

Г 26
5448

Л. А. Дикин

Гидро- динамическая устойчивость и динамика атмосферы

Л. А. ДИКИЙ

Гидро- динамическая устойчивость и динамика атмосферы



ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ ЛЕНИНГРАД 1976

Теория гидродинамической устойчивости — один из разделов гидродинамики, имеющий важные применения в динамической метеорологии. Настоящая книга может служить введением в предмет. Первая часть знакомит читателя с методами теории гидродинамической устойчивости идеальной жидкости, в том числе и расслоенной по плотности в поле силы тяжести. Вторая часть относится к устойчивости крупномасштабных движений атмосферы, особенно интересующих метеорологов. Для удобства читателей-неметеорологов она содержит вывод соответствующих уравнений «фильтрованной» модели. В книге затронуты наиболее принципиальные вопросы теории. Она доступна читателям, владеющим основами математического анализа и теории функций комплексного переменного. Книгу можно использовать при обучении студентов и аспирантов.

The theory of hydrodynamical stability is one of the branches of hydrodynamics. It has important applications in the dynamical meteorology. The present book may serve as an introduction to the subject. The first part presents to the reader methods of hydrodynamical stability theory for the ideal fluid including density stratified fluids in the gravity field. The second part deals with stability of large scale atmospheric motions which are especially interesting for meteorologists. The most principal problems of the theory are considered in the book. The knowledge of the foundations of the mathematical analysis and of the complex variable function theory is required from the reader. The book may be used for teaching of graduated and postgraduated students.

Предисловие

Если посмотреть любой номер одного из ведущих метеорологических журналов, почти наверное можно увидеть в нем статью об устойчивости каких-либо атмосферных процессов. Такой интерес не случаен. При глубоком подходе к механизмам циркуляции можно с уверенностью поместить теорию устойчивости в самый центр динамической метеорологии. В самом деле, атмосферные движения развиваются под действием более или менее постоянных или регулярно изменяющихся космических факторов, в то же время сами они крайне нерегулярны. Собственно, вся погода есть не что иное, как проявление неустойчивости атмосферной циркуляции. Даже климат, согласно современным воззрениям, нельзя рассматривать в отрыве от беспорядочных, неустойчивых возмущений — это есть статистический режим таких возмущений. Мы не будем углубляться в эти чрезвычайно важные, но не имеющие сколько-нибудь строгой и разработанной теории вопросы. Цель настоящей книги — изложить лишь твердо установленные основы, знание которых необходимо для того, чтобы избежать эмпиризма и «кустарщины», которыми грешат подчас метеорологические работы. Выбор материала — вещь до некоторой степени субъективная. Автор, естественно, стремился сосредоточиться на предметах, о которых ему так или иначе приходилось размышлять. Книга довольно четко делится на две части. Первая из них (п. 1—10, 17) относится к общей теории гидродинамической устойчивости несжимаемой идеальной жидкости — в атмосфере мы имеем дело обыкновенно с очень большими значениями числа Рейнольдса и вязкость не очень существенна (вне пограничного слоя). Вместе с тем, как известно, теория устойчивости идеальной жидкости внутренне неполна, она требует, кроме уравнений движения и краевых условий, некоторых дополнительных предположений или условий на разрывах. Эти условия могут быть получены по-разному, в частности (и наиболее естественным образом) из асимптотического поведения решений уравнения Навье—Стокса при бесконечно больших значениях числа Рейнольдса. В п. 17 идет речь именно об этом. Взамен вязкости приходится уделить внимание, важному, для атмосферы плотностному расслоению. Другая часть книги (п. 11—16) имеет дело непосредственно с моделью атмосферы, именно с: «фильтрованной» моделью или квазигеострофической, призванной описывать исключительно погодообразующие, крупномасштабные процессы. Эта модель сохраняет до нынешнего дня свое теоретическое значение. Несколько

особняком стоит п. 11, здесь речь идет не об устойчивости, а о выводе самих «фильтрованных» уравнений. Читатель, знакомый с метеорологией, вполне может обойти этот пункт. Впрочем, вразрез с установившейся традицией эти уравнения выводятся в предположении несжимаемости (а не адиабатичности). Если скорости частиц и фазовые скорости волн малы по сравнению со скоростью звука, сжимаемость большой роли не играет. Кроме того, предположение несжимаемости больше соответствовало стилю остальной части книги. Впрочем, полученные уравнения ничем не отличаются от обычных. Читатель, для которого содержание п. 11 окажется новым, т. е. не метеоролог, может быть неприятно поражен обилием упрощений, допущений, нечистотой вывода. Он должен потерпеть до следующего пункта. Коль скоро уравнения уже получены, дальше их исследование ведется уже с привычной по общей теории аккуратностью.

При отборе излагаемого материала автор стремился изложить наиболее принципиальные моменты, передать дух теории: частности поневоле остались за бортом этой небольшой книги. Однако и некоторые очень существенные предметы здесь не отражены, например, почти ничего не говорится о численных экспериментах по обнаружению неустойчивости. Задача создания фундаментальной энциклопедической монографии по теории устойчивости еще не решена. Эта книга преследует более скромные цели — быть введением в теорию. Соответственно, в тексте даются лишь скупые литературные ссылки, более детальные можно найти в книгах по общей теории гидродинамической устойчивости и по метеорологии [2, 11, 14]. Автор благодарен Н. Н. Богдательвой, оказавшей существенную помощь в написании последней главы.

Автор надеется, что эту книгу можно использовать при обучении студентов и аспирантов.

1. Вводные замечания

Из общего курса гидромеханики известны некоторые простейшие типы течений вязкой жидкости, т. е. некоторые точные решения уравнений Навье—Стокса, например, течение Пуазейля в круглой трубе, плоское течение Пуазейля между двумя параллельными пластинами, плоское течение Куэтта, вызванное относительным движением одной пластины относительно другой при отсутствии перепада давления перед потоком и позади него, и другие. При попытке экспериментально осуществить такие течения мы встречаемся с большой трудностью, состоящей в том, что эти течения удастся создать лишь при не слишком больших значениях числа Рейнольдса. С ростом, скажем, перепада давления в круглой трубе, т. е. с возрастанием скорости течения нужно ставить эксперимент исключительно осторожно, чтобы такое течение осуществлялось. Течение имеет тенденцию разрушиться. Если в трубу входит сильно возмущенный поток, то вместо течения Пуазейля в трубе оказывается хаотическое, турбулентное течение. С ростом числа Рейнольдса начальные возмущения, которые приводят к разрушению течения Пуазейля, могут быть все меньшими и меньшими. Мы говорим о неустойчивости течения Пуазейля относительно возмущений, которая имеет место при больших значениях числа Рейнольдса. Существует минимальное, так называемое критическое значение этого числа, ниже которого любое возмущение затухает со временем. Если предположение, что при сколь угодно больших значениях числа Рейнольдса тем не менее можно осуществить течение Пуазейля, если добиться достаточной малости начальных возмущений, вводя, например, жидкость в трубу через специальные успокаивающие решетки, добиваясь идеальной формы и гладкости самой трубы и т. п. Таким образом, если это предположение верно, то для разрушения течения всегда нужно преодолеть некоторый порог, высота которого падает с ростом числа Рейнольдса. В противоположность этому для плоского течения Пуазейля, начиная с некоторого значения числа Рейнольдса, сколь угодно малые возмущения неограниченно разрастаются, вызывая полную потерю устойчивости и переход от упорядоченного течения к некоторому хаотическому. Такой режим возникновения неустойчивости для плоского течения Пуазейля является уже строго установленным фактом.

На этих примерах мы выяснили как предмет, так и значение теории гидродинамической устойчивости. Потеря устойчивости течением есть первая стадия его перехода к турбулентному

состоянию. Здесь надо лишь подчеркнуть, что потеря устойчивости сама по себе еще не означает турбулизации потока. Может случиться, что, когда стационарное течение теряет устойчивость, взамен образуется некоторое периодическое по времени, вполне регулярное и простое устойчивое течение. С дальнейшим ростом числа Рейнольдса и это течение потеряет устойчивость, и возникнет более сложное течение с двумя, скажем, периодами и т. д. Вскоре течение станет настолько запутанным, что его можно считать турбулентным. Такую гипотезу о турбулизации течений высказал некогда Ландау.

Явление потери устойчивости очень важно и в метеорологии. Циркуляция в атмосфере возникает под влиянием постоянно действующих, стационарных факторов — притока солнечной коротковолновой радиации и излучения атмосферой и землей длинноволновой радиации в космическое пространство. В результате должна бы установиться некоторая стационарная циркуляция — западный перенос или что-нибудь близкое к нему, учитывая неоднородность земной поверхности. Но на самом деле движение атмосферы крайне нерегулярно. Существуют не только затухающие волны, вызванные какими-то случайными факторами, но волны могут разрастаться, приводя к полному разрушению зональной циркуляции и заменой ее возмущенной, циклонической циркуляцией. Короче говоря, явления погоды в большей степени обязаны своим существованием неустойчивости зональной циркуляции.

В приведенных примерах неустойчивость имела динамическое происхождение. Она возникала оттого, что в нашем течении существует градиент скорости, одни слои скользят по другим, течение завихрено. Вихрь может передаваться от основного течения к возмущениям, вызывая их рост. Источник неустойчивости может быть и иным, статическим. Пусть, например, в сосуд налита жидкость переменной плотности, например, с переменной соленостью или температурой. Если плотность сверху больше, чем плотность внизу, то совершенно ясно, что такое состояние неустойчиво. Частица, случайно отклонившаяся по вертикали вниз, оказывается тяжелее окружающих частиц и стремится опуститься еще далее. Точно так же и для частицы, отклонившейся вверх, отклонение стремится увеличиться. Пусть, однако, расслоение жидкости устойчиво, т. е. внизу находится более плотная жидкость, чем наверху. Если жидкость покоится, то это будет устойчивым состоянием. Но если в этих условиях жидкость движется горизонтально со скосом (градиентом) скорости, то может возникнуть динамическая неустойчивость, несмотря на стабилизирующее влияние плотностного расслоения. Если пренебречь влиянием вязкости, то основной безразмерный параметр, который в этих условиях характеризует устойчивость жидкости, есть число Ричардсона

$$Ri = -\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \left/ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right. . \quad (1)$$

В этом выражении ясно отражена борьба двух факторов — стабилизирующего влияния расслоения и дестабилизирующего влияния градиента скорости. В дальнейшем, как правило, жидкость будет считаться идеальной.

Основной метод изучения устойчивости течений есть линеаризация уравнений относительно малых отклонений от основного течения. В какой степени это приближение способно отразиться на результатах исследования? Мы не имеем возможности здесь дать точный ответ на этот вопрос, но можно привести некоторые соображения, которые на самом деле, как выяснено в некоторых исследованиях, оказываются верными.

Что нужно понимать под устойчивостью? Существует понятие устойчивости решений по Ляпунову, которое означает следующее. Пусть имеется возможность как-то измерять отклонение одного решения от другого, какая-то мера этого отклонения. Устойчивость означает тогда, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, всегда можно найти такое $\delta > 0$, что если начальные условия изменить не более чем на δ , решение в любой момент изменится не более, чем на ε , т. е. это есть устойчивость по возмущениям начальных данных. Пусть мы перешли к линеаризованной системе уравнений. Для линейной системы понятие устойчивости обычно другое. Здесь неустойчивые решения всегда неограниченно растут, а устойчивые остаются ограниченными одной константой для всех моментов времени. Допустим, что мы показали неустойчивость некоторого решения в линейном приближении. Решение неограниченно растет, т. е. становится сколь угодно большим, с какого бы малого значения мы его не начинали. Как в таком случае должно вести себя решение нелинейных уравнений? Когда решение еще мало, оно довольно хорошо следует за решением линейной системы, по самому смыслу линейной аппроксимации. Но когда оно становится достаточно большим, линейное приближение перестает действовать. Как правило, в таких случаях решение за счет нелинейных членов уравнения остается ограниченным (это бывает следствием например, ограниченности общей энергии в системе) и доходит до некоторого конечного предела. Пусть теперь мы взяли в начальный момент меньшие по значению начальные условия. Пока действует линейное приближение, решение растет пропорционально прежнему. Теперь оно позже выйдет из зоны действия линейного приближения, но для таких же значений амплитуды, что и прежде. В конечном итоге оно, хотя и позже, подойдет к тем же предельным значениям, которые окажутся, таким образом, независимыми от начальных условий. Если начальные условия стремятся к нулю, то решения для каждого момента времени стремятся к нулю, но неравномерно относительно всех моментов времени, т. е. нет устойчивости по Ляпунову. Итак, если доказана неустойчивость в линейном приближении, то есть неустойчивость и в точном смысле. По-видимому, при широких предположениях можно доказать и обратное —

линейная устойчивость гарантирует устойчивость по Ляпунову, хотя это уже далеко не очевидный факт. Таким образом, линейное приближение, по-видимому, может дать исчерпывающее исследование возбуждения неустойчивых колебаний.

2. Уравнения и краевые условия

Мы будем сначала рассматривать течение, в вертикальной плоскости (x, z) , при наличии поля тяжести с ускорением g . Движение описывается уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x}; \\ \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial z} - g\rho \end{aligned} \quad (2)$$

и, в предположении несжимаемости,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Теперь представим себе основное стационарное течение, устойчивость которого исследуется, как течение, скорость которого направлена по оси Ox и зависит лишь от вертикальной координаты: $U(z)$. Скорость возмущенного течения будем считать мало отклоняющейся от скорости основного течения, $u = U(z) + u'$, $v = v'$, где u' , v' — малые отклонения. Точно так же и для остальных переменных p и ρ имеем $p = \bar{p}(z) + p'$, $\rho = \bar{\rho}(z) + \rho'$. Если отбросить в уравнениях произведения малых величин, т. е. линеаризовать уравнения, то получится система

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{dU}{dz} \right) = - \frac{\partial p'}{\partial x}; \quad (4a)$$

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial w'}{\partial t} + U \frac{\partial w'}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p'}{\partial z} - g\rho'; \quad (4б)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0; \quad (4в)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + U \frac{\partial \rho'}{\partial x} + w' \frac{d\bar{\rho}}{dz} = 0. \quad (4г)$$

Воспользовавшись третьим уравнением, можно ввести функцию тока

$$u' = - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w' = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5)$$

Из первых двух уравнений можно исключить p' , применив операцию rot :

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right)(\Delta\psi - \beta\psi_z) + (U'' - \beta U')\psi_x = g\rho'_x/\bar{\rho};$$

$$\beta = -\bar{\rho}_z/\bar{\rho}. \quad (6)$$

Наконец, из этого уравнения и уравнения (4г) исключается ρ' . В итоге получается уравнение

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right)^2(\Delta\psi - \beta\psi_z) + (U'' - \beta U')\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi_x = g\beta\psi_{xx}. \quad (7)$$

Это основное уравнение теории. При каких граничных условиях его следует решать? Если имеется твердая стенка, но параллельная оси Ox , то на ней $w' = 0$, т. е. $\psi_x = 0$ или $\psi = \text{const}$.

В дальнейшем иногда будут рассматриваться течения, имеющие на какой-нибудь высоте касательный разрыв. Можно представить себе, например, что жидкость двуслойна, на слое жидкости одной плотности лежит слой другой плотности, так что плотность имеет скачок. При этом может быть еще и скачок скорости. Каковы условия на таком разрыве? Должно выполняться два условия — одно условие кинематическое: компонента скорости, нормальная к разрыву, должна быть непрерывной при переходе через разрыв (и совпадать со скоростью перемещения поверхности разрыва). Второе условие динамическое — непрерывность давления. Эти условия ставятся на поверхности разрыва, форма которой заранее неизвестна. Все сильно упрощается, если линеаризовать не только уравнения, но и условия на разрыве. Будем считать, что отклонения поверхности разрыва от ее среднего значения очень малы. Запишем уравнение поверхности в виде $z = z_0 + \xi(x, t)$. Значения всех величин на краях разрыва, сверху и снизу, будем разлагать по степеням малой величины ξ и приводить их к уровню z_0 . В конце концов условия на разрыве будут заменены приближенными условиями, поставленными на среднем уровне z_0 , область, занятая верхней жидкостью, будет $z > z_0$, а нижней — $z < z_0$. Картина течения вблизи разрыва исказится, а вдали от разрыва изменится не слишком. Для вертикальной скорости имеем

$$w(x, z, t) = w(x, z_0, t) + O(\xi).$$

Значение w на разрыве будем просто заменять значением на средней поверхности. Сама величина w при линеаризации мала, ошибка же при такой замене имеет следующий порядок малости. Что касается давления, то было бы слишком грубым заменять $p(x, z, t)$ на $p(x, z_0, t)$, при этом были бы полностью потеряны архимедовы силы, возникающие при смещении более плотной жидкости в область, занятую менее плотной или наоборот. Но

$p(x, z, t) = p(x, z_0, t) - g\bar{\rho}\zeta + O(\zeta^2)$. В самом деле, здесь написано, что давление на уровне z_0 отличается от давления на уровне $z_0 + \zeta$ на вес столба жидкости, заключенного между этими поверхностями, с площадью поперечного сечения, равной единице. Остаточный член — это динамический напор, равный произведению массы столба на ускорение. И та и другая величина первого порядка малости относительно ζ , поэтому и получилась оценка остатка, $O(\zeta^2)$. Для средних величин $\bar{p}$ и $\bar{\rho}$, относительно которых линеаризуются уравнения, это соотношение выполнено: $p(x, z) = \bar{p}(x, z_0) - \bar{g}\bar{\rho}\zeta + O(\zeta^2)$, поэтому для отклонений от средних оценка та же.

Динамическое условие на разрыве запишем теперь как непрерывность величины $p'(x, z_0, t) - g\bar{\rho}\zeta$ при переходе через $z = z_0$.

Кинематическое условие означает, что частица жидкости, находящаяся на разрыве, всегда будет на нем оставаться. Поэтому для нее $z = \zeta(x, t)$. Отсюда $w' = \frac{dz}{dt} = \frac{d\zeta}{dt}$. Линеаризируя, получим

$$w^{\pm'} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^{\pm} \frac{\partial}{\partial x} \right) \zeta(x, t). \quad (8)$$

Это справедливо как для верхней, так и для нижней жидкости, на что указывают значки $\pm$ (+ будет означать верхнюю жидкость, — нижнюю).

Далее нужно выразить условия на разрыве через одну единственную переменную — функцию тока ψ . Для этого можно воспользоваться уравнениями движения. Условия на разрыве выполняются тождественно по x и t , поэтому их можно дифференцировать по этим переменным. Это позволяет, например, из двух кинематических условий (8) исключить ζ и получить

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U^- \frac{\partial}{\partial x} \right) w^{+'} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^+ \frac{\partial}{\partial x} \right) w^{-'},$$

или

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U^- \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_x^+ = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^+ \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi_x^-. \quad (9)$$

Это и есть искомая форма кинематического условия на разрыве. Заметим, что если разрыва скорости нет, а лишь разрыв плотности, то условие более простое — непрерывность w или

$$\psi_x^+ = \psi_x^-. \quad (9')$$

Чтобы получить динамическое условие, выраженное через ψ , нужно применить к тождеству

$$p^{+'}(x, z_0, t) - g\bar{\rho}^+\zeta = p^{-'}(x, z_0, t) - g\bar{\rho}^-\zeta$$

дифференциальный оператор $\left(\frac{\partial}{\partial t} + U^+ \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial x}$. Будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{\rho}^+ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^+ \frac{\partial}{\partial x}\right) \left[- \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^+ \frac{\partial}{\partial x}\right) u^{+'} - \frac{dU^+}{dz} w^{+'} \right] - \\ - g \bar{\rho}^+ w_x^+ = \bar{\rho}^- \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^+ \frac{\partial}{\partial x}\right) \left[- \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^- \frac{\partial}{\partial x}\right) u^{+'} - \right. \\ \left. - \frac{dU^-}{dz} w^{+'} \right] - g \bar{\rho}^- w_x^+. \end{aligned}$$

Если скачок на разрыве обозначить символом $\{\}_{\pm}^+$, то это условие можно записать как

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^+ \frac{\partial}{\partial x}\right) \left\{ \bar{\rho} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi_z - \frac{dU}{dz} \psi_x \right] \right\}_{-}^{+} - \\ - g \left\{ \bar{\rho} \right\}_{-}^{+} \psi_{xx}^{+} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Условия (9) и (10) несколько слабее исходных — ведь получены они дополнительным дифференцированием. Позаботиться о выполнении исходных условий нужно будет при возврате от ψ к прежним переменным. Условие (10) к тому же несимметрично относительно краев разрыва, можно было применить дифференциальный оператор $\left(\frac{\partial}{\partial t} + U^- \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial x}$. Симметричное условие получилось бы при применении оператора $\left(\frac{\partial}{\partial t} + U^- \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + U^+ \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial x}$, но оно еще более слабое.

Отметим еще, что как уравнение (7), так и условия на разрыве становятся более простыми, если жидкость однородна и несжимаема. Если в основном состоянии плотность постоянна, то $\beta=0$. Но если предположить к тому же, что и возмущений плотности в начальный момент нет, то их не будет все остальное время движения и в уравнении (6) можно считать $\rho'=0$. Будем иметь

$$- \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \Delta \psi + U'' \psi_x = 0 \quad (7')$$

— уравнение более низкого порядка, чем уравнение (7). Динамическое условие на разрыве заменится непрерывностью $p'(x, z_0, t)$ при переходе через разрыв. Продифференцировав по x , получим

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi_z - \frac{dU}{dz} \psi_x \right\}_{-}^{+} = 0. \quad (10')$$

3. Волновые решения

Коэффициенты уравнения (7), а также линейных условий на твердых границах и на поверхностях раздела не зависят ни от координаты x , ни от t . Это позволяет искать решений типа

нормальных волн

$$\psi(x, z, t) = \psi(z) e^{i\alpha(x-ct)}, \quad (11)$$

где α — волновое число в направлении оси Ox , c — фазовая скорость волны. Для таких решений уравнение приобретает вид:

$$(U-c)^2(\psi'' - \alpha^2\psi - \beta\psi') - (U'' - \beta U')(U-c)\psi = -g\beta\psi. \quad (12)$$

Краевые условия на твердой стенке выглядят теперь так:

$$\psi' \equiv \psi_x \equiv i\alpha\psi = 0. \quad (13)$$

На разрыве имеем

$$(U^- - c)\psi^+ = (U^+ - c)\psi^- \quad (14)$$

и

$$(U^+ - c)\left\{\bar{\rho}\left[(U-c)\psi_z - \frac{dU}{dz}\psi\right]\right\}_-^+ - g\{\bar{\rho}\}_-^+\psi^+ = 0. \quad (15)$$

Теперь задача ставится таким образом. При заданном значении волнового числа α требуется определить те значения параметра c , при которых существует решение уравнения, удовлетворяющее всем условиям — на границах и на поверхностях разрыва. Если такое собственное значение c окажется вещественным, то соответствующее решение ограничено во времени, т. е. устойчиво; если c имеет положительную мнимую часть, то решение экспоненциально растет, т. е. неустойчиво, при отрицательной мнимой части решение затухает. Заметим, что в силу вещественности коэффициентов уравнения, комплексные собственные значения входят сопряженными парами, т. е. из существования затухающего решения всегда следует существование растущего.

Спрашивается, насколько полно исследование устойчивости уравнения (7) методом нормальных волн. Не может ли оказаться, что все нормальные волны устойчивы, а решения, не имеющие вида нормальных волн, вообще говоря неустойчивы? Примененный нами метод разделения переменных, метод Фурье чрезвычайно часто применяется в математической физике. Его применение основано на допущении, что решений в виде нормальных волн достаточно много, т. е. любое решение можно представить в виде суперпозиции нормальных волн,

$$\psi(x, z, t) = \sum_{k, l} A_{k, l} e^{i\alpha_k(x - c_{k, l}t)} \psi_{k, l}(z). \quad (16)$$

Для этого нормальные волны должны образовывать полную систему решений. В нашем случае положение оказывается сильно осложненным. Уравнение имеет особую точку — старший коэффициент может обратиться в нуль, когда $U - c = 0$. В связи

с этим, как мы увидим далее, во-первых, вообще затруднительно определить, что такое волновое решение, так как решение может иметь разрыв там, где $U - c = 0$ (точнее разрыв производной), и неясно, какие условия ставить на краях этого разрыва. Даже после того, как условия склейки определены некоторым разумным образом, оказывается, что волновых решений, т. е. решений уравнения (12), слишком мало. Как правило, набор собственных значений c бывает лишь конечным. Таким образом, предположение о представимости любого решения в виде ряда (16) неверно.

На самом деле, решения описанного волнового вида относятся к дискретному спектру, кроме которого существует еще непрерывный спектр. Это легче всего понять следующим образом. Пусть, для простоты, жидкость однородная, $\bar{\rho} = \text{const}$, $\beta = 0$. Тогда уравнение (12) превращается в

$$(U - c) (\psi'' - x^2 \psi) - U'' \psi = 0. \quad (17)$$

Оператор $d^2/dz^2 - \alpha^2$ при краевых условиях $\psi = 0$ в концах отрезка $z \in [a, b]$, на твердых стенках, обозначим Δ . Если положить $\Delta \psi = \varphi$, то без труда получаем уравнение

$$(U - U'' \Delta^{-1}) \varphi = c \varphi, \quad (18)$$

c должно быть собственным значением оператора, который представляет собой сумму вполне непрерывного оператора $-U'' \Delta^{-1}$ с оператором умножения на функцию $U(z)$. Оператор умножения на функцию имеет непрерывный спектр, состоящий из всех значений этой функции. Как известно, добавление вполне непрерывного оператора не способно изменить непрерывный спектр, а меняет лишь дискретный. Поэтому вполне непрерывный спектр значений c заполняет отрезок изменения U , т. е. $[U_{\min}, U_{\max}]$. К сожалению, вполне непрерывный оператор здесь не является самосопряженным и мы не можем воспользоваться теорией спектрального разложения для того, чтобы разлагать любую функцию по дискретному и непрерывному спектру, взамен разложения (16).

Заметим, что мы интегрируем уравнение по вещественной оси переменного z , значит особая точка возникает лишь при вещественных c , т. е. для нейтральных колебаний. Поэтому первый и наиболее существенный вопрос, который здесь возникает, таков: может быть, несмотря на то что волновых решений мало, отсутствие неустойчивых волновых решений все же гарантирует устойчивость всех решений уравнения (7)? Замечательно, что ответ на этот вопрос дается утвердительный. Неустойчивость бывает, в общем, лишь тогда, когда существуют неустойчивые волновые решения, т. е. волновые решения для невещественных c (см. п. 10).

В свете сказанного выше об уравнении (18) это не так удивительно. К дискретному спектру, соответствующему волновым решениям, добавляется непрерывный спектр, заполняющий отрезок $[U_{\min}, U_{\max}]$, т. е. вещественный, и неустойчивости не дающий. Кстати, и вещественные c , скажем, дискретного спектра могут быть причиной неустойчивости, если они кратные. Тогда появляются «вековые», линейно растущие со временем, возмущения. Это также следствие несамосопряженности оператора.

4. Примеры

Первый пример очень прост. Пусть полупространство $z < 0$ занято покоящейся несжимаемой жидкостью плотности ρ_1 , а над ним, при $z > 0$ — также покоящаяся несжимаемая жидкость другой плотности ρ_2 . Рассмотрим колебания такой системы. Уравнение (12) принимает вид

$$c^2 (\psi'' - \alpha^2 \psi) = 0.$$

Отсюда следует, что при $c \neq 0$ имеется лишь одна собственная функция. Именно, следует взять

$$\psi = \begin{cases} A \exp(-\alpha z), & z > 0, \\ B \exp(\alpha z), & z < 0. \end{cases}$$

Здесь мы приняли естественное условие на бесконечности — ограниченность решения. Осталось удовлетворить условиям на поверхности разрыва $z = 0$. Непрерывность ψ дает $A = B$. Второе условие имеет вид

$$\rho_1 \{-c^2 \psi' + g\psi\}_{z=0} = \rho_2 \{-c^2 \psi' + g\psi\}_{z=0}$$

и дает

$$c = \pm \sqrt{\frac{g}{\alpha} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}}. \quad (19)$$

Таким образом, для всякого α в этой задаче оказывается два собственных значения, отличных от нуля. Кроме того, $c = 0$ является бесконечнократным собственным значением: функцию ψ можно взять любой, лишь бы удовлетворялись условия на разрыве, т. е. $\psi(0) = 0$ и условие ограниченности на бесконечности. Формула (19) показывает, что при $\rho_1 > \rho_2$ колебания нейтральны, при $\rho_1 < \rho_2$ имеет место неустойчивость. Интуитивно это было совершенно очевидно с самого начала — неустойчивость имеет место тогда и только тогда, когда тяжелая жидкость находится выше легкой. Неустойчивость, вызванная ростом плотности с высотой, называется статической, или тейлоровской.

Второй пример относится к непрерывной, плавно меняющейся плотности. Пусть в пространстве между $z = 0$ и $z = h$ находится слой покоящейся жидкости с плотностью, изменяющейся по экспоненциальному закону

$$\rho = \rho_0 \exp(-\beta z).$$

Предыдущий пример дает основание полагать, что если плотность убывает, т. е. при $\beta > 0$, должна получаться устойчивость, а при $\beta < 0$ — неустойчивость. Сейчас это будет доказано. Уравнение (12) принимает вид

$$c^2 (\psi'' - \alpha^2 \psi) + \beta (-c^2 \psi' + g\psi) = 0.$$

Оно имеет решения

$$\psi = A \exp(\lambda_1 z) + B \exp(\lambda_2 z),$$

где λ_1 и λ_2 — корни уравнения

$$\lambda^2 - \beta\lambda - (\alpha^2 - g\beta/c^2) = 0,$$

т. е.

$$\lambda = \beta/2 \pm \sqrt{\beta^2/4 + \alpha^2 - g\beta/c^2}.$$

Краевые условия $\psi = 0$ при $z = 0$ и $z = h$ дают $A + B = 0$, $A \exp(\lambda_1 h) + B \exp(\lambda_2 h) = 0$. Отсюда $\lambda_1 - \lambda_2 = 2\pi i s/h$, где s — произвольное целое число. Но $\lambda_1 + \lambda_2 = \beta$ (формула Виета), поэтому

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{2\pi i s}{h} \right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\beta - \frac{2\pi i s}{h} \right).$$

Наконец,

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{\beta^2}{4} + \frac{\pi^2 s^2}{h^2} = -\alpha^2 + \frac{g\beta}{c^2}.$$

Из последнего соотношения следует, что при каждом фиксированном α имеется счетный набор различных s (в отличие от предыдущего примера, где их было всего лишь три, из которых одно значение бесконечно вырождено):

$$c^2 = g\beta \left(\frac{\beta^2}{4} + \alpha^2 + \frac{\pi^2 s^2}{h^2} \right).$$

Знак c^2 совпадает со знаком β , что и приводит к сформулированному вначале результату. Нейтральные колебания при $\beta > 0$ называются ячейковыми волнами. При $\beta < 0$ имеет место статическая, тейлоровская неустойчивость.

Третий пример носит другой характер. Здесь плотность будет непрерывной и даже постоянной, а скорость терпит разрыв. Рассмотрение удобно вести в системе координат, движущейся равномерно со скоростью, средней между скоростями течения выше и ниже разрыва. Тогда при $z < 0$ скорость будем считать постоянной и равной $-U_0$, а при $z > 0$ — равной $+U_0$. Уравнение (12) примет вид

$$-(U_0 - c)^2 (\psi''_+ - \alpha^2 \psi_+) = 0$$

при $z > 0$ и

$$-(U_0 + c)^2 (\psi''_- - \alpha^2 \psi_-) = 0$$

при $z < 0$. Условия на разрыве таковы:

$$(U_0 + c) \psi^+ = -(U_0 - c) \psi^-;$$

$$(U_0 - c) \frac{d\psi^+}{dz} = -(U_0 + c) \frac{d\psi^-}{dz}, \quad z = 0.$$

Во-первых, имеются решения $c = -U_0$, ψ^- — произвольная ограниченная функция, обращающаяся в нуль при $z = 0$, $\psi^+ \equiv 0$. Таким

образом, значение $c = -U_0$ является бесконечно вырожденным собственным значением. То же самое относится и к $c = -U_0$. Это возмущения, движущиеся вместе с потоком. При $c \neq \pm U_0$ имеем

$$\psi^+ = Ae^{-\alpha z}, \quad \psi^- = Be^{xz}.$$

Условия на разрыве дают $(U_0 - c)^2 = -(U_0 + c)^2$. Отсюда

$$c = \pm iU_0.$$

Имеет место неустойчивость, причина которой уже не статическая, как в предыдущих примерах, а динамическая. Она носит название гельмгольцевой неустойчивости.

В качестве упражнения читатель может исследовать течение, имеющее как разрыв скорости, так и разрыв плотности.

Четвертый пример будет усложнением предыдущих. Именно, при такой же скорости, как в третьем примере, положим плотность затухающей с высотой экспоненциально, $\bar{\rho} = \rho_0 \exp(-\beta z)$. Здесь как бы противостоят два фактора — разрыв скорости вызывает неустойчивость, а убывание плотности действует стабилизирующе. Спрашивается, что окажется сильнее. Ввиду некоторой громоздкости вычислений пойдем на некоторые упрощения, которые даже не будем особенно обосновывать. При желании можно проделать выкладки и с неупрощенным уравнением.

Суть указанного упрощения состоит в следующем. В уравнение (12) члены, содержащие β , попали по двум разным причинам. Когда брали вихрь от первых двух уравнений (4), пришлось дифференцировать $\bar{\rho}$, стоящее в инерционных членах, т. е. в левой части. Полученные члены учитывают, как говорят, инерционное влияние расслоения. Кроме того, вошел член с β из последнего из уравнений (4). Этот член входит с коэффициентом g и учитывает гравитационное влияние расслоения — архимедовы силы, возникающие при отклонении частиц от состояния равновесия. Так вот, часто принимают, что гравитационное влияние расслоения является главным, и пренебрегают инерционным влиянием, т. е. в уравнении (12) из всех членов, содержащих β , оставляют лишь последний. Ясно, что учет архимедовых сил должен приводить к качественным изменениям в результате. Учет же расслоения в инерционных членах должен приводить к количественным поправкам. Впрочем, необходимы точные оценки, которых, как уже было сказано, мы проводить не будем. Уравнение в нашем примере приобретает вид:

$$(U - c)^2 (\psi'' - \alpha^2 \psi) + g\beta\psi = 0.$$

Как и в предыдущем примере считаем, что при $z > 0$ скорость равна U_0 , а при $z < 0$ равна $-U_0$. Решения уравнения здесь $\exp(\pm \lambda z)$, где

$$\lambda = \lambda^+, \quad z > 0; \quad \lambda = \lambda^-, \quad z < 0.$$

$$\lambda^+ = \sqrt{\alpha^2 - g\beta/(U_0 - c)^2}, \quad \lambda^- = \sqrt{\alpha^2 - g\beta/(U_0 + c)^2}.$$

Корни могут быть чисто мнимыми, либо нет. Допустим, один из корней, например, λ^+ , чисто мнимый. Тогда при $z > 0$ все решения ограничены на бесконечности и можно взять $\psi^+ = Ae^{\lambda^+ z} + Be^{-\lambda^+ z}$. Даже если второй корень и не является чисто мнимым, и, следовательно, при $z < 0$ нужно брать затухающее решение $Se^{\lambda^- z}$, $\text{Re } \lambda^- > 0$, в нашем распоряжении имеются три произвольные постоянные A, B, C , с помощью которых нужно удовлетворить двум линейным однородным условиям на разрыве. Это всегда возможно. Таким образом, те значения c , при которых λ^+ чисто мнимое, принадлежат искомому спектру. Легко видеть, что эти значения вещественны и заполняют интервал $[U_0 - \sqrt[3]{g\beta/\alpha}, U_0 + \sqrt[3]{g\beta/\alpha}]$. По симметрии те же рассуждения применимы и к чисто мнимым значениям λ^- , что дает интервал $[-U_0 - \sqrt[3]{g\beta/\alpha}, -U_0 + \sqrt[3]{g\beta/\alpha}]$. Найдены два интервала непрерывного спектра. В предыдущем примере, при $\beta = 0$, были две бесконечно вырожденные точки спектра $\pm U_0$, которые при $\beta \neq 0$ превратились в интервалы непрерывного спектра. Этот спектр не дает неустойчивости, так как он вещественный.

Обратимся к случаю, когда $\text{Re } \lambda^+ \neq 0$, $\text{Re } \lambda^- \neq 0$. Теперь имеем $\psi^+ = Ae^{\lambda^+ z}$, $\psi^- = Be^{\lambda^- z}$, где из условия ограниченности на бесконечности корни нужно выбрать такими, что $\text{Re } \lambda^+ < 0$, $\text{Re } \lambda^- > 0$. Условие на разрыве:

$$(U_0 - c)^2 \lambda^+ = (U_0 + c)^2 \lambda^-. \quad (20)$$

Возведем это уравнение в квадрат и подставим выражения для корней:

$$(U_0 - c)^4 \left[\alpha^2 - \frac{g^3}{(U_0 - c)^2} \right] = (U_0 + c)^4 \left[\alpha^2 - \frac{g^3}{(U_0 + c)^2} \right].$$

Отсюда либо $(U_0 - c)^2 = (U_0 + c)^2$, т. е. $c = 0$, либо

$$(U_0 - c)^2 = \frac{g^3}{\alpha^2} - (U_0 + c)^2$$

и

$$c^2 = \frac{g^3}{2\alpha^2} = U_0^2.$$

Если $\alpha^2 < g\beta/2U_0^2$, эти корни вещественны, а при $\alpha^2 > g\beta/2U_0^2$ чисто мнимы. Уравнение (20) возведено в квадрат, поэтому нужно еще проверить, что полученные решения не являются посторонними корнями, т. е. что левая и правая части (20) не отличаются знаком. Сразу ясно, что c не может быть вещественным. В самом деле, для таких c уравнение (20) не может быть выполнено, так как $\text{Re } \lambda^+$ и $\text{Re } \lambda^-$ разного знака. Поэтому корень $c = 0$ отпадает. Что касается чисто мнимых собственных значений при $\alpha^2 > g\beta/2U_0^2$, то все они удовлетворяют уравнению (20). В самом деле, при $\beta = 0$ значение $c = \pm iU_0$ удовлетворяет уравнению,

как известно из предыдущего примера. Пусть β непрерывно возрастает. Тогда c изменяется непрерывно, непрерывно же изменяются левая и правая части (20). Поскольку их квадраты равны, равенство может нарушиться лишь если левая и правая часть обратятся при некотором β в нуль. Но пока c чисто мнимое, этого не случится. Итак, при $\alpha^2 > g\beta/2U_0^2$ имеется чисто мнимое

собственное значение $c = \pm i \sqrt{U_0^2 - g\beta/2\alpha^2}$ и течение неустойчиво.

Можно и так сказать: устойчивость имеет место для достаточно длинных волн, короткие же неустойчивы. Физический смысл этого результата понятен. В предыдущем примере мы видели, что для однородной жидкости с разрывом скорости неустойчивые волны затухали вверх и вниз от поверхности разрыва с декрементом α . При больших α эти волны сосредоточены в узкой полоске вокруг поверхности разрыва. При этих условиях они не чувствуют стабилизирующего влияния расслоения, при котором плотность затухает с декрементом β , и ведут себя в расслоенной жидкости как в однородной, т. е. неустойчивы. Для волн с малыми волновыми числами это не так.

Пятый пример [5, 15, 18, 24]. До сих пор рассматривались модели, где скорость была кусочно постоянной. Теперь будет рассмотрен пример с плавно меняющейся скоростью. Пусть жидкость заполняет полупространство $z > 0$. Плотность падает экспоненциально $\bar{\rho} = \rho_0 \exp(-\beta z)$, а скорость линейно растет от нуля, $U = kz$. Этот пример впервые рассмотрен Тейлором. Уравнения, описывающие возмущения, приобретают следующий вид:

$$(kz - c)^2 (\psi'' - \alpha^2 \psi) - (kz - c) \beta \{ (kz - c) \psi' - k\psi \} + g\beta \psi = 0.$$

Члены, заключенные в фигурные скобки, отражают инерционное влияние расслоения. Вслед за Тейлором пренебрежем этими членами. Как и в предыдущем примере, мы не вдаемся в обоснование такого упрощения. Заметим только одно: при учете этих членов получаются более сложные специальные функции, а результат не изменяется. Итак, имеем

$$(kz - c)^2 (\psi'' - \alpha^2 \psi) + g\beta \psi = 0.$$

После этого делаем замену

$$(z - c/k) \alpha = \xi$$

и получаем уравнение

$$\psi'' + \left(\frac{g\beta}{k^2 \xi^2} - 1 \right) \psi = 0.$$

Из всех параметров, описывающих течение, остался один безразмерный параметр $g\beta/k^2$, т. е. $g\beta/(\text{grad } U)^2$. Этот параметр носит название числа Ричардсона. Физический смысл этого параметра состоит в том, что он является мерой устойчивости. Когда он ве-

лик, это значит, что убывание плотности велико по сравнению с градиентом скорости. Если учесть, что убывание плотности играет стабилизирующую роль, а градиент скорости — дестабилизирующую, то большим значениям числа Ричардсона, очевидно, соответствуют более устойчивые состояния, чем малым. Будем обозначать

$$\frac{g\beta}{k^2} = Ri = \frac{1}{4} - v^2.$$

Уравнение примет вид

$$\psi'' + [(1/4 - v^2)/\xi^2 - 1] \psi = 0. \quad (21)$$

Это уравнение нужно решать при следующих дополнительных условиях: $\psi = 0$ при $z = 0$, а на бесконечности должна быть ограниченность. Если учесть замену переменных, то мы получим $\psi = 0$ при $\xi = -c\alpha/k$. Уравнение (21) с переменными коэффициентами. Его решениями служат функции

$$\psi = \sqrt{\xi} Z_v(i\xi),$$

где Z_v — произвольная цилиндрическая функция номера v . Условие ограниченности на бесконечности отбирает из всех цилиндрических функций функции Макдональда $K_v(z)$:

$$\psi = \sqrt{\xi} K_v(\xi).$$

Теперь нужно найти значения ξ , обращающие эту функцию в нуль. Функция Макдональда имеет ветвление в нуле. Корни этой функции нужно искать на листе $|\arg \xi| < \pi$, для того чтобы вдоль луча, проведенного от корня вправо в бесконечность, функция K_v затухала. При обратном переходе к старому переменному z этот луч превращается в полуось $[0, +\infty]$. Пусть ξ_n — один из таких корней. Тогда $c_n = -k\xi_n/\alpha$, и функция $\psi = \sqrt{\alpha \left(z - \frac{c_n}{k} \right)} \times K_v \left(\alpha \left(z - \frac{c_n}{k} \right) \right)$ удовлетворяет всем условиям задачи.

Рассмотрим разные случаи. 1. Пусть $Ri > 1/4$. Тогда $v = i\mu$ — чисто мнимое. Можно показать, что функция Макдональда чисто мнимого номера в области $|\arg \xi| < \pi$ имеет счетное множество нулей при ξ вещественном положительном, эти нули стягиваются к началу координат, других же нулей функция в этой области не имеет. Без труда можно получить асимптотику этих нулей вблизи начала координат $\xi = 0$. Для этого возьмем главные члены разложения функции Макдональда в ряд по степеням ξ :

$$\begin{aligned} K_v(\xi) &\sim \text{const} [(\xi/2)^{-v}/\Gamma(1-v) - (\xi/2)^v/\Gamma(1+v)] = \\ &= c [e^{-i\mu \ln(\xi/2) - \ln|\Gamma(1-i\mu)| - i \arg \Gamma(1-i\mu)} - \\ &- e^{i\mu \ln(\xi/2) - \ln|\Gamma(1-i\mu)| + i \arg \Gamma(1-i\mu)}] = \\ &= ce^{-\ln|\Gamma(1-i\mu)| \sin[-\mu \ln(\xi/2) - \arg \Gamma(1-i\mu)]}. \end{aligned}$$

Отсюда получается счетная последовательность положительных корней:

$$\xi_n = 2 \exp \{ - [\pi n + \arg \Gamma(1 - i\mu)] / \mu \}.$$

Собственные значения задачи даются асимптотической формулой

$$c_n \sim (-2k/\alpha) \exp \{ - [\pi n + \arg \Gamma(1 - i\mu)] / \mu \}.$$

Они все вещественны. Имеет место устойчивость.

Отметим еще некоторые свойства решений. С ростом волнового числа α все собственные числа стягиваются к нулю. Частоты αc остаются примерно постоянными. Что касается собственных функций ψ , то они заметно отличны от нуля лишь в окрестности начала координат $z=0$ порядка $1/\alpha$, т. е. с ростом α они прижимаются к твердой поверхности. При уменьшении устойчивости, т. е. при $Ri \rightarrow 1/4$, собственные числа очень быстро собираются к нулю.

2. Пусть $Ri < 1/4$. Тогда ν вещественно, $|\nu| < 1/2$. В этом случае можно показать [3], что функция $K_\nu(\xi)$ не имеет корней в области $|\arg \xi| < \pi$. Таким образом, в этом случае не существует таких c , чтобы $\varphi(kz - c)$ удовлетворяло уравнению и краевым условиям. Иначе говоря, задача не имеет решений в виде нормальных волн.

Возникает вопрос, как толковать полученный результат. Можно ли считать случай $Ri < 1/4$ устойчивым или нет? Поскольку, как уже было сказано, число Ричардсона представляет собой меру устойчивости, Прандтль был склонен считать, что при $Ri < 1/4$ появляется неустойчивость. Для выяснения этого вопроса следует обратиться к первоначальному определению устойчивости, данному в начале этой книги. Нужно исследовать устойчивость решения задачи Коши относительно возмущений начальных данных. Так вот, соответствующее исследование для настоящей задачи, основанное на решении задачи Коши методом преобразования Лапласа, показывает, что течение устойчиво и при $Ri < 1/4$. Это исследование слишком сложно и не может быть здесь изложено. Однако можно привести некоторое нестрогое рассуждение, говорящее в пользу предположения об устойчивости течения. Нестрогость будет состоять в том, что мы откажемся от краевого условия при $z=0$ и будем рассматривать задачу во всем пространстве. Для такой более простой задачи все будет сделано уже строго.

Поскольку теперь ищутся решения более общего вида, чем экспоненциальные по времени, нужно вернуться к общему уравнению (7), которое при $U = kz$ примет вид

$$-\left(\frac{\partial}{\partial t} + kz \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 (\Delta \psi - \beta \psi_z) - \beta k \left(\frac{\partial}{\partial t} + kz \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi_x = g \beta \psi_{xx}.$$

К сожалению, коэффициенты этого уравнения зависят от z , что не позволяет разделить переменные. Однако в случае линейного

профиля скорости, разбираемого нами, легко обойти это затруднение, перейдя к «полулагранжевой» системе координат, связанной в каждой точке с основным потоком,

$$t_1 = t, \quad z_1 = z, \quad x_1 = x - kzt.$$

Одновременно делаем подстановку $\psi = \exp(\beta z/2)\chi$, уничтожающую член с первой производной искомой функции по z . Уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \left[\frac{1}{4} \beta^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - kt_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 \right] \chi - \\ - \beta k \frac{\partial^2 \chi}{\partial t_1 \partial x_1} - g \beta \frac{\partial^2 \chi}{\partial x_1^2} = 0.$$

Здесь коэффициенты уравнения зависят уже не от z , а от t . Поэтому можно искать решение, гармонически зависящее от пространственных координат, $\chi(t) \exp i(lx_1 + nz)$. Для $\chi(t)$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{1}{4} \beta^2 + l^2 + (n - kt)^2 \right] \chi - i \beta k l \frac{d\chi}{dt} + g \beta l^2 \chi = 0.$$

Нужно исследовать поведение решений этого уравнения при $t \rightarrow \infty$ и показать, что они всегда остаются ограниченными. При больших t можно пренебречь константами в коэффициентах по сравнению с членами, пропорциональными t :

$$k^2 l^2 t^2 \frac{d^2 \chi}{dt^2} + 4k^2 l^2 t \frac{d\chi}{dt} - (2k^2 l^2 + g \beta l^2) \chi = 0.$$

Решения этого уравнения суть $C_1 t^{m_1} + C_2 t^{m_2}$, где m_1, m_2 — это корни квадратного уравнения,

$$m(m-1) + 4m + (2 + Ri) = 0.$$

При $Ri \leq 1/4$ они вещественны и отрицательны, при $Ri > 1/4$ они представляют собой комплексно сопряженную пару с отрицательной вещественной частью. Во всех случаях решения затухают.

Шестой пример представляет собой частный случай предыдущего, допускающий более простое исследование.

Профиль скорости оставим тот же, линейный, $U = kz$. Но жидкость будем теперь считать однородной. Как и в предыдущем примере, можно исходить из уравнения (7), положив в нем $\beta = 0$. Но можно получить уравнение и более низкого порядка, считая не только среднюю плотность постоянной, но и начальные возмущения плотности отсутствующими, т. е. что жидкость остается однородной во все время движения. (В принципе можно рассматривать и другой случай, когда жидкость однородна, но в начальный момент возмущена плотность, например, растворением каких-либо солей; тогда порядок уравнений не понижается.)

В рассматриваемом случае можно воспользоваться уравнением (6), положив в нем $\beta=0$, $\rho'=0$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + kz \frac{\partial}{\partial x}\right) \Delta \psi = 0.$$

Зависимость от x продолжаем считать гармонической: $\exp(i\alpha x)$. Полученное уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\alpha kz\right) (\psi_{zz} - \alpha^2 \psi) = 0 \quad (22)$$

нужно решать при начальных и граничных условиях

$$\psi(z, 0) = \psi_0(z), \quad \psi(0, t) = 0,$$

$\psi(z, t)$ ограничено при $z \rightarrow \infty$.

Уравнение (22) интегрируется по t без труда

$$\psi_{zz} - \alpha^2 \psi = e^{-i\alpha kzt} f(z).$$

Произвольная функция $f(z)$ определяется начальным условием:

$$f(z) = (\psi_0)_{zz} - \psi_0.$$

Осталось решить дифференциальное уравнение второго порядка по z при заданных краевых условиях. Решение находим методом вариации произвольного постоянного:

$$\psi = - \int_z^{\infty} \frac{1}{\alpha} e^{-i\alpha k\zeta t} f(\zeta) \operatorname{sh} \alpha(z - \zeta) d\zeta + C_1 e^{\alpha z} + C_2 e^{-\alpha z}.$$

Нужно сделать какие-либо предположения о начальных условиях $\psi_0(z)$, чтобы этот интеграл сходил. Например, можно предположить, что эти начальные условия отличны от нуля лишь в конечной области изменения z . Константы C_1 и C_2 должны быть найдены из условия ограниченности на бесконечности и обращения в нуль при $z=0$. Легко при этом получить

$$\begin{aligned} \psi(z, t) = & - \frac{1}{\alpha} \int_z^{\infty} e^{-i\alpha k\zeta t} f(\zeta) \operatorname{sh} \alpha(z - \zeta) d\zeta - \\ & - \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-i\alpha k\zeta t} f(\zeta) \operatorname{sh}(\alpha\zeta) e^{-\alpha z} d\zeta. \end{aligned}$$

Непосредственно очевидно, что это выражение ограничено при $t \rightarrow \infty$. В самом деле, оно не превосходит

$$\frac{1}{\alpha} \int_z^{\infty} |f(\zeta)| \operatorname{sh} \alpha|z - \zeta| d\zeta + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} |f(\zeta)| \operatorname{sh}(\alpha\zeta) e^{-\alpha z} d\zeta.$$

Чрезвычайная простота решения этой задачи обусловлена вы рожденным видом уравнения (22). В более общих случаях в этом уравнении будут еще члены, например, пропорциональные ψ .

Удобным методом исследования тогда становится метод преобразования Лапласа. Для однородной жидкости это исследование проводится ниже, п. 10.

Сделаем еще одно замечание, касающееся примеров неустойчивости при разрыве плотности или скорости (примеры 1, 3, 4). Здесь имеет место не просто неустойчивость при $t \rightarrow \infty$, а очень сильная неустойчивость: для сколь угодно малого отрезка времени найдется такая достаточно короткая волна, которая за этот промежуток времени возрастет в любое наперед заданное число раз. Это видно из того, что мнимое собственное значение для скорости волны получилось в этих примерах не зависящим от волнового числа. Следовательно, инкремент возрастания пропорционален волновому числу. Если бы мы не искали волновые решения, а решали задачу с начальными условиями для уравнений (7, 9, 10), зависящих от времени, то мы бы получили некорректную задачу Коши для эллиптического уравнения.

5. Общие теоремы, основанные на интегральных соотношениях

Одним из основных методов исследования оператора в гильбертовом пространстве является изучение свойств его квадратической формы. Таким образом доказывается вещественность спектра самосопряженного оператора, полуограниченность спектра дифференциальных операторов и т. п. В теории гидродинамической устойчивости это также широко применяемый прием. Сейчас будут получены некоторые свойства спектра, которые можно найти таким способом.

В одном из разобранных примеров важную роль играло значение числа Ричардсона, равное $1/4$. Оказывается, это значение является в известном смысле критическим и для общих расслоенных течений. Надо только заметить, что число Ричардсона, вообще говоря, есть локальная характеристика, переменная в разных точках сечения потока.

Теорема 1 (Майлс—Говард [19, 21]). *Плоскопараллельное течение расслоенной жидкости, число Ричардсона которого $g\beta/(U')^2$ всюду больше $1/4$, устойчиво.*

Докажем, что уравнение (12) не может иметь невещественных собственных значений s при условии $\psi=0$ на твердых границах. Пусть это не так, и s — невещественное собственное значение. Обозначим $W=U-s$ и введем взамен ψ новую искомую функцию $G=\psi/\sqrt{W}$. Легко проверить, что G должно удовлетворять уравнению

$$(\bar{\rho} W G')' - \left[\frac{1}{2} (\bar{\rho} U')' + \alpha^2 \bar{\rho} W + \bar{\rho} W^{-1} \left(\frac{1}{4} (U')^2 - g\beta \right) \right] G = 0.$$

Краевые условия — $G=0$ на твердых границах. Умножим это уравнение на G^* и проинтегрируем по всему сечению потока:

$$\int \left\{ \bar{\rho} W [|G'|^2 + \alpha^2 |G|^2] + \frac{1}{2} (\bar{\rho} U')' |G|^2 + \right. \\ \left. + \bar{\rho} \left[\frac{1}{4} (U')^2 - g\beta \right] W^* \left| \frac{G}{W} \right|^2 \right\} dz = 0.$$

Возьмем мнимую часть полученного равенства. Так как предположено, что $\text{Im } c \neq 0$, то

$$\int \bar{\rho} \left\{ [|G'|^2 + \alpha^2 |G|^2] + \bar{\rho} \left[g\beta - \frac{1}{4} (U')^2 \right] \cdot |G/W|^2 \right\} dz = 0.$$

При $4g\beta > (U')^2$, т. е. при $\text{Ri} > 1/4$ это невозможно.

В приведенном выше примере устойчивость имела место и при $\text{Ri} < 1/4$, но это уже не является общим фактом, а зависит от типа течения.

Мы не будем сейчас рассматривать стратифицированные течения, а займемся случаем однородной жидкости $\beta=0$, $\rho'=0$, для которого известно больше общих результатов. Уравнение (12) превращается в

$$(U - c)(\psi'' - \alpha^2 \psi) - U''\psi = 0. \quad (23)$$

Это простое уравнение носит название уравнения Релея.

Теорема 2 (Релей) [11]. *Плоскопараллельное течение однородной несжимаемой идеальной жидкости устойчиво, если профиль скорости $U(z)$ не имеет точек перегиба.*

(Это достаточное условие устойчивости не является, как будет показано ниже, необходимым.)

Для доказательства разделим уравнение (23) на $U - c$, умножим на комплексно сопряженное ψ^* и проинтегрируем по всему сечению потока

$$\int \{ \psi'' \psi^* - \alpha^2 |\psi|^2 - U'' |\psi|^2 / (U - c) \} dz = 0.$$

Если проинтегрировать по частям, воспользовавшись обращением ψ в нуль на границах, то получится

$$\int \{ |\psi'|^2 + \alpha^2 |\psi|^2 + U'' |\psi|^2 / (U - c) \} dz = 0. \quad (24)$$

Мнимая часть этого равенства дает

$$\text{Im } c \int U'' |\psi|^2 / |U - c|^2 dz = 0. \quad (25)$$

Если предположить, что $\text{Im } c \neq 0$, то для того, чтобы это равенство могло иметь место, необходимо, чтобы U'' меняло знак, т. е. чтобы профиль скорости имел точку перегиба. Заметим, что U' — это вихрь основного течения. Поэтому условие Релея можно сформулировать также следующим образом: для устойчиво-

сти течения достаточно, чтобы вихрь течения монотонно изменялся поперек течения, от стенки до стенки.

Еще одно достаточное условие устойчивости дает следующая теорема.

Теорема 3 (Фьортофт [17]). *Если существует такая константа K , что $(U - K) U'' \geq 0$, то течение устойчиво.*

Прежде чем доказывать эту теорему, заметим, что условие сформулировано таким образом, что оно содержит и теорему Релея, которая получится, если предположить, что U'' не меняет знака и взять $|K| > \max |U|$ и K того же знака, что и $-U''$. Другой частный случай — когда U'' имеет одну точку перегиба z_c : $U''(z_c) = 0$ и $[U - U(z_c)]U'' > 0$. Тогда в качестве K надо взять $U(z_c)$. Соответствующий профиль скорости изображен на

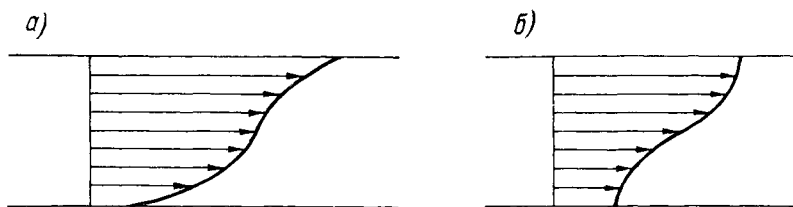


Рис. 1. Профили скорости.

а) критерий Фьортофта применим, б) критерий Фьортофта неприменим.

рис. 1 а. На рис. 1 б показан профиль скорости, к которому критерий Фьортофта неприменим (что, впрочем, еще не свидетельствует о его неустойчивости).

Для доказательства теоремы Фьортофта опять предположим, что имеется невещественное собственное значение c , и возьмем вещественную часть равенства (24)

$$\int \frac{(U - c_r) U'' |\psi|^2}{|U - c|^2} dz = - \int \{ |\psi'|^2 + \alpha^2 |\psi|^2 \} dz < 0.$$

В этом неравенстве c_r можно заменить на любую константу, так как c_r стоит коэффициентом при интеграле, равном нулю [в силу (25)]. Тогда имеем

$$\int \frac{(U - K) U'' |\psi|^2}{|U - c|^2} dz < 0.$$

Теперь видно, что такое неравенство возможно лишь, если где-нибудь внутри области есть точка, где $(U - K)U'' < 0$, в противном случае невещественных собственных значений быть не может. Теорема доказана.

Следующая теорема оценивает величину невещественных собственных значений. Она верна и для устойчиво расслоенной атмосферы, если оставить лишь гравитационное влияние расслоения, т. е. в уравнении (12) учесть лишь тот член с β , где есть g , т. е. последний.

Теорема 4 (Говард) [19]: Все не вещественные собственные значения (и вещественные, если $\beta=0$) лежат в круге, диаметром которого является отрезок $[U_{\min}, U_{\max}]$.

Для доказательства удобно рассматривать течение в системе координат, движущейся со скоростью, средней между $U_{\min}$ и $U_{\max}$. Тогда диапазон изменения скоростей будет $[-U_0, U_0]$, где $U_0 = (U_{\min} + U_{\max})/2$. Это преобразование равносильно подстановке в уравнение (12)

$$U = (U_{\min} + U_{\max})/2 + U_1, \quad c = (U_{\min} + U_{\max})/2 + c_1.$$

Пусть теперь c — любое не вещественное или вещественное число, не лежащее на отрезке $[-U_0, U_0]$. Заменим функцию $\psi(z)$ на $f(z) = \psi(z)/(U - c)$. Функция $U - c$ не обращается в нуль на отрезке интегрирования. f удовлетворяет уравнению

$$[(U - c)^2 f']' - \alpha^2 (U - c)^2 f = -g\beta f.$$

Умножим обе части на f^* и проинтегрируем по z :

$$\int (U - c)^2 (|f'|^2 + \alpha^2 |f|^2) dz = \int g\beta |f|^2 dz.$$

Отсюда уже видно, что c не может быть вещественным для однородной жидкости, при $\beta=0$. Для не вещественных же выделим сначала мнимую часть

$$c_i \int (U - c_r) (|f'|^2 + \alpha^2 |f|^2) dz = 0.$$

Значит $-U_0 < c_r < U_0$. Выделим вещественную часть

$$\int [(U - c_r)^2 - c_i^2] (|f'|^2 + \alpha^2 |f|^2) dz = \int g\beta |f|^2 dz.$$

Комбинируя эти два интегральных соотношения, получаем

$$\int [U^2 - |c|^2] (|f'|^2 + \alpha^2 |f|^2) dz = \int g\beta |f|^2 dz > 0.$$

Отсюда $|c|^2 \leq U_0^2$, что и доказывает теорему.

6. Исследование устойчивости с помощью законов сохранения

Как уже подчеркивалось, отсутствие неустойчивых нормальных волн и на самом деле означает устойчивость относительно любых начальных возмущений. В общем виде это трудная теорема, доказывать которую сейчас не будем (см. п. 10). Но для теорем Релея и Фьортофта об устойчивости можно дать простое доказательство, не использующее нормальных волн, т. е. достаточно исчерпывающее.

Напишем уравнение, содержащее производную по времени. Это уравнение уже появлялось в конце п. 2 [см. (7')]. Если зависимость от x по-прежнему экспоненциальная, как $\exp(i\alpha x)$, то

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\alpha U\right)(\psi'' - \alpha^2 \psi) - i\alpha U'' \psi = 0. \quad (26)$$

Обе части уравнения умножим на ψ^* , проинтегрируем по всему сечению и возьмем вещественную часть

$$-\frac{d}{dt} \int (|\psi'|^2 + \alpha^2 |\psi|^2) dz + 2 \operatorname{Re} i\alpha \int U (\psi'' - \alpha^2 \psi) \psi^* dz = 0. \quad (27)$$

Предположим теперь, что существует такая константа K , что $(U - K)/U''$ непрерывна во всем сечении потока. Умножим уравнение (26) на $(\psi^* - \alpha^2 \psi^*)(U - K)/U''$, проинтегрируем и возьмем вещественную часть

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{dt} \int (U - K) |\psi'' - \alpha^2 \psi|^2 / U'' dz + \\ & + 2 \operatorname{Re} i\alpha \int U (\psi^{*''} - \alpha^2 \psi^*) \psi dz = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Уравнения (27) и (28) сложим

$$\frac{d}{dt} \int (|\psi'|^2 + \alpha^2 |\psi|^2 + (U - K) |\psi'' - \alpha^2 \psi|^2 / U'') dz = 0. \quad (29)$$

Таким образом получен некий инвариант движения, выражаемый интегралом, квадратичным относительно поля ψ . Пусть в начальный момент течение возмущено слабо, т. е. ψ мало, одновременно с ψ' и ψ'' (т. е. скорость и вихрь малы), тогда полученный инвариант был малым. Таким он остается и во все время движения. Если профиль скорости таков, что $(U - K)/U'' > 0$, то из малости интеграла следует малость в среднем квадратическом величин ψ , ψ' и ψ'' во все время движения, т. е. устойчивость течения. Условие положительности $(U - K)/U''$ есть условие теоремы 3.

Приведенное доказательство основано на сохранении некоторой квадратичной величины (29). Физический смысл этой величины не раскрыт, и вообще пока не ясно, является ли само существование такого инварианта случайностью или следует из неких общих принципов. Это не может быть просто следствием закона сохранения энергии, так как сохраняется суммарная энергия основного течения и возмущений, что не мешает возмущениям развиваться за счет энергии основного течения. Сейчас будет показано, что закон сохранения (29) есть следствие двух общих принципов: закона сохранения энергии и сохранения вихря. Метод, развиваемый ниже и предложенный впервые Фьортофтом и Арнольдом [1, 17], имеет и то преимущество, что он не требует линеаризации уравнений и при некотором

уточнении оценок является вполне строгим для малых, но конечных возмущений.

Исходим из первоначальной нелинейной системы уравнений (2), (3), но жидкость предполагается однородной, $\rho = \text{const}$. Тогда последнее уравнение отпадает. Пользуясь уравнением неразрывности, вводим функцию тока

$$u = -\psi_z, \quad w = \psi_x.$$

Возьмем вихрь от уравнений (2), т. е. первое продифференцируем по z , второе по x и вычтем. Получается

$$\Delta \psi_t + [\psi, \Delta \psi] = 0, \quad (30)$$

где $[A, B] = A_x B_z - A_z B_x$ — якобиан. Это есть известное уравнение сохранения вихря в двумерном несжимаемом течении. Без труда проверяется сохранение энергии

$$E = \frac{1}{2} \iint (\nabla \psi)^2 dx dz. \quad (31)$$

Нужно лишь предположить в качестве граничных условий, во-первых, непротекаемость границы $\psi = \text{const}$, во-вторых, сохранение циркуляции скорости на границе $\oint (\partial \psi / \partial n) dl = \text{const}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} dE/dt &= \iint \nabla \psi_t \nabla \psi dx dz = - \iint \Delta \psi_t \psi dx dz = \\ &= \iint [\psi, \Delta \psi] \psi dx dz = \iint \{ \psi \psi_z \Delta \psi \}_x - \{ \psi \psi_x \Delta \psi \}_z dx dz = \\ &= - \oint \psi \Delta \psi d\psi = 0. \end{aligned}$$

Примечание. Вообще говоря сейчас не предполагается, что течение плоскопараллельное и заключено между параллельными плоскостями. Оно может быть и в ограниченной области, например в замкнутой криволинейной щели. В этом случае энергия конечна. В случае же неограниченной области возникает трудность, связанная с бесконечностью энергии. Можно справиться с этой трудностью, несколько ограничив общность: рассматривая периодические течения и энергию по периоду. Или течения, для которых существует средняя энергия, в смысле

$\lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \int_0^T \dots dx$. Сюда войдут периодические течения, но уже не с фиксированным периодом, почти периодические и другие.

Кроме энергии, существуют и другие интегралы движения. Именно, пусть $\Phi(\Delta \psi)$ — произвольная функция от вихря, тогда сохраняется интеграл

$$I = \iint \Phi(\Delta \psi) dx dz. \quad (32)$$

Это и непосредственно очевидно, так как если рассмотреть область, где $\Phi(\Delta\psi)$ заключено между фиксированными значениями $a < \Phi(\Delta\psi) < b$ (множество Лебега), то в силу закона сохранения вихря (30) эта область состоит все время из одних и тех же частиц жидкости и, следовательно, площадь ее постоянна (несжимаемость). Тогда интеграл, который можно понимать по Лебегу, постоянен. Но можно и формально проверить:

$$\begin{aligned} dI/dt &= \iint \Phi'(\Delta\psi) \Delta\psi_t dx dz = - \iint \Phi'(\Delta\psi) [\psi, \Delta\psi] dx dz = \\ &= + \iint [\Phi(\Delta\psi), \psi] dx dz = \iint \{(\Phi(\Delta\psi) \psi_x)_z - \\ &\quad - (\Phi(\Delta\psi) \psi_z)_x\} dx dz = \oint \Phi(\Delta\psi) d\psi = 0. \end{aligned}$$

Пусть теперь имеется некоторое стационарное течение с функцией тока ψ_0 . Устойчивость этого течения требуется исследовать. Составим сохраняющийся функционал $F[\psi] = E + I$, причем нам удастся подобрать произвольную функцию $\Phi(\Delta\psi)$, входящую в функционал I таким образом, чтобы функционал $F[\psi]$ имел при $\psi = \psi_0$ экстремальное значение по сравнению со всеми близкими полями ψ . Сразу предположим, что вихрь $\Delta\psi_0$ изменяется монотонно при переходе от одной линии тока $\psi_0 = \text{const}$ к другой, т. е. $\Delta\psi_0$ есть монотонная функция от ψ_0 . (Для плоскопараллельного течения, как уже говорилось ранее, это означает монотонность $U'(z)$, т. е. условие Релея — отсутствие точек перегиба в профиле скорости $U(z)$.) Поскольку монотонная функция обратима, то можно считать, что ψ_0 есть монотонная функция от $\Delta\psi_0$: $\psi_0 = \Psi(\Delta\psi_0)$. Теперь разложим функционал $F[\psi]$ по степеням отклонения $\psi - \psi_0 = \delta\psi$:

$$\begin{aligned} F[\psi] &= F[\psi_0] + \iint \{\nabla\psi_0 \nabla\delta\psi + \Phi'(\Delta\psi_0) \Delta\delta\psi\} dx dz + \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint \{(\nabla\delta\psi)^2 + \Phi''(\Delta\psi_0) (\Delta\delta\psi)^2\} dx dz + \dots \end{aligned}$$

Преобразуем первый из интегралов:

$$\iint \{\nabla\psi_0 \nabla\delta\psi + \Phi'(\Delta\psi_0) \Delta\delta\psi\} dx dz = \iint \{-\psi_0 + \Phi'(\Delta\psi_0)\} \Delta\delta\psi dx dz$$

и вместо ψ_0 подставим $\Psi(\Delta\psi_0)$:

$$\iint \{-\Psi(\Delta\psi_0) + \Phi'(\Delta\psi_0)\} \Delta\delta\psi dx dz.$$

Достаточно положить теперь $\Phi' = \Psi$, чтобы первая вариация обратилась в нуль. Тогда имеем

$$F[\psi] - F[\psi_0] = \frac{1}{2} \iint \{(\nabla\delta\psi)^2 + \Psi'(\Delta\psi_0) (\Delta\delta\psi)^2\} dx dz + \dots$$

В случае плоскопараллельного течения можно написать $\Psi'(\Delta\psi_0) = U(z)/U''(z)$. Далее используем следующее рассуждение. Рассмотрение можно проводить в любой системе координат,

движущейся относительно исходной с постоянной скоростью K . Если ψ — функция тока в этой новой системе координат, то выражение для $F[\psi]$ примет вид

$$F[\psi] - F[\psi_0] = \frac{1}{2} \iint \left\{ (\nabla \delta\psi)^2 + \frac{U(z) - K}{U''(z)} (\Delta \delta\psi)^2 \right\} dx dz + \dots \quad (33)$$

Пусть при некотором K коэффициент $(U - K)/U''$ положителен. Тогда квадратическая относительно $\delta\psi$ форма, главная часть (33), положительна, т. е. выполняется достаточное условие минимума функционала $F[\psi]$. Эту квадратическую форму можно взять в качестве нормы, меры отклонения ψ от ψ_0 :

$$\|\psi - \psi_0\|_{(1)}^2 = \frac{1}{2} \iint \left\{ (\nabla \delta\psi)^2 + \frac{U - K}{U''} (\Delta \delta\psi)^2 \right\} dx dz.$$

В качестве второй нормы $\|\psi - \psi_0\|_2$ можно взять:

$$\|\psi - \psi_0\|_{(2)}^2 = F[\psi] - F[\psi_0].$$

Из (33), учитывая, что под многоточием скрыт остаточный член более высокого порядка малости по $\delta\psi$, получим эквивалентность норм $\|\psi - \psi_0\|_{(1)}$ и $\|\psi - \psi_0\|_{(2)}$, т. е. существование констант $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$, таких, что

$$C_1 \|\psi - \psi_0\|_{(1)} \leq \|\psi - \psi_0\|_{(2)} \leq C_2 \|\psi - \psi_0\|_{(1)}. \quad (34)$$

Норма $\|\cdot\|_{(2)}$ инвариантна во времени — следствие сохраняемости функционала $F[\psi]$. Пусть теперь в начальный момент течение слабо возмущено, в том смысле, что малы отклонения скоростей и вихря, $\nabla \delta\psi$ и $\Delta \delta\psi$. Тогда мала норма $\|\psi - \psi_0\|_{(1)}$. В силу (34) мала также норма $\|\psi - \psi_0\|_{(2)}$. Но эта последняя норма инвариантна, значит, она будет оставаться такой же малой все время движения. В силу второй части неравенства (33) все время малой будет оставаться также и норма $\|\psi - \psi_0\|_{(1)}$, а из-за положительности коэффициента $(U - K)/U''$ будут в среднем квадратическом малы скорости $\nabla \delta\psi$ и вихрь $\Delta \delta\psi$. Течение будет устойчиво. Таким образом, теорема Релея доказана здесь для нелинеаризованных уравнений, т. е. для конечных возмущений.

Если уравнения линеаризованы, то уже главная часть функционала $F[\psi]$, т. е. $\|\psi - \psi_0\|_{(1)}^2$, есть точный инвариант. Но это есть не что иное как полученная ранее сохраняемая величина (29), смысл которой только что выяснился.

Заметим, что примененный только что способ исследования устойчивости в точности тот же самый, которым доказывают устойчивость вращения гироскопа, закрепленного в центре тяжести (случай Эйлера) при его вращении вокруг большой или малой оси инерции. Там также имелись два закона сохранения — энергии и квадрата момента. Поверхности уровня этих величин

в трехмерном пространстве угловых скоростей (или моментов) суть эллипсоиды. Стационарные вращения соответствуют тем угловым скоростям, где поверхности обоих семейств касаются друг друга. Траектории движения — это линии пересечения эллипсоидов двух семейств. В окрестности большой или малой оси эти линии представляют собой малые замкнутые кривые. В окрестности средней оси они гиперболического типа, т. е. приближаются к стационарной точке, а затем далеко от нее уходят. В нашем случае суть рассуждений такая же. Если функционал $F[\psi]$ имеет при $\psi = \psi_0$ минимум, то поверхности его уровня в фазовом пространстве полей ψ в окрестности ψ_0 замкнуты. При малом возмущении точка ψ попадает на такую поверхность и во все время движения с нее не сходит. Но вся поверхность заключена в небольшой окрестности ψ_0 , поэтому отклонения $\psi - \psi_0$ никогда не станут большими.

7. Нейтральные волны. Особые точки

Возвращаемся к спектральным методам изучения устойчивости. Пока нужно было искать невещественные собственные значения s , дело обстояло сравнительно просто. Собственным называлось такое значение s , для которого уравнение Релея имело решение, удовлетворявшее всем граничным условиям и условиям на разрывах, если таковые имелись (в конце курса мы убедимся, впрочем, что и здесь дело обстоит несколько сложнее). Но при попытке определить, что такое вещественное собственное значение s , встречается существенная трудность. Вне интервала $[U_{\min}, U_{\max}]$ вещественных собственных значений быть не может, значит, они должны лежать на этом интервале, если они существуют. Для таких s коэффициент $U - s$ при старшей производной в уравнении Релея обращается в нуль. Решение здесь имеет особую точку — точку ветвления. В самом деле, разложим решение в ряд по степеням $z - z_c$, где z_c — то значение z , при котором $U - s = 0$. Ищем решение в виде ряда

$$\psi_1 = (z - z_c) + a(z - z_c)^2 + \dots \quad (35)$$

Подставляя в уравнение и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $z - z_c$, будем иметь

$$2aU'_c - U''_c = 0$$

.

Из системы полученных уравнений находим один за другим все последовательные коэффициенты разложения. Второе решение можно получить исходя из того, что вронскиан двух решений постоянен, согласно теореме Лиувилля

$$\psi'_1 \psi_2 - \psi_2' \psi_1 = 1.$$

Отсюда получается:

$$\begin{aligned}\psi_2 &= -\psi_1 \int \psi_1^{-2} dz = -\psi_1 \int (z-z_c)^{-2} [1 + a(z-z_c) + \dots]^{-2} dz = \\ &= \psi_1 [(z-z_c)^{-1} + 2a \ln(z-z_c) + \dots] = \\ &= 1 + (U_c''/U_c') \psi_1(z) \ln(z-z_c) + \dots\end{aligned}\quad (36)$$

Под многоточием здесь скрыта регулярная в точке $z=z_c$ функция, обращающаяся там в нуль. Получено решение, непрерывное в особой точке, но производная которого обращается там в бесконечность а главное, это решение логарифмически ветвится. Значит, все решения, кроме (35), обладают тем же свойством. Возникает вопрос, каким образом должны сопрягаться между собой части собственной функции левее и правее особой точки? Здесь не обойтись без некоторого дополнительного принципа, не содержащегося в самих уравнениях. Одна из возможностей состоит в том, что собственные функции задачи для невязкой жидкости нужно понимать как пределы таковых для вязкой жидкости при вязкости, стремящейся к нулю. Как будет видно, для вязкой жидкости решение становится однозначным, никаких особенностей не возникает. Предельный переход позволяет однозначно отбирать решения для идеальной жидкости.

Второй возможный принцип сопряжения решений — формально математический. Волновые решения можно считать интересными потому, что с их помощью можно решать задачу Коши с любыми начальными данными. Условия на разрыве должны обеспечить возможность представления любого решения в виде суперпозиции волновых (уже говорилось ранее, что для такого представления нужно, кроме дискретного, использовать также непрерывный спектр задачи). Это требование, как можно показать, и в самом деле дает условие на разрыве, причем это условие не отличается от того, которое получается первым способом.

Сейчас будет получено условие сопряжения из третьего принципа, еще более формального, но получится то же самое. Можно изменять непрерывным образом параметры задачи, например волновое число α (или профиль скорости $U(z)$), и следить за изменением s . Наиболее интересны собственные числа, приводящие к неустойчивости, $\text{Im } s > 0$. Нужно проследить за тем, каким образом при непрерывном изменении параметров собственные числа оказываются в верхней полуплоскости. Эти собственные числа движутся, очевидно, непрерывно. Они не могут прийти из бесконечности, так как они должны лежать в известном круге (теорема Говарда). Не могут они при непрерывном изменении параметров возникнуть внезапно «из ничего». (Не вдаваясь в подробности, укажем, что собственные числа являются корнями некоторого трансцендентного уравнения $W(c) = 0$, где W непрерывно зависит от совокупности α , c и аналитически

от s . Тогда сохранение корней является следствием «принципа аргумента»). Таким образом, единственная возможность собственному числу войти или уйти из верхней полуплоскости — это пройти через вещественную ось. Нейтральными решениями, соответствующими вещественным s , будут считаться те, которые являются пределами неустойчивых решений с $\text{Im } s > 0$. Ниже будет показано, к какому условию сопряжения в особой точке это приводит. Пусть при $\alpha \rightarrow \bar{\alpha}$ будет $s \rightarrow \bar{s}$, где $\text{Im } s > 0$, а $\bar{s}$ вещественно. Из теоремы Говарда следует, что $\bar{s}$ лежит в интервале изменения $U(z)$, т. е. существует такое $\bar{z}$, что $U(\bar{z}) = \bar{s}$ (их может быть и несколько). Исключим сейчас из рассмотрения особые случаи, когда точка $\bar{z}$ совпадает с одним из концов отрезка или когда это экстремальная для $U(z)$ точка, $U'(\bar{z}) = 0$. Относи-

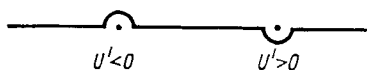


Рис. 2. Деформация пути интегрирования уравнения в окрестности особых точек.

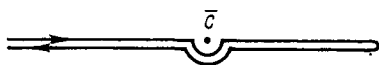


Рис. 3. Образ деформированного пути на плоскости $U(z)$.

тельно функции $U(z)$ будет в дальнейшем предполагаться, что это не только непрерывная и гладкая функция, но что она аналитически продолжаема в некоторую окрестность отрезка, на котором она задана, в комплексной плоскости.

До сих пор дифференциальное уравнение Релея интегрировалось вдоль отрезка вещественной оси, пусть $[a, b]$. Сейчас будем интегрировать его вдоль несколько деформированного контура, лежащего целиком в той окрестности отрезка $[a, b]$, где функция $U(z)$ аналитична, и имеющего те же концы a, b . Если между двумя контурами, старым и новым, нет особых точек уравнения, т. е. $U(z) = s$ не обращается в нуль, то, выйдя из точки $z = a$ с одними и теми же начальными условиями, решения вдоль этих контуров придут к точке $z = b$ к одинаковым значениям. Это следует из аналитичности решения и из того, что начальные условия — значения функции и ее производной в точке $z = a$ определяют все последовательные производные решения. Деформацию контура произведем следующим образом. Деформировать вещественную ось будем лишь в окрестностях точек $\bar{z}$, а в остальном оставим ее неизменной. Если в точке $\bar{z}$ будет $U'(\bar{z}) > 0$, то деформируем контур вниз, а если $U'(\bar{z}) < 0$, то вверх (см. рис. 2). На рис. 3 изображен образ такого контура при конформном отображении, даваемом функцией $U(z)$. Это отрезок вещественной оси, отдельные участки которого могут проходить несколько раз (между экстремальными точками). Там, где контур был деформирован, т. е. в окрестностях точек $\bar{z}$,

соответствующие значения $U(z)$ обходят значения $\bar{c}$ всегда снизу.

Пока $\text{Im } c > 0$, деформация контура не играет никакой роли. Но теперь при $c \rightarrow \bar{c}$ на контуре ни разу не возникает особой точки уравнения. Решение вдоль деформированного контура непрерывно зависит от c при $c \rightarrow \bar{c}$. Итак, предельное решение при вещественном $\bar{c}$ получается как решение вдоль отрезка вещественной оси $[a, b]$, но с обходом особых точек $\bar{z}$, где $U(\bar{z}) = \bar{c}$ по следующему правилу: если $U'(\bar{z}) > 0$, то особая точка обходится снизу, а если $U'(\bar{z}) < 0$, то сверху. Учитывая характер особенности решений, то, что произвольное решение есть линейная комбинация решений (35), (36), и то, что при обходе снизу логарифм возрастает на πi , а при обходе сверху — убывает на столько же, получаем правило: решение $\psi = A\psi_1 + B\psi_2$ при переходе через $\bar{z}$ непрерывно, а его производная имеет скачок, равный

а) $\pi i B U''(\bar{z}) / U'(\bar{z})$ при $U'(\bar{z}) > 0$,

б) $-\pi i B U''(\bar{z}) / U'(\bar{z})$ при $U'(\bar{z}) < 0$.

Но $B = \psi(\bar{z})$, поэтому скачок производной можно записать и так:

$$\begin{cases} \pi i \psi(\bar{z}) U''(\bar{z}) / U'(\bar{z}), & U'(\bar{z}) > 0; \\ -\pi i \psi(\bar{z}) U''(\bar{z}) / U'(\bar{z}), & U'(\bar{z}) < 0. \end{cases}$$

Обе формулы объединяются в одну:

$$\psi'(\bar{z}+0) - \psi'(\bar{z}-0) = \pi i \psi(\bar{z}) U''(\bar{z}) / |U'(\bar{z})|. \quad (37)$$

Если точка $\bar{z}$ случайно совпадет с одной из точек перегиба, $U''(\bar{z}) = 0$, то, как видно из самого уравнения, особенность сокращается, т. е. точка $\bar{z}$ перестает быть точкой ветвления. Решения в этой точке аналитичны, и никакого обхода вообще не требуется.

Если при изменении параметров собственное значение c спустилось из верхней полуплоскости на вещественную ось, то при дальнейшем изменении параметров оно может опуститься далее, $\text{Im } c < 0$. Можно ли в связи с этим сказать, что вещественное собственное значение является пределом собственных значений как из верхней, так и из нижней полуплоскости? Нет, асимметрия полуплоскостей сохраняется. В то время как решение в случае $\text{Im } c > 0$ удовлетворяет уравнению вдоль отрезка вещественной оси $[a, b]$, решение с $\text{Im } c < 0$ удовлетворяет уравнению вдоль криволинейного контура такого, что значения $U(z)$ обходят c снизу. Такие решения не имеют прямого физического смысла, так как все-таки важно знать функцию тока на отрезке $[a, b]$. Как обстоит дело в этом случае, выяснится в конце

книги. Оказывается, для затухающих решений нельзя обойтись невязким приближением. Всегда есть некоторый интервал, где существенна вязкость (внутренний пограничный слой). Вообще полное оправдание принятого сейчас принципа о том, что лишь неустойчивые решения физически осмысленны в невязком приближении, а нейтральные должны быть пределами таких, может быть дано лишь в расширенной теории, где либо решения для идеальной жидкости получаются как пределы вязких, либо рассматривается задача с начальными данными

8. Теоремы об устойчивости, основанные на исследовании нейтрального случая

Теорема 5. *Вещественное собственное значение в смысле, определенном выше, может существовать лишь если U'' где-нибудь обращается в нуль.*

Эта теорема дополняет теорему Релея об отсутствии в этом случае невещественных собственных значений и, хотя не вытекает прямо из теоремы Релея, но справедливость ее интуитивно чувствуется, так как условия сопряжения в особой точке получены предельным переходом от случая невещественных собственных значений.

Доказательство. Пусть c вещественно, ψ собственная функция, удовлетворяющая в особых точках правилам сопряжения (37). Так как коэффициенты уравнения вещественны, то при том же самом c решением является и комплексно сопряженная функция ψ^* , а следовательно и вещественная и мнимая части ψ_r , ψ_i решения ψ . Согласно теореме Лиувилля, вронскиан этих двух решений $W = v_r v'_i - v'_r v_i = \text{Im } \psi^* \psi'$ постоянен между любыми двумя особыми точками. В самих же особых точках скачок этого вронскиана, по (37), равен

$$W(\bar{z}+0) - W(\bar{z}-0) = \pi |\psi(\bar{z})|^2 U''(\bar{z}) / |U'(\bar{z})|. \quad (38)$$

На концах отрезка $[a, b]$ вронскиан обращается в нуль в силу краевых условий. Поэтому все скачки должны взаимно уничтожаться, т. е. либо U'' в них имеет разные знаки, либо U'' обращается в нуль во всех особых точках.

Обратим еще внимание на следующее обстоятельство. Казалось бы, скачок вронскиана может обращаться в нуль не за счет U'' , а из-за обращения в нуль ψ во всех особых точках. Но тогда функция $\psi/(U-c)$ будет непрерывной, и полностью проходит доказательство невозможности существования такого собственного числа, такое, как в теореме 4 п. 5. Это завершает доказательство теоремы 5.

Далее класс изучаемых профилей скорости будет ограничен. Именно, введем два типа профилей:

А. Скорость растет монотонно, $U' > 0$, и имеется одна точка перегиба $U'' = 0$, причем в этой точке $U''' < 0$, т. е. U' имеет в этой точке максимум.

Б. Профиль скорости симметричен относительно начала координат, т. е. функция U четная $U(-z) = U(z)$. На половине отрезка, т. е. на $[a, 0]$ эта функция предполагается удовлетворяющей условию А.

Случай, когда в единственной точке перегиба профиля скорости U' имеет минимум, не разбирается, потому что этот случай уже изучен — по теореме Фьортофта (теорема 3) такое течение всегда устойчиво.

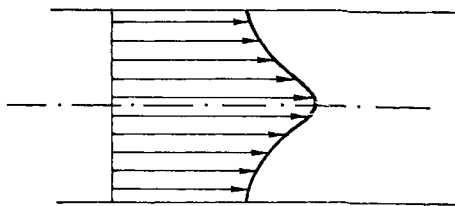


Рис. 4. Профиль скорости, к которому применима теорема Толлмина.

Профиль, относящийся к классу А, изображен на рис. 1 б. Случай Б не очень существенно отличается от А. Это можно установить таким рассуждением. Поскольку уравнение имеет

четные коэффициенты, то вместе со всяким решением $\psi(z)$ решением является также и $\psi(-z)$. Но двух линейно независимых решений, обращающихся в одной точке $z=a$ в нуль, быть не может: всегда можно найти их линейную комбинацию, у которой производная в этой точке равна нулю, а следовательно, по теореме единственности равную нулю тождественно. Поэтому $\psi(-z) = m\psi(z)$, где m некоторая константа. Имеем $\psi(z) = m\psi(-z) = m^2\psi(z)$, т. е. $m^2 = 1$ и $m = \pm 1$. Если $m = 1$, то это означает, что решение четное, при $m = -1$ — нечетное. Итак, задачу всегда можно рассматривать на половине отрезка, $[a, 0]$, поставив при $z=0$ краевое условие четного, $\psi'(0) = 0$, или нечетного $\psi(0) = 0$ продолжения. Профиль скорости, удовлетворяющий условию Б, изображен на рис. 4.

Теорема 6 (Толлмин) [25]. Если профиль скорости относится к типу А или Б и для некоторого α имеется вещественное собственное число s , то это собственное число переходит в верхнюю полуплоскость $\text{Im } s > 0$ при уменьшении α .

Доказательство. Прежде всего отметим, что в случае профилей скорости типа А и Б если s вещественно, то соответствующая точка $\bar{z}$, где $U(\bar{z}) = s$ обязательно является точкой перегиба, $U''(\bar{z}) = 0$. Согласно замечанию в предыдущем пункте эта точка тогда не является особой, она регулярная и собственная функция в ней аналитична. В самом деле, в случае А профиль скорости монотонный. Следовательно, для данного s имеется лишь одна точка $\bar{z}$. Поскольку скачки вронскиана W в сумме

по всем особым точкам должны давать нуль, а точка одна, то это значит, что скачок в этой точке равен нулю, т. е. $U''(\bar{z})=0$.

Для профиля типа Б проходит то же рассуждение, если только применить его к половине интервала, $[a, 0]$ и учесть, что и в точке $z=0$ вронскиан должен в силу краевых условий четного или нечетного продолжения обращаться в нуль, значит и на полуинтервале скачки должны сокращаться.

Итак, пусть при некотором значении α , обозначим его α_0 , c становится вещественным, c_0 . Будем считать сейчас c и само решение ψ функцией от α^2 . Пусть $\bar{z}_0$ — то значение, при котором $U(\bar{z}_0)=c_0$. По доказанному $U''(\bar{z}_0)=0$. Обозначим производную решения ψ по параметру α^2 как φ : $\partial\psi/\partial\alpha^2=\varphi$. Уравнение

$$\psi'' - \alpha^2\psi - \frac{U''}{U-c}\psi = 0 \quad (39)$$

дифференцируем по α^2 :

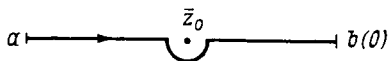
$$\varphi'' - \alpha^2\varphi - \frac{U''}{U-c}\varphi - \psi - \frac{U''}{(U-c)^2}\psi \cdot \frac{dc}{d\alpha^2} = 0. \quad (40)$$

Положим $\alpha^2 = \alpha_0^2$. Уравнение (39) умножим на φ , уравнение (40) на ψ , вычтем одно из другого и проинтегрируем по отрезку $[a, b]$ (или по отрезку $[a, 0]$, в случае Б). При этом интегрировании точку $\bar{z}_0$ обойдем снизу, т. е. интегрируем по такому контуру, как показано на рис. 5. Будем иметь

$$\int \psi^2 dz + \int \frac{U''}{(U-c_0)^2} \psi^2 dz \cdot \frac{dc^2}{d\alpha^2} \Big|_{\alpha_0} = 0. \quad (41)$$

В первом из интегралов подынтегральная функция непрерывна в точке $\bar{z}_0$, поэтому его можно понимать как интеграл по отрезку. Если радиус полуокружности в контуре рис. 5 стремиться

Рис. 5. Деформация пути интегрирования уравнения в окрестности особой точки.



к нулю, то второй интеграл превратится в сумму главного значения в смысле Коши по отрезку вещественной оси и половины вычета подынтегральной функции, умноженного на $2\pi i$. Этот вычет нетрудно сосчитать, он равен $U'''(\bar{z}_0)/(U'(\bar{z}_0))^2 \cdot \psi^2(\bar{z}_0)$. Обозначим

$$A = \int \psi^2 dz > 0, \quad B = \text{в. п.} \int U''\psi^2 (U-c_0)^{-2} dz, \\ C = [\pi U'''/(U')^2 \cdot \psi^2]_{z=\bar{z}_0} < 0.$$

Тогда соотношение (41) примет вид

$$dc/d\alpha^2 = -A/(B+iC).$$

Мнимая часть этого равенства дает

$$d \operatorname{Im} c / d\alpha^2 = AC / (B^2 + C^2) < 0,$$

что и показывает, что мнимая часть становится положительной, когда α^2 убывает от своего значения α_0^2 . Теорема доказана.

Эта теорема имеет важное следствие. Если уменьшать все время α^2 , то собственные значения c , вызывающие неустойчивость, т. е. имеющие положительную мнимую часть, могут лишь появиться, а исчезнуть не могут. В самом деле, при непрерывном изменении α^2 они непрерывно перемещаются, причем не могут уйти в бесконечность (теорема 4) и при уменьшении α^2 не могут стать вещественными. Поэтому наименее устойчивы волны с минимальными α , т. е. самые длинные. Точная формулировка такова: *течение с профилем скорости типа А или В устойчиво тогда и только тогда, когда при $\alpha=0$ нет собственных чисел с $\operatorname{Im} c=0$.*

Теорема 7 (Толлмин). *Течение с профилем скорости типа В всегда неустойчиво.*

Значение этой теоремы состоит в том, что она впервые дает некоторое достаточное условие неустойчивости. Без нее для нас оставалось бы неясным, существуют ли вообще неустойчивые течения однородной несжимаемой идеальной жидкости с непрерывным профилем скорости.

Доказательство. Достаточно доказать, что при некотором значении α имеется нейтральная волна, т. е. вещественное собственное значение c . Тогда при меньших значениях α она станет, по теореме 6, неустойчивой. Нейтральное значение c может быть, по доказанному, лишь таким, что $U''(\bar{z})=0$ для того $\bar{z}$, для которого $U(\bar{z})=c$. Т. е. c должно равняться значению U в точке перегиба. Фиксируем это значение c . При любом α можно построить решение уравнения

$$\psi'' - \alpha^2 \psi - U''\psi / (U - c) = 0,$$

удовлетворяющее в точке $z=0$ условию четности $\psi'(0)=0$ и как-нибудь нормированное, например, $\psi(0)=1$. Будем непрерывно изменять α и смотреть, что делается с этим решением. При $\alpha=0$ это решение без труда находится. Это $\psi = (U(z) - c) / (U(0) - c)$. В самом деле, оно удовлетворяет уравнению

$$\psi'' - U''\psi / (U - c) = 0,$$

и краевому условию в точке $z=0$, так как U — функция четная. Оно также нормировано в этой точке. График этого решения показан на рис. 6 сплошной линией. Кривая один раз пересекает ось абсцисс между точками $z=0$ и $z=a$. Наоборот, при очень больших значениях α , namного превышающих $U'' / (U - c)$, решение близко к решению уравнения

$$\psi'' - \alpha^2 \psi = 0$$

при том же краевом условии. Иначе говоря, асимптотически при больших α имеем

$$\psi \sim \operatorname{ch} \alpha z.$$

Эта функция не имеет нулей и график ее показан пунктиром на рис. 6. Так как при непрерывном изменении α решение обязано непрерывно изменяться, то отсюда следует, что при некотором промежуточном значении α нуль функции ψ совпадет с точкой $z=a$, так как при непрерывном изменении α он должен сойти с отрезка $[a, 0]$ и уйти в бесконечность. Это и будет то значение α , при котором решение, удовлетворяющее краевому условию в правом конце, удовлетворяет и условию в левом конце. При этом значении α выбранное значение c является собственным. При меньших значениях α , как было уже сказано, c переходит в верхнюю полуплоскость. Теорема 7 доказана.

Эта теорема не является обратной к теореме Релея, утверждающей, что отсутствие точек перегиба гарантирует устойчивость, так как для неустойчивости недостаточно наличия точки перегиба, а нужны еще некоторые качественные условия (профиль типа Б).

Сейчас будет дан окончательный критерий для выяснения вопроса об устойчивости профиля типа А.

Теорема 8 (Розенблют, Симон [23]). *Для устойчивости течения с профилем скорости $U(z)$, $z \in [a, b]$ типа А необходимо и достаточно, чтобы*

$$1/[U'(U-\bar{U})]|_a^b + \int_a^b U''(U')^{-2}(U-\bar{U})^{-1} dz > 0, \quad (42)$$

где $\bar{U}$ — значение U в точке перегиба, $U''=0$.

Доказательство. Итак, пусть $U(z)$ — монотонно возрастает на отрезке $[a, b]$, имеется одна точка перегиба $\bar{z}$, $U''(\bar{z})=0$ и в точке перегиба $U'''<0$, т. е. U' достигает в ней максимума. По следствию из теоремы 6 необходимым и достаточным условием устойчивости является отсутствие не вещественных корней при $\alpha=0$. Имеем уравнение

$$\psi'' - U''\psi/(U-c)=0. \quad (43)$$

Нужно построить два линейно независимых решения этого уравнения. Одно из них совершенно тривиально. Это $\psi_1 = U - c$. Если

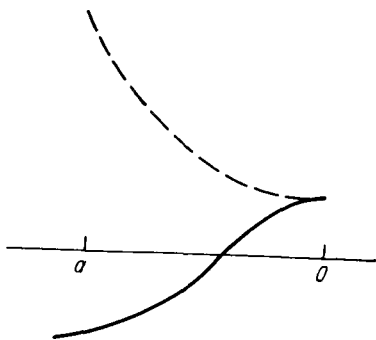


Рис. 6. К доказательству теоремы (7): решения при $\alpha=0$ и при больших α .

известно одно решение, то остальные вычисляются в квадратурах. Пусть ψ — любое другое решение. Вронскиан этих решений должен быть постоянным

$$\psi' \psi_1 - \psi \psi_1' = K.$$

Решая это уравнение методом вариации произвольного постоянного, будем иметь

$$\psi = K(U - c) \int_a^z (U - c)^{-2} dz + L(U - c).$$

Из краевого условия $\psi(a) = 0$ следует, что $L = 0$. Из второго краевого условия $\psi(b) = 0$ имеем

$$\int_a^b (U - c)^{-2} dz = 0. \quad (44)$$

Это и есть уравнение, определяющее собственные значения. Нужно исследовать, имеет ли оно корни в верхней полуплоскости, $\text{Im } c > 0$. Если принять за новое переменное интегрирования U , пользуясь монотонностью $U(z)$, то уравнение запишется в виде

$$\int_{U(a)}^{U(b)} (dz/dU) (U - c)^{-2} dU = 0.$$

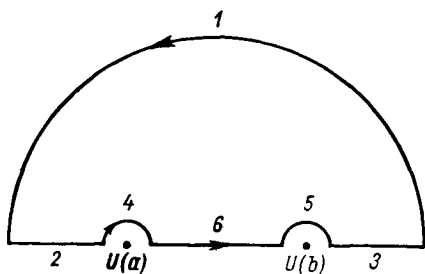


Рис. 7. К доказательству теоремы Розенблюта и Симона: обход полуплоскости $\text{Im } c > 0$.

Преобразуем интегрированием по частям:

$$-(dz/dU) (U - c)^{-1} \Big|_{U(a)}^{U(b)} + \int_{U(a)}^{U(b)} (d^2z/dU^2) (U - c)^{-1} dU = 0. \quad (45)$$

Левую часть этого уравнения обозначим $F(c)$. Сейчас будет применен принцип аргумента, который гласит: число корней аналитической функции внутри некоторого замкнутого контура, с учетом их кратности, равно числу обходов точки $F(c)$ вокруг начала координат, когда c совершает обход по контуру. Рассмотрим такой контур, как на рис. 7. Если подсчитать число корней внутри этого контура, а затем устремить радиус большого полукруга к бесконечности, а малых к нулю, то в пределе будет получено число корней во всей верхней полуплоскости. На рис. 8 показано, во что отображается этот контур функцией $F(c)$. Цифрами на том и на другом рисунке показаны соответствующие части контуров. Остановимся на этих дугах отдельно.

На большой дуге 1 $F(c) \sim (b-a)/c^2$, как это следует из представления $F(c)$ через интеграл (44). Поэтому образ полуокружности 1 — малая окружность, проходимая по часовой стрелке, как и изображено на рис. 8. На отрезках 2 и 3 функция $F(c)$ вещественна и положительна. Когда c приближается к концевым точкам, $F(c)$ сильно растет. В окрестности этих концов лучше воспользоваться представлением функции $F(c)$ по формуле (45). Интегральный член имеет логарифмический порядок роста по отношению к $U(a) - c$, $U(b) - c$, а первый член — значительно больший порядок $(U(a) - c)^{-1}$, $(U(b) - c)^{-1}$. Поэтому

$$F(c) \underset{c \rightarrow U(a)}{\sim} \frac{(dz/du)_{U(a)}}{U(a) - c};$$

$$F(c) \underset{c \rightarrow U(b)}{\sim} \frac{(dz/dU)_{U(b)}}{U(b) - c}.$$

Когда c описывает дуги 4 и 5, $F(c)$ описывает против часовой стрелки большие полуокружности, показанные на рисунке. Остался один участок 6 — часть вещественной оси между $U(a)$ и $U(b)$. Покажем, что на этом отрезке $F(c)$ становится вещественным только один раз, когда $c = U(z)$. Для этого найдем мнимую часть $F(c)$. Значения $F(c)$ на вещественной прямой нужно брать предельными из верхней полуплоскости, так как внутри контура, включая границы, функция должна быть аналитической, чтобы применять принцип аргумента. Для $F(c)$ на отрезке $[U(a), U(b)]$ формула (45) будет давать предельные значения $F(c)$ из верхней полуплоскости, если интеграл в этой формуле понимается взятый по деформированному вниз в окрестности точки $U=c$ отрезку. Если радиус дуги вокруг точки c устремить к нулю, то интеграл превратится в сумму главного значения Коши и половины вычета подынтегральной функции в точке $U=c$, умноженной на $2\pi i$. Поэтому

$$\operatorname{Im} F(c) = \pi d^2 z |dU^2|_{U=c},$$

$$\operatorname{Re} F(c) = -\frac{dz}{dU} \cdot \frac{1}{U-c} \bigg|_{U(a)}^{U(b)} + \text{в. п.} \int_{U(a)}^{U(b)} \frac{d^2 z}{dU^2} \cdot \frac{dU}{U-c}. \quad (46)$$

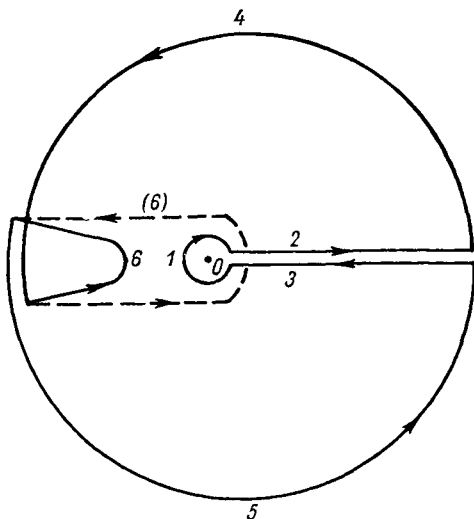


Рис. 8. Отображение контура рис. 7 функцией $F(c)$.

Мнимая часть обращается в нуль только один раз, когда $d^2z/dU^2=0$. Но $dz^2/dU^2=-(d^2U/dz^2)(dU/dz)^{-3}$. Значит $d^2z/dU^2=0$ при $U=\bar{U}=U(\bar{z})$, где $U''(\bar{z})=0$. Заметим еще, что, по предположению о профиле скорости, $U''(z)$ изменяется при возрастании z от положительных к отрицательным значениям. Поэтому dz^2/dU^2 изменяется при возрастании U от отрицательных к положительным значениям. Значит $F(c)$ переходит от отрицательных к положительным значениям, что и показано на рис. 8.

На рис. 8 изображено два варианта дуги 6. В одном из них вещественная ось пересекается правее начала координат, в другом — левее. Геометрически очевидно, что в первом случае $F(c)$ совершает один обход вокруг начала координат в положительном направлении, против часовой стрелки (на рисунке это легче усмотреть как разность между одним обходом по часовой стрелке и двумя — против). Во втором случае — ни одного обхода. Значит в первом случае в полуплоскости имеется один корень, и течение неустойчиво. Во втором — корней нет, и течение устойчиво. Аналитический критерий для различения этих случаев получается, если найти $\operatorname{Re} F(c)$ при значении $c=\bar{U}$, обращающем в нуль $\operatorname{Im} F(c)$. Устойчивость имеет место тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} F(c) < 0$. Принимая во внимание (46), запишем это так:

$$-\frac{dz}{dU} \cdot \frac{1}{U-\bar{U}} \int_{U(a)}^{U(b)} + \int_{U(a)}^{U(b)} \frac{d^2z}{dU^2} \cdot \frac{dU}{U-\bar{U}} < 0.$$

Переходя к старому переменному интегрирования z вместо U , получим критерий (42), который и требовалось доказать.

Заметим, что попутно доказана также и другая теорема.

Теорема 9. *Течение с монотонным профилем скорости и с одной точкой перегиба имеет не более одной пары невещественных комплексно сопряженных собственных значений.*

В самом деле, функция $F(c)$ совершала не более одного обхода нуля. В случае же, когда $U''' > 0$ в точке перегиба, не разобранном в теореме 8, вообще нет невещественных собственных значений, по теореме 3 Фьортофта.

Рассмотрим пример. Пусть $U(z) = \sin az$ на отрезке $[-1, 1]$, причем $a < \pi/2$ (иначе профиль не будет монотонным). Вычислим интеграл (42):

$$\begin{aligned} \frac{1}{a \cos az \sin az} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{a^2 \sin az \, dz}{a^2 \cos^2 az \sin az} &= \frac{2}{a \cos a \sin a} - \frac{2 \operatorname{tg} a}{a} = \\ &= \frac{2 \operatorname{ctg} a}{a} > 0. \end{aligned}$$

Течение оказалось, согласно теореме 8, устойчивым.

Второй пример. $U(z) = \text{th } az$, $z \in [-1, 1]$.

$$\begin{aligned} \frac{\text{ch}^2 az}{a \text{th } az} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{2a^2 \text{sh } az \text{ch}^4 az}{\text{ch}^3 az a^2 \text{th } az} dz &= \frac{2 \text{ch}^3 a}{a \text{sh } a} - 2 - \frac{\text{sh } 2a}{a} = \\ &= 2 \left(\frac{\text{ch } a}{a \text{sh } a} - 1 \right). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при $a \text{th } a < 1$ течение будет устойчиво, в противном случае — нет.

9. Трехмерные возмущения

Течения, устойчивость которых нас интересовала, были двумерными плоскопараллельными. Исследуя устойчивость этих течений, мы полагали возмущения также двумерными. Что произойдет, если расширить класс допустимых возмущений, введя в рассмотрение трехмерные волны, которые могут присутствовать на самом деле? Рассмотрим линеаризованные уравнения движения несжимаемой однородной жидкости:

$$u_t + Uu_x + U'w = -\frac{1}{\rho} p_x;$$

$$v_t + Uv_x = -\frac{1}{\rho} p_y;$$

$$w_t + Uw_x = -\frac{1}{\rho} p_z;$$

$$u_x + v_y + w_z = 0 \quad (U' = dU/dz).$$

Здесь основное течение по-прежнему считается направленным вдоль оси Ox и зависит лишь от одной поперечной координаты z , т. е. основное течение плоскопараллельно. Рассматриваем возмущения, гармонически зависящие от координат x и y , $\exp i(\alpha x + \beta y)$. Для амплитуд имеем систему уравнений

$$u_t + i\alpha Uu + U'w = -i\alpha p/\rho;$$

$$v_t + i\alpha Uv = -i\beta p/\rho;$$

$$w_t + i\alpha Uw = -p_z/\rho;$$

$$i\alpha u + i\beta v + w_z = 0. \quad (47)$$

Выясним сначала, как обстоит дело с волновыми возмущениями, т. е. гармонически зависящими от времени $\exp(-i\alpha ct)$. Для них уравнения принимают вид

$$i\alpha(U - c)u + U'w = -i\alpha p/\rho;$$

$$i\alpha(U - c)v = -i\beta p/\rho;$$

$$i\alpha(U - c)w = -p_z/\rho;$$

$$i\alpha u + i\beta v + w_z = 0.$$

Из первого, второго и четвертого уравнения исключаем u, v :

$$-i\alpha(U-c)\omega_z + i\alpha U'\omega = (\alpha^2 + \beta^2)p/\rho.$$

Дифференцируем это уравнение по z и, с помощью третьего уравнения, исключаем p :

$$(U-c)(\omega_{zz} - (\alpha^2 + \beta^2)\omega) - U''\omega = 0. \quad (48)$$

Получилось знакомое нам уравнение Релея, где вместо волнового числа по оси Ox стоит полное волновое число $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Трехмерность, тем самым, ничего нового не дает. Иначе говоря, если двумерные волновые возмущения не растут, то течение является устойчивым и относительно трехмерных возмущений.

Теперь перейдем к рассмотрению более общих, чем волновые, возмущений, произвольным образом зависящих от времени. Здесь удобно от уравнений (47) для скоростей перейти к уравнениям для компонент вихря. Берем вихрь от уравнений (47), учитывая вид зависимости от координат x и y . Компоненты вихря по осям таковы:

$$r_1 = i\beta\omega - v_z, \quad r_2 = -i\alpha\omega + u_z, \quad r_3 = i\alpha v - i\beta u.$$

Они удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} (\partial/\partial t + i\alpha U)r_1 - U'r_3 - i\beta U'u &= 0; \\ (\partial/\partial t + i\alpha U)r_2 - i\beta U'v + U''\omega &= 0; \\ (\partial/\partial t + i\alpha U)r_3 - i\beta U'\omega &= 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Умножая первое уравнение на $i\beta$ и вычитая второе, умноженное на $i\alpha$, а также учитывая

$$i\beta r_1 - i\alpha r_2 = \omega_{zz} - (\alpha^2 + \beta^2)\omega,$$

получим уравнение для вертикальной скорости

$$(\partial/\partial t - i\alpha U)[\omega_{zz} - (\alpha^2 + \beta^2)\omega] - i\alpha U''\omega = 0 \quad (50)$$

— аналог уравнения (48), но для возмущений, произвольным образом зависящих от времени. Как обычно, на твердых стенках, при $z=a, b$ ставим краевое условие $\omega=0$. Уравнение для вертикальной скорости такое же, как в двумерном случае, но с полным волновым числом $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. Допустим, в двумерном случае удалось доказать устойчивость, т. е. ограниченность ω , а также ω_z, ω_{zz} одной константой, не зависящей от времени. Напомним, что это имеет место, например, в случаях Релея и Фьортфта, как то следует из закона сохранения (29), который для уравнения (50) имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_a^b \left\{ |\omega_z|^2 + (\alpha^2 + \beta^2) |\omega|^2 + \frac{U-K}{U''} |\omega_{zz} - (\alpha^2 + \beta^2)\omega|^2 \right\} dz = 0.$$

Поэтому ограниченность ω , а также ω_z и ω_{zz} будет иметь место и для трехмерного случая. (Из написанного закона сохранения следует ограниченность в среднем квадратическом, так мы ее и будем сейчас понимать; на самом деле можно показать и равномерную ограниченность ω , см. п. 10.) Теперь займемся другими компонентами скорости, а также вихрем. Из последнего из уравнений (49) и уравнения (50) находим

$$(\partial/\partial t + i\alpha U) \{ \alpha U'' r_3 - \beta U' | \omega_{zz} - (\alpha^2 + \beta^2) \omega \} = 0.$$

Это уравнение немедленно интегрируется по t :

$$r_3 = \frac{\beta U'}{\alpha U''} \{ \omega_{zz} - (\alpha^2 + \beta^2) \omega \} + \\ + e^{-i\alpha U t} \left\{ r_3 - \frac{\beta U'}{\alpha U''} \{ \omega_{zz} - (\alpha^2 + \beta^2) \omega \} \right\}_{t=0}.$$

Если $U'' \neq 0$ (случай Релея), то из написанного выражения для r_3 видно, что эта компонента вихря ограничена в среднем квадратическом одной константой, не зависящей от t . Если же U'' обращается в нуль, то $r_3 U''$ ограничено. Что касается r_3 , то неясно, может ли эта функция расти, все более и более концентрируясь вокруг точек перегиба. Это понятно и физически. Точки перегиба — это точки, где вихрь основного течения достигает максимума. Здесь по-видимому и происходит максимальная передача вихря от основного течения возмущениям. Теперь вспоминаем, что

$$r_3 = i\alpha v - i\beta u, \quad \omega_z = -i\alpha u - i\beta v.$$

Отсюда следует, что u и v выражаются через r_3 , ω_z линейно. Поэтому, в случае $U'' \neq 0$, они также ограничены в среднем квадратическом. Можно было бы на этом остановиться и назвать такое течение устойчивым. Однако здесь дело обстоит не так просто. Здесь важно четко оговорить, что мы хотим считать устойчивостью. Скорости действительно ограничены — это было только что доказано. Что касается вихря, то одна его компонента, r_3 , ограничена. Компоненты же r_1 и r_2 могут линейно расти со временем. В этом можно убедиться, рассмотрев простой пример. Имеется частное решение с $\omega \equiv 0$. Тогда из последнего уравнения (49) получаем, что r_3 имеет вид $\exp(-i\alpha U t) f(z)$. Значит u и v имеют такой же вид и

$$r_1 \sim -i\alpha U' t \exp(-i\alpha U t) f(z).$$

Аналогично и для r_2 . Проведенное исследование можно суммировать.

Теорема 10. Если доказана устойчивость двумерных возмущений плоскопараллельного течения идеальной несжимаемой однородной жидкости, в смысле ограниченности возмущений скорости и вихря, то для трехмерных возмущений все компоненты скорости (умноженные на U'') также ограничены; в том же

смысле ограничена компонента вихря, параллельная оси Oz . Остальные компоненты вихря могут линейно расти.*

10. Исследование устойчивости с помощью решения задачи Коши

Уже неоднократно отмечалось, что хотя обычно собственных функций дискретного спектра совсем немного, лишь они могут явиться причиной неустойчивости. Говорилось также и о том, что строгое доказательство этого факта дала бы теорема о разложении любой функции по спектру, что позволило бы решать задачу Коши методом Фурье. Однако такой теоремы нет, приходится искать ей замену. Общая идеология такая — нужно решить задачу Коши с произвольными начальными данными, и если удастся показать, что это решение ограничено при всех значениях t , то течение тогда можно считать устойчивым. Аппарат для решения задачи Коши уже, собственно говоря, нам встречался. Именно, в примере, где изучалась устойчивость плоского течения Куэтта, был применен метод преобразования Лапласа по времени t . Сейчас мы поступим точно так же для произвольных плоскопараллельных течений, профиль скорости которых подвержен лишь некоторым качественным ограничениям [6, 15].

Исходим из хорошо знакомого уравнения (6), в котором положено $\beta=0$, $\rho'=0$, и зависимость от x гармоническая $\exp(i\alpha x)$:

$$(\partial/\partial t + i\alpha U)(\psi_{zz} - \alpha^2\psi) - i\alpha U''\psi = 0. \quad (51)$$

Это уравнение решается при граничных и начальных условиях

$$\psi(a, t) = \psi(b, t) = 0, \quad \psi(z, 0) = \psi_0(z).$$

Положим $\psi^*(z, c) = \int_0^\infty \exp(-i\alpha ct) \psi(z, t) dt$. Теперь умножим обе части (51) на $\exp(-i\alpha ct)$ и проинтегрируем по t от 0 до ∞ . Если дважды применить формулу интегрирования по частям, то будем иметь

$$(U - c)(d^2/dz^2 - \alpha^2)\psi^* - U''\psi^* = f,$$

где $f = -i(\varphi_0'' - \varphi_0)/\alpha$ — известная функция, определяемая начальными условиями. Дифференциальное уравнение с граничными условиями равносильно интегральному уравнению

$$\psi^*(z, c) = \int_a^b G^*(z, \zeta; c) f(\zeta) d\zeta, \quad (52)$$

* Строго говоря, теорема доказана лишь в случае Релея.

где $G^*(z, \zeta; c)$ — функция Грина, определяемая решениями однородного уравнения:

$$G^*(z, \zeta; c) = \begin{cases} \psi_1(z, c) \psi_2(\zeta, c) / W(c) (U(\zeta) - c), & z < \zeta; \\ \psi_1(\zeta, c) \psi_2(z, c) / W(c) (U(\zeta) - c), & z > \zeta. \end{cases} \quad (53)$$

Здесь ψ_1, ψ_2 — решения однородного уравнения

$$(U - c)(\psi'' - \alpha^2 \psi) - U''\psi = 0 \quad (54)$$

при условиях

$$\psi_1(a, c) = 0, \quad \psi_1'(a, c) = 1;$$

$$\psi_2(b, c) = 0, \quad \psi_2'(b, c) = 1.$$

$W(c)$ — вронскиан ψ_1, ψ_2 :

$$W(c) = \psi_1(b, c) = -\psi_2(a, c).$$

При больших значениях c решения близки к соответствующим решениям уравнения $\psi'' - \alpha^2 \psi$, т. е. стремятся к пределу. Значит $W(c)$ убывает как $1/c$. Поэтому интеграл

$$G(z, \zeta; t) = \frac{\alpha}{i2\pi} \int_{i\gamma - \infty}^{i\gamma + \infty} e^{-i \cdot c t} G^*(z, \zeta; c) d\zeta \quad (55)$$

сходится. Здесь γ — достаточно большое положительное число, так что выше контура интегрирования функция G^* аналитична по c (см. исследование ее аналитических свойств ниже). $G^*(z, \zeta; c)$ есть преобразование Лапласа от функции $G(z, \zeta; t)$, и решение данного уравнения (51) получается по формуле

$$\psi(z, t) = \int_a^b G(z, \zeta; t) f(\zeta) d\zeta. \quad (56)$$

Эта формула соответствует явной формуле для решения в примере с течением Куэтта (шестой пример п. 4). Теперь чтобы доказать ограниченность решения задачи, нужно исследовать поведение функции $G(z, \zeta; t)$ при $t \rightarrow \infty$. При этом будем исходить из определения этой функции (55). Контур интегрирования лежит в верхней полуплоскости. Поэтому экспонента неограниченно растет при $t \rightarrow \infty$. Интеграл может остаться ограниченным лишь за счет взаимной интерференции подынтегрального выражения в разных частях контура. Исследовать это не просто. Но можно, пользуясь аналитичностью подынтегральной функции, деформировать контур, опуская его вниз, к вещественной оси, насколько это окажется возможным, уменьшая тем самым инкремент нарастания у подынтегральной экспоненты.

Из вышесказанного ясно, что в основе метода лежит исследование аналитических свойств функции $G^*(z, \zeta; c)$. На функцию $U(z)$ будут наложены следующие требования. Она будет считаться аналитически продолжаемой с отрезка $[a, b]$ на его некоторую окрестность в комплексной плоскости, как это уже однажды предполагалось (п. 7). Далее, для простоты считаем $U(z)$ монотонно возрастающей функцией на $[a, b]$. Без этого предположения рассуждения становятся значительно более трудными, но результаты те же. Будет и еще одно требование, чтобы значения $c = U(a)$, $U(b)$ не были бы собственными значениями дискретного спектра. Что это значит — уточним ниже.

Прежде всего заметим, что функции $\psi_1(z, c)$; $\psi_2(z, c)$ аналитичны по c в верхней полуплоскости, так как коэффициенты уравнения, которому они удовлетворяют, аналитичны по c и не имеют особенностей, когда $\text{Im } c > 0$. Далее, эти функции аналитически продолжаются через вещественную ось всюду, кроме точек $c = U(a)$, $U(b)$, $U(z)$. В самом деле, пусть c_0 вещественное значение, отличное от перечисленных. Пусть на отрезке $[a, z]$ есть значение z_0 такое, что $U(z_0) = c$. Мы получим то же самое значение $\psi_1(z, c)$, если будем интегрировать уравнение от точки a до точки z с теми же начальными условиями, но вдоль отрезка $[a, z]$, деформированного вниз в окрестности точки z_0 . Но теперь, если c из верхней полуплоскости опускается в окрестность точки c_0 , на контуре интегрирования не возникает особенностей. Поэтому функция $\psi_1(z, c)$ остается аналитической в окрестности точки c_0 . Точка c_0 может быть любой на вещественной оси, кроме $U(a)$ и $U(z)$. То же и для функции $\psi_2(z, c)$, где исключительными значениями являются $U(z)$, $U(b)$. Учитывая, что $W(c) = \psi_1(b, c)$, получим, что $W(c)$ аналитически продолжается через вещественную ось всюду, кроме $U(a)$, $U(b)$.

В п. 7 было исследовано поведение решений в окрестности особой точки и установлено, что в этой точке одно решение аналитично и обращается там в нуль, а другие решения непрерывны, но логарифмически ветвятся, а производные их обращаются в бесконечность. Значение $c = U(a)$ будем называть собственным, если при этом значении единственное решение, аналитическое и равное нулю при $z = a$ обращается в нуль и при $z = b$. Аналогично и для $c = U(b)$. Выше было предположено, что значения $U(a)$, $U(b)$ не являются собственными.

Если функция $W(c)$ обращается в некоторой точке c в нуль, то это значит, что $\psi_1(b, c) = 0$, т. е. функция $\psi_1(z, c)$ удовлетворяет однородному уравнению (53) и нулевым условиям на краях $\psi_1(a, c) = \psi_2(a, c) = 0$. Иначе говоря, значение c оказывается собственным. Если нуль функции $W(c)$ кратный, то собственное значение будет считаться такой же кратности. Все вышесказанное дает следующую лемму.

Лемма 1. *Функция $W(c)$ аналитически продолжается из верхней полуплоскости через вещественную ось всюду, кроме*

точек $s=U(a)$, $U(b)$. При этом она имеет нули там, где s равно собственным значениям однородной задачи.

Для функции $G^*(z, \xi; c)$ получаем следующий вывод.

Лемма 2. *Функция $G^*(z, \xi; c)$ аналитически продолжается из верхней полуплоскости через вещественную ось всюду, кроме точек $s=U(a)$, $U(b)$, $U(z)$, $U(\xi)$. Она имеет полюсы при тех значениях c , которые являются собственными для однородной задачи. Кратность полюса равна кратности собственного значения.*

В точках $s=U(a)$, $U(z)$ функция $\psi_1(z, c)$ не аналитична, именно, имеет ветвление. Но тем не менее справедлива другая лемма.

Лемма 3. *Функция $\psi_1(z, c)$ непрерывна в точках $s=U(a)$, $U(z)$. Грубо говоря, это следует из того, что, как было показано в п. 7, все решения непрерывны в окрестности особой точки, где $U-s=0$. Точнее, если z_c есть точка, где $U(z_c)=c$, то имеются два линейно независимых решения вида*

$$\begin{aligned}\psi_I &= (z - z_c) |1 + \alpha(z, c)|, \quad \alpha(0, c) = 0; \\ \psi_{II} &= 1 + (U_c''/U_c') \ln(z - z_c) \psi_I + (z - z_c) \beta(z, c),\end{aligned}$$

где $\alpha(z, c)$, $\beta(z, c)$ — аналитические функции от z . В некоторой окрестности точки $z=z_c$ функция $\alpha(z, c)$ была получена в виде ряда по $(z - z_c)$, коэффициенты которого зависели от c как от параметра. Для этих коэффициентов получались рекуррентные формулы, из которых можно было усмотреть, что они непрерывно зависели от c . Сходимость ряда не исследовалась, но это делается в общей аналитической теории дифференциальных уравнений. Соответствующее рассуждение показывает, что $\alpha(z, c)$ — непрерывная функция пары z, c . Пока это верно для значений z , достаточно близких к соответствующим z_c , так чтобы ряд сходился. Но по теореме о непрерывной зависимости решения от начальных условий и параметров непрерывная зависимость от z, c решения $\psi_I(z, c)$ имеет место всюду, куда можно продолжить $\psi_I(z, c)$, решая дифференциальное уравнение. Функция $\psi_{II}(z, c)$ получается в виде интеграла (36), содержащего функцию $\psi_I(z, c)$. Отсюда нетрудно получить непрерывность этой функции от пары (z, c) . Осталось добавить, что вронскиан решений ψ_I, ψ_{II} равен единице, поэтому

$$\psi_I(z, c) = \psi_I(z, c) \psi_{II}(a, c) - \psi_I(a, c) \psi_{II}(z, c)$$

и $\psi_I(z, c)$ также оказывается непрерывной функцией пары переменных z, c всюду, в том числе и при значениях z в окрестности z_c .

Как следствие имеем:

Лемма 4. *Функция $W(c)$ непрерывна всюду в области $\text{Im } c > -\varepsilon$, где ε — достаточно малое положительное число.*

В самом деле, $W(c)$ аналитически продолжается в эту область. При этом точки $c=U(a)$, $U(b)$ являются точками ветвления, но $W(c)=\psi_1(a, c)$ и по предыдущей лемме $W(c)$ оказывается непрерывной и в этих точках ветвления.

Теорема 11. Если $c=U(a)$, $U(b)$ не являются собственными значениями задачи, то в верхней полуплоскости и в окрестности отрезка $[U(a), U(b)]$, на которую аналитически продолжается функция $W(c)$ при любых разрезах из точек ветвления $U(a)$, $U(b)$, имеется конечное число собственных значений.

Доказательство. То что $c=U(a)$ не есть собственное значение, означает, что при $c=U(a)$ функция $\psi_1(z, c)$ не обращается в нуль при $z=b$, т. е. $W(c) \neq 0$ при $c=U(a)$. По непрерывности, эта функция отлична от нуля и в окрестности значения $c=U(a)$. Если же учесть, что эта функция аналитична и не может иметь нулей при больших значениях $|c|$, т. е. не может быть произвольно больших по модулю собственных значений (теорема 4), то мы и получим требуемое утверждение.

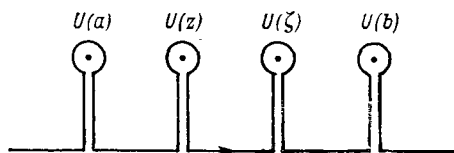


Рис. 9. Деформация пути интегрирования в формуле (55).

Формулу (52) для дальнейшего нужно несколько видоизменить. Именно, если имеется вещественное собственное значение c , то в окрестности точки ξ_c , где $U(\xi_c)=c$ путь интегрирования в интеграле (52) деформируем вниз, в обход точки ξ_c . Тем самым можно добиться того, что ξ нигде не будет приближаться к точкам ξ_c таким, что $U(\xi_c)=c$ есть собственное значение задачи. От такой деформации контура функция $\psi^*(z, c)$ не изменится. Формула (56) также будет пониматься в этом смысле: вместо отрезка интегрирования более сложный контур, обходящий снизу точки ξ_c , где $U(\xi_c)=c$. Деформированный контур обозначим $[a, b]'$. Значит в дальнейшем $z \in [a, b]$, $\xi \in [a, b]'$.

Теперь вспомним формулу (55), которая даст нам возможность оценить $G(z, \xi; t)$. Как уже было сказано, в этой формуле нужно опустить вниз путь интегрирования. Это можно сделать, пользуясь тем, что функция $G^*(z, \xi; c)$ аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость и затухает на бесконечности как $1/|c|$. Нужно лишь учесть точки ветвления этой функции. В результате путь интегрирования можно сделать таким, как на рис. 9. Горизонтальный участок контура проведен на фиксированном расстоянии под вещественной осью. Радиусы окружностей выберем зависящими от времени, в пределах от C/t до $2C/t$, где C — фиксированная константа. Если две окружности пересекаются, то заменим их совместным овалом. Кроме того, пользуясь некоторым остающимся произволом в выборе радиуса

окружности, будем считать, что окружность нигде не приближается к собственным значениям ближе, чем на половину радиуса.

Интеграл по горизонтальной части контура экспоненциально затухает, за счет множителя $\exp(-i\alpha ct)$. Интеграл по окружности оценивается следующим образом. $|\exp(-i\alpha ct)|$ остается ограниченным, так как $\operatorname{Im} c < 2C/t$. Что касается $G^*(x, \xi; c)$, то эта функция оценивается по (53). Числитель равномерно ограничен. Знаменатель же может приближаться к нулю не быстрее, чем радиус в первой степени — либо за счет $W(c)$, либо за счет $U(\xi) - c$. Одновременно и то и другое не может стремиться к нулю, так как $\xi \in [a, b]'$, т. е. $U(\xi)$ нигде не приближается к собственным значениям — нулям функции $W(c)$ ближе, чем на фиксированное расстояние. Длина дуги окружности пропорциональна радиусу, поэтому интеграл по окружностям остается ограниченным при $t \rightarrow \infty$. Аналогичная оценка для интеграла по вертикальным отрезкам. Здесь хотя длина отрезка не стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, но играет роль экспоненциальное затухание $|\exp(-i\alpha ct)|$. Оценка такова:

$$\int_{c/t}^{\infty} e^{-t\zeta} d\zeta/\zeta = \int_c^{\infty} e^{-\zeta} d\zeta/\zeta = \text{const.}$$

Итак, интеграл ограничен равномерно по $z \in [a, b]$ и $\xi \in [a, b]'$.

Когда контур интегрирования был деформирован, не было учтено еще следующее обстоятельство. Подынтегральная функция имеет полюсы при тех c , которые являются собственными значениями задачи. К интегралу, ограниченность которого доказана, следует добавить сумму вычетов во всех полюсах. Если собственное значение простое, то вычет в нем равен

$$\text{const } G^*(z, \xi; c) \exp(-i\alpha ct). \quad (57)$$

Если собственное значение кратное, кратности k , то

$$\begin{aligned} & \text{const } d^{k-1} \{ \exp(-i\alpha ct) G^*(z, \xi; c) \} / dc^{k-1} = \\ & = \text{const} \sum_{p=0}^{k-1} (-i\alpha t)^p \binom{k-1}{p} \exp(-i\alpha ct) d^{k-1-p} G^* \times \\ & \quad \times (z, \xi; c) / dc^{k-1-p}. \end{aligned} \quad (58)$$

Эти вычеты выделяют из $\psi(z, t)$ в формуле (56) не что иное как волновые решения. Если неограниченный рост и может появиться, то лишь за счет этих членов. Это будет в двух случаях: либо имеется невещественное собственное значение, тогда решение растет экспоненциально, либо имеется вещественное кратное собственное значение, тогда (58) обнаруживает степенной рост решения. Все это дает следующую теорему.

Теорема 12. Двумерное плоскопараллельное течение с монотонным профилем скорости, при условии, что $U(a)$ и $U(b)$ не являются собственными значениями, может быть неустойчивым, лишь если задача имеет не вещественные собственные значения дискретного спектра, либо кратные вещественные.

II. Уравнение для описания крупномасштабных движений атмосферы*

Движение воздуха описывается обычными уравнениями гидродинамики. Если специально не интересоваться пограничным слоем вблизи твердой поверхности, то вязкостью можно пренебрегать и считать воздух идеальной жидкостью. Нас будут интересовать крупномасштабные процессы, ответственные, например, за изменения погоды. Для таких процессов характерные длины волн составляют тысячи километров, а времена — порядка суток. Тем самым скорость волн оказывается порядка 10—20 м/с, что намного меньше скорости звука. В совокупности с небольшими скоростями частиц в волне (те же 10—20 м/с) это показывает, что и сжимаемость воздуха для таких движений не очень существенна (иное дело, например, при изучении приливных волн, которые обтекают Землю со скоростью суточного вращения, т. е. порядка скорости звука; в этом случае сжимаемость очень существенна). Тем не менее обычно пишут уравнения движения воздуха с учетом сжимаемости. Это удобно, например, тем, что позволяет учесть неадиабатические факторы: лучистые притоки тепла, притоки тепла от турбулентной теплопроводности, от реализации скрытой теплоты при конденсации водяного пара. Впрочем все это становится существенным, лишь если нас интересуют изменения в течение достаточно продолжительного срока, не менее недели — характерного времени превращения тепловой энергии в механическую; сейчас это учитываться не будет. Система уравнений такова:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + l v - l_1 w; & \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - l u; \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + l_1 u; & \frac{d\rho}{dt} &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{59}$$

* Подробнее [10, 14].

Здесь необходимы пояснения. Уравнения написаны в системе координат, вращающейся вместе с Землей. Уравнения эти не точны, а приближенны. Строго говоря, их нужно было бы писать в криволинейной—сферической системе координат. Если считать допустимым изучение ограниченной части атмосферы, пренебрегая влиянием оставшейся части, например, учитывая лишь стандартную в метеорологии область, размером с Европу, часть Атлантики, Северной Африки, Западной Сибири и Ледовитого океана, то с известной точностью можно считать ее плоской и выбирать декартовы координаты, где ось Ox направлена всюду на восток, а ось Oy — на север, что и сделано в уравнениях (59). Впрочем принципиально ничего не изменяется при точном написании уравнений в сферических координатах, лишь запись более громоздка. Далее, поскольку система координат неинерциальна, к относительным уравнениям добавляются переносные и кориолисовы. Ускорение Кориолиса $2\omega \times V$ и дало в уравнениях члены с параметрами $l = 2\omega \sin \varphi$ и $l_1 = 2\omega \cos \varphi$, где φ — географическая широта. Что касается переносных — центробежных ускорений, то хотя они и велики по значениям, их обычно не пишут. Поле этих ускорений, в отличие от относительных и кориолисовых, очень однородно и его можно включить в гравитационное поле (некоторое уменьшение веса на экваторе, пренебрежимо малое).

Написанная система третьего порядка по времени. Она кажется сперва системой четвертого порядка, но если взять дивергенцию от первых трех уравнений, то мы получим уравнение, не содержащее производных по времени, которым можно заменить любое из написанных уравнений. Тем не менее порядок этой системы все еще высок, и чтобы работать с ней с той же легкостью, как и ранее, требуется понизить порядок системы. Здесь помогает то обстоятельство, что все крупномасштабные движения атмосферы квазидвумерны. В самом деле, горизонтальная протяженность характерных образований — циклонов, антициклонов, гребней, ложбин, короче говоря, волн, во много раз больше толщины деятельной части атмосферы, тропосферы (в 10 км тропосферы сосредоточено около 80% всей массы воздуха). Соответственно и горизонтальные скорости на два-три порядка превосходят вертикальные. Таким образом происходит почти горизонтальный перенос консервативных характеристик (так называемого потенциального вихря, см. ниже). Трехмерная структура проявляется лишь в том, что на разных высотах перенос осуществляется с разными скоростями.

При выводе основных уравнений мы не будем вдаваться в чрезмерные подробности (см. книги по численному прогнозу погоды), но осветим основные моменты. Прежде всего кориолисовы члены, содержащие параметр l , малосущественны. В самом деле, в третьем уравнении (59) кориолисово ускорение $l_1 u$ стоит рядом с ускорением тяжести g , большим его на четыре порядка. В первом

же уравнении член lv меньше lv на два-три порядка за счет упоминавшейся малости вертикальной скорости по сравнению с горизонтальной для интересующих нас крупномасштабных движений (для мелкомасштабных же оба члена не играют никакой роли).

Более существенное, но также очень надежное приближение получается, если в третьем уравнении считать вертикальное ускорение dw/dt равным нулю (для крупномасштабных движений это ускорение на 7—8 порядков меньше ускорения силы тяжести), т. е. заменить это уравнение статическим соотношением

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g. \quad (60)$$

Это значит, что разность давлений на двух высотах считается равной весу столба воздуха единичного сечения между этими высотами. Перейдем, как это принято в метеорологии, к другой системе координат, где в качестве вертикальной координаты будет принята не высота z , а давление p . Вертикальной скоростью в этих координатах будет не $w = dz/dt$, а $w^* = dp/dt$. Для индивидуальной производной имеем выражение

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w^* \frac{\partial}{\partial p}. \quad (61)$$

Давление перестало быть искомой функцией — превратилось в независимую переменную. Взамен искомой функцией станет z .

Нетрудно подсчитать, что члены уравнений (59) $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$, $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$ превратятся в $-g \frac{\partial z}{\partial x}$, $-g \frac{\partial z}{\partial y}$ (где частные производные вычисляются, разумеется, в новой системе координат, при фиксированном p). Объем $\iiint dx dy dp$ в новой системе, — это не что иное как вес жидкости, в силу уравнения статики. Из закона сохранения массы следует, что этот объем — вес данного количества жидкости сохраняется, т. е. и в этих переменных жидкость ведет себя как несжимаемая, и уравнение неразрывности сохраняет свою форму

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial p} = 0. \quad (62)$$

Итак, получены следующие уравнения

$$\frac{du}{dt} = -g \frac{\partial z}{\partial x} + lv;$$

$$\frac{dv}{dt} = -g \frac{\partial z}{\partial y} - lu;$$

$$\frac{dp}{dt} = 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w^*}{\partial p} = 0;$$

$$\rho = -\frac{1}{g} \left/ \frac{dz}{dp} \right. . \quad (63)$$

Легко получить

$$\begin{aligned} w^* = dp/dt &= (\partial p/\partial t + u \partial p/\partial x + v \partial p/\partial y)_z + w \partial p/\partial z = \\ &= -g\rho [(\partial z/\partial t + u \partial z/\partial x + v \partial z/\partial y)_p - w], \end{aligned}$$

где индекс z или p означает, в каких координатах вычисляется частная производная — при фиксированном z или p . Дальше эти индексы опускаются. Отсюда находим краевое условие на поверхности земли. В старых координатах это было $w=0$, в новых

$$w^* = -g\rho \left(\frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial y} \right). \quad (64)$$

К сожалению, p -координаты обладают тем недостатком, что в них граница области — поверхность земли нестационарна и зависит от решения. Здесь идут на упрощение, полагая, что эта граница всегда совпадает с некоторой изобарической поверхностью $p=p_0$ и приписывая краевое условие (64) этому значению p_0 .

Несколько преобразуем третье из уравнений (63):

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \rho + w^* \frac{\partial \rho}{\partial p} = \\ &= -\rho^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{\rho} \right) + w^* \frac{\partial \rho}{\partial p} = \\ &= g\rho^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right) + w^* \frac{\partial \rho}{\partial p}, \end{aligned}$$

в силу пятого из уравнений. Обозначим $N = \sqrt{-\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}} = g \sqrt{\frac{\partial \rho}{\partial p}}$. Это основная характеристика плотностного расслоения

атмосферы, имеющая размерность частоты и называемая частотой Брента—Вяйсяля (ее физический смысл — частота колебаний несжимаемой частицы, отклонившейся по вертикали от положения равновесия и подверженной архимедовым силам). Уравнение приняло вид

$$m^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right) + w^* = 0, \quad m^2 = \frac{g^3 \rho^2}{N^2}. \quad (65)$$

Продифференцируем его по p и исключим ω^* с помощью уравнения неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial p} m^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (65')$$

Еще одно приближение состоит в том, что коэффициент m^2 считается слабо зависящим от решения, т. е. его можно считать некоторой известной функцией от вертикальной координаты p .

Чтобы понизить порядок системы далее, производится анализ величин отдельных членов уравнений. При этом оказывается, что левые части первых двух уравнений (63) и левая часть уравнения (65') на порядок меньше членов правых частей. Это значит, что градиент давления уравнивается кориолисовыми силами и двумерная дивергенция близка к нулю — течение двумерно несжимаемо. Однако взаимная компенсация членов правых частей далеко не столь полна, как это было в третьем уравнении (59). Поэтому было бы слишком грубо левые части просто положить равными нулю, тем более, что система потеряла бы тогда эволюционный характер. Левые части учитываются как малые возмущения. Можно перед ними поставить малый параметр и разложить решения в ряд по этому параметру. Этот прием носит название квазигеострофического разложения (геострофический ветер — это такой, что кориолисовы ускорения точно компенсируются градиентом давления). Итак, имеем систему

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(-\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega^* \frac{\partial u}{\partial p} \right) &= -g \frac{\partial z}{\partial x} + l'v; \\ \varepsilon \left(-\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega^* \frac{\partial v}{\partial p} \right) &= -g \frac{\partial z}{\partial y} - l'u; \\ \varepsilon \frac{\partial}{\partial p} m^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial p} \right) &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega^*}{\partial p} &= 0 \end{aligned}$$

и ищем решения в виде рядов

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \dots, & v &= v_0 + \varepsilon v_1 + \dots, \\ \omega^* &= \omega_0^* + \varepsilon \omega_1^* + \dots, & z &= z_0 + \varepsilon z_1 + \dots \end{aligned}$$

Кроме того считаем, что параметр Кориолиса l почти постоянен, отклонения его от среднего значения l_0 имеют порядок ε : $l = l_0 + \varepsilon l_1$. Для нулевого приближения имеем

$$\begin{aligned} -g \frac{\partial z_0}{\partial x} + l_0 v_0 &= 0, & -g \frac{\partial z_0}{\partial y} - l_0 u_0 &= 0, \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} &= 0, & \omega_0^* &= 0. \end{aligned} \quad (66)$$

Для первого приближения

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} &= -g \frac{\partial z_1}{\partial x} + l_0 v_1 + l_1 v_0; \\ \frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} &= -g \frac{\partial z_1}{\partial y} - l_0 u_1 - l_1 u_0; \\ \frac{\partial}{\partial p} m^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial z_0}{\partial p} \right) &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}; \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1^*}{\partial p} &= 0.\end{aligned}\quad (67)$$

Первые три уравнения независимы от четвертого — они не содержат вертикальной скорости. Легко проверить еще, что в силу (66) третье уравнение (67) можно переписать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial p} m^2 \frac{\partial z_0}{\partial p} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}, \quad (68)$$

т. е. переставить дифференциальные операторы. Теперь возьмем вихрь от первых двух уравнений, т. е. первое из них продифференцируем по y и вычтем второе, продифференцированное по x .

При этом z_1 исчезнет, а дивергенцию $\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}$ исключим с помощью (68). Будем иметь

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) = \\ &= -\frac{dl_1}{dy} v_0 - l_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial p} m^2 \frac{\partial z_0}{\partial p}.\end{aligned}$$

Заметим, что $\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{g}{l_0} \Delta_2 z_0$, в силу (66). Итак, имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\varepsilon \frac{g}{l_0} \Delta_2 z_0 + l + \varepsilon \frac{\partial}{\partial p} l_0 m^2 \frac{\partial z_0}{\partial p} \right) = 0.$$

Параметр ε свою роль индикатора малых членов сыграл, можно снова положить его равным единице:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{g}{l_0} \Delta z + l + \frac{\partial}{\partial p} n^2 \frac{\partial z}{\partial p} \right) = 0, \quad (69)$$

где $n^2 = l_0 m^2 = l_0 g^3 \rho^2 / N^2$. Здесь и в дальнейшем под z понимается нулевое приближение z_0 , под d/dt — двумерная производная $\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} + v_0 \frac{\partial}{\partial y}$ и под Δ — двумерный оператор Лапласа.

Уравнение (69) имеет форму закона сохранения. $\frac{g}{l_0} \Delta z$ — это вихрь относительного движения, $\partial v_0 / \partial x - \partial u_0 / \partial y$. l — вихрь переносного движения (вертикальная компонента удвоенной угловой скорости вращения Земли). Первые два члена вместе — это

абсолютный вихрь. Третий член зависит от плотностного рас-
слоения. Вся сохраняющаяся величина носит название потен-
циального вихря.

Примечание. Существует общий закон сохранения потен-
циального вихря для течения расслоенной идеальной несжимае-
мой жидкости. Он имеет вид

$$\frac{d}{dt} \text{grad } \rho (\text{rot } \mathbf{v} + 2\vec{\omega}) = 0.$$

Уравнение (69) может быть получено непосредственно из этого
закона при учете квазидвумерного, квазистатического (уравне-
ние (60)) и квазигеострофического характера движения.

Основное для дальнейшего уравнение (69) носит название
уравнения вихря квазигеострофической модели. Это уравнение
первого порядка по времени. Характерной его чертой является
то, что потенциальный вихрь переносится по горизонтали (точ-
нее по близким к горизонтали изобарическим поверхностям).

Для уравнения (69) требуется еще краевое условие на по-
верхности земли. Оно может быть получено из (64) исключе-
нием ω^* с помощью (65); имеем

$$\left. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z}{\partial p} + s^2 z \right) \right|_{p_0} = 0, \quad (70)$$

где $s^2 = N^2/g^2\rho$. Физический смысл этого условия следующий. Бу-
дем считать, что поверхность $p = p_0$ близка к поверхности земли
 $z = 0$ и разложением в ряд по степеням этого отклонения дока-
жем, что $\left(\frac{\partial z}{\partial p} + s^2 z \right)_{p_0} = -\frac{1}{g\rho} \Big|_{z=0}$. Действительно,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{g\rho} \Big|_{z=0} &= -\frac{1}{g\rho} \Big|_{p_0} + \frac{d}{dz} \left(-\frac{1}{g\rho} \right)_{p_0} (0 - z)_{p_0} = \\ &= \frac{\partial z}{\partial p} \Big|_{p_0} - \frac{1}{g\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial z} z \Big|_{p_0} = \left(\frac{\partial z}{\partial p} + \frac{N^2}{g^2\rho} z \right)_{p_0} = \left(\frac{\partial z}{\partial p} + s^2 z \right)_{p_0}. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (70) означает сохранение приземной
плотности двумерным течением. И в самом деле у поверхности
земли плотность сохраняется двумерным течением, так как вер-
тикальные скорости отсутствуют. Приближенность краевого ус-
ловия, о которой говорилось выше, заключается в том, что ско-
рости двумерного течения u и v берутся не с поверхности земли,
а с уровня $p = p_0$, близкого к этой поверхности.

Иногда рассматривают более простое условие

$$\left. \frac{\partial z}{\partial p} + s^2 z \right|_{p_0} = \text{const.} \quad (71)$$

Теперь понятно, что оно означает постоянство плотности на по-
верхности земли.

Интересный частный случай получается при рассмотрении жидкости, находящейся в безразличном статическом равновесии. Это имеет место при $\rho = \text{const}$, поскольку мы рассматриваем несжимаемую жидкость. (Очевидно, придется рассматривать тогда ограниченные по высоте течения и ставить наверху дополнительные краевые условия.) Непосредственно в уравнении (69) совершить предельный переход к $\rho = \text{const}$ не удастся, так как в последнем члене получается неопределенность типа $0 \cdot \infty$. В самом деле, $\frac{\partial}{\partial p} n^2 \frac{\partial z}{\partial p}$ не зависит тогда от t, x, y , так как $\partial z / \partial p = -1/g\rho$. Значит, производная d/dt от этого члена обратилась бы в нуль, но $n^2 = \infty$ за счет обращения в нуль частоты Брента—Ваясяля N . Чтобы раскрыть эту неопределенность, проинтегрируем уравнение по всей толще атмосферы, от 0 до ∞ , еще до перехода к пределу. Для этого запишем уравнение в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{g}{l_0} \Delta z + l \right) + \frac{\partial}{\partial p} \frac{d}{dt} n^2 \frac{\partial z}{\partial p} = 0.$$

(Выше отмечалось, что в такой ситуации, в силу (66), операторы $\frac{\partial}{\partial p}$ и $\frac{d}{dt}$ перестановочны.) Интегрируем:

$$\int_0^{p_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{g}{l_0} \Delta z + l \right) dp + \frac{d}{dt} n^2 \frac{\partial z}{\partial p} \Big|_0^{p_0} = 0.$$

На верхней границе, при $p=0$, нужно потребовать, чтобы последний член обратился в нуль (например, считая, что $\rho = \text{const}$). При $p=p_0$ воспользуемся краевым условием (70). Тогда имеем

$$\int_0^{p_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{g}{l_0} \Delta z + l \right) dp - \frac{d}{dt} g \rho'_0 z \Big|_{p_0} = 0.$$

Здесь уже можно перейти к пределу $\partial z / \partial p = \text{const}$. Отсюда следует, что $\frac{\partial^2 z}{\partial p \partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial p \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial p \partial y} = 0$ и подынтегральное выражение не зависит от p . Его можно вынести из-под знака интеграла. Что касается второго члена, то он также не зависит от p , и его можно приписать не уровню p_0 , а любому уровню p . Получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{g}{l_0} \Delta z + l - \frac{g l_0}{c^2} z \right) = 0; \quad c^2 = p_0 / \rho \quad (72)$$

при всех p , а z имеет вид $z = z_1(x, y, t) + z_2(p)$. Итак, в случае безразличной стратификации движения на всех уровнях p подобны и описываются двумерным уравнением (72).

Если бы в уравнении (72) не было последнего члена, то оно совпало бы по форме с уравнением двумерного течения несжимаемой жидкости с функцией тока $\psi = gz/l_0$ во вращающейся системе координат (l — переносный вихрь), но с дополнительным членом $-gl_0z/c^2$, выражающим двумерную сжимаемость.

Уравнение (72) можно получить в более общих, чем несжимаемость и однородность, предположениях, а именно — для баротропной жидкости. Поэтому оно обычно называется баротропным уравнением вихря квазигеострофической модели.

12. Сохранение энергии. Статическая устойчивость

Начнем с простого двумерного уравнения (72). Без труда проверяется инвариантность следующего квадратичного относительно z интеграла

$$E = \frac{1}{2} \iint \left[(\nabla z)^2 + \frac{l_0^2}{c^2} z^2 \right] dx dy. \quad (73)$$

В самом деле

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \iint \left[\nabla z \nabla z_t + \frac{l_0^2}{c^2} z z_t \right] dx dy = \\ &= \iint \left[-\Delta z + \frac{l_0^2}{c^2} z \right] z dx dy + \oint z \nabla z_t \mathbf{v} d\sigma, \end{aligned}$$

где $\mathbf{v}$ — орт нормали к границе, $d\sigma$ — элемент дуги.

В силу уравнений геострофического ветра $u = -\frac{g}{l_0} \frac{\partial z}{\partial y}$, $v = \frac{g}{l_0} \frac{\partial z}{\partial x}$, т. е. gz/l_0 является функцией тока течения. В качестве условий на боковых границах естественно принять условие непротекания, $z = \text{const}$ и постоянства циркуляции по границе, $\oint \nabla z \cdot \mathbf{v} dl = \text{const}$. Тогда в последнем выражении исчезает интеграл по границе и остается двойной интеграл. Из уравнения (72), которое можно переписать, пользуясь теми же формулами геострофического ветра, в виде

$$\Omega_t - \frac{g}{l_0} z_y \Omega_x + \frac{g}{l_0} z_x \Omega_y = 0; \quad (74)$$

$$\Omega = \frac{g}{l_0} \Delta z + l - \frac{gl_0}{c^2} z,$$

имеем

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= -\frac{l_0}{g} \iint \Omega_z dx dy = \iint [-z_y \Omega_x + z_x \Omega_y] z dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \iint [-(z^2)_y \Omega_x + (z^2)_x \Omega_y] dx dy = -\frac{1}{2} \iint [(z^2 \Omega_x)_y - \\ &- (z^2 \Omega_y)_x] dx dy = +\frac{1}{2} \oint z^2 (\Omega_x dx + \Omega_y dy) = \frac{1}{2} \oint z^2 d\Omega = 0,\end{aligned}$$

так как $z = \text{const}$ на границе. Первый член в интеграле (73) пропорционален кинетической энергии, второй член — потенциальной энергии, связанной с двумерной сжимаемостью. Он носит название баротропной потенциальной энергии.

Вместе с каждым решением z уравнению удовлетворяет также и $z - C$, где C — произвольная константа. Поэтому сохраняется также и

$$\frac{1}{2} \iint \left[(\nabla z)^2 + \frac{l_0^2}{c^2} (z - C)^2 \right] dx dy. \quad (75)$$

Отсюда, между прочим, следует, что сохраняется также и

$$\iint z dx dy. \quad (76)$$

В интеграле (75) естественно подобрать C так, чтобы потенциальная энергия была минимальной. Тогда это будет наибольшей частью потенциальной энергии, которая может обращаться в кинетическую. Чтобы минимизировать выражение потенциальной энергии, достаточно в качестве константы C взять $\bar{z}$ — среднее z по всей области интегрирования. $\bar{z}$, как было показано, не меняется со временем. Итак, получаем закон сохранения величины

$$E = \frac{1}{2} \iint \left[(\nabla z)^2 + \frac{l_0^2}{c^2} (z - \bar{z})^2 \right] dx dy. \quad (77)$$

Второй член в этом интеграле назовем доступной баротропной потенциальной энергией.

Перейдем к интегралу энергии для трехмерного уравнения (69). Проверим сохраняемость следующего квадратичного интеграла:

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2} \iiint_V \left[z_x^2 + z_y^2 + \frac{l_0 n^2}{g} z_p^2 \right] dx dy dp + \\ &+ \frac{1}{2} \iint_{S_H} \frac{l_0^2}{c^2} p_0 z^2 dx dy.\end{aligned} \quad (78)$$

Двойной интеграл здесь взят по нижней поверхности S_H . Проверка выполняется точно так же, как и в двумерном случае.

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & \int \int_V \left[z_x z_{xt} + z_y z_{yt} + \frac{l_0 n^2}{g} z_p z_{pt} \right] dx dy dp + \\ & + \int \int_{S_H} \frac{l_0^2}{c^2} p_0 z z_t dx dy. \end{aligned}$$

Первый интеграл преобразуем по формуле Гаусса—Остроградского:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & -\frac{l_0}{g} \int \int \int_V \Omega_t z dx dy dp + \int \int_{S_B} z (z_x v_x + z_y v_y)_t d\sigma dp + \\ & + \int \int_{S_H} \frac{l_0 n^2}{g} z z_{pt} dx dy + \int \int_{S_H} \frac{l_0^2}{c^2} p_0 z z_t dx dy, \end{aligned}$$

где $\Omega = \frac{g}{l_0} \Delta z + l + \frac{\partial}{\partial p} n^2 \frac{\partial z}{\partial p}$. S_B — боковая цилиндрическая поверхность. Ω удовлетворяет в точности тому же уравнению (74) как и в двумерном случае; поэтому точно так же доказывается обращение в нуль тройного интеграла. Доказательство обращения в нуль интеграла по боковой границе проходит также без изменений. Что касается интегралов по нижней твердой поверхности, то их можно записать в виде

$$\frac{l_0 n^2}{g} \int \int_{S_H} \Theta_t z dx dy,$$

где $\Theta = -z_p - s^2 z$ и воспользоваться законом сохранения Θ на нижней поверхности (70). Тогда обращение в нуль этих членов получается так же, как и для членов с Ω .

Если из z вычесть произвольную функцию от p , то снова получится решение уравнения (69), удовлетворяющее краевому условию (69). Поэтому в интеграле энергии (78) из z_p можно вычесть произвольную функцию от p , а из z — произвольную константу. Отсюда следует сохранение среднего по x, y значения z_p при каждом p , $\bar{z}_p(p)$ и среднего $\bar{z}$ при $p = p_0$. Минимальное значение энергии получится, если в качестве произвольной функции от p и произвольной константы взять эти средние:

$$\begin{aligned} E = & \frac{1}{2} \int \int \int \left[z_x^2 + z_y^2 + \frac{l_0 n^2}{g} (z_p - \bar{z}_p)^2 \right] dx dy dp + \\ & + \frac{1}{2} \int \int_{S_H} \frac{l_0^2}{c^2} p_0 (z - \bar{z})^2 dx dy. \end{aligned} \quad (79)$$

Последний член в тройном интеграле называется доступной потенциальной (бароклинной) энергией. Двойной интеграл — зна-

комая нам уже доступная баротропная энергия. Доступная энергия — это максимальная часть потенциальной энергии, которая может переходить в кинетическую.

Рассмотрим статическое состояние атмосферы, когда скорость равна нулю. В силу формул геострофического ветра, $u = -\frac{g}{f_0} \frac{\partial z}{\partial y}$, $v = \frac{g}{f_0} \frac{\partial z}{\partial x}$, в этом состоянии z есть функция одного p . Поэтому $\bar{z}_p = z_p$ и $\bar{z} = z$, т. е. доступная энергия равна нулю, а, следовательно, минимальна в этом состоянии. Из общих принципов отсюда следует, что статические состояния являются состояниями устойчивого равновесия. (Напомним, что в модель заложена вещественность частоты Брента—Вайсяля N , что равносильно убыванию плотности с высотой.)

13. Баротропная неустойчивость

Переходим к изучению устойчивости нестатических состояний. Проще всего это сделать для двумерной модели, описываемой уравнением (72). Обычная для метеорологии проблема состоит в изучении устойчивости зональных течений, т. е. течений, направленных вдоль кругов широты, причем скорость зависит только от широты. Безразлично, записаны ли уравнения в той квазидекартовой системе координат, которой мы пользовались в предыдущем параграфе, или, более точно, в сферической системе координат. В этой системе уравнения имеют тот же вид (72), но при этом

$$u_\theta = -\frac{1}{a \sin \theta} \frac{g}{f_0} \frac{\partial z}{\partial \lambda}, \quad u_\lambda = \frac{1}{a} \frac{g}{f_0} \frac{\partial z}{\partial \theta}; \quad (80)$$

$$\Delta = \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right). \quad (81)$$

Одного закона сохранения энергии (73) недостаточно для выяснения вопроса об устойчивости. Хотя этот закон и ограничивает возможность нарастания решения во времени, но не запрещает им удаляться от стационарного состояния. На помощь приходит однако второй закон сохранения. Если обозначить через Ω потенциальный вихрь

$$\Omega = \frac{g}{f_0} \Delta z + l - \frac{g l_0}{c^2} z, \quad (82)$$

то сохраняется интеграл

$$I = \iint \Phi(\Omega) dx dy,$$

где Φ — произвольная функция.

Это следует из того, что уравнение (72) имеет форму сохранения Ω для каждой индивидуальной частицы, а также из сохранения элемента площади ds (скорости выражаются через функцию тока gz_0/l_0 , т. е. течение несжимаемой). В дальнейшем функцию тока gz_0/l_0 будем обозначать ψ . Далее рассуждения буквально следуют схеме, принятой в п. 6. Образует функционал

$$F = E + I.$$

и попробуем подобрать функцию Φ таким образом, чтобы этот функционал имел относительный минимум для того стационарного течения, устойчивость которого исследуется. Предположим, что функция ψ для стационарного течения, обозначим ее $\bar{\psi}$, такова, что для нее потенциальный вихрь

$$\bar{\Omega} = \Delta \bar{\psi} + l - \frac{l_0^2}{c^2} \bar{\psi}.$$

представляет монотонную функцию широты. Тогда этот потенциальный вихрь можно принять за новую меридиональную координату и считать $\bar{\psi}$ функцией от $\bar{\Omega}$:

$$\bar{\psi} = \Psi(\bar{\Omega}). \quad (83)$$

Теперь находим вариации функционала F :

$$\begin{aligned} \delta F &= \iint \left[\nabla \bar{\psi} \nabla \delta \psi + \frac{l_0^2}{c^2} \bar{\psi} \delta \psi + \Phi'(\bar{\Omega}) \delta \Omega \right] ds = \\ &= \iint \left[-\bar{\psi} \Delta \delta \psi + \frac{l_0^2}{c^2} \bar{\psi} \delta \psi + \Phi'(\bar{\Omega}) \delta \Omega \right] ds = \\ &= \iint \left[-\Psi(\bar{\Omega}) + \Phi'(\bar{\Omega}) \right] \delta \Omega ds \end{aligned} \quad (84)$$

(при интегрировании по частям интегралы по границе обращаются в нуль в силу краевых условий).

$$\delta^2 F = \iint \left[(\nabla \delta \psi)^2 + \frac{l_0^2}{c^2} \delta \psi^2 + \Phi''(\bar{\Omega}) \delta \Omega^2 \right] ds. \quad (85)$$

Осталось положить $\Phi' = \Psi$ и первая вариация обратится в нуль. Достаточное условие минимума будет выполнено, если вторая вариация будет положительна. Для этого достаточно, чтобы $\Phi''(\bar{\Omega}) = \Psi'(\bar{\Omega}) > 0$. Однако обычно бывает выполнено в точности противоположное условие $\Psi'(\bar{\Omega}) < 0$. В самом деле, ветер, как правило, направлен с запада на восток, т. е. функция тока ψ растет с севера на юг. Что касается потенциального вихря, то его поведение определяется в основном переносным вихрем — параметром Кориолиса l , который убывает с севера на юг. Иными словами, функция тока есть убывающая функция потен-

циального вихря. Чтобы все-таки получить критерий устойчивости, можно записать уравнение движения в некоторой другой системе координат, вращающейся относительно первой с постоянной угловой скоростью. Новая функция тока ψ_1 будет выражаться формулой

$$\psi_1 = \psi - f,$$

где $f = a^2 \omega_1 \cos \theta$. Легко видеть, что ψ_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt} \left(\Delta \psi_1 + l_1 - \frac{l_0^2}{c^2} f - \frac{l_0^2}{c^2} \psi_1 \right) = 0,$$

где l_1 — параметр Кориолиса в новой системе координат, $l_1 = 2(\omega + \omega_1) \cos \theta$. Это уравнение отличается от старого (72) наличием дополнительного к параметру Кориолиса члена $-l_0^2 f / c^2$.

Однако этот член не мешает выполняться тому же самому закону сохранения энергии (73). Следовательно, все дальнейшие рассуждения проходят и в этой системе координат. Выражения для вариаций (84) и (85) остаются в силе. Но если новую систему координат выбрать так, чтобы она в своем вращении опережала ветер, т. е. чтобы ветер имел в ней направление с востока на запад, то функция тока будет убывать с севера на юг, так же точно, как и $\bar{\Omega}$, следовательно $\Phi''(\bar{\Omega}) > 0$ и вторая вариация окажется положительно определенной.

Теорема 13 (Го С.-Л. [20]). *Если потенциальный вихрь $\bar{\Omega}$ монотонно изменяется от полюса к полюсу, то такое зональное течение устойчиво.*

Интересно оценить, насколько реально выполнение условия монотонности потенциального вихря. Если считать, довольно грубо, характерным изменением зонального ветра 10 м/с, а масштабом длины 10^3 км, то для изменения относительного вихря имеем 10^{-11} с $^{-1}$. Что касается последнего члена $l_0^2 \psi / c^2$, то он вообще мал — на порядок меньше относительного вихря, так как его отношение к относительному вихрю оценивается как $l_0^2 L^2 / c^2$ где L — горизонтальный масштаб длины, 10^3 км. Из этого анализа видно, что изменение переносного вихря, вообще говоря, больше изменения относительного вихря, и потенциальный вихрь должен быть монотонным; но это выполняется на пределе, и вполне реальны ситуации, когда это нарушается и может иметь место неустойчивость. Такой вид неустойчивости называется баротропной неустойчивостью, так как имеет место в баротропной (двумерной) модели. Энергия развивающихся возмущений черпается при этом в основном из кинетической энергии среднего течения.

Поучительно записать еще уравнение (72) в линеаризованной форме и посмотреть, как получается теорема 13 для волновых

решений. Если $\psi = \bar{\psi}(\theta) + \psi'$ и ψ' считается малым, то линеаризованное уравнение будет

$$\Omega'_t + [\bar{\psi}, \Omega] + [\psi', \bar{\Omega}] = 0,$$

где

$$\bar{\Omega} = \Delta \bar{\psi} + l - \frac{l_0^2}{c^2} \bar{\psi},$$

$$\Omega' = \Delta \psi' - \frac{l_0^2}{c^2} \psi'.$$

Квадратные скобки означают якобиан:

$$[A, B] = \frac{1}{a^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial B}{\partial \lambda} - \frac{\partial A}{\partial \lambda} \frac{\partial B}{\partial \theta} \right).$$

Решение ищем в виде

$$\psi' = v(\cos \theta) e^{i(\sigma t + s\lambda)}.$$

Для v получаем уравнение

$$\begin{aligned} (U - \tilde{\sigma}) \left[\frac{d}{d\mu} (1 - \mu^2) \frac{dv}{d\mu} - \frac{s^2 v}{1 - \mu^2} - \frac{l_0^2 a^2}{c^2} v \right] + \\ + \left\{ 2\omega - [(1 - \mu^2) U]'' + \frac{l_0^2 a^2}{c^2} U \right\} v = 0. \end{aligned} \quad (86)$$

Здесь $\mu = \cos \theta$, $\tilde{\sigma} = -\sigma/s$ — угловая фазовая скорость волны, $U = \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta}$ — угловая скорость течения.

Уравнение (86) близко по форме к уравнению Релея для плоскопараллельного течения, знакомому нам по предыдущим пунктам. Разница состоит, во-первых, во множителях $1 - \mu^2$, появившихся за счет сферических координат. Во-вторых, в членах, содержащих c^2 в знаменателе и учитывающих слабую двумерную сжимаемость. Самое же главное — в члене 2ω , учитывающем переносный вихрь. И здесь непрерывный спектр задачи заполняет отрезок $[U_{\min}, U_{\max}]$. Имеется также и дискретный спектр. В отличие от уравнения Релея здесь могут быть вещественные собственные значения, не лежащие на отрезке $[U_{\min}, U_{\max}]$. Так, рассмотрим важный частный случай, когда средний ветер U отсутствует. Уравнение примет вид

$$-\frac{d}{d\mu} (1 - \mu^2) \frac{dv}{d\mu} + \frac{s^2 v}{1 - \mu^2} = \left(-\frac{2\omega}{\tilde{\sigma}} - \frac{l_0^2 a^2}{c^2} \right) v.$$

Решения, регулярные в полюсах $\mu = \pm 1$, суть функции Лежандра и существуют лишь при

$$-\frac{2\omega}{\tilde{\sigma}} - \frac{l_0^2 a^2}{c^2} = n(n+1),$$

где n — произвольное натуральное число, или

$$\tilde{\sigma} = -\frac{2\omega}{n(n+1) + l_0^2 a^2 / c^2}. \quad (87)$$

Получается бесконечный набор волн, бегущих в отрицательном направлении, против вращения Земли, т. е. с востока на запад.* Собственные значения накапливаются к нулю. Эти волны носят название волн Россби. Если бы вращения Земли не было (как в случае уравнения Релея), то была бы бесконечно вырожденная точка спектра $\tilde{\sigma} = 0$. Вращение снимает вырождение и дает бесконечный дискретный спектр, накапливающийся к нулю.

Пусть теперь подключен ветер $U(\mu)$. Будем считать для удобства, что $U_{\min} = 0$. Точки дискретного спектра подвергнутся возмущениям. Нетрудно подсчитать поправки по теории возмущений к собственным значениям. Обозначим через K оператор, обратный к оператору $-\frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu} + \frac{s^2}{1-\mu^2} + \frac{l_0^2 a^2}{c^2}$ при краевых условиях регулярности в полюсах $\mu = \pm 1$. Для функции

$$\xi = -\frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{dv}{d\mu} + \frac{s^2 v}{1-\mu^2} + \frac{l_0^2 a^2}{c^2} v$$

уравнение запишется в виде

$$(-2\omega K + U + VK)\xi = \tilde{\sigma}\xi,$$

где обозначено $V = [(1-\mu^2)U]'' - \frac{l_0^2 a^2}{c^2} U$. Если ξ_n — нормированная собственная функция оператора $2\omega K$, т. е. нормированная функция Лежандра $\tilde{P}_n^s$, то первая поправка к собственному значению по теории возмущений равна

$$c_1 = \int_{-1}^1 \left[U + \frac{V}{n(n+1) + l_0^2 a^2 / c^2} \right] (\tilde{P}_n^s)^2 d\mu.$$

* Строго говоря, нельзя писать это уравнение на всей сфере, так как получено оно из геострофической модели, теряющей смысл вблизи экватора. Здесь уравнения формально экстраполированы на сферу. Можно, однако, вывести более общие модели, приводящие к тем же уравнениям. Например, рассматривать двумерное несжимаемое течение.

Из асимптотики $\widetilde{P}_n^s$ при больших n легко получить, что при $\alpha \rightarrow \infty$ поправка c_1 стремится к константе

$$c_1 \sim \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} U(\cos \theta) d\theta,$$

т. е. средней скорости ветра. Если учесть, что сами собственные значения невозмущенного течения стремятся к нулю, то это может лишь означать, что поправки по теории возмущений имеют смысл лишь для первых, наиболее значительных по величине собственных значений. Для остальных же собственных значений это служит эвристическим указанием на то, что для сколь угодно малых скоростей ветра все собственные значения, кроме быть может их конечного числа, становятся больше $U_{\min}$, сливаясь в непрерывный спектр. По мере увеличения скорости ветра оставшиеся собственные числа одно за другим присоединяются к непрерывному спектру.

Теорема Релея—Го (теорема 13) об устойчивости при условии необращения в нуль величины

$$2\omega - [(1 - \mu^2) U]'' + \frac{l_0^2 a^2}{c^2} U \quad (88)$$

может быть получена интегрированием точно так же, как в п. 5 была получена обычная теорема Релея (теорема 2). Для уравнения Релея было доказано, что вне интервала $[U_{\min}, U_{\max}]$ вещественных собственных значений нет. Теперь, как мы видели,

это не так. Но при условии $\omega + (\mu U)' + \frac{l_0^2 a^2}{2c^2} U > 0$, значительно

более широком, чем необращение в нуль [88], доказывается, что не может быть собственных чисел $\widetilde{\sigma} > U_{\max}$. Это делается так же, как доказывалась теорема 4, т. е. вводится функция $f = v/(U - \widetilde{\sigma})$, удовлетворяющая уравнению

$$\begin{aligned} & [(1 - \mu^2) (U - \widetilde{\sigma})^2 f']' - \frac{s^2}{1 - \mu^2} (U - \widetilde{\sigma})^2 f - \frac{l_0^2 a^2}{c^2} (U - \widetilde{\sigma})^2 f + \\ & + 2 \left[\omega + (\mu U)' + \frac{l_0^2 a^2}{2c^2} U \right] (U - \widetilde{\sigma}) f = 0. \end{aligned}$$

Умножая это уравнение на f и интегрируя, получаем требуемый результат.

14. Вязкость в задаче о баротропной устойчивости

Эта книга посвящена почти исключительно устойчивости течений идеальной жидкости. Однако мы позволим себе здесь несколько отклониться от темы и введем в рассмотрение вязкость.

Каким образом можно ввести в двумерные уравнения вязкость? Рассмотрим двумерное течение несжимаемой жидкости на сфере. Пусть ψ — функция тока течения. Для такого течения абсолютный вихрь

$$\Omega = \frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right) \psi + 2\omega \cos \theta \quad (89)$$

должен сохраняться, т. е.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + [\psi, \Omega] = 0. \quad (90)$$

Это уравнение того же типа, что и прежнее уравнение (72) с $\psi = gz/l_0$, но нет последнего члена, означающего двумерную сжимаемость. Теперь нужно ввести в это уравнение член, описывающий вязкость. Строго это надо было бы делать следующим образом: написать уравнения Навье—Стокса для трехмерного течения, а затем рассматривать лишь течения, у которых отсутствует радиальная компонента скорости и для которых все величины зависят лишь от горизонтальных координат и не зависят от радиальной. Но проще поступить следующим образом. Вязкость должна описываться дифференциальным оператором, инвариантным относительно вращений сферы, так как форма записи уравнений не может зависеть от выбора сферической системы координат. Далее, этот оператор должен обращаться в нуль для движений типа «твердого вращения», когда вся атмосфера вращается как твердое целое и нет относительного проскальзывания соседних слоев, а также для констант. Как выглядит функция тока «твердого вращения»? Если атмосфера вращается вокруг полярной оси с угловой скоростью α , то скорости равны

$$u_\lambda = \alpha a \sin \theta, \quad u_\theta = 0, \quad (91)$$

а функция тока ψ , связанная со скоростью формулами

$$u_\lambda = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = -\frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \quad (92)$$

будет $\psi = -\alpha a^2 \cos \theta$. Иначе это можно записать как $\psi = -\alpha a^2 P_1^0(\cos \theta)$. Если рассматривать твердое вращение с той же угловой скоростью, но относительно другой, неполярной оси, то функция тока этого течения должна получаться из написанной выше поворотом. Но, поворачивая сферическую функцию,

всегда получаем также сферическую функцию с тем же нижним индексом, в данном случае $n=1$, или линейную комбинацию

$$k_0 P_1^0(\cos \theta) + k_1 e^{i\lambda} P_1^1(\cos \theta) + k_2 e^{-i\lambda} P_1^1(\cos \theta). \quad (93)$$

Так можно получить все такие линейные комбинации. Вывод: функциями тока «твердых вращений» служат все сферические функции с $n=1$, или все линейные комбинации функций (93), или все решения уравнения

$$\Delta \psi + \frac{2}{a^2} \psi = 0. \quad (94)$$

Дифференциальный оператор, удовлетворяющий всем поставленным требованиям, может быть только один, $\Delta \left(\Delta + \frac{2}{a^2} \right)$. Итак, уравнение, описывающее двумерное течение вязкой жидкости на сфере, имеет вид

$$\Omega_t + [\psi, \Omega] = \nu \Delta \left(\Delta + \frac{2}{a^2} \right) \psi. \quad (95)$$

Существенно заметить, что уравнение (95) имеет одну и ту же форму в любой вращающейся системе координат, так как Ω это абсолютный вихрь, и левая часть имеет инвариантную запись $d\Omega/dt$. Что касается правой части, то при переходе к другой системе координат, равномерно вращающейся относительно первой, к функции тока добавляется функция тока твердого вращения, а от нее оператор $\Delta + 2/a^2$ равен нулю.

Энергия течения теперь, вообще говоря, не сохраняется. В самом деле, имеем для $E = \frac{1}{2} \iint (\nabla \psi)^2 ds$:

$$\begin{aligned} dE/dt &= \iint \nabla \psi \nabla \psi_t ds = - \iint \Delta \psi_t \psi ds = \iint [\psi, \Omega] \psi ds - \\ &- \nu \iint \psi \Delta \left(\Delta + \frac{2}{a^2} \right) \psi ds = - \nu \iint [(\Delta \psi)^2 - \frac{2}{a^2} (\nabla \psi)^2] ds. \end{aligned}$$

Последнее выражение всегда неположительно, что можно показать, разлагая ψ в ряд по сферическим гармоникам

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\lambda, \theta), \quad \Delta \psi_n = - \frac{n(n+1)}{a^2} \psi_n,$$

и учитывая, что $\iint \psi_n \psi_m ds = 0$ при $n \neq m$.

$$dE/dt = - \frac{\nu}{a^4} \sum_{n=1}^{\infty} [n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)] \iint \psi_n^2 ds.$$

Значит $dE/dt = 0$ лишь если ψ имеет вид ψ_1 , т. е. есть течение типа твердого вращения. В противном случае энергия существенно

убывает. Отсюда, в частности, следует, что стационарными могут быть лишь течения типа твердого вращения.

Докажем, что такое течение всегда устойчиво. Выберем систему координат, вращающуюся вместе с жидкостью, так что в этой относительной системе жидкость покоится. Если возникнет некоторое малое возмущение, то и энергия его будет мала. С течением времени энергия может лишь убывать, т. е., учитывая положительно определенный характер выражения для энергии, возмущение может лишь затухать. Затухание будет замедляться, лишь когда возмущение будет асимптотически приближаться к некоторому состоянию твердого вращения, близкому к состоянию покоя. Возвращаясь к исходной системе координат, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 14 [7]. *Если течение типа «твердого вращения» на сфере возмущено, то возмущение с течением времени уменьшается и течение асимптотически приближается к состоянию твердого вращения, близкого к первоначальному.*

«Идет ветер к югу и переходит к северу, кружится, кружится на ходу своем, и возвращается ветер на круги свои».

15. Бароклинная неустойчивость

В двумерной баротропной модели единственным источником энергии возмущений была кинетическая энергия среднего потока, если не считать очень малой баротропной потенциальной энергии [второй член в интеграле (77)], возникающей, если учитывать двумерную сжимаемость. Существенно новый источник энергии — доступная потенциальная энергия — появляется при переходе к бароклинной модели [интеграл энергии (79)]. Перепишем уравнение (69) через функцию тока $\psi = gz/l_0$:

$$-\frac{d}{dt} \left(\Delta\psi + l + \frac{\partial}{\partial p} r^2 \frac{\partial\psi}{\partial p} \right) = 0, \quad r^2 = l_0^2 g^2 p^2 / N^2. \quad (96)$$

Краевое условие при $p = p_0$

$$-\frac{d}{dt} (\psi_p + s^2 \psi) = 0, \quad s^2 = N^2 / g^2 p.$$

Применим к исследованию устойчивости знакомую нам процедуру. Один закон сохранения — для энергии был получен ранее [интегралы (78) или (79)]. Второй закон также очевиден. Это

$$\frac{dI}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \iiint \Phi(p, \Omega) dx dy dp = 0, \quad (97)$$

$$\Omega = \Delta\psi + l + \frac{\partial}{\partial p} r^2 \frac{\partial\psi}{\partial p},$$

где Φ — произвольная функция двух переменных. Сохраняемость этой величины есть следствие сохранения Ω для индивидуальной частицы и проверяется без труда. С краевым условием связан еще один интеграл движения, именно

$$G = \iint_{p=p_0} \Gamma \left(\frac{\partial \psi}{\partial p} + s^2 \psi \right) dx dy, \quad (98)$$

где Γ — произвольная функция одного переменного. Обозначим $F = E + I + G$. Пусть теперь $\bar{\psi}$ — некоторое зональное течение, устойчивость которого изучается. Для близких полей $\psi = \bar{\psi} + \delta\psi$ разложим функционал G по степеням $\delta\psi$ и возьмем члены разложения до второго порядка включительно. Затем подберем функции Φ и Γ таким образом, чтобы первая вариация обратилась в нуль. Если при этом удастся доказать знакоопределенность второй вариации, то отсюда будет уже следовать устойчивость течения. Итак, первая вариация:

$$\begin{aligned} \delta F = & \iiint \{ \psi_x \delta\psi_x + \psi_y \delta\psi_y + r^2 \psi_p \delta\psi_p + \Phi'_\Omega \delta\Omega \} dx dy dp + \\ & + \iint_{p=p_0} \left\{ \frac{l_0^2}{c^2} p_0 \psi \delta\psi + \Gamma' (\delta\psi_p + s^2 \delta\psi) \right\} dx dy = \\ & = \iiint \{ -\psi + \Phi'_\Omega \} \delta\Omega dx dy dp + \\ & + \iint_{p=p_0} (r^2 \psi + \Gamma') \delta(\psi_p + s^2 \psi) dx dy. \end{aligned} \quad (99)$$

Здесь использовано интегрирование по частям. При этом считается, что на боковых границах и вверху поставлены такие краевые условия, при которых проинтегрированные члены дают нуль. Для того чтобы первая вариация при $\psi = \bar{\psi}$ обратилась в нуль, следует предположить, что потенциальный вихрь зонального течения $\bar{\Omega}$ при каждом p является монотонной функцией широты. Тогда $\bar{\psi}$ можно считать функцией от $\bar{\Omega}$, $\bar{\psi} = \Psi(\bar{\Omega})$. Остается выбрать Φ так, чтобы $\Phi'_\Omega = \Psi$. Точно так же нужно предположить, что $\bar{\psi}_p + s^2 \bar{\psi}|_{p_0}$ есть монотонная функция широты (т. е. приземная плотность монотонна). Тогда при $p = p_0$ можно считать $\bar{\psi}$ функцией от $\bar{\psi}_p + s^2 \bar{\psi}$, $\bar{\psi} = H(\bar{\psi}_p + s^2 \bar{\psi})$. Выберем Γ так, чтобы $\Gamma' = -r^2 H$. Теперь первая вариация действительно равна

нулю. Вычисляем вторую вариацию

$$\begin{aligned}
 \delta^2 F &= \iiint \{ -\delta\psi + \Phi''_{zz} \delta\Omega \} \delta\Omega \, dx \, dy \, dp + \\
 &+ \iint_{p=p_0} \{ r^2 \delta\psi + \Gamma'' (\delta\psi_p + s^2 \delta\psi) \} (\delta\psi_p + s^2 \delta\psi) \, dx \, dy = \\
 &= \iiint \{ (\delta\psi_x)^2 + (\delta\psi_y)^2 + r^2 (\delta\psi_p)^2 + \Psi'_z (\delta\Omega)^2 \} \, dx \, dy \, dp + \\
 &+ r^2 \iint_{p=p_0} \{ s^2 (\delta\psi)^2 - H' (\delta\psi_p + s^2 \delta\psi)^2 \} \, dx \, dy = \\
 &= \iiint \left\{ (\delta\psi_x)^2 + (\delta\psi_y)^2 + r^2 (\delta\psi_p)^2 + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \Omega} (\delta\Omega)^2 \right\} \, dx \, dy \, dp + \\
 &+ r^2 \iint_{p=p_0} \left\{ s^2 \delta z^2 + \frac{d\bar{\Psi}}{d\Theta} (\delta\psi_p + s^2 \delta\psi)^2 \right\} \, dx \, dy, \quad (100)
 \end{aligned}$$

где $\Theta = -\psi_p - s^2 \psi|_{p_0}$ — величина, обратно пропорциональная приземной плотности.

Для устойчивости достаточна знакоопределенность второй вариации. Это имеет место, если $\partial \bar{\Psi} / \partial \Omega > 0$ при каждом p и $d\bar{\Psi} / d\Theta > 0$ при $p = p_0$. Что это за условия? Было предположено, что потенциальный вихрь монотонно изменяется от полюса к полюсу. Естественно уточнить это требование и считать, что потенциальный вихрь убывает от северного полюса к южному, так как именно это происходит с главной частью потенциального вихря — параметром Кориолиса l . Но условие $\partial \bar{\Psi} / \partial \Omega > 0$ тогда означает, что $\bar{\psi}$ также убывает от северного полюса на юг. Учитывая, что ψ — функция тока, получим отсюда, что ветер направлен с востока на запад, что неестественно. Как получить все-таки реальный критерий устойчивости? Для этого, как и в баротропном случае, будем рассматривать движения во вращающейся системе координат, опережающей ветер. Функция тока в новой системе координат, $\tilde{\psi}$ связана со старой соотношением

$$\tilde{\psi} = \psi + k \cos \theta,$$

$\tilde{\psi}$ удовлетворяет точно такому же уравнению сохранения потенциального вихря, как и прежде, с таким же выражением потенциального вихря через $\tilde{\psi}$. Краевым условием опять-таки служит уравнение сохранения обратного значения приземной плотности, но теперь Θ выражается через $\tilde{\psi}$ несколько сложнее: $\Theta = -\tilde{\psi}_p - s^2 \tilde{\psi} + s^2 k \cos \theta$. Это не мешает, однако, выполнению тех же

самых законов сохранения функционалов E, F, G . В новой системе координат уже $\partial\bar{\psi}/\partial\bar{\Omega} > 0$. Второе требование, $d\bar{\psi}/d\Theta|_{p_0} > 0$, становится, напротив, неестественным, так как оно требует убывания Θ от полюсов к экватору, или роста плотности. Тем не менее некоторый критерий устойчивости все же можно получить, считая, что приземная плотность постоянна, $-\psi_p - s^2\psi = \text{const}$. Изменяя ψ , быть может, на константу, можно считать, что $\psi_p + s^2\psi = 0$ как для среднего течения, $\bar{\psi}_p + s^2\bar{\psi} = 0$, так и для возмущений, $\delta(\psi_p + s^2\psi) = 0$. В вышеприведенных рассуждениях изменится следующее: функционал G (98) не понадобится. В вариациях (99) и (100) не будет членов, содержащих $\delta\psi_p + s^2\delta\psi$. Таким образом, для устойчивости будет достаточно убывания потенциального вихря по θ при каждом p .

Теорема 15 (Чарни—Стерн) [16]. *Если приземная плотность постоянна, то для устойчивости бароклинного геострофического течения достаточно, чтобы потенциальный вихрь зонального течения был убывающей функцией от θ при каждом p .*

Эту теорему можно с известным основанием применять к исследованию струйных зональных течений, занимающих некоторый ограниченный пояс широт. В более широкой области рост температуры к экватору, а следовательно убывание плотности становятся слишком заметными и могут вызвать неустойчивость.

Вообще, по-видимому, ситуации, в которых имеет место устойчивость, чрезвычайно редки. Критерий Чарни—Стерна можно применять для зональных струй, занимающих не слишком широкую зону, если пренебречь движениями вне ее. Иначе предположение о постоянстве приземной плотности становится неоправданным. Но для геофизика мало знать сам факт неустойчивости, нужно уметь оценить степень этой неустойчивости. Отрезки времени, интересующие метеоролога, вполне сравнимы со временем нарастания неустойчивых возмущений. Интересны также длины неустойчивых волн. Они в какой-то степени характеризуют размер встречающихся в природе неоднородностей метеорологических полей, т. е. размеры циклонов, антициклонов и других барических образований. Изучить эти вопросы можно в линейном приближении.

Линеаризуем уравнение [96] относительно функции тока $\bar{\psi}$ стационарного течения. $\bar{\psi}$ будет зависеть от p и y , т. е. имеется лишь одна компонента средней скорости, направленная по оси x : $U(p, y)$. Параметр Кориолиса зависит от y . Уравнение (96) примет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\Delta\psi' + \frac{\partial}{\partial p} r^2 \frac{\partial\psi'}{\partial p}\right) + \frac{\partial\psi'}{\partial x} \times \\ \times \left(-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{dl}{dy} - \frac{\partial}{\partial p} r^2 \frac{\partial U}{\partial p}\right) = 0.$$

Линеаризуем также краевое условие:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right)(\psi'_p + s^2 \psi') - \frac{\partial \psi'}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial p} + s^2 U\right) = 0, \quad p = p_0.$$

Коэффициенты не зависят от t и x , поэтому ищем решения вида $e^{ik_1(x-ct)}\psi(p, y)$. Для них будет

$$(U - c) \left(\psi_{yy} - k_1^2 \psi + \frac{\partial}{\partial p} r^2 \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) + \left(-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{dl}{dy} - \frac{\partial}{\partial p} r^2 \frac{\partial U}{\partial p} \right) \psi = 0, \quad (101)$$

$$(U - c) (\psi_p + s^2 \psi) - \left(\frac{\partial U}{\partial p} + s^2 U \right) \psi \Big|_{p_0} = 0. \quad (102)$$

Уравнение (101) отличается от двумерного, баротропного уравнения или от уравнения Релея тем, что ко второй производной по y добавляется аналогичный оператор по переменной p . Сосредоточим сейчас свое внимание именно на этой зависимости от вертикальной координаты. Для этого будем считать, что скорость среднего течения зависит лишь от p . Тогда естественно искать решения, зависящие от y также гармонически: $\psi = e^{ik_2 y} \psi(p)$ и уравнение будет

$$(U - c) \left(-k^2 \psi + \frac{d}{dp} r^2 \frac{d\psi}{dp} \right) + B \psi = 0, \\ B = \frac{dl}{dy} - \frac{d}{dp} r^2 \frac{dU}{dp}, \quad (103) \\ k^2 = k_1^2 + k_2^2,$$

при краевом условии

$$(U - c) \left(\frac{d\psi}{dp} + s^2 \psi \right) - F \psi \Big|_{p_0} = 0, \quad F = \frac{dU}{dp} + s^2 U. \quad (104)$$

Напоминаем, что B — это производная от потенциального вихря среднего течения по широтной координате. Мы не говорили ничего о верхнем краевом условии. Оно носит до какой-то степени формальный характер. Именно, уравнения можно интегрировать до бесконечной высоты (или до $p=0$), но ясно, что на некоторой высоте они уже теряют физический смысл. Можно ограничиться конечной высотой, отбрасывая все, что выше. Краевое условие будет также условным. Естественно считать, что на этой высоте отсутствуют пульсации плотности. Учитывая уравнение статики, запишем это в виде $d\psi/dp=0$. Иногда используют и условие твердой стенки — как и внизу, — приводящее к тому же уравнению (104), но на некотором верхнем уровне.

Уравнение (103) по форме совсем уже напоминает уравнение Релея, но с дополнительным членом dl/dy , подобно тому как это

имело место для баротропного уравнения. Казалось бы, что должна иметь место и теорема, аналогичная теореме Релея, т. е. если $B > 0$ (потенциальный вихрь при всех p есть возрастающая функция от y), то течение устойчиво. Но это не совсем так. В самом деле, взамен простых граничных условий $\psi = 0$ или $\psi_p = 0$, при которых доказывается теорема Релея, здесь сложное условие (104), содержащее собственное значение. Правда, это сложное условие упрощается в частном случае, когда приземная плотность постоянна. Тогда краевое условие будет $\psi_p + s^2\psi = 0$. Это условие также позволяет доказать теорему Релея — устойчивость течения при $B > 0$. Но это есть не что иное как утверждение теоремы Чарни—Стерна в частном случае, когда скорость зависит лишь от вертикальной координаты. Таким образом, при условии $B > 0$ неустойчивость может появиться лишь за счет нижнего краевого условия, т. е. за счет переменности приземной плотности. Аналогично обстоит дело с теоремой типа Фьортофта.

Если B один раз меняет знак, и если $(U - \tilde{U})B < 0$, где $\tilde{U}$ — значение U в той точке, где B обращается в нуль, то при постоянстве приземной плотности, $F|_{p_0} = 0$, течение устойчиво, т. е. и здесь неустойчивость может быть лишь за счет краевого условия. В следующем пункте будет показано, что такая неустойчивость не может быть, в каком-то смысле, слишком большой. Точнее, не может быть более одного растущего колебания, при каждом волновом числе k .

Практически наиболее употребительный способ решения задачи (103), (104) состоит в конечно-разностной аппроксимации дифференциального уравнения. Разбиваем отрезок $[0, p_0]$ на N равных интервалов точками p_n , $n = N, \dots, 0$ и записываем разностное уравнение в виде

$$(U_n - c) \left(-k^2 \psi_n + r_{n-\frac{1}{2}}^2 \frac{\psi_{n-1} - \psi_n}{\delta^2} - r_{n+\frac{1}{2}}^2 \frac{\psi_n - \psi_{n+1}}{\delta^2} \right) + B_n \psi_n = 0, \quad \delta = p_{n-1} - p_n, \quad n = 1, \dots, N-1. \quad (105)$$

Здесь $r_{n-\frac{1}{2}}$ — некоторое среднее значение между r_n и r_{n-1} . Краевое условие при $p = p_0$ запишем в виде

$$(U_0 - c) \left(\frac{\psi_0 - \psi_1}{\delta} + s_0^2 \psi_0 \right) - F_0 \psi_0 = 0. \quad (106)$$

В конечно-разностной записи уравнения есть, разумеется, некоторый произвол. Так, еще очень употребителен следующий способ. Уравнение (103) переписываем как

$$-(U - c) k^2 \psi + \frac{dl}{dy} \psi + \frac{d}{dp} \left[(U - c) r^2 \frac{d\psi}{dp} \right] - \frac{d}{dp} \left[r^2 \frac{dU}{dp} \psi \right] = 0,$$

после чего заменяем его конечно-разностным уравнением

$$\begin{aligned} & -(U_n - c) k^2 \psi_n + \frac{dl}{dy} \psi_n + \left(U_{n-\frac{1}{2}} - c \right) r_{n-\frac{1}{2}}^2 \times \\ & \times \frac{\psi_{n-1} - \psi_n}{\delta^2} - \left(U_{n+\frac{1}{2}} - c \right) r_{n+\frac{1}{2}}^2 \frac{\psi_n - \psi_{n+1}}{\delta^2} - \\ & - \frac{1}{\delta} r_{n-\frac{1}{2}}^2 \frac{U_{n-1} - U_n}{\delta} \psi_{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\delta} r_{n+\frac{1}{2}}^2 \times \\ & \times \frac{U_n - U_{n+1}}{\delta} \psi_{n+\frac{1}{2}} = 0, \end{aligned} \quad (107)$$

где $\psi_{n-\frac{1}{2}} = \frac{\psi_{n-1} + \psi_n}{2}$, $U_{n-\frac{1}{2}} = \frac{U_{n-1} + U_n}{2}$. Легко проверить, что уравнение (107) совпадает с (105), где только

$$B_n = \frac{dl}{dy} - r_{n-\frac{1}{2}}^2 \frac{U_{n-1} - U_n}{\delta^2} + r_{n+\frac{1}{2}}^2 \frac{U_n - U_{n+1}}{\delta^2},$$

т. е. производные от известной функции U также вычисляются в разностном виде. Краевое условие (106) также можно записать иначе. Бывает очень удобно поднять его на полшага вверх, т. е. приписать уровню $p_{1/2}$:

$$\left(U_{\frac{1}{2}} - c \right) \left(\frac{\psi_0 - \psi_1}{\delta} + s_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\psi_0 + \psi_1}{2} \right) - F_{\frac{1}{2}} \frac{\psi_0 + \psi_1}{2} = 0 \quad (108)$$

или

$$(U_1 - c) \psi_0 - (U_0 - c) \psi_1 - c s_{\frac{1}{2}}^2 \delta \frac{\psi_0 + \psi_1}{2} = 0. \quad (109)$$

Наконец, часто пренебрегают в краевом условии очень малым членом, содержащим s^2 . Тогда будет

$$(U_1 - c) \psi_0 - (U_0 - c) \psi_1 = 0. \quad (110)$$

Рассмотрим пример. Будем считать, что p и ρ экспоненциально падают с высотой, $p = p_0 e^{-\frac{z}{H}}$, $\rho = \rho_0 e^{-\frac{z}{H}}$. Тогда уравнение статики $\partial p / \partial z = -g\rho$ дает $p_0 = gH\rho_0$, т. е. $p = gH\rho$. Отсюда имеем $r^2 = \frac{p^2}{gH}$. Что касается скорости ветра U , то будем считать, что она зависит от p линейно, $U = A(p_0 - p)$. Возьмем всего четыре точки, т. е. $N=3$. Нижнее краевое условие берем в форме (110). В качестве верхнего — также условие твердой стенки, что приводит к такому же уравнению, как (110):

$$(U_2 - c) \psi_3 - (U_3 - c) \psi_2 = 0. \quad (111)$$

Эти два крайних условия позволяют исключить из уравнений, написанных для двух средних уровней, крайние уровни. Получим

$$\begin{aligned} & -(U_2 - c) k^2 \psi_2 + \frac{dl}{dy} \psi_2 + \left(\frac{U_1 + U_2}{2} - c \right) r_{\frac{3}{2}}^2 \times \\ & \times \frac{\psi_1 - \psi_2}{\delta^2} - r_{\frac{3}{2}}^2 \frac{U_1 - U_2}{\delta^2} \cdot \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} = 0, \\ & -(U_1 - c) k^2 \psi_1 + \frac{dl}{dy} \psi_1 - \left(\frac{U_1 + U_2}{2} - c \right) r_{\frac{3}{2}}^2 \times \\ & \times \frac{\psi_1 - \psi_2}{\delta^2} + r_{\frac{3}{2}}^2 \frac{U_1 - U_2}{\delta^2} \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} = 0. \end{aligned}$$

Обозначим среднюю скорость $\frac{U_1 + U_2}{2} = \bar{U}$, $U_2 - U_1 = \Delta U$, фазовую скорость относительно среднего течения $c - \bar{U} = \bar{c}$. Тогда

$$\begin{aligned} & + \left(-\frac{\Delta U}{2} + \bar{c} \right) k^2 \psi_2 + \frac{dl}{dy} \psi_2 - \bar{c} \frac{r_{\frac{3}{2}}^2}{\delta^2} (\psi_1 - \psi_2) + \\ & + \frac{r_{\frac{3}{2}}^2}{\delta^2} \Delta U \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} = 0, \\ & \left(\frac{\Delta U}{2} + \bar{c} \right) k^2 \psi_1 + \frac{dl}{dy} \psi_1 + \bar{c} \frac{r_{\frac{3}{2}}^2}{\delta^2} (\psi_1 - \psi_2) - \\ & - \frac{r_{\frac{3}{2}}^2}{\delta^2} \Delta U \frac{\psi_1 + \psi_2}{2} = 0. \end{aligned}$$

Обозначим

$$x^2 \equiv r_{\frac{3}{2}}^2 \left/ \delta^2 \right. = \frac{l^2}{gH} p_{\frac{3}{2}}^2 \left/ \delta^2 \right.$$

Однородная относительно неизвестных ψ_1, ψ_2 система имеет решение, если ее определитель равен нулю, что дает уравнение для $\bar{c}$:

$$\begin{aligned} & k^2 (k^2 + 2x^2) \bar{c}^2 + \frac{dl}{dy} (2k^2 + 2x^2) \bar{c} + \left(\frac{\Delta U}{2} \right)^2 \times \\ & \times (-k^4 + 2x^2 k^2) + \left(\frac{dl}{dy} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение имеет не вещественные корни, если

$$4 \left(\frac{dl}{dy} \right)^2 x^4 < k^4 (4x^4 - k^4) \Delta U^2.$$

На рис. 10 а показана эта кривая [22]. Ее низшая точка соответствует наиболее слабым сдвигам ветра, при которых появляется неустойчивость, и наиболее неустойчивым волновым числом. Они равны, соответственно,

$$\Delta U = -\frac{dl/dy}{\kappa^2}, \quad k = \kappa \sqrt[4]{2}. \quad (112)$$

Чтобы получить количественную оценку, нужно еще выбрать значение H . Если взять формально скорость затухания плотно-

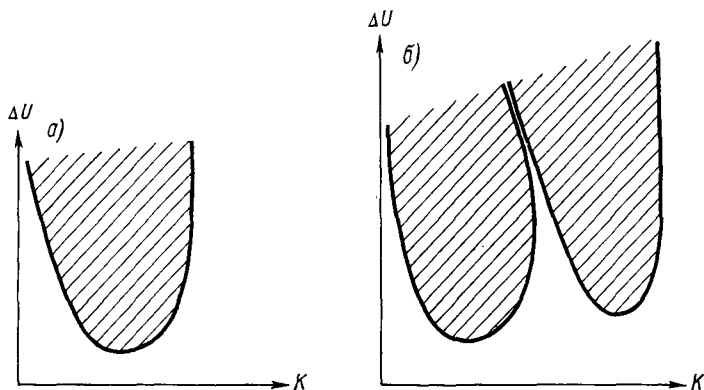


Рис. 10. Области неустойчивости (заштрихованы).

а) двухуровневая бароклинная модель; б) четырехуровневая модель.

сти и давления с высотой при условии постоянства температуры $\rho = \rho_0 e^{-\frac{gz}{RT}}$, то получим $H = RT/g \approx 10^4$ м. Тогда без труда найдем

$$k = -\frac{r \frac{3}{2}}{\delta} \sqrt[4]{2} = \frac{l}{\sqrt{gH}} - \frac{p \frac{3}{2}}{\delta} \sqrt[4]{2} = \frac{l}{\sqrt{gH}} - \frac{3}{2} \sqrt[4]{2} \approx \approx \frac{1}{1700} \text{ (км}^{-1}\text{)} \Delta U \approx 20 \text{ м/с.}$$

В этом случае получается завышенная оценка устойчивости — на самом деле температура сильно падает с высотой, следовательно, плотность и давление затухают значительно медленнее. Разумно произвести подгонку по основному параметру, характеризующему устойчивость атмосферы — по частоте Брента—Вяйсяля ω_v . Для нашей модели, когда плотность экспоненциально падает, имеем $\omega_v = \sqrt{\frac{-gdp}{\rho dz}} = \sqrt{\frac{g}{H}}$. Если же температура падает с высотой линейно, т. е. $T = T_0(1 - \gamma z)$, как это имеет место

в тропосфере, можно легко показать, что $\omega_v = \sqrt{-\frac{g}{T}(\gamma_a - \gamma)}$, где γ_a — скорость падения температуры у частицы, поднимающейся вверх адиабатически. Эта скорость равна $\gamma_a \approx g/c_p = 10$ К/км. Что касается γ , то это в среднем 6 К/км. Имеем $H = T/(\gamma_a - \gamma) = 75$ км. Теперь оценки таковы:

$$k \approx \frac{1}{650} \text{ км}^{-1}, \quad \Delta U \approx 3 \text{ м/с}.$$

Это, по-видимому, близко к истине. Таким образом, уже слабых сдвигов ветра (3 м/с на расстоянии $\delta \approx 300$ мбар) достаточно для возникновения неустойчивости. При этом возбуждаются волны длиной $\lambda = 2\pi/k \approx 4000$ км, т. е. характерный размер неоднородности около $\lambda/4 \approx 1000$ км.

16. Бароклинная неустойчивость. Теоремы типа Релея и Фьортфта

Основной недостаток предыдущего расчета состоял в чрезмерно грубой аппроксимации дифференциального уравнения разностным, с использованием всего четырех уровней, причем уравнение записывалось на двух из них. При увеличении числа уровней повышается степень уравнения для c , а следовательно и число решений. Покажем, например, кривую устойчивости, полученную при увеличении на два числа уровней в той же задаче (рис. 10 б) [4]. Каждая петля соответствует паре невещественных комплексно сопряженных собственных значений c . Петли нигде не пересекаются, т. е. ни при каких значениях параметров не может быть одновременно двух пар невещественных собственных значений. Это оказывается не случайным. При каком угодно числе уровней и при выполнении определенных условий задача имеет не более одной пары комплексно сопряженных невещественных собственных значений. Точнее, будет доказана другая теорема.

Теорема 16 [8]. Уравнение (105) при краевых условиях

$$\psi_N = \psi_{N-1}, \quad (113)$$

$$\psi_1 - \psi_0 = \left(a + \frac{k}{b-c}\right) \psi_0, \quad a \geq 0 \quad (114)$$

имеет не более одной пары невещественных комплексно сопряженных собственных значений c , если еще выполняется одно из двух условий:

а) все $B_n > 0$ (или все $B_n < 0$),

б) последовательность B_n один раз меняет знак и существует

такая константа $\tilde{U}$, что $B_n(U_n - \tilde{U}) < 0$.

Эти достаточные условия а) и б) не являются, разумеется, необходимыми для существования не более одной пары невещественных собственных значений. Условие а) назовем условием Релея, а условие б) — условием Фьортофта. Эти условия обеспечивают полное отсутствие невещественных собственных значений, если нижнее краевое условие заменить более простым: $\psi_1 = \psi_0$ или $\psi_0 = 0$.

Линейный профиль скорости $U(p) = A(p_0 - p)$ удовлетворяет условию Релея. Степенные профили $U = U_0(p/p_0)^n$ при $-1 \leq n \leq 0$ удовлетворяют условию Релея, а при $n < -1$ — условию Фьортофта.

Доказательство. Поскольку речь идет о разностных уравнениях, приведем формулу суммирования по частям, аналогичную следующей формуле интегрирования по частям:

$$\int_{p_0}^{p_N} \left(\frac{d}{dp} r^2 \frac{df}{dp} \right) g dp = -r^2 \frac{df}{dp} g \Big|_{p=p_0} - \int_{p_0}^{p_N} r^2 \frac{df}{dp} \frac{dg}{dp} dp \quad (115)$$

при $\frac{df}{dp} \Big|_{p_N} = 0$. Именно при $f_N = f_{N-1}$ имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{N-1} \left[(r^2)_{n+\frac{1}{2}} (f_{n+1} - f_n) - (r^2)_{n-\frac{1}{2}} (f_n - f_{n-1}) \right] g_n = \\ &= \sum_{n=0}^{N-2} r^2_{n+\frac{1}{2}} (f_{n+1} - f_n) g_n - \sum_{n=1}^{N-1} r^2_{n-\frac{1}{2}} (f_n - f_{n-1}) \times \\ & \times g_n - r^2_{\frac{1}{2}} (f_1 - f_0) g_0 = \sum_{n=1}^{N-1} r^2_{n-\frac{1}{2}} (f_n - f_{n-1}) g_{n-1} - \\ & - \sum_{n=1}^{N-1} r^2_{n-\frac{1}{2}} (f_n - f_{n-1}) g_n - r^2_{\frac{1}{2}} (f_1 - f_0) g_0 = \\ &= - \sum_{n=1}^{N-1} r^2_{n-\frac{1}{2}} (f_n - f_{n-1}) (g_n - g_{n-1}) - r^2_{\frac{1}{2}} (f_1 - f_0) g_0. \quad (116) \end{aligned}$$

С помощью этой формулы для разностных уравнений доказываются те же теоремы, что в п. 5 для дифференциальных. Именно, умножим (105) на $\bar{\psi}_n / (U_n - c)$ и просуммируем от 1 до $N-1$, применяя формулу суммирования по частям:

$$\begin{aligned} & -k^2 \sum_{n=1}^{N-1} |\psi_n|^2 - \frac{1}{82} \sum_{n=1}^{N-1} r^2_{n-\frac{1}{2}} |\psi_n - \psi_{n-1}|^2 - \\ & - r^2_{\frac{1}{2}} (\psi_1 - \psi_0) \bar{\psi}_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{B_n |\psi_n|^2}{U_n - c} = 0. \quad (117) \end{aligned}$$

Если выполняется одно из двух нижних краевых условий: $\psi_0=0$ или $\psi_1=\psi_0$, то это уравнение полностью аналогично уравнению (24), с помощью которого доказаны теоремы 2 и 3 — Релея и Фьортофта. Далее доказательство для разностного уравнения полностью совпадает с тем, что было для дифференциального.

Возьмем теперь произвольное вещественное c . Отправляясь от значений $\psi_N=\psi_{N-1}=1$, можно последовательно решать уравнения (105) сверху вниз, т. е. из уравнения, записанного на n -ом уровне определять ψ_{n-1} и так вплоть до ψ_0 . Из структуры уравнения (105) видно, что ψ_{N-2} окажется равным отношению некоторого многочлена первой степени к $U_{N-1}-c$, ψ_{N-3} — отношению многочлена второй степени к $(U_{N-1}-c)$, $(U_{N-2}-c)$ и т. д. Наконец, ψ_1 — это многочлен $(N-2)$ -й степени, деленный на $(U_{N-1}-c)(U_{N-2}-c)\dots(U_2-c)$, а ψ_0 — это многочлен $(N-1)$ -й степени, деленный на $(U_{N-1}-c)(U_{N-2}-c)\dots(U_1-c)$. Эти многочлены зависят, конечно, от k . Дробь, вообще говоря, несократима, но при конечном числе значений k они могут оказаться и сократимыми. Теперь положим

$$M(c)=(\psi_1-\psi_0)/\psi_0. \quad (118)$$

Значение функции $M(c)$ состоит в том, что те c , которые обращают эту функцию в нуль, являются собственными числами уравнения (105) при краевом условии $\psi_1=\psi_0$. Те c , которые обращают эту функцию в бесконечность (полюсы), — это собственные значения уравнения (105) при краевом условии $\psi_0=0$. Значения $c=U_n$ являются полюсами и числителя и знаменателя дроби (118), т. е. не являются особыми для $M(c)$. Собственные значения основной задачи с краевым условием (114) получаются как пересечения графика функции $M(c)$ с гиперболой

$$K(c)=a+\frac{K}{b-c} \quad (a \geq 0). \quad (119)$$

Выясним, какими свойствами обладает функция $M(c)$. Для этого вычислим производную dM/dc . Если в уравнении (105), деленном на U_n-c , считать все ψ_n функциями от c и продифференцировать это уравнение по c , обозначив $d\psi_n/dc=\varphi_n$, то будем иметь

$$\begin{aligned} -k^2\varphi_n + r_{n-\frac{1}{2}}^2 \frac{\varphi_{n-1}-\varphi_n}{\delta^2} - r_{n+\frac{1}{2}}^2 \frac{\varphi_n-\varphi_{n+1}}{\delta^2} + \\ + \frac{B_n\varphi_n}{U_n-c} + \frac{B_n\psi_n}{(U_n-c)^2} = 0. \end{aligned} \quad (120)$$

Умножим (105) на $\varphi_n/(U_n-c)$ и вычтем (120), умноженное на ψ_n . Полученное уравнение просуммируем по n от 1 до $N-1$, воспользовавшись формулой суммирования по частям (116).

Получаем

$$-\frac{1}{\delta^2} r_{\frac{1}{2}}^2 [(\psi_1 - \psi_0) \varphi_0 - (\varphi_1 - \varphi_0) \psi_0] - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{B_n \psi_n^2}{(U_n - c)^2} = 0,$$

или, иначе,

$$\frac{1}{\delta^2} r_{\frac{1}{2}}^2 \psi_0^2 \frac{dM(c)}{dc} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{B_n \psi_n^2}{(U_n - c)^2}. \quad (121)$$

Сразу же получим еще одну формулу такого рода, умножив (105) на $\psi_n/(U_n - c)$ и просуммировав. Получится формула, аналогичная (117), но без знака комплексного сопряжения:

$$\begin{aligned} & -k^2 \sum_{n=1}^{N-1} \psi_n^2 - \frac{1}{\delta^2} \sum_{n=1}^{N-1} r_{n-\frac{1}{2}}^2 (\psi_n - \psi_{n-1})^2 - \frac{1}{\delta^2} r_{\frac{1}{2}}^2 \times \\ & \times (\psi_1 - \psi_0) \psi_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{B_n \psi_n^2}{U_n - c} = 0. \end{aligned} \quad (122)$$

С помощью этих формул исследуем функцию $M(c)$ и прежде всего ее предельное поведение при $c \rightarrow \pm \infty$. Функции ψ_n стремятся при этом к определенным пределам, удовлетворяющим предельному уравнению, полученному из (105):

$$-k^2 \psi_n + r_{n-\frac{1}{2}}^2 \frac{\psi_{n-1} - \psi_n}{\delta^2} - r_{n+\frac{1}{2}}^2 \frac{\psi_n - \psi_{n+1}}{\delta^2} = 0.$$

Как показывает (122), для этих предельных значений не может быть ни $\psi_0 = 0$, ни $\psi_1 = \psi_0$, т. е. $\lim_{c \rightarrow \infty} M(c)$ конечен и отличен от нуля.

Более того, та же формула (122) позволяет заключить, что $\lim_{c \rightarrow \infty} M(c) < 0$.

Теперь уже можно доказать ту часть теоремы, которая относится к теореме Релея. Пусть, например, все $B_n > 0$. Тогда из (121) имеем $dM/dc > 0$. График $M(c)$ может быть лишь таким, как на рис. 11 а. Он имеет $N-1$ точку разрыва (так как числитель выражения для $M(c)$ — многочлен $(N-1)$ -й степени и не имеет невещественных корней). Следовательно, график состоит из N отдельных кусков. Следует различать два случая — когда вертикальная асимптота гиперболы (119) совпадает с одной из вертикальных асимптот $M(c)$ и когда не совпадает ни с одной. В первом случае $K(c) = M(c)$ есть отношение многочлена $(N-1)$ -й степени к $(c-c_1) \dots (c-c_{N-1})$, где c_n — корни ψ_0 . Во втором случае — отношение многочлена N -й степени к $(c-b) \times \times (c-c_1) \dots (c-c_{N-1})$. В первом случае имеется всего $N-1$ собственных значений нашей задачи во всей комплексной плоскости. Во втором случае их N . Но в первом случае гипербола обязана

пересечь все ветви кривой $M(c)$, кроме, быть может, трех: двух, примыкающих к общей асимптоте, и одной из крайних. Поэтому число точек пересечения, или число вещественных собственных значений не менее $N - 3$, а число невещественных — соответственно не более $N - 1 - (N - 3) = 2$. Во втором случае гипербола может не пересечь лишь две ветви кривой $M(c)$ (рис. 11 б), т. е. вещественных корней не менее $N - 2$, а невещественных не более

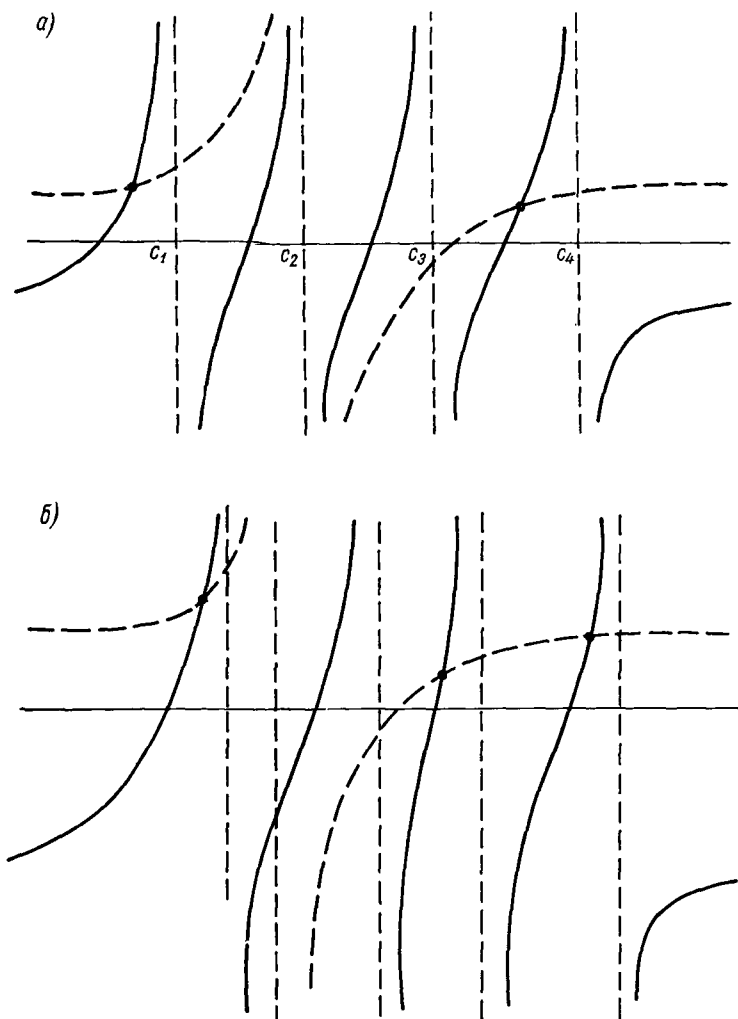
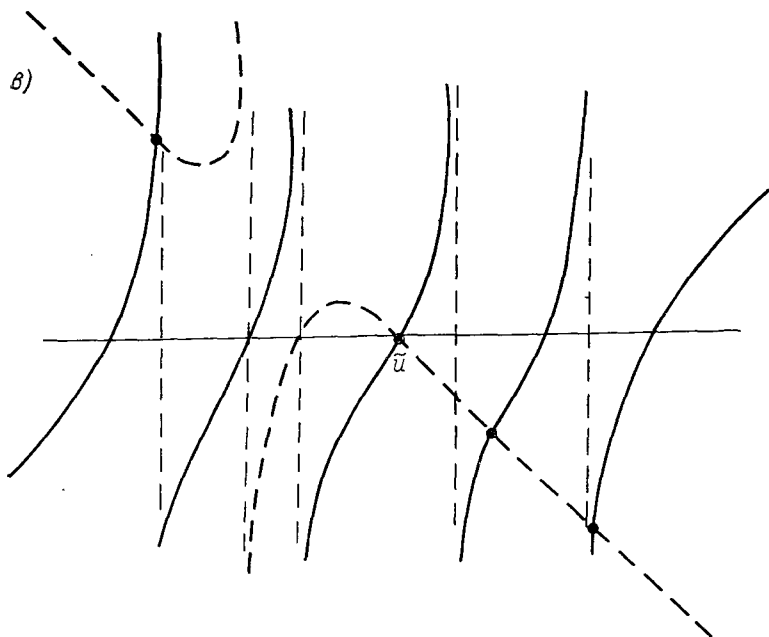


Рис. 11. Графическое нахождение
а) вертикальная асимптота $M(c)$ совпадает с одной из асимптот $K(c)$ (условие
кальные асимптоты не

$N - (N - 2) = 2$. В этом рассуждении использовано то, что горизонтальная асимптота гиперболы расположена выше горизонтальной асимптоты кривой $M(c)$.

Примечание. Если возвратиться к примеру, разобранному в конце п. 15, с точки зрения настоящих рассуждений, то может показаться странным следующее обстоятельство. В том примере $N=3$, значит, уравнение $M(c) - K(c) = 0$ имеет, вообще говоря, три корня (нужно отвлекаться еще от малосущественного обстоятельства, что в том примере бралось другое верхнее краевое условие по сравнению с рассуждениями настоящего пункта). Но мы помним, что в том примере получалось квадратное уравнение, т. е. не более двух собственных чисел. В чем тут дело? Оказывается, исключая нижний уровень ψ_0 , мы теряем одно решение: легко проверить, что решением является $c = U_1$, $\psi_0 \neq 0$, $\psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$. При исключении ψ_0 оно переходит в тривиальное решение, поэтому оно и было потеряно. Это решение может даже, по-видимому, представлять физический интерес, хотя оно не дает неустойчивости.

Пусть теперь выполнено условие Фьортофта. Умножим обе части (121) на $\tilde{U} - c$. Преобразуем правую часть, воспользовавшись соотношением $(\tilde{U} - c)/(U - c) = (\tilde{U} - U)/(U - c) + 1$.



собственных значений c .

Релея); б) вертикальные асимптоты не совпадают (условие Релея); в) вертикальные асимптоты совпадают (условие Фьортофта).

Получаем

$$\frac{1}{8^2} r_{\frac{1}{2}}^2 \psi_0^2 (\tilde{U} - c) \frac{dM(c)}{dc} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{B_n (\tilde{U} - U_n) \psi_n^2}{(U_n - c)^2} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{B_n \psi_n^2}{U_n - c}.$$

Складывая это с (122) и обозначая

$$E = \sum_{n=1}^{N-1} \left[k^2 \psi_n^2 + \frac{r_{\frac{1}{2}}^2}{8^2} (\psi_n - \psi_{n-1})^2 \right] > 0,$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{8^2} r_{\frac{1}{2}}^2 \psi_0^2 \left[(\tilde{U} - c) \frac{dM(c)}{dc} - M(c) \right] = \\ = E + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{B_n (\tilde{U} - U_n)}{(U_n - c)^2} \psi_n^2. \end{aligned}$$

Обозначим $P(c) = (\tilde{U} - c)M(c)$. В силу условий Фьортофта имеем $dP(c)/dc > 0$. Значит, функция $P(c)$ монотонна между своими точками разрыва, которые у нее те же, что и у функции $M(c)$, в количестве $N-1$. Нули у нее также те же самые, что

и у $M(c)$, плюс еще один: $c = \tilde{U}$, всего их N . График этой функции показан на рис. 11 в, где одновременно изображен и график функции $(U - c)K(c)$. Здесь нарисован тот случай, когда вертикальные асимптоты двух кривых не совпадают. Уравнение

$P(c) - (\tilde{U} - c)K(c) = 0$ может иметь всего $N+1$ корень. Но, как непосредственно ясно из чертежа, вещественных корней не менее $N-1$, т. е. невещественных не более двух. Аналогично и в случае, когда имеется общая вертикальная асимптота, как общее число собственных значений, так и минимальное число вещественных из них уменьшается на единицу. Теорема тем самым полностью доказана.

17. Идеальная жидкость как предельный случай вязкой

Возвращаемся опять к общим рассуждениям, не относящимся исключительно к метеорологии. Содержание настоящей книги — изучение устойчивости идеальной жидкости. Это оправдано тем, что существует достаточно много ситуаций, где вязкость исключительно мала — например, струи в свободной атмосфере. Однако вопрос о значимости результатов, полученных в пренебрежении вязкостью, далеко не праздный. Дело в том, что мы сами осложнили себе задачу, выбрав не очень удобное определение

устойчивости, требующее ограниченности решения в течение бесконечного времени. Как бы мала ни была вязкость, но в течение бесконечного времени она обязательно скажется. Конечно, любое решение уравнений Эйлера для идеальной жидкости имеет смысл лишь постольку, поскольку оно близко к настоящему решению уравнений Навье—Стокса с очень малой вязкостью. Но так оно обычно и бывает — всякое решение уравнений Эйлера вне пограничных слоев есть предел «вязких» решений. Но эта сходимость неравномерна по времени, точнее равномерна для конечных промежутков времени и замедляется для больших времен. Поэтому устойчивость «невязкого» решения не обязана гарантировать устойчивости решения даже с очень малой, но конечной вязкостью. Если эта вязкость мала, то «вязкое» решение в течение очень длительного времени будет близко к решению «невязкому», т. е. будет ограничено или даже затухать, но наступит такой момент (и тем позже, чем меньше вязкость), когда они разойдутся, и может случиться, что «вязкое» решение начнет расти. Таким образом, казалось бы, изучение устойчивости для уравнений Эйлера ничего не дает. Но законно спросить, насколько на самом деле важны бесконечные промежутки времени. Какая именно математическая идеализация лучше всего интерпретирует физические опыты, например с возникновением турбулентности в трубе или в лотке? Возмущения могут выноситься из трубы прежде, чем разовьется неустойчивость. Точно так же при изучении атмосферы неустойчивость, слишком медленно развивающаяся, уже не может считаться неустойчивостью. Таким образом, изучение слишком больших промежутков времени может оказаться лишенным физического смысла. Трудный вопрос, что является подходящим определением неустойчивости, заметное нарастание возмущений в течение какого разумного срока нужно считать неустойчивостью. Это следует, по-видимому, решать индивидуально в каждом отдельном случае. То что сейчас было сказано, в высокой степени свойственно точке зрения метеорологов: их интересует не столько самый факт обнаружения неустойчивости, которая почти всегда имеет место, сколько время реализации этой неустойчивости. Для любого разумного времени вязкость свободной атмосферы окажется малой, поэтому можно свободно пользоваться уравнениями Эйлера. Они дают достаточно хорошее приближение, если реальная вязкость мала и нас не интересуют слишком медленно развивающиеся неустойчивые возмущения.

Другой вопрос, который возникает при исследовании взаимосвязи решений уравнений Эйлера и Навье—Стокса при малой вязкости — это вопрос о волновых решениях. Допустим, найден спектр волн уравнения Эйлера для какого-нибудь профиля скорости основного течения. Будут ли уравнения Навье—Стокса иметь волны с близкими значениями c , т. е. можно ли искать волновые решения, пренебрегая вязкостью с самого начала

в уравнениях? Точнее, является ли собственное значение c уравнений Эйлера пределом собственных значений уравнений Навье—Стокса при вязкости, стремящейся к нулю? К выяснению этого вопроса мы сейчас и переходим. Окажется, что затухающие и растущие возмущения ведут себя в этом смысле по-разному. В то время как не вещественные собственные значения c входили в уравнения Релея всегда комплексно сопряженными парами, т. е. одновременно присутствовали как затухающие, так и растущие возмущения, лишь растущие из них являются пределами волновых решений уравнений Навье—Стокса при исчезающей вязкости. Что касается затухающих решений уравнения Навье—Стокса, то они стремятся к соответствующему решению уравнений Эйлера (или Релея) вне некоторой зоны, где поведение решения определяется вязкостью, сколь малой бы она ни была (внутренний пограничный слой). Тот же принцип предельно малой вязкости позволяет в случае нейтрального возмущения получить в особой точке условие сопряжения. Достоинством внимания то обстоятельство, что получается в точности то же самое условие сопряжения, которое было получено в п. 7 совершенно из других соображений.

Итак, записываем уравнения Навье—Стокса для однородной несжимаемой жидкости, линеаризованные относительно течения, скорость которого направлена параллельно оси x и зависит лишь от координаты z :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{dU}{dz} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \Delta u'; \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \Delta v'; \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + U \frac{\partial w'}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} + \nu \Delta w'; \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0.\end{aligned}$$

Будем предполагать, что имеются твердые плоские стенки $z = a, b$. В направлении y поток неограничен. Ищем волновые решения

$$(u', v', w', p') = (u(z), v(z), w(z), p(z)) e^{i(\alpha x + \beta y - \alpha c t)}.$$

Система принимает вид:

$$\begin{aligned}\left[D^2 - (\alpha^2 + \beta^2) - \frac{i\alpha}{\nu} (U - c) \right] u &= \frac{1}{\nu} U'(z) w + \frac{i\alpha}{\nu \rho} p; \\ \left[D^2 - (\alpha^2 + \beta^2) - \frac{i\alpha}{\nu} (U - c) \right] v &= \frac{i\beta}{\nu \rho} p; \\ \left[D^2 - (\alpha^2 + \beta^2) - \frac{i\alpha}{\nu} (U - c) \right] w &= \frac{1}{\nu \rho} \frac{dp}{dz}; \\ i(\alpha u + \beta v) + \frac{dw}{dz} &= 0 \quad \left(D = \frac{d}{dz} \right).\end{aligned}\tag{123}$$

На твердых стенках принимаем естественное условие прилипания $u=v=w=0$. Вводим новые величины

$$\tilde{\alpha}^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad \tilde{\alpha}u = \alpha u + \beta v, \quad \tilde{w} = w, \quad \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\nu}} = \frac{\alpha}{\nu}, \quad \frac{\tilde{p}}{\tilde{\nu}} = \frac{p}{\nu}, \quad \tilde{c} = c.$$

Если первое из уравнений (123) умножить на α , второе на β и сложить их, то получим уравнение, которое вместе с оставшимися двумя уравнениями дает систему

$$\begin{aligned} \left[D^2 - \tilde{\alpha}^2 - \frac{i\tilde{\alpha}}{\tilde{\nu}} (U - \tilde{c}) \right] \tilde{u} &= \frac{1}{\tilde{\nu}} U' (z) \tilde{w} + \frac{i\tilde{\alpha}}{\tilde{\nu}\rho} \tilde{p}; \\ \left[D^2 - \tilde{\alpha}^2 - \frac{i\tilde{\alpha}}{\tilde{\nu}} (U - \tilde{c}) \right] \tilde{w} &= \frac{1}{\tilde{\nu}\rho} \frac{d\tilde{p}}{dz}; \\ i\tilde{\alpha}\tilde{u} + \frac{d\tilde{w}}{dz} &= 0. \end{aligned} \quad (124)$$

По форме эта система совпадает с (123), но написанной для двумерных возмущений. Таким образом, если есть трехмерное возмущение (т. е. такое, у которого $\beta \neq 0$), то ему соответствует некоторое двумерное возмущение с тем же значением c . В частности, для неустойчивых возмущений имеем следующую теорему.

Теорема 17 (Сквайр). *Если имеется неустойчивое трехмерное возмущение ($\text{Im } c > 0$), то существует неустойчивое двумерное*

*возмущение, уже для большего значения вязкости $\tilde{\nu} \approx \nu \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha}$, но при том же c .**

(О некоторой неполноте рассуждения, приводящего к теореме Сквайра, см. ниже замечание.) Теорема Сквайра имеет фундаментальную важность. К сожалению, ей нет аналога для течений в каналах другой формы, чем между двумя параллельными плоскостями, например, в круглой трубе. Благодаря этой теореме все свелось к двумерным возмущениям и к системе (124). Исключаем из этой системы далее еще два неизвестных $\tilde{p}$ и $\tilde{u}$. Получаем

$$(U - \tilde{c})(D^2 - \tilde{\alpha}^2)\tilde{w} - U''\tilde{w} = \frac{\tilde{\nu}}{i\alpha}(D^2 - \tilde{\alpha}^2)^2\tilde{w},$$

т. е.

$$(U - c)(w'' - \alpha^2 w) - U''w = \frac{\nu}{i\alpha}(w^{(4)} - 2\alpha^2 w'' + \alpha^4 w) \quad (125)$$

(тильды в обозначениях отбрасываем). Это уравнение носит название уравнения Орра—Зоммерфельда. Оно обобщает уравнение

* Ср. с аналогичной теоремой для идеальной жидкости (п. 9).

Релея (23). На твердых стенках нужно полагать $u=w=0$, т. е.

$$w = \frac{dw}{dz} = 0, \quad z = a, \quad b. \quad (126)$$

Это уравнение часто записывают в безразмерной форме, для того чтобы выявить, от каких существенных параметров оно зависит. Если взять за масштаб длины ширину канала z_0 , а за масштаб скорости, например, максимальную скорость U_0 и положить $U^* = U/U_0$, $c^* = c/U_0$, $\alpha^* = \alpha z_0$, $w^* = w/U_0$, то будем иметь

$$(U^* - c^*)(w^{*\prime\prime} - \alpha^{*2} w^*) - U^{*\prime} w^* = \\ = \frac{1}{i\alpha^* R} (w^{*IV} - 2\alpha^{*2} w^{*\prime\prime} + \alpha^{*4} w^*),$$

где $R = U_0 z_0 / \nu$ — число Рейнольдса.

З а м е ч а н и е. В этих рассуждениях, в том числе в приведенном выше доказательстве теоремы Сквайра есть один пробел. При исключении неизвестных теряются решения. Именно, некоторые решения исходной системы (123) переходят в тривиальное решение уравнения Орра—Зоммерфельда (125). Исследуем это. Пусть $w \equiv 0$. Из предыдущей системы (124) сейчас же получаем $\bar{u} = 0$ и $\bar{v} = 0$. При этом u и v не обязаны быть равными нулю, они лишь связаны соотношением $\alpha u + \beta v \equiv 0$. Обращаясь к (123), находим, что u и v удовлетворяют одному и тому же уравнению

$$u'' - (\alpha^2 + \beta^2)u - \frac{i\alpha}{\nu}(U - c)u = 0. \quad (127)$$

при краевых условиях $u=0$ ($z=a, b$). Эта краевая задача может дать дополнительные волны, которых нет в двумерной задаче. Не противоречит ли это утверждению теоремы Сквайра, при доказательстве которой не было учтено это обстоятельство?

Теорема 18 (Романов) [13]. *Трехмерная задача ($\beta \neq 0$) имеет дополнительный спектр собственных значений c , не содержащийся в двумерной задаче, но этот спектр соответствует устойчивым возмущениям, $\text{Im } c < 0$.*

Это утверждение проверяется без труда. Нужно умножить (127) на $\bar{u}$, проинтегрировать по z , воспользовавшись краевыми условиями, и взять вещественную часть полученного равенства:

$$-\int_a^b [|u'|^2 + (\alpha^2 + \beta^2)|u|^2] dz - \text{Im } c \frac{\alpha}{\nu} \int_a^b |u|^2 dz = 0.$$

Отсюда сразу видно, что $\text{Im } c < 0$, и теорема доказана. Теорема 17, сформулированная лишь для нарастающих возмущений, остается верна; пробел в доказательстве сейчас заполнен.

Переходим к изучению предельного поведения решений уравнения Орра—Зоммерфельда (125) при $\nu \rightarrow 0$, когда это уравне-

ние переходит в уравнение Релея. Уравнение Релея — второго порядка и имеет два линейно независимых решения, в то время как уравнение Орра—Зоммерфельда имеет их четыре. По-видимому можно найти два решения этого уравнения, которые стремятся к пределу. Другие решения должны при малых v либо быстро осциллировать, либо уходить в нуль или в бесконечность. Для их асимптотического описания существует так называемый ВКБ-метод, возникший в оптике при описании перехода от волновой к геометрической оптике при длине волны, стремящейся к нулю, а также в квантовой механике при изучении перехода от квантовой к классической механике, когда постоянная Планка стремится к нулю. Мы воспользуемся одной модификацией этого метода, использующей обход особых точек в комплексной плоскости [9].

Прежде всего нужно заменить уравнение четвертого порядка системой уравнений первого порядка. Обозначим

$$\varpi'' - \alpha^2 \varpi = \psi, \quad \varepsilon = \sqrt{v/\alpha}.$$

Уравнение примет вид

$$(U - c)\psi - U''\varpi = -i\varepsilon^2(\psi'' - \alpha^2\psi).$$

Теперь вводим еще две новые функции

$$\varpi' = \xi, \quad \psi' = \frac{1}{\varepsilon} \eta.$$

Получаем следующую систему уравнений, равносильную уравнению Орра—Зоммерфельда:

$$\begin{aligned} \varepsilon \xi' &= \alpha^2 \varepsilon \varpi + \varepsilon \psi; \\ \varepsilon \varpi' &= \varepsilon \xi; \\ \varepsilon \eta' &= \alpha^2 \varepsilon^2 \psi + i[(U - c)\psi - U''\varpi]; \\ \varepsilon \psi' &= \eta. \end{aligned} \quad (128)$$

Запишем эту систему в матричной форме, введя вектор

$$\vec{\zeta} = (\xi, \varpi, \eta, \psi)$$

и матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2 \varepsilon & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -iU'' & 0 & \alpha^2 \varepsilon^2 + i(U - c) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (129)$$

Будем иметь

$$\varepsilon \vec{\zeta}' = P \vec{\zeta}. \quad (130)$$

Введем еще обозначения

$$r = \sqrt{i(U-c)}, \quad t = \frac{U''}{U-c} = \frac{iU''}{r^2}.$$

Теперь задача состоит в том, чтобы перейти к новым искомым функциям таким образом, чтобы привести матрицу к диагональному виду с точностью до членов, стремящихся к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Замена переменных имеет такой общий вид

$$\vec{\zeta} = T\vec{\vartheta},$$

где T — некоторая матрица перехода. При этом система приводится к форме

$$\varepsilon\vec{\vartheta}' = T^{-1}PT\vec{\vartheta} - \varepsilon T^{-1}T'\vec{\vartheta}. \quad (131)$$

В качестве T возьмем $T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2$, где

$$T_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ r & -r & 0 & 0 \\ 1 & 1 & t & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{r'}{4r} & -\frac{r'}{4r} & t' & t \\ \frac{r'}{4r^2} & -\frac{r'}{4r^2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} \frac{7r'}{4r^3} & \frac{7r'}{4r^3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r^2} & \frac{1}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t}{r^2} & \frac{t}{r^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Правую часть (131) нужно будет вычислить с точностью до членов порядка ε^2 . Обозначим

$$K_1 = T_0^{-1}T_1, \quad K_2 = T_0^{-1}T_2, \quad \Lambda = T_0^{-1}PT_0.$$

Тогда

$$T^{-1} = [T_0(I + \varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_2)]^{-1} = (I - \varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_1^2 - \varepsilon^2 K_2) T_0^{-1} + O(\varepsilon^3).$$

Обозначим еще $M = K_1 \Lambda - \Lambda K_1 + T_0^{-1} T'_0$. Тогда для правой части (131) будем иметь

$$\begin{aligned} T^{-1} P T - \varepsilon T^{-1} T' &= (I - \varepsilon K_1 + \varepsilon^2 K_1^2 - \varepsilon^2 K_2) T_0^{-1} P (T_0 + \varepsilon T_1 + \\ &+ \varepsilon^2 T_2) - \varepsilon (I - \varepsilon K_1) T_0^{-1} (T'_0 + \varepsilon T'_1) + O(\varepsilon^3) = \\ &= \Lambda - \varepsilon M + \varepsilon^2 (K_1 M - T_0^{-1} T'_1 - K_2 \Lambda + \Lambda K_2) + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Вычисляем входящие сюда матрицы

$$\begin{aligned} T_0^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{t}{2} & \frac{1}{2r} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{t}{2} & -\frac{1}{2r} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ K_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{r'}{4r^2} & \frac{t'}{2r} & \frac{t}{2r} \\ \frac{r'}{4r^2} & 0 & -\frac{t'}{2r} & -\frac{t}{2r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Lambda &= \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & -\frac{\varepsilon}{2} t \\ 0 & -r & 0 & -\frac{\varepsilon}{2} t \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & (\alpha^2 + t) \varepsilon & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \varepsilon^2 \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{2r} & \frac{\alpha^2}{2r} & \frac{\alpha^2 t}{2r} & 0 \\ -\frac{\alpha^2}{2r} & -\frac{\alpha^2}{2r} & -\frac{\alpha^2 t}{2r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^3), \\ T_0^{-1} T'_0 &= \begin{pmatrix} \frac{r'}{2r} & -\frac{r'}{2r} & \frac{t'}{2} & 0 \\ -\frac{r'}{2r} & \frac{r'}{2r} & \frac{t'}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$K_1\Lambda - \Lambda K_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{r'}{2r} & -\frac{t'}{2} & -\frac{t}{2} \\ \frac{r'}{2r} & 0 & -\frac{t'}{2} & -\frac{t}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \varepsilon \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ -\frac{1}{r} & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ -\frac{r'}{4r^2} & \frac{r'}{4r^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2).$$

Звездочками обозначаем несущественные в дальнейшем элементы матриц.

$$M = \begin{pmatrix} \frac{r'}{2r} & 0 & 0 & -\frac{t}{2} \\ 0 & \frac{r'}{2r} & 0 & -\frac{t}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \varepsilon \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ -\frac{1}{r} & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ -\frac{r'}{4r^2} & \frac{r'}{4r^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2),$$

$$K_1 M = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r'}{2r^2} & -\frac{r'}{2r^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon),$$

$$T_0^{-1} T_1' = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{r'}{r^2} & \frac{r'}{r^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon),$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r^2} & \frac{1}{r^2} & 0 & 0 \\ \frac{7}{4} \frac{r'}{r^3} & \frac{7}{4} \frac{r'}{r^3} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_2 \Lambda - \Lambda K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & 0 & 0 \\ -\frac{7}{4} \frac{r'}{r^2} & -\frac{7}{4} \frac{r'}{r^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon).$$

Наконец, подставляем все это в выражение для правой части (131):

$$\begin{pmatrix} r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -\frac{r'}{2r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r'}{2r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2 + t & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \varepsilon^2 \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^3).$$

Отметим, что у матрицы, которая множится на ε^2 , две последние строчки нулевые. Теперь запишем систему в виде

$$\varepsilon \frac{d\vec{\vartheta}}{dz} = (S + \varepsilon^2 R) \vec{\vartheta}, \quad (132)$$

где

$$S = \begin{pmatrix} r - \varepsilon \frac{r'}{2r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r - \varepsilon \frac{r'}{2r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & (\alpha^2 + t)\varepsilon & 0 \end{pmatrix},$$

а матрица R ограничена при $\varepsilon \rightarrow 0$, причем равномерно по z , если z не уходит в бесконечность и не приближается к фиксированной окрестности критической точки, где $U - c = 0$, или $r = 0$. Кроме того, две последние строчки R есть $O(\varepsilon)$. Как и в п. 7 будем считать, что функция $U(z)$ аналитически продолжается в окрестность того отрезка вещественной оси, на котором она была определена первоначально. То, что было сказано про поведение матрицы R , относится ко всей этой окрестности.

Смысл проведенной замены переменных состоит в том, что теперь с точностью до членов высшего порядка малости по ε система распадается на два отдельных уравнения

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{d\vartheta_1}{dz} &= \left(r - \varepsilon \frac{r'}{2r} \right) \vartheta_1; \\ \varepsilon \frac{d\vartheta_2}{dz} &= \left(-r - \varepsilon \frac{r'}{2r} \right) \vartheta_2\end{aligned}\quad (133)$$

и систему второго порядка

$$\begin{aligned}\frac{d^2\vartheta_3}{dz^2} &= \vartheta_4; \\ -\frac{d\vartheta_4}{dz} &= \left(\alpha^2 + \frac{U''}{U-c} \right) \vartheta_3.\end{aligned}\quad (134)$$

Эта система равносильна уравнению Релея

$$(U - c)(\vartheta_3'' - \alpha^2 \vartheta_3) - U'' \vartheta_3 = 0.$$

Теперь нужно показать, что система уравнений (132) имеет решения, асимптотически близкие при малых ε к решениям укороченной системы (133), (134). Эта близость не может быть равномерной на всей плоскости комплексного переменного z , так как решения системы (132) представляют собой однозначные аналитические функции, в то время как аппроксимирующие их решения усеченной системы имеют критические точки в качестве точек ветвления. Таким образом, нужно выделить области, в которых имеет место такая аппроксимация.

Теорема 19. Пусть в плоскости комплексного переменного z имеется дуга, вдоль которой величина $\operatorname{Re} \int \sqrt{i(U-c)} dz$ монотонно возрастает. Пусть

$$\begin{aligned}\chi_1 &= C_1 \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \sqrt{i(U-c)} dz \right\} / \sqrt[4]{i(U-c)}, \\ \chi_2 &= C_2 \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} \int_{z_0}^z \sqrt{i(U-c)} dz \right\} / \sqrt[4]{i(U-c)},\end{aligned}\quad (135)$$

где z_0 — произвольная фиксированная точка. Пусть $\vartheta_{3,4}^{(a,b)}$ два линейно независимых решения (133). Тогда система (132) имеет

четыре линейно независимых решения, которые на этой дуге представляют собой:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \vartheta_1^I &= \chi_1 [1 + O(\varepsilon)]; & 2) \quad \vartheta_1^{II} &= \chi_2 \cdot O(\varepsilon); \\
 \vartheta_2^I &= \chi_1 \cdot O(\varepsilon); & \vartheta_2^{II} &= \chi_2 [1 + O(\varepsilon)]; \\
 \vartheta_3^I &= \chi_1 \cdot O(\varepsilon^2); & \vartheta_3^{II} &= \chi_2 \cdot O(\varepsilon^2); \\
 \vartheta_4^I &= \chi_1 \cdot O(\varepsilon^2); & \vartheta_4^{II} &= \chi_2 \cdot O(\varepsilon^2); \\
 3) \quad \vartheta_1^{III} &= O(\varepsilon); & 4) \quad \vartheta_1^{IV} &= O(\varepsilon); \\
 \vartheta_2^{III} &= O(\varepsilon); & \vartheta_2^{IV} &= O(\varepsilon); \\
 \vartheta_3^{III} &= \vartheta_3^{(a)} + O(\varepsilon^2); & \vartheta_3^{IV} &= \vartheta_3^{(6)} + O(\varepsilon^2); \\
 \vartheta_4^{III} &= \vartheta_4^{(a)} + O(\varepsilon^2); & \vartheta_4^{IV} &= \vartheta_4^{(6)} + O(\varepsilon^2). \quad (136)
 \end{aligned}$$

Доказательство. Обозначим через V матрицу фундаментальных решений аппроксимирующей системы (133), (134):

$$V = \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vartheta_3^{(a)} & \vartheta_3^{(6)} \\ 0 & 0 & \vartheta_4^{(a)} & \vartheta_4^{(6)} \end{pmatrix}.$$

Пусть z^* — тот конец дуги, на котором $\operatorname{Re} \int \sqrt{i(U-c)} dz$ имеет наименьшее значение, z^{**} — противоположный конец. Уравнение (132) заменяем равносильным интегральным уравнением. Для этого рассматриваем член с R как правую часть; зная решения однородной системы, решаем неоднородное уравнение методом вариации произвольного постоянного. Придем тогда к

$$\vec{\vartheta} = \varepsilon V(z) \int_{z^*}^z V^{-1}(z_1) R(z_1) \vec{\vartheta}(z_1) dz_1 + V(z) \vec{\delta}.$$

Здесь $\vec{\delta}$ — произвольный вектор. Вронскиан решений уравнений (134), $\vartheta_3^{(a)}\vartheta_4^{(6)} - \vartheta_4^{(a)}\vartheta_3^{(6)}$ по теореме Лиувилля есть константа. Решения можно считать нормированными таким образом, что этот вронскиан равен единице. Тогда

$$V^{-1} = \begin{pmatrix} \chi_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_2^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vartheta_4^{(6)} & -\vartheta_3^{(6)} \\ 0 & 0 & -\vartheta_4^{(a)} & \vartheta_3^{(a)} \end{pmatrix}.$$

Ищем решения интегрального уравнения в виде ряда

$$\vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}^{(0)} + \varepsilon \vec{\vartheta}^{(1)} + \varepsilon^2 \vec{\vartheta}^{(2)} + \dots,$$

где

$$\vec{\vartheta}^{(0)} = V(z) \vec{\delta}, \quad \vec{\delta} = (1, 0, 0, 0),$$

.....

$$\vec{\vartheta}^{(n)} = V(z) \int_{z^*}^z V^{-1}(z_1) R(z_1) \vec{\vartheta}^{(n-1)}(z_1) dz_1.$$

.....

Для того чтобы установить сходимость этого ряда, докажем по индукции оценку $|\vec{\vartheta}^{(n)}| \leq C^n |\vec{\vartheta}^{(0)}|$, где C — некоторая константа, которую мы выберем по ходу доказательства. При $n=0$ это верно с $C \geq 1$. Пусть эта оценка доказана до $n-1$. Введем для удобства проекторы: P_1 — оператор проектирования на первую ось. Будучи применен к любому вектору он дает его первую координату, ϑ_1 . Аналогично, P_2 — проектор на вторую ось. $P_{3,4}$ — проектор на плоскость, натянутую на две последние оси. Четырехмерному вектору $\vec{\vartheta}$ он ставит в соответствие двумерный $\vec{\vartheta}_{3,4}$, составленный из двух последних его компонент. Имеем

$$\vartheta_1^{(n)} = \chi_1 \int_{z^*}^z \chi_1^{-1} P_1 R \vec{\vartheta}^{(n-1)} dz_1.$$

Теперь будем считать, что C не меньше, чем $4 \max \|R\| \cdot l$, l — длина контура. Тогда

$$|\vartheta_1^{(n)}| \leq |\chi_1| \cdot \max \|R\| \int_{z^*}^z |\chi_1^{-1}| \cdot C^{n-1} |\chi_1| \cdot |dz_1| \leq \frac{1}{4} C^n |\chi_1|.$$

Далее, имеем

$$\vartheta_2^{(n)} = \chi_2 \int_{z^*}^z \chi_2^{-1} P_2 R \vec{\vartheta}^{(n-1)} dz_1,$$

откуда

$$|\vartheta_2^{(n)}| \leq \int_{z^*}^z |\chi_2(z) \chi_2^{-1}(z_1)| \cdot \|R\| \cdot C^{n-1} |\chi_1(z_1)| \cdot |dz_1|.$$

Снова получаем оценку

$$|\vartheta_2^{(n)}| \leq \frac{1}{4} C^n |\chi_1(z)|.$$

Для двух последних координат поступаем аналогично. Пусть

$$V_{3,4} = \begin{pmatrix} \vartheta_3^{(a)} & \vartheta_3^{(b)} \\ \vartheta_4^{(a)} & \vartheta_4^{(b)} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\vec{\vartheta}_{3,4}^{(n)} = V_{3,4}(z) \int_{z^*}^z V_{3,4}^{-1} P_{3,4} R \vec{\vartheta}^{(n-1)} dz_1.$$

Увеличивая, если надо, константу еще раз, получаем и здесь требуемую оценку, даже в усиленном виде. Именно, две последние строки матрицы R суть $O(\varepsilon)$, поэтому $P_{3,4} R = O(\varepsilon)$. Значит можно получить

$$|\vec{\vartheta}_{3,4}^{(n)}| < \frac{1}{2} C^n \cdot |\chi_1(z)| \cdot \varepsilon.$$

Теперь имеем

$$|\vec{\vartheta}^{(n)}| < C^n |\chi_1|$$

и сходимость ряда при достаточно малых значениях ε доказана. Построенное решение очевидным образом обладает всеми свойствами первого из решений, существования которых требует теорема. Оценка $\chi_1 \cdot O(\varepsilon^2)$ для двух последних компонент оказалась следствием малости двух последних строк матрицы R .

Второе решение строится точно так же, как и первое, но интегральное уравнение нужно переписать в виде

$$\vec{\vartheta} = -\varepsilon V(z) \int_z^{z^{**}} V^{-1}(z_1) R(z_1) \vec{\vartheta}(z_1) dz_1 + V(z) \vec{\delta},$$

так как χ_2 отличается от χ_1 тем, что модуль экспоненциальной части этой функции растет от z^{**} к z^* .

Для построения последних двух решений перепишем интегральное уравнение в следующем виде

$$\vartheta_1 = -\varepsilon \chi_1 \int_z^{z^{**}} \chi_1^{-1} P_1 R \vec{\vartheta} dz_1;$$

$$\vartheta_2 = \varepsilon \chi_2 \int_{z^*}^z \chi_2^{-1} P_2 R \vec{\vartheta} dz_1;$$

$$\vec{\vartheta}_{3,4} = \varepsilon V_{3,4} \int_{z^*}^z V_{3,4}^{-1} P_{3,4} R \vec{\vartheta} dz_1 + V_{3,4} \vec{\delta}_{3,4}.$$

Опять ищем решения в виде ряда, как это делалось ранее. По индукции без труда доказывается

$$|\vec{\vartheta}^{(n)}| < C^n.$$

В самом деле

$$|\vartheta_1^{(n)}| \leq |\chi_1| \int_z^{z^{**}} |\chi_1^{-1}(z_1)| \cdot C^{n-1} |dz_1| \leq \frac{1}{4} C^n;$$

$$|\vartheta_2^{(n)}| \leq |\chi_2| \int_{z^*}^z |\chi_2^{-1}(z_1)| \cdot C^{n-1} |dz_1| \leq \frac{1}{4} C^n.$$

Для двух последних координат имеем даже усиленную оценку

$$|\vartheta_{3,4}^{(n)}| \leq \frac{1}{2} C^n \varepsilon.$$

Это полностью доказывает теорему.

После того как построена фундаментальная система решений (135), с ее помощью можно решать краевую задачу. Напомним, что для уравнения Орра—Зоммерфельда краевая задача состоит в том, что в двух точках $z=a, b$ требуется $\omega = \xi = 0$.

Теорема 20 [26, 27]. Пусть при $\nu \rightarrow 0$ собственное значение уравнения Орра—Зоммерфельда стремится к некоторому предельному значению $\tilde{c}$, обладающему тем свойством, что на плоскости комплексного переменного z можно провести дугу из точки $z=a$ в точку $z=b$, вдоль которой $U - c \neq 0$ и $\operatorname{Re} \int \sqrt{i(U - c)} dz$ изменяется монотонно (допустимую дугу). Тогда $\tilde{c}$ есть собственное значение уравнения Релея вдоль этой дуги.

Обратно, пусть $\tilde{c}$ есть собственное значение уравнения Релея вдоль некоторой допустимой дуги. Тогда $\tilde{c}$ есть предел собственных значений уравнения Орра—Зоммерфельда при $\nu \rightarrow 0$.

Выражение « $\tilde{c}$ есть собственное значение вдоль дуги» следует понимать таким образом, что при этом значении $\tilde{c}$ существует аналитическое вдоль этой дуги решение уравнения Релея, принимающее нулевые значения на концах дуги.

Доказательство. В определении функций χ_1, χ_2 (см. (135)) остались неопределенные константы C_1 и C_2 . Здесь удобно выбрать их таким образом, чтобы $\chi_1(z^{**}) = \chi_2(z^*) = 1$. Тогда χ_1, χ_2 будут ограниченными равномерно по ε . Произвольное решение уравнения (132) есть линейная комбинация четырех решений (136). Возвращаясь к старым переменным, будем иметь

$$\xi = C_1 \xi^I + C_2 \xi^{II} + C_3 \xi^{III} + C_4 \xi^{IV};$$

$$\xi^i = \vartheta_4^i + \frac{\varepsilon}{r} (\vartheta_1^i - \vartheta_2^i) + \frac{7r'}{4r^3} \varepsilon^2 (\vartheta_1^i + \vartheta_2^i), \quad i = I, II, III, IV. \quad (137)$$

$$\omega = C_1 \omega^I + C_2 \omega^{II} + C_3 \omega^{III} + C_4 \omega^{IV};$$

$$\omega^i = \vartheta_3^i + \frac{1}{r^2} \varepsilon^2 (\vartheta_1^i + \vartheta_2^i), \quad i = I, II, III, IV. \quad (138)$$

Имея в виду (136), получаем

$$\xi^I = \frac{\varepsilon}{r} \chi_1 [1 + O(\varepsilon)], \quad \xi^{II} = -\frac{\varepsilon}{r} \chi_2 [1 + O(\varepsilon)],$$

$$\xi^{III} = \vartheta_4^{(a)} + O(\varepsilon^2), \quad \xi^{IV} = \vartheta_4^{(b)} + O(\varepsilon^2).$$

и

$$\begin{aligned} \varpi^I &= O(\varepsilon^2), & \varpi^{II} &= O(\varepsilon^2), \\ \varpi^{III} &= \vartheta_3^{(a)} + O(\varepsilon^2), & \varpi^{IV} &= \vartheta_3^{(b)} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Значения функций в концах дуги, т. е. в точках $z=a, b$ будем обозначать одной и, соответственно, двумя черточками. Краевые условия $\bar{\xi} = \bar{\bar{\xi}} = \bar{\varpi} = \bar{\bar{\varpi}} = 0$ дают следующее характеристическое уравнение:

$$\Delta(c) = \begin{vmatrix} \bar{\xi}^I & \bar{\xi}^{II} & \bar{\xi}^{III} & \bar{\xi}^{IV} \\ \bar{\bar{\xi}}^I & \bar{\bar{\xi}}^{II} & \bar{\bar{\xi}}^{III} & \bar{\bar{\xi}}^{IV} \\ \bar{\varpi}^I & \bar{\varpi}^{II} & \bar{\varpi}^{III} & \bar{\varpi}^{IV} \\ \bar{\bar{\varpi}}^I & \bar{\bar{\varpi}}^{II} & \bar{\bar{\varpi}}^{III} & \bar{\bar{\varpi}}^{IV} \end{vmatrix} = 0. \quad (139)$$

Сравним это с характеристическим уравнением для уравнения Релея, которому удовлетворяют функции $\vartheta_3^{(a)}, \vartheta_3^{(b)}$. Их линейная комбинация должна обращаться в нуль в концах дуги, что дает

$$\Delta_1(c) \equiv \begin{vmatrix} \bar{\vartheta}_3^{(a)} & \bar{\vartheta}_3^{(b)} \\ \bar{\bar{\vartheta}}_3^{(a)} & \bar{\bar{\vartheta}}_3^{(b)} \end{vmatrix} = 0. \quad (140)$$

Теперь упростим выражение (139), воспользовавшись асимптотическими формулами для ξ и ϖ . Из двух величин $\bar{\chi}_1, \bar{\bar{\chi}}_1$ одна равна единице, а другая экспоненциально мала при $\varepsilon \rightarrow 0$. Пусть для определенности $\bar{\chi}_1 = 1$. Тогда также $\bar{\chi}_2 = 1$, а $\bar{\bar{\chi}}_2$ экспоненциально мала. Теперь очевидно, что

$$\Delta(c) = \varepsilon^2 \left\{ -\frac{1}{r^2} \Delta_1(c) + O(\varepsilon) \right\}.$$

Теперь доказываемая теорема следует из того, что какова бы ни была точка $\tilde{c}$, ее можно окружить сколь угодно малым контуром, на котором нет собственных значений уравнения Релея, т. е. $\Delta_1(c)$ не обращается в нуль. При достаточно малых ε всюду на этом контуре можно считать, что остаточный член меньше $\left| \frac{1}{r^2} \Delta_1(c) \right|$. Тогда по принципу аргумента уравнения $\Delta = 0$ и $\Delta_1 = 0$ имеют внутри этого контура одинаковое число корней. Остальное очевидно.

Чтобы применять доказанную теорему, нужно еще выяснить, какие дуги являются допустимыми, т. е. что означает условие монотонности $\operatorname{Re} \int \sqrt{i(U-c)} dz$ на кривой, соединяющей концы отрезка интегрирования. Пусть сейчас для простоты $U(z)$ монотонно возрастающая на отрезке $[a, b]$ функция, аналитически продолжаемая в комплексную окрестность отрезка. Возьмем сначала вещественные c , т. е. посмотрим, какие вещественные

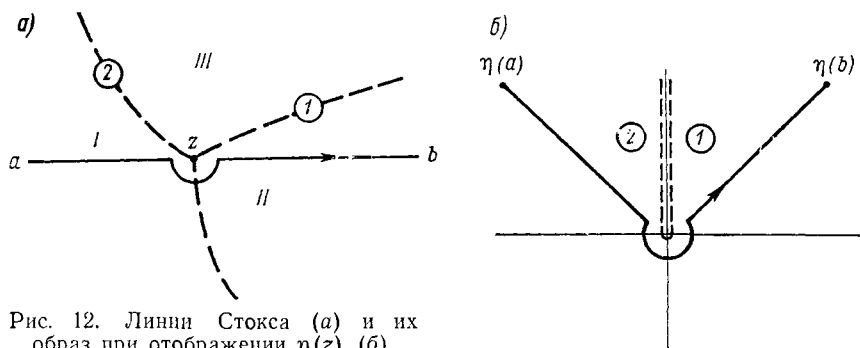


Рис. 12. Линии Стокса (а) и их образ при отображении $\eta(z)$ (б).

собственные значения скорости c могут быть предельными для «вязких» собственных значений. Обозначим

$$\eta = \int_{z_c}^z \sqrt{i(U-c)} dz, \quad (141)$$

где z_c — критическая точка, в которой $U-c=0$. Разложим эту функцию в ряд по степеням $z-z_c$ в окрестности критической точки. Имеем

$$U-c = U'_c(z-z_c) + O(z-z_c)^2, \quad U'_c > 0;$$

$$\eta = e^{i \frac{\pi}{4}} \sqrt{U'_c} \cdot \frac{2}{3} |z-z_c|^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2} i \arg(z-z_c)}.$$

На рис. 12 а пунктиром показаны кривые, на которых $\operatorname{Re} \eta = 0$. Эти кривые называются линиями Стокса и играют в этой асимптотической теории важную роль. Они расходятся из критической точки под равными углами и, по крайней мере локально, в окрестности этой точки, разделяют плоскость на три сектора I, II, III. Любые два сектора отображаются функцией η на плоскость, разрезанную по лучу. На рис. 12 б показано отображение секторов I и II. Линии Стокса, обозначенные как 1 и 2 (цифры в кружках), отображаются в положительную часть мнимой оси. Ясно, что любые две точки разрезанной таким образом плоскости η можно соединить кривой, вдоль которой $\operatorname{Re} \eta$ изменяется монотонно. Это значит, что на плоскости z любые две точки объеди-

ненных секторов I+II можно соединить такой кривой. В частности, можно соединить концевые точки a , b . Например, можно взять отрезок с обходом критической точки снизу (показан на рис. 12 a жирной линией). Его образ на плоскости η показан на рис. 12 b также жирной линией. Вывод: если c является собственным значением уравнения Релея вдоль отрезка, обходящего критическую точку снизу, то такое собственное значение есть предел собственных значений уравнения Орра—Зоммерфельда при исчезающе малой вязкости. Если вместо монотонно возрастающей функции U будет монотонно убывающая, то те же рассуждения

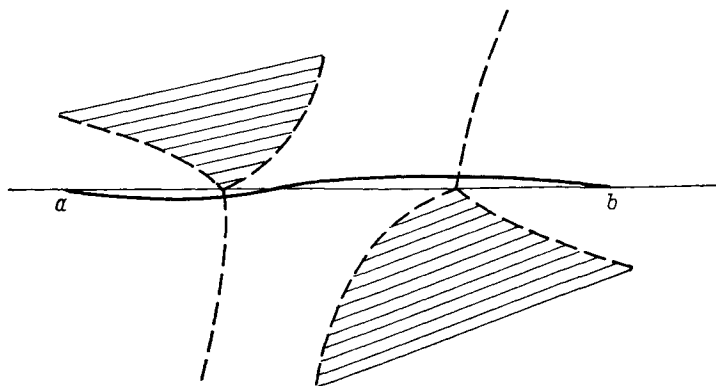


Рис. 13. Линии Стокса при двух особых точках.

приведут к обходу критической точки сверху, в полном согласии со сформулированным в п. 7 правилом.

Рассмотрим еще один случай — четный профиль скорости. Тогда имеется две критические точки. В окрестности одной из них U возрастает, в окрестности другой — убывает. Каждая из этих точек дает три линии Стокса (если линии Стокса определять по-прежнему как линии, на которых $\text{Re } \eta = 0$, но в интеграле (41), для η нужно каждый раз брать в качестве нижнего предела соответствующую критическую точку; два таких интеграла различаются на константу). Если из плоскости выбросить заштрихованные на рис. 13 сектора, то оставшаяся область отображается функцией η (здесь берем какую-нибудь одну функцию η , с любым нижним пределом интегрирования) на плоскость с разрезами, показанную на рис. 14. Эта область обладает тем же указанным выше свойством: любые две ее точки можно соединить кривой, вдоль которой $\text{Re } \eta$ изменяется монотонно. На рис. 13 показано, как соединить таким образом концевые точки a и b . Получаем то же самое — контур интегрирования должен обходить критическую точку, в которой $U' > 0$ снизу, а критическую точку $U' < 0$ — сверху.

Что произойдет, если критическая точка будет лежать не точно на вещественной оси, а несколько выше или ниже? Это значит, что s теперь невещественное. Если $\text{Im } s > 0$, что соответствует нарастающим возмущениям, и $U' > 0$ на вещественной

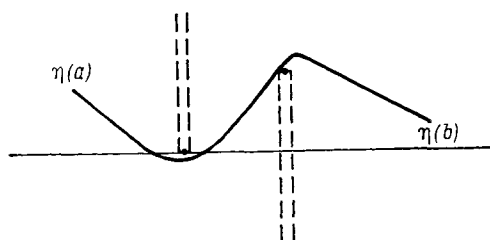


Рис. 14. Отображение области рис. 13 функцией $\eta(z)$.

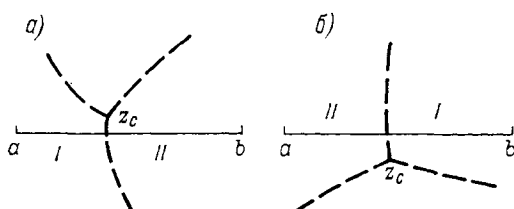


Рис. 15. Критическая точка несколько выше вещественной оси (а) и несколько ниже вещественной оси (б).
Случай неустойчивости.

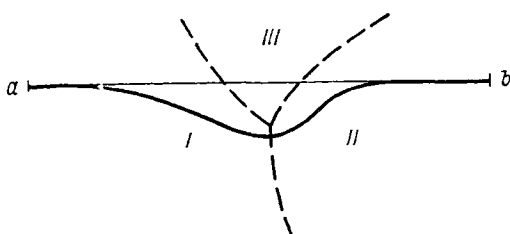


Рис. 16. Путь интегрирования уравнения в случае затухающих возмущений.

оси вблизи критической точки, то линии Стокса расположены как на рис. 15а. Функция η отображает секторы I+II в плоскость с вертикальным разрезом, как и прежде, и вдоль отрезка ab величина $\text{Re } \eta$ изменяется монотонно. То же самое будет, если в окрестности критической точки $U' < 0$, но теперь линии Стокса расположены как на рис. 15б. Следовательно, в случае нара-

стающих возмущений нужно интегрировать уравнение Релея естественным образом, вдоль отрезка вещественной оси. Иное дело в случае затухающих возмущений. Здесь расположение линий Стокса такое, как на рис. 16 (если $U' > 0$ вблизи критической точки). Отрезок $[a, b]$ уже не лежит в двух соседних секторах, $\operatorname{Re} \eta$ вдоль него не изменяется монотонно. Допустимой дугой является кривая, обходящая критическую точку снизу. Если c есть собственное значение уравнения Релея вдоль такой кривой, то оно представляет собой предел собственных значений уравнения Орра—Зоммерфельда при исчезающе малой вязкости.

Мы не занимались специально исследованием предельного поведения собственных функций уравнения Орра—Зоммерфельда (а лишь собственных чисел). Без большого труда можно показать, что в секторах I+II собственные функции уравнения Орра—Зоммерфельда стремятся к соответствующим собственным функциям уравнения Релея. Значительно труднее понять, что с ними происходит в секторе III. По-видимому, они там быстро осциллируют при малой вязкости. Во всяком случае, ясно, что тот отрезок вещественной оси, который попадает в этот сектор, представляет собой часть течения, где вязкость играет важную роль, как бы мала сама по себе она и ни была (вязкий слой). Может быть, впрочем, что вязкость играет роль лишь в окрестностях точек пересечения линий Стокса с вещественной осью, в тех точках вещественной оси, где

$$\operatorname{Re} \int_{z_c}^z \sqrt{i(U(z_1) - c)} dz_1 = 0. \quad (142)$$

В окрестностях этих точек образуются внутренние пограничные слои в дополнение к обычным, у твердых стенок.

Список литературы

1. Арнольд В. И. Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости.— «ДАН», 1965, 162, № 5.
2. Бетцов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М., «Мир», 1971.
3. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М., Изд-во Иностран. лит., 1949.
4. Галин М. Б. Об устойчивости зонального потока в атмосфере с учетом турбулентной вязкости и теплопроводности.— «Изв. АН СССР. Физика атм. и океана», 1968, т. 4, № 1.
5. Дикий Л. А. Об устойчивости плоскопараллельных потоков неоднородной жидкости.— «ПММ», 1960, 24, № 2.
6. Дикий Л. А. Устойчивость плоскопараллельных потоков идеальной жидкости.— «ДАН», 1960, 135, № 5, с. 1068—1071.
7. Дикий Л. А. К нелинейной теории устойчивости зональных течений.— «Изв. АН СССР. Физика атм. и океана», 1966, 2, № 3.
8. Дикий Л. А. Одна теорема о бароклинической неустойчивости.— «Изв. АН СССР. Физика атм. и океана», 1973, 9, № 12, с. 1312—1315.
9. Евграфов М. А., Федорюк М. В. Асимптотика решений уравнения $\omega''(z) - \rho(z, \lambda)\omega(z) = 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ в комплексной области.— «УМН», 1966, 21, № 1.
10. Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. М., Гостехиздат, 1957.
11. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во Иностран. лит., 1958.
12. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Т. 1. М., «Наука», 1965.
13. Романов В. А. Устойчивость плоскопараллельного течения Куэтта.— «Функциональный анализ и его приложение». 1973, 7, № 2, с. 62—73.
14. Томпсон Ф. Д. Анализ и предсказание погоды численными методами. Л., Гидрометеиздат, 1962.
15. Case K. M. Stability of inviscid plane Couette flow.— «Phys. fl.», 1960, 3, No. 2, p. 143—148.
16. Charney K. M., Stern M. E. On the stability of internal baroclinic jets in a rotating atmosphere.— «J. Atm. Sc.», 1962, 19, No. 2, p. 159—172.
17. Fjortoft R. Application of integral theorems in deriving criteria of stability for the baroclinic circular vortex. «Geophys. Publ.», 1950, 17, No. 6, Oslo.
18. Goldstein S. On the stability of superposed streams of fluids of different densities.— «Proc. Roy. Soc.», 1931, A 132, No. 820, p. 524—548.

19. Howard L. N. Note on a paper of John Miles.—“J. fl. mech.”, 1961, 10, No. 4, p. 509—512.
20. Kuo Hsiao-Lan. Dynamic instability of two-dimensional nondivergent flow in a barotropic atmosphere.—“J. Met.”, 1949, 6, No. 2, p. 105—122.
21. Miles J. W. On the stability of heterogeneous shear flows.—“J. fl. mech.”, 1961, 10, No. 4, p. 496—508.
22. Phillips N. Energy transformations and meridional circulations associated with simple baroclinic waves in a two-level quasigeostrophic model.—“Tellus”, 1954, 6, No. 3, p. 273—286.
23. Rosenbluth N. M., Simon A. Necessary and sufficient condition for the stability of plane parallel inviscid flow.—“Phys. fl.”, 1964, 7, No. 4, p. 557—558.
24. Taylor G. I. Effect of variation in density on the stability of superposed streams of fluid.—“Proc. Roy. Soc.”, 1931, A 132, No. 820, p. 499—523.
25. Tollmien W. Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitsverteilungen.—“Nachrichten Ges. Wiss. Math.-Phys. Kl.”, 1935, 50, p. 79—114.
26. Wasow W. Asymptotic solution of the differential equation of hydrodynamic stability in a domain containing a transition point.—“Ann. Math.”, 1953, 58, No. 2, p. 222—252.
27. Lin C.-C. On the stability of two-dimensional parallel flows.—“Quart. Appl. Math.”, 1945—1946, 3, No. 2—4.

Оглавление

Предисловие	3
1. Вводные замечания	5
2. Уравнения и краевые условия	8
3. Волновые решения	11
4. Примеры	14
5. Общие теоремы, основанные на интегральных соотношениях	23
6. Исследование устойчивости с помощью законов сохранения	26
7. Нейтральные волны. Особые точки	31
8. Теоремы об устойчивости, основанные на исследовании нейтрального случая	35
9. Трехмерные возмущения	43
10. Исследование устойчивости с помощью решения задачи Коши	46
11. Уравнение для описания крупномасштабных движений атмосферы	52
12. Сохранение энергии. Статическая устойчивость	60
13. Баротропная неустойчивость	63
14. Вязкость в задаче о баротропной устойчивости	69
15. Бароклинная неустойчивость	71
16. Бароклинная неустойчивость. Теоремы типа Релея и Фьортофта	80
17. Идеальная жидкость как предельный случай вязкой	86
Список литературы	106

ЛЕОНИД АЛЕКСАНДРОВИЧ ДИКИЙ

Гидро- динамическая устойчивость и динамика атмосферы

Редактор Т. А. Иванова. Художественный редактор В. А. Баканов. Обложка художника Б. А. Комарова. Технический редактор В. И. Семенова. Корректор Г. И. Римант

Сдано в набор 9/XII 1975 г. Подписано к печати 22/III 1976 г. М-19616. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 1. Печ. л. 6,75 Уч.-изд. л. 6,68. Тираж 1300 экз. Индекс МЛ-71. Заказ № 604. Цена 67 коп. Гидрометеониздат. 199053, Ленинград, 2-я линия, 23.

Ленинградская типография № 8 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 190000, Ленинград, Прачечный пер., 6.