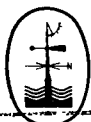


П. Н. Белов
Е. П. Борисенков
Б. Д. Панин

Численные методы прогноза погоды

Допущено Государственным комитетом СССР
по народному образованию в качестве учебника
для студентов вузов, обучающихся
по специальности «Метеорология»



ЛЕНИНГРАД

ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ 1989

УДК 62-50

Всесоюзный институт гидрометеорологии

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук А. Ф. Кивганов (Одесский гидрометеорологический институт), д-р физ.-мат. наук В. П. Садоков (Гидрометцентр СССР).

Научный редактор д-р физ.-мат. наук В. П. Садоков.

В книге излагаются физические и математические аспекты методов гидродинамических краткосрочных прогнозов погоды. Наиболее значительное внимание уделяется вопросам построения прогностических моделей на основе полных уравнений гидротермодинамики.

Книга предназначена в качестве учебника для студентов университетов и гидрометеорологических институтов, обучающихся по специальности «Метеорология». Она может быть использована также студентами и аспирантами смежных специальностей и лицами, работающими в области практического применения методов прогноза погоды.

Для изучения материала, изложенного в книге, требуются знания физики, теоретической гидромеханики, общей и динамической метеорологии, математики в объеме программ гидрометеорологических институтов, географических и физических факультетов университетов.

The book describes physical and mathematical aspects of the techniques for hydrodynamic short-range weather forecasts. Most considerable attention is given to the problems of constructing prognostic models based on the complete equations of hydrodynamics. The publication is meant as a textbook for students of universities and hydrometeorological institutes specializing in meteorology. It can be also used by students and postgraduates of adjacent specialities and those engaged in practical application of weather forecast techniques.

To study the material presented in the book, one should know physics, theoretical hydromechanics, general and dynamic meteorology, mathematics within the programs of hydrometeorological institutes, geographical and physical faculties of universities.

Учебник

**Павел Николаевич Белов
Евгений Пантелеймонович Борисенков
Борис Данилович Панин**

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ПРОГНОЗА ПОГОДЫ

Редактор О. В. Лапина. Художник Е. Е. Городная. Художественный редактор Б. А. Бураков. Технический редактор Н. Ф. Грачева. Корректор Л. А. Сандлер

ИБ № 1925

Сдано в набор 17.08.89. Подписано в печать 24.10.89. М-17696. Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 1. Литературная гарнитура. Печать высокая. Печ. л. 23,5. Кр.-отт. 23,5. Уч.-изд. л. 25,68. Тираж 3700 экз. Индекс МОЛ-101. Заказ № 826. Цена 1 р. 30 к.

Гидрометеиздат. 199226. Ленинград, ул. Беринга, 38

Типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени издательства «Машиностроение» при Государственном комитете СССР по печати. 193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10

Отпечатано в типографии № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой при Государственном комитете СССР по печати. 190000, г. Ленинград, Прачечный переулок, 6

Б 18050404000-175 14-89
069 (02)-89

ISBN 5—286—00148—3

© Гидрометеиздат, 1989

Учебный курс «Численные методы прогноза погоды» предусмотрен планом подготовки студентов университетов и гидрометеорологических институтов по специальности «Метеорология».

Настоящий учебник подготовлен авторами на основе лекций, которые читались ими в течение ряда лет: П. Н. Беловым в Московском государственном университете, Е. П. Борисенковым в Ленинградском государственном университете и Ленинградском гидрометеорологическом институте (ЛГМИ) и Б. Д. Паниным в ЛГМИ. Авторы ставили перед собой задачу последовательно изложить теоретические основы гидродинамических методов краткосрочного прогноза погоды, а также конкретные схемы интегрирования уравнений и прогностические модели.

Номера формул указаны двумя цифрами, первая из которых означает номер параграфа внутри данной главы, а вторая — номер формулы в данном параграфе. Первая цифра в номерах рисунков и таблиц соответствует номеру главы, а вторая — номеру рисунка внутри главы.

В конце книги приводится список основной литературы, рекомендуемой студентам для самостоятельного углубленного изучения курса.

В этой книге введение, главы 1, 6, 8 написаны П. Н. Беловым (п. 1.3 — совместно с Е. П. Борисенковым); глава 9 — П. Н. Беловым и Л. В. Берковичем; глава 3 — Е. П. Борисенковым; главы 2, 4, 7 — Б. Д. Паниным (п. 2.2 — совместно с Л. В. Берковичем и П. Н. Беловым); глава 5 — Б. Д. Паниным (п. 5.1, 5.2.1, 5.3.3, 5.4.2, 5.5, 5.6) и В. П. Садовым (п. 5.2.2, 5.2.3, 5.3.1, 5.3.2, 5.4.1).

Авторы выражают признательность Н. Ф. Вельтищеву, В. В. Клемину, Л. Т. Матвееву, а также сотрудникам кафедры метеорологических прогнозов ЛГМИ за ряд полезных советов и рекомендаций при подготовке рукописи. Авторы выражают глубокую благодарность также рецензентам — сотрудникам Гидрометцентра СССР и Одесского гидрометеорологического института — за обстоятельное рассмотрение рукописи учебника и рекомендации.

ВВЕДЕНИЕ

За последние два-три десятилетия на основе теоретических разделов метеорологии, методов вычислительной математики и благодаря появлению современных ЭВМ образовался новый раздел метеорологии, получивший название «Численные методы прогноза погоды». Основателем этого нового раздела является советский ученый И. А. Кибель, который еще в 1940 г. впервые в мире теоретически обосновал возможность прогноза погоды на основе фундаментальных законов физики, выраженных в форме уравнений гидротермодинамики, и разработал методику количественного прогноза давления и температуры воздуха на сутки.

Большой вклад в развитие новых численных (гидродинамических) методов прогноза погоды внесли Е. Н. Блинова, А. М. Обухов, Г. И. Марчук и др. в СССР, Н. Филлипс, Дж. Чарни, К. Хинкельман и др. за рубежом.

Потребности в специалистах в области численных методов прогноза погоды привели к созданию в гидрометеорологических институтах и в ряде университетов СССР новой учебной дисциплины, получившей аналогичное название. В соответствии с рекомендацией Всемирной метеорологической организации (ВМО) курс по численным методам прогноза погоды введен также и во многих зарубежных университетах.

Настоящая книга является результатом обобщения авторами всего имеющегося теоретического и практического материала, относящегося к данной дисциплине.

В главе 1 излагаются принципы построения прогностических моделей, классификации атмосферных процессов, описываемых уравнениями гидротермодинамики, обсуждаются сами эти уравнения, записанные в различных системах координат, а также их преобразования с учетом различных картографических проекций земного шара. При этом выводы уравнений гидротермодинамики, которые давались ранее в других дисциплинах учебного плана, не приводятся.

Ввиду того что реализация прогностических моделей производится в основном численными методами, являющимися приближенными, глава 2 посвящена методам конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений гидротермодинамики и методам их решения. Здесь авторы существенное внимание уделили анализу точности аппроксимации, а также точности различных способов (вариантов) решения уравнений, составляющих систему уравнений гидротермодинамики прогностических моделей атмосферы.

Все последующие главы посвящены построению различных прогностических моделей и способам их реализации. Эти модели клас-

сифицировались в зависимости от типа метеорологических процессов, от специфики их математической реализации, а также от заблаговременности прогнозов и размера территории, для которой они составляются. В соответствии с этой классификацией прогностические модели делятся на квазигеострофические (квазисоленоидальные), описывающие лишь крупномасштабные процессы и инерционные атмосферные волны, и модели с полными уравнениями гидротермодинамики, описывающие как крупномасштабные, так и мезомасштабные процессы (в зависимости от шага сетки), инерционные, гравитационные внешние и внутренние волны.

В зависимости от размера территории, охватываемой моделью, и заблаговременности прогноза модели делятся на глобальные (полушарные), предназначенные для прогноза на несколько суток, региональные с уменьшенным шагом сетки, предназначенные для прогноза по отдельным географическим регионам на 1—2 сут, и локальные, которые используются для детализированного прогноза в течение суток для конкретной местности или города.

Среди глобальных (полушарных) прогностических моделей можно особо выделить модели, в которых используется спектральное представление метеорологических полей при использовании тех или иных ортогональных функций. Они получили название спектральных моделей. Первые прогностические модели такого типа были созданы в 1943 г. советским ученым Е. Н. Блиновой. В последние десятилетия эти модели получают все более широкое распространение.

Глава 3 посвящена квазигеострофическим моделям: дается их теоретическое обоснование, излагаются методы практической реализации. При решении вопроса об относительной доле объема этой главы по отношению ко всему объему книги авторы учитывали, что, с одной стороны, квазигеострофические модели можно считать «морально устаревшими», а с другой — построение таких моделей и анализ их свойств в методическом отношении являются весьма общими и поучительными. Многие результаты методических проработок таких моделей в дальнейшем успешно используются при построении более сложных моделей.

Глава 4, посвященная прогностическим моделям с полными уравнениями гидротермодинамики, является центральной в книге. Здесь рассмотрены различные подходы к построению прогностических моделей, обсуждается и оценивается ряд математических способов их реализации.

Спектральные модели составляют предмет изложения главы 5. Здесь значительное место занимает обсуждение основ разложения переменных в ряды по линейно-независимым функциям, выбора функций, схемы интегрирования уравнений по времени.

С помощью основных уравнений прогностических моделей удастся учесть лишь те процессы, которые можно представить значениями метеорологических переменных в узлах сетки модели. Чтобы учесть другие процессы, имеющие меньший масштаб и не описываемые данными в узлах сетки моделей (эти процессы называют процессами подсеточного масштаба), применяются методы параметризации. Этим методам посвящена глава 6.

В главе 7 рассматриваются различные подходы к прогнозу влажности, облачности и осадков. При этом считается, что прогноз «основных» метеорологических величин (температура, скорость ветра и др.) на каждом очередном шаге или в каком-либо интервале времени уже имеется.

В главе 8 излагаются принципы построения региональных и локальных прогностических моделей. Региональные прогностические модели основаны на тех же уравнениях, что и глобальные (полушарные). В отличие от них локальные модели основаны на уравнениях мезометеорологии. Подчеркивается, что региональные модели уже нашли широкое практическое применение, локальные же модели находятся в стадии становления.

Наконец, в главе 9, последней главе книги, в качестве примеров дается описание трех оперативно действующих глобально-региональных моделей, реализованных в Гидрометцентре СССР, Национальном метеорологическом центре (НМЦ) США и Европейском центре среднесрочных прогнозов погоды (ЕЦСПП). Здесь же даются некоторые сравнительные оценки качества численных прогнозов ряда метеорологических величин.

Авторы полагают, что методы численного прогноза погоды находятся в стадии интенсивного развития и что ряд подходов имеет пока дискуссионный характер. Они, однако, выражают надежду на то, что систематизированный анализ и изложение уже существующих методов, предложенные в настоящей книге, будут способствовать успешной подготовке кадров специалистов в этой области и тем самым развитию и усовершенствованию самих методов численного прогноза погоды.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТОЯННЫЕ

- A — термический эквивалент работы (0,2388 кал/Дж), амплитуда волны, альбе́до
 $\mathcal{E}$ — приток какой-либо величины к единице объема
 O — порядок величины или характерное значение
 $\Phi = gz$ — геопотенциал
 a — средний радиус Земли (6369 км), абсолютная влажность
 B — поток тепла между глубинными слоями почвы или воды и их поверхностью
 C, C_ϕ — фазовая скорость перемещения волны
 C_v — удельная теплоемкость воды ($4,187 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К))
 C_Γ — групповая скорость перемещения волны
 c_p — удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении ($1,005 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К))
 $c_{p\Gamma}$ — удельная теплоемкость водяного пара при постоянном давлении ($1,846 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К))
 c_v — удельная теплоемкость воздуха при постоянном объеме ($0,718 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К))
 $c_{v\Gamma}$ — удельная теплоемкость водяного пара при постоянном объеме ($1,386 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К))
 $c^2 = R^2 T (\gamma_a - \gamma)/g$ — параметр статической устойчивости
 $D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ — горизонтальная дивергенция скорости
 d — дефицит точки росы
 F — сила, отнесенная к единице массы
 F — поток длинноволновой радиации в полусферу
 G — нисходящий поток длинноволновой радиации
 g — ускорение свободного падения ($9,81$ м/с²)
 $\nabla = \text{grad}$ — градиент
 H — турбулентный поток тепла
 H — высота изобарической поверхности
 h — высота, высота Солнца
 $\mathbf{i}$ — единичный вектор, направленный по оси x
 i — мнимая единица, индекс точки на оси x или в пространстве
 J — механический эквивалент теплоты ($4,187$ Дж/кал)
 $J(A, B) = (A, B)$ — якобиан
 $J_s(A, B) = (A, B)_s$ — якобиан на сферической поверхности
 $\mathbf{j}$ — единичный вектор, направленный по оси y
 j — индекс точки на оси y
 κ — коэффициент турбулентности, соответствующий вертикальной оси
 κ_1 — коэффициент турбулентности, соответствующий горизонтальной плоскости
 $\mathbf{k}$ — единичный вектор, направленный по вертикали
 k — волновое число, соответствующее оси z ; индекс точки на оси z или p
 L — длина волны, характерный горизонтальный масштаб
 $\mathcal{L} = 2,5 \cdot 10^6$ Дж/кг — теплота конденсации или испарения влаги
 $\mathcal{L}_B = 0,336 \cdot 10^6$ Дж/кг — удельная теплота плавления льда или кристаллизации воды
 $l = 2\omega \sin \phi$ — параметр Кориолиса

- m — масштабный множитель; волновое число, соответствующее оси x
 N — количество облаков (баллы)
 n — волновое число, соответствующее оси y
 $P = 1000$ гПа — стандартное давление на уровне моря
 $\mathcal{P}$ — функция пропускания
 P_n^m — присоединенный полином Лежандра
 p — давление воздуха, независимая переменная по вертикали
 Q — поток субстанции, количество осадков, общее влагосодержание воздуха
 q — массовая доля водяного пара
 R — удельная газовая постоянная сухого воздуха ($287 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}) = 287 \text{ м}^3/(\text{с}^2 \cdot \text{К})$), радиационный баланс
 R_n — удельная газовая постоянная водяного пара ($462 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$)
 $\mathbf{r}$ — радиус-вектор
 r — расстояние, коэффициент корреляции
 S — интегральный поток прямой солнечной радиации
 S° — солнечная постоянная ($1353 \text{ Вт}/\text{м}^2$)
 s — индекс, объемная концентрация примеси
 T — температура по абсолютной шкале, период колебаний, масштаб времени
 T_d — точка росы по абсолютной шкале
 T^* — температура почвы или воды
 T_0 — температура поверхности почвы или воды
 t — время, температура в градусах Цельсия
 t_d — точка росы в градусах Цельсия
 U — скорость основного потока вдоль оси x , восходящий поток длинноволновой радиации
 u — составляющая скорости по оси x
 $\bar{u}$ — средняя скорость
 $\mathbf{V}$ — вектор скорости ветра
 V — абсолютное значение скорости, масштаб горизонтальной скорости
 v — составляющая скорости по оси y
 $v_z = w$ — вертикальная составляющая скорости
 v_Θ — составляющая скорости по меридиану (положительная при движении на юг)
 v_λ — составляющая скорости по широте (положительная при движении на восток) — зональная скорость
 v_φ — составляющая скорости по меридиану (положительная при движении на север) — меридиональная скорость
 W — масштаб вертикальной скорости
 w — составляющая скорости по оси z — вертикальная скорость
 x — декартова горизонтальная координата по оси x
 y — декартова горизонтальная координата по оси y
 z — декартова вертикальная координата по оси z
 α — индекс зональной циркуляции атмосферы, угол
 $\beta = dl/dy = 2\omega \cos \varphi/a$ — параметр Россби
 $\beta = g/\theta$ — параметр плавучести
 Γ — альbedo системы Земля—атмосфера
 $\gamma = -\partial T/\partial z$ — вертикальный градиент температуры
 γ_a — сухоадиабатический градиент температуры ($9,8 \text{ К}/\text{км}$)
 γ_{va} — влажноадиабатический градиент температуры
 $\Delta = \nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа на плоскости, разность координат
 $\Delta x, \Delta y, \Delta r$ — шаги сетки по горизонтальным координатам
 $\Delta z, \Delta p, \Delta \sigma$ — шаги сетки по вертикальной координате
 Δ_s — оператор Лапласа на сферической поверхности
 δ — разность функций, средняя абсолютная ошибка

- ε — параметр малости И. А. Кибеля, невязка, относительная ошибка
 $\xi = p/P$ — безразмерная вертикальная координата
 η — обобщенная вертикальная координата
 $\dot{\eta} = d\eta/dt$ — аналог вертикальной скорости в η -системе координат
 $\theta = T(P/p)^{(\kappa-1)/\kappa}$ — потенциальная температура, где $P = 1000$ гПа
 $\Theta = \pi/2 - \varphi$ — полярный угол
 $\kappa = c_p/c_v$ — постоянная Кармана ($\kappa = 1,4$)
 $\lambda = c_p \rho k$ — коэффициент теплопроводности, длина волны, долгота места
 ν — $1/T$ частота колебаний
 ρ — плотность воздуха
 $\rho_{\text{п}}$ — плотность водяного пара
 σ — круговая частота колебаний, среднее квадратическое отклонение, постоянная Стефана—Больцмана ($5,669 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴))
 $\sigma = p/p_s$ — безразмерная вертикальная координата (p_s — приземное давление)
 $\dot{\sigma} = d\sigma/dt$ — аналог вертикальной скорости в σ -системе координат
 $\tau = dp/dt$ — аналог вертикальной скорости в p -системе координат, индекс, касательное напряжение трения
 φ — широта места, потенциал скорости
 ψ — функция тока
 Ω — вихрь скорости
 Ω — вертикальная составляющая вихря скорости
 ω — вектор угловой скорости вращения Земли
 ω — угловая скорость вращения Земли ($0,729 \cdot 10^{-4}$ с⁻¹)

1.1. Принципы построения прогностических моделей атмосферы

Основу численных методов прогноза погоды составляют гидродинамические модели атмосферы. Построение таких моделей включает ряд этапов:

- 1) определение и описание физических процессов, приводящих к изменениям погоды;
- 2) выбор дифференциальных (или иных) уравнений, описывающих эти процессы, и при необходимости преобразование уравнений, записанных в какой-либо системе координат, к системе координат, связанной с картографическими проекциями земного шара;
- 3) замена сложной, непрерывной среды атмосферы более простой средой с небольшим числом параметров и значениями метеорологических величин в конечном числе точек пространства;
- 4) численное решение уравнений и расчет значений метеорологических величин для фиксированных точек пространства и моментов времени.

В этой главе будут обсуждены первые два этапа построения прогностических моделей, в других главах — остальные.

При разработке прогностических моделей атмосферы для целей краткосрочного (1—3 сут) и среднесрочного (3—10 сут) прогноза погоды выделяют три основных типа атмосферных процессов: крупномасштабные, среднемасштабные и мелкомасштабные процессы.

Крупномасштабные, или *макромасштабные процессы* характеризуются горизонтальными масштабами порядка тысяч (1—10 тыс.) километров. Они развиваются за период времени порядка нескольких (1—10) суток. Примерами таких процессов являются циклогенез, струйные течения и др.

Среднемасштабные, или *мезомасштабные процессы* развиваются на площади, линейные размеры которой имеют порядок десятков и сотен километров, за период времени порядка часов. К числу мезопроцессов можно отнести атмосферные фронты, развитие кучевой облачности, орографические возмущения и др.

Мелкомасштабные, или *микромасштабные процессы* характеризуются горизонтальными масштабами порядка сантиметров и метров и временными масштабами порядка секунд и минут. В качестве примеров таких процессов можно привести атмосферную турбулентность, процессы в приземном слое.

Атмосферные движения имеют волновой характер, который необходимо учитывать при разработке и реализации прогностических

моделей. В связи с этим приведем основные сведения о типах волновых колебаний, наиболее важных для прогностических моделей.

Крупномасштабные волны (инерционные волны, или волны Росби) — синоптически значимые волны. Длина этих волн составляет тысячи километров, период — несколько суток. Амплитуда колебаний в поле давления имеет порядок десятков гектопаскалей, а в поле ветра — десятков м/с. Очевидно, что эти волны являются частью крупномасштабных процессов и обязательно должны учитываться при разработке прогностических моделей.

Гравитационные волны образуются при нарушении гидростатического равновесия. Эти волны относятся в основном к мезомасштабным процессам. Однако некоторые из них характерны и для мелкомасштабных процессов. Амплитуды таких волн в поле ветра составляют несколько м/с. Гравитационные волны играют важную роль в процессах возникновения агеострофических составляющих ветра и циклогенеза. Поэтому их учет в прогностических моделях также необходим.

Наконец, *акустические волны* относятся в основном к микромасштабному диапазону и на формирование погоды влияния не оказывают. Однако эти волны могут существенным образом сказаться на результатах численного интегрирования уравнений модели.

Более подробные сведения о волновых движениях в атмосфере приводятся в курсе динамической метеорологии.

Формирование погоды происходит под влиянием всех типов атмосферных процессов (кроме акустических колебаний). Однако «вклад» каждого процесса в различных условиях будет неодинаков. Так, формирование «однородной» погоды на больших пространствах («фона» погоды) происходит главным образом под влиянием крупномасштабных процессов и крупномасштабных волн. Микропроцессы при этом вносят свой определенный, но менее значимый вклад.

Погода же в конкретной местности и в определенное время суток будет определяться в основном процессами мезомасштаба, развивающимися на фоне крупномасштабного процесса. Характерным примером является образование кучево-дождевых облаков и ливней в тыловой части циклонов.

Из этих и аналогичных рассуждений следуют определенные приоритеты для включения тех или иных процессов в прогностическую модель: крупномасштабных, мезомасштабных и микромасштабных процессов. Таким образом, на начальном этапе создания прогностических моделей должны быть сформулированы уравнения гидротермодинамики, дающие математическое описание крупномасштабных атмосферных процессов.

1.2. Система основных уравнений гидротермодинамики

Основу всех прогностических моделей атмосферы составляют уравнения движения, притока тепла, неразрывности, переноса влаги и атмосферных примесей, являющиеся математическим выра-

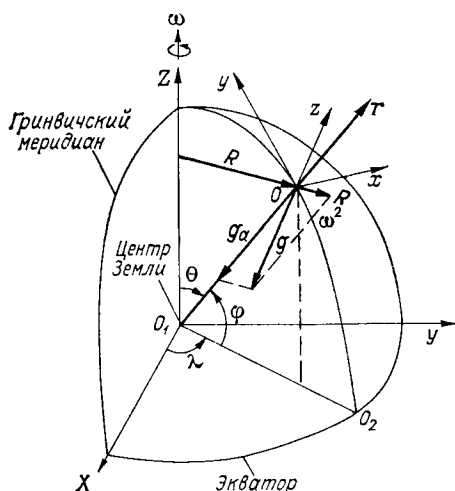


Рис. 1.1. Абсолютная (инерционная) система координат с началом в центре Земли O_1 и одной из осей (z) прямо-угольной системы координат, совпадающей с осью Земли и направленной к югу на север, а также относительные системы координат, связанные с Землей, вращающейся с угловой скоростью ω .

Сферическая система координат $O_1 r \theta \lambda$ (r — расстояние от центра Земли до данной материальной точки, r — радиус-вектор, $\theta = \pi/2 - \varphi$ — полярный угол, φ — широта места (положительная к северу от экватора и отрицательная — к югу); λ — долгота места, отсчитываемая от гринвичского меридиана к востоку; правая декартова прямоугольная система координат $O_1 XYZ$ с началом в центре Земли; правая декартова прямоугольная локальная система координат $Oxyz$ с центром в любой точке земной поверхности O и осью z , направленной по местной вертикали.

жением законов физики (законы сохранения импульса, энергии и массы), а также уравнения состояния. Вывод перечисленных уравнений дается в курсе динамической метеорологии.

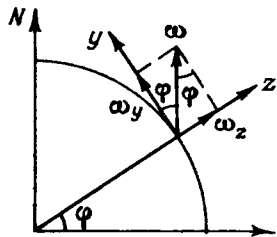
Эти уравнения для идеальной атмосферы (без учета турбулентной вязкости), записанные в относительной системе координат, связанной с вращающейся Землей и с абсолютной системой координат, ось которой совпадает с осью вращения Земли (рис. 1.1), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \mathbf{g}, \\ \frac{dT}{dt} - \frac{\gamma_a}{g\rho} \frac{dp}{dt} &= \frac{1}{c_p \rho} (\mathcal{E}_\lambda + \mathcal{E}_\phi), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}) &= 0, \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{1}{\rho} \mathcal{E}_\pi, \quad \frac{ds_a}{dt} = \mathcal{E}_a, \quad p = R\rho T. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ — трехмерный вектор скорости; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные орты в декартовой системе координат x, y, z ; u, v, w — проекции вектора скорости на оси координат; p, ρ и T — давление, плотность и температура воздуха; θ — потенциальная температура:

$$\theta = T (P/p)^\lambda,$$

$P = 1000$ гПа, $\lambda = (c_p - c_v)/c_p$, c_p и c_v — удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении и при постоянном объеме соответственно; $\mathbf{g}$ — вектор силы тяжести, отнесенный к единице массы, $\mathbf{g}_z = -\mathbf{g}$ — проекция вектора силы тяжести на местную вертикаль; $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$ — вектор угловой скорости вращения Земли с проекциями на оси координат ω_x, ω_y и ω_z ; $\gamma_a = g/c_p$ — сухоадиабатический градиент температуры; R — удельная газовая постоянная сухого воздуха; s_a — количество примеси a в единице объема



воздуха; $\mathcal{E}_\lambda$ и $\mathcal{E}_\phi$ — скорости изменения количества тепла в единице объема за единицу времени (приток тепла при знаке «плюс» или сток тепла при знаке «минус») за счет лучистого теплообмена и фазовых превращений воды; $\mathcal{E}_\pi$ — скорость изменения количества водяного пара; $\mathcal{E}_a$ — скорость изменения количества примеси в единице объема (приток или сток примеси); ∇ — градиент:

$$\nabla = \text{grad} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z};$$

d/dt — индивидуальная производная:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z};$$

$\text{div } \mathbf{A}$ — объемная дивергенция вектора $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$:

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

где A_x, A_y, A_z — проекции вектора; $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z,$$

где $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$ — вектор с проекциями B_x, B_y и B_z , $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ — векторное произведение векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k}.$$

В локальной декартовой системе координат ось x направлена на восток, ось y — на север, ось z — по местной вертикали, а проекции вектора угловой скорости вращения Земли $\boldsymbol{\omega}$ равны: $\omega_x = 0$, $\omega_y = \omega \cos \varphi$, $\omega_z = \omega \sin \varphi$ (рис. 1.2), где ω — абсолютная величина угловой скорости вращения Земли, $\omega = 2\pi/T$, T — 1 сутки, φ — широта места.

В этой системе координат уравнения принимают следующий вид:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + lv - l_1 w,$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - lu,$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - l_1 u - g,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\gamma_a}{g\rho} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c_p \rho} (\mathcal{E}_\lambda + \mathcal{E}_\phi),$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho} \mathcal{E}_\pi, \quad \frac{ds_a}{dt} = \mathcal{E}_a, \quad p = R\rho T, \quad (2.2)$$

где $l = 2\omega \sin \varphi$ — параметр Кориолиса, $l_1 = 2\omega \cos \varphi$, $g = -g_z$.

Далее, наряду с этой системой уравнений для бароклиной атмосферы, будет использоваться также система уравнений *баротропной* (эквивалентно-баротропной, или однородной) модели атмосферы:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -g \frac{\partial h}{\partial x} + lv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -g \frac{\partial h}{\partial y} - lu, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} &= -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right),\end{aligned}\quad (2.3)$$

где h — геометрическая высота.

Напомним, что в отличие от бароклиной среды в баротропной среде поверхности постоянных значений давления, плотности и температуры либо совпадают, либо «параллельны» друг другу.

Рассмотрим теперь уравнения гидротермодинамики для *турбулентного* движения. Каждую величину f или φ , входящую в систему уравнений (2.2) (кроме величины ρ), представим в виде

$$f(x, y, z, t) = \bar{f}(x, y, z, t) + f'(x, y, z, t), \quad (2.4)$$

где черта сверху означает осреднение по времени или пространству (или по времени и пространству одновременно), а штрих — отклонение величин от их средних значений, обусловленных турбулентностью. Для отклонений примем

$$\bar{f}' = 0. \quad (2.5)$$

Очевидно, что на основании этого предположения в соответствии с правилами осреднения Рейнольдса

$$\overline{\bar{f}} = \bar{f}, \quad \overline{\bar{f}\varphi} = \bar{f}\bar{\varphi} + \overline{f'\varphi'}. \quad (2.6)$$

Подставляя каждую переменную в виде (2.4) в систему уравнений (2.2), произведя осреднение полученных новых уравнений и учитывая соотношения (2.5) и (2.6), вместо (2.2) получаем систему уравнений для осредненных величин $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\bar{T}$, $\bar{q}$ и $\bar{s}_a$ (знак осреднения далее опущен):

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + lv - l_1 w + F_x, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - lu + F_y, \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - l_1 u - g + F_z, \\ \frac{dT}{dt} - \frac{\gamma_a}{g\rho} \frac{dp}{dt} &= \frac{1}{c_p \rho} (\mathcal{E}_\pi + \mathcal{E}_\Phi) + \frac{1}{c_p \rho} \mathcal{E}_\tau, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho} \mathcal{E}_\pi + \frac{1}{\rho} \mathcal{E}_{\pi\tau}, \quad \frac{ds_a}{dt} &= \mathcal{E}_a + \mathcal{E}_{a\tau}, \quad p = R\rho T,\end{aligned}\quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} F_x &= - \left(\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'u'}}{\partial z} \right), \\ F_y &= - \left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'v'}}{\partial z} \right), \\ F_z &= - \left(\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

являются составляющими силы турбулентной вязкости, отнесенными к единице массы, или ускорением составляющих средних скоростей по осям x, y, z , обусловленных турбулентностью, а величины

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\tau &= -c_p \rho \left(\frac{\partial \overline{u'T'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'T'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'T'}}{\partial z} \right), \\ \mathcal{E}_{\pi\tau} &= -\rho \left(\frac{\partial \overline{u'q'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'q'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'q'}}{\partial z} \right), \\ \mathcal{E}_{a\tau} &= - \left(\frac{\partial \overline{u's_a'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v's_a'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w's_a'}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

представляют собой скорости притоков тепла, водяного пара и атмосферных примесей, отнесенных к единице объема, обусловленных турбулентностью. Все эти величины (F и $\mathcal{E}$) определяются методами параметризации (см. главу 6).

Для крупномасштабных атмосферных движений система уравнений гидротермодинамики имеет тот же вид, что и система уравнений (2.7), однако в этом случае вместо уравнения движения по оси z используется уравнение статики

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho. \quad (2.10)$$

Систему уравнений (2.7) будем называть далее исходной системой уравнений гидротермодинамики. В случае если все составляющие F и $\mathcal{E}$ считать известными, то указанная система является замкнутой.

Системы уравнений в частных производных (2.2), (2.3) и (2.7) являются *нелинейными*. В связи с этим их решение в аналитической форме невозможно и для их интегрирования применяются *численные методы*.

Формулируя *начальные условия*, необходимо исходить из того, что число функций, задаваемых в начальный момент времени $t = 0$, должно быть равным числу производных по времени. В системе уравнений (2.7) с учетом формулы (2.10) это число равно шести. Следовательно, число функций, задаваемых в начальный момент, также должно быть равным шести.

Так как уравнения содержат пространственные производные, то необходимо поставить *граничные условия*, число которых должно быть равным порядку производных, от каждой переменной по каждой координате. Вопрос о формулировке начальных и граничных усло-

вий будет далее обсуждаться при построении каждой конкретной атмосферной модели.

Заметим также, что в ряде моделей атмосферы вместо температуры T используется потенциальная температура θ . Уравнение потока тепла в системе (2.7) и выражение для $\mathcal{E}_T$ в системе (2.9) в этом случае записываются в следующем виде:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{T} \frac{1}{c_p \rho} (\mathcal{E}_L + \mathcal{E}_\Phi) + \frac{1}{c_p \rho} \mathcal{E}_T, \\ \mathcal{E}_T = -c_p \rho \left(\frac{\partial \overline{u'\theta'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'\theta'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'\theta'}}{\partial z} \right). \quad (2.11)$$

В заключение подчеркнем следующее. Система уравнений гидротермодинамики (2.2) адекватно описывает все три вида атмосферных колебаний — крупномасштабные, гравитационные и акустические. Замена уравнения движения по вертикальной оси на уравнение статики (2.10) приводит к отфильтрованию акустических волн, поэтому такая система уравнений описывает лишь крупномасштабные и гравитационные колебания. Эти же колебания описывает и система уравнений баротропной модели атмосферы (2.3).

1.3. Система уравнений гидротермодинамики с произвольной вертикальной координатой

Система уравнений гидротермодинамики (2.2), записанная в декартовой системе координат, при построении прогностических моделей атмосферы используется как основная. Однако для целей прогноза крупномасштабных атмосферных движений целесообразно использование более простой системы уравнений, в которой вертикальная координата z заменена на другую координату с помощью уравнения статики (2.10).

Рассмотрим общий подход к преобразованию уравнений гидротермодинамики к системе координат с произвольной вертикальной координатой.

Пусть имеется некоторая функция f , под которой будем понимать ту или иную метеорологическую величину, зависящую от координат x, y, z, t , т. е. имеем $f = f(x, y, z, t)$.

Рассмотрим систему координат, отличающуюся от декартовой только вертикальной координатой.

Обозначим новые независимые переменные $x_1, y_1, \eta(x, y, z, t), t_1$. Тогда функцию $f(x, y, z, t)$ в новой системе координат обозначим $f_1 = f_1(x_1, y_1, \eta(x, y, z, t), t_1)$.

Частные производные в старой и новой системах координат связаны следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial s} + \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial s} + \frac{\partial f_1}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial s}. \quad (3.1)$$

Здесь s — любая из переменных x, y, z, t , т. е.

$$s = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{vmatrix}.$$

Аналогичным образом обозначим

$$s_1 = \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \eta \\ t_1 \end{vmatrix}.$$

Примем, что $x_1 = x, y_1 = y, t_1 = t$. Тогда

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{\partial y_1}{\partial y} = \frac{\partial t_1}{\partial t} = 1,$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{\partial t_1}{\partial x} = \frac{\partial x_1}{\partial y} = \frac{\partial t_1}{\partial y} = \frac{\partial x_1}{\partial z} = \frac{\partial y_1}{\partial z} = \frac{\partial t_1}{\partial z} = \frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{\partial y_1}{\partial t} = 0.$$

С учетом сказанного выражение (3.1) приобретает вид

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f_1}{\partial s_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial s}. \quad (3.2)$$

На основании выражения (3.2) можем записать:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для обратного перехода имеем

$$\frac{\partial f_1}{\partial s_1} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s_1} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s_1} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s_1} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Тогда с учетом принятых выше условий получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_1} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_1}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial t_1} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial \eta} &= \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В системе (3.4) z выполняет уже функцию не независимой, а зависимой переменной.

Пусть f — геопотенциал (Φ) поверхности $\eta = \text{const}$: $\Phi = gz = gH$. Поскольку f не зависит от x , y и t , то $\partial\Phi/\partial s = 0$ и выражение (3.2) приобретает вид

$$0 = \frac{\partial\Phi_1}{\partial s_1} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial s},$$

откуда получаем

$$\frac{\partial\eta}{\partial s} = - \frac{\partial\Phi_1}{\partial s_1} / \frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta}. \quad (3.5)$$

Используя последнее соотношение в системе (3.3) можем записать

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial z} = g,$$

или

$$\frac{\partial\eta}{\partial z} = g / \frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta}. \quad (3.6)$$

С учетом формулы (3.5) выражение (3.2) примет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f_1}{\partial s_1} - \frac{\partial f_1}{\partial\eta} \frac{\partial\Phi_1}{\partial s_1} / \frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta}. \quad (3.7)$$

Принимая во внимание соотношение (3.6), из формулы (3.3) получаем

$$\frac{\partial f}{\partial z} = g \frac{\partial f_1}{\partial\eta} / \frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta}. \quad (3.8)$$

Запишем теперь полную производную от f :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (3.9)$$

Используя (3.7) и (3.8), находим:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} = & \frac{\partial f_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \\ & + \frac{\partial f_1 / \partial\eta}{\partial\Phi_1 / \partial\eta} \left(- \frac{\partial\Phi_1}{\partial t_1} - u_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} - v_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial y_1} + gw_1 \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Обозначим

$$\frac{1}{\partial\Phi_1 / \partial\eta} \left(gw_1 - \frac{\partial\Phi_1}{\partial t_1} - u_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} - v_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial y_1} \right) = \dot{\eta}. \quad (3.11)$$

Тогда

$$\frac{df}{dt} = \frac{df_1}{dt_1} = \frac{\partial f_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \dot{\eta} \frac{\partial f_1}{\partial\eta}. \quad (3.12)$$

Мы видим, что индивидуальная производная в новой системе координат записывается точно так же, как и в старой, если только вместо производной по z взять производную по η , а вместо вертикальной скорости — $\dot{\eta}$.

Для выяснения физического смысла $\dot{\eta}$ применим (3.10) к η . В силу независимости переменных $\frac{\partial \eta}{\partial t_1} = \frac{\partial \eta}{\partial x_1} = \frac{\partial \eta}{\partial y_1} = 0$, получим

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{\partial \Phi_1 / \partial \eta} \left(g w_1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t_1} - u_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} - v_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} \right).$$

Сопоставив это выражение с выражением (3.11), видим, что

$$\dot{\eta} = \frac{d\eta}{dt}. \quad (3.13)$$

Однако из (3.11) находим

$$g w_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} + \dot{\eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} = \frac{d\Phi_1}{dt}.$$

Таким образом,

$$g w_1 = \frac{d\Phi_1}{dt}, \quad \dot{\eta} = \frac{d\eta}{dt}, \quad w_1 = \frac{1}{g} \frac{d\Phi_1}{dt}. \quad (3.14)$$

Преобразуем теперь систему уравнений гидротермодинамики.

1. Уравнение состояния не изменяется:

$$p_1 = \rho_1 R T_1. \quad (3.15)$$

2. Уравнение, описывающее первое начало термодинамики в прежней системе координат, имеет следующий вид:

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c_p \rho} \mathcal{E} \quad (3.16)$$

(легко показать, что $\frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T}{p} = \frac{\gamma_a}{g\rho}$).

В новой системе координат изменится только вид записи индивидуальных производных.

3. Третье уравнение движения (уравнение статики) запишется следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z}.$$

С учетом (3.6) и (3.8) полученное выражение можно переписать в виде

$$\frac{\partial p}{\partial z} = g \frac{\partial p_1}{\partial \eta} / \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} = -\rho_1 g,$$

откуда получаем

$$\frac{\partial p_1}{\partial \eta} = -\rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}. \quad (3.17)$$

4. В уравнениях движения имеем

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} - \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_1 / \partial x_1}{\partial \Phi_1 / \partial \eta}.$$

Подставляя сюда $\partial p_1 / \partial \eta$ из (3.17), получаем:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}. \quad (3.18)$$

С учетом (3.18) первое уравнение движения и по аналогии второе уравнение движения могут быть записаны следующим образом (без учета члена $l_1\omega$):

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt_1} &= -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + lv_1 + F_x, \\ \frac{dv_1}{dt_1} &= -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} - lu_1 + F_y.\end{aligned}\quad (3.19)$$

5. Преобразуем теперь уравнение неразрывности.

В прежней системе координат оно записывалось в виде

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0. \quad (3.20)$$

Используя выражения (3.2), (3.5) и (3.6), находим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}, \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} \Big/ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial z} &= \frac{\partial \omega_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \omega_1}{\partial \eta} g \Big/ \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} = \frac{1}{\partial \Phi_1 / \partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{d\Phi_1}{dt_1} \right) = \\ &= \frac{1}{\partial \Phi_1 / \partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} + \dot{\eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right),\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial z} &= \frac{1}{\partial \Phi_1 / \partial \eta} \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t_1 \partial \eta} + u_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x_1 \partial \eta} + v_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y_1 \partial \eta} + \dot{\eta} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\partial \Phi_1 / \partial \eta} \frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} + \frac{1}{\partial \Phi_1 / \partial \eta} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} \right). \quad (3.23)\end{aligned}$$

Подставив формулы (3.21), (3.22) и (3.23) в уравнение (3.20), получим:

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dt} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} + \frac{1}{\partial \Phi_1 / \partial \eta} \frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (3.24)$$

Используя уравнение (3.17), находим:

$$\frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial \eta} \right) = -\rho_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{d\rho_1}{dt_1},$$

или, поделив все на $-\rho_1 (\partial \Phi_1 / \partial \eta) = \partial p_1 / \partial \eta$, получим:

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dt} + \frac{1}{\partial \Phi_1 / \partial \eta} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{\partial p_1 / \partial \eta} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial p_1}{\partial \eta} \right). \quad (3.25)$$

Подставляя (3.25) в (3.24), находим:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} + \frac{1}{\partial p_1 / \partial \eta} \frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (3.26)$$

Опуская теперь индекс 1 при функциях и независимых переменных, уравнения гидротермодинамики в новой системе координат запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + l v + F_x, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - l u + F_y, \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} &= -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \\ \frac{dT}{dt} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} &= \frac{1}{c_p \rho} \mathcal{E}, \\ \frac{1}{\partial p / \partial \eta} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} &= 0.\end{aligned}\quad (3.27)$$

На основе системы уравнений (3.27) уравнения гидротермодинамики могут быть получены в системах координат с различными вертикальными координатами. В частности, при $\eta = p$ получается декартова изобарическая система координат, при $\eta = \sigma = p/p_s$ (где $p_s = p_s(x, y, t)$) σ -система координат (см. п. 1.4.2), а при $\eta = \theta$ (где θ — потенциальная температура) — изэнтропическая система координат.

1.4. Уравнения гидротермодинамики в различных системах координат

1.4.1. Локальная изобарическая система координат

В локальной изобарической системе координат (рис. 1.3), которую называют также системой координат (x, y, p, t) , в качестве независимых переменных принимаются $x_p = x$, $y_p = y$, $p = \eta$, $t_p = t$, в качестве зависимых переменных — u , v , T , $H = \Phi/g$ (высота изобарической поверхности) и величина

$$\tau = \dot{\eta} = \frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (4.1)$$

называемая *аналогом вертикальной скорости*.

Полную производную в изобарической системе координат можно представить в виде

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t_p} + u \frac{\partial}{\partial x_p} + \\ &+ v \frac{\partial}{\partial y_p} + \tau \frac{\partial}{\partial p}.\end{aligned}\quad (4.2)$$

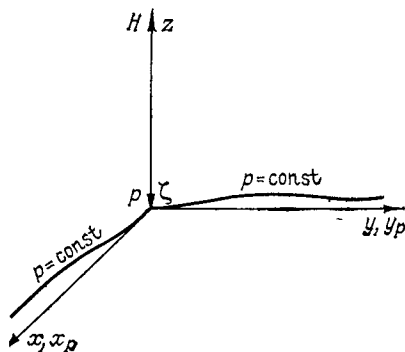


Рис. 1.3. Декартовы и изобарические координаты.

В уравнениях движения в системе уравнений (3.27) первые члены в правых частях обратятся в нуль, так как

$$\frac{\partial p}{\partial x_p} = \frac{\partial p}{\partial y_p} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right) = 0.$$

В уравнении неразрывности будем иметь

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \eta}{\partial p} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial p}{\partial p} \right) = 0, \quad \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} = \frac{\partial \tau}{\partial p}.$$

Уравнение статики примет вид

$$1 = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad \text{или} \quad 1 = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial p}, \quad \text{или} \quad T = -\frac{p}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial p}.$$

С учетом сделанных преобразований, уравнения гидротермодинамики (3.27) в изобарической системе координат принимают следующий вид (индекс p у координат опущен):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} = -g \frac{\partial H}{\partial x} + lv + F_x,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \tau \frac{\partial v}{\partial p} = -g \frac{\partial H}{\partial y} - lu + F_y,$$

$$T = -\frac{g}{R} p \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{c^2}{Rp} \tau + \frac{1}{c_p \rho} \mathcal{E},$$

или

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + \tau \frac{\partial \theta}{\partial p} = \frac{1}{c_p \rho} \frac{\theta}{T} \mathcal{E},$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + \tau \frac{\partial q}{\partial p} = \frac{1}{\rho} \mathcal{E}_\pi. \quad (4.3)$$

В векторной форме уравнения горизонтального движения и неразрывности записываются следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -g \nabla H - l\mathbf{k} \times \mathbf{V} + \mathbf{F},$$

$$\nabla \mathbf{V} + \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0. \quad (4.4)$$

Уравнения баротропной модели атмосферы (2.3) в изобарической системе координат примут вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial H}{\partial x} + lv,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial H}{\partial y} - lu,$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} = -H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (4.5)$$

В исследованиях крупномасштабных атмосферных процессов широко используются уравнения вихря скорости, дивергенции и баланса. Приведем краткий вывод этих уравнений.

Уравнение вихря скорости. Уравнение для вертикальной составляющей вихря скорости

$$\Omega = \Omega_p = \frac{\partial v}{\partial x_p} - \frac{\partial u}{\partial y_p}$$

получается на основе уравнения движения. Дифференцируя второе уравнение системы (4.3) по x , а первое — по y и вычитая второй результат из первого, получаем (без учета членов, описывающих турбулентную вязкость):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \tau \frac{\partial \Omega}{\partial p} + \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial p} = \\ = -(\Omega + l) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - u \frac{\partial l}{\partial x} - v \frac{\partial l}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Сохраняя здесь только главные члены, находим:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega}{\partial y} = -l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - u \frac{\partial l}{\partial x} - v \frac{\partial l}{\partial y},$$

или

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} - u \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial x} + v \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial y} = -l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (4.7)$$

Уравнение дивергенции. Как и уравнение вихря скорости, уравнение для горизонтальной дивергенции

$$D = \frac{\partial u}{\partial x_p} + \frac{\partial v}{\partial y_p}$$

получаем на основе уравнений движения. Для этого первое уравнение системы (4.3) дифференцируется по x , а второе — по y . Складывая результаты, получаем уравнение дивергенции в виде (опуская члены, описывающие турбулентную вязкость)

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial t} + u \frac{\partial D}{\partial x} + v \frac{\partial D}{\partial y} + \tau \frac{\partial D}{\partial p} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \\ + \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial p} - l \Omega + u \frac{\partial l}{\partial y} - v \frac{\partial l}{\partial x} = -g \Delta H. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Сохраняя в этом уравнении лишь главные члены, получаем упрощенное уравнение дивергенции, называемое *уравнением баланса*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + u \frac{\partial l}{\partial y} - v \frac{\partial l}{\partial x} - l \Omega = -g \Delta H. \quad (4.9)$$

В векторной форме уравнения вихря скорости и баланса имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla (\Omega + l) = -l \nabla \mathbf{V}, \\ \nabla u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \nabla v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} - \mathbf{k} \cdot \nabla \times l \mathbf{V} = -g \Delta H. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Система координат (x_p, y_p, ξ, t_p) . В качестве вертикальной координаты принимается

$$\xi = \frac{p}{\rho}, \quad (4.11)$$

где $P = 1000$ гПа. Между производными по p и ζ имеет место следующая связь:

$$\frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial p} = \frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial \zeta} = P \frac{\partial}{\partial p}.$$

1.4.2. σ -система координат

В σ -системе в качестве вертикальной координаты используется

$$\sigma = \frac{p}{p_s}, \quad (4.12)$$

где $p_s = p_s(x, y, t)$ — давление на земной поверхности, являющееся переменной величиной.

Аналогом вертикальной скорости в этой системе координат является переменная

$$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{p_s} \right).$$

Легко убедиться, что на верхней ($\sigma = 0$) и нижней ($\sigma = 1$) границах атмосферы $\dot{\sigma} = 0$:

$$\text{при } \sigma = 0 \text{ и } \sigma = 1 \quad \dot{\sigma} = 0. \quad (4.13)$$

Горизонтальными координатами в этой системе будут следующие: $x_\sigma = x_p = x$, $y_\sigma = y_p = y$.

Полагая $\eta = \sigma$ и учитывая, что

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = p_s, \quad \frac{\partial p}{\partial x_\sigma} = \sigma \frac{\partial p_s}{\partial x_\sigma}, \quad \frac{\partial p}{\partial y_\sigma} = \sigma \frac{\partial p_s}{\partial y_\sigma},$$

из системы уравнений (3.27) получим следующую систему уравнений в σ -системе координат:

$$\frac{du}{dt} = -g \frac{\partial H}{\partial x} + g \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial H}{\partial \sigma} \frac{\partial p_s}{\partial x} + l v + F_x,$$

$$\frac{dv}{dt} = -g \frac{\partial H}{\partial y} + g \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial H}{\partial \sigma} \frac{\partial p_s}{\partial y} - l u + F_y,$$

$$T = -\frac{g}{R} \sigma \frac{\partial H}{\partial \sigma}, \quad \frac{1}{p_s} \frac{dp_s}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0,$$

или

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{\partial u p_s}{\partial x} + \frac{\partial v p_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\sigma} p_s}{\partial \sigma} = 0,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{T} \frac{1}{c_p \rho} \mathcal{E}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{1}{\rho} \mathcal{E}_n,$$

$$\theta = T \left(\frac{\sigma_0}{\sigma} \right) \frac{R}{c_p}, \quad (4.14)$$

где оператор полной производной можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma}, \quad (4.15)$$

а $\sigma_0 = P/p_s$ (знак σ у переменных опущен).

Из четвертого уравнения системы (4.14), являющегося преобразованным уравнением неразрывности, можно получить выражения для $\partial p_s / \partial t$ и $\dot{\sigma}$. Для этого проинтегрируем указанное уравнение по σ от 0 до 1 и учтем условия (4.13). В результате имеем

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = - \int_0^1 \left(\frac{\partial u p_s}{\partial x} + \frac{\partial v p_s}{\partial y} \right) d\sigma. \quad (4.16)$$

Проинтегрируем теперь то же уравнение по σ от 0 до σ и подставим в него выражения (4.12) и (4.16), в результате получим

$$\dot{\sigma}(\sigma) = \frac{\sigma}{p_s} \int_0^1 \left(\frac{\partial u p_s}{\partial x} + \frac{\partial v p_s}{\partial y} \right) d\sigma - \frac{1}{p_s} \int_0^{\sigma} \left(\frac{\partial u p_s}{\partial x} + \frac{\partial v p_s}{\partial y} \right) d\sigma'. \quad (4.17)$$

где σ' — переменная интегрирования.

Уравнения (4.3), (4.5)—(4.14) в метеорологии называют *полными* уравнениями гидротермодинамики. Они используются в качестве исходных уравнений во всех прогностических моделях атмосферы.

1.4.3. Сферическая система координат

При рассмотрении атмосферных процессов и для решения задачи их прогноза в глобальном масштабе удобно использовать сферическую систему координат.

Пусть (см. рис. 1.1) r — расстояние от центра Земли до некоторой точки в атмосфере; λ — долгота места (восточная долгота — положительная, и наоборот); $\Theta = \pi/2 - \varphi$ — полярный угол или дополнение широты (переменные r , λ и Θ — сферические координаты). Составляющие линейной скорости в этой системе координат будут иметь вид

$$v_{\Theta} = r \frac{d\Theta}{dt}, \quad v_{\lambda} = a \sin \Theta \frac{d\lambda}{dt},$$

$$v_r = v_z = w = \frac{dr}{dt},$$

где v_{Θ} — меридиональная составляющая скорости (положительная направлена на юг), v_{λ} — зональная составляющая скорости (положительная направлена на восток), v_z — вертикальная скорость ($z = r - a$).

Уравнение движения по осям Θ и λ , уравнение статики, уравнения неразрывности, притоков тепла и влаги, а также уравнение

вихря скорости в этой системе координат записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_{\Theta}}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_{\Theta}}{\partial z} + \frac{v_{\Theta}}{a} \frac{\partial v_{\Theta}}{\partial \Theta} + \frac{v_{\lambda}}{a \sin \Theta} \frac{\partial v_{\Theta}}{\partial \lambda} - \frac{\operatorname{ctg} \Theta}{a} v_{\lambda}^2 = \\
 = -\frac{1}{a\rho} \frac{\partial p}{\partial \Theta} + 2\omega \cos \Theta v_{\lambda} + F_{\Theta}, \\
 \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial z} + \frac{v_{\Theta}}{a} \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial \Theta} + \frac{v_{\lambda}}{a \sin \Theta} \frac{\partial v_{\Theta}}{\partial \lambda} + \frac{\operatorname{ctg} \Theta}{a} v_{\Theta} v_{\lambda} = \\
 = -\frac{1}{a\rho \sin \Theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} - 2\omega \cos \Theta v_{\Theta} - 2\omega \sin \Theta v_z + F_{\lambda}, \\
 \frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho, \\
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{v_{\Theta}}{a} \frac{\partial \rho}{\partial \Theta} + \frac{v_{\lambda}}{a \sin \Theta} \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + \\
 + \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{1}{a} \frac{\partial v_{\Theta}}{\partial \Theta} + \frac{1}{a \sin \Theta} \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial \lambda} + \frac{v_{\Theta} \operatorname{ctg} \Theta}{a} \right) = 0, \\
 \frac{\partial T}{\partial t} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{v_{\Theta}}{a} \frac{\partial T}{\partial \Theta} + \frac{v_{\lambda}}{a \sin \Theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} - \\
 - \frac{\gamma_a}{g\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{v_{\Theta}}{a} \frac{\partial p}{\partial \Theta} + \frac{v_{\lambda}}{a \sin \Theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right) = \frac{1}{c_p \rho} \mathcal{E}, \\
 \frac{\partial q}{\partial t} + v_z \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{v_{\Theta}}{a} \frac{\partial q}{\partial \Theta} + \frac{v_{\lambda}}{a \sin \Theta} \frac{\partial q}{\partial \lambda} = \frac{1}{\rho} \mathcal{E}_{\Pi}, \\
 \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{v_{\Theta}}{a} \frac{\partial}{\partial \Theta} (\Omega + 2\omega \cos \Theta) + \frac{v_{\lambda}}{a \sin \Theta} \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = \\
 = \frac{R}{a^2 p \sin \Theta} \left(\frac{\partial p}{\partial \Theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} - \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{\partial T}{\partial \Theta} \right) + \frac{2\omega \cos \Theta + \Omega}{\rho} \frac{\partial \rho v_z}{\partial z}. \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

Здесь F_{Θ} и F_{λ} — составляющие сил турбулентной вязкости по осям Θ и λ , Ω — вертикальная составляющая вихря скорости:

$$\Omega = \frac{1}{a \sin \Theta} \left(\frac{\partial \sin \Theta v_{\lambda}}{\partial \Theta} - \frac{\partial v_{\Theta}}{\partial \lambda} \right). \quad (4.19)$$

Индивидуальная производная в сферической системе координат может быть представлена

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{v_{\Theta}}{a} \frac{\partial v_{\Theta}}{\partial \Theta} + \frac{v_{\lambda}}{a \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \lambda}. \quad (4.20)$$

1.5. Учет картографических проекций

Необходимость учета картографических проекций возникает в связи с тем, что земную поверхность невозможно спроектировать на плоскость без искажения. Эти искажения различаются в зависимости от типа картографической проекции.

1.5.1. Типы картографических проекций

Картографические проекции получаются при отображении земной поверхности на плоскость. В зависимости от способа отображения получаются различные типы картографических проекций. При этом происходит некоторое искажение линейных расстояний, которое учитывается путем введения масштабного множителя.

Под масштабным множителем m (параметром увеличения) понимается отношение

$$m = \frac{dl}{dl_s}, \quad (5.1)$$

где dl и dl_s — элементарная длина на плоскости изображения и на местности. Это отношение, вообще говоря, зависит как от положения точки, так и от направления рассматриваемого бесконечно малого отрезка dl . В дальнейшем, однако, мы будем рассматривать лишь те случаи, когда m не зависит от направления, что справедливо для всех равноугольных (конформных) проекций. Отличие масштаба изображения от единицы приводит к тому, что значения производных по координатам на плоскости изображения и на местности различаются. Между ними существует следующее соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial l_s} = m \frac{\partial}{\partial l}, \quad (5.2)$$

где индексом s обозначена производная по координатам на местности.

При представлении картографических проекций в виде географической карты вводится, кроме того, масштаб карты M , меняющийся от точки к точке (истинный масштаб), а также главный, или общий масштаб карты M_r , равный отношению длин на карте и на местности в точках, для которых масштаб изображения m равен единице. Именно главный масштаб и приводится всегда на бланках географических карт. Очевидно, что $M = m M_r$ и $m = M/M_r$. Таким образом, масштаб изображения, или параметр увеличения можно определить также как отношение истинного масштаба карты в рассматриваемой точке к главному.

При решении задач численного прогноза погоды, как и вообще в синоптической метеорологии, наиболее широкое распространение получили три типа картографических проекций: стереографическая полярная, коническая прямая и цилиндрическая прямая (меркаторская). Все эти проекции являются конформными, т. е. равноугольными.

Стереографическая полярная проекция. Поверхность земного шара проектируется из полюса на плоскость, проходящую через широтный круг φ_1 . При этом, например, для изображения на карте северного полушария проектирование производится из Южного полюса, а круг широты φ_1 выбирается в северном полушарии (рис. 1.4). На рис. 1.4 M — точка на поверхности земного шара, M' — отображение этой точки на плоскости картографической проекции. В этой проекции круги широт на поверхности Земли $\varphi = \text{const}$ превращаются в концентрические окружности на пло-

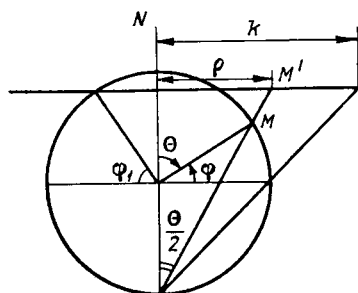


Рис. 1.4. Стереографическая проекция.

скости, а меридианы $\lambda = \text{const}$ — в радиальные прямые, исходящие из точки изображения полюса.

Для карт погоды, составляемых в СССР в стереографической проекции, $\varphi_1 = 60^\circ$. Для такой проекции масштабный множитель описывается формулой

$$m(\varphi) = \frac{\sin 60^\circ}{1 + \sin \varphi}.$$

Равноугольная коническая проекция (проекция Ламберта). Получается путем установления соответствия между точками на земном шаре и на секущем конусе, который затем разворачивается на плоскость. Для кругов широт φ_3 и φ_4 , на которых происходит пересечение секущего конуса и шара, масштабный множитель $m = 1$. Для карт этой проекции, используемых в СССР, $\varphi_3 = 30^\circ$ с. ш., $\varphi_4 = 60^\circ$ с. ш.

Для любой широты φ

$$m(\varphi) = \frac{\alpha}{a} k \left(\operatorname{tg} \frac{\pi/2 - \varphi}{2} \right)^\alpha,$$

где a — радиус земного шара; $k = 1,793a$; $\alpha = 0,7156$.

Прямая цилиндрическая равноугольная (меркаторская) проекция. Получается путем отображения поверхности шара на боковой поверхности цилиндра внутренней касательной или секущей. При прямой цилиндрической проекции ось цилиндра совпадает с полярной осью Земли. Боковая поверхность цилиндра разрезается по одной из образующих и разворачивается в плоскость, что дает цилиндрическую проекцию. В этой проекции меридианы изображаются прямыми, параллельными между собой и отстоящими друг от друга на расстояние, пропорциональное разности соответствующих долгот, а параллели — в виде прямых, перпендикулярных к линиям меридианов. Эта проекция применяется главным образом для карт тропической зоны. Для таких карт, принятых в СССР, масштабный множитель m описывается выражением

$$m(\varphi) = \frac{\cos \varphi_k}{\cos \varphi},$$

где $\varphi_k = 22,5^\circ$.

Всё изложенное относительно проектирования на плоскость поверхности земного шара можно распространить и на изобарические поверхности, которые практически «параллельны» поверхности земного шара. Важно еще отметить, что преобразования, связанные с картографическими проекциями, не касаются вертикальной координаты, которая всегда направлена по местной вертикали.

1.5.2. Преобразование уравнений гидротермодинамики для различных картографических проекций

Переход к уравнениям в декартовой системе координат, связанной с той или иной картографической проекцией, производится на основе уравнений, записанных либо в векторной форме, либо в сферической системе координат.

Рассмотрим сначала случай перехода от уравнений в векторной форме. Возьмем уравнения горизонтального движения и неразрывности в изобарической системе координат:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla_s \mathbf{V} + \tau \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} &= -g \nabla_s H - l \mathbf{k} \times \mathbf{V}, \\ \nabla_s \mathbf{V} + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0,\end{aligned}\quad (5.3)$$

где $\mathbf{V}$ — вектор скорости ветра, отнесенный к местности; ∇_s — градиент на местности. В соответствии со сказанным в п. 1.5.1 имеем

$$\nabla_s = m \nabla,$$

где ∇ — градиент, отнесенный к картографической проекции.

