

$$A = A_0\left(1 + z^{1/2}\cos\theta\right).$$

Считая $b_{s1}$ малым по сравнению с $b_{s0}$, мы приближенно заменяем

$$a_0 + h = a_0\left(1 + \frac{h_1}{a_0}\cos\theta\right) \quad \text{на} \quad a_0\left(1 + z^{1/2}\cos\theta\right).$$

Тогда

$$r_0(x) = \frac{1}{2\pi C^2 A_0^2 a_0}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\theta}{(1+z^{1/2}\cos\theta)^3}.$$

Далее оценку величины $r_0(x)$ можно осуществить, снова вводя переменную $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta = t$. Для других интегралов мы можем записать:

$$r_1h_1 = -2\frac{a_0}{h_1}r_0 + \frac{1}{\pi C^2 A_0^2 h_1}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\theta}{(1+z^{1/2}\cos\theta)^2},$$

$$\frac{1}{2}r_2h_1^2 = -\frac{4}{z^{1/2}}r_1h_1 - \frac{4+2z}{z}r_0 + \frac{2}{\pi C^2 z A_0^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\theta}{a_0 + h_1\cos\theta},$$

где интегралы являются табличными.

Читатель может легко проверить эти соотношения.

Новые интегралы также можно оценить путем введения переменной $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta = t$. Тогда, приближенно заменяя $z$ на $h_1^2/a_0^2$, получим

$$\begin{aligned} r_0(x) &= C^{-2}A_0^{-2}a_0^{-1}\left(1+\frac{1}{2}z\right)(1-z)^{-5/2};\\ r_1(x) &= -3C^{-2}A_0^{-2}a_0^{-2}(1-z)^{-5/2};\\ r_2(x) &= 6C^{-2}A_0^{-2}a_0^{-3}(1-z)^{-5/2}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Дальнейшее приближение дает

$$\begin{aligned} r_0(x) &= C^{-2}A_0^{2-}a_0^{-1}\left(1+3z+5\frac{5}{8}z^2\right);\\ r_1(x) &= -3C^{-2}A_0^{-2}a_0^{-2}\left(1+2\frac{1}{2}z+4\frac{3}{8}z^2\right);\\ r_2(x) &= 6C^{-2}A_0^{-2}a_0^{-3}\left(1+2\frac{1}{2}z+4\frac{3}{8}z^2\right). \end{aligned} \tag{4.16}$$

### 4.2. Разложение в ряд Фурье множителя $|Q|Q$

Разложение квазиквадратического члена, учитывающего сопротивление, является одной из главных операций гармонического метода.

Лоренц [85] впервые линеаризировал этот член для главной гармонической составляющей. Был разработан метод расчета составляющей $M_2$ чисто приливного движения в системе каналов Зёйдер-Зе в Голландии. Мазуре [88] распространил этот принцип на расчет компоненты $M_2$ в реках со стоком, используя метод Фурье. Позднее дальнейшие разработки в этом направлении вели Дронкерс [29], Стробанд [132] и Шёнфельд [123].

В данном разделе мы рассмотрим разложение в ряд Фурье множителя $|Q|Q$ способами, предложенными упомянутыми выше авторами. В разд. 8 изложен другой метод разложения члена, учитывающего сопротивление, который применим к более общим случаям.

Поскольку в оставшейся части этой главы мы будем иметь дело только с одномерным приливным движением, мы не будем рассматривать разложение члена, учитывающего сопротивление, для потока в двухмерных бассейнах. Очевидно, что решение двухмерной задачи сложнее, чем одномерной (ее рассматривали Шёнфельд [129] и Дронкерс [33, 106k], а также Холстерс [67]). Приливное трение в мелководных морях рассмотрено Джеффрисом [72].

Относительно способа определения комплексной формы ряда Фурье, представляющего множитель $|Q|Q$, здесь можно сделать следующие общие замечания. Пусть $Q$ определяется уравнением (3.8). Если знак $Q$ не меняется в течение приливного периода, то мы можем найти ряд Фурье, представляющий функцию $Q^2$, умножая (3.8) на само себя. Если же знак меняется, то ряд Фурье, представляющий $|Q|Q$, можно найти следующим образом.

Пусть

$$|Q|Q = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\omega t + d_n \sin n\omega t)$$

представляет собой ряд Фурье в вещественной форме, причем $c_n$ и $d_n$ определяются как

$$c_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |Q|Q \cos n\omega t \, d\omega t; \qquad d_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |Q|Q \sin n\omega t \, d\omega t.$$

Тогда комплексную форму получим, полагая

$$c_n = C_n Q_n + C_{-n} Q_{-n}; \quad d_n = i(C_n Q_n - C_{-n} Q_{-n});$$

величины $\cos n\omega t$ и $\sin n\omega t$ заменяем при этом хорошо известными комплексными выражениями. После этого находим, что

$$|Q|Q = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n Q_n e^{in\omega t} + C_{-n} Q_{-n} e^{-in\omega t}\right), \tag{4.17}$$

где $C_n Q_n$ и $C_{-n} Q_{-n}$ определяются следующими выражениями:

$$C_n Q_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |Q| Q e^{-in\omega t} d\omega t; \quad C_{-n} Q_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |Q| Q e^{in\omega t} d\omega t. \tag{4.18}$$

Если мы теперь положим, что $t_p (p=1, 2, \ldots, s)$ — последовательные значения $t$, при которых $Q(x, t) = 0$, в то время как $\omega t$ изменяется от $-\pi$ до $+\pi$, то величина $C_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ определится из выражения

$$C_n Q_n = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^{\omega t_1} - \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} + \ldots \pm \int_{\omega t_s}^{\pi} \right] Q^2 e^{-in\omega t} d\omega t, \tag{4.19}$$

а величина $C_{-n}$ — из соответствующего соотношения. Если $n=0$, то $C_n Q_n$ заменяется на $C_0$. Такой определенный интеграл сразу поддается оценке подстановкой в него (3.8), хотя точное определение $\omega t_p$ в общем случае невозможно, поскольку нет точных формул для определения корней уравнения $Q(x, t)=0$. Эти корни можно найти только в специальных случаях, иначе необходимо применять дополнительные приближенные формулы. Ниже будет приведен пример.

*Члены ряда Фурье для* $|Q|Q$, *используемые при вычислении главной составляющей прилива.*

Для участков, расположенных за пределом действия приливного течения, где скорость не меняет знака за приливной период, член $|Q|Q$ также не меняет знака и, следовательно, $q_1(x)<|Q_0|$ (см. (4.2)).

Тогда $|Q|Q=-Q^2$, так как в верхних участках реки имеет место только отливное течение, которое мы считаем отрицательным. Рассматривая только главную составляющую прилива и расход за счет постоянного стока $Q_0$ и полагая

$$Q(x, t)=Q_0(x)+Q_1(x)e^{i\omega t}+c. c.!, \tag{4.20}$$

получаем

$$Q^2(x, t)=Q_0^2+2|Q_1(x)|^2+2Q_0Q_1(x)e^{i\omega t}+Q_1^2(x)e^{2i\omega t}+c. c., \tag{4.21}$$

где

$$|Q_1|^2=Q_1Q_{-1}=\frac{1}{4}q_1^2. \tag{4.22}$$

Если в некоторой точке $q_1>|Q_0|$ (это означает, что $|Q|Q$ меняет здесь знак), то за приливной период здесь будут наблюдаться два момента смены течений, которые можно найти следующим образом.

Полагаем, что

$$Q_0=q_1\cos\gamma=2|Q_1|\cos\gamma. \tag{4.23}$$

Тогда $\pi/2<\gamma<\pi$, так как $Q_0<0$. Кроме того, $Q_0=0$, если $\gamma=\pi/2$, и $|Q_0|=q_1$, если $\gamma=\pi$. Моменты смены течения, $t_1$ и $t_2$, следуют из выражения (см. (4.2))

$$\cos\gamma+\cos(\omega t+\beta_1(x))=0,$$

так что

$$\omega t_1=\pi+\gamma-\beta_1(x), \quad \omega t_2=\pi-\gamma-\beta_1(x). \tag{4.24}$$

Таким образом, $t_1$ соответствует смене отливного течения на приливное (приливное течение считается положительным); а $t_2$ — момент обратной смены.

Корни уравнения

$$Q_0+Q_1e^{i\omega t}+Q_{-1}e^{-i\omega t}=0$$

должны быть определены в комплексной форме так, чтобы

$$e^{i\omega t_1}=-\frac{Q_{-1}}{|Q_1|}e^{i\gamma}; \quad e^{i\omega t_2}=-\frac{Q_{-1}}{|Q_1|}e^{-i\gamma}. \tag{4.25}$$

Члены ряда Фурье для $|Q|Q$ в комплексных обозначениях для этого специального случая (ср. (4.17)) будут

$$|Q|Q = C_0 + C_1Q_1e^{i\omega t} + C_{-1}Q_{-1}e^{-i\omega t}, \tag{4.26}$$

где

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|Q|Q\,d\omega t;$$

$$C_1Q_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}|Q|Qe^{-i\omega t}\,d\omega t, \tag{4.27}$$

а $C_{-1}Q_{-1}$ определяется с помощью интеграла, сопряженного с выражением для $C_1Q_1$.

Так как $t_1 > t_2$, то

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\omega t_2} - \int_{\omega t_2}^{\omega t_1} + \int_{\omega t_1}^{\pi}\right]Q^2\,d\omega t. \tag{4.27a}$$

Соответствующее выражение получается и для $C_1Q_1$.

Отметим, что возможен случай, когда значение $\omega t_1$ или $\omega t_2$ лежит за пределами интервала $(-\pi, +\pi)$. Это зависит от величины $\beta$. Тогда сумма вкладов интегралов за пределами указанного интервала равна нулю, так как $Q^2(x)$ — периодическая функция, и мы все равно получаем нужную нам величину с помощью (4.27а).

Если теперь (4.21) вместе с сопряженными членами подставить в (4.27а), то оценка результата подстановки даст:

$$2\pi C_0 = \left(2Q_0^2 + 4\,|\,Q_1\,|^2\right)(\pi + \omega t_2 - \omega t_1) +$$
$$+ \left[4Q_0Q_1\,i\left(e^{i\omega t_1} - e^{i\omega t_2}\right) + Q_1^2\,i\left(e^{2i\omega t_1} - e^{2i\omega t_2}\right)\right] + \text{c. c.} \tag{4.28}$$

На основании (4.23), (4.24) и (4.25) мы заключаем, что

$$C_0 = k_{00}\,|\,Q_1\,|^2, \tag{4.29}$$

где

$$k_{00} = (2 + \cos 2\gamma)\left(2 - \frac{4\gamma}{\pi}\right) + \frac{6}{\pi}\sin 2\gamma. \tag{4.30}$$

Аналогичным образом получаем для $C_1$:

$$\pi C_1Q_1 = Q_1^2\,i\left(e^{i\omega t_1} - e^{i\omega t_2}\right) - \left(Q_0^2 + 2\,|\,Q_1\,|^2\right)i\left(e^{-i\omega t_1} - e^{-i\omega t_2}\right) +$$
$$+ 2Q_0Q_1(\pi + \omega t_2 - \omega t_1) - Q_0Q_{-1}i\left(e^{-2i\omega t_1} - e^{-2i\omega t_2}\right) -$$
$$- \frac{1}{3}\,Q_{-1}^2 i\left(e^{-3i\omega t_1} - e^{-3i\omega t_2}\right).$$

Отсюда

$$C_1Q_1 = k_{10}\,|\,Q_1\,|\,Q_1, \tag{4.31}$$

где

$$k_{10}=\frac{6}{\pi}\sin\gamma+\frac{2}{3\pi}\sin 3\gamma+\left(4-\frac{8\gamma}{\pi}\right)\cos\gamma. \qquad (4.32)$$

Если расход за счет стока $Q_0$ равен нулю, то $\gamma=\pi/2$. Тогда

$$k_{00}=0, \quad k_{10}=\frac{16}{3\pi}. \qquad (4.33)$$

Комплексная сопряженная функция $C_{-1}Q_{-1}$ равна $k_{10}|Q_1|Q_{-1}$, а $C_1=C_{-1}$.

Главный гармонический член разложения величины $|Q|Q$ в вещественной форме при отсутствии стока будет

$$\frac{16}{3\pi}|Q_1|\left(Q_1e^{i\omega t}+Q_{-1}e^{-i\omega t}\right)=\frac{8}{3\pi}q_1^2\cos(\omega t+\beta_1).$$

Значение коэффициента $(8/3\pi)q_1$ впервые было получено Лоренцем [85] в предположении, что диссипация за счет фиктивного линейного сопротивления равна диссипации за счет действительного квадратического сопротивления.

Соответствующее разложение члена $|Q|Q=-Q^2$ для верхних участков реки со стоком, где имеет место только отливное течение, было дано в (4.21). Если подставить туда обозначения из (4.26), то получим

$$C_0=-Q_0^2-2|Q_1|^2, \quad C_1Q_1=-2Q_0Q_1. \qquad (4.34)$$

Соответствующие значения $k_{00}$ и $k_{10}$ тогда будут

$$k_{00}=-2-\left(\frac{Q_0}{|Q_{-1}|}\right)^2, \quad k_{10}=-2\frac{Q_0}{|Q_1|}. \qquad (4.35)$$

Выражения (4.35) при $Q_0=-2|Q_1|$ совпадают с выражениями (4.30) и (4.32), если в них положить $\gamma=\pi$.

*Замечание.* Разложение с использованием выражений (4.26), (4.31) и (4.33) можно также применить в случае простой гармонической волны Кельвина (см. разд. 2.2). Тогда квадратический член, учитывающий сопротивление, можно заменить линейным фрикционным членом, который приведен в формулах (2.1).

## 4.3. Уравнения, определяющие средний уровень и колебания, обусловленные главной составляющей прилива

Уравнения для главной составляющей прилива следуют из (3.9) и (3.10) после подстановки в них членов ряда Фурье для $Q$, $\partial Q/\partial x$, $\partial Q/\partial t$, $h$, $\partial h/\partial x$, $\partial h/\partial t$, $b$, $1/gA$ и $1/C^2(a_0+h)A^2$, где $Q$ определяется с помощью (4.20), а $h$ — с помощью выражения

$$h=H_1(x)e^{i\omega t}+H_{-1}(x)e^{-i\omega t}. \qquad (4.36)$$

Отсюда

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{dQ_1(x)}{dx}e^{i\omega t}+c.\ c.,\qquad \frac{\partial Q}{\partial t}=i\omega Q_1(x)e^{i\omega t}+c.\ c.,$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{dH_1(x)}{dx}e^{i\omega t}+c.\ c.,\qquad \frac{\partial h}{\partial t}=i\omega H_1(x)e^{i\omega t}+c.\ c. \quad (4.37)$$

Разложение остальных членов осуществляется в соответствии с (4.3), (4.8) и (4.13). Затем множитель $h_1(x)\cos\theta$ надо заменить его комплексной формой $H_1e^{i\omega t}+H_{-1}e^{-i\omega t}$. Теперь мы имеем возможность выполнить умножения в соответствии с формулами (3.9) и (3.10):

$$b\frac{\partial h}{\partial t}=i\omega b_0H_1e^{i\omega t}+c.\ c., \quad (4.38)$$

$$\frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t}=\left(-i\omega m_1H_1Q_{-1}+i\omega m_0Q_1e^{i\omega t}\right)+c.\ c., \quad (4.39)$$

$$\frac{|Q|Q}{C^2(a_0+h)A^2}=r_0C_0+\left[r_1H_1Q_{-1}C_{-1}+\right.$$

$$\left.+\left(r_0Q_1C_1+r_1H_1C_0+r_2H_1^2Q_{-1}C_1\right)e^{i\omega t}+c.\ c.\right]. \quad (4.40)$$

Далее мы записываем

$$\frac{a_2b+b_s}{A^2}Q\frac{\partial h}{\partial t}=\omega\frac{a_2b_0+b_{s0}}{A_0^2}i\left(Q_{-1}H_1+Q_0H_1e^{i\omega t}\right)+c.\ c. \quad (4.41)$$

В этом разложении рассматриваются только главные члены, потому что член в левой части выражения (4.41) обычно играет второстепенную роль. Если ввести соотношения

$$H_1Q_{-1}+c.\ c.=2\mathrm{Re}\,(H_1Q_{-1})=2\,|H_1|\,|Q_1|\cos(\arg H_1-\arg Q_1),$$

$$iH_1Q_{-1}+c.\ c.=2\,|H_1|\,|Q_1|\sin(\arg Q_1-\arg H_1) \quad (4.42)$$

и использовать (4.29) и (4.31) для $C_0$ и $C_1Q_1$, то указанные выше выражения (3.9) и (3.10) сводятся к (см. также разд. 3.2)

$$\frac{da_0}{dx}+I+r_0k_{00}|Q_1|^2+2r_1k_{10}|Q_1|^2|H_1|\cos(\arg H_1-\arg Q_1)+$$

$$+2\omega\left(m_1+\frac{a_2b_0+b_{s0}}{gA_0^2}\right)|H_1|\,|Q_1|\sin(\arg H_1-\arg Q_1)=0, \quad (4.43)$$

$$\frac{dQ_1}{dx}+i\omega b_0H_1=0, \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x}+(r_0k_{10}|Q_1|+i\omega m_0)Q_1+$$

$$+\left\{r_1k_{00}|Q_1|^2-i\omega\frac{a_2b_0+b_{s0}}{gA_0^2}Q_0+r_2k_{10}|Q_1|H_1Q_{-1}\right\}H_1=0. \quad (4.45)$$

Уравнение (4.43) описывает распределение среднего уровня вдоль реки, а (4.44) и (4.45) — выражения для комплексной амплитуды главной составляющей прилива. Члены в этих уравнениях записаны по степени убывания влажности. Множители $m_0$, $m_1$, $r_0$, $r_1$ и $r_2$ определены в (4.9) и (4.14) (или приближенно в (4.12) и (4.16)); величина $z$ определена в (4.11).

На тех участках реки, где существует только отливное течение, коэффициенты $k_{00}$ и $k_{10}$ определяются выражением (4.35). Заметим, что средний уровень может не обязательно быть горизонтальным, когда сток и уклон дна равны нулю (см. (4.43)).

## 5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ГЛАВНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ПРИЛИВА

### 5.1. Общее решение

Это решение должно быть найдено в соответствии с принципами, изложенными в разд. 3.2 и 3.3.

Сначала надо решить уравнения (4.44) и (4.45); затем с помощью (4.43) можно найти средний уровень.

Уравнения (4.44) и (4.45) нелинейны относительно $H_1$ и $Q_1$, и, кроме того, коэффициенты в них являются функциями от $x$. Поэтому точное решение получить невозможно, однако можно получить приближенное решение с помощью итераций. Для этого река разбивается на ряд участков длины $l_n$ так, чтобы на каждом участке средние по времени величины площади поперечного сечения $A_0$, ширины района накопления $b_0$ и ширины русла $b_{s0}$ можно было заменить этими же величинами, но осредненными по расстоянию $x$.

Вводится также ориентировочная величина для средней амплитуды приливного расхода на участках, где $Q$ меняет знак за приливной период, $2|Q_1|=q_1$. Тогда можно оценить и угол $\gamma$, определяемый соотношением (4.23), а также рассчитать величины $k_{00}$ и $k_{10}$ с помощью выражений (4.30) и (4.32). Оценив ориентировочно среднюю амплитуду $h_1$ на каждом участке и определив затем коэффициенты $r_0$, $r_1$, $r_2$, $m_0$ и $m_1$, можно принять коэффициенты уравнений постоянными в пределах каждого участка. Наконец, опускаем члены второго порядка, содержащие функции синуса и косинуса. Теперь можно решить полученные линейные однородные уравнения для $a_0$, $H_1$ и $Q_1$. Исключая $Q_1$ из (4.44) и (4.45), получаем уравнение второго порядка для $H_1$:

$$\frac{d^2H_1}{dx^2}+\left(r_1k_{00}|Q_1|^2-i\omega\frac{a_2b_0+b_{s0}}{gA_0^2}Q_0\right)\frac{dH_1}{dx}+$$
$$+(\omega^2b_0m_0-i\omega b_0r_0k_{10}|Q_1|)H_1=0. \qquad (5.1)$$

Функция $Q_1$ также удовлетворяет этому уравнению. Сопоставление с (1.8) показывает, что в соответствующих уравнениях с линейным фрикционным коэффициентом член, содержащий $dH_1/dx$, отсутствует. После того как функции $H_1$ и $Q_1$ рассчитаны на каждом участке, их вводят в уравнение (4.43). Тогда легко можно рассчитать от участка к участку изменение среднего уровня $a_0$.

В следующем разделе подробно рассмотрен простой случай распространения главной составляющей прилива в канале при отсутствии речного стока.

## 5.2. Решение уравнений для главной составляющей прилива при отсутствии речного стока

Если речной сток ($Q_0$) отсутствует, то $H_1$ и $Q_1$ удовлетворяют следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям с комплексными коэффициентами:

$$\frac{dQ_1}{dx} + i\omega b_0 H_1 = 0 \tag{5.2}$$

и

$$\frac{dH_1}{dx} + \left(i\omega m_0 + r_0^*\right) Q_1 = 0, \tag{5.3}$$

где

$$m_0 = (gA_0)^{-1}\left(1 + \frac{1}{2} z\right),$$

$$r_0^* = \frac{16}{3\pi} C^{-2} A_0^{-2} a_0^{-1} (1 + 3z) \left| Q_1 \right|, \tag{5.4}$$

(см. (4.10), (4.11) и (4.16)).

Эти коэффициенты считаются постоянными для каждого участка реки. Функции $H_1$ и $Q_1$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2H_1}{dx^2} + \left(\omega^2 b_0 m_0 - i\omega b_0 r_0^*\right) H_1 = 0, \tag{5.5}$$

которое аналогично уравнению (1.8) с линейным сопротивлением, если положить

$$\lambda = r_0^* m_0^{-1} \quad \text{и} \quad c_0^{-2} = b_0 m_0 . \tag{5.6}$$

В соответствии с этим решение можно записать аналогично выражению (1.21) и (1.22), т. е.

$$H_1(x) = H_1(0) \operatorname{ch} kx + \frac{ki}{\omega b_0} Q_1(0) \operatorname{sh} kx, \tag{5.7}$$

$$Q_1(x) = Q_1(0) \operatorname{ch} kx - \frac{\omega b_0 i}{k} H_1(0) \operatorname{sh} kx, \tag{5.8}$$

где $k$ определяется из выражения

$$k^2 = -\omega^2 b_0 m_0 + i\omega b_0 r_0^* , \tag{5.9}$$

которое аналогично выражению (1.10), если ввести туда (5.6).

Практический расчет распространения главной волны прилива в канале, поперечное сечение которого зависит от $x$, выполняется способом, указанным в разд. 1.2.

Величины $H_1(l_n)$ и $Q_1(l_n)$ в конце $n$-го участка можно выразить линейно через $Q_1(0)$ и через $H_1(0)$ в устье, а также коэффициенты каждого из $n$ участков. Тогда получаем формулы, приведенные там под номером (1.23):

$$\begin{aligned} H_1(l_n) &= A_n H_1(0) + B_n Q_1(0), \\ Q_1(l_n) &= C_n H_1(0) + D_n Q_1(0). \end{aligned} \tag{5.10}$$

С их помощью можно проверить и уточнить величины $h$ и $Q$, введенные в коэффициенты в качестве ориентировочных величин. Если необходимо их исправить, то расчет повторяется с новыми величинами. Это продолжается до тех пор, пока разница между ориентировочными и рассчитанными величинами $h$ и $|Q|$ не станет достаточно малой.

Оказывается, однако, что распространение гармонической приливной волны в реке без притоков можно рассчитать способом, требующим гораздо меньше вычислительной работы, чем предыдущий.

Введем функцию

$$Y = \frac{Q_1}{H_1}, \tag{5.11}$$

представляющую собой отношение комплексных амплитуд расхода и уровня.

Из (5.7) и (5.8) следует, что функция должна удовлетворять дифференциальному уравнению Рикатти:

$$\frac{dY}{dx} = z_s Y^2 - y_p, \tag{5.12}$$

где

$$y_p = i\omega b_0 \quad \text{и} \quad z_s = i\omega m_0 + r_0^*.$$

Общее решение уравнения (5.12) легко находится из

$$\int \frac{dY}{Y^2 - Y_e^2} = \int z_s \, dx \quad \text{или} \quad \frac{Y - Y_e}{Y + Y_e} = ce^{2kx},$$

где $k$ (см. (5.9)) и $Y_e$ определяются выражениями

$$k = (y_p z_s)^{1/2}; \quad Y_e = \left(y_p z_s^{-1}\right)^{1/2},$$

а $c$ — постоянная интегрирования, которая определяется из условия $Y=Y_0$ при $x=0$.

Если ввести $\operatorname{th} kx$, то

$$Y=Y_e\frac{Y_0-Y_e\operatorname{th}kx}{Y_e-Y_0\operatorname{th}kx}. \tag{5.13}$$

Расчет по уравнению (5.13) с использованием определенных граничных условий выполняется быстрее, чем расчет по (5.10), так как имеем дело только с одним уравнением.

Пусть $Y(l_1)$ — величина $Y$ на конце первого участка $(x=l_1)$. Тогда в соответствии с (5.13) величину $Y(l_1)$ можно выразить через $Y_0$. Аналогично мы можем $Y(l_2)$ на конце второго участка выразить через $Y(l_1)$ и величины $b$, $m$ и $r$ для этого участка. Поскольку (5.13) линейно относительно $Y$ и $Y_0$, то соотношение между $Y(l_2)$ и $Y_0$ также линейно после исключения $Y(l_1)$. Продолжая действовать подобным образом, получаем линейное соотношение между $Y(l_n)$ и $Y_0$. Если $Y(l_n)$ известно в качестве граничного условия, то мы можем рассчитать $Y_0$ в устье реки. Если известна $H_1(0)$, то $Q_1(0)$ определяется как $H_1(0)Y_0$, а затем можно рассчитать от участка к участку $H_1(l_i)$ и $Q_1(l_i)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ с помощью формул (5.7) и (5.8).

Для практических целей следует указать на случай, когда река замкнута при $x=l_n$, причем $Q(l_n)=0$. Выведем формулы, которые применяются в этом случае. Если длина участков реки выбрана достаточно малой (что необходимо главным образом для того, чтобы учесть все изменения поперечного сечения), то мы приближенно можем положить $\operatorname{th} kx\approx kx$, так что

$$Y=\frac{Y_0-Y_ekx}{1-Y_0Z_ekx}, \tag{5.14}$$

где $Z_e=1/Y_e$.

Пусть $l_p$ будет $x$-координатой конца $p$-го участка, а $l_{p-1}$ — координатой его начала, так что $l_p-l_{p-1}$ — это длина $p$-того участка. Тогда между $Y(l_p)$ и $Y(l_{p-1})$ существует линейное соотношение

$$Y(l_p)=\frac{Y(l_{p-1})-Y_e(p)\,k(p)\,(l_p-l_{p-1})}{1-Y(l_{p-1})Z_e(p)\,k(p)\,(l_p-l_{p-1})}, \tag{5.15}$$

где

$$Y_e(p)\,k(p)=i\omega b_0(p),$$

$$Z_e(p)\,k(p)=i\omega m_0(p)+r_0^*(p).$$

Если величина $|Q_1(p)|$, т. е. средняя величина $|Q_1|$, ориентировочно оценена для этого участка, то для середины $p$-того участка можно определить величины $b_0(p)$, $m_0(p)$ и $r_0^*(p)$.

Если ввести обозначения $j_1^*(p)$ и $j_2^*(p)$, определяемые выражениями

$$j_1^*(p) = Y_e(p)\,k(p)\,(l_p - l_{p-1}); \qquad j_2^*(p) = Z_e(p)\,k(p)\,(l_p - l_{p-1}),$$

то можно записать

$$Y(l_p) = \frac{Y(l_{p-1}) - j_1^*(p)}{1 - j_2^*(p)\,Y(l_{p-1})}. \tag{5.16}$$

Расчет может быть выполнен вниз по течению, начиная с $x = l_n$ на верхнем конце реки. Пусть там известна величина $Y$. Обычно на замкнутом конце $Q = 0$, т. е. $Y(l_n) = 0$. Тогда в начале участка $n$ будет

$$Y(l_{n-1}) = j_1^*(n).$$

В начале участка $n - 1$

$$Y(l_{n-2}) = \frac{j_1^*(n) + j_1^*(n-1)}{1 + j_2^*(n-1)\,j_1^*(n)}$$

и т. д. Здесь $j_1^*(n)$, $j_1^*(n-1)$ и $j_2^*(n-1)$ определяются как средние значения на $n$-м и $(n-1)$-м участках.

Продолжая эти действия, мы можем получить величину $Y_0$ в устье реки, выраженную через величины $j_1^*(p)$ и $j_2^*(p)$, которые являются функциями отдельных участков реки от ее замкнутого конца до устья.

В устье реки величина $H(0)$ известна из наблюдений; таким образом, мы можем рассчитать $Q(0) = Y_0 H(0)$. Затем можно рассчитать величины $H(l_p)$ и $Q(l_p)$ от одного участка к другому, двигаясь вверх от устья и используя следующие уравнения (для $p = 1, 2, \ldots, n$):

$$H(l_p) = H(l_{p-1})\left\{1 + \frac{1}{2}\,j_2^*(p)\,j_1^*(p)\right\} - Q(l_{p-1})\,j_2^*(p), \tag{5.17}$$

$$Q(l_p) = Q(l_{p-1})\left\{1 + \frac{1}{2}\,j_2^*(p)\,j_1^*(p)\right\} - H(l_{p-1})\,j_1^*(p), \tag{5.18}$$

$$j_2^*(p) = \{i\omega m_0(p) + r_0^*(p)\}\,(l_p - l_{p-1}), \tag{5.19}$$

$$j_2^*(p)\,j_1^*(p) = i\omega b_0(p)\,\{i\omega m_0(p) + r_0^*(p)\}\,(l_p - l_{p-1})^2. \tag{5.20}$$

Отметим, что уравнение (5.17) следует из (5.7):

$$H(l_p) = H(l_{p-1})\operatorname{ch}(k(p)(l_p - l_{p-1})) + \\ + \frac{k(p)}{\omega b_0(p)}\,iQ(l_{p-1})\operatorname{sh}(k(p)(l_p - l_{p-1}))$$

или приближенно

$$H(l_p) = H(l_{p-1})\left(1 + \frac{1}{2}k^2(p)(l_p - l_{p-1})^2\right) +$$
$$+ \frac{k^2(p)}{\omega b_0(p)} iQ(l_{p-1})(l_p - l_{p-1}).$$

Если подставить сюда $k^2$ из (5.9), то получим (5.17). Аналогично из (5.8) можно получить (5.18). Вычисление $H$ и $Q$ производится тем же путем, если $Y \neq 0$ в конце реки.

После вычисления $H_1$ и $Q_1$ на концах различных участков средний уровень вдоль реки можно определить из (4.43), как указывалось выше. В данном частном случае множитель $k_{00}=0$.

Существует возможность распространить изложенный метод на речную систему, в которой имеются притоки. Однако тогда этот метод не имеет преимуществ перед методом расчета распространения гармонических волн, описанным в разд. 7.

## 5.3. Решение уравнений для главной гармонической составляющей прилива при наличии речного стока

Уравнения, определяющие распространение главной гармонической составляющей прилива при наличии речного стока, даны в (4.44) и (4.45). Общее решение этих уравнений будет

$$H_1 = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x};$$
$$Q_1 = -i\omega b_0 \left(\frac{C_1}{k_1} e^{k_1 x} + \frac{C_2}{k_2} e^{k_2 x}\right), \tag{5.21}$$

где $C_1$ и $C_2$ — комплексные константы. Величины $k_1$ и $k_2$ — это корни уравнения, получающегося после подстановки $Q_1$ и $H_1$ ($C_2=0$ и $k_1$ заменяется на $k$) в уравнение (4.45):

$$k^2 + \left(r_1 k_{00} |Q_1|^2 - i\omega \frac{\alpha_2 b_0 + b_{s0}}{gA_0^2} Q_0\right) k +$$
$$+ \omega^2 b_0 m_0 - i r_0 \omega b_0 k_{10} |Q_1| = 0. \tag{5.22}$$

Член в (4.45), который содержит коэффициент $r_2$, — это коррекционный член и мы его временно опускаем. Корни этого уравнения можно получить сразу же. На практике, однако, их часто получают приближенно, если квадрат модуля коэффициента при $k$ мал по сравнению с членом без $k$. Тогда

$$k = \pm i(\omega^2 b_0 m_0 - i r_0 \omega b_0 k_{10} |Q_1|)^{1/2} -$$
$$- \frac{1}{2}\left(r_1 k_{00} |Q_1|^2 - i\omega \frac{\alpha_2 b_0 + b_{s0}}{gA_0^2} Q_0\right) \tag{5.23}$$

или

$$k = -\frac{1}{2} r_1 k_{00} | Q_1 |^2 \pm \left[ \frac{\omega b_0}{2} \left\{ \left( \omega^2 m_0^2 + r_0^2 k_{10}^2 | Q_1 |^2 \right)^{1/2} - \omega m_0 \right\} \right]^{1/2} +$$

$$+ i \left( \frac{1}{2} \omega \frac{a_2 b_0 + b_{s0}}{g A_0^2} Q_0 \pm \left[ \frac{\omega b_0}{2} \left\{ \left( \omega^2 m_0^2 + r_0^2 k_{10}^2 | Q_1 |^2 \right)^{1/2} + \omega m_0 \right\} \right]^{1/2} \right). \tag{5.24}$$

Мы полагаем при этом, что $k_1$ соответствует отрицательному, а $k_2$ — положительному знаку.

Следует указать, что на практике вещественная и мнимая части у $k_1$ отрицательны, а у $k_2$ положительны. После подстановки в (5.21) оказывается, что в случае отсутствия речного стока составляющая прилива $h$ представляет собой сумму двух прогрессивных волн; одна из них (соответствующая $k_1$) направлена вверх по течению, а другая (соответствующая $k_2$) направлена вниз по течению — это ретрогрессивная волна. Таким образом, мы можем записать

$$h = C_1 e^{i\omega t - \mu_1 x - i\nu_1 x} + C_2 e^{i\omega t + \mu_2 x + i\nu_2 x}.$$

Если речного стока нет, то $\mu_1 = \mu_2$; в противном случае $\mu_1 > \mu_2$. Это показывает, что волна, идущая вверх по течению, гасится сильнее, чем волна, идущая вниз по течению.

Для реки без притоков численное решение может быть получено аналогично тому, как это было сделано для случая без речного стока в разд. 5.2.

Линейное соотношение между $Z(x) = H_1(x)/Q_1(x)$ в конце и $Z(0) = H_1(0)/Q_1(0)$ в начале участка можно получить следующим образом. Мы знаем, что

$$Z(x) = \frac{i k_1 k_2}{\omega b_0} \frac{C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}{C_1 k_2 e^{k_1 x} + C_2 k_1 e^{k_2 x}}. \tag{5.25}$$

Теперь, полагая $x = 0$, мы можем решить уравнение (5.25) относительно $C_1/C_2$:

$$\frac{C_1}{C_2} = -\left( \frac{i\omega b_0 Z_0 + k_2}{i\omega b_0 Z_0 + k_1} \right) \frac{k_1}{k_2}. \tag{5.26}$$

Если мы затем введем это значение $C_1/C_2$ в соотношение для $Z(x)$ и приближенно будем считать, что

$$e^{k_1 x} \approx 1 + k_1 x; \qquad e^{k_2 x} \approx 1 + k_2 x, \tag{5.27}$$

то найдем следующее линейное соотношение между $Z$ и $Z_0$:

$$Z = \frac{Z_0 \left[ 1 - \left\{ r_1 k_{00} | Q_1 |^2 - i\omega \left( a_2 b_0 + b_{s0} \right) g^{-1} A_0^{-2} Q_0 \right\} x \right] - (i\omega m_0 + r_0 k_{10} | Q_1 |) x}{1 - Z_0 i \omega b_0 x}, \tag{5.28}$$

где $k_{00}$ и $k_{10}$ определяются выражениями (4.30) и (4.32) или выражением (4.35) для участков реки, лежащих выше предела действия приливного течения. Для вычисления (5.28) значения $k_1k_2$ и $k_1+k_2$ определяются из (5.22). Оказывается, что линейное соотношение между $Z$ и $Z_0$ аналогично соотношению между $Y$ и $Y_0$, которое было получено для главной составляющей прилива при отсутствии речного стока (ср. (5.14) и (5.28)). Следовательно, для расчета распространения главной приливной волны в случае наличия речного стока можно применять метод, аналогичный тому, который описан в разд. 5.2.

Обычно, если канал замкнут на одном конце, речного стока нет. Однако возможен случай, когда на замкнутом конце существует перетекание воды из вышележащих участков ($Q_0$), в то время как приливные движения не могут проникать выше этого места. Тогда $Z_0=\infty$, потому что $Q_1=0$, или $Z_0^{-1}=0$. Это и будет граничным условием для $Z$ на замкнутом конце.

Можно считать, что река с внутриматериковым стоком имеет «бесконечную» длину. Тогда прилив совершенно гасится на каком-то определенном расстоянии от устья. Граничное условие, однако, должно иметь вид $H_1(\infty)=0$ и $Q_1(\infty)=0$. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty} Z$ определится следующим образом. На самом верхнем по течению участке, где мы можем считать, что прилив уже почти исчезает, будут выполняться условия:

$$H_1=C_1e^{k_1x}; \qquad Q_1=-\frac{i\omega b_0}{k_1}C_1e^{k_1x}. \tag{5.29}$$

Тогда $k_1$ — это корень уравнения (5.23) с отрицательной вещественной частью.

Отсюда

$$\lim_{x\to\infty} Z=\frac{k_1 i}{\omega b_0}. \tag{5.30}$$

Практически решение находится способом, аналогичным тому, который описан в разд. 5.2 для случая, когда речного стока нет.

Если коррекционным членом

$$[r_2k_{10}|Q_1|H_1Q_{-1}]H_1$$

(см. (4.45)), который был опущен в предыдущих вычислениях, пренебречь нельзя, то его надо включить после первого расчета. Тогда $|Q|$ и $H_1Q_{-1}$ временно считаются известными и их можно подставить в (5.22). Затем коэффициент при $H_1$ в коррекционном члене надо включить в коэффициент при $k$ и в формулу для $Z$ (5.28).

Численное решение для распространения главной приливной волны в речной системе будет рассмотрено в разд. 7. Это решение можно использовать и для одной реки, хотя изложенный выше метод дает более быстрое решение.

Распределение среднего уровня находится обычным образом из уравнения (4.43), где член с $k_{00}$ теперь больше не равен нулю.

## 6. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГЛАВНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ПРИЛИВА И ПЕРВОЙ ОБЕРГАРМОНИКИ ПРИ НАЛИЧИИ РЕЧНОГО СТОКА

### 6.1. Разложение в ряд Фурье коэффициентов приливных уравнений и члена $|Q|Q$

Уровень и расход, обусловленные основной составляющей прилива и первой обергармоникой, выражаются в виде

$$h(x,\ t) = h_1(x)\cos(\omega t + \alpha_1(x)) + h_2(x)\cos(2\omega t + \alpha_2(x)),$$

$$Q(x,\ t) = Q_0 + q_1(x)\cos(\omega t + \beta_1(x)) + q_2(x)\cos(2\omega t + \beta_2(x)). \quad (6.1)$$

Комплексная форма записи дает

$$h(x,\ t) = H_1(x)e^{i\omega t} + H_2(x)e^{2i\omega t} + c.\ c.,$$

$$Q(x,\ t) = Q_0 + Q_1(x)e^{i\omega t} + Q_2(x)e^{2i\omega t} + c.\ c. \quad (6.2)$$

Чтобы получить уравнения для обеих составляющих, мы вводим (6.1) или (6.2) в приливные уравнения (3.9) и (3.10).

Для простоты допустим в этом разделе, что амплитуда основной составляющей больше, чем амплитуда обергармоники, так что можно пренебречь влиянием первой обергармоники на коэффициенты в уравнениях (3.9) и (3.10). Если это влияние велико, то приходится продлить разложение коэффициентов в ряд Фурье, которое дано в (4.3), (4.4), (4.8) и (4.13). Но тогда более удобным оказывается разложение коэффициентов в ряд по степеням $h$, т. е.

$$b(x,\ h) = b_0(x) + b_1^*(x)h(x,\ t) + b_2^*(x)h^2(x,\ t), \quad (6.3)$$

и аналогичные соотношения будут иметь место для $1/gA(x,\ h)$ и $r(x,\ h)$, где $h$ определяется согласно (6.1).

Коэффициенты в этих приближенных соотношениях могут быть получены эмпирически или с помощью численных методов, например с помощью полиномов Чебышева (см. разд. 8).

В реках более правильной формы, где амплитуда первой обергармоники не превосходит 40% амплитуды главной составляющей прилива, для определения коэффициентов уравнений (3.9) и (3.10) можно допустить использование уравнений (4.8) и (4.13).

Теперь рассмотрим, как определяются члены ряда Фурье для $|Q|Q$: член, не зависящий от $t$, а также член с основной частотой и член с частотой обергармоники.

Соответствующие коэффициенты обозначены через $C_{02}$, $C_{12}$ и $C_{22}$, так что

$$|Q|Q = C_{02} + C_{12}Q_1 e^{i\omega t} + C_{22}Q_2 e^{2i\omega t} + c.\ c.,$$

причем коэффициенты определяются так:

$$C_{k2}Q_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |Q|\, Q e^{-ik\omega t}\, d\omega t;$$

где $k$ равно 1 или 2. Если $k=0$, то $C_{02}Q_0$ заменяется на $C_{02}$.

Оценка этих интегралов производится способом, аналогичным тому, который применялся при вычислении соответствующих коэффициентов главной составляющей $C_0$ и $C_1Q_1$ в разд. 4.2. Мы должны найти вещественные корни уравнения

$$Q_0 + Q_1(x)\, e^{i\omega t} + Q_2(x)\, e^{2i\omega t} + c.\ c. = 0$$

или корни уравнения

$$Q_1 e^{2i\omega t} + Q_0 e^{i\omega t} + Q_{-1} = -Q_2 e^{3i\omega t} - Q_{-2} e^{-i\omega t}. \qquad (6.4)$$

Однако обычно корни уравнения (6.4) нельзя вычислить точно.

Если амплитуда обергармоники меньше, например, половины амплитуды главной составляющей, то в первом приближении решения уравнения (6.4), $e^{i\omega t_1^*}$ и $e^{i\omega t_2^*}$ соответственно, мы получим, полагая их равными корням левой части уравнения (6.4), для чего требуется приравнять ее к нулю. Эти корни даны в (4.25). Следующее приближение находим, подставляя результат первого приближения, данный в (4.25) для $e^{i\omega t}$, в правую часть уравнения (6.4). Тогда корни получающегося квадратного уравнения определяют второе приближение:

$$e^{i\omega t_1^*} = -\frac{Q_{-1}}{|Q_1|}\cos\gamma - \frac{Q_{-1}}{|Q_1|}\left[-\sin^2\gamma + \frac{e^{i\gamma}}{|Q_1|^3}\left(Q_2 Q_{-1}^2 e^{2i\gamma} + c.\ c.\right)\right]^{1/2}, \qquad (6.5)$$

$$e^{i\omega t_2^*} = -\frac{Q_{-1}}{|Q_1|}\cos\gamma + \frac{Q_{-1}}{|Q_1|}\times$$
$$\times\left[-\sin^2\gamma + \frac{e^{-i\gamma}}{|Q_1|^3}\left(Q_2 Q_{-1}^2 e^{-2i\gamma} + c.\ c.\right)\right]^{1/2}. \qquad (6.6)$$

Оценка интегралов, определяющих $C_{02}$, $C_{12}Q_1$ и $C_{22}Q_2$, производится путем, описанным в разд. 4.2.

Таким образом,

$$C_{k2}Q_k=\frac{1}{2\pi}\left[\int\limits_{-\pi}^{\omega t_2^*}-\int\limits_{\omega t_2^*}^{\omega t_1^*}+\int\limits_{\omega t_1^*}^{\pi}\right]Q^2e^{-i\omega kt}\,d\omega t,$$

где $\omega t_1^*$ и $\omega t_2^*$ определяются выражениями (6.5) и (6.6).

Так как выражения для $C_{k2}$ очень громоздки, то употреблять этот метод не рекомендуется. В разд. 8 мы изложим другой, более удобный метод определения членов ряда Фурье для $|Q|Q$. На практике, однако, часто можно использовать следующий приближенный метод.

Предположим, что амплитуда обергармоники достаточно мала по сравнению с амплитудой главной составляющей прилива, так что в качестве первого приближения для корней уравнения (6.4) можно принять

$$e^{i\omega t_1^*}\approx e^{i\omega t_1}=-\frac{Q_{-1}}{|Q_1|}e^{i\gamma};\qquad e^{i\omega t_2^*}\approx e^{i\omega t_2}=-\frac{Q_{-1}}{|Q_1|}e^{-i\gamma}.$$

Здесь мы не будем приводить подробно хода определения коэффициентов $C_{k2}$. Заметим только, что должны повторно использоваться следующие формулы·

$$\omega t_1-\omega t_2=2\gamma;\quad i\left(e^{-in\omega t_2}-e^{-in\omega t_1}\right)=$$

$$=(-1)^{n+1}2\frac{Q_1^n}{|Q_1|^n}\sin n\gamma\quad (n\geqslant 1)$$

и

$$e^{i\arg Q_1}=\frac{Q_1}{|Q_1|}.$$

Тогда получаем

$$C_{02}=\underline{k_{00}|Q_1|^2}+\underline{k_{01}\operatorname{Re}\frac{Q_1^2Q_{-2}}{|Q_1|}}+k_{02}|Q_2|^2+k_{03}\operatorname{Re}\left(\frac{Q_1}{|Q_1|}\right)^4Q_{-2}^2,\tag{6.7}$$

$$C_{12}Q_1=\underline{k_{10}|Q_1|Q_1}+\underline{k_{11}Q_{-1}Q_2}+k_{12}\frac{Q_1^3Q_{-2}}{|Q_1|^2}+k_{13}\frac{|Q_2|^2Q_1}{|Q_1|}+$$

$$+k_{14}\left(\frac{Q_{-1}}{|Q_1|}\right)^3Q_2^2+k_{15}\left(\frac{Q_1}{|Q_1|}\right)^5Q_{-2}^2,\tag{6.8}$$

$$C_{22}Q_2=\underline{k_{20}Q_1^2}+\underline{k_{21}|Q_1|Q_2}+k_{22}\frac{Q_1^4Q_{-2}}{|Q_1|^3}+k_{23}\frac{|Q_2|^2Q_1^2}{|Q_1|^2}+$$

$$+k_{24}\left(\frac{Q_{-1}}{|Q_1|}\right)^2Q_2^2+k'_{25}\left(\frac{Q_1}{|Q_1|}\right)^6Q_{-2}^2,\tag{6.9}$$

где $k_{00}$ и $k_{10}$ определяются выражениями (4.30) и (4.32), а остальные коэффициенты — следующими выражениями:

$$k_{01}=\frac{4}{\pi}\left(\sin\gamma-\frac{1}{3}\sin 3\gamma\right),\quad k_{02}=2-\frac{4\gamma}{\pi},$$

$$k_{03}=-\frac{1}{\pi}\sin 4\gamma,\quad k_{11}=2-\frac{4\gamma}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sin 2\gamma,$$

$$k_{12}=-\frac{1}{3\pi}(2\sin 2\gamma-\sin 4\gamma),\quad k_{13}=\frac{4}{\pi}\sin\gamma,\quad k_{14}=\frac{2}{3\pi}\sin 3\gamma,$$

$$k_{15}=\frac{2}{5\pi}\sin 5\gamma,\quad k_{20}=1-\frac{2\gamma}{\pi}+\frac{4}{3\pi}\sin 2\gamma-\frac{1}{6\pi}\sin 4\gamma,\quad (6.10)$$

$$k_{21}=\frac{8}{\pi}\sin\gamma+\left(4-\frac{8\gamma}{\pi}\right)\cos\gamma,\quad k_{22}=\frac{1}{15\pi}(5\sin 3\gamma-3\sin 5\gamma),$$

$$k_{23}=-\frac{2}{\pi}\sin 2\gamma,\quad k_{24}=-\frac{1}{\pi}\sin 2\gamma,\quad k_{25}=-\frac{1}{3\pi}\sin 6\gamma.$$

Если речной сток отсутствует, то в коэффициенты надо подставить $\gamma=\pi/2$. Тогда их значения будут:

$$k_{01}=k_{10}=\frac{16}{3\pi};\quad k_{13}=\frac{4}{\pi};\quad k_{14}=-\frac{2}{3\pi};\quad k_{15}=\frac{2}{5\pi};$$

$$k_{21}=\frac{8}{\pi}\quad \text{и}\quad k_{22}=-\frac{8}{15\pi}.$$

Остальные коэффициенты будут равны нулю.

Коэффициенты расположены в убывающем порядке по степени их важности. Для практических целей, когда $|Q_2|$ меньше, чем $0{,}5|Q_1|$, обычно достаточно учитывать только подчеркнутые члены в выражениях для $C_{02}$, $C_{12}Q_1$ и $C_{22}Q_2$. Другими членами можно пренебречь, поскольку они содержат множитель $Q_2^2$ (модуль которого меньше, чем $0{,}25|Q_1|^2$), и, кроме того, их коэффициенты $k$ меньше, чем соответствующие коэффициенты в подчеркнутых членах. Обычно можно пренебречь членами, которые содержат $k_{02}$, $k_{12}$, $k_{13}$ и $k_{22}$.

Чтобы получить представление о точности разложения в ряд Фурье, применим его к случаю, когда

$$Q=\cos\omega t+0{,}4\cos 2\omega t.$$

Если мы приближенно примем в качестве корней уравнения $Q=0$ решение уравнения $\cos\omega t=0$, т. е. $\omega t_1=\pi/2$ и $\omega t_2=-\pi/2$, то в соответствии с (6.7)—(6.10) мы найдем, что

$$|Q|Q=0{,}170+0{,}944\cos\omega t+0{,}475\cos 2\omega t;$$

в то время как точный анализ дает

$$|Q|Q=0{,}158+0{,}942\cos\omega t+0{,}499\cos 2\omega t.$$

Таким образом, ошибка в постоянном члене составляет около 8%, в главной составляющей ошибка пренебрежимо мала, а в коэффициенте при обергармонике ошибка составляет около 5%.

Ясно, что при большей амплитуде обергармоники ошибка возрастет. Например, если $Q=\cos\omega t+\cos 2\omega t$, то мы находим, что

$$|Q|Q=0{,}424+1{,}443\cos\omega t+1{,}188\cos 2\omega t,$$

а точное разложение дает

$$|Q|Q=0{,}287+1{,}404\cos\omega t+1{,}446\cos 2\omega t.$$

В районах, лежащих выше предела действия приливного течения, где существует только отливное течение, разложение множителя $-Q^2$ в ряд Фурье можно произвести точно.

Из выражения

$$Q^2=\{Q_0+Q_1(x)e^{i\omega t}+Q_{-1}(x)e^{-i\omega t}+Q_2(x)e^{2i\omega t}+Q_{-2}(x)e^{-2i\omega t}\}^2$$

находим, что коэффициенты в

$$Q^2=C_{02}+(C_{12}Q_1e^{i\omega t}+C_{22}Q_2e^{2i\omega t}+c.\ c.)$$

будут

$$C_{02}=-Q_0^2-2|Q_1|^2-2|Q_2|^2, \tag{6.11}$$

$$C_{12}Q_1=-2(Q_0Q_1+Q_{-1}Q_2), \tag{6.12}$$

$$C_{22}Q_2=-Q_1^2-2Q_0Q_2. \tag{6.13}$$

Здесь опущены члены, содержащие $C_{32}$ и $C_{42}$.

## 6.2. Уравнения для главной составляющей прилива и первой обергармоники

Уравнения для среднего уровня, главной составляющей прилива и обергармоники получаются способом, аналогичным описанному в разд. 4.3 для главной составляющей. Если ввести комплексные выражения для $h$ и $Q$, данные в (6.2), а также разложенные в ряд коэффициенты, показанные в (4.3), (4.8) и (4.13), где величина $h_1(x)\cos\theta$ заменена ее комплексным выражением $H_1e^{i\omega t}+H_{-1}e^{-i\omega t}$, то мы находим

$$b\frac{\partial h}{\partial t}=i\omega(b_0H_1+2b_1H_{-1}H_2)e^{i\omega t}+i\omega(2b_0H_2+b_1H_1^2)e^{2i\omega t}+ +c.\ c., \tag{6.14}$$

$$\frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t}=-i\omega m_1H_1Q_{-1}+i\omega(m_0Q_1+2m_1H_{-1}Q_2)e^{i\omega t}+ +i\omega(2m_0Q_2+m_1H_1Q_1)e^{2i\omega t}+c.\ c., \tag{6.15}$$

$$r|Q|Q = r_0 C_{02} + \left[r_1 C_{-12} H_1 Q_{-1} + r_2 C_{-22} H_1^2 Q_{-2} + \right.$$

$$+ \left(r_0 C_{12} Q_1 + r_1 C_{02} H_1 + r_1 C_{22} H_{-1} Q_2 + r_2 C_{-12} H_1^2 Q_{-1}\right) e^{i\omega t} +$$

$$\left. + \left(r_0 C_{22} Q_2 + r_1 C_{12} H_1 Q_1 + r_2 C_{02} H_1^2\right) e^{2i\omega t}\right] + c.\ c. \qquad (6.16)$$

Коэффициенты $m_0$, $m_1$, $r_0$, $r_1$ и $r_2$ определяются с помощью выражений (4.10) и (4.15), а $C_{02}$, $C_{12}Q_1$ и $C_{22}Q_2$ — с помощью выражений (6.7)—(6.9), если существует и приливное, и отливное течение. В противном случае следует применять выражения (6.11)—(6.13). Далее, изменения во времени величин $A$ и $\alpha_2 b + b_s$ в члене

$$g^{-1} A^{-2} (\alpha_2 b + b_s) Q \frac{\partial h}{\partial t},$$

который обычно менее значителен, чем другие члены в (3.9), рассматриваться не будут. Коэффициент при этом члене будет, следовательно, приближенно иметь вид

$$d = g^{-1} A_0^{-2} (\alpha_2 b_0 + b_{s0}). \qquad (6.17)$$

Кроме того, мы можем записать

$$Q \frac{\partial h}{\partial t} = i\omega \left\{(Q_{-1} H_1 + 2Q_{-2} H_2) + (Q_0 H_1 + 2Q_{-1} H_2 - Q_2 H_{-1}) e^{i\omega t} + \right.$$

$$\left. + (Q_1 H_1 + 2Q_0 H_2) e^{2i\omega t}\right\} + c.\ c. \qquad (6.18)$$

После подстановки (6.14)—(6.16) и наиболее важных членов выражения (6.18) в уравнения (3.9) и (3.10) получаем следующее уравнение:

$$\frac{da_0}{dx} + I + r_0 C_{02} + 2r_1 \operatorname{Re}(C_{-12} Q_{-1} H_1) + 2r_2 \operatorname{Re}\left(C_{-22} Q_{-2} H_1^2\right) -$$

$$- 2\omega (m_1 + d) |H_1| |Q_1| \sin(\arg Q_1 - \arg H_1) = 0. \qquad (6.19)$$

Это уравнение определяет средний уровень (ср. (4.43)). Предполагается также, что $dQ_0/dx = 0$.

Члены, содержащие $e^{i\omega t}$, описывают распространение главной составляющей приливной волны, т. е.

$$\frac{dH_1}{dx} + i\omega m_0 Q_1 + i\omega (2m_1 + d) H_{-1} Q_2 - 2i\omega d Q_{-1} H_2 +$$

$$+ r_0 C_{12} Q_1 + (r_1 C_{02} - i\omega d Q_0) H_1 + r_1 C_{22} H_{-1} Q_2 + r_2 C_{-12} H_1^2 Q_{-1} = 0, \qquad (6.20)$$

$$\frac{dQ_1}{dx} + i\omega b_0 H_1 + 2i\omega b_1 H_{-1} H_2 = 0. \qquad (6.21)$$

Из членов, содержащих $e^{2i\omega t}$, получаются следующие уравнения для обергармоники:

$$\frac{dH_2}{dx}+2i\omega m_0Q_2+i\omega(m_1-d)H_1Q_1-2i\omega dQ_0H_2+r_0C_{22}Q_2+$$

$$+r_1C_{12}H_1Q_1+r_2C_{02}H_1^2=0, \tag{6.22}$$

$$\frac{dQ_2}{dx}+2i\omega b_0H_2+i\omega b_1H_1^2=0. \tag{6.23}$$

### 6.3. Решение приливных уравнений

Разделим реку на ряд участков так, чтобы на каждом участке ширина района накопления и глубина не сильно отличались от их средних величин. Тогда коэффициенты $m_0$, $m_1$, $r_0$, $r_1$ и $r_2$ оказываются независимыми от $x$ и можно использовать их средние значения. Кроме того, для каждого участка ориентировочно оценивается средняя величина $|Q_1|$. Сначала рассматриваются уравнения для главной составляющей прилива. В этих уравнениях присутствуют члены с $H_2$ и $Q_2$, которые выражают влияние обергармоники на главную составляющую.

Далее мы находим первое приближенное решение для $H_1$ и $Q_1$ в (6.20) и (6.21), пренебрегая членами, обусловленными обергармоникой, и членом с коэффициентом $r_2$. Это значит, что мы сначала получаем распространение главной составляющей приливной волны с помощью уравнений (4.44) и (4.45) разд. 4.3. После этого мы переходим к уравнениям (6.22) и (6.23) для обергармоники и подставляем в эти уравнения вместо $H_1$ и $Q_1$ полученные выше приближенные величины. Следовательно, уравнениями, подлежащими решению, будут (6.23) и

$$\frac{dH_2}{dx}+(2im_0\omega+r_0k_{21}|Q_1|+r_1k_{11}Q_{-1}H_1)Q_2-2i\omega dQ_0H_2+$$

$$+r_0k_{20}Q_1^2+\{i\omega(m_1-d)+r_1k_{10}|Q_1|\}H_1Q_1+r_2k_{00}|Q_1|^2H_1^2=0, \tag{6.24}$$

если мы пренебрежем членами второго порядка.

В этих уравнениях все члены с $H_1$ и $Q_1$ известны; таким образом, это два линейных неоднородных уравнения.

Теперь мы можем вернуться к уравнениям (6.20) и (6.21) для главной составляющей, где члены, содержащие $H_2$ и $Q_2$, теперь также известны. Средние величины $|Q_1|$ и $iH_{-1}Q_1+c.c.=$ $=2|H_1||Q_1|\sin(\arg Q_1-\arg H_1)$ известны из первого приближенного решения. Для (6.20) получаем линейное уравнение

$$\underline{\frac{dH_1}{dx}}+\underline{(i\omega m_0+r_0k_{10}|Q_1|)Q_1}+\underline{(r_1k_{00}|Q_1|^2-i\omega dQ_0)H_1}+$$

$$+\Big[i\omega(2m_1+d)H_{-1}+r_0k_{11}Q_{-1}+r_1k_{21}|Q_1|H_{-1}+$$

$$+ r_2k_{12}\frac{Q^3_{-1}}{|Q_1|^2}H_1^2\Big]Q_2 + r_0k_{13}\frac{|Q_2|^2}{|Q_1|}Q_1 + r_1k_{20}H_{-1}Q_1^2 +$$

$$+ r_2k_{10}|Q_1|Q_{-1}H_1^2 + r_1k_{01}H_1\operatorname{Re}\left(\frac{Q_1^2Q_{-2}}{|Q_1|}\right) + r_1k_{02}|Q_2|^2H_1 +$$

$$+ r_0k_{12}\frac{Q_1^3Q_{-2}}{|Q_1|^2} + r_1k_{22}\frac{Q_1^4Q_{-2}}{|Q_1|^3}H_{-1} + r_2k_{11}H_1^2Q_1Q_{-2} +$$

$$+ r_2k_{13}\frac{|Q_2|^2}{|Q_1|}Q_{-1}H_1^2 = 0, \qquad (6.25)$$

если пренебречь членами третьего порядка. Неподчеркнутые члены являются членами второго порядка. Они известны из первых приближенных решений, рассмотренных выше. Решив уравнения (6.21) и (6.25) относительно $H_1$ и $Q_1$, получаем более точные значения для этих функций. Их можно ввести в уравнения (6.23) и (6.24) для $H_2$ и $Q_2$, а также, если есть необходимость, можно включить члены, которыми заведомо пренебрежено в (6.24), например члены

$$r_2k_{01}H_1^2\operatorname{Re}\frac{Q_1^2Q_{-2}}{|Q_1|} + r_0k_{22}\frac{Q_1^4Q_{-2}}{|Q_1|^3} + r_1k_{12}H_1\frac{Q_1^3Q_{-2}}{|Q_1|^2}.$$

Значения $H_2$ и $Q_2$, полученные в результате решения улучшенных уравнений, можно подставить в коэффициенты и члены второго порядка в (6.21) и (6.25), что даст нам еще более точные значения $H_1$ и $Q_1$.

Так, используя последовательно все более точные решения, мы находим окончательное решение для $H_1$, $Q_1$, $H_2$ и $Q_2$. Наконец, можно получить и распределение среднего уровня из (6.19), подставляя соответствующие значения для главной составляющей прилива и обергармоники. Наиболее важными членами этого уравнения являются

$$\frac{da_0}{dx} + I + r_0k_{00}|Q_1|^2 + r_0k_{02}|Q_2|^2 + r_0k_{01}\operatorname{Re}\frac{Q_1^2Q_{-2}}{|Q_1|} +$$

$$+ 2r_1k_{10}|Q_1|\operatorname{Re}Q_{-1}H_1 -$$

$$- 2\omega(m_1 + d)|H_1||Q_1|\sin(\arg Q_1 - \arg H_1) = 0. \qquad (6.26)$$

Решения линейных однородных уравнений находятся обычным путем, изложенным в разд. 5.2 применительно к уравнениям главной составляющей прилива. Однако уравнения (6.20)—(6.23) фактически не являются однородными. Известно, что решение таких уравнений представляет собой сумму общего решения однородной части (линейной для участка реки) и частного решения полного неоднородного уравнения. Частное решение находим следующим образом.

Решение однородных частей уравнений (6.21) и (6.25) или (6.23) и (6.24) имеет вид

$$H_i = c_{i1} e^{k_{i1} x} + c_{i2} e^{k_{i2} x},$$

$$Q_i = d_{i1} k_{i1} e^{k_{i1} x} + d_{i2} k_{i2} e^{k_{i2} x} \tag{6.27}$$

($i$ равно 1 или 2), где $k_{i1}$ и $k_{i2}$ определяются как корни квадратного уравнения, аналогичного уравнению (5.22), при $i=1$ и $i=2$ соответственно. Эти квадратные уравнения получаются в результате подстановки (6.27) в однородную часть соответствующего дифференциального уравнения, правая часть которого при этом полагается равной нулю.

Частное решение неоднородных уравнений, например уравнений (6.23) и (6.24), находим следующим образом. Соответствующие (6.27) выражения для $H_1$ и $Q_1$ надо подставить в множители $H_1Q_1$, $Q_1^2$ и $H_1^2$ в уравнениях (6.23) и (6.24). Тогда (6.24) становится линейным уравнением относительно $H_2$ и $Q_2$ и члены без $H_2$ и $Q_2$ имеют вид:

$$Pe^{2k_{11}x} + Qe^{2k_{12}x} + Re^{(k_{11}+k_{12})x},$$

где $P$, $Q$ и $R$ — функции коэффициентов правой части (неоднородных членов). Такое же соотношение выполняется для (6.23). Тогда частное решение неоднородного уравнения для $H_2$ и $Q_2$ легко находится, если положить

$$H_2 = d_1 e^{2k_{11}x} + d_2 e^{2k_{12}x} + d_3 e^{(k_{11}+k_{12})x}.$$

Для $Q_2$ выполняется аналогичное соотношение с коэффициентами $e_1$, $e_2$ и $e_3$.

После подстановки в уравнения (6.23) и (6.24) получаем значения этих коэффициентов. Общее решение для $H_2$ или $Q_2$ имеет вид

$$H_2 = c_{21} e^{k_{21}x} + c_{22} e^{k_{22}x} + d_1 e^{2k_{11}x} + d_2 e^{2k_{12}x} + d_3 e^{(k_{11}+k_{12})x}.$$

Постоянные интегрирования $c_{21}$ и $c_{22}$, присутствующие в общем решении, определяются из граничных условий. Таким образом, в устье реки может быть задана величина $H_2$, а в верхнем течении, например, $Q_2=0$ или какое-то другое условие.

Аналогичный метод надо применить и для нахождения $H_1$ и $Q_1$ из уравнений (6.21) и (6.25).

Вычислительные операции по изложенной методике очень трудоемки. Поскольку при выводе приливных уравнений допускались различные приближения, то необязательно решать эти уравнения аналитическим методом. Поэтому на практике часто применяют численный метод, который мы рассмотрим в следующем разделе.

## 7. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРИЛИВНЫХ УРАВНЕНИЙ

В предыдущем разделе было показано, что требуется решить линейные уравнения вида

$$dH_i/dx + A_i H_i + B_i Q_i + C_i = 0, \tag{7.1}$$

$$dQ_i/dx + D_i Q_i + E_i H_i + F_i = 0, \tag{7.2}$$

($i$ равно 1 или 2).

Коэффициенты $A_i - F_i$ зависят от размеров поперечного сечения реки, а также от $|Q_1|$ и $H_j$, $Q_j (j \neq i)$, включая и сопряженные комплексные величины, значения которых оценены с помощью предыдущих вычислений.

На практике длина $l_n$ каждого участка реки выбирается так, чтобы ширина и глубина не сильно отличались от своих средних величин, а также, чтобы можно было использовать в качестве средних величин следующие выражения:

$$\frac{1}{2}(|Q_{1,n}| + |Q_{1,n-1}|); \qquad \frac{1}{2}(H_{j,n} + H_{j,n-1});$$

$$\frac{1}{2}(Q_{j,n} + Q_{j,n-1}),$$

где индекс $n$ означает конец $n$-го участка, а $n-1$ — его начало.

Пусть $A_{i,n}$, $B_{i,n}$ и т. д. — коэффициенты на $n$-м участке. Длина участка $l_n$ выбирается достаточно малой, чтобы можно было записать

$$H_i = \frac{1}{2}(H_{i,n} + H_{i,n-1}); \qquad Q_i = \frac{1}{2}(Q_{i,n} + Q_{i,n-1});$$

$$\frac{dH_i}{dx} = (H_{i,n} - H_{i,n-1})\, l_n^{-1}; \qquad \frac{dQ_i}{dx} = (Q_{i,n} - Q_{i,n-1})\, l_n^{-1}. \tag{7.3}$$

Вводя эти приближенные выражения в дифференциальные уравнения, получаем следующие разностные уравнения:

$$H_{i,n} = H_{i,n-1} -$$
$$- \frac{1}{2}\{A_{i\,n}(H_{i,n} + H_{i,n-1}) + B_{i,n}(Q_{i,n} + Q_{i,n-1}) + 2C_{i,n}\}\, l_n,$$

$$Q_{i,n} = Q_{i,n-1} -$$
$$- \frac{1}{2}\{D_{i,n}(Q_{i,n} + Q_{i,n-1}) + E_{i,n}(H_{i,n} + H_{i,n-1}) + 2F_{i,n}\}\, l_n.$$

Отсюда можно найти величины $H_{i,n}$ и $Q_{i,n}$. Получаем

$$H_{i,n} = \{[4 - 2(A_{i,n} - D_{i,n})\, l_n - (A_{i,n} D_{i,n} - B_{i,n} E_{i,n})\, l_n^2]\, H_{i,n-1} -$$
$$- 4B_{i,n} l_n Q_{i,n-1} - 4C_{i,n} l_n - 2(C_{i,n} D_{i,n} - B_{i,n} F_{i,n})\, l_n^2\} \times$$
$$\times \{4 + 2(A_{i,n} + D_{i,n})\, l_n + (A_{i,n} D_{i,n} - B_{i,n} E_{i,n})\, l_n^2\}^{-1}, \tag{7.4}$$

$$Q_{i,n}=\{[4-2(D_{i,n}-A_{i,n})l_n-(A_{i,n}D_{i,n}-B_{i,n}E_{i,n})l_n^2]\,Q_{i,n-1}-$$
$$-4E_{i,n}l_nH_{i,n-1}-4F_{i,n}l_n-2(A_{i,n}F_{i,n}-C_{i,n}E_{i,n})l_n^2\}\times$$
$$\times\{4+2(A_{i,n}+D_{i,n})l_n+(A_{i,n}D_{i,n}-B_{i,n}E_{i,n})l_n^2\}^{-1}. \qquad (7.5)$$

С помощью этих уравнений величины $H_{i,p}$ и $Q_{i,p}$ на конце $p$-того участка могут быть выражены через величины $H_{i,0}$, $Q_{i,0}$ в начале первого участка путем исключения $H$ и $Q$ на промежуточных участках. Это соотношение будет линейным относительно $H$ и $Q$. Если конец $p$-того сечения совпадает с концом канала, то можно рассчитать неизвестные здесь до сих пор величины $H$ и $Q$ и, кроме того, найти $H$ и $Q$ вдоль всей реки на краях выбранных участков.

Этот метод можно применять также к речной системе, где имеет место слияние отдельных рек. В таких точках будет выполняться

$$h(x_p^{(1)},\ t)=h(x_p^{(3)},\ t)=h(x_p^{(3)},\ t)=\ldots,$$

если $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, $x^{(3)}$ и т. д. — координатные оси, направленные вдоль различных речных рукавов, а $x_p^{(1)}$ и т. д. означает координату точки слияния. Кроме того, в соответствии с (6.1) главы 1 будет

$$Q(x_p^{(1)},\ t)+Q(x_p^{(2)},\ t)+Q(x_p^{(3)},\ t)+\ldots=0.$$

Тогда, используя комплексные функции, мы можем записать для постоянных во времени членов

$$a_0(x_p^{(1)})=a_0(x_p^{(2)})=\ldots; \qquad Q_0^{(1)}+Q_0^{(2)}+Q_0^{(3)}+\ldots=0, \qquad (7.6)$$

а для приливных компонент ($i=1$ или $i=2$)

$$H_i(x_p^{(1)})=H_i(x_p^{(2)})=\ldots;$$
$$Q_i(x_p^{(1)})+Q_i(x_p^{(2)})+\ldots=0. \qquad (7.7)$$

Направления к точке слияния считаются положительными направлениями осей $x$ в каждом канале. В противном случае в (7.6) и (7.7) надо ввести отрицательные знаки.

Уравнения (7.4)—(7.7) вместе с граничными условиями дают достаточное количество уравнений для того, чтобы определить приливные характеристики.

## 8. РАЗЛОЖЕНИЕ ЧЛЕНА $|Q|Q$ С ПОМОЩЬЮ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА

В предыдущих разделах описано разложение члена $|Q|Q$ в ряд Фурье, когда $Q$ представляет собой сумму гармонических функций. Если знак $Q$ изменяется в течение приливного цикла, то возникают трудности при определении корней уравнения, соответствующего такой сумме (разд. 6.1).

Излагаемый ниже метод [106j] разложения в ряд Фурье члена $|Q|Q$ является более общим. Он применим и к предыдущим случаям.

Пусть $Q_p$ — наибольшая положительная величина $Q$ за приливной период, а $-Q_q$, где $Q_q > 0$, — наибольшая отрицательная величина. Кроме того, считаем, что $Q$ — периодическая непрерывная функция, хорошо воспроизводимая рядом Фурье. Опре-

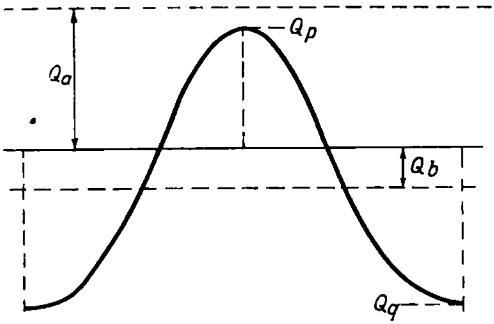



Рис. 2.9.

делим следующие величины (см. рис. 2.9; заметим, что на этом рисунке минимум $Q_q$ отрицателен):

$$Q_a = \frac{1}{2}(Q_p + Q_q); \quad Q_b = \frac{1}{2}(Q_p - Q_q); \tag{8.1}$$

$$p = Q_b Q_a^{-1}; \quad x = (Q - Q_b)\, Q_a^{-1} = Q Q_a^{-1} - p. \tag{8.2}$$

Тогда можно записать

$$|Q|\,Q = Q_a^2\,|p + x|\,(p + x). \tag{8.3}$$

В силу того что

$$-1 \leqslant p \leqslant 1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

можно положить

$$p = \cos\alpha; \quad x = \cos\vartheta. \tag{8.4}$$

Если $x = 1$, то $Q = Q_p$, если $x = -1$, то $Q = -Q_q$ и $\vartheta$, таким образом, меняется от 0 до $+\pi$. Если $Q_p > Q_q$ и $Q_b > 0$, то $\alpha$ будет углом, лежащим между 0 и $\pi/2$.

При $Q_p < Q_q$ $\alpha$ будет лежать между $\pi/2$ и $\pi$. Отсюда мы можем записать

$$|Q|\,Q = Q_a^2 y, \tag{8.5}$$

где $y$ — четная функция от $\vartheta$, т. е.

$$y = |\cos\alpha + \cos\vartheta|(\cos\alpha + \cos\vartheta). \tag{8.6}$$

Далее мы можем разложить $y$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi, +\pi)$:

$$y = a_0 + a_1\cos\vartheta + \ldots + a_n\cos n\vartheta\ldots, \tag{8.7}$$

где коэффициенты будут определяться следующими выражениями:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\left[-\int_{-\pi}^{-\pi+\alpha} + \int_{-\pi+\alpha}^{\pi-\alpha} - \int_{\pi-\alpha}^{\pi}\right](\cos\alpha + \cos\vartheta)^2 d\vartheta, \tag{8.8}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[-\int_{-\pi}^{-\pi+\alpha} + \int_{-\pi+\alpha}^{\pi-\alpha} - \int_{\pi-\alpha}^{\pi}\right](\cos\alpha + \cos\vartheta)^2\cos n\vartheta\, d\vartheta. \tag{8.9}$$

Оценка этих выражений дает

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\left[(2+\cos 2\alpha)\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) + \frac{3}{2}\sin 2\alpha\right], \\ a_1 &= \frac{1}{\pi}\left[4\cos\alpha\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) + 3\sin\alpha + \frac{1}{3}\sin 3\alpha\right], \\ a_2 &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\pi - \alpha + \frac{2}{3}\sin 2\alpha - \frac{1}{12}\sin 4\alpha\right]. \end{aligned} \tag{8.10}$$

И в общем виде для $n \geqslant 3$

$$a_n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}\left(\frac{\sin(n-2)\alpha}{(n-1)(n-2)} - \frac{2\sin n\alpha}{(n+1)(n-1)} + \frac{\sin(n+2)\alpha}{(n+2)(n+1)}\right). \tag{8.11}$$

Этот ряд Фурье равномерно сходится в интервале $(-\pi, +\pi)$.

*Частные случаи*

1. Сначала найдем результат разложения члена $|Q|Q$ в простейшем случае гармонического прилива. Оказывается, что это разложение аналогично рассмотренному в разд. 4.2.

Поскольку максимальное положительное и отрицательное отклонения равны, то $Q_a = Q_p = Q_q = q_1$, $Q_b = 0$, и поскольку $p = 0$, то $\alpha = \pi/2$.

Если

$$Q = q_1\cos(\omega t + \beta) \tag{8.12}$$

представляет собой кривую расхода при гармоническом приливе, то $x = \cos(\omega t + \beta)$, и, следовательно,

$$\vartheta = \omega t + \beta.$$

Величина $q_1^2 y$, где $y$ определяется выражением (8.7), представляет собой разложение в ряд Фурье функции $|Q|Q$ для чистого гармонического прилива (8.12).

Тогда оказывается, что

$$a_0=0; \qquad a_1=\frac{8}{3\pi}; \quad a_2=0; \quad a_3=\frac{8}{15\pi};$$

$$a_{2n+1}=(-1)^{n+1}\frac{8}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)\pi}. \tag{8.13}$$

Величина для $a_1$ уже была получена в разд. 4.2 (ср. (4.31) и (4.33), где, правда, рассматривались комплексные функции). Другие множители связаны с возникновением обергармоник.

2. Аналогично можно найти разложение члена, учитывающего сопротивление, в простой гармонической волне с речным стоком, где

$$Q=Q_0+q_1\cos(\omega t+\beta). \tag{8.14}$$

Отсюда

$$Q_p=Q_0+q_1, \quad Q_q=q_1-Q_0,$$

так что

$$Q_a=q_1, \quad Q_b=Q_0,$$

$$p=Q_0/q_1=\cos\alpha, \quad x=\cos(\omega t+\beta).$$

Очевидно, что

$$\vartheta=\omega t+\beta.$$

Разложение в ряд Фурье функции $|Q|Q$ определяется, следовательно, величиной $q_1^2 y$, где $y$ определяется выражениями (8.7), (8.10) и (8.11). Величины $a_0$ и $a_1$ были получены в разд. 4.2 в формулах (4.30) и (4.32). Тогда $4a_0=k_{00}$ и $2a_1=k_{10}$.

Теперь вернемся к общему случаю, когда $Q$ является периодической функцией, которую можно представить рядом Фурье.

Разложение (8.7) можно представить в виде функции от $Q$ следующим образом.

Сначала множители $\cos n\vartheta$ заменяются полиномами от величины $x=\cos\vartheta$; при этом используют известные полиномы (так называемые полиномы Чебышева), приведенные ниже для $n=1, \ldots, 3$:

$$\cos\vartheta=x; \quad \cos 2\vartheta=2x^2-1; \quad \cos 3\vartheta=4x^3-3x. \tag{8.15}$$

Эти функции обычно обозначают $T_n(x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Тогда $T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$. Вообще говоря, они определяются с помощью выражения $T_{n+1}(x)-2xT_n(x)+T_{n-1}(x)=0$ (см. [89]).

На практике рассматривается конечное число членов. Достаточно точное разложение можно получить, если в (8.7) удержать члены с $n=1$, $n=2$ и $n=3$.

Подстановка выражений (8.15) для $\cos\vartheta$, $\cos 2\vartheta$ и $\cos 3\vartheta$ в (8.7) и использование (8.10) дают следующее выражение для $\pi y$:

$$\pi y = c_{03} + c_{13}x + c_{23}x^2 + c_{33}x^3, \tag{8.16}$$

где

$$\begin{aligned} c_{03} &= \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)(1 + \cos 2\alpha) + \frac{5}{6}\sin 2\alpha + \frac{1}{12}\sin 4\alpha, \\ c_{13} &= (2\pi - 4\alpha)\cos\alpha + 2\sin\alpha + \frac{5}{6}\sin 3\alpha - \frac{1}{10}\sin 5\alpha, \\ c_{23} &= (\pi - 2\alpha) + \frac{4}{3}\sin 2\alpha - \frac{1}{6}\sin 4\alpha, \\ c_{33} &= \frac{4}{3}\sin\alpha - \frac{2}{3}\sin 3\alpha + \frac{2}{15}\sin 5\alpha. \end{aligned} \tag{8.17}$$

Следует указать, что значения коэффициентов $c_{kn}$ сильно изменяются с каждым новым значением $n$.

Наконец, мы вводим в (8.16) функцию $Q$ путем подстановки (см. (8.2)):

$$x = \frac{Q}{Q_a} - \cos\alpha. \tag{8.18}$$

Для вычисления величин $x^k$ ($k=2, 3, \ldots$) сначала с помощью простых тригонометрических формул выражаем различные степени величины $\cos\alpha$:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\alpha; \qquad \cos^3\alpha = \frac{3}{4}\cos\alpha + \frac{1}{4}\cos 3\alpha.$$

Тогда, если ввести также выражения для $c_{03}$—$c_{33}$, приведенные в (8.17), то найдем, что

$$\pi y = d_{03} + d_{13}\frac{Q}{Q_a} + d_{23}\left(\frac{Q}{Q_a}\right)^2 + d_{33}\left(\frac{Q}{Q_a}\right)^3, \tag{8.19}$$

где

$$\begin{aligned} d_{03} &= -\frac{7}{120}\sin 2\alpha + \frac{1}{24}\sin 6\alpha - \frac{1}{60}\sin 8\alpha, \\ d_{13} &= \frac{7}{6}\sin\alpha - \frac{7}{30}\sin 3\alpha - \frac{7}{30}\sin 5\alpha + \frac{1}{10}\sin 7\alpha, \\ d_{23} &= \pi - 2\alpha + \frac{1}{3}\sin 2\alpha + \frac{19}{30}\sin 4\alpha - \frac{1}{5}\sin 6\alpha, \\ d_{33} &= \frac{4}{3}\sin\alpha - \frac{2}{3}\sin 3\alpha + \frac{2}{15}\sin 5\alpha, \end{aligned} \tag{8.20}$$

так что в соответствии с (8.5) получаем

$$|Q|Q=\frac{1}{\pi}\left(d_{03}Q_a^2+d_{13}Q_aQ+d_{23}Q^2+d_{33}Q_a^{-1}Q^3\right). \qquad (8.21)$$

Оказывается, что величина $d_{03}$ мала по сравнению с другими $d_{k3}$, так что этим членом обычно можно пренебречь.

*Примеры.*

1. Пусть $Q_q=0$ будет минимальной величиной $Q$, так что всюду $Q\geqslant 0$. Тогда из (8.1), (8.2) и (8.4) получаем, что $p=+1$ и $\alpha=0$. Из (8.20) следует, что $d_{03}=d_{13}=d_{33}=0$, а $d_{23}=\pi$. Поэтому $y$ упрощается до

$$y=\left(\frac{Q}{Q_a}\right)^2. \qquad (8.22)$$

Сопоставление с (8.5) показывает, что $|Q|Q=Q^2$, что, впрочем, и так очевидно, так как всюду $Q\geqslant 0$.

Если $\alpha=\pi$, то находим, что $y=-Q^2/Q_a^2$. Тогда везде $Q\leqslant 0$. Это соответствует случаю, когда в течение всего приливного периода имеет место отливное течение (выше предела действия приливного течения).

2. Пусть $-Q_q$ будет минимальным значением $Q$ и пусть оно будет мало по сравнению с максимальной величиной $Q_p$, так что разница между $|p|$ и единицей невелика и, следовательно, $\alpha$ мало отличается от нуля. Если мы подставим приближенное соотношение

$$\sin\alpha=\alpha-\frac{\alpha^3}{6}+\frac{\alpha^5}{120}$$

в (8.20), то мы получим для $d_{k3}$ $(k=0, 1, 2, 3)$

$$d_{03}=-\frac{28}{15}\alpha^5; \qquad d_{13}=\frac{112}{15}\alpha^5; \qquad d_{23}=\pi-\frac{112}{15}\alpha^5;$$

$$d_{33}=\frac{32}{15}\alpha^5. \qquad (8.23)$$

Следовательно, для малых величин $\alpha$, что соответствует малым величинам $-Q_q$, оказывается, что значения $d_{kn}$ приближаются к нулю или к $\pi$ (при $k=2$), как пятая степень $\alpha$. В результате мы можем считать, что для малых $\alpha$ можно положить $|Q|Q=Q^2$. Такой же вывод получается, если изменить $\alpha$ на $\pi-\alpha$. Таким образом, в окрестностях предела действия приливного течения также можно положить $|Q|Q=-Q^2$. Этот факт чрезвычайно важен с практической точки зрения, так как точное место предела действия приливного течения определить трудно.

3. Пусть максимальное положительное и отрицательное отклонения величины $Q$ равны друг другу. Тогда $Q_a = Q_p = Q_q$ и $Q_b = 0$, так что $p = 0$ и $\alpha = \pi/2$. Тогда

$$d_{03} = d_{23} = 0$$

и

$$d_{13} = \frac{16}{15}, \qquad d_{33} = \frac{32}{15}.$$

Таким образом, мы получаем следующее разложение:

$$\pi y = \frac{16}{15}\left[\frac{Q}{Q_a} + 2\left(\frac{Q}{Q_a}\right)^3\right]. \tag{8.24}$$

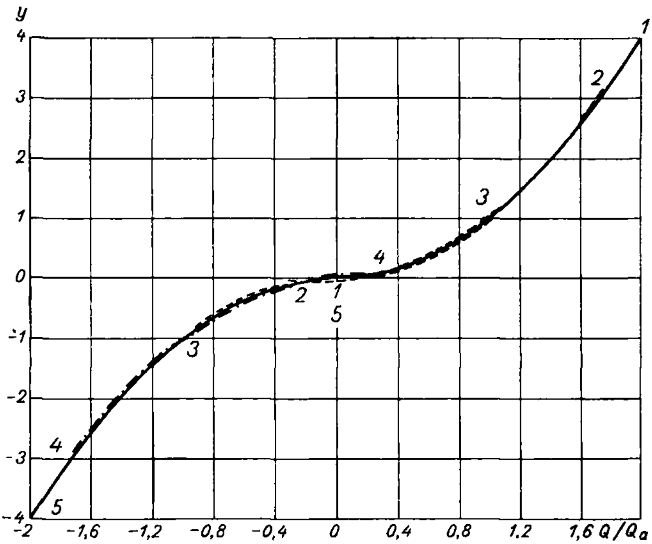


Рис. 2.10.

Поскольку в этом случае $x = Q/Q_a$, то выполняется соотношение $d_{kn} = c_{kn}$.

Если $Q = Q_a$, а так бывает при определенных значениях $t$, то величина $\pi y$ из (8.24) становится равной 3,20.

Случай 1 (стр. 117) является частным случаем примера 3. Подставляя (8.12) в (8.24), мы снова получаем $(8/3\pi) q_1 Q$, т. е. величину, уже полученную в (8.13).

На рис. 2.10 показана функция $y$ (вертикальная ось), определяемая согласно (8.19) в зависимости от величины $Q/Q_a$ ($-2 < Q/Q_a < 2$ на горизонтальной оси) для $\alpha = 0$, $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$ и $\pi$. Соответствующие этим значениям $\alpha$ интервалы обозначены через (1)—(1), (2)—(2) и т. д.

Очевидно, что для определенного значения величины $\alpha$ формула (8.19) справедлива в интервале

$$-Q_q < Q < Q_p,$$

где $Q_p$ и $-Q_q$ — максимальные положительное и отрицательное отклонения соответственно (величина $-Q_q$ отрицательна).

Если $\alpha$, а следовательно, $p = \cos\alpha$ известны, то из (8.1), (8.2) и (8.4) следует, что $Q_q/Q_p$ удовлетворяет формуле

$$\frac{Q_q}{Q_p} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}.$$

Тогда экстремальные значения величины $Q/Q_a$, т. е. $Q_p/Q_a$ и $-Q_q/Q_a$, соответственно будут определяться выражениями

$$\frac{Q_p}{Q_a} = \frac{2Q_p}{Q_p + Q_q} = 1 + \cos\alpha; \qquad -\frac{Q_q}{Q_a} = -1 + \cos\alpha. \tag{8.25}$$

Следовательно, если $\alpha = 0$, то $Q/Q_a$ определяется в интервале $(0, 2)$, а если $\alpha = \pi$, то в интервале $(-2, 0)$. При $0 < \alpha < \pi$ величина $Q/Q_a$ определяется в интервале $(-1 + \cos\alpha,\ 1 + \cos\alpha)$.

Из рис. 2.10 видно, что кривые, определяемые соотношением (8.19), очень мало отличаются от сплошной кривой, определяемой выражением

$$y = \frac{Q^2}{Q_a^2} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \frac{Q}{Q_a} \leqslant 2; \qquad y = -\left(\frac{Q^2}{Q_a^2}\right) \quad \text{при} \quad -2 \leqslant \frac{Q}{Q_a} \leqslant 0,$$

в интервале $(1 - \cos\alpha,\ 1 + \cos\alpha)$.

Следовательно, формула (8.21) приближенно выражает функцию $|Q|Q$ с точностью, достаточной для практических целей.

Эту функцию можно приближенно представить и с помощью других методов, например с помощью полиномов Лежандра (см. Шёнфельд [123] или Дронкерс и Шёнфельд [34]). Однако изложенный выше метод дает наиболее обозримые формулы.

Для практических целей можно рассматривать любую периодическую функцию $Q$, например, в правую часть уравнения (8.21) можно подставить

$$Q = Q_0 + Q_1 + Q_2 + Q_3,$$

где $Q_1$, $Q_2$ и $Q_3$ — это первая, вторая и третья компоненты ряда Фурье, представляющего $Q$. Тогда получаем разложение $|Q|Q$ в ряд Фурье. Однако для приливных расчетов надо оценить угол $\alpha$ и величину $Q_a$; эти величины должны быть уточнены в ходе расчета. Можно также рассмотреть комбинацию лунной волны $M_2$ с солнечной волной $S_2$ и т. д. Эти вычисления очень трудоемки, так как необходимо также осуществить разложение коэффициентов приливных уравнений.

Наконец, следует указать, что очень точное приближение для фрикционного члена, данное в этом разделе, обычно не является необходимым, так как закон сопротивления Шези является приближенным. Коэффициент $C$, который предполагается независимым от времени при использовании гармонического метода, подвержен даже при самых благоприятных обстоятельствах небольшим изменениям. Поэтому на практике при оценке величин $\alpha$ и $Q$ допускаются некоторые отклонения.

В этой и последующих главах формула сопротивления Маннинга не употребляется, потому что ее применение не дает улучшения результатов по сравнению с формулой Шези.

*ГЛАВА 3*

# МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК

Хорошо известно, что дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных делятся на три типа: гиперболические, эллиптические и параболические. Эта классификация основана на существовании в плоскости $x$, $t$ так называемых характеристических кривых. Дифференциальные уравнения в частных производных являются уравнениями гиперболического типа, если можно получить две системы характеристических кривых, определяемых посредством соотношений $f_1(x, t)=c_1$ и $f_2(x, t)=c_2$, где $c_1$ и $c_2$ — параметры. В уравнениях гиперболического типа фундаментальные свойства решений наиболее просто можно изучить, привлекая характеристическое преобразование $\xi=f_1(x, t)$ и $\eta=f_2(x, t)$. Тогда характеристические кривые в плоскости $\xi$, $\eta$ будут описываться формулами вида $\xi=c_1$ и $\eta=c_2$. Особый интерес представляют те свойства, которые определяют область зависимости решений от граничных условий, когда последние заданы для конкретного промежутка времени в точке $x_0$ или вдоль сечения реки в момент $t_0$ (последние называются начальными условиями). С помощью метода характеристик можно получить представление об основных физических особенностях распространения волн и разрывов в движении. Поэтому теория характеристик лежит в основе изучения движения бора в реке, волн, возникающих при закрытии затворов плотины, и т. д.

В разд. 1 метод характеристик применяется к простейшему виду приливных уравнений. В этих уравнениях коэффициенты считаются постоянными, а сила трения отсутствует. В последующих разделах получены характеристические кривые и характеристические приливные уравнения и обсуждаются некоторые основные свойства решений. Найти точные решения сложных характеристических приливных уравнений не представляется возможным. Приближенные решения могут быть найдены с помощью метода последовательных приближений; пример такого решения приводится. Кроме того, используя метод характеристик, можно получить графическое представление движения приливного потока. Графические методы успешно применялись при решении приливных задач методом характеристик, а также при исследовании распространения приливной волны. В конце главы подробно обсуждается теория бора и вопросы приближенного представления его распространения с помощью математических моделей. Распространение возмущений в спокойной воде рассматривается достаточно подробно в книге Стокера [131].

Шёнфельд [123] широко использует метод характеристик при изучении распространения длинных волн и приводит специальные приложения, которые не упоминаются в этой главе, например, применение метода характеристик при исследовании вопроса об образовании «хвоста» длинной волны. Изложение настоящей главы во многом отличается от изложения, принятого Шёнфельдом и Стокером.

## 1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ДЛИННЫХ ВОЛН В РЕКЕ ОДНОРОДНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ ОТСУТСТВИИ СИЛЫ ТРЕНИЯ

### 1.1. Уравнения и краевые условия

В простом случае, когда коэффициенты в уравнениях движения и неразрывности являются постоянными, а член Бернулли и трение пренебрежимо малы, дифференциальные уравнения, описывающие движение воды, можно записать в виде

$$gA_0 \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial t} = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b_0 \frac{\partial h}{\partial t} = 0, \tag{1.2}$$

где $Q$ — общий перенос через сечение площадью $A_0$, а $h$ — высота поверхности воды над исходной плоскостью, которая, по предположению, совпадает с плоскостью среднего уровня. Изменение $h$ мало́ по сравнению со средней глубиной $a_0$, поэтому в течение приливного периода, а также в пределах всего сечения $A_0$ глубина может считаться постоянной. Для практических приложений эти допущения обычно хорошо оправдываются.

Первое ознакомление с методом характеристик при исследовании движения, обусловленного приливом, наиболее целесообразно начать с изучения указанной простой задачи. Это поможет понять более сложные задачи, в которых нужно учитывать влияние сил трения, и, кроме того, позволит получить представление о проблемах численного решения приливных задач (глава IV). Решение этой приливной задачи имеет некоторую аналогию с решением задачи об упругих колебаниях тонкого прямого стержня. Оба явления описываются дифференциальными уравнениями в частных производных типа (1.1) и (1.2). В случае колеблющегося стержня отклонение от состояния покоя и производная от отклонения во времени в момент $t=0$ известны. Далее, движение одного конца или обоих может считаться заданным. При таких начальных и граничных условиях эта задача аналогична следующей приливной задаче. Если в момент $t=0$ $h(x)$ и $Q(x)$ известны, то $(\partial Q/\partial x)_t=0$ также известно. Тогда из (1.2) находится $(\partial h/\partial t)_t=0$ и в результате оказывается, что начальные условия обеих задач аналогичны. Кроме того, если допустить, что при $x=0$ известно $h(0, t)$, а при $x=l$ известно $h(l, t)$, то при $t>0$ получаем соответствие с описанным выше движением на концах стержня.

## 1.2. Общее решение

Поскольку функции $h$ и $Q$ удовлетворяют дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - g\frac{A_0}{b_0}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, \tag{1.3}$$

то общее решение уравнений (1.1) и (1.2) известно:

$$h=\Phi\left(t-\frac{x}{c_0}\right)+\Psi\left(t+\frac{x}{c_0}\right), \tag{1.4}$$

$$Q=b_0c_0\left[\Phi\left(t-\frac{x}{c_0}\right)-\Psi\left(t+\frac{x}{c_0}\right)\right]; \tag{1.5}$$

здесь

$$c_0=\left(gA_0b_0^{-1}\right)^{1/2}, \tag{1.6}$$

а $\Phi$ и $\Psi$ — произвольные функции. То, что соотношения (1.4) и (1.5) являются решениями уравнений (1.1) и (1.2), может быть проверено подстановкой.

Из (1.4) и (1.5) следует, что функция $\Psi$ равна нулю, а значения $h$ и $Q$, обозначенные через $h_1$ и $Q_1$, остаются постоянными в том случае, когда $x$ и $t$ удовлетворяют условиям:

$$x=c_0(t-t_0), \quad t>t_0. \tag{1.7}$$

В плоскости $x$, $t$ это уравнение описывает прямую линию, проходящую через точку $(0, t_0)$. Следовательно, можно говорить о том, что $h_1$ и $Q_1$ остаются постоянными для точки жидкости, движущейся со скоростью $c_0$ в положительном направлении оси $x$. Подобные точки называются *волновыми точками*. Величины $h_1$ и $Q_1$ получаются из

$$h_1=\Phi(t_0) \quad \text{и} \quad Q_1=b_0c_0\Phi(t_0).$$

В двух различных точках жидкости для разных $t_0$ $h_1$ и $Q_1$ также могут быть различными. Таким образом, можно предположить, что распространение волны, определяемое $h_1$ и $Q_1$, происходит со скоростью $c_0$ в положительном направлении оси $x$. Такое движение называется положительной *прогрессивной волной*. Аналогично, если функция $\Phi$ равна нулю, соответствующие значения $h_2$ и $Q_2$, полученные из (1.4) и (1.5), описывают волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси $x$ со скоростью $-c_0$; $h_2$ и $Q_2$ остаются неизменными для точки волны, движущейся вдоль прямой линии в плоскости $x$, $t$,

$$x = -c_0(t - t_1), \quad t > t_1. \tag{1.8}$$

Следовательно, общее решение уравнений (1.1) и (1.2) представляется в виде двух волн, распространяющихся соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси $x$, причем в этом случае справедливы следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} h &= h_1 + h_2; & Q &= Q_1 + Q_2, \\ h_1 &= \Phi\left(t - \frac{x}{c_0}\right); & h_2 &= \Psi\left(t + \frac{x}{c_0}\right), \\ Q_1 &= b_0 c_0 \Phi\left(t - \frac{x}{c_0}\right); & Q_2 &= -b_0 c_0 \Psi\left(t + \frac{x}{c_0}\right). \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

Система линий в плоскости $x$, $t$, определяемая соотношениями (1.7) и (1.8), в которых $t_0$ и $t_1$ являются параметрами, называется системой характеристик приливных уравнений. Эти соотношения удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = \pm c_0, \tag{1.10}$$

где $c_0$ определена в (1.6). Если ни $\Phi$, ни $\Psi$ не равны нулю, то вдоль характеристик ((1.7) и (1.8))

$$b_0 c_0 h_1 - Q_1 = 0 \quad \text{и} \quad b_0 c_0 h_2 + Q_2 = 0,$$

а для $h$ и $Q$ выполяются соответственно следующие соотношения:

$$\begin{aligned} b_0 c_0 h + Q &= 2 b_0 c_0 \Phi(t_0), \\ b_0 c_0 h - Q &= 2 b_0 c_0 \Psi(t_0). \end{aligned} \tag{1.11}$$

### 1.3. Решение при наличии отражения волн

Распространяющаяся в положительном направлении волна, которая характеризуется $h_1$ и $Q_1$, может быть вызвана, например, приливным движением в устье реки, а волна, распространяющаяся в отрицательном направлении, — условиями в верховьях реки. Последнее утверждение станет понятным, если рассмотреть отражение от замкнутого конца канала ($x=x_0$). Условие $Q=0$ при $x=x_0$ может быть удовлетворено только тогда, когда вводятся функции $h_2(x, t)$ и $Q_2(x, t)$, определенные в (1.9), и функции $h_1(x, t)$ и $Q_1(x, t)$. В этом случае функция $\Psi$ определяется для всех значений $t$ выражением вида

$$\Psi\left(t+\frac{x_0}{c_0}\right)=\Phi\left(t-\frac{x_0}{c_0}\right),$$

так как тогда $Q=Q_1+Q_2=0$ при $x=x_0$.

Следовательно, определением $\Psi$ служит соотношение

$$\Psi\left(t+\frac{x}{c_0}\right)=\Phi\left(t+\frac{x}{c_0}-\frac{2x_0}{c_0}\right),$$

представляющее собой волну, которая распространяется от преграды. Этот вид отражения называется *полным отражением*, так как «приходящая» волна равна «отраженной» волне. В этом случае уровень воды определяется из

$$h(x, t)=\Phi\left(t-\frac{x}{c_0}\right)+\Phi\left(t+\frac{x}{c_0}-2\frac{x_0}{c_0}\right). \qquad (1.12)$$

При движении волны вдоль русла реки с изменяющимся сечением происходит *частичное отражение* волны, вызванное либо изменением глубины русла, либо изменением ее ширины, либо одновременным изменением обеих характеристик сечения. Изменение может носить локальный характер; оно может быть, например, обусловлено влиянием плотины. Частичное отражение волн также имеет место в районе слияния двух рек. В этом случае необходимо задать дополнительные условия, в частности, условие равенства уровней в рукавах реки, а также условие для расходов $Q$ (см. главу 1, разд. 6).

*Пример.* Рассмотрим распространение синусоидальной волны как частный случай распространения прогрессивной волны. Положительная синусоидальная волна, распространяющаяся вверх по потоку, описывается соотношением

$$h_1(x, t)=h_1'(0)\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{c_0}\right)+\alpha_1\right], \qquad (1.13)$$

а отрицательная синусоидальная волна — соотношением

$$h_2(x, t)=h_2'(0)\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{c_0}\right)+\alpha_2\right], \qquad (1.14)$$

где $h_1'(0)$ и $h_2'(0)$ — постоянные амплитуды, $\omega=2\pi/T$ — угловая скорость, $T$ — период, а $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — постоянные фазы. Длина каждой синусоидальной волны равна $2\pi c_0/\omega$.

При распространении волны вдоль реки длиной $l$, замкнутой с одного конца, имеем в соответствии с (1.12)

$$h(x, t) = h_1'(0) \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{c_0}\right) + \alpha_1\right] +$$
$$+ h_1'(0) \cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{c_0} - \frac{2l}{c_0}\right) + \alpha_1\right] =$$
$$= 2h_1'(0) \cos\left[\omega\left(t - \frac{l}{c_0}\right) + \alpha_1\right] \cos\frac{\omega}{c_0}(x - l).$$

В устье реки $h(0, t)$ равно

$$h(0, t) = 2h_1'(0) \cos\left[\omega\left(t - \frac{l}{c_0}\right) + \alpha_1\right] \cos\frac{\omega}{c_0} l.$$

Если

$$h(0, t) = h_1(0) \cos(\omega t + \alpha),$$

то $h_1'(0)$ и $\alpha_1$ определяются из

$$h_1'(0) = \frac{h_1(0)}{2\cos\frac{\omega}{c_0} l}, \qquad \alpha = \alpha_1 - \frac{l\omega}{c_0}.$$

Следовательно,

$$h(x, t) = h_1(0) \cos\left[\omega\left(t - \frac{l}{c_0}\right) + \alpha_1\right] \frac{\cos\frac{\omega}{c_0}(x - l)}{\cos\frac{\omega}{c_0} l}. \quad (1.15)$$

Тогда при $\alpha_1 = l\omega/c_0$ мы вновь приходим к формуле, аналогичной (1.33) в главе 2. Из этого примера следует, что амплитуды положительной и отрицательной прогрессивных синусоидальных волн равны между собой. Они составляют половину амплитуды синусоидальной волны в устье реки, если $l\omega/c_0 = k\pi$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

## 1.4. Решение при заданных начальных и граничных условиях

В предыдущем разделе граничные условия на закрытом конце реки считались заданными при любых $t$. Однако на практике зачастую они известны только при $t > t_0$. В этом случае возникает необходимость задания начального условия при $t = t_0$. Учитывая важность начальных и граничных условий при решении приливных задач, обсудим более подробно аналитическое решение уравнений (1.1) и (1.2).

Если закон сопротивления описывается линейной функцией, можно найти аналитическое решение поставленной задачи, однако оно будет значительно более сложным. Для общих нелинейных приливных уравнений аналитические решения обычно получить невозможно и поэтому приходится идти по пути отыскания численных решений.

Сейчас наша задача будет заключаться в определении функций $h$ и $Q$ при следующих граничных условиях. Пусть в двух точках $x=0$ и $x=l$ известны вертикальные колебания уровня при $t>0$ или в одной точке известно $h_2(t)$, а в другой — расход $Q_2(t)$. Кроме того, пусть известны значения $h_1(x)$ и $Q_1(x)$ для участка реки $0<x<l$ в момент $t=0$. Заметим, что задача при таких начальных и граничных условиях аналогична задаче, рассмотренной выше в разд. 1.1, и что определения $h_1$ и т. д. отличаются от определений этих функций, приведенных в разд. 1.2 и 1.3.

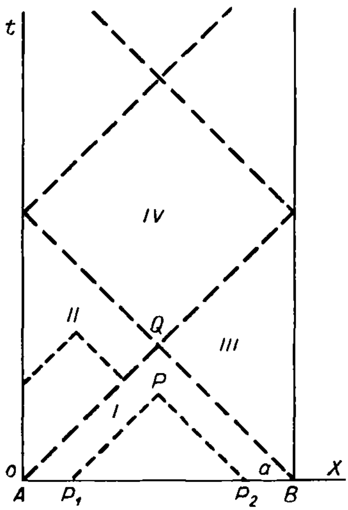



Рис. 3.1.

Далее будем предполагать, что граничные условия являются непрерывными функциями, так что их можно дифференцировать. Очевидно, что для непрерывных решений в угловых точках (0, 0) и ($l$, 0) всегда должны соблюдаться следующие условия: $h_1(x=0)=h_2(t=0)$ и $Q_1(x=l)=Q_2(t=0)$.

На рис. 3.1 представлена часть плоскости $x$, $t$, для которой будет получено решение. Прямые линии $AQ$ и $BQ$, описываемые соотношениями

$$x-c_0t=0 \quad \text{и} \quad x+c_0t=l,$$

определяют район $ABQ$, обозначенный цифрой $I$. В этом районе можно легко найти функции $\Phi$ и $\Psi$, определенные в (1.4) и (1.5). В (1.4) и (1.5) вместо аргументов $t-x/c_0$ и $t+x/c_0$ будем рассматривать аргументы $x-c_0t$ и $x+c_0t$. Такая замена не приведет к каким-либо различиям, изменениям в решении, и мы по-прежнему будем обозначать функции $\Phi$ и $\Psi$ теми же буквами.

Тогда

$$h_1(x)=\Phi(x)+\Psi(x), \qquad Q_1(x)=b_0c_0[\Phi(x)-\Psi(x)], \tag{1.16}$$

и поэтому

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}h_1(x)+\frac{Q_1(x)}{2b_0c_0}, \qquad \Psi(x)=\frac{1}{2}h_1(x)-\frac{Q_1(x)}{2b_0c_0}. \tag{1.17}$$

Следовательно,

$$h(x, t)=\frac{1}{2}[h_1(x-c_0t)+(b_0c_0)^{-1}Q_1(x-c_0t)]+$$
$$+\frac{1}{2}[h_1(x+c_0t)-(b_0c_0)^{-1}Q_1(x+c_0t)]. \tag{1.18}$$

$$Q(x,\ t)=\frac{1}{2}\left[b_0c_0h_1(x-c_0t)+Q_1(x-c_0t)\right]-$$
$$-\frac{1}{2}\left[b_0c_0h_1(x+c_0t)-Q_1(x+c_0t)\right]. \qquad (1.19)$$

Из (1.18) следует, что значение $h(x,\ t)$ в точке $x_P$, $t_P$ зависит только от начальных данных в $P_1$ и $P_2$ на оси $x$. Отрезок $P_1P_2$ отсекается характеристиками $x-c_0t=x_P-c_0t_P$ и $x+c_0t=$ $=x_P+c_0t_P$. Далее, значения $h(x,\ t)$ и $Q(x,\ t)$ в точке $Q$ зависят от величин $h$ и $Q$ в точках $A$ и $B$, тогда как их значения в частных районах $II$, $III$, $IV$, в общем, не определяются данными на $AB$. Поэтому необходимо добавить граничные условия на линиях $x=0$ и $x=1$.

Для линейных дифференциальных уравнений решение задачи при общем граничном условии в районе, указанном на рис. 3.1, представляет собой сумму, решений следующих трех задач:

1) $h(x,\ 0)=h_1(x)$; $Q(x,\ 0)=Q_1(x)$; $h(0,\ t)=0$; $Q(l,\ t)=0$;

2) $h(x,\ 0)=0$; $Q(x,\ 0)=0$; $h(0,\ t)=h_2(c_0t)$; $Q(l,\ t)=0$;

3) $h(x,\ 0)=0$; $Q(x,\ 0)=0$; $h(0,\ t)=0$; $Q(l,\ t)=Q_2(c_0t)$.

Легко найти решения этих задач для частных граничных условий.

**Первая задача.**

Уравнения (1.18) и (1.19) описывают решение в треугольнике $ABQ$. Для того чтобы получить решение во всем районе, заменим граничные условия начальными условиями на оси $x$ за пределами отрезка $0<x<1$. Тогда переменная $t$ заменится на $c_0t$.

Определим функции $h_1(x)$ и $Q_1(x)$ за пределами отрезка $(0,\ l)$ так, чтобы уравнения (1.18) и (1.19) представляли собой решение и в остальной части прямоугольника. Тогда при $x=0$ и $x=l$ для $t>0$ получаем

$$b_0c_0\{h_1(-c_0t)+h_1(c_0t)\}+\{Q_1(-c_0t)-Q_1(c_0t)\}=0, \qquad (1.20)$$
$$b_0c_0\{h_1(l-c_0t)-h_1(l+c_0t)\}+\{Q_1(l-c_0t)+Q_1(l+c_0t)\}=0. \qquad (1,21)$$

Из (1.20) и (1.21) можно определить значения $h_1(x)$ и $Q_1(x)$ для отрицательных $x$:

$$-h_1(-c_0t)=h_1(c_0t);\ \ Q_1(-c_0t)=Q_1(c_0t). \qquad (1.22)$$
$$h_1(l-c_0t)=h_1(l+c_0t);\ \ -Q_1(l-c_0t)=Q_1(l+c_0t), \qquad (1.23)$$

где $c_0t$ и $l-c_0t$ рассматриваются на отрезках $0\leqslant c_0t\leqslant l$ и и $0\leqslant l-c_0t\leqslant l$ соответственно.

Обобщая этот метод, находим, что $h_1(x)$ должно определяться для значений $x$, лежащих за пределами отрезка $(0, l)$, причем определяться так, чтобы удовлетворялись соотношения

$$h_1(x) = -h_1(-x); \quad h_1(x) = h_1(2l - x).$$

Таким образом, соотношение

$$h_1(x) = -h_1(2l + x) \tag{1.24}$$

справедливо для всех значений $x$. Можно также получить соответствующее выражение и для $Q_1(x)$. Если использовать соотношение (1.24) и данные на отрезке $(0, l)$, то $h_1(x)$ можно определить для всех значений $x$ $(-\infty < x < \infty)$. После этого можно распространить решение, описываемое уравнениями (1.18) и (1.19), на остальные районы прямоугольника.

Члены, которые необходимо добавить к решению, описываемому (1.18) и (1.19), характеризуют собой эффект отражения от границ. Подробное обсуждение этих вопросов можно найти в книгах Тихонова и Самарского [144] и Куранта и Гильберта [19].

**Вторая задача.**

Решение этой частной задачи можно получить аналогичным методом. Читатель может легко проверить, что это решение находится в виде

$$h(x, t) = h_2(c_0 t - x) + \sum_{\nu=1}^{\nu_1} (-1)^\nu h_2(c_0 t - x - 2\nu l) - \\ - \sum_{\nu=1}^{\nu_2} (-1)^\nu h_2(c_0 t + x - 2\nu l),$$

$$Q(x, t) = b_0 c_0 \Big[ h_2(c_0 t - x) + \sum_{\nu=1}^{\nu_1} (-1)^\nu h_2(c_0 t - x - 2\nu l) + \\ + \sum_{\nu=1}^{\nu_2} (-1)^\nu h_2(c_0 t + x - 2\nu l) \Big]. \tag{1.25}$$

Поскольку для точки $(x, t)$ $(0 \leqslant x \leqslant l$ и $(c_0 t - x) \geqslant 0)$

$$h_2(c_0 t - x - 2\nu l) = 0 \quad \text{и} \quad h_2(c_0 t + x - 2\nu l) = 0$$

для отрицательных аргументов, то

$$\nu_1 = \left[ \frac{c_0 t - x}{2l} \right] \quad \text{и} \quad \nu_2 = \left[ \frac{c_0 t + x}{2l} \right]$$

где [ ] означает проинтегрированные значения указанных величин.

**Третья задача.**

Решение этой задачи эквивалентно решению, описанному в предыдущем случае. Очевидно, что при этом $x$ необходимо заменить на $-x+l$, а $h_2$ — на $Q_2/b_0c_0$. Следовательно, в том случае, когда $\nu_1$ и $\nu_2$ определяются теми же соотношениями, получаем

$$h(x,\ t)=(b_0c_0)^{-1}\left[Q_2(c_0t+x-l)+\sum_{\nu=1}^{\nu_1}(-1)^{\nu}Q_2(c_0t-x-\right.$$

$$\left.-(2\nu-1)\,l)+\sum_{\nu=1}^{\nu_2}(-1)^{\nu}Q_2(c_0t+x-(2\nu+1)\,l)\right],$$

$$Q(x,\ t)=Q_2(c_0t+x-l)+\sum_{\nu=1}^{\nu_1}(-1)^{\nu}Q_2(c_0t-x-(2\nu-1)\,l)-$$

$$-\sum_{\nu=1}^{\nu_2}(-1)^{\nu}Q_2(c_0t+x-(2\nu+1)\,l). \qquad (1.26)$$

Общее решение краевой задачи представляет собой сумму частных решений (1.18), (1.25) и (1.26); (1.18) обобщается, если использовать (1.24) и т. д.

Может возникнуть вопрос, при каких условиях это решение является непрерывным и когда оно имеет непрерывную производную первого порядка во всем районе прямоугольника, открытого с одной стороны, если граничные и начальные условия также имеют непрерывные производные. Одно из условий уже указывалось в начале этого параграфа; перепишем его: $h_1(x=0)=h_2(t=0)$ и $Q_2(t=0)=Q_1(x=l)$. Легко проверить, что решение может иметь непрерывные производные на характеристических линиях, проходящих через (0, 0) и $(l,\ 0)$, если начальные и граничные условия удовлетворяют соотношениям (см. (1.1) и (1.2))

$$gA_0\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)_{x=l}+\left(\frac{\partial Q_2}{\partial t}\right)_{t=0}=0;\quad \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}\right)_{x=0}+b_0\left(\frac{\partial h_2}{\partial t}\right)_{t=0}=0,$$

причем необходимо рассматривать либо правое, либо левое из соотношений (см. также [44] гл. 17 и 18).

Аналитические решения указанных выше краевых задач могут быть также найдены при задании линейного закона сопротивления. Если исключить $h$ или $Q$, получается дифференциальное уравнение в частных производных, которое обычно называется телеграфным уравнением. Решение этого уравнения исследовано очень хорошо. Оно оказалось значительно более сложным, чем решение упрощенных уравнений. Для получения его используется метод Римана (см., например, Вебстер [149], Тихонов и Самарский [144], Курант и Гильберт [19]). Хотя исследование решений очень полезно для понимания многих вопросов, мы не будем касаться здесь этих трудных проблем.

Вопрос о корректной постановке граничных и начальных условий обсуждался в работе Крайсса [78] (см. также Зауэр [116]).

## 2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ ОБЩИХ ПРИЛИВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Характеристические кривые будут определены для общих приливных уравнений (4.6) и (4.9), полученных в главе 1, разд. 4. Будем пренебрегать только теми членами, порядок величины которых обычно мал, и членами, содержащими множители $\partial b_s/\partial h$ и $j_1$.

Кроме того, будем предполагать, что коэффициент $\alpha_1$ равен единице. Следовательно, уравнения, которые будут рассматриваться в этой главе, примут вид:

1) **уравнение движения**

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{da_0}{dx}\right)\left(1-\frac{\alpha_2 Q^2}{g\,(a_0+h)\,A^2}\right)-\frac{\alpha_2 b+b_s}{aA^2}Q\,\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{1}{gA}\,\frac{\partial Q}{\partial t}+$$

$$+\frac{1}{C^2A^2\,(a_0+h)}\,|Q|\,Q-\frac{W}{\rho g\,(a_0+h)}+I=0; \qquad (2.1)$$

(Заметим, что мы положили коэффициент $\partial h/\partial x$ не равным единице. Причина этого заключается в том, что нас будут интересовать также и такие скорости $u$, которые не являются малыми по сравнению с критической скоростью. Этот случай будет обсуждаться в разд. 4.)

2) **уравнение неразрывности**

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+b\,\frac{\partial h}{\partial t}=0. \qquad (2.2)$$

Пусть функции $h\,(x,\,t)$ и $Q\,(x,\,t)$ являются решениями приливных уравнений (2.1) и (2.2). Функция $h\,(x,\,t)$ представляет собой поверхность в системе координат $h,\ x,\ t$, а $Q\,(x,\,t)$ — поверхность в системе координат $Q,\ x,\ t$. Эти поверхности называются интегральными поверхностями приливных уравнений.

Пусть $x=x\,(\lambda)$, $t=t\,(\lambda)$ представляют собой кривые в плоскости $x,\ t$, а $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ — соответствующие кривые на интегральных поверхностях $h\,(x,\,t)$ и $Q\,(x,\,t)$, которые существуют по условию задачи. Вдоль этих кривых удовлетворяются соотношения

$$\frac{dh}{d\lambda}=\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_\lambda\frac{dx}{d\lambda}+\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_\lambda\frac{dt}{d\lambda} \qquad (2.3)$$

и

$$\frac{dQ}{d\lambda}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_\lambda\frac{dx}{d\lambda}+\left(\frac{\partial Q}{dt}\right)_\lambda\frac{dt}{d\lambda}\,. \qquad (2.4)$$

И, наоборот, пусть $h$ и $Q$ заданы в точках на кривых $x(\lambda)$, $t(\lambda)$. Значения $h\,(\lambda)$ образуют кривую $\Gamma_1\,(\lambda)$ в пространстве $h,\ x,\ t$, а значения $Q\,(\lambda)$ — кривую $\Gamma_2\,(\lambda)$ в пространстве $Q,\ x,\ t$. Можно ли теперь определить такие решения приливных уравнений, чтобы интегральные поверхности содержали соответствующие кривые $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$? Для решения так называемой краевой задачи Коши необходимо, чтобы все частные производные от $h$ в точках $\Gamma_1$ и от $Q$ в точках $\Gamma_2$ были известны. Поэтому начнем с определения производных первого порядка. В таком случае частные производные от $h$ и $Q$ должны удовлетворять уравнениям (2.1) и (2.2), а также уравнениям (2.3) и (2.4). Значения производных $\partial h/\partial x$, $\partial h/\partial t$, $\partial Q/\partial x$ и $\partial Q/\partial t$ могут быть точно определены из (2.1), (2.2), (2.3) и (2.4), если определитель $\Delta$, составленный из коэффициентов при этих производных, не равен нулю. Таким образом,

$$\Delta = \begin{vmatrix} dx & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dt \\ 1 - \frac{\alpha_2 b_s}{gA^3} Q^2 & -\frac{\alpha_2 b + b_s}{gA^2} Q & 0 & \frac{1}{gA} \\ 0 & b & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

и

$$gA\,\Delta = b dx^2 - \left(\frac{\alpha_2 b + b_s}{A} Q\right) dx\, dt - -gA\left(1 - \frac{\alpha_2 b_s Q^2}{gA^3}\right) dt^2. \tag{2.5}$$

Если $\Delta=0$, то производные нельзя определить из уравнений (2.1)—(2.4). Случай, когда другие определители этой системы также обращаются в нуль (ранг матрицы $\Delta$ и ранг присоединенной матрицы равны трем), будет рассмотрен в замечании к разд. 7. Таким образом, $\Delta=0$, когда $dx/dt$ удовлетворяет квадратичному уравнению

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \frac{\alpha_2 b + b_s}{b}\frac{Q}{A}\frac{dx}{dt} - \frac{gA}{b}\left(1 - \frac{\alpha_2 b_s Q^2}{gA^3}\right) = 0, \tag{2.6}$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha_2 b + b_s}{2b}\frac{Q}{A} \pm \left(\frac{gA}{b}\right)^{1/2}\left(1 + \frac{(\alpha_2 b - b_s)^2}{4gb}\frac{Q^2}{A^3}\right)^{1/2}, \tag{2.7}$$

что является обобщением уравнения (1.10). Кривая в плоскости $x$, $t$, удовлетворяющая уравнению (2.7), называется *основной характеристической кривой* приливных уравнений. Соответствующие кривые $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ в пространствах $h$, $x$, $t$ и $Q$, $x$, $t$ называются *характеристическими кривыми.* Термин «характеристический» обычно применяется к обоим типам кривых, так как опасность спутать их мала. Из (2.7) следует, что можно определить два семейства характеристик: положительного и отрицательного знаков. Однако если проекции $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ на плоскость $x$, $t$ выбраны так, что они не совпадают с характеристиками (т. е. $\Delta\neq 0$), то появляется возможность рассчитать производные первого порядка от $h$ и $Q$ вдоль кривых $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$.

Частные производные второго порядка от $h$ и $Q$ можно рассчитать совершенно аналогично, дифференцируя приливные уравнения по $x$ и $t$ соответственно. Дифференцирование по $x$ дает

$$\left(1-\frac{\alpha_2 b_s Q^2}{gA^3}\right)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}-\frac{(\alpha_2 b+b_s)}{gA^2}Q\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial t}+\frac{1}{gA}\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial t}=F(x,t), \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial t}=G(x,t). \quad (2.9)$$

Функции $F(x, t)$ и $G(x, t)$ содержат $h$ и $Q$ и их первые производные. Далее, в произвольной точке кривой $x(\lambda)$, $t(\lambda)$ выполняются соотношения

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_\lambda=\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right)_\lambda\frac{dx}{d\lambda}+\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x\,\partial t}\right)_\lambda\frac{dt}{d\lambda} \quad (2.10)$$

и

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)_\lambda=\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)_\lambda\frac{dx}{d\lambda}+\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial t}\right)_\lambda\frac{dt}{d\lambda}. \quad (2.11)$$

Таким образом, если $\Delta\neq 0$, то значения вторых производных $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial t}$, $\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial t}$ можно рассчитать в любой точке на $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$, используя уравнения (2.8)—(2.11). Соответственно производные $(\partial^2 h/\partial t^2)_\lambda$ и $(\partial^2 Q/\partial t^2)_\lambda$ можно вычислить с помощью соотношений, аналогичных (2.8)—(2.11), как, например, $\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_\lambda$ и $\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)_\lambda$. Указанным способом можно рассчитать восемь производных третьего порядка от $h$ и $Q$. Вообще говоря, если $\Delta\neq 0$, то значения производных более высокого порядка от $h$ и $Q$ могут быть вычислены в любой точке на $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$.

Следовательно, значения функции $h$ в окрестности кривой $\Gamma_1$ и функции $Q$ в окрестности $\Gamma_2$ можно получить, используя ряды Тэйлора, если эти ряды сходятся. Мы здесь не приводим доказательства этого утверждения, так как оно подробно изложено в различных учебниках по уравнениям в частных производных (см., например, Гурса [49]). Такие ряды применяются в ходе решения краевой задачи Коши для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Необходимо также отметить, что применение рядов оправдано только для достаточно малой области около кривой $\Gamma_1$ или $\Gamma_2$ и только тогда, когда коэффициенты уравнений и граничные условия представляют собой достаточно гладкие функции; другими словами, если существуют их производные первого и второго порядка по $x$ и $t$.

Из приведенных выше соображений следует, что в том случае, когда значения $h$ и $Q$ заданы на характеристике, получить единственное решение для $h(x, t)$ и $Q(x, t)$ становится невозможным. В этом случае необходимо, чтобы $h$ (или $Q$) была известна на характеристике другого рода (разд. 6) или на другой кривой.

## 3. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Уравнение (2.7) определяет характеристические кривые

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{\alpha_2 b + b_s}{2b}\right)\frac{Q}{A} \pm \left(\frac{gA}{b}\right)^{1/2}\left[1 + \frac{(\alpha_2 b - b_s)^2}{4gbA^3} Q^2\right]^{1/2}, \tag{3.1}$$

или кривые

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha_2 b + b_s}{2b} u \pm \left[g(a_0 + h)\frac{b_s}{b}\right]^{1/2}\left[1 + \frac{(\alpha_2 b - b_s)^2}{4g(a_0 + h) b_s b} u^2\right]^{1/2}, \tag{3.2}$$

если $A = b_s(a_0 + h)$ и $Q = uA$, где $u$ — средняя скорость потока. Член, заключенный в квадратную скобку и содержащий $u^2$, обычно пренебрежимо мал по сравнению с единицей. Например, в экстремальном случае, когда $b = 5b_s$, $g = 10$, $a_0 + h = 3$ м и $u = 2$ м/сек., величина этого члена составляет всего 0,11; однако в большинстве случаев она будет еще меньше. Поэтому можно приближенно записать

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha_2 b + b_s}{2b} u \pm \left[g(a_0 + h)\frac{b_s}{b}\right]^{1/2}. \tag{3.3}$$

Необходимо отметить, что это упрощение неприменимо, если величина $u$ имеет порядок критической скорости (определение критической скорости см. в разд. 4).

Если ширина района накопления вод равна ширине потока (т. е. $b = b_s$, а $\alpha_2$ полагается равным единице), то уравнения (3.2) и (3.3) сводятся к хорошо известному выражению

$$\frac{dx}{dt} = u \pm [g(a_0 + h)]^{1/2}. \tag{3.4}$$

Для рек с выпрямленным руслом, глубина которых соизмерима с амплитудой прилива, скорость $u$ в течение всего приливного периода оказывается малой по сравнению с $[g(a_0 + h)]^{1/2}$.

В этом случае можно говорить о том, что

$$\frac{dx}{dt} = \pm c_0, \tag{3.5}$$

где $c_0$ определяется из

$$c_0 = [g(a_0 + h)]^{1/2}. \tag{3.6}$$

Поскольку (3.1), (3.4) и (3.5) содержат функции, зависящие от $x$ и $t$, характеристические кривые не будут представлять собой прямые линии. Однако их можно аппроксимировать прямыми линиями для достаточно малых отрезков $x$ и интервалов $t$. Подобное приближение может быть записано в виде

$$x - x_0 = [u_m \pm c_{0,m}](t - t_0), \tag{3.7}$$

где $u_m$ и $c_{0,m}$ — средние значения $u$ и $c_0$ на участке реки длиной $|x - x_0|$ в течение промежутка времени $|t - t_0| < \Delta t$.

Точное решение уравнения характеристик для приливных рек в общем случае получить невозможно, если только $h$, $b$, $b_s$ и $A$ не являются известными функциями от $x$ и $t$. Однако имеется возможность исследовать решение (3.1) в окрестности точки $x$, $t$ характеристической кривой, выражая $d^kx/dt^k$ ($k=2, 3, \ldots$) через $h$ и $Q$ и их производные. Так как зависящие от $b$, $b_s$ и $A$ члены уравнения (31) являются известными функциями от $x$ и $h$, то мы можем определить их производные. Поскольку формула для $d^kx/dt^k$, в общем, является очень сложной, будем рассматривать только тот случай, когда $b$ и $b_s$ не зависят от $x$. Кроме того, будем искать формулу только для $k=2$, тем самым предполагая, что членом, содержащим множитель $Q^2$, в (3.1) можно пренебречь. Если через $f$ обозначить упрощенную форму (3.1), получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}.$$

Исключая $\partial Q/\partial t$ и $\partial Q/\partial x$ с помощью (2.1) и (2.2), для случая, когда $da_0/dx=0$, $W=0$ и $I=0$, находим следующее соотношение:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\frac{\alpha_2}{2}\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\alpha_2 b + b_s}{2b}\frac{gb_s|Q|Q}{C^2A^3} \mp$$

$$\mp \frac{1}{2}\left(\frac{gb}{A}\right)^{1/2}\left[\alpha_2\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\alpha_2 b + b_s}{2b}\frac{b_s}{b}\frac{Q}{A}\frac{\partial h}{\partial x}\right] +$$

$$+ \frac{bQ}{A^2}\left[\frac{\alpha_2 b + b_s}{2b}\alpha_2 - \left(\frac{\alpha_2 b + b_s}{2b}\right)^2\right]\left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{b_s}{b}\frac{Q}{A}\frac{\partial h}{\partial x}\right). \tag{3.8}$$

Если ширина района накопления вод равна ширине потока, а $\alpha_2$ полагается равным единице, формула сводится к виду

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\left[\left\{-\frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{b_s|Q|Q}{C^2A^3}\right\} \mp \frac{1}{2}c_0^{-1}\left\{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{Q}{A}\frac{\partial h}{\partial x}\right\}\right]. \tag{3.9}$$

Если вновь ввести скорость $u=QA^{-1}$ и соотношение

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{b_s}\frac{\partial Q}{\partial x},$$

то

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{g}{2}\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{g|u|u}{C^2(a_0+h)}\pm\frac{1}{2}c_0\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (3.10)$$

где $c_0$ определено в (3.6). Окончательно, используя уравнение движения (4.11) из главы 1 ($da_0/dx$, $I$ и $W$ равны нулю), находим другую формулу:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial t}+(u\pm c_0)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{g|u|u}{C^2(a_0+h)}\right]. \qquad (3.11)$$

В окрестности точки $x_0$, $t_0$ характеристическая кривая определяется выражением

$$x-x_0=\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0}(t-t_0)+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=t_0}(t-t_0)^2. \qquad (3.12)$$

Второй член в правой части (3.12) определяет отклонение характеристической кривой от прямой линии в течение отрезка времени $t-t_0$:

$$x-x_0=\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0}(t-t_0). \qquad (3.13)$$

Это отклонение зависит от отношения

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=t_0}(t-t_0)\Big/\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=t_0} \qquad (3.14)$$

или

$$\frac{1}{2}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^{-2}\right]_{t=t_0}(x-x_0). \qquad (3.15)$$

Подставляя вместо $(dx/dt)^2$ его среднее значение $ga_0$, уравнение (3.15) в соответствии с (3.10) можно переписать в виде

$$\left[-\frac{1}{4a_0}\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{|u|u}{2C^2(a_0+h)a_0}\pm\frac{1}{4c_0}\frac{\partial u}{\partial x}\right](x-x_0). \qquad (3.16)$$

Второй член в (3.16) зависит от трения и имеет тот же порядок, что и первый член (который равен разности уровней воды на двух концах сечения, деленной на учетверенное значение глубины). Последним членом в (3.16), зависящим от $\partial u/\partial x$, обычно можно пренебречь. Величина этого члена становится соизмеримой с величинами других членов только для геометрически неправильных форм сечений реки. Если участок реки имеет протяженность не более 5 или 10 км, то величина соотношения (3.16) обычно меньше 0,1.

## 4. ОБСУЖДЕНИЕ ВИДА ХАРАКТЕРИСТИК В ТЕХ СЛУЧАЯХ, КОГДА ПОТОК НАХОДИТСЯ В ДОКРИТИЧЕСКОМ, КРИТИЧЕСКОМ И СВЕРХКРИТИЧЕСКОМ РЕЖИМАХ

Пусть $u$ положительно; это означает, что на рассматриваемом участке реки имеет место прилив. Кроме того, пусть для любых $x$ и $t$

$$|u| < \left(\frac{gA}{\alpha_2 b_s}\right)^{1/2} \quad \text{и} \quad \alpha_2 > 0. \tag{4.1}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\alpha_2 b + b_s}{2b} |u| < \left(\frac{gA}{b}\right)^{1/2} \left[1 + \frac{(\alpha_2 b - b_s)^2}{4gbA} u^2\right]^{1/2}. \tag{4.2}$$

Таким образом, решения уравнения (3.1) или (3.2) с положительным знаком представляют собой постоянно возрастающие функции. В этом случае кривые имеют положительный наклон в направлении движения потока.

Кривые, соответствующие отрицательному знаку, имеют отрицательный наклон. Поэтому кривые первой системы называются положительными характеристиками, а второй — отрицательными.

Если в некоторой точке $x_0$ в момент $t_0$ два члена (3.1) или (3.2) становятся равными друг другу, то для $(x_0, t_0)$ выполняется соотношение

$$\alpha_2^{1/2} |u| = [g(a_0 + h)]^{1/2}. \tag{4.3}$$

Итак, положительные характеристики остаются положительными, если $u$ положительно, а отрицательные характеристики, которые проходят через $(x_0, t_0)$, в этой точке будут иметь горизонтальную касательную.

Однако если для $x > x_0$ и $t > t_0$

$$\alpha_2^{1/2} |u| > [g(a_0 + h)]^{1/2}, \tag{4.4}$$

то обе системы характеристик будут направлены вверх или вниз по потоку в зависимости от знака $u$. Это показывает, что волна, которая находится в районах, располагающихся выше по течению, не может проникнуть в район прилива; обратная картина будет иметь место в случае отрицательной скорости $u$ во время отлива.

Если удовлетворяется условие (4.3), в гидравлике говорят, что поток находится в *критическом* состоянии; условие (4.1) относится к *докритическому* потоку, а условие (4.4) — к потоку в *сверхкритическом* режиме.

Заметим, что (4.2) выполняется для любого значения $u$, если оказывается возможным пренебречь членом Бернулли ($\alpha_2=0$, см. также главу 1, разд. 4). В таких случаях поток находится в докритическом режиме.

Приливной поток в реках и каналах обычно находится в докритическом режиме, и в этом случае мы имеем хорошо определенную систему характеристик. Однако может встретиться случай, когда в верховьях реки, куда проникает прилив, режим потока, направленного вниз по течению, будет становиться критическим или даже сверхкритическим в зависимости от наклона дна реки.

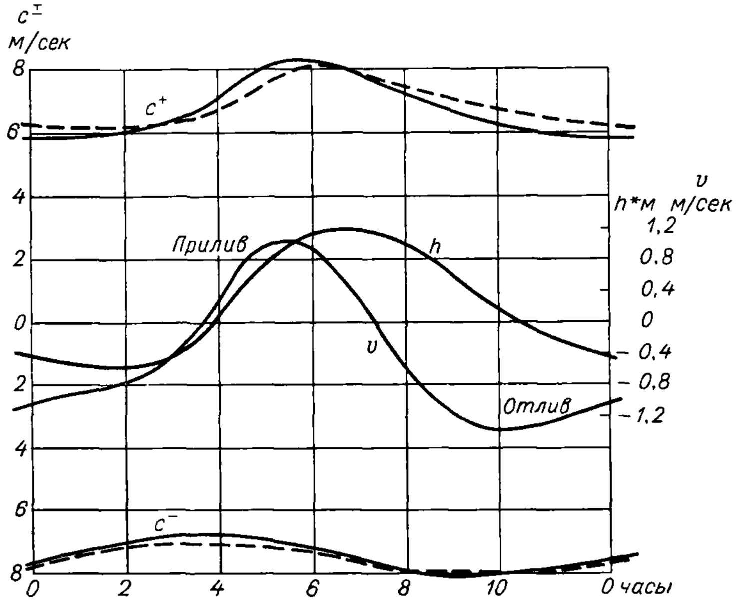



Рис. 3.2.

Тогда, поскольку в этом случае *u* отрицательно, определить положительные характеристики оказывается невозможным. Это означает, что прилив не может проникнуть в верховье реки. В точке перехода от приливного района к району, располагающемуся выше по потоку, вероятно, должен наблюдаться гидравлический прыжок.

Диаграмма на рис. 3.2 показывает направление наклонов характеристик $c^{\pm}=dx^{\pm}/dt$ в момент прилива в устье голландской реки Лек, представляющей собой один из притоков реки Рейн. Для расчета наклонов использовалась формула (3.3). Очевидно, наклоны характеристик являются периодическими функциями, так как сам прилив периодичен.

Выше было рассмотрено непрерывное периодическое движение. Предположим теперь, что в некоторой точке в определенный момент времени произошло мгновенное изменение $h$. Это может наблюдаться, например, в том случае, когда затвор плотины мгновенно открывается или закрывается. Открытие затвора приводит к сбросу в реку некоторого количества воды; это, очевидно, вызывает мгновенное повышение уровня воды. Обратная картина наблюдается при закрытии затвора. В результате вдоль реки будет распространяться так называемая волна перемещения, приводя к внезапному повышению или понижению уровня воды в следующих друг за другом точках. В моменты до и после открытия затвора наклоны характеристик хорошо определяются и изменяются непрерывно.

Разрыв в наклонах характеристических кривых можно наблюдать также в том случае, когда плотина построена в точке $x$ приливной реки. Тогда, если имеет место критический поток (так называемый разлив), величины $dx/dt$ могут иметь различные значения по обе стороны от плотины и в то же время непрерывно меняться во времени. Такой разлив может наблюдаться в определенный отрезок времени в течение приливного периода. Подробно об этом будет говориться в последней главе.

Указанные виды разрывов вызываются искусственными причинами; однако определенные естественные условия также могут способствовать появлению разрыва, названного бором. Бор может рассматриваться как движущийся гидравлический прыжок (см. главу 1, разд. 5 и 12 этой главы).

## 5. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть $f_1(x, t) = c_1$ и $f_2(x, t) = c_2$ являются решениями характеристического уравнения (3.1). Индекс 1 относится к положительным величинам, а индекс 2 — к отрицательным; $c_1$ и $c_2$ — постоянные интегрирования. Тогда нам известно, что отношения

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{dx^+}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{dx^-}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0 \tag{5.1}$$

удовлетворяются в том случае, когда $dx^+/dt$ и $dx^-/dt$ определяются уравнением (5.1) с соответствующим знаком. Введем теперь в качестве новых криволинейных координат характеристические кривые в плоскости $x$, $t$ и предположим, что они являются хорошо определенными.

Следовательно, необходимо преобразовать приливные уравнения (2.1) и (2.2), используя

$$\xi = f_1(x, t) \quad \text{и} \quad \eta = f_2(x, t). \tag{5.2}$$

Если теперь применить выражения

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial \xi}\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial \eta}\frac{\partial f_2}{\partial t}; \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial \xi}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \eta}\frac{\partial f_2}{\partial x} \tag{5.3}$$

вместе с аналогичными выражениями для $\partial Q/\partial t$ и $\partial Q/\partial x$, то мы получим

$$\frac{\partial h}{\partial \xi}\left\{\frac{\partial f_1}{\partial x}\left(1-\frac{\alpha_2 Q^2 b_s}{gA^3}\right)-\frac{\alpha_2 b+b_s}{gA^2}Q\frac{\partial f_1}{\partial t}\right\}+$$

$$+\frac{\partial h}{\partial \eta}\left\{\frac{\partial f_2}{\partial x}\left(1-\frac{\alpha_2 Q^2 b_s}{gA^3}\right)-\frac{\alpha_2 b+b_s}{gA^2}Q\frac{\partial f_2}{\partial t}\right\}+$$

$$+\frac{\partial Q}{\partial \xi}\left(\frac{1}{gA}\frac{\partial f_1}{\partial t}\right)+\frac{\partial Q}{\partial \eta}\left(\frac{1}{gA}\frac{\partial f_2}{\partial t}\right)+\frac{b_s|Q|Q}{C^2A^3}=0 \qquad (5.4)$$

и

$$\frac{\partial Q}{\partial \xi}\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial \eta}\frac{\partial f_2}{\partial x}+b\frac{\partial h}{\partial \xi}\frac{\partial f_1}{\partial t}+b\frac{\partial h}{\partial \eta}\frac{\partial f_2}{\partial t}=0. \qquad (5.5)$$

Если для исключения $\partial f_1/\partial t$ и $\partial f_2/\partial t$ воспользоваться (5.1), то в полученных соотношениях останутся только $\partial f_1/\partial x$ и $\partial f_2/\partial x$.

Можно также получить другие уравнения, в которые входили бы только производные по $\xi$ и $\eta$. Умножив (5.5) на $(1/gA)dx^-/dt$ и сложив его с (5.4), получим

$$\left[\frac{\partial h}{\partial \xi}\left\{1-\frac{\alpha_2 Q^2 b_s}{gA^3}+\frac{\alpha_2 b+b_s}{Ag^2}Q\frac{dx^+}{dt}-\frac{b}{gA}\frac{dx^+}{dt}\frac{dx^-}{dt}\right\}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial Q}{\partial \xi}\left\{\frac{1}{gA}\left(\frac{dx^+}{dt}-\frac{dx^-}{dt}\right)\right\}\right]\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{b_s|Q|Q}{C^2A^3}=0. \qquad (5.6)$$

С другой стороны, если (5.5) умножить на $(1/gA)dx^+/dt$ и сложить его с (5.4), будем иметь

$$\left[\frac{\partial h}{\partial \eta}\left\{1-\frac{\alpha_2 Q^2 b_s}{gA^3}+\frac{\alpha_2 b+b_s}{gA^2}Q\frac{dx^-}{dt}-\frac{b}{gA}\frac{dx^+}{dt}\frac{dx^-}{dt}\right\}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial Q}{\partial \eta}\left\{\frac{1}{gA}\left(\frac{dx^-}{dt}-\frac{dx^+}{dt}\right)\right\}\right]\frac{\partial f_2}{\partial x}+\frac{b_s|Q|Q}{C^2A^3}=0. \qquad (5.7)$$

После подстановки выражений для $dx^+/dt$ и $dx^-/dt$, согласно (2.6) и (2.7), и использования следующих соотношений:

$$\frac{dx^+}{dt}+\frac{dx^-}{dt}=-\frac{gA}{b}+\frac{\alpha_2 Q^2 b_s}{bA^2};$$

$$\frac{dx^+}{dt}-\frac{dx^-}{dt}=2\left(\frac{gA}{b}+\frac{(\alpha_2 b-b_s)^2}{4b^2}\frac{Q^2}{A^2}\right)^{1/2}$$

уравнения (5.6) и (5.7) будут представлять собой новые характеристические уравнения. Коэффициенты в (5.6) и (5.7) должны быть выражены через $\xi$ и $\eta$ посредством (5.2).

Поскольку решения уравнений характеристических кривых ($f_1=c_1$ и $f_2=c_2$) можно получить только в определенных частных случаях, уравнения (5.6) и (5.7) в действительности не представляют собой большого практического интереса. Кроме того, эти уравнения оказываются более сложными, чем исходные уравнения. Однако они позволяют выявить изменения решений при различных граничных и начальных условиях. Поэтому перепишем (5.6) и (5.7) в простой форме:

$$R_1 \frac{\partial h}{\partial \xi} + S_1 \frac{\partial Q}{\partial \xi} + T_1 = 0 \quad \text{и} \quad R_2 \frac{\partial h}{\partial \eta} + S_2 \frac{\partial Q}{\partial \eta} + T_2 = 0, \tag{5.8}$$

где коэффициенты $R_1, \ldots, T_2$ находятся непосредственно из (5.6) и (5.7). Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка для $h$ и $Q$ можно теперь переписать в стандартной форме, принятой для записи гиперболических дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi\, \partial \eta} = Z_1 \frac{\partial Q}{\partial \xi} + Z_2 \frac{\partial Q}{\partial \eta} + Z_3, \tag{5.9}$$

где $Z_1$, $Z_2$ и $Z_3$ зависят от $R_1, \ldots, T_2$ и их производных по $\xi$ и $\eta$. Аналогичное уравнение записывается и для $h$:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \xi\, \partial \eta} = Y_1 \frac{\partial h}{\partial \xi} + Y_2 \frac{\partial h}{\partial \eta} + Y_3. \tag{5.10}$$

Здесь $Z$ и $Y$ зависят от $h$, $Q$, $\xi$ и $\eta$, а уравнения (5.9) и (5.10) представляют собой квазилинейные уравнения.

Характеристическое преобразование уравнений длинных волн (2.1) и (2.2) можно также выполнить, введя новые переменные, которые являются функциями от $h$, $Q$ и коэффициентов уравнений.

Тогда в каждом уравнении останутся только производные от одной новой зависимой переменной (этот метод применялся Шёнфельдом [123], а также Курантом и Гильбертом [19]).

При использовании этого метода привлекаются уравнения в более простой форме:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b_0 \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \tag{5.11}$$

и

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{c_0^2 b_0} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{C^2 A_0^2 a_0} | Q | Q = 0, \tag{5.12}$$

где

$$H = a_0 + h + \frac{u^2}{2g} \quad \text{и} \quad c_0^2 = g A_0 b_0^{-1},$$

причем значения $a_0$ и коэффициентов соответствуют среднему уровню.

Предполагается также, что

$$\frac{1}{2g}\left|\frac{\partial u^2}{\partial t}\right|_{\max} \ll \left|\frac{\partial h}{\partial t}\right|_{\max},$$

откуда видно, что член, который появляется при замене $h$ на $H$ и который должен учитываться в (5.11), является достаточно малым.

Тогда характеристическое преобразование (5.11) и (5.12) примет вид:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + c_0 \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{c_0}{C^2 A_0^2 a_0} |Q| Q = 0, \tag{5.13}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} - c_0 \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{c_0}{C^2 A_0^2 a_0} |Q| Q = 0, \tag{5.14}$$

где

$$F = \frac{1}{2}[H + (c_0 b_0)^{-1} Q] \quad \text{и} \quad G = \frac{1}{2}[H - (c_0 b_0)^{-1} Q]. \tag{5.15}$$

Преобразование получается сложением уравнения (5.11), умноженного на $\frac{1}{2} b_0^{-1}$, с уравнением (5.12), умноженным соответственно на $^1/_2 c_0$ или $-^1/_2 c_0$. Согласно (1.17), функции $F$ и $G$ аналогичны функциям $\Phi$ и $\Psi$ соответственно.

В том случае, когда в (5.12), (5.13) и (5.14) не учитываются члены, характеризующие трение, функция $F$ сохраняет свое значение в геометрической точке (названной *волновой точкой*), движущейся в положительном направлении оси $x$ со скоростью $dx/dt = c_0$, а функция $G$ — в точке, определяемой соотношением $dx/dt = -c_0$ [см. также разд. 1.2 и уравнение (1.11)].

Очевидно, что в случае когда членами трения пренебрегать нельзя, значения функций $F$ и $G$, которые называются *характеристическими волновыми компонентами*, изменятся.

В общем случае волновое движение может быть представлено двумя характеристическими волновыми компонентами. Уровни воды $a_0 + h$ определяются суммой этих компонент, а расход $Q$ — их разностью [см. (5.15)].

Шёнфельд называет волновую компоненту, относящуюся к моменту $t_0$, *скрытой*, когда $(\partial F/\partial t)_{t_0} = 0$ или $(\partial G/\partial t)_{t_0} = 0$, в других случаях волновая компонента называется *явной*.

Прогрессивная волна, возникающая под влиянием источника, вначале имеет одну лишь явную волновую компоненту. Из-за трения о дно по мере продвижения вдоль русла другая волновая компонента также становится явной, и в этом случае говорят, что за волной возникает так называемая область «хвоста волны».

Аналогичные вопросы более подробно обсуждаются Шёнфельдом [122, 123, 126].

В разд. 7 будет приведен вывод дифференциальных уравнений, описывающих изменения уровня воды и расхода вдоль характеристической кривой с использованием общих приливных уравнений. В этом случае характеристические волновые компоненты явно определить невозможно, и поэтому вместо характеристических переменных вновь будут использованы исходные переменные $h$ и $Q$.

## 6. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ПИКАРА И ОБЛАСТИ РЕШЕНИЙ

С помощью уравнений (5.9) можно исследовать некоторые общие свойства решений приливных уравнений. Пусть на рис. 3.3 $h$ и $Q$ даны в точках на кривой $AB$, расположенной в плоскости $\xi$, $\eta$. Эта кривая и значения $h$ и $Q$ на ней определяются соотношениями

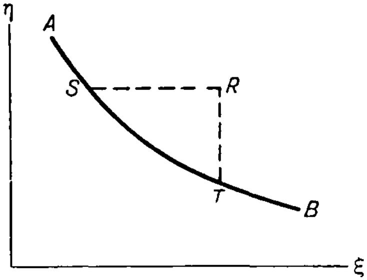



Рис 3.3.

$$\xi=\varphi_1(u), \quad \eta=\varphi_2(u),$$
$$h=\psi_1(u), \quad Q=\psi_2(u), \tag{6.1}$$

где $\varphi_1(u)$ и $\varphi_2(u)$ являются монотонными функциями, так что кривая $AB$ не совпадает с характеристиками. Используя уравнение (5.8) и соотношения

$$\psi_1'(u)=\frac{\partial h}{\partial\xi}\varphi_1'(u)+\frac{\partial h}{\partial\eta}\varphi_2'(u),$$
$$\psi_2'(u)=\frac{\partial Q}{\partial\xi}\varphi_1'(u)+\frac{\partial Q}{\partial\eta}\varphi_2'(u), \tag{6.2}$$

можно рассчитать значения $\partial h/\partial\xi$, $\partial h/\partial\eta$, $\partial Q/\partial\xi$ и $\partial Q/\partial\eta$ на кривой. Предположим, что $R$ — произвольная точка в окрестности кривой $AB$.

Тогда значения $h$ и $Q$ в точке $R$ можно найти, применяя итерационный метод Пикара [95]. Начнем с определения $Q_0(\xi, \eta)$, когда $Q_0$ удовлетворяет граничному условию $Q=\psi_2(u)$, а ее первая производная на кривой $AB$ определяется посредством (5.8) и (6.2). Кроме того, $Q_0(\xi, \eta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 Q_0}{\partial\xi\,\partial\eta}=0. \tag{6.3}$$

При этих условиях $Q_0$ в точке $R$ можно вычислить последовательным интегрированием последнего соотношения по $\xi$ и $\eta$. Это дает

$$\iint\frac{\partial^2 Q_0}{\partial\xi\,\partial\eta}d\xi\,d\eta=Q_0(R)-Q(T)+\int_S^T\left(\frac{\partial Q}{\partial\eta}\right)_{ST}d\eta=0,$$

где двойной интеграл относится к площади $R$-$S$-$T$. Следовательно,

$$Q_0(R) = Q(T) - \int_S^T \left(\frac{\partial Q}{\partial \eta}\right)_{ST} d\eta.$$

Интеграл, входящий в правую часть этого соотношения, является известной функцией $u$, а $d\eta = \varphi_2'(u)\, du$.

Аналогичный прием используется для определения функции $h_0(R)$.

Если

$$Q_0(\xi, \eta) = Q(T) - \int_S^T \left(\frac{\partial Q}{\partial \eta}\right)_{ST} d\eta$$

и соотношение

$$h_0(\xi, \eta) = h(T) - \int_S^T \left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_{ST} d\eta$$

подставить в выражения для производных и коэффициентов, стоящих в правых частях уравнения (5.9) и (5.10), то мы получим окончательный вид функций $f_Q(\xi, \eta)$ и $f_h(\xi, \eta)$.

Следующий этап этого метода заключается в вычислении функции $Q_1$ с помощью соотношения

$$\int\int \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \xi\, \partial \eta} d\xi\, d\eta = \int\int f_Q(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

где двойной интеграл вновь относится к площади $R$-$S$-$T$. Таким образом, получаем

$$Q_1(\xi, \eta) = Q(T) - \int_S^T \left(\frac{\partial Q}{\partial \eta}\right)_{ST} d\eta + \int\int f_Q(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Аналогичное выражение можно написать также и для $h_1(\xi, \eta)$.

В общем, $Q_n(\xi, \eta)$ будет определяться из соотношений (см. (5.9))

$$\frac{\partial^2 Q_n}{\partial \xi\, \partial \eta} = Z_1(h_{n-1}, Q_{n-1}) \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial \xi} + \\ + Z_2(h_{n-1}, Q_{n-1}) \frac{\partial Q_{n-1}}{\partial \eta} + Z_3(h_{n-1}, Q_{n-1}); \tag{6.4}$$

аналогичное уравнение будет справедливым и для функции $h_n$, взятой в соответствующих пределах дуги $AB$. Затем с помощью указанного выше приема находятся $Q_n$ и $h_n$. Можно также показать, что в окрестности дуги $AB$

$$Q = \lim_{n \to \infty} Q_n, \quad h = \lim_{n \to \infty} h_n \tag{6.5}$$

и, кроме того, $Q$ и $h$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (5.9) и (5.10) и заданным граничным условиям, если коэффициенты этих уравнений ограничены. Мы не будем доказывать здесь это утверждение, а отошлем читателя к тем источникам, где приводятся результаты испытаний итерационного метода Пикара, — к работам самого Пикара [95], Гурса [49] и Адамара [54]. Бремекамп [10] и Шёнфельд [123] применили метод Пикара при решении квазилинейных уравнений длинных волн.

Из предыдущего рассмотрения следует, что значения $Q$ и $h$ в точке $R(\xi, \eta)$ зависят от величин $Q$ и $h$ на дуге $ST$ и не зависят от величин этих функций за пределами $ST$. Следовательно, изменение значений $h$ и $Q$ в точках, располагающихся за пределами $ST$, не будет влиять на величину $Q$ в $R$. На этом основании говорят, что на значение $Q$ в $R$ влияют значения $Q$ в точках, находящихся в *пределах* области, ограниченной характеристиками точки $R$. Поэтому область $R$-$S$-$T$ на рис. 3.3 называется *областью влияния $Q$ или $h$*.

Приведенное выше решение справедливо в том случае, когда кривая $AB$ в плоскости $\xi$, $\eta$ не совпадает с характеристиками, параллельными осям координат. Однако решение можно получить всякий раз, когда значения $Q$ и $h$ известны на двух характеристиках разного рода. Пусть

$$
\begin{gathered}
Q=\varphi_1(\xi) \quad \text{при} \quad \eta=\eta_0 \quad \text{и} \quad \xi_0\leqslant\xi\leqslant\xi_0+a,\\
Q=\varphi_2(\eta) \quad \text{при} \quad \xi=\xi_0 \quad \text{и} \quad \eta_0\leqslant\eta\leqslant\eta_0+b,\\
\varphi_1(\xi_0)=\varphi_2(\eta_0).
\end{gathered}
\tag{6.6}
$$

Соответствующие условия для $h$ на этих характеристиках можно найти, если только первое уравнение в (5.8) проинтегрировать по $\xi$, а второе — по $\eta$, при этом значение $h$ в точке $(\xi_0, \eta_0)$ должно быть заданным. При выполнении указанных условий можно будет применить метод Пикара. Итак, точка $(\xi, \eta)$ определяется как произвольная точка в прямоугольнике $ABCD$ (рис. 3.4), где $\eta=\eta_0+b$ означает линию $DC$.

Далее, определим $Q_0(\xi, \eta)$ так, чтобы она удовлетворяла уравнению (5.9) и граничным условиям на характеристических кривых $\xi=\xi_0$ и $\eta=\eta_0$. Тогда очевидно, что

$$Q_0(\xi, \eta)=\varphi_1(\xi)+\varphi_2(\eta)-\varphi_1(\xi_0); \tag{6.7}$$

аналогичное соотношение удовлетворяется также для $h_0(\xi, \eta)$. Затем $Q_0$ и $h_0$ вновь подставляются вместо $Q$ в правую часть уравнения (5.9). Если эту правую часть обозначить через $f^*(\xi, \eta)$, то $Q_1$ определится следующим образом:

$$Q_1(\xi, \eta)=Q_0(\xi, \eta)+\int_{\xi_0}^{\xi} d\xi \int_{\eta_0}^{\eta} f^*(\xi, \eta)\, d\eta. \tag{6.8}$$

Аналогичное соотношение можно получить и для $h_1(\xi, \eta)$. В результате можно найти $Q_n(\xi, \eta)$, и тогда окончательно получим

$$Q(\xi, \eta) = \lim_{n \to \infty} Q_n(\xi, \eta) =$$

$$= Q_0(\xi, \eta) + \lim_{n \to \infty} \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi \int_{\eta_0}^{\eta} f_{n-1}^*(\xi, \eta)\, d\eta; \qquad (6.9)$$

аналогичные соотношения для $h(\xi, \eta)$ являются решениями уравнений (5.9) и (5.10), если удовлетворяются заданные граничные условия. Это решение оказывается справедливым только

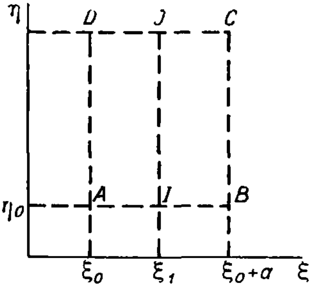



Рис. 3.4.

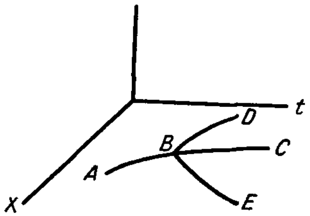



Рис. 3.5.

в пределах указанного выше прямоугольника, но не за его пределами.

Теперь можно рассмотреть одно важное свойство решений гиперболических уравнений. Из (6.9) следует, что решение $Q(\xi, \eta)$ будет иметь непрерывные производные, если $Q_0(\xi, \eta)$, а следовательно, и $\varphi_1(\xi)$ и $\varphi_2(\eta)$ имеют непрерывные производные. Однако если $\varphi_1(\xi)$ или $\varphi_2(\eta)$, или обе функции вместе являются разрывными в некоторой изолированной точке, то $Q(\xi, \eta)$ тоже оказывается разрывной как в этой точке, так и на характеристиках, проходящих через нее. В качестве примера предположим, что $\varphi_1(\xi)$ имеет разрыв в точке $I(\xi_1)$ (рис. 3.4); тогда, согласно (6.7), $Q_0(\xi, \eta)$, а следовательно, и $Q(\xi, \eta)$ также будут разрывными на характеристике $IJ$. Однако во всех других точках прямоугольника решение $Q(\xi, \eta)$ остается непрерывным. Действительно, можно говорить о том, что если $Q$ в точке $x_0$ имеет разрыв в момент $t_0$, то для моментов $t > t_0$ разрыв будет перемещаться вдоль тех характеристик, которые проходят через точку с координатами $x_0$, $t_0$, например, вверх или вниз по потоку или в разных направлениях. Для этого кривые должны быть определены, а скачок в разрыве — «бесконечно» малым (см. указанное ниже замечание 1).

Аналогичные соображения справедливы и для разрывов в $h$. Заметим также, что разрыв в $Q$ может вызвать разрыв в $h$ или в его производных и наоборот. Если в последнем случае $Q$ изменяется непрерывно, то кривая распределения $u$ будет иметь разрывы.

На рис. 3.5 представлены значения $h$ и $Q$ на кривой $AC$, которая не является характеристической кривой. Пусть в точке $B$ функция $Q$ имеет разрыв, но одновременно остается непрерывной вдоль $AB$ и $BC$. Тогда в окрестности $AB$ и $BC$ соответственно решения для $h$ и $Q$ могут быть найдены итерационным методом Пикара. Эти решения будут справедливы в двух районах $DBEA$ и $DBEC$, где $BD$ и $BE$ представляют собой характеристики, проходящие через точку $B$. Однако в точке $B$ и вдоль $BD$ и $BE$ решения для $h$ и $Q$ будут иметь разрыв.

Разрывы при движении приливного потока могут встречаться довольно часто, например, в районе плотины или затвора. В момент разрыва уровня одновременно наблюдается мгновенное изменение расхода или скорости.

Из предыдущих рассуждений следует, что при аналогичной ситуации теория характеристик может служить основой расчета направления движения приливного потока.

*Замечания.* 1. Положение, согласно которому разрыв будет перемещаться вдоль характеристической кривой, в общем, справедливо в том случае, когда «амплитуда» разрыва бесконечно мала. В противном случае, когда имеет место конечный разрыв, значения коэффициентов в приливных уравнениях по обе стороны от разрыва будут отличаться друг от друга из-за разности глубин. Тогда характеристические кривые уравнений будут иметь различный наклон по обе стороны от скачка и, как следствие этого, можно ожидать, что кривая, вдоль которой происходит перемещение разрыва, не будет совпадать с характеристической кривой приливных уравнений позади или впереди области скачка. Это показано на рис. 3.21 на примере бора. Кривая $PS$ на этом рисунке будет располагаться между соответствующими характеристическими кривыми позади и впереди области скачка, например между кривыми $RP$ и $TP$ в момент, когда скачок достигнет точки $P$.

В любой точке $P$ на кривой разрыва встречаются четыре характеристические кривые: по две с каждой стороны от скачка. В разд. 12 будет представлено более подробное описание теории этого вопроса.

2. В процессе практических испытаний итерационного метода Пикара было обнаружено следующее.

Поскольку приливное движение в реке или эстуарии вызывается соответствующим движением в море, вертикальные колебания в устье реки, в общем, могут считаться известными. В реке, подверженной действию прилива, величина расхода должна асимптотически стремиться к величине речного стока. На замкнутом конце расход может полагаться равным нулю. Очевидно, что эти граничные условия не связаны с характеристикой исходных приливных уравнений. Однако они не являются также и граничными условиями Коши, которые необходимо задать при использовании метода Пикара (см. (6.1)), так как эти два условия заданы в разных точках. Поэтому метод Пикара, описанный в этом разделе, обычно не может быть использован. Его применение возможно только тогда, когда вертикальные приливные колебания и расходы измеряются в одной и той же точке; но его нельзя применять, если граничные условия являются условиями так называемого смешанного типа, т. е. когда $h$ задано в одном месте, а $Q$ — в другом.

## 7. ИЗМЕНЕНИЕ УРОВНЯ И РАСХОДА ВОДЫ ВДОЛЬ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Изменение уровня и расхода воды вдоль характеристической кривой определяется соотношениями (2.1) и (2.2), если последние применяются к характеристической кривой на поверхностях $h(x, t)$ и $Q(x, t)$:

$$dh = \left\{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t}\right\}dt,$$

$$dQ = \left\{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial t}\right\}dt, \tag{7.1}$$

где $dx/dt$ определяется из (2.7). Значения производных в (7.1) в точках, находящихся на характеристике, удовлетворяют приливным уравнениям (2.1) и (2.2). В разд. 1 было показано, что для упрощенных приливных уравнений (1.1) и (1.2) выражения для $dh$ и $dQ$ сводятся к простому виду и что $dx/dt$ имеет постоянное значение, равное $\pm(gA_0b_0^{-1})^{\frac{1}{2}}$. Тогда мы можем записать:

$$dh = \left[\mp \frac{\partial Q}{\partial t}(gA_0b_0)^{-1/2} + \frac{\partial h}{\partial t}\right]dt$$

и

$$dQ = \left[\mp \frac{\partial h}{\partial t}(gA_0b_0)^{1/2} + \frac{\partial Q}{\partial t}\right]dt,$$

где отрицательный знак относится к положительным характеристикам, а положительный знак — к отрицательным характеристикам (положительное направление соответствует направлению вниз по потоку).

Следовательно, вдоль положительной характеристики $x-x_0=c_0(t-t_0)$ выполняется соотношение

$$\frac{dh}{dQ}=-(gA_0b_0)^{-1/2}$$

или

$$(gA_0b_0)^{1/2}h+Q=\text{const}.$$

Если характеристика проходит через точку $(x_0,\ t_0)$, то указанная выше константа будет равна $(gA_0b_0)^{\frac{1}{2}}h(x_0,\ t_0)+Q(x_0,\ t_0)$. Аналогично вдоль отрицательной характеристики имеем

$$(gA_0b_0)^{1/2}h-Q=\text{const}.$$

Очевидно, что для каждой характеристики константа будет различной.

Найденные выше соотношения аналогичны соотношениям (1.11), полученным в разд. 1.2.

Мы можем найти теперь отношение изменения уровня $dh$ к изменению расхода $dQ$ вдоль характеристической кривой, если $h$ и $Q$ удовлетворяют уравнениям (2.1) и (2.2). Используя эти уравнения для исключения $\partial h/\partial x$ и $\partial Q/\partial x$ в (7.1), находим

$$dh=\left\{\left[-\frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\alpha_2 b+b_s}{gA^2}Q\frac{\partial h}{\partial t}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{b_s|Q|Q}{C^2A^3}-\beta\right]\alpha\frac{dx}{dt}+\frac{\partial h}{\partial t}\right\}dt$$

и

$$dQ=\left[-b\frac{\partial h}{\partial t}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial Q}{\partial t}\right]dt,$$

где $dx/dt$ определяется из (2.7), а

$$\alpha=\left(1-\frac{\alpha_2 Q^2 b_s}{gA^3}\right)^{-1};\quad -\beta=\frac{W}{\rho g(a_0+h)}-I-\alpha^{-1}\frac{da_0}{dx}.$$

Если в эти уравнения входит множитель $dx/dt$, то в (2.7) необходимо учесть соответственно как положительный, так и отрицательный знак.

Из приведенных выше соотношений следует, что искомая величина равна

$$\frac{dh+\left(\frac{b_s|Q|Q}{C^2A^3}+\beta\right)\alpha\frac{dx}{dt}dt}{dQ}=$$
$$=\frac{-\frac{\alpha}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t}\frac{dx}{dt}+\alpha\frac{\alpha_2 b+b_s}{gA}\frac{Q}{A}\frac{\partial h}{\partial t}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial h}{\partial t}}{-b\frac{\partial h}{\partial t}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial Q}{\partial t}}.$$

Дальнейшее упрощение выражения, стоящего в правой части, состоит в исключении (с помощью (2.6)) члена $\alpha \frac{\alpha_2 b + b_s}{gA} \frac{Q}{A} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{dx}{dt}$, т. е.

$$\frac{dh + \left(\frac{b_s |Q| Q}{C^2 A^3} + \beta\right) \alpha \frac{dx}{dt} dt}{dQ} = -\frac{\alpha}{gA} \frac{dx}{dt}. \tag{7.2}$$

Вводя теперь в правую часть этого соотношения выражение для $dx/dt$ из (2.7), после некоторых преобразований получим

$$-\frac{\alpha}{gA} \frac{dx}{dt} = \mp \frac{\alpha}{(gAb)^{1/2}} \left\{ \pm \frac{\alpha_2 b + b_s}{2 (gAb)^{1/2}} \frac{Q}{A} + \left[1 + \frac{(\alpha_2 b - b_s)^2}{4gAb} \left(\frac{Q}{A}\right)^2\right]^{1/2} \right\}.$$

Поскольку $\frac{b_s}{gA} \left(\frac{Q}{A}\right)^2$ и $\frac{(\alpha_2 b - b_s)^2}{4gAb} \left(\frac{Q}{A}\right)^2$ меньше единицы, то в случае докритического потока члены в квадратных скобках могут быть представлены в виде ряда:

$$\alpha = \left[1 - \frac{\alpha_2 b_s}{gA} \left(\frac{Q}{A}\right)^2\right]^{-1} = 1 + \frac{\alpha_2 b_s}{gA} \left(\frac{Q}{A}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_2 b_s}{gA}\right)^2 \left(\frac{Q}{A}\right)^4 + \ldots$$
$$\left[1 + \frac{(\alpha_2 b - b_s)^2}{4gAb} \left(\frac{Q}{A}\right)^2\right]^{1/2} = 1 + \frac{(\alpha_2 b - b_s)^2}{8gAb} \left(\frac{Q}{A}\right)^2 - \frac{1}{128} \frac{(\alpha_2 b - b_s)^4}{g^2 A^2 b^2} \left(\frac{Q}{A}\right)^4 + \ldots$$

Если пренебречь степенями $Q/A = u$ выше второй (здесь $u$ — средняя по сечению скорость), то уравнение сводится к виду

$$\frac{dh + \left(\frac{b_s |Q| Q}{C^2 A^3} + \beta\right) \alpha \frac{dx}{dt} dt}{dQ} =$$
$$= \mp (gbA)^{-1/2} \left[1 \pm \frac{\alpha_2 b + b_s}{2 (gbA)^{1/2}} \frac{Q}{A} + \left(\frac{\alpha_2 b + b_s}{2 (gbA)^{1/2}} \frac{Q}{A}\right)^2 - \frac{(\alpha_2 b - b_s)^2}{8gAb} \left(\frac{Q}{A}\right)^2\right]. \tag{7.3}$$

Наиболее значащий член, содержащий множитель $Q^2/A^2$ и имеющий порядок $\left(\frac{\alpha_2 b + b_s}{2b} \frac{u}{c_0}\right)^2$, где $c_0$ — средняя скорость распространения $(gA_0/b_0)^{1/2}$, обычно пренебрежимо мал по сравнению с единицей. Тогда $\alpha$ также можно положить равным единице.

В этом случае мы используем уравнение

$$\frac{dh+\left(\frac{b_s|Q|Q}{C^2A^3}+\beta\right)\frac{dx}{dt}dt}{dQ}=\mp(gbA)^{-1/2}\left(1\pm\frac{a_2b+b_s}{2(gbA)^{1/2}}\frac{Q}{A}\right). \quad (7.4)$$

В (7.3) и (7.4) верхние знаки относятся к характеристикам, направленным вверх по потоку, а нижние — к характеристикам, направленным вниз по потоку.

Если в плоскости $x$, $t$ значения $Q$ заданы на одной из характеристик, то, используя (7.3) или (7.4), можно рассчитать значения $h$ вдоль этой характеристики по известной в одной точке величине $h$. Кроме того, вновь подтверждается вывод о том, что если $h$ и $Q$ заданы произвольно вдоль характеристики, то отыскать решения приливных уравнений не представляется возможным. Если же $h$ и $Q$ заданы на характеристических кривых различного рода или на произвольной кривой, то решения уравнений могут быть получены.

Поскольку производные от $h$ и $Q$ не входят ни в правую часть уравнений (7.3) и (7.4), ни в член $\frac{b_s|Q|Q}{C^2A^3}\cdot\frac{dx}{dt}$, то указанные соотношения оказываются очень удобными как для численного расчета, так и для использования графических методов. В этом случае приливные уравнения (2.1) и (2.2) можно заменить двумя уравнениями (7.3) или (7.4) соответственно с верхним или нижним знаком. Так как эти уравнения относятся к характеристикам, то их вид выбирается на основании уравнений (5.6) и (5.7).

Пусть $x$ является независимой переменной и пусть в соответствии с решениями уравнения для характеристик (2.7) $t$ зависит от $x$. Тогда для (7.4) можно записать:

$$\frac{dh}{dx}+\frac{b_s|Q|Q}{C^2A^3}+\beta=-(gbA)^{-1/2}\left(1+\frac{a_2b+b_s}{2(gbA)^{1/2}}\frac{Q}{A}\right)\frac{dQ}{dx},$$

$$\frac{dh}{dx}+\frac{b_s|Q|Q}{C^2A^3}+\beta=+(gbA)^{-1/2}\left(1-\frac{a_2b+b_s}{2(gbA)^{1/2}}\frac{Q}{A}\right)\frac{dQ}{dx}, \quad (7.5)$$

где первое уравнение относится к вперед направленным характеристикам (направленным вверх по потоку), а второе уравнение — к назад направленным характеристикам (направленным в сторону, обратную движению потока). Уравнения (7.5), которые в дальнейшем будут называться характеристическими уравнениями, положены в основу решений, с которыми мы будем иметь дело в следующем разделе.

*Замечание.* В разд. 2 упоминалось о том, что $\Delta=0$; другие определители присоединенной матрицы системы уравнений (2.1)—(2.4) также равняются нулю. В этом случае производные $\partial h/\partial x$ и т. д. нельзя определить однозначно.

Можно показать, что если $\Delta=0$, а $dh$ и $dQ$ удовлетворяют (7.2), то все определители системы (2.1)—(2.4) равны нулю. И обратно — можно получить (7.2) из (2.6), полагая один из определителей присоединенной матрицы системы (2.1)—(2.4) (ранг равен трем) равным нулю. Например,

$$\begin{vmatrix} dh & dt & 0 & 0 \\ dQ & 0 & dx & dt \\ \left(-\frac{b_s|Q|Q}{C^2A^3}-\beta\right) & -\frac{a_2b+b_s}{gA^2}Q & 0 & \frac{1}{gA} \\ 0 & b & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

## 8. ОБЩИЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Из рассуждений, приведенных в разд. 6, следует, что решения приливных уравнений определяются однозначно в том случае, когда для момента $t=0$ в каждой точке речного русла заданы соответствующие начальные условия. Во всяком случае, найденное решение будет справедливым для достаточно малого промежутка времени $\Delta t$. Несмотря на более сложный вид характеристических уравнений (7.4) и (7.5), их использование упрощает получение решений, удовлетворяющих заданным начальным и граничным условиям, по сравнению с тем случаем, когда для отыскания решения привлекаются исходные уравнения. Поскольку значения членов в уравнениях для характеристик заранее не известны, их требуется определить в ходе решения уравнений. Мы уже указывали, что точное решение обычно получить невозможно, поэтому целесообразно использовать метод последовательных приближений, т. е. искать численное решение поставленной задачи.

Пусть расход $Q(x, 0)$ и высота уровня $h(x, 0)$ известны для всех значений $x$ в момент $t=0$; предположим, что эти функции являются относительно гладкими. Кроме того, пусть $x_i$ обозначает ряд точек, расположенных вдоль оси $x$ на расстоянии $\Delta x$ друг от друга. Приближенные значения $Q$ и $h$ для малых $t$ найдем следующим образом (рис. 3.6 иллюстрирует последовательность операций).

Наклоны двух характеристик $C_1$ и $C_2$ в точке $x$ можно рассчитать из (2.7), так как величины $b$, $b_s$ и $A$ могут быть определены по заданным значениям $h$ для $x=0$. Если известны точные оценки, можно использовать также и уравнение (3.7) для интервалов $(x_i, x_{i-1})$. Из точек $(x_i, 0)$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$ восстанавливаются прямолинейные отрезки под углом, рассчитанным заранее; два отрезка, которые берут начало из различных точек, например $x_0$ и $x_1$, будут пересекаться в точке $(x^*, t^*)$. Если выбрать $\Delta x$ достаточно малым, то точки пересечения будут находиться в хорошем соответствии с фактическими точками пересечения реальных характеристик, выходящих из точек $(x_i)$. В точках пересечения значения $h$ и $Q$ можно определить с помощью характеристических приливных уравнений (7.5), если заменить дифференциалы конечными разностями.

Первое уравнение (7.5) применяется для нахождения $C_1$, а второе — для отыскания $C_2$. Предположим теперь, что вдоль любого отдельного отрезка, выходящего из точки $(x_i, 0)$, значения коэффициентов, определяемых при $t=0$ в уравнениях (7.5),

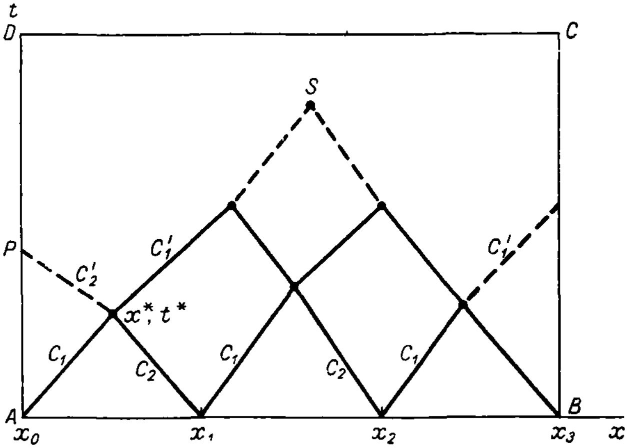



Рис 3.6.

остаются неизменными. Тогда для определения $h$ и $Q$ в точке $(x^*, t^*)$ имеются два линейных уравнения. Наклоны характеристик, выходящих из этих новых точек, также могут быть определены; после этого последовательность операций повторяется. Так можно аппроксимировать $h$ и $Q$ в точках сеточной области, покрывающей заданный район в плоскости $x$, $t$. Заметим, что отрезок $C_1$ направлен к одной из точек сеточной области, тогда как другой отрезок $C_1'$ направлен в противоположную сторону; все вместе эти отрезки $C_1$ составляют семейство характеристик $C_1$. По-видимому, если в точке сеточной области характеристические отрезки одного семейства имеют существенно различный наклон, то отсюда неизбежно следует вывод, что в пределах исследуемого района выбран чрезмерно большой шаг сетки. Математически можно доказать, что в окрестности оси (для достаточно малых значений $t$) указанный выше процесс сходится, если $\Delta x \to 0$. Кроме того, очевидно, что указанная последовательность расчета может использоваться только в том случае, если две кривые различных семейств не являются касательными. Поэтому необходимо предположить, что два семейства характеристик образуют хорошо определенную криволинейную систему координат в плоскости $x$, $t$, которая может быть успешно использована при изучении рек с докритическим режимом потока (см. разд. 4).

На практике начальные условия обычно известны только на конечном интервале ($0 \leqslant x \leqslant l$); в этом случае значения $h$ и $Q$ удается определить не во всех точках прямоугольника $ABCD$, а только в пределах области $ABS$, составленной из треугольников (см. разд. 1.4 и 6). Дополнительные граничные условия, т. е. $h(0, t)$ при $x=0$ и $Q(0, t)$ при $x=l$, в общем, определяют значения $h$ и $Q$ во всех точках прямоугольника.

## 9. РАСЧЕТ ИЛИ ГРАФИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ УРОВНЯ И РАСХОДА ВОДЫ В УЗЛАХ СЕТОЧНОЙ ОБЛАСТИ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИК ДИАГОНАЛЯМИ

### 9.1. Метод расчета

Рассмотрим случай, когда скорость $u$ мала по сравнению с $c=(gAb^{-1})^{1/2}$, а амплитуда прилива мала по сравнению с глубиной.

Разобьем реку на некоторое число участков длиной $l_n$ так, чтобы изменение профиля было ограниченным, а абсолютные значения скоростей распространения $|c_1|$ и $|c_2|$ вдоль соответствующих характеристик вверх и вниз по потоку существенно не отличались от их средних значений в различных точках сечений. Тогда характеристики в пределах каждого участка можно аппроксимировать прямыми линиями. Пусть для $n$-го участка $\bar{c}_n$ обозначает среднюю из $|c_{1n}|$ и $|c_{2n}|$ величину скорости, а $\tau_n$ — среднее время распространения, равное $l_n\bar{c}_n^{-1}$. Кроме того, если протяженность участков выбрана так, что значения $\tau$ для всех участков остаются практически неизменными, то в плоскости $x$, $t$ удается построить сеточную область. Значения $x$ в каждом последующем узле сеточной области отличаются на $l_n$, а значения $t$ — на $\tau_m$. Заметим, что $\tau_m$ считается постоянной, а $l_n$ может быть различной для каждого участка.

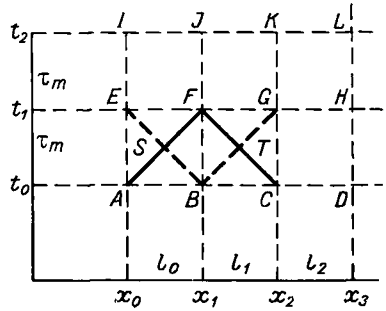



Рис. 3.7.

Подобная сетка представлена на рис. 3.7. Согласно определениям, указанным выше, характеристики можно аппроксимировать диагоналями сеточной области. Такая сетка может быть построена только для приливного периода и притом только тогда, когда амплитуда прилива мала по сравнению с глубиной. Если эти условия не выполняются, то временной интервал $\tau$ не может сохраняться неизменным в течение приливного периода, а должен непрерывно изменяться.

Если значения $h$ и $Q$ заданы в момент $t_0$ в точках $A$, $B$, $C$, $D$, ..., то мы можем рассчитать значения $h$ и $Q$ в других узлах сеточной области в моменты $t=t_1$, $t=t_2$ и т. д.

В качестве примера получим значения $h$ и $Q$ в точке $F$, предполагая, что значения этих функций в точках $A$ и $C$ заданы. Запишем сперва уравнения (7.5) для характеристик $AF$ и $CF$ и заменим в этих уравнениях дифференциалы конечными разностями:

$$\begin{gathered}(h_F - h_A) + (\overline{gAb})_{AF}^{-1/2}(Q_F - Q_A) = \\ = -\left[\beta + \bar{r}_{AF}(\overline{|Q|Q})_{AF}\right](x_1 - x_0),\end{gathered} \tag{9.1}$$

$$\begin{gathered}(h_F - h_C) - (\overline{gAb})_{CF}^{-1/2}(Q_F - Q_C) = \\ = -\left[\beta + \bar{r}_{CF}(\overline{|Q|Q})_{CF}\right](x_1 - x_2),\end{gathered} \tag{9.2}$$

здесь $r=b_sC^{-2}A^{-3}$, а черта сверху указывает на средние величины. Предположим, что из-за малых скоростей поправочными членами в (7.5) можно пренебречь. Среднюю величину от $|Q|Q$ вдоль характеристики можно найти, если предположить, что значение $Q$ изменяется линейно. Тогда, если $l_{AF}$ означает расстояние вдоль $AF$, можно записать:

$$(\overline{|Q|Q})_{AF} = \frac{1}{l_{AF}}\int_A^F |Q|Q\frac{ds}{dQ}dQ,$$

где $dQ/ds$ можно аппроксимировать в виде

$$\frac{dQ}{ds} \approx \frac{Q_F - Q_A}{l_{AF}}.$$

Следовательно,

$$(\overline{|Q|Q})_{AF} = \frac{1}{Q_F - Q_A}\int_A^F |Q|Q\,dQ,$$

или, если $Q_F$ и $Q_A$ имеют одинаковый знак,

$$(\overline{|Q|Q})_{AF} = \frac{1}{3}\frac{Q_A}{|Q_A|}(Q_F^2 + Q_AQ_F + Q_A^2). \tag{9.3}$$

Заметим, что множитель $Q_A/|Q_A|$ определяет знак члена. Когда на участке $(x_0, x_1)$ между $t_0$ и $t_1$ имеет место подпор воды, то $Q_A$ и $Q_F$ будут иметь различные знаки и мы получим, что

$$(\overline{|Q|Q})_{AF} = \frac{1}{3}\frac{Q_A}{|Q_A|}\frac{Q_A^3 + Q_F^3}{Q_A - Q_F}. \tag{9.4}$$

Если уравнение (9.3) подставить в уравнение (9.1), а аналогичное выражение для $(\overline{|Q|Q})_{CF}$ — в (9.2), получим два соотношения, с помощью которых можно вычислить $h_F$ и $Q_F$. Уравнения являются нелинейными относительно неизвестной $Q_F$, если не используется уравнение (9.4). Однако в этом случае членом, характеризующим трение, можно пренебречь, так как он очень мал в течение всего времени подпора. Кроме того, величина коэффициента Шези в течение этого периода оказывается не совсем определенной. Дальнейшие уточнения величин $h_F$ и $Q_F$ можно получить, вновь подставляя вычисленные значения этих величин в выражения для коэффициентов в уравнениях (9.1) и (9.2).

### 9.2. Линеаризация уравнений (9.1) и (9.2) и оценки коэффициентов

Поскольку решение нелинейных уравнений — занятие малоприятное, особенно когда расчеты выполняются на машине, обсудим некоторые методы линеаризации уравнений (9.1) и (9.2). Кроме того, приведем метод для оценки коэффициентов в этих уравнениях.

1. Соотношение (9.3) может быть линеаризировано для использования при численных расчетах заменой $Q_F^2$ на произведение $Q_A Q_F$. Если $Q'_F$ представляет собой величину $Q_F$, найденную на основании решения линейных уравнений (9.1) и (9.2), то мы имеем

$$(\overline{|Q|Q})_{AF} = \frac{1}{3}\frac{Q_A}{|Q|_A}\left[(Q'_F + Q_A)\,Q_F + Q_A^2\right]. \tag{9.5}$$

Затем можно получить уточненное значение $Q_F$.

2. Приближенную оценку $(\overline{|Q|Q})_{AF}$ можно также получить, полагая

$$(\overline{|Q|Q})_{AF} = Q_A Q''_F. \tag{9.6}$$

После вычисления $Q''_F$ и $h''_F$ из (9.1) и (9.2) расчет повторяется, при этом используется соотношение (9.5).

3. Оценку $(\overline{|Q|Q})_{AF}$ можно получить и другим способом. Из (9.3) находим, что

$$(\overline{|Q|Q})_{AF} = |Q_A|\,Q_A + Q_m(Q_F - Q_A),$$
$$Q_m = \left|\frac{2}{3}Q_A + \frac{1}{3}Q_F\right|. \tag{9.7}$$

Если $Q_A$ в момент $t = t_0$ известно, то достаточно знать только оценку $\frac{1}{3}Q_F$.

4. Окончательно можно предположить

$$(\overline{|Q|Q})_{AF} = Q_S^2, \tag{9.8}$$

где $Q_S$ — значение $Q$ в центре $S$ прямоугольника $ABEF$. Оценки $Q_S$ и коэффициентов $(gAb)^{-1/2}_{AF}$ и $\overline{r}_{AF}$, входящих в (9.1) и (9.2), будут даны в п. 5.

5. Пусть значения $h$ и $Q$ в точках $A$, $B$ и $C$ (рис. 3.7) известны из выполненного ранее расчета. Мы можем оценить величины $h$ и $Q$ в центрах $S$ и $T$ прямоугольников $ABEF$ и $BCGF$ следующим образом. Рассмотрим сперва точку $S$. Пусть $h_m$, $Q_m$, $b_{sm}$, $b_m$, $a_m$ и $A_m$ определяются как

$$h_m = \frac{1}{2}(h_A + h_B), \quad Q_m = \frac{1}{2}(Q_A + Q_B),$$

$$b_{sm} = \frac{1}{2}(b_{sA} + b_{sB}), \quad b_m = \frac{1}{2}(b_A + b_B),$$

$$a_m = a_A + \frac{1}{2}(h_B - h_A), \quad A_m = A_A + \frac{1}{2}(h_B - h_A)\, b_{sm}. \tag{9.9}$$

Тогда

$$r_m(|Q|Q)_m = \pm \frac{Q_m^2}{C^2 A_m^2 a_m}. \tag{9.10}$$

Используем теперь уравнение неразрывности

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b\frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

и заменим в нем дифференциалы конечными разностями; тогда в точке $S$ получаем

$$h_S = h_m + \frac{1}{2}\frac{(Q_A - Q_B)}{b_m}\frac{(t_1 - t_0)}{(x_1 - x_0)}. \tag{9.11}$$

Применим также упрощенное уравнение движения

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t} \pm \frac{Q^2}{C^2 A^2 a} = 0.$$

Здесь мы пренебрегаем членом второго порядка малости. Подставляя значение разности в точке $S$, имеем

$$Q_S - Q_m = \frac{1}{2} g A_m \left\{ \frac{h_A - h_B}{x_1 - x_0} - r_m(|Q|Q)_m \right\}(t_1 - t_0). \tag{9.12}$$

Значения $Q_S$ и $h_S$ определяются из (9.9) — (9.12). В качестве первого приближения допустим, что средние значения $h$ и $Q$ на характеристике $AF$ равны $h_S$ и $Q_S$. Аналогичным образом можно аппроксимировать средние значения на характеристике $FC$ и определить значения коэффициентов $(gAb)^{-1/2}_{AF}$ и $(gAb)^{-1/2}_{FC}$, а также значения членов, стоящих в правых частях уравнений (9.11) и (9.12). После того как $h_F$ и $Q_F$ вычислены, если есть необходимость, можно уточнить их, применяя (9.5) или (9.7). Таким образом, мы видим, что решение может быть получено методом последовательных приближений (итерационным методом); расчет при использовании этого метода продолжается до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность.

## 9.3. Сходимость характеристических разностных методов

В предыдущем подразделе использовался метод, в основе которого лежали характеристические уравнения. В следующей

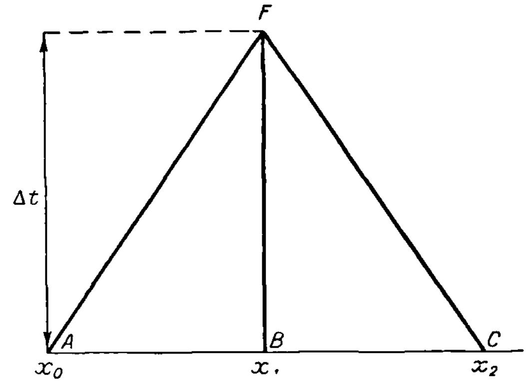



Рис. 3.8.

главе особое внимание будет уделено математическим проблемам, связанным с использованием конечно-разностных методов в численных расчетах. Здесь рассматривается сходимость и устойчивость решений разностных уравнений, заменяющих дифференциальные уравнения. Математическая теория этих вопросов применительно к характеристическим уравнениям основывается на работе Куранта, Изаксона и Риса [18] (см. также книгу Форсайта и Вазова [42]). В этих работах рассматриваются характеристические уравнения в нормализованной форме (см. (5.9) и (5.10)). Размеры книги не позволяют нам изложить эту теорию. Укажем только на основные результаты этих исследований.

Пусть $A$, $B$, $C$ и $F$ (см. рис. 3.8) представляют собой четыре узла сеточной области, в которой точка $F$ выбрана так, что она располагается в вершине треугольника с основанием $AC$ и сторонами, представленными в виде характеристических кривых, проходящих через $A$ и $C$. Тогда производные в уравнениях (7.5), которые подставляются в характеристические уравнения (5.8), должны быть заменены конечными разностями согласно следующим предположениям. Пусть приращение времени составляет $\Delta t$. В этом случае в уравнениях (7.5), из которых первое уравнение относится к вперед направленным характеристикам, производные $dh/dx$ и $dQ/dx$ в точке $(x_1, t_0)$ должны быть заменены назад направленными разностями:

$$\frac{h_F - h_A}{x_1 - x_0} \quad \text{и} \quad \frac{Q_F - Q_A}{x_1 - x_0},$$

тогда как в уравнении, относящемся к назад направленным характеристикам, производные заменяются вперед направленными разностями:

$$\frac{h_F - h_C}{x_1 - x_2} \quad \text{и} \quad \frac{Q_F - Q_C}{x_1 - x_2}.$$

Кроме того, естественно использовать вперед направленные разности по $t$.

Курантом, Изаксоном и Рисом [18] было показано, что в этом случае решение разностных уравнений сходится к решениям дифференциального уравнения, если $\Delta x$ (оно равно $x_1 - x_0$ и т. д.) и $\Delta t$ стремятся к нулю, и что решение является устойчивым (см. главу IV, разд. 1.2 и 1.3).

Читатель может проверить справедливость приведенных выше соображений применительно к формулам (9.1) и (9.2) и графическим решениям.

## 10. ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА ПОСТРОЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПРИЛИВНОГО ПОТОКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ХАРАКТЕРИСТИК

В основе этого метода лежит предположение о том, что уравнения (9.1) и (9.2) являются линеаризированными, если в качестве переменных рассматриваются $h_F$ и $Q_F$. В этом случае значения коэффициентов $(\overline{gAb})^{-1/2}_{AF}$ и т. д., а также членов, стоящих в правых частях уравнений (9.1) и (9.2), оцениваются с помощью одного из методов, указанных в разд. 9.2. При выборе мелкого шага сетки может быть использован 5-й метод; при крупном шаге для определения правых частей уравнений (9.1) и (9.2) можно применить соотношения (9.5) и (9.7). В этом случае вместо (9.1) и (9.2) привлекаются модифицированные линейные уравнения, полученные подстановкой соотношений (9.5) и (9.7).

Графическое определение функций $h_F$ и $Q_F$ сводится к следующему. В диаграмме (рис. 3.9), по осям которой отложены $h$

и $Q$, точка $A$ эквивалентна точке $A$ на рис. 3.7. Кроме того, расстояние $AA'$ по вертикали, проходящей через $A$, равно $-\overline{r}_{AF}(\overline{|Q|Q})_{AF}(x_1 - x_0)$, а линия $k_1$, проходящая через $A'$, описывается уравнением прямой с коэффициентом $-(\overline{gAb})^{-1/2}_{AF}$.. Следовательно, $k_1$ может быть описано уравнением (9.1), если в качестве переменных рассматриваются $h_F$ и $Q_F$, а членом $\beta$ пренебрегается.

Аналогично пусть $C$ является точкой с координатами $h_C$, $Q_C$, а отрезок $CC'$ имеет длину $-\overline{r}_{CF}(\overline{|Q|Q})_{CF}(x_1 - x_2)$. Тогда проходящую через $C'$ прямую $k_2$ с коэффициентом $(\overline{gAB})^{-1/2}_{CF}$ можно представить уравнением (9.2). Пересечение $k_1$ и $k_2$ определяет значение $h$ и $Q$ в точке $F$. Если окажется, что эти значения $h_F$

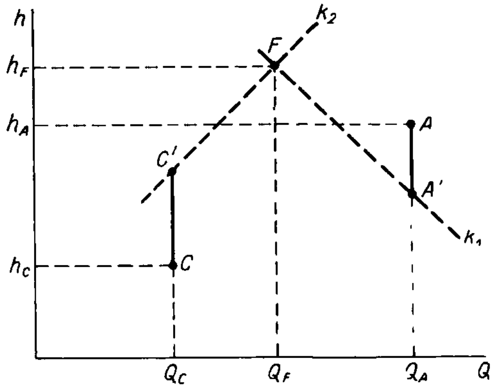



Рис 3.9.

и $Q_F$ сильно отличаются от величин, которые были использованы для оценки коэффициентов в уравнениях (9.1) и (9.2), то они должны быть пересчитаны, а графическое построение сделано заново. Значения $h$ и $Q$ во всех узлах сеточной области $E$, $F$, $G$ и т. д. можно определить аналогичным способом.

Выбирая соответствующие длины участков и интервалы времени, мы построили сетку (разд. 9.1), в которой диагонали служили характеристиками. Однако в реальных условиях, когда амплитуда прилива соизмерима с глубиной, направление характеристик зачастую так беспорядочно меняется, что движение приливного потока трудно аппроксимировать с помощью регулярной сеточной области. Кроме того, представляется более удобным включить в число узловых точек также и те точки, в которых производились измерения. В этом случае диагонали, проходящие через узлы сеточной области, в общем, не будут совпадать с характеристиками.

Пусть теперь движение приливного потока вдоль реки, которое начинается в момент $t=t_0$ и продолжается до $t=t_m$, описывается с помощью указанного выше графического метода. Другими словами, будем предполагать, что функции $h$ и $Q$ известны по всей длине реки при $t \leqslant t_m$. Функции $h$ и $Q$ можно представить графически в $h$, $t$ и $Q$, $t$-диаграммах для последовательности точек $x_p$ ($p=0, 1, 2, \ldots, n$); точки $x_p$ выбираются так, чтобы они приходились на участки слияния рек и пункты наблюдений приливных колебаний уровня. Займемся теперь поисками возможности распространения значений $h$ и $Q$ на моменты $t_q$ ($q=m+1, \ldots$).

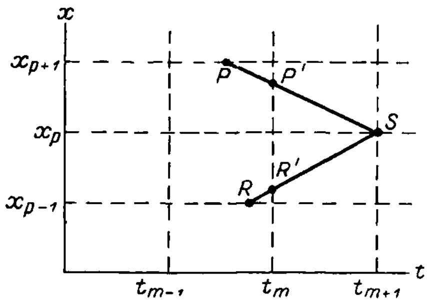


Рис. 3.10.

Для этого воспользуемся $x$, $t$-диаграммой (рис. 3.10), на которой проведены характеристики. $h$, $t$; $Q$, $t$ и $h$, $Q$-диаграммы представлены также на рис. 3.12. Точки ($x_p$, $t_m$) определяют сеточную область в плоскости ($x, t$). Как и в газд. 6 (см. также разд. 1.2 главы IV), сеточную область построим так, чтобы во всех ее узлах выполнялось условие

$$\frac{x_{p+1}-x_p}{t_{m+1}-t_m} \geqslant |c_{\max}|, \tag{10.1}$$

где $c$ обозначает правую часть уравнения (3.3), а $|c_{\max}|$ — максимальную величину $|dx/dt|$ (включая знаки $\pm$). Кроме того, примем расстояние и временны́е интервалы такими малыми, чтобы характеристики, которые определяются при решении уравнения (3.3) и проходят через точки ($x_p$, $t_{m+1}$), для интервалов ($x_{p-1}$, $x_p$) и ($x_p$, $x_{p+1}$) можно было аппроксимировать в $x$, $t$-диаграмме прямыми линиями. Поскольку коэффициенты в характеристических уравнениях зависят от скорости вдоль характеристик, то необходимо оценить среднюю величину скорости $u$ (см. разд. 9). Окончательно строим такую сетку, чтобы временны́е интервалы ($t_{m+1}$, $t_m$) и расстояния ($x_{p+1}$, $x_p$) были равными при любых $m$ и $p$. Характеристики, проходящие через узловые точки, по возможности должны меньше отличаться от диагоналей; отсюда следует, что отношение $(x_{p+1}-x_p)/(t_{m+1}-t_m)$ должно быть как можно ближе к $|c_{\max}|$. В общем, этот вариант сетки является наиболее удобным при использовании графического метода, а последовательность расчета, указанная выше, позволяет получить наиболее точные результаты.

Сначала указанным методом определяются $h$ и $Q$ в узловых точках ($x_p$, $t_{m+1}$) ($p=0, \ldots, n$), затем в точках ($x_p$, $t_{m+2}$) и т. д.

На рис. 3.10 $PS$ и $RS$ являются частями характеристик, проходящих через точку $(x_p, t_{m+1})$. Значения $h$ и $Q$ в $P$ и $R$ можно получить, интерполируя $h$ и $Q$ в $x_{p-1}$ и $x_{p+1}$ для $t < t_m$. Заметим, что в соответствии с условием (10.1) $P'$ и $R'$ находятся между $x_{p-1}$ и $x_{p+1}$. Значения $h$ и $Q$ вдоль $PS$ и $RS$ зависят от $h$ и $Q$ для $t > t_m$, т. е. от результатов дальнейшего расчета. Для того чтобы иметь возможность определить коэффициенты, стоящие перед дифференциалами в уравнениях (9.1) и (9.2), предварительно необходимо оценить значения $h$ и $Q$ вдоль $PS$ и $RS$ (разд. 9.2). Тогда значения $h$ и $Q$ в точке $S$ можно определить по значениям этих характеристик в $P$ и $R$. Если потребуется, то оценки $h$ и $Q$ вдоль $PS$ и $RS$ могут быть затем уточнены, а расчеты повторены.

В качестве примера рассмотрим русло, закрытое с одного конца (рис. 3.11); на этом закрытом конце $Q=0$.

В устье ($x_0$) вертикальные колебания уровня считаются известными. Кроме того, предполагается, что размеры реки позволяют разбить ее на четыре части. Длина каждого участка и временной интервал выбираются такими, чтобы можно было применить те различные упрощения, которые были указаны выше. На рис. 3.12 представлена сетка, полученная для плоскости $x$, $t$. В качестве граничных условий для любых значений $t$ воспользуемся заданием вертикальных колебаний уровня в устье реки $h(x_0, t)$ и условием $Q=0$. Кроме того, допустим, что для $t \leqslant t_2$ значения $h(x_i, t)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ и $Q(x_i, t)$ $(i=0, 1, 2, 3)$ в узловых точках заранее определены графическим методом (см. $h$, $t$ и $Q$, $t$-диаграммы).

Найдем сперва $h$ и $Q$ в точке $R(x_2, t_3)$.

Пусть $RR_1R'_1$ и $RR_2R'_2$ являются характеристиками, проходящими через $R$. Тогда в точках $R'_1$ и $R'_2$ значения $h$ и $Q$ известны, они представлены в $h$, $Q$-диаграмме точками $\alpha_1$ и $\alpha_3$ (индекс относится к точкам $x_1$ и $x_3$).

Теперь для характеристик, начиная с точки $\alpha_1$ для $R'_1R$ и с точки $\alpha_3$ для $R'_2R$, можно применить графический метод, показанный на рис. 3.9. Тогда вертикальное расстояние $(\alpha_1, \alpha'_1)$ равно $-\bar{r}_{R'_1R}(|Q|Q)(x_2 - x_1)$ (членом $\beta$ пренебрегается), а наклон линии $m$, проходящей через $\alpha_1$, равен

$$-(gAb)^{-1/2}_{R'_1R}\left(1 + \frac{a_2b + b_s}{2(gAb)^{1/2}}\frac{Q}{A}\right),$$

если использовать формулу (7.5).

Далее, $\alpha_3$, $\alpha_3'$ и линия $l$ определяются аналогичным образом.

Значения $h$ и $Q$ в $R$ находятся в точке пересечения линий $l$ и $m$. Затем можно продолжить кривые $h(x_2, t)$ и $Q(x_2, t)$ до $t=t_3$, как это показано на рис. 3.12.

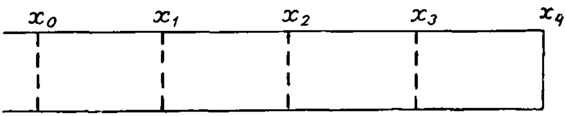



Рис. 3.11.

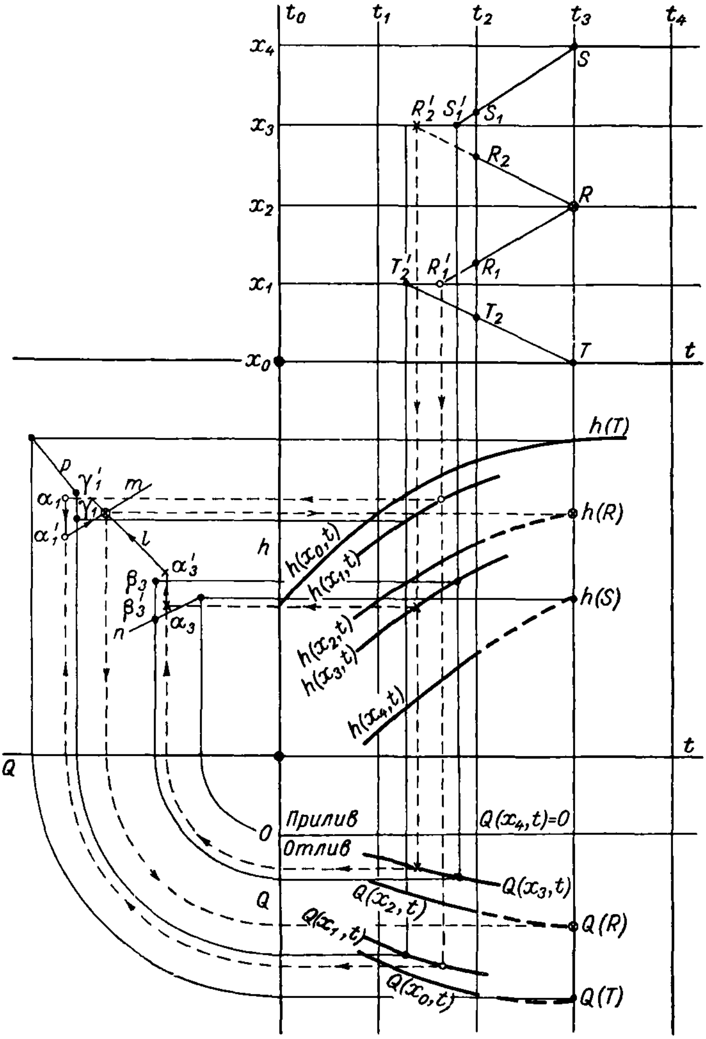



Рис. 3 12

Аналогичный прием может быть использован для нахождения $h$ и $Q$ в точках $(x_1, t_3)$ и $(x_3, t_3)$.

Теперь нам необходимо рассмотреть способ получения $h$ и $Q$ в точках, в которых эти величины зависят, кроме всего прочего, от граничных условий (т. е. в точках $x=x_4$ или $x=x_0$). В $(x_0, t_3)$, где значение $h$ известно, $Q$ определяется следующим образом.

Точкой $\gamma_1$ в $h$, $Q$-диаграмме обозначена точка $T'_2$, в которой пересекаются характеристика $T'_2T$ и линия $x=x_1$. Поэтому здесь нам нужно рассмотреть только характеристическое уравнение для $T'_2T$. Если оценить коэффициенты, то линию $p$ в $h$, $Q$-диаграмме

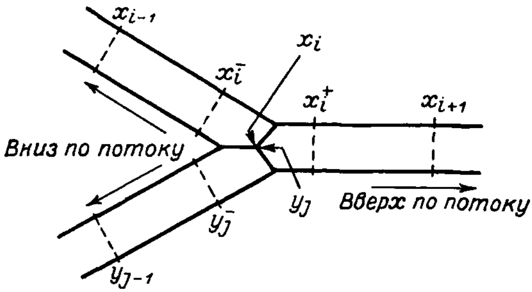



Рис. 3.13.

можно провести обычным способом. Пересечение $p$ и горизонтальной линии $h=h(x_0, t_3)$ или $h=h(T)$ определяет точку в плоскости $h$, $Q$, соответствующую точке $T$ в $x$, $t$-диаграмме. Теперь $Q(x_0, t_3)$ или $Q(T)$ определено и мы можем продолжить кривую $Q(x_0, t)$.

Для определения $h$ и $Q$ в точке $(x_4, t_3)$ применяется аналогичный метод; однако граничное условие $h(x_0, t)$ заменяется теперь условием $Q(x_4, t)=0$. Характеристика, проходящая через эту точку, обозначается через $S'_1S$.

В $h$, $Q$-диаграмме точка $\beta_3$ определяет значения $h$ и $Q$ в точке $S'_1$; соответствующее характеристическое уравнение представляется линией $n$. Пересечение этой линии и вертикальной линии $Q=0$ определяет $h$ $(x_4, t_3)$ или $h$ $(S)$.

В качестве второго примера рассмотрим вертикальные и горизонтальные приливные колебания в месте слияния притоков с главным руслом.

На рис. 3.13 показаны границы соответствующих участков в районе слияния реки и притока. Слияние имеет место в точке $x_i$ главного русла и в $y_j$ притока. На рис. 3.14 приведены $x$, $t$-диаграмма для главной реки и $y$, $t$-диаграмма для притока; оси обеих диаграмм совпадают. Пусть вертикальные и горизонтальные приливные колебания заданы в обеих реках в любой момент времени

$t < t_2$. Изменение $h$ и $Q$ во времени представлено в $h$, $t$ и $Q$, $t$-диаграммах для точек $x_{i-1}$, $x_i$, $x_{i+1}$ и $y_j$, $y_{j-1}$. Пусть в точке $x_i$

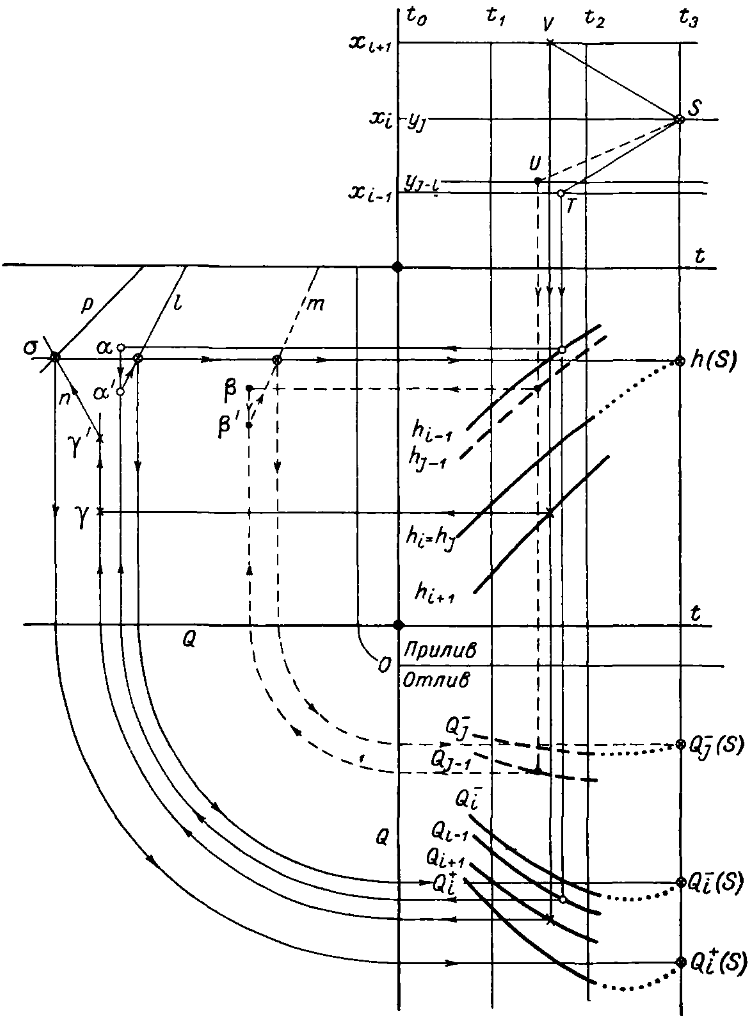



Рис. 3.14.

выполняются следующие упрощенные соотношения (см. главу 1, разд. 6):

$$h(x_i,\ t)=h(y_j,\ t) \quad \text{или} \quad h\left(x_i^+,\ t\right)=h\left(x_i^-,\ t\right)=h\left(y_j^-,\ t\right), \tag{10.2}$$

$$Q\left(x_i^-,\ t\right)+Q\left(y_j^-,\ t\right)=Q\left(x_i^+,\ t\right), \tag{10.3}$$

где $x_i^-$, $y_j^-$ — координаты точек, лежащих в направлении движения потока, а $x_i^+$ — координаты точек, расположенных в направлении, обратном движению потока. Приведенные соотношения выполняются для кривых, показанных в $h$, $t$ и $Q$, $t$-диаграммах для $t \leqslant t_2$.

Значения $h$ и $Q$ в точке $(x_i, t_3)$ и т. д. показаны на рис. 3.14. Пусть прямые линии $TS$, $US$ и $VS$ являются характеристиками различных участков и пусть они встречаются в точке $S$. Первая и третья линии представляют собой характеристики участков $(x_{i-1}, x_i)$ и $(y_{j-1}, y_j)$, лежащих в направлении движения потока, а третья линия — характеристика сечения $(x_i, x_{i+1})$, лежащего в направлении, обратном движению потока. Значения $h$ и $Q$, соответствующие точкам $T$, $U$ и $V$, показаны точками $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ на $h$, $Q$-диаграмме. Поскольку прямые линии $l$, $m$ и $n$ представляют собой (согласно уравнениям для этих характеристик) соотношения между $h$ и $Q$, то значения $h$ и $Q$ в местах соединения соответствующих участков также находятся на этих линиях. Точки соединения сечений определяются с помощью соотношений (10.2) и (10.3) следующим образом. Строится линия $p$, причем она строится так, чтобы для каждого значения $h$ и $Q$ на $p$ значение $Q$ было равно сумме тех значений $Q$ на $l$ и $m$, для которых $h$ совпадают с заданным значением $h$ на линии $p$. Линия $p$ пересекает линию $n$ в точке $\sigma$. Горизонтальная линия, проходящая через точку $\sigma$, будет определять на линиях $l$, $m$ и $n$ соответствующие значения $Q$ и $h$ для точки $S$ слияния рек в $x$, $t$-диаграмме. Кривые $Q_i^-$, $Q_j^-$ и $Q_i^+$ на $Q$, $t$-диаграмме могут быть продолжены до $t = t_3$; аналогичную операцию можно проделать для кривой $h_i = h_j$.

Дальнейшие сведения о графическом методе решения можно найти в работах Шёнфельда [123] и Дронкерса и Шёнфельда [34]. Впервые графический метод решения характеристических уравнений в применении к движению длинных волн был использован Массо [87]. В дальнейшем этот метод был развит и использован в численных расчетах Холстерсом [65, 66].

Графические методы применялись также в работах Крайа [20]. Метод характеристик, основанный на указанных выше положениях, может быть с успехом реализован на электронных вычислительных машинах. Об эффективности этого метода при выполнении практических расчетов можно судить по работе Шёнфельда, а об использовании электронных вычислительных машин при реализации метода характеристик можно прочесть в работах Фокса [44] и Коллатца [16, 17].

## 11. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В РЕКЕ

Пусть возмущение $h(x, t)$, наложенное на существующее движение в реке, находится в точке $x=0$ и пусть оно перемещается вверх по течению, где поток находится в докритическом режиме.

Изучая поведение волны, мы должны установить, представляет ли $h(x, t)$ повышение или понижение уровня воды. В первом случае, когда возмущение, которое считается непрерывной функцией в $x=0$, распространяется в точки $x > 0$ при $t > t_0$, движение может стать разрывным. Однако в случае понижения уровня движение повсюду является непрерывным. Этот факт можно объяснить следующим образом.

Если предположить, что ширина потока равна ширине района накопления воды, то характеристики определяются соотношениями

$$\frac{dx^+}{dt} = u_0 + u + (ga)^{1/2} \quad \text{и} \quad \frac{dx^-}{dt} = u_0 + u - (ga)^{1/2},$$

где $a$ — глубина, которая по мере возрастания $t$ непрерывно увеличивается (в случае повышения уровня) или уменьшается

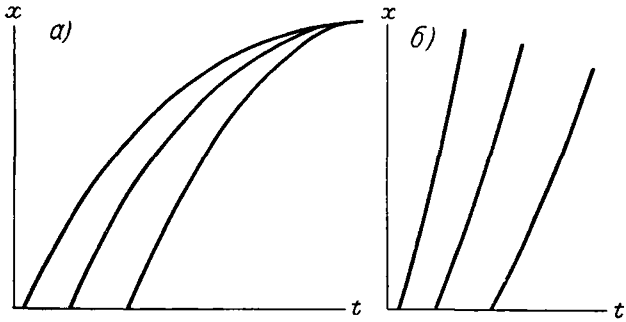



Рис 3.15.

(в случае понижения уровня). Скорость $u_0$ означает скорость течения в реке перед возмущением; она считается постоянной и докритической; $u$ представляет собой скорость, обусловленную возмущением, она будет расти с увеличением $t$; при $t=0$ $u$ принимается равной нулю. Поскольку при повышении уровня глубина $a$ и скорость $u$ увеличиваются со временем, то наклоны характеристик, направленных вверх по реке, будут увеличиваться в окрестности $x=0$.

Сходимость линий (рис. 3.15 *а*) позволяет построить огибающую кривую. Это значит, что для значений $x$ и $t$, находящихся за пределами точки касания, не существует непрерывного решения для $h$ и $Q$.

Поскольку характеристические кривые отклоняются от прямых линий, существование огибающей кривой является необязательным. Случай, когда огибающую кривую построить невозможно, означает, что волна становится более пологой.

Однако при понижении уровня значение $(ga)^{1/2}$ будет уменьшаться. Так как скорость $u$ отрицательна, то характеристики в окрестности $t=0$ будут расходиться (рис. 3.15*б*) и провести огибающую кривую будет невозможно. Скорости и уровни воды будут везде непрерывно изменяться.

Более подробное обсуждение искажения волны можно найти в книге Стокера [131].

Образование бора также можно объяснить теоретически — он образуется сразу же после малой воды в период повышения уровня. Значительные изменения глубины и скорости, которые имеют место во время прилива, обусловливают очень большие отклонения характеристических кривых от прямых линий.

Появление бора можно предвидеть, анализируя положение нижней, экстремальной точки кривой, огибающей положительные характеристические кривые при условии, что такая огибающая существует.

Из предыдущего анализа следует, что во время отлива разрывов в движении приливного потока не будет

В следующем разделе приводится более подробное исследование теории бора.

## 12. ТЕОРИЯ БОРА

В эстуариях некоторых рек могут наблюдаться внезапные возмущения уровня воды, которые распространяются вверх по реке. Эти отклонения уровня появляются сразу же после прекращения отлива в момент перехода к приливу; затем наступает такое внезапное и быстрое повышение уровня, что кажется, будто стена воды стремительно мчится вверх по руслу. Это явление называется бором. Вполне вероятно, что часть фронта бора представляет собой вертикальную стенку, однако основная часть профиля имеет просто очень крутой наклон. Вода на тыльной стороне бора сильно турбулизирована, а уже через несколько сотен метров поверхность воды вновь спокойна.

С математической точки зрения бор характеризуется разрывным изменением уровня в определенный момент времени. Однако по обе стороны от линии разрыва существуют соответственно односторонние производные по расстоянию и времени.

Бор может распространяться вдоль реки на огромные расстояния, вплоть до границы распространения прилива, однако чаще все же встречаются случаи, когда бор разрушается быстрее, чем прилив. Боры большой высоты наблюдаются в различных реках мира; можно отметить хорошо известные примеры бора в Тунцзяне в Китае и Хугли в Индии. Высота бора в Хугли может достигать 3 м в момент сизигии; в Тунцзяне она может быть даже больше. В Европе боры наблюдаются в Англии — в Северне и Солвей Ферт-5, где дно имеет крутой уклон, а высота бора может достигать 1—2 м. Боры наблюдаются также и в некоторых реках Франции. В старину бор наблюдался на Сене, где он изучался многими исследователями, однако при реконструкции русла реки причина, порождающая бор, была устранена, и в настоящее время только при особом стечении обстоятельств можно наблюдать небольшие боры.

Далее необходимо отметить, что время прохождения бора, т. е. время достижения его наибольшей высоты, составляет всего несколько минут. После того как прошел бор, уровень воды, хотя и более медленно, но продолжает повышаться (рис. 3.16).

Исходя из того факта, что бор наблюдается только в очень немногих реках, можно сделать вывод, что он может образоваться только при стечении различных специфических условий. Бор может появляться, когда отношение глубины в верхней части реки к приливным колебаниям в устьевой части реки достигнет предельной величины. Но даже тогда бор не наблюдается в любой момент приливного периода. Обычно он появляется только в период наивысших приливов, таких, как сизигийные приливы. Если глубина в верхней части потока уменьшилась, например, за счет аккумуляции воды в речном русле, то бор появляется при относительно более низких приливах.

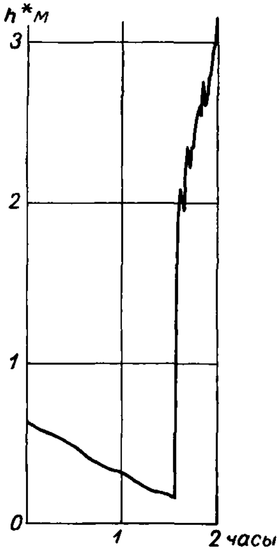


Рис. 3 16.

В устьях рек, где вертикальные колебания уровня зависят от приливов в море, бор не встречается. Вследствие уменьшения глубин прилив, проникающий в реку, будет искажаться (см. главу 2) таким образом, что период прилива (от МВ до ПВ) будет становиться короче, а период отлива — длиннее. В результате произойдет увеличение крутизны кривой изменения уровня, а следовательно, и увеличение накопления воды в единицу времени. Если крутизна кривой в некоторой точке потока превысит определенные предельные значения (зависящие от глубины реки на участке, лежащем ниже данной точки), то появляется возможность образования бора, который начнет распространяться вверх по потоку.

Эти явления показаны на рис. 3.17. На нем приведены три кривые хода уровня — в устье реки Хугли ($h_0$), на трети расстояния между устьем и Калькуттой ($h_1$) и в самой Калькутте ($h_2$), где наблюдался бор. Образование бора происходило на нижележащем участке реки. Направление скоростей в течение всего периода прохождения бора представлено на рис. 3.18. Вертикальные кривые хода уровня и скорости определены в устье одного из притоков реки Хугли. Интересные соображения о проблеме искажения длинных волн высказал Шёнфельд [122].

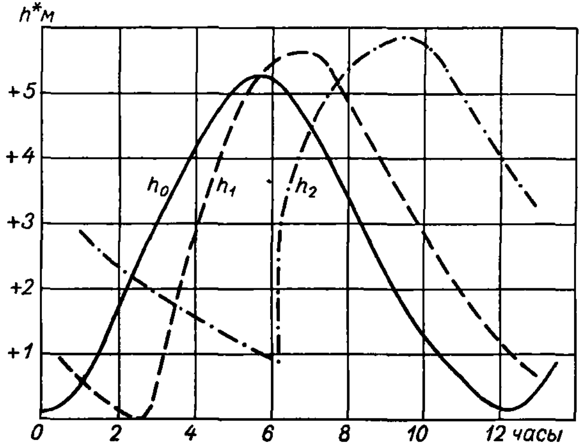
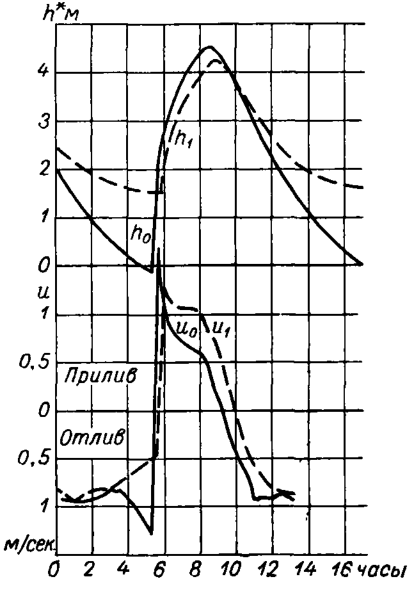



Рис. 3.17.



h*м
4
3
2
1
0
u
1
0,5
0
0,5
1
м/сек
h1
h0
u0
u1
Прилив
Отлив
0 2 4 6 8 10 12 14 16 часы


Рис 3.18.

Высота бора бывает различной в разных участках реки; она зависит от изменений ширины русла и глубины и от силы прилива. Если бор существует, то высота бора по мере его перемещения вдоль реки один или несколько раз достигает максимума, а затем уменьшается до нуля, что связано с диссипацией энергии за счет трения. Будет наблюдаться также интерференция, вызванная частичным отражением бора от меандров реки. На глубоководных участках реки бор перемещается быстрее, чем на мелководных участках.

Математическое описание распространения и высоты бора, которые зависят от различных указанных выше факторов, является довольно сложной задачей, так как существование бора связано с приливным движением. Кроме того, бор возникает при очень определенном сочетании условий и поэтому особенно трудно определить время и место его зарождения. В дальнейшем будут выведены основные уравнения, определяющие распространение и высоту бора. Для районов и моментов времени, где и когда может встретиться бор, они заменят собой обычные приливные уравнения. Поскольку бор распространяется вверх по реке, то приливное движение в реке будет как бы расщепляться на две части: на фронте бора (где наблюдается отлив) и за линией фронта (где имеет место прилив).

На фронтальной линии бора скорость отливного течения может быть малой (но не равной нулю), за бором скорости приливного течения могут стать очень большими (рис. 3.18).

В обоих районах выполняются обычные приливные уравнения. Бор определяет промежуточное положение границы между этими районами. Очевидно, что нам нужно знать глубины и ширину любого из возможных сечений, которые может пройти бор.

В качестве граничных условий, определяющих приливное движение за бором, принимают вертикальные приливные движения в устье реки и высоту уровня непосредственно за бором.

Приливное движение на передней стороне бора определяется краевым условием на границе прилива (т. е. на той границе, за пределами которой уровни зависят только от стока воды из речного бассейна) или на береговой черте, а также уровнем воды непосредственно на фронте бора.

Условия на линии бора являются так называемыми внутренними граничными условиями (см. главу 1, разд. 8). Их необходимо привлечь для того, чтобы обеспечить единственность решения. Внутренние условия связываются между собой посредством уравнения, определяющего высоту бора (а значит, и разницу между уровнями воды на обеих сторонах бора). Для определения скорости распространения бора служит еще одно уравнение.

Как уже отмечалось, наибольшие трудности возникают из-за того, что нам заранее неизвестно изменение местоположения бора во времени. Это изменение должно определяться в процессе выполнения приливных расчетов.

### 12.1. Формула для расчета бора в реке

Уравнения движения и неразрывности, определяющие распространение длинных волн, перестают быть справедливыми в тех местах, где имеется разрыв уровня (т. е. внезапный переход от одного уровня к другому). Бор может рассматриваться

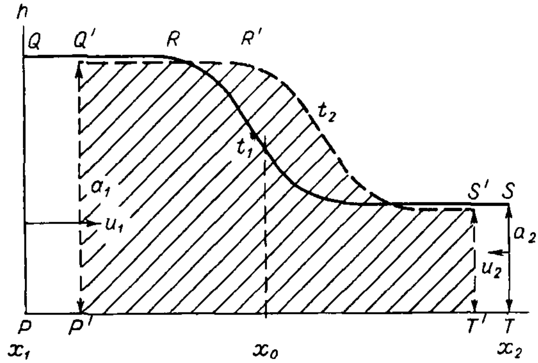



Рис. 3 19.

как движущийся разрыв, который является функцией времени и места. Соответствующий разрыв в уровне $h$ означает наличие бесконечных вертикальных ускорений.

Однако известно, что длина участка, в пределах которого вертикальные ускорения становятся существенными, сравнительно невелика. Поэтому с математической точки зрения можно считать, что реальный разрыв в $h$ находится в центре переходной зоны. Следовательно, невозможно определить временны́е и пространственные производные от $h$ и $Q$.

С гидравлической точки зрения бор может рассматриваться как движущийся гидравлический прыжок, который перемещается со скоростью $c$. Если наблюдатель движется со скоростью бора, он будет видеть стационарный гидравлический прыжок, следовательно, он сможет применить хорошо известные формулы для гидравлического прыжка, а затем перевести их в подвижную систему координат.

На рис. 3.10 показано распространение бора вверх по потоку, как это представляется наблюдателю, находящемуся в моменты $t_1$ и $t_2$ на берегу реки. Уровень воды в момент $t_1$ обозначен сплошной линией $QRS$. На сечении $PQ$ наблюдалась скорость течения $u_1$, направленная в сторону движения потока (прилив), а на $ST$ — скорость $u_2$, направленная в обратную сторону (отлив), так как бор возникает в конце отлива.

Кроме того, из наблюдений обычно следует, что $u_1 > |u_2|$.

В момент $t_2$ частицы воды, которые при $t=t_1$ находились в районе $PQRST$, будут теперь находиться в районе $P'Q'R'S'T'$. Очевидно, что объем воды единичной ширины $(a_1u_1 - a_2u_2)$ равен $c(a_1 - a_2)$, где $c$ — скорость бора. И мы вновь приходим к уравнению (5.1) главы 1:

$$q = a_1(u_1 - c) = a_2(u_2 - c), \tag{12.1}$$

где скорость $u_2$ является отрицательной величиной, а $q$ представляет собой количество воды, заключенное в объеме единичной ширины, перемещающемся вместе с бором.

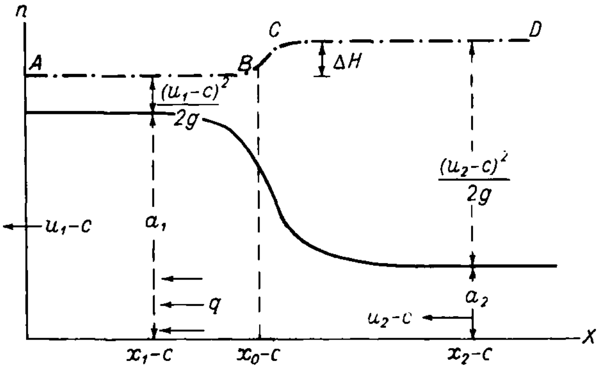


Рис. 3 20.

На рис. 3.20 показана ситуация, которую видит движущийся наблюдатель. Он видит, что передняя часть бора, перемещающегося с относительной скоростью $u_2 - c$, движется в сторону, обратную направлению потока, где бор имеет относительную скорость $u_1 - c$.

Уравнение, заменяющее собой уравнение движения, получается так же, как это было сделано в главе 1, разд. 5, при использовании уравнения сохранения импульса. При выводе этого уравнения предположим, что выполняются следующие условия.

Разрыв имеет место в точке $x_0$ между двумя вертикальными плоскостями, находящимися в $x_1$ и $x_2 = x_1 + \delta x$ $(x_1 < x_2)$. Дно горизонтально, а $\delta x$ — такой наименьший отрезок, при котором скорости всех частиц в каждом из сечений $x_1$ и $x_2$ можно считать равными и горизонтальными. Следовательно, в $x_1$ и $x_2$ вертикальными движениями можно пренебречь. Эти предположения подразумевают, что давление в плоскостях $x_1$ и $x_2$ является гидростатическим. И наконец, вдоль отрезка пути ($x_1$, $x_2$) придонным трением пренебрегают.

Тогда уравнение сохранения импульса принимает вид (см. (5.2) главу 1)

$$\frac{1}{2} g\left(a_1^2 - a_2^2\right) = -q\left(u_1 - u_2\right). \tag{12.2}$$

Из (12.1) следует, что правая часть (12.2) равна

$$(c - u_2)^2 a_2 - (c - a_1)^2 a_1 .$$

В том случае, когда силой трения пренебрегать нельзя, уравнение (12.2) может быть сведено к виду

$$\rho F^* + \frac{1}{2} \rho g\left(a_1^2 - a_2^2\right) = -\rho q\left(u_1 - u_2\right). \tag{12.2'}$$

Из (12.1) и (12.2) можно вывести два соотношения, которые очень удобны для использования.

Из

$$\frac{1}{2} g a_1^2 \left(\frac{a_2^2}{a_1^2} - 1\right) = a_2 (u_2 - c)^2 \left[\frac{u_1 - c}{u_2 - c} - 1\right] =$$

$$= a_2 (u_2 - c)^2 \left[\frac{a_2}{a_1} - 1\right]$$

и $c > |u_2|$ получается формула

$$c = u_2 + (g a_2)^{1/2} \left[\frac{a_1}{a_2}\left(\frac{a_2 + a_1}{2a_2}\right)\right]^{1/2}, \tag{12.3}$$

аналогичным образом

$$c = u_1 + (g a_1)^{1/2} \left[\frac{a_2}{a_1}\left(\frac{a_1 + a_2}{2a_1}\right)\right]^{1/2}. \tag{12.4}$$

Мы можем все же поставить вопрос, даст ли нам дополнительную информацию о распространении бора уравнение баланса энергии, записанное для того сечения, где находится бор. Можно ожидать, что уравнение сохранения энергии, записанное для сечения, перпендикулярного направлению распространения бора, не будет выполняться, если только не принять во внимание потери энергии за счет вязкой диссипации.

Однако мы можем получить интересующее нас условие для бора из уравнения баланса энергии, даже если мы не будем учитывать потери энергии за счет внутреннего трения.

Разность энергий $\delta H$ в пунктах $x_2 - c$ и $x_1 - c$ (рис. 3.20, где $\delta H$ заменено на $\Delta H$) для подвижной системы координат записывается в виде

$$\delta H = \left\{ a_2 + \frac{(u_2 - c)^2}{2g} \right\} - \left\{ a_1 + \frac{(u_1 - c)^2}{2g} \right\}. \tag{12.5}$$

Используя выражения (12.3) и (12.4), перепишем (12.5) в виде

$$\delta H = \frac{(a_1 - a_2)^3}{4a_1 a_2}. \tag{12.6}$$

Если определить высоту бора как

$$\Delta = a_1 - a_2, \tag{12.7}$$

то получаем

$$\frac{\delta H}{\Delta} \approx \frac{1}{4} \frac{\Delta^2}{a_1^2} \left( 1 + \frac{\Delta}{a_1} + \frac{\Delta^2}{a_1^2} \right). \tag{12.8}$$

Используя (12.2), где $q$ — отрицательная величина, и (12.5), имеем

$$\rho g q \delta H = -\rho (a_1 - a_2) g q + \frac{1}{2} \rho \left( u_2^2 - u_1^2 \right) q -$$
$$- \frac{1}{2} \rho g \left( a_1^2 - a_2^2 \right) c. \tag{12.9}$$

Это соотношение описывает скорость изменения энергии ($dE/dt$) за единицу времени в объеме единичной ширины. Отдельные члены этого уравнения характеризуют разности потенциальной и кинетической энергии, а также работу, производимую силами давления. Последняя дается выражением

$$\frac{1}{2} \rho g \left( a_1^2 - a_2^2 \right) c.$$

Исследованием формы бора в зависимости от его энергетического баланса занимался Шёнфельд [124].

Равновесие и устойчивость профиля достигаются за счет действия вертикальных ускорений частиц воды. В подошве бора скорость его увеличивается за счет вертикальных ускорений, которые противоположны ускорению силы тяжести. В вершине бора скорость замедляется, так как направление вертикального ускорения совпадает с направлением ускорения силы тяжести. В результате этого скорость распространения становится равной во всех частях бора и тогда бор становится устойчивым. В том случае, когда высота и крутизна бора достигнут критической величины, волна начнет разрушаться.

Шёнфельд исследовал эту проблему, используя теорию коротких волн. В лабораторных условиях было найдено, что критическая относительная высота прыжка, вероятно, будет лежать между 0,4 и 0,5, а крутизна — между 0,55 и 0,75. Это согласуется с наблюдениями стационарных гидравлических прыжков.

Несколько позже на основании соотношений (12.1) и (12.2) мы получим формулы, которые выражают высоту бора $\Delta$ в зависимости от глубины места непосредственно перед бором и за ним и относительных скоростей распространения $c-u_1$ или $c-u_2$. Кроме того, мы выведем приближенные формулы для $c$ и $\Delta$, выраженные через скорости распространения и глубины в районах, расположенных выше и ниже (по потоку) бора.

Сначала найдем высоту бора как функцию глубины реки непосредственно перед бором и за ним, а также как функцию его скорости распространения. Поскольку $a_1 > 0$, то из (12.3) получаем

$$a_1 = -\frac{a_2}{2} + \left[\frac{a_2^2}{4} + \frac{2a_2(u_2-c)^2}{g}\right]^{1/2}. \tag{12.10}$$

Если в соответствии с (12.7) ввести высоту бора, то найдем, что

$$\Delta = -\frac{3}{2}a_2 + \left[\frac{a_2^2}{4} + \frac{2a_2(u_2-c)^2}{g}\right]^{1/2}. \tag{12.11}$$

Здесь необходимо отметить, что (12.11) эквивалентна формуле, которая обычно получается для гидравлического прыжка (если $u_2-c$ заменить на скорость потока в нижней части прыжка).

Из (12.11) можно получить важный вывод. Если $c$ равняется $c_2$, где

$$c_2 = u_2 + (ga_2)^{1/2} \tag{12.12}$$

представляет собой скорость распространения волн, перемещающихся вверх по потоку впереди бора, то находим, что $\Delta=0$ и бора не существует.

Следовательно, для бора должно выполняться условие $c > c_2$ и, чем больше это неравенство, тем выше бор.

Аналогичным образом можно выразить $\Delta$ через $a_1$ и $u_1-c$, если использовать (12.4):

$$a_2 = -\frac{1}{2}a_1 + \left[\frac{1}{4}a_1^2 + \frac{2a_1(u_1-c)^2}{g}\right]^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\Delta = \frac{3}{2}a_1 - \left[\frac{1}{4}a_1^2 + \frac{2a_1(u_1-c)^2}{g}\right]^{1/2}.$$

Если $c$ равно

$$c_1 = u_1 + (ga_1)^{1/2}, \tag{12.13}$$

где $c_1$ — скорость распространения волн, перемещающихся вверх по потоку за бором, то вновь получаем, что $\Delta = 0$. Поэтому для бора выполняется также неравенство вида $c < c_1$ и, чем больше разность между $c$ и $c_1$, тем выше бор. Из неравенства $c < c_1$ следует также, что малое возмущение за бором (которое распространяется со скоростью $c_1$) может догнать бор.

Теперь мы можем выразить $c - c_2$ или $c - c_1$ как функции высоты бора $\Delta$ и глубины $a_1$ за бором.

Если ввести $1 - \Delta/a_1$ вместо $a_2/a_1$ и применить следующие выражения в случае малых $\varepsilon$ и $a^{-1}\Delta$:

$$(1-\varepsilon)^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2, \quad \left(1 - \frac{\Delta}{a_1}\right)^{-1} = 1 + \frac{\Delta}{a_1} + \frac{\Delta^2}{a_1^2},$$

то из (12.3)

$$c = c_2 + \frac{3}{4}(ga_1)^{1/2}\frac{\Delta}{a_1}\left[1 + \frac{11}{24}\frac{\Delta}{a_1} + \frac{11}{32}\frac{\Delta^2}{a_1^2}\right]. \tag{12.14}$$

Аналогично из (12.4)

$$c = c_1 - \frac{3}{4}(ga_1)^{1/2}\frac{\Delta}{a_1}\left[1 + \frac{1}{24}\frac{\Delta}{a_1} + \frac{1}{32}\frac{\Delta^2}{a_1^2}\right]. \tag{12.15}$$

Тогда

$$c = \frac{1}{2}(c_1 + c_2) + \frac{5}{32}(ga_1)^{1/2}\frac{\Delta^2}{a_1^2}\left[1 + \frac{3}{4}\frac{\Delta}{a_1}\right], \tag{12.16}$$

откуда видно, что $c$ можно аппроксимировать $\frac{1}{2}(c_1 + c_2)$, если пренебречь членом $a_1^{-2}\Delta^2$. Эта аппроксимация допустима, например, в том случае, когда $a^{-1}\Delta < 0{,}4$, так как тогда поправочный член составляет примерно 3% величины $\frac{1}{2}(c_1 + c_2)$.

Из (12.14) и (12.15) также следует, что приближенно

$$\frac{\Delta}{a_1} = \frac{2}{3}\frac{c_1 - c_2}{(ga_1)^{1/2}} - \frac{1}{9}\frac{(c_1 - c_2)^2}{ga_1}. \tag{12.17}$$

Из (12.12), (12.13) и (12.17) получаем, что

$$\frac{\Delta}{a_1} = \frac{a_1 - u_2}{(ga_1)^{1/2}} - \frac{1}{4}\frac{(u_1 - u_2)^2}{ga_1}. \tag{12.18}$$

Следовательно, высота бора рассматривается здесь как функция глубины реки в той ее части, которая находится за бором, и разности между скоростями распространения в областях, расположенных впереди и позади бора, или разности между соответствующими средними скоростями потока. В связи с этим можно заметить, что скорость потока во время отлива перед бором обычно меньше скорости во время прилива за бором ($|u_2| < u_1$).

На основании предыдущих соображений окончательно находим, что условия для бора, указанные в (12,1) и (12.2), можно заменить одним из соотношений (12.14) или (12.15) и условием

$$c\,\Delta = a_1 u_1 - a_2 u_2. \tag{12.19}$$

Выше мы выразили все характеристики через глубину $a_1$ той части реки, которая лежит за фронтом бора. Вместо $a_1$ можно также ввести глубину $a_2$ на фронте бора, полагая при этом, что $\Delta/a_2$ меньше единицы. В общем, в том случае, когда критическая относительная высота бора находится между 0,4 и 0,5, бор будет разрушаться (см. Шёнфельд [124]).

Когда $\Delta/a_2 < 1$, соотношения (12.14) и (12.15) можно аппроксимировать в виде

$$c = c_2 + \frac{3}{4}(ga_2)^{1/2}\frac{\Delta}{a_2}\left(1 - \frac{1}{24}\frac{\Delta}{a_2} + \frac{1}{32}\frac{\Delta^2}{a_2^2}\right). \tag{12.20}$$

$$c = c_1 - \frac{3}{4}(ga_2)^{1/2}\frac{\Delta}{a_2}\left(1 - \frac{11}{24}\frac{\Delta}{a_2} + \frac{11}{32}\frac{\Delta^2}{a_2^2}\right),$$

а соотношение (12.16) — в виде

$$c = \frac{1}{2}(c_1 + c_2) + \frac{5}{32}(ga_2)^{1/2}\frac{\Delta^2}{a_2^2}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{\Delta}{a_2}\right). \tag{12.21}$$

В соответствии с (12.18) находим, что

$$\frac{\Delta}{a_2} = \frac{u_1 - u_2}{(ga_2)^{1/2}} + \frac{1}{4}\frac{(u_1 - u_2)^2}{ga_2}. \tag{12.22}$$

Если объединить (12.3) и (12.4), то получаем, что

$$\frac{u_1 - u_2}{(ga)^{1/2}} = \frac{\Delta}{a}\left(1 + \frac{1}{8}\frac{\Delta^2}{a^2}\right), \tag{12.23}$$

где $a$ определяется как $\frac{1}{2}(a_1 + a_2)$.

Заметим, что формулы (12.20)—(12.22) менее точны, чем формулы (12.14)—(12.18), так как значение $\Delta/a_1$ меньше $\Delta/a_2$. Формулы (12.14)—(12.18) могут использоваться для любых значений $\Delta$, если для больших значений $\Delta$ учесть поправочные члены.

Однако в следующем разделе будет показано, что формулы (12.20) и (12.22) более удобны для определения скорости рас-

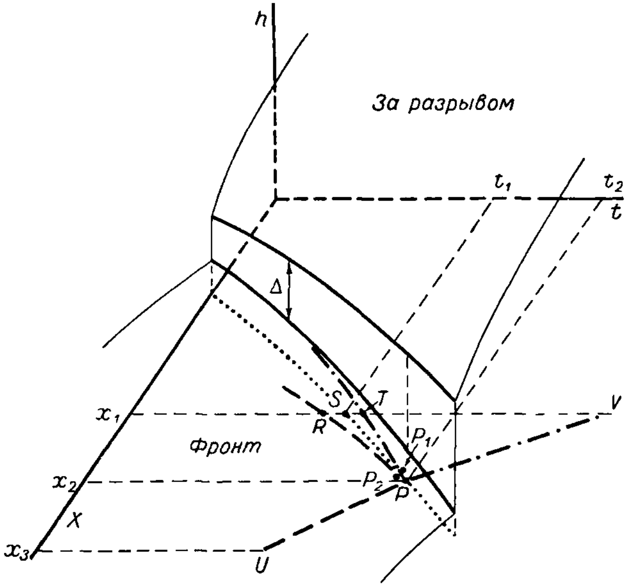



Рис. 3.21.

пространения $c$ и высоты бора $\Delta$, так как бор возникает при малой воде, когда глубину $a_2$ перед бором и скорость распространения $c$, найденную в (12.12), легче определить, чем величины $a_1$ и $c_1$ за бором.

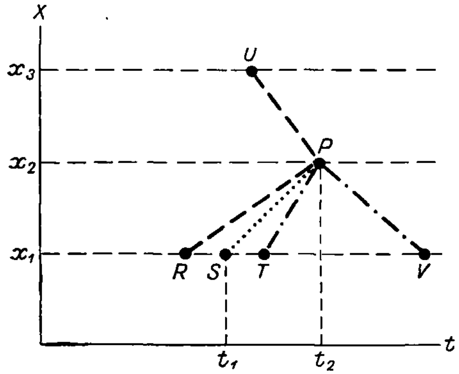



Рис. 3.22.

Заключение, которое вытекает из приведенных выше формул, находится в соответствии с соображениями, высказанными в первом замечании разд. 6, а именно: в любой точке кривой, характеризующей траекторию движения бора, пересекаются четыре характеристики (см. рис. 3.21).

Поскольку скорость перемещения бора больше характеристических скоростей на фронте бора, область зависимости точки $P_2$ на фронте бора не включает область самого бора. Следовательно, решение, относящееся к области, лежащей перед бором, не зависит от наличия бора.

С другой стороны, скорость перемещения бора меньше характеристических скоростей за бором, так что область зависимости точки $P_1$ определяется условиями по обе стороны бора. Кроме того, характеристики $TP_1$ и $TP_2$ не имеют продолжения в том случае, когда время больше, чем $t(P)$ (см. также рис. 3.22).

Однако в самой экстремальной точке, расположенной в нижней части потока, т. е. в той точке, где образуется бор (см. разд. 11), разрыв можно считать вначале бесконечно малым, а путь бора полагать совпадающим с характеристической кривой (см. последнюю часть разд. 6). Поскольку высота бора резко увеличивается по мере продвижения вверх по потоку, то различия между траекторией движения бора и соответствующими характеристическими кривыми также будут возрастать.

## 12.2. Расчет уровней и расходов воды по обе стороны от бора

Предположим, что бор, двигаясь вдоль линии $SP$ (рис. 3.22), проходит сечение $(x_1, x_2)$ в течение промежутка времени $t_1 < t < t_2$. Наклон линии $SP$ равен $c$. Район, лежащий слева от $SP$, представляет собой передний край бора в течение всего периода его перемещения. Когда бор находится в сечении $(x_1, x_2)$, через точку $P$ проходят две характеристики — $RP$, направленная вверх по потоку, и $UP$, направленная соответственно в обратную сторону. Если отрезки $(x_1, x_2)$ и $(x_2, x_3)$ достаточно малы, то их приближенно можно описать уравнениями вида

$$x - x_2 = c_2^+ (t - t_2); \quad x - x_2 = c_2^- (t - t_2),$$

где $c_2^-$ и $c_2^+$ определяются из

$$c_2^\pm = u_2 \pm (ga_2)^{1/2}.$$

Поскольку на переднем крае бора имеет место отлив, $u_2$ является отрицательной величиной, а абсолютная величина наклона $PU$, определяемая как $|c_2^-|$, больше, чем абсолютная величина наклона $RP$, которая определяется $c_2^+$. Так как наклон $SP$ приближенно представляется в виде $c = \frac{1}{2}(c_2^+ + c_2^+) > c_2^+$, то линия $RP$ находится слева от $SP$. Когда бор достигает точки $P$, характеристика $TP$ за бором (на его заднем крае) определяется уравнением

$$x - x_2 = c_1^+ (t - t_2),$$

где $c_1^+$ находится как $u_1 + (ga_1)^{1/2}$, $u_1 > 0$ и $a_1$ — соответственно скорость и глубина в области за бором.

В разд. 12.1 было показано, что $c < c_1^+$, так что $TP$ лежит справа от $SP$. Наклон характеристики $PV$ равен $c_1^-$.

В последующих частях этого раздела мы рассмотрим зависимость уровня воды $h$ от среднего в течение приливного периода уровня $a_0$.

Пусть $a'_1 = a_0 + h'_1$ и $Q'_1$ представляют собой значения $a = a_0 + h$ и $Q$ непосредственно на заднем крае бора, а $a'_2 = a_0 + h'_2$ и $Q'_2$ — соответствующие величины на переднем крае. Тогда $h_{1T}$, $Q_{1T}$ представляют собой значения $h$ и $Q$ в точке $T$; $h'_{1P}$, $Q'_{1P}$, $h'_{2P}$, $Q'_{2P}$ —соответствующие величины на участках, лежащих ниже и выше точки $P$; $h_{2U}$, $Q_{2U}$ — те же величины в $U$.

В разд. 9 формулы (9.1) и (9.2) выражали соотношения между значениями $h$ и $Q$ вдоль характеристик. Таким образом, на любом конце характеристик выполняются следующие приближенные соотношения между значениями $h$ и $Q$. Для значений $R$ и $P$, лежащих выше бора (ср. с (9.1) и (9.2) в случае $\beta = 0$), имеем

$$h'_{2P} - h_{2R} + (\overline{gbA})_{RP}^{-1/2}(Q'_{2P} - Q_{2R}) = -\bar{r}_{RP}(\overline{|Q|Q})_{RP}(x_2 - x_1). \qquad (12.24)$$

В $U$ и $P$, находящихся выше бора,

$$h_{2U} - h'_{2P} - (\overline{gAb})_{UP}^{-1/2}(Q_{2U} - Q'_{2P}) = -\bar{r}_{UP}(\overline{|Q|Q})_{UP}(x_3 - x_2). \qquad (12.25)$$

В $T$ и $P$, лежащих ниже бора,

$$h'_{1P} - h_{1T} + (\overline{gAb})_{PT}^{-1/2}(Q'_{1P} - Q_{1T}) = -\bar{r}_{TP}(\overline{|Q|Q})_{TP}(x_2 - x_1). \qquad (12.26)$$

В дальнейшем необходимо рассматривать два уравнения для бора. Поэтому мы можем выбирать между формулами (12.14)—(12.22). По-видимому, формулы (12.20) и (12.22) более удобны для расчета бора. Приближенно они могут быть записаны в форме

$$c = \frac{Q'_{2P}}{b_s\left(a_0 + h'_{2P}\right)} + \left[g\left(a_0 + h'_{2P}\right)\right]^{1/2} + \frac{3}{4} g^{1/2} \frac{h'_{1P} - h'_{2P}}{\left(a_0 + h'_{2P}\right)^{1/2}}, \qquad (12.27)$$

$$h'_{1P} - h'_{2P} = \frac{Q'_{1P} - Q'_{2P}}{b_s\left[g\left(a_0 + h'_{2P}\right)\right]^{1/2}} - \frac{3}{4}\,\frac{\left(Q'_{1P} + \frac{1}{3}Q'_{2P}\right)\left(Q'_{1P} - Q'_{2P}\right)}{b_s^2 g\left(a_0 + h'_{2P}\right)^2}. \qquad (12.28)$$

Представляется также, что в (12.27) квадратичным членом можно пренебречь. Коэффициенты в уравнениях (12.24)—(12.26) будут определены в следующем разделе. Если они известны, то линейные уравнения (12.24) и (12.25) определяют значения $h'_{2P}$ и $Q'_{2P}$. Подставив их затем в (12.28), найдем значения $h'_{1P}$ и $Q'_{1P}$ из (12.26) и (12.28) с помощью метода итераций. Поскольку $c_2$ известно, если $Q'_{2P}$ и $h'_{2P}$ рассчитаны, то значение $c$ в точке $P$ может быть получено из (12.27), после чего все величины, которые нужно знать в $P$, оказываются найденными.

### 12.3 Расчет и построение приливного движения при наличии в реке бора

В $x$, $t$-диаграмме, приведенной на рис. 3.23, область распространения бора показана сплошной линией. Слева от этой линии

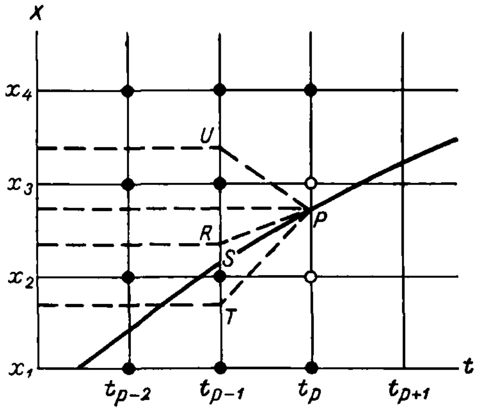



Рис 3.23

уровень воды самый низкий, а справа — самый высокий. На этом рисунке показаны также точки сеточной области, построенной аналогично тому, как это было сделано в разд. 10.

Предположим, что движение приливной волны вверх по реке в момент $t_{p-1}$ уже определено либо посредством расчета, либо графически. Следовательно, мы допускаем, что значения $h$ и $Q$ известны в точках $(x_i, t_{p-1})$ $(i=1, 2, 3, \ldots)$. Точка, в которой бор пересекает линию $t=t_{p-1}$, обозначается в $x$, $t$-диаграмме через $S$.

Кроме того, допустим, что в $S$ уже определен также и скачок, так что нам известны уровни и расходы воды по обе стороны от бора.

Покажем теперь, как можно определить значения $h$, $Q$ для сечения $(x_2x_3)$ в момент $t_P$ на обеих сторонах бора (точка $P$) с помощью графического построения или расчета.

Так как нам известны значения $h$ и $Q$ в $S$, мы можем рассчитать положительные значения $c_1$ и $c_2$ по обе стороны от скачка — $c'_{1S}$ и $c'_{2S}$. Предположим сперва, что в сечении ($x_2x_3$) бор распространяется таким образом, что среднее значение скорости распространения вдоль $SP$ ($\overline{c}_{SP}$) определяется как $\overline{c}_{SP} = \frac{1}{2}(c'_{1S} + c'_{2S})$ (см. (12.16) или (12.21)'). Затем, проведя линию с наклоном $\overline{c}_{SP}$ через $S$, определяем точку $P$ в плоскости $x$, $t$. Рассмотрим теперь определение $h$ и $Q$ в точке $P$ на любой стороне бора.

1. Для этого оценим сперва $h$ и $Q$ в точке $P$ по обе стороны скачка, т. е. значения $h'_{1P}$, $h'_{2P}$, $Q'_{1P}$, $Q'_{2P}$ соответственно. Можно, например, предположить, что они те же, что и в точке $S$, или допустить, что изменение $h$ и $Q$ на обеих сторонах бора происходит аналогично тому, как это было в предыдущий момент времени. Тогда на основании этих оценок в соответствии с (3.4) определяем коэффициенты характеристик, а затем вычерчиваем характеристики $PU$, $PR$ и $PT$ в $x$, $t$-диаграмме.

2. Теперь можно уточнить наши оценки, так как значения $h$ и $Q$ в $U$, $R$ и $T$ можно найти интерполяцией значений $h$ и $Q$ в точках $(x_i, t_{p-1})$, $i=1, \ldots, 4$. Можно предположить, что значения $h$ и $Q$ вдоль характеристики $PR$ являются средними из начальных приближенных значений в $P$ и известного значения в $R$; аналогичные соображения можно высказать и для других характеристик $PU$ и $PT$. На основании этих допущений получаем уточненные величины наклонов характеристик $PR$ и т. д.

3. Уравнения, которые служат для определения $h'_{1P}$, $Q'_{1P}$, $h'_{2P}$ и $Q'_{2P}$ в точке $P$, аналогичны уравнениям (12.24)—(12.26). Тогда можно заменить $(x_2 - x_1)$ в (12.24) на $c_{2,RP}(t_p - t_{p-1})$; $(x_3 - x_2)$ в (12.25) на $c_{2,UP}(t_p - t_{p-1})$ и $(x_2 - x_1)$ в (12.26) на $c_{1,PT}(t_p - t_{p-1})$.

Остальные коэффициенты, зависящие от $h$, в уравнениях (12.24)—(12.26), а именно $\overline{(gAb)^{-\frac{1}{2}}}$ и $\overline{r}$ для соответствующих характеристик, можно теперь определить, вводя среднее значение $h$. Значение $|Q|Q$ вдоль характеристик можно линеаризировать посредством (9.5) или (9.6).

4. После выполнения всех этих операций модифицированные линейные уравнения (12.24)—(12.28) можно решить методом, указанным в предыдущем разделе.

В том случае, когда вычисленные значения $h'_{2P}$ и т. д. очень сильно отличаются от заданных, лучшее решение будет получено, если ввести значения $h'_{2P}$ и т. д., определенные по предыдущим вычислениям, или иначе — применить метод итераций.

О графическом построении, относящемся к движению бора, можно прочесть в работах Шёнфельда [123], а также Дронкерса и Шёнфельда [34].

*Замечания.* 1. На основе опыта применения этого конечно-разностного метода выяснилось, что в окрестности траектории движения бора расстояние между узлами сеточной области должно быть очень небольшим; особенно важно это учесть в точке зарождения бора. Точное определение огибающей положительных характеристических кривых получить трудно.

Кроме того, необходимо заметить, что уравнения для бора выведены на основании использования упрощающих допущений. Так, было сделано предположение о возможности пренебрежения трением о дно в области бора, ширина района накопления вод полагалась равной ширине русла. Кроме того, изменение глубин в направлении, поперечном сечению, обычно оказывает существенное влияние на высоту бора. Далее, частичное отражение от берегов рек, особенно в излучинах меандрирующих рек, также влияет на высоту бора. Если мы хотим учесть силу трения, то ее необходимо добавить в правую часть уравнения (12.2) (см. также уравнение (5.4) главы 1).

2. Аббот [2] разработал теорию бора применительно к условиям реки Северн.

Недавно для расчета распространения бора был использован численный метод. Основы этого метода, аналогичного численному методу, примененному для расчета ударных волн в газах, будут изложены в следующей главе в разд. 3.

## ГЛАВА 4

# КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ

Разностные методы особенно удобны при расчетах на электронных вычислительных машинах. В последние годы подобные методы были использованы для решения многих практических задач, в том числе и для расчета длинных волн и, в частности, для приливных расчетов.

Конечно-разностный метод, который использовался в предыдущей главе, применялся к характеристикам уравнений длинных волн. В этой главе мы будем применять численные конечно-разностные методы, основанные на уравнениях длинных волн, не сводя эти уравнения к характеристической форме. Такие численные конечно-разностные методы имеют лишь то преимущество, что они более просты в применении. Это соображение следует помнить в особенности при изучении разрывного движения, когда метод характеристик позволяет получить более глубокое и точное понимание явления, чем конечно-разностные методы.

При разностной аппроксимации производных во внутренних узлах сеточной области введем так называемые центральные разности. Очевидно, что для точек, расположенных на границах сеточной области или в ближайшем к ним ряду узлов, центральные разности использовать невозможно и поэтому необходимо ввести односторонние вперед или назад направленные разности.

Вновь начнем с рассмотрения простейших уравнений длинных волн, ибо в этом случае можно сравнительно легко разобраться в основных идеях численного решения, а также в вопросах сходимости и устойчивости численного метода.

Затем приведем конечно-разностную аппроксимацию уравнений длинных волн, описывающих движение в реках.

В разд. 3 рассмотрим конечно-разностный метод, который может быть применен в случае разрывного движения, например в случае существования бора. Тем самым это явление будет аппроксимировано непрерывным движением с резко меняющимися характеристиками. В этом случае предположим, что характеристики длинных волн $h$ и $Q$ могут быть представлены такими достаточно гладкими функциями, что нам не нужно будет рассматривать разрывы.

В разд. 4 будут обсуждаться конечно-разностные аппроксимации уравнений мелкого моря или прибрежных вод.

В главе 3 мы уже рассмотрели некоторые математические стороны конечно-разностных решений. В этой главе обсуждение этих вопросов будет продолжено.

Разработка математических проблем, которые возникают при конечно-разностной аппроксимации трехмерных уравнений в частных производных, описывающих движение приливной волны в море с геометрически сложными границами, находится в самой начальной стадии; появление быстродействующих вычислительных машин дает нам возможность обратиться к решению таких задач. Математические основы подобного рода задач значительно сложнее, чем для двухмерных задач и для задач, связанных с одномерным нестационарным потоком. Этих вопросов мы только коснемся в конце главы.

## 1. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ УПРОЩЕННЫХ ПРИЛИВНЫХ УРАВНЕНИЙ

### 1.1. Метод, используемый при известных начальных условиях

Конечно-разностные методы решения приливных задач будут сперва применены к простым приливным уравнениям с постоянными коэффициентами, в которых не учитывается сила трения (см. главу 3, разд. 1):

$$gA_0\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial t}=0;\quad b_0\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0. \tag{1.1}$$

Начальные условия в момент времени $t=0$ предполагаются равными $h(x,0)$ и $Q(x,0)$. Пусть координаты $(x, t)$ определяют точку в плоскости $x$, $t$ и пусть $(x+p\Delta x,\ t+q\Delta t)$ (где $p$, $q=0$, $\pm1$, $\pm2$ и т. д.) — координаты соседних с ней точек. Хорошо известно, что частную производную предпочтительно заменять центральной конечной разностью, например,

$$\frac{\partial h}{\partial x}\to\frac{h(x+\Delta x,t)-h(x-\Delta x,t)}{2\Delta x}.$$

Для конечно-разностной аппроксимации соотношений (1.1) аналогичные выражения вводятся и для $\partial h/\partial t$, $\partial Q/\partial t$ и $\partial Q/\partial x$. Тогда (1.1) запишутся в виде

$$gA_0\left[\frac{h(x+\Delta x,t)-h(x-\Delta x,t)}{2\Delta x}\right]+$$
$$+\frac{Q(x,t+\Delta t)-Q(x,t-\Delta t)}{2\Delta t}=0, \tag{1.2}$$

и

$$b_0\left[\frac{h(x,\, t+\Delta t)-h(x,\, t-\Delta t)}{2\,\Delta t}\right]+$$
$$+\frac{Q(x+\Delta x,\, t)-Q(x-\Delta x,\, t)}{2\,\Delta x}=0. \qquad (1.3)$$

Поскольку $h$ и $Q$ удовлетворяют уравнению в частных производных второго порядка

$$gA_0\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-b_0\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=0, \qquad (1.4)$$

то соответствующая конечно-разностная аппроксимация уравнения (1.4) записывается так:

$$b_0\left[\frac{z(x,\, t+2\,\Delta t)-2z(x,\, t)+z(x,\, t-2\,\Delta t)}{(2\,\Delta t)^2}\right]=$$
$$=gA_0\left[\frac{z(x+2\,\Delta x,\, t)-2z(x,\, t)+z(x-2\,\Delta x,\, t)}{(2\,\Delta x)^2}\right]. \qquad (1.5)$$

Очевидно, что конечные разности, используемые в разностных уравнениях, будут стремиться к соответствующим производным в дифференциальных уравнениях, если $\Delta x$ и $\Delta t$ стремятся к нулю. Однако это вовсе не означает, что решение разностных уравнений для $h$ и $Q$ всегда будут стремиться к решению дифференциальных уравнений, удовлетворяющих заданным граничным условиям, если для $\Delta x$ и $\Delta t$ не выполняется определенное условие. Об этом будет говориться в разд. 1.2 и 1.3.

В разностных уравнениях (1.2) и (1.3) $x$ и $t$ могут рассматриваться как непрерывные переменные. Однако при численных расчетах возникает необходимость ограничить переменные дискретным рядом значений

$$x_m=x_0+m\,\Delta x; \quad t_n=t_0+n\,\Delta t, \qquad (1.6)$$

где $m$ и $n$ — целые числа (0, $\pm 1$, $\pm 2$ и т. д.). В этом случае в разностных уравнениях рассматриваются только те значения $h$ и $Q$, которые приходятся на эти точки.

В узлах такой сеточной области численные решения уравнений (1.2) и (1.3), в которых $x$ и $t$ заменяются на (1.6), находятся следующим образом. Пусть начальные значения $h$ и $Q$ (при $t=0$) заданы в интервале, ограниченном узлами $x_0 < x < x_0+M\Delta x$. Тогда $h(x,\, 0)$ и $Q(x,\, 0)$ известны в узлах $(x_0+m\Delta x,\, 0)$. Значения $Q$ в узлах $(x_0+m\Delta x,\, \Delta t)$ можно определить посредством следующих разностных уравнений, полученных из (1.1), используя вместо производных по времени вперед направленные конечные разности, причем в этих уравнениях $x$ теперь будет обозначать $x_0+m\Delta x$:

$$h(x+\Delta x,\ 0)-h(x-\Delta x,\ 0)=$$
$$=-\frac{2}{gA_0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\left[\underline{Q(x,\ \Delta t)}-Q(x,\ 0)\right], \qquad (1.7)$$
$$\underline{h(x,\ \Delta t)}-h(x,\ 0)=$$
$$=-\frac{1}{2b_0}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[Q(x+\Delta x,\ 0)-Q(x-\Delta x,\ 0)\right]. \qquad (1.8)$$

Подчеркнутые члены можно сразу же рассчитать, так как все другие члены известны из начальных условий при $t=0$.

Перейдем к численному расчету $h$ и $Q$ на линиях $t=2\Delta t$ и т. д. до $t=n\Delta t$, используя уравнения (1.2) и (1.3).

Введем следующие обозначения:

$$h(x_0+m\,\Delta x,\ t_0+n\,\Delta t)=h_m^n,$$
$$Q(x_0+m\,\Delta x,\ t_0+n\,\Delta t)=Q_m^n. \qquad (1.9)$$

Тогда разностные уравнения для $h$ и $Q$ в узлах сеточной области примут вид

$$h_{m+1}^n-h_{m-1}^n+(gA_0)^{-1}\frac{\Delta x}{\Delta t}\left(\underline{Q_m^{n+1}}-Q_m^{n-1}\right)=0, \qquad (1.10)$$

$$\underline{h_m^{n+1}}-h_m^{n-1}+b_0^{-1}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(Q_{m+1}^n-Q_{m-1}^n\right)=0. \qquad (1.11)$$

Пусть значения $h$ и $Q$ известны во все моменты времени вплоть до $t=t_0+n\Delta t$. Тогда в (1.10) и (1.11) значения $Q_m^{n+1}$ и $h_m^{n+1}$ оказываются неизвестными и их можно определить непосредственно из этих уравнений. Схема расположения узлов сеточной области, используемой в (1.10) и (1.11), показана на рис. 4.1. В узлах, очерченных кружками, значения $h$ и $Q$ известны из предыдущего приближения; в узлах, обозначенных крестиками, значения $h$ и $Q$ должны быть вычислены. Очевидно, что с помощью этого метода нельзя рассчитать $h$ и $Q$ в узлах $(x_0+m\Delta x;\ t_0+n\Delta t)$, где $0\leqslant m\leqslant M$. При $n=0$ значения $h$ и $Q$ известны во всех узлах сеточной области. Из (1.7) и (1.8) следует, что для $n=1$ значения $h$ и $Q$ можно определить в тех узлах, где $1\leqslant m\leqslant M-1$; для $n>2$ используются формулы (1.10) и (1.11). Затем можно рассчитать $h$ и $Q$ для $n=2$ в узлах, определяемых соотношениями $2\leqslant m\leqslant M-2$, и, в общем, значения $h$ и $Q$ можно рассчитать для $n=p$ в тех узлах, для которых $p\leqslant m\leqslant M-p$. И, наконец, на линии $n=\frac{1}{2}M$ значения этих функций можно определить только для одного узла $m = \frac{1}{2}M$ (если $M$ четное). Таким образом, представляется, что рекурсивные формулы позволяют рассчитать $h$ и $Q$ в любом внутреннем узле сеточной области, лежащем внутри треугольника, ограниченного отрезком $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + M\Delta x$ на линии $t=0$ и двумя линиями с наклонами $\pm\Delta t/\Delta x$. Следовательно, значения $h$ и $Q$ в каждом узле внутри треугольника зависят от значений $h$ и $Q$, заданных на линии $t=0$. Это заключение аналогично выводу, полученному для дифференциальных уравнений (1.1), когда значения $h$ и $Q$ в точке $P$ зависели от $h$ и $Q$ на начальных линиях, определяемых характеристиками, проходящими через $P$. Таким образом, необходимо делать различие между треугольником зависимости для дифференциального и разностного уравнений.

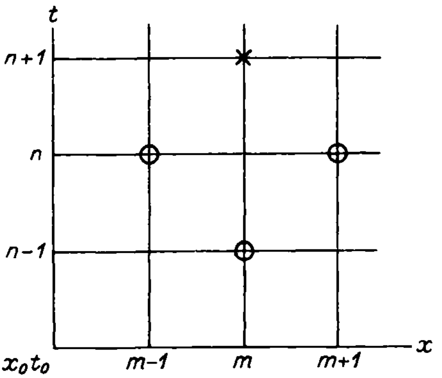


Рис. 4.1.

## 1.2. Сходимость конечно-разностного метода

В предыдущем разделе мы не получили действительной величины соотношения $k = \Delta x/\Delta t$. Может показаться, что для $h$ и $Q$ в каждом узле сеточной области можно найти различные решения, варьируя $k$. На эти сомнения можно было бы не обращать серьезного внимания, если бы мы смогли произвести измельчение ячейки сетки (используя меньшие значения $\Delta t$ и $\Delta x$) и одновременно оставить неизменным $k$; это привело бы к сходимости решения к точному решению дифференциальных уравнений, удовлетворяющих определенным граничным условиям. Однако, по-видимому, в таком измельчении ячеек сетки нет необходимости в том случае, когда $k < c_0$, где $c_0$ — скорость распространения волновой точки, $(gA_0b_0^{-1})^{1/2}$. Это можно доказать следующим образом.

Пусть $APC$ является треугольником зависимости точки $P$ (рис. 4.2), совпадающей с точкой $P$ в дифференциальной задаче, здесь $\operatorname{tg} PAB = 1/k$ и $\operatorname{tg} PCB = 1/k$. Кроме того, пусть $PA'C'$ является треугольником зависимости решения дифференциальных уравнений, записанных для $h$ и $Q$, в точке $P$. Тогда $PA'$ и $PC'$ являются характеристиками, проходящими через $P$ и $\operatorname{tg} PA'B =$

$= 1/c_0 < 1/k$. Если изменить начальные условия на отрезках $AA'$ и $CC'$, то решение дифференциальных уравнений для $h$ и $Q$ в точке $P$ также будет меняться; однако этого не будет наблюдаться в случае решения разностного уравнения, которое зависит от начальных значений на $AC$.

Следовательно, если расстояние между узлами сеточной области бесконечно уменьшается, а $k$ при этом остается неизменным, то нет необходимости требовать сходимости решения разностного уравнения к решению дифференциального уравнения. Сходимость решения разностного уравнения к решению дифференциального уравнения имеет место в том случае, когда $k > c_0$.

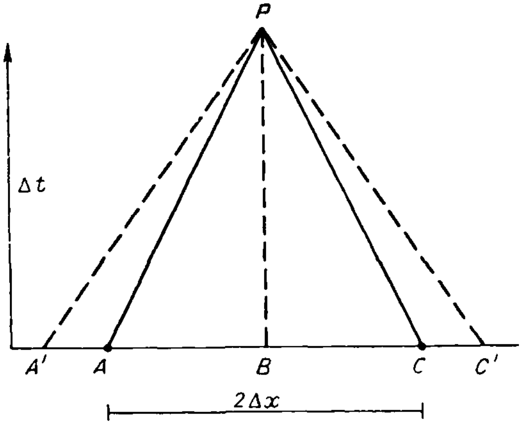



Рис 4.2.

Читатель может найти доказательство этого утверждения в книге Форсайта и Вазова [42] (разд. 4.3—4.5). Это довольно обширная теория, которую мы не будем переписывать здесь, основывается на том, что явное решение задачи с начальными условиями, описываемой линейными дифференциальными уравнениями в частных производных, может быть найдено методом разделения переменных с последующим суммированием решений:

$$h(x, t) = \sum_k H_k(x)\,\varphi_k(t); \quad Q(x, t) = \sum_k Q_k(x)\,\psi_k(t).$$

где $H_k(x)$ и $Q_k(x)$ определяются в виде рядов Фурье и представляют собой граничные условия для $h$ и $Q$ при $t=0$.

Для конечно-разностного уравнения, описывающего поведение функции в конечном числе узлов сеточной области, решение может быть записано аналогично указанному выше как линейная комбинация функций; эти ряды содержат конечное число членов.

Теперь можно перейти к обсуждению сходимости разностного решения к решению дифференциальных уравнений. Однако замечательно то, что для специальных классов начальных функций, например для аналитических функций, решение разностных уравнений может стремиться к решению дифференциальных уравнений при значениях $k$, меньших, чем $c_0$. На это обстоятельство указал Дальквист [21].

Это понятно, так как, если $f(x)$ является аналитической функцией, значения $f(x)$ в меньшем интервале определяют значения этой функции в большем интервале. На основании указанных выше соображений можно сделать вывод о том, что для $k > c_0$ сходимость является достаточным, но не необходимым условием.

При $k = c_0$ сходимость гарантирована, если начальные условия непрерывно дифференцируемы (см. Форсайт и Вазов [42]). Различные доказательства приводятся для того случая, когда начальные условия задаются в форме $h(x, 0) = f(x)$ и $(\partial h/\partial t)_{f=0} = g(x)$. Если начальные условия заданы в виде $h(x, 0)$ и $Q(x, 0)$, их можно непосредственно свести к указанному выше виду, используя уравнения (1.1) (см. разд. 1 главы 3).

### 1.3. Устойчивость конечно-разностного метода

Поскольку численные расчеты основываются на многократном использовании одних и тех же формул, то вследствие ошибок округления каждое рассчитанное значение какой-либо функции будет влиять на последующие значения этой функции.

Дальквист показал, что в разностных уравнениях, подобных уравнениям (1.2) и (1.3) или (1.5) (в том случае, когда они преобразованы так, что $c_0$ становится равным единице), скорость возрастания отдельной ошибки может стать весьма существенной, если $k < 1$. При этом он рассматривал следующее задание начальных функций:
для дифференциальных уравнений

$$h(x,\ 0) = 0; \quad \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{t=0} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ \varepsilon(\Delta t)^{-1}, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

и для разностных уравнений

$$h(x,\ 0) = 0 \quad \text{и} \quad h(0,\ \Delta t) = \varepsilon.$$

В книге Форсайта и Вазова [42] показано, что абсолютное значение изолированной ошибки $\varepsilon$ в точке $(Q,\ \Delta t)$ будет возрастать по крайней мере до величины $\varepsilon k^{-2[(t/\Delta t)-1]}$ в узле $(x,\ t)$, находящемся в области влияния узла $(Q,\ \Delta t)$ ($PQR$ на рис. 4.3). Таким образом, в этом случае изолированная ошибка увеличивается экспоненциально для фиксированного $t$, если $\Delta t$ стремится к нулю, а $k < 1$. Поскольку ошибки округления могут встречаться на каждом шаге расчета и поскольку они, в общем, не компенсируют друг друга, необходимо положить $k>1$.

Если ошибки округления в конечно-разностных аппроксимациях ведут себя указанным выше образом, то конечно-разностный метод называется *неустойчивым*.

Мы не ставим перед собой задачу подробного обсуждения устойчивости разностных уравнений. Читатель может найти полное изложение этой проблемы в книге Форсайта и Вазова [42]. Рассмотрим лишь некоторые аспекты этой проблемы.

Невозможно получить конечно-разностную аппроксимацию, для которой влияние ошибок округления неизменно стремилось бы к нулю при стремлении к нулю длины $\Delta x$ и времени $\Delta t$. Это связано с наложением ошибок в решении (аналогичное явление имеет место в случае линейных задач). Поэтому может оказаться, что выбор сетки с малыми размерами ячеек, позволяющей построить хорошую аппроксимацию решения дифференциального уравнения, не уменьшит расхождений между вычисленным и точным решениями. Это происходит в том случае, когда вследствие увеличения числа шагов накапливается бо́льшая суммарная ошибка, несмотря на уменьшение максимальной ошибки на каждом отдельном шаге.

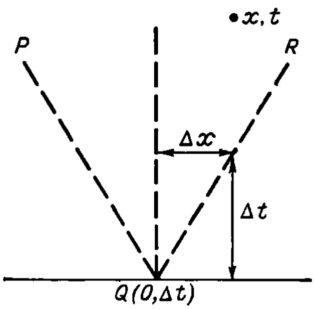


Рис. 4 3.

Для того чтобы исследовать это явление, авторы ввели понятие об «отклонении» решения, которое представляет собой разность между точным и вычисленным значениями функции в узле сеточной области и обусловливается ошибкой $\varepsilon$, совершенной на предыдущем шаге расчета. Кумулятивное отклонение вызывается ошибками, произведенными во многих точках. В действительности распределение ошибок округления часто оказывается более или менее случайным и тогда эффекты ошибок будут частично компенсировать друг друга. Очевидно, что рассмотрение подобного рода статистических задач, в общем, представляет очень большие трудности. Поэтому при обсуждении устойчивости конечно-разностной аппроксимации обычно поступают следующим образом. Если предположить, что каждый шаг расчета сопровождается ошибкой $\varepsilon(x)$ и что $\varepsilon(x)$ имеет верхний предел $\delta$, то в определенной точке $(x, t)$ можно определить кумулятивное отклонение. Если уменьшается размер ячейки сеточной области и, следовательно, увеличивается число шагов, то кумулятивное отклонение в точке $(x, t)$ также может возрастать, если одновременно предполагается, что $\delta$ остается неизменным. Степень этого возрастания и определяет устойчивость или неустойчивость конечно-разностной аппроксимации. С этой точки зрения лучше говорить о большей или меньшей устойчивости.

Большинство авторов называют метод устойчивым, если кумулятивное отклонение стремится к нулю при $\delta$, стремящемся к нулю, и если оно растет не быстрее, чем некоторая степень от $s^{-1}$, по мере того, как размеры ячейки сеточной области стремятся к нулю. Если отклонение растет быстрее, чем любая степень от $s^{-1}$ (например, экспоненциально), то разностную схему называют неустойчивой.

Форсайт и Вазов применили эти положения к волновому уравнению. В других случаях редко представляется возможность определить порядок величины кумулятивного отклонения; это особенно относится к случаю нелинейных дифференциальных уравнений. В этих случаях устойчивость можно определить экспериментально, проверяя устойчивость таких задач, аналитические решения которых известны.

Требование устойчивости конечно-разностной схемы часто является более сильным, чем требование сходимости конечно-разностных аппроксимаций. Для того чтобы доказать сходимость, влияние ошибок в решении не рассматривается. Устойчивость подразумевает сходимость, однако сходимость выполняется не всегда (см., например, [42, разд. 7]).

Поскольку при замене дифференциальных уравнений их конечно-разностными аналогами можно использовать различные разностные схемы, то устойчивость используемой конечно-разностной схемы зависит от выбора схемы.

Устойчивость разностных аппроксимаций дифференциальных уравнений движения в форме Эйлера может быть также установлена с помощью теории Неймана, Лакса и Рихтмайера (см. [84, 108]). Эта теория может быть применена к внутренним узлам сеточной области ( но не к узлам на границе). Она основывается на исследовании так называемых расширенных матриц. Эти матрицы получаются в том случае, когда в начальный момент времени вводятся малые периодические возмущения. Тогда для одномерного потока вновь получаем условие, приведенное в разд. 1.2.

## 1.4. Разностные уравнения при задании начальных и граничных условий

### Обсуждение непрерывных решений

В главе 3 обсуждались решения приливных уравнений, удовлетворяющих определенным начальным и граничным условиям, на основе теории характеристик.

Разностные уравнения, которыми заменяют приливные уравнения, также зависят от того, являются ли наложенные граничные условия условиями Коши или смешанными граничными условиями. В первом случае $h$ и $Q$ заданы на линии, которая не совпадает с прямой $t=t_0$ (на которой заданы начальные условия), тогда как во втором случае $h$ задано на одной линии, а $Q$ — на другой.

Перед тем как рассмотреть конечно-разностные уравнения в случае смешанных граничных условий, обсудим условия для получения непрерывных решений. Для этого предположим, что $h$ и $Q$ непрерывны в тех интервалах, где они заданы.

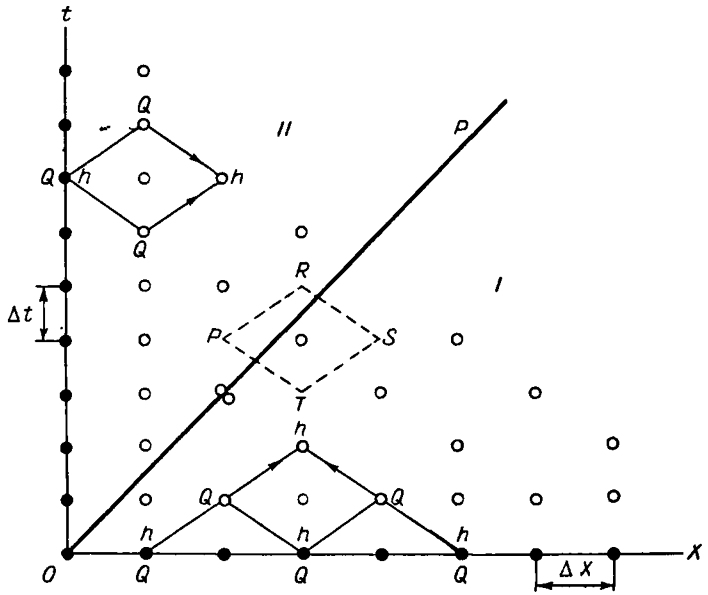



Рис. 4.4.

Пусть начальные условия заданы на оси $x$ и пусть $R_1$ представляет собой бесконечную область, ограниченную осями $t=0$ и $x=0$, где $t>0$ и $x>0$ (рис. 4.4). Кроме того, пусть прямая линия $OP$ представляет собой характеристику уравнения (1.1), проходящую через точку $O$; уравнение для $OP$ записывается в виде

$$x=(gA_0b_0^{-1})^{1/2}t.$$

Теперь пусть $h_2'(t)$ и $Q_2'(t)$ заданы на линии $x=0$ $(t>0)$. Тогда в районе $I$ области $R_1$ решение зависит от начальных условий $h_1(x)$ и $Q_1(x)$ на оси $x$, а в районе $II$ области $R_1$ — от граничных условий $h_2'(t)$ и $Q_2'(t)$ на оси $t$. В общем, на каждой стороне линии $OP$ решение дифференциального уравнения (1.1) будет различным, а на самой линии будет иметь место зона разрыва, если только $Q_2'(t)$ не определяется особым образом (см., например, книгу Тихонова и Самарского, II, § 2.7 [144]).

Применение рекуррентных уравнений (1.10) и (1.11), как это было показано в разд. 1.1, определяет численное решение в районе *I*. Аналогично, применяя те же рекуррентные уравнения для расчета в x-м направлении, можно получить численное решение в районе *II*.

В общем, на каждой стороне от линии $OP$ значения $h$ и $Q$ будут различными, если расчеты для района *I* распространить на точки района *II*, например, используя ромб $PRST$ на рис. 4.4.

Если $h_1(x)$ и $Q_1(x)$ опять заданы на начальной линии $t=0$, а $h_2(t)$ — на линии $x=0$, то, для того чтобы решение было непрерывным во всей области рис. 4.4, необходимо, чтобы заданные функции удовлетворяли следующим условиям в точке (0, 0) (см. главу 3, разд. 1.4):

$$h_2(0) = h_1(0), \tag{1.12}$$

$$b_0\left(\frac{\partial h_2}{\partial t}\right)_0 + \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x}\right)_0 = 0, \tag{1.13}$$

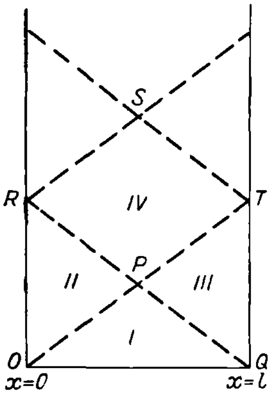


Рис. 4.5.

где производные определяются с помощью правосторонней от точки (0,0) конечной разности.

Пусть теперь $h_1(x)$ и $Q_1(x)$ заданы в пределах ограниченного отрезка $(0, l)$, а $h_2(t)$ задана на оси $t$. Тогда, очевидно, решение можно найти в районах *I* и *II* на рис. 4.5. Для определения решения в прямоугольнике нам необходимо, кроме того, знать граничное условие на линии $x=l$. Пусть на этой линии задано $Q_2(t)$. Тогда решение в районе *III* будет непрерывно с решением в районе *I*, если $Q_2(t)$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$Q_2(0) = Q_1(l) \tag{1.14}$$

и, в соответствии с уравнением движения (1.1),

$$gA_0\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)_l + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial t}\right)_0 = 0. \tag{1.15}$$

Теперь для смешанных граничных условий решение в прямоугольнике получается следующим образом.

В районе *I* рис. 4.5 значения $h$ и $Q$ зависят от начальных условий, следовательно, их можно определить непосредственно вдоль характеристик $OP$ и $PQ$. Значения на $OP$ вместе со значениями $h$ вдоль отрезка $OR$ определяют решение в районе *II*.

Аналогично решения в районе *III* фиксируются с помощью условий на *PQ* и *TQ*. Следуя этому методу, можно получить решения во всей прямоугольной области. При этом ясно, что решения будут непрерывными (см. главу 3, разд. 1.4), если предположить непрерывность всех граничных условий.

В практических приложениях приливные задачи со смешанными граничными условиями имеют большее значение, чем приливные задачи с условиями Коши.

Например, если река с одного конца замкнута, то $h$ известно в устье, а $Q=0$ на конце. Условия Коши в фиксированном месте можно использовать для предварительных схематизаций явления в речном русле (см. главу 5).

### Конечно-разностные аппроксимации в случае смешанных граничных условий

Рассмотрим случай смешанных граничных условий, когда $h$ известно на $x=1$, а $Q$ — на $x=2M$, а кроме того, $h$ и $Q$ известны вдоль оси $t=0$. Тогда система разностных уравнений (1.10) и (1.11), в которых значения обеих функций $h$ и $Q$ необходимо определить в каждом узле, оказывается непригодной для расчета $h$ и $Q$ в узлах сеточной области, так как в точках границ известны либо $h$, либо $Q$. Поэтому конечно-разностные уравнения должны быть заменены системой, с помощью которой в каждом узле можно определить значения либо $h$, либо $Q$. Это можно сделать, используя такое разностное уравнение, аппроксимирующее уравнение неразрывности, в котором два узла из четырех имеющихся в разностном уравнении, не совпадают ни с одним из четырех узлов в конечно-разностной аппроксимации уравнения движения.

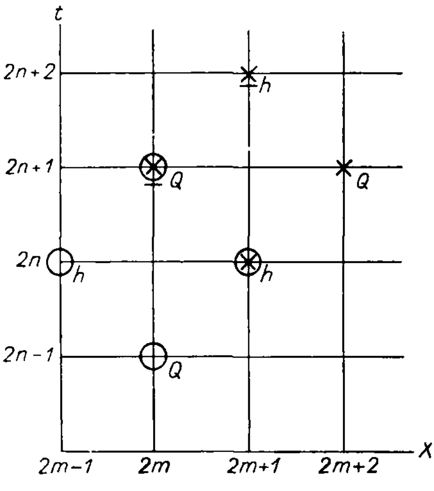



Рис. 4 6.

Конечно-разностные формулы для таких численных расчетов определяются следующим образом:

$$h^{2n}_{2m+1} - h^{2n}_{2m-1} + (gA_0)^{-1}\frac{\Delta x}{\Delta t}\left(\underline{Q^{2n+1}_{2m}} - Q^{2n-1}_{2m}\right) = 0, \qquad (1.16)$$

$$\underline{h^{2n+2}_{2m+1}} - h^{2n}_{2m+1} + b_0^{-1}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(Q^{2n+1}_{2m+2} - Q^{2n+1}_{2m}\right) = 0 \qquad (1.17)$$

для уравнения движения и уравнения неразрывности соответственно.

Теперь мы можем рассчитать подчеркнутые значения $h$ и $Q$ ($Q$ в узле $(2m,\ 2n+1)$ и $h$ в узле $(2m+1,\ 2n+2)$), если неподчеркнутые члены в (1.16) и (1.17) известны из предыдущего расчета. Эта расчетная схема представлена на рис. 4.6. Точки, обведенные кружками, относятся к уравнению (1.16), а точки с крестиками — к уравнению (1.17); на этом рисунке подчеркнуты те точки, значения $h$ и $Q$ в которых требуется найти. Таким образом, в этой системе значения $h$ и $Q$ рассчитываются справа налево.

В общем, пусть $h$ известно в узлах $(x=2k+1,\ t=2r)$, где $k=0, \ldots, M-1$, а $r=1, \ldots, n$, а также в точках $(2m+3,\ 2n+2)$ и $(2M-1,\ 2n+2)$; $Q$ известно в узлах $(x=2k+2,\ t=2r-1)$ и, кроме того, в точках $(2m+2,\ 2n+1)$ и $(2M,\ 2n+1)$. Тогда в уравнениях (1.16) и (1.17) значения $Q_{2m}^{2n+1}$ и $h_{2m+1}^{2n+2}$ неизвестны, а другие члены известны. Из начальных условий для $h$ и $Q$ на линии $t=0$ с помощью (1.7) получаются значения $Q$ в узлах линии $t=1$.

Аналогичную систему, в которой значения $h$ и $Q$ рассчитываются слева направо, можно получить, заменяя (1.17) выражением

$$\underline{h_{2m-1}^{2n+2}} - h_{2m-1}^{2n} + b_0^{-1}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(Q_{2m}^{2n+1} - Q_{2m-2}^{2n+1}\right) = 0. \qquad (1.18)$$

В этом случае можно рассчитать подчеркнутые члены из уравнений (1.16) и (1.18).

## 2. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ПРИЛИВНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РЕК

### 2.1. Конечно-разностные уравнения в общем случае

В предыдущем разделе мы познакомились с основными принципами использования конечно-разностной системы упрощенных приливных уравнений (1.1). Эти принципы остаются в силе также и в применении к общим приливным уравнениям (4.6) и (4.9) или (4.10) главы 1. Однако, перед тем как перейти к конечно-разностной аппроксимации общих приливных уравнений, необходимо сделать некоторые дополнительные замечания.

Уравнения длинных волн, в которых пренебрегается членами высшего порядка малости, включают в себя уравнение движения

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{da_0}{dx} + \frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{(\alpha_2 b + b_s)}{gA^2} Q \frac{\partial h}{\partial t} \pm \frac{Q^2}{C^2 A^2 (a_0 + h)} - \frac{W}{\rho g (a_0 + h)} + I = 0 \qquad (2.1)$$

и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+b\frac{\partial h}{\partial t}=0, \tag{2.2}$$

где $A=b_s(a_0+h)$, $b$ и $b_s$ — известные функции $x$, а $h$ находится по данным измерений на створах в рукавах реки. Обычно эти величины представляются графически. Верхний знак в (2.1) соответствует положительному $Q$, а нижний — отрицательному $Q$. Далее, $a_0$ — глубина, отсчитываемая от среднего уровня, $W$ — некоторая функция от скорости ветра, определяемая соотношением $W=\alpha_0 V^2$, и $I$ — наклон дна. Скорость ветра $V$ считается известной функцией $x$ и $t$, а множитель $\alpha_0$ равен $\zeta\cos\psi$ (см. главу 1, разд. 3.3).

Рассмотрим сперва сетку, представленную на рис. 4.1, и предположим, что $h$ и $Q$ уже вычислены для $t\leqslant n\Delta t$. Вновь заменим производные $\partial h/\partial x$, $\partial Q/\partial x$, $\partial h/\partial t$ и $\partial Q/\partial t$ их разностными аналогами, подобно тому как это было сделано в (1.10) и (1.11). Нам нужно найти значения коэффициентов и члена, характеризующего трение, которые содержат множитель $|Q|Q$, в центре ромба, обозначенного точкой $(n, m)$. Однако, поскольку значения $h$ и $Q$ в центре ромба вычисляться не будут ($h$ будет рассчитываться в точке $(m-1, n)$, а $Q$ — в точке $(m, n-1)$ и т. д.), требуется выразить коэффициенты через значения $h$ в соседних точках, а член, характеризующий трение, — через значения $Q$ в тех же точках. Это можно сделать различными способами. Например, можно положить

$$2A=[b_s(a_0+h)]^n_{m-1}+[b_s(a_0+h)]^n_{m+1},$$

$$2b=\left(b^n_{m-1}+b^n_{m+1}\right);\quad 2b_s=\left(b^n_{s,\,m-1}+b^n_{s,\,m+1}\right) \tag{2.3}$$

и тогда можно рассчитать коэффициенты в уравнениях. Другой способ заключается в следующем.

Поскольку все коэффициенты зависят от $h$, они могут быть представлены в виде степенных рядов по $h$, аппроксимирующих графики этих функций, например,

$$b=b_0+b_1^*h+b_2^*h^2+\ \ldots;\quad \frac{1}{gA}=m_0+m_1^*h+m_2^*h^2+\ \ldots,$$

$$\frac{a_2b+b_s}{gA^2}=p_0+p_1^*h+p_2^*h^2+\ \ldots;$$

$$\frac{1}{C^2A^2(a_0+h)}=r_0+r_1^*h+r_2^*h^2+\ \ldots \tag{2.4}$$

В этом случае коэффициенты можно определить с помощью хорошо известных численных методов. После того как коэффициенты будут найдены, значения $h$ в узлах сеточной области можно представить в виде

$$h = \frac{1}{2}\left(h^n_{m-1} + h^n_{m+1}\right).$$

Поскольку член, характеризующий трение, является одним из наиболее важных членов в уравнении движения, коэффициенты при этом члене следует рассмотреть особо. Наиболее часто используется следующая аппроксимация:

$$Q^2 = Q^{n-1}_m Q^{n+1}_m,$$

где $Q^{n-1}_m$ известно из предыдущих вычислений, а $Q^{n+1}_m$ неизвестно; таким образом, относительно этой неизвестной величины член является линейным. Можно использовать также менее точную аппроксимацию, если принять $\Delta t$ и $\Delta x$ достаточно малыми,

$$Q^2 = Q^{n-1}_m Q^{n-1}_m.$$

Значения функции $W$, зависящей от скорости ветра, можно найти в центре ромба ($W^n_m$), а множитель $(a_0 + h)^{-1}$ можно аппроксимировать отношением вида

$$\left[a^n_{0m} + \frac{1}{2}\left(h^n_{m-1} + h^n_{m+1}\right)\right]^{-1}.$$

Обычно разностное представление уравнений (2.1) и (2.2) применяется в случае смешанных граничных условий. В этом случае $h(0, t)$ задается в устье реки, а $Q(l, t)$ — в точке $l$ в верховьях реки. На обоих концах реки могут задаваться также вертикальные приливные колебания уровня $h(0, t)$ и $h(l, t)$. В первом случае вся длина реки должна быть поделена на нечетное число, а во втором случае — на четное число участков $\Delta x$ (см. разд. 1.4).

Теперь можно приписать разностные уравнения к узлам сеточной области аналогично тому, как это делалось в разд. 1 для простых приливных уравнений при смешанных граничных условиях (см. (1.16), (1.17) и рис. 4.5). Поскольку мы имеем дело с линейными уравнениями, содержащими неизвестные значения $h$ в узле $(2m+1, 2n+2)$ и $Q$ в узле $(2m, 2n+1)$, необходимо, чтобы при расчете члена $\partial h/\partial t$, входящего в (2.1), использовались узлы, отличные от тех узлов, которые применяются для расчета остальных членов. Для всех коэффициентов (за исключением $b$) будем использовать аппроксимации, подобные (2.3). Кроме того, введем следующее обозначение:

$$\left(\frac{1}{gA}\right)^{2n}_{(2m+1,\ 2m-1)} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{gA}\right)^{2n}_{2m+1} + \left(\frac{1}{gA}\right)^{2n}_{2m-1}\right] \text{ и т. д.}$$

Используем теперь следующие конечно-разностные уравнения. Для уравнений движения при сетке, состоящей из ромбов $(2m, 2n-1)$, $(2m-1, 2n)$, $(2m, 2n+1)$, $(2m+1, 2n)$, имеем:

$$
\begin{gathered}
h^{2n}_{2m+1} - h^{2n}_{2m-1} + \left(\frac{1}{gA}\right)^{2n}_{(2m+1,\ 2m-1)} \frac{\Delta x}{\Delta t}\left(\underline{Q^{2n+1}_{2m}} - Q^{2n-1}_{2m}\right) - \\
- \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha_2 b + b_s}{gA^2}\right)^{2n}_{(2m+1,\ 2m-1)} \frac{\Delta x}{\Delta t}\left(Q^{2n-1}_{2m} + \underline{Q^{2n+1}_{2m}}\right)\left(h^{2n}_{2m-1} - h^{2n-2}_{2m-1} + \right. \\
\left. + h^{2n}_{2m+1} - h^{2n-2}_{2m+1}\right) \pm 2\left(\frac{1}{C^2A^2(a_0+h)}\right)^{2n}_{(2m+1,\ 2m-1)} \Delta x Q^{2n-1}_{2m}\,\underline{Q^{2n+1}_{2m}} - \\
- 2\left(\frac{1}{g(a_0+h)}\right)^{2n}_{(2m+1,\ 2m-1)} \Delta x W^{2n}_{2m} + 2I\,\Delta x = 0. \qquad (2.5)
\end{gathered}
$$

Из этого уравнения можно найти значение $Q^{2n+1}_{2m}$ (ср. с (1.16)).

Для уравнения неразрывности при той же сетке с узлами $(2m+1, 2n)$, $(2m, 2n+1)$, $(2m+1, 2n+2)$, $(2m+2, 2n+1)$ имеем

$$
b^{2n}_{2m+1}\left(\underline{h^{2n+2}_{2m+1}} - h^{2n}_{2m+1}\right) + \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(Q^{2n+1}_{2m+2} - Q^{2n+1}_{2m}\right) = 0. \qquad (2.6)
$$

Если $Q^{2n+1}_{2m}$ найдено из (2.5), из уравнения (2.6) определяется значение $h^{2n+1}_{2m+1}$ (ср. с (1.17)).

*Замечания.* 1. Коэффициент при члене, содержащем $Q\dfrac{\partial h}{\partial t}$ в (2.5), определяется обычным способом; при этом, однако, дифференциальный коэффициент $\partial h/\partial t$ заменяется значениями $h$ в тех узлах, для которых точки $(2m-1, 2n-1)$ и $(2m+1, 2n-1)$ являются центральными. Иными словами, используется следующая аппроксимация:

$$
\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^{2n-1}_{2m-1} + \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^{2n-1}_{2m+1}\right].
$$

Кроме того, в (2.6) значение $b$ полагается приближенно равным

$$
b^{2n+1}_{2m+1} \approx b^{2n}_{2m+1},
$$

так как в точке $(2m+1, 2n)$ значение $h$ было рассчитано ранее. Можно использовать более точную аппроксимацию, если $b$ быстро меняется со временем. В этом случае можно записать

$$
\begin{gathered}
b^{2n+1}_{2m+1} = b^{2n}_{2m+1} + b_1^*\left(h^{2n+1}_{2m+1} - h^{2n}_{2m+1}\right) \approx \\
\approx b^{2n}_{2m+1} + \frac{1}{2}\, b_1^*\left(h^{2n}_{2m+1} - h^{2n-2}_{2m+1}\right), \qquad (2.6a)
\end{gathered}
$$

где $b_1^*$ определено в (2.4).

2. При расчете приливов в реке начальные условия в момент $t=0$ обычно неизвестны, поэтому предварительно необходимо оценить значения $h$ и $Q$ в момент $t=0$.

В этом случае вновь потребуется найти объяснение правильности условий (1.12)—(1.15). Не приходится сомневаться, что эти условия в большей или меньшей степени нарушаются.

По-видимому, разница между оцененной и точной величинами невелика, так как влияние членов, приводящих к этому различию, в $h$ и $Q$ будет уменьшаться по мере увеличения $t$ вследствие наличия силы трения. В главе 3, в конце раздела 1.4, мы уже останавливались на этой проблеме, когда рассматривали линейный закон трения. Хотя очень трудно получить точное доказательство справедливости этого утверждения в случае квадратичного закона, нет сомнений, что оно будет выполняться и в этом случае, так как мы аппроксимируем квадратичный закон линейным законом для ограниченных интервалов $x$ и $t$.

При выполнении приливных расчетов оказывается весьма существенным то обстоятельство, что влияние начальных условий уменьшается с течением времени. В этом случае, при больших $t$, приливное движение зависит главным образом от граничных условий. Например, в случае периодических граничных условий рассчитанный прилив будет становиться периодическим по мере увеличения времени (через период, равный двум или трем периодам приливной волны). Пример такого расчета представлен в разд. 4.2 главы 5, где приводятся результаты Ханзена [59].

Кроме того, понятно, что изменения коэффициентов в течение приливного периода не вызовут ухудшений сходимости метода.

3. Поскольку мы коснулись вопроса о сходимости и устойчивости конечно-разностной аппроксимации, заметим, что в случае общих приливных уравнений остаются в силе положения, указанные для упрощенных уравнений (см. разд. 1.3). Однако их необходимо дополнить некоторыми замечаниями.

Сходимость процесса гарантирована, если в соответствии с (3.4) (глава 3) (см. также разд. 1.2 этой главы)

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} < \left[\,|\,u \pm (ga)^{1/2}\,|\,\right]^{-1}. \tag{2.7}$$

Поскольку при расчетах $\Delta x$ и $\Delta t$ считаются постоянными в течение всего приливного периода, необходимо предположить, что

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} > \left(|\,u\,| + (ga)^{1/2}\right)_{\max}. \tag{2.8}$$

Можно ожидать, что устойчивость процесса усилится, если учесть силу трения. Ошибка, сделанная при расчете $h$ или $Q$ в узле сеточной области, будет уменьшаться на последующих шагах. Вследствие нелинейности уравнений точное математическое исследование этой проблемы очень затруднено, и поэтому в настоящее время об устойчивости схемы нам приходится судить по результатам численных экспериментов. Систематические эксперименты подобного рода выполнил Розе [109]. В своей диссертации он привел примеры расчета приливных движений в каналах различных размеров. По-видимому, устойчивые решения получались даже тогда, когда $\Delta t/\Delta x$ было несколько больше $g(a_0+h_m)^{-\frac{1}{2}}$, где $a_0+h_m$ — максимальная в течение приливного периода глубина. Если это неравенство нарушалось очень сильно, то появлялась было неустойчивость. В период подъема уровня решение, по-видимому, устойчиво, однако в период стоячей воды после ПВ (переход от прилива к отливу, когда силы трения оказываются равными нулю или очень малыми) возникала неустойчивость, которая немного ослаблялась при усилении отливных течений (а следовательно, и увеличении сил трения).

4. В рассмотренных выше конечно-разностных аппроксимациях приливных уравнений $h$ и $Q$ рассматривались в качестве зависимых переменных. Различные исследователи (Ханзен [57, 58, 59], Холстерс и Розе [109]) в качестве зависимых переменных вводят $h$ и $u$ и рассматривают следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha_2 u\frac{\partial u}{\partial x}=-g\frac{\partial h}{\partial x}-g\frac{|u|\,u}{C^2(a_0+h)}+\alpha\frac{V^2}{a_0+h},$$

$$\frac{\partial Au}{\partial x}+b\frac{\partial h}{\partial t}=0,$$

где $A$ — площадь сечения в момент $t$, а $V$ — скорость ветра.

Хотя имеются некоторые отличия в способе аппроксимации коэффициентов в этих уравнениях, указанные исследователи шли, в общем, тем же путем, что и при выводе уравнений (2.5) и (2.6) (см. рис. 4.5), например,

$$u_{2m}^{2n+1}=u_{2m}^{2n-1}+g\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(h_{2m-1}^{2n}-h_{2m+1}^{2n}\right)-\frac{2g\,\Delta t\left|u_{2m}^{2n-1}\right|}{C^2(a_0+h)_{2m}^{2n}}u_{2m}^{2n-1}, \tag{2.9а}$$

$$h_{2m+1}^{2n+2}=h_{2m+1}^{2n}+\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{1}{b}\right)_{2m+1}^{2i+1}\left(u_{2m}^{2n+1}A_{2m}^{2n+1}-u_{2m+2}^{2n+1}A_{2m+2}^{2n+1}\right). \tag{2.9б}$$

Далее необходимо найти значения $a_0+h$, $b$ и $A$ в тех точках, где ранее были вычислены величины $h$ (ср. с (2.5) и (2.6)).

Тогда член Бернулли $\alpha_2 u\,\partial u/\partial x$ и член, характеризующий влияние ветра, исключатся из рассмотрения. Уравнения (2.9) могут использоваться для численного расчета приливов в зарегулированных реках, где влияние искривления русла невелико.

## 2.2. Конечно-разностные аппроксимации для узкой части реки (или для прохода)

Формулы (7.11) или (7.12), которые были приведены в главе 1, разд. 7, определяют движение воды в узкой части реки, имеющей сравнительно небольшую протяженность.

Пусть $AB$ и $DE$ представляют собой два участка реки, а между ними (в $C$) имеет место узкость протяженностью $\Delta x_0$. Разделим каждый участок на подобласти длиной $\Delta x$. Тогда $C$ расположится между границами обоих участков. Предположим, что $\Delta x_0$ мало по сравнению с $\Delta x$ (практически $\Delta x_0$ равно нескольким сотням метров, тогда как $\Delta x$ больше 1 км).

Пусть $\Delta t$ является тем промежутком времени, который удовлетворяет условию (2.8) для обоих участков реки. Соответствующая сетка показана на рис. 4.7. В этом случае значения $h$ или $Q$

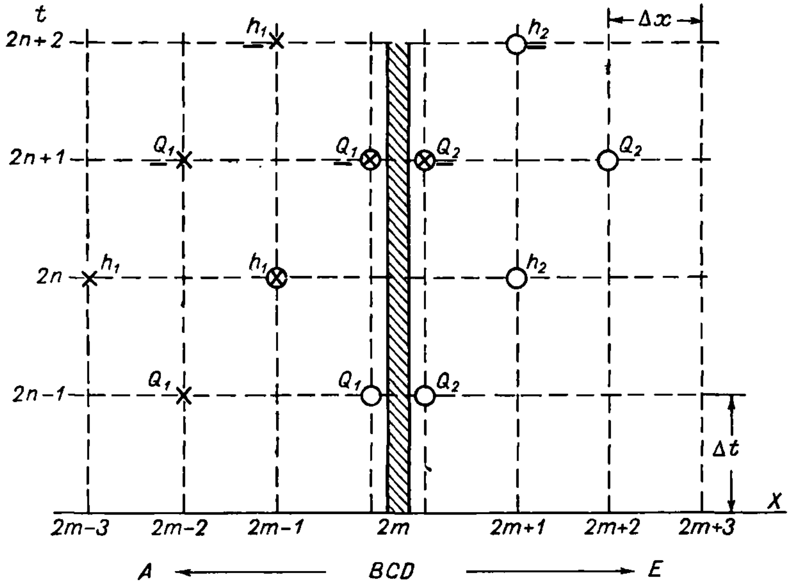



Рис. 4 7.

по обе стороны от узкого прохода можно рассчитать следующим образом.

На участках $AB$ и $DE$ выполняются уравнения (2.1) и (2.2). Будем обозначать коэффициенты, относящиеся к участку $AB$, индексом 1, а к участку $DE$ — индексом 2. Если использовать разностные уравнения (2.5) и (2.6), то значения $h$ и $Q$ вычисляются слева направо.

Пусть теперь $h$ и $Q$ в момент $t=2n$ на участках $AB$ и $DE$, а также $h_2$ и $Q_2$ справа от линии $x=2m+1$ в моменты $t=2n+1$ и $t=2n+2$ известны заранее. Тогда подчеркнутые значения $h$ и $Q$ в (2.5) и (2.6) оказываются неизвестными (можно предположить, что значения $Q$ в момент $t$ одинаковы по обе стороны от прохода ($Q_1=Q_2$), поскольку протяженность этой узкой части мала). Кроме того, для простоты будем пренебрегать членами

$$\frac{da_0}{dx}, \quad \frac{a_2 b + b_s}{gA^2} Q \frac{\partial h}{\partial t},$$

$$W=0 \quad \text{и} \quad I=0.$$

Пусть $d$ является высотой гребня плотины в $C$, причем $d$ отсчитывается от горизонтального дна; $a_C$ — наименьшая глубина в районе гребня, а $A_C$ — площадь поперечного сечения. Тогда для условий в период подъема уровня (приливная волна перемещается на рис. 4.7 слева направо) будем аппроксимировать $a_C$ через $a_{02} - d + h^{2n}_{2m+1}$, где $h^{2n}_{2m+1}$ — уровень воды на участке реки, расположенном выше по потоку; для условий отлива будем использовать выражение $a_{01} - d + h^{2n}_{2m-1}$.

Применим сетку, состоящую из ромбов $(2m+1,\ 2n)$, $(2m,\ 2n+1)$, $(2m-1,\ 2n)$, $(2m,\ 2n-1)$, тогда для периода прилива получим следующее уравнение (см. (2.1) и главу 1, (7.11)):

$$h^{2n}_{2m+1} = h^{2n}_{2m-1} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{gA}\right)^{2n}_{2m-1} + \left(\frac{1}{gA}\right)^{2n}_{2m+1}\right]\frac{\Delta x}{\Delta t}\left(\underline{Q^{2n+1}_{2m}} - \right.$$
$$\left. - Q^{2n-1}_{2m}\right) - \left[\left(\frac{1}{C^2A^2(a_0+h)}\right)^{2n}_{2m-1} + \left(\frac{1}{C^2A^2(a_0+h)}\right)^{2n}_{2m+1}\right] \times$$
$$\times \Delta x Q^{2n-1}_{2m}\underline{Q^{2n+1}_{2m}} + \frac{\eta_1}{2g}\left[\left(\frac{1}{A^2}\right)^{2n}_{2m-1} - \frac{1}{A^2_c}\right] Q^{2n-1}_{2m}\underline{Q^{2n+1}_{2m}}, \qquad (2.10)$$

аналогичное уравнение будем иметь и для периода отлива.

Заметим, что множители $\left(\frac{1}{A}\right)^{2n}_{2m-1}$, $\left(\frac{1}{A}\right)^{2n}_{2m+1}$ и т. д. не зависят не только от $h$, но также и от соответствующих размеров участков 1 и 2. Кроме того, пренебрежем трением на гребне. В конечном счете влияние трения может быть учтено посредством коэффициента $\eta_1$ или дополнительного члена (см. разд. 7.2 главы 1). Уравнение неразрывности, записанное в точках $(2m+1,\ 2n+2)$( $(2m+1,\ 2n)$, $(2m+2,\ 2n+1)$ и $(2m,\ 2n+1)$, было дано в (2.6).

После расчета $Q^{2n+1}_{2m}$ и $h^{2n+2}_{2m+1}$ аналогичные уравнения можно применить к ряду точек, которые на рис. 4.6 расположены слева от прохода. Поскольку $Q_1=Q_2$, можно рассчитать $h^{2n+2}_{2m+1}$ и $Q^{2n+1}_{2m+2}$ и т. д.

В том случае, когда необходимо получить очень точные результаты, например в периоды, близкие к стоячей воде, $\Delta x$ следует принять достаточно малым. Можно также использовать итерационный метод в той подобласти, которая включает в себя зону прохода. После первого расчета $Q^{2n+1}_{2m}$ можно аппроксимировать $Q^{2n-1}_{2m}Q^{2n+1}_{2m}$ в (2.10) через $\frac{1}{4}\left(Q^{2n+1}_{2m} + Q^{2n-1}_{2m}\right)^2$ и заменить квадратичный член в точке $(2m,\ 2n+1)$ произведением вычисленного значения $Q$ и вновь полученного значения; затем рассчитывается новое $Q_{2m}^{2n+1}$.

Приведенный выше метод нельзя использовать в том случае, если поток, проходящий через проход, находится в критическом режиме. В этом случае уровни воды по обе стороны от прохода не зависят друг от друга. Теория критического потока рассматривается в главе 6, разд. 1 (формула (1.6) является формулой для критического потока).

Пусть $h$ и $Q$ вновь вычислены на линии $t=2n$. Тогда мы не можем использовать рассмотренные выше узловые точки, так как значение $h$ в точке $(2m+1,\ 2n)$ не зависит от значений в узлах, расположенных слева от точки $C$. Значение $Q$ в узле $(2m,\ 2n+1)$ определяется из условия на водосливе в соответствии с формулой (1.6) главы 6.

После того как значение $Q$ найдено, $h$ в узле $(2m+1,\ 2n+2)$ можно рассчитать обычным способом, аппроксимируя уравнение неразрывности конечно-разностным аналогом (2.6).

### 2.3. Конечно-разностные аппроксимации для участка слияния рек

Пусть $C$ является точкой слияния трех рек (рис. 4.8), а $AC$, $BC$ и $DC$ — примыкающие друг к другу участки реки. Условия для $h$ и $Q$, которые должны удовлетворяться в $C$, рассмотрены в главе 1, разд. 6; они выражаются формулами (6.1) и (6.3) или (6.1) и (6.4). Рассмотрим здесь наиболее простые и часто применяемые условия (6.1) и (6.4). Тем самым будем предполагать, что в $C$

$$Q_1 = Q_2 + Q_3; \quad h_1 = h_2 = h_3. \qquad (2.11)$$

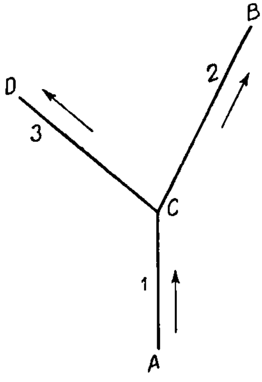


Рис. 4.8.

Кроме того, для участков $AC$ и $CB$ вновь используем сетку, представленную на рис. 4.7, где эти участки обозначены через $AB$ и $DE$ соответственно. В $C$ область слияния заменяет зону прохода. Участки реки $CD$ и $CB$ покроем одинаковой сеткой и допустим, что для всех участков $\Delta x$ и $\Delta t$ сохраняются неизменными.

Обратимся к приливным уравнениям, использованным в разд. 2.1. Коэффициенты в этих уравнениях для трех участков обозначим индексами 1, 2 и 3 соответственно.

На участках $AC$ и $CB$, а также $AC$ и $CD$ вновь припишем конечно-разностные соотношения к узлам $(2m-1,\ 2n)$, $(2m,\ 2n-1)$, $(2m,\ 2n+1)$, $(2m+1,\ 2n)$, $(2m+1,\ 2n+2)$ и $(2m+2,$

$2n+1$); значения $h_1$ в узле $(2m-1, 2n)$ и $Q_1$ в узлах $(2m, 2n-1)$ и $(2m, 2n+1)$ входят в обе системы.

Пусть значения $h$ и $Q$ известны во все моменты времени, включая $t=2n$.

Тогда для каждого из участков $CD$ и $CB$ требуется рассчитать $h^{2n+2}_{2,\,2m+1}$ и $h^{2n+2}_{3,\,2m+1}$, а в точке $C$ — $Q^{2n+1}_{1,\,2m}$, $Q^{2n+1}_{2,\,2m}$ и $Q^{2n+1}_{3,\,2m}$; таким образом, требуется определить пять неизвестных функций. Для уравнения неразрывности имеются две конечно-разностные схемы, две другие схемы имеются для уравнения движения. Уравнение движения в период прилива записывается в виде (ср. (2.10))

$$h^{2n}_{2,\,2m+1}=h^{2n}_{1,\,2m-1}-\frac{1}{2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\left[\left(\frac{1}{gA}\right)^{2n}_{2m-1}\left(\underline{Q^{2n+1}_{1,\,2m}}-Q^{2n+1}_{2,\,2m}\right)+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{gA}\right)^{2n}_{2m+1}\left(\underline{Q^{2n+1}_{2,\,2m}}-Q^{2n-1}_{2,\,2m}\right)\Bigg]-\Delta x\left[\left(\frac{1}{C^2A^2(a_0+h)}\right)^{2n}_{2m-1}\times\right.$$

$$\left.\times\, Q^{2n-1}_{1,\,2m}\underline{Q^{2n+1}_{1,\,2m}}+\left(\frac{1}{C^2A^2(a_0+h)}\right)^{2n}_{2m+1}Q^{2n-1}_{2,\,2m}\underline{Q^{2n+1}_{2,\,2m}}\right]. \qquad (2.12)$$

Аналогичное уравнение записывается и для участка $CD$, при этом в членах, содержащих $Q_2$, индекс 2 заменяем индексом 3. Поскольку

$$Q^{2n+1}_{1,\,2m}=Q^{2n+1}_{2,\,2m}+Q^{2n+1}_{3,\,2m}, \qquad (2.13)$$

из этих трех линейных уравнений можно определить три значения $Q$. Затем обычным способом вычисляем значения $h_2$ и $h_3$ в узле $(2m+1,\ 2n+2)$, используя уравнение неразрывности. Для выполнения последующих расчетов значений $h$ и $Q$ на участке $AC$ в моменты $(2n+1)\Delta t$ и $(2n+2)\Delta t$ перейдем к рассмотрению обычных систем (2.6) и (2.10).

Заметим, что мы рассчитали значения $h$ и $Q$, двигаясь от участков, лежащих выше по потоку, к участкам, располагающимся ниже. Применяя уравнения, аналогичные (1.16) и (1.18), можно произвести расчет, двигаясь в обратном направлении.

При расчете мы неявно использовали условие $h_1=h_2=h_3$; это условие вошло в уравнение (2.12). В случае применения более сложных уравнений, например уравнения (6.2) из главы 1, используются конечно-разностные аппроксимации вида (2.10) и (2.12).

### 3. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ПОТОКА С РАЗРЫВАМИ

В главе 3 (разд. 9) использовался конечно-разностный метод, в основе которого лежал метод характеристик. Аналогичный метод применялся также в разд. 12.2 при расчете распространения разрывов, подобных бору. Оказалось, что при использовании метода характеристик необходимо применять очень частую сетку, для того чтобы точно определить место зарождения бора.

С целью преодоления указанных трудностей в дифференциальные уравнения в частных производных добавлялись фиктивные члены. В этом случае наблюдалось изменение разрыва — зона разрыва становилась сглаженной и простиралась на малый участок $\Delta x$. Численное решение конечно-разностных уравнений с включением фиктивных членов автоматически обнаруживает «сглаживание» разрыва, что позволяет затем удовлетворительно аппроксимировать истинную величину гидравлического прыжка. Идея введения искусственного члена принадлежит Нейману и Рихтмайеру [108]. Они применили этот прием при расчете распространения ударных волн в газах, которые они описали уравнениями Гюгонио. Два из них подобны тем уравнениям, которые были получены для движения разрыва в воде (см. разд. 5 главы 1). Однако в случае сжимаемой жидкости необходимо дополнить систему уравнений уравнением сохранения внутренней энергии. (Об уравнениях Гюгонио можно прочесть в книге Рихтмайера [108] и в других работах, указанных в литературе.)

Скорость жидкости $u$, давление $p$, плотность $\rho$ и внутренняя энергия $E$, отнесенная к единице массы, являются зависимыми переменными в уравнениях Гюгонио и в уравнении состояния, которое связывает $p$, $\rho$ и $E$. При решении задач о движении воды в качестве зависимых переменных используются скорость жидкости $u$ и высота свободной поверхности $a$ или $h$, если применяется эйлерова система координат.

В этом случае существует следующая формальная аналогия между уравнениями для газов и уравнениями для одномерного речного потока (см. (3.3)):

| Воздух | Вода |
|---|---|
| Скорость | Скорость |
| Плотность | Высота свободной поверхности над дном, $a$ |
| Давление | $\frac{1}{2}ga^2$ |

Кроме того, уравнения могут быть выражены в эйлеровой или лагранжевой форме. Последняя форма применительно к движению воды приводится в главе 1, разд. 9. Для случая непрерывного движения обычно используется эйлерова система координат, так как движение частиц само по себе интереса не представляет. Однако, если необходимо рассмотреть движение разрывов, целесообразно применить уравнения в форме Лагранжа. Эти уравнения лежат в основе метода определения ударных волн в газах, предложенного Нейманом и Рихтмайером. Они добавили в уравнения движения искусственные диссипативные члены, так что удар можно было представить не в виде разрыва, а в виде узкой области, в пределах которой давление и плотность претерпевали резкие изменения. Поскольку эти диссипативные члены добавлялись также в уравнения, описывающие распространение волн за областью удара, их влияние должно быть пренебрежимо малым. Этот метод имеет то преимущество, что нам не нужно знать, где располагаются фактические возмущения.

Подробное обсуждение этих задач для ударных волн можно найти в книге Рихтмайера [108]. Аналогичный метод может также применяться при численных решениях задач о потоке с разрывами. Прайссман и Кюнге [99] использовали этот метод и привели результаты некоторых предварительных расчетов упрощенных примеров образования и распространения бора. Они применили уравнения в форме Эйлера и вместо расхода ввели скорость воды. В случае, когда ширина района накопления воды $b$ равна ширине русла $b_s$ и движение является непрерывным, уравнение неразрывности записывается в виде (ср. с (4.13) главы 5)

$$\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial(a_0+h)}{\partial x}+(a_0+h)\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{3.1}$$

а уравнение движения, если $I=0$, $W=0$ и коэффициент $\alpha_2$ полагается равным единице (см. (4.11) главы 1), имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-g\frac{\partial(a_0+h)}{\partial x}-\frac{g|u|u}{C^2(a_0+h)}. \tag{3.2}$$

Прайссман и Кюнге ввели в уравнение движения (3.2) член, характеризующий искусственную вязкость; он аналогичен члену, использованному Нейманом и Рихтмайером. Тогда вместо (3.2) они получили

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{a_0+h}\frac{\partial\left[\frac{1}{2}g(a_0+h)^2+q\right]}{\partial x}-\frac{g|u|u}{C^2(a_0+h)}, \tag{3.3}$$

где $a_0+h$ — глубина.

Дополнительный член $q$ определяется так:

$$q=\begin{cases} l^2(a_0+h)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, & \text{если } \frac{\partial u}{\partial x}<0,\\ 0, & \text{если } \frac{\partial u}{\partial x}>0.\end{cases} \tag{3.4}$$

Здесь $l$ — порядок величины того расстояния, в пределах которого располагается видоизмененный разрыв. Кроме того, $l$ может выбираться более или менее произвольно. При численных расчетах $l$ заменяется соотношением

$$l=r\,\Delta x,$$

где $r$ равен 2 или 3, а $\Delta x$ — расстояние между узлами сеточной области.

Добавим, что уравнение (3.3) благодаря члену

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

является параболическим дифференциальным уравнением.

Прайссман и Кюнге применили этот метод к нескольким схематизированным моделям, используя различные коэффициенты трения. Авторы в своей статье приводят некоторые результаты расчета.

Для пояснения полезно сделать следующее замечание, относящееся к поведению функции $q$ в течение приливного периода.

Покажем сначала, что в случае движения длинных волн член $a^{-1}\partial q/\partial x$ является малым по сравнению с членом $g\partial a/\partial x$, где $a=a_0+h$.

Таким образом, запишем

$$\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial x}\left(g\frac{a^2}{2}+q\right)=\left\{g+\frac{l^2}{a}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}\frac{\partial a}{\partial x}+l^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \tag{3.5}$$

Тогда можно показать, что

$$l\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\ll(ga)^{1/2} \tag{3.6}$$

и

$$l^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\ll g\frac{\partial a}{\partial x}. \tag{3.7}$$

Пусть $\alpha$ определяется из

$$l\frac{\partial u}{\partial x}=\alpha(ga)^{1/2}. \tag{3.8}$$

Тогда в соответствии с уравнением неразрывности (3.1) для случая горизонтального дна выполняется соотношение

$$\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}=-\frac{\alpha}{l}(ga^3)^{1/2}.$$

Следовательно, $\alpha$ равно

$$\alpha=-\frac{l}{(ga^3)^{1/2}}\left(\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}\right). \tag{3.9}$$

Пусть прилив представляется в виде ряда Фурье:

$$h=\sum_{n=1}^{N}h_n(x)\cos\left(n\omega t+\alpha_n(x)\right). \tag{3.10}$$

Тогда

$$\alpha=-\frac{l}{(ga^3)^{1/2}}\sum_{n=1}^{N}\Big[-n\omega h_n(x)\sin\left(n\omega t+\alpha_n(x)\right)+$$
$$+u\frac{dh_n(x)}{dx}\cos\left(n\omega t+\alpha_n(x)\right)-uh_n\frac{d\alpha_n(x)}{dx}\sin\left(n\omega t+\alpha_n(x)\right)\Big], \tag{3.11}$$

и

$$|\alpha| \leqslant \frac{l}{(ga)^{1/2}} \left\{ \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{a} \left[ n\omega h_n + |u| \left| \frac{dh_n}{dx} \right| + \right.\right.$$
$$\left.\left. + |u| h_n \left| \frac{d\alpha_n}{dx} \right| \right] \right\}. \qquad (3.12)$$

Для оценки $\alpha$ используются данные фактических измерений. Когда $\omega = 1{,}405 \cdot 10^{-4}$, что соответствует частоте приливной волны $M_2$, а $l = r\Delta x$, то множитель $(ga)^{-1/2}\omega l$ будет малым, если $\Delta x$ равен, например, одному километру.

Кроме того, сумма

$$\frac{1}{a} \sum_{n=1}^{N} n h_n(x)$$

будет единичного порядка.

Второй член, заключенный в фигурные скобки, в (3.12) будет меньше, чем

$$|u_{\max}| \sum_{n=1}^{N} \frac{|h_n(x_1) - h_n(x_2)|}{a\omega\,|x_1 - x_2|},$$

если $dh_n(x)/dx$ заменить его конечно-разностным представлением, так чтобы $x_1 - x_2 = l$. На практике оказывается, что этот член обычно мал по сравнению с первым рассмотренным членом. Тот же вывод можно получить и применительно к третьему члену в (3.12). В общем, значение $|\alpha|$ определяется главным образом первым членом в (3.11), и оказывается, что $|\alpha|$ мало для суммарного приливного движения.

Аналогично можно показать, что неравенство (3.7) удовлетворяется также и для непрерывного приливного движения. В этом случае можно записать

$$l^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = ga \frac{\partial \alpha^2}{\partial x} + g\alpha^2 \frac{\partial h}{\partial x} \approx ga \frac{\partial \alpha^2}{\partial x}, \qquad (3.13)$$

так что (3.7) будет выполняться, если

$$\frac{\partial \alpha^2}{\partial x} \ll \frac{1}{a} \frac{\partial h}{\partial x}. \qquad (3.14)$$

Это неравенство можно получить для суммарного приливного движения на основании (3.11) и практических оценок.

Однако если уровень воды резко изменяется в пределах небольшого участка, то величина члена $l\,|\partial u/\partial x|$ будет сравнима с величиной $(ga)^{1/2}$ и $\alpha$ не будет малым по сравнению с единицей. Это выяснится из сравнения уравнений (3.8) и (12.18) или (12.23) разд. 12 главы 3.

Пусть $x_1$ и $x_2$ являются двумя точками, каждая из которых расположена по одну сторону от разрыва или бора, а $u_1$ и $u_2$ — скорости в этих точках. Тогда, согласно тому, что $l = r\Delta x = x_1 - x_2$,

$$l \frac{\partial u}{\partial x} \approx u_1 - u_2. \tag{3.15}$$

С другой стороны, на основании (12.23) главы 3 и (3.8) находим, что

$$\alpha \approx \frac{\Delta}{a}\left[1 + \frac{1}{8}\left(\frac{\Delta}{a}\right)^2\right], \tag{3.16}$$

где $a$ — средняя глубина в пределах участка ($x_1$, $x_2$), определяемая как $\frac{1}{2}(a_1 + a_2)$. Следовательно, если $\Delta$ не мало́ по сравнению с глубиной, $\alpha$ не мало́ по сравнению с единицей.

Из уравнения неразрывности следует, что знак члена $\partial u/\partial x$ определяется главным образом знаком $\partial u/\partial t$. Поскольку производная $\partial h/\partial t$ положительна в период подъема уровня, то член $\partial u/\partial x$ является отрицательным. Иначе говоря, член $q$ отрицателен, что находится в соответствии с тем фактом, что в период отлива не могут иметь места разрывы в приливном движении.

Ранее мы предположили, что ширина русла $b_s$ остается постоянной. В незарегулированных реках она может сильно меняться, тогда знак $\partial u/\partial x$ может изменяться по длине реки в момент $t$.

Изложенная здесь теория (см. также Рихтмайер [108], глава 10) и методика ее применения непрерывно развиваются. Особое внимание в дальнейшем необходимо уделить вопросам устойчивости конечно-разностных уравнений, которые заменяют (3.1) и (3.3), а также исследованию влияния членов $\partial u/\partial t$ и $\partial u/\partial x$ в (3.3) на ширину зоны бора. Кроме того, желательно заменить $q$ более простой функцией.

## 4. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ДВУХМЕРНОГО ПРИЛИВНОГО ДВИЖЕНИЯ

В главе 1, разд. 3, приводится подробное описание уравнений движения для моря. Эти уравнения описываются формулами (3.17) и (3.18), в которых учитывается влияние ветра и изменения атмосферного давления. К этим уравнениям необходимо добавить уравнение неразрывности (2.7), приведенное в главе 1, разд. 2. Запишем их здесь в следующей форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \Omega v =$$

$$= -g\frac{\partial (h - h')}{\partial x} - \frac{gu\left(u^2 + v^2\right)^{1/2}}{C^2 (a_0 + h)} + \frac{\alpha_0 U_0 \left(U_0^2 + V_0^2\right)^{1/2}}{a_0 + h}, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\Omega u=$$

$$=-g\frac{\partial (h-h')}{\partial y}-\frac{gv\left(u^2+v^2\right)^{1/2}}{C^2\left(a_0+h\right)}+\frac{\alpha_0 V_0\left(U_0^2+V_0^2\right)^{1/2}}{a_0+h}, \qquad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(a_0+h)a+\frac{\partial}{\partial y}(a_0+h)v+\frac{\partial h}{\partial t}=0, \qquad (4.3)$$

где компоненты $\rho^{-1}\zeta V\cos\psi$ и $\rho^{-1}\zeta V\sin\psi$ выражаются через компоненты скорости ветра $\alpha_0 U_0$ и $\alpha_0 V_0$ вдоль оси $y$.

Поскольку влияние величины $h'$, означающей колебание уровня, вызванное атмосферным давлением, и $h$ аналогичны друг другу, то в дальнейшем в конечно-разностных уравнениях члены, содержащие $h'$, удобно исключить из рассмотрения.

Численный метод, аналогичный тому, который использовался в предыдущем разделе при решении уравнений для одномерного приливного движения, можно применить и при решении приливных уравнений для моря. Поэтому заменим эти уравнения конечно-разностными уравнениями, вновь используя центральные конечные разности. Это можно сделать несколькими различными способами. Получим систему разностных уравнений, которая уже использовалась в практических расчетах Ханзена [55, 57, 58, 59] и Терада [137], а затем систему, применяемую в математическом центре в Амстердаме. В статье [59] Ханзен приводит обзор практических приложений этих уравнений к одно- и двухмерным приливным районам — рекам и Северному морю.

## 4.1. Первая разностная схема

Пусть значения $u$ и $v$ известны в плоскости $x$, $y$ и в момент $t=t_0$, а значение $h$ известно для момента $t=t_0+\Delta t$. Тогда заменим дифференциальные уравнения (4.1)—(4.3) их разностными аналогами, чтобы иметь возможность рассчитать значения $u$ и $v$ для $t=t_0+2\Delta t$ и значения $h$ для $t=t_0+3\Delta t$ и т. д. При таких численных расчетах значения $u$, $v$ или $h$ вновь находятся в разных узловых точках, так как в каждом узле можно определить лишь одну из этих трех величин. Пример такой трехмерной сетки показан на рис. 4.9, где часть плоскости $x$, $y$ показана в моменты $t=t_0$, $t+\Delta t$ и т. д. Начало системы координат в различных плоскостях помещено в точку с координатами (0,0). На этих плоскостях показаны также некоторые другие узлы $(x=p,\ y=q)$.

В точках с координатами (—2, 0), (0, 0) и т. д. заданы значения $u$ в момент $t=t_0$, а в узлах (—1, 1), (—1, —1) и т. д. заданы значения $v$. Для момента $t_0+\Delta t$ значения $h$ на плоскости $x$, $y$ предполагаются известными в точках (—1, —2), (—1, 0) и т. д. Тогда значения $u$ и $v$ при $t_0+2\Delta t$ рассчитываются для тех же значений $x$ и $y$, что и для плоскости $t_0$, и аналогично значения $x$, $y$ для $h$ в плоскости $t_0+3\Delta t$ совпадают со значениями координат при $t=t_0+\Delta t$ и т. д.

В общем, в том случае, когда $x$, $y$ представляют собой координаты узла в плоскости $t_0$, другие узлы обозначаются через $(x+p\Delta x,\ y+q\Delta y)$, где $p$, $q$ — отрицательные, равные нулю или положительные целые числа.

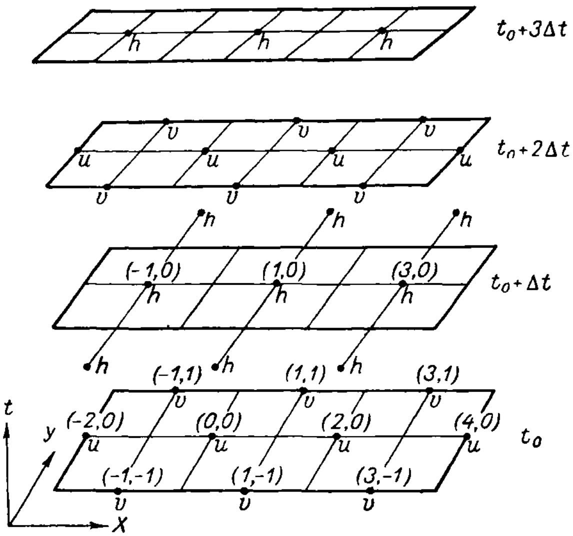



Рис. 4.9.

Пусть в момент $t=t_0+r\Delta t$ значения $u$ рассчитываются в узлах $(x+2p\Delta x,\ y+2q\Delta y)$, а значения $v$ — в узлах $[x+(2p+1)\Delta x,\ y+(2q+1)\Delta y]$. Тогда в момент $t_0+(r+1)\Delta t$ значения $h$ в плоскости $x$, $y$ будут определяться в узлах $[x+(2p+1)\Delta x,\ y+2q\Delta y]$.

Можно ввести теперь следующие обозначения: значение $u$ в точке $(x+2p\Delta x,\ y+2q\Delta y)$ в момент $t_0+r\Delta t$ обозначим через $u\,(x,\ y;\ r)$ и соответственно введем $v(x+1,\ y+1;\ r)$ и $h(x+1,\ y;\ r+1)$.

Заменим дифференциальные уравнения разностными уравнениями, используя центральные конечные разности, причем сделаем это так, чтобы можно было определить знаечния $u$ в узле $(x,\ y,\ r)$. Тогда при расчете $u$ в последующих узлах $r$-плоскости точку $x$, $y$ в разностном уравнении можно заменить точками с координатами $(x+2p\Delta x,\ y+2q\Delta y)$ и т. д.

Воспользуемся следующим представлением дифференциалов через конечные разности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \to \frac{1}{2}\{u(x,\ y;\ r+2)-u(x,\ y;\ r)\}(\Delta t)^{-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \to \frac{1}{4}\{u(x+2;\ y;\ r)-u(x-2,\ y;\ r)\}(\Delta x)^{-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \to \frac{1}{4}\{u(x,\ y+2;\ r)-u(x,\ y-2;\ r)\}(\Delta y)^{-1}.$$

Поскольку в точке $x$, $y$ значение $v$ не рассчитывается, определим его как среднее из значений $v$ в окружающих точках $(x+1, y+1)$, $(x+1, y-1)$, $(x-1, y+1)$ и $(x-1, y-1)$.

Поскольку средняя глубина известна в любой точке моря, можно ввести ее значение в точке $x$, $y$, $t_0$. Необходимо также заменить значение $h$ его средним значением в плоскости $t=t_0+(r+1)\Delta t$ в точках $(x-1, y)$ и $(x+1, y)$.

После подстановки в (4.1) получим следующее разностное уравнение для $u$:

$$\begin{aligned} u(x,\ y;\ r+2) = {} & u(x,\ y;\ r)-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}u(x,\ y;\ r)[u(x+2,\ y;\ r)- \\ & -u(x-2,\ y;\ r)]-\frac{1}{8}\frac{\Delta t}{\Delta y}[v(x+1,\ y+1;\ r)+ \\ & +v(x+1,\ y-1;\ r)+v(x-1,\ y+1;\ r)+ \\ & +v(x-1,\ y-1;\ r)][u(x,\ y+2;\ r)-u(x,\ y-2;\ r)]+ \\ & +\frac{1}{2}\Omega\,\Delta t[v(x+1,\ y+1;\ r)+v(x+1,\ y-1;\ r)+ \\ & +v(x-1,\ y+1;\ r)+v(x-1,\ y-1;\ r)]- \\ & -g\frac{\Delta t}{\Delta x}[h(x+1,\ y;\ r+1)-h(x-1,\ y;\ r+1)]- \\ & -\frac{2g}{C^2}\Delta t u(x,\ y;\ r)\Big[a_0(x,\ y)+\frac{1}{2}h(x-1,\ y;\ r+1)+ \\ & +\frac{1}{2}h(x+1,\ y;\ r+1)\Big]^{-1}A_1(x,\ y;\ r)+ \\ & +2\alpha_0\Delta t U_0(x,\ y;\ r+1)\Big[a_0(x,\ y)+\frac{1}{2}h(x-1,\ y;\ r+1)+ \\ & +\frac{1}{2}h(x+1,\ y;\ r+1)\Big]^{-1}B_1(x,\ y;\ r+1). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Аналогичным образом находится разностное уравнение для расчета $v$ в момент $t+2\Delta t$. Затем, вновь вводя центральные разности для замены производных в точке $(x+1,\ y+1)$, определяем в этой точке значение $v$. Поскольку в данной точке значение $u$ неизвестно, снова используем среднее из значений в тех окружающих точках, где $u$ рассчитано. Разностное уравнение для вычисления $v(x+1,\ y+1,\ r+2)$ аналогично уравнению (4.4), только вместо $x$, $y$, $\Delta x$ и $U_0$ необходимо записать $x+1$, $y+1$, $\Delta y$ и $V_0$. В точке $(x+1,\ y+1)$ разностные величины представляют собой центральные конечные разности; это же замечание относится и к $h$ в выражении для $a_0+h$.

Множители $A_1(x,\ y;\ r)$, $B_1(x,\ y;\ r+1)$ в (4.4) обозначают конечно-разностные аппроксимации модулей скорости воды и ветра:

$$(u^2+v^2)^{1/2} \quad \text{и} \quad (U_0^2+V_0^2)^{1/2}$$

соответственно.

Поскольку значения $u$ и $v$ рассчитываются в узлах сеточной области, разностная аппроксимация множителей $u^2$ и $v^2$ должна выглядеть следующим образом:

$$(u^2+v^2)^{1/2} \to \Big\{[u(x,\ y;\ r)]^2+\frac{1}{16}[v(x+1,\ y+1;\ r)+ \\ +v(x+1,\ y-1;\ r)+v(x-1,\ y+1;\ r)+ \\ +v(x-1,\ y-1;\ r)]^2\Big\}^{1/2}=A_1(x,\ y;\ r). \qquad (4.5)$$

Так как значения составляющих скорости ветра предполагаются известными, $(U_0^2+V_0^2)^{1/2}$ можно аппроксимировать в виде

$$\{[U_0(x,\ y;\ r+1)]^2+[V_0(x,\ y;\ r+1)]^2\}^{1/2}= \\ =B_1(x,\ y;\ r+1). \qquad (4.6)$$

Значения $h$ в момент $t+(r+3)\Delta t$ окончательно рассчитываются из уравнения неразрывности (4.3). Будем применять это уравнение для расчета $h(x+1,\ y,\ r+3)$. Тогда производная $\partial(a_0+h)u/\partial x$ заменяется следующим разностным аналогом. Поскольку значения $h$ и $u$ находятся в различных плоскостях, будем использовать определенные значения $h$ в плоскости $t_0+(r+1)\Delta t$ и значения $u$ в плоскости $t_0+(r+2)\Delta t$ (они находятся из уравнения (4.4)). Это допустимо в том случае, если $\Delta t$ достаточно мало.

Следовательно, мы имеем

$$2\,\Delta x\left[\frac{\partial}{\partial x}(a_0+h)\,u\right](x+1,\ y;\ r+3)=$$
$$=a_0(x+1,\ y)\,[u(x+2,\ y;\ r+2)-u(x,\ y;\ r+2)]+$$
$$+\frac{1}{2}\{[h(x+3,\ y;\ r+1)+$$
$$+h(x+1,\ y;\ r+1)]\,u(x+2,\ y;\ r+2)-[h(x+1,\ y;\ r+1)+$$
$$+h(x-1,\ y;\ r+1)]\,u(x,\ y;\ r+2)\}.$$

Таким образом, значение $h$ в точке $(x+2,\ y)$ в плоскости $t_0+2\Delta t$ аппроксимируется средним значением $h$ в точках $(x+3,\ y)$ и $(x+1,\ y)$ в плоскости $t_0+\Delta t$ и т. д.

Разностный аналог для $\partial(a_0+h)v/\partial y$ определяется тем же способом.

После подстановки этих разностных величин в (4.3) получаем разностное уравнение относительно $h(x+1,\ y;\ r+3)-$ $-h(x+1,\ y;\ r+1)$. Используя разностные уравнения, можно определить значения $u$, $v$ и $h$ в данных узловых точках в последующие моменты времени, если при $-\infty<x<\infty$ и $-\infty<y<$ $<\infty$ заданы начальные условия для $u$ и $v$ в момент $t_0$ и $h$ в момент $t_0+\Delta t$.

Об использовании быстродействующих электронных вычислительных машин для расчета трехмерных океанических течений можно прочесть в статье Хидака [64].

## 4.2. Вторая разностная схема

При расчете приливных волн с большими амплитудами в Северном море Ловерье и Дамсте [82] применили трехмерную разностную схему, отличную от той, которая рассматривалась выше.

В основе этой схемы лежали следующие упрощенные уравнения длинных волн (см. главу 2, разд. 2):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\lambda u+\Omega v-ga\frac{\partial h}{\partial x}+U(x,\ y,\ t), \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\lambda v-\Omega u-ga\frac{\partial h}{\partial y}+V(x,\ y,\ t), \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}=-\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}, \tag{4.9}$$

где $U$ и $V$ — компоненты скорости ветра; остальные обозначения общепринятые. Глубина $a$ считается неизменной в плоскости $x$, $y$, аналогичное предположение делается относительно параметров $\lambda$ и $\Omega$.

Граничные условия те же, что и для прямоугольной модели Северного моря (см. главу 2, разд. 2). Кроме того, задаются условия при $t=0$.

Авторы исследовали устойчивость различных разностных схем. Полученные ими результаты сводятся к следующему.

Компоненты скорости $(u,\ v)$ и отклонение $h$ рассчитываются в плоскости $x,\ y,\ t_0+\Delta t$ по известным значениям этих характеристик в плоскости $x,\ y,\ t_0$. Затем расчеты продолжаются в плоскости $x,\ y,\ t_0+2\Delta t$ и т. д. Таким образом, компо... $u$, $v$ рассчитываются в точках $(x+2p\Delta x,\ \ y+2q\Delta y,\ \ t_0+ \ldots$ где $p,\ q=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ Отклонения уровня определяются в точках $(x+(2p-1)\Delta x;\ y+(2q-1)\Delta y;\ t_0+\Delta t)$ (см. рис. 4.10 б).

Производные по времени заменяются обычными односторонними вперед направленными разностями. Для разностного представления производных от $h$ по $x$ и $y$ в узле плоскости $x,\ y,\ t$ используются значения $h$ в соответствующих окружающих точках или, иными словами, определяются средние значения центральных конечных разностей; аналогичным образом находятся значения производных от $u$ и $v$ по $x$ и $y$. Следовательно, для точки $(x,\ y,\ t_0)$ (см. рис. 4.10 б) имеем:

$$\frac{\partial h}{\partial x}\to\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{x,\ y+\Delta y}+\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{x,\ y-\Delta y}\right\}\to\frac{1}{4\Delta x}\times$$

$$\times\{h(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ t_0)-h(x-\Delta x,\ y+\Delta y,\ t_0)+$$

$$+h(x+\Delta x,\ y-\Delta y,\ t_0)-h(x-\Delta x,\ y-\Delta y,\ t_0)\}=D_1(h), \quad (4.10)$$

Разностные а...ля $\partial h/\partial y$, $D_2(h)$ определяются совершенно аналогичн...

$$\frac{\partial h}{\partial y}\to\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_{x+\Delta x,\ y}+\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)_{x-\Delta x,\ y}\right\}\to\frac{1}{4\Delta y}\times$$

$$\times\{h(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ t_0)-h(x+\Delta x,\ y-\Delta y,\ t_0)+$$

$$+h(x-\Delta x,\ y+\Delta y,\ t_0)-$$

$$-h(x-\Delta x,\ y-\Delta y,\ t_0)\}=D_2(h). \quad (4.11)$$

Как и в (4.10) или (4.11), определяются разностные аналоги $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial y$ (используются окружающие точки в направлениях $x$ и $y$). Следовательно, для точки $(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ t_0)$ имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}\to\frac{1}{4\Delta x}\{u(x+2\Delta x,\ y+2\Delta y,\ t_0)-$$

$$-u(x,\ y+2\Delta y,\ t_0)+u(x+2\Delta x,\ y,\ t_0)-$$

$$-u(x,\ y,\ t_0)\}=D_1'(u). \quad (4.12)$$

Соответствующие соотношения записываются также для $\partial v/\partial y$, $D'_2(v)$.

После подстановки различных разностных аналогов, приведенных в (4.10)—(4.12), в уравнения (4.7)—(4.9) получаются искомые разностные уравнения. Они могут быть записаны для момента $t$ в виде

$$\begin{aligned} u(x,\ y,\ t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t)\,u(x,\ y,\ t) + \\ +\Omega\,\Delta t v(x,\ y,\ t) - ga\,\Delta t D_1(h), \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} v(x,\ y,\ t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t)\,v(x,\ y,\ t) - \\ -\Omega\,\Delta t u(x,\ y,\ t) - ga\,\Delta t D_2(h), \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} h(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ t+\Delta t) = h(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ t) - \\ -\Delta t D'_1(u) - \Delta t D'_2(v), \end{aligned} \tag{4.15}$$

где функции $U$ и $V$ опущены.

В практических приложениях область, в которой требуется определить значения $h$, $u$ и $v$, является ограниченной. Нормальная к берегу компонента скорости равна нулю, а на границе с другим морем отклонения уровня $h$ обычно предполагаются заданными.

В случае прямоугольного моря, открытого с одного конца (где ось $y$ направлена в продольном направлении, а ось $x$ — в поперечном), граничные условия задаются в виде: $u=0$ при $x=0$ и $x=b$; $v=0$ при $y=0$ и $h=f(x,\ t)$ при $y=l$, где $b$ — ширина, а $l$ — длина канала. Следовательно, в этом случае произвольный выбор сеточной области становится невозможным. Поскольку $u$ и $v$ подлежат определению в узлах твердого контура, а отклонение уровня $h$ — на открытом конце моря, то ширину необходимо поделить на четное число равных частей $\Delta x$, а длину — на нечетное число равных частей $\Delta y$. (В разд. 2.1 главы 2 $x$ направлено вдоль оси канала, а $y$ — поперек.)

Кроме того, для представления $h$ на границах невозможно использовать центральные разностные операторы. При расчетах в математическом центре [82, 83] применяются взвешенные конечно-разностные аппроксимации типа

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_{y=0} \to \frac{1}{4\,\Delta x}\,\{3h(x+\Delta x,\ \Delta y,\ t) - 3h(x-\Delta x,\ \Delta y,\ t) - \\ - h(x+\Delta x,\ 3\,\Delta y,\ t) + h(x-\Delta x,\ 3\,\Delta y,\ t)\}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Аналогичные соотношения записываются для $\partial h/\partial y$ на $x=0$ и $x=b$.

## 4.3. Математический анализ

Заканчивая обзор численных методов расчета приливных движений, можно сделать следующие замечания.

Для одномерного нестационарного потока сходимость и устойчивость конечно-разностных схем более подробно рассматривалась в разд. 1.3. Изучение этих вопросов для конечно-разностных схем, используемых при численном решении дифференциальных уравнений в частных производных, которые содержат более двух независимых переменных, находится в самой начальной стадии.

Приливные уравнения для одномерных районов можно также исследовать с помощью метода характеристик. Однако этот

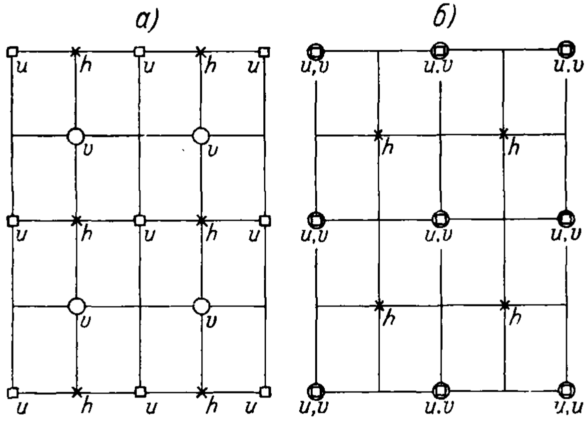



Рис. 4.10.

метод очень трудно распространить на решение трехмерных задач; некоторые возможные обобщения предложены Фоксом [44].

Ловерье и Дамсте́ [82, 83] заметили, что устойчивость разностных схем зависит от того, учитывается или нет сила Кориолиса, и от граничных условий. Использованный ими анализ устойчивости разностных схем основывался на теории Неймана, Лакса и Рихтмайера (см. [108]). Этот метод может применяться только к внутренней части района (так как $\Omega \neq 0$); таким образом, граничные условия не рассматриваются.

Сравнивая системы в разд. 4.1 (рис. 4.9 и 4.10 *а*) и 4.2 (рис. 4.10 *б*), видим, что в системе, приведенной в разд. 4.2, локальное осреднение, а следовательно, и процесс сглаживания являются более сильными, чем в системе разд. 4.1. Исходя из этого, можно ожидать, что система разд. 4.2 имеет более сильные стабилизирующие свойства, чем первая система. С другой стороны, устойчивость таких систем зависит также от размеров ячеек в плоскости $x$, $y$ и от шага по времени $\Delta t$. Если $\Delta t$ выбирается достаточно малым, система становится более устойчивой.

Используя метод проб и ошибок, авторы нашли, что для достаточно частой сетки разностная схема в окрестности границ также будет устойчивой.

Холстерс [68] исследовал проблему устойчивости при учете трения и силы Кориолиса. Гоэн [47, 48] применил ту же разностную схему, что и Холстерс.

Наконец, вновь необходимо отметить, что начальные и граничные условия должны задаваться так, чтобы они не вносили в решение разрывов. Однако можно ожидать, что при учете силы трения влияние подобных разрывов будет ослабляться по мере увеличения $t$.

*ГЛАВА 5*

# ДАННЫЕ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ПРИМЕНЕНИЯ ПРИЛИВНЫХ РАСЧЕТОВ И НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

## 1. СООБРАЖЕНИЯ О ПРОИЗВОДСТВЕ НАБЛЮДЕНИЙ В РАЙОНАХ С ПРИЛИВАМИ

Для практических целей, например для навигации, а также для изучения движения вод, переноса донных осадков и для определения изменений формы русла или района накопления необходимо иметь данные о глубине и ширине речного русла, о площади поверхности района накопления, о высоте уровня воды, о скорости течения и т. д. Мы не будем подробно рассматривать многочисленные методы наблюдений, применяемые для получения этих данных, а только упомянем некоторые из них (подробно см. в [90]).

1.1. Глубину можно определить с помощью ручного лота или эхолота, ширину — с помощью дальномера или секстана, а площадь района накопления — путем топографической съемки.

Отметки уровня в различных местах вдоль реки можно определить с помощью водомерных устройств. Автоматические самописцы уровня дают непрерывные записи за продолжительные интервалы времени. Эти данные, помимо их значения для целей навигации, существенны также для изучения приливов, особенно для определения гармонических постоянных и для статистических исследований в области таких вопросов, как экстремально высокие уровни при штормовых нагонах. Регистраторы уровня позволяют получить сведения за ограниченное число суток; их используют главным образом при исследовании явлений, имеющих кратковременный характер.

Самописцы размещают в устьях, в ряде пунктов вдоль реки и в местах впадения в реку притоков; число самописцев зависит от размеров эстуария и от изменчивости хода уровня вдоль реки. Если эстуарий не очень широк, приборы можно расположить на берегах, в тех местах, где местные эффекты несущественны. Помещать самописцы в самом эстуарии необходимо только при очень большой ширине последнего, когда в пределах поперечного сечения могут иметь место заметные различия в колебаниях уровня за счет действия силы Кориолиса или центробежных сил.

1.2. Скорости в определенных пунктах реки или эстуария могут быть измерены приборами, более или менее автоматически регистрирующими результат. Существуют различные типы таких приборов. Однако результаты измерения скорости в определенном пункте гораздо сильнее зависят от местных условий, чем аналогичные данные для уровня. Скорость изменяется от точки к точке вдоль поперечного сечения реки за счет изменения глубины речного русла. Обычно для определения характеристик потока приходится выполнять большое число измерений — это число зависит от степени неоднородности потока.

Необходимо также производить измерения по вертикали, чтобы найти распределение скорости по глубине. Обычно скорости последовательно измеряют в определенных точках вертикального разреза. Однако скорость в каждой точке надо измерять в течение достаточно долгого интервала времени, чтобы исключить турбулентные возмущения. Но каждый интервал ограничен, так как общее время наблюдений во всех точках вертикального разреза должно быть мало по сравнению с периодом приливных колебаний скорости.

Выполнение программы наблюдений в бассейне с приливами обычно требует большого количества времени, усилий и оборудования и может оказаться весьма дорогостоящим. Поэтому пункты наблюдений следует выбирать так, чтобы результаты как можно лучше отвечали целям исследований. Самые важные наблюдения относятся к устьям рек и к местам впадения притоков (как в главной реке, так и в самих притоках). Число вертикалей измерений на поперечном сечении зависит от неоднородности потока в пределах данного поперечного сечения. Как минимум, надо иметь три такие вертикали: одну посреди реки и две между серединой и каждым из берегов. Очень полезно также установить самописец уровня вблизи данного поперечного сечения и тем самым получить ход уровня в период наблюдений. Число промежуточных точек зависит как от неоднородности потока поперек речного русла, так и от наличия необходимых средств.

В отношении широких эстуариев с отмелями и фарватерами надо иметь в виду, что здесь составление эффективной программы наблюдений часто очень затруднительно. Для такой программы требуется некоторое представление о фактически существующем потоке, так что очень полезна предварительная рекогносцировка с непродолжительными измерениями в различных точках. Крайне ценными могут быть гидрографические карты, если они имеются в распоряжении.

Так как количество наблюдений над скоростями течений ограничено, распределение скоростей в речной системе за приливной цикл обычно известно с гораздо меньшей точностью, чем ход уровня. Кроме того, период измерений скорости в каком-либо районе бывает обычно весьма ограничен, что делает невозможным статистические исследования. В большинстве случаев не удается получить картину потока во всем бассейне в течение одного приливного цикла; наблюдения приходится выполнять в различные дни при различных приливных характеристиках. В результате данные, относящиеся к потоку, непосредственно несравнимы друг с другом. Поэтому все данные о скоростях надо привести к условиям какого-то определенного дня, т. е. к какому-то условному приливному уровню. Правила такого приведения можно установить только после изучения хода прилива в данном эстуарии. Например, правила для скоростей в период отлива перед малой водой могут отличаться от правил в период прилива перед полной водой, потому что площадь зеркала района накопления, так же как и характеристики речного русла, различны при полной и малой воде. Из-за нерегулярных движений, обусловленных турбулентностью, на которую могут оказывать влияние и проходящие суда, возможные ошибки при измерениях скорости также будут больше, чем при измерениях уровня. Такие ошибки можно в какой-то мере исключить, сравнивая между собой различные станции, если скорости регулярно изменяются во времени в пунктах, расположенных вдоль реки.

Обычный способ представления результатов наблюдений над течениями состоит в том, что величины и направления скоростей за каждые полчаса наносятся на карты. Очень часто употребляют так называемые лунные часы; лунный час равен одной двенадцатой части лунного дня, он на две минуты длиннее солнечного часа.

Говоря о представлении результатов, упомянем о последовательности действий. Вначале определяют средние величины скоростей в каждой точке живого сечения; затем графически изображают распределение этих величин по сечению. С помощью этого графика живое сечение можно разделить на участки, в пределах которых изменения скорости невелики по сравнению со средней для участка величиной. Вблизи берегов скорость можно считать равной нулю. Тогда количество воды, протекающей через живое сечение за секунду, можно найти, суммируя произведения площади каждого из участков на соответствующую среднюю скорость. Эти величины определяют для последовательных временных интервалов (15 или 30 минут), а затем представляют на графике, показывающем изменение расхода $Q$ через живое сечение в течение времени.

Величину средней скорости $u$ в любой момент можно получить, поделив полное количество воды $Q$, проходящее через живое сечение, на площадь живого сечения в этот момент.

Если величины $Q$ вычислены из наблюдений в различных пунктах вдоль реки, то мы можем проверить эти величины для любого момента с помощью уравнения неразрывности, которое выражает тот факт, что разность потоков через два последовательных поперечных сечения за единицу времени должна равняться количеству воды, скопившейся между этими сечениями за ту же единицу времени. Количество скопившейся (или потерянной) воды можно определить, если с помощью одного или нескольких водомерных устройств измерить уровни при условии, что показания регистраторов действительно характеризуют ход уровня на данном поперечном сечении. Если расстояние между поперечными сечениями таково, что водомерные посты не дают достаточной информации о ходе уровня, то для его определения надо выполнить более детальные приливные расчеты (см. разд. 4). Если обнаруживается разница между величинами $Q$, измеренными непосредственно и рассчитанными по данным смежных участков, то источник этого расхождения необходимо выяснить и ликвидировать. В месте слияния реки с ее притоками алгебраическая сумма расходов (положительных и отрицательных) в любой момент должна быть равна нулю.

На практике указанное сопоставление позволяет проконтролировать достоверность наблюдений.

Данные о приливных движениях в речной системе используются для целей навигации, а также помогают исследовать процессы переноса донных осадков, связанные со скоростью течения. Это в свою очередь позволяет судить об изменениях речного русла в течение времени. Результаты наблюдений крайне ценны также для осуществления и проверки схематизации речной системы, которая лежит в основе приливных расчетов.

Детальный учет неправильной формы речного русла привел бы к значительному усложнению вычислений. К счастью, в этом обычно нет необходимости, так как очертания русла как в поперечном сечении, так и в плане можно упростить. Будем называть такую упрощенную речную систему схематизированной математической моделью. Тогда для такой модели мы сможем точно рассчитать приливные движения. Результат можно проверить, анализируя наблюденные колебания уровня и течения.

## 2. СХЕМАТИЗАЦИЯ ЭСТУАРИЯ

Обычно эстуарий состоит из ряда фарватеров: имеется одно или два главных русла и несколько других менее важных. Эти фарватеры могут быть разделены мелководными участками, но часто они соединяются друг с другом. Таким образом, очевидно, что трудности при схематизации эстуария гораздо значительнее, чем при схематизации реки. Далее, мы рассматриваем такие приливные районы, ширина которых очень мала по сравнению с длиной приливной волны. Поэтому приливной поток направлен главным образом вдоль эстуария, в то время как поперечные движения воды считаются малыми всюду, кроме мест поперечных соединений главных фарватеров. Русло канала направляет приливной поток; помимо того, роль каналов проявляется в том, что при приливе определенное количество воды накапливается в них, а при отливе уходит из них. В мелководных районах, тянущихся вдоль главных русел, на отмелях, в рукавах-старицах и т. д. поток не играет важной роли и им обычно можно пренебречь. Эти районы часто имеют площади накопления, сравнимые с теми, которыми обладают фарватеры, а так как скапливающаяся вода должна пропускаться через каналы, то эти районы могут существенно влиять на приливные движения и поэтому следует тщательно учитывать емкость районов накопления. Другое усложняющее обстоятельство состоит в том, что во время малой воды в низко лежащих участках вода не протекает и задерживается, в то время как при полной воде над мелководьями происходит перетекание воды. Возникающий при этом поток может иметь продольное направление, но часто также происходит перетекание из одного фарватера в другой. Хотя скорость в таких районах обычно мала, тем не менее общее количество воды, протекающей над обширными мелководьями, может быть значительным. Схематизация таких районов крайне сложна.

Обычно эстуарий схематизируется каналами, которые и накапливают воду, и направляют ее движение; участки же, прилегающие к этим каналам, представляют собой районы накопления воды, но они не направляют ее движения. Для каналов четкой формы граница между руслом потока и прилегающими районами накопления хорошо выражена. Но когда переход от русла к району накопления происходит постепенно, приходится выбирать эту границу более или менее произвольно. В этом случае следует проверить влияние потока за пределами выбранной границы на результаты приливного исследования; мы встретимся с этим в разд. 4.3. В целом метод схематизации в значительной степени остается делом, основанным на личном опыте.

Другая проблема состоит в том, что направляющее поперечное сечение (живое сечение) меняется с изменениями уровня. При этом часто изменяется не только глубина, но и граница района накопления, так что может оказаться необходимым проделать различные схематизации для полной и малой воды.

Несколько замечаний о практическом осуществлении схематизации. Длина канала делится на участки ограниченной протяженности так, чтобы изменение живого сечения в пределах каждого участка было незначительным. Затем определяется среднее для участка поперечное сечение русла. Это можно сделать несколькими способами. Один из методов состоит в следующем. С помощью данных гидрографических карт находится середина русла и средняя глубина в этой точке относительно среднего уровня. После этого находятся средние глубины в точках, расположенных на определенных расстояниях по обе стороны от середины. Продолжая эти действия, получаем средние глубины через определенные интервалы вплоть до обоих берегов. Расстояние между точками на поперечном сечении определяется требуемой точностью, обычно оно составляет 10 или 20 м. Тогда среднее поперечное сечение можно изобразить графически.

Другой метод заключается в том, что поперечные сечения участка вычерчиваются через определенные расстояния, например через каждые 100—200 м, чтобы определить среднее поперечное сечение с достаточной точностью. Тогда среднее поперечное сечение можно определить на глаз. Этот метод предпочтительнее, например, если на определенных поперечных сечениях выполнен промер. «Среднее» поперечное сечение можно схематизировать далее в прямоугольное. Каждый такой прямоугольник строится на средней ширине и глубине. Эта схематизация зависит также от требуемой точности расчета.

Очевидно, что способ схематизации неправильного среднего поперечного сечения надо выбирать тщательно; заметим, что полезный материал для этого могут дать наблюдения над скоростями течений. Если это возможно, то поперечное сечение надо схематизировать прямоугольником с прилегающими районами накопления. Обычно для уровней ниже, чем уровень средней полной воды, достаточно одной схематизации. Для более высоких уровней, когда поток на примыкающих районах накопления достаточно заметен, схематизацию надо видоизменить. Это особенно необходимо в случае штормовых нагонов, когда уровень поднимается гораздо выше, чем при нормальных приливах.

На рис. 5.1 показаны два примера схематизации. На рис. 5.1 *А* поперечное сечение представлено с помощью двух прямоугольников, примыкающих друг к другу, а на рис. 5.1 *Б* — с помощью одного прямоугольника, но различного для моментов полной и малой воды; на рис. 5.1 *В* эти участки показаны в плане. Следующий вопрос — определение размеров прямоугольника. Площадь прямоугольника можно принять равной площади поперечного сечения русла, если границы русла фиксированы. Поскольку сопротивление в уравнении движения зависит от глубины, то удобно сначала определить среднюю глубину, а после этого найти ширину потока $b_s$. Очевидно, что для этой глубины надо взять среднюю величину, а не глубину самой нижней точки ложа потока. Из сказанного выше ясно, что в процессе схематизации имеется некоторый элемент произвольности. Его можно уменьшить путем определения величины коэффициента сопротивления $C$ по данным наблюдений над уровнем и течениями, используя ту же самую схематизацию канала.

Шёнфельд [123] в своем сообщении рассмотрел вопрос о схематизации участка реки и речной системы с теоретических позиций. На практике, однако, схематизация речной системы в большой степени зависит от опытности исследователя. В любом случае необходима проверка принятой схематизации путем приливных расчетов, основанных на данных наблюдений.

В реках правильной формы мы можем определить гидравлическую среднюю глубину следующим образом. Когда сопротивление за счет трения преобладает (в момент максимального потока), мы можем положить, что полный поток $Q$ через поперечное сечение равен

$$Q=\int ua\,dl+i^{*1/2}\int Ca^{3/2}\,dl,$$

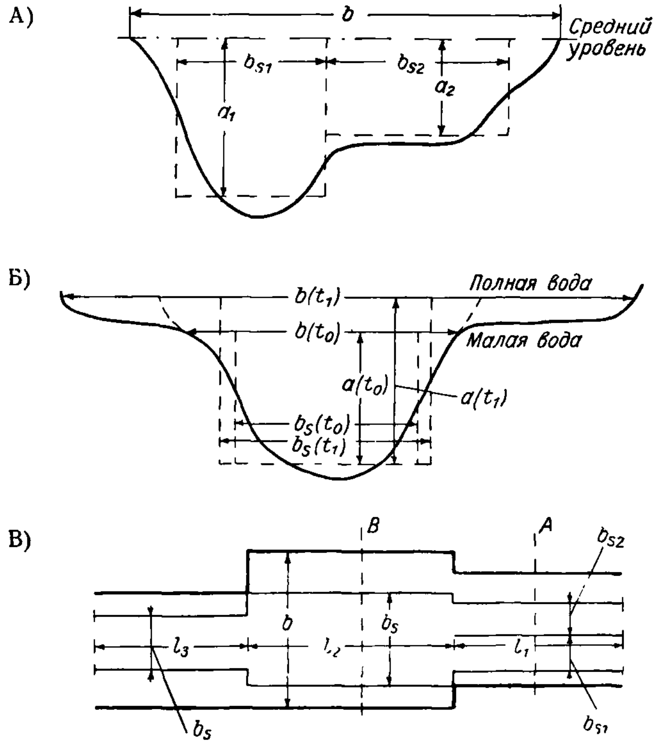



Рис. 5 1.

где $l$ — координата в направлении поперечного сечения. Величина $C$ опять означает коэффициент Шези, а $i^*$ — уклон линии напора. Интеграл берется по площади поперечного сечения. Пусть $C_m$ будет средней величиной $C$ на поперечном сечении, тогда можно положить

$$\int Ca^{3/2}\,dl=C_mAa_m^{1/2},$$

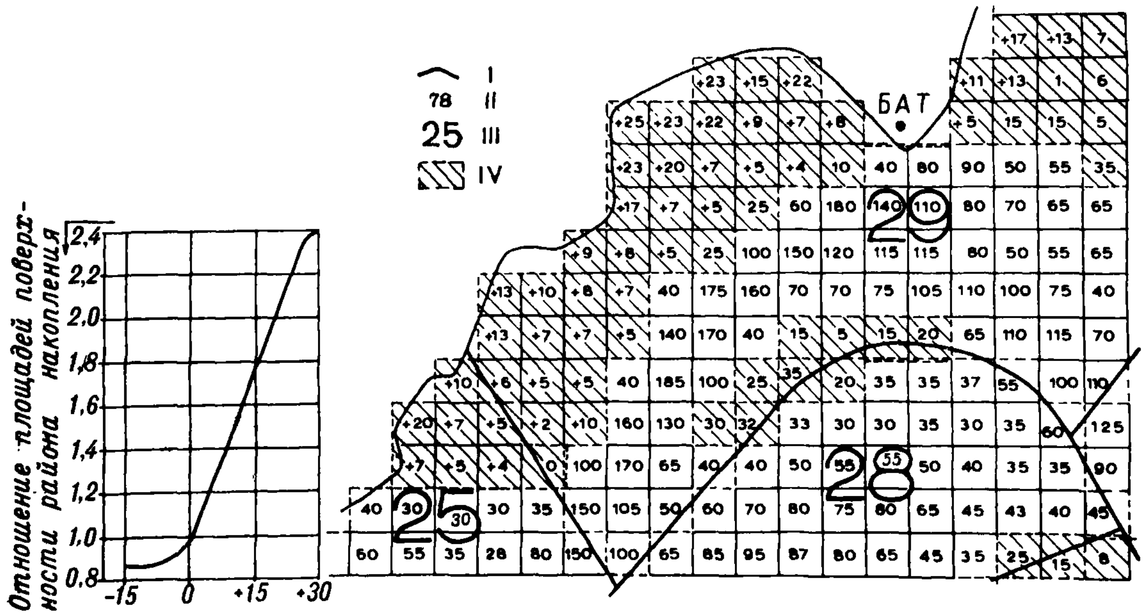



Рис. 5.2.

*I* — дамба, *II* — глубина (дм) от среднего уровня, *III* — номер участка, *IV* — район мелководья.

где величину $a_m$ можно назвать гидравлической средней глубиной поперечного сечения (живого сечения). Это определение основано на предположении, что уклон линии напора $i^*$ одинаков для глубоководных и мелководных точек реки.

Наконец, нам приходится иметь дело с эстуариями неправильной формы. Обычно глубины на гидрографических картах показаны так, что они дают информацию, необходимую для целей навигации, особенно подчеркивая отмели и самые глубокие части фарватеров. Для схематизации нам необходимы данные, равномерно распределенные как по каждому руслу, так и по прилегающим районам. Более регулярную картину распределения глубин можно получить следующим образом. В качестве примера на рис. 5.2 показана небольшая часть Вестер-Схелде. В квадратах сетки проставлены средние глубины квадрата, эти цифры могут быть взяты с гидрографических карт. Если на карте в данном квадрате не оказывалось никаких цифр, средняя глубина определялась путем интерполяции или экстраполяции с использованием данных соседних квадратов. С помощью этих осредненных значений можно получить представление о глубине в фарватерах и в прилегающих районах накопления. Затем можно приблизительно наметить границы каждого фарватера и проделать дальнейшую схематизацию, как было описано выше. Вообще, определение ширины района накопления и его площади на участках в зависимости от высоты уровня можно произвести непосредственно с карт, если имеется достаточно данных о глубине отмелей и мелководных районов, примыкающих к берегам реки или эстуария. Допустимая длина участков зависит от правильности формы реки или эстуария, а также от характера приливных движений. Чем однороднее эти условия, тем длиннее могут быть участки. Очевидно, что длина участка зависит также от требуемой точности результатов приливных расчетов. Чтобы получить точные результаты, в голландских реках с приливами и в эстуариях, как правило, используются участки длиной от 5 до 10 км.

Приливные расчеты, предназначенные для получения приближенной общей картины явления, выполняются обычно с помощью гармонического метода, где рассматривается только главная приливная составляющая. При этом можно использовать более длинные участки. Вычисления с помощью метода характеристик или численного метода на электронных вычислительных машинах применяются для получения более точных результатов; в этих случаях надо использовать короткие участки.

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ШЕЗИ

В мелководных районах с приливами значительные потери энергии за счет рассеяния ее диссипативными силами приводят к заметным разницам в высоте уровня между последовательными пунктами вдоль реки. При смене течения разница в высоте уровня определяется силами инерции; но во время большей части приливного цикла потери за счет придонного трения являются преобладающими. Заметные потери могут также иметь место за счет кривизны канала, его расширения или сужения, а также за счет таких препятствий, как дамбы. Учет каждого из этих влияний в отдельности делает приливные уравнения настолько сложными, что становится невозможным выполнить вычисления для крупной речной системы. Использовать такие уравнения удается только для детального исследования небольших районов. Поэтому все эти эффекты относят за счет одной суммарной силы сопротивления, которая предполагается равномерно распределенной вдоль участка.

Величину коэффициента Шези для участка реки можно рассчитать после того, как выполнена схематизация поперечного сечения. Нам необходимы, следовательно, наблюденные данные о колебаниях уровня на обоих концах участка и кривая расхода через поперечное сечение как функции времени. Лучше всего, если кривая расхода определена для середины участка. Если, однако, эта кривая определена для другого места участка, то кривую для середины участка можно получить с помощью уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b\frac{\partial h}{\partial t} = 0. \tag{3.1}$$

Пусть $l_1$ — длина участка и пусть кривая расхода определена в месте $l$ в пределах участка. Длина $l_1$ предполагается достаточно малой, например, не более 10 км, если река имеет правильную форму; в противном случае этот участок должен быть короче. Затем мы предполагаем, что разностное отношение $\Delta h/\Delta t$ изменяется вдоль реки линейно, так что в пункте $l$ имеем

$$\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_l = \left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_0 + \left[\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_{l_1} - \left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_0\right]\frac{l}{l_1},$$

где индекс 0 означает начало, а индекс $l_1$ — конец участка. Следовательно, кривая расхода для середины участка определится так:

$$Q_{{}^1/_2 l_1} = Q_l - b\int_l^{{}^1/_2 l_1}\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_l dl = Q_l - b\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_0\left(\frac{1}{2}l_1 - l\right) - \\ - \frac{b}{8}\left[\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_{l_1} - \left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_0\right]\frac{l_1^2 - 4l^2}{l_1}.$$

Более грубое приближение будет

$$Q_{{}^1/_2 l_1} = Q_l - \frac{1}{2}b\left[\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_0 + \left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_{l_1}\right]\left(\frac{1}{2}l_1 - l\right).$$

Теперь мы можем рассчитать величины коэффициента Шези $C$ для любого момента в течение приливного цикла с помощью уравнения движения. Если можно допустить, что ширина потока, ширина района накопления и глубина не зависят от $x$ в пределах участка, то величина $C$ прямо следует из

$$\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t}-\frac{a_2 b+b_s}{gA^2}Q\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{1}{C^2A^2(a_0+h)}|Q|Q=0. \quad (3.2)$$

В этом уравнении член $\partial h/\partial x \to \Delta h/\Delta x$ определяется из данных о колебаниях уровня; таким образом, для середины участка в любой момент известны величины

$$\frac{\Delta h}{\Delta x}=\frac{h(l_1)-h(0)}{l_1}, \quad \frac{1}{gA}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)_{1/2 l_1},$$

$$\frac{1}{2}\frac{a_2 b+b_s}{gA^2}Q_{1/2 l_1}\left[\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_0+\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_{l_1}\right]$$

$$\text{и} \quad \frac{1}{(a_0+h)A^2}(|Q|Q)_{1/2 l_1}.$$

Коэффициенты $(gA)^{-1}$ и т. д. можно найти для любого момента приливного цикла, для которого требуется рассчитать величину $C$. Тогда

$$C^2=-\frac{(|Q|Q)_{1/2 l_1}}{(a_0+h)A^2\left\{\frac{h(l_1)-h(0)}{l_1}+\frac{1}{gA}\left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)_{1/2 l_1}-\frac{1}{2}\frac{a_2 b+b_s}{gA^2}Q_{1/2 l_1}\left[\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_0+\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_{l_1}\right]\right\}}. \quad (3.3)$$

На основании изложенного выше следует отметить, что вычисленные величины $C$ зависят от схематизации участка реки. Для различных схематизаций получаем различное значение $C$. Соотношение между отдельными схематизациями и соответствующими им величинами $C$ позволяет более правильно представить наблюденные приливные колебания.

В качестве примера на рис. 5.3 нанесены величины $C$ для участка реки Лек (один из рукавов Рейна). Колебания уровня были измерены на обоих концах участка, а течения — на нижнем по течению конце. Длина участка 9,4 км. Чтобы проверить измерения расхода, его временной ход был также получен с помощью расчета накопления выше по течению реки Лек, где притоков нет. Были использованы, следовательно, наблюденные в различных местах кривые уровня и известным образом зависящая от времени ширина района накопления участков, расположенных выше по течению. На рисунке эта кривая расхода (прерывистая линия) нанесена вместе с полученными величинами $C$ (точки). Эти величины $C$ обнаруживают меньшие колебания, чем величины, полученные по наблюденным данным о расходе (сплошная линия). Средние величины $C$ равны соответственно 46,8 и 47,6 $м^{1/2}$/сек. Для голландских рек с песчаным ложем величина $C$ составляет около 48 $м^{1/2}$/сек. Однако попадаются такие речные рукава, например в Роттердамском судоходном канале, где дно илистое; в этих случаях величина $C$ будет больше (60—65 $м^{1/2}$/сек.). В общем величина $C$ зависит от наличия песчаной ряби, переноса песка, взвесей и солености. Следует указать, что вычисление $C$ по данным полевых наблюдений обычно дает менее согласованные величины для периодов смены течения, так

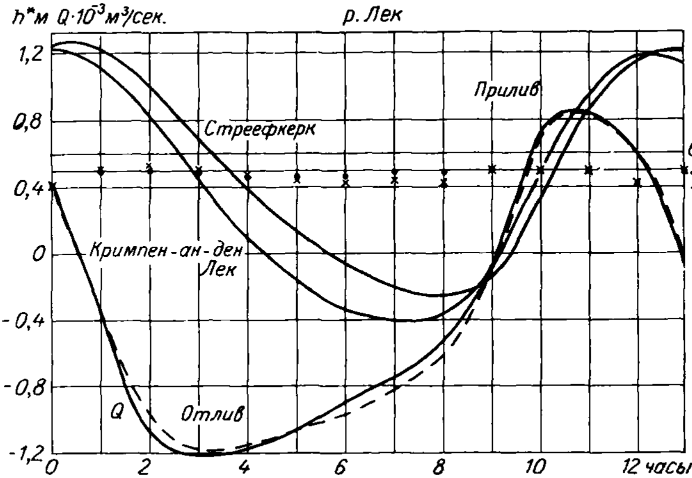



Рис 5.3.

как в это время инерционные силы преобладают над фрикционными. При этом очень маленькие погрешности в измерениях приводят к большим ошибкам в величинах $C$ и тогда для их контроля наряду со схематизацией можно использовать приливную периодичность вычисленных величин $C$.

Мы можем также ожидать, что $C$ зависит от глубины в соответствии с формулой $C = 18 \lg 12a/d$ в метрической системе. Однако эти вариации величины $C$ малы по сравнению с теми, которые обычно возникают по другим причинам. Поэтому в приливные расчеты мы будем подставлять среднюю величину, полученную из наблюдений.

Определение величин $C$ в эстуариях нерегулярной формы связано с многими трудностями. Кроме того, количество наблюдений в таких районах обычно ограничено. В этих случаях приходится задаваться сначала ориентировочной величиной $C$, а затем уточнять ее, так же как и саму схематизацию, производя расчет приливных движений и сравнивая полученные результаты с имеющимися данными наблюдений, особенно уровенных. Для определения расходов и величин $C$ достаточно трех последовательных измерений приливного хода уровня на смежных участках канала при условии, что величины $C$ на обоих участках равны. В следующем разделе будет показано, как можно найти расходы и величины $C$.

## 4. ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРИЛИВА В СЛУЧАЕ, КОГДА КОЛЕБАНИЯ УРОВНЯ И РАСХОД В КАКОМ-ЛИБО МЕСТЕ ИЗВЕСТНЫ

Рассмотренные выше решения можно применять к случаям, когда два граничных условия заданы либо в одном и том же месте, либо в разных местах вдоль реки.

В настоящем разделе мы продемонстрируем решение приливных уравнений, которое можно осуществить, если граничные условия заданы в одном и том же месте. Формулы, которые будут получены, можно использовать для определения фактически существующих приливных движений и для проверки и уточнения математических моделей.

Пусть приливные колебания уровня и расхода в определенном месте известны из наблюдений. Тогда с помощью этих формул можно рассчитать приливные движения вдоль реки при условии отсутствия слияний и притоков. В противном случае в местах слияния из наблюдений должно быть известно распределение расходов между рукавами. Если данные наблюдений имеются и в других местах реки, то можно проверить и уточнить принятую схематизацию реки и величину коэффициента Шези, а также влияние изменений в этой схематизации и в коэффициенте на приливные движения. Очевидно, что, чем больше имеется наблюдений в ряде мест, тем более точной будет проверка схематизации и коэффициента Шези. Однако совсем необязательно иметь данные об уровне и расходе в одном и том же месте. Данный метод, в модифицированном виде, можно применять и в случае, когда на обоих концах участка реки измерены только колебания уровня. Это особенно важно потому, что уровенные наблюдения выполнить легче, чем измерить скорость потока. Кроме того, точность уровенных наблюдений обычно выше.

С математической точки зрения этот метод аналогичен итерационному методу Пикара, описанному в главе 3, разд. 6. Там на диаграмме с осями $x$ и $t$ требовалось задать величины $h$ и $Q$ на кривой, не совпадающей с характеристикой. Здесь же $h$ и $Q$ — функции от $t$ при фиксированном $x$. Эта кривая, очевидно, не является характеристикой в плоскости $x$, $t$. В то время как в методе Пикара применялось только интегрирование, здесь мы будем применять интегрирование по $x$ и дифференцирование по $t$. В действительности, величины, характеризующие профиль, т. е. ширина района накопления $b$, площадь поперечного сечения $A$ и глубина $a_0+h$ (где $a_0$ — средняя глубина, а $h$ — приливное отклонение уровня от среднего положения), зависят от $x$ и $t$. Зависимость от $t$ можно учесть, рассматривая вышеуказанные величины как функции от $h$, а зависимость от $x$ — используя степенной ряд, где $h$ выражается как функция от $x$. Так как формулы станут очень сложными, если ввести в них степенной ряд в общем виде, то мы ограничимся здесь линейным соотношением, которое обычно практичнее всего, когда рассматриваются только участки ограниченной длины. Такие же ограничения ранее рассматривались в связи с вопросом о сходимости итерационного процесса. Читатель может, в случае необходимости, расширить выведенные ниже формулы, следуя той же самой методике.

## 4.1. Формулы

Практические вычисления сильно сокращаются, если рассматривать только немногие члены ряда, однако такое приближение допустимо только при коротких участках. Если рассматривается длинный участок, то необходимо использовать весь громоздкий ряд. Поэтому мы предположим в качестве примера, что постоянные коэффициенты $b_0$, $b_1$, $b_2$, $A_0$, $A_1$, $A_2$, $a_0$ и $a_1$ в выражениях

$$b = b_0 + \{ b_1 + b_2 (x - x_0) \} h,$$
$$A^{-1} = A_0^{-1} [1 + \{ A_1 + A_2 (x - x_0) \} h] \qquad (4.1)$$

и

$$(a_0(x) + h)^{-1} = a_0^{-1} \left[ 1 - \frac{a_1}{a_0} (x - x_0) - \frac{h}{a_0} \right]$$

определены так, что они с наибольшей возможной точностью описывают распределение величин $b$, $A^{-1}$ и $(a_0+h)^{-1}$ вдоль участка длиной $x_1 - x_0$. В предыдущем разделе указывалось, что для рек неправильной формы, у которых обычно имеются мелководные участки, надо применять различные схематизации в течение приливного цикла. Тогда константы в (4.1) будут справедливы для некоторого интервала значений $h$, т. е. для $h_i < h < h_{i+1}$, а величины $b_0$, $A_0^{-1}$ и $a_0^{-1}$ будут соответственно средними значениями величин $b$, $A^{-1}$ и $(a_0+h)^{-1}$ в этом интервале.

Для вывода формул рассмотрим сначала уравнение неразрывности (3.1). Подставляя в него из (4.1) выражение для $b$, получим

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = - [b_0 + \{ b_1 + b_2 (x - x_0) \} h] \frac{\partial h}{\partial t}. \qquad (4.2)$$

Для данного участка, кроме того, полагаем

$$h = h_0 + h_1(x - x_0), \tag{4.3}$$

где $h_0$ — известный из наблюдений уровень как функция времени в начале участка. Величина $h_1$ неизвестна и подлежит определению в ходе расчета. В дальнейшем вместо $x - x_0$ будем использовать $x$, а в конечных формулах вновь заменим $x$ на $x - x_0$. Обозначая через $Q_0$ величину $Q$ при $x=0$, мы получаем из (4.2) и (4.3) после интегрирования по $x$

$$Q = Q_0 - \left[b_0 \frac{dh_0}{dt} + \frac{1}{2} b_1 \frac{dh_0^2}{dt}\right] x - \\ - \left[\frac{1}{2} b_0 \frac{dh_1}{dt} + \frac{1}{2} b_1 \frac{dh_0 h_1}{dt} + \frac{1}{4} b_2 \frac{dh_0^2}{dt}\right] x^2, \tag{4.4}$$

где мы пренебрегли степенями $x$ выше второй. Мы можем теперь определить среднюю скорость через поперечное сечение, используя выражение

$$u = QA^{-1}. \tag{4.5}$$

Следовательно, если мы временно пренебрежем всеми членами, содержащими множитель $h_1$, то из (4.1), (4.4) и (4.5) найдем

$$u = \frac{Q_0}{A_0}(1 + A_1 h_0) + \left\{ Q_0 \frac{A_2}{A_0} h_0 - \left( \frac{b_0}{A_0} \frac{dh_0}{dt} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{1}{2} \frac{b_1}{A_0} \frac{dh_0^2}{dt} \right) (1 + A_1 h_0) \right\} x - \frac{1}{2} \left\{ \left( b_0 \frac{A_2}{A_0} + b_1 \frac{A_2}{A_0} h_0 \right) \frac{dh_0^2}{dt} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{b_2}{A_0} \frac{dh_0^2}{dt} (1 + A_1 h_0) \right\} x^2. \tag{4.6}$$

Изменение уровня вдоль участка получается из уравнения движения, выведенного в главе 1 (формула (4.11)), если положить величины $da_0/dx$, $I$ и $W$ равными нулю,

$$g \frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha_2 u \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{|u|\, u}{C^2 (a_0 + h)} .$$

Если это уравнение проинтегрировать по $x$, то

$$g(h - h_0) = - \int_0^x \frac{\partial u}{\partial t} dx - \frac{1}{2} \alpha_2 [u^2(x) - u^2(0)] - \\ - \frac{g}{C^2} \int_0^x \frac{|u|\, u}{a_0 + h} dx. \tag{4.7}$$

Если в определенный момент $t$ в каком-то пункте участка наступает смена течения, то член, учитывающий сопротивление, можно заменить выражением

$$\pm \frac{g}{C_2} \int_0^x \frac{u^2}{a_0 + h}\, dx, \tag{4.8}$$

где знак минус соответствует положительному направлению течения, а знак плюс — отрицательному направлению течения.

Из уравнения (4.4) можно определить ту точку в пределах участка, где происходит смена течений, т. е. $Q=0$. Для этого полагаем $h_1=0$ и решаем квадратное уравнение.

Подставляя выражение для $u$ из (4.6) в (4.7), получаем $h - h_0$ и, таким образом, находим $h_1$ как функцию $h_0$ и $u(0)$. Теперь $h_1$ можно подставить в (4.4) и получить более точное значение для $Q$. Далее можно исправить выражение (4.6), введя в него члены, содержащие $h_1$, и, следовательно, получить более точную формулу для $h - h_0$, используя (4.7). С помощью такого итерационного процесса можно получить сколь угодно точные формулы для $h$ и $Q$. В выражениях (4.1) можно также использовать степенной ряд, расположенный по степеням $(x - x_0)$. Такую методику можно применять для детального исследования приливных движений в пределах участка реки, особенно при изучении местных особенностей.

Мы не будем рассматривать здесь более подробных формул. Читатель в случае необходимости легко выведет их сам. Вывести общие формулы не представляется возможным. Для упрощенных приливных уравнений

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -b\,\frac{\partial h}{\partial t}, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{gA}\frac{\partial Q}{\partial t} \mp \frac{Q^2}{C^2 A^2 a}, \tag{4.10}$$

где коэффициенты являются функциями времени, но не зависят от $x$ в пределах достаточно короткого участка реки, удается получить обозримые общие формулы.

Первое приближение будет:

$$Q_1 = Q_0 - b\,\frac{dh_0}{dt}\,x, \tag{4.11}$$

$$h_1 = h_0 - \frac{1}{gA}\frac{dQ_0}{dt}\,x \mp \frac{Q_0^2}{C^2 A^2 a}\,x. \tag{4.12}$$

Следующее, второе приближение находится путем подстановки выражений (4.11) и (4.12) в правую часть выражений (4.9) и (4.10) и последующего интегрирования:

$$Q_{\mathrm{II}} = Q_{\mathrm{I}} + \frac{1}{2} \frac{b}{gA} \frac{d^2 Q_0}{dt^2} x^2 \pm \frac{b}{C^2 A^2 a} Q_0 \frac{dQ_0}{dt} x^2, \tag{4.13}$$

$$h_{\mathrm{II}} = h_{\mathrm{I}} + \frac{1}{2} \frac{b}{gA} \frac{d^2 h_0}{dt^2} x^2 \pm \frac{b}{C^2 A^2 a} Q_0 \frac{dh_0}{dt} x^2 \mp$$

$$\mp \frac{1}{3} \frac{b^2}{C^2 A^2 a} \left( \frac{dh_0}{dt} \right)^2 x^3. \tag{4.14}$$

Продолжая эти действия, находим $Q_{\mathrm{III}}$, $h_{\mathrm{III}}$ и т. д. Обычно приближения, получаемые для $Q_{\mathrm{II}}$ и $h_{\mathrm{II}}$, оказываются достаточными для практических целей.

В общем, если $k = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots$, то выполняются соотношения

$$Q_k = Q_0 - b \int_0^x \frac{dh_{k-1}}{dt} dx, \tag{4.15}$$

$$h_k = h_0 - \frac{1}{gA} \int_0^x \frac{dQ_{k-1}}{dt} dx \mp \frac{1}{C^2 A^2 a} \int_0^x Q_{k-1}^2 \, dx \tag{4.16}$$

и мы получаем полиномы от $x$.

Можно показать, что этот итерационный процесс сходится для ограниченных значений $x$, т. е. можно записать

$$Q = Q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (Q_k - Q_{k-1}); \quad h = h_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (h_k - h_{k-1}).$$

Путем индукции можно доказать, что выполняются следующие соотношения:

$$h_{2k} - h_{2k-1} = \sum_{n=2k}^{3(2^k-1)} a_{2k,n}(t) x^n; \quad Q_{2k} - Q_{2k-1} \sum_{n=2k}^{2^{k+1}-2} b_{2k,n}(t) x^n;$$

$$h_{2k-1} - h_{2k-2} = \sum_{n=2k-1}^{2^{k+1}-3} a_{2k-1,n}(t) x^n;$$

$$Q_{2k-1} - Q_{2k-2} = \sum_{n=2k-1}^{3 \times 2^{k-1}-2} b_{2k,n}(t) x^n. \tag{4.17}$$

Очевидно, что изложенный метод можно применять только в том случае, если существуют все производные от $Q_0(t)$ и $h_0(t)$, входящие в коэффициенты при $x^n$.

*Замечание.* Члены, входящие в выражения (4.13), (4.14) и др., можно получить также, разлагая $h$ и $Q$ в ряд Тэйлора по $x$ (см. [34]).

Практическое применение метода изложено в работах Дронкерса [30, 34].

## 4.2. Вычисление течений в случае, когда на обоих концах участка заданы колебания уровня

В общем получить данные об уровне проще, чем о течениях, поэтому вычисление течений по уровню представляет практический интерес. Пусть коэффициент Шези $C$ известен и пусть участок достаточно короток, чтобы можно было использовать приближения (4.13) и (4.14). В Голландии обычно берут длину такого участка равной 10 км или меньше. Подставляя длину участка вместо $x$ в (4.13) и (4.14), получаем нелинейные дифференциальные уравнения первого порядка относительно $Q_0$.

Поскольку коэффициенты обычно сложным образом зависят от $t$, аналитическое решение получить не удается. Поэтому нам приходится применять численное решение, заменяя производные по $t$ конечно-разностными отношениями.

Разностное уравнение имеет вид

$$h - h_0 = -\frac{Q_0(t+\Delta t) - Q_0(t)}{gA\,\Delta t}\,x \mp \frac{Q_0(t)\,Q_0(t+\Delta t)}{C^2A^2a}\,x + \frac{1}{2}\,\frac{b}{gA}\,\frac{d^2h_0}{dt^2}\,x^2 \pm b\,\frac{Q_0(t+\Delta t)+Q_0(t)}{2C^2A^2a}\,\frac{dh_0}{dt}\,x^2 \mp \frac{1}{3}\,\frac{b^2}{C^2A^2a}\left(\frac{dh_0}{dt}\right)^2 x^3. \tag{4.18}$$

Коэффициенты равны своему среднему значению на участке в момент $t$. Если мы знаем или можем принять какую-либо начальную величину $Q_0$ в момент $t=t_0$, то можно вычислить $Q_0$ шаг за шагом через интервалы $\Delta t$ вплоть до $t=t_1$, где $t_1 > t_0$. В выражении (4.18) использованы передние разности, однако можно пользоваться и центральными разностями.

Если приливные колебания уровня являются периодическими, то дифференциальное уравнение имеет единственное периодическое решение для $Q_0$. Это решение устойчиво для увеличивающихся значений $t$, и если мы начнем с произвольной величины $Q_0(t_0)$, то интегральная кривая с течением времени будет асимптотически приближаться к периодическому решению. Это можно легко показать, когда рассматривается линейное уравнение (глава 2, (1.2))

$$\frac{\partial Q_0}{\partial t} + \lambda Q_0 + \frac{\partial h}{\partial x} = 0,$$

где $\lambda$ положительно и может зависеть от времени, а $h$ — периодическая функция.

Тогда выражение

$$Q_0 = Q_0(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\lambda\,dt\right) + \\ + \exp\left(-\int_{t_0}^{t}\lambda\,dt\right)\int_{t_0}^{t}\frac{\partial h}{\partial x}\exp\int\lambda\,dt \tag{4.19}$$

является решением.

Поскольку первый член в (4.19) стремится к нулю при $t \to \infty$, то решение при достаточно большом $t$ является независимым от начальной величины $Q_0$.

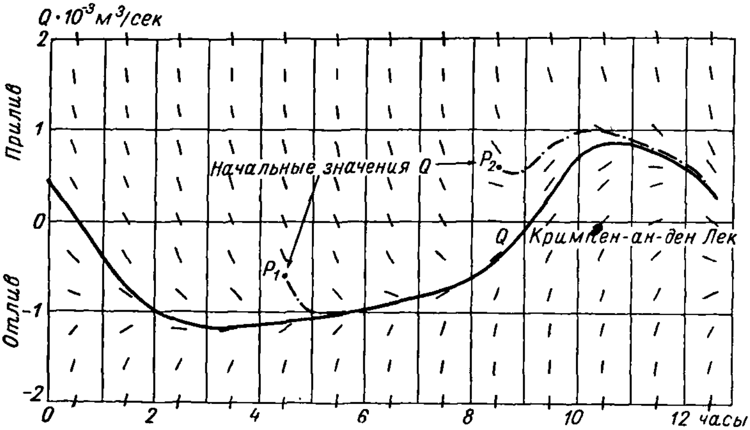



Рис. 5.4

На рис. 5.4 показано вычисление кривой расхода, начиная с различных точек $P_1$ и $P_2$ и при предположении, что приливные колебания уровня на обоих концах участка известны из наблюдений (см. (4.18)). Эти колебания показаны на рис. 5.3.

Представление о характере интегральных кривых дифференциального уравнения (4.18) можно получить, исследуя поле их направлений. Это поле направлений также показано на рис. 5.4. Приближенные решения можно получить графически, проводя кривые таким образом, чтобы они имели соответствующее направление во всех точках. На рис. 5.4 проведены кривые, проходящие через точки $P_1$ и $P_2$.

*Замечания.* 1. Если член $\dfrac{\alpha_2 b + b_s}{gA^2} Q \dfrac{\partial h}{\partial t}$, который обычно бывает малым по порядку величины, все же приходится включить в правую часть выражения (4.10), то соответствующий член надо добавить и в правую часть выражения (4.12). При последующих приближениях [(4,14) и т. д.] этими членами можно пренебречь. Кроме того, в правую часть выражения (4.18) надо добавить член $\frac{\alpha_2 b + b_s}{gA^2} Q_0(t) \frac{dh_0}{dt} x$.

2. На практике, чтобы избежать неустойчивости, приходится брать интервал $\Delta t$ достаточно малым, например 5 или 10 минут.

3. Если в различных местах вдоль реки, вплоть до предела действия прилива, измерены кривые приливного хода уровня, то мы можем определить кривые расхода вдоль реки в этих местах. Расходы, однако, должны также удовлетворять уравнению неразрывности или, другими словами, с помощью (4.11) или (4.13) можно сопоставлять последовательные кривые расхода. Следовательно, мы в состоянии проверить и уточнить схематизацию русла потока для отдельных участков и величин коэффициента Шези, так как эти величины входят в уравнения (4.12) и (4.14). В эстуариях, где ширина района накопления фарватеров менее определенна, изложенный метод можно также применять для проверки и уточнения величины накопления, используя наблюдения над уровнем и течениями.

4. Изложенный метод можно распространить на большее количество участков (см. Дронкерс и Шёнфельд [30, 34]). Однако при этом значительно возрастает вычислительная работа, и расчет желательно выполнять на современных электронных счетных машинах, о которых говорится в главе 4. Применение метода очень полезно при детальных исследованиях в районах с приливами; этот вопрос рассматривается в следующем разделе.

### 4.3. Проверка и уточнение схематизации

Этот раздел является приложением к разд. 2. Здесь мы будем иметь дело с реками, русло которых имеет неправильные очертания и для которых в последовательных временны́х интервалах приходится использовать различные схематизации и различные значения коэффициента $C$; очевидно, что в таком случае необходим тщательный контроль, основанный на наблюдениях над уровнем и течениями.

Поскольку скорости непрерывно изменяются во времени и от точки к точке, то определение расхода на каждом поперечном сечении путем измерения скорости часто оказывается трудоемкой и дорогостоящей процедурой. Дополнительные усложнения при определении расхода возникают из-за перемешивания пресной и соленой вод. Поэтому расход вдоль реки, если только это возможно, определяют, используя лишь водомерные наблюдения, при этом ширина района накопления является функцией положения уровня в любой точке вдоль реки. Эти вычисления, основанные на так называемом методе кубатур, можно производить, если вдоль реки и ее притоков до предела действия прилива в каждом из них одновременно регистрируются уровни, а расходы стока известны на достаточном количестве станций.

Метод кубатур — это численный метод, основанный на уравнении неразрывности (3.1). Пример соответствующей численной формулы дан в (4.4); часто рассматриваются только члены, линейные относительно $x$ (см. также Пиллсбери [96]).

Схематизация фарватеров и определение величин $C$ для эстуария еще труднее, чем для реки. Это особенно справедливо в тех случаях, когда возникает необходимость учитывать поток через мелководья при полной воде, так что схематизацию приходится видоизменять для разных фаз прилива. При этом обычно требуется гораздо больше наблюдений над уровнем и течениями (как скоростью, так и направлением), чем в случае одиночной реки.

В эстуариях, имеющих правильную форму, расход в различных точках фарватера можно определить, используя наблюдения над уровнем и решение уравнений движения и неразрывности, рассмотренные в разд. 4.1 и 4.2.

Следует отметить, что в таких случаях не всегда можно применять метод кубатур для определения расхода в фарватерах, потому что при слияниях этот метод не показывает, как распределяется вода по отдельным фарватерам. Поэтому уравнение движения приходится также применять к движению вод в различных участках, сходящихся в месте слияния.

Это возможно, когда известна предварительная схематизация фарватеров. Схематизацию можно проверить и уточнить, только если вдоль каждого канала имеются по крайней мере по три пункта с регистрацией уровня и если применить метод, изложенный в разд. 4.2. Наиболее удовлетворительным вариантом проверки является такой, когда расход в какой-либо точке фарватера определяется из наблюдений над течениями и используются по меньшей мере два регистратора уровня.

Если схематизация для среднего прилива установлена надежно, то расход для других условий, например для сизигийного и квадратурного приливов, можно рассчитать, используя только наблюдения над уровнем. Это можно делать при условии, что характеристики русла незначительно отличаются от тех, которые соответствуют среднему приливу.

## 5. ПРИМЕНЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКОГО МЕТОДА

В главе II был тщательно рассмотрен гармонический метод. В этом разделе дается приложение этого метода к вычислению приливных движений к реке Лек, одном из рукавов Рейна. В устье этой реки (Кримпен-ан-ден-Лек) колебания уровня определены с помощью мареографа; расход речного стока также известен, он составляет 510 м³/сек. Глубины поперечных сечений этой реки определены с помощью эхолота. Ширина водной поверхности в каждой точке также известна. По этим данным произведена схематизация профилей реки. Река была разделена на 11 участков; длина каждого участка около 5,5 км, а средняя глубина колеблется от 5,50 м в устье реки до 4 м в районе предела действия прилива.

Для проверки гармонических приливных расчетов имелись данные о колебаниях уровня в различных местах вдоль реки и кривая расхода в устье. Последняя кривая была получена с помощью измерения течений на поперечном сечении. Гармонический анализ кривых уровня и расхода в Кримпен-ан-ден-Лек дает

$$h = 0{,}196 + 0{,}989\cos(\omega t - 337^\circ) + 0{,}202\cos(2\omega t - 274^\circ) + \\ + 0{,}051\cos(3\omega t - 103^\circ) + 0{,}027\cos(4\omega t - 11^\circ),$$

$$Q = 502 + 1125\cos(\omega t - 102^\circ) + 510\cos(2\omega t - 55^\circ) + \\ + 50\cos(3\omega t - 340^\circ) + 45\cos(4\omega t - 167^\circ),$$

где компоненты являются компонентами волн $M_2$, $M_4$ и т. д.; влияние волн $S_2$, $N_2$ и других астрономических составляющих учтено в этих же функциях (см. главу II, введение).

Практические методы представления функции с помощью тригонометрического ряда рассмотрены в различных учебниках по численному анализу. Можно сослаться на Уиттакера и Робинсона [153] и Уиллерса [154]. Для практического анализа Фурье, речь о котором шла выше, была использована 12-ординатная схема.

В соответствии с методом, рассмотренным в главе II, рассчитываются волны $M_2$, $M_4$ и $M_6$, а волна $M_8$ не рассматривается. Были учтены взаимодействие этих компонент и мелководные эффекты. Однако формулы для волны $M_6$ не были даны в главе в явном виде, их можно получить аналогичным путем. Амплитуды колебаний уровня и расхода, показанные вместе с фазами $\alpha$ и $\beta$ в таблице, свидетельствуют о росте волн $M_4$ и $M_6$ по отношению к волне $M_2$ за счет мелководных эффектов.

| | $M_2$ | | | | $M_4$ | | | | $M_6$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $h_2$ | $\alpha(h_2)$ | $Q_2$ | $\beta(Q_2)$ | $h_4$ | $\alpha(h_4)$ | $Q_4$ | $\beta(Q_4)$ | $h_6$ | $\alpha(h_6)$ | $Q_6$ | $\beta(Q_6)$ |
| Устье | 0,989 | 337° | 1071 | 100° | 0,202 | 274° | 465 | 55° | 0,051 | 102° | 46 | 353° |
| Сечение 2 | 0,920 | 347 | 823 | 110 | 0,199 | 284 | 373 | 69 | 0,042 | 140 | 97 | 11 |
| Сечение 3 | 0,836 | 359 | 621 | 120 | 0,198 | 299 | 285 | 85 | 0,039 | 185 | 85 | 28 |
| Сечение 4 | 0,797 | 4 | 557 | 124 | 0,197 | 306 | 260 | 91 | 0,040 | 205 | 86 | 35 |
| Сечение 5 | 0,699 | 16 | 414 | 134 | 0,191 | 325 | 196 | 107 | 0,049 | 242 | 94 | 61 |
| Сечение 6 | 0,617 | 27 | 303 | 145 | 0,178 | 346 | 144 | 125 | 0,056 | 285 | 60 | 83 |
| Сечение 7 | 0,528 | 39 | 214 | 156 | 0,160 | 7 | 103 | 143 | 0,056 | 319 | 47 | 109 |

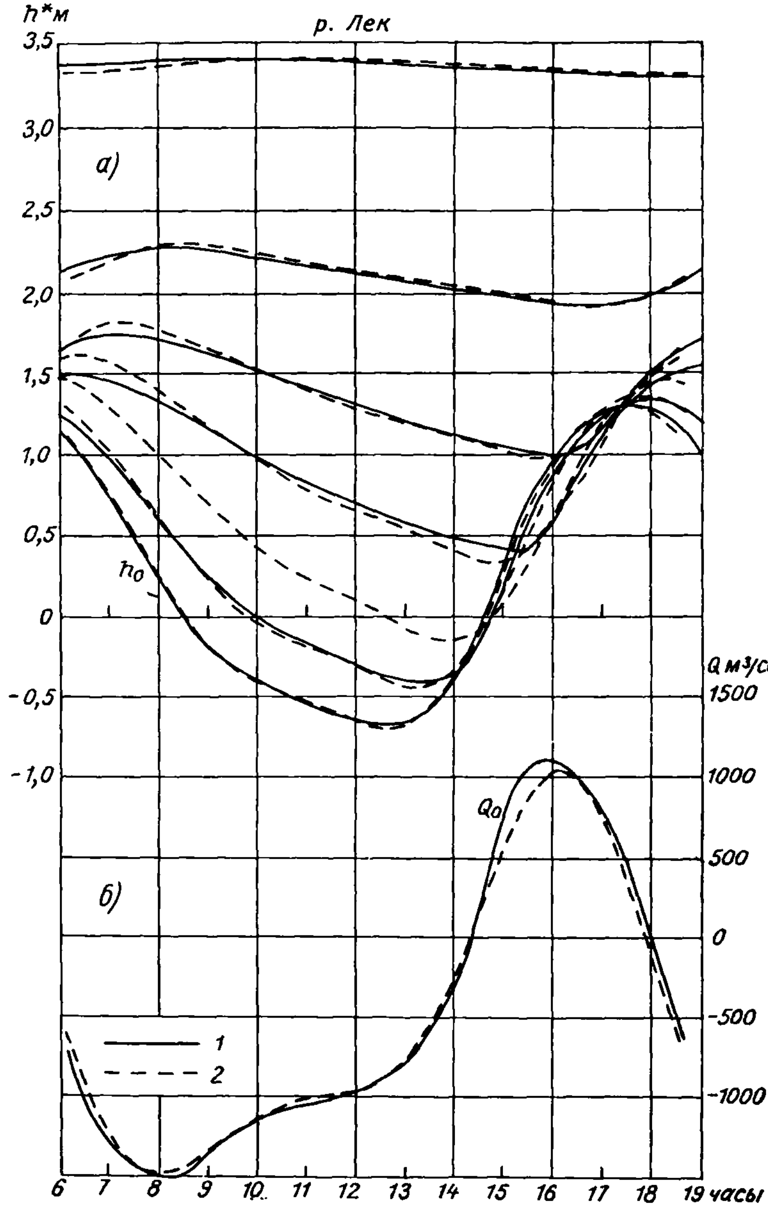



Рис. 5.5.

а — приливные колебания уровня: 1 — наблюденные, 2 — рассчитанные ($M_2+M_4+M_6$); б — расход: 1 — наблюденный, 2 — рассчитанный.

Эти данные показывают, что в результате взаимодействия указанных составляющих, а также за счет влияния мелководных эффектов происходит увеличение роли высших гармонических членов по сравнению с волной $M_2$.

Если не учитывать названных факторов, то рассчитанная картина распространения волны $M_2$ будет существенно отличаться от фактической. Для такого случая на некоторых участках найдены следующие значения колебаний уровня и расхода волны $M_2$. На остальных участках различия еще больше.

| | $h_2$ | | $Q_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| Устье . . . . . . | 0,989 | 337° | 931 | 101° |
| Начало 2-го участка | 0,892 | 347 | 689 | 112 |
| Начало 3-го участка | 0,778 | 0 | 498 | 125 |
| Начало 4-го участка | 0,726 | 5 | 441 | 130 |

На рис. 5.5 показаны вычисленные и наблюденные кривые приливных колебаний уровня в различных пунктах. Подобным же образом показаны и кривые расхода. В общем обнаруживается достаточное соответствие; расхождения в высоте полной воды в некоторых пунктах связаны, вероятно, с местными особенностями (см. также примеры у Флоха [41]).

## 6. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ РАСЧЕТА ПОТОКА И КОЛЕБАНИЙ УРОВНЯ ПРИ ЗАКРЫТИИ И ПОСЛЕ ЗАКРЫТИЯ ШЛЮЗА

В этом разделе дается пример определения движений воды в процессе и после закрытия шлюза на реке с приливами (шлюзы закрывают на некоторое время в период штормовых нагонов, чтобы защитить низколежащие районы суши от затопления). В качестве примера рассмотрим реку Эйссел, один из притоков Роттердамского судоходного канала в Голландии.

На рис. 5.6 в графической форме показана наиболее существенная и полезная для ознакомления часть расчета. На рис. 5.7 дана кривая штормового нагона в устье реки. В момент $t=24$ часам ($h^*=1,9$ м) началось перекрытие шлюза и через 1000 секунд шлюз был полностью закрыт. При таком довольно медленном способе перекрытия удается избежать сильных турбулентных течений. Наиболее важный вопрос заключается в том, как будет изменяться уровень в процессе перекрытия и после его завершения.

Первоначально было рассчитано распространение волны штормового нагона в открытой реке. Результаты такого расчета требуются для определения движений воды в процессе перекрытия и после его завершения, так как с их помощью мы получаем данные для граничных условий, а именно уровень за пределами шлюза в процессе перекрытия и расход $Q$ вдоль реки к моменту начала перекрытия. Предполагалось, что затвор шлюза движется таким образом, что в течение 1000 секунд $Q$ будет линейно уменьшаться до нуля.

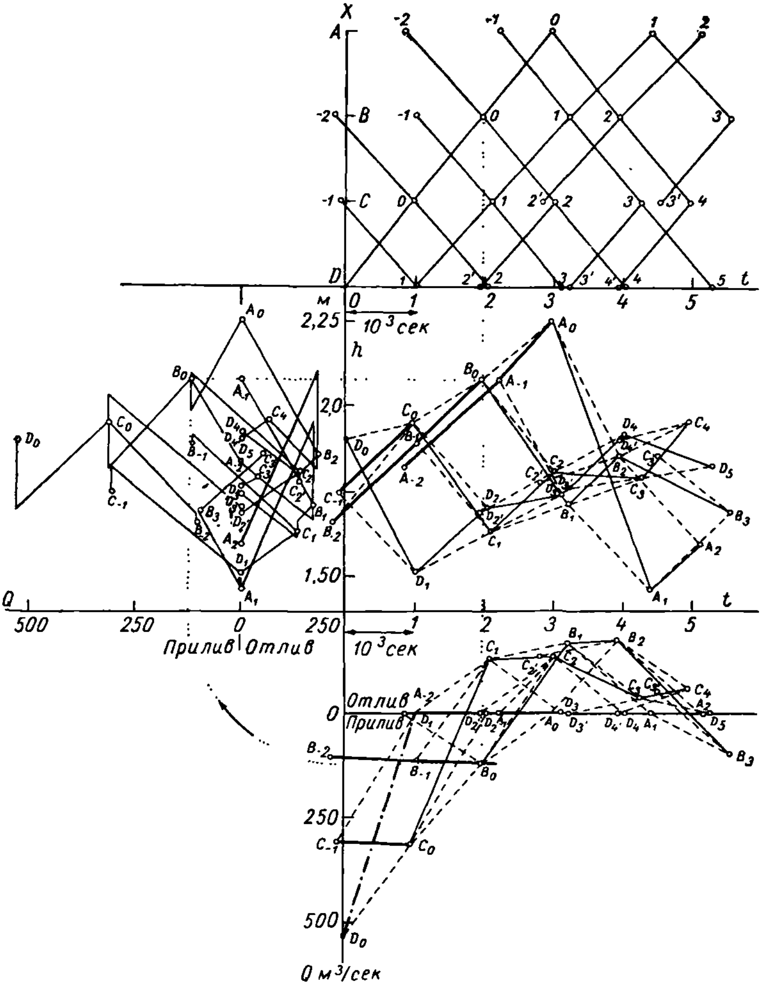



Рис. 5.6.

Начальные и граничные условия, которые необходимо ввести, следующие:

1. Начальные условия. В момент $t=24$ часам на рис. 5.7 ($t=0$ на рис. 5.6) уровень, обозначенный на рис. 5.6 через $h$, и

расход $Q$ известны вдоль ответвления реки на основании расчета штормового нагона в случае открытой реки.

2. Граничные условия. В течение времени перекрытия уровень перед шлюзом известен, потому что можно допустить, что размеры главной реки, притоком которой является Эйссел, настолько велики, что влиянием перекрытия на уровень на расстоянии нескольких сотен метров можно пренебречь. Когда шлюз закрыт, то расход $Q$ в месте перекрытия равен нулю. В верхнем конце реки $Q=0$ при всех обстоятельствах.

На рис. 5.6 показаны $x$, $t$-плоскость (в которой даны характеристики), $h$, $t$-диаграмма, $Q$, $t$-диаграмма и соответствующая

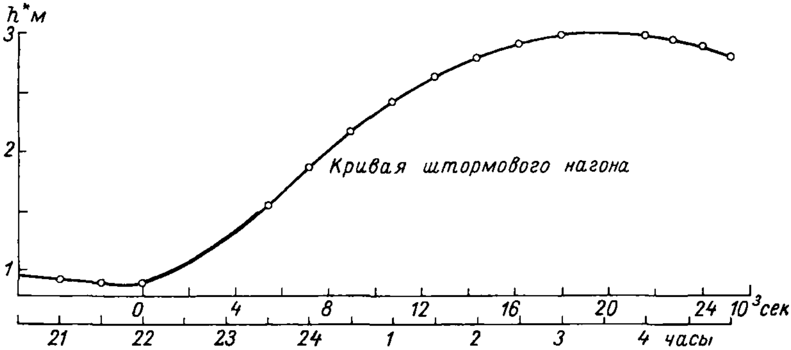



Рис. 5.7.

$h$, $Q$-диаграмма для интервала времени 0—5000 секунд (5 килосекунд). Все построения объясняются рис. 3.9 и 3.12, а также формулами (7.5) или (9.1)—(9.2) главы III. Река разделена на три участка, примерно по 6 км в каждом; устье обозначено через $D$, замкнутый конец реки — через $A$, а точки $B$ и $C$ лежат между $A$ и $D$.

Поскольку перекрытие шлюза происходит постепенно, влияние перекрытия будет распространяться вверх по течению вдоль характеристики 0,0 на $x$, $t$-диаграмме (замечание 1, разд. 6, глава 3). В области слева от этой характеристики уровни и расходы не подвергаются влиянию операции перекрытия и их значения известны на основании расчета для открытой реки. Они представлены на $h$, $t$-диаграмме и $Q$, $t$-диаграмме с помощью прямых линий $A_{-2}A_0$, $B_{-2}B_0$ и $C_{-1}C_0$. Соответствующие значения $h$ и $Q$ на характеристиках 0,0 также показаны на $h$, $Q$-диаграмме. Кроме того, линия $D_0D_1$ на $Q$, $t$-диаграмме дает значения расхода $Q$, проходящего через шлюз в процессе его перекрытия.

На замкнутом конце расход равен нулю; это соответствует оси $Q=0$ на $Q$, $t$-диаграмме.

Мы можем сразу определить уровень внутри шлюза в ходе перекрытия, потому что уровень перед шлюзом и разность уровней известны с помощью формулы (1.4) главы VI. Соответствующие уровни показаны на $h$, $t$-диаграмме линией $D_0D_1$. Уровни за шлюзом не показаны.

В области, лежащей на плоскости $x$, $t$ между характеристиками 0,0 и 1,1 уровни зависят от значений уровня в точке $D$ в течение перекрытия и от условий на характеристике 0,0. Значения $h$, $Q$ в точке $C$, 1 находятся графическим методом, который использовался при построении $h$, $Q$-диаграммы, с помощью характеристики —1,1 на участке $BC$ и характеристики 1,1 на участке $CD$. В других точках делаем то же самое. Справа от характеристики 1,1 значения $h$, $Q$ зависят от граничного условия $Q=0$ в точке $D$, а также от рассчитанных значений $h$ и $Q$ на характеристике 1,1 и от условия $Q=0$ в точке А. В вершине канала, в точке $A$, имеет место отражение.

Прерывистые линии $D_0$, $D_1$, ..., $D_5$, $C_{-1}$, ..., $C_4$, $B_{-2}$, ..., $B_3$, $A_{-2}$, ..., $A_2$ на $h$, $t$-диаграмме и $Q$, $t$-диаграмме соответствуют приблизительно непрерывному ходу уровня и расхода в течение 0—5 килосекунд соответственно. Отметим колебания непосредственно после закрытия шлюза, а также изменение направления скорости на обратное от приливного течения к отливному вблизи шлюза. Это изменение направления течения распространяется вверх по реке. Небольшие колебания, заметные на рис. 5.6, не возникают, если принять более частую сетку.

## 7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ СООБРАЖЕНИЯ ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРИЛИВНЫХ РАСЧЕТОВ

Здесь в добавление к тому, что было сказано в главах II—IV, сделаны некоторые замечания относительно использования методов приливных расчетов применительно к рекам и прибрежным водам. Выбор метода, который следует применить для расчета приливных движений в одномерной реке, зависит:

1) от точности результата расчета, необходимой для конкретной практической цели;

2) от сложности формы речного русла;

3) от степени нерегулярности приливных движений; например, можно столкнуться со смешанным приливом (комбинация полусуточного и суточного) или с преобладающим полусуточным приливом, в котором велики мелководные составляющие (деформированный прилив), или с приливом с большим фазовым неравенством;

4) от наличия технических сооружений, например плотин, водосливов, расположенных на реке.

Вторая и третья причины могут зависеть друг от друга. Приливные движения искажаются тем сильнее, чем сложнее форма реки. Ложе у рек сложной формы может быть каменистым, но обычно оно состоит из движущегося материала. В последнем случае ложе реки имеет тенденцию к усложнению как при значительных колебаниях величины прилива от квадратуры к сизигии, так и при значительных колебаниях пресного стока, особенно если он насыщен движущимся материалом. При этом максимальные скорости течения будут больше при сизигийном приливе и меньше при квадратурном, и, следовательно, во время сизигийного прилива искажения будут сильнее.

Значительные колебания максимальной скорости от квадратурного прилива к сизигийному могут привести к усложнению формы ложа реки, а это увеличит искажения приливных движений. При высоком сизигийном приливе деформация может возрасти до такой степени, что возникнет бор. Рассмотрение сложных физических процессов, происходящих в реках и прибрежных узкостях, можно найти у Брууна и Герритсена [11].

Если в случае преобладания полусуточного или суточного прилива соответствующие движения можно аппроксимировать немногими членами ряда Фурье (с основным периодом 12 ч. 25 м. или 24 ч. 50 м.), то можно применить гармонический метод. Однако в случае неправильных, например смешанных или деформированных приливов, когда ряд Фурье сходится медленно, приходится применять численные методы (см. главы 3 и 4).

Для таких вычислений следует использовать электронные счетные машины. Практические примеры этого можно найти у Рамминга [105] и Шноора [121], а также у Росситера [112] и Хензена [63]. Точные результаты можно получить при достаточно малых интервалах $\Delta x$ и $\Delta t$. Чем неправильнее приливные движения, тем короче должны быть эти интервалы.

Более того, в главе 4, разд. 1 и 2, было указано, что отношение $\Delta x/\Delta t$ нельзя выбирать произвольно. Для устойчивости и сходимости вычислительного процесса необходимо, чтобы удовлетворялось условие (2.8). Однако следует подчеркнуть, что применимость этого условия не доказана строго для нелинейных уравнений, в которых коэффициенты также зависят от зависимых переменных — в приливных уравнениях от $Q$ и $h$ или от $u$ и $h$. На практике устойчивость нарушается легче всего около момента смены течения (когда $u$ равно или почти равно нулю).

Например, при расчете приливных движений на реке Лек с помощью электронной счетной машины (см. рис. 5.5 и пример в разд. 5 этой главы, где был применен гармонический метод) верхний предел для $\Delta x$ был выбран равным 6 или 7 км, а для $\Delta t$ — 10 мин. (при средней глубине 5 или 6 м). Целесообразно, однако, рассмотреть и меньшие интервалы, например $\Delta x \approx 3$ км и $\Delta t \approx 5$ мин. Кроме того, следует указать, что длина участков, используемых для схематизации реки, обычно больше (например, 5 км или более), чем интервал $\Delta x$, который задается при машинных расчетах, так как имеющиеся данные недостаточны для более тщательной схематизации.

В отношении приливных расчетов в эстуариях надо сделать следующие замечания.

Если перетеканием из одного фарватера в другой через мелководья можно пренебречь, то движение в фарватерах эстуария можно рассматривать как одномерное.

Если фарватеры очень широки (например, несколько километров), то может оказаться необходимым учесть силу Кориолиса. Тогда надо рассматривать уравнения (4.1) и (4.2) главы 1, которые определяют так называемые волны Кельвина. Если требуется рассчитать распространение главной гармонической составляющей, то используются уравнения (2.36)—(2.38) главы 2 и можно применить метод, подобный описанному в главе 2, разд. 5 или 6 (см. Дронкерс [106к]).

Часто можно пренебречь силой Кориолиса при расчете продольных приливных движений в каналах, вводя средние скорости на каждом поперечном сечении. После этого поперечные наклоны уровня можно сразу же рассчитать с помощью уравнения (4.2) главы I, в котором сила Кориолиса учитывается.

Если же имеются пониженные мелководья, то перетекание воды через них может быть существенным и тогда надо применять численные методы для двухмерных приливных движений, рассмотренные в главе 4.

Можно также рассматривать отдельные участки на мелководьях и приближенно считать поток в пределах этих участков одномерным.

При расчете приливов в прибрежных морских районах и на выходе из эстуариев необходимо учитывать отклоняющую силу вращения Земли. Если берег можно аппроксимировать прямой линией, то течения в непосредственной близости от берега параллельны ему и приливная волна может быть аппроксимирована волнами Кельвина.

Движения воды на выходе из эстуария определяются взаимодействием между движениями, направленными внутрь эстуария, и движениями, направленными вдоль берегов моря. Движения воды, следовательно, будут весьма сложными и аппроксимация с помощью волн Кельвина незаконна. В таких районах надо применять численные методы, рассмотренные в главе 4, разд. 4.

Размеры шагов сетки ($\Delta x$ и $\Delta y$) и величина шага по времени ($\Delta t$), которые используются при расчетах на машинах, зависят от принятой схематизации; величина $\Delta t$ определяется также требованием, чтобы система становилась устойчивой (см. разд. 4.3 главы 4).

В качестве примера укажем, что Математический центр в Амстердаме принимал $\Delta x = \Delta y = 15$ км, а $\Delta t = 5$ мин. при расчетах на машине для районов, подобных районам в Северном море.

В прибрежных водах, однако, размеры шагов сетки обычно бывают порядка 5 км, а $\Delta t$ — порядка нескольких мин. Ганзен в своих приливных расчетах для Северного моря использовал сетку с шагом около 37 км [58, 59].

Чтобы приступить к расчету, необходимо задать ход уровня на жидкой границе района, а также осуществить схематизацию района, определить глубины и величины $C$ (см. коэффициенты в формулах (4.1)—(4.3) главы 4). Получение необходимых для этого фактических кривых хода уровня и данных наблюдений над течениями связано обычно со значительными трудностями.

Следует указать, что введение других формул для учета сопротивления, таких, как формулы Маннинга, не приводит к лучшим результатам. Соотношение между неровностями дна и глубиной, так же как и перемещения донного материала, не входят явным образом в формулы для учета сопротивления, а влияние этих факторов на движения воды сказывается значительнее, чем то отличие вида зависимости фрикционных членов от глубины, которое дается формулой Маннинга.

Однако колебания величины коэффициента сопротивления $C$ имеют большее значение в реках, чем в прибрежных морских районах. В приливных районах Нидерландов к тому же изменения величины $C$, очевидно, меньше, чем в верховьях рек, где приливные движения отсутствуют. В верховьях рек величина $C$ существенным образом зависит от стока, который видоизменяет глубину, скорость, а следовательно, и ложе реки, и перемещение донного материала.

*ГЛАВА 6*

# СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

## 1. РАСЧЕТ ПРИЛИВНОГО ПОТОКА, ПЕРЕСЕКАЮЩЕГО ПРОХОД, ПОДЛЕЖАЩИЙ ПЕРЕКРЫТИЮ

Очень важная группа приливных расчетов связана с перегораживанием узких участков, например, при перекрытии брешей в плотинах и при сооружении перемычек в приливных районах.

Уравнения для потока, протекающего через узкий проход, совершенно различны в зависимости от того, в субкритическом или критическом состоянии этот поток находится. Когда поток является субкритическим, мы можем применить уравнения, выведенные в главе 1, разд. 6, к участку реки, где происходит сужение профиля, при условии, что допущения, сделанные в указанном разделе, имеют силу и для потока, протекающего над гребнем порога. Мы предполагали там, что силой трения на гребне порога можно пренебречь. Поскольку это допущение не всегда справедливо, особенно при высоких порогах, мы рассмотрим влияние силы трения в разд. 1.2.

Уравнения для потока, находящегося в критическом состоянии, будут рассмотрены в следующем разделе. Затем мы перейдем к детальному рассмотрению того, как в процессе перекрытия изменяются скорости течения (разд. 1.5). Наконец, в разд. 1.6 мы проиллюстрируем это некоторыми примерами.

Однако прежде всего мы кратко рассмотрим некоторые технические вопросы, которые послужат нам основой для дальнейших рассуждений.

### 1.1. Технические вопросы, связанные с перекрытием проходов

С технической точки зрения перекрытие брешей в дамбах несущественно отличается от сооружения перемычек в районах, где существует прилив. В общем, бреши в дамбах должны перекрываться как можно быстрее, чтобы избежать ущерба, который может быть нанесен районам, подверженным затоплению. Поэтому такое перекрытие будет временным мероприятием, в отличие от сооружения перемычки, которое можно изучить заранее с помощью расчетов и экспериментов на моделях.

При строительстве перемычки с целью отгородить приливной бассейн протекание воды через сужающийся проход все более затрудняется, а это приводит к уменьшению амплитуды прилива в бассейне и к возрастанию скоростей течения в остающемся отверстии. Вследствие этого увеличивается размывающее действие потока на дно вблизи перемычки, что создает угрозу для устойчивости речного дна, а тем самым и для дамбы, которую требуется соорудить. Это значит, что если дно состоит из легко размываемых песков, то его необходимо предохранить с помощью укрепляющих материалов. По мере того как течения в проходе становятся все сильнее, защита дна должна быть все более надежной; это сильно тормозит работу в процессе перекрытия. Ясно, что в случае каменистого дна такие затруднения не возникают.

Вторая проблема связана с материалами, используемыми для перекрытия. В зависимости от условий могут быть использованы бетонные кессоны, скальный камень или другой материал подобного рода. Преимущество использования кессонов состоит в том, что перекрытие можно осуществить сравнительно быстро, что ограничивает размывающие эффекты у дна. Перекрытие с помощью скального камня требует больше времени, если не используется, например, проволочно-канатная дорога достаточно большой вместимости.

Очевидно, что одним из факторов, определяющих выбор материала, является также стоимость.

Третья проблема связана со способом перекрытия. Вначале скорости бывают обычно невелики, т. е. сначала для уменьшения прохода можно использовать сравнительно дешевые материалы — песок (при скоростях менее 1 м/сек.) или же в противном случае мелкий камень. Проход уменьшают, сужая его с боков и повышая порог на дне. Если скорости становятся выше 2 м/сек., то необходимо использовать более тяжелые материалы. Таким образом можно продолжать действовать, пока максимальные скорости не достигают приблизительно 3 м/сек. При более высоких скоростях затруднения, связанные с перекрытием, возрастают, так как использование плавсредств в течение всего приливного цикла становится невозможным, а размывающие эффекты делаются более интенсивными. Для окончательного перекрытия приходится использовать один из указанных выше путей, т. е. использовать либо кессоны, либо тяжелые скальные массивы. Можно пользоваться или открытыми кессонами (со скользящими затворами), которые можно рассматривать как шлюзы, или закрытыми кессонами. При употреблении открытых кессонов удается избежать значительного роста скорости в проходе, так что сильного размывания не происходит, при условии, что стенки кессонов не очень сильно влияют на поток. После установки кессонов их надо закрыть в определенный момент, при смене течений, когда скорости течений на короткое время падают до нуля.

Если используются закрытые кессоны, то их устанавливают в периоды смены течений. В процессе перекрытия максимальные скорости возрастают, причем степень этого роста будет определять, можно или нет применять такой способ без риска. Этот способ особенно пригоден для перекрытия сравнительно небольших проходов, причем это зависит еще от амплитуды прилива и площади отсекаемого приливного бассейна.

Перекрытие скальными массивами обычно проводится следующим образом. Сначала (после того как дно соответствующим образом защищено) от одного из берегов с помощью технических средств возводится дамба. Ее можно продолжать до тех пор, пока скорость течения в остающемся проходе не достигнет приблизительно 3 м/сек. Затем осуществляется перекрытие прохода путем укладки массивов горизонтальными слоями. Скорости при этом возрастают и поэтому вес используемых массивов также необходимо увеличивать. Наиболее подходящим средством для сбрасывания тяжелых массивов является проволочно-канатная дорога.

Во время перекрытия скорости могут сильно возрастать. Однако при подъеме порога общее количество перетекающей через него воды уменьшается и скорости течения у речного дна несколько снижаются, а размывающий эффект ослабевает. Обычно наибольшие скорости имеют место в верхних слоях потока (непосредственно под поверхностью воды).

Рост максимальной скорости прекратится, когда поток через гребень перемычки в момент своего наибольшего (в приливном цикле) развития станет критическим. Дальнейшее повышение порога будет уменьшать максимальную скорость, пока перемычка не достигнет своей полной высоты. После того как достигнуто критическое значение скорости, оставшийся проход можно сужать и с боков — никакого увеличения скорости при этом не произойдет. Вопросы, связанные с перекрытием проходов, рассматриваются в [106 п].

## 1.2. Влияние трения на движение воды над «широким водосливом»

Водослив считается широким, если на каком-то участке его гребня линии тока имеют одинаковое направление, а распределение давления по вертикали является гидростатическим.

В разд. 7 главы 1 был рассмотрен случай субкритического потока через участок с резким изменением профиля. Здесь мы примем, что условия в данном случае аналогичны рассмотренным ранее, но только теперь мы не пренебрегаем силами трения над водосливом.

Было показано, что всю область водослива можно разделить на три участка — втекания, перетекания и вытекания. На рис. 6.1 эти участки обозначены через $(x_0x_1)$, $(x_1x_2)$ и $(x_2x_3)$ соответственно. Если склоны порога ($AB$ и $CD$) круты, то участок втекания, где происходит сжатие потока, относительно мал. Придонным трением на участке между $x_0$ и $x_1$ можно пренебречь. Тогда движение воды на этом участке определяется уравнением, аналогичным уравнению (7.6) в главе 1:

$$\eta\left[(a_0+h_0)^{-2}b_{s0}^{-2}-(a_1+h_1)^{-2}b_{s1}^{-2}\right]Q^2=2g(h_1-h_0). \qquad (1.1)$$

(Отметим, что на рис. 6.1 величина $h_1$ отрицательна, а величина $a_{01}$ обозначена через $a_1$.)

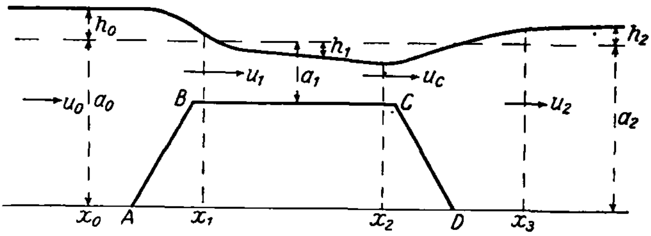



Рис. 6.1.

Поскольку мы можем пренебречь силами инерции, то перетекание через гребень определяется уравнением движения, приведенным в (7.3) в главе 1 для потока, направленного в сторону положительных $x$:

$$g\frac{\partial h_1}{\partial x}+\alpha_2 u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{gu_1^2}{C^2(a_1+h_1)}=0.$$

Отметим, что это уравнение будет основным уравнением для установившегося потока, если частные производные в нем заменить обыкновенными.

Делая подстановку

$$u_1=Q(a_1+h_1)^{-1}b_{s1}^{-1},$$

полагая $\alpha_2=1$ и считая, что величиной $\partial Q/\partial x$ в районе водослива можно пренебречь, получаем следующее дифференциальное уравнение для $h_1$ и $Q$:

$$\frac{\partial h_1}{\partial x}=\frac{gC^{-2}}{1-g(a_1+h_1)^3Q^{-2}b_{s1}}. \qquad (1.2)$$

Его можно проинтегрировать тем же путем, что и уравнение для установившегося потока, полагая, что поток $Q$ и ширина потока $b_s$ не зависят от $x$. Однако налагаемые граничные условия будут теперь совсем другими. Здесь мы должны знать на обоих концах прохода функции $h_1(x_1, t)$ и $h_1(x_2, t)$ или же ($h_1(x, t)$ и $Q$. Если происходит отгораживание затопляемого района, то на мористой стороне района приливные колебания уровня известны, в то время как эти колебания внутри района определяются происходящими здесь приливными движениями.

Произведя интегрирование от $x=x_1$ до $x=x_2$, получим

$$\frac{1}{4} b_{s1}^2 \left[(a_1 + h_1(x_1, t))^4 - (a_1 + h_1(x_2, t))^4\right] -$$

$$- \frac{Q^2}{g} \left[h_1(x_1, t) - h_1(x_2, t)\right] = (x_2 - x_1) \frac{Q^2(t)}{C^2}. \qquad (1.3)$$

Расстояние $x_2 - x_1$ можно принять равным длине гребня $BC$. Уравнение движения справедливо, если

$$g(a_1 + h_1)^3 b_{s1}^2 > Q^2,$$

а это означает, что поток воды всюду является субкритическим. Вопрос об уравнении для района вытекания ($x_2x_3$) рассматривался в главе 1, разд. 7.3.

На практике потери при втекании для субкритического потока обычно малы. Потери при вытекании более существенны. Они учитываются с помощью коэффициента $\eta_1$. Таким образом, мы используем формулу, аналогичную выражению (1.1), а именно

$$\eta_1 \left[b_{s0}^{-2}(a_0 + h_0)^{-2} - b_{s2}^{-2}(a_2 + h_2)^{-2}\right] Q^2 = 2g(h_2 - h_0) \qquad (1.4)$$

(подробности см. в главе 1, разд. 7).

### 1.3. Критический поток над водосливом

Пусть $t_0$ — момент времени, когда уровни на обеих сторонах водослива равны. Если два уровня изменяются во времени различным образом, то будет иметь место поток через водослив, зависящий от разности уровней и от глубины над порогом водослива. Тогда расход $Q$ определяется по формуле (1.4). Если разность уровней возрастает, расход также будет возрастать. Хорошо известно, что в случае когда с одной стороны уровень постоянный, а с другой понижается, возрастание скорости не безгранично: при определенном состоянии потока, т. е. при так называемом критическом потоке (гидравлическом прыжке), скорость больше не может возрастать. Это состояние потока определяется двумя параметрами — разностью уровней по обе стороны водослива и минимальной глубиной над его порогом.

Состояние критического потока может быть описано различными путями. Мы можем связать его с различными условиями: или максимума расхода, или минимума удельной энергии (на единицу массы), или минимума удельной силы.

Однако более фундаментальный критерий получен в главе 3 с помощью теории характеристик.

Было показано, что в канале, в котором ширина района накопления равна ширине потока, всякая точка профиля длинной волны перемещается вниз по течению со скоростью $c_0 - u$, а вверх по течению со скоростью $c_0 + u$ (скорость считается положительной, если она направлена вверх по течению). Величина $c_0$ равна $(ga)^{1/2}$, если $a$ — глубина канала в момент $t$.

На пороге водослива имеем

$$c_{01} = \{ g(a_1 + h_1) \}^{1/2}.$$

Теперь пусть скорость над водосливом ($u_1$), считаемая положительной, будет равна $c_{01}$. Тогда

$$c_{01} - a_1 = 0, \tag{1.5}$$

так что скорость распространения вниз по течению потока равна нулю. В случае постоянного понижения уровня в верхней части реки поток через водослив остается критическим и волны, возникающие выше по течению, не могут проникнуть через водослив.

Шёнфельд [127] показал, что при отсутствии сжатия потока и фрикционных потерь для критического потока можно дать различные определения. В противном же случае различные определения теряют силу и справедливым будет только определение (1.5).

Тогда критический расход $Q_c$ будет равен

$$Q_c = g^{1/2} b_{s1} (a_1 + h_{1c})^{3/2}, \tag{1.6}$$

где $a_1 + h_{1c}$ — критическая глубина.

Сначала допустим, что фрикционными силами на водосливе можно пренебречь и что в точке $x_2$, лежащей выше по течению от места втекания (точка $C$) (см. рис. 6.1), поток становится критическим.

Тогда для района втекания имеем

$$\eta \left[ b_{s0}^{-2} (a_0 + h_0)^{-2} - b_{s1}^{-2} (a_1 + h_{1c})^{-2} \right] Q_c^2 = 2g (h_{1c} - h_0). \tag{1.7}$$

Подставляя сюда (1.6) и заменяя

$$h_{1c} - h_0 \quad \text{на} \quad (h_{1c} + a_1) - (h_0 + a_1),$$

находим, что критическая глубина удовлетворяет уравнению

$$\frac{b_{s1}^2 (a_1 + h_{1c})^3}{b_{s0}^2 (a_0 + h_0)^2} + \frac{2}{\eta} (a_1 + h_0) = \left(1 + \frac{2}{\eta}\right) (a_1 + h_{1c}). \tag{1.8}$$

Пусть $\eta=1$ и пусть напор на нижней по течению стороне водослива определяется выражением

$$H_0=\frac{1}{2g}\frac{Q_c^2}{b_{s0}^2(a_0+h_0)^2}+(a_1+h_0), \tag{1.9}$$

где $Q_c$ определяется выражением (1.6). Тогда получаем хорошо известные формулы:

$$a_1+h_{1c}=\frac{2}{3}H_0; \quad Q_c=b_{s1}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}g^{1/2}H_0^{3/2} \tag{1.10}$$

(см., например, Егер [70]).

Видоизмененное выражение для $h_{1c}$ в случае, когда $\eta\neq 1$, можно найти с помощью уравнения (1.8). Затем можно показать, что при наличии потерь энергии за счет сжатия потока критическая глубина $a_1+h_{1c}$ будет меньше, чем при отсутствии этих потерь. Это следует из того, что величина $d(a_1+h_{1c})/d\eta$ имеет отрицательный знак. Аналогичным путем можно исследовать потери за счет трения на широком водосливе.

Из критерия для критического потока (1.5) и из соотношения (1.6) следует, что в соответствии с дифференциальным уравнением (1.2) величина $\partial h/\partial x$ становится бесконечной и в точке критического потока может существовать вертикально расположенная водная поверхность.

В действительности, когда поток является критическим, водная поверхность образует крутой наклон у края водослива, но этот наклон остается не вполне вертикальным. Очевидно, что уравнения (1.2) и (1.7) не выполняются при $x=x_2$, потому что вертикальными ускорениями и скоростями мы в них пренебрегали, а этого нельзя делать при наличии резкого изменения уровня. Понятно, что вертикальные ускорения и скорости будут малы до тех пор, пока достаточно малым остается наклон $\partial h/\partial x$.

Можно показать, что на некотором расстоянии от критической точки наклоны $\partial h/\partial x$ будут действительно становиться малыми, и уравнения (1.2) и (1.7) могут там применяться. Следовательно, необходимо проанализировать поведение величины $h$ в окрестности критической точки (см. Шёнфельд [127] и Герритсен [45]).

## 1.4. Субкритический и критический потоки в процессе перекрытия

Когда при сооружении перемычки высота этой перемычки становится все больше и больше, разность уровней по обе стороны перемычки будет возрастать, пока в определенный момент приливного цикла не наступит критическое состояние. В первый раз это произойдет при малой воде, так как глубина на гребне будет тогда минимальной. Если максимальное отливное течение имеет место до МВ, то критическое состояние наступит между моментами максимального течения и МВ. После этого разность уровней по обе стороны дамбы будет уменьшаться и, хотя глубина на гребне будет становиться меньше, уменьшение расхода будет таково, что поток снова становится субкритическим. Во время идущего следом прилива критический поток не может существовать, так как глубина над порогом перемычки слишком велика. Дальнейшее повышение гребня приведет к увеличению интервала времени при отливе, когда существует критический поток. При определенных условиях интервал времени с критическим потоком может возникнуть также во время максимального приливного течения или перед ним. В конце концов критический поток (перетекание) будет существовать в течение довольно продолжительных отрезков времени как при отливе, так и при приливе, за исключением только небольших промежутков около моментов смены течений. Следовательно, во время одной части приливного цикла поток через гребень будет определяться формулой (1.4), справедливой для субкритического потока, а во время остальной части приливного цикла, когда будет достигаться критическое состояние, надо применять формулу (1.6) для критического потока.

Следовательно, если расход $Q$, определенный по формуле (1.4), будет меньше, чем $Q_c$, полученный по формулам (1.6) и (1.8), где $a_1 + h_{1c}$ означает минимальную глубину на гребне порога, то поток субкритический. Если $Q$ становится равным $Q_c$, то, значит, поток стал критическим и мы не можем больше применять формулу (1.4), а должны использовать вместо нее формулу (1.6), пока $Q$ не станет опять меньше, чем $Q_c$.

## 1.5. Кривая перекрытия для максимального приливного и отливного течения

Определение максимальных скоростей приливного и отливного течения при сужении прохода является очень важным для планирования процесса перекрытия. Графическое представление этих скоростей как функции от поперечной площади прохода или его глубины будем называть кривой перекрытия для максимальной скорости приливного и отливного течения соответственно.

А. Рассмотрим сначала перекрытие с помощью кессонов. Тогда глубина в проходе в течение перекрытия такова, что поток через проход является субкритическим. Скорость в проходе можно получить, поделив расход на площадь поперечного сечения. За счет изменения поперечного сечения в течение приливного цикла максимальная скорость наступает в момент, не точно соответствующий максимальному расходу.

Так как прилив ото дня ко дню меняется, то максимальные скорости также изменяются. На практике кривые перекрытия определяют для сизигийного, промежуточного и квадратурного приливов. Все остальные ситуации получают путем интерполирования.

Изменение скоростей при перекрытии происходит следующим образом. Пусть $A(t, 0)$ — площадь поперечного сечения в течение приливного цикла в месте, где должно совершиться перекрытие, а $A(t, i)$ — та же площадь на $i$-тый день перекрытия. На первой стадии процесса перекрытия разница между уровнями по обе стороны прохода будет увеличиваться медленно, и поэтому уменьшение приливных движений в отгораживаемом районе соответственно мало. (Заметим, что на начальной стадии рост величины члена $u^2/2g$ в проходе мал). Следовательно, скорость в проходе на первом этапе процесса перекрытия будет изменяться так, что будет выполняться соотношение

$$uA(t, i) = Q(t, 0), \tag{1.11}$$

где $Q(t, 0)$ — расход при существующих условиях. Следовательно, сначала кривая перекрытия для максимальной скорости течения (как отливного, так и приливного) может быть аппроксимирована гиперболой (1.11).

С уменьшением площади отверстия прилив будет изменяться все больше и больше, а разность уровней по обе стороны прохода будет возрастать. В результате сооружения дамбы прилив может увеличиться за счет частичного отражения приливной волны на обращенной к морю стороне прохода. Этот эффект зависит от прилива и от особенностей реки, и его необходимо определить с помощью приливных расчетов.

Со стороны прохода, лежащей выше по течению, прилив будет гаситься и запаздывать по фазе, так что моменты ПВ и МВ будут наступать позднее, а величина прилива будет уменьшаться и скорости в проходе будут возрастать медленнее, чем это предсказывается гиперболической кривой, так как емкость района накопления уменьшается. Когда остается очень маленькое отверстие, то очевидно, что прилив на стороне, лежащей выше по течению, станет очень небольшим и что уровень там станет более или менее равным среднему приливному уровню на стороне, обращенной к морю. Если прилив на стороне, обращенной к морю, известен из наблюдений или в результате приливных расчетов, то легко можно найти скорости в остающихся небольших отверстиях.

Когда максимальные течения при существующих условиях меньше, чем, например, 1 м/сек., то оказывается, что если отверстие больше, чем половина первоначальной площади поперечного сечения, то различие между скоростью, определенной по гиперболе, и реальной скоростью в проходе мало.

На практике часто можно встретиться с предельными случаями, когда отверстие составляет $^1/_2$ или $^1/_4$ первоначальной площади поперечного сечения. В разд. 1.6 мы столкнемся с такими приливными расчетами в практическом примере. На рис. 6.5 показан пример кривой перекрытия вместе с точной гиперболической кривой.

Б. Рассмотрим теперь случай, когда перекрытие осуществляется путем постепенного повышения перемычки в проходе. На первом этапе перекрытия поток, перетекающий через гребень, будет субкритическим и изменение скорости будет аналогичным тому. которое имело место в случае А. В определенный момент

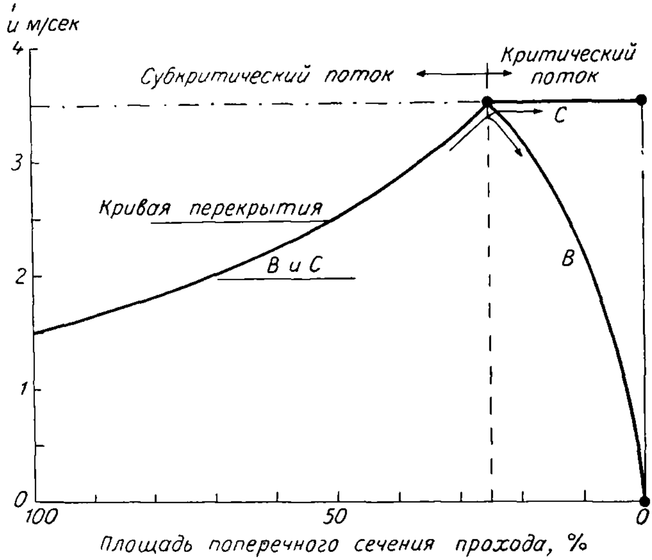



Рис. 6.2.

перекрытия максимальный отливной поток достигает критического состояния и дальнейшее повышение гребня перемычки будет вызывать уменьшение максимальной скорости отливного течения при таком же приливе, но максимальная скорость приливного течения будет продолжать увеличиваться.

Затем, в процессе дальнейшего перекрытия максимальная скорость приливного течения также станет критической, и после этого скорости и отливного и приливного течения будут уменьшаться.

На рис. 6.2 кривая перекрытия *В* представляет собой кривую максимальной скорости для такого типа процесса перекрытия.

В. Третий способ перекрытия прохода является комбинацией способов, рассмотренных в А и Б. На первой стадии перекрытия можно применить способ Б — постепенное повышение дна, пока не достигается критическое состояние для максимального отливного и приливного потоков. Затем окончательное перекрытие осуществляется с боков, например опусканием кессонов в проход или с помощью каменных массивов. В этом случае максимальные скорости остаются постоянными, если прилив не изменяется.

На рис. 6.2 соответствующая ветвь кривой перекрытия обозначена буквой *C*.

Выше мы подробно рассмотрели кривые перекрытия для районов, которые после перекрытия больше не сообщаются с районами, где существует прилив.

Аналогичные кривые перекрытия можно получить для перемычки, сооруженной для разделения двух каналов, каждый из которых сообщается с приливным морем. В этом случае приливная волна подходит к перемычке с двух сторон.

С помощью приливных расчетов можно определить прилив по обе стороны перемычки. По разности уровней между обеими сторонами можно получить кривую скорости в процессе сооружения перемычки. Само перекрытие может быть осуществлено указанными выше способами А, Б или В.

При сравнении кривых перекрытия для дамб, разделяющих два приливных района, и для дамб в обычной одиночной реке можно обнаружить значительные различия в форме этих кривых. На последнем этапе перекрытия обычной реки, замкнутой в своем верхнем конце, наибольший перепад уровня на перемычке почти равен амплитуде прилива с мористой стороны дамбы, если применен способ А. Когда же дамба разделяет два приливных района, то перепад уровня может превосходить амплитуду прилива с одной из сторон дамбы.

## 1.6. Примеры

При рассмотрении технических вопросов, связанных с перекрытием проходов, в разд. 1.1 было указано, что такое перекрытие может осуществляться либо путем сужения прохода с боков, либо путем повышения порога, либо комбинацией обоих способов. Если повышают порог, то максимальные скорости увеличиваются, пока не образуется критический поток. Дальнейшее повышение порога приводит к уменьшению максимальной скорости. Для обоих способов будет дан пример, показывающий изменение скоростей по мере сужения прохода. Предполагается, что приливной район на другом конце замкнут.

*Пример 1.* (Случай А разд. 1.5). Средняя глубина поперечного сечения в том месте, где будет происходить перекрытие, составляет 5,75 м, а ширина — 110 м.

Кривые хода уровня для всей длины речного рукава, равной 21 км, показаны на рис. 6.3. Для приливных расчетов эта река была разбита на три участка, изменения средней глубины и ширины каждого участка в течение приливного цикла были учтены. Вычисления были выполнены численными методами.

Если поперечное сечение сужать с боков, то прилив за дамбой будет гаситься. На рис. 6.4 цифрами *1*, *2* и *3* показаны колебания уровня сразу за точкой перекрытия, если перекрытая часть составляет соответственно 85, 94 и 97% площади первоначального профиля; средняя глубина прохода от среднего уровня моря принимается постоянной. На этом рисунке показаны также кривые скоростей в проходе. Они тоже обозначены цифрами *1*, *2* и *3*.

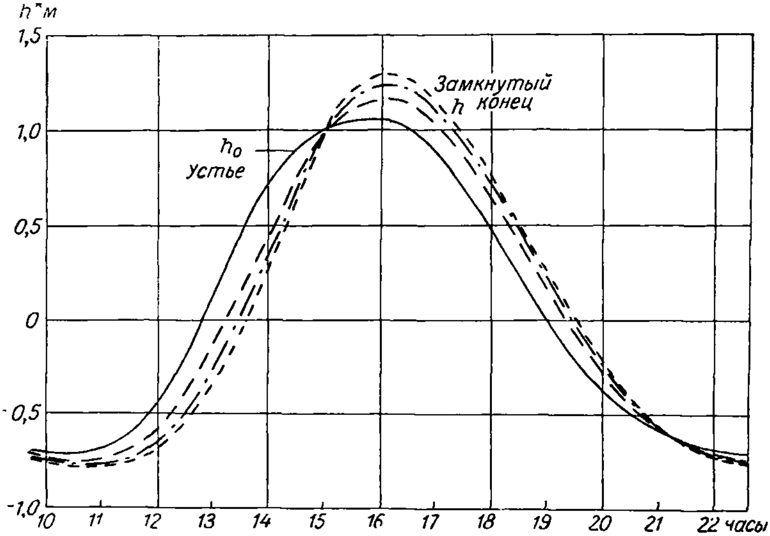



Рис 6 3.

Кривая максимальных скоростей, т. е. кривая перекрытия, показана на рис. 6.5 как функция площади поперечного сечения. Очевидно, что скорость не превосходит величины 4,3 м/сек. Гиперболическая формула (1.11) хорошо аппроксимирует кривую перекрытия в интервале 0,75—2,00 м/сек. Отверстие при этом уменьшается до $^1/_3$ первоначальной величины.

*Во втором примере* (случай Б разд. 1.5) рассматривается перекрытие морского рукава путем повышения порога. На рис. 6.6 показаны поперечное сечение и два прохода. Кривую хода уровня со стороны моря у места перекрытия можно видеть на рис. 6.7, там же показана приливная кривая для закрытого конца морского рукава. Объем воды, поступающей с приливом, составляет у пункта перекрытия около $325 \cdot 10^6$ м$^3$ при промежуточном приливе.

В ходе перекрытия рассматриваются три ситуации при неизменной ширине двух проходов, когда глубина гребня перемычки в проходах составляет 2, 1 и 0 м ниже среднего уровня моря. Ход уровня со стороны моря у пункта перекрытия, а также кривые

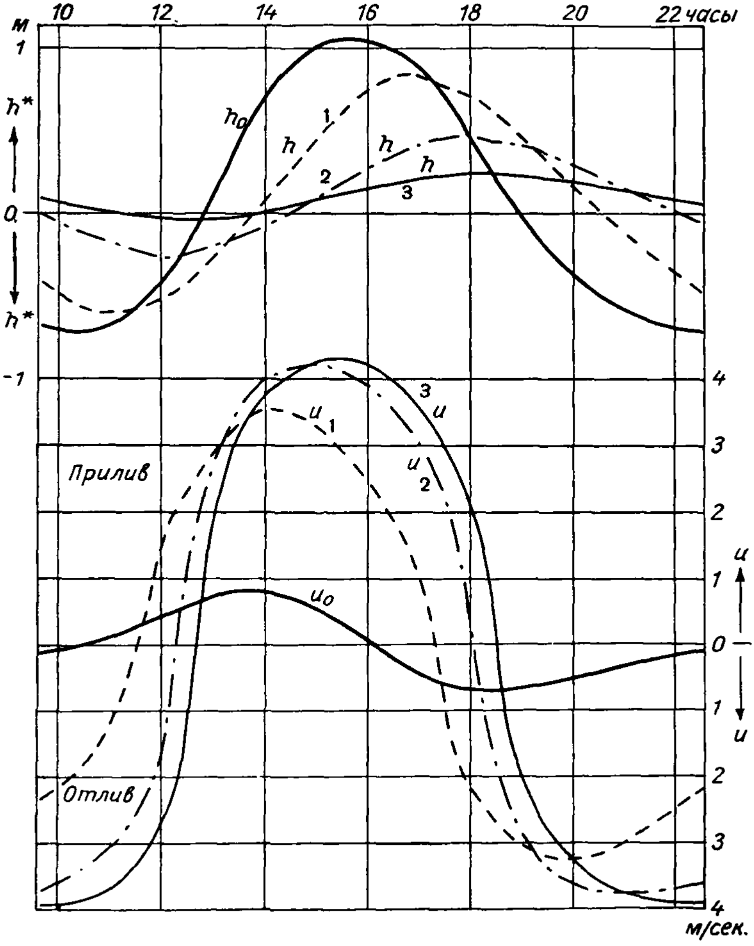
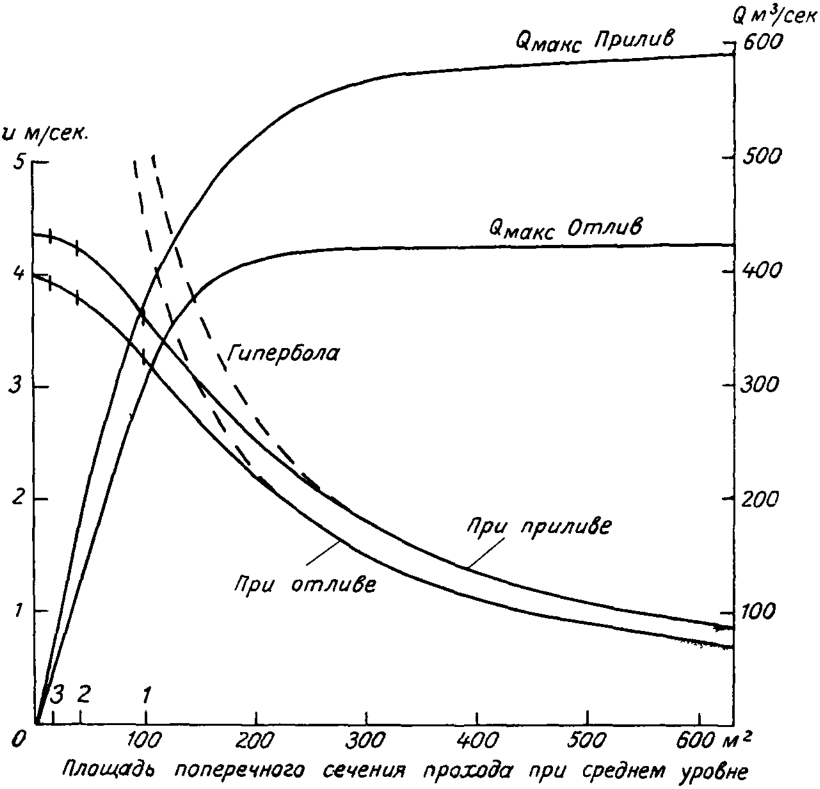


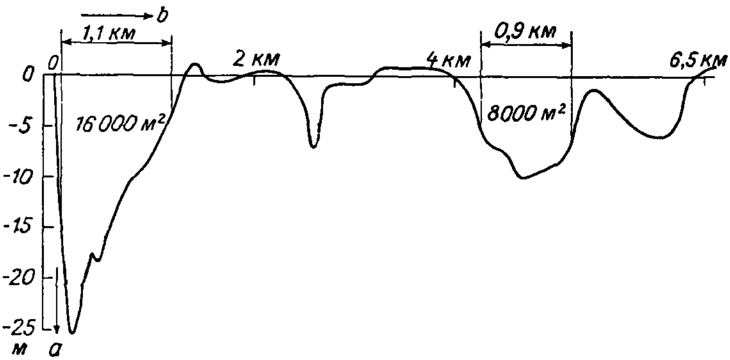

Рис. 6.4.

уровня на внутренней стороне для указанных трех случаев, помеченные цифрами *2*, *3* и *4*, даны на рис. 6.8. Показаны также кривые скорости. Видно, что максимальные скорости развиты сильнее всего, когда порог имеет глубину 2 м; при большей высоте порога скорости уменьшаются. В определенные интервалы



u м/сек.
Q м³/сек
Qмакс Прилив
Qмакс Отлив
Гипербола
При приливе
При отливе
3 2 1
0 100 200 300 400 500 600 м²
Площадь поперечного сечения прохода при среднем уровне


Рис. 6.5.



b
1,1 км
0,9 км
2 км
4 км
6,5 км
16 000 м²
8000 м²
0 -5 -10 -15 -20 -25
м
a


Рис. 6.6.

времени видно, что поток в проходе становится критическим. В точках *a*, *c* и *e* происходит переход от критического потока к субкритическому, а в точках *b* и *d* — наоборот. Следовательно, между *a* и *b*, а также между *c* и *d* поток является субкритическим.

На рис. 6.9 показаны кривые перекрытия, соответствующие постепенному повышению порога (сплошные линии). Действительно, можно видеть, что если глубина порога меньше 2 м, то скорости падают.

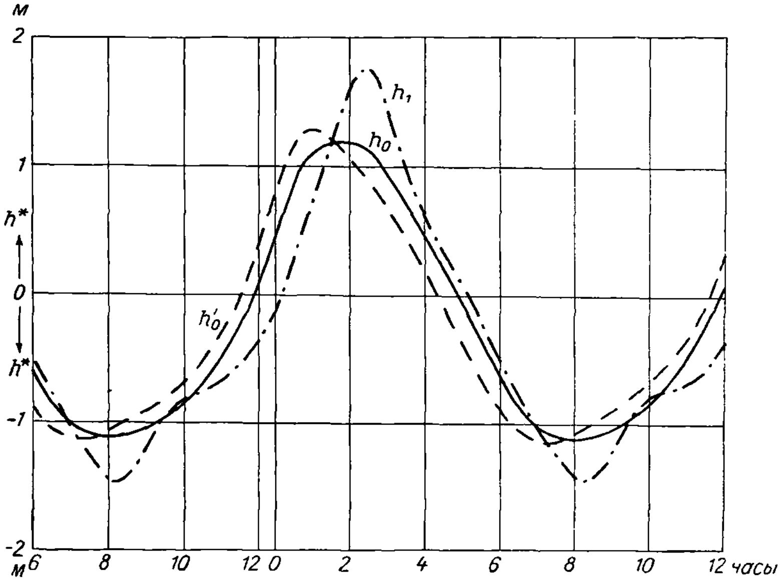



Рис. 6.7.

$h_0$ — кривая прилива в устье до перекрытия, $h_1$ — кривая прилива в конце канала до перекрытия, $h'_0$ — кривая прилива перед дамбой после завершения перекрытия.

Если бы глубина порога была 3 м, а проход перекрывался бы путем сужения с боков без повышения порога, то скорости продолжали бы расти примерно до 5 м/сек. при отливе и до 4,5 м/сек. при приливе. Поток повсюду остается субкритическим. На рис. 6.9 ход скоростей в этом случае показан прерывистой линией.

Наконец, на рис. 6.10 показаны изменения отметок полной воды, малой воды и среднего уровня на внутренней стороне дамбы по мере перекрытия в случае постепенного повышения гребня перемычки.

*Замечания.* 1. В ходе перекрытия прилив на мористой стороне также изменится за счет частичного отражения (см. рис. 6.7).

2. В примерах рассматривался промежуточный прилив. В действительности прилив будет изменяться ото дня ко дню и, следовательно, кривые перекрытия для сизигийного и квадратурного приливов будут другими.

3. Если для перекрытия используются открытые кессоны с воротами, которые закрываются одновременно, то максимальные скорости могут быть значительно ниже, чем в рассмотренных выше случаях.

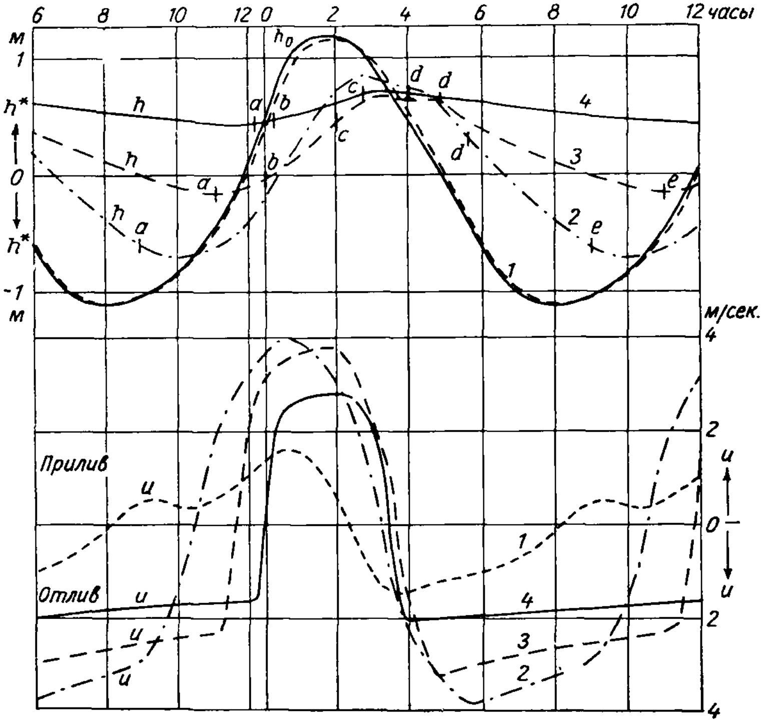



Рис. 6.8.

4. Расчеты, связанные с перекрытием, становятся совсем простыми в случае, когда площадь $S$ поверхности отгораживаемого района достаточно мала, чтобы можно было принять, что расход $Q$ через проход равен $S\,\partial h_2/\partial t$, где $h_2$ — высота уровня в этом районе.

Пусть высота уровня с мористой стороны прохода будет $h_0$. Тогда в уравнении (1.4) величину $Q$ можно заменить на $S\,\partial h_2/\partial t$ и величина $h_2$ будет решением обычного нелинейного дифференциального уравнения. Это уравнение можно решить численно. Однако оказывается, что при численных расчетах надо внимательно следить, чтобы при смене течений не возникало неустойчивости. Когда поток через проход становится критическим, приливные движения в польдере не влияют на $Q$. Тогда надо применять уравнение (1.6).

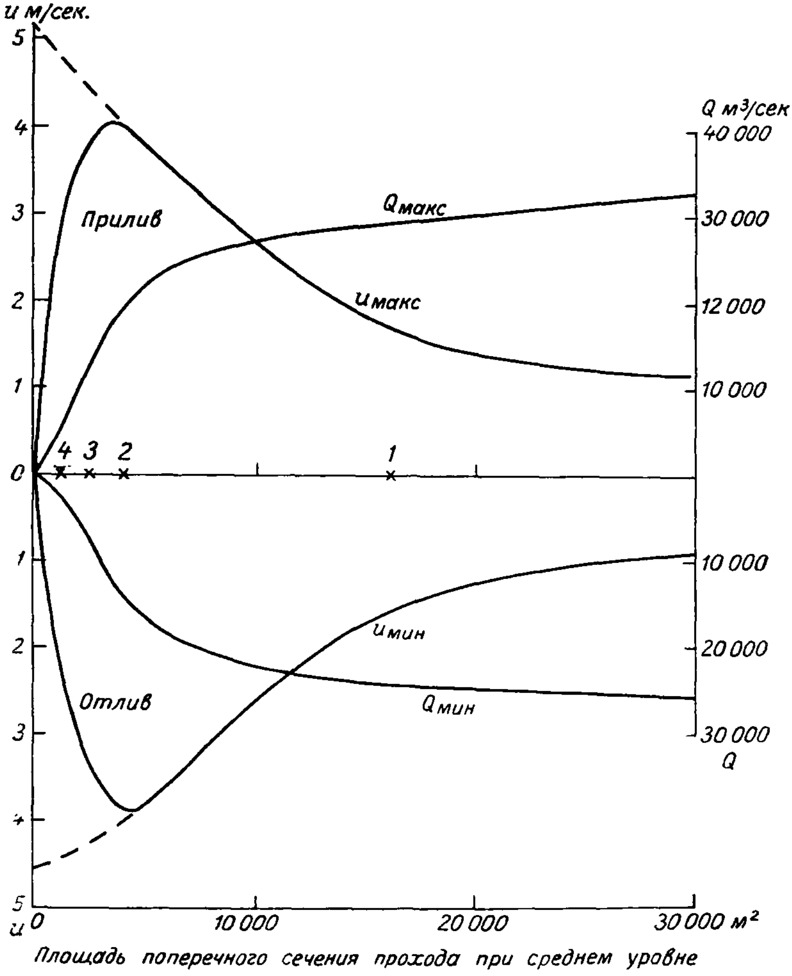



Рис. 6.9.

*Предвычисление приливов и приливных течений на период перекрытия. Сравнение наблюденных и расчетных данных.*

Приливные расчеты, описанные в предыдущем разделе, применяются при планировании перекрытия, т. е. для определения способа перекрытия, для выбора материала и т. д. (см. разд. 1.1). На период перекрытия приходится выполнять специальные расчеты, когда определяют день за днем изменения в приливе под влиянием метеорологических условий.

Когда употребляются кессоны, особенно важно знать ход течений в период их смены.

Приливы с учетом метеорологических воздействий можно точно предсказать только за день до нужного срока. Поэтому в период перекрытия также необходимо выполнять расчеты,

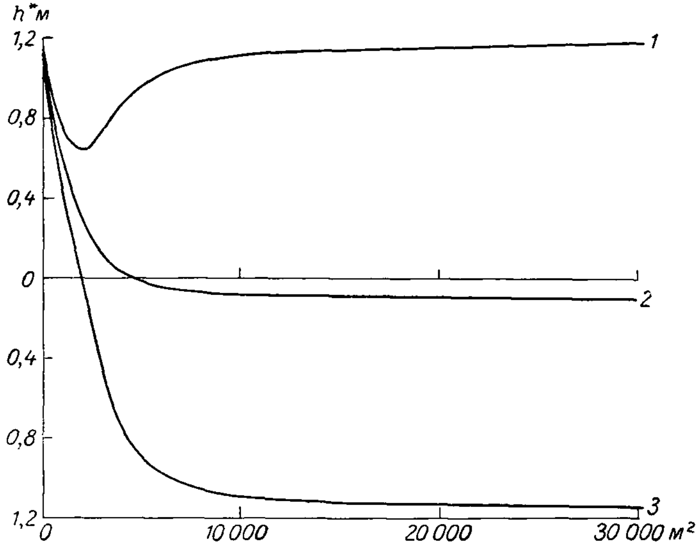



Рис. 6.10.
*1* — отметка полной воды, *2* — отметка среднего уровня, *3* — отметка малой воды.

чтобы определить ожидаемые изменения в ходе уровня и течений за счет метеорологических эффектов. На рис. 6.11 показан результат такого предвычисления (при перекрытии Феерсе-Гат). Прерывистыми линиями даны предсказанные колебания уровня и течения, а сплошными — наблюденные значения этих величин в период перекрытия.

Результат другого сравнения показан на рис. 6.12, где вычисленные скорости сопоставлены с наблюденными (для одной из ситуаций при перекрытии Зандкреек). Неправильная форма кривой объясняется влиянием местных условий. Эти эффекты были учтены расчетом.

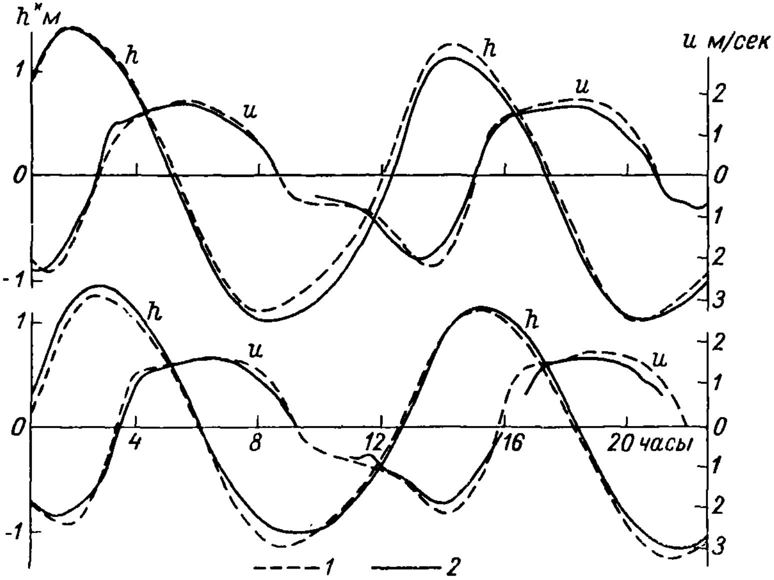



Рис. 6.11.
*1* — расчетные данные, *2* — наблюденные данные.

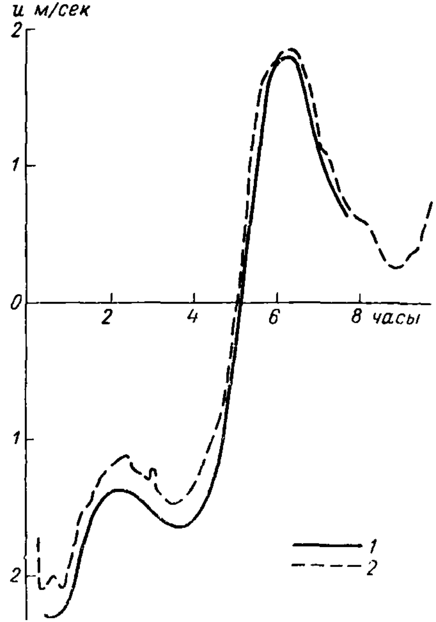



Рис. 6 12.
*1* — расчетные данные, *2* — наблюденные данные.

## 2. РАССМОТРЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНО ВЫСОКИХ ПРИЛИВОВ

### 2.1. Методы расчета

Термин «экстремально высокий прилив» или «штормовой нагон» применяется к случаю, когда обычный прилив сочетается с сильным ветровым эффектом. Выражение «штормовой нагон» может также означать дополнительный подъем уровня за счет ветра.

Отделение нагонов от астрономических приливов представляет собой трудную задачу, так как с динамической точки зрения эти явления нелинейны. Вычитание предвычисленного астрономического прилива из наблюденных колебаний уровня не даст нам фактического нагона, так как оба явления взаимодействуют друг с другом. Практический метод выделения штормовых нагонов из зарегистрированных кривых прилива описан Росситером [111]. Описание штормовых нагонов можно найти у Груна и Гровса [51], а математическое исследование их распространения в эстуарии и канале выполнили соответственно Праудмэн [103] и Дудсон [26].

Хотя мы и учитывали влияние ветра в уравнениях для длинных волн, выведенных в главе 1 (уравнения (3.17) и (3.18)), однако до сих пор мы обычно пренебрегали этими членами, ограничиваясь только приливными движениями. Для применения математических методов это несущественно. Общее уравнение штормового нагона приводит, например, Фортак [43].

Гармонический метод не является самым целесообразным для расчета распространения штормовых нагонов в реках. Правда, мы можем представить член, учитывающий эффект ветра в уравнении движения, рядом Фурье, члены которого будут иметь периоды, равные $n \times (12$ ч. 25 м.), где $n = \ldots 3, 2, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$, но обычно число таких членов оказывается так велико, что применение гармонического метода становится практически бесцельным.

Теория характеристик, изложенная в главе 3, может быть применена к штормовым нагонам. Характеристические кривые определяются главным образом коэффициентами при производных в уравнениях длинных волн. Таким образом, непосредственный эффект ветра оказывает второстепенное влияние на ход характеристических кривых, аналогичное влиянию члена, учитывающего сопротивление (глава 3, разд. 3). Заметим, однако, что ветер оказывает важное косвенное влияние на характеристические кривые, так как они сильно зависят от глубины, а глубина значительно изменяется в зависимости от ветра. Применять метод характеристик можно путем, изложенным в главе 3; при этом члены, учитывающие сопротивление и эффект ветра, следует объединить. При расчете штормового нагона силы за счет ветра считаются известными, однако глубина, входящая в выражение члена, учитывающего ветер, фактически неизвестна.

С таким же положением мы сталкиваемся при применении численного метода, рассмотренного в главе 4. Численный метод можно применять для получения решений, описывающих возникновение и распространение высоких приливов или штормовых нагонов в морях произвольной формы при произвольном поле ветра. В этом случае аналитические решения получить не удается; это оказывается возможным, только если принять еще более упрощающие допущения, чем те, которые были сделаны при выводе уравнений (3.17) и (3.18) в главе 1. Кроме того, уравнения должны быть линейными. Они приведены в (4.7)—(4.9) в главе 4.

Допущения относятся к форме моря, к граничным условиям в месте соединения с соседним водоемом и к полю ветра.

Ван Дантциг и Ловерье нашли различные аналитические решения при некоторых упрощающих допущениях, касающихся указанных факторов, а именно:

1) *Поле ветра.* а) Экспоненциальное поле ветра

$$V(t) = c_1 e^{p_1 t} - c_2 e^{p_2 t},$$

где $c_1$, $c_2$, $p_1$ и $p_2$ — положительные константы.

б) Одноступенчатое поле ветра

$$V(t) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad t < 0, \\ 1 & \text{для} \quad t > 0. \end{cases}$$

в) Ступенчато-синусоидальное поле ветра

$$V(t) = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad t < 0 \\ \sin \omega t & \text{для} \quad t > 0. \end{cases}$$

Во всех случаях $U(t) = 0$.

2) *Форма моря.* Прямоугольное море, ограниченное берегами с трех сторон, в то время как с четвертой стороны границей служит очень глубокий океан (в виде такого прямоугольника можно представить, например, Северное море). Глубина принимается постоянной. Ось $y$ направляется вдоль моря.

3) *Граничные условия.* На открытой стороне уровень принимается постоянным и равным среднему уровню моря в течение штормового нагона.

Ловерье [81, 82] рассмотрел также несколько специальных случаев; он ввел экспоненциально увеличивающуюся глубину вместо постоянной глубины, а также исследовал влияние Па-де-Кале на модели Северного моря.

Здесь нет возможности полностью рассматривать математические выкладки, на которых основаны решения; они подробно изложены в работах Ван Дантцига и Ловерье [22, 23, 81, 82, 83, 106 e]. Мы укажем только на наиболее значительные моменты.

Сначала к уравнениям (4.7)—(4.9) главы 4 применяется преобразование Лапласа. Тогда для функции $\bar{h}$, являющейся лапласовым изображением уровня $h$, получаем неоднородное уравнение Гельмгольца; граничные условия на открытой границе превращаются в условия Дирихле, а вдоль берегов имеет место так называемое условие косого типа (это значит, что производные от $\bar{h}$ по $x$ и $y$ связаны линейным соотношением). Эти граничные условия делают решения гораздо более громоздкими. Задача решается путем разложения, которое содержит две волны Кельвина и два бесконечных ряда волн Пуанкаре (см. главу 4). Неизвестные коэффициенты можно определить численно, используя условия на открытой и замкнутых границах. В некоторых простых случаях были получены также аналитические решения.

Важные практические результаты были получены также с помощью квазиравновесной теории. Здесь предполагается, что реакцию моря на ветровое напряжение или градиент давления можно аппроксимировать реакцией в случае стационарных атмосферных условий. Использование этого метода дает особенно благоприятные результаты, когда море относительно невелико, а изменение атмосферных условий происходит медленно, как, например, в случае Северного моря. Уравнения, на которых основан этот метод, описаны у Груна и Гровса [51]. Изложение математических приемов решения этих уравнений можно найти у Веенинка [150] и в Отчете Дельта-комитета [106 a]. Эти методы используются для прогноза, т. е. с их помощью по полю ветра находят высоты уровня (см. Грун [50]).

Если продолжительность шторма примерно равна периоду свободной волны, то штормовой эффект может значительно возрасти. Это явление подобно рассмотренному в главе 2, разд. 1, для случая одномерного потока. Однако для двухмерного потока решение гораздо более громоздко, особенно если требуется учитывать силу Кориолиса (см. Ван Дантциг [106 d]).

На период времени, для которого ведется расчет высоких приливов, требуется иметь ряд важных исходных данных:

1. Характеристики поля ветра над морем как функцию места и времени, а также, если необходимо, ход градиентов давления для определения функций $\partial h'/\partial x$ и $\partial h'/\partial y$ (см. разд. 3.1 главы 1).

2. Граничные условия, т. е. уровень как функцию времени вдоль открытых границ моря или в устье реки или эстуария.

3. Речной сток, который влияет на распространение штормового нагона в реке или эстуарии, а также может сказываться на

колебаниях уровня за счет штормовых нагонов на участках морского побережья вблизи устья.

Непосредственное влияние ветра в реках и эстуариях обычно ограничено по сравнению с морями, и поэтому для рек основной проблемой является определение колебаний уровня в устье, а также допущения относительно речного стока. Колебания уровня в устье зависят главным образом от хода штормового нагона в море. Однако совместный расчет штормового нагона в море и в речной системе или эстуарии обычно выполнить не удается.

Поскольку обычно целью исследования штормовых нагонов является установление той высоты дамб и других аналогичных сооружений, которая необходима для защиты территорий от затопления, то поле ветра и граничные условия, если возможно, должны быть получены на основе статистических соображений, так как возникновение той или иной штормовой ситуации имеет статистическую природу. Кратко это будет рассмотрено в следующем разделе.

## 2.2. Статистический подход

Статистический анализ может быть применен к фактическим измеренным максимальным значениям высоких приливов, включая и астрономические приливы (не носящие статистического характера), а также к разностям между измеренными высокими приливами и предвычисленными приливами.

Если ряд наблюдений достаточно велик, то оказывается, что практически результаты, полученные с помощью статистического анализа обоими способами, мало отличаются друг от друга.

Однако ряд наблюдений обычно бывает неоднородным, так как некоторые результаты наблюдений могут зависеть друг от друга, например, в течение одного циклона (депрессии), может случиться более одного высокого прилива. Следовательно, необходимо произвести отсортировку наблюдений так, чтобы ряд значений высоких уровней стал, насколько это возможно, однородным.

Лучше всего отобрать в каждой депрессии экстремально высокий прилив, игнорируя все остальные высокие приливы в течение той же депрессии.

Очень важной характеристикой является частотная кривая (кривая повторяемости) наивысших уровней при высоких приливах. Было найдено (см. Вемельсфельдер [152]), что логарифм среднего числа высоких приливов за год, превосходящих данный уровень $h$, рассматриваемый как функция этого уровня $f(h)$, для значительной части наблюдений может быть приближенно выражен линейной функцией.

Пусть далее $n(h)$ будет ожидаемое число высоких приливов, превосходящих уровень $h$ за год. Тогда мы можем положить

$$n(h) = Ne^{-\frac{h-h_e}{a_e}-1}, \qquad (2.1)$$

где $N$ — число полных вод за год ($N \approx 705$ в случае полусуточного прилива), $h_e$ — отметка, выше которой уровень бывает $N/e$ раз в год, $a_e$ — разность высот, определяемая так, что отметка $h + a_e$ превосходится $n/e$ раз в год, т. е. из формулы $n(h + a_e) = e^{-1}n(h)$.

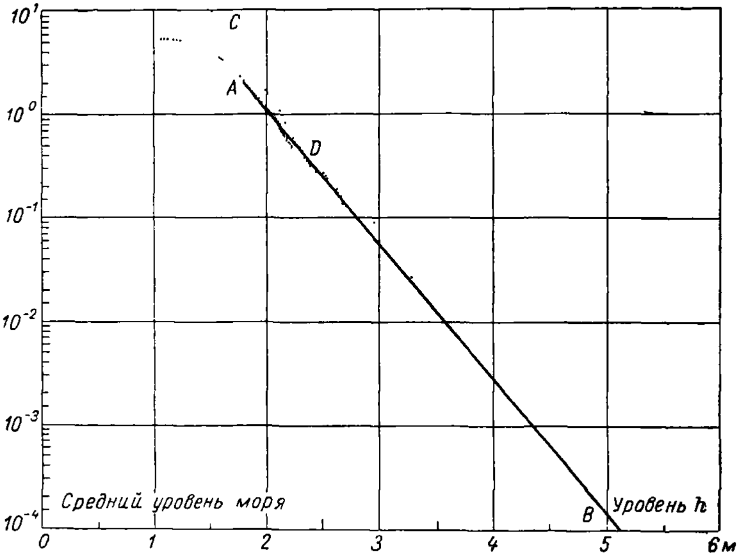



Рис. 6.13.

Читатель может убедиться, что (2.1) удовлетворяет определениям $a_e$ и $h_e$. Оказывается, что функция $n(h)$ приближенно выражает вероятность $p(h)$ того, что $h$ будет превзойдена в течение одного года.

Формулу (2.1) на практике можно применять к средней части ряда наблюдений. Для более высоких значений высоких приливов, где число наблюдений невелико, уравнение становится менее надежным. На рис. 6.13 показана функция $f(h)$ для $h > 1{,}5$ м, полученная по наблюдениям высоких приливов в Хук-ван-Холланде в устье Роттердамского судоходного канала в течение зимних месяцев за 69 лет (точки вдоль линии $CDB$). Из этого графика видно, что значения логарифма частоты действительно распределяются почти линейно в значительной части интервала значений $h$, охваченного наблюдениями или, другими словами, в логарифмическом масштабе «асимптота» частотной кривой высоких приливов в области наиболее высоких приливов достаточно хорошо аппроксимирует саму частотную кривую. Этот факт имеет большое значение, потому что мы можем пользоваться характеристиками этой асимптоты, полученными по данным наблюдений, для экстраполяции частотной кривой в ту область, где наблюдений нет.

Первая задача заключается в подборе экспоненциальной кривой типа (2.1), наилучшим образом удовлетворяющей данным наблюдений. Следовательно, мы должны определить начальную величину $h=h_b$ для кривой $n(h)$ (где $h>h_b$), а также параметр $a_e$. Очевидно, что мы должны выбрать $h_b$ в области, где кривую $f(h)$ на рис. 6.13 можно хорошо аппроксимировать прямой линией (при логарифмическом вертикальном масштабе). Значения для $n(h_b)$ и $a_e$ находятся следующим образом.

Пусть $n$ — число наблюденных случаев, когда $h>h_b$, за $m$ лет; тогда величину $n(h_b)$ оцениваем как $n/m$. Оценку для $a_e$ в случае экспоненциального распределения $n(h_b)\exp(-(h-h_b)/a_e)$ получаем из выражения

$$a_e=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(h_i-h_b),$$

где $h_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ — это наблюденные уровни $h_b \leqslant h_n \leqslant \leqslant h_{n-1} \leqslant \ldots$, превосходящие или равные $h_b$. Если используются различные оценки для $h_b$, то можно найти наилучшие значения для $h_b$ и $a_e$ с помощью хорошо известного метода наименьших квадратов.

Изложенный способ подбора экспоненциальной кривой, удовлетворяющей данным ряда наблюдений, применялся в Математическом центре (см. Ван Дантциг и Хемельрийк [106 d]).

Другой способ предложен Гумбелем [52], который использует экстремальные значения; этот способ часто применяется при решении гидравлических задач, например при исследовании речного стока. Максимальные годовые значения высоких приливов наносятся на специальный вероятностный график, составленный Гумбелем. Вертикальная ось (уровни) имеет линейный масштаб, а горизонтальная ось — вероятностный масштаб Гумбеля.

Оказывается, что и здесь данные наблюдений над экстремальными величинами аппроксимируются прямой линией. Недостатком этого метода является то, что используются только годовые максимальные значения и тем самым из рассмотрения исключается обширная информация, полученная за весь период наблюдений. Согласно теории Гумбеля, представляющей собой развитие теорий Фреше, Фишера и Типпета, распределение максимальных величин высоких приливов должно относиться к так называемому экспоненциальному типу, который включает в себя также нормальное распределение (Лапласа, Гаусса) и логарифмическое нормальное распределение (см. также Боргман [6] и Дронкерс [31]).

Оказывается, что результаты, найденные по методу Гумбеля, аналогичны тем, которые получены путем применения экспоненциального распределения к тому же ряду наблюдений над высокими приливами.

По-видимому, здесь целесообразно сделать несколько замечаний о практических исследованиях высоких приливов у голландского побережья для определения высоты дамб, предотвращающих затопление. Высокие приливы опасной высоты вызываются глубокими атмосферными депрессиями над Северным морем. Такие депрессии имеют место в зимние месяцы. Поэтому данные наблюдений были разбиты на две группы: зимнюю (ноябрь, декабрь и январь) и летнюю. Очевидно, что годовые максимумы приходятся в основном на первый период. Следовательно, надо рассматривать экспоненциальное распределение высоких приливов только за зимние месяцы, так как в противном случае летние данные наблюдений, которые влияют на частотную кривую в области не экстремально высоких приливов, окажут влияние и на наклон асимптоты, о которой говорилось выше. Далее, не все зимние депрессии могут вызвать опасный штормовой нагон. Поэтому Ван дер Хам [106 а] произвел дальнейший отбор с тем, чтобы учитывать лишь те депрессии, которые перемещаются в определенный район Северного моря и которые вызывают подъем уровня более чем на 0,5 м. Ван Дантциг выполнил исследование с целью проверки, являются ли эти отобранные наблюдения независимыми в отношении экспоненциального распределения.

Пусть $h_b \leqslant h_n \leqslant \ldots \leqslant h_1$ — независимые наблюдения, имеющие экспоненциальное распределение ($\alpha = a_e^{-1}$):

$$F(h) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\alpha\,(h - h_b)\right), & h \geqslant h_b, \\ 0, & h < h_b. \end{cases} \tag{2.2}$$

Тогда он исследует отношение

$$B = \frac{h_1 + \ldots + h_k - kh_{k+1}}{h_1 + \ldots + h_n - nh_b}$$

для различных значений $k < n$, чтобы определить, не окажется ли оно чересчур большим или малым при каком-то числе $k$ наблюдений самых высоких приливов по сравнению с общим количеством $n$ наблюдений. Эта проверка основана на том факте, что распределение стохастической переменной

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_k}{\mathbf{x}_1 + \ldots + \mathbf{x}_n},$$

где

$$\mathbf{x}_i = i(h_i - h_{i+1})$$

известно и равно

$$P(\mathbf{B} \leqslant B) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \int_0^B x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}\,dx.$$

Пусть величина $\alpha$ в (2.2) определена так, что экспоненциальное распределение аппроксимирует данные наблюдений в некотором конечном интервале так близко, как это возможно. Ван Дантциг в этом случае исследовал вопрос, в какой степени наблюдения, имеющие более высокие значения, чем те, которые относятся к указанному интервалу, могут также принадлежать к экспоненциальному распределению. Таким образом, он применяет тест Колмогорова—Смирнова.

Приведем некоторые фактические результаты, из которых читатель может получить представление о практической основе этих исследований. Параметр $\alpha$ экспоненциального распределения (2.2) был определен из 148 отобранных наблюдений в Хук-ван-Холланде в интервале $+1{,}70$ м $< h < +2{,}40$ м, где величина $h$ определялась относительно среднего уровня моря, а период наблюдений составлял 63 года (см. рис. 6.13, линия $ADB$).

Наилучшим значением параметра $\alpha$ оказывается $\alpha = 2{,}92$ м$^{-1}$. Тогда $h_e = 0{,}337$ м. Экстраполяция экспоненциального распределения за пределы указанного интервала показывает, что вероятность того, что будет превзойден высокий прилив высотой 5 м, составляет $1{,}5 \cdot 10^{-4}$; другими словами, этот уровень будет превзойден в среднем 1,5 раза в 10 000 лет. Такую возможность можно охарактеризовать также выражением «1,5% в 100 лет».

Величины $\alpha$ сильно зависят от интервала, выбранного для $h$. Если для нижнего предела ($h_b = 1{,}7$) взять другие значения, то найдем другие значения и для $\alpha$, а вероятность того, что уровень $+5$ м будет превзойден, будет колебаться от $7{,}6 \cdot 10^{-5}$ до $4{,}4 \cdot 10^{-4}$. Тогда значения уровней, вероятность превышения которых равна $10^{-4}$, составят соответственно 4,8 и 5,6 м.

На внутренних участках реки уровни высоких приливов зависят не только от штормового нагона, но также и от внутриматерикового стока. Один и тот же высокий уровень в удаленном от моря участке реки может быть вызван комбинацией как высокого уровня в устье реки с низким стоком, так и низкого уровня в устье с высоким значением стока. Для определения статистических закономерностей колебаний уровня, обусловленных штормовыми нагонами в удаленном от моря участке реки, необходимо рассматривать также статистические характеристики речного стока. Если уровни высоких приливов в устье реки и речной сток можно рассматривать независимо друг от друга, то вероятность совместного действия штормового нагона и повышенного речного стока равна произведению вероятностей каждого из этих факторов. С помощью этого правила можно определить частоту превышения определенного уровня в каком-либо внутреннем пункте реки (см. Дронкерс и Стробанд [106е, 32]). Наконец, укажем, что в Соединенных Штатах исследовались статистические характеристики высоких приливов, связанных с ураганами. Рассмотрение этих вопросов можно найти в работе Брууна, Чиу, Герритсена и Моргана [12] и в теоретическом исследовании Харриса [61].

### 3. ПРИЛИВНЫЕ МОДЕЛИ

Исследование приливов можно производить либо с помощью численных расчетов, основанных на математических уравнениях, либо с помощью моделей. В последнем случае модель может быть либо физически подобной оригиналу, либо представлять собой другую физическую систему, удовлетворяющую, однако, тем же самым или аналогичным уравнениям.

В данном разделе сделаны некоторые дополнительные замечания, касающиеся использования приливных моделей, а также приведены ссылки на некоторые публикации, посвященные этому вопросу.

О. Рейнольдс впервые исследовал возможность воспроизведения приливов на гидравлических масштабных моделях. Такие модели получили широкое распространение после выполнения обширных технических дноуглубительных работ в реках и эстуариях около 1925 г.; при этом возникла необходимость изучить последствия таких работ для характера потока и для предсказания того, как река будет развиваться в будущем. По ряду причин — значительные размеры амплитуды прилива по сравнению с глубиной, более благоприятные условия для развития турбулентности, использование зернистого донного материала с зернами реальных размеров и реальной плотности — оказалось целесообразным создавать искаженные модели, в которых вертикальный масштаб увеличен по сравнению с горизонтальным.

Технические вопросы конструирования таких моделей изложены у Аллена [4].

Изложение теоретических основ конструирования таких моделей можно найти в книге Прандтля и Титьенса.

Уравнения, описывающие движение воды на модели, аналогичны уравнениям, приведенным в (4.11) и (4.12) в главе 1. Допустим, что горизонтальный масштаб составляет $1/s$ часть от прототипа, а вертикальный масштаб $1/z$ часть. Тогда член $\partial h/\partial x$ или $\partial(h+a_0)/\partial x$ на модели составляет $s/z$ часть от прототипа. Поскольку остальные члены в уравнениях должны быть выражены в том же масштабе, то оказывается, что скорость $u$ изменится в $z^{-1/2}$ раз, а время $t$ — в $z^{1/3}/s$ раз.

В качестве примера можно указать на гидравлическую модель района Дельта, созданную в лаборатории в Делфте (см. Тийссе). Масштабы соответственно составляли: $z=64$, $s=2400$. Следовательно, переходные множителя для $u$ и $t$ были соответственно $^1/_8$ и $^1/_{300}$. Чтобы учесть эффект вращения Земли, Шумейкер поместил у внешних устьев эстуариев на модели вращающиеся цилиндры. Возникающий при этом эффект Магнуса моделировал ускорение Кориолиса.

Электрические модели конструируются таким образом, что каждая ячейка представляет собой соответствующий участок канала; при этом общее водонакопление, инерция и сопротивление воспроизводятся точно. Тогда на электрической модели можно воспроизвести полный расход и напор, которые аналогичны соответственно электрическому току и потенциалу. Можно, однако, рассматривать дуальную схему, в которой напряжение аналогично расходу, а электрический ток — высоте уровня моря.

Электрическая модель не дает такой наглядной, видимой глазом картины приливного движения, как гидравлическая модель, хотя она и имеет очевидные преимущества в том смысле, что позволяет быстро продемонстрировать самые разнообразные приливные диаграммы.

Ван Веен [146] и его сотрудники одними из первых исследовали возможность представления приливных движений в реках с помощью электрических аналоговых систем.

Были приняты специальные меры, чтобы электрическими способами учесть квадратичный закон трения, а также изменения глубины, ширины русла и ширины района накопления.

Однако для решения приливных проблем в районе Дельта (Голландия) точность такой модели недостаточна. Поэтому сейчас введена в действие новая электрическая аналоговая вычислительная установка. Эта новая установка, созданная Шёнфельдом и Верхагеном [130] (см. также Шёнфельд и Стробанд [106*i*]), способна воспроизвести явления, описываемые приливными уравнениями при произвольной форме поперечного сечения реки. Изменение коэффициентов в уравнении движения учитывается, при этом можно ввести все граничные условия.

Эта модель, следовательно, более совершенна, чем предыдущая. Большим преимуществом ее является возможность исследования штормовых нагонов, так как силы, порождаемые ветром, также можно ввести в рассмотрение.

Так как для технических работ, которые намечено произвести в районе Дельта, требуется выполнить очень обширную программу исследований, то была разработана новая электрическая аналоговая машина [106*l*].

Одной из целей является также определение уровней при штормовых нагонах в районе Дельта, в том числе и прослеживание последовательных этапов развития штормового нагона.

Эйнштейн и Хардер [37, 60] также сконструировали приливную аналоговую машину для изучения приливных движений в реках. Вантруа [145] и Ишигуро [69] учли в своих аналогах влияние вращения Земли (силу Кориолиса). В конструктивных особенностях каждой из указанных моделей есть существенные различия. Более подробные сведения можно найти в названных публикациях.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. A b b o t t M. B. L'influence de la force de Coriolis sur les courants de marée lans un estuaire exponentiel. La Houille Blanche, **5**, **1960**, *258*.
2. A b b o t t M. B. A theory of the propagation of bores in channels and rivers. Proc. Cambridge Phil. Soc., **52**, 1956, *371*.
3. A b b o t t M. B. On the spreading of one fluid over another. La Houille Blanche, **5** and **6**, 1961.
4. A l l e n J. Scale models in hydraulic engineering. Longmans, London, 1947. *473*.
5. Б о г д а н о в К. Т. Новые карты котидальных линий полусуточных приливов $M_2$ и $S_2$ (и суточных приливов $K_1$ и $O_1$) для Тихого океана. ДАН СССР, **141**, 5, 1961.
6. B o r g m a n L. E. The frequency distribution of near extremes. J. of Geophys. Res. **66**, no. 10, 1961, *471*.
7. B o w d e n K. F. Note on wind drift in a channel in the presence of tidal currents. Proc. Roy. Soc., A **219**, London, 1953, *186*.
8. B o w d e n K. F. Physical oceanography of the Irish Sea. Fish Invest., Ser. **2.18**, London, 1955, *260*.
9. B o w d e n K. F. and L. A. F a i r b a i r n. Measurements of turbulent fluctuations and Reynoldsstresses in a tidal current. Proc. Roy. Soc., **A 237**, London, 1956, *186*.
10. B r e m e k a m p H. Quelques applications de la méthode des approximations successives. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. Amsterdam, 1938, *330*.
11. B r u u n P. and F. G e r r i t s e n. Stability of coastal inlets. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1960, *442*.
12. B r u u n P., T. Y. Ü h i u, F. G e r r i t s e n and W. H. M o r g a n. Storm tides in Florida as related to coastal topography. Eng. Progress at the Univ. of Florida, **XVI**, 1962, *473*.
13. C a r s l a w H. S. Introduction to the theory of Fourier series and integrals. Dover Publ., New York, 1929, *2*, *225*.
14. C h u r c h i l l R. V. Fourier ceries and boundary value problems. McGraw-Hill, New York, 1941, *2*, *225*.
15. C h u r c h i l l R. V. Modern operational mathematics in engineering. McGraw-Hill, New York, 1944, *225*.
16. C o l l a t z L. Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. Springer Verlag, Berlin, 1955, *353*.
17. C o l l a t z L. Numerische und grafische Methoden. Handbuch der Physik Encyclopaedia of Physics, Band **II**, Springer Verlag, Berlin, 1955, *353*.
18. C o u r a n t R., E. I s a a c s o n and M. R e e s. On the solution of non-linear hyperbolic differential equations by finite differences. Commun. on pure and appl. math., **5**, 1952, *344*.
19. C o u r a n t R. and D. H i l b e r t. Methoden der mathematischen Physik. Zwei Bände (Springer Verlag, Berlin, 1931, 1937). Engl. ed.: Methods of mathematical physics, vols. **I** and **II** (Intersci. Publ., New York, 1953). *313*, *315*, *326*.

20. Craya A. Calcul graphique des régimes variables dans les canaux. La Houille Blanche, 1946, *353*.
21. Dahlquist G. Convergence and stability for a hyperbolic difference equation with analytic initial values. Math. Scand. **2**, 1954, *378*, *379*.
22. Dantzig D. van, Einige analytische Ergebnisse über die Wasserbewegung in einem untiefen Meere. Zeitschr. angew. Math. und Mech., **39**, 1959, *258*, *466*.
23. Dantzig D. van and H. A. Lauwerier. The North Sea Problem, I and IV. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet., Ser. A **63** and **64**. Indagationes Math., **22**, Amsterdam, 1960/1961, *258*.
24. Defant A. Untersuchungen über die Gezeitenerscheinungen in Mittel- und Randmeeren, in Buchten und Kanälen. Denkschr. Wiener Akad. Wiss,. 1919, *257*.
25. Defant A. Physical oceanography, vols. **1** and **2**, Pergamon Press, Oxford, 1961, *258*.
26. Doodson A. T. Tides and storm surges in a long uniform gulf. Proc. Roy. Soc., A **237**, 1956, *465*.
27. Dorrestein R. Amplification of long waves in bays. Eng. Progress at the Univ. of Florida, Vol. **XV**, Gainsville, 1961, *224*, *247*.
28. Dorrestein R. Wave set-up on a beach. Report no. 50. Proc. Second Techn. Conf. on Hurricanes, Miami Beach, 1961, *188*.
29. Dronkers J. J. Methoden van getijberekening (Methods of tidal computation). De Ingenieur, The Hague, 1947, *271*.
30. Dronkers J. J. Berekeningen over de afsluiting van de Brielse Maas en Botlek (Computations for the enclosure of the Brielse Maas and Botlek). De Ingenieur, The Hague, 1951, *433*.
31. Dronkers J. J. Approximate formulae for the statistical distributions of extreme values. Biometrika, **45**, 1958, *471*.
32. Dronkers J. J. Investigations of the tides and storm surges for the Delta works in the southwestern part of the Netherlands. Proc. of 7th Conf. on Coastal Eng, Vol. **2**, 1960, *473*.
33. Dronkers J. J. The linearization of the quadratic resistance term in the equation of motion for a pure harmonic tide in a sea. N. A. T. O. Symposium 1961 (Inst. für Meeresk., Univ. Hamburg). *271*.
34. Dronkers J. J. and J. C. Sçhönfeld. Tidal computations in shallow water. Proc. Am. Soc. of Civ. Eng., 1955. Rijkswaterstaat Commun. **1**, The Hague, 1959, *304*, *352*, *371*, *433*.
35. Dronkers J. J. and J. van Veen, Aperçu des méthodes pour la détermination du mouvement de marée dans les embouchures et les fleuves à marée néerlandais. XVII-ième Congrès Intern. de Navigation, Lisbonne, 1949, *474*.
36. Einstein H. A. and R. A. Fuchs. Computation of the tides and tidal currents. United States Practice. Proc. Am. Soc. of Civ. Eng. **81**, New York, 1955, *223*.
37. Einstein H. A. and J. Harder. An electric analogue model of a tidal estuary. Proc. Am. Soc. of Civ. Eng. **85**, 1959, *475*.
38. Ekman V. W. On the influence of the earth's rotation on ocean currents. Arkiv. Math. Astron. Fysik, Stockholm, 1905.
39. Evangelisti G. On tidal waves in a canal with variable cross-section. Proc. I. A. H. R., 1955, *247*.
40. Faure J. et N. Nahas. Étude numérique et expérimentale d'intumescences à forte courbure du front (A numerical and experimental study of steep-fronted solitary waves). La Houille Blanche, **5**, 1961.
41. FlochJ F. le. Propagation de la marée dans l'estuaire de la Seine et en Seine-Maritime (Centre des Recherches et d'Études Océanogr.). Paris, 1961, *438*.
42. Forsythe G. E. and W. R. Wasow. Finite-difference methods for partial differential equations. J. Wiley, New York, 1960, *344*, *378*, *379*.

(Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. ИЛ, М., 1963.)
43. Fortak H. Concerning the general vertically averaged hydrodynamic equations with respect to basic storm surge equations. N. A. T. O. Symposium 1961 (Inst. für Meersk., Univ. Hamburg), *465*.
44. Fox L. Numerical solution of ordinary and partial differential equations. Summer School, Oxford, 1961 (Pergamon Press, Oxford, 1962), *315*, *353*, *408*.
45. Gerritsen F. Velocities on very long weirs. Proc. of the 6th General Meeting I. A. H. R., Vol. **4**, The Hague, 1955, *451*.
46. Gerritsen F. Surface wind stress over water as related to wave action. Report no. 50. Proc. Second Techn. Conf. on Hurricanes. Miami Beach, 1961, *188*.
47. Gohin F. P. A. Etude des marées océaniques à l'aide de modèles mathématiques. N. A. T. O. Symposium 1961 (Inst. für Meeresk., Univ. Hamburg), *409*.
48. Gohin F. P. A. Les calculs de marée. La Houille Blanche, 1962, *409*.
49. Goursat E. Cours d'analyse mathématique. Tome **III**, Gauthier-Villars, Paris, 1923, *2*, *318*, *330*.
50. Groen P. The K. N. M. I.-method of forecasting wind induced sea level height disturbances. Deutsche Hydr. Zeitschr., **14**, 1961, *467*.
51. Groen P. and G. W. Groves. Surges. The Sea (see 77, Bibl. Part two), *465*, *467*.
52. Gumbel E. J. Statistics of extremes. Columbia Univ. Press, New York, 1958, *470*.
53. Guyot M. T., J. Nougaro and Ch. Thirriot. Étude numérique des régimes transitoires dans les canaux. La Houille Blanche, 1960.
54. Hadamard J. Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations (1923) Dover Publ., New York, 1952, *330*.
55. Hansen W. Gezeiten und Gezeitenströme der halbtägigen Hauptmondtide $M_2$ in der Nordsee. Deutsche Hydr. Zeitschr., Ergänzungsheft, **1**, 1952, *401*.
56. Hansen W. Ueber ein Verfahren zur Ermittlung der Gestalt der Meeresoberfläche bei zeitveränderlichem Windfeld. Deutsche Hydr. Zeitschr., **7**, 1954, *186*.
57. Hansen W. Theorie zur Errechnung des Wasserstandes und der Strömungen in Randmeeren nebst Anwendungen. Tellus, 3, Stockholm, 1956, *390*, *401*.
58. Hansen W. Hydrodynamical methods applied to oceanographic methods. N. A. T. O. Symposium 1961 (Inst. für Meeresk., Univ. Hamburg), *390*, *401*, *444*.
59. Hansen W. Tides. The Sea, vol. 1, Physical oceanography, gen. ed. M. N. Hill. Intersci. Publ., New York, 1962. (Море. Гидрометеоиздат, 1965).
60. Harder J. A. and F. D. Masch. Nonlinear tidal flows and electric analogs. J. of the Waterw. and Harb. Div., Proc. Am. Soc. Civ. Eng., 1961, *475*.
61. Harris D. L. The equivalence between certain statistical prediction methods and linearized dynamical methods. N. A. T. O. Symposium 1961 (Inst. für Meeresk., Univ. Hamburg), *473*.
62. Hellström B. Wind-effects on lakes and rivers. Handlingan, Ingeniors Vetenskaps Akademie Stockholm, 1941, *187*.
63. Hensen W. Die Berechnung von Tidewellen in Tideflüssen. Die Küste, Jhrg. **7** (Heide, Holstein Germany), 1958/59, *442*.
64 Hidaka K. A contribution to the computation of three-dimensional ocean currents by high speed computers. Records of oceanographic works in Japan, **6**, Tokyo, 1961.
65. Holsters H. Le calcul du mouvement non permanent dans les rivières par la méthode dite des "lignes d'influence". Revue générale de l'hydr. Brussels, 1948, *353*.

66. Holsters H. Le calcul du mouvement non permanent dans les rivières par la méthode dite des "lignes d'influence". Note sur l'exactitude des résultats. La Houille Blanche, 1953, *353.*
67. Holsters H. Calcul d'une marée sinusoïdale simple se propageant dans deux dimensions. Ann. des Trav. publics Belge, Brussels, 1959, *271.*
68. Holsters H. Remarques sur la stabilité dans les calculs de marée. N. A. T. O. Symposium 1961 (Inst. für Meeresk., Univ. Hamburg), *409.*
69. Ishiguro S. An electronic analogue method for tides and storm surges and some applications to the North Sea. N. A. T. O. Symposium 1961 (Inst. für Meeresk., Univ. Hamburg). See also: Tidal analogues; Encyclopaedic Dictionary of Physics (Pergamon Press, 1962), *475.*
70. Jaeger Ch. Technische Hydraulik (Verlag Birkhäuses, Basel, 1949). Engl. ed.: Engineering Fluid Mechanics, Blackie, London, 1959, *451.*
71. Jeffreys H. and B R. Jeffreys. Methods of mathematical physics, Univ. Press, Cambridge, 1950, *2.*
72. Jeffreys H. Tidal friction in shallow seas. Phil. Trans. Roy. Soc., A **221**, London, 1920, *271.*
73. Kajiura K. A note on the generation of boundary waves of Kelvin type. N.A.T.O. Symposium 1961 (Inst. f. Meeresk., Univ. Hamburg), *259.*
74. Kaufmann W. Angewandte Hydromechanik. Zwei Bände, Springer Verlag, Berlin, 1934.
75. Keller J. B. On solutions of nonlinear wave equations. Comm. on Pure and Appl. Math., 1957.
76. Keulegan G. H. Wind tides in small closed channels. Journal Res. of the Nat. Bur. of Standards, 1951, *187.*
77. Kreiss H. O. Some remarks about nonlinear oscillations in tidal channels. Tellus, **9**, Stockholm, 1957, *223.*
78. Kreiss H. O. Über die Formulierung der Randbedingungen und über die Differenzapproximation bei Anfangsrandwertaufgaben. N.A.T.O. Symposium 1961 (Inst. für Meeresk., Univ. Hamburg), *315.*
79. Lamb H. Hydrodynamics, 6th ed. Cambridge, 1932; Dover Publ., New York, 1945, *247, 257.*
80. Lamoen J. Sur l'hydraulique des fleuves à marée. Revue générale hydr. Bruxelles, 1936.
81. Lauwerier H. A. The North Sea Problem, II, III, V, VI, VII. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet., Vols. **LXIII** and **LXIV**, Ser. A (Amsterdam, 1960/61); or Indag. Math., Vols. **XVII** and **XVIII** (Amsterdam) (see also Van Dantzig and Lauwerier, no. 16), *258, 466.*
82. Lauwerier H. A. and B. R. Damsté. The North Sea Problem, VIII. A numerical treatment. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet., Vol. **LXVI**, Ser. A 2; or Indag. Math., Vol. **XXV**, Amsterdam, 1963, *406, 408, 466.*
83. Lauwerier H. A. Some recent work of the Amsterdam Mathematical Centre on the hydrodynamics of the North Sea. N.A.T.O. Symposium 1961 (Inst. für Meeresk. Univ. Hamburg), *408, 466.*
84. Lax P. D. and R. D. Richtmeyer. Survey of the stability of linear finite difference equations. Comm. on Pure and Appl. Math. **IX**, 1956, *380, 409.*
85. Lorentz H. A. Verslag Staatscommissie Zuiderzee 1918—1926 (Report of the Government Zuiderzee Commission), Alg. Landsdrukkerij, The Hague, 1926, *226, 238, 271, 275.*
86. Lowell S. C. The propagation of waves in shallow water. Comm. on Pure and Appl. Math., 1949, *223.*
85. Massau J. Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles. Ann. Assoc. Ingén. Écoles de Gand, 1900, *352.*
88. Mazure J. P. De berekening van getijden en stormvloeden op benedenrivieren (The computation of tides and storm surges on maritime rivers). Thesis, Delft, 1937, *271.*

89. Modern Computing Methods, 2nd ed. Her Majesty's Stationery Office, London, 1961, *300.*
90. Nedeco, River studies and recommendations on improvement of Niger and Benue North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1959, *414.*
91. Otter J. R. H. and A. S. Day. Tidal flow computations. The Engineer, London, 1960, *248.*
92. Parsons W. B. The Cape Cod Canal. Trans Am. Soc. Civ. Eng., 1918, *223.*
93. Perroud P. The propagation of tidal waves into channels of gradually varying cross-section. Wave Res. Lab. Univ. of California, Ser. 89, 1958, *247, 248.*
94. Phillips O. M. On the generation of waves by turbulent wind. J. Fluid Mech., 2, *188.*
95. Picard E. Leçons sur quelques types simples des équations aux dérivées partielles. Nouveau tirage Gauthier-Villars, Paris, 1950, *329, 330.*
96. Pillsbury G. Б. Tidal Hydraulics, Rev. ed. Corps of Eng. U. S. Army, Vicksburg, 1956, *248, 434.*
97. Piper L. A. Applied mathematics for engineers and physicists. McGraw-Hill, New York, 1946, 2, *225.*
98. Poincaré H. Leçons de Mécanique Céleste, Tome **III**, Gauthier-Villars, Paris, 1910, *254.*
99. Preissmann A. and J. A. Cunge, Calcul du mascaret sur machine électronique (Tidal bore calculation on an electronic computer). La Houille Blanche 5. 1961, *397.*
100. Preissmann A. and G. Werner. Application du calcul des intumescences sur machine électronique à divers cas pratiques (Application of translation wave calculation on an electronic computer to practical cases). La Houille Blanche, **5**, 1961.
101. Proudman J. On the dynamical equations of the tides. Parts I—III and Part IV. Proc. London Math. Soc., **18** and **34**, 1916, 1931, *258.*
102. Proudman J. Dynamical oceanography. Methuen, London; J. Wiley, New York, 1953, *258.* (Праудмэн Дж. Динамическая океанография. ИЛ, М., 1957.)
103. Proudman J. The propagation of tide and surge in an estuary. Proc. Roy. Soc., A **231**, Wiley, New York, 1955, *465.*
104. Proudman J. and A. T. Doodson. The principal constituent of the tides of the North Sea. Phil. Trans. Roy. Soc., A **224**, London, 1924, *260.*
105. Ramming H. G. Gezeiten und Gezeitenströme in der Eider. N.A.T.O. Symposium 1961 Inst. für Meeresk., Univ. Hamburg, *442.*
106. Report of the Delta Committee, Final Report (English text). Further volumes contain contributions on tides and storm surges. Dutch text, English summary) (Staatsdrukkerij, The Hague, 1960/61; *238, 258, 443, 447, 466, 467, 470, 471, 473, 474, 475.*
    a. Bijvoet H. C., C. J. van der Ham *et al.* Meteorological and oceanographic aspects of storm surges on the Netherlands coast.
    b. Dantzig D. van and J. Hemelrijk. Extrapolation of the frequency curve of the levels of high tide at Hook of Holland.
    c. Dantzig D. van and J. Kriens. The economic decision problem concerning the security of the Netherlands against storm surges.
    d. Dantzig D. van. Free oscillations of a fluid in a rotating rectangular basin.
    e. Dantzig D. van and H. A. Lauwerier. Mathematical study of the effect of wind upon the water levels of the North Sea.
    f. Hemelrijk J. Testing the independence of the levels of storm surges at Hook of Holland and the discharge of the Rhine at Lobith.
    g. Wemelsfelder J. The frequency curves of high water in the tidal area of the Netherlands.

h. S c h i j f J. B. Tidal computations, hydraulic and electric models, from a general point of view.
i. S c h ö n f i l d J. C. and H. J. Stroband. Tidal research by means of the hydraulic-electric analogy.
j. D r o n k e r s J. J. Methods of tidal computation.
k. D r o n k e r s J. J. The effect of the Delta works on the tides and the storm surge levels along the coast of the southwestern part of the Netherlands.
l. D r o n k e r s J. J. and H. J. S t r o b a n d. The effect of the Delta works on the water movement and the security against flooding in the southwestern part of the Netherlands.
m. T h i j s s e J. T h. The model of the Dutch Delta works in the Delft Hydraulics Laboratory.
n. L e p l a n D e l t a. Various papers published in La Houille Blanche 2 (1963) (Staatsdrukkerij, The Hague, 1961).

107. Report on the Algorithmic Language: Algol 60 Regnecentralen, Copenhagen, 1960, *21*.
108. R i c h t m e y e r R. D. Difference methods for initial-value problems. Intersic. Publ., New York, 1960, *380*, *396*, *397*, *400*, *409*. (Р и х т м а й е р Р. Д. Разностные методы решения краевых задач. ИЛ, М., 1960.)
109. R o s e D. Über die quantitative Ermittlung der Gezeiten und Gezeitenströme in Flachwassergebiete mit dem Differenzenverfahren. Thesis Franzius Inst. der techn. Hochschule, Hannover, 1960, *390*.
110. R o s s b y C. G. On the frictional force between air and water and the occurrence of a laminar boundary layer next to the surface of the sea. Papers Phys. Oceanogr. Meteor., 1936, *186*.
111. R o s s i t e r J. R. A method for extracting storm surges from tidal records. Deutsche Hydr. Zeitschr., 1959, *465*.
112. R o s s i t e r J. R. Some numerical tidal problems. N.A.T.O. Symposium 1961 (Inst. für Meeresk., Univ. Hamburg), *442*.
113. S a i n t - G u i l y B. Remarque sur l'importance de la force de Coriolis dans les courants marins. Bull. d'inf. du Comité Centr. d'océanogr. et d'Etudes des Côtes, n° 4, 1958, *258*.
114. S a i n t - G u i l y B. Sur la solution du problème d'Ekman. Deutsche Hydr. Zeitschr., **12**, 1959, *190*.
115. S a i n t V e n a n t B. d e. Théorie de mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. Compt. rend. Acad. Sci., Paris, 1871, *6*.
116. S a u e r R. Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen. Springer Verlag, Berlin, 1952, *315*.
117. S a v i l l e J r. T h. Experimental determination of wave set-up. Proc. Second Techn. Conf. on Hurricanes, Report, No. 50, Miami Beach, 1961, *188*.
118. S c h m i t z H. P. Über die Interpretation bodennaher vertikaler Geschwindigkeitsprofile in Ozean und Atmosphäre und die Windschubspannung auf Wasseroverflächen. Deutsche Hydr. Zeitschr., **15**, 1962, *149*, *188*.
119. S c h m i t z H. P. A relation between the vectors of stress, wind and current at water surfaces and between the shearing stress and velocities at solid boundaries. Deutsche Hydr. Zeitschr., **15**, 1962, *149*, *188*.
120. S c h i j f J. B. and J. C. S c h ö n f e l d. Theoretical considerations on the motion of salt and fresh water. Proc. Minnesota Int. Hydr. Conv., 1953, *189*.
121. S c h n o o r E. Anwendung des "Diffe enzenverfahrens" bei der Tidewellenberechnung in den von Gezeiten beeinflussten Flüssen. Der Bauingenieur, 1959, *442*.
122. S c h ö n f e l d J. C. Distortion of long waves, equilibrium and stability. Un. Géod. et Géoph. Int. Brussels, 1951, *328*, *357*.
123. S c h ö n f e l d J. C. Propagation of tides and similar waves. Thesis Staatsdrukkerij, The Hague, 1951, *271*, *304*, *306*, *326*, *352*, *371*, *420*.

124. Schönfeld J. C. Theoretical considerations on an experimental bore. Proc. of the 6th General Meeting I.A.H.R., Vol. 1, The Hague, 1955, *362, 365.*
125. Schönfeld J. C. Tides in funnel-shaped channeis. Report Rijkswaterstaat The Hague, 1955, *224, 247.*
126. Schönfeld J. C. Intégration caractéristique du mouvement ondulatoire dans un cours d'eau. Report Rijkswaterstaat, The Hague, 1955, *328.*
127. Schönfeld J. C. Discharge of long and very long weirs. Proc. of the 6th General Meeting I.A.H.R., Vol. 4, The Hague, 1955, *450, 451.*
128. Schönfeld J. C. Circulation de l'énergie des marées dans les mers littorales. Report Rijkswaterstaat, The Hague, 1956; La Houille Blanche, 1956.
129. Schönfeld J. C. Harmonic analysis of quadratic friction in two-dimensional tidal flow. Report Rijkswaterstaat, The Hague, 1956, *271.*
130. Schönfeld J. C. and C. M. Verhagen. Development of the tidal analogue technique in Holland. 2nd Int. An. Comp. Meeting, 1961, *474.*
131. Stoker J. J. Water waves. Intersc. Publ., New York, 1957, *306, 354.*
132. Stroband H. J. Een bijdrage tot de kennis van de getijberekening op benedenrivieren en zeearmen (Contribution to tidal hydraulics of estuaries). De Ingenieur. The Hague, 1947, *271.*
133. Stewart R. W. Wind stress on water. N.A.T.O. Symposium 1961. Inst. für Meeresk., Univ. Hamburg, 1962, *188.*
134. Sverdrup H. U., M. W. Johnson and R. H. Fleming. The oceans. Prentice Hall, New York, 1942, *166, 190.*
135. Taylor G. I. Tidal friction in the Irish Sea. Phil. Trans., A **220**, 1919, *258.*
136. Taylor G. I. Tidal oscillations in gulfs and rectangular basins. Proc. London Math. Soc., Ser. **2.20**, 1920, *258.*
137. Terada K. On the numerical calculations of the storm surge in Tokyo Bay. Sangyo Keikaku Kaigu, Tokyo, 1961, *401.*
138. Thorade H. Probleme der Wasserwellen. H. Grand, Hamburg, 1931, *258.*
139. Thijsse J. Th. Berechnung von Gezeitenwellen mit beträchtlicher Reibung. Vorträge a.d. Gebiete der Hydro- und Aerodynamik, 1924, *226.*
140. Thijsse J. Th. Einfluss der Abschliessung der Zuiderzee auf das Verhalten der Gezeiten längs der niederländischen Küste. Ztschr. Intern. ständ. Verb. Schiffahrtskongressen, Brussels, 1933, *238.*
141. The Sea, Vol. 1, Physical oceanography, gen. ed. M.N. Hill. Intersci. Publ., New York, 1962, *166, 169, 190.* (Море. Гидрометеоиздат, Л., 1965).
142. The Sea, Vol. 2, The composition of sea water and comparative and descriptive oceanography (Section III, chapter 15), Cameron, W. M. and D. W. Pritchard, Estuaries Intersci. Publ., New York, 1963, *189.*
143. Thysse J. Th. Growth of wind-generated waves and energy transfer. U. S. Gov. Print. Off., 1952, *187.*
144. Tychonoff A. N. and A. A. Samarski, Differentialgleichungen der mathematischen Physik. D. Verlag der Wissensch., Berlin, 1959, *313, 315, 382.* (Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Изд. «Наука», М., 1966.)
145. Vantroys L. Le remous d'un ouvrage dans une mer à marée. Thesis La fac. des sci. de l'univ. de Paris, 1957, *475.*
146. Veen J. van. Getijstroomberekeningen met behulp van wetten analoog aan die van Ohm en Kirchhoff (Tidal flow computation with the aid of laws analogous to those of Ohm and Kirchhoff). De Ingenieur (The Hague, 1937). See also: Analogie entre marées et courants alternatifs. La Houille Blanche, 1947, *474.*
147. Veltkamp G. W. On Kelvin and Poincaré waves in a strip. Report Math. Centre Amsterdam, 1956, *252, 258.*
148. Veltkamp G. W. Spectral properties of Hilbert space operators associated with tidal motions. Thesis Utrecht, 1960, *258.*

149. Webster A. G. Partial differential equations of mathematical physics, 2nd ed. Hafner Publ., New York, 1947, *315*.
150. Weenink M. P. H. A theory and method of calculation of wind effects on sea levels in a partly closed sea, with special applications to the southern coast of the North Sea. K.N.M.I., no. 73 De Bilt (Neth.), 1958, *467*.
151. Welander P. Application of a two-layer Ekman model to the problem of the wind-driven ocean currents. N.A.T.O. Symposium 1961 (Inst. für Meeresk., Univ. Hamburg), *190*.
152. Wemelsfelder P. J. Wetmatigheden in het optreden van stormvloeden (Statistical laws for the occurrence of storm surges). De Ingenieur. The Hague, 1939, *468*.
153. Whittaker E. and G. Robinson. The calculus of observations, 4th ed Blackie, London, 1948, *437*.
154. Willers A. Practical Analysis. Dover Publ., New York, 1947, *437*.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

И. ДРОНКЕРС

**Расчеты приливов в реках и прибрежных водах**

Отв. редактор *К. Д. Тирон*
Редактор *Л. Л. Беленькая*
Художник *А. А. Ежов*
Худож. редактор *В. А. Евтихиев*
Техн. редактор *Л. А. Липатова*
Корректор *Н. И. Оршер*

Сдано в набор 20/III-67 г. Подписано к печати 10/VII-67 г.
Бумага 60×90[1]/[16]. Бум. л. 9,25. Печ. л. 18,5..
Уч.-изд. л. 18,59. Тираж 930 экз. Индекс ОЛ-273.

Гидрометеорологическое издательство. Ленинград. В-53, 2-я линия. д. № 23. Заказ № 254. Цена 1 руб. 44 коп.

---

Ленинградская типография № 8
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР
Ленинград, Прачечный пер., 6