С учетом этого приведенные уравнения примут вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + m \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} + \tau \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} &= -mg \nabla H + l \mathbf{k} \times \mathbf{V}, \\ m \nabla \mathbf{V} + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0.\end{aligned}\quad (5.4)$$

В локальной изобарической системе координат уравнения гидротермодинамики, отнесенные к картографической проекции, примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + m \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \tau \frac{\partial u}{\partial p} &= -mg \frac{\partial H}{\partial x} + l v + F_x, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + m \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \tau \frac{\partial v}{\partial p} &= -mg \frac{\partial H}{\partial y} - l u + F_y, \\ T &= -\frac{g}{R} p \frac{\partial H}{\partial p}, \\ m \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + m \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{c^2}{R p} \tau &= \frac{1}{c_p \rho} \mathcal{E}, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + m \left(u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} \right) + \tau \frac{\partial q}{\partial p} &= \frac{1}{\rho} \mathcal{E}_w, \\ \frac{\partial s_a}{\partial t} + m \left(u \frac{\partial s_a}{\partial x} + v \frac{\partial s_a}{\partial y} \right) + \tau \frac{\partial s_a}{\partial p} &= \mathcal{E}_a.\end{aligned}\quad (5.5)$$

В этих уравнениях u, v — составляющие скорости ветра на местности (ось x направлена на восток и ось y — на север). Эти величины могут быть вычислены по абсолютному значению скорости фактического ветра $c = |\mathbf{V}|$ и значению азимута ветра A (угол между направле-

нием на север и направлением откуда «дует» ветер, отсчитываемый по часовой стрелке) по формулам

$$u = c \cos \left(\frac{3}{2} \pi - A \right), \quad v = c \sin \left(\frac{3}{2} \pi - A \right).$$

Используя выражение $\nabla_s = m\nabla$, для оператора Лапласа получаем:

$$\Delta_s = \nabla_s^2 = m\Delta,$$

где Δ_s — оператор Лапласа, относящийся к местности, а Δ — тот же оператор, отнесенный к картографической проекции. Аналогично для операторов Якоби, относящихся к местности и к картографической проекции, находим:

$$(a, b)_s = m^2 (a, b).$$

Векторы скорости ветра на картографической проекции V_Π и на местности V_s связаны соотношением

$$V_\Pi = mV_s. \quad (5.6)$$

С учетом этого предыдущая система уравнений гидротермодинамики (5.5) для случая включения в нее вектора ветра на картографической проекции V_Π преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + m^2 \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \tau \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \frac{\partial m^2}{\partial x} &= \\ &= -g \frac{\partial H}{\partial x} + lv + F_x, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + m^2 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \tau \frac{\partial v}{\partial p} + \frac{1}{2} (u^2 + v^2) \frac{\partial m^2}{\partial y} &= \\ &= -g \frac{\partial H}{\partial y} - lu + F_y, \\ T &= -\frac{gp}{R} \frac{\partial H}{\partial p}, \\ m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + m^2 \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{c^2}{Rp} \tau &= \frac{RT}{cp} \mathcal{E}, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + m^2 \left(u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} \right) + \tau \frac{\partial q}{\partial y} &= \frac{1}{p} \mathcal{E}_\Pi, \\ \frac{\partial s_a}{\partial t} + m^2 \left(u \frac{\partial s_a}{\partial x} + v \frac{\partial s_a}{\partial y} \right) + \tau \frac{\partial s_a}{\partial p} &= \mathcal{E}_a. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Здесь величины mu и mv — составляющие вектора скорости ветра V_Π на плоскости картографической проекции.

Система уравнений (5.5) используется в основном для прогнозов по небольшим географическим регионам, а система (5.7) — для прогнозов по крупным регионам и по полушарию.

В главе 1 рассмотрены системы нелинейных уравнений гидротермодинамики, которые являются основой прогностических моделей атмосферы.

Методов точного решения такого рода нелинейных уравнений практически не существует (исключая некоторые частные случаи). Вследствие этого для решения уравнений гидротермодинамики в целях прогноза полей метеовеличин применяются приближенные, численные методы, в частности метод сеток.

Наряду с методом сеток, в последнее время начинают широко применять методы, в которых предусматриваются разложения полей метеовеличин с помощью рядов по ортогональным функциям, а решения строятся относительно коэффициентов разложения.

В этой главе мы рассмотрим основные вопросы применения метода сеток и проиллюстрируем его использование на примере упрощенных уравнений гидротермодинамики. При этом будем опираться на ту часть курса вычислительной математики, в которой рассматриваются конечно-разностные уравнения.

Вопросы, связанные с решением прогностических уравнений с помощью рядов, рассматриваются в главе 5.

2.1. Метод сеток. Основные понятия

Метод сеток предусматривает задание дискретных значений метеовеличин в области определения решений уравнений. В пределах этой области выбирается система отсчета и вводятся дискретные значения независимых переменных и безразмерные координаты на основе соотношений

$$i = \frac{x}{\Delta x}, \quad j = \frac{y}{\Delta y}, \quad k = \frac{z}{\Delta z} \left(k = \frac{p}{\Delta p}, \quad k = \frac{\zeta}{\Delta \zeta} \right), \quad s = \frac{t}{\Delta t},$$

где $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ ($\Delta p, \Delta \zeta$) — шаги по пространству (расстояние между соседними точками на координатных осях); $\zeta = p/P$ ($P = 1000$ гПа) — безразмерное давление; Δt — шаг по времени (расстояние между соседними точками на оси времени). Совокупности точек, положение которых определяется дискретными безразмерными координатами в пространстве и во времени, называются пространственно-временными сетками, а точки этих сеток называются узлами.

Таким образом, в методе сеток непрерывное пространство и время заменяются дискретными множествами точек — узлами сетки, а поля функций (метеовеличин) $f(x, y, z(p, \zeta), t)$ задаются в виде множества дискретных — сеточных значений функций $f_{i,j,k}^s$.

Сетки могут различаться по числу узлов, размеру шагов, структуре ячеек и способу размещения метеовеличин в узлах сетки.

Поскольку в методе сеток предусматривается дискретное представление полей, то производные в дифференциальных уравнениях могут быть вычислены только с помощью конечных разностей. Замена производных отношениями конечных разностей называется конечно-разностной аппроксимацией производных. Производная, представленная конечной разностью, называется конечно-разностным аналогом производной.

В результате замены производных в дифференциальных уравнениях гидротермодинамики и в граничных условиях получают конечно-разностные уравнения, которые называют также конечно-разностными аппроксимациями (аналогами) уравнений и граничных условий или конечно-разностными схемами. Системы конечно-разностных уравнений называют также численными моделями.

Совокупность конечно-разностных уравнений, аппроксимирующих системы дифференциальных уравнений гидротермодинамики и граничные условия на множестве узлов сетки в пределах области определения решений, представляет собой замкнутую систему алгебраических уравнений.

Таким образом, метод сеток позволяет решение краевой задачи с начальными условиями для дифференциальных уравнений свести к решению систем алгебраических уравнений.

Рассмотрим в общих чертах процедуру прогноза на основе уравнений гидротермодинамики методом сеток. Диагностические и прогностические уравнения, а также граничные условия аппроксимируются конечно-разностными уравнениями.

В начальный момент времени t_0 в узлах пространственной сетки точек задаются начальные условия. В граничных узлах, т. е. в точках, лежащих на поверхностях, ограничивающих область решения, ставятся граничные условия. По начальным условиям с использованием граничных условий рассчитываются конечно-разностные аналоги всех членов прогностических уравнений, которые содержат производные по пространству, а также зависимые переменные, не стоящие под знаком производных, во всех внутренних узлах сетки. Сумма этих членов в каждом прогностическом уравнении численно равна производной по времени.

Затем, используя конечно-разностные аналоги производных по времени и начальные условия, вычисляют значения зависимых переменных (метеовеличин) в конце интервала времени, равного шагу по времени, т. е. в момент времени $t_0 + \Delta t$. После этого с помощью диагностических уравнений рассчитывают те метеовеличины, для которых нет прогностических уравнений. В результате получают прогноз всех метеовеличин, которые фигурируют в системе уравнений гидротермодинамики, в момент времени $t_0 + \Delta t$, т. е. в конце первого шага по времени. Полученные метеовеличины используются в качестве начальных условий для прогноза на следующем шаге по времени.

Повторяя многократно эту процедуру, можно получить прогноз метеовеличин для заданного момента времени $t_0 + N\Delta t$ (N — число

шагов по времени, $N\Delta t$ — прогностический интервал времени). Рассмотренный метод последовательного решения уравнений называется методом шагов по времени (методом интегрирования шагами по времени).

Во всех схемах интегрирования по времени уравнений гидротермодинамики, применяемых в задачах численного прогноза, используется метод шагов по времени.

2.2. Конечно-разностная аппроксимация производных

Для аппроксимации первых производных по пространству и по времени в уравнениях гидротермодинамики используются направленные вперед или назад и центральные (центрированные) разности следующего вида:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q &\approx \frac{1}{\Delta r} (f_{q+1} - f_q), \\ \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q &\approx \frac{1}{\Delta r} (f_q - f_{q-1}), \\ \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q &\approx \frac{1}{2\Delta r} (f_{q+1} - f_{q-1}),\end{aligned}\quad (2.1)$$

где

$$r = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z, (p, \zeta) \\ t \end{vmatrix}, \quad q = \begin{vmatrix} i \\ j \\ k \\ s \end{vmatrix}, \quad q = \frac{r}{\Delta r},$$

$f(r)$ — любая функция.

В тех случаях, когда функция зависит от пространственных переменных и времени, для записи сеточной функции будут использоваться два индекса, например f_q^s .

Для получения оценок погрешностей производных, аппроксимируемых конечными разностями (2.1), представим функцию f в точках $r + \Delta r$, $r - \Delta r$ с помощью рядов Тейлора:

$$f(r \pm \Delta r) = f(r) \pm \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_r \Delta r + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_r \frac{(\Delta r)^2}{2!} \pm \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}\right)_r \frac{(\Delta r)^3}{3!} + \dots \quad (2.2)$$

Если в конечно-разностных аппроксимациях (2.1) вместо сеточных значений f_{q+1} , f_{q-1} , f_q использовать функцию в точках $(q+1)\Delta r$, $(q-1)\Delta r$, $q\Delta r$, т. е. $f((q+1)\Delta r)$, $f((q-1)\Delta r)$, $f(q\Delta r)$, то можно получить оценку различий между конечными разностями и производной:

$$\begin{aligned}\varepsilon &\equiv \frac{1}{\Delta r} (f_{q+1} - f_q) - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_q \frac{\Delta r}{2!} + \dots, \\ \varepsilon &\equiv \frac{1}{\Delta r} (f_q - f_{q-1}) - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_q \frac{\Delta r}{2!} + \dots, \\ \varepsilon &\equiv \frac{1}{2\Delta r} (f_{q+1} - f_{q-1}) - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q = \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}\right)_q \frac{(\Delta r)^2}{3!} + \dots\end{aligned}$$

Величину ϵ называют ошибкой аппроксимации производных. Ошибка аппроксимации производных ϵ показывает, насколько точно конечные разности приближаются к производным при уменьшении шага Δr . Среди отброшенных членов в разложениях в ряды Тейлора члены, стоящие в правых частях выражений для ϵ , являются главными (наибольшими по порядку величины). Порядок величины ϵ определяется степенью Δr в главных членах и называется порядком точности конечно-разностной аппроксимации производной. Из выражений для ошибок аппроксимации производных направленными и центральной разностями следует, что они имеют соответственно первый и второй порядок точности, т. е. $O(\Delta r)$ и $O(\Delta r^2)$.

Следовательно, аппроксимация первых производных центральной разностью является более точной по сравнению с аппроксимациями направленными разностями. Вместо термина «порядок точности аппроксимации» употребляют также выражения «ошибка аппроксимации» или «порядок аппроксимации» производных.

Из выражений для ϵ видно, что при $\Delta r \rightarrow 0$ $\epsilon \rightarrow 0$, т. е. конечные разности приближаются к производной. Аппроксимация производных конечными разностями, обладающая этим свойством, называется согласованной. Аппроксимация производной будет согласованной, если она имеет по крайней мере первый порядок точности.

Применяя последовательно аппроксимации первых производных, можно получить конечно-разностные аналоги производных более высокого порядка. Так, для второй производной

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_q = \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\right]_q$$

имеем

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\right]_q \approx \frac{1}{\Delta r} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{q+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{q-\frac{1}{2}} \right],$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{q+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{\Delta r} (f_{q+1} - f_q),$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{q-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{\Delta r} (f_q - f_{q-1}).$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_q \approx \frac{1}{(\Delta r)^2} (f_{q+1} + f_{q-1} - 2f_q). \quad (2.3)$$

Используя разложение функции $f(r)$ в ряды Тейлора в точках $r + \Delta r$ и $r - \Delta r$, получаем оценку точности аппроксимации второй производной (2.3). Эта аппроксимация имеет второй порядок $\epsilon = O((\Delta r)^2)$.

Используя формулы (2.3), запишем конечно-разностный аналог для двухмерного оператора Лапласа:

$$\nabla^2 f_{i,j} \equiv \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{i,j} \approx \frac{1}{(\Delta r)^2} (f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 4f_{i,j}), \quad (2.4)$$

где $\Delta r = \Delta x = \Delta y$.

Конечно-разностный аналог оператора Лапласа (2.4) имеет второй порядок точности по Δx и Δy : $\varepsilon = O((\Delta x)^2, (\Delta y)^2)$.

Вполне очевидно, что точность представления производных конечными разностями зависит от характера функции $f(r)$ и от соотношения между шагом сетки и длиной волны в поле $f(r)$.

Атмосферные движения и поля метеовеличин имеют волновой характер. Поэтому оценим ошибку конечно-разностной аппроксимации первой производной в зависимости от размеров шага сетки и длины волны L для функции $f(r)$, представляющей собой волновую гармонику, например синусоиду: $f(r) = A \sin mr$, где A — амплитуда, $m = 2\pi/L$ — волновое число.

Для аппроксимации производной используем центральную конечно-разностную

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q^a \approx \frac{f_{q+1} - f_{q-1}}{2 \Delta r}. \quad (2.5)$$

Запишем первую производную от $f(r)$ по r

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q = Am (\cos mr)_q = Am \cos mq \Delta r \quad (2.6)$$

и ее конечно-разностную аппроксимацию центральной разностью (2.5)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q^a &\approx \frac{A}{2 \Delta r} [\sin m(q+1) \Delta r - \sin m(q-1) \Delta r] = \\ &= \frac{A}{\Delta r} \sin m \Delta r \cdot \cos m \Delta r. \end{aligned}$$

Величина

$$\varepsilon = 1 - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q^a / \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \equiv 1 - \frac{\sin m \Delta r}{m \Delta r}$$

характеризует относительную ошибку аппроксимации первой производной (2.6) центральной разностью (2.5).

Вычисляя ε для различных длин волн, получаем:

$$\varepsilon \approx 0,1 \quad \text{при} \quad L = 6 \Delta r \left(\frac{\Delta r}{L} = \frac{1}{6} \right),$$

$$\varepsilon \approx 0,36 \quad \text{при} \quad L = 4 \Delta r \left(\frac{\Delta r}{L} = \frac{1}{4} \right),$$

$$\varepsilon \approx 1,0 \quad \text{при} \quad L = 2 \Delta r \left(\frac{\Delta r}{L} = \frac{1}{2} \right).$$

Таким образом, относительная ошибка аппроксимации производной возрастает по мере уменьшения длины волн (увеличения отношения $\Delta r/L$), а для волн, длина которых составляет два шага сетки, конечно-разностное представление производной оказывается невозможным. Отсюда следует, что для конечно-разностной аппроксимации производных и уравнений шаг сетки необходимо выбирать с учетом длин волн, имеющих значимые амплитуды. Однако уменьшение шага сопровождается увеличением трудоемкости численного

интегрирования уравнений, так как при этом возрастает число точек сетки, в которых придется вычислять конечно-разностные аналоги производных. Следует также считаться с тем, что систематические измерения метеовеличин производятся на станциях, отстоящих друг от друга на сотни километров. По данным этих измерений невозможно правильно воспроизвести короткие волны. Поэтому использование сеток с малыми шагами не всегда целесообразно.

Точность аппроксимации производных можно увеличить не за счет уменьшения шага сетки, а за счет увеличения числа точек, в которых используются значения функций. Поясним построение таких конечно-разностных аппроксимаций на примере функции $f(r) = A \sin mr$.

Используя разложение функции $f(r)$ в ряды Тейлора в точках $(r + \Delta r)$, $(r - \Delta r)$, получаем:

$$\frac{f_{q+1} - f_{q-1}}{2\Delta r} = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q + \left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}\right)_q \frac{(\Delta r)^2}{6} + \left(\frac{\partial^5 f}{\partial r^5}\right)_q \frac{(\Delta r)^4}{24} + \dots \quad (2.7)$$

Производную $\left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}\right)_q$ представим центральной разностью

$$\left(\frac{\partial^3 f}{\partial r^3}\right)_q \approx \frac{1}{2\Delta r} \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_{q+1} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_{q-1} \right],$$

где

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_{q+1} \approx \frac{1}{(\Delta r)^2} (f_{q+2} - 2f_{q+1} + f_q),$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_{q-1} \approx \frac{1}{(\Delta r)^2} (f_q - 2f_{q-1} + f_{q-2}).$$

Тогда выражение (2.7) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q^a &\approx \frac{1}{2\Delta r} (f_{q+1} - f_{q-1}) - \frac{1}{12\Delta r} (f_{q+2} - f_{q-2} - 2f_{q+1} + 2f_{q-1}) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2\Delta r} \left[-\frac{4}{3} (f_{q+1} - f_{q-1}) - \frac{1}{6} (f_{q+2} - f_{q-2}) \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Поскольку в формуле (2.7) отброшен главный член с $(\Delta r)^4$, то аппроксимация (2.8) имеет четвертый порядок.

Если формулу (2.8) применить для функции

$$f(mq \Delta r) = A \sin mq \Delta r,$$

то получим

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q^a \approx \frac{A \sin m \Delta r}{\Delta r} \left[1 + \frac{1}{3} (1 - \cos m \Delta r) \cos mq \Delta r \right].$$

Для $\varepsilon = 1 - \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q^a / \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q$ имеем

$$\varepsilon = 1 - \frac{\sin m \Delta r}{m \Delta r} \left[1 + \frac{1}{3} (1 - \cos m \Delta r) \right].$$

При $L = 6\Delta r$ ($\Delta r/L = 1/6$) $\varepsilon = 0,03$, при $L = 4\Delta r$ ($\Delta r/L = 1/4$) $\varepsilon = 0,15$.

Следовательно, аппроксимация первой производной (2.8), в которой используются значения функции в четырех точках, является более точной по сравнению с двухточечной (2.5).

Разумеется, ошибки вычисления производных с помощью конечных разностей зависят также от погрешностей определения (измерения или вычисления) метеовеличин, которые используются для расчетов конечных разностей.

Если погрешности определения функции f известны в тех точках, которые привлекаются для расчетов конечной разности, то можно оценить ошибки аппроксимации производной за счет этих погрешностей. Так, если абсолютные погрешности определения функции f в точках $q + 1$ и $q - 1$ равны соответственно δf_{q+1} и δf_{q-1} , то абсолютная ошибка аппроксимации первой производной центральной разностью выражается формулой

$$\delta \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q = \delta \left(\frac{f_{q+1} - f_{q-1}}{2 \Delta r} \right) = \frac{1}{2 \Delta r} (\delta f_{q+1} + \delta f_{q-1}).$$

Если $\delta f_{q+1} = \delta f_{q-1} = \delta f_q = \delta f$, то $\delta \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right)_q = \frac{\delta f}{\Delta r}$.

Используя такой прием, а также таблицы погрешностей измерения (или вычисления) метеовеличин, можно оценить ошибки аппроксимации производных любого порядка и различных дифференциальных операторов, обусловленные этими погрешностями.

При аппроксимации производных в конечно-разностных схемах, помимо согласованности и точности, должен учитываться и ряд других требований, таких, как экономичность вычислений, сходимость и устойчивость решений конечно-разностных уравнений, сохранение интегральных свойств прогностических моделей, точность воспроизведения процессов адаптации метеорологических полей. Все эти вопросы будут обсуждаться ниже. Здесь же укажем, что для построения конечно-разностных схем, удовлетворяющих указанным требованиям, иногда применяются пространственно-временные сетки специальной структуры, на которых различные метеовеличины могут размещаться в разных (несовпадающих) точках сетки.

Такие сетки впервые были предложены Элиассеном и получили название расшатанных (шахматных) сеток, или сеток спуска. Существует несколько вариантов сеток, расшатанных по пространству и по времени. На сетках, расшатанных только по пространству, различные метеовеличины (зависимые переменные) размещаются в разных несовпадающих точках, но в каждый последующий момент времени вычисляются в тех же точках, где они размещались в предыдущий момент времени. Сетки, расшатанные только по времени, предусматривают вычисление всех зависимых переменных в одних и тех же точках в один момент времени, но в несовпадающих точках в разные моменты времени. На сетках, расшатанных по пространству и по времени, зависимые переменные размещаются в разных точках сетки в один момент времени и в несовпадающих точках в разные моменты времени.

Примером сетки, расшатанной по времени, может служить сетка, состоящая из двух квадратных сеток с шагом $\Delta x = \Delta y = \Delta r$, сдвинутых одна относительно другой на полшага ($1/2\Delta r$). В узлах одной из этих сеток размещаются все зависимые переменные (в одних и тех же совпадающих точках), а в узлах другой сетки вычисляются центрированные конечные разности. На обычных сетках (нерасшатанных) все зависимые переменные и производные вычисляются и размещаются во всех точках (узлах) сетки.

На расшатанных сетках зависимые переменные обычно размещаются в тех точках, в которых они требуются для вычисления производных с помощью центральных разностей. Но в некоторых случаях применяются такие расшатанные сетки, на которых требуемые для вычисления конечных разностей величины необходимо получать с помощью интерполяции. За счет этого достигается уменьшение числа зависимых переменных и объема вычислений.

При построении конечно-разностных схем на расшатанных сетках для вычисления производных используются операторы центральных разностей

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_q \equiv (f_r)_q \approx (\delta_r f)_q = \frac{1}{\Delta r} \left(f_{q+\frac{1}{2}} - f_{q-\frac{1}{2}} \right) \quad (2.9)$$

и интерполяции (сглаживания)

$$\bar{f}_q^r = \frac{1}{2} \left(f_{q+\frac{1}{2}} + f_{q-\frac{1}{2}} \right), \quad (2.10)$$

где

$$r = \begin{vmatrix} x \\ y \\ z(p, \xi) \\ t \end{vmatrix}, \quad q = \frac{r}{\Delta r}.$$

Применение операторов (2.9), (2.10) дважды по одной и той же независимой переменной приводит к следующим формулам:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\right)_q &\equiv (f_{rr})_q \approx (\delta_{rr} f) = \frac{1}{\Delta r} \delta_r \left(f_{q+\frac{1}{2}} - f_{q-\frac{1}{2}} \right) = \\ &= \frac{1}{(\Delta r)^2} (f_{q+1} + f_{q-1} - 2f_q), \end{aligned}$$

$$\bar{f}_q^{rr} = \frac{1}{2} \left(\bar{f}_{q+\frac{1}{2}}^r + \bar{f}_{q-\frac{1}{2}}^r \right) = \frac{1}{4} (f_{q+1} + f_{q-1} + 2f_q),$$

$$\left(\frac{\partial \bar{f}^r}{\partial r}\right)_q \equiv (\bar{f}_r^r)_q \approx (\delta_r \bar{f}^r)_q = \frac{1}{2} \left(\bar{f}_{q+\frac{1}{2}}^r + \bar{f}_{q-\frac{1}{2}}^r \right)_r = \frac{1}{2\Delta r} (f_{q+1} - f_{q-1}),$$

$$\begin{aligned} (\nabla^2 f)_{i,j,k} &\equiv \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{i,j,k} \approx (\delta_{xx} f)_{i,j,k} + (\delta_{yy} f)_{i,j,k} = \\ &= \frac{1}{(\Delta r)^2} (f_{i+1,j,k} + f_{i-1,j,k} + f_{i,j+1,k} + f_{i,j-1,k} - 4f_{i,j,k}) \\ &\quad (\Delta r = \Delta x = \Delta y). \end{aligned}$$

Если операторы (2.9) и (2.10) применить дважды, но по разным независимым переменным, то получим:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{i, j, k} &\equiv (f_{xy})_{i, j, k} \approx \delta_y \left(\frac{f_{i+\frac{1}{2}, j, k} - f_{i-\frac{1}{2}, j, k}}{\Delta r} \right) = \\
 &= \frac{1}{(\Delta r)^2} \left(f_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} - f_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k} - \right. \\
 &\quad \left. - f_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} + f_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k} \right), \\
 \left(\frac{\partial \bar{f}^y}{\partial x} \right)_{i, j, k} &\equiv (\bar{f}_x^y)_{i, j, k} \approx \frac{1}{\Delta r} \left(\overline{f_{i+\frac{1}{2}, j, k} - f_{i-\frac{1}{2}, j, k}} \right)^y = \\
 &= \frac{1}{2 \Delta r} \left(f_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} + f_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k} - \right. \\
 &\quad \left. - f_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} - f_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k} \right), \\
 \left(\frac{\partial \bar{f}^x}{\partial y} \right)_{i, j, k} &\equiv (\bar{f}_y^x)_{i, j, k} \approx \frac{1}{2} \left(f_{i+\frac{1}{2}, j, k} + f_{i-\frac{1}{2}, j, k} \right)_y = \\
 &= \frac{1}{2 \Delta r} \left(f_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} - f_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k} + \right. \\
 &\quad \left. + f_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} - f_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k} \right) \quad (\Delta r = \Delta x = \Delta y).
 \end{aligned}$$

Операторы центральных разностей и интерполяции линейны и перестановочны. Используя эти свойства, можно записать результаты многократного применения этих операторов в разных сочетаниях.

Из приведенных формул видно, что применение этих операторов четное число раз по одной и той же переменной приводит к формулам, в которых фигурируют сеточные функции с целыми индексами, т. е. функции в точках, отстоящих одна от другой на шаг сетки. Если операторы используются нечетное число раз по одной и той же переменной, то получаются формулы, содержащие функции с дробными индексами, т. е. функции в точках, отстоящих на половину шага сетки от точки, где вычисляется конечная разность.

Вполне естественно, что на точность численного интегрирования уравнений гидротермодинамики методом сеток влияют ошибки конечно-разностной аппроксимации производных и по пространству, и по времени. Однако влияние ошибки конечно-разностной аппроксимации производных по пространству более существенно, чем влияние ошибки аппроксимации производных по времени. По существующим оценкам ошибки численного интегрирования уравнений гидротермодинамики примерно на 40 % обусловлены конечно-разностной аппро-

ксимацией производных по пространству и только на 1 % — конечно-разностной аппроксимацией производных по времени.

Учитывая эти обстоятельства, при построении конечно-разностных схем для уравнений гидротермодинамики следует прежде всего заботиться о точности расчетов производных по пространству. Это, конечно, не означает, что вопросам построения схем интегрирования по времени не следует уделять внимание. Наоборот, как будет показано ниже, от характера этих схем во многом зависят свойства численных решений уравнений гидротермодинамики.

2.3. Конечно-разностные схемы

Рассмотрим основные понятия и вопросы, связанные с построением конечно-разностных схем, на примере неоднородного дифференциального уравнения, которое запишем в виде

$$Lf = \varphi, \quad (3.1)$$

где L — дифференциальный оператор; f — искомая функция (решение); φ — заданная (известная) функция.

В такой общей форме можно записать линейные и нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, а также уравнения в частных производных.

В уравнениях, используемых в задачах гидродинамического прогноза метеовеличин, независимыми переменными являются время и пространственные координаты.

Пусть оператор L содержит производные по пространству и времени. Пространственные независимые переменные, как и раньше, обозначим через r . С учетом этого будем считать, что $f = f(r, t)$, $\varphi = \varphi(r, t)$.

Решение уравнения (3.1) будем изучать в области изменений пространственных независимых переменных D , ограниченной границей Γ , и времени D_t . Область D может представлять собой объем (трехмерная область), поверхность (двухмерная) или линию (одномерная). Соответственно границами Γ для ограниченных областей D (трехмерных, двухмерных, одномерных) являются поверхности, линии или точки. Решение уравнения (3.1) в D будет однозначным, если его подчинить условиям в начальный момент времени t_0 (начальным условиям) и на границе Γ (граничным условиям).

Задачу нахождения решения дифференциального уравнения, подчиненного начальным и граничным условиям, называют смешанной краевой задачей или нестационарной краевой задачей.

К таким задачам относится и решение уравнения (3.1).

Решение вопроса о том, каким образом следует задать начальные и граничные условия, зависит от характера задачи и конкретного вида уравнения. Пока не будем обсуждать возможные способы задания начальных и граничных условий, записав их в виде

$$\psi(r) = f(r, t_0) \text{ в } D \text{ при } t = t_0, \quad (3.2)$$

$$g(r, t) = f(r, t) \text{ на } \Gamma \times D_t. \quad (3.3)$$

где t_0 — начальный момент времени.

2.3.1. Точность численного решения. Аппроксимация и согласованность

Приближенное решение дифференциального уравнения, получаемое с помощью конечно-разностного метода, называется численным, а разность между численным и точным решениями — ошибкой численного решения $f_q^s - f(r, t)$. Поскольку точное решение в общем случае неизвестно, то неизвестна и ошибка численного решения. Можно, однако, оценить точность конечно-разностной схемы, с помощью которой получено численное решение. Эта точность характеризуется ошибкой конечно-разностной аппроксимации дифференциального уравнения.

Поясним понятие аппроксимации и ошибки аппроксимации дифференциального уравнения конечно-разностной схемой на примере задачи (3.1)—(3.3).

Для того чтобы конечно-разностный метод можно было применить к этой задаче, необходимо выполнить дискретизацию независимых переменных $q = r/\Delta r$, $s = (t - t_0)/\Delta t$ (будем полагать, что $\Delta r = h$, $\Delta t = \tau$), а непрерывной области изменения независимых переменных $(D + \Gamma) \times D_t$ следует поставить в соответствие дискретную (сеточную) область — пространственно-временную сетку $(D_h + \Gamma_h) \times D_\tau$, узлами которой являются точки с индексами q и s . На этой сетке определяются сеточные функции f_q^s , ψ_q^s и сеточные операторы L_h , ψ_q , g_q^s .

В результате дифференциальной задачи (3.1)—(3.3) ставится в соответствие конечно-разностная задача

$$L_h f_q^s = \varphi_q^s, \quad (3.4)$$

$$\psi_q = f_q^0 \text{ в } D_h \text{ при } s = 0, \quad (3.5)$$

$$g_q^s = f_q^s \text{ на } \Gamma_h \times D_\tau. \quad (3.6)$$

Рассмотренный подход к построению конечно-разностной задачи остается формальным (т. е. не гарантирует получения численного решения, близкого к точному) до тех пор, пока не будет доказано, что конечно-разностное уравнение (3.4) и сеточные операторы начальных (3.5) и граничных (3.6) условий действительно аппроксимируют исходное дифференциальное уравнение (3.1), начальные (3.2) и граничные (3.3) условия.

Кроме этого, конечно-разностная схема (3.4), аппроксимирующая дифференциальное уравнение (3.1), должна быть устойчивой и сходящейся. Эти понятия будут пояснены ниже. Только при выполнении этих требований можно рассчитывать на получение численного решения конечно-разностной задачи, близкого к точному решению дифференциальной задачи.

Аппроксимация конечно-разностным уравнением дифференциального уравнения оценивается так же, как аппроксимация конечными разностями производных. Для этого в конечно-разностное уравнение вместо сеточных функций подставляются разложенные в ряд Тей-

лора функции (т. е. точное решение $f(q \Delta r, s \Delta t)$) в окрестности точки с координатами $q \Delta r, s \Delta t$. Затем из результатов подстановки вычитается дифференциальное уравнение. Полученная таким способом разность представляет собой ошибку аппроксимации ε дифференциального уравнения (3.1) конечно-разностным уравнением (3.4).

Ошибка аппроксимации оценивается степенью приращений независимых переменных, т. е. шагов Δr и Δt , в главных из отброшенных членов ряда Тейлора; ее называют также порядком точности аппроксимации или просто порядком аппроксимации. Если, например, в главных из отброшенных членов ряда Тейлора Δr и Δt входят в первой степени, то порядок аппроксимации будет первым по Δr и Δt , т. е. $\varepsilon = 0$ ($\Delta r, \Delta t$). Если при стремлении к нулю Δr и Δt ошибка ε также стремится к нулю, то конечно-разностное уравнение приближается к дифференциальному уравнению. В этом случае считается, что имеет место аппроксимация дифференциального уравнения (3.1) конечно-разностным уравнением (3.4) на функциях $f(r, t)$. Если при конечно-разностном представлении дифференциального уравнения имеет место аппроксимация, то такое представление (конечно-разностное уравнение) называется согласованным. Таким образом, конечно-разностные уравнения (схемы) будут согласованными, если они имеют, по крайней мере, первый порядок точности аппроксимации.

Для более строгого определения аппроксимации, устойчивости и сходимости необходимо использовать понятия функционального анализа. Некоторые из этих понятий будут использованы ниже и пояснены. Более обстоятельно с этими понятиями и с теорией разностных схем можно ознакомиться в учебной литературе по вычислительной математике.

При оценке точности численного решения и ошибок аппроксимации необходимо условиться о том, как определять разности функций или операторов, поскольку сеточные функции и операторы $(f_q^s, \varphi_q^s, L_h, \psi_q, g_q^s)$, а также функции и дифференциальные операторы $(f(r, t); \psi(r, t); L; \psi(r); g(r, t))$ определены в разных областях. Первые определены в дискретной области, т. е. в точках сетки $(D_h + \Gamma_h) \times D_\tau$, и принадлежат к конечномерному функциональному пространству сеточных функций (операторов); вторые определены в непрерывной области $(D + \Gamma) \times D_t$ и относятся к функциональному пространству непрерывных функций (операторов). Поэтому прежде чем вычислять разности этих функций (операторов), необходимо либо сеточные функции (операторы) доопределить во всех точках непрерывной области $(D + \Gamma) \times D_t$, либо, наоборот, непрерывным функциям (операторам) тем или иным способом представить в соответствие сеточные функции (операторы) в узлах дискретной сеточной области $(D_h + \Gamma_h) \times D_\tau$.

Если сеточная функция определена в пространстве непрерывных функций, то ошибка численного решения будет представлять собой функцию, заданную в пространстве непрерывных функций. Если же

функция определена в пространстве сеточных функций (в узлах сетки), то ошибка будет тоже сеточной функцией, заданной в узлах сетки (в пространстве сеточных функций). Если ошибка определяется в одной точке сетки, то ошибка будет числом.

В дальнейшем при оценке ошибок численных решений всегда будем считать, что они определяются в пространстве сеточных функций. В этом случае ошибка численного решения может быть оценена по норме (например, по максимуму модуля) в конечномерном функциональном пространстве сеточных функций:

$$\|f_q^s - f(q\Delta r, s\Delta t)\|_{F_h}, \quad (3.7)$$

где $\|\cdot\| = \max|\cdot|$ — норма (максимум модуля); F_h — конечномерное нормированное пространство сеточных функций; $f(q\Delta r, s\Delta t)$ — функция $f(r, t)$, определенная в узлах сетки с индексами q, s . Могут использоваться и другие нормы.

Норму в пространстве сеточных функций выбирают так, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} \|f_q^s\|_{F_h} = \|f\|_F,$$

где $\|f\|_F$ — норма в пространстве непрерывных функций $f(r, t)$.

Обычно в процессе решения конечно-разностных уравнений сеточные функции вычисляются с конечным числом десятичных знаков. За счет этого возникают ошибки округления (δ^0), значение которых зависит от местоположения точки, где производятся вычисления, т. е. $\delta^0 = (\delta^0)_q^s$.

Если учитываются ошибки округления, то оценку по норме ошибки численного решения следует записывать в виде

$$\|f_q^s + (\delta^0)_q^s - f(q\Delta r, s\Delta t)\|_{F_h}. \quad (3.8)$$

Нормы ошибок характеризуют близость функций f_q^s и $f(q\Delta r, s\Delta t)$, являющихся решениями конечно-разностного и дифференциального уравнений.

По аналогии могут быть оценены близость по норме дифференциального и сеточного операторов уравнений (3.1) и (3.4), правых частей этих уравнений, граничных условий (3.3) и (3.6), а также близость конечно-разностной задачи (3.4)—(3.6) к дифференциальной задаче (3.1)—(3.3) в целом.

На основе этих оценок можно сформулировать понятия аппроксимации, устойчивости и сходимости конечно-разностных схем.

Сформулируем сначала понятие аппроксимации. Конечно-разностное уравнение (схема) $L_h f_q^s = \varphi_q^s$ аппроксимирует дифференциальное уравнение $Lf = \varphi$ на решении $f(r, t)$ с порядком k_1 по пространству и k_2 по времени, если при достаточно малых шагах Δr и Δt (h и τ) имеет место оценка

$$\|(L_h f_q^s - \varphi_q^s) - [Lf(qh, s\tau) - \varphi(qh, s\tau)]\|_{\Phi_h} < M_1 h^{k_1} + M_2 \tau^{k_2}, \quad (3.9)$$

где M_1 и M_2 — ограниченные положительные постоянные величины, не зависящие от h и τ ; Φ_h — конечномерное пространство сеточных функций, определенных на той же сетке, что и φ_q^s .

Выражение (3.9) представляет собой оценку по норме ошибки аппроксимации конечно-разностной схемой (3.4) дифференциального уравнения (3.1). При стремлении шагов h и τ к нулю ошибка аппроксимации также стремится к нулю, а следовательно, конечно-разностная схема является согласованной.

Аналогичным способом оцениваются аппроксимация (согласованность) сеточных операторов L_h и правых частей уравнения (3.4), а также граничных (3.5) и начальных (3.6) условий.

Проиллюстрируем оценку ошибки аппроксимации на примере линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = \varphi \quad (c > 0), \quad (3.10)$$

где $f = f(r, t)$ — решение; $\varphi = \varphi(r, t)$ — известная функция; c — постоянная положительная величина.

Решение требуется найти в области изменения независимых переменных $(D + \Gamma) \times D_t$. В данном случае за область $D + \Gamma$ примем отрезок прямой на оси r ($0 \leq r \leq R$), границами которого (Γ) будем считать точки $r = 0, R$. Областью изменений времени D_t будем считать интервал $0 < t \leq T$.

В результате задача формулируется следующим образом. Необходимо построить решение уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = \varphi \quad \text{в } D \times D_t, \quad (3.11)$$

подчиненное начальным и граничным условиям, которые сформулируем в виде

$$\psi(r) = f(r, 0) \quad \text{в } D \quad \text{при } t = 0, \quad (3.12)$$

$$g(r, t) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad \text{на } \Gamma \times D_t. \quad (3.13)$$

Дифференциальной задаче (3.11)—(3.13) поставим в соответствие конечно-разностную задачу.

В области $(D + \Gamma) \times D_\tau$ строится дискретная пространственно-временная сетка, узлами которой служат точки с индексами $q = 0, 1, \dots, Q$ ($q = r/\Delta r$), $s = 0, 1, \dots, S$ ($s = t/\Delta t$). Как и ранее, считается, что $\Delta r = h$, $\Delta t = \tau$.

Тогда области D будет соответствовать дискретная область D_h — отрезок прямой на оси r с узлами $q = 1, 2, \dots, Q - 1$, а границе Γ — граница Γ_h с узлами $q = 0, Q$. Непрерывному интервалу времени D_t будет соответствовать дискретный интервал D_τ с узлами $s = 1, 2, \dots, S$.

Функциям, дифференциальным операторам, граничным и начальным условиям задачи (3.10)—(3.12) ставятся в соответствие сеточные функции, операторы, начальные и граничные условия.

В результате получается конечно-разностная задача:

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\tau} + c \frac{f_q^s - f_{q-1}^s}{h} = \Phi_q^s \text{ в } D_h \times D_\tau$$

$$(q = 1, 2, \dots, Q-1; s = 1, 2, \dots, S), \quad (3.14)$$

$$\Psi_q = f_q^0 \text{ в } D_h \quad (s = 0; q = 1, 2, \dots, Q-1), \quad (3.15)$$

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\tau} = 0 \text{ на } \Gamma_h \times D_\tau (q = 0, Q; s = 1, 2, \dots, S). \quad (3.16)$$

Разумеется, конечно-разностная задача, соответствующая дифференциальной задаче (3.11)—(3.13), может быть сформулирована и в других вариантах. Можно, например, представить дифференциальное уравнение (3.11) с помощью конечно-разностной схемы, в которой производные аппроксимируются центральными разностями.

Условие (3.16) означает, что $f_q^s = f_q^0$ ($q = 0, Q; s = 1, 2, \dots, S$). Совокупность конечно-разностных уравнений (3.14), записанных для всех индексов q и s области $D_h \times D_\tau$, представляет собой систему линейных алгебраических уравнений, число которых меньше числа неизвестных сеточных функций f_q^{s+1} . Недостающие уравнения вводятся из начальных и граничных условий (3.15), (3.16).

Подставим в конечно-разностное уравнение (3.14) вместо сеточных функций $f_q^s, f_q^{s+1}, f_{q-1}^s, \Phi_q^s$ функции $f(r, t)$ и $\Phi(r, t)$, определенные в соответствующих точках сетки, и воспользуемся разложениями в ряд Тейлора:

$$f(r, t + \tau) = f(r, t) + \frac{\partial f}{\partial t} \tau + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{\tau^2}{2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \frac{\tau^3}{3!} + \dots, \quad (3.17)$$

$$f(r - h, t) = f(r, t) - \frac{\partial f}{\partial r} h + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{h^2}{2!} - \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} \frac{h^3}{3!} + \dots \quad (3.18)$$

После подстановки функций $f(r, t)$, $\Phi(r, t)$ и рядов (3.17), (3.18) в конечно-разностное уравнение (3.14) и вычитания из него дифференциального уравнения (3.11) получим формулу для ошибки аппроксимации

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tau + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \tau + \dots - c \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} h - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} h^2 + \dots \right). \quad (3.19)$$

Из этой формулы видно, что главные члены содержат h и τ в первой степени; следовательно, ошибка аппроксимации имеет первый порядок по h и τ , т. е. $\varepsilon = O(h, \tau)$.

Если поле функции $f(r, t)$ гладкое (без разрывов), то при малых h и τ главные члены в правой части формулы (3.19) ограничены, так как ограничены производные.

Следовательно, для конечно-разностного уравнения (3.14) справедлива оценка вида (3.9), а поэтому имеет место аппроксимация.

Из формулы (3.19) следует, что ошибка аппроксимации стремится к нулю при стремлении к нулю h и τ . Следовательно, конечно-раз-

ностное уравнение (конечно-разностная схема) (3.14) является согласованным (согласованной).

Нетрудно убедиться в том, что если в уравнении (3.11) производные заменить центральными разностями, то получаемая конечно-разностная схема также будет согласованной, однако она будет аппроксимировать дифференциальное уравнение со вторым порядком точности по h и τ , т. е. $\epsilon = O(h^2, \tau^2)$.

Если конечно-разностное уравнение (3.14) разрешить относительно f_q^{s+1} , то получим

$$f_q^{s+1} = f_q^s - c \frac{\tau}{h} (f_q^s - f_{q-1}^s) + \tau \varphi_q^s. \quad (3.20)$$

Отметим, что аппроксимация и согласованность конечно-разностных схем не зависят от величины $c \frac{\tau}{h}$.

2.3.2. Решение конечно-разностных уравнений методом шагов по времени

Совокупность узлов пространственно-временной сетки, лежащих на плоскости или на прямой и соответствующих фиксированному времени, называется временным слоем (уровнем).

Для области определения решения задачи (3.14)—(3.16) слоями (уровнями) являются совокупности точек с индексами $q = 0, 1, \dots, Q$ при фиксированных значениях индекса s .

С помощью конечно-разностного уравнения (3.14), начальных (3.15) и граничных (3.16) условий можно последовательно определить решение на уровнях $s = 1, 2, \dots, S$:

$$\begin{aligned} f_q^1 &= f_q^0 - c \frac{\tau}{h} (f_q^0 - f_{q-1}^0) + \tau \varphi_q^0, \\ &\dots \dots \dots \\ f_q^{s+1} &= f_q^s - c \frac{\tau}{h} (f_q^s - f_{q-1}^s) + \tau \varphi_q^s, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$f_q^S = f_q^{S-1} - c \frac{\tau}{h} (f_q^{S-1} - f_{q-1}^{S-1}) + \tau \varphi_q^{S-1} \quad (q = 1, 2, \dots, Q-1). \quad (3.21)$$

Из выражений (3.21) видно, что численное решение f_q^s задачи (3.14)—(3.16), определяемое на двухмерной сетке, представляется набором решений на одномерных сетках с индексами точек $q = 1, 2, \dots, Q-1$, полученных при фиксированных индексах s .

Таким образом, можно говорить о том, что численное решение, определенное на двухмерной сетке в плоскости (rot), расслоилось и заменилось последовательностью решений $f^1, f^2, \dots, f^S$, определенных на одномерных сетках.

В рассматриваемой задаче значение искомой сеточной функции на последующем уровне $s+1$ в точке q (f_q^{s+1}) однозначно определяется значениями этой функции на предыдущем уровне s в двух точках

$q = 1$ и q и известной сеточной функцией φ (правой частью уравнения) на уровне s в точке q .

Заметим, что для определения решения с помощью уравнений (3.21) на любом уровне в точке $q = 1$ требуется граничное условие в точке $q = 0$. Граничное условие в точке $q = Q$ не используется, так как для определения решения в точке $q = Q - 1$ на уровне $s + 1$ (f_{Q-1}^{s+1}) необходимы значения f_q^s в точках $q = Q - 1$, $q = Q - 2$, а граничная точка Q не нужна. Это является следствием аппроксимации производной по τ направленной разностью назад.

Процедуры последовательного получения решений от слоя к слою называют шаговыми или методом шагов по времени. Шаговыми называют и конечно-разностные схемы, с помощью которых реализуются шаговые процедуры.

По числу используемых в схеме слоев (уровней) по времени и точек в пространстве схемы могут быть двухслойными, трехслойными и т. д., двухточечными, трехточечными и т. д. Схема (3.14) является двухслойной (двухуровневой) по времени и двухточечной по пространству.

В конечно-разностной схеме (3.14) использованы направленные разности по пространству и времени, поэтому ее следует называть схемой направленных разностей. Если в дифференциальном уравнении (3.10) производные элементы заменить центральными разностями, то получится схема центральных разностей

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^{s-1}}{2\tau} + c \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2h} = \varphi_q^s. \quad (3.22)$$

Эта схема является шаговой, трехслойной (трехуровневой) по времени и трехточечной по пространству. Решение с помощью этой схемы на уровне $s + 1$ в точке q однозначно определяется значениями сеточной функции f_q^s на двух предыдущих уровнях s и $s - 1$, в трех точках $q - 1$, q и $q + 1$, правой частью φ_q^s и граничными условиями в двух точках $q = 0$, Q :

$$f_q^{s+1} = f_q^{s-1} - c \frac{\tau}{h} (f_{q+1}^s - f_{q-1}^s) + 2\tau \varphi_q^s. \quad (3.23)$$

Схему (3.22) иногда называют схемой «чехарды», подчеркивая таким образом, что при ее реализации, отправляясь от слоя $s - 1$ и «перепрыгивая» через слой s , получают решение на уровне $s + 1$.

С помощью схемы центральных разностей по времени нельзя получить решение на слое $s = 1$, если начальное условие задается только на слое $s = 0$.

Для преодоления этой трудности на первом шаге по времени при получении решения на слое $s = 1$ приходится использовать двухслойную схему с направленной вперед разностью по времени.

Рассмотренные две схемы (направленных и центральных разностей) относятся к явным, так как искомые величины (f_q^{s+1}) определяются непосредственно (явно) с помощью формул (3.21) или (3.22)

по начальным и граничным условиям и вычисленным ранее (на предыдущих слоях) значениям f_{q-1}^s, f_q^s (или f_{q+1}^s).

Если записать в схеме (3.14) производную по пространству с помощью сеточных функций, отнесенных к слою $s + 1$, то получим

$$f_q^{s+1} = f_q^s - c \frac{\tau}{h} (f_q^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}) + \tau \varphi_q^s. \quad (3.24)$$

Эта схема является неявной, так как содержит две неизвестные величины (в двух точках q и $q - 1$) и с помощью ее нельзя непосредственно (не прибегая к другим операциям) вычислить неизвестное значение сеточной функции в одной точке q на слое $s + 1$. Для этого нужны разностные уравнения (3.24), записанные для всех точек ($q = 1, 2, \dots, Q - 1$), и граничное условие в точке $q = 0$.

Совокупность этих уравнений решается как система. В результате определяются значения сеточной функции на слое $s + 1$ во всех точках ($q = 1, 2, \dots, Q - 1$).

2.3.3. Корректность, устойчивость и сходимость

Поясним понятия корректности, устойчивости и сходимости на примере конечно-разностной задачи (3.4)–(3.6).

Считается, что для конечно-разностного уравнения (3.4) с начальными и граничными условиями (3.5) и (3.6) задача поставлена корректно, если при достаточно малых шагах по пространству (h) и времени (τ) решение уравнения (3.4) существует, единственно и непрерывно зависит от начальных, граничных условий и правой части уравнения.

По Рихтмайеру, суть устойчивости состоит в том, что существуют пределы, которых не могут превзойти компоненты начальной функции, преобразующиеся в процессе вычислений.

Устойчивость конечно-разностных схем для дифференциальных уравнений определяется непрерывной зависимостью решений, получаемых с помощью этих схем, от начальных и граничных условий, а также от правых частей уравнений. Эта зависимость обуславливает соответственно устойчивость по начальным условиям, по граничным условиям и по правой части уравнений.

Конечно-разностная схема (3.4), аппроксимирующая дифференциальное уравнение (3.1), называется устойчивой, если имеет место оценка

$$\|f_q^s\|_{F_h} \leq c_1 \|\psi_q^s\|_{\Psi_h} + c_2 \|g_q^s\|_{G_h} + c_3 \|\varphi_q^s\|_{\Phi_h}, \quad (3.25)$$

где c_1, c_2, c_3 — ограниченные постоянные величины, не зависящие от $h, \tau, \psi, g, \varphi$; F_h, Ψ_h, G_h, Φ_h — конечномерные пространства сеточных функций, которым принадлежат $f_q^s, \psi_q, g_q^s, \varphi_q^s$ соответственно; $\|\cdot\|$ — нормы (максимумы модулей).

Из неравенства (3.25) следует, что если нормы сеточных функций $\psi_q^s, g_q^s, \varphi_q^s$ являются ограниченными (конечными) величинами, то норма численного решения также будет ограниченной при любых значениях S .

На основе неравенства (3.25) понятие устойчивости можно сформулировать следующим образом. Численное решение и конечно-разностная схема, с помощью которой оно получено, считаются устойчивыми, если для фиксированных шагов по пространству и времени с увеличением числа шагов по времени численное решение остается ограниченным при любых (гладких) начальных, граничных условиях и правых частях конечно-разностного уравнения.

Основная трудность при таком определении устойчивости состоит в том, что точное решение дифференциального уравнения, которое аппроксимирует конечно-разностное, в общем случае может быть неограниченным.

Когда известно, что точное решение ограничено, то понятие устойчивости может быть сформулировано для ошибки численного решения

$$f_q^s - f(q \Delta r, s \Delta t),$$

которая в этом случае будет ограниченной (при выполнении всех других требований).

Когда известно, что точное решение растет во времени, но не быстрее, чем экспоненциально, то устойчивость (ограниченность) численного решения может иметь место для ограниченных интервалов времени. Ниже будет показано, что оценки устойчивости по Нейману допускают экспоненциальный рост численных решений.

Понятие сходимости численных решений также формулируется на основе оценок поведения ошибки. Численное решение и конечно-разностная схема, с помощью которой оно получено, называются сходящимися, если при стремлении шагов по пространству и времени к нулю, ошибка численного решения стремится к нулю для фиксированного ~~числа шагов по~~ времени. Таким образом, если имеет место оценка по норме ошибки численного решения

$$\|f_q^s - f(q \Delta r, s \Delta t)\|_{F_h} \xrightarrow{\text{максимум}} 0 \text{ при } h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0,$$

то решение является сходящимся.

Согласно теореме Лакса об эквивалентности, если линейная конечно-разностная задача поставлена корректно и конечно-разностная аппроксимация удовлетворяет условиям согласованности, тогда устойчивость является необходимым и достаточным условием сходимости.

Таким образом, для линейных задач сходимость численных решений следует из аппроксимации и устойчивости.

Что касается нелинейных задач, то доказать устойчивость и сходимость удастся не всегда.

Понятия устойчивости и сходимости конечно-разностных схем, аппроксимирующих нелинейные дифференциальные уравнения, как правило, основываются на анализе соответствующих линеаризованных уравнений.

Мы пока не рассматривали методы анализа устойчивости конечно-разностных схем. Этот вопрос будет обсуждаться ниже, где будет

показано, что устойчивость и сходимость численных решений зависят от соотношения между величинами шагов по пространству и по времени.

2.3.4. Методы построения конечно-разностных схем

После того как сформулированы основные понятия и требования, которым должны удовлетворять конечно-разностные схемы, рассмотрим вопросы, связанные с их построением.

В примерах, приведенных выше, при построении конечно-разностных схем производилась непосредственная замена производных конечными разностями. Этот метод называется методом разностной аппроксимации. Однако это не единственный метод построения конечно-разностных схем.

Построение любой конечно-разностной задачи начинается с выбора пространственно-временной сетки.

Для двумерных гидродинамических задач прогноза (баротропных прогностических моделей) в областях определения решений обычно выбирают прямоугольные, чаще квадратные (иногда треугольные) сетки точек, а для трехмерных (бароклинических прогностических моделей) — пространственные сетки, элементами которых чаще всего являются квазипрямоугольные параллелепипеды или кубы. Элементы двумерных и трехмерных сеток образуются пересечением линий (двумерные сетки) или поверхностей (трехмерные сетки).

По конфигурации сеточные области могут быть прямоугольными, квадратными, шестиугольными, восьмиугольными, круглыми, сферическими и т. д.

Трехмерные области обычно конструируются из набора двумерных областей, каждая из которых обычно размещается на фиксированных уровнях по высоте или давлению.

В зависимости от конфигурации области D_h и вида сетки боковые границы области могут по разному совмещаться (или не совмещаться) с узлами сеток. Так, если область D_h представляет собой по конфигурации прямоугольник или квадрат, то для прямоугольной или квадратной сеток часть узлов может строго совмещаться с боковой границей.

Узлы сеток, которые совмещаются (совпадают) с границами, называются граничными, а все остальные — внутренними.

Если граничные узлы совмещаются с боковыми границами, то можно считать, что граничные условия конечно-разностной задачи заданы в граничных узлах сетки.

Однако возможны и такие конфигурации областей D_h и виды сеток, при которых боковые границы не совпадают с узлами сеток. Например, для области D_h с криволинейными границами узлы прямоугольной или квадратной сеток могут не ложиться на границу. В этом случае точки пересечения линий сетки с границей можно считать дополнительными, граничными узлами, в которых ставятся граничные условия. Можно поступить иначе: криволинейную гра-

ницу заменить ломаной, проходящей через ближайшие к границе узлы сетки.

В результате конечно-разностной аппроксимации производных и дифференциальных уравнений получаются формулы, в которых фигурируют сеточные функции в некотором числе узлов (одном и том же для данной конечно-разностной схемы), образующих совокупность определенной конфигурации. Эту совокупность узлов сетки заданной конфигурации, используемых для записи конечно-разностной схемы, называют шаблоном.

Узлы сетки, в которых можно полностью записать конечно-разностную схему на шаблоне, не выходя за границы сеточной области, называются регулярными, а остальные — нерегулярными. Нерегулярными являются не только граничные узлы, но и те (из числа внутренних узлов), в которых при записи конечно-разностной схемы шаблон выходит за границу.

Следующим этапом построения конечно-разностных схем после выбора сетки является определение шаблона.

После того как определен шаблон, строится конечно-разностная схема. Наиболее простым и распространенным является применявшийся выше метод построения конечно-разностных схем путем непосредственной замены производных конечными разностями. Этот метод обычно называют методом прямой конечно-разностной аппроксимации.

Часто используется также метод неопределенных коэффициентов. Поясним применение этого метода на примере построения конечно-разностной схемы для уравнения диффузии (теплопроводности)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \quad (\nu = \text{const}). \quad (3.26)$$

Будем полагать, что конечно-разностную схему следует построить на прямоугольной сетке с шагами $\Delta r = h$, $\Delta t = \tau$ и что шаблоном предусмотрено размещение сеточной функции f_q^s в узлах на оси r с индексами q , $q \pm 1$ на уровнях по времени с индексами s и $s + 1$.

На этом шаблоне запишем конечно-разностную схему в общем виде:

$$\alpha f_{q-1}^{s+1} + \beta f_q^{s+1} + \gamma f_{q+1}^{s+1} + \delta f_q^s = 0, \quad (3.27)$$

где α , β , γ , δ — неопределенные коэффициенты, которые следует определить так, чтобы схема имела бы возможно более высокий порядок точности по h и τ .

Вставим в схему (3.27) вместо f_q^s , f_{q-1}^{s+1} , f_q^{s+1} , f_{q+1}^{s+1} функцию $f(r, t)$ и ее разложение в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} f(r \pm h, t \pm \tau) &= f(r, t) \pm \frac{\partial f}{\partial r} h + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{h^2}{2!} \pm \\ &\pm \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 f}{\partial r^4} \frac{h^4}{4!} \pm \frac{\partial f}{\partial t} \tau + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{\tau^2}{2!} \pm \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t} h\tau + \dots, \\ f(r, t + \tau) &= f(r, t) + \frac{\partial f}{\partial t} \tau + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{\tau^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

После подстановки и вычитания из полученного результата уравнения (3.26) получим выражение для ошибки аппроксимации схемой (3.27) дифференциального уравнения (3.26):

$$\begin{aligned}\varepsilon = & \frac{\partial f}{\partial t} - v \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) f - (\alpha + \beta + \gamma) \tau \frac{\partial f}{\partial t} + \\ & + (\alpha - \gamma) h \frac{\partial f}{\partial r} - (\alpha + \gamma) \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - (\alpha + \beta + \gamma) O(\tau^2) + \\ & + (\alpha - \gamma) O(h^3) + \dots\end{aligned}$$

Если $\alpha + \beta + \gamma = -\delta$, то полученное выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon = & \frac{\partial f}{\partial t} - v \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) f + \delta \tau \frac{\partial f}{\partial t} + \\ & + (\alpha - \gamma) h \frac{\partial f}{\partial r} - (\alpha + \gamma) \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \delta O(\tau^2) + (\alpha - \gamma) O(h^3) + \dots\end{aligned}$$

Для получения оценки порядка аппроксимации уравнения (3.26) необходимо, чтобы все члены, сократились. Это будет достигнуто, если положить

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0, \quad \tau \delta = -1, \quad \alpha - \gamma = 0, \quad (\alpha + \gamma) \frac{h^2}{2} = -v.$$

Отсюда находим коэффициенты:

$$\alpha = \gamma = -\frac{v}{h^2}, \quad \beta = \frac{2v}{h^2} + \frac{1}{\tau}, \quad \delta = -\frac{1}{\tau}.$$

Подставляя эти коэффициенты в схему (3.27), находим:

$$\frac{1}{\tau} (f_q^{s+1} - f_q^s) = \frac{v}{h^2} (f_{q+1}^{s+1} + f_{q-1}^{s+1} - 2f_q^{s+1}).$$

Таким образом, получена неявная конечно-разностная схема, аппроксимирующая дифференциальное уравнение (3.26) со вторым порядком по h и первым порядком по τ , т. е. $O(h^2, \tau)$.

Методы неопределенных коэффициентов и конечно-разностной аппроксимации применимы к дифференциальным уравнениям с непрерывными и дифференцируемыми коэффициентами и искомыми функциями (решениями).

В тех случаях, когда эти методы неприменимы, или если необходимо построить конечно-разностные схемы, обладающие априори определенными свойствами, прибегают к интегрально-интерполяционному методу (варианты этого метода называют методом баланса, бокс-методом). При использовании этого метода после выбора сетки и шаблона сеточная область разбивается на ячейки (боксы), связанные с шаблоном.

Дифференциальное уравнение, для которого строится конечно-разностная схема, интегрируется по ячейке и приводится к интегральной форме.

Приближенно вычисляя интегралы с помощью квадратурных формул, получают конечно-разностную схему.

Поясним этот метод на примере линейного уравнения адвекции

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad c = \text{const},$$

используя тот же шаблон, который применялся при построении конечно-разностной схемы методом неопределенных коэффициентов для уравнения (3.26). Определим ячейки на сетке, ограниченные узлами $q \pm 1$ и $s, s + 1$, и проинтегрируем это уравнение по ячейке:

$$\begin{aligned} \int_{t_s}^{t_{s+1}} \int_{r_{q-1}}^{r_{q+1}} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} \right) dr dt = \int_{r_{q-1}}^{r_{q+1}} (f^{s+1} - f^s) dr + \\ + c \int_{t_s}^{t_{s+1}} (f_{q+1} - f_{q-1}) dt = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Для вычисления интегралов в соотношении (3.28) используются приближенные квадратурные формулы. Если отнести подынтегральные функции к середине интервалов интегрирования, то квадратурные формулы запишутся в виде

$$\begin{aligned} \int_{r_{q-1}}^{r_{q+1}} (f^{s+1} - f^s) dr \approx (f_q^{s+1} - f_q^s) 2h, \\ \int_{t_s}^{t_{s+1}} (f_{q+1} - f_{q-1}) dt \approx \left(f_{q+1}^{s+\frac{1}{2}} - f_{q-1}^{s+\frac{1}{2}} \right) \tau. \end{aligned}$$

Используя эти формулы, получаем явную схему центральных разностей:

$$\frac{1}{\tau} (f_q^{s+1} - f_q^s) + \frac{c}{2h} \left(f_{q+1}^{s+\frac{1}{2}} - f_{q-1}^{s+\frac{1}{2}} \right) = 0.$$

Если шаблон изменить, например использовать уровни $s - 1$ и $s + 1$, а при приближенном вычислении интеграла по t отнести подынтегральную функцию к уровню $s + 1$, то получается неявная схема центральных разностей:

$$\frac{1}{2\tau} (f_q^{s+1} - f_q^{s-1}) + \frac{c}{2h} (f_{q+1}^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}) = 0.$$

Рассмотрим применение интегрально-интерполяционного метода в случае, если необходимо, чтобы конечно-разностная схема для нелинейного трехмерного уравнения адвекции

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (3.29)$$

априори обладала свойством сохранения, например удовлетворяла закону сохранения массы (уравнению неразрывности)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (3.30)$$

в некоторой пространственной области D , на границах которой Γ отсутствуют потоки массы воздуха, т. е.

$$u|_{\Gamma} = v|_{\Gamma} = w|_{\Gamma} = 0. \quad (3.31)$$

В области D построим пространственно-временную сетку, узлами которой будут являться точки с индексами $i = x/\Delta x$, $j = y/\Delta y$, $k = z/\Delta z$, $s = t/\Delta t$, так чтобы граничные узлы сетки лежали на границе Γ .

Уравнение (3.29) с помощью уравнения неразрывности приведем к дивергентной форме:

$$\frac{\partial (\rho f)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho f u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho f v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho f w)}{\partial z} = 0. \quad (3.32)$$

В качестве шаблона будем использовать совокупность точек со следующими индексами: 1) $i, j, k, s, s+1$; 2) $i \pm 1, j, k, s$; 3) $i, j \pm 1, k, s$; 4) $i, j, k \pm 1, s$. Пространственными ячейками при таком выборе шаблона будут являться параллелепипеды с площадью граней $2\Delta x \cdot 2\Delta y$; $2\Delta x \cdot 2\Delta z$; $2\Delta y \cdot 2\Delta z$, в центре которых расположены точки с индексами i, j, k .

Проинтегрируем уравнение (3.32) в пределах ячейки по всем независимым переменным:

$$\int_{t_s}^{t_{s+1}} \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[\frac{\partial (\rho f)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho f u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho f v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho f w)}{\partial z} \right] \times \\ \times dx dy dz dt = 0. \quad (3.33)$$

При интегрировании по t второго, третьего и четвертого членов левой части выражения (3.33) воспользуемся теоремой Остроградского — Гаусса и отнесем эти члены к моменту времени $t_{s+\frac{1}{2}}$.

В результате получим конечно-разностное уравнение

$$(\bar{\rho f})_{i,j,k}^{s+1} = (\bar{\rho f})_{i,j,k}^s - \Delta t \left[\frac{(\bar{\rho f u})_{i+1,j,k} - (\bar{\rho f u})_{i-1,j,k}}{2\Delta x} + \right. \\ \left. + \frac{(\bar{\rho f v})_{i,j+1,k} - (\bar{\rho f v})_{i,j-1,k}}{2\Delta y} + \frac{(\bar{\rho f w})_{i,j,k+1} - (\bar{\rho f w})_{i,j,k-1}}{2\Delta z} \right]^{s+\frac{1}{2}}, \quad (3.34)$$

где

$$\begin{aligned}
 (\overline{\rho f})_{i, j, k} &= \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \rho f \, dx \, dy \, dz; \\
 (\overline{\rho f u})_{i \pm 1, j, k} &= \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} (\rho f u) \Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dy \, dz; \\
 (\overline{\rho f v})_{i, j \pm 1, k} &= \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\rho f v) \Big|_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} dx \, dz; \\
 (\overline{\rho f w})_{i, j, k \pm 1} &= \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (\rho f w) \Big|_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} dx \, dy.
 \end{aligned}$$

Конечно-разностное уравнение (3.34) аппроксимирует дифференциальное уравнение со вторым порядком точности: $O((\Delta t)^2, (\Delta x)^2, (\Delta y)^2, (\Delta z)^2)$ — и удовлетворяет закону сохранения (3.30). В этом легко убедиться, если просуммировать уравнение (3.34) по всем индексам i, j, k в пределах сеточной области и учесть граничные условия (3.31).

Для соседних ячеек члены в квадратной скобке уравнения (3.34) при суммировании будут входить с разными знаками, поэтому сумма этих членов как для внутренних узлов будет равна нулю. Поскольку на границе Γ потоки также равны нулю в силу условий (3.31), то $\sum_{i, j, k} (\overline{\rho f})^{s+1} = \sum_{i, j, k} (\overline{\rho f})^s$. Следовательно, величина $\sum_{i, j, k} (\overline{\rho f})_{i, j, k}$ сохраняется, т. е.

$$\sum_{i, j, k} \left[\frac{\partial (\rho f)}{\partial t} \right]_{i, j, k} = 0.$$

2.4. Схемы численного интегрирования по времени

При интегрировании уравнений прогностических моделей атмосферы прибегают к методу сеток, так как в большинстве случаев их не удастся проинтегрировать точно. Выше были рассмотрены вопросы, связанные с применением этого метода. При этом было проиллюстрировано применение простейших схем численного интегрирования по времени. Для интегрирования уравнений прогностических моделей атмосферы применяются и другие схемы. Рассмотрим наиболее распространенные из этих схем на примере уравнения, которое запишем в общем виде:

$$\frac{\partial f(r, t)}{\partial t} = F \left[f(r, t), \frac{\partial f(r, t)}{\partial r}, t \right], \quad (4.1)$$

где f — искомая функция (решение), а через F обозначены все члены, не содержащие производных по времени.

Все рассматриваемые далее схемы реализуются методом шагов по времени. Применение этих схем будем обсуждать на одном шаге по времени, так как решение на слое (уровне) $t + \Delta t$ однозначно определяется граничными условиями и решением на предыдущих слоях.

В этом случае определение функции f на уровне $t + \Delta t$ сводится к интегрированию уравнения (4.1) в пределах от t или от $t - \Delta t$ до $t + \Delta t$:

$$f(r, t + \Delta t) = f(r, t) + \int_t^{t+\Delta t} F\left[f(r, t), \frac{\partial f(r, t)}{\partial r}, t\right] dt, \quad (4.2)$$

$$f(r, t + \Delta t) = f(r, t - \Delta t) + \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} F\left[f(r, t), \frac{\partial f(r, t)}{\partial r}, t\right] dt. \quad (4.3)$$

В общем случае точно вычислить интегралы в выражениях (4.2) и (4.3) не удастся. Именно поэтому приходится прибегать к численным методам интегрирования. В случае уравнения (4.1) для применения численного метода интегрирования необходимо выбрать область определения решения, сформулировать начальные и граничные условия, т. е. выполнить все то, о чем шла речь в п. 2.3. Здесь мы не будем обсуждать эти вопросы, а покажем как аппроксимировать производную по времени в уравнении (4.1) и к какому моменту времени отнести функцию F . В зависимости от того как решены эти вопросы, строятся различные схемы численного интегрирования по времени, которые могут быть явными, полунявными, неявными, двухуровневыми (двухслойными) или многоуровневыми (многослойными), одношаговыми или многошаговыми (однотактными или многотактными). Эти понятия будут дополнительно поясняться по мере рассмотрения конкретных схем.

Если производную по времени $\partial f / \partial t$ аппроксимировать направленной разностью вперед, а функцию F заменить сеточной функцией F_q и отнести к уровню s , то получится двухуровневая схема интегрирования по времени:

$$f_q^{s+1} = f_q^s + F_q^s \Delta t, \quad (4.4)$$

которая носит название схемы Эйлера.

Уровненность схемы определяется по числу уровней (слоев) по времени, к которым относятся фигурирующие в схеме функции. В схеме (4.4) таких уровней (слоев) два, поэтому она и называется двухуровневой (двухслойной). Эта схема имеет первый порядок точности по Δt ($O(\Delta t)$) и может быть получена из выражения (4.2), в котором функция F заменена сеточной функцией F_q , отнесенной к моменту времени t (к уровню s). Схема (4.4) является явной (эксплицитной) так как искомое значение f_q^{s+1} определяется по известному сеточному значению F_q^s , не зависящему от f_q^{s+1} , и начальному условию f_q^s .

Схемы, в которых искомая сеточная функция f_q^{s+1} определяется в один прием, т. е. путем однократного использования конечно-разностного уравнения, называются одноктактными или одношаговыми. Если для определения сеточной функции f_q^{s+1} конечно-разностное уравнение используется два или более раз, то такие схемы называются двухтактными (двухшаговыми) или многотактными (многшаговыми) соответственно. Схема (4.4) относится к одноктактным (одношаговым).

Если производную по времени в уравнении (4.1) аппроксимировать направленной разностью назад, то тоже получим двухуровневую схему первого порядка ($O(\Delta t)$)

$$f_q^{s+1} = f_q^s + F_q^{s+1} \Delta t. \quad (4.5)$$

Эта схема также может быть получена из выражения (4.2), в котором функция F заменена сеточной функцией Fq , принятой постоянной и отнесенной к моменту времени $t + \Delta t$ (к уровню $s + 1$).

Поскольку в схеме (4.5) F_q^{s+1} зависит от искомой (неизвестной) функции f_q^{s+1} , то эта схема является неявной (имплицитной).

В отличие от явной схемы (4.4) неявная схема (4.5) не позволяет получить решение уравнения в частных производных (4.1) в одной точке, т. е. нельзя непосредственно вычислить f_q^{s+1} . Для этого потребуется решить систему алгебраических уравнений, аппроксимирующих дифференциальное уравнение на всем множестве внутренних узлов пространственной сетки с использованием граничных условий.

В этом легко убедиться, воспользовавшись неявной схемой (4.5) для линейного одномерного уравнения адвекции. Неявную схему для этого уравнения запишем в следующем виде:

$$f_q^{s+1} = f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_q^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}).$$

Поскольку в правой части этой схемы имеются неизвестные сеточные функции f_q^{s+1} и f_{q-1}^{s+1} , то непосредственно вычислить искомую функцию f_q^{s+1} в одной точке невозможно. Однако если применить эту схему для всех внутренних узлов сетки с индексами $q = 1, 2, \dots, Q - 1$ и воспользоваться граничными условиями в узле с индексом $q = 0$ (например, в виде $f_0^s = f_0^0$), то получим замкнутую систему линейных алгебраических уравнений с неизвестными сеточными функциями f_q^{s+1} во внутренних узлах с индексами $q = 1, 2, \dots, Q - 1$.

Решение этой системы позволит вычислить искомые значения сеточной функции f_q^{s+1} во всех внутренних узлах сетки.

Более сложной оказывается процедура применения неявной схемы для численного интегрирования по времени нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Рассмотрим этот вопрос на примере нелинейного одномерного уравнения адвекции

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad u = f(r, t),$$

для которого запишем неявную схему:

$$u_q^{s+1} = u_q^s - u_q^{s+1} \frac{\Delta t}{\Delta r} (u_q^{s+1} - u_{q-1}^{s+1}), \quad q = 1, 2, \dots, Q. \quad (4.6)$$

В точке $q = 0$, ставится граничное условие вида $u_0^s = u_0^0$.

С помощью этой неявной схемы искомые значения сеточной функции u_q^{s+1} могут быть определены в результате решения системы нелинейных алгебраических уравнений (4.6).

Вопросы, связанные с применением неявных схем для численного интегрирования нелинейных уравнений в частных производных, будут рассмотрены в главе 4. Здесь же отметим, что неявные схемы численного интегрирования по времени обычно являются многоступенчатыми и реализуются с помощью процедур последовательных приближений (итераций). Эта процедура для неявной схемы (4.5) может быть представлена в виде

$$f_q^{s+1, (v+1)} = f_q^s + F_q^{s+1, (v)} \Delta t, \quad (4.7)$$

где $v = 0, 1, \dots$ — номер итерации. Число итераций v определяется с помощью условия $\max |f_q^{s+1, (v+1)} - f_q^{s+1, (v)}| \leq \epsilon$, где ϵ — малое положительное число. При $v = 0$ реализуется явная схема. Разумеется, процесс итераций должен быть сходящимся. Это означает, что с ростом v левая часть неравенства должна уменьшаться.

Если в выражении (4.2) подынтегральную функцию заменить сеточной, принять ее постоянной и равной полусумме ее значений, соответствующих верхнему и нижнему пределу интегрирования

$$\frac{1}{2} (F_q^s + F_q^{s+1}),$$

то получим неявную двухуровневую схему

$$f_q^{s+1} = f_q^s + \frac{1}{2} (F_q^s + F_q^{s+1}) \Delta t, \quad (4.8)$$

которая называется схемой трапеций. Эта схема второго порядка точности по Δt .

Помимо явных и неявных схем, для численного интегрирования по времени применяются полунявные схемы, в которых часть членов уравнений аппроксимируются явно, а другая часть членов — неявно.

Примером таких схем могут служить следующие двухуровневые схемы первого порядка точности по Δt :

$$f_q^{s+1} = f_q^s + [(F_q^s)_{\text{нл}} + (F_q^{s+1})_{\text{л}}] \Delta t, \quad (4.9)$$

$$f_q^{s+1} = f_q^s + \frac{1}{2} [(F_q^s)_{\text{л}} + (F_q^{s+1})_{\text{л}}] \Delta t + (F^s)_{\text{нл}} \Delta t, \quad (4.10)$$

где через $(F_q)_{\text{л}}$ и $(F)_{\text{нл}}$ обозначены линейные и нелинейные члены правой части уравнения (4.1).

Рассмотрим двухшаговые (двухтактные) схемы: схему Мацуно (Эйлера с пересчетом)

$$\begin{aligned} f_q^{s+1, (*)} &= f_q^s + F_q^s \Delta t, \\ f_q^{s+1} &= f_q^s + F_q^{s+1, (*)} \Delta t \end{aligned} \quad (4.11)$$

и схему Хойна

$$\begin{aligned} f_q^{s+1, (*)} &= f_q^s + F_q^s \Delta t, \\ f_q^{s+1} &= f_q^s + \frac{1}{2} (F_q^s + F_q^{s+1, (*)}) \Delta t, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где $F_q^{s+1, (*)}$ рассчитывается с использованием $f_q^{s+1, (*)}$.

Двухшаговые схемы (4.11) и (4.12) состоят из схем предиктора (первые формулы) и схем корректора (вторые формулы). С помощью схем предиктора вычисляются предварительные значения $f_q^{s+1, (*)}$, которые затем уточняются с помощью схем корректора. Вместе эти схемы называются схемами предиктор — корректор.

Существуют также схемы с несколькими корректорами, например трехшаговая схема с двумя корректорами:

$$\begin{aligned} f_q^{s+1, (*)} &= f_q^s + F_q^s \Delta t, \quad f_q^{s+1, (**)} = f_q^s + F_q^{s+1, (*)} \Delta t, \\ f_q^{s+1} &= f_q^s + F_q^{s+1, (**)} \Delta t. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Схемы (4.11) и (4.13) имеют первый порядок точности по Δt , а схема (4.12) — второй порядок. Двухшаговые и трехшаговая схемы (4.11)—(4.13) можно рассматривать как частные случаи итерационной схемы (4.7).

К двухшаговым явным схемам относится схема Лакса — Вендрофа. Рассмотрим применение этой схемы для интегрирования одномерного линейного уравнения адвекции.

Схемой Лакса — Вендрофа предусматриваются два цикла (шага) вычислений. Сначала строят решение в промежуточных точках по пространству и времени $q \pm \frac{1}{2}$, $s + \frac{1}{2}$, используя начальные условия в момент времени s в точках q , $q + 1$, $q - 1$, с помощью следующих конечно-разностных схем:

$$\begin{aligned} f_{q+\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} (f_{q+1}^s + f_q^s) - c \left(\frac{f_{q+1}^s - f_q^s}{\Delta r} \right) \frac{\Delta t}{2}, \\ f_{q-\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} (f_q^s + f_{q-1}^s) - c \left(\frac{f_q^s - f_{q-1}^s}{\Delta r} \right) \frac{\Delta t}{2}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

В этих схемах применяются направленные разности по времени и центральные — по пространству. Затем, используя полученные

значения $f_{q+\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}}$, $f_{q-\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}}$ и начальное условие f_q^s , с помощью схемы центральных разностей находится решение в точке q в момент времени $s+1$ (рис. 2.1):

$$f_q^{s+1} = f_q^s - c \left(\frac{f_{q+\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}} - f_{q-\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}}}{\Delta r} \right) \Delta t. \quad (4.15)$$

Схемы (4.14) являются двухуровневыми по времени и имеют первый порядок по Δt и второй порядок по Δr , а схема (4.15) — трехуровневая по времени второго порядка точности по Δt и Δr .

Явная трехуровневая схема центральных разностей второго порядка точности по Δr и Δt для уравнения (4.1) записывается следующим образом:

$$f_q^{s+1} = f_q^{s-1} + 2F_q^s \Delta t. \quad (4.16)$$

Схема (4.16) получается из формулы (4.3), в которой начальное условие задается в момент времени $t - \Delta t$, а подынтегральная функция принимается постоянной и относится к моменту времени t (s). Это схема «чехарды», которую мы уже рассматривали в п. 2.3.2 (формула (3.22)).

В некоторых случаях для интегрирования уравнений гидротермодинамики применяется трехуровневая схема Адамса — Бешфорта второго порядка точности по Δt

$$f_q^{s+1} = f_q^s + \left(\frac{3}{2} F_q^s - \frac{1}{2} F_q^{s-1} \right) \Delta t. \quad (4.17)$$

Многоуровневые схемы по времени более высокого порядка точности с использованием аппроксимаций вида (2.8) применяются сравнительно редко. При численном интегрировании уравнений, описывающих процессы адвекции, целесообразно использовать такие схемы, в которых производные по пространству аппроксимируются с учетом направления переноса. Например, для одномерного уравнения адвекции

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0$$

в зависимости от знака c производную по r можно аппроксимировать следующими направленными разностями:

$$f_q^{s+1} = f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_{q+1}^s - f_q^s)$$

при $c < 0$,

$$f_q^{s+1} = f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_q^s - f_{q-1}^s)$$

при $c > 0$. (4.18)

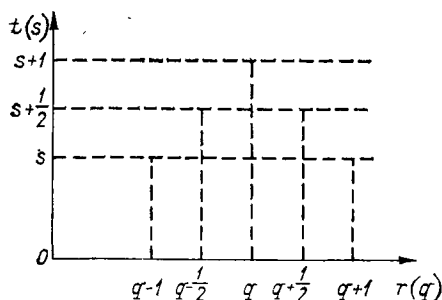


Рис. 2.1. Размещение зависимых переменных при использовании схемы Лакса—Вендрофа.

В этих схемах разности по r направлены в ту сторону, откуда происходит перенос. Такие схемы для уравнений, описывающих адвекцию, называются схемами «против потока».

Схемы, в которых разности по r направлены в сторону, куда происходит перенос, записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} f_q^{s+1} &= f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_{q+1}^s - f_q^s) \text{ при } c > 0, \\ f_q^{s+1} &= f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_q^s - f_{q-1}^s) \text{ при } c < 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Такие схемы называются схемами «по потоку».

Из физических соображений следует отдать предпочтение схемам «против потока», так как именно значения метеовеличин в том направлении, откуда происходит перенос, определяют адвективные изменения.

Схемы (4.18) и (4.19) являются явными и имеют первый порядок аппроксимации по Δt и Δr .

Неявные схемы первого порядка аппроксимации «против потока» имеют вид

$$\begin{aligned} f_q^{s+1} &= f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_{q+1}^{s+1} - f_q^{s+1}) \text{ при } c < 0, \\ f_q^{s+1} &= f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_q^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}) \text{ при } c > 0. \end{aligned}$$

В заключение рассмотрим еще одну схему численного интегрирования для одномерного уравнения адвекции, которая называется схемой «бегущего счета».

Схема «бегущего счета» (неявная, первого порядка по Δr и второго по Δt) записывается в виде

$$f_q^{s+1} = f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} \left[\frac{f_q^{s+1} + f_q^s}{2} - \frac{f_{q-1}^{s+1} + f_{q-1}^s}{2} \right] \text{ при } c > 0. \quad (4.20)$$

Эта неявная схема может быть переписана в виде рекуррентного соотношения, которое позволяет последовательно строить решение для точек в порядке возрастания индекса q , не прибегая к решению систем уравнений вида (4.20):

$$f_{q+1}^{s+1} = \frac{1 - c \frac{\Delta t}{\Delta r}}{1 + c \frac{\Delta t}{\Delta r}} f_q^s + \frac{c \frac{\Delta t}{2\Delta r}}{1 + c \frac{\Delta t}{\Delta r}} (f_{q-1}^{s+1} + f_{q-1}^s). \quad (4.21)$$

Схемы «бегущего счета» могут применяться для многомерных уравнений. Так, например, для трехмерного линейного уравнения адвекции

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + \omega \frac{\partial f}{\partial \zeta} = 0, \quad u, v, \omega = \text{const},$$

рекуррентное соотношение, полученное на основе схемы «бегущего счета», имеет вид

$$f_{i,j,k}^{s+1} = \frac{1}{\left[1 + \left(u \frac{\Delta t}{2\Delta x} + v \frac{\Delta t}{2\Delta y} + \omega \frac{\Delta t}{2\Delta \zeta}\right)\right]} \left\{ \left[1 - \left(u \frac{\Delta t}{2\Delta x} + v \frac{\Delta t}{2\Delta y} + \omega \frac{\Delta t}{2\Delta \zeta}\right)\right] f_{i,j,k}^s + u \frac{\Delta t}{2\Delta x} (f_{i-1,j,k}^{s+1} + f_{i-1,j,k}^s) + v \frac{\Delta t}{2\Delta y} (f_{i,j-1,k}^{s+1} + f_{i,j-1,k}^s) + \omega \frac{\Delta t}{2\Delta \zeta} (f_{i,j,k-1}^{s+1} + f_{i,j,k-1}^s) \right\},$$

где

$$i = \frac{x}{\Delta x}, \quad j = \frac{y}{\Delta y}, \quad k = \frac{\zeta}{\Delta \zeta}.$$

2.5. Точные решения линейных уравнений адвекции, колебаний и трения

Выше было показано, каким образом можно построить конечно-разностные схемы и оценить ошибку аппроксимации. Более полный анализ свойств конечно-разностных схем для уравнений гидротермодинамики удобно проводить на примере уравнений, для которых известны точные решения. Для изучения проблем, возникающих при разработке схем, в качестве таких уравнений обычно используются линейные уравнения адвекции, колебаний и трения, так как для более сложных (нелинейных) уравнений гидротермодинамики не всегда известны точные решения. Однако на основе анализа конечно-разностных схем для линейных уравнений можно получить ряд результатов, которые оказываются полезными при построении конечно-разностных схем для нелинейных уравнений.

2.5.1. Уравнение адвекции

Представим члены прогностических уравнений, которые описывают локальные изменения метеовеличин, обусловленные переносом (адвекцией), в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + \omega \frac{\partial f}{\partial \zeta} = 0.$$

Изменения метеовеличины f за счет переноса по любому из направлений

$$r = \begin{vmatrix} x \\ y \\ \zeta \end{vmatrix}$$

в линейном приближении описываются одномерными уравнениями адвекции вида

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad (5.1)$$

где c — скорость адвекции, которая считается величиной постоянной.

Скорость адвекции c может быть интерпретирована как фазовая скорость перемещения возмущения вдоль оси r , которое в начальный момент времени $t = 0$ представляет собой волну:

$$f(r, 0) = A(0) e^{imr}, \quad (5.2)$$

где $A(0)$ — амплитуда в начальный момент времени; $m = 2\pi/L$ — волновое число; L — длина волны.

Решение уравнения (5.1) строится методом разделения переменных с помощью представления

$$f(r, t) = \varphi_1(r) \varphi_2(t). \quad (5.3)$$

После подстановки выражения (5.3) в уравнение (5.1) и деления результата на $\varphi_1(r) \varphi_2(t)$ имеем

$$\frac{1}{\varphi_2(t)} \frac{d\varphi_2(t)}{dt} = -c \frac{1}{\varphi_1(r)} \frac{d\varphi_1(r)}{dr} = -K = \text{const.}$$

Выполнив интегрирование, получим:

$$\int \frac{1}{\varphi_2(t)} \frac{d\varphi_2(t)}{dt} dt = - \int K dt, \quad \int \frac{1}{\varphi_1(r)} \frac{d\varphi_1(r)}{dr} dr = \int \frac{K}{c} dr,$$

или

$$\ln \varphi_2(t) = \ln A_2 - Kt, \quad \ln \varphi_1(r) = \ln A_1 + \frac{K}{c} r,$$

где A_1, A_2 — постоянные интегрирования. Следовательно,

$$\varphi_1(r) = A_1 e^{\frac{Kr}{c}}, \quad \varphi_2(t) = A_2 e^{-Kt},$$

или

$$f(r, t) = A_1 A_2 e^{K\left(\frac{r}{c} - t\right)}.$$

Используя начальное условие (5.2), имеем: $K = imc$, $A_1 A_2 = A(0)$, а следовательно, решение можно представить в виде

$$f(r, t) = A(0) e^{im(r-ct)}. \quad (5.4)$$

Если от независимых переменных r, t перейти к переменным $\eta \equiv r - ct, t$, то, имея в виду, что $f(r, t) = F(\eta, t)$, из уравнения (5.1) получаем:

$$\frac{\partial F(\eta, t)}{\partial t} = 0.$$

Это означает, что F не зависит от t , а зависит только от η , т. е. $F = F(\eta)$. Таким образом,

$$f(r, t) = F(r - ct)$$

является решением уравнения (5.1), удовлетворяющим произвольному начальному условию

$$f(r, 0) = F(r).$$

При $r - ct = \text{const}$, $f(r, t) = \text{const}$.

Если рассматривать решение на координатной плоскости r, t , то на линиях $r - ct = \text{const}$ решение остается неизменным.

Напомним, что интегрирование дифференциальных уравнений в частных производных равносильно интегрированию так называемых характеристических систем. Для линейного однородного уравнения адвекции (5.1) эта система имеет вид

$$\frac{dt}{1} = \frac{dr}{c}.$$

Любой первый интеграл характеристической системы является решением дифференциального уравнения.

Интегральные кривые, описываемые характеристическими системами, называются характеристиками дифференциального уравнения.

Для рассматриваемого уравнения (5.1) характеристиками являются прямые, уравнения которых представляют собой интеграл характеристической системы:

$$r - ct = \text{const}. \quad (5.5)$$

Значения f , соответствующие $t = 0$, представляют собой начальные условия для этого уравнения. Начальные условия однозначно определяют константу в правой части уравнения характеристик (5.5).

На характеристиках решение не изменяется, т. е.

$$f(r, t) = \text{const}.$$

2.5.2. Уравнение колебаний

В соответствии с начальным условием (5.2) решение (5.4) можно записать в виде

$$f(r, t) = A(t) e^{imr}, \quad (5.6)$$

где амплитуда $A(t)$ зависит от времени.

После подстановки решения (5.6) в уравнение (5.1) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для амплитуды

$$\frac{dA(t)}{dt} = -imcA(t). \quad (5.7)$$

Решение уравнения (5.7) имеет вид

$$A(t) = A(0) e^{-imct}. \quad (5.8)$$

Если положить, что $-cm = \sigma$, то уравнение (5.7) преобразуется в уравнение

$$\frac{dA}{dt} = i\sigma A, \quad (5.9)$$

которое, следуя Аракаве и Мезингеру, будем называть уравнением колебаний или частотным уравнением. Отметим, что эти названия не общеприняты.

В уравнении (5.9) $\sigma = 2\pi/T$ — частота, T — период колебаний. Общее решение уравнения (5.9) имеет вид

$$A(t) = A(0) e^{i\sigma t}. \quad (5.10)$$

Для дискретного времени $t = s \Delta t$

$$A(s \Delta t) = A(0) e^{i\sigma s \Delta t}. \quad (5.11)$$

Таким образом, функция $f(r, t) = A(t) e^{imr}$ является решением линейного уравнения адвекции (5.1), если амплитуда $A(t)$ удовлетворяет уравнению колебаний (5.9). Следовательно, решение уравнения адвекции (5.1) можно записать в виде

$$f(r, t) = A(0) e^{i(mr + \sigma t)}. \quad (5.12)$$

Для дискретных аргументов $r = q \Delta r$, $t = s \Delta t$ решение (5.12) имеет вид

$$f_q^s = A^0 e^{i(mq\Delta r + \sigma s \Delta t)}. \quad (5.13)$$

Решение уравнения колебаний представляет интерес с точки зрения построения конечно-разностных схем для уравнений гидротермодинамики, так как при некоторых упрощениях к этому уравнению можно свести уравнения горизонтального движения.

Например, если в уравнениях движения опустить члены с составляющими градиента геопотенциала, то получим

$$\frac{du}{dt} = +lv, \quad \frac{dv}{dt} = -lu.$$

Если положить, что $V = u + iv$, то эти уравнения можно записать в виде уравнения колебаний

$$\frac{dV}{dt} = i\sigma V,$$

где $\sigma = -l$.

2.5.3. Уравнение трения

Если в прогностических моделях предполагается учет турбулентной диффузии и эффекта трения вблизи подстилающей поверхности, то возникает необходимость оценить влияние конечно-разностного представления соответствующих членов уравнений на устойчивость численных решений.

Такие оценки можно выполнить на примере диффузионного уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}, \quad \nu > 0, \quad (5.14)$$

и уравнения трения

$$\frac{dA}{dt} = -kA, \quad k > 0, \quad (5.15)$$

где ν — коэффициент турбулентной диффузии; k — коэффициент трения. Если принять, что $A = u + iv$, то уравнение (5.15) описывает эффект трения, пропорциональный модулю вектора скорости $s(u, v)$.

Общее решение уравнения трения имеет вид

$$A(t) = A(0) e^{-kt},$$

или для дискретного времени $s = t/\Delta t$

$$A^s = A^0 e^{-ks\Delta t}.$$

Решение уравнения диффузии имеет вид

$$f(r, t) = A(t) e^{imr}.$$

Если подставить его в уравнение (5.14), то получим уравнение для амплитуды $A(t)$

$$\frac{dA}{dt} = -\nu m^2 A.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению трения, если принять, что $\nu m^2 = k$. Следовательно, уравнение трения описывает поведение амплитуды в решении уравнения диффузии.

2.6. Сходимость численного решения

За счет уменьшения приращений независимых переменных (шагов сетки) ошибка аппроксимации согласованных конечно-разностных схем может быть сделана сколь угодно малой. Однако это не будет означать, что уменьшится также ошибка численного решения

$$f_q^s - f(q\Delta r, s\Delta t) \left(s = \frac{t}{\Delta t}, \quad q = \frac{r}{\Delta r} \right),$$

если $\Delta r \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$. Здесь, как было условлено, ошибка оценивается в пространстве сеточных функций.

Ошибка численного решения будет уменьшаться при уменьшении Δr и Δt только в том случае, если используемая для численного решения конечно-разностная схема будет сходящейся. Напомним, что конечно-разностная схема называется сходящейся, если ошибка численного решения, полученного с помощью этой схемы, стремится к нулю при $\Delta r, \Delta t \rightarrow 0$ для фиксированного момента времени $s\Delta t$

при любых (гладких) начальных условиях. Численное решение, полученное с помощью сходящейся схемы, называется сходящимся. Покажем, что согласованная схема не обязательно является сходящейся, на примере линейного уравнения адвекции

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad c = \text{const} > 0. \quad (6.1)$$

Решение уравнения (6.1) $F(r - ct)$ удовлетворяет произвольному начальному условию.

На рис. 2.2 представлена характеристика $r - ct = r_0$, соответствующая начальному условию при $r_0 = 0$, $t = 0$.

Для численного решения уравнения (6.1) будем использовать явную конечно-разностную схему с направленной вперед разностью по t и с разностью по r «против потока»:

$$f_q^{s+1} = f_q^s - c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_q^s - f_{q-1}^s) \quad (c = 10 \text{ м/с}). \quad (6.2)$$

Эта схема согласована, так как ошибка конечно-разностной аппроксимации стремится к нулю при $\Delta r \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$. Для схемы (6.2) примем $\Delta r = 100$ м, $\Delta t = 20$ с. Предположим, что в точке с координатами $r = 400$ м, $t = 40$ с численное решение лежит на характеристике. Эта точка обозначена на рис. 2.2 цифрой *I*.

Проследим, как формируется численное решение в точке *I*. Поскольку $\Delta t = 20$ с, то решение в этой точке будет определяться значениями функции f в точках *II* и *III*. В свою очередь, решение в точках *II* и *III* будет определяться начальными значениями функции f в точках *IV*, *V* и *V*, *VI* соответственно.

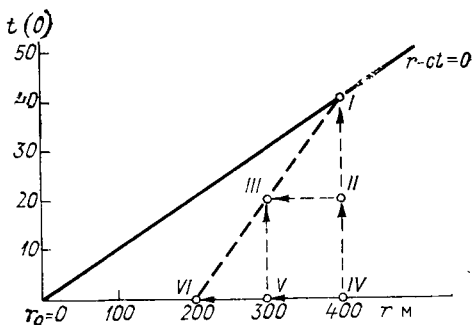
Таким образом, численное решение в точке *I* не зависит от начального условия в точке $r_0 = 0$, от которого зависит точное решение. Поэтому, несмотря на согласованность схемы (6.2), численное решение может как угодно сильно отличаться от точного и не будет сходиться к точному при $\Delta r \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$. Причиной этого является нарушение требования критерия устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви, так как в данном случае

$$\frac{\Delta t c}{\Delta r} = \frac{20 \cdot 10}{100} = 2 > 1.$$

Если же в рассмотренном случае уменьшить шаг по времени в 2 раза, т. е. положить $\Delta t = 10$ с, но оставить шаг по r неизменным и равным $\Delta r = 100$ м, то критерий устойчивости будет удовлетворен, так как

$$\frac{\Delta t c}{\Delta r} = \frac{10 \cdot 10}{100} = 1.$$

Рис. 2.2. Характеристика $r - ct = r_0$ ($r_0 = 0$). Зависимость решения в точке *I* от начальных условий.



В этом случае решение в точке I будет зависеть от начального условия в точке $r_0 = 0$, и при $\Delta r \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ численное решение будет сходиться к точному.

Таким образом, сходимость численного решения определяется не величиной шагов по r и t , а их отношением $\Delta t/\Delta r$, от которого зависит наклон прямых, ограничивающих область зависимости численного решения.

На рис. 2.2 при $\Delta t c/\Delta r = 2$ эта прямая проходит через точки I , III , VI , а при $\Delta t c/\Delta r = 1$ — совпадает с характеристикой. Для любых схем необходимое условие сходимости состоит в том, чтобы характеристика располагалась внутри области зависимости численного решения. Нетрудно убедиться в том, что условие будет выполняться, если $\Delta t c/\Delta r \leq 1$ при любых начальных условиях (не обязательно при $r_0 = 0$) и любом наклоне характеристики.

Приведенный пример иллюстрирует положение теоремы Лакса о том, что устойчивость, наряду с согласованностью, обеспечивает сходимость.

2.7. Устойчивость конечно-разностных схем

В задачах численного прогноза погоды, особенно среднесрочного и долгосрочного, а также в задачах моделирования общей циркуляции атмосферы вопрос об устойчивости конечно-разностных схем имеет первостепенное значение. В то же время разработка устойчивых конечно-разностных схем для нелинейных уравнений сопряжена со значительными трудностями. Анализ устойчивости может быть выполнен лишь для линейных (линеаризованных нелинейных) и некоторых простых нелинейных уравнений. При этом устойчивость конечно-разностной схемы для линеаризованного уравнения не означает, что эта схема будет также устойчивой для соответствующего нелинейного уравнения.

Существует ряд методов исследования вычислительной устойчивости конечно-разностных схем, которые изучаются в курсах вычислительной математики. Рассмотрим применение некоторых из этих методов на примере согласованной конечно-разностной схемы для линейного уравнения адвекции.

Для линейных уравнений адвекции, колебаний и трения известны точные решения, а также известно, что эти решения ограничены. Поэтому анализ устойчивости согласованных конечно-разностных схем для этих уравнений сводится к проверке ограниченности численных решений, которая будет одновременно означать устойчивость и сходимость этих решений.

Запишем согласованную явную схему для линейного уравнения адвекции с помощью направленной вперед разности по t и направленной «против потока» разности по r :

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\Delta t} + c \frac{f_q^s - f_{q-1}^s}{\Delta r} = 0 \quad (c > 0). \quad (7.1)$$

Схему (7.1) перепишем в виде

$$f_q^{s+1} = (1 - \mu) f_q^s + \mu f_{q-1}^s, \quad (7.2)$$

где $\mu = c \frac{\Delta t}{\Delta r}$.

Прямой метод

При $(1 - \mu) \geq 0$ ($\mu \leq 1$), используя формулу (7.2), получаем:

$$|f_q^{s+1}| \leq (1 - \mu) |f_q^s| + \mu |f_{q-1}^s|. \quad (7.3)$$

Запишем условие (7.3) в точке q , где $|f_q^{s+1}|$ имеет максимум, т. е. $\max_{(q)} |f_q^{s+1}|$. Значения $|f_q^s|$ и $|f_{q-1}^s|$ заменим максимальным значением, т. е. $\max_{(q)} |f_q^s|$. В этом случае правая часть неравенства (7.3) может только увеличиться. В результате неравенство (7.3) преобразуется к виду

$$\max_{(q)} |f_q^{s+1}| \leq \max_{(q)} |f_q^s|,$$

откуда следует ограниченность, а следовательно, и устойчивость численного решения, получаемого с помощью схемы (7.1). Таким образом, условие $\mu \leq 1$ ($c \frac{\Delta t}{\Delta r} \leq 1$) оказывается достаточным для устойчивости. Это условие совпадает с критерием устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви (КФЛ).

Энергетический метод

Возведем в квадрат конечно-разностное уравнение (7.2) и выполним суммирование по q от 0 до N :

$$\sum_q (f_q^{s+1})^2 = \sum_q [(1 - \mu)^2 (f_q^s)^2 + 2\mu(1 - \mu) f_q^s f_{q-1}^s + \mu^2 (f_{q-1}^s)^2]. \quad (7.4)$$

Если на границах области определения решения уравнения (7.1) в точках $q = 0$, $q = N$ используются периодические граничные условия $f_0 = f_N$, то

$$\sum_q (f_{q-1}^s)^2 = \sum_q (f_q^s)^2.$$

Поскольку в силу неравенства Шварца

$$\sum_q f_q^s f_{q-1}^s \leq \sqrt{\sum_q (f_q^s)^2 \sum_q (f_{q-1}^s)^2} = \sum_q (f_q^s)^2,$$

то при $1 - \mu \geq 0$ ($\mu \leq 1$) из выражения (7.4) следует:

$$\sum_q (f_q^{s+1})^2 \leq [(1 - \mu)^2 + 2\mu(1 - \mu) + \mu^2] \sum_q (f_q^s)^2,$$

или

$$\sum_q (f_q^{s+1})^2 \leq \sum_q (f_q^s)^2.$$

Это неравенство означает ограниченность (устойчивость) численного решения и схемы (7.1). Это утверждение основывается на том, что если сумма квадратов $\sum_q (f_q^{s+1})^2$ ограничена, то ограничены $(f_q^{s+1})^2$ и f_q^{s+1} . Таким образом, доказано, что условие $(1 - \mu) \geq 0$ ($\mu \leq 1$) и периодические граничные условия являются достаточными для устойчивости.

Рассмотренный метод называется энергетическим, так как квадраты составляющих скорости ветра и геопотенциала (давления) пропорциональны кинетической и потенциальной энергии. Энергетический метод может использоваться при анализе вычислительной устойчивости некоторых нелинейных конечно-разностных схем.

Метод Неймана

Метод Неймана применяется при анализе вычислительной устойчивости конечно-разностных схем для линейных дифференциальных уравнений, точные решения которых известны. Методом предусматривается подстановка точных решений в конечно-разностную схему, а анализ устойчивости сводится к оценке множителя перехода, связывающего амплитуды возмущений на соседних уровнях по времени. Точные решения линейных уравнений выражаются суммой частных решений, представляемых волновыми гармониками. Это позволяет анализировать устойчивость для каждой волновой гармоники. Устойчивость конечно-разностной схемы для каждой гармоники означает устойчивость конечно-разностной схемы в целом.

Применим метод Неймана к схеме (7.2). Точное решение линейного уравнения адвекции для дискретных аргументов имеет вид

$$f_q^s = A^s e^{imq\Delta r}.$$

Подставляя это решение в схему (7.2) и сокращая полученный результат на общий множитель $e^{imq\Delta r}$, получаем:

$$A^{s+1} = \lambda A^s, \text{ или } |\dot{A}^{s+1}| = |\lambda| |A^s|, \quad (7.5)$$

где λ — множитель перехода; $|\lambda|$ — модуль λ .

Для схемы (7.2)

$$\lambda = 1 - \mu + \mu e^{-im\Delta r} = 1 - \mu + \mu \cos m \Delta r - i\mu \sin m \Delta r.$$

Решение будет ограниченным, а следовательно, устойчивым, если амплитуда не будет возрастать, т. е. если множитель перехода будет удовлетворять условию $|\lambda| \leq 1$.

В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} |\lambda| &= \sqrt{(1 - \mu + \mu \cos m \Delta r)^2 + \mu^2 \sin^2 m \Delta r} = \\ &= \sqrt{1 + 2\mu(1 - \mu)(1 - \cos m \Delta r)}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

При получении соотношения (7.6) использовались формулы Эйлера $e^{\pm i\varphi} = \cos \varphi \pm i \sin \varphi$, а также формула для модуля комплексного числа $z = a + ib$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Анализируя соотношения (7.6), находим:

$$\begin{aligned} \text{при } \mu \rightarrow 0 (\Delta t \rightarrow 0) \quad |\lambda| \rightarrow 1, \\ \text{при } \mu > 1 \quad |\lambda| > 1, \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\text{при } 0 < \mu \leq 1 \quad |\lambda| \leq 1. \quad (7.8)$$

В точном решении амплитуда не изменяется, так как

$$A(t) = A(0) e^{i\sigma t}, \quad \lambda = e^{i\sigma t} \equiv \cos \sigma t + i \sin \sigma t,$$

а

$$|\lambda| = \sqrt{\cos^2 \sigma t + \sin^2 \sigma t} = 1. \quad (7.9)$$

Если $|\lambda| > 1$, то амплитуда численного решения будет неограниченно возрастать в процессе интегрирования методом шагов по времени. Следовательно, условие (7.7) означает неустойчивость численного решения. Условие (7.8) обеспечивает либо уменьшение, либо неизменность амплитуды, т. е. ограниченность, а следовательно, устойчивость численного решения.

В зависимости от значения модуля множителя перехода $|\lambda|$ схемы подразделяются на неустойчивые ($|\lambda| > 1$), нейтральные ($|\lambda| = 1$), диссипативные ($|\lambda| < 1$). Условия (7.7), (7.8) совпадают с критерием линейной устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви, так как

$$\mu = c \frac{\Delta t}{\Delta r}.$$

Схемы, устойчивость которых зависит от величины μ (соотношения $c \frac{\Delta t}{\Delta r}$), называются условно устойчивыми. Схемы, устойчивость которых не связана с выполнением каких-либо условий, называются абсолютно устойчивыми.

Поскольку диссипативные и нейтральные схемы дают ограниченные решения, то в соответствии с определением устойчивости их следует относить к устойчивым.

Матричный метод

Анализ устойчивости методом Неймана строится с помощью множителя перехода λ , связывающего амплитуды решения на двух соседних уровнях по времени в одной точке.

Более общий подход к анализу устойчивости предусматривает сравнение численных решений на двух соседних уровнях по времени s и $s + 1$ на множестве точек сеточной области с помощью матричного уравнения

$$\mathbf{f}^{(s+1)} = B \mathbf{f}^{(s)}, \quad (7.10)$$

где $\mathbf{f}^{(s)}$ — вектор, составляющими которого являются значения прогностической переменной $f_q^{(s)}$ во всех узлах сетки; B — матрица перехода, называемая также матрицей усиления.

Здесь и далее в тех случаях, когда верхний индекс s указывает на принадлежность к уровню по времени, он помещается в скобки (в отличие от степени s).

Матрица B представляет собой конечно-разностную схему, определенную на множестве точек сеточной области.

Так, если для схемы

$$f_q^{(s+1)} = \mu f_{q-1}^{(s)} + (1 - \mu) f_q^{(s)}, \quad \mu > 0,$$

используются нулевые граничные условия $f_q^{(s)} = 0$ при $q = 0, N$, матричное уравнение (7.10) имеет вид

$$\begin{pmatrix} f_1^{(s+1)} \\ f_2^{(s+1)} \\ \vdots \\ f_{N-1}^{(s+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \mu & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu & 1 - \mu & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \mu & 1 - \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1^{(s)} \\ f_2^{(s)} \\ \vdots \\ f_{N-1}^{(s)} \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

Из (7.11) следует, что

$$\mathbf{f}^{(s)} = B \mathbf{f}^{(s-1)} = B (B \mathbf{f}^{(s-2)}) = \dots = B^s \mathbf{f}^{(0)}, \quad (7.12)$$

где $\mathbf{f}^{(0)}$ ($f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \dots, f_{N-1}^{(0)}$) — вектор начальных условий.

Из выражения (7.12) видно, что вычислительная устойчивость зависит от свойства матрицы B . Собственные значения λ_k матрицы B являются корнями характеристического уравнения

$$|B - \lambda I| = 0, \quad (7.13)$$

где $| \quad |$ — определитель, I — единичная матрица.

В рассматриваемом примере определитель имеет порядок $N - 1$. Следовательно, число собственных значений также равно $N - 1$.

Каждому собственному значению λ_k соответствует собственный вектор Φ_k , удовлетворяющий матричному уравнению

$$B \Phi_k = \lambda_k \Phi_k, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (7.14)$$

Вектор начальных условий $\mathbf{f}^{(0)}$ может быть представлен линейной комбинацией собственных векторов Φ_k :

$$\mathbf{f}^{(0)} = \sum_k a_k \Phi_k, \quad (7.15)$$

где a_k — постоянные.

Подставляя (7.15) в (7.12), находим:

$$\mathbf{f}^{(s)} = \sum_k a_k B^s \Phi_k = \sum_k a_k B^{s-1} B \Phi_k$$

Используя (7.14), получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(s)} &= \sum_k a_k B^{s-1} \lambda_k \Phi_k = \sum_k a_k B^{s-2} \lambda_k B \Phi_k = \\ &= \sum_k a_k B^{s-2} \lambda_k^2 \Phi_k = \dots = \sum_k a_k \lambda_k^s \Phi_k. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{f}^{(s)} = \sum_k a_k \lambda_k^s \Phi_k. \quad (7.16)$$

Отсюда следует, что решение $\mathbf{f}^{(s)}$ ($f_1^{(s)}, f_2^{(s)}, \dots, f_{N-1}^{(s)}$) будет ограниченным, а следовательно, устойчивым, если собственные значения λ_k не будут превышать единицу:

$$|\lambda_k| \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots, N-1.$$

Если $|\lambda_k| > 1$, то решение будет неустойчивым. При $|\lambda_k| < 1$ решение будет затухать. При $|\lambda_k| = 1$ решение устойчиво и нейтрально.

Таким образом, полученные условия устойчивости согласуются с условиями (7.7), (7.8).

Методы Неймана и матриц могут применяться и в тех случаях, когда точное решение дифференциального уравнения не является ограниченным, а растет со временем, но не быстрее, чем по экспоненте. В этих случаях численное решение может также расти экспоненциально, но должно оставаться ограниченным на конечном интервале времени. Это означает, что для таких численных решений множители перехода λ (или собственные значения λ_k) могут превосходить единицу:

$$|\lambda| = 1 + \delta, \quad \delta > 0.$$

Однако при этом должно выполняться условие $O(\delta) \leq O(\Delta t)$, или

$$|\lambda| \leq 1 + O(\Delta t). \quad (7.17)$$

Для того чтобы показать это, обратимся к соотношению

$$|A^{(s+1)}| = |\lambda| |A^{(s)}|,$$

которое перепишем в виде

$$|A^{(s+1)}| = |\lambda|^{(s)} |A^{(0)}|,$$

где $A^{(0)}$ — амплитуда в начальный момент времени ($s = 0$).

Решение будет устойчивым (ограниченным), если

$$|A^{(s+1)}| = |\lambda|^s |A^{(0)}| < c_1 \quad (c_1 \text{ — конечное число})$$

или

$$s \ln |\lambda| < \ln \frac{c_1}{A^{(0)}} \equiv c.$$

Поскольку $s = t/\Delta t$, то $\ln |\lambda| < c \Delta t/t$.

Для конечного времени t

$$\ln |\lambda| \leq O(\Delta t). \quad (7.18)$$

В рассматриваемом случае $|\lambda| = 1 + \delta$, $\ln |\lambda| = \ln(1 + \delta)$.

Воспользуемся разложением в ряд:

$$\ln(1 + \delta) = \delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^4}{4} \dots \approx \delta.$$

С учетом этого оценку (7.18) можно записать в виде

$$\delta \leq O(\Delta t),$$

а следовательно,

$$|\lambda| = 1 + O(\Delta t).$$

Поскольку $\ln(1 + \delta) \approx \delta$, то $1 + \delta \approx e^\delta$, а это означает, что при $\delta > 0$ численное решение будет расти экспоненциально.

2.8. Анализ вычислительной устойчивости конечно-разностных схем.

Вычислительная вязкость.

Вычислительные моды

Проанализируем методом Неймана устойчивость конечно-разностных схем, используемых при численном интегрировании уравнений гидротермодинамики, на примере линейных уравнений адвекции, колебаний и трения. Результаты этого анализа будут использоваться при построении прогностических моделей в последующих главах.

2.8.1. Уравнение адвекции

Явная схема с направленными разностями

Для уравнения адвекции

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \quad (8.1)$$

в случае если $\mu < 0$ ($c < 0$), схема «против потока» записывается в виде

$$f_q^{s+1} = f_q^s (1 + \mu) - \mu f_{q+1}^s. \quad (8.2)$$

Подстановка в схему (8.2) точного решения

$$f_q^s = A^s e^{imq\Delta r} \quad (8.3)$$

приводит к следующему выражению для $|\lambda|$:

$$|\lambda| = \sqrt{1 + 2\mu(1 + \mu)(1 - \cos m\Delta r)},$$

откуда получаем:

$$\begin{aligned} |\lambda| &\rightarrow 1 \quad \text{при} \quad |\mu| \rightarrow 0, \\ |\lambda| &\leq 1 \quad \text{при} \quad 0 \leq |\mu| \leq 1, \\ |\lambda| &> 1 \quad \text{при} \quad |\mu| > 1. \end{aligned}$$

Таким образом, схема с разностями «против потока» при $\mu < 0$, так же как и при $\mu > 0$, условно устойчива, если выполняется критерий Куранта — Фридрихса — Леви (КФЛ):

$$|c| \frac{\Delta t}{\Delta r} \leq 1.$$

Нетрудно убедиться в том, что схемы «по потоку» оказываются неустойчивыми.

Схемы с направленными разностями, в том числе и схемы «против потока»

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\Delta t} + c \frac{f_q^s - f_{q-1}^s}{\Delta r} = 0, \quad c > 0, \quad (8.4)$$

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\Delta t} + c \frac{f_{q+1}^s - f_q^s}{\Delta r} = 0, \quad c < 0, \quad (8.5)$$

в действительности аппроксимируют уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}, \quad (8.6)$$

где ν — коэффициент вычислительной (счетной) вязкости.

В этом легко убедиться, подставив в рассматриваемые схемы вместо сеточных функций f_q^{s+1} , $f_{q\pm 1}^s$ функции $f(r, t + \Delta t)$, $f(r \pm \Delta r, t)$, представленные рядами Тейлора:

$$f(r, t + \Delta t) = f(r, t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2!} + \dots,$$

$$f(r \pm \Delta r, t) = f(r, t) \pm \frac{\partial f}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{(\Delta r)^2}{2!} + \dots$$

При этом предполагается, что $f(r, t)$ — гладкая функция.

В результате подстановки рядов в схемы получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{c \Delta r}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad \text{при } c > 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{c \Delta r}{2} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad \text{при } c < 0.$$

Из уравнения (8.1) следует, что

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -c \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial r} = -c \frac{\partial^2 f}{\partial r^2},$$

т. е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}.$$

С учетом этого имеем:

для схемы (8.4)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{c (\Delta r - c \Delta t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2},$$

$$\nu = \frac{c (\Delta r - c \Delta t)}{2},$$

для схемы (8.5)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = - \frac{c (\Delta r - c \Delta t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2},$$

$$\nu = \frac{|c| \Delta r - c^2 \Delta t}{2}.$$

При $c \Delta t / \Delta r \leq 1$ ($c > 0$), $|c| \Delta t / \Delta r \leq 1$ ($c < 0$) схемы (8.4) и (8.5) построены корректно, так как при этом $\nu > 0$. Следовательно, условия корректности совпадают с условиями устойчивости. При $\nu < 0$ задача оказывается некорректной и неустойчивой.

Таким образом, конечно-разностные схемы с направленными разностями в действительности аппроксимируют не уравнение (8.1), а уравнение (8.6), которое описывает не только адвекцию, но и учитывает вязкость. Поскольку появление вязкого члена явилось следствием применения конечно-разностной схемы и не связано с физическими соображениями, то эффект, описываемый этим членом, называется вычислительной (счетной) или фиктивной вязкостью, а коэффициент ν — коэффициентом счетной вязкости. Счетная вязкость, так же как и физическая вязкость, способствует сглаживанию метеорологических полей.

Явная схема Эйлера

В схеме Эйлера для уравнения (8.1) используются направленная разность по времени и центральная разность по пространству:

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\Delta t} + c \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\Delta r} = 0. \quad (8.7)$$

Эта схема является согласованной и имеет первый порядок точности по Δt и второй — по $(\Delta r)^2$: $O[\Delta t, (\Delta r)^2]$. Подставив точное решение (8.3) в схему (8.7) и сократив на $e^{imq\Delta r}$, получим:

$$A^{s+1} = A^s \left[1 - c \frac{\Delta t}{2\Delta r} (e^{im\Delta r} - e^{-im\Delta r}) \right].$$

Поскольку $e^{im\Delta r} - e^{-im\Delta r} = 2i \sin m \Delta r$, то в выражении

$$|A^{s+1}| = |\lambda| |A^s|,$$

$$|\lambda| = \sqrt{1 + \mu^2 \sin^2 m \Delta r} > 1.$$

Таким образом, схема неустойчива.

Подстановка в схему функций $f(r, t + \Delta t)$, $f(r \pm \Delta r, t)$, представленных рядами Тейлора, приводит к уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = - \nu \frac{\partial^2 f}{\partial r^2},$$

где $\nu = c^2 \Delta t/2$ — коэффициент счетной вязкости ($\nu > 0$).

Поскольку отрицательная вязкость не имеет физического смысла, то задача решения уравнения (8.1) с помощью схемы Эйлера оказывается некорректной.

Схема центральных разностей. Вычислительные моды

Согласованная трехуровневая по времени схема центральных разностей второго порядка точности — $O[(\Delta t)^2, (\Delta r)^2]$ — для уравнения (8.1) имеет вид

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^{s-1}}{2\Delta t} + c \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\Delta r} = 0. \quad (8.8)$$

Подставляя в схему (8.8) точное решение (8.3) и сокращая результат на $e^{imq\Delta r}$, получаем:

$$A^{s+1} = A^{s-1} - 2ic \frac{\Delta t}{\Delta r} A^s \sin m \Delta r. \quad (8.9)$$

Подставив в (8.9)

$$A^{s+1} = A^0 e^{i\sigma(s+1)\Delta t},$$

$$A^{s-1} = A^0 e^{i\sigma(s-1)\Delta t},$$

$$A^s = A^0 e^{i\sigma s \Delta t}$$

и сократив результат на $A^0 e^{i\sigma s \Delta t}$, находим:

$$2i \sin \sigma \Delta t = 2i \left(-c \frac{\Delta t}{\Delta r} \sin m \Delta r \right),$$

или

$$\sin \sigma \Delta t = -c \frac{\Delta t}{\Delta r} \sin m \Delta r,$$

$$\sigma = \frac{1}{\Delta t} \arcsin \left(-c \frac{\Delta t}{\Delta r} \sin m \Delta r \right).$$

При этом использовалась формула Эйлера

$$e^{i\sigma \Delta t} - e^{-i\sigma \Delta t} = 2i \sin \sigma \Delta t.$$

Частота σ будет вещественной, если

$$\left| -c \frac{\Delta t}{\Delta r} \sin m \Delta r \right| \leq 1.$$

Поскольку $|\sin m \Delta r| \leq 1$, то условие устойчивости для схемы (8.8) соответствует критерию КФЛ: $|c(\Delta t/\Delta r)| \leq 1$. Таким образом, схема центральных разностей условно устойчива. Путем подстановки в схему (8.8) разложений функции f в ряды Тейлора в точках $(r, t \pm \Delta t)$, $(r \pm \Delta r, t)$ нетрудно убедиться в том, что применение этой схемы не сопровождается проявлением эффекта вычислительной вязкости.

Амплитуды решения на двух соседних уровнях по времени связаны соотношениями $A^{s+1} = \lambda A^s$, $A^s = \lambda A^{s-1}$. Следовательно, $A^{s+1} = \lambda^2 A^{s-1}$. С учетом этих соотношений выражение (8.9) преобразуется к виду

$$\lambda^2 A^{s-1} + 2i\omega \lambda A^{s-1} - A^{s-1} = 0,$$

где

$$\omega = c \frac{\Delta t}{\Delta r} \sin m \Delta r.$$

Сокращая полученное выражение на A^{s-1} , получаем квадратное уравнение

$$\lambda^2 + 2i\omega \lambda - 1 = 0,$$

которое имеет следующие корни:

$$\lambda_1 = -i\omega + \sqrt{1 - \omega^2}, \quad \lambda_2 = -i\omega - \sqrt{1 - \omega^2}.$$

Этим значениям λ соответствуют два численных решения

$$f_q^{(s)} = \lambda_1^s (f_q^{(0)})_1, \quad (f_q^{(s)})_2 = \lambda_2^s (f_q^{(0)})_2,$$

где

$$(f_q^{(0)})_1 = A_1^{(0)} e^{imq\Delta r}, \quad (f_q^{(0)})_2 = A_2^{(0)} e^{imq\Delta r}.$$

Напомним, что верхний индекс s у λ здесь означает степень. Наличие двух численных решений для линейного дифференциального уравнения адвекции первого порядка является следствием трехуровневости конечно-разностной схемы (8.8). В общем случае для схем с N уровнями по времени будет $N - 1$ значений λ . Этим значениям λ будут соответствовать численные решения, которые называются модами.

В точном решении $f^{(s)} = \lambda^s f_q^{(0)}$, $\lambda = e^{i\sigma \Delta t} \rightarrow 1$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Для численных решений $\lambda_1 \rightarrow 1$, $\lambda_2 \rightarrow -1$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Следовательно, численное решение, соответствующее λ_1 , стремится к точному. Это решение называется физической модой. Численное решение, соответствующее λ_2 , не является приближением к точному, т. е. является ложным, и поэтому называется вычислительной модой.

Поскольку решается линейное уравнение, то линейная комбинация численных решений $(f_q^{(s)})_1$ и $(f_q^{(s)})_2$ также будет являться решением уравнения (8.8):

$$f_q^{(s)} = a \lambda_1^s (f_q^{(0)})_1 + b \lambda_2^s (f_q^{(0)})_2, \quad (8.10)$$

где a и b — постоянные.

Для решения дифференциального уравнения первого порядка по t необходимо одно начальное условие: $f(r, 0)$. Для трехуровневого по времени конечно-разностного уравнения (8.8) требуются два начальных условия: физическое $f^{(0)}$ и вычислительное $f_q^{(1)}$. Условие $f_q^{(1)}$ называется вычислительным, так как оно не требуется для

интегрирования дифференциального уравнения. В то же время численное решение (8.10) должно удовлетворять двум условиям:

$$\begin{aligned} a(f_q^{(0)})_1 + b(f_q^{(0)})_2 &= f_q^{(0)}, \\ a\lambda_1(f_q^{(0)})_1 + b\lambda_2(f_q^{(0)})_2 &= f_q^{(1)}. \end{aligned}$$

Получив из этих условий выражения

$$\begin{aligned} a(f_q^{(0)})_1 &= \frac{f_q^{(1)} - \lambda_2 f_q^{(0)}}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ b(f_q^{(0)})_2 &= \frac{f_q^{(1)} - \lambda_1 f_q^{(0)}}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{aligned}$$

и подставив их в (8.10), получаем:

$$f_q^{(s)} = \lambda_1^s \frac{f_q^{(1)} - \lambda_2 f_q^{(0)}}{\lambda_1 - \lambda_2} + \lambda_2^s \frac{f_q^{(1)} - \lambda_1 f_q^{(0)}}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

где $\lambda_1^s \frac{f_q^{(1)} - \lambda_2 f_q^{(0)}}{\lambda_1 - \lambda_2}$ — физическая мода, $\lambda_2^s \frac{f_q^{(1)} - \lambda_1 f_q^{(0)}}{\lambda_2 - \lambda_1}$ — вычислительная мода.

Точное решение содержит только физическую моду, которая зависит от одного (физического) начального условия и описывает одну волну. Численное решение зависит от физического и вычислительного начальных условий и содержит две моды, которые описывают две волны. Если начальное условие имеет вид $f_q^{(1)} = \lambda_1 f_q^{(0)}$, то $f_q^{(s)} = \lambda_1^s f_q^{(0)}$, т. е. численное решение содержит только физическую моду. Если $f_q^{(1)} = \lambda_2 f_q^{(0)}$, то $f_q^{(s)} = \lambda_2^s f_q^{(0)}$, т. е. численное решение является ложным, так как содержит только вычислительную моду.

Вычислительное начальное условие может быть получено приближенно с помощью двухуровневой схемы. Это решение может содержать вычислительную моду. От выбора вычислительного начального условия во многом зависит характер численного решения для трехуровневой схемы. Поскольку $\lambda_2 \rightarrow -1$, то вычислительная мода меняет знак в процессе численного интегрирования. При $s = 0, 2, 4, \dots$ $\lambda_2^s = 1$, а при $s = 1, 3, \dots$ $\lambda_2^s = -1$. Здесь индекс s у λ означает степень.

Вычислительная мода представляет собой источник ошибок для численного решения и ее необходимо подавлять.

Неявная схема направленных разностей

Рассмотрим согласованную неявную схему первого порядка точности $O(\Delta t, \Delta r)$ — с разностью по пространству «против потока»:

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\Delta t} + c \frac{f_q^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}}{\Delta r} = 0 \quad (c > 0). \quad (8.11)$$

Для этой схемы

$$|\lambda| = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\mu(1 + \mu)(1 - \cos m \Delta r)}} < 1 \quad \left(\mu = c \frac{\Delta t}{\Delta r}\right)$$

при любых значениях Δt и Δr . Следовательно, схема (8.11) абсолютно устойчива и диссипативна. Схеме (8.11) свойственна вычислительная вязкость.

Неявная схема трапеций

Неявная двухуровневая схема трапеций второго порядка — $O(\Delta t^2, \Delta r^2)$ — записывается в виде

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\Delta t} + c \frac{1}{2} \left(\frac{f_{q+1}^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}}{2\Delta r} + \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\Delta r} \right) = 0. \quad (8.12)$$

Эта схема называется схемой Кранка — Николсона. Поскольку

$$f_{q+1}^s - f_{q-1}^s = 2i \sin m \Delta r A^s e^{imq\Delta r}, \quad f_{q+1}^{s+1} - f_{q-1}^{s+1} = 2i \sin m \Delta r A^{s+1} e^{imq\Delta r},$$

$$f_q^{s+1} - f_q^s = e^{imq\Delta r} (A^{s+1} - A^s),$$

то

$$|A^{s+1}| = |\lambda| |A^s|,$$

где

$$\lambda = \frac{1 - i \frac{c \Delta t}{2 \Delta r} \sin m \Delta r}{1 + i \frac{c \Delta t}{2 \Delta r} \sin m \Delta r},$$

$$|\lambda| = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{c \Delta t}{2 \Delta r}\right)^2 \sin^2 m \Delta r}}{\sqrt{1 + \left(\frac{c \Delta t}{2 \Delta r}\right)^2 \sin^2 m \Delta r}} = 1.$$

Следовательно, неявная схема трапеций нейтральна и абсолютно устойчива при любых Δt и Δr . Эта схема свободна от эффекта вычислительной вязкости.

Двухтактная схема Мацуно (Эйлера с пересчетом)

Согласованная двухтактная схема Мацуно первого порядка точности по Δt и второго по Δr ($O(\Delta t, (\Delta r)^2)$) состоит из схем предиктора

$$f_q^{s+1(*)} = f_q^s - c \frac{\Delta t}{2 \Delta r} (f_{q+1}^s - f_{q-1}^s)$$

и корректора

$$f_q^{s+1} = f_q^s - c \frac{\Delta t}{2 \Delta r} (f_{q+1}^{s+1(*)} - f_{q-1}^{s+1(*)}). \quad (8.13)$$

Подставляя в схемы (8.13) решение (8.3) и сокращая результат на $e^{imq\Delta r}$, находим:

$$A^{s+1} (*) = A^s - c \frac{\Delta t}{2\Delta r} A^s (e^{im\Delta r} - e^{-im\Delta r}),$$

$$A^{s+1} = A^s - c \frac{\Delta t}{2\Delta r} A^{s+1} (*) (e^{im\Delta r} - e^{-im\Delta r}).$$

Исключим из этих выражений $A^{s+1} (*)$. В результате имеем

$$A^{s+1} = A^s - c \frac{\Delta t}{2\Delta r} \left[A^s - c \frac{\Delta t}{2\Delta r} A^s (e^{im\Delta r} - e^{-im\Delta r}) \right] (e^{im\Delta r} - e^{-im\Delta r}).$$

Используя формулу Эйлера

$$e^{im\Delta r} - e^{-im\Delta r} = 2i \sin m\Delta r,$$

получаем:

$$|A^{s+1}| = |\lambda| |A^s|,$$

где $|\lambda| = \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 m \Delta r + \mu^4 \sin^4 m \Delta r} \leq 1$ при $\mu \frac{c\Delta t}{\Delta r} \leq 1$.

Таким образом, схема Мацуно устойчива при выполнении критерия КФЛ. Если из схемы корректора исключить $f_{q+1}^{s+1} (*)$ и $f_{q-1}^{s+1} (*)$ с помощью схемы предиктора, записав ее для точек $q+1$ и $q-1$, то получим:

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\Delta t} = -c \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\Delta r} + c^2 \frac{\Delta t}{(2\Delta r)^2} (f_{q+2}^s + f_{q-2}^s - 2f_q^s).$$

Последний член полученной схемы при $\Delta t \neq 0$, $\Delta r \rightarrow 0$ стремится к $c^2 \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$, т. е. описывает эффект счетной вязкости. Поскольку конечно-разностный аналог второй производной $\partial^2 f / \partial r^2$ аппроксимируется с использованием f_{q+2} , f_{q-2} и f_q , т. е. на интервале $4\Delta r$, то вязкость максимально воздействует на волны длиной $4\Delta r$. На волны длиной $2\Delta r$ счетная вязкость не влияет.

Явная схема четвертого порядка точности по пространству

Для линейного уравнения адвекции согласованная явная схема четвертого порядка по Δr и второго порядка по Δt ($O[(\Delta t)^2, (\Delta r)^4]$) имеет вид

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{2\Delta t} = -c \left[\frac{4}{3} \frac{(f_{q+1}^s - f_{q-1}^s)}{2\Delta r} - \frac{1}{3} \frac{(f_{q+2}^s - f_{q-2}^s)}{4\Delta r} \right]. \quad (8.14)$$

При получении этой схемы для представления производной по r использовалась аппроксимация (2.8). Подставив в схему (8.14) решение $f_q^s = A^0 e^{i\sigma s \Delta t} e^{imq\Delta r}$, сократив результат на общий множитель и воспользовавшись формулой Эйлера, получим:

$$\sin \sigma \Delta t = -c \frac{\Delta t}{\Delta r} \left(\frac{4}{3} \sin m \Delta r - \frac{1}{6} \sin 2m \Delta r \right).$$

Поскольку для вещественных σ имеем $\sin \sigma \Delta t \leq 1$, то

$$\left| c \frac{\Delta t}{\Delta r} \left(\frac{4}{3} \sin m \Delta r - \frac{1}{6} \sin 2m \Delta r \right) \right| \leq 1. \quad (8.15)$$

Соотношение (8.15) является условием устойчивости для схемы (8.14). Выясним, какие ограничения следует налагать на $c \frac{\Delta t}{\Delta r}$, чтобы выполнялось условие (8.15). Для этого оценим максимальное значение выражения в круглых скобках условия (8.15). С этой целью продифференцируем его по $m \Delta r$ и приравняем к нулю. В результате имеем

$$\frac{4}{3} \cos m \Delta r - \frac{1}{3} \cos 2m \Delta r = 0.$$

Поскольку

$$\cos 2m \Delta r = 2 \cos^2 m \Delta r - 1,$$

то

$$\frac{4}{3} \cos m \Delta r - \frac{2}{3} \cos^2 m \Delta r + \frac{1}{3} = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получаем:

$$(\cos m \Delta r) = 1 \pm 1,225.$$

Вещественному корню $\cos m \Delta r = -0,225$ соответствует $m \Delta r \approx 103^\circ$. Следовательно,

$$\max \left(\frac{4}{3} \sin m \Delta r - \frac{1}{6} \sin 2m \Delta r \right) = 1,37.$$

С учетом этого на основе (8.15) получаем условие устойчивости для схемы (8.14):

$$\left| c \frac{\Delta t}{\Delta r} \right| \leq 0,73. \quad (8.16)$$

Таким образом, для схемы (8.14) условие устойчивости оказывается более жестким, чем для схем первого и второго порядка по Δr . Из условия (8.16) следует, что для схем четвертого порядка по пространству шаг по времени должен быть примерно на 27 % меньше, чем для схем второго порядка (при одних и тех же c и Δr). В случае применения схемы (8.14) эффект вычислительной вязкости не проявляется.

Схема Лакса — Вендрофа

Явная согласованная схема Лакса — Вендрофа второго порядка точности по Δt и Δr представляет собой совокупность схем:

$$\frac{f_{q+\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} (f_{q+1}^s + f_q^s)}{\Delta t/2} = -c \frac{(f_{q+1}^s - f_q^s)}{\Delta r}.$$

$$\frac{f_{q-\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(f_q^s + f_{q-1}^s)}{\Delta t/2} = -c \frac{(f_q^s - f_{q-1}^s)}{\Delta r}, \quad (8.17)$$

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\Delta t} = -c \frac{\left(f_{q+\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}} - f_{q-\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}} \right)}{\Delta r}. \quad (8.18)$$

Определив $f_{q+\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}}$ и $f_{q-\frac{1}{2}}^{s+\frac{1}{2}}$ с помощью (8.17) и подставив их в (8.18), получим:

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\Delta t} = -c \frac{(f_{q+1}^s - f_{q-1}^s)}{2\Delta r} + \frac{1}{2} c^2 \Delta t \frac{(f_{q+1}^s + f_{q-1}^s - 2f_q^s)}{(\Delta r)^2}. \quad (8.19)$$

При $\Delta t \neq 0$, $\Delta r \rightarrow 0$ последний член в правой части (8.19) стремится к $\frac{1}{2} c^2 \Delta t \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$. Следовательно, этот член описывает эффект вычислительной вязкости. Этот эффект аппроксимируется на интервале $2\Delta r$ (в конечно-разностном аналоге второй производной используются f_{q+1} , f_{q-1} и f_q) и поэтому максимально подавляет волны длиной $2\Delta r$, которые нельзя правильно представить на сетке. Это важное свойство схемы Лакса — Вендрофа используется для демпфирования коротких волн в процессе численного интегрирования уравнений гидротермодинамики.

Подстановка в (8.19) точного решения уравнения адвекции

$$f_q^s = A^s e^{imq\Delta r}$$

приводит к выражению

$$A^{s+1} = \lambda A^s,$$

где

$$\lambda = 1 + \mu^2 (\cos m \Delta r - 1) - i\mu \sin m \Delta r, \quad \mu = c \frac{\Delta t}{\Delta r}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \cos m \Delta r - 1 &= -2 \sin^2 \frac{m \Delta r}{2}, \\ \sin m \Delta r &= 2 \sin \frac{m \Delta r}{2} \cos \frac{m \Delta r}{2}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 - 2\mu^2 \sin^2 \frac{m \Delta r}{2} - 2i\mu \sin \frac{m \Delta r}{2} \cos \frac{m \Delta r}{2}, \\ |\lambda| &= \sqrt{\left(1 - 2\mu^2 \sin^2 \frac{m \Delta r}{2}\right)^2 + 4\mu^2 \sin^2 \frac{m \Delta r}{2} \cos^2 \frac{m \Delta r}{2}} = \\ &= \sqrt{1 - 4\mu^2 (1 - \mu^2) \sin^4 \frac{m \Delta r}{2}}. \end{aligned}$$

При $1 - \mu^2 \geq 0$ $|\lambda| \leq 1$. Следовательно, условие устойчивости можно записать в виде

$$|c| \frac{\Delta t}{\Delta r} \leq 1.$$

При $|c| \frac{\Delta t}{\Delta r} < 1$ схема Лакса — Вендрофа диссипативна. Анализ производной $\frac{d|\lambda|}{d\mu}$ показывает, что кривые $|\lambda| = f(\mu)$, имеют минимум при $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Если длина волн увеличивается начиная от $2\Delta r$ до бесконечности, то $|\lambda|$ возрастает от 0 до 1, т. е. диссипативность схемы уменьшается по мере увеличения длин волн.

*Схема центральных разностей
для двухмерного уравнения адвекции*

Двухмерное линейное уравнение адвекции имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad (8.20)$$

где $f(x, y, t)$; u, v — составляющие двумерного вектора скорости $c(u, v)$; $c = \sqrt{u^2 + v^2}$, $u = \text{const}$, $v = \text{const}$. Полагая $n = x/\Delta x$, $j = y/\Delta y$, $s = t/\Delta t$, запишем согласованную конечно-разностную схему центральных разностей для уравнения (8.20):

$$f_{n,j}^{s+1} = f_{n,j}^{s-1} - u \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{n+1,j}^s - f_{n-1,j}^s) - v \frac{\Delta t}{\Delta y} (f_{n,j+1}^s - f_{n,j-1}^s). \quad (8.21)$$

Эта схема не диссипативна и имеет второй порядок точности по всем независимым переменным: $O[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2, (\Delta t)^2]$. Точное решение уравнения (8.20) в дискретной форме имеет вид

$$f_{n,j}^s = A^0 e^{i\sigma s \Delta t} e^{i(mn \Delta x + pj \Delta y)},$$

где $p = 2\pi/L_y$ — волновое число, L_y — проекция волны на ось y .

Подставим это решение в конечно-разностную схему (8.21). Сократив полученное выражение на $f_{n,j}^s$, находим:

$$e^{i\sigma \Delta t} - e^{-i\sigma \Delta t} = -\frac{u}{\Delta x} \frac{e^{im \Delta x} - e^{-im \Delta x}}{\Delta x} - \\ - v \frac{\Delta t}{\Delta y} (e^{ip \Delta y} - e^{-ip \Delta y}).$$

Учитывая, что $e^{ip} - e^{-ip} = 2i \sin p$, имеем:

$$2i \sin \sigma \Delta t = -2i \Delta t \left(\frac{u}{\Delta x} \sin m \Delta x + \frac{v}{\Delta y} \sin p \Delta y \right),$$

или

$$\sin \sigma \Delta t = -\Delta t \left(\frac{u}{\Delta x} \sin m \Delta x + \frac{v}{\Delta y} \sin p \Delta y \right).$$

Поскольку $|\sin \sigma \Delta t| \leq 1$, то необходимо, чтобы

$$\left| \Delta t \left(\frac{u}{\Delta x} \sin m \Delta x + \frac{v}{\Delta y} \sin p \Delta y \right) \right| \leq 1. \quad (8.22)$$

Это условие должно выполняться для любых допустимых m и p . Максимального значения выражение в круглых скобках достигает при $\sin m \Delta x = \sin p \Delta y = 1$. Поскольку $u = c \cos \alpha$, $v = c \sin \alpha$ (α — угол между осью x и направлением вектора скорости c), то условие (8.22) при $\Delta x = \Delta y = \Delta r$ можно переписать в виде

$$c \frac{\Delta t}{\Delta r} |(\cos \alpha \sin m \Delta r + \sin \alpha \sin p \Delta r)| \leq 1.$$

При $\sin m \Delta r = \sin p \Delta r = 1$ максимум для $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2}$ будет иметь место при $\alpha = \pi/4$.

Таким образом, условие устойчивости для рассматриваемой схемы будет иметь вид

$$\frac{\sqrt{2} c \Delta t}{\Delta r} \leq 1, \text{ или } c \Delta t \leq 0,707 \Delta r.$$

Это означает, что для двумерного уравнения адвекции максимальное значение Δt должно быть почти на 30 % меньше, чем для одномерного.

2.8.2. Уравнение колебаний

Уравнение колебаний

$$\frac{dA}{dt} = i\sigma A \quad (8.23)$$

используется для изучения волновых процессов. Оценки свойств конечно-разностных схем для этого уравнения, в частности устойчивости, представляют интерес и используются при разработке методов численного интегрирования более сложных уравнений.

Точное решение уравнения колебаний имеет вид

$$A(t) = A(0) e^{i\sigma t}.$$

Для дискретного времени $s = t/\Delta t$

$$A^s = A^0 e^{i\sigma s \Delta t}. \quad (8.24)$$

Геометрический смысл решения (8.24) состоит в том, что в комплексной плоскости модуль комплексного числа (A^0) постоянен; а аргумент ($\sigma s \Delta t$) изменяется на угол $\theta = \sigma \Delta t$ за шаг по времени. В точном решении амплитуда колебаний не изменяется. В численном решении амплитуда может изменяться в зависимости от величины $|\lambda|$.

Двухуровневные конечно-разностные схемы

Запишем конечно-разностную схему для уравнения колебаний в следующем общем виде:

$$A^{s+1} = A^s + i\theta (\alpha A^s + \beta A^{s+1}), \quad (8.25)$$

где $\theta \leftarrow \sigma \Delta t$, $\alpha + \beta = 1$.

При $\alpha = 1$, $\beta = 0$ получается явная схема с направленной вперед разностью по времени; при $\alpha = 0$, $\beta = 1$ — неявная схема с направленной назад разностью по времени; при $\alpha = \beta = 1/2$ — неявная схема трапеций.

Разрешив уравнение (8.25) относительно A^{s+1} , получим:

$$A^{s+1} = \frac{1 + i\alpha\theta}{1 - i\beta\theta} A^s,$$

или

$$A^{s+1} = \lambda A^s,$$

где

$$\lambda = \frac{1 + i\alpha\theta}{1 - i\beta\theta}.$$

Для явной схемы ($\alpha = 1$, $\beta = 0$)

$$|\lambda| = \sqrt{1 + \theta^2} > 1,$$

для неявной схемы ($\alpha = 0$, $\beta = 1$)

$$|\lambda| = \sqrt{\frac{1}{1 + \theta^2}} < 1,$$

для неявной схемы трапеций ($\alpha = \beta = 1/2$)

$$|\lambda| = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{4}\theta^2}{1 + \frac{1}{4}\theta^2}} = 1.$$

Следовательно, явная схема неустойчива, неявная схема устойчива и диссипативна, а неявная схема трапеций нейтральна. Причем неявная схема с направленной назад разностью и неявная схема трапеций абсолютно устойчивы независимо от величины шага по времени.

Диссипативность неявной схемы увеличивается с ростом частоты колебаний σ и шага по времени Δt (т. е. $\theta = \sigma \Delta t$). Это свойство неявной схемы может использоваться для селективного подавления амплитуд высокочастотных колебаний.

Схемы Мацуно и Хойна

Эти схемы можно записать в общем виде

$$A^{s+1, (*)} = A^s + i\theta A^s,$$

$$A^{s+1} = A^s + i\theta (\alpha A^s + \beta A^{s+1, (*)}), \quad (8.26)$$

где $\alpha + \beta = 1$.

При $\alpha = 0$, $\beta = 1$ имеем схему Мацуно; при $\alpha = \beta = 1/2$ — схему Хойна. Подставив первое уравнение (8.26) во второе, получим:

$$A^{s+1} = \lambda A^s,$$

где

$$\lambda = 1 - \beta\theta^2 + i\theta.$$

Для схемы Мацуно ($\beta = 1$)

$$\lambda = 1 - \theta^2 + i\theta, \quad |\lambda| = \sqrt{1 - \theta^2 + \theta^4} \leq 1 \quad \text{при } \theta \leq 1.$$

Таким образом, схема Мацуно условно устойчива при $\Delta t \ll T$, т. е. в том случае, если шаг по времени достаточно мал по сравнению с периодом колебаний. Чем больше частота, тем меньше должен быть шаг по времени. Дифференцируя выражение для $|\lambda|$ по θ , находим:

$$\frac{d|\lambda|}{d\theta} = \frac{\theta(2\theta^2 - 1)}{\sqrt{1 - \theta^2 + \theta^4}}.$$

Минимум для $|\lambda|$ имеет место при $d|\lambda|/d\theta = 0$. В этом случае $2\theta^2 - 1 = 0$, т. е. $\theta = 1/\sqrt{2}$. Следовательно, $|\lambda|$ имеет минимум при $\theta = 1/\sqrt{2}$.

Если выбрать шаг по времени так, чтобы $0 < \theta < 1/\sqrt{2}$ для всех рассматриваемых частот (σ), то для высокочастотных колебаний $|\lambda|$ будет малым. В связи с этим амплитуды высокочастотных колебаний будут подавляться. Это свойство схемы Мацуно используется при подготовке начальных данных для прогностических моделей, основанных на полных уравнениях, методом динамического согласования полей.

Для схемы Хойна

$$\lambda = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + i\theta, \quad |\lambda| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\theta^4} > 1.$$

Схема всегда неустойчива, однако для малых θ (малых Δt) неустойчивость слабая.

Схема центральных разностей. Вычислительные моды

Рассмотрим трехуровневую схему центральных разностей для уравнения колебаний

$$A^{s+1} = A^{s-1} + 2i\theta A^s. \quad (8.27)$$

Так же как в случае рассмотренной выше схемы центральных разностей для уравнения адвекции, для применения этой схемы необходимо использовать два начальных условия: A^0 и A^1 . В то же время для дифференциального уравнения колебаний достаточно одного начального условия A^0 . Необходимость привлечения начального условия A^1 обусловлена структурой схемы (8.27). Начальное условие A^0 называется физическим, а начальное условие A^1 — вычислительным. Условие A^1 (при $s = 1$) не может быть получено с помощью схемы (8.27). Для получения A^1 необходимо применять двухуровневые схемы.

Амплитуды на двух уровнях по времени связаны соотношением $A^{s+1} = \lambda A^s$. Для схемы (8.27) следует записать:

$$A^{(s)} = \lambda A^{(s-1)}, \quad A^{(s+1)} = \lambda^2 A^{(s-1)}.$$

Если подставить эти соотношения в схему (8.27), то получим квадратное уравнение для λ :

$$\lambda^2 - 2i\theta\lambda - 1 = 0,$$

которое имеет два корня:

$$\lambda_1 = i\theta + \sqrt{1 - \theta^2}, \quad \lambda_2 = i\theta - \sqrt{1 - \theta^2}$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ ($\theta \rightarrow 0$) $\lambda_1 \rightarrow 1$, $\lambda_2 \rightarrow -1$.

Численное решение, соответствующее λ_1 , стремится к точному и представляет собой физическую моду. Численное решение, соответствующее λ_2 , представляет собой вычислительную моду.

Поскольку $|\lambda_1| = 1$, $|\lambda_2| = 1$, то обе моды нейтральны. Вычислительная мода знакопеременна, т. е. осциллирует, так как

$$A_2^{(s)} = \lambda_2^s A^{(0)} \quad \text{при} \quad \lambda_2 < 0.$$

Линейная комбинация этих мод также является решением уравнения (8.27). Возникающие при этом вопросы аналогичны тем, которые обсуждались в связи с уравнением (8.10).

2.8.3. Уравнение трения

Исследования устойчивости конечно-разностных схем для уравнения трения, которое описывает поведение амплитуд в решении уравнения диффузии, позволяют получить практические рекомендации по вопросам численного интегрирования уравнений гидротермодинамики в тех случаях, когда предполагается учет вязких и диффузионных членов.

Уравнение трения

$$\frac{dA}{dt} = -kA, \quad k > 0 \quad (8.28)$$

имеет точное решение

$$A(t) = A(0)e^{-kt}.$$

Для дискретного времени $s = t/\Delta t$

$$A^s = A^0 e^{-ks \Delta t}. \quad (8.29)$$

Двухуровневные конечно-разностные схемы

Двухуровневную конечно-разностную схему для уравнения (8.29) запишем в общем виде:

$$A^{s+1} = A^s - k \Delta t (\alpha A^s + \beta A^{s+1}), \quad (8.30)$$

где $\alpha + \beta = 1$.

На основе (8.30) имеем

$$A^{s+1} = \lambda A^s,$$

где

$$\lambda = \frac{1 - \alpha k \Delta t}{1 + \beta k \Delta t}.$$

Явная схема ($\alpha = 1, \beta = 0$) при $k \Delta t < 1$ устойчива, так как в этом случае $\lambda = 1 - k \Delta t < 1$. Если $k \Delta t > 1$, то $\lambda < 0$ и решение будет осциллировать. При $k \Delta t > 2$ решение будет неустойчивым и осциллирующим, так как $\lambda < 0, |\lambda| > 1$.

Неявная схема ($\alpha = 0, \beta = 1$) абсолютно устойчива, так как $\lambda < 1$ при любых $k \Delta t$.

Неявная схема трапеций ($\alpha = 1/2, \beta = 1/2$) также устойчива, так как $\lambda < 1$. При $k \Delta t > 2$ решение осциллирует.

Схемы Мацуно и Хойна

Схемы Мацуно и Хойна для уравнения (8.28) запишем в общем виде:

$$A^{s+1}(\bullet) = A^s - k \Delta t A^s,$$

$$A^{s+1} = A^s - k \Delta t (\alpha A^s + \beta A^{s+1}(\bullet)), \quad (8.31)$$

где $\alpha + \beta = 1$.

При $\alpha = 0, \beta = 1$ имеем схему Мацуно; при $\alpha = \beta = 1/2$ — схему Хойна. Исключая из схем (8.31) $A^{s+1}(\bullet)$, получаем:

$$A^{s+1} = \lambda A^s,$$

где

$$\lambda = 1 - k \Delta t + \beta (k \Delta t)^2.$$

При $k \Delta t < 1$ схемы Мацуно и Хойна устойчивы. При $k \Delta t = 2$ схема Мацуно неустойчива ($\lambda > 1$), а схема Хойна нейтральна ($\lambda = 1$).

Схема центральных разностей. Вычислительные моды

Трехуровневая схема центральных разностей для уравнения (8.28) имеет вид

$$A^{s+1} = A^{s-1} - 2k \Delta t A^{s, S} \quad (8.32)$$

Подставляя в схему (8.32) соотношения

$$A^s = \lambda A^{s-1}, \quad A^{s+1} = \lambda A^s,$$

получаем квадратное уравнение для λ :

$$\lambda^2 + 2k \Delta t \lambda - 1 = 0,$$

корни которого имеют вид

$$\lambda_1 = -k \Delta t + \sqrt{1 + (k \Delta t)^2}, \quad \lambda_2 = -k \Delta t - \sqrt{1 + (k \Delta t)^2}.$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ имеем $\lambda_1 \rightarrow 1, \lambda_2 \rightarrow -1$.

Решение, соответствующее λ_1 , представляет собой физическую моду, а решение, соответствующее λ_2 , — вычислительную моду. Поскольку $k \Delta t > 0$, то $\lambda_2 < -1$, а поэтому вычислительная мода $A_2^{(s)} = \lambda_2^s A^{(0)}$ (индекс s у λ означает степень) всегда неустойчива и

осциллирует. С увеличением s вычислительная мода быстро растет. Физическая мода устойчива, так как $1 > \lambda_1 > 0$, но с увеличением $k \Delta t$ $\lambda_1 \rightarrow 0$.

Учитывая эти свойства схемы центральных разностей, можно сделать вывод о нецелесообразности применения ее для тех членов уравнений, с помощью которых описываются вязкость, диффузия или трение.

Схема Адамса—Бешфорта

Схема Адамса—Бешфорта для уравнения трения записывается в виде

$$A^{s+1} = A^s - k \Delta t \left(\frac{3}{2} A^s - \frac{1}{2} A^{s-1} \right). \quad (8.33)$$

Подставляя в схему (8.33) соотношения, связывающие решения на соседних уровнях по времени:

$$A^{s+1} = \lambda A^s, \quad A^s = \lambda A^{s-1},$$

получаем квадратное уравнение для λ , корни которого описываются выражениями

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2} k \Delta t + \sqrt{1 - k \Delta t + \frac{9}{4} (k \Delta t)^2} \right),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2} k \Delta t - \sqrt{1 - k \Delta t + \frac{9}{4} (k \Delta t)^2} \right).$$

При $k \Delta t \ll 1$ обе моды устойчивы (схема диссипативна), причем вычислительная мода подавляется сильнее. Следовательно, схему Адамса—Бешфорта можно применять для тех членов уравнений, с помощью которых учитываются диффузия, вязкость и трение.

2.8.4. Ошибки ложного представления.

Нелинейная вычислительная неустойчивость

Выше были рассмотрены вопросы, связанные с построением конечно-разностных схем для линейных уравнений адвекции, колебаний и трения. Однако в прогностических моделях приходится иметь дело с нелинейными уравнениями, причем нелинейность уравнений гидродинамики обусловлена наличием членов, описывающих адвекцию.

Для нелинейных уравнений исследование конечно-разностных схем, в частности вычислительной устойчивости, представляет большие трудности и может быть выполнено лишь для некоторых простых случаев. Обычно при разработке конечно-разностных схем для нелинейных уравнений исследуется устойчивость их линеаризованных аналогов. Устойчивость для линеаризованных аналогов является необходимым, но недостаточным условием устойчивости для нелинейных уравнений, так как не всегда устойчивая схема для линейного уравнения будет устойчивой для соответствующего не-

линейного уравнения. Неустойчивая схема для линейного уравнения неустойчива и для нелинейного уравнения. В связи с этим многие результаты и выводы, полученные для линейных уравнений, сохраняют свое значение и могут быть полезны при разработке конечно-разностных схем для нелинейных уравнений.

Впервые явление, которое получило название нелинейной вычислительной неустойчивости, было обнаружено Филлипсом при численном моделировании общей циркуляции атмосферы. Этот вид неустойчивости проявился в виде резкого увеличения энергии моделируемой среды. Последующий анализ результатов моделирования позволил Филлипсу выявить причину этого явления. Оказалось, что причиной послужили особого рода ошибки, которые появляются при численном интегрировании нелинейных уравнений.

Рассмотрим на примере нелинейного уравнения адвекции

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u = u(x, t), \quad (8.34)$$

эффекты, обусловленные нелинейностью. Здесь под $u(x, t)$ понимается составляющая вектора скорости вдоль оси x . При использовании метода конечных разностей возникают трудности с представлением коротких волн на сетке точек. Так, волны, длина которых менее $2\Delta x$, т. е. волновое число которых превышает $m_{\max} = \pi/\Delta x$, невозможно представить на сетке.

Допустим, что функция $u(x, t)$ представляет собой синусоиду:

$$u(x, t) = A(t) \sin mx, \quad (8.35)$$

которая может быть представлена на сетке, т. е.

$$m < m_{\max} \quad \left(m = \frac{2\pi}{L_x}, \quad L_x > 2\Delta x \right).$$

Подставляя (8.35) в нелинейный член уравнения (8.34), получаем:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = A^2(t) m \sin mx \cos mx = \frac{A^2(t)}{2} m \sin m'x, \quad (8.36)$$

где $m' = 2m$.

Таким образом, за счет нелинейности появилась волна с волновым числом $m' = \frac{2\pi}{L_x/2}$ (длиной $\frac{L_x}{2}$). Процесс, который описывается нелинейными членами (в рассматриваемом случае произведением волновых компонент), называется нелинейным взаимодействием.

Если для волны, представленной формулой (8.35), волновое число m в начальный момент времени удовлетворяло неравенству $\frac{1}{2}m_{\max} < m \leq m_{\max}$, то в процессе интегрирования уравнения (8.34) за счет нелинейности может возникнуть волна с волновым числом $m > m_{\max}$, которая не может быть представлена на сетке. При этом могут появляться такие волны, которые на сетке могут быть интерпретированы как более длинные. Например, если появляется волна $L_x = 4/3\Delta x$, то она может быть ошибочно принята за волну, $L_x = 4\Delta x$ (рис. 2.3).

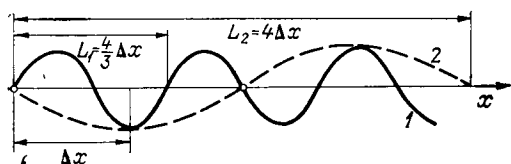


Рис. 2.3. Ошибочное представление волны $L_x = \frac{4}{3} \Delta x$ (1) волной $L = 4 \Delta x$ (2).

Такого рода ошибки можно назвать ошибками ложного представления (aliasing error).

Покажем на примере ложное представление волны с волновым числом m' , появляющейся за счет нелинейного взаимодействия. Запишем тождество

$$\sin m'x = \sin [2m_{\max} - (2m_{\max} - m')]x, \quad m_{\max} = \frac{\pi}{\Delta x}.$$

Учитывая, что $x = n \Delta x$, и применяя формулу для синуса разности, получаем:

$$\begin{aligned} \sin m'x &= \sin m'n \Delta x \equiv \sin \frac{2\pi}{\Delta x} n \Delta x \cos \left(\frac{2\pi}{\Delta x} - m' \right) n \Delta x - \\ &- \cos \frac{2\pi}{\Delta x} n \Delta x \sin \left(\frac{2\pi}{\Delta x} - m' \right) n \Delta x. \end{aligned}$$

Однако

$$\sin \frac{2\pi}{\Delta x} n \Delta x = 0, \quad \cos \frac{2\pi}{\Delta x} n \Delta x = 1,$$

а поэтому

$$\sin m'n \Delta x = -\sin (2m_{\max} - m') n \Delta x.$$

Таким образом, нельзя отличить волну с волновым числом m' от волны с волновым числом $2m_{\max} - m'$. Следовательно, если $m' > m_{\max}$, то волна с волновым числом m' на дискретной сетке точек будет ложно представляться как волна с волновым числом $m^* = 2m_{\max} - m'$.

На рис. 2.4 показано ложное представление волны с волновым числом $m' > m_{\max}$ более длинной волной с волновым числом $2m_{\max} - m'$.

Если $m' = \frac{2\pi}{4/3 \Delta x}$, то $m^* = \frac{2\pi}{4 \Delta x}$, т. е. волна $L'_x = 4/3 \Delta x$ ложно представляется волной $L_x^* = 4 \Delta x$, что и показано на рис. 2.3.

В процессе численного интегрирования нелинейных уравнений шагами по времени за счет нелинейного взаимодействия постоянно генерируются короткие волны ($L_x < 2\Delta x$), которые не могут быть

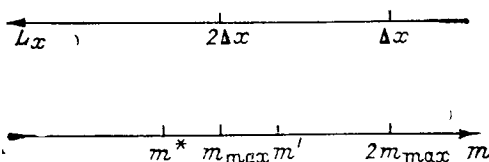


Рис. 2.4. Ложное представление волны с волновым числом $m' > m_{\max}$ волной с волновым числом $m^* = 2m_{\max} - m'$.

правильно представлены на сетке и ошибочно представляются как более длинные. Длины этих волн в основном приходятся на интервал $2\Delta x < L_x < 4\Delta x$. Многократно повторяющееся ложное представление коротких волн может сопровождаться быстрым ростом амплитуды волн в интервале длин $2\Delta x < L_x < 4\Delta x$ и в конечном итоге потерей вычислительной устойчивости. Это явление, обусловленное нелинейностью уравнений и ошибками ложного представления, называется нелинейной неустойчивостью.

Рост амплитуд волн, а следовательно, и энергии соответствующих возмущений за счет ошибок ложного представления обусловлен ложным притоком энергии к возмущениям, волновые числа которых несколько меньше чем $m_{\max}$.

2.8.5. Влияние ошибок на устойчивость численных решений

Вычислительное начальное условие, необходимое для трехуровневых конечно-разностных схем, может быть получено с помощью какой-либо двухуровневой схемы. Поскольку это условие является приближенным, то нет гарантии, что это решение не будет содержать вычислительную моду.

Отсюда следует, что к определению вычислительного начального условия следует подходить весьма осторожно.

По вполне понятным причинам наличие вычислительной моды является нежелательным. Если даже собственное число или множитель перехода вычислительной моды не превышают единицы, то теоретически решение будет устойчивым, но искаженным. Следует также иметь в виду, что искажение решений может быть обусловлено не только вычислительной модой, но возникать также за счет других факторов как физического, так и математического характера, например за счет приближенного учета неадиабатичности процессов или за счет ошибок округления. Эти искажения независимо от их характера могут приводить к потере вычислительной устойчивости, если их влияние будет возрастать с увеличением времени интегрирования.

С точки зрения влияния ошибок на численные решения следует стремиться к тому, чтобы суммарный эффект ошибок был ограниченным при возрастании числа шагов по времени.

Анализ поведения ошибок в процессе численного интегрирования уравнений можно выполнить, поступая так же как при анализе устойчивости решений. Так, если для анализа ошибок использовать матричный метод, то, введя вектор искаженных значений метеовеличин в начальный момент времени $\mathbf{f}'^{(0)}$, в соответствии с выражением (7.12) получим:

$$\mathbf{f}'(s) = B^s \mathbf{f}'^{(0)},$$

где $\mathbf{f}'^{(s)}$ — вектор искаженных значений метеовеличин через s шагов по времени. Через s шагов по времени вектор ошибок определим следующим образом:

$$\mathbf{e}(s) = \mathbf{f}(s) - \mathbf{f}'(s).$$

Тогда

$$\mathbf{e}^{(s)} = B^s \mathbf{e}^{(0)},$$

где $\mathbf{e}^{(0)}$ — вектор ошибок в начальный момент времени.

По аналогии с (7.15) представим вектор ошибок в начальный момент времени $\mathbf{e}^{(0)}$ линейной комбинацией собственных векторов:

$$\mathbf{e}^{(0)} = \sum_k b_k \Phi_k,$$

где b_k — постоянные. Тогда по аналогии с (7.16) получим

$$\mathbf{e}^{(s)} = \sum_k b_k \lambda_k^s \Phi_k,$$

где λ_k^s — собственное число в степени s .

Сравнение последней формулы с формулой (7.16) показывает, что изменения ошибок во времени происходят так же как изменения численного решения. Если λ_k будет больше единицы, то ошибки будут возрастать и решение окажется неустойчивым за счет ошибок. Поэтому при интегрировании уравнений следует предусматривать подавление вычислительных мод и ошибок различной природы введением диффузионных членов, а также применением конечно-разностных схем, селективно подавляющих определенные моды или обладающих вычислительной вязкостью.

Некоторые из рассмотренных выше конечно-разностных схем обладают вычислительной вязкостью или селективно подавляют возмущения с определенными длинами волн.

2.9. Анализ изменений фазы колебаний, фазовых и групповых скоростей. Вычислительная дисперсия

При построении конечно-разностных схем для уравнений гидротермодинамики, описывающих волновые процессы в атмосфере, следует учитывать два главных требования. Во-первых, необходимо, чтобы решения, получаемые с помощью этих схем, правильно воспроизводили изменения амплитуд волн. При этом прежде всего имеется в виду устойчивость решений. Для рассмотренных линейных уравнений правильное воспроизведение изменений амплитуд означает, что амплитуды численных решений должны оставаться неизменными, так как в точных решениях они неизменны. Строго это достигается с помощью нейтральных схем. В тех случаях, когда применение нейтральных схем затруднительно, используют диссипативные схемы. Во-вторых, конечно-разностные схемы должны быть построены так, чтобы правильно описывались изменения фазы колебаний, фазовые и групповые скорости волновых возмущений.

Вопросы, связанные с построением конечно-разностных схем, удовлетворяющих второму требованию, рассмотрим на примере линейных уравнений колебаний и адвекции, для которых известны точные изменения фазы колебаний, фазовые и групповые скорости.

2.9.1. Анализ изменений фазы численных решений для уравнений колебаний

Для уравнения колебаний

$$\frac{dA}{dt} = i\sigma A \quad (9.1)$$

точное решение имеет вид

$$A(t) = A(0) e^{i\sigma t}. \quad (9.2)$$

Для дискретного времени $s = t/\Delta t$

$$A^s = A^0 e^{i\sigma s \Delta t}. \quad (9.3)$$

Геометрическое толкование решения (9.3) состоит в следующем. Модуль комплексной величины A^s , т. е. длина радиуса-вектора A^0 не изменяется. Изменения комплексной величины A^s определяются аргументом $\sigma s \Delta t$. За шаг по времени Δt аргумент изменяется на угол $\theta = \sigma \Delta t$. Это означает, что в комплексной плоскости радиус-вектор длиной A^0 поворачивается против часовой стрелки на угол θ . Угол $s\theta$ называется фазой колебаний, а θ — изменением фазы за шаг по времени (рис. 2.5).

Анализ устойчивости конечно-разностных схем для уравнения (9.1) методом Неймана выполняется с помощью соотношений

$$A^{s+1} = \lambda A^s, \quad A^{s+1} = A^0 e^{i\sigma(s+1)\Delta t},$$

$$A^s = A^0 e^{i\sigma s \Delta t},$$

где $\lambda = e^{i\sigma \Delta t} = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Комплексная величина λ представляется суммой $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$, где $\lambda_R = \cos \theta$ и $\lambda_I = \sin \theta$ — вещественная и мнимая части.

Таким образом, в точном решении $|\lambda| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1$, $\theta = \text{arctg}(\lambda_I/\lambda_R) = \sigma \Delta t$.

Оценим изменения фазы за шаг по времени в численных решениях, полученных с помощью различных конечно-разностных схем. Как будет показано, изменения фазы в численных решениях могут отличаться от θ .

Если изменения фазы за шаг по времени в численном решении обозначить через φ , то свойства конечно-разностных схем удобно характеризовать относительным изменением фазы φ/θ . При $\varphi/\theta = 1$ схемы являются нейтральными по отношению к изменениям фазы, при $\varphi/\theta < 1$ — замедляющими, при $\varphi/\theta > 1$ — ускоряющими.

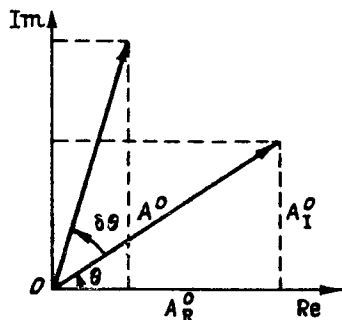


Рис. 2.5. Геометрическая интерпретация решения $A^s = A^0 e^{i\sigma s \Delta t}$.

Re — действительная ось, Im — мнимая.

Явная двухуровневная схема

Для явной схемы

$$A^{s+1} = A^s + i\theta A^s, \quad \lambda = 1 + i\theta, \quad \text{т. е.} \quad \lambda_R = 1, \quad \lambda_I = \theta.$$

Следовательно,

$$\frac{\varphi}{\theta} = \frac{1}{\theta} \operatorname{arctg} \theta.$$

Поскольку $\frac{\operatorname{arctg} \theta}{\theta} < 1$, то $\frac{\varphi}{\theta} < 1$, и, следовательно, явная схема является замедляющей.

Неявная двухуровневная схема

Для неявной схемы

$$A^{s+1} = A^s + i\theta A^{s+1}, \quad \lambda = \frac{1}{1 + \theta^2} (1 + i\theta),$$

т. е. $\lambda_R = \frac{1}{1 + \theta^2}$, $\lambda_I = \frac{\theta}{1 + \theta^2}$. Следовательно, $\frac{\varphi}{\theta} = \frac{1}{\theta} \operatorname{arctg} \theta$, $\frac{\varphi}{\theta} < 1$, т. е. неявная схема также является замедляющей.

Неявная двухуровневная схема трапеций

Для неявной схемы трапеций

$$A^{s+1} = A^s + \frac{i\theta}{2} (A^s + A^{s+1}),$$

$$\lambda = \frac{1}{1 + 1/4 \theta^2} \left(1 - \frac{1}{4} \theta^2 + i\theta \right),$$

т. е. $\lambda_R = \frac{1 - 1/4 \theta^2}{1 + 1/4 \theta^2}$, $\lambda_I = \frac{\theta}{1 + 1/4 \theta^2}$. Следовательно,

$$\frac{\varphi}{\theta} = \frac{1}{\theta} \operatorname{arctg} \frac{\theta}{1 - 1/4 \theta^2}.$$

Здесь не очевидно, чему равен $\operatorname{arctg} \frac{\theta}{1 - 1/4 \theta^2}$. Однако непосредственные оценки величины $\frac{\theta}{1 - 1/4 \theta^2}$ для различных значений $\theta = \sigma \Delta t = (2\pi/T) \Delta t = 2\pi N$ ($N = \Delta t/T$) показывают, что $\varphi/\theta \approx 0,9$ при $N = 1/5$, $\varphi/\theta \approx 0,97$ при $N = 1/100$.

Таким образом, неявная схема трапеций также является замедляющей. Замедление тем больше, чем больше шаг по времени или меньше период колебаний. Для малых значений N ($N < 1/100$) схема трапеций нейтральна ($\varphi/\theta \simeq 1$).

Схемы Мацуно и Хойна

Схемы Мацуно и Хойна можно записать в общем виде:

$$A^{s+1, (*)} = A^s + i\theta A^s, \quad A^{s+1} = A^s + i\theta (\alpha A^s + \beta A^{s+1, (*)}).$$

В схеме Мацуно ($\alpha = 0$, $\beta = 1$)

$$\lambda = 1 - \theta^2 + i\theta, \quad \lambda_R = 1 - \theta^2, \quad \lambda_I = \theta,$$

$$\frac{\varphi}{\theta} = \frac{1}{\theta} \operatorname{arctg} \frac{\theta}{1 - \theta^2}.$$

Вычисление $\operatorname{arctg} \frac{\theta}{1 - \theta^2}$ для малых θ показывают, что $\varphi/\theta > 1$. При $\theta = 1$ ($2\pi \Delta t = T$) $\varphi/\theta = \pi/2 > 1$. Следовательно, схема Мацуно является ускоряющей.

В схеме Хойна ($\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$)

$$\lambda = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + i\theta, \quad \lambda_R = 1 - \frac{1}{2}\theta^2, \quad \lambda_I = \theta,$$

$$\frac{\varphi}{\theta} = \frac{1}{\theta} \operatorname{arctg} \frac{\theta}{1 - \frac{1}{2}\theta^2}.$$

Оценки показывают, что для малых θ ($N < 1/10$) имеем $\varphi/\theta > 1$; при $\theta = 1$ ($2\pi \Delta t = T$) $\varphi/\theta \approx 2$, т. е. схема Хойна также является ускоряющей.

Схема центральных разностей

Для схемы центральных разностей

$$A^{s+1} = A^{s-1} + 2i\theta A^s$$

имеем

$$\lambda_1 = \sqrt{1 - \theta^2} + i\theta, \quad \lambda_2 = -\sqrt{1 - \theta^2} + i\theta,$$

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1,$$

$$\lambda_{1,R} = \sqrt{1 - \theta^2}, \quad \lambda_{1,I} = \theta, \quad \lambda_{2,R} = -\sqrt{1 - \theta^2}, \quad \lambda_{2,I} = \theta.$$

Следовательно,

$$\frac{\varphi_1}{\theta} = \frac{1}{\theta} \operatorname{arctg} \frac{\theta}{\sqrt{1 - \theta^2}}, \quad \frac{\varphi_2}{\theta} = \frac{1}{\theta} \operatorname{arctg} \left(\frac{\theta}{-\sqrt{1 - \theta^2}} \right).$$

При $0 < \theta < 1$: $0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \varphi_2 < \pi$, $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$. При $\theta < 0$, $|\theta| < 1$: $\varphi_2 = -\pi - \varphi_1$.

Таким образом, при $\theta \lesssim 0$ $\varphi_2 = \pm \pi - \varphi_1$. Для малых $\theta < \frac{2\pi}{N}$ ($N = \frac{\Delta t}{T} < 10$) $\frac{\varphi_1}{\theta} > 1$, $\frac{\varphi_2}{\theta} > -1$, т. е. для физической и

вычислительной мод схема является ускоряющей.

Поскольку $\varphi_2 = \pm \pi - \varphi_1$, то $A_1^s = A_1^0 e^{is\varphi_1}$, $A_2^s = A_2^0 e^{is(\pm \pi - \varphi_1)}$.

Если рассматривать поведение физической и вычислительной мод в комплексной плоскости, то за шаг по времени физическая мода поворачивается против часовой стрелки на угол φ_1 , а вычислительная мода — по часовой стрелке на угол φ_2 . При этом угол поворота обеих мод за шаг по времени по абсолютному значению превышает угол $\theta = \sigma \Delta t$ в точном решении.

Таким образом, схема центральных разностей является ускоряющей. Однако ускорение для физической моды в этой схеме оказывается меньшим, чем в схеме Мацуно.

2.9.2. Анализ фазовых и групповых скоростей численных решений для уравнения адвекции. Вычислительная дисперсия

Как было показано, линейному уравнению адвекции

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad c = \text{const} \quad (9.4)$$

удовлетворяет решение

$$f(r, t) = A(t) e^{imr} \quad (9.5)$$

при условии, что

$$\frac{dA}{dt} + imcA = 0. \quad (9.6)$$

Решение уравнения (9.4) может быть записано в форме

$$f(r, t) = A(0) e^{im(r-ct)} = A(0) e^{i(mr-\sigma t)}, \quad (9.7)$$

где $m\sigma = \sigma$ — частота колебаний, c — фазовая скорость.

Таким образом, фазовая скорость c в точном решении уравнения (9.4) постоянна для всех волн

Оценим фазовую и групповую скорости численных решений уравнения (9.4), полученных с помощью некоторых схем.

Схема центральных разностей

Подставим в схему

$$f_q^{s+1} - f_q^{s-1} + c \frac{\Delta t}{\Delta r} (f_{q+1}^s - f_{q-1}^s) = 0 \quad (9.8)$$

точное решение (9.7), записанное для дискретных значений аргументов:

$$f_q^s = A^0 e^{i(mq \Delta r - \sigma s \Delta t)}.$$

Тогда, сократив результат на общий множитель, получим:

$$e^{-i\sigma \Delta t} - e^{i\sigma \Delta t} + c \frac{\Delta t}{\Delta r} (e^{im \Delta r} - e^{-im \Delta r}) = 0,$$

или

$$\sin \sigma \Delta t = c \frac{\Delta t}{\Delta r} \sin m \Delta r.$$

Следовательно,

$$\sigma = \frac{1}{\Delta t} \arcsin \left(c \frac{\Delta t}{\Delta r} \sin m \Delta r \right),$$

$$C_\Phi = \frac{\sigma}{m} = \frac{1}{m \Delta t} \arcsin \left(c \frac{\Delta t}{\Delta r} \sin m \Delta r \right), \quad (9.9)$$

где C_Φ — фазовая скорость численного решения.

При $c \frac{\Delta t}{\Delta r} = 1$ имеем $C_\Phi = \frac{m \Delta r}{m \Delta t} = \frac{\Delta r}{\Delta t} = c$. Таким образом, в этом случае фазовая скорость численного решения равна истинной фазовой скорости.

Используем разложения в ряды $\sin m \Delta r$ и $\arcsin \left(c \frac{\Delta t}{\Delta r} \sin m \Delta r \right)$:

$$\begin{aligned} \sin m \Delta r &\approx m \Delta r - \frac{(m \Delta r)^3}{3!} + \dots \\ \arcsin \left(c \frac{\Delta t}{\Delta r} \sin m \Delta r \right) &\approx c \frac{\Delta t}{\Delta r} \sin m \Delta r + \\ &+ \frac{1}{6} \left(c \frac{\Delta t}{\Delta r} \right)^3 \sin m \Delta r + \dots \\ &\left(c \frac{\Delta t}{\Delta r} \sin m \Delta r < 1 \right). \end{aligned}$$

Подставляя эти разложения в выражение (9.9) для отношения фазовой скорости численного решения к истинной, получаем:

$$\frac{C_\Phi}{c} \approx 1 - \frac{1}{6} \left[1 - \left(c \frac{\Delta t}{\Delta r} \right)^2 \right] (m \Delta r)^2. \quad (9.10)$$

Для обеспечения устойчивости следует положить $c \frac{\Delta t}{\Delta r} \leq 1$.

Из выражения (9.10) следует, что фазовая скорость численного решения за счет конечной разности по времени (член в квадратной скобке) завышается, а за счет конечной разности по пространству $(m \Delta r)^2$ занижается. Отсюда следует, что фазовая скорость численного решения зависит от длины волны (волнового числа).

Чтобы оценить влияние на фазовую скорость только конечно-разностного представления производной по r , запишем уравнение (9.4) в дифференциально-разностной (полудискретной) форме:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{f_{q+1} - f_{q-1}}{2 \Delta r} = 0.$$

Подставив в это уравнение точное решение в полудискретной форме

$$f_q(t) = A(t) e^{imq \Delta r},$$

получим:

$$\frac{dA}{dt} + im \left(c \frac{\sin m \Delta r}{m \Delta r} \right) A = 0. \quad (9.11)$$

В точном решении

$$\frac{dA}{dt} + imcA = 0. \quad (9.12)$$

Сравнивая уравнения (9.11) и (9.12), видим, что за счет конечно-разностного представления производной по r фазовая скорость оказывается зависящей от волнового числа:

$$C_\Phi = c \frac{\sin m \Delta r}{m \Delta r}.$$

Анализ этого выражения показывает, что по мере увеличения $m \Delta r$ начиная от нуля фазовая скорость уменьшается от c до нуля при $m \Delta r = \pi$ ($L = 2 \Delta r$).

Все волны перемещаются с фазовой скоростью, которая меньше, чем истинная фазовая скорость. Замедление волн за счет конечно-разностного представления производной по r возрастает с уменьшением длины волны, а волны длиной $2\Delta r$ оказываются стационарными.

Таким образом, за счет конечно-разностного представления производных волны различной длины распространяются с разными скоростями. Это явление называется вычислительной дисперсией.

Вычислительная дисперсия, наряду с искажениями амплитуд возмущений, является дополнительным источником ошибок численных решений. За счет конечно-разностного представления производных по r искажается также групповая скорость C_r , которая характеризует скорость переноса энергии:

$$C_r = \frac{d\sigma}{dm} = \frac{d(mc)}{dm}.$$

Напомним, что под групповой скоростью понимается скорость распространения волны с максимальной амплитудой, порождаемой суперпозицией группы волн с близкими волновыми числами.

Для точного решения уравнения (9.4) имеем

$$C_r = \frac{d(mc)}{dm} = c,$$

т. е. групповая скорость постоянна и равна истинной фазовой скорости. Для дифференциально-разностного уравнения

$$C_\Phi = c \frac{\sin m \Delta r}{m \Delta r}.$$

Следовательно,

$$C_r = \frac{d}{dm} \left(c \frac{\sin m \Delta r}{\Delta r} \right) = c \cos m \Delta r.$$

Отсюда следует, что групповая скорость C_r уменьшается от c при $m = 0$ до $-c$ при $m = \pi/\Delta r$. При $m \Delta r = \frac{\pi}{2}$ ($L = 4\Delta r$) имеем $C_r = 0$.

Таким образом, энергия волн длиной от $2\Delta r$ до $4\Delta r$, которые плохо представляются на сетках и поэтому воспринимаются в моделях как шумы, может распространяться против потока, искажая процесс переноса энергии. Энергия волн, длина которых превышает $4\Delta r$, переносится в направлении потока, но с заниженными скоростями.

Для оценки влияния на групповую скорость конечно-разностного представления производных по времени и по пространству воспользуемся выражением (9.9). На основе этого выражения получаем

$$C_r = \frac{d\sigma}{dm} = \frac{d(mc_\Phi)}{dm} = \frac{d}{dm} \left[\frac{m \arcsin \left(c \frac{\Delta t}{\Delta r} \sin m \Delta r \right)}{m \Delta t} \right],$$

$$C_r = c \frac{\cos m \Delta r}{\sqrt{1 - \left(c \frac{\Delta t}{\Delta r} \sin m \Delta r \right)^2}}.$$

При $c \frac{\Delta t}{\Delta r} = 1$ $C_r = c$, т. е. процесс переноса энергии описывается правильно для всех волн. Если $c \frac{\Delta t}{\Delta r} < 1$, то для волн длиной $L > 4\Delta r$ групповая скорость сохраняет знак c , но занижается по модулю. Занижение тем меньше, чем длиннее волна. Если $c \frac{\Delta t}{\Delta r} < 1$, то при $L = 4\Delta r$ ($m \Delta r = \pi/2$) $C_r = 0$, при $L = 2\Delta r$ ($m \Delta r = \pi$) $C_r = -c$.

Таким образом, если $c (\Delta t/\Delta r) < 1$, то при представлении производных по пространству и по времени центральными разностями перенос энергии искажается, особенно для волн длиной $\leq 4\Delta r$.

Явная схема четвертого порядка точности по пространству

Рассмотрим конечно-разностную схему второго порядка по Δt : $O(\Delta t^2)$ — и четвертого порядка по Δr : $O(\Delta r^4)$:

$$f_q^{s+1} - f_q^{s-1} + c \frac{\Delta t}{\Delta r} \left[\frac{4}{3} (f_{q+1}^s - f_{q-1}^s) - \frac{1}{6} (f_{q+2}^s - f_{q-2}^s) \right].$$

Для этой схемы после подстановки решения в дискретной форме получим

$$\begin{aligned} \sin \sigma \Delta t &= c \frac{\Delta t}{\Delta r} \left(\frac{4}{3} \sin m \Delta r - \frac{1}{6} \sin 2m \Delta r \right), \\ \sigma &= \frac{1}{\Delta t} \arcsin \left[c \frac{\Delta t}{\Delta r} \left(\frac{4}{3} \sin m \Delta r - \frac{1}{6} \sin 2m \Delta r \right) \right], \\ C_\Phi &= \frac{\sigma}{m} = \frac{1}{m \Delta t} \arcsin \left[c \frac{\Delta t}{\Delta r} \left(\frac{4}{3} \sin m \Delta r - \frac{1}{6} \sin 2m \Delta r \right) \right], \\ C_r &= c \frac{\frac{4}{3} \cos m \Delta r - \frac{1}{3} \cos 2m \Delta r}{\sqrt{1 - \left[c \frac{\Delta t}{\Delta r} \left(\frac{4}{3} \sin m \Delta r - \frac{1}{6} \sin 2m \Delta r \right) \right]^2}}. \end{aligned}$$

Из выражения для C_Φ видно, что самая короткая волна, представляемая на сетке $L = 2\Delta r$ ($m \Delta r = \pi$), стационарна, т. е. для нее $C_\Phi = 0$.

Более длинные волны при удовлетворении критерию устойчивости для этой схемы ($c \Delta t/\Delta r \leq 0,73$) замедляются, но замедление меньше, чем для схемы центральных разностей второго порядка точности. Для волн $L \geq 8\Delta r$ ($m \Delta r \leq \pi/4$) при $0,2 \leq c (\Delta t/\Delta r) \leq 0,4$ фазовые скорости практически равны истинной скорости адвекции ($C_\Phi \approx c$), а при $0,4 \leq c (\Delta t/\Delta r) \leq 0,6$ для $L > 4\Delta r$ имеет место незначительное ускорение ($C_\Phi > c$). Для волн $L > 4\Delta r$ при $0,6 \leq c (\Delta t/\Delta r) \leq 0,8$ также имеет место ускорение, а волны $L = 4\Delta r$ оказываются неустойчивыми.

Таким образом, схема четвертого порядка более правильно описывает перемещение волн $L > 2\Delta r$, чем схема второго порядка. Анализ выражения для C_r показывает, что энергия волн длиной $2\Delta r$ переносится со скоростью $C_r = \frac{5}{3}c$ при любых значениях $c(\Delta t/\Delta r)$. Для других волн ($L > 2\Delta r$) групповая скорость зависит от значений $c(\Delta t/\Delta r)$. При этом следует учитывать, что для обеспечения устойчивости этой схемы значение $c(\Delta t/\Delta r)$ не должно превышать 0,73. Если $c(\Delta t/\Delta r) = 0,7$, то энергия волн длиной $4\Delta r$ переносится со скоростью, близкой к скорости адвекции: т. е. $C_r \approx c$. Энергия волн длиной $L > 6\Delta r$ переносится со скоростью, значительно превышающей скорость адвекции: $C_r \gg c$.

Свойства конечно-разностных схем с точки зрения точности описания фазовых и групповых скоростей называются дисперсионными. Разумеется, при построении конечно-разностных схем для уравнений гидротермодинамики следует стремиться к тому, чтобы они позволяли точно описывать процессы распространения волновых возмущений и их энергии.

Анализ дисперсионных свойств конечно-разностных схем будет продолжен в главе 4 при рассмотрении вопросов, связанных с численным интегрированием полных уравнений.

Рассмотренные конечно-разностные методы применяются для численного интегрирования уравнений гидротермодинамики прогностических моделей, которые будут обсуждаться в последующих главах.

Заметим, однако, что в квазигеострофических и квазисоленидальных моделях возникает необходимость прибегать к решению краевых задач для уравнений Пуассона и Гельмгольца, которые здесь не обсуждались. Вопросы, связанные с решением краевых задач, будут рассматриваться в главе 3.

Квазигеострофические и квазисоленоидальные модели относятся к классу «фильтрованных» моделей, имеющих ряд существенных ограничений, главное из которых — предположение о близости ветра к геострофическому. Прогнозы по этим моделям менее успешны, чем прогнозы по моделям на основе полных уравнений. Однако эти модели предъявляют существенно меньше требований к производительности вычислительных средств и к необходимому информационному обеспечению. Главное же их достоинство в том, что они допускают достаточно ясную синоптическую интерпретацию и качественный анализ факторов, определяющих эволюцию гидрометеорологических полей. На основе таких моделей были построены первые методы гидродинамического прогноза. Указанные обстоятельства позволяют считать целесообразным изучение квазигеострофических и квазисоленоидальных моделей и способов их численной реализации.

В настоящей главе будут рассмотрены баротропные и бароклинные модели атмосферы в квазигеострофическом и квазисоленоидальном приближениях.

Баротропная модель строится на основе уравнения вихря скорости и позволяет осуществлять прогноз геопотенциала одной изобарической поверхности.

Следующим этапом построения прогностических моделей явилась разработка бароклинных моделей атмосферы. В отличие от баротропных моделей, которые не учитывают такого важного погодообразующего фактора, как адвекция температуры, бароклинные модели являются многоуровненными. Эти модели допускают интерпретацию трехмерной структуры атмосферы и влияния различных факторов на изменение полей давления, ветра, температуры, вертикальных движений в атмосфере и др.

3.1. Баротропная квазигеострофическая модель

3.1.1. Баротропное уравнение вихря скорости

В квазигеострофических моделях одним из основных прогностических уравнений является уравнение вихря скорости. Вывод его дан в главе 1.

В изобарической системе координат без учета диссипативных сил это уравнение запишется в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial x} + v \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial y} + \tau \frac{\partial \Omega}{\partial p} = \\ = - (l + \Omega) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial \tau}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $\Omega = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$ — вертикальная составляющая относительного вихря скорости, u и v составляющие скорости ветра по осям x и y , $\tau = dp/dt$ — вертикальная скорость в изобарической системе координат, $l = 2\omega \sin \varphi$ — параметр Кориолиса.

После оценки порядка членов уравнение (1.1) с учетом главных членов может быть записано в виде

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial x} + v \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial y} = -l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (1.2)$$

Из уравнения неразрывности получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial \tau}{\partial p}. \quad (1.3)$$

С учетом (1.3) имеем

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial x} + v \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial y} = l \frac{\partial \tau}{\partial p}. \quad (1.4)$$

Представим далее скорость фактического ветра в виде суммы скорости геострофического ветра (точнее той части скорости фактического ветра, которая удовлетворяет геострофическому соотношению) и отклонения ветра от геострофического:

$$\begin{aligned} u &= u_g + u'; \quad v = v_g + v', \\ u_g &= -\frac{g}{l} \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ v_g &= \frac{g}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь z — высота изобарической поверхности $p = \text{const}$, $\Phi = gz$ — геопотенциал, u' и v' — составляющие отклонения ветра от геострофического по осям x и y .

Кроме того, с ошибкой в 10—20 % имеем

$$|u'| \ll |u_g|; \quad |v'| \ll |u_g|.$$

Тогда формула для вертикальной составляющей относительного вихря скорости может быть записана в виде,

$$\begin{aligned} \Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{g}{l} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} - \\ - \frac{g}{l} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{l_x}{l} - \frac{g}{l} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{l_y}{l}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $l_x = dl/dx$, $l_y = \partial l/\partial y$.

Оценив порядок входящих в формулу (1.6) членов, нетрудно показать, что

$$\Omega \approx \frac{g}{l} \nabla^2 z = \frac{1}{l} \nabla^2 \Phi, \quad (1.7)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — двумерный оператор Лапласа.

Уравнение вихря скорости (1.4) в квазигеострофическом приближении может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \frac{g}{l} \nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{g}{l} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{g}{l} \nabla^2 z + \frac{g}{l} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{g}{l} \nabla^2 z - \\ - \frac{g}{l} \frac{\partial z}{\partial y} l_x + \frac{g}{l} \frac{\partial z}{\partial x} l_y = l \frac{\partial \tau}{\partial p}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Из простых физических соображений очевидно, что вертикальная скорость на нижней и верхней границах атмосферы близка к нулю или в точности равна нулю и достигает на некотором уровне в атмосфере экстремального значения. На этом уровне $\partial \tau / \partial p = 0$, что соответствует условию равенства нулю горизонтальной дивергенции скорости. Анализ поля вертикальных скоростей показывает, что в среднем действительно вблизи поверхности 600 гПа вертикальная скорость достигает своего экстремума. В связи с этим для указанного уровня уравнение (1.8) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{g}{l} \nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} = - \frac{g}{l} \left[\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{g}{l} \nabla^2 z - \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{g}{l} \nabla^2 z \right] + \\ + \frac{g}{l} \frac{\partial z}{\partial y} l_x - \frac{g}{l} \frac{\partial z}{\partial x} l_y. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Обозначим правую часть уравнения (1.9) через $A_g = A_g(x, y)$. Тогда, умножив (1.9) на l и введя g под знак дифференцирования, с учетом того, что $\Phi = gz$, получим:

$$\nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = l A_g. \quad (1.10)$$

Здесь

$$A_g = - \frac{1}{l} \left(\Phi, \frac{\nabla^2 \Phi}{l} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} l_x - \frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x} l_y,$$

а выражение в скобках представляет собой якобиан:

$$(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (1.11)$$

Тенденцию геопотенциала $\partial \Phi / \partial t$ обозначим через q . Тогда уравнение (1.10) будет иметь следующий вид

$$\nabla^2 q = l A_g. \quad (1.12)$$

Уравнение (1.12) является уравнением Пуассона относительно тенденции геопотенциала q .

Уравнение (1.9), как и уравнение (1.12), называют квазигеострофическим баротропным уравнением вихря скорости. Уровень же

вблизи поверхности 600 гПа, для которого это уравнение справедливо, называют средним, эквивалентно-баротропным или бездивергентным уровнем. Обычно в качестве бездивергентного уровня принимают изобарические поверхности 500 или 700 гПа.

Для любого другого уровня, где $\partial\tau/\partial p \neq 0$, уравнение вихря скорости с учетом введенных обозначений может быть записано следующим образом:

$$\nabla^2 \frac{\partial\Phi}{\partial t} = lA_g + l^2 \frac{\partial\tau}{\partial p}. \quad (1.13)$$

Если направить ось x на восток, а ось y на север, то параметр Кориолиса будет зависеть только от y ($l_x = \partial l/\partial x = 0$). Тогда правая часть баротропного уравнения вихря скорости примет следующий вид:

$$A_g = -\frac{1}{l} \left(\Phi, \frac{\nabla^2 \Phi}{l} \right) - \frac{\beta}{l} \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad (1.14)$$

где $\beta = l_y$. Прогностические модели, основанные на решениях уравнения (1.12), называются баротропными.

3.1.2. Обобщенное баротропное уравнение вихря скорости

Выше мы рассмотрели баротропное уравнение вихря скорости, полученное на основе гипотезы о существовании уровня, на котором вертикальная скорость достигает экстремума, что соответствует условию равенства нулю горизонтальной дивергенции скорости.

Эквивалентно-баротропная модель атмосферы строится на основе обобщенного уравнения вихря скорости.

Эквивалентно-баротропной называется такая модель атмосферы, в которой учитывается вертикальная структура всей толщи атмосферы, однако интегральные свойства атмосферы приписываются одному уровню, называемому эквивалентно-баротропным. Для построения уравнения такой модели воспользуемся уравнением вихря скорости (1.1) и уравнением неразрывности (1.3).

Введем вместо переменной p переменную $\zeta = p/P$, где $P = 1000$ гПа — стандартное давление, и введем нормированную вертикальную скорость $\omega = \tau/p$. Тогда уравнения (1.1) и (1.3) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Omega}{\partial t} + u \frac{(\Omega + l)}{\partial x} + v \frac{\partial(\Omega + l)}{\partial y} + \omega \frac{\partial\Omega}{\partial \zeta} = \\ = -(l + \Omega) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial \zeta} \frac{\partial \omega}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} = 0. \quad (1.16)$$

Пусть

$$\begin{aligned} u &= A(\zeta) \bar{u}(x, y, t), \\ v &= A(\zeta) \bar{v}(x, y, t), \end{aligned} \quad (1.17)$$

где $A(\xi)$ — некоторая функция от ξ , черта сверху — знак осреднения.

Так, если обозначать некоторую функцию от p или ξ через α , то

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{p} \int_0^p \alpha dp, \quad \text{или} \quad \bar{\alpha} = \int_0^1 \alpha d\xi. \quad (1.18)$$

В соответствии с выражениями (1.17) для вертикальной составляющей вихря скорости Ω имеем

$$\Omega(x, y, \xi, t) = A(\xi) \bar{\Omega}(x, y, t). \quad (1.19)$$

Используя выражения (1.17) и (1.18), получаем: $\bar{u} = \bar{u}\bar{A}$, $\bar{v} = \bar{v}\bar{A}$, откуда следует, что

$$\bar{A} = 1. \quad (1.20)$$

С учетом формулы (1.18) уравнение неразрывности (1.16) примет теперь следующий вид:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \omega \bigg|_{\xi=0}^{\xi=1}. \quad (1.21)$$

Если положить, что вертикальная скорость на верхней и нижней границах атмосферы равна нулю, то

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0. \quad (1.22)$$

Другими словами, при принятых граничных условиях осредненная атмосфера ведет себя как несжимаемая жидкость.

Применим теперь операторы (1.17) к уравнению вихря скорости (1.15). Последнее в результате запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} A \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} + A^2 \bar{u} \frac{\partial (\bar{\Omega} + I)}{\partial x} + A^2 \bar{v} \frac{\partial (\bar{\Omega} + I)}{\partial y} + \frac{dA}{d\xi} \omega \bar{\Omega} = \\ = A - (A \bar{\Omega} + I) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) + \frac{dA}{d\xi} \bar{u} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{dA}{d\xi} \bar{v} \frac{\partial \omega}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Прежде всего заметим, что с учетом уравнения (1.21) и принятых граничных условий для ω первый член в правой части уравнения (1.23) обращается в нуль.

Из анализа уравнения вихря скорости (1.23) следует, что последний член в левой части и два последних члена в правой части малы по сравнению с другими членами. Как показано В. И. Губиным, это несправедливо только для узких фронтальных зон. По данным Арнассона и Кестерсона, недопустимо пренебрегать одним из указанных членов, например вертикальной адвекцией вихря, и оставлять другие члены, в данном случае два последних члена в правой части, поскольку это приводит к фиктивному формированию или исчезновению вихря. Следовательно, основываясь на оценке порядка членов, мы можем пренебречь указанными тремя членами.

С учетом сказанного (1.23) может быть переписано в виде

$$A \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} + A^2 \bar{u} \frac{\partial (\bar{\Omega} + l)}{\partial x} + A^2 \bar{v} \frac{\partial (\bar{\Omega} + l)}{\partial y} = 0. \quad (1.24)$$

После интегрирования (1.24) по переменной ζ , принимая во внимание, что $\bar{A} = 1$, получаем:

$$\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} + \bar{A}^2 \bar{u} \frac{\partial (\bar{\Omega} + l)}{\partial x} + \bar{A}^2 \bar{v} \frac{\partial (\bar{\Omega} + l)}{\partial y} = 0. \quad (1.25)$$

Теперь, если мы найдем уровень $\zeta = \zeta^*$, для которого $\bar{A}^2 = A(\zeta^*)$,* то для этого уровня уравнение вихря скорости можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} + A(\zeta^*) \bar{u} \frac{\partial (\bar{\Omega} + l)}{\partial x} + A(\zeta^*) \bar{v} \frac{\partial (\bar{\Omega} + l)}{\partial y} = 0. \quad (1.26)$$

Умножим все члены (1.26) на $A(\zeta^*)$. Тогда, учитывая, что

$$\begin{aligned} A(\zeta^*) \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} &= \frac{\partial \Omega(\zeta^*)}{\partial t}, \\ A(\zeta^*) \frac{\partial (\bar{\Omega} + l)}{\partial x} &= \frac{\partial [\Omega(\zeta^*) + l]}{\partial x}, \\ A(\zeta^*) \frac{\partial (\bar{\Omega} + l)}{\partial y} &= \frac{\partial [\Omega(\zeta^*) + l]}{\partial y}, \\ A(\zeta^*) \bar{u} &= u(\zeta^*), \quad A(\zeta^*) \bar{v} = v(\zeta^*), \end{aligned} \quad (1.27)$$

уравнение (1.26) для уровня ζ^* может быть записано в виде

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial x} + v \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial y} = 0, \quad (1.28)$$

или

$$\frac{d(\Omega + l)}{dt} = \frac{d\Omega_a}{dt} = 0,$$

где $\Omega + l = \Omega_a$ — вертикальная составляющая абсолютного вихря скорости. Последнее уравнение означает сохранение во времени Ω_a при движении вдоль траектории на уровне ζ^* .

Итак, мы нашли, что при принятых для ω граничных условиях существует по крайней мере один уровень ζ^* , для которого выполняется условие постоянства в движущейся частице абсолютного вихря скорости. Этот уровень и получил название эквивалентно-баротропного уровня.

Теперь, используя для Ω , u и v геострофические соотношения, можно получить эквивалентно-баротропное уравнение вихря скорости в квазигеострофическом приближении. Полагая, что

$$u = -\frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial y}, \quad v = \frac{g}{f} \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \Omega = \frac{g}{f} \nabla^2 z,$$

* Можно показать, что условие $\bar{A}^2 = A(\zeta^*)$ выполняется на двух уровнях ζ^* . Один из них расположен вблизи $\zeta^* = 700$ гПа, а второй — вблизи $\zeta^* = 200$ гПа.

уравнение (1.28) приводим к виду

$$\nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{g}{l}(z, \nabla^2 z) - \beta \frac{\partial z}{\partial x} - l_x \frac{\partial z}{\partial y}. \quad (1.29)$$

Эквивалентно-баротропное уравнение вихря скорости в форме (1.29) мы получили, приняв вертикальную скорость на нижней и верхней границах атмосферы равной нулю. Если это условие справедливо для верхней границы атмосферы, то для ее нижней границы оно не является строгим.

Попытаемся отказаться от принятого допущения.

Вернемся к уравнению неразрывности, проинтегрированному по вертикали. В соответствии с уравнением (1.21) при $\omega|_{\xi=0} = 0$ имеем

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\omega_0, \quad (1.30)$$

где

$$\omega_0 = \frac{1}{P} \frac{dp_0}{dt} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial p_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} - \rho_0 g \omega_0 \right), \quad (1.31)$$

где $\omega_0 = dz/dt$ — вертикальная скорость на уровне $z = 0$ ($\xi = 1$), а индекс 0 означает, что соответствующие значения берутся у нижней границы атмосферы.

Полагая, в случае отсутствия орографии и трения $\omega_0 = 0$, и учитывая, что в геострофическом приближении

$$u_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial p_0}{\partial y} = 0,$$

находим

$$\omega_0 = \frac{1}{P} \frac{\partial p_0}{\partial t}.$$

Уравнение неразрывности примет теперь следующий вид:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{1}{P} \frac{\partial p_0}{\partial t}. \quad (1.32)$$

Если теперь проинтегрировать уравнение (1.15) по ξ в пределах от 0 до 1, то, пренебрегая малыми членами и принимая во внимание выражения (1.17), (1.19) и (1.32), получаем:

$$\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} + \bar{A}^2 \bar{u} \frac{\partial (\bar{\Omega} + l)}{\partial x} + \bar{A}^2 \bar{v} \frac{\partial (\bar{\Omega} + l)}{\partial y} = \frac{l}{P} \frac{\partial p_0}{\partial t}. \quad (1.33)$$

Умножим уравнение (1.33) на $A(\xi^*) = \bar{A}^2$.

Тогда получим

$$\begin{aligned} A(\xi^*) \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial t} + A(\xi^*) \bar{u} A(\xi^*) \frac{\partial (\bar{\Omega} + l)}{\partial x} + A(\xi^*) \bar{v} A(\xi^*) \frac{\partial (\bar{\Omega} + l)}{\partial y} = \\ = \frac{l}{P} A(\xi^*) \frac{\partial p_0}{\partial t}. \end{aligned}$$

Для уровня $\xi = \xi^*$ в соответствии с соотношениями (1.27) имеем

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial x} + v \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial y} = \frac{lA}{P} \frac{\partial p_0}{\partial t}. \quad (1.34)$$

В квазигеострофическом приближении при $\zeta = \zeta^*$ получим

$$\frac{1}{l} \nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{1}{l} \left(\Phi, \frac{\nabla^2 \Phi}{l} \right) - \frac{\beta}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{lA}{P} \frac{\partial p_0}{\partial t}. \quad (1.35)$$

Допустим, что между $\partial p_0 / \partial t$ и $\partial \Phi / \partial t$ существует линейная связь: $\partial p_0 / \partial t = k' (\partial \Phi / \partial t)$, где k' — эмпирическая константа. Обозначим, как и в п. 3.1.1,

$$-\frac{1}{l} \left(\Phi, \frac{\nabla^2 \Phi}{l} \right) - \frac{\beta}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = A_g.$$

Умножив уравнение (1.35) на l и введя обозначение $\partial \Phi / \partial t = q$, с учетом сказанного выше получим:

$$\nabla^2 q - \frac{Ak'l^2}{P} q = lA_g.$$

Обратим внимание на то, что множитель $Ak'l^2/P$ имеет размерность, обратную квадрату длины. Обозначив его через $1/\mathcal{L}_0^2$, получим

$$\nabla^2 q - \frac{1}{\mathcal{L}_0^2} q = lA_g. \quad (1.36)$$

Уравнение (1.36) является уравнением Гельмгольца относительно q . Как будет показано далее, оно более реалистично, чем уравнение (1.12), воспроизводит характер зависимости изменения геопотенциала в некоторой точке от распределения адвекции вихря в окружающей области. Будем называть его обобщенным баротропным уравнением вихря скорости.

3.1.3. Решение баротропного и обобщенного баротропного уравнения вихря скорости

Решение баротропного уравнения вихря скорости

Перепишем баротропное уравнение вихря скорости (1.12) в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 q}{\partial \varphi_*^2} = A_g^*(r, \varphi_*), \quad (1.37)$$

где $A_g^* = lA_g$, r — радиус-вектор; φ_* — полярный угол.

Проинтегрируем уравнение (1.37) по φ_* и разделим на 2π . Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 q}{\partial r^2} d\varphi_* + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial r} d\varphi_* + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 q}{\partial \varphi_*^2} d\varphi_* = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_g^* d\varphi_*. \end{aligned}$$

Обозначим $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\varphi_* = \bar{f}$, где f — любая [из подинтегральных функций]. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 q}{\partial r^2} d\varphi_* &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q d\varphi_* = \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial r^2}, \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial r} d\varphi_* &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q d\varphi_* = \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{q}}{\partial r}, \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 q}{\partial \varphi_*^2} d\varphi_* &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial q}{\partial \varphi_*} \Big|_{\varphi_*=2\pi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial q}{\partial \varphi_*} \Big|_{\varphi_*=2\pi} \right] = 0. \end{aligned}$$

С учетом этого уравнение (1.37) приобретет вид

$$\frac{d^2 \bar{q}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{q}}{dr} = \bar{A}_g^*, \quad (1.38)$$

где

$$\bar{A}_g^* = \bar{A}_g^*(r).$$

Уравнение (1.38) представляет собой обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка, в отличие от уравнения (1.37), которое является уравнением в частных производных.

Решение уравнения (1.38) строится при следующих граничных условиях.

1. При $r = 0$ $\bar{q}(0) = q(0) \neq \pm \infty$.

2. При $r = R_0$ (где R_0 — радиус области интегрирования) $\bar{q}|_{(R_0)}$ задано. Это решение записывается в следующем виде:

$$q(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} \ln \frac{R_0}{\rho} A_g^*(\rho, \varphi_*) \rho d\rho d\varphi_* + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(\rho, \varphi_*) d\varphi_*. \quad (1.39)$$

Введем обозначение: $\ln \frac{R_0}{\rho} = G(\rho, R_0)$ — функция влияния, или функция Грина. Тогда

$$q(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} G(\rho, R_0) A_g^*(\rho, \varphi_*) \rho d\rho d\varphi_* + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(\rho, \varphi_*) d\varphi_*. \quad (1.40)$$

Пусть L — контур, стягивающий область интегрирования радиусом R_0 ; тогда $dL = R_0 d\varphi_*$ — элемент этого контура.

С учетом этого решение (1.40) можно переписать в следующем виде:

$$q(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} G(\rho, R_0) A_g^*(\rho, \varphi_*) \rho d\rho d\varphi_* + \frac{1}{2\pi R_0} \int_L q(\rho, \varphi_*) dL. \quad (1.41)$$

Функция влияния G обладает рядом свойств. Прежде всего она изотропна, т. е. не зависит от полярного угла φ_* , а зависит только от расстояния ρ .

При $\rho = R_0$ функция G достигает нуля. Следовательно, значения A_g^* в граничных точках на контуре радиусом R_0 входят с нулевым весом при определении $q(0)$. При $\rho = 0$ функция G имеет особенность. В связи с этим имеет смысл анализировать не функцию $G(\rho, R_0)$, а произведение $\rho G(\rho, R_0) = \rho \ln \frac{R_0}{\rho}$:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \ln \frac{R_0}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} [\rho \ln R_0 - \rho \ln \rho] \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \ln \rho \quad \text{при} \quad \rho \rightarrow 0.$$

По правилу Лопиталя

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \ln \rho = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\ln \rho}{1/\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho} \rho^2 = 0.$$

Из решения для $q(0)$ следует, что если $A_g^* > 0$ во всей области интегрирования (или если средневзвешенное значение A_g^* с весами G по области интегрирования больше нуля), то $q(0)$ будет меньше нуля. И, наоборот, если везде $A_g^* < 0$ или средневзвешенное с весом G значение A_g^* по области интегрирования радиусом R_0 меньше нуля, то $q(0)$ будет больше нуля.

Исходя из физического смысла функции A_g можно сформулировать следующие правила, вытекающие из интерпретации решения для q в форме (1.41).

1. Если вверх по потоку увеличивается циклоничность ($\nabla^2 \Phi > 0$, $\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 < 0$) или если вверх по потоку уменьшается антициклоничность ($\nabla^2 \Phi < 0$, $\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 < 0$) и эта закономерность преобладает во всей области интегрирования, то $A_g > 0$, а $q(0) < 0$ и геопотенциал будет уменьшаться.

2. Если вверх по потоку увеличивается антициклоничность ($\nabla^2 \Phi < 0$, $\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Phi > 0$) или если вверх по потоку уменьшается цикличность ($\nabla^2 \Phi > 0$, $\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Phi > 0$) и эта зависимость преобладает во всей области интегрирования, то (поскольку $\partial \Phi / \partial y < 0$, $A_g < 0$) $q(0) > 0$ и геопотенциал будет возрастать.

При оценке влияния широтного эффекта следует иметь в виду, что в северном полушарии при северных потоках $\partial \Phi / \partial x < 0$, за счет чего будет наблюдаться дополнительное уменьшение геопотенциала; а при южных потоках соответственно будет наблюдаться дополнительное увеличение геопотенциала.

Следует напомнить, что в решение для $q(0)$ входит интеграл по площади и при определении $q(0)$ нужно учитывать результирующий вклад функции A_g с весом G во всей области интегрирования.

Полученное решение требует задания граничного условия на контуре радиусом R_0 . При прогнозе на ограниченной территории

это граничное условие необходимо либо прогнозировать, либо задавать из каких-то других соображений.

В дальнейшем мы еще вернемся к рассмотрению этого вопроса.

Решение обобщенного баротропного уравнения вихря скорости

Запишем обобщенное баротропное уравнение вихря скорости (уравнение Гельмгольца) в квазигеострофическом приближении в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 q}{\partial \varphi_*^2} - \frac{1}{\mathcal{L}_0^2} q = A_g^*(r, \varphi_*). \quad (1.42)$$

Как и в предыдущем случае, получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для $\bar{q}$ следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{q}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{q}}{dr} - \frac{1}{\mathcal{L}_0^2} \bar{q} &= \bar{A}_g^*, \\ \bar{q} &= \bar{q}(r), \quad \bar{A}_g^* = \bar{A}_g^*(r). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Это уравнение решается при следующих граничных условиях:

- 1) на границе области $\bar{q}|_{R_0}$ задано,
- 2) при $r = 0$ $\bar{q}|_{r=0} = q(0) \neq \pm \infty$.

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$\frac{d^2 \bar{q}_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\bar{q}_0}{dr} - \frac{1}{\mathcal{L}_0^2} \bar{q}_0 = 0. \quad (1.44)$$

Умножим это уравнение на $\mathcal{L}_0^2$; тогда получим

$$\mathcal{L}_0^2 \frac{d^2 \bar{q}_0}{dr^2} + \mathcal{L}_0^2 \frac{1}{r} \frac{d\bar{q}_0}{dr} - \bar{q}_0 = 0. \quad (1.45)$$

Вводя новую переменную $r_1 = r/\mathcal{L}_0$ и учитывая, что

$$\frac{d}{dr} = \frac{1}{\mathcal{L}_0} \frac{d}{dr_1}, \quad \frac{d^2}{dr^2} = \frac{1}{\mathcal{L}_0^2} \frac{d^2}{dr_1^2},$$

на основе уравнения (1.45) получаем:

$$\frac{d^2 \bar{q}_0}{dr_1^2} + \frac{1}{r_1} \frac{d\bar{q}_0}{dr_1} - \bar{q}_0 = 0. \quad (1.46)$$

Уравнение (1.46) есть уравнение Бесселя.

Одно из решений этого уравнения есть функция Бесселя первого рода нулевого порядка, второе решение есть функция Бесселя второго рода нулевого порядка.

Решение для $\bar{q}(0)$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \bar{q}(0) &= \frac{1}{2\pi J_0\left(\frac{R_0}{\mathcal{L}_0}\right)} \int_0^{2\pi} q(R_0, \varphi_*) d\varphi_* - \\ &- \frac{1}{2\pi J_0\left(\frac{R_0}{\mathcal{L}_0}\right)} \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} \bar{A}_g^* \left[J_0\left(\frac{R_0}{\mathcal{L}_0}\right) K_0\left(\frac{\rho}{\mathcal{L}_0}\right) - \right. \\ &\left. - K_0\left(\frac{R_0}{\mathcal{L}_0}\right) J_0\left(\frac{\rho}{\mathcal{L}_0}\right) \right] \rho d\rho d\varphi_*. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Введем обозначения:

$$\frac{1}{J_0(R_0/\mathcal{L}_0)} = G_1(R_0, \mathcal{L}_0),$$

$$\frac{1}{J_0(R_0/\mathcal{L}_0)} \left[J_0\left(\frac{R_0}{\mathcal{L}_0}\right) K_0\left(\frac{\rho}{\mathcal{L}_0}\right) - K_0\left(\frac{R_0}{\mathcal{L}_0}\right) J_0\left(\frac{\rho}{\mathcal{L}_0}\right) \right] = G_2(R_0, \rho, \mathcal{L}_0).$$

Функции $G_1(R_0, \mathcal{L}_0)$ и $G_2(R_0, \rho, \mathcal{L}_0)$ называются функциями влияния.

Решение (1.47) для $\bar{q}(0)$ может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \bar{q}(0) = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} A_g^* G_2(R_0, \rho, \mathcal{L}_0) \rho d\rho d\varphi_* + \\ & + \frac{1}{2\pi R_0} \int_{(L)} q(R_0, \varphi_*) G_1(R_0, \mathcal{L}_0) dL. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Нетрудно также показать, что функция G_2 , как и G_1 , положительная, изотропная и убывает с увеличением расстояния ρ .

В предельном случае, при $R_0 \rightarrow \infty$, $G_1 \rightarrow 0$ так как $J_0(\tau_1) \rightarrow \infty$ при $\tau_1 \rightarrow \infty$, а

$$G_2(\rho, R_0, \mathcal{L}_0) \rightarrow -K_0(\rho/\mathcal{L}_0).$$

В связи с этим, устремляя $R_0 \rightarrow \infty$, на основании выражения (1.48), получаем

$$\begin{aligned} \bar{q}(0) = q(0) = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} A_g(\rho, \varphi_*) K_0\left(\frac{\rho}{\mathcal{L}_0}\right) \rho d\rho d\varphi_* + \\ & + \frac{1}{2\pi J_0(R_0/\mathcal{L}_0)} \int_0^{2\pi} q(R_0, \varphi_*) d\varphi_*. \end{aligned}$$

Функция влияния $K_0(\rho/\mathcal{L}_0)$ убывает несколько медленнее с расстоянием, нежели весовая функция, входящая в решение для баротропного уравнения вихря скорости.

3.2. Итерационные методы решения баротропного уравнения вихря скорости

В п. 3.1.3 было рассмотрено аналитическое решение баротропного уравнения вихря скорости, которое принимает вид либо уравнения Пуассона (1.12), либо уравнение Гельмгольца (1.36) относительно q .

В этом параграфе будут рассмотрены численные методы реализации баротропных схем предвычисления на ограниченной территории.

При предвычислении на ограниченной территории можно осуществить два варианта решения. Первый вариант предполагает постановку граничных условий вокруг каждой узловой точки, для которой ведется предвычисление («локальное решение»). Во втором варианте граничные условия ставятся на границе всей области интегрирования.

Рассмотрим реализацию второго варианта. При этом используются алгоритмы численного решения конечно-разностного уравнения эллиптического типа для тенденции геопотенциала $q = \partial\Phi/dt$. Среди них наиболее распространенными являются итерационные методы (последовательных приближений).

Метод Ричардсона

Здесь и в дальнейшем мы будем рассматривать решения для уравнений Пуассона и Гельмгольца.

Запишем для точки i, j уравнение Пуассона (1.12) и уравнение Гельмгольца (1.36):

$$q_{i+1j} + q_{ij+1} + q_{i-1j} + q_{ij-1} - 4q_{ij} = F_{ij}, \quad (2.1)$$

$$q_{i+1j} + q_{ij+1} + q_{i-1j} + q_{ij-1} - 4q_{ij} - \frac{(\delta s)^2}{\mathcal{L}_0^2} q_{ij} = F_{ij}. \quad (2.2)$$

Здесь $F_{ij} = [A_g^* (\delta s)^2]_{ij}$, $\delta s = \Delta x = \Delta y$ — шаг сетки.

Уравнение (2.1) есть конечно-разностный аналог уравнения Пуассона, а уравнение (2.2) есть конечно-разностный аналог уравнения Гельмгольца.

Уравнения (2.1) и (2.2) можно записать в виде

$$q_{i+1j} + q_{ij+1} + q_{i-1j} + q_{ij-1} - \beta_* q_{ij} = F_{ij}, \quad (2.3)$$

где $\beta_* = 4$ — для уравнения Пуассона, $\beta_* = 4 + \left(\frac{\delta s}{L_0}\right)^2$ — для уравнения Гельмгольца.

Такие уравнения мы можем записать для всех внутренних точек сеточной области.

Первоначально зададимся некоторыми произвольными значениями (например, можно положить в каждой точке $q_{ij}^0 = F_{ij}$). Это будет нулевое приближение для q .

Подставив в уравнение (2.3) q_{ij}^0 , получим невязку δe_{ij}^0 между левой и правой частями этого уравнения:

$$\delta e_{ij}^0 = q_{i+1j}^0 + q_{ij+1}^0 + q_{i-1j}^0 + q_{ij-1}^0 - \beta_* q_{ij}^0 - F_{ij}. \quad (2.4)$$

Если бы значения q^0 во всех точках совпали с точными значениями q , невязка была бы равна нулю. Поскольку это не так, часть невязки в данной точке прибавляется к q_{ij}^0 и таким образом определяется первое приближение $q_{ij}^1 = q_{ij}^0 + \alpha \delta e_{ij}^0$ и новая невязка, причем

$$\delta e_{ij}^1 = q_{i+1j}^1 + q_{ij+1}^1 + q_{i-1j}^1 + q_{ij-1}^1 - \beta_* q_{ij}^1 - F_{ij}. \quad (2.5)$$

Эта процедура последовательно повторяется для всего поля точек сетки, причем

$$q_{ij}^{v+1} = q_{ij}^v + \alpha \delta e_{ij}^v, \quad (2.6)$$

где v — номер приближения, α — коэффициент релаксации (принимается равным примерно 0,2—0,3).

Процесс повторяется до тех пор, пока для любой точки сетки не будет выполняться условие

$$|q_{ij}^{v+1} - q_{ij}^v| \leq \varepsilon_0, \quad (2.7)$$

где ε_0 — заданная точность вычислений. В таком виде этот метод иногда называют методом Ричардсона—Саутвела или обобщенным методом Ричардсона.

Слишком малые ε_0 приводят к увеличению числа итераций. Обычно значение ε_0 задают по результатам эксперимента. Метод Ричардсона сходится всегда, но недостаточно быстро. Число итераций зависит от сложности поля.

Метод Либмана

Естественно предположить, что итерационный процесс будет сходиться быстрее, если в процессе вычислений q_{ij}^{v+1} использовать часть уже вычисленных значений q на $(v+1)$ -м приближении в тех точках, где это приближение уже рассчитано.

Условимся производить вычисления в порядке возрастания индексов i и j . Тогда по мере перехода к другим точкам в направлении увеличения i и j у нас будут уже вычислены значения q в $(v+1)$ -м приближении в точке $i, j-1$ и точке $i-1, j$. В связи с этим

$$q_{ij}^{v+1} = \frac{1}{\beta_*} (q_{i+1j}^v + q_{ij+1}^v + q_{i-1j}^{v+1} + q_{ij-1}^{v+1} - F_{ij}). \quad (2.8)$$

На боковых границах полагаем $q_T = 0$.

Процесс итераций повторяется до момента выполнения условия (2.7).

Видоизменением метода Либмана является метод перерелаксаций Либмана.

При вычислении в порядке возрастания индексов i и j можно записать невязку следующего вида:

$$\delta \varepsilon_{ij}^{v, v+1} = q_{i+1j}^v + q_{ij+1}^v + q_{i-1j}^{v+1} + q_{ij-1}^{v+1} - \beta_* q_{ij}^v - F_{ij}. \quad (2.9)$$

Далее часть невязки прибавим к значению q_{ij}^v ; тогда

$$q_{ij}^{v+1} = q_{ij}^v + \alpha \delta \varepsilon_{ij}^{v, v+1}. \quad (2.10)$$

Такой метод называется методом перерелаксации, а коэффициент α — коэффициентом перерелаксации. При этом

$$\alpha = \frac{1}{2(1 + \sin \bar{\gamma})},$$

$$\bar{\gamma} = \arccos \left(\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{N} + \cos \frac{\pi}{M} \right). \quad (2.11)$$

Процесс итерации сходится достаточно быстро при

$$\frac{1}{4} \leq \alpha \leq \frac{1}{2} (\alpha \approx 0,42). \quad (2.12)$$

Рассмотрим теперь, наряду с невязкой типа (2.9), невязку следующего вида:

$$\delta \varepsilon_{ij}^{v+1} = q_{i+1j}^v + q_{ij+1}^v + q_{i-1j}^v + q_{ij-1}^v - \beta_* q_{ij}^{v+1} - F_{ij}, \quad (2.13)$$

где

$$q_{ij}^{v+1} = q_{ij}^v + \alpha \delta \varepsilon_{ij}^{v+1}.$$

Подставляя последнее выражение в (2.13), получаем:

$$\delta \varepsilon_{ij}^{v+1} = q_{i+1j}^v + q_{ij+1}^v + q_{i-1j}^v + q_{ij-1}^v - \beta_* (q_{ij}^v + \alpha \delta \varepsilon_{ij}^v) - F_{ij}. \quad (2.14)$$

Поскольку

$$\delta \varepsilon_{ij}^v = q_{i+1j}^v + q_{ij+1}^v + q_{i-1j}^v + q_{ij-1}^v - \beta_* q_{ij}^v - F_{ij}, \quad (2.15)$$

из (2.14) следует

$$\delta \varepsilon_{ij}^{v+1} = \delta \varepsilon_{ij}^v - \beta_* \alpha \delta \varepsilon_{ij}^v, \quad (2.16)$$

или

$$\delta \varepsilon_{ij}^{v+1} = \delta \varepsilon_{ij}^v (1 - \beta_* \alpha). \quad (2.17)$$

Если в выражении (2.17) $\alpha = 1/\beta_*$, то $\delta \varepsilon_{ij}^{v+1} = 0$. Этот случай соответствует методу Ричардсона. Если $\alpha < 1/\beta_*$, то $\delta \varepsilon_{ij}^{v+1}$ сохраняет знак $\delta \varepsilon_{ij}^v$ (нижняя релаксация). Если $\alpha > 1/\beta_*$, то $\delta \varepsilon_{ij}^{v+1}$ имеет знак, противоположный знаку $\delta \varepsilon_{ij}^v$ (верхняя релаксация, или перерелаксация).

Верхняя релаксация обеспечивает более быструю сходимость.

Неявный метод переменных направлений

Рассмотренные методы решения являются явными, или эксплицитными, так как последующие значения q^{v+1} вычисляются через ранее вычисленные значения q^v .

Наряду с ними существуют неявные, или имплицитные методы, при реализации которых последовательно решаются системы линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим один из таких неявных методов, называемый неявным методом переменных направлений.

Запишем уравнение (2.3) в следующем виде:

$$\left(q_{i+1j} + q_{i-1j} - \frac{\beta_*}{2} q_{ij} \right) + \left(q_{ij+1} + q_{ij-1} - \frac{\beta_*}{2} q_{ij} \right) = F_{ij}. \quad (2.18)$$

Перепишем теперь это уравнение следующим образом:

$$-q_{i+1j} - q_{i-1j} + \left(\frac{\beta_*}{2} + r_* \right) q_{ij} = q_{ij+1} + q_{ij-1} - \left(\frac{\beta_*}{2} - r_* \right) q_{ij} - F_{ij}. \quad (2.19)$$

Введем дробные (промежуточные) итерации $v + 1/2$ и на основе выражения (2.19) запишем два уравнения:

$$-q_{i+1j}^{v+1/2} - q_{i+1j}^{v+1/2} + \left(\frac{\beta_*}{2} + r_*\right) q_{ij}^{v+1/2} = q_{ij+1}^v + q_{ij-1}^v - \\ - \left(\frac{\beta_*}{2} - r_*\right) q_{ij}^v - F_{ij}, \quad (2.20)$$

$$-q_{ij+1}^{v+1} - q_{ij-1}^{v+1} + \left(\frac{\beta_*}{2} - r_*\right) q_{ij}^{v+1} = \\ = q_{i+1j}^{v+1/2} + q_{i-1j}^{v+1/2} - \left(\frac{\beta_*}{2} + r_*\right) q_{ij}^{v+1/2} - F_{ij}. \quad (2.21)$$

Будем последовательно решать уравнения (2.20) и (2.21), считая их правые части известными, т. е. находить $(v + 1/2)$ -е приближение, подставлять его в правую часть уравнения (2.21) и находить $(v + 1)$ -е приближение.

Такая процедура повторяется до тех пор, пока уравнения (2.20) и (2.21) во всех точках не обратятся в тождества.

Рассмотренные методы решения прогностических уравнений наиболее употребительны в задачах численного прогноза погоды.

Прямые методы

С конца 60-х годов во многих работах итерационным методам решения уравнения Гельмгольца (Пуассона) стали предпочитать прямые методы. Чаще всего эти методы основываются на быстром преобразовании Фурье.

Рассмотрим один из наиболее простых методов, основанный на быстром преобразовании Фурье.

Пусть в каждой строке $1 \leq j \leq N - 1$, q и F представляются рядами:

$$q_{ij} = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{q}_{kj} \sin \frac{k_i \pi}{N}, \\ F_{ij} = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{F}_{kj} \sin \frac{k_i \pi}{N}, \quad (2.22)$$

где

$$\hat{q}_{kj} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N-1} q_{ij} \sin \frac{k_i \pi}{N}, \quad (2.23)$$

$$\hat{F}_{kj} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N-1} F_{ij} \sin \frac{k_i \pi}{N} \quad (2.24)$$

представляют собой коэффициенты Фурье, k — волновое число, N — число узлов в строке (вдоль оси x).

Подставим ряд (2.22) в уравнение (2.3) и, воспользовавшись условием ортогональности гармоник, получим $N - 1$ независимые

трехдиагональные системы линейных уравнений для определения коэффициентов $\hat{q}_k$:

$$\hat{q}_{k,j-1} - \left(\beta_* - 2 \cos \frac{k\pi}{N} \right) \hat{q}_{kj} + \hat{q}_{k,j+1} = \hat{F}_{kj}, \quad (2.25)$$

при этом $\hat{q}_{k0} = \hat{q}_{kN} = 0$.

Процедура решения уравнения (2.13) при этом выглядит следующим образом:

1) в каждой строке j с помощью быстрого преобразования Фурье определяются коэффициенты $\hat{F}_{kj}$ по формуле (2.24),

2) для каждого волнового числа k решается трехдиагональная система уравнений вида (2.25) относительно коэффициентов $\hat{q}_{kj}$,

3) с помощью быстрого преобразования Фурье в узлах каждой строки j находятся искомые значения q_{ij} на основе первой формулы (2.22).

Такая процедура повторяется на каждом шаге по времени.

Существуют и другие прямые методы, в частности метод блочно-циклической редукции или комбинация этого метода и быстрого преобразования Фурье.

Преимущество прямых методов состоит в том, что они дают точное решение конечно-разностных уравнений (без учета ошибок округления). По этой причине в задачах прогноза исчезает источник ошибок, связанный с использованием прямых итерационных методов. Количество вычислений, необходимых здесь для получения решения, как правило, соответствует нескольким (трем-четырем) итерациям. В связи с этим прямые методы вполне конкурентноспособны с итерационными и в смысле затрат машинного времени.

Для уравнения Гельмгольца, в котором β_* зависит от x и y (что имеет место в том случае, если $\mathcal{L}_0^*$ зависит от x и y) можно использовать итерационную схему Конкуса и Голуба. Для уравнения (2.13) эта схема имеет вид

$$q_{i+i_j}^{v+1} + q_{ij+1}^{v+1} + q_{i-i_j}^{v+1} + q_{ij-1}^{v+1} - \bar{\beta}_* q_{ij}^{v+1} = F_{ij} + (\beta_* - \bar{\beta}_*) q_{ij}^v. \quad (2.26)$$

Здесь $\bar{\beta}_*$ — среднее значение β_* для данного узла.

После того как получено v -е приближение для q_{ij} , решение может строиться прямым методом, описанным выше.

Рассмотренные методы наиболее употребительны в задачах численного прогноза погоды.

3.3. Квазигеострофическая бароклинная модель и методы ее реализации

3.3.1. Система уравнений.

Точное решение для тенденции геопотенциала

Двумерные квазигеострофические модели значительно уменьшают требования, предъявляемые к начальным данным и возможностям вычислительной техники (быстродействию и памяти ЭВМ). Однако принимаемые в этих моделях физические допущения и ограничение не всегда, и даже очень часто, не согласуются с реальными

условиями, и, следовательно, качество прогнозов по этим схемам не может быть достаточно высоким. В связи с этим следующим шагом на пути построения более точных методов прогнозов является отказ от ограничений двумерных моделей и переход к построению трехмерных бароклинических моделей. Впервые в квазигеострофическом приближении такая задача была решена в 1951 г. Н. И. Булеевым и Г. И. Марчуком.

В качестве исходных принимается следующая система уравнений:

1) уравнение вихря скорости

$$\nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{g}{l} (z, \nabla^2 z) - \beta \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{l^2}{g} \frac{\partial \tau}{\partial p}; \quad (3.1)$$

2) уравнение притока тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{g}{l} (z, T) = \frac{\mathcal{E}}{c_p} + \frac{1}{\rho g} (\gamma_a - \gamma) \tau; \quad (3.2)$$

3) уравнение статики

$$T = -\frac{\rho g}{R} \frac{\partial z}{\partial p}; \quad (3.3)$$

4) уравнение состояния

$$p = \rho R T. \quad (3.4)$$

Пятым уравнением является уравнение неразрывности, которым мы уже воспользовались при замене в уравнении вихря скорости горизонтальной дивергенции скорости величиной $\partial \tau / \partial p$.

В полученной системе уравнений четыре неизвестных (z , T , τ и p). При условии, что приток тепла задан или может быть рассчитан по имеющимся переменным, эта система замкнута.

Введем вместо p новую переменную $\zeta = p/P$, где P — среднее (стандартное) давление у поверхности, равное 1000 гПа. Тогда

$$d\zeta = \frac{1}{P} dp.$$

Переменная ζ меняется от 0 на верхней границе атмосферы до 1 на нижней ее границе.

Уравнение вихря скорости переписывается теперь следующим образом:

$$\nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{g}{l} (z, \nabla^2 z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{l^2}{Pg} \frac{\partial \tau}{\partial \zeta}. \quad (3.5)$$

Уравнение притока тепла запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{g}{l} (T, z) - \frac{\mathcal{E}}{c_p} = \frac{l^2 R T}{\zeta P l^2 g} \tau (\gamma_a - \gamma),$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{g}{l} (T, z) + \frac{\mathcal{E}}{c_p} + \frac{c^2 l^2}{P R} \frac{\tau}{\zeta}, \quad (3.6)$$

где $c^2 = \frac{R^2 T (\gamma_a - \gamma)}{g l^2}$ — параметр устойчивости атмосферы, зависящий от разности $(\gamma_a - \gamma)$ и имеющий размерность квадрата длины.

Этот параметр, введенный впервые И. И. Булеевым и Г. М. Марчуком, принимается в дальнейшем постоянным. В действительности этот параметр несколько меняется. Мы покажем, как можно отказаться от этого ограничения.

С новой вертикальной координатой уравнение статики (3.3) перепишем в виде

$$T = -\frac{g}{R} \zeta \frac{\partial z}{\partial \xi}. \quad (3.7)$$

Будем решать систему из трех уравнений (3.5)–(3.7) с тремя неизвестными (z , τ и T).

В качестве граничных условий на верхней и нижней границах атмосферы примем следующие.

Как известно, в изобарической системе координат

$$\tau = \frac{dp}{dt} = \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial y} - w \right).$$

На основе геострофических соотношений имеем: $u \frac{\partial z}{\partial x} + v \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, тогда $\tau = \rho g (\partial z / \partial t - w)$.

На верхней границе атмосферы ($p = 0$): $\zeta = 0$, $\rho \rightarrow 0$, $\tau = 0$. На нижней границе атмосферы ($\zeta = 1$) без учета трения и орографии можно положить $w = 0$, в связи с чем

$$\tau_0 = g \rho_0 \frac{\partial z_0}{\partial t},$$

где индекс 0 относится к уровню 1000 гПа ($\zeta = 1$).

Чтобы решить систему полученных уравнений, продифференцируем уравнение (3.7) частным образом по времени. Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{g}{R} \zeta \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial t}. \quad (3.8)$$

Исключив теперь с помощью уравнения (3.8) $\partial T / \partial t$ из уравнения притока тепла (3.6), получим:

$$-\frac{g}{l} (T, z) - \frac{\mathcal{E}}{c_p} - \frac{g}{R} \zeta \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) = \frac{c^2 l^2}{PR} \frac{\tau}{\xi}. \quad (3.9)$$

Умножим уравнение (3.9) на ξ и продифференцируем его по ξ , тогда

$$-\frac{g}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \xi} \zeta \left[\frac{g}{l} (T, z) + \frac{\mathcal{E}}{c_p} \right] = \frac{c^2 l^2}{PR} \frac{\partial \tau}{\partial \xi}. \quad (3.10)$$

На основе уравнений (3.7) и (3.10) построим одно уравнение, не содержащее τ . Для этого приравняем их правые части, умножив предварительно уравнение (3.7) на $c^2 \frac{g}{R}$. Тогда получим

$$\begin{aligned} c^2 \frac{g}{R} \nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} + c^2 \frac{g}{R} \left[\frac{g}{l} (z, \nabla^2 z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right] = \\ = -\frac{g}{R} \frac{\partial}{\partial \xi} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \xi} \zeta \left[\frac{g}{l} (T, z) + \frac{\mathcal{E}}{c_p} \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Сократив обе части (3.11) на множитель g/R , находим:

$$c^2 \nabla^2 \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial t} = -c^2 \left[\frac{g}{e} (z, \nabla^2 z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right] - \\ - \frac{R}{g} \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \left[\frac{g}{l} (T, z) + \frac{\mathcal{E}}{c_p} \right]. \quad (3.12)$$

Введем следующие обозначения:

$$-c^2 \left[\frac{g}{l} (z, \nabla^2 z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right] - \frac{R}{g} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{g}{l} (T, z) + \frac{\mathcal{E}}{c_p} \right] = \\ = f_1(x, y, \xi); \quad \frac{\partial z}{\partial t} = q.$$

С учетом принятых обозначений уравнение (3.12) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 \frac{\partial q}{\partial \xi} + c^2 \nabla^2 q = f_1(x, y, \xi). \quad (3.13)$$

Уравнение (3.13) удобно решать в цилиндрической системе координат (r, φ_*, ξ) , где $r^2 = (x^2 + y^2)/c^2$ — радиус-вектор в безразмерном виде, а φ_* — полярный угол.

Уравнение (3.13) запишем в цилиндрической системе координат.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 \frac{\partial q}{\partial \xi} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 q}{\partial \varphi_*^2} = f_1(r, \varphi_*, \xi). \quad (3.14)$$

В качестве верхнего и нижнего граничных условий примем условия при $\xi = 0$ и $\xi = 1$, отвечающие сформулированным выше условиям для переменной τ . С учетом уравнения притока тепла (3.2) на нижней границе атмосферы ($\xi = 1$) имеем:

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = \frac{g}{l} (T_0, z_0) + \frac{\mathcal{E}_0}{c_p} + (\gamma_a - \gamma_0) \frac{\partial z_0}{\partial t}.$$

С учетом (3.8) при $\xi = 1$ это условие запишем в виде

$$\frac{\partial q_0}{\partial \xi} + \frac{R(\gamma_a - \gamma)}{g} q_0 = -\frac{R}{g} \left[\frac{g}{l} (T_0, z_0) + \frac{\mathcal{E}_0}{c_p} \right] = -A(r, \varphi_*, 1), \\ \frac{R(\gamma_a - \gamma_0)}{g} \approx 0,1. \quad (3.15)$$

Второе граничное условие на верхней границе атмосферы получим, считая, что

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left(c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(c_p \rho \frac{g}{l} (T, z) + \mathcal{E} \rho + \frac{c_p (\gamma_a - \gamma)}{g} \tau \right) = 0,$$

поскольку на верхней границе атмосферы $\rho u \rightarrow 0$, $\rho v \rightarrow 0$, а величины $\partial T / \partial x$ и $\partial T / \partial y$ — конечные. Кроме того, на верхней границе атмосферы $\tau = 0$, а приток тепла к единице объема ($\mathcal{E} \rho$) пренебрежимо мал.

При предельном переходе верхнее граничное условие, используя уравнение (3.8), умноженное на ξ , запишем в виде

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \frac{\partial T}{\partial t} = -\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial t} \frac{g}{R}.$$

Поскольку при принятых условиях $\lim_{\xi \rightarrow 0} (c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t}) = 0$, то верхнее граничное условие может быть записано в виде

$$\xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) = 0 \text{ при } \xi = 0. \quad (3.16)$$

Таким образом, задача нахождения величины $q = \partial z / \partial t$ сводится к решению уравнения (3.14) с граничными условиями (3.15) и (3.16).

Представим функции $f_1(r, \varphi_*, \xi)$ и $A(r, \varphi_*, 1)$ следующими рядами:

$$f_1(r, \varphi_*, \xi) = \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi_*} \int_0^{\infty} F_n(\rho', \xi) J_n(r, \rho') \rho' d\rho',$$

$$A(r, \varphi_*, 1) = \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi_*} \int_0^{\infty} G_n(\rho') J_n(r, \rho') \rho' d\rho'. \quad (3.17)$$

Здесь

$$F_n(\rho') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\varphi_*} d\varphi_* \int_0^{\infty} f_1(r, \varphi_*, \xi) J_n(\rho', r') r' dr',$$

$$G_n(\rho') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\varphi_*} d\varphi_* \int_0^{\infty} A(r, \varphi_*, 1) J_n(\rho', r') r' dr', \quad (3.18)$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$i = \sqrt{-1}$, J_n — функция Бесселя n -го порядка, Re — вещественная часть рядов.

Решение для q также ищется в виде ряда

$$q = \frac{\partial z}{\partial t} = \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\varphi_*} \int_0^{\infty} S_n(\rho', \xi) J_n(r, \rho') \rho' d\rho'. \quad (3.19)$$

Подставляя выражения (3.18) и (3.19) в уравнение (3.14) и используя граничные условия (3.15) и (3.16), после ряда преобразований получим уравнение для новой введенной неизвестной функции $S_n(\rho', \xi)$ следующего вида:

$$\xi^2 \frac{d^2 S_n}{d\xi^2} + 2\xi \frac{dS_n}{d\xi} - \rho'^2 S_n = F_n(\rho', \xi). \quad (3.20)$$

Это неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка является уравнением Бесселя. Решение этого уравнения составит из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. С решением подобного типа уравнений мы уже встречались (см. уравнение (1.43)). Решим уравнение (3.20) относительно S_n . Подставив (3.20) решение в уравнение (3.19), получим:

$$q(0, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} c^2 \left[\frac{g}{l}(z, \nabla^2 z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right] M_1(r, \varphi_*, \xi) r dr d\varphi_* d\xi^* +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{R}{g}(T, z) + \frac{\mathcal{E}}{c_p} \right] M_2(r, \varphi_*, \xi^*) r dr d\varphi_* d\xi^*. \quad (3.21)$$

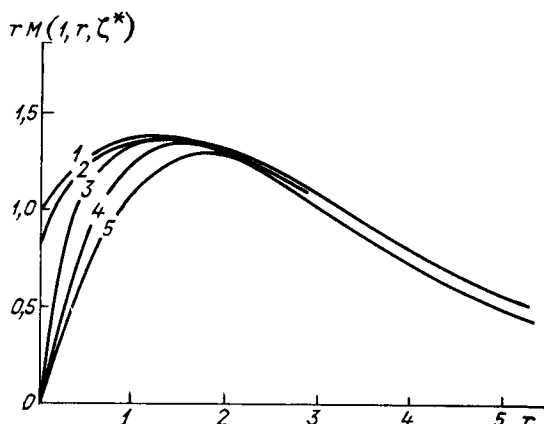


Рис. 3.1. Функция rM_1 для поверхности $\zeta = \zeta^* = 1$.

Кривая	1	2	3	4	5
ζ	1,0	0,9	0,7	0,5	0,3

Здесь $q(0, \zeta)$ — искомое значение тенденции высоты изобарической поверхности в точке $r = 0$ для уровня $\zeta = \text{const}$; $M_1(r, \zeta, \zeta^*)$ и $M_2(r, \zeta, \zeta^*)$ — функции влияния, характеризующие зависимость решения в центральной точке от значений метеорологических величин в окружающем пространстве. Произведения rM_1 и rM_2 описывают веса средних значений динамических (адвекция и широтный эффект вихря) и термических (геострофическая адвекция температуры и приток тепла) факторов на окружности радиусом r , с которыми эти факторы влияют на изменения высоты изобарической поверхности в центральной точке ($r = 0$). Функции влияния M_1 и M_2 являются функциями трех аргументов (ζ, ζ^* и r); переменная ζ относится к уровню, для которого ведется расчет q ; переменная ζ^* относится к «влияющим» уровням; r — безразмерное расстояние по горизонтали от точки, для которой рассчитывается прогноз, до влияющей точки (при этом область влияния — вся бесконечная плоскость).

Функции влияния обладают круговой симметрией в горизонтальной плоскости, т. е. не зависят от φ_* .

На рис. 3.1 представлены функции rM_1 для $\zeta = 1$, а на рис. 3.2 — функции M_1 для $\zeta = 0,7$ и $\zeta = 0,5$. За единицу длины r принято расстояние, равное $\sqrt{c^2} \approx 750$ км.

Функция rM_1 определяющая весовые множители, с которыми нужно брать значение функции источника

$$c^2 A_g^* = c^2 \left[\frac{g}{l} (z, \nabla^2 z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right]$$

в точках, окружающих данную, с возрастанием расстояния затухает сравнительно медленно. Однако практически область действия дина-

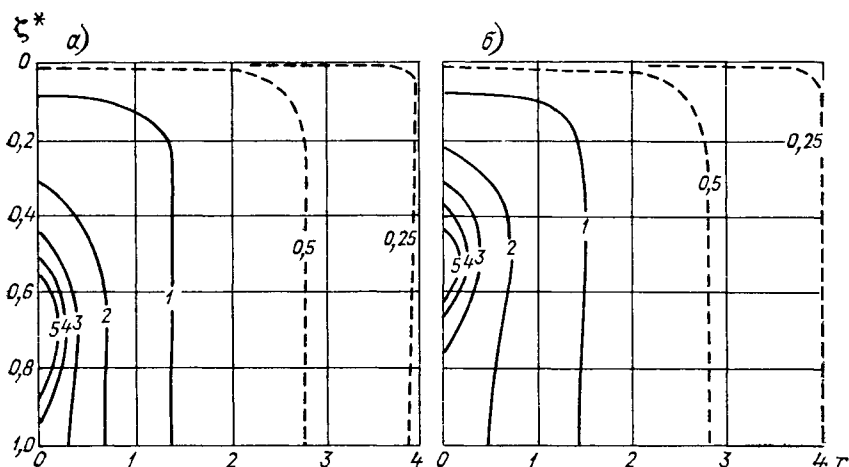


Рис. 3.2. Функция влияния M_1 для поверхностей $\zeta = \zeta^* = 0,7$ (а) и $\zeta = \zeta^* = 0,5$ (б).

мических факторов на изменение высоты изобарических поверхностей в данной точке можно ограничить радиусом, равным примерно 2000 км. На окружности радиусом $R_0 \approx 2000$ км среднее взвешенное значение выражения rM_1Ag^* мало.

Функция M_1 положительна во всей области. Это означает следующее. Если на всех уровнях выполняется условие $(z, \nabla^2 z) < 0$, то за счет динамического фактора $q < 0$. И, наоборот, при $(z, \nabla^2 z) > 0$ имеем $q > 0$.

Функция влияния M_1 обладает еще одним важным свойством. Она симметрична относительно уровня, для которого рассчитывается прогноз.

Знак и величина изменения геопотенциала q за счет динамического фактора определяются средневзвешенным (с весом rM_1) значением адвекции вихря и широтным эффектом на всех уровнях и во всей области интегрирования по горизонтали.

На рис. 3.3 представлены функции M_2 и rM_2 для $\zeta = 1$, а на рис. 3.4 — функции M_2 для $\zeta = 0,7$ и $\zeta = 0,5$.

В первую очередь обращает на себя внимание тот факт, что функции M_2 и rM_2 по мере увеличения расстояния r затухают быстрее, чем функции M_1 и rM_1 соответственно. Для $\zeta = 1$ функция M_2 отрицательная во всей области. Это означает следующее. Пусть на всех уровнях наблюдается адвекция холода, тогда якобиан $(T, z) < 0$. Поскольку $M_2 < 0$, то на всех уровнях и во всей области интегрирования по горизонтали у поверхности q будет больше нуля. Эффект того же знака будет иметь место и в том случае, если во всей области интегрирования будет наблюдаться отрицательный приток тепла ($\varepsilon < 0$). При адвекции тепла ($(T, z) > 0$) во всей области $q < 0$. Положительный приток тепла также будет способствовать уменьшению высоты изобарических поверхностей.

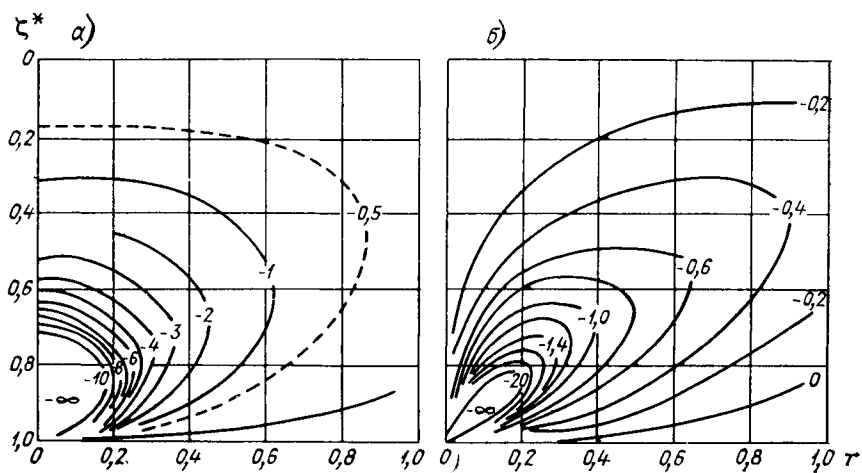


Рис. 3.3. Функции M_2 (а) и rM_2 (б) для $\zeta = \zeta^* = 1$.

Вид функции M_2 для $\zeta < 1$ принципиально отличается от вида функции M_1 для $\zeta < 1$ и функции M_2 для $\zeta = 1$. Функция M_2 является отрицательной для уровней, расположенных выше того, для которого дается прогноз, и положительной для уровней, расположенных ниже того, для которого дается прогноз. Так, адвекция холода выше уровня $\zeta = \text{const}$ связана с увеличением высоты этого уровня, а ниже него — с уменьшением высоты. Обратная картина имеет место при адвекции тепла.

В том случае, если во всей тропосфере наблюдаются приток тепла и адвекция температуры одного знака, для некоторого среднего уровня влияние вышележащих слоев может быть скомпенсировано влиянием нижележащих слоев. В этом случае влияние баро-

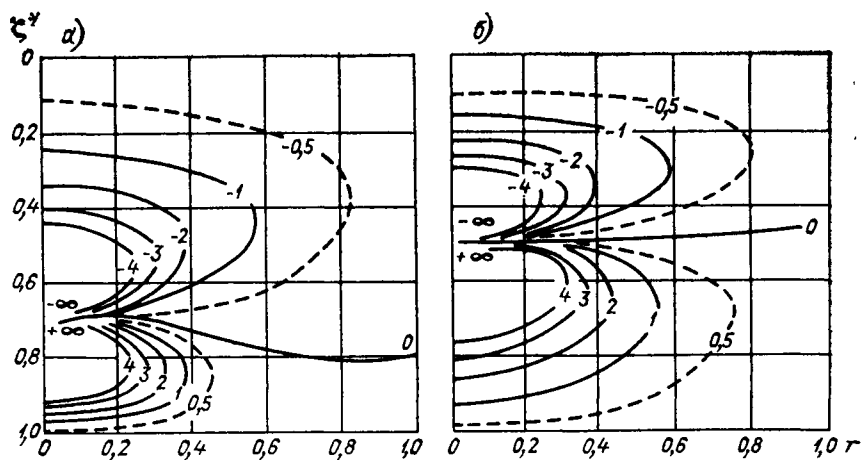


Рис. 3.4. Функция M_2 для $\zeta = \zeta^* = 0,7$ (а) и $\zeta = \zeta^* = 0,5$ (б).

клинного фактора на изменение геопотенциала среднего уровня мало. В какой-то мере это подтверждает концепцию существования среднего уровня в атмосфере. Однако из этого же рассмотрения следует, что при наличии переменной адвекции по высоте и переменного по знаку притока тепла влияние бароклинного фактора может существенно возрастать.

С учетом сказанного функции влияния M_1 и M_2 можно интерпретировать следующим образом. Пусть во всех точках трехмерного пространства помещены единичные точечные источники «влияющих субстанций» A_g^* и A_T . Тогда функции влияния M_1 и M_2 будут описывать изменение высоты изобарической поверхности, вызванные действием этих единичных источников.

Если область влияния ограничена, то, как и в случае баротропной модели, в решении будет фигурировать интеграл от q по боковой поверхности области влияния.

В заключение отметим, что при реализации полученных аналитических решений уравнения динамики для q интегралы вычисляются с помощью квадратурных формул. Для решения уравнений бароклинной модели используются также итерационные методы. При этом в прогностическом уравнении (3.13) все производные аппроксимируются отношениями конечных разностей. Полученное конечно-разностное уравнение решается на множестве точек, образующих пространственную сетку, одним из рассмотренных выше итерационных методов. Аналогичное решение можно получить для вертикальной скорости w .

3.3.2. Решение уравнений бароклинной модели методом плоскостей

Разделим (3.11) на c^2/R и запишем его для геопотенциала Φ :

$$\nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + l \left[(\Phi, \nabla^2 \Phi) + \beta \frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] = - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\xi^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - R \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\xi^2}{c^2} \left[\frac{1}{l} (T, \Phi) + \frac{\mathcal{E}}{c_p} \right]. \quad (3.22)$$

Введем, кроме того, следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= q, \\ \left[(\Phi, \nabla^2 \Phi) + \beta \frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] &= A_g, \\ \left[\frac{1}{l} (T, \Phi) + \frac{\mathcal{E}}{c_p} \right] &= A_T. \end{aligned}$$

Уравнение (3.22) теперь может быть переписано в виде

$$\nabla^2 q + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\xi^2}{c^2} \frac{\partial q}{\partial \xi} = l A_g - R \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\xi^2}{c^2} A_T = f. \quad (3.23)$$

Разделим всю атмосферу от $\xi = 0$ до $\xi = 1$ на $k - 1$ слоев равной толщины с помощью k уровней. Тогда $\delta \xi = 1/(k - 1)$.

Запишем уравнение (3.23) в конечно-разностной форме по вертикальной координате ξ . Для уровня k (в точке ij) получим

$$\nabla^2 q_k + \left[\frac{\xi_{k+1/2}^2}{c_{k+1/2}^2} \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{\xi_{k+1} - \xi_k} \right) - \frac{\xi_{k-1/2}^2}{c_{k-1/2}^2} \left(\frac{q_k - q_{k-1}}{\xi_k - \xi_{k-1}} \right) \frac{1}{\xi_{k+1/2} - \xi_{k-1/2}} \right] = f_k. \quad (3.24)$$

Граничные условия зададим в следующем виде:

1) на боковой границе области интегрирования полагаем

$$q_{ijk}|_{\Gamma} = 0;$$

2) при $\xi = 0$

$$\xi^2 \frac{\partial q}{\partial \xi} = 0;$$

3) при $\xi = 1$

$$\frac{\partial q_0}{\partial \xi} + L^* q_0 = - \frac{R}{g} A_{T0}, \quad L^* = \frac{R(\gamma_a - \gamma_0)}{g}. \quad (3.25)$$

Уравнение (3.24) можно переписать в следующем виде:

$$\nabla^2 q_k + a_{k,k+1}(q_{k+1} - q_k) - a_{k,k-1}(q_k - q_{k-1}) = f_k. \quad (3.26)$$

Здесь индексы при коэффициентах a указывают уровни, для которых записано уравнение и для которых привлекаются значения q .

Такие уравнения мы можем записать для всех k уровней, в результате чего в левую часть уравнения (3.26) будут входить значения q с индексами $k+1$, k , $k-1$. Уравнение (3.31) может быть записано следующим образом:

$$\nabla^2 q_k + a_{k,k+1}q_{k+1} + a_{k,k-1}q_{k-1} - a_{k,k}q_k = f_k. \quad (3.27)$$

Трудности при написании этого уравнения возникают на верхнем счетном уровне, так как для него отсутствует q вышележащего уровня, и для нижнего счетного уровня, так как отсутствует q нижележащего уровня.

Для преодоления возникающих здесь затруднений следует воспользоваться граничными условиями.

Рассмотрим трехслойную задачу с четырьмя уровнями ($k = 1, 2, 3, 4$). При этом $k = 1$ соответствует верхнему уровню модели, а $k = 4$ — нижнему уровню (у поверхности).

Для уровня $k = 1$ в соответствии с граничным условием (3.25) $q_1 - q_0 = 0$. Отсюда q_0 необходимо положить равным q_1 . Тогда уравнение (3.27) запишем в следующем виде:

для уровня $k = 1$ (3.27)

$$\nabla^2 q_1 + a_{10}q_1 - a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = f_1, \quad (3.28)$$

для уровня $k = 2$

$$\nabla^2 q_2 + a_{21}q_1 - a_{22}q_2 + a_{23}q_3 = f_2, \quad (3.29)$$

для уровня $k = 3$

$$\nabla^2 q_3 + a_{34}q_4 + a_{32}q_2 - a_{33}q_3 = f_4.$$

На основании граничного условия при $k = 4$ получаем

$$\frac{q_4 - q_3}{\zeta_4 - \zeta_3} + L^* q_4 = -\frac{R}{g} A_{T_4},$$

откуда

$$q_4 = c_1 q_3 - c_0,$$

где

$$c_1 = \frac{1}{1 + (\zeta_4 - \zeta_3) L^*}; \quad c_0 = \frac{RA_{T_4}(\zeta_4 - \zeta_3)}{1 + (\zeta_4 - \zeta_3) L^*}.$$

С учетом этого для уровня $k = 3$ имеем

$$\nabla^2 q_3 + a_{32}q_2 - a_{33}q_3 + a_{34}(c_1 q_3 - c_0) = f_3. \quad (3.30)$$

Перепишем полученную систему уравнений (3.28)—(3.30) в следующем виде:

$$\text{при } k = 1 \quad \nabla^2 q_1 + q_1(a_{10} - a_{11}) + a_{12}q_2 = f_1,$$

$$\text{при } k = 2 \quad \nabla^2 q_2 + a_{21}q_1 - a_{22}q_2 + a_{23}q_3 = f_2,$$

$$\text{при } k = 3 \quad \nabla^2 q_3 + a_{32}q_2 + (a_{34}c_1 - a_{33})q_3 = f_3 + a_{34}c_0. \quad (3.31)$$

Таким образом, решение трехмерной задачи сводится к решению двумерных задач, так как полученная система уравнений для каждого уровня содержит оператор Лапласа, зависящий от горизонтальных координат x и y на одном уровне. В связи с этим метод получил название метода плоскостей.

Преобразуем систему (3.28)—(3.30), введя следующие обозначения:

$$a_{10} - a_{11} = -b_{11}; \quad a_{12} = b_{12}; \quad a_{21} = b_{21}; \quad a_{22} = b_{22};$$

$$a_{32} = b_{32}; \quad a_{34}c_1 - a_{33} = -b_{33}.$$

В результате получим систему из трех уравнений с тремя неизвестными (q_1 , q_2 и q_3):

$$\text{при } k = 1 \quad \nabla^2 q_1 - b_{11}q_1 + b_{12}q_2 + 0 \cdot q_3 = f_1,$$

$$\text{при } k = 2 \quad \nabla^2 q_2 + b_{21}q_1 - b_{22}q_2 + b_{23}q_3 = f_2,$$

$$\text{при } k = 3 \quad \nabla^2 q_3 + 0 \cdot q_1 + b_{32}q_2 - b_{33}q_3 = f_3 + a_{34}c_0. \quad (3.32)$$

Здесь первый индекс означает номер уровня, для которого записывается уравнение, а второй — номер соседнего уровня. Такую систему уравнений мы могли бы записать для большого числа уравнений. Отметим только, что первое уравнение будет всегда содержать значения q на данном и нижележащем уровнях. Последнее уравнение будет включать значения q на данном и вышележащем уровнях. Уравнения для промежуточных уровней (в данном случае для уровня $k = 2$) будут содержать значения q для данного, вышележащего и нижележащего уровней.

Следует также обратить внимание на то, что коэффициенты b , a и c_0 могут быть вычислены заранее, поскольку включают только константы. Исключение составляет параметр устойчивости c^2 , который в них входит в качестве сомножителя. При необходимости можно учесть изменчивость параметра устойчивости.

Существуют различные методы решения полученной системы уравнений. Одним из эффективных методов является метод канонизации. Рассмотрим его применение на примере системы уравнений (3.32).

Умножим каждое из уравнений системы (3.32) на некоторые постоянные X_1, X_2, X_3 и сложим их. Тогда получим

$$\sum_{k=1}^3 X_k \nabla^2 q_k + (-X_1 b_{11} + X_2 b_{21}) q_1 + (X_1 b_{12} - X_2 b_{22} + X_3 b_{32}) q_2 + (X_2 b_{23} - X_3 b_{33}) q_3 = \sum_{k=1}^3 f'_k X_k. \quad (3.33)$$

Здесь $f'_k = f_k + d_k$, причем $d_k = 0$ при $k = 1, 2$. При $k = 3$ $d_k = = a_{31} c_0$. Поскольку X_k не зависит от x и y , можем записать

$$\sum_{k=1}^3 X_k \nabla^2 q_k = \sum_{k=1}^3 \nabla^2 (q_k X_k) = \nabla^2 \sum_{k=1}^3 X_k q_k. \quad (3.34)$$

Обозначая $\sum_{k=1}^3 X_k q_k = \Psi$, получаем:

$$\nabla^2 \sum_{k=1}^3 X_k q_k = \nabla^2 \Psi. \quad (3.35)$$

На коэффициенты X_k наложим условие, чтобы они удовлетворяли системе уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} -X_1 b_{11} + X_2 b_{21} + X_3 \cdot 0 &= -\lambda X_1, \\ X_1 b_{12} - X_2 b_{22} + X_3 b_{32} &= -\lambda X_2, \\ X_1 \cdot 0 + X_2 b_{23} - X_3 b_{33} &= -\lambda X_3. \end{aligned} \quad (3.36)$$

где λ — пока неопределенный параметр.

Уравнение (3.33) с учетом выражений (3.35) и (3.36) мы сможем теперь переписать в виде

$$\nabla^2 \Psi = \lambda \Psi = F, \quad (3.37)$$

где $F = \sum_{k=1}^3 X_k f'_k$.

В этом уравнении содержится одна неизвестная функция Ψ (при условии, что λ и X определены).

Для нахождения коэффициентов λ используется система уравнений (3.36), записанная в виде

$$\begin{aligned} X_1 (b_{11} - \lambda) - X_2 b_{21} + 0 \cdot X_3 &= 0, \\ X_1 b_{12} + X_2 (b_{22} - \lambda) - X_3 b_{32} &= 0, \\ X_1 \cdot 0 - X_2 b_{23} + X_3 (b_{33} - \lambda) &= 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Из этой системы следует, что λ — собственное число матрицы коэффициентов b , которые известны.

Система (3.38) имеет ненулевое решение, если определитель ее равен нулю:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda & -b_{21} & 0 \\ -b_{12} & b_{22} - \lambda & -b_{32} \\ 0 & -b_{23} & b_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель системы по элементам первой строки, получаем для собственных чисел следующее характеристическое уравнение:

$$(b_{11} - \lambda) [(b_{22} - \lambda) (b_{33} - \lambda) - b_{23} b_{32}] - b_{21} [b_{12} (b_{33} - \lambda)] = 0.$$

Решение этого уравнения имеет три корня (три собственных числа) $\lambda_i = \lambda (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Все собственные числа вещественны и положительны. Каждому λ_i соответствует свой собственный вектор X_{ik} .

С учетом этого уравнения (3.37) следует записать в виде системы:

$$\nabla^2 \Psi_i - \lambda_i \Psi_i = F_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3.39)$$

где

$$F_i = \sum_{k=1}^3 X_{ik} f'_k; \quad \Psi_i = \sum_{k=1}^3 X_{ik} q_k. \quad (3.40)$$

После определения λ_i находим значения Ψ_i из уравнений (3.39) (для каждого λ_i). Из системы (3.36) находятся значения X_{ik} . После этого из уравнений

$$\Psi_i = \sum_{k=1}^3 X_{ik} q_k$$

определяются значения q_k . Поскольку матрица коэффициентов b зависит только от выбора уровней, то λ_i и X_{ik} могут быть рассчитаны заранее.

Поскольку λ_i — вещественные положительные числа, то уравнения (3.39) являются уравнениями Гельмгольца, решение которых мы рассматривали (см. п. 3.1, 3.2).

Поскольку $\lambda_i = 1/\mathcal{L}_i^2$, то $\mathcal{L}_i = 1/\sqrt{\lambda_i}$ — характерный масштаб возмущений.

Точное решение уравнения Гельмгольца для бесконечной области ($R_0 \rightarrow \infty$) имеет следующий вид:

$$\Psi_i(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(\rho, \varphi_*) K_0\left(\frac{r}{\mathcal{L}_i}\right) \rho \, d\rho \, d\varphi_*.$$

Если расположить λ_i в порядке их возрастания, т. е. $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, то $\mathcal{L}_1 > \mathcal{L}_2 > \mathcal{L}_3$ и функции Ψ_i будут описывать влияние все более мелких возмущений на поле q .

По данным Л. В. Руховца, собственным числам $\lambda_i = 1, 2, \dots, 7$ будут соответствовать следующие значения $\mathcal{L}_i$:

λ_i	1	2	3	4	5	6	7
$\mathcal{L}_i$ км	2500	1100	440	250	150	110	90

Очевидно, не имеет смысла искать решение для очень мелких возмущений (малых $\mathcal{L}_i$). Обычно бывает достаточно ограничиться тремя-четырьмя собственными числами. Поэтому такие модели получили название малопараметрических.

Существуют и другие методы решения уравнений квазигеострофической бароклинной модели, например метод интегральных соотношений, предложенный А. А. Дородницыным; метод Марчука Г. И., Курбаткина Г. П., Каленковича Е. Е. и др.; метод дробных шагов Г. И. Марчука; метод неполной факторизации Н. И. Будеева.

3.4. Квазисоленоидальные прогностические модели

Уточнением квазигеострофического приближения является условие квазисоленоидальности, позволяющее учесть отклонение ветра от геострофического. Этот эффект важно учесть хотя бы частично, поскольку отклонения ветра от геострофического иногда могут достигать 20—30 %, причем максимальные отклонения характерны для наиболее сложных синоптических ситуаций, связанных с резкой перестройкой термобарических полей.

Это дает основание считать, что модели, построенные на основе квазисоленоидального приближения, должны несколько лучше описывать эволюцию метеорологических полей. Кроме того, некоторые из этих моделей менее чувствительны к тому, что параметр Кориолиса в низких широтах может быть мал.

На экваторе параметр Кориолиса обращается в нуль, и здесь квазигеострофическое приближение неприменимо.

Квазисоленоидальные модели, в которых составляющие скорости выражаются через функцию тока, свободны от этого недостатка.

3.4.1. Баротропная бездивергентная квазисоленоидальная модель

Соленоидальным называется вектор, дивергенция которого равна нулю. Применительно к вектору скорости ветра это условие записывается в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{c} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (4.1)$$

где u и v — составляющие скорости ветра по осям x и y .

Условие (4.1) позволяет выразить u и v через скалярную функцию тока ψ , так что выполняются соотношения

$$u_{\psi} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Прогностические модели, в которых постулируется соленоидальность движения, называются соленоидальными бездивергентными моделями или баротропными квазисоленоидальными моделями среднего уровня.

Модели, в которых u и v на изобарическом уровне выражаются через функцию тока, но при этом принимается, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \neq 0, \quad \text{а } u = u_{\psi} + u', \quad v = v_{\psi} + v',$$

называются квазисоленоидальными дивергентными моделями. Квазисоленоидальные дивергентные модели могут быть баротропными (одноуровненными) и бароклинными (многоуровненными).

Если в модели непосредственно рассчитываются u' и v' , то такую модель называют агеострофической.

Для среднего уровня, для которого постулируется, что горизонтальная дивергенция скорости равна нулю и $\Omega = \nabla^2 \psi$, уравнение вихря (1.2) примет вид

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\nabla^2 \psi + l, \psi) = A_g^* \psi. \quad (4.2)$$

В правой части уравнения (4.2) якобиан A_g^* представляет собой горизонтальную соленоидальную адвекцию абсолютного вихря скорости.

Уравнение (4.2) является баротропным соленоидальным уравнением вихря скорости, которое представляет собой уравнение Пуассона относительно $\partial \psi / \partial t$ и принадлежит к нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных.

Сравнение этого уравнения с баротропным уравнением вихря скорости в квазигеострофическом приближении показывает, что они аналогичны с точки зрения математической реализации, поэтому рассмотренные в п. 3.2 методы решения применимы и к уравнению (4.2). Различие заключается в том, что в квазигеострофических моделях в качестве начальных условий используются поля геопотенциала, в соленоидальных и квазисоленоидальных моделях нужно знать поле функции тока.

Для определения функции тока используется уравнение баланса, являющееся следствием уравнения дивергенции:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial D}{\partial t} + u \frac{\partial D}{\partial x} + v \frac{\partial D}{\partial y} + \tau \frac{\partial D}{\partial p} + \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial p} + \\ & + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - l \Omega + u \frac{\partial l}{\partial x} - v \frac{\partial l}{\partial y} = -\nabla^2 \Phi. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь $D = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y$ — горизонтальная дивергенция скорости.

Оставляя в уравнении (4.3) лишь главные члены, получаем:

$$l\Omega = \nabla^2\Phi, \quad (4.4)$$

или

$$l\nabla^2\psi = \nabla^2\Phi. \quad (4.5)$$

Если пренебречь изменением параметра Кориолиса с широтой, то уравнение (4.5) может быть переписано в форме уравнения Лапласа:

$$\nabla^2 \left(\psi - \frac{\Phi}{l} \right) = 0. \quad (4.6)$$

Это линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка имеет только одно ограниченное решение

$$\psi_g = \Phi/l,$$

которое называется геострофическим приближением функции тока.

Сохраняя в уравнении дивергенции члены порядка 10^{-10} , получим следующее приближение для уравнения дивергенции:

$$l\Omega - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + v \frac{\partial l}{\partial x} - u \frac{\partial l}{\partial y} = \nabla^2\Phi. \quad (4.7)$$

Уравнение (4.7) является диагностическим, так как не содержит производной по времени; оно более полно описывает связь между горизонтальными компонентами вектора скорости ветра и геопотенциалом, нежели квазигеострофическое приближение.

Направим ось x на восток и будем считать, что l зависит только от y , т. е. от широты. В этом случае

$$\frac{\partial l}{\partial y} = \beta = \frac{2\omega \cos \varphi}{a_0},$$

где a_0 — радиус Земли.

Выразив в уравнении (4.7) компоненты скорости ветра через функцию тока, получим уравнение баланса в квазисоленоидальном приближении:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{l} \nabla^2\Phi - \frac{2}{l} \left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - \frac{\beta}{l} \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad (4.8)$$

С помощью квазисоленоидального приближения, так же как и с помощью квазигеострофического, фильтруют гравитационные волны. В связи с этим прогностические модели, основанные на квазигеострофическом и квазисоленоидальном приближениях, называются фильтрованными.

Относительно геопотенциала уравнение (4.8) является уравнением Пуассона; относительно функции тока ψ оно является нелинейным дифференциальным уравнением Монжа — Ампера.

В ряде случаев достаточно использовать линейное уравнение баланса, связывающее поле геопотенциала с полем функции ψ в следующем виде:

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{l} \nabla^2\Phi - \frac{\beta}{l} \frac{\partial\psi}{\partial y}. \quad (4.9)$$

Рассмотрим решение уравнения баланса (4.8). Для численного решения существенно, к какому типу это уравнение принадлежит. Уравнение (4.8) может быть гиперболического, параболического и эллиптического типов.

Запишем уравнение в общем виде:

$$A \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + D + E \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0, \quad (4.10)$$

где A, B, C, D, E — некоторые непрерывные функции от $x, y, \psi, \partial\psi/\partial x, \partial\psi/\partial y$.

Сравнивая уравнение (4.10) с уравнением (4.8), умноженным на l , видим, что в нашем случае $A = C = l, B = 0, D = -\nabla^2 \Phi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial y}, E = 2$. Как известно, эти коэффициенты могут удовлетворять следующим неравенствам:

$$AC - B^2 - DE > 0 \text{ (уравнение эллиптического типа),}$$

$$AC - B^2 - DE < 0 \text{ (уравнение гиперболического типа),}$$

$$AC - B^2 - DE = 0 \text{ (уравнение параболического типа).}$$

Подставив в эти выражения значения коэффициентов и отбросив для простоты анализа член $\beta (\partial\psi/\partial y)$, эти неравенства запишем следующим образом:

$$l^2 + 2\nabla^2 \Phi > 0, \quad (4.11)$$

$$l^2 + 2\nabla^2 \Phi < 0, \quad (4.12)$$

$$l^2 + 2\nabla^2 \Phi = 0. \quad (4.13)$$

В общем случае уравнение баланса для атмосферных условий может быть любого типа. Однако в подавляющем числе случаев оно относится к эллиптическому типу, т. е. в атмосфере чаще всего выполняется условие (4.11), которое удобно представить в виде

$$\frac{1}{l} \nabla^2 \Phi > -\frac{l}{2}. \quad (4.14)$$

В левой части неравенства (4.14) стоит геострофический вихрь, который в среднем на порядок меньше l . Поэтому даже если $\frac{1}{l} \nabla^2 \Phi < 0$, все равно условие (4.14) будет выполняться. Однако в низких широтах, при малых l и при больших по абсолютной величине значениях антициклонического геострофического вихря, условие эллиптичности может нарушаться, а уравнение баланса при этом становится параболическим или гиперболическим.

При решении уравнения баланса итерационными методами нарушение условия эллиптичности приводит к расходимости итерационного процесса. В связи с этим в каждой точке предварительно проверяется выполнение условия эллиптичности. Если где-то оно нарушается и $\nabla^2 \Phi < -l/2$, поле геопотенциала в этой точке искусственно сглаживается так, чтобы выполнялось условие эллиптичности $\nabla^2 \Phi > -l/2$. Такое исправление поля вследствие малости $\frac{1}{l} \nabla^2 \Phi$ по сравнению с l дает ошибки в пределах ошибок измерения геопотенциала и не влияет на точность расчета.

В качестве граничных условий при решении уравнения Монжа — Ампера на границе обычно задается геострофическая функция тока:

$$\psi = \Phi/l.$$

Воспользуемся в уравнении (4.8) тождественным преобразованием:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 \right]. \quad (4.15)$$

Тогда вместо (4.8) получим

$$(\nabla^2 \psi)^2 + 2l \nabla^2 \psi - \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 + \left(2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2\beta \frac{\partial \psi}{\partial y} + 2\nabla^2 \Phi \right] = 0. \quad (4.16)$$

Решая (4.16) как квадратное уравнение относительно $\nabla^2 \psi$, получаем:

$$\nabla^2 \psi = -l \pm \sqrt{l^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 + \left(2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2\beta \frac{\partial \psi}{\partial y} + 2\nabla^2 \Phi}. \quad (4.17)$$

Из двух решений (4.17) для северного полушария используется одно, в котором перед радикалом стоит знак «плюс», так как только в этом случае мы можем получить геострофическое приближение для функции тока северного полушария. Отбросив в выражении (4.17) малые члены, находим:

$$\nabla^2 \psi = -l \pm l \sqrt{1 + 2 \frac{\nabla^2 \Phi}{l^2}}. \quad (4.18)$$

В северном полушарии $-l + |l| = 0$, в южном $-l - |l| = 0$. Поскольку $\frac{1}{l} \nabla^2 \Phi$ почти на порядок меньше l , можно считать, что член $2 \frac{\nabla^2 \Phi}{l^2} < 1$.

Представим функцию $\left(1 + 2 \frac{\nabla^2 \Phi}{l^2}\right)^{1/2}$ в виде степенного ряда и запишем выражение (4.18) в следующем виде:

$$\nabla^2 \psi = -l + l \left(1 + \frac{\nabla^2 \Phi}{l^2}\right) + \dots \approx \frac{\nabla^2 \Phi}{l}. \quad (4.19)$$

Таким образом, выбор знака «плюс» перед корнем и отбрасывание нелинейных членов приводит нас к геострофическому приближению для вихря.

При решении уравнения баланса относительно функции тока на основе (4.17) строится следующий итерационный процесс:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi^{(v+1, \mu)} = & -l + \\ & + \sqrt{l^2 + \left(\frac{\partial^2 \psi^{(v, \mu)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^{(v, \mu)}}{\partial y^2} \right)^2 + \left(2 \frac{\partial^2 \psi^{(v, \mu)}}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2\beta \frac{\partial \psi}{\partial y} + 2\nabla^2 \Phi}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

где индексы $v, \mu = 1, 2, 3, \dots$ — номера итераций.

Итерация по v обеспечивает уточнение значений $\nabla^2\psi$ на $(v + 1)$ -й итерации по значениям функции тока на предыдущей итерации v . Далее решается уравнение Пуассона относительно функции тока ψ итерациями по μ . В качестве нулевого приближения для функции тока задается ее геострофическое приближение: $\psi^0 = \Phi/l$.

Итерации по v и μ продолжаются до тех пор, пока максимальные абсолютные значения разностей $\nabla^2\psi$ и ψ на последующей и предыдущей итерации не станут меньше заданной погрешности ε_1 и ε_2 :

$$\begin{aligned} \max |\nabla^2\psi^{v+1} - \nabla^2\psi^v| &\leq \varepsilon_1, \\ \max |\psi^{\mu+1} - \psi^\mu| &\leq \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Реализация квазисоленоидальных моделей производится в следующей последовательности.

1. По полю Φ определяется начальное поле функции тока ψ . В этом случае решается уравнение баланса в форме (4.20).

2. По баротропной или бароклинной квазисоленоидальной модели ищутся прогностические значения функции тока на основе прогностического уравнения (4.2).

3. По прогностическим значениям функции тока определяются прогностические значения геопотенциала с помощью уравнения баланса, решаемого относительно геопотенциала как уравнение Пуассона.

3.5. Интегральные свойства

3.5.1. Интегральные инварианты баротропной квазигеострофической и квазисоленоидальной моделей

При реализации прогностических моделей в конечно-разностной форме приходится сталкиваться с появлением различных ошибок. В процессе интегрирования шагами по времени эти ошибки могут накапливаться.

В связи с этим в задачах численного прогноза погоды, особенно в задачах прогноза на длительный срок, необходимо следить за выполнением интегральных свойств (законов сохранения), вытекающих из физической сущности задачи.

Рассмотрим интегральные свойства на примере баротропной квазисоленоидальной модели. Полученные здесь выводы легко распространяются и на баротропную квазигеострофическую модель.

Условие бездивергентности позволяет ввести функцию тока ψ , так что $u = -\partial\psi/\partial y$, $v = \partial\psi/\partial x$. Тогда баротропное уравнение вихря скорости записывается в виде (см. уравнение (4.2))

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2\psi + l) = - (\psi, \nabla^2\psi + l). \quad (5.1)$$

Если положить $l = \text{const}$, то получим:

$$\nabla^2 \frac{\partial\psi}{\partial t} = (\nabla^2\psi, \psi). \quad (5.2)$$

Рис. 3.5. Область интегрирования якобиана (A, B) в интервале $a—b$ по оси x и $c—d$ по оси y .

В правой части рассматриваемых уравнений стоит якобиан вида (A, B) . Напомним некоторые свойства якобиана:

$$(A, B) = -(B, A), \quad (A, A) = 0, \\ (A, B+C) = (A, B) + (A, C), \quad (A+C, B) = \\ = (A, B) + (C, B),$$

$$(A+C, B+D) = (A+C, B) + (A+C, D) = \\ = (A, B) + (C, B) + (A, D) + (C, D),$$

$$A(A, B) = \frac{1}{2}(A^2, B),$$

$$B(A, B) = \frac{1}{2}(A, B^2),$$

$$\alpha(A, B) = (\alpha A, B) = (A, \alpha, B), \text{ если } \alpha = \text{const.} \quad (5.3)$$

Рассмотрим область интегрирования уравнений (5.2), представленную на рис. 3.5. Ее площадь равна $S = (b-a)(d-c)$. Легко показать, что если на границе области величины A и B постоянны и определены с точностью до постоянного множителя, т. е. $A|_{\Gamma} = B|_{\Gamma} = \text{const}$, то

$$\int_{(S)} (A, B) dS = \int_c^d \int_a^b (A, B) dx dy = 0. \quad (5.4)$$

Действительно, можно записать:

$$(A, B) = \frac{\partial}{\partial x} \left(A, \frac{\partial B}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(A, \frac{\partial B}{\partial x} \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left(B \frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\partial A}{\partial y} \right). \quad (5.5)$$

Однако

$$\int_a^b \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial B}{\partial y} \right) dx dy = \int_c^d \left(A \frac{\partial B}{\partial y} \right) \Big|_a^b dy = 0, \quad (5.6)$$

$$\int_a^b \int_c^d \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial B}{\partial x} \right) dx dy = \int_a^b \left(A \frac{\partial B}{\partial x} \right) \Big|_c^d dx = 0, \quad (5.7)$$

так как $A|_{\Gamma} = B|_{\Gamma} = \text{const}$.

Интегрируя уравнение (5.2) по площади S , получаем:

$$\int_{(S)} \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} dS = \int_{(S)} (\nabla^2 \psi, \psi) dS. \quad (5.8)$$

На основании интегральных свойств якобиана вида (A, B) (условия (5.7)) можно записать

$$\int_{(S)} (\nabla^2 \psi, \psi) dS = \int_a^b \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi \frac{\partial \psi}{\partial y} dx dy - \int_a^b \int_c^d \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dy = 0, \quad (5.9)$$

откуда с учетом выражения (5.8) находим

$$\int_{(S)} \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_{(S)} \nabla^2 \psi dS = 0. \quad (5.10)$$

Обозначив $\int_{(S)} \Delta^2 \psi dS = J_1,$

получим:

$$\partial J_1 / \partial t = 0. \quad (5.11)$$

Таким образом, если положить на границе области $\psi = \text{const}$ (что обычно и делается при реализации баротропных моделей на ограниченной территории), то сохраняется интегральный инвариант J_1 .

Рассмотрим теперь другой случай. Умножим уравнение (5.2) на $\nabla^2 \psi$ и произведем интегрирование полученного уравнения по площади S с использованием свойств якобиана (5.3). Очевидно, что

$$\int_a^b \int_c^d \nabla^2 \psi (\nabla^2 \psi, \psi) dx dy = \frac{1}{2} \int_a^b \int_c^d ((\nabla^2 \psi)^2, \psi) dx dy = 0. \quad (5.12)$$

Таким образом,

$$\int_{(S)} \nabla^2 \psi \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi dS = \int_a^b \int_c^d \nabla^2 \psi (\nabla^2 \psi, \psi) dx dy = 0. \quad (5.13)$$

или

$$\frac{1}{2} \int_{(S)} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi)^2 dS = 0. \quad (5.14)$$

Обозначая

$$\int_{(S)} (\nabla^2 \psi)^2 dS = J_2,$$

получаем:

$$\partial J_2 / \partial t = 0. \quad (5.15)$$

Это еще один закон сохранения квадрата вихря (энстрофии).

Умножим теперь уравнение (5.2) на ψ и покажем, что

$$\int_{(S)} \psi \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} dS = \int_{(S)} \psi (\nabla^2 \psi, \psi) dS = 0. \quad (5.16)$$

Для рассматриваемой области интегрирования

$$\begin{aligned}
 \int_{(S)} \Psi \nabla^2 \frac{\partial \Psi}{\partial t} dS &= \int_a^b \int_c^d \Psi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) dy dx = \\
 &= \int_a^b \int_c^d \left(\Psi \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial x} + \Psi \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial y} \right) dy dx = \\
 &= \int_a^b \int_c^d \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Psi \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) \right] dy dx - \\
 &\quad - \int_a^b \int_c^d \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) dy dx. \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

Если на границе области $\Psi|_{\Gamma} = \text{const}$, а $\partial \Psi / \partial t = 0$, то первый интеграл в правой части (5.17) равен нулю. Тогда

$$\int_{(S)} \Psi \nabla^2 \frac{\partial \Psi}{\partial t} dS = - \frac{1}{2} \int_a^b \int_c^d \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] dy dx. \quad (5.18)$$

В квазисоленоидальном приближении

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 = \frac{v^2}{2}; \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 = \frac{u^2}{2}; \quad \text{а} \quad \frac{u^2 + v^2}{2} = K,$$

где K — кинетическая энергия единицы массы.

Следовательно,

$$\int_{(S)} \Psi \nabla^2 \frac{\partial \Psi}{\partial t} dS = - \int_{(S)} \frac{\partial K}{\partial t} dS. \quad (5.19)$$

В силу рассмотренных выше интегральных свойств якобиана вида (A, B) .

$$\int_{(S)} \Psi (\nabla^2 \Psi, \Psi) dS = \frac{1}{2} \int_{(S)} (\nabla^2 \Psi, \Psi^2) dS = 0. \quad (5.20)$$

Таким образом, из (5.16) с учетом (5.19) и (5.20) для баротропной квазигеострофической модели на среднем уровне следует еще один закон сохранения:

$$\int_{(S)} \frac{\partial K}{\partial t} dS = \frac{\partial}{\partial t} \int_{(S)} K dS = 0, \quad (5.21)$$

или

$$\partial J_3 / \partial t = 0, \quad (5.22)$$

где $J_3 = \int_{(S)} K dS$ — интегральная по площади кинетическая энергия.

Следовательно, ставя на границе области интегрирования граничные условия в форме $\Psi = \text{const}$, мы автоматически накладываем

условия сохранения трех интегральных инвариантов: интегральной завихренности (интегрального лапласиана J_1), интегрального квадрата абсолютного вихря (J_2) и интегральной кинетической энергии (J_3). Можно также показать, что сохранение энтропии автоматически означает сохранение еще одного инварианта, а именно квадрата полной деформации $D_1^2 + D_2^2$, где

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ D_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Следствием постоянства интегрального лапласиана (интегральной завихренности) является также постоянство относительного углового момента M_a , под которым понимается произведение зональной скорости движения частицы относительно Земли на расстояние до оси вращения, равное $a_0 \cos \varphi$, где a_0 — радиус Земли.

Для бароклининой модели при условии адиабатичности и отсутствия трения должен выполняться закон сохранения полной энергии (сумма кинетической и доступной, или полезной, потенциальной энергии). Существуют и другие интегральные инварианты.

3.5.2. Условия, обеспечивающие сохранение интегральных инвариантов

Остановимся теперь на методах конечно-разностной аппроксимации, обеспечивающей выполнение законов сохранения для баротропной квазисоленоидальной модели.

В прогностическом уравнении этой модели содержится член

$$(\nabla^2 \psi + l, \psi) = (\Omega, \psi). \quad (5.24)$$

Для конечно-разностной аппроксимации якобиана в формуле (5.24) можно использовать несколько способов, которые вытекают из трех форм записи якобиана (Ω, ψ) :

$$\begin{aligned} (\Omega, \psi)' &= \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ (\Omega, \psi)'' &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \psi \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \psi \right), \\ (\Omega, \psi)''' &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\Omega \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\Omega \frac{\partial \psi}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (5.25)$$

В общем случае

$$\begin{aligned} (\Omega, \psi)' &= \frac{1}{4(\delta s)^2} [(\Omega_{i+1, j} - \Omega_{i-1, j})(\psi_{i, j+1} - \psi_{i, j-1}) - \\ &\quad - (\Omega_{i, j+1} - \Omega_{i, j-1})(\psi_{i+1, j} - \psi_{i-1, j})], \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} (\Omega, \psi)'' &= \frac{1}{4(\delta s)^2} [- (\Omega_{i+1, j+1} - \Omega_{i+1, j-1}) \psi_{i+1, j} + \\ &\quad + (\Omega_{i-1, j+1} - \Omega_{i-1, j-1}) \psi_{i-1, j} + (\Omega_{i+1, j+1} - \Omega_{i-1, j+1}) \psi_{i, j+1} - \\ &\quad - (\Omega_{i+1, j-1} - \Omega_{i-1, j-1}) \psi_{i, j-1}], \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$(\Omega, \psi)^* = \frac{1}{4(\delta s)^2} [\Omega_{i+1, j} (\psi_{i+1, j+1} - \psi_{i+1, j-1}) - \\ - \Omega_{i-1, j} (\psi_{i-1, j+1} - \psi_{i-1, j-1}) - \Omega_{i, j+1} (\psi_{i+1, j+1} - \psi_{i-1, j+1}) + \\ + \Omega_{i, j-1} (\psi_{i+1, j-1} - \psi_{i-1, j-1})]. \quad (5.28)$$

Легко видеть, что во всех трех случаях якобиан представляется в виде сумм парных произведений Ω и ψ . Однако комбинации эти в каждом из трех вариантов различны.

Следуя Аракаве, конечно-разностный якобиан можно записать в общем виде:

$$4(\delta s)^2 (\Omega, \psi)_k = \sum_r \sum_s c_{hrs} \Omega_r \psi_s = \sum_r a_{kr} \Omega_r, \quad (5.29)$$

где

$$a_{kr} = \sum_s c_{hrs} \psi_s, \quad (5.30)$$

c_{hrs} — соответствующий данной комбинации коэффициент; индекс k — характеризует точку, для которой ведется расчет; r и s — индексы на двумерной сетке; a_{ks} — линейная комбинация значений ψ или по существу линейная комбинация компонентов вихря, выраженных через конечные разности функции тока.

Умножив выражение (5.29) на Ω_k , получим:

$$4(\delta s)^2 \Omega_k (\Omega, \psi)_k = \sum_r a_{kr} \Omega_k \Omega_r. \quad (5.31)$$

Член $a_{kr} \Omega_k \Omega_r$ можно интерпретировать как энстрофию, полученную в точке k сетки (т. е. $1/2\Omega_k^2$) за счет взаимодействия точки k с точкой r . Аналогично член $a_{rk} \Omega_r \Omega_k$ можно интерпретировать как энстрофию, полученную в точке r в результате взаимодействия с точкой k .

Для того чтобы избежать появления ложной энстрофии, эти две величины должны быть одинаковы по модулю и противоположны по знаку независимо от значений Ω_k и Ω_r . Данное условие будет выполняться, если

$$a_{rk} = -a_{kr}. \quad (5.32)$$

Нетрудно показать, что якобиан (Ω, ψ) может быть записан и в другой общей форме:

$$4(\delta s)^2 (\Omega, \psi)_k = \sum_s b_{ks} \psi_s, \quad (5.33)$$

где, как следует из выражения (5.29)

$$b_{ks} = \sum_r c_{hrs} \Omega_r. \quad (5.34)$$

Здесь b_{ks} — линейная комбинация значений скорости ветра в рассматриваемой совокупности точек сетки. Умножая выражение (5.33) на ψ_k , получаем:

$$4(\delta s)^2 \psi_k (\Omega, \psi)_k = \sum_s b_{ks} \psi_k \psi_s. \quad (5.35)$$

Правая часть выражения (5.35) соответствует временному изменению $1/2\psi_k^2$ за счет адвекции. Можно, следовательно, интерпретировать член $b_{ks}\psi_k\psi_s$ как кинетическую энергию, полученную в точке k в результате взаимодействия с точкой s . Аналогично член $b_{ks}\psi_s\psi_k$ можно интерпретировать как кинетическую энергию, приобретенную в точке s в результате взаимодействия с точкой k . Эти две величины, так же как и a_{rk} и a_{kr} , должны быть одинаковы по модулю и противоположны по знаку независимо от значений ψ_s и ψ_k во избежание появления ложной кинетической энергии. Отсюда получаем еще одно условие:

$$b_{sh} = -b_{hs}. \quad (5.36)$$

Теперь вернемся к трем конечно-разностным аппроксимациям якобиана (Ω, ψ) , описываемым формулами (5.25), (5.27) и (5.29). Как было показано в предыдущем параграфе, эти три конечно-разностные аппроксимации удовлетворяют условиям, в соответствии с которыми

$$\int_{(S)} (\Omega, \psi) dS = 0. \quad (5.37)$$

Следуя Аракаве, составим более общий конечно-разностный аналог якобиана (Ω, ψ) как средневзвешенное значение из трех рассмотренных выше конечно-разностных аналогов, т. е. пусть

$$(\Omega, \psi) = \alpha_0 (\Omega, \psi)'_k + \beta_0 (\Omega, \psi)''_k + \gamma_0 (\Omega, \psi)'''_k, \quad (5.38)$$

где $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ — весовые множители, подчиненные условию нормировки:

$$\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 = 1. \quad (5.39)$$

Якобиан вида (5.38) получил название якобиана Аракавы. Его часто обозначают следующим образом: $J_A = (A, B)_A$. Аракава показал, что

$$\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 1/3.$$

Тогда для сетки точек, представленной на рис. 3.6, якобиан Аракавы может быть записан в виде

$$\begin{aligned} (A, B)_A = \frac{1}{12(\delta s)^2} [(A_4 - A_5)(B_2 - B_3) - (A_2 - A_3)(B_4 - B_5) + \\ + B_2(A_9 - A_8) - B_3(A_6 - A_7) - B_4(A_9 - A_8) + B_5(A_8 - A_7) + \\ + A_4(B_9 - B_8) - A_5(B_8 - B_7) - A_2(B_9 - B_8) + A_3(B_6 - B_7)]. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Якобиан Аракавы помимо сохранения вихря обеспечивает сохранение энтропии и кинетической энергии.

Глава 4 **ПРОГНОСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ОСНОВАННЫЕ НА ПОЛНЫХ УРАВНЕНИЯХ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ**

Теоретические исследования и оперативная практика позволили выявить целый ряд недостатков, присущих фильтрованным (квази-геострофическим и квазисоленоидальным) моделям, которые в основном связаны с неточностью описания движений в рамках квази-геострофического или квазисоленоидального приближений. Решения фильтрованных уравнений описывают только длинные волны (волны Росби).

Современные достижения динамической метеорологии и вычислительной математики позволяют снять ограничения на связи полей ветра и давления, налагаемые в квазигеострофических и квазисоленоидальных моделях, и перейти к построению моделей на основе исходных (непреобразованных) уравнений гидротермодинамики атмосферы.

Непреобразованные уравнения гидротермодинамики в метеорологии принято называть полными (в литературе их иногда называют примитивными), а прогностические модели, построенные на основе этих уравнений, — негеострофическими или моделями, основанными на полных уравнениях.

В большинстве негеострофических прогностических моделей используется уравнение статики. В этом случае, кроме волн Росби, уравнения описывают также инерционно-гравитационные волны.

Достижения в области разработки и практического применения негеострофических моделей базируются на исследованиях И. А. Кибеля, Г. И. Марчука и их учеников, а также зарубежных ученых — Смагоринского, Филиппса, Чарни, Шумана, Хинкельмана и др.

В настоящей главе будут обсуждаться вопросы, связанные с решением полных уравнений в конечно-разностной форме и построением прогностических моделей на основе этих уравнений в квазистатическом и адиабатическом приближениях для ограниченных территорий. В этом случае можно не использовать уравнения в сферических координатах, а ограничиться уравнениями в квазидекартовых координатах с вертикальной координатой, связанной с давлением.

4.1. Решение систем полных уравнений гидротермодинамики в адиабатическом приближении

4.1.1. Решение системы полных уравнений гидротермодинамики в системе координат x, y, ζ, t

Запишем систему полных уравнений в системе координат x, y, ζ, t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial \zeta} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv + F_x, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial \zeta} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - lu + F_y, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{RT}{g} (\gamma_a - \gamma) \frac{\omega}{\zeta} &= \frac{\mathcal{E}}{c_p}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} &= -\frac{R}{\zeta} T, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u, v — составляющие вектора скорости ветра по осям x и y ; $\zeta = p/P$; p — давление; $P = 1000$ гПа; $\omega = d\zeta/dt$ — аналог вертикальной скорости; R — газовая постоянная для сухого воздуха; $\Phi = gz$ — геопотенциал; g — ускорение свободного падения; T — температура (К); $l = 2\bar{\omega} \sin \varphi$ — параметр Кориолиса; $\bar{\omega}$ — угловая скорость вращения Земли; φ — широта; $\gamma_a = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{g}{R}$ — сухоадиабатический градиент; $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$; c_p, c_v — удельные теплоемкости при

постоянном давлении и объеме; $\gamma = -\partial T/\partial \zeta$ — вертикальный градиент температуры; F_x, F_y — проекции силы турбулентной вязкости на оси x и y ; $\mathcal{E}$ — приток тепла к единице массы в единицу времени.

В системе уравнений (1.1) пока не будем учитывать члены, описывающие неадиабатичность атмосферных процессов ($\mathcal{E} = 0$) и вязкость ($F_x = F_y = 0$), которые наиболее существенно проявляются в пограничном слое атмосферы. В этом случае систему уравнений (1.1) наиболее оправданно использовать для краткосрочного прогноза в свободной атмосфере.

При $F_x = F_y = \mathcal{E} = 0$ система из пяти уравнений (1.1) является замкнутой, так как содержит пять прогнозируемых переменных: u, v, ω, Φ, T — и в принципе позволяет рассчитать их значения в любой момент времени в пределах области интегрирования, если заданы начальные и граничные (краевые) условия.

Эта система включает три прогностических уравнения, содержащих производные по времени, и два диагностических. Диагностические уравнения позволяют по трем спрогнозированным с помощью прогностических уравнений функциям u, v, T определить две другие функции: ω и Φ .

Начальные и граничные условия

Поскольку в системе (1.1) три прогностических уравнения, то для получения решения этой системы необходимо задать в начальный момент времени t_0 начальные условия для трех функций:

$u(x, y, \zeta, t_0)$, $v(x, y, \zeta, t_0)$, $T(x, y, \zeta, t_0)$ или $\Phi(x, y, \zeta, t_0)$.

Начальные значения $\Phi(x, y, \zeta, t_0)$ определяются с помощью уравнения статики. Для вычисления $\Phi(x, y, \zeta, t_0)$ с помощью уравнения статики требуются значения давления на уровне моря P . Значения ω определяются с помощью уравнения неразрывности.

Начальные условия, при которых строится решение системы (1.1), должны представлять собой трехмерные поля трех метеорологических величин: u , v , T или u , v , Φ , которые могут быть получены по данным измерений на сети метеорологических станций. Граничные условия должны отражать влияние внешней по отношению к области интегрирования среды на процессы, описываемые уравнениями системы (1.1). На верхней границе атмосферы, т. е. при $\zeta = 0$ ($z = \infty$), естественно воспользоваться условием отсутствия потока массы

$$\rho w|_{z \rightarrow \infty} = 0,$$

где $w = dz/dt$ — вертикальная скорость в системе координат x , y , z , t .

Поскольку $p \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ ($\zeta \rightarrow 0$), то

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Однако

$$\omega|_{\zeta=0} = \frac{d\zeta}{dt}\bigg|_{\zeta=0} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right).$$

Следовательно,

$$\omega|_{\zeta=0} = \frac{d\zeta}{dt}\bigg|_{\zeta=0} = \frac{1}{P} w \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{P} \rho g w.$$

Поскольку $\rho w = 0$ при $z \rightarrow \infty$, то на верхней границе атмосферы, т. е. при $\zeta = 0$, выполняется условие

$$\omega = 0. \quad (1.2)$$

На нижней границе атмосферы, которая при отсутствии неровностей поверхности Земли отождествляется с уровнем $z = 0$, также принимается условие $\rho w = 0$. Это означает, что уравнение

$$d\Phi/dt = g w \quad (1.3)$$

приобретает вид $d\Phi/dt = 0$ при $z = 0$. При этом приближенно принимается, что $\zeta = 1$ при $z = 0$, и полагается

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \omega \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{при } \zeta = 1,$$

или

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \omega RT = 0 \quad \text{при } \zeta = 1. \quad (1.4)$$

Если учитывать рельеф, то при постановке нижнего граничного условия возникают дополнительные трудности, так как в этом случае уровень $\zeta = 1$ тем более не совпадает с поверхностью Земли. Однако в некоторых моделях, основанных на уравнениях в ζ -системе координат, используется уравнение (1.3), в котором учитываются орографические вертикальные токи, порождаемые обтеканием рельефа:

$$\omega_{\text{ор}} = u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (1.5)$$

где $\Phi_r(x, y)$ — геопотенциал подстилающей поверхности. При этом используется весьма грубое предположение о том, что уровень $\zeta = 1$ всегда существует и именно к этому уровню относятся орографические вертикальные токи. Тогда условие (1.4) записывается в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \left[\frac{\partial}{\partial x} (\Phi - \Phi_r) \right] + v \left[\frac{\partial}{\partial y} (\Phi - \Phi_r) \right] - \omega RT = 0 \quad \text{при } \zeta = 1.$$

Подобный подход применяется и в отношении фрикционных вертикальных токов ($\omega_{\text{тр}}$) на верхней границе пограничного слоя, обусловленных влиянием турбулентной вязкости, которые также относятся к уровню $\zeta = 1$. Нижнее граничное условие, являющееся следствием уравнения (1.3) при $\omega = \omega_{\text{тр}}$, используется, если в уравнениях системы (1.1) учтены турбулентная вязкость и турбулентные притоки тепла. В этом случае требуются дополнительные граничные условия вида $u = v = 0$ при $z = 0$, означающие «прилипание» воздуха к подстилающей поверхности, и условия для турбулентных потоков тепла (а если решается уравнение для влаги, то и для потоков влаги) и импульса на верхней и нижней границах атмосферы.

Здесь мы будем использовать условия (1.2) и (1.4), имея в виду построение решения системы уравнений (1.1) для свободной атмосферы, т. е. без учета орографии, турбулентной вязкости и неадиабатичности.

Для глобальных моделей боковые граничные условия не требуются.

Очевидно, что прогностические модели для ограниченных территорий являются более экономичными, чем глобальные. Кроме того, на ограниченной территории можно использовать мелкие сетки, за счет чего обеспечивается более точный прогноз. Однако при этом возникает сложная проблема, связанная с постановкой боковых граничных условий. Если боковые граничные условия поставлены плохо, то на границах и вблизи них возникают фиктивные волны с большой амплитудой, которые распространяются в глубь области определения решений уравнений модели и искажают прогноз.

Хотя атмосферные процессы над ограниченной территорией связаны с процессами, происходящими над другими районами земного шара, однако на границах, разделяющих их, не происходит каких-либо особых процессов, помимо тех, которые описываются

уравнениями самой модели. Поэтому в принципе возможно рассчитывать все зависимые переменные на боковых границах, используя направленные внутрь области конечные разности по x и y так, чтобы для их вычисления требовались только сеточные значения функций на границах и в ближайших к границе внутренних узлах сетки.

Другой подход к постановке боковых граничных условий для прогноза на ограниченной территории, учитывающих процессы над районами, примыкающими к прогностической области, основывается на использовании вложенных сеток. При этом для всей области, охватывающей ограниченную территорию (прогностическую область) и примыкающие к ней районы (например, для полушария), строится прогностическая фоновая конечно-разностная модель, которая реализуется на сетке с грубым разрешением. В пределах ограниченной территории, которая размещается внутри этой области, строится более мелкая (вложенная) сетка, на которой методом конечных разностей решаются уравнения той же, что и на грубой сетке, модели. Необходимые для модели на мелкой сетке боковые граничные условия получаются с помощью фоновой модели с грубым разрешением.

При численном интегрировании уравнений модели на вложенных сетках используются два метода. Первый метод предполагает только односторонний учет влияния процессов, описываемых на грубой сетке в окружающих районах, на процессы, моделируемые на мелкой сетке, а обратным влиянием пренебрегается.

Этот метод называется методом одностороннего взаимодействия (воздействия).

В общих чертах процедура интегрирования уравнений модели на вложенных сетках с помощью метода одностороннего взаимодействия сводится к следующему. Сначала производится интегрирование фоновой модели (на грубой сетке) на определенный интервал времени (t_1) с запоминанием значений зависимых переменных на каждом шаге по времени в узлах грубой сетки, лежащих на границе между внешней и внутренней сетками. По этим значениям зависимых переменных в граничных узлах (грубой сетки) на шагах по времени в пределах интервала времени t_1 путем интерполяции в пространстве и во времени вычисляются значения зависимых переменных в граничных узлах мелкой сетки в моменты времени, соответствующие шагам по времени, используемым во вложенной модели.

Затем интегрируются уравнения модели на мелкой сетке на интервал времени t_1 с использованием граничных значений, полученных на основе фоновой модели путем интерполяции в граничные узлы мелкой сетки. Такая процедура повторяется до тех пор, пока не будут получены прогностические значения метеовеличин на срок прогноза.

Таким образом, при использовании метода одностороннего взаимодействия интегрирование уравнений на крупной сетке осуществляется независимо от вложенной модели.

Второй метод интегрирования уравнений модели на вложенных сетках, получивший название метода двустороннего взаимодействия,

предусматривает учет двустороннего взаимодействия между процессами на грубой и мелкой сетках.

При использовании метода двустороннего взаимодействия интегрирование уравнений модели на грубой и мелкой сетках тесно связаны между собой. При интегрировании уравнений модели на вложенных сетках с помощью метода двустороннего взаимодействия предусматривается следующая процедура вычислений. Прогнозируются зависимые переменные в конце одного шага по времени на грубой сетке. По их значениям путем интерполяции рассчитываются значения в граничных узлах мелкой сетки. Затем интегрируются уравнения модели на мелкой сетке на интервал времени, равный шагу по времени на грубой сетке. После этого снова интегрируются уравнения модели на грубой сетке, но при этом используются результаты на мелкой сетке.

Физически более обоснованным представляется метод двустороннего взаимодействия, так как внешний поток, описываемый на грубой сетке, не только влияет на процессы во внутренней области (с мелкой сеткой), но и сам подвергается обратному воздействию.

Ввиду того что реализация метода одностороннего взаимодействия более проста, он шире применяется на практике. Однако это не означает, что применение этого метода не связано с трудностями. Одна из трудностей заключается в том, что на границе, разделяющей грубую и мелкую сетки, из физических соображений следует задавать переменные только там, где осуществляется влияние извне (в местах втока во внутреннюю область). Это связано с гиперболичностью системы уравнений. Следовательно, задавать переменные на всей границе на основе решений на грубой сетке нельзя, так как в этом случае может иметь место переопределение граничных условий (задаются лишние условия), что приводит к большим ошибкам, а иногда и к «взрыву» численного решения.

Метод одностороннего взаимодействия при постановке граничных условий используется в прогностических моделях в нескольких вариантах.

В одном из вариантов в местах оттока на границе используются экстраполированные из внутренней области значения зависимых переменных. Предложен, например, вариант, в котором на границе в точках втока из решений на грубой сетке задаются только составляющие ветра; другие переменные используются во всех точках границы, а в точках оттока ветер экстраполируется из внутренней области.

В ряде работ (Е. М. Пекелис, Л. Я. Прессман и др.) используются граничные условия типа условий излучения. Эти условия строятся на основе предположений о том, что решения уравнений могут быть представлены в виде набора гармоник вида $\bar{f} e^{i(\sigma t - kx)}$ ($\bar{f}$ — амплитуда σ — частота, k — волновое число), энергия которых переносится с групповой скоростью. При этом полагается, что в окрестности каждой граничной точки преобладает одна гармоника, для которой проекции фазовой и групповой скоростей на нормаль к границе имеют один знак. В этом случае можно приближенно считать, что

решение в окрестности граничных точек удовлетворяет уравнению (называемому условием излучения)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + C_{\Phi} \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

где $C_{\Phi}(t, x) = \sigma/k$ — фазовая скорость преобладающей волны в решении у границы в данный момент времени. Значения C_{Φ} в граничных точках определяются путем экстраполяции из внутренних узлов мелкой сетки, прилегающих к границе, если фазовая скорость направлена из внутренней области, и, наоборот, зависимые переменные на границе в узлах мелкой сетки определяются по их значениям в граничных узлах грубой сетки, если фазовая скорость направлена из внешней области.

При реализации метода двустороннего взаимодействия основная трудность заключается в согласовании решений на грубой и мелкой сетках, необходимость которого обусловлена различием фазовых скоростей. На грубой сетке фазовые скорости меньше, чем на мелкой. Фазовая скорость коротких волн меньше, чем длинных: Волны, которые могут быть представлены на обеих сетках при переходе с грубой сетки на мелкую, ускоряются и поэтому вытягиваются в направлении их перемещения, а при переходе с мелкой сетки на грубую — замедляются и сплющиваются. Те волны, которые могут быть представлены только на мелкой сетке, на границе между сетками отражаются внутрь мелкой сетки или преобразуются в другие волны, порождающие различные физические и вычислительные моды. За счет различий в значениях фазовых скоростей на сетках с различным разрешением возникают ошибки решений на грубой сетке; этот эффект называют вычислительным преломлением.

Вариант процедуры численного интегрирования уравнений модели методом двустороннего взаимодействия на мелкой и грубой сетках в общих чертах можно представить следующим образом. Пусть в некоторый момент времени t на грубой и мелкой сетках (в том числе и в узлах грубой сетки, расположенных в пределах вложенной модели) известны значения зависимых переменных. По значениям этих переменных в узлах грубой сетки во внутренней и внешней областях вычисляется прогноз на один шаг по времени, соответствующий грубой сетке (Δt_1). Спрогнозированные переменные на границе и их потоки через границу запоминаются. Используя эти значения в качестве граничных условий, осуществляют прогноз во внутренней области по данным в узлах мелкой сетки (прямое взаимодействие) шагами по времени на мелкой сетке (Δt_2) на интервал по времени, равный шагу по времени на грубой сетке (Δt_1). Значения зависимых переменных во внутренней области в узлах грубой сетки в момент времени $t + \Delta t_1$ определяются интерполяцией по данным в узлах мелкой сетки (обратное взаимодействие).

Так же как в случае метода одностороннего взаимодействия, при использовании метода двустороннего взаимодействия основные трудности связаны с невозможностью точного описания процесса распространения возмущений на сетках с различным разрешением.

В моделях с двусторонним взаимодействием ситуация несколько лучше, но мелкомасштабные возмущения, разрешаемые только на мелкой сетке, не могут проникать через границу и отражаются. Для подавления роста возмущений, отраженных или порождаемых другими нежелательными эффектами на границах, применяют сглаживание переменных в зоне границы или вводят диффузионные (вязкие) члены в уравнения.

В ряде работ (например, Л. Н. Магазенкова и Д. А. Шейнина) в целях уменьшения влияния шумов, возникающих вблизи границ, предлагается согласовывать фазовые скорости и амплитуды как медленных (длинных) метеорологических волн, так и быстрых (длинных) гравитационных волн. Такое согласование может быть достигнуто за счет применения фильтров к уравнениям на мелкой или грубой сетках, которые позволяют сблизить по порядку величины ошибки аппроксимации производных на сетках с различным разрешением. За счет этого уменьшается различие в точности описания фазовых скоростей и амплитуд волн.

В настоящее время прогностические модели на вложенных сетках широко используются в СССР и за рубежом. Пожалуй, наиболее широко вложенные сетки применяются при моделировании тропических циклонов. В ряде моделей тропических циклонов используются несколько вложенных одна в другую сеток с увеличивающимся разрешением, в том числе и перемещающиеся вместе с тропическим циклоном.

Схемы интегрирования уравнений моделей на нескольких вложенных одна в другую сетках с увеличивающимся разрешением получили название телескопических.

Если система уравнений модели для ограниченной территории решается без учета результатов моделирования процессов в окружающих районах, т. е. не на вложенных сетках, то значения зависимых переменных на боковых границах можно рассчитывать с помощью уравнений модели, о чем говорилось выше. Однако такой способ задания боковых граничных условий не нашел широкого применения.

Простейшие условия на боковых границах Γ имеют вид

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{\Gamma} = 0. \quad (1.6)$$

Эти условия означают неизменность искомых функций (u , v , T) на боковых границах, что заведомо не соответствует реальному процессу. В связи с этим такие условия называют фиктивными. При использовании их искажения решений, возникающие вблизи боковых границ, распространяются внутрь области интегрирования, снижая качество прогнозов.

Для уменьшения искажающего влияния граничных условий такого типа используется ряд приемов, предусматривающих плавный переход от закрепленных (неизменных) значений зависимых переменных на границах к изменяющимся в соответствии с решениями

прогностических уравнений значениям во внутренних узлах сеточной области.

Один из таких приемов состоит в том, что значения производных по времени, определяемых с помощью прогностических уравнений во внутренних узлах, расположенных вблизи боковых границ, интерполируются так, чтобы на границах они обращались бы в нуль. Такая интерполяция выполняется с помощью соотношений вида

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_n = \alpha_n \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_N,$$

где f — прогностическая переменная; N — номера узлов, в которых получено решение для переменной f ; n — номера узлов, расположенных между граничными узлами ($n_r = 0$) и узлом N ($n = 0, 1, \dots, N$); $\alpha_n = n/N$ — весовой множитель, изменяющийся от нуля (при $n = n_r = 0$) до единицы (при $n = N$).

Переход от закрепленных на боковых границах зависимых переменных к решениям в области прогноза может выполняться с помощью так называемых буферных зон, окаймляющих область прогноза. В пределах буферных зон решается краевая задача для уравнения Лапласа с изменяющимися во времени граничными условиями на внутренней границе, разделяющей область прогноза и буферную зону, и с закрепленными условиями на внешней границе буферной зоны или с условиями вида

$$C_n = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial T}{\partial n} = 0,$$

где C_n — нормальные к границе составляющие горизонтального вектора скорости, n — внешняя нормаль к границе. Такой способ используется в оперативной прогностической модели Национального метеорологического центра США, которая рассматривается в главе 9.

В оперативной прогностической модели Гидрометцентра СССР, которая также рассматривается в главе 9, используются боковые граничные условия вида

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad D \Big|_{\Gamma} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)_{\Gamma} = 0.$$

В этой модели используется прогностическое уравнение для геопотенциала, а поэтому и граничное условие ставится для Φ .

В прогностических моделях, основанных на решении полных уравнений, используются также периодические боковые граничные условия следующего вида:

$$\varphi(x, y, t) = \varphi(x + L_x, y, t); \quad \varphi(x, y, t) = \varphi(x, y + L_y, t) \\ (\varphi = u, v, \Phi, \dots),$$

где L_x, L_y — размеры области интегрирования в направлении осей x и y .

Если граница области прогноза проходит вдоль экватора, то, предполагая, что воздухообмен между полушариями мал, можно принять условия вида

$$C_n \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial C_h}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (1.7)$$

Эти условия означают, что нормальные к границе составляющие скорости C_n , а также производные от касательных составляющих скорости C_h и от T по нормали к границе равны нулю. Вопрос о постановке и использовании этих и других граничных условий будет обсуждаться при рассмотрении конкретных моделей. Здесь же при рассмотрении вопроса о возможности построения решений систем уравнений (1.1) будем ориентироваться на условия (1.2), (1.4), (1.6).

Процедура интегрирования

После того как определены начальные значения T и ω , представляется возможность проинтегрировать прогностические уравнения системы (1.1) с учетом граничных условий.

В силу нелинейности этих уравнений выполнить точно их интегрирование невозможно, поэтому приходится прибегать к численному интегрированию, например конечно-разностным методом.

При этом вводится та или иная дискретизация пространства и времени ($i = x/\Delta x$; $j = y/\Delta y$; $k = \zeta/\Delta \zeta$; $s = t/\Delta t$), строится пространственно-временная сетка точек, дифференциальные уравнения системы (1.1) аппроксимируются конечно-разностными. Решение конечно-разностных уравнений осуществляется шагами по времени.

Один из возможных способов приближенного решения системы уравнений (1.1) с помощью метода сеток состоит в следующем. Используя конечно-разностную аппроксимацию производных по времени и начальные сеточные значения $u_{ijk}^t, v_{ijk}^t, T_{ijk}^t$, с помощью прогностических уравнений вычисляют $u_{ijk}^{t_0+\Delta t}, v_{ijk}^{t_0+\Delta t}, T_{ijk}^{t_0+\Delta t}$, т. е. прогностические значения метеовеличин в конце шага по времени. При вычислении этих величин в ближайших к боковым границам узлах сетки используются граничные условия (1.6). Затем, используя найденные значения $u_{ijk}^{t_0+\Delta t}, v_{ijk}^{t_0+\Delta t}$, с помощью уравнения неразрывности и граничного условия (1.2) рассчитывают значения $\omega_{ijk}^{t_0+\Delta t}$. При этом в уравнении неразрывности производные по x и y заменяются конечно-разностными отношениями, а интегрирование по ζ выполняется с помощью той или иной квадратурной формулы.

Для определения геопотенциала уровня $\zeta = 1$ в момент времени $t_0 + \Delta t$ используется граничное условие (1.4). Значения геопотенциала всех вышележащих уровней в момент времени $t_0 + \Delta t$ определяются с помощью полученных значений $T_{ijk}^{t_0+\Delta t}$ на основе уравнения статики

$$\Phi(\zeta) = R \int_{\zeta}^1 \frac{T}{\xi} d\xi = R\bar{T} \ln \frac{1}{\xi}. \quad (1.8)$$

Таким образом, получают сеточные значения всех пяти метеовеличин в момент времени $t_0 + \Delta t$: $u_{ijk}^{t_0+\Delta t}, v_{ijk}^{t_0+\Delta t}, T_{ijk}^{t_0+\Delta t}, \omega_{ijk}^{t_0+\Delta t}, \Phi_{ijk}^{t_0+\Delta t}$.

Процедура численного интегрирования повторяется шагами по времени на заданном интервале времени прогнозирования.

4.1.2. Решение системы полных уравнений гидротермодинамики в σ -системе координат

В прогностических моделях, основанных на полных уравнениях, широко используется σ -система координат, предложенная Филлипсом. В этой системе вертикальная координата определяется как отношение давления p на переменном уровне z к приземному (не приведенному к уровню моря) давлению p_s :

$$\sigma = \frac{p(x, y, z, t)}{p_s(x, y, t)}.$$

Используется также модифицированная σ -система координат, в которой $\sigma = (p - p_v)/(p_n - p_v)$, где p_n , p_v — давление на нижней и верхней границах атмосферы или на границах слоев атмосферы.

Основное достоинство σ -системы координат состоит в том, что в ней земная поверхность совпадает с координатной поверхностью $\sigma = 1$. Поэтому уравнения в этой системе координат позволяют описывать атмосферные процессы с учетом отклонений координатной поверхности от горизонтальной, т. е. с учетом рельефа. Уравнения в изобарической системе координат не обладают этим свойством.

Достоинство σ -системы координат состоит также в том, что в этой системе точно выполняются условия равенства нулю вертикальной скорости $\dot{\sigma}$ на нижней и верхней границах атмосферы:

$$\dot{\sigma} \equiv \left. \frac{d\sigma}{dt} \right|_{\sigma=0, \sigma=1} = 0. \quad (1.9)$$

Запишем квазистатическую систему уравнений в координатах x , y , σ , t исходя из соответствующих уравнений, рассмотренных в главе 1. При этом приведем эти уравнения к удобному для интегрирования виду.

Уравнение состояния будет использоваться в виде

$$\sigma p_s = \rho R T. \quad (1.10)$$

Уравнение статики запишется следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \quad (1.11)$$

или с учетом уравнения (1.10) — в виде

$$T = -\frac{\sigma}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}. \quad (1.12)$$

Проинтегрировав уравнение (1.12) по σ в пределах от σ до 1 при условии, что $\Phi = \Phi_s$ при $\sigma = 1$, получим:

$$\Phi = \Phi_s + R \int_{\sigma}^1 \frac{T}{\sigma'} d\sigma', \quad (1.13)$$

где Φ_s — геопотенциал поверхности Земли.

Уравнение неразрывности в координатах x, y, σ, t записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial p}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} \right) = 0,$$

или

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u p_s) + \frac{\partial}{\partial y} (v p_s) + p_s \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0. \quad (1.14)$$

При получении последнего уравнения учитывалось, что $\partial p / \partial \sigma = p_s$ и p_s от σ не зависит.

Проинтегрировав уравнение (1.14) по σ от 0 до 1 и от 0 до σ , с учетом условий (1.9) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_s}{\partial t} &= - \int_0^1 \left(\frac{\partial (u p_s)}{\partial x} + \frac{\partial (v p_s)}{\partial y} \right) d\sigma, \\ \sigma \frac{\partial p_s}{\partial t} &= - \int_0^\sigma \left(\frac{\partial (u p_s)}{\partial x} + \frac{\partial (v p_s)}{\partial y} \right) d\sigma' - p_s \dot{\sigma}. \end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений $\partial p_s / \partial t$, получаем диагностическое уравнение для вертикальной скорости:

$$\dot{\sigma} = \frac{\sigma}{p_s} \int_0^1 \left(\frac{\partial (u p_s)}{\partial x} + \frac{\partial (v p_s)}{\partial y} \right) d\sigma - \frac{1}{p_s} \int_0^\sigma \left(\frac{\partial (u p_s)}{\partial x} + \frac{\partial (v p_s)}{\partial y} \right) d\sigma'.$$

С учетом вышеизложенного квазистатическая система уравнений в σ -системе координат записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = - \frac{RT}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + l v + F_x, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} = - \frac{RT}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - l u + F_y, \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{\theta}{T} \frac{\mathcal{E}}{c_p}, \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = \int_0^1 \left(\frac{\partial (u p_s)}{\partial x} + \frac{\partial (v p_s)}{\partial y} \right) d\sigma, \quad (1.18)$$

$$\Phi = \Phi_s + R \int_\sigma^1 \frac{T}{\sigma} d\sigma', \quad (1.19)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{\sigma}{p_s} \int_0^1 \left(\frac{\partial (u p_s)}{\partial x} + \frac{\partial (v p_s)}{\partial y} \right) d\sigma - \frac{1}{p_s} \int_0^\sigma \left(\frac{\partial (u p_s)}{\partial x} + \frac{\partial (v p_s)}{\partial y} \right) d\sigma', \quad (1.20)$$

$$\theta = T \left(\frac{P}{p_s \sigma} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}. \quad (1.21)$$

Умножая уравнения (1.15), (1.16), (1.17) на p_s и учитывая уравнение неразрывности (1.14), получаем эти уравнения в дивергентной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (u p_s)}{\partial t} + \frac{\partial (u^2 p_s)}{\partial x} + \frac{\partial (u v p_s)}{\partial y} + \frac{\partial (u \dot{\sigma} p_s)}{\partial \sigma} &= \\ &= -RT \frac{\partial p_s}{\partial x} - p_s \frac{\partial \Phi}{\partial x} + l u p_s + p_s F_x, \\ \frac{\partial (v p_s)}{\partial t} + \frac{\partial (v u p_s)}{\partial x} + \frac{\partial (v^2 p_s)}{\partial y} + \frac{\partial (v \dot{\sigma} p_s)}{\partial \sigma} &= \\ &= -RT \frac{\partial p_s}{\partial y} - p_s \frac{\partial \Phi}{\partial y} - l v p_s + p_s F_y, \\ \frac{\partial (\theta p_s)}{\partial t} + \frac{\partial (u \theta p_s)}{\partial x} + \frac{\partial (v \theta p_s)}{\partial y} + \frac{\partial (\theta \dot{\sigma} p_s)}{\partial \sigma} &= \frac{p_s \theta}{T} \frac{\mathcal{E}}{c_p}. \end{aligned}$$

Начальные и граничные условия

Система уравнений (1.15)—(1.21) содержит производные по времени от u , v , θ , p_s . Для решения этой системы уравнений следует задать начальные значения u^t , v^t , θ^t , p_s^t . При существующей системе получения оперативной метеорологической информации эти значения переменных на σ -поверхностях (которые не совпадают с изобарическими) приходится рассчитывать путем интерполяции по данным на изобарических поверхностях.

В адиабатическом варианте ($\mathcal{E} = 0$) без учета сил вязкости ($F_x = F_y = 0$) система уравнения (1.15)—(1.21) содержит семь зависимых переменных: u , v , σ , Φ , p_s , θ , T , т. е. является замкнутой.

Граничные условия по σ имеют вид

$$\dot{\sigma} = 0 \quad \text{при} \quad \sigma = 0; 1. \quad (1.22)$$

Если используются уравнения с учетом неадиабатичности и вязкости, то, помимо этих условий, необходимо поставить дополнительные условия:

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad \sigma = 1$$

и условия для потоков тепла и импульса при $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$. На боковых границах области определения решения могут быть использованы условия для зависимых переменных u , v , θ , p_s вида (1.6).

Процедура интегрирования

Процедура численного интегрирования системы уравнений (1.15)—(1.21) в адиабатическом варианте шагами по времени аналогична описанной в п. 4.1.1. При этом прогностические уравнения решаются на уровнях $\sigma = \text{const}$ ($k = \sigma/\Delta\sigma$), поэтому и начальные условия следует задавать на σ -поверхностях, прибегая к интерполяции с p -поверхностей на σ -поверхности. Начальные условия задаются для u , v , p_s . Значения θ в начальный момент времени рас-

считываются с помощью уравнения (1.21), а геопотенциал Φ и вертикальная скорость σ — на основе уравнений (1.19) и (1.20) соответственно.

С помощью прогностических уравнений (1.15)—(1.18) по начальным значениям u^{t_0} , v^{t_0} , θ^{t_0} , $p_s^{t_0}$ определяются $u^{t_0+\Delta t}$, $v^{t_0+\Delta t}$, $\theta^{t_0+\Delta t}$, $p_s^{t_0+\Delta t}$. Привлекая диагностические уравнения (1.19)—(1.21), рассчитывают $T^{t_0+\Delta t}$, $\Phi^{t_0+\Delta t}$, $\dot{\sigma}^{t_0+\Delta t}$. Эта процедура шагами по времени повторяется до тех пор, пока не будут получены значения всех метеовеличин в конце прогностического периода.

Результаты прогноза метеовеличин (на уровнях $\sigma = \text{const}$) интерполируются на изобарические поверхности.

Интерполяция начальных данных и результатов прогнозов сопряжена с дополнительными затратами времени и с ошибками.

Следует обратить также внимание на то, что в σ -системе координат в правых частях уравнений движения составляющие градиентов давления (p_s) и геопотенциала (Φ) в районах с крутым наклоном земной поверхности велики по модулю, но противоположны по знаку. В этих случаях силы будут определяться неточно, как малые разности двух больших величин. Для преодоления этой трудности разработаны специальные процедуры расчета этих членов повышенной точности.

4.2. Полные уравнения баротропной модели атмосферы

В атмосферных исследованиях используются полные уравнения баротропной модели атмосферы. Один из вариантов этих уравнений называют уравнениями мелкой воды. Эти уравнения, а также уравнения баротропной модели в σ -системе координат будут далее использоваться для исследования свойств численных решений. Учитывая эти обстоятельства, а также то, что в главе 1 вывод этих уравнений не рассматривался, приведем их вывод.

4.2.1. Уравнения мелкой воды

Рассматривается тонкий слой однородной идеальной жидкости ($\rho = \text{const}$), ограниченной снизу горизонтальной поверхностью $z = 0$, а сверху — свободной поверхностью высотой $h(x, y, t)$, выше которой расположена среда с очень малой плотностью, так что на свободной поверхности $p = p_0 = \text{const}$. Так как $\rho = \text{const}$, то из уравнения статики $\partial p / \partial z = -\rho g$ следует, что

$$\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial p}{\partial z} \equiv \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} (\rho g) = 0 \quad (s = x, y).$$

Следовательно, составляющие геострофического ветра u_g и v_g не меняются с высотой:

$$\frac{\partial u_g}{\partial z} = \frac{\partial v_g}{\partial z} = 0.$$

Можно принять также (в силу близости реального ветра и геострофического), что $\partial u/\partial z \approx \partial v/\partial z \approx 0$. Проинтегрировав уравнение статики по z от произвольного z до h и учитывая, что при $z = h$ $p = p_0 = \text{const}$, получаем:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = g \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \quad (s = x, y).$$

Таким образом, для рассматриваемой среды («мелкой воды») уравнения движения приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - lu, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\partial \Phi/\partial x$ и $\partial \Phi/\partial y$ не зависят от z .

Поскольку полагается, что $\rho = \text{const}$, то уравнение неразрывности

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

упрощается и приобретает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.2)$$

Интегрируя уравнения (2.2) по z в пределах от 0 до h (с учетом неизменности u и v по z , а также граничного условия $w = 0$ при $z = 0$), получаем:

$$w_{z=h} = -h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (2.3)$$

Принимая во внимание, что $h(x, y, t)$, имеем:

$$w_{z=h} = \frac{dh}{dt} \equiv \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (2.4)$$

Объединяя выражения (2.3) и (2.4) и вводя геопотенциал свободной поверхности $\Phi = gh$, получаем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \Phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (2.5)$$

или

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u\Phi) + \frac{\partial}{\partial y} (v\Phi) = 0. \quad (2.6)$$

Уравнения (2.1) и (2.5) представляют собой замкнутую систему уравнений мелкой воды. Несмотря на исходные предпосылки (модель мелкой воды), эти уравнения используются для моделирования атмосферных процессов.

Система уравнений (2.1)–(2.5) аналогична по виду системе уравнений баротропной модели, приведенной в главе 1.

На основе этих уравнений можно, опираясь на конечно-разностный метод, прогнозировать скорость ветра и геопотенциал шагами

по времени. При этом необходимы начальные условия (u^t_0, v^t_0, Φ^t_0) и граничные условия (например, $\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\Gamma} = 0$).

4.2.2. Уравнение баротропной модели в σ -системе координат

Уравнения в σ -системе координат для баротропной атмосферы получаются из уравнений (1.15)–(1.21).

Для баротропной среды $\rho = f(p)$. Например, при $T = \text{const}$ из уравнения состояния имеем $\rho = c p$, т. е. $\rho = f(p)$, где $c = 1/RT = \text{const}$. В этом случае

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\Phi + RT \ln p), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\Phi + RT \ln p), \quad (2.7)$$

Дифференцируя эти соотношения по σ и меняя порядок дифференцирования, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + RT \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) \equiv 0, \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + RT \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) \equiv 0, \end{aligned}$$

так как

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \sigma} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}.$$

Таким образом, в баротропной среде составляющие градиента давления, а следовательно, и геострофический ветер не зависят от σ и их можно относить к любому уровню. Реальный ветер близок к геострофическому, поэтому в уравнениях движения члены $\dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma}$, $\dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma}$ можно принять равными нулю. Следовательно, уравнения движения можно записать для любого уровня $\sigma = \text{const}$ в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + l v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - l u. \end{aligned} \quad (2.8)$$

При $\sigma = 1$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial \Phi_s}{\partial x} - \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p_s}{\partial x} + l v, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{\partial \Phi_s}{\partial y} - \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p_s}{\partial y} - l u, \quad (2.10)$$

где $\rho_s = f(p_s)$, Φ_s — геопотенциал поверхности Земли.

Учитывая граничные условия (1.22) и независимость u и v от σ , из уравнения неразрывности (1.14) после интегрирования его по σ в пределах от 0 до 1 находим:

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{\partial (u p_s)}{\partial x} + \frac{\partial (v p_s)}{\partial y} = 0. \quad (2.11)$$

Уравнения (2.9)—(2.11) представляют собой замкнутую систему и позволяют по начальным данным для u^{t_0} , v^{t_0} , $p_s^{t_0}$ с использованием боковых граничных условий рассчитывать прогноз метеовеличин u , v , p_s шагами по времени.

4.3. Интегральные свойства моделей, основанных на полных уравнениях

При конечно-разностной аппроксимации и построении схем численного интегрирования полных уравнений руководствуются целым рядом соображений. Одно из них заключается в том, что системы конечно-разностных уравнений, называемые численными моделями, должны сохранять интегральные свойства соответствующих систем дифференциальных уравнений, т. е. математических моделей. Иногда это требование может ослабляться или вообще не учитываться, если имеется в виду построение моделей краткосрочного прогноза погоды.

4.3.1. Интегральные свойства баротропной модели

Интегральные свойства модели мелкой воды

Рассмотрим интегральные свойства модели, основанной на системе уравнений мелкой воды (2.1), (2.5). Будем считать, что область определения решения представляет собой прямоугольник с ориентированными параллельно координатным осям x и y сторонами, длина которых составляет $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$.

На границах области поставим условия

$$u \Big|_{\substack{x=x_1 \\ x=x_2}} = v \Big|_{\substack{y=y_1 \\ y=y_2}} = 0, \quad (3.1)$$

означающие, что через боковые границы нет переноса.

Воспользуемся уравнением (2.6)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial (u\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial (v\Phi)}{\partial y} = 0 \quad (3.2)$$

и проинтегрируем его по x и y в пределах от x_1 до x_2 и от y_1 до y_2 :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \Phi \, dx \, dy = - \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (u\Phi) \, dx \, dy - \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial y} (v\Phi) \, dy \, dx. \quad (3.3)$$

Интегралы в правой части последнего уравнения равны нулю в силу граничных условий (3.1). Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \Phi \, dx \, dy = 0, \quad \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \Phi \, dx \, dy = \text{const}. \quad (3.4)$$

Следовательно, величина, стоящая в левой части выражения (3.3), является интегральным инвариантом модели. Условие (3.4) означает сохранение массы, заключенной в объеме

$$V = (x_2 - x_1) (y_2 - y_1) h.$$

Действительно, масса M в объеме V определяется интегралом

$$M = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^h \rho \, dz \, dx \, dy = \rho \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} h \, dx \, dy = \frac{\rho}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \Phi \, dx \, dy$$

$$(\rho = \text{const}),$$

т. е. $\frac{g}{\rho} M = \text{const}$. Поскольку $\frac{g}{\rho} = \text{const}$, то $M = \text{const}$.

Покажем, что для модели мелкой воды существует энергетический инвариант. Получим уравнение для кинетической энергии единицы массы $E = (u^2 + v^2)/2$ в случае двумерного движения. Уравнение кинетической энергии является следствием уравнений движения (2.1). Умножив первое уравнение (2.1) на u , а второе — на v и сложив результаты, находим:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} (E + \Phi) + v \frac{\partial}{\partial y} (E + \Phi) = 0. \quad (3.5)$$

Умножая уравнение (3.5) на Φ , а уравнение (3.2) на Φ и на E , получим:

$$\Phi \frac{\partial E}{\partial t} + u \Phi \frac{\partial}{\partial x} (E + \Phi) + v \Phi \frac{\partial}{\partial y} (E + \Phi) = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Phi^2}{2} \right) + \Phi \frac{\partial}{\partial x} (u \Phi) + \Phi \frac{\partial}{\partial y} (v \Phi) = 0, \quad (3.7)$$

$$E \frac{\partial \Phi}{\partial t} + E \frac{\partial}{\partial x} (u \Phi) + E \frac{\partial}{\partial y} (v \Phi) = 0. \quad (3.8)$$

Суммируя уравнения (3.6)—(3.8), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Phi^2}{2} + E \Phi \right) + \frac{\partial}{\partial x} [u \Phi (E + \Phi)] + \frac{\partial}{\partial y} [v \Phi (E + \Phi)] = 0. \quad (3.9)$$

В результате интегрирования уравнения (3.9) по x и по y в пределах от x_1 до x_2 и от y_1 до y_2 с учетом условий (3.1) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\Phi^2}{2} + E \Phi \right) dx \, dy = 0. \quad (3.10)$$

Таким образом, величина

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\Phi^2}{2} + E \Phi \right) dx \, dy = \text{const}$$

является интегральным инвариантом модели.

Для того чтобы выяснить физический смысл этого инварианта, рассмотрим выражения для кинетической $\bar{E}$ и потенциальной $\bar{\Pi}$

энергии массы воздуха в объеме интегрирования $V = (x_2 - x_1) \times (y_2 - y_1) h$:

$$\bar{E} = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^h \rho E dz dx dy = \rho \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} E h dx dy = \frac{\rho}{g} \int_{y_1}^{y_2} E \Phi dx dy,$$

$$\bar{\Pi} = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^h \rho g z dz dx dy = \rho g \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{h^2}{2} dx dy = \frac{\rho}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\Phi^2}{2} dx dy,$$

т. е.

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\Phi^2}{2} + E \Phi \right) dx dy = \frac{g}{\rho} (\bar{E} + \bar{\Pi}).$$

Следовательно, с точностью до постоянного множителя g/ρ величина $\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\Phi^2}{2} + E \Phi \right) dx dy$ представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергии массы воздуха в объеме V .

Кроме рассмотренных, могут быть построены и другие инварианты. Среди них большое значение имеет интегральная потенциальная энтропия (квадрат завихренности). Сохранение интегральной потенциальной энтропии проиллюстрируем на примере модели мелкой воды, уравнения которой запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + l v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - l u, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial (u \Phi)}{\partial x} + \frac{\partial (v \Phi)}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $\Phi = gh$, h — высота свободной поверхности.

Добавляя и вычитая в левой части первого уравнения $v (\partial v / \partial x)$, а в левой части второго — $u (\partial u / \partial y)$, получаем уравнения движения в форме Лэмба:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - v (\Omega + l) + \frac{\partial}{\partial x} (E + \Phi) = 0, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u (\Omega + l) + \frac{\partial}{\partial y} (E + \Phi) = 0, \quad (3.13)$$

где $\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, $E = \frac{u^2 + v^2}{2}$ — кинетическая энергия. Перепишем эти уравнения в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \tilde{v} \tilde{\Omega} + \frac{\partial}{\partial x} (E + \Phi) = 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \tilde{u} \tilde{\Omega} + \frac{\partial}{\partial y} (E + \Phi) = 0, \quad (3.15)$$

где

$$\tilde{u} = u\Phi, \quad \tilde{v} = v\Phi, \quad \tilde{\Omega} = \frac{\Omega + l}{\Phi}.$$

С помощью этих уравнений получим уравнение потенциального вихря скорости

$$\frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\Omega}\Phi) + \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{u}\tilde{\Omega}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{v}\tilde{\Omega}) = 0, \quad (3.16)$$

или

$$\Phi \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial y} \right) + \tilde{\Omega} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial (u\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial (v\Phi)}{\partial y} \right) = 0. \quad (3.17)$$

Поскольку $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial (u\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial (v\Phi)}{\partial y} = 0$, то

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial y} = 0.$$

Умножив это уравнение на $\tilde{\Omega}$, а затем на Φ и воспользовавшись последним уравнением системы (3.11), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Phi \frac{\tilde{\Omega}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\tilde{u} \frac{\tilde{\Omega}^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{v} \frac{\tilde{\Omega}^2}{2} \right) = 0. \quad (3.18)$$

Для прямоугольной области, на границах которой

$$u \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} = v \Big|_{y=y_1}^{y=y_2} = 0,$$

имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \Phi \frac{\tilde{\Omega}^2}{2} dx dy = 0, \quad \text{т. е.} \quad \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \Phi \frac{\tilde{\Omega}^2}{2} dx dy = \text{const.}$$

Таким образом, для рассматриваемой модели потенциальная энтропия сохраняется, т. е. является инвариантом.

Интегральные свойства баротропной модели в σ -системе координат

Получим уравнение энергии баротропной негеострофической модели, уравнения которой записаны в σ -системе координат. Для этого умножим уравнение (2.9) на $u\rho_s$, уравнение (2.10) — на $v\rho_s$, уравнение (2.11) — на ρ_s и результаты сложим. Тогда, если не учитывать рельеф ($\frac{\partial \Phi_s}{\partial x} = \frac{\partial \Phi_s}{\partial y} = 0$), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho_s E + \frac{\rho_s^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[u \rho_s \left(E + \frac{\rho_s}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[v \rho_s \left(E + \frac{\rho_s}{2} \right) \right] = \\ = - \left[u \frac{\rho_s}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial x} + v \frac{\rho_s}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial y} \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

где $E = (u^2 + v^2)/2$.

Преобразуем правую часть этого уравнения:

$$\begin{aligned}
 & - \left[\left(u \frac{p_s}{\rho_s} \frac{\partial p_s}{\partial x} + v \frac{p_s}{\rho_s} \frac{\partial p_s}{\partial y} \right) \right] = - \frac{1}{\rho_s} \left[u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p_s^2}{2} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p_s^2}{2} \right) \right] = \\
 & = - \frac{1}{\rho_s} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{p_s^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{p_s^2}{2} \right) \right] + \frac{p_s^2}{2\rho_s} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \\
 & = - \frac{1}{\rho_s} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{p_s^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{p_s^2}{2} \right) \right] + \frac{(RT_s)^2}{2} \rho_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

где $RT_s = \text{const}$. Таким образом, уравнение (3.19) с учетом соотношения (3.20) приобретает вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left[p_s \left(E + \frac{p_s}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[u p_s \left(E + \frac{p_s}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[v p_s \left(E + \frac{p_s}{2} \right) \right] = \\
 & = - \frac{1}{\rho_s} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{p_s^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{p_s^2}{2} \right) \right] + \frac{(RT_s)^2}{2} \rho_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

Проинтегрируем это уравнение в пределах прямоугольной области по x и y от x_1 до x_2 , от y_1 до y_2 . На границах области поставим условия

$$u \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} = v \Big|_{y=y_1}^{y=y_2} = 0. \quad (3.22)$$

Интегралы от второго и третьего членов левой части будут равны нулю в силу условий (3.22). Интеграл от правой части уравнения (3.21) при $\rho_s = \text{const}$ также равен нулю, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} p_s \left(E + \frac{p_s}{2} \right) dx dy = 0,$$

или

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} p_s \left(E + \frac{p_s}{2} \right) dx dy = \text{const}. \quad (3.23)$$

Следовательно, эта величина сохраняется, т. е. является интегральным инвариантом модели. Таким образом, с точностью до постоянных множителей механическая энергия (кинетическая и потенциальная) воздушной массы в пределах области интегрирования сохраняется. Сохраняется также масса воздуха M в этой области, так как

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} p_s dx dy = - \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial (u p_s)}{\partial x} + \frac{\partial (v p_s)}{\partial y} \right] dx dy \equiv 0, \\
 & \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} p_s dx dy = g \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^\infty \rho dz dx dy = gM = \text{const}, \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

т. е. $M = \text{const}$.

4.3.2. Интегральные свойства бароклинной модели

*Интегральные свойства бароклинной модели
в системе координат x, y, ζ, t*

Воспользуемся системой уравнений (1.1) в адиабатическом приближении без учета сил вязкости. Будем рассматривать процессы, описываемые этой системой уравнений, в области, представляющей собой квазипрямоугольный параллелепипед, ребра которого ориентированы по направлению координатных осей x, y, ζ ; длина ребер составляет $x_2 - x_1, y_2 - y_1$. По высоте параллелепипед простирается от уровня подстилающей поверхности ($\zeta_s = p_s/P$) до верхней границы атмосферы ($\zeta = 0$). Здесь $\zeta_s = \zeta_s(x, y, t)$.

На гранях параллелепипеда поставим граничные условия:

$$u \Big|_{x=x_1} = v \Big|_{y=y_1} = 0, \quad \omega \Big|_{\zeta=0} = 0, \quad \omega = 0 \text{ при } \zeta = \zeta_s, \\ \omega_s = \frac{\partial \zeta_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_s \frac{\partial \zeta_s}{\partial y} \text{ при } \zeta = \zeta_s. \quad (3.25)$$

Умножив первое уравнение системы (1.1) на u , второе — на v и сложив результаты, получим уравнение для кинетической энергии единицы массы двумерного движения $E_k = (u^2 + v^2)/2$:

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} + u \frac{\partial E_k}{\partial x} + v \frac{\partial E_k}{\partial y} + \omega \frac{\partial E_k}{\partial \zeta} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0. \quad (3.26)$$

Из уравнения притока тепла в адиабатическом приближении, записанного в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \omega \frac{\partial T}{\partial \zeta} - \frac{R}{c_p} \frac{T}{\zeta} \omega = 0, \quad (3.27)$$

получим уравнение для удельной энтальпии $E = c_p T$. Для этого умножим уравнение (3.27) на c_p и учтем, что $-RT/\zeta = \partial \Phi / \partial \zeta$. В результате получим

$$\frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial E}{\partial x} + v \frac{\partial E}{\partial y} + \omega \frac{\partial E}{\partial \zeta} + \omega \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = 0. \quad (3.28)$$

Суммируя уравнения (3.26) и (3.28) и учитывая уравнение неразрывности, находим:

$$\frac{\partial}{\partial t} (E_k + E) + \frac{\partial}{\partial x} [u (E_k + E + \Phi)] + \frac{\partial}{\partial y} [v (E_k + E + \Phi)] + \\ + \frac{\partial}{\partial \zeta} [\omega (E_k + E + \Phi)] = 0. \quad (3.29)$$

Масса элементарного объема $dx dy dz$ равна $\rho dx dy dz = -\frac{1}{g} dx dy dp = -\frac{P}{g} dx dy d\zeta$. Проинтегрируем уравнение (3.29) по массе в пределах призмы:

$$\begin{aligned} \frac{P}{g} \left\{ \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{\zeta_s} \frac{\partial}{\partial t} (E_K + E) d\zeta dx dy + \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{\zeta_s} \frac{\partial}{\partial x} [u(E_K + E + \Phi)] d\zeta dx dy + \right. \\ \left. + \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_0^{\zeta_s} \frac{\partial}{\partial y} [v(E_K + E + \Phi)] d\zeta dy dx + \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{\zeta_s} [\omega(E_K + E + \Phi)] d\zeta dx dy \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Выполним сначала интегрирование по ζ , учитывая, что ζ_s является величиной переменной:

$$\begin{aligned} \int_0^{\zeta_s} \frac{\partial}{\partial t} (E_K + E) d\zeta &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\zeta_s} (E_K + E) d\zeta - \frac{\partial \zeta_s}{\partial t} (E_K + E)_s, \\ \int_0^{\zeta_s} \frac{\partial}{\partial x} [u(E_K + E + \Phi)] d\zeta &= \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\zeta_s} u(E_K + E + \Phi) d\zeta - \\ &\quad - \frac{\partial \zeta_s}{\partial x} [u(E_K + E + \Phi)]_s, \\ \int_0^{\zeta_s} \frac{\partial}{\partial y} [v(E_K + E + \Phi)] d\zeta &= \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\zeta_s} v(E_K + E + \Phi) d\zeta - \\ &\quad - \frac{\partial \zeta_s}{\partial y} [v(E_K + E + \Phi)]_s, \\ \int_0^{\zeta_s} \frac{\partial}{\partial \zeta} [\omega(E_K + E + \Phi)] d\zeta &= [\omega(E_K + E + \Phi)]_s, \end{aligned}$$

где нижний индекс s у квадратных скобок означает, что величины, стоящие в скобках, относятся к уровню ζ_s . Учитывая эти соотношения и условия (3.25), выполним интегрирование уравнения (3.30):

$$\begin{aligned} \frac{P}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\zeta_s} (E_K + E) d\zeta + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\zeta_s} u(E_K + E + \Phi) d\zeta + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\zeta_s} v(E_K + E + \Phi) d\zeta - \left[\frac{\partial \zeta_s}{\partial t} (E_K + E)_s + u_s \frac{\partial \zeta_s}{\partial x} (E_K + E + \Phi)_s + \right. \right. \\ \left. \left. + v_s \frac{\partial \zeta_s}{\partial y} (E_K + E + \Phi)_s - \omega_s (E_K + E + \Phi)_s \right] \right\} dx dy = 0. \end{aligned}$$

Поскольку в соответствии с последним условием (3.25)

$$\left(u_s \frac{\partial \xi_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial \xi_s}{\partial y} - \omega_s\right)(E_K + E + \Phi)_s = -\frac{\partial \xi_s}{\partial t}(E_K + E + \Phi)_s,$$

то выражение в квадратной скобке приобретает вид

$$\Phi_s \frac{\partial \xi_s}{\partial t} = \frac{1}{P} \frac{\partial (p_s \Phi)}{\partial t}.$$

Здесь учтено, что Φ_s от t не зависит. В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{E}_K + \bar{E} + \overline{\Phi_s p_s}) = 0, \quad (3.31)$$

где

$$\overline{\Phi_s p_s} = \frac{1}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \Phi_s p_s dx dy,$$

$$\bar{E}_K = \frac{P}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{\xi_s} E_K d\xi dx dy$$

представляет собой кинетическую энергию массы воздуха в объеме параллелепипеда,

$$\bar{E} = \frac{P}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{\xi_s} E d\xi dx dy -$$

энтальпия массы воздуха в этом же объеме.

Потенциальная энергия массы воздуха в рассматриваемом объеме будет определяться выражением

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} &= \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{\infty} g z \rho dz dx dy = \frac{P}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{\xi_s} \Phi d\xi dx dy = \\ &= \frac{P}{g} \left[\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \Phi_s p_s dx dy + \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{\xi_s} R T d\xi dx dy \right]. \end{aligned}$$

Поскольку внутренняя энергия массы воздуха $\bar{E}_B$ в этом объеме равна

$$\bar{E}_B = \frac{P}{g} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{\xi_s} c_v T d\xi dx dy,$$

а $c_v + R = c_p$, то $\bar{E} + \overline{\Phi_s p_s} = \bar{\Pi} + \bar{E}_s$. Таким образом, условие (3.31) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{E}_K + \bar{E}_B + \bar{\Pi}) = 0. \quad (3.32)$$

Это условие означает, что сумма механической (кинетическая плюс потенциальная) и внутренней энергии в области определения решения системы уравнения (1.1) в адиабатическом приближении с граничными условиями (3.25) сохраняется, т. е. является интегральным инвариантом модели. Для этой модели сохраняется также масса воздуха в области определения решения.

Интегральные свойства бароклинной модели

в σ -системе координат

С помощью уравнений (1.14—1.17) в адиабатическом варианте без учета вязкости получим уравнения для кинетической энергии (E_k) и энтальпии (E). Для получения уравнения кинетической энергии умножим уравнение (1.15) на $u p_s$, а уравнение (1.16) — на $v p_s$ и результаты сложим. Тогда получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial (p_s E_k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u p_s E_k) + \frac{\partial}{\partial y} (v p_s E_k) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\dot{\sigma} p_s E_k) = \\ = -p_s \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - \frac{p_s}{\rho} \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

При получении уравнения (3.33) используется уравнение (1.14).

Уравнение притока тепла (1.17) в адиабатическом приближении

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = 0$$

умножим на p_s и с помощью уравнения неразрывности (1.14) представим в дивергентной форме

$$\frac{\partial (p_s \theta)}{\partial t} + \frac{\partial (u p_s \theta)}{\partial x} + \frac{\partial (v p_s \theta)}{\partial y} + \frac{\partial (\dot{\sigma} p_s \theta)}{\partial \sigma} = 0. \quad (3.34)$$

Умножим уравнение (3.34) на функцию Экснера $\pi = (p/P)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$ и на c_p , введем $c_p \pi$ под знак производных и учтем, что $\pi \theta = T$, $c_p T = E$.

В результате получим уравнение для E :

$$\begin{aligned} \frac{\partial (p_s E)}{\partial t} + \frac{\partial (u p_s E)}{\partial x} + \frac{\partial (v p_s E)}{\partial y} + \frac{\partial (\dot{\sigma} p_s E)}{\partial \sigma} = \\ = c_p p_s \theta \left(\frac{\partial \pi}{\partial t} + u \frac{\partial \pi}{\partial x} + v \frac{\partial \pi}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial \pi}{\partial \sigma} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + u \frac{\partial \pi}{\partial x} + v \frac{\partial \pi}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial \pi}{\partial \sigma} = \frac{d\pi}{dt},$$

$$c_p p_s \theta \frac{d\pi}{dt} = c_p p_s \theta \frac{\kappa-1}{\kappa} \left(\frac{p}{P} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}-1} \frac{1}{P} \frac{dp}{dt} =$$

$$= c_p p_s \theta \frac{R}{c_p} \pi \frac{p}{P} \frac{1}{P} \frac{dp}{dt} = \frac{p_s}{p} \theta \pi R \frac{dp}{dt} = \frac{1}{\sigma} T R \frac{dp}{dt} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{dp}{dt},$$

получаем:

$$\frac{\partial (p_s E)}{\partial t} + \frac{\partial (u p_s E)}{\partial x} + \frac{\partial (v p_s E)}{\partial y} + \frac{\partial (\dot{p}_s E)}{\partial \sigma} = - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{dp}{dt}. \quad (3.35)$$

Суммируя уравнения (3.33) и (3.35), находим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [p_s (E_K + E)] + \frac{\partial}{\partial x} [u p_s (E_K + E)] + \frac{\partial}{\partial y} [v p_s (E_K + E)] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \sigma} [\dot{p}_s (E_K + E)] = - \frac{p_s}{\rho} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) - p_s \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - \\ & - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \dot{p} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что $p_s/\rho = -\partial\Phi/\partial\sigma$, $\partial p/\partial\sigma = p_s$, получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [p_s (E_K + E)] + \frac{\partial}{\partial x} [u p_s (E_K + E)] + \frac{\partial}{\partial y} [v p_s (E_K + E)] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \sigma} [\dot{p}_s (E_K + E)] = - \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial p}{\partial t} - \left(u p_s \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v p_s \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \dot{p}_s \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} & - \left(u p_s \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v p_s \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \dot{p}_s \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right) = - \left(\frac{\partial (u p_s \Phi)}{\partial x} + \frac{\partial (v p_s \Phi)}{\partial y} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial (\dot{p}_s \Phi)}{\partial \sigma} \right) + \Phi \left(\frac{\partial (u p_s)}{\partial x} + \frac{\partial (v p_s)}{\partial y} + \frac{\partial (\dot{p}_s)}{\partial \sigma} \right), \\ & \Phi \left[\frac{\partial (u p_s)}{\partial x} + \frac{\partial (v p_s)}{\partial y} + \frac{\partial (\dot{p}_s)}{\partial \sigma} \right] = - \Phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} \right), \\ & \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \frac{\partial p}{\partial t} + \Phi \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\Phi \frac{\partial p}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [p_s (E_K + E)] + \frac{\partial}{\partial x} [u p_s (E_K + E + \Phi)] + \frac{\partial}{\partial y} [v p_s (E_K + E + \Phi)] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \sigma} [\dot{p}_s (E_K + E + \Phi)] = - \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\Phi \frac{\partial p}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Проинтегрируем уравнение (3.37) в пределах от x_1 до x_2 , от y_1 до y_2 , от 0 до 1. Используя граничные условия

$$u \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} = v \Big|_{y=y_1}^{y=y_2} = \dot{p} \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=1} = 0, \quad (3.38)$$

находим:

$$\begin{aligned} & \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} [p_s (E_K + E)] d\sigma + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} [u p_s (E_K + E + \Phi)] d\sigma + \right. \\ & \left. + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} [v p_s (E_K + E + \Phi)] d\sigma + \Phi_s \frac{\partial p_s}{\partial t} - \Phi_0 \frac{\partial p_0}{\partial t} \right\} dx dy = 0, \end{aligned} \quad (3.39)$$

где Φ_s , p_s , Φ_0 , p_0 — геопотенциал и давление на уровнях $\sigma = 1$ и $\sigma = 0$ соответственно. Интеграл по σ от последнего члена в левой части уравнения (3.37) равен нулю в силу условий (3.38).

Преобразуем последние два члена уравнения (3.39). Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \Phi \frac{\partial p}{\partial \sigma} d\sigma &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \sigma} (\Phi p) d\sigma - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 p \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} d\sigma = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_s p_s - \Phi_0 p_0) - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \frac{p}{\rho} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} d\sigma = \Phi_s \frac{\partial p_s}{\partial t} + p_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial t} - \\ &- \Phi_0 \frac{\partial p_0}{\partial t} - p_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 R T p_s d\sigma, \quad R = c_p - c_v, \\ \Phi_s \frac{\partial p_s}{\partial t} - \Phi_0 \frac{\partial p_0}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \Phi p_s d\sigma - \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 p_s (c_p - c_v) T d\sigma + \\ &+ p_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} - p_s \frac{\partial \Phi_s}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Последние два члена в полученном выражении равны нулю, так как геопотенциал на верхней и нижней границах атмосферы не зависит от времени. Таким образом, учитывая, что $E = c_p T$, уравнение (3.39) после замены в нем двух последних членов с помощью выражения (3.40) представляется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^1 p_s (E_K + c_v T + \Phi) d\sigma dx dy + \int_0^1 \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} [u p_s (E_K + c_p T + \\ + \Phi)] dx dy d\sigma + \int_0^1 \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial}{\partial y} [v p_s (E_K + c_p T + \Phi)] dy dx d\sigma = 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

В силу граничных условий (3.38) второй и третий члены в (3.41) равны нулю. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^1 p_s (E_K + c_v T + \Phi) d\sigma dx dy = 0.$$

Следовательно,

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^1 p_s (E_K + c_v T + \Phi) d\sigma dx dy = \text{const.}$$

Таким образом, сумма кинетической, потенциальной и внутренней энергии в области определения решения системы уравнений (1.15)—(1.21) в адиабатическом приближении с граничными условиями (3.38) сохраняется, т. е. является интегральным инвариантом модели. Если использовать условия (3.38), то можно показать, что

сохраняется масса (M) в пределах области интегрирования, так как на основе уравнения неразрывности, проинтегрированного по σ в пределах от 0 до 1, можно получить:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} p_s dx dy = - \int_0^1 \left[\int_{y_1}^{y_2} u p_s \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} + \int_{x_1}^{x_2} v p_s \Big|_{y=y_1}^{y=y_2} dx \right] d\sigma \equiv 0.$$

Следовательно,

$$g \frac{\partial M}{\partial t} = 0, \quad M = \text{const.}$$

Помимо рассмотренных инвариантов, можно построить и другие. Для несжимаемой баротропной среды существует бесконечное число инвариантов, определяемых сохранением вихря скорости. Инварианты существуют для области любой конфигурации, если поток массы воздуха через границы отсутствует и не учитывается неадиабатичность атмосферных процессов и вязкость. Если учитывается неадиабатичность и вязкость, то инвариантность нарушается. Замена дифференциальных уравнений моделей конечно-разностными также может нарушать интегральные свойства.

В ряде исследований показано, что конечно-разностные схемы, обладающие свойством сохранения интегральных инвариантов и называемые консервативными, оказываются более устойчивыми в вычислительном отношении. Во всяком случае при использовании консервативных схем представляется возможность контролировать вычислительную устойчивость процесса численного интегрирования уравнений с помощью инвариантов.

На практике модели строятся при предположениях, более общих, чем те, которые использовались при получении инвариантов. В частности, могут ставиться другие граничные условия, учитываться неадиабатичность и вязкость. Однако и для таких моделей контроль вычислений с помощью инвариантов полезен. Быстрый рост или уменьшение значений инвариантов в процессе численного интегрирования свидетельствует о неудовлетворительности выбранной схемы интегрирования.

4.4. Предотвращение и подавление нелинейной неустойчивости

При рассмотрении природы нелинейной неустойчивости в главе 2 в уравнении (8.34) составляющая скорости $u(x, t)$ представлялась одним волновым компонентом. В действительности для представления любой метеорологической величины необходимо использовать сумму достаточно большого числа волновых компонент. На каждую волновую компоненту приходится определенная энергия.

Спектральный анализ метеорологических полей позволяет оценить распределение энергии по волновым компонентам. Анализ показывает, что эти распределения сравнительно мало изменяются

во времени и что на короткие волны приходится весьма незначительная доля общей энергии. Это свидетельствует о том, что в атмосфере преобладающего притока энергии к коротким волнам не наблюдается.

Указанное обстоятельство, наряду с интегральными свойствами моделей, учитывается при построении конечно-разностных схем, используемых для интегрирования нелинейных уравнений.

4.4.1. Предотвращение нелинейной неустойчивости

В работах Аракавы намечен общий подход к построению конечно-разностных схем, обеспечивающих сохранение интегральных свойств и предотвращающих ложный приток энергии к коротким волнам за счет ошибок ложного представления, разрешаемых на сетках при $L > 2\Delta x$. С помощью таких схем предотвращается развитие нелинейной неустойчивости при численном интегрировании нелинейных уравнений.

Рассмотрим этот вопрос на примере бездивергентной баротропной модели, для которой при $l = \text{const}$

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\nabla^2 \psi, \psi), \quad (4.1)$$

где ψ — функция тока, $(\nabla^2 \psi, \psi) = \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}$ — якобиан. На боковых границах будем полагать $\psi = \text{const}$, что означает отсутствие потока через границы. В прямоугольной области, длина сторон которой составляет L_x и L_y , представим поле функции тока двойным рядом Фурье, полагая, что функция тока периодична по x и обращается в нуль при $y = 0$, L_y :

$$\psi(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{m,n} \cos \frac{2\pi m x}{L_x} + b_{m,n} \sin \frac{2\pi m x}{L_x} \right] \sin \frac{\pi n y}{L_y}, \quad (4.2)$$

где a_{mn} , b_{mn} — коэффициенты, зависящие от времени. Подставляя ряд (4.2) в правую часть уравнения (4.1), получаем:

$$\begin{aligned} (\nabla^2, \psi, \psi) = & \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(a_{mn} \sin \frac{2\pi m x}{L_x} - b_{mn} \cos \frac{2\pi m x}{L_x} \right) \sin \frac{\pi n y}{L_y} \times \right. \\ & \times \left[\left(\frac{2\pi m}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{\pi n}{L_y} \right)^2 \right] \frac{2\pi m}{L_x} \left. \right\} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(a_{mn} \cos \frac{2\pi m x}{L_x} + \right. \right. \\ & \left. \left. + b_{mn} \sin \frac{2\pi m x}{L_x} \right) \frac{\pi n}{L_y} \cos \frac{\pi n y}{L_y} \right] - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(a_{mn} \cos \frac{2\pi m x}{L_x} + \right. \right. \\ & \left. \left. + b_{mn} \sin \frac{2\pi m x}{L_x} \right) \times \frac{\pi n}{L_y} \cos \frac{\pi n y}{L_y} \right] \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(-a_{mn} \sin \frac{2\pi m x}{L_x} + \right. \right. \\ & \left. \left. + b_{mn} \cos \frac{2\pi m x}{L_x} \right) \frac{2\pi m}{L_x} \sin \frac{\pi n y}{L_y} \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

В результате перемножения рядов в правой части выражения (4.3) появятся произведения синусов и косинусов с различными волновыми числами. Рассмотрим результаты такого перемножения членов с волновыми числами:

$$m_1 = \frac{2\pi}{L_x}, \quad n_1 = \frac{\pi}{L_y}, \quad m_2 = \frac{2\pi}{L_x/2}, \quad n_2 = \frac{2\pi}{L_y}.$$

Поскольку $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)]$, $\cos \alpha \times \times \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)]$, $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin \times \times (\alpha - \beta) + \sin (\alpha + \beta)]$, то в результате перемножения членов рядов (4.3) с синусами и косинусами, в аргументе которых фигурируют $m_1 x$, $m_2 x$, $n_1 y$, $n_2 y$, получатся синусы и косинусы, содержащие в аргументах четыре пары волновых чисел:

$$m_1 + m_2, n_1 + n_2; m_1 - m_2, n_1 + n_2;$$

$$m_1 + m_2, n_1 - n_2; m_1 - m_2, n_1 - n_2.$$

Таким образом, в результате нелинейного взаимодействия волн с волновыми числами m_1 , n_1 и m_2 , n_2 появляются новые четыре пары волн. Среди появляющихся в результате нелинейного взаимодействия волн могут быть и такие, которых не было в разложении (4.2). На вновь появляющиеся волны приходится определенная доля энергии, которая переносится от волн, представленных в разложении (4.2). Следовательно, можно считать, что нелинейный член уравнения (4.1) описывает перенос энергии между волнами с различными волновыми числами. Члены ряда (4.2) являются собственными функциями уравнения Гельмгольца $\nabla^2 \psi_{m,n} + \lambda_{m,n}^2 \psi_{m,n} = 0$:

$$\psi_{m,n} = \left(a_{mn} \cos \frac{2\pi m x}{L_x} + b_{mn} \sin \frac{2\pi m x}{L_x} \right) \sin \frac{\pi n y}{L_y},$$

где

$$\lambda_{mn}^2 = \left(\frac{2\pi m}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{\pi n}{L_y} \right)^2$$

представляют собой собственные числа (обобщенные волновые числа).

В этом легко убедиться, если ряд (4.2) продифференцировать дважды по x и по y :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_{mn} \left(\frac{2\pi m}{L_x} \right)^2 \cos \frac{2\pi m x}{L_x} + \right. \\ \left. + b_{mn} \left(\frac{2\pi m}{L_x} \right)^2 \sin \frac{2\pi m x}{L_x} \right] \sin \frac{\pi n y}{L_y},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{mn} \cos \frac{2\pi m x}{L_x} + b_{mn} \sin \frac{2\pi m x}{L_x} \right) \left(\frac{\pi n}{L_y} \right)^2 \sin \frac{\pi n y}{L_y},$$

а затем сложить результаты:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi = & - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_{mn} \cos \frac{2\pi m x}{L_x} + b_{mn} \sin \frac{2\pi m x}{L_y} \right) \sin \frac{\pi n y}{L_y} \times \\ & \times \left[\left(\frac{2\pi m}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{\pi n}{L_y} \right)^2 \right] = -\psi \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2\pi m}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{\pi n}{L_y} \right)^2 \right] = -\psi \lambda^2. \end{aligned}$$

Следовательно, для фиксированных m и n имеем $\nabla^2 \psi_{mn} + \lambda_{mn}^2 \psi_{mn} = 0$. В рассматриваемом случае средняя по прямоугольной области кинетическая энергия $\bar{E}_K$ и средняя энтропия $\bar{\Omega}^2$ сохраняются во времени:

$$\begin{aligned} \bar{E}_K &= \frac{1}{2} \overline{\left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right)} = \frac{1}{2} \overline{\left[\left(-\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right]} = \\ &= \frac{1}{2} \overline{\left[\left(-\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial y} \right)^2 + \left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial x} \right)^2 \right]} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (E_K)_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{mn}^2 \psi_{mn}^2 = \frac{1}{2} \lambda^2 \bar{\psi}^2 = \text{const}, \\ \bar{\Omega}^2 &= \overline{\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2} = \overline{(\nabla^2 \psi)^2} = \overline{\left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \nabla^2 \psi_{mn} \right)^2} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{mn}^2 (E_K)_{mn} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{mn}^4 \psi_{mn}^2 = \lambda^4 \bar{\psi}^2 = \text{const}, \end{aligned}$$

где $\overline{(\quad)} = \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} (\quad) dx dy$, λ не зависит от x и y .

При получении этих выражений используются соотношение $\nabla^2 \psi = -\psi \lambda^2$, свойство ортогональности синусов и косинусов, а также условия на боковых границах области ($\psi = \text{const}$). Поскольку $\bar{E}_K$ и $\bar{\Omega}^2$ сохраняются, то сохраняется и их отношение: $\bar{\Omega}^2 / \bar{E}_K = 2\lambda^2 = \text{const}$, где λ — среднее по спектру волновое число.

Таким образом, среднее волновое число также сохраняется, т. е. не зависит от времени. Поскольку $E_K \lambda^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{mn}^2 (\bar{E}_K)_{mn} = \text{const}$, то чем больше λ_{mn} , тем меньше $(\bar{E}_K)_{mn}$. Следовательно, приток энергии к коротким волнам более ограничен, чем приток к длинным волнам, так как даже небольшое увеличение значений $(E_K)_{mn}$, умножаемых на большие значения λ_{mn}^2 , привело бы к существенному нарушению постоянства суммы

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{mn}^2 (\bar{E}_K)_{mn}.$$

Это означает, что систематический перенос энергии в сторону коротких волн (больших волновых чисел) невозможен. Аракава первым показал, что разностные схемы могут быть построены так, чтобы в процессе численного интегрирования сохранялись средние по области интегрирования значения кинетической энергии и энтропии. При выполнении этих условий предотвращается ложный приток энергии к коротким волнам, а следовательно, не будут иметь место ошибки ложного представления и не будет развиваться неустойчивость.

Конечно-разностные схемы, используемые для интегрирования уравнений на длительные периоды времени, целесообразно строить с учетом этих условий. Для моделей краткосрочного прогноза учет этих условий не обязателен.

Учитывая это обстоятельство, а также громоздкость выкладок, мы не будем обсуждать построение конечно-разностных схем для полных уравнений, сохраняющих энтрофию. Тем, кто желает ознакомиться с этим вопросом, рекомендуем обратиться к оригинальным работам, например А. Аракавы, В. Р. Лэмба.*

В дальнейшем будут рассмотрены лишь общие вопросы, связанные с построением консервативных конечно-разностных схем для полных уравнений.

Предотвращение нелинейной неустойчивости может быть достигнуто за счет использования лагранжева описания адвекции. В этом случае изменения метеовеличин за счет адвекции определяются как разности значений в начале и в конце траекторий частиц, рассчитываемых для интервалов времени, равных шагу по времени.

4.4.2. Подавление нелинейной неустойчивости

Развитие нелинейной неустойчивости при интегрировании полных уравнений может контролироваться с помощью периодически вычисляемых интегральных инвариантов и подавляться за счет фильтрации коротких волн. Для фильтрации коротких волн могут использоваться различные приемы. Один из них состоит в том, что поля метеовеличин, рассчитываемые в процессе интегрирования уравнений, через определенное число шагов по времени разлагаются в ряды Фурье, из которых исключаются члены с большими волновыми числами. При этом стремятся исключить ошибки ложного представления, отфильтровывая волны длиной в два и три шага сетки.

В целях предотвращения роста вычислительных мод (для схем центральных разностей) и нелинейной неустойчивости применяются пространственные и временные операторы сглаживания и фильтрации.

* Аракава А., Лэмб В. Р. Вычислительные схемы для основных динамических процессов в глобальной циркуляционной модели Калифорнийского университета в Лос-Анджелесе. — В кн.: Модели общей циркуляции атмосферы/Пер. с англ. — Л.: Гидрометеиздат, 1981.

Пространственный фильтр, предложенный Р. Шапиро, имеет следующий вид:

$$\bar{f}_{i,j}^{x,y} = f_{i,j} - \beta \left[\left(\frac{\Delta x}{2} \right)^4 (\delta x)^4 f_{ij} + \left(\frac{\Delta y}{2} \right)^4 (\delta y)^4 f_{i,j} \right],$$

где

$$(\delta x)^4 f_{i,j} = \frac{1}{(\Delta x)^4} (f_{i-2,j} - 4f_{i-1,j} + 6f_{i,j} - 4f_{i+1,j} + f_{i+2,j}),$$

$$(\delta y)^4 f_{i,j} = \frac{1}{(\Delta y)^4} (f_{i,j-2} - 4f_{i,j-1} + 6f_{i,j} - 4f_{i,j+1} + f_{i,j+2}),$$

β — эмпирический коэффициент.

Для подавления вычислительных мод, возникающих при использовании центральных разностей по времени, Робером и Асселином предложен временной (частотный) фильтр вида

$$\bar{f}_{i,j}^s = f_{i,j} + 0,5v (f_{i,j}^{s-1} - 2f_{i,j}^s + f_{i,j}^{s+1}),$$

где v — параметр фильтра, значение которого обычно принимается равным 0,05, $s = t/\Delta t$.

Включение в уравнения диссипативных (вязких) членов и использование конечно-разностных схем, обладающих свойством вычислительной вязкости, или схем, сглаживающих короткие волны (типа схемы Лакса—Вендрофа), также способствуют уменьшению амплитуд коротких волн, а следовательно, подавлению нелинейной неустойчивости. Включение в уравнения членов, описывающих вязкость по линейным и нелинейным схемам, нашло широкое применение. Однако линейные схемы оказываются недостаточно избирательными в смысле подавления различных волн. В частности, применение линейных схем приводит не только к подавлению коротких волн, но и к затуханию метеорологически значимых волн, что не соответствует реальным процессам, а поэтому вредно. Более предпочтительными являются нелинейные схемы вязкости, включаемые в соответствующие уравнения неявно. Однако фильтрация и подавление коротких волн, достигаемые за счет искусственной вязкости, приводят к определенным искажениям в распределении энергии по спектру атмосферных возмущений, в том числе и для длинных волн, что не всегда приемлемо. Поэтому более предпочтительными следует признать такие схемы, с помощью которых не подавлялись бы искусственно короткие волны, а обеспечивалось предотвращение нелинейной неустойчивости и ложный приток энергии к коротким волнам. К таким схемам относятся схемы, сохраняющие энергию и энтрофию. Этим требованиям, в первую очередь, должны отвечать схемы, используемые для интегрирования уравнений на длительные периоды времени. Для моделей краткосрочного прогноза погоды выполнение этих требований не столь обязательно.

4.4.3. Конечно-разностная аппроксимация пространственных производных, удовлетворяющая интегральным свойствам

Рассмотрим возможности построения схем, сохраняющих интегральные свойства, на примере одномерного нелинейного уравнения адвекции

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.4)$$

и соответствующего ему уравнения для кинетической энергии одномерного движения $u^2/2$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} \right) = -u^2 \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{3} \frac{\partial u^3}{\partial x} \quad (4.5)$$

в области определения решения на оси x от 0 до L . Интегрируя уравнение (4.5) по x в пределах от 0 до L , получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \left(\frac{u^2}{2} \right) dx = -\frac{1}{3} (u_L^3 - u_0^3).$$

Если поток на границах отсутствует, т. е. $u_L = u_0 = 0$, то

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \frac{u^2}{2} dx = 0.$$

Следовательно, кинетическая энергия сохраняется.

Рассмотрим различные аппроксимации производных по x в уравнениях (4.4) и (4.5), сохраняя дифференцирование по t . Введем одномерную дискретную сетку точек $i = x/\Delta x$ ($i = 0, 1, \dots, I$). Запишем на этой сетке уравнение (4.5) и выполним суммирование по i в пределах от $i = 0$ до $i = I$, используя для производных по x направленные разности вперед:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=0}^I \left(\frac{u_i^2}{2} \right) &= \frac{1}{3 \Delta x} [(u_1^3 - u_0^3) + (u_2^3 - u_1^3) + \dots + (u_{i+1}^3 - u_i^3) + \\ &+ \dots + (u_I^3 - u_{I-1}^3)]. \end{aligned}$$

Если использовать граничные условия $u_0 = u_I = 0$, то правая часть полученного выражения будет равна нулю, так как промежуточные значения u в правой части сокращаются. Таким образом, эта двухточечная конечно-разностная аппроксимация сохраняет кинетическую энергию.

Рассмотрим уравнение (4.5) в форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} \right) = -u^2 \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Воспользуемся для аппроксимации производной по x центральной разностью и просуммируем результаты по i в пределах от $i = 1$ до $i = I - 1$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{I-1} \left(\frac{u_i^2}{2} \right) = - \frac{1}{2 \Delta x} [u_1^2 (u_2 - u_0) + u_2^2 (u_3 - u_1) + \dots + u_i^2 (u_{i+1} - u_{i-1}) + \dots + u_{I-1}^2 (u_I - u_{I-2})].$$

Здесь при $u_0 = u_I = 0$ правая часть не обращается в нуль. Следовательно, при использовании трехточечной конечно-разностной аппроксимации интегральное свойство нарушается.

Представим уравнение (4.4) в дифференциально-разностной форме:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = - \frac{\bar{u}_i^x}{2 \Delta x} (u_{i+1} - u_{i-1}),$$

где $\bar{u}_i^x = 1/3 (u_{i-1} + u_i + u_{i+1})$. Умножая это уравнение на u_i и суммируя результат по i в пределах от $i = 1$ до $i = I - 1$, находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{I-1} \frac{u_i^2}{2} = & - \frac{1}{6 \Delta x} [(u_1^2 u_2^2 + u_1^2 u_2 - u_1^2 u_0 - u_1 u_0^2) + (u_2 u_3^2 + u_2^2 u_3 - \\ & - u_2^2 u_1 - u_2 u_1^2) + \dots + (u_i u_{i+1}^2 + u_i^2 u_{i+1} - u_i^2 u_{i-1} - u_i u_{i-1}^2) + \dots + \\ & + (u_{I-1} u_I^2 + u_{I-1}^2 u_I - u_{I-1}^2 u_{I-2} - u_{I-1} u_{I-2}^2)]. \end{aligned}$$

При $u_0 = u_I = 0$ сумма в правой части равна нулю, т. е. схема обеспечивает сохранение кинетической энергии. Последний пример показывает, что, применяя осреднение, можно построить конечно-разностные схемы с центральными разностями, удовлетворяющие интегральным свойствам.

Из рассмотренных примеров видно, что конечно-разностные аппроксимации производных по пространству удовлетворяют интегральным свойствам (в данном случае сохраняют кинетическую энергию), если при суммировании конечно-разностных операторов по области определения решения получаются выражения, содержащие u_i на границах области.

4.4.4. Потокковая форма уравнений. Бокс-метод

При рассмотрении интегральных свойств было показано, что основным способом, позволяющим доказать наличие инвариантов, является запись уравнений в дивергентной форме. В этом случае интегралы по области определения решений зависят только от граничных условий. Это вполне естественно, так как в соответствии с теоремой Остроградского—Гаусса имеем:

для трехмерного потока

$$\int_V \int \int \operatorname{div}_3 f \mathbf{C} \, dv = \int_S \int C_n f \, ds,$$

для двумерного потока

$$\int_S \int \operatorname{div}_2 f \mathbf{C} \, dS = \oint_L C_n f \, dl,$$

где V — объем; S — площадь поверхности; L — контур; l — элемент контура; $\mathbf{C}$ — вектор скорости (трехмерный или двумерный); C_n — нормальная составляющая вектора скорости $\mathbf{C}$ к поверхности S , ограничивающей объем V , или к контуру L , стягивающему поверхность S ; f — любая скалярная функция; div_3 , div_2 — трехмерный и двумерный оператор дивергенции.

Если на поверхности S или на контуре L , отождествляемых с границами областей определения решений, C_n равны нулю, то скалярные потоки $\int_S \int C_n f \, ds = 0$, $\oint_L C_n f \, dl = 0$, а следовательно, $\int_V \int \operatorname{div}_3 f \mathbf{C} \, dv = 0$, $\int_S \int \operatorname{div}_2 f \mathbf{C} \, ds = 0$.

Если локальные изменения по времени функции f ($\partial f / \partial t$) определяются $\operatorname{div} \mathbf{C} f$, то интеграл по области определения решений от $\partial f / \partial t$ равен нулю: $\frac{\partial}{\partial t} \int_V \int \int f \, dv = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} \int_S \int f \, ds = 0$. Следовательно,

величины $\int_V \int \int f \, dv$, $\int_S \int f \, ds$ сохраняются. Если под f понимается энергия или энтропия, то они будут сохраняться. Представим в прогностических уравнениях адвективные члены в дивергентной форме, а затем выразим дивергенцию в области определения решений (в объеме или на поверхности) через потоки на границах. Тогда при периодических граничных условиях или при равенстве нулю нормальных к границам составляющих скоростей интегральные по области определения локальные изменения соответствующих метеовеличин, обусловленные адвекцией, будут равны нулю.

Записав прогностические уравнения в дивергентной форме, а затем преобразовав их с помощью теоремы Остроградского—Гаусса, можно получить уравнения, в которых фигурируют скалярные потоки через границы. Полученные в результате таких преобразований уравнения называются уравнениями в потоковой форме. Построение конечно-разностных схем, обеспечивающих сохранение интегральных свойств, для уравнений в потоковой форме обычно осуществляется с помощью бокс-метода.

Поясним применение бокс-метода для построения конечно-разностной схемы на примере уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + \omega \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0.$$

Это уравнение с помощью уравнения неразрывности приводится к дивергентной форме

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial (uF)}{\partial x} + \frac{\partial (vF)}{\partial y} + \frac{\partial (\omega F)}{\partial \zeta} = 0,$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{CF} = 0, \quad (4.6)$$

где F — скалярная функция.

Будем рассматривать решение уравнения (4.6) в области, представляющей собой квазипрямоугольный параллелепипед, ребра которого ориентированы по направлению координатных осей. Предположим, что длина ребер по направлению осей x и y составляет $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ соответственно, а по высоте параллелепипед простирается от верхней границы атмосферы ($\zeta = 0$) до нижней границы атмосферы, отождествляемой с уровнем $\zeta = 1$. На гранях параллелепипеда будем использовать граничные условия вида

$$u \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} = v \Big|_{y=y_1}^{y=y_2} = \omega \Big|_{\zeta=0}^{\zeta=1} = 0. \quad (4.7)$$

Если проинтегрировать уравнение (4.6) по объему призмы, то в силу граничных условий (4.7) $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V F dv = 0$, т. е. $\bar{F} = \text{const}$,

где $\bar{F} = \frac{1}{V} \iiint_V F dv$; V — объем призмы.

Таким образом, дивергентная форма уравнения (4.6) и граничные условия (4.7), означающие отсутствие потоков на гранях параллелепипеда, обеспечивают сохранение скалярной величины $\bar{F}$ в объеме V .

Построим для уравнения (4.6) с граничными условиями (4.7) конечно-разностную схему, обладающую таким же интегральным свойством.

В объеме V построим пространственную сетку точек, узлы которой обозначим индексами $i = x/\Delta x$, $j = y/\Delta y$, $k = \zeta/\Delta \zeta$. В узлах с индексами $j = 0, 1, \dots, J$; $k = 0, 1, \dots, K$ при $i = 0, 1, \dots, I$; $k = 0, 1, \dots, K$ при $j = 0, J$; $i = 0, 1, \dots, I$; $j = 0, 1, \dots, J$ при $k = 0, K$, которые лежат на гранях параллелепипеда, ограничивающих объем V , ставятся граничные условия (4.7). В объеме V построим пространственные ячейки (боксы), объем которых равен $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta \zeta$. Центры этих ячеек располагаются в точках с дробными индексами $i + 1/2$, $j + 1/2$, $k + 1/2$.

Проинтегрируем уравнение (4.6) по объему ΔV :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Delta V} F dv + \iiint_{\Delta V} \operatorname{div} \mathbf{CF} dV = 0.$$

Согласно теореме Остроградского—Гаусса

$$\iiint_{\Delta V} \operatorname{div} \mathbf{CF} dV = \iint_{\Delta S} C_n F ds,$$

где C_n — нормальные составляющие вектора скорости ветра C (u , v , ω) к граням ячейки (бокса); ΔS — площадь поверхности, ограничивающей объем ΔV . Поскольку

$$\begin{aligned} \iiint_{\Delta V} \operatorname{div} CF \, dV &\approx \overline{(\operatorname{div} CF) \Delta V}^{\Delta V} = \overline{(\operatorname{div} CF)}_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{\Delta V} \Delta x \Delta y \Delta z, \\ \iint_{\Delta S} C_n F \, ds &= -[(\bar{u}^{yz} \bar{F}^{yz})_{i+1, j+1/2, k+1/2} - (\bar{u}^{yz} \bar{F}^{yz})_{i, j+1/2, k+1/2}] \Delta y \Delta z + \\ &+ [(\bar{v}^{xz} \bar{F}^{xz})_{i+1/2, j+1, k+1/2} - (\bar{v}^{xz} \bar{F}^{xz})_{i+1/2, j, k+1/2}] \Delta x \Delta z + \\ &+ [(\bar{\omega}^{xy} \bar{F}^{xy})_{i+1/2, j+1/2, k+1} - (\bar{\omega}^{xy} \bar{F}^{xy})_{i+1/2, j+1/2, k}] \Delta x \Delta y, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \overline{(\operatorname{div} CF)}_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{\Delta V} &= \frac{1}{\Delta x} [(\bar{u}^{yz} \bar{F}^{yz})_{i+1, j+1/2, k+1/2} - \\ &- (\bar{u}^{yz} \bar{F}^{yz})_{i, j+1/2, k+1/2}] + \frac{1}{\Delta y} [(\bar{v}^{xz} \bar{F}^{xz})_{i+1/2, j+1, k+1/2} - \\ &- (\bar{v}^{xz} \bar{F}^{xz})_{i+1/2, j, k+1/2}] + \frac{1}{\Delta z} [(\bar{\omega}^{xy} \bar{F}^{xy})_{i+1/2, j+1/2, k+1} - \\ &- (\bar{\omega}^{xy} \bar{F}^{xy})_{i+1/2, j+1/2, k}] = [\delta_x (\bar{u}^{yz} \bar{F}^{yz}) + \delta_y (\bar{v}^{xz} \bar{F}^{xz}) + \\ &+ \delta_z (\bar{\omega}^{xy} \bar{F}^{xy})]_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $\delta_x (\bar{u}^{yz} \bar{F}^{yz})$, $\delta_y (\bar{v}^{xz} \bar{F}^{xz})$, $\delta_z (\bar{\omega}^{xy} \bar{F}^{xy})$ — разности потоков через противоположные грани ячейки ΔV . С учетом этих преобразований уравнение (4.6) для центров ячеек ΔV , т. е. для точек с индексами $i + 1/2$, $j + 1/2$, $k + 1/2$, записывается в виде

$$\bar{F}_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{xyz} = -[\delta_x (\bar{u}^{yz} \bar{F}^{yz}) + \delta_y (\bar{v}^{xz} \bar{F}^{xz}) + \delta_z (\bar{\omega}^{xy} \bar{F}^{xy})], \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{F}_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}^{xyz} &= \frac{1}{8} F_{i, j, k} + F_{i, j+1, k} + F_{i, j, k+1} + F_{i+1, j+1, k+1} + \\ &+ F_{i+1, j, k} + F_{i+1, j+1, k} + F_{i+1, j, k+1} + F_{i+1, j+1, k+1}. \end{aligned}$$

Если просуммировать конечно-разностное уравнение (4.9) по всей области определения решения, т. е. по всему объему V , то его правая часть обратится в нуль, так как потоки через внутренние грани, разделяющие две соседние ячейки, равны по величине, но различаются по знаку и, следовательно, в сумме равны нулю, а потоки через внешние грани равны нулю в силу граничных условий. Таким образом, суммарное по области определения решения значение $\sum_{i, j, k} \bar{F}_{i, j, k}^{xyz}$ сохраняется, т. е. конечно-разностная схема обла-
дает интегральным свойством дифференциального уравнения (4.6)

Конечно-разностная схема (4.9) позволяет осуществлять численное интегрирование уравнения (4.6) на шахматной сетке. В этом случае функция F будет вычисляться то в узлах с дробными индек-

сами, то в узлах с целыми индексами. Разумеется, при этом одновременно должны интегрироваться уравнения, позволяющие прогнозировать составляющие скорости u , v , ω .

Рассмотренный подход к построению конечно-разностных схем, сохраняющих интегральные свойства, может быть применен для уравнений в других системах координат.

4.5. Анализ конечно-разностных схем для уравнений, описывающих внешние гравитационные и инерционно-гравитационные волны

Выше были рассмотрены вопросы, связанные с конечно-разностной аппроксимацией производных и построением конечно-разностных схем для уравнения адвекции.

Так как полные уравнения описывают не только низкочастотные, но и быстрые волновые процессы, то конечно-разностные схемы для этих уравнений должны правильно воспроизводить, наряду с крупномасштабными (синоптическими) процессами, и волновые процессы более мелкого масштаба, в том числе гравитационные и инерционно-гравитационные волны. Эти волны возбуждаются при локальных нарушениях квазигеострофического процесса, а рассеяние их в пространстве приводит к восстановлению квазигеострофического процесса. Восстановление квазигеострофического процесса называется геострофическим приспособлением или адаптацией полей.

Развитие во времени квазигеострофических процессов и процессов геострофического приспособления происходит взаимосвязано, так как инерционно-гравитационные волны возбуждаются не только вследствие влияния орографии и неадиабатичности, но и за счет нелинейности квазигеострофического процесса. Однако в силу большой сложности этих процессов исследовать их во взаимосвязи затруднительно. Вследствие этого при разработке конечно-разностных схем приходится опираться на результаты исследований каждого процесса в отдельности, учитывая их основные особенности. Квазигеострофические процессы адвекции описываются нелинейными членами уравнений. Поэтому при разработке конечно-разностных схем для полных уравнений в целях правильного описания процессов адвекции основное внимание уделяется предотвращению нелинейной неустойчивости. Что касается процессов геострофического приспособления, то эти процессы могут быть в основных чертах описаны с помощью линейных уравнений (линейных членов уравнений). При этом необходимо учитывать большие скорости распространения гравитационных и инерционно-гравитационных волн, что существенно затрудняет построение устойчивых конечно-разностных схем, которые были бы одновременно пригодны для воспроизведения медленных процессов адвекции и быстро протекающих процессов геострофического приспособления.

Теория адаптации полей давления и ветра была разработана А. М. Обузовым, И. А. Кибелем, А. С. Мониним и др. Конечно-разностные схемы для уравнений адаптации исследовались Г. И. Марчуком, Виннингофом, Мезингером, Аракавой и др.

Виннингоф, исследуя процесс геострофического приспособления на основе численного моделирования, показал, что точность воспроизведения этого процесса в значительной мере зависит от того, каким образом размещены переменные в узлах сеток. В дальнейшем эти исследования были продолжены в работах Аракавы и Лэмба, Мезингера и Аракавы и др.

Приведем некоторые результаты этих исследований, сосредоточив внимание на численных решениях для скоростей инерционно-гравитационных волн в зависимости от размещения переменных на сетках.

Отличия значений скоростей инерционно-гравитационных волн, полученных при использовании различных сеток, от точных характеризуют качество воспроизведения процесса геострофического приспособления.

4.5.1. Анализ конечно-разностных схем для уравнений, описывающих внешние гравитационные волны

Рассмотрим систему двух одномерных линейных уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= -\bar{\Phi} \frac{\partial u}{\partial x},\end{aligned}\quad (5.1)$$

где U — скорость адвекции; $\bar{\Phi}$ — средний геопотенциал (принимаются постоянными).

Система уравнений (5.1) представляет собой систему линеаризованных уравнений мелкой воды, в которой не учитываются движения вдоль оси y и кориолисовы ускорения. Эти уравнения описывают поведение внешних гравитационных волн, точное решение которых относительно фазовой скорости имеет вид

$$C_\Phi = U \pm \frac{1}{\bar{\Phi}^2}.$$

Явную конечно-разностную схему для уравнений (5.1) запишем с помощью центральных разностей на обычной (нерасщатанной) сетке, в каждом узле которой $n = \frac{x}{\Delta x}$ заданы U и Φ :

$$\begin{aligned}\frac{u_n^{s+1} - u_n^{s-1}}{2 \Delta t} + U \frac{u_{n+1}^s - u_{n-1}^s}{2 \Delta x} &= -\frac{\Phi_{n+1}^s - \Phi_{n-1}^s}{2 \Delta x}, \\ \frac{\Phi_n^{s+1} - \Phi_n^{s-1}}{2 \Delta t} + U \frac{\Phi_{n+1}^s - \Phi_{n-1}^s}{2 \Delta x} &= -\bar{\Phi} \frac{u_{n+1}^s - u_{n-1}^s}{2 \Delta x}.\end{aligned}\quad (5.2)$$

Подставим в конечно-разностные уравнения (5.2) волновые решения

$$u = \hat{u} e^{i(mn \Delta x - \sigma s \Delta t)}, \quad \Phi = \hat{\Phi} e^{i(mn \Delta x - \sigma s \Delta t)},$$

где $\hat{u}$, $\hat{\Phi}$ — амплитуды; $m = 2\pi/L_x$ — волновое число; L_x — длина волны; $\sigma = 2\pi/T$ — частота; T — период колебаний. В результате получим

$$\begin{aligned} \hat{u} \left(\frac{-\sin \sigma \Delta t}{\Delta t} + U \frac{\sin m \Delta x}{\Delta x} \right) + \hat{\Phi} \left(\frac{\sin m \Delta x}{\Delta x} \right) &= 0, \\ \hat{u} \left(\hat{\Phi} \frac{\sin m \Delta x}{\Delta x} \right) + \hat{\Phi} \left(\frac{-\sin \sigma \Delta t}{\Delta t} + U \frac{\sin m \Delta x}{\Delta x} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Однородная система линейных уравнений (5.3) имеет нетривиальное (ненулевое) решение, если ее определитель равен нулю. Раскрывая определитель системы (5.3) и приравнявая его к нулю, получаем:

$$\begin{aligned} \sin \sigma \Delta t &= \frac{\Delta t}{\Delta x} (U \pm \bar{\Phi}^{1/2}) \sin m \Delta x, \\ \sigma &= \frac{1}{\Delta t} \arcsin \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} (U \pm \bar{\Phi}^{1/2}) \sin m \Delta x \right]. \end{aligned}$$

Частота σ будет вещественной, если выполняется условие устойчивости:

$$\left| \sin m \Delta x \left(U \pm \bar{\Phi}^{1/2} \right) \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1.$$

Поскольку $\sin m \Delta x \leq 1$, то для устойчивости требуется, чтобы $C (\Delta t / \Delta x) \leq 1$, где $C = U \pm \bar{\Phi}^{1/2}$ — скорость внешних гравитационных волн.

Построим конечно-разностные аналоги уравнений (5.1) на шахматной (расшатанной) одномерной сетке, представленной на рис. 4.1.

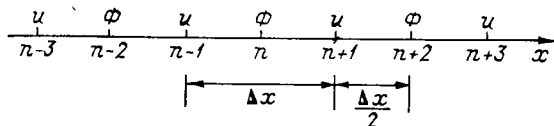


Рис. 4.1. Расшатанная сетка.

Первое уравнение запишем для точки $n+1$, а второе — для точки n , т. е. для точек, где заданы значения u и Φ . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}^{s+1} - u_{n+1}^{s-1}}{2 \Delta t} + U \frac{u_{n+3}^s - u_{n-1}^s}{2 \Delta x} + \frac{\Phi_{n+2}^s - \Phi_n^s}{\Delta x} &= 0, \\ \frac{\Phi_n^{s+1} - \Phi_n^{s-1}}{2 \Delta t} + U \frac{\Phi_{n+2}^s - \Phi_{n-2}^s}{2 \Delta x} + \bar{\Phi} \frac{u_{n+1}^s - u_{n-1}^s}{\Delta x} &= 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Подставив в уравнения (5.4) волновые решения и выполнив тригонометрические преобразования, находим:

$$\sin \sigma \Delta t = \frac{\Delta t}{\Delta x} (U \cos m \Delta x \pm \bar{\Phi}^{1/2}) \sin \frac{m \Delta x}{2},$$

$$\sigma = \frac{1}{\Delta t} \arcsin \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} (U \cos m \Delta x \pm \bar{\Phi}^{1/2}) \sin \frac{m \Delta x}{2} \right].$$

Условие устойчивости имеет вид

$$\left| \left(\sin \frac{m \Delta x}{2} \right) (U \cos m \Delta x \pm \bar{\Phi}^{1/2}) \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq \frac{1}{2},$$

т. е. $C (\Delta t / \Delta x) \leq 1/2$, где $C = U \cos m \Delta x \pm \bar{\Phi}^{1/2}$ — скорость внешних гравитационных волн.

Таким образом, конечно-разностная схема на расшатанной сетке для уравнений (5.1) будет устойчивой, если при интегрировании использовать шаг по времени, примерно в два раза меньший, чем в конечно-разностной схеме на обычной сетке. Следовательно, для реализации схемы на основе конечно-разностного представления уравнений на шахматной сетке требуется примерно в два раза больше вычислительного времени.

Оценим фазовые скорости численных решений $C_\Phi = \sigma / m$, используя полученные выражения для σ . Для обычной сетки (A) имеем:

$$C_\Phi^A = \frac{1}{m \Delta t} \arcsin \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} (U \pm \bar{\Phi}^{1/2}) \sin m \Delta x \right];$$

для расшатанной сетки (B)

$$C_\Phi^B = \frac{1}{m \Delta t} \arcsin \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} (U \cos m \Delta x \pm \bar{\Phi}^{1/2}) \sin \frac{m \Delta x}{2} \right].$$

Истинная фазовая скорость описывается выражением $C_\Phi = U \pm \bar{\Phi}^{1/2}$. Поскольку

$$\frac{\sin m \Delta x}{m \Delta x} < \frac{\sin m \Delta x / 2}{m \Delta x / 2} < 1,$$

то фазовая скорость гравитационных волн на расшатанной сетке описывается точнее, чем на обычной. Это свойство расшатанных сеток имеет важное значение с точки зрения воспроизведения процесса геострофического приспособления.

4.5.2. Точное решение уравнений адаптации модели мелкой воды. Дифференциально-разностные уравнения адаптации

Для исследования инерционно-гравитационных волн воспользуемся системой линеаризованных уравнений мелкой воды, описывающих адаптацию метеорологических полей:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + l v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - l u, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\bar{\Phi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (5.5)$$

где $\bar{\Phi}$ — среднее значение геопотенциала (считается постоянным).

Уравнениям (5.5) удовлетворяют волновые решения

$$\varphi = \hat{\varphi} e^{i(m_1 x + m_2 y - \sigma t)}, \quad (5.6)$$

где φ и $\hat{\varphi}$ — амплитуды:

$$\varphi = \begin{vmatrix} u \\ v \\ \Phi \end{vmatrix}, \quad \hat{\varphi} = \begin{vmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{\Phi} \end{vmatrix},$$

$\sigma = 2\pi/T$ — частота; T — период колебаний; $m_1 = 2\pi/L_x$, $m_2 = 2\pi/L_y$ — волновые числа; L_x , L_y — проекции волны на оси x и y .

Подставляя волновые решения (5.6) в уравнения (5.5) и сокращая результат на $e^{i(m_1 x + m_2 y - \sigma t)}$, получаем:

$$\begin{aligned} -\sigma \hat{u} i &= -m_1 \hat{\Phi} i + \hat{v}, & -\sigma \hat{v} i &= -m_2 \hat{\Phi} i - \hat{u}, \\ -\sigma \hat{\Phi} &= -\bar{\Phi} (m_1 \hat{u} + m_2 \hat{v}). \end{aligned}$$

Решения полученных уравнений для частоты (σ), фазовой (C_Φ) и групповой (C_Γ) скоростей имеют вид

$$\sigma^2 = \bar{\Phi} m^2 + l^2, \quad C_\Phi = \frac{\sigma}{m} = \pm \sqrt{\bar{\Phi} + \frac{l^2}{m^2}}, \quad C_\Gamma = \bar{\Phi} \frac{m}{\sigma} = \frac{\bar{\Phi}}{C_\Phi}, \quad (5.7)$$

где $m^2 = m_1^2 + m_2^2$. Эти решения будем называть точными.

Численное решение уравнений (5.5) будем строить на сетках, представленных на рис. 4.2.

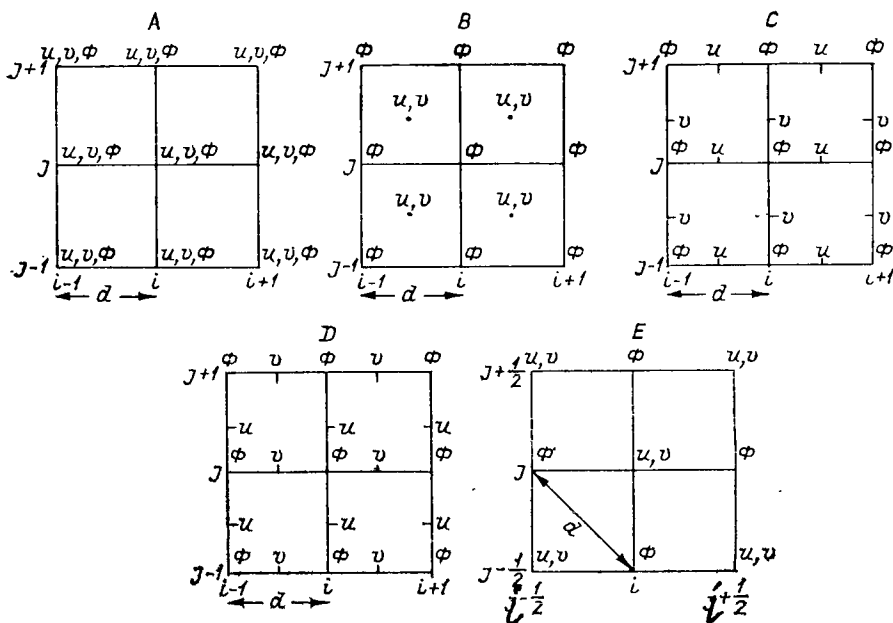


Рис. 4.2. Сетки точек, используемые для решения уравнений (5.5) ($d = \Delta x = \Delta y$).

Сначала исследуем свойства решений, обусловленные применением конечных разностей по пространству. В этом случае для каждой сетки уравнения (5.5) записываются в дифференциально-разностном (полудискретном) виде в тех точках, где размещены соответствующие переменные, с сохранением производных по времени, а производные по x и y аппроксимируются центральными разностями:

$$A) \frac{\partial u}{\partial t} = -\delta_x \bar{\Phi}^x + lv, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\delta_y \bar{\Phi}^y - lu, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\bar{\Phi}(\delta_x \bar{u}^x + \delta_y \bar{v}^y); \quad (5.8)$$

$$B) \frac{\partial u}{\partial t} = -\delta_x \bar{\Phi}^y + lv, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\delta_y \bar{\Phi}^x - lu, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\bar{\Phi}(\delta_x \bar{u}^y + \delta_y \bar{v}^x); \quad (5.9)$$

$$C) \frac{\partial u}{\partial t} = -\delta_x \Phi + l\bar{v}^{xy}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\delta_y \Phi - l\bar{u}^{xy}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\bar{\Phi}(\delta_x u + \delta_y v); \quad (5.10)$$

$$D) \frac{\partial u}{\partial t} = -\delta_x \bar{\Phi}^{xy} + l\bar{v}^{xy}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\delta_y \bar{\Phi}^{xy} - l\bar{u}^{xy}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\bar{\Phi}(\delta_x \bar{u}^{xy} + \delta_y \bar{v}^{xy}); \quad (5.11)$$

$$E) \frac{\partial u}{\partial t} = -\delta_x \Phi + lv, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\delta_y \Phi - lu, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\bar{\Phi}(\delta_x u + \delta_y v). \quad (5.12)$$

4.5.3. Анализ свойств решений одномерных уравнений адаптации в полудискретной форме

Сначала рассмотрим одномерный случай, когда u , v , Φ не зависят от y . В этом случае решается система уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -lu, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\bar{\Phi} \frac{\partial y}{\partial x}. \quad (5.13)$$

Этим уравнениям удовлетворяют волновые решения

$$u = \hat{u}e^{i(m_1 x - \sigma t)}, \quad v = \hat{v}e^{i(m_1 x - \sigma t)}, \quad \Phi = \hat{\Phi}e^{i(m_1 x - \sigma t)}. \quad (5.14)$$

Для дискретных значений аргумента $n = \frac{x}{\Delta x}$ эти решения представляются в виде

$$u_n(t) = \hat{u}e^{i(mnd - i\sigma t)}, \quad v_n(t) = \hat{v}e^{i(mnd - \sigma t)}, \quad \Phi_n(t) = \hat{\Phi}e^{i(mnd - \sigma t)}, \quad (5.15)$$

где $\Delta x = d$; $m = m_1$. Точное решение системы уравнений (5.13) для частоты имеет вид

$$\sigma^2 = \bar{\Phi}m^2 + l^2, \quad (5.16)$$

где $m = m_1 = 2\pi/L_x$. В дальнейшем это решение будем использовать в следующем виде:

$$(\sigma/l)^2 = 1 + \lambda^2 m^2, \quad (5.17)$$

где σ/l — безразмерная частота; $\lambda = \sqrt{\bar{\Phi}/l}$ — радиус деформации.

В полудискретной форме уравнения (5.13) на одномерных сетках записываются следующим образом:

$$A) \frac{\partial u}{\partial t} = -\delta_x \bar{\Phi}^x + lv, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -lu, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\bar{\Phi} \delta_x \bar{u}^x; \quad (5.18)$$

$$B) \frac{\partial u}{\partial t} = -\delta_x \Phi + lv, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -lu, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\bar{\Phi} \delta_x u; \quad (5.19)$$

$$C) \frac{\partial u}{\partial t} = -\delta_x \Phi + l\bar{v}^x, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -l\bar{u}^x, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\bar{\Phi} \delta_x u; \quad (5.20)$$

$$D) \frac{\partial u}{\partial t} = -\delta_x \bar{\Phi}^x + l\bar{v}^x, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -l\bar{u}^x, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\bar{\Phi} \delta_x \bar{u}^x, \quad (5.21)$$

$$E) \frac{\partial u}{\partial t} = -\delta_x \Phi + lv, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -lu, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\bar{\Phi} \delta_x u. \quad (5.22)$$

Подставляя волновые решения (5.14) в полудискретные уравнения (5.18)—(5.22), получаем следующие формулы для безразмерных частот:

$$A) \left(\frac{\sigma}{l}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 md, \quad (5.23)$$

$$B) \left(\frac{\sigma}{l}\right)^2 = 1 + 4 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 \left(\frac{md}{2}\right), \quad (5.24)$$

$$C) \left(\frac{\sigma}{l}\right)^2 = \cos^2 \left(\frac{md}{2}\right) + 4 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 \left(\frac{md}{2}\right), \quad (5.25)$$

$$D) \left(\frac{\sigma}{l}\right)^2 = \cos^2 \left(\frac{md}{2}\right) + \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 (md), \quad (5.26)$$

$$E) \left(\frac{\sigma}{l}\right)^2 = 1 + 2 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin^2 \left(\frac{md}{\sqrt{2}}\right). \quad (5.27)$$

В решении дифференциальных уравнений (5.13) в форме (5.17) безразмерная частота инерционно-гравитационных волн пропорциональна волновому числу m , т. е. увеличивается с ростом волнового числа. Поскольку $\lambda \neq 0$, то групповая скорость $C_r = d\sigma/dm = m\bar{\Phi}/\sigma \neq 0$, если $m \neq 0$. Следовательно, групповая скорость для любых волн отлична от нуля. Таким образом, энергия инерционно-гравитационных волн не может накапливаться, а только рассеивается, что и приводит к восстановлению квазигеострофического процесса.

На основе формул (5.23)—(5.27) нетрудно получить формулы для групповой скорости $C_r = d\sigma/dm$ на различных сетках:

$$A) C_r = l^2 \frac{d}{\sigma} \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin md \cos md, \quad (5.28)$$

$$B) C_r = 2l^2 \frac{d}{\sigma} \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin \frac{md}{2} \cos \frac{md}{2}, \quad (5.29)$$

$$C) C_r = l^2 \frac{d}{2\sigma} \left[4 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 - 1 \right] \sin \frac{md}{2} \cos \frac{md}{2}, \quad (5.30)$$

$$D) C_r = l^2 \frac{d}{2\sigma} \left[2 \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin md \cos md - \sin \frac{md}{2} \cos \frac{md}{2} \right], \quad (5.31)$$

$$E) C_r = \sqrt{2} l^2 \frac{d}{\sigma} \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \sin \frac{md}{\sqrt{2}} \cos \frac{md}{\sqrt{2}}. \quad (5.32)$$

Анализ формул (5.23)—(5.32) показывает, что численные решения для безразмерной частоты и групповой скорости зависят от параметров md , $md/2$, $md/\sqrt{2}$, λ/d . Длина самой короткой волны, представляемой на сетках $A—D$, составляет $L_x = 2d$ ($m_{\max} = \pi/d$), а на сетке E $L_x = \sqrt{2}d$ ($m_{\max} = \sqrt{2}\pi/d$). Поэтому при анализе можно ограничиться рассмотрением следующих диапазонов значений md :

$$0 \leq md \leq \pi \quad \text{для сеток } A—D,$$

$$0 \leq md \leq \sqrt{2}\pi \quad \text{для сетки } E.$$

На сетке A частота имеет максимум, а групповая скорость обращается в нуль при $md = \pi/2$ ($L_x = 4d$) и $md = \pi$ ($L_x = 2d$). Это означает, что если вблизи какого-либо узла сетки возбуждаются инерционно-гравитационные волны с волновыми числами $m = \pi/2d$, $m = \pi/d$, то их энергия не будет переноситься, а следовательно, не будет реализовываться процесс геострофического приспособления. При $\pi/2 \leq md \leq \pi$ частота уменьшается с увеличением волнового числа (решение (5.17) дает рост частоты), а групповая скорость имеет отрицательный знак, т. е. энергия переносится в противоположном направлении.

На сетке B в диапазоне $0 < md/2 < \pi/2$ частота и групповая скорость возрастают с увеличением волнового числа. При $md/2 = \pi/2$ ($L_x = 2d$) групповая скорость обращается в нуль, а при $\pi/2 < md/2 < \pi$ она становится отрицательной.

На сетке C в диапазоне $0 < md/2 \leq \pi/2$ частота увеличивается с ростом m , если $\lambda/d > 1/2$, и уменьшается, если $\lambda/d < 1/2$. В этом диапазоне групповая скорость положительна, если $\lambda/d < 1/2$, и отрицательна, если $\lambda/d > 1/2$. При $md/2 = \pi/2$ ($L_x = 2d$) частота максимальна, а групповая скорость равна нулю для всех волн.

В диапазоне $\pi/2 < md/2 < \pi$ групповая скорость положительна, если $\lambda/d < 1/2$, и отрицательна, если $\lambda/d > 1/2$.

На сетке D частота имеет максимум при $md = \pi/2$. При $md = \pi$ ($L_x = 2d$) групповая скорость равна нулю.

Для сетки E при $md = \pi/\sqrt{2}$ частота максимальна, а групповая скорость равна нулю. В диапазоне $\pi/2 < md/\sqrt{2} < \pi$ групповая скорость отрицательна.

Значения фазовых и групповых скоростей для численных решений на всех сетках меньше, чем для точного решения дифференциальных уравнений (5.16). Занижение фазовых и групповых скоростей на всех сетках наиболее сильно проявляется для волн $L \leq 4d$. Ошибка максимальна для сеток A и D .

В целом анализ частот и групповых скоростей для одномерного случая дает основание считать, что с точки зрения описания процесса геострофического приспособления лучшими свойствами обладают расштанованные сетки B и C , а худшими — нерасштанованная сетка A и расштанованная сетка D .

4.5.4. Анализ свойств решений двумерных уравнений адаптации в полудискретной форме

Для получения формул, описывающих зависимость безразмерных частот от m_1 и m_2 в двумерном случае, следует волновые решения (5.6) подставить в полудискретные уравнения (5.8)—(5.12) и полученные соотношения разрешить относительно безразмерной частоты σ/l . Продифференцировав полученные таким образом формулы по m_1 и m_2 , будем иметь выражения для составляющих групповых скоростей по осям x и y . Проиллюстрируем получение этих формул на сетке C . Подставляя волновые решения (5.6) в уравнение (5.10), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} -i\sigma\hat{u} &= -\frac{\hat{\Phi}}{d} \left(e^{\frac{im_1d}{2}} - e^{\frac{-im_1d}{2}} \right) + \\ &+ l \frac{\hat{\sigma}}{4} \left(e^{\frac{im_1d}{2}} + e^{\frac{-im_1d}{2}} \right) \left(e^{\frac{im_2d}{2}} + e^{\frac{-im_2d}{2}} \right), \\ -i\sigma\hat{v} &= -\frac{\hat{\Phi}}{d} \left(e^{\frac{im_2d}{2}} - e^{\frac{-im_2d}{2}} \right) - \\ &- l \frac{\hat{a}}{4} \left(e^{\frac{im_1d}{2}} + e^{\frac{-im_1d}{2}} \right) \left(e^{\frac{im_2d}{2}} + e^{\frac{-im_2d}{2}} \right), \\ -i\sigma\hat{\Phi} &= -\frac{\bar{\Phi}}{d} \left[\hat{u} \left(e^{\frac{im_2d}{2}} - e^{\frac{-im_1d}{2}} \right) + \hat{v} \left(e^{\frac{im_2d}{2}} - e^{\frac{-im_2d}{2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Используя формулы Эйлера $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$, приведем эти уравнения к виду

$$\begin{aligned} -i\sigma\hat{u} &= -2i \frac{\hat{\Phi}}{d} \sin \frac{m_1d}{2} + l \frac{\hat{\sigma}}{4} \cos \frac{m_1d}{2} \cos \frac{m_2d}{2}, \\ -i\sigma\hat{v} &= -2i \frac{\hat{\Phi}}{d} \sin \frac{m_2d}{2} - l \frac{\hat{a}}{4} \cos \frac{m_1d}{2} \cos \frac{m_2d}{2}, \\ -i\sigma\hat{\Phi} &= -2i \frac{\bar{\Phi}}{d} \left(\hat{u} \sin \frac{m_1d}{2} + \hat{v} \sin \frac{m_2d}{2} \right). \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений относительно $(\sigma/l)^2$, находим:

$$\left(\frac{\sigma}{l} \right)^2 = 4 \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \left(\sin^2 \frac{m_1d}{2} + \sin^2 \frac{m_2d}{2} \right) + \frac{1}{16} \cos^2 \frac{m_1d}{2} \cos^2 \frac{m_2d}{2}.$$

Дифференцируя эту формулу по m_1 и m_2 , получаем формулы для составляющих групповой скорости по осям x и y :

$$\begin{aligned} C_{gx} &= \frac{\partial \sigma}{\partial m_1} = dl^2 \left[2 \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \sin \frac{m_1d}{2} \cos \frac{m_1d}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{16} \sin \frac{m_1d}{2} \cos \frac{m_1d}{2} \cos^2 \frac{m_2d}{2} \right], \\ C_{gy} &= \frac{\partial \sigma}{\partial m_2} = dl^2 \left[2 \left(\frac{\lambda}{d} \right)^2 \sin \frac{m_2d}{2} \cos \frac{m_2d}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{16} \sin \frac{m_2d}{2} \cos \frac{m_2d}{2} \cos^2 \frac{m_1d}{2} \right]. \end{aligned}$$

Не приводя формул для других сеток и не останавливаясь подробно на анализе частот и групповых скоростей, отметим, что и в двумерном случае процесс геострофического приспособления более точно описывается на расштанной сетке C . На сетке C групповая скорость всех волн, кроме двухшаговых ($L_x = L_y = 2d$), не обращается в нуль, а при $\lambda/d > 1$ нет волн, групповая скорость которых имеет неверный знак. Для сеток, обычно используемых в крупномасштабных атмосферных моделях, $\lambda/d > 1$. Поэтому с точки зрения воспроизведения процесса геострофического приспособления при конечно-разностной аппроксимации полных уравнений целесообразно размещать переменные на расштанной сетке C . Однако на всех сетках, в том числе на сетке C , фазовые и групповые скорости оказываются заниженными для волн $L < 4d$.

4.5.5. Анализ свойств решений одномерных уравнений адаптации в дискретной форме.

Оценка влияния конечных разностей по времени

Оценим влияние конечных разностей по времени на свойства решений одномерных уравнений (5.13) на сетке C , которые запишем в дискретной форме с помощью схемы центральных разностей:

$$\delta_t \bar{u}^t = -\delta_x \Phi + l \bar{v}^x, \quad \delta_t \bar{v}^t = -l \bar{u}^x, \quad \delta_t \bar{\Phi}^t = -\bar{\Phi} \delta_x u. \quad (5.33)$$

Подставляя волновые решения (5.15), в которых время t представлено дискретно ($t = s \Delta t$), в уравнения (5.33), получаем:

$$\begin{aligned} \widehat{u} \left(\frac{e^{-i\sigma \Delta t} - e^{i\sigma \Delta t}}{2 \Delta t} \right) &= -\frac{\widehat{\Phi}}{d} \left(e^{\frac{imd}{2}} - e^{\frac{-imd}{2}} \right) + \frac{l \hat{v}}{2} \left(e^{\frac{-imd}{2}} + e^{\frac{imd}{2}} \right), \\ \hat{v} \left(\frac{e^{-i\sigma \Delta t} - e^{i\sigma \Delta t}}{2 \Delta t} \right) &= -\frac{l \hat{u}}{2} \left(e^{\frac{imd}{2}} + e^{\frac{-imd}{2}} \right), \\ \widehat{\Phi} \left(\frac{e^{-i\sigma \Delta t} - e^{i\sigma \Delta t}}{2 \Delta t} \right) &= -\frac{\widehat{\Phi} \hat{u}}{d} \left(e^{\frac{imd}{2}} - e^{\frac{-imd}{2}} \right). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Используя формулы Эйлера $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$, получаем решение этих уравнений относительно $\sin^2 \sigma \Delta t$:

$$\sin^2 \sigma \Delta t = \frac{4 (\Delta t)^2 \bar{\Phi}}{d^2} \sin^2 \frac{md}{2} + l^2 (\Delta t)^2 \cos^2 \frac{md}{2}. \quad (5.35)$$

На основе решения (5.35) получим формулу для групповой скорости

$$C_r = \frac{\Delta t}{\sin \sigma \Delta t \cos \sigma \Delta t} \left(\frac{2\bar{\Phi}}{d} - \frac{l^2 d}{2} \right) \sin \frac{md}{2} \cos \frac{md}{2}, \quad (5.36)$$

первый сомножитель в которой характеризует влияние конечной разности по времени.

Сравним эту формулу с формулой для групповой скорости (5.30), соответствующей решению одномерных уравнений в полидискретной

форме на сетке C . Для удобства сравнения преобразуем формулу (5.30) к виду

$$C_r = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{2\bar{\Phi}}{d} - \frac{l^2 d}{2} \right) \sin \frac{md}{2} \cos \frac{md}{2}. \quad (5.37)$$

Формула (5.37) отличается от формулы (5.36) первым множителем в правой части, который характеризует влияние конечных разностей по времени. Разумеется, шаг по времени Δt должен быть меньше периода колебаний T . Если принять, что $\Delta t/T < 1/5$, то получаем:

$$\frac{\Delta t}{\sin \sigma \Delta t \cos \sigma \Delta t} \bigg/ \frac{1}{\sigma} > 2,5,$$

т. е. за счет конечных разностей по времени групповая скорость существенно увеличивается. Таким образом, в решении дискретных уравнений для инерционно-гравитационных волн, полученном с помощью схемы центральных разностей, замедление переноса энергии, обусловленное использованием пространственных конечных разностей, может компенсироваться за счет конечных разностей по времени.

Рассмотрим влияние центральных разностей по времени на свойства решений уравнений (5.13), записанных в дискретной форме по неявной схеме трапеций:

$$\begin{aligned} \delta_t \bar{u}^t &= -\frac{1}{2} (\delta_x \Phi^{s+1} + \delta_x \Phi^{s-1}) + \frac{l}{2} [(\bar{v}^x)^{s+1} + (\bar{v}^x)^{s-1}], \\ \delta_t \bar{v}^t &= -\frac{l}{2} [(\bar{u}^x)^{s+1} + (\bar{u}^x)^{s-1}], \quad \delta_t \bar{\Phi}^t = -\frac{\bar{\Phi}}{2} (\delta_x u^{s+1} + \delta_x u^{s-1}). \end{aligned} \quad (5.38)$$

В результате подстановки волновых решений (5.14) в дискретной форме в уравнения (5.38) получаем систему, уравнения которой отличаются от уравнений (5.34) множителем $1/2 (e^{-i\sigma\Delta t} + e^{i\sigma\Delta t})$. Решение полученной системы уравнений относительно частоты и соответствующая формула для групповой скорости имеют вид

$$\operatorname{tg}^2 \sigma \Delta t = \frac{4 (\Delta t)^2 \bar{\Phi}}{d^2} \sin^2 \frac{md}{2} + (\Delta t)^2 l^2 \cos^2 \frac{md}{2}, \quad (5.39)$$

$$C_r = \frac{\Delta t \cos^2 \sigma \Delta t}{\sin \sigma \Delta t} \left(\frac{2\bar{\Phi}}{d} - \frac{l^2 d}{2} \right) \sin \frac{md}{2} \cos \frac{md}{2}. \quad (5.40)$$

Сравним формулы (5.40) и (5.30). Отношение групповых скоростей (формулы (5.40) и (5.30)), характеризующее влияние конечных разностей по времени на групповую скорость, для неявной схемы трапеций имеет вид

$$\frac{\Delta t \cos^2 \sigma \Delta t}{\sin \sigma \Delta t} \bigg/ \frac{1}{\sigma}.$$

При $\Delta t/T < 1/5$ значение этого отношения составляет около $1/6$. Это означает, что за счет применения неявной схемы наблюдается занижение групповой скорости.

Таким образом, конечные разности по времени в явной схеме приводят к увеличению групповой скорости, а в неявной схеме — к уменьшению. Аналогичная ситуация имеет место и для двумерных уравнений.

4.5.6. Анализ устойчивости явных и полунеявных схем для одномерных уравнений адаптации

Рассмотрим полунеявную схему с направленными разностями по времени и с неявной записью дивергенции для одномерных уравнений (5.13) на сетке C :

$$\begin{aligned} \frac{u_n^{s+1} - u_n^s}{\Delta t} &= - \frac{\Phi_{n+1/2}^s - \Phi_{n-1/2}^s}{d} + l \frac{v_{n+1/2}^s + v_{n-1/2}^s}{2}, \\ \frac{v_n^{s+1} - v_n^s}{\Delta t} &= -l \frac{u_{n+1/2}^s + u_{n-1/2}^s}{2}, \\ \frac{\Phi_n^{s+1} - \Phi_n^s}{\Delta t} &= -\bar{\Phi} \frac{u_{n+1/2}^{s+1} - u_{n-1/2}^{s+1}}{d}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Можно получить и другие полунеявные схемы, например, такие, в которых неявно записываются градиенты геопотенциала или кориолисовы ускорения. В литературе такие полунеявные схемы иногда называют схемами с направленными разностями по времени «вперед — назад».

Волновые решения будем записывать для дискретных значений $s = t/\Delta t$, $n = x/\Delta x$ в следующем виде:

$$\Phi_n^{(s)} = \hat{\Phi} \lambda^s e^{imnd}, \quad u_n^{(s)} = \hat{u} \tilde{\lambda}^s e^{imnd}, \quad v_n^{(s)} = \hat{v} \lambda^s e^{imnd}, \quad (5.42)$$

где $\lambda = e^{-i\sigma\Delta t}$ — множитель перехода, связывающий решения на двух соседних уровнях по времени.

Подставив решения (5.42) в уравнения (5.41), сократив результат на общий множитель e^{imnd} и воспользовавшись формулой Эйлера $e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z$, получим систему уравнений для множителя перехода λ , определитель которой имеет вид

$$D = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -l \Delta t \cos \frac{md}{2} & 2i \frac{\Delta t}{d} \sin \frac{md}{2} \\ l \Delta t \cos \frac{md}{2} & \lambda - 1 & 0 \\ 2i \frac{\bar{\Phi} \Delta t}{d} \lambda \sin \frac{md}{2} & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}.$$

Приравнявая определитель к нулю, получаем характеристическое уравнение для λ :

$$(\lambda - 1) [(\lambda - 1)^2 + 2A\lambda + B] = 0, \quad (5.43)$$

где

$$A = 2 \left(\frac{\Delta t}{d} \right)^2 \overline{\Phi} \sin^2 \frac{md}{2}, \quad B = l^2 (\Delta t)^2 \cos^2 \frac{md}{2} \quad (A > 0, B > 0). \quad (5.44)$$

Отметим, что значение A больше, чем значение B , примерно на три порядка. Решая уравнение (5.43), получаем: $\lambda_1 = 1$. Два других корня определяются формулой

$$\lambda = 1 - A \pm \sqrt{-A(2 - A) - B}. \quad (5.45)$$

Значению $\lambda_1 = 1$ соответствует нейтральное решение системы уравнений (5.41).

При $A \leq 2$ ($\sqrt{2A} \leq 2$) под радикалом в (5.45) будет стоять отрицательная величина. Поэтому при $\sqrt{2A} \leq 2$ $\lambda = 1 - A \pm \pm i \sqrt{A(2 - A) + B}$

$$|\lambda|^2 = (1 - A)^2 + A(2 - A) + B = 1 + B.$$

Поскольку $B \approx 0$, то $|\lambda| \approx 1$. Следовательно, значениям λ , определяемым по формуле (5.45), соответствуют устойчивые решения. Таким образом, условие $\sqrt{2A} \leq 2$ является условием устойчивости для схемы (5.41). Используя выражение для A , условие устойчивости для схемы (5.41) запишем в виде

$$2 \frac{\Delta t}{d} \sqrt{\overline{\Phi}} \sin \frac{md}{2} \leq 2, \quad (5.46)$$

где $\sqrt{\overline{\Phi}}$ — скорость внешних гравитационных волн в покоящейся среде.

Отметим, что если в последнем уравнении системы (5.41) правую часть записать явно, то уравнение для λ будет иметь вид

$$(\lambda - 1) [(\lambda - 1)^2 + 2A + B] = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяют корни $\lambda_1 = 1$,

$$\lambda_{2,3} = 1 \pm i \sqrt{2A + B}, \quad |\lambda_{2,3}|^2 = 1 + 2A + B > 1, \quad |\lambda_2| > 1, \quad |\lambda_3| > 1$$

Следовательно, явная схема с направленными вперед разностями по времени для уравнений (5.13) будет иметь одно нейтральное решение, соответствующее $|\lambda_1| = 1$, и два неустойчивых решения, соответствующих $|\lambda_2| > 1$, $|\lambda_3| > 1$.

Разумеется, такие схемы применять нецелесообразно. Чтобы показать преимущества полунейвных схем (схем с разностями «вперед — назад») по сравнению с явной схемой центральных разностей, широко используемой в атмосферных моделях, получим условие устойчивости для схемы центральных разностей на примере уравнений (5.13). Эта схема на сетке C представлена системой уравнений (5.33).

Подстановка волновых решений (5.42) в уравнения (5.33) приводит к следующим уравнениям для множителя перехода λ :

$$\hat{u}(\lambda^2 - 1) - 2l \Delta t \theta \lambda \cos \frac{md}{2} + 4i \frac{\Delta t}{d} \overline{\Phi} \lambda \sin \frac{md}{2} = 0,$$

$$2l \Delta t \hat{u} \lambda \cos \frac{md}{2} + \hat{v} (\lambda^2 - 1) = 0,$$

$$4i \frac{\Delta t}{d} \overline{\Phi} \hat{u} \lambda \sin \frac{md}{2} + \hat{\Phi} (\lambda^2 - 1) = 0. \quad (5.47)$$

Приравнявая определитель системы (5.47) к нулю, получаем уравнение для λ :

$$(\lambda^2 - 1) [(\lambda^2 - 1)^2 + 4\lambda^2 (2A + B)] = 0, \quad (5.48)$$

где A и B определены соотношениями (5.44). Уравнение (5.48) — шестой степени, а следовательно, оно имеет шесть корней. Уравнению (5.48) удовлетворяют корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, которым соответствуют нейтральное решение ($\lambda_1 = 1$) и ложная вычислительная мода ($\lambda_2 = -1$) (наличие ее связано с тем, что используется трехуровневая по времени схема центральных разностей). Остальные четыре корня * определяются формулой

$$\lambda^2 = 1 - 4A - B \pm 2\sqrt{(2A + B)(2A + B - 1)}. \quad (5.49)$$

Решения уравнений (5.13), получаемые с помощью рассматриваемой схемы, будут устойчивы, если $2A + B \leq 1$. Поскольку $B \approx 0$, то условие $2A + B \leq 1$ можно записать в виде $2A = 1$ или $\sqrt{2A} = 1$. Учитывая выражение для A , условие устойчивости можно записать в следующем виде:

$$2 \frac{\Delta t}{d} \sqrt{\overline{\Phi}} \sin \frac{md}{2} \leq 1. \quad (5.50)$$

Из сравнения условий (5.46) и (5.50) следует, что полуневная схема с разностями по времени «вперед — назад» является устойчивой с шагами по времени, в два раза большими, чем для явной схемы центральных разностей. Следовательно, полуневная схема является более экономичной. Кроме этого, рассматриваемая полуневная схема не содержит вычислительную моду. Аналогичные результаты имеют место и для двумерных уравнений адаптации, в том числе и в тех случаях, когда неявно записываются составляющие градиента геопотенциала или ускорение Кориолиса.

4.5.7. Анализ устойчивости неявных схем для одномерных уравнений адаптации

На основе вышеизложенного можно констатировать, что при интегрировании уравнений адаптации целесообразно применять полуневные схемы. Однако и в этом случае шаг по времени оказывается существенно меньшим, чем шаг, который обеспечивает устойчивое интегрирование уравнений адвекции.

* Студентам рекомендуем проанализировать эти корни самостоятельно.

Рассмотрим неявные схемы трапеций на сетке C с направленными разностями по времени

$$\begin{aligned}\frac{u_n^{s+1} - u_n^s}{\Delta t} &= -\frac{1}{2d} \left[\left(\Phi_n^s + \frac{1}{2} - \Phi_n^s - \frac{1}{2} \right) + \left(\Phi_{n+\frac{1}{2}}^{s+1} - \Phi_{n-\frac{1}{2}}^{s+1} \right) \right] + \\ &+ \frac{l}{4} \left[\left(v_{n+\frac{1}{2}}^s + v_{n-\frac{1}{2}}^s \right) + \left(v_{n+\frac{1}{2}}^{s+1} + v_{n-\frac{1}{2}}^{s+1} \right) \right], \\ \frac{v_n^{s+1} - v_n^s}{\Delta t} &= -\frac{l}{4} \left[\left(u_{n+\frac{1}{2}}^s + u_{n-\frac{1}{2}}^s \right) + \left(u_{n+\frac{1}{2}}^{s+1} + u_{n-\frac{1}{2}}^{s+1} \right) \right], \\ \frac{\Phi_n^{s+1} - \Phi_n^s}{\Delta t} &= -\frac{\bar{\Phi}}{2d} \left[\left(u_{n+\frac{1}{2}}^s - u_{n-\frac{1}{2}}^s \right) + \left(u_{n+\frac{1}{2}}^{s+1} - u_{n-\frac{1}{2}}^{s+1} \right) \right] \quad (5.51)\end{aligned}$$

и с центральными разностями по времени

$$\begin{aligned}\frac{u_n^{s+1} - u_n^{s-1}}{2\Delta t} &= -\frac{1}{2d} \left[\left(\Phi_{n+\frac{1}{2}}^{s+1} - \Phi_{n-\frac{1}{2}}^{s-1} \right) + \left(\Phi_{n+\frac{1}{2}}^{s+1} - \Phi_{n-\frac{1}{2}}^{s+1} \right) \right] + \\ &+ \frac{l}{4} \left[\left(v_{n+\frac{1}{2}}^{s-1} + v_{n-\frac{1}{2}}^{s-1} \right) + \left(v_{n+\frac{1}{2}}^{s+1} + v_{n-\frac{1}{2}}^{s+1} \right) \right], \\ \frac{v_n^{s+1} - v_n^{s-1}}{2\Delta t} &= -\frac{l}{4} \left[\left(u_{n+\frac{1}{2}}^{s-1} + u_{n-\frac{1}{2}}^{s-1} \right) + \left(u_{n+\frac{1}{2}}^{s+1} + u_{n-\frac{1}{2}}^{s+1} \right) \right], \\ \frac{\Phi_n^{s+1} - \Phi_n^{s-1}}{2\Delta t} &= -\frac{\bar{\Phi}}{2d} \left[\left(u_{n+\frac{1}{2}}^{s-1} - u_{n-\frac{1}{2}}^{s-1} \right) + \left(u_{n+\frac{1}{2}}^{s+1} - u_{n-\frac{1}{2}}^{s+1} \right) \right]. \quad (5.52)\end{aligned}$$

Подставляя волновые решения (5.42) в уравнения (5.51) и (5.52), получаем уравнения для множителя перехода λ , определители которых имеют следующий вид:

для схемы с направленными разностями по времени

$$D_{\text{нр}} = \begin{vmatrix} \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} & -\frac{\Delta t l}{2} \cos m \frac{d}{2} & i \frac{\Delta t}{d} \bar{\Phi} \sin m \frac{d}{2} \\ \frac{\Delta t l}{2} \cos m \frac{d}{2} & \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} & 0 \\ i \frac{\Delta t}{d} \bar{\Phi} \sin m \frac{d}{2} & 0 & \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \end{vmatrix}, \quad (5.53)$$

для схемы с центральными по времени

$$D_{\text{цр}} = \begin{vmatrix} \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1} & -\Delta t l \cos m \frac{d}{2} & 2i \frac{\Delta t}{d} \bar{\Phi} \sin m \frac{d}{2} \\ \Delta t l \cos m \frac{d}{2} & \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1} & 0 \\ 2i \frac{\Delta t}{d} \bar{\Phi} \sin m \frac{d}{2} & 0 & \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1} \end{vmatrix}. \quad (5.54)$$

Приравнивая определитель (5.53) к нулю, находим: $\lambda_1 = 1$. Два других корня определяются формулой

$$\lambda_{2,3} = \frac{1 - \frac{A}{2} - \frac{B}{4} \pm \sqrt{-(2A+B)}}{1 + \frac{A}{2} + \frac{B}{4}} = \frac{\left(1 - \frac{A}{2} - \frac{B}{4}\right) \pm i \sqrt{2A+B}}{1 - \frac{A}{2} + \frac{B}{4}}.$$

При этом

$$\begin{aligned} |\lambda|^2 &= \frac{1 - 2\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{4}\right) + \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{4}\right)^2 + (2A+B)}{\left[1 + \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{4}\right)\right]^2} = \\ &= \frac{1 + \frac{1}{2}(2A+B) + \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{4}\right)^2}{1 + \frac{1}{2}(2A+B) + \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{4}\right)^2} = 1, \quad |\lambda_{2,3}| = 1. \end{aligned}$$

Приравнивая определитель (5.54) к нулю, для схемы (5.52) находим: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Остальные четыре корня определяются формулой

$$\lambda^2 = \frac{1 - 2A + B \pm 2\sqrt{-(2A+B)}}{1 + 2A + B} = \frac{(1 - 2A + B) \pm 2i \sqrt{2A+B}}{1 + 2A + B}.$$

Следовательно,

$$|\lambda^2|^2 = \frac{[1 - (2A+B)]^2 + 4(2A+B)}{[1 + (2A+B)]^2} = \frac{[1 + (2A+B)]^2}{[1 + (2A+B)]^2} = 1, \quad |\lambda| = 1,$$

Функции A и B определены соотношениями (5.44). Таким образом, обе неявные схемы трапеций — с направленными разностями и с центральными разностями по времени — абсолютно устойчивы при любых Δt . Схема с центральными разностями имеет ложное решение, соответствующее $\lambda_2 = -1$.

Как было показано выше, применение неявных схем сопровождается занижением групповых скоростей. За счет этого ухудшается описание процесса геострофического приспособления. В то же время в явных схемах за счет конечных разностей по времени наблюдается увеличение групповых скоростей, которое компенсирует эффект их занижения за счет конечных разностей по пространству. Скорости гравитационных и инерционно-гравитационных волн на порядок больше скоростей адвекции. Поэтому для воспроизведения процесса геострофического приспособления с помощью явных схем в соответствии с критерием устойчивости Куранта—Фридрихса—Леви пришлось бы использовать малые шаги по времени, заведомо меньшие, чем это требуется для квазигеострофических процессов, что сопряжено с большими затратами машинного времени. В связи с этим при разработке конечно-разностных схем для полных уравнений члены уравнений, описывающие инерционно-гравитационные волны, предпочитают записывать полунеявно или неявно. В этом случае шаг по времени выбирается из соображений устойчивости только для квазигеострофического процесса.

4.6. Конечно-разностные схемы, применяемые в прогностических моделях

В прогностических моделях, основанных на полных уравнениях, используются различные схемы интегрирования. Широкое применение нашли явные схемы с использованием центральных разностей и различные модификации схемы Лакса—Вендрофа, а также полунейвные и неявные схемы. Полунейвные и неявные схемы интегрирования полных уравнений развивались в основном в СССР.

Основное достоинство неявных и полунейвных схем заключается в том, что в случае применения этих схем допускается использование значительно больших шагов по времени, чем при использовании явных схем, без заметного увеличения ошибок прогноза.

В последнее время особое внимание уделяется полунейвным схемам, так как для их реализации требуется значительно меньше вычислительного времени, чем для реализации явных и неявных схем.

4.6.1. Явные схемы для баротропных моделей.

Схема центральных разностей

В качестве примера приведем явную схему на сетке A для модели, основанной на уравнениях мелкой воды. Эта схема построена Шуманом; в ней используется адвективная форма уравнений с фильтрующими множителями:

$$\begin{aligned}\delta_t \bar{u}^t &= - [\bar{m}^{xy} (\bar{u}^{xy} \delta_x \bar{u}^y + \bar{v}^{xy} \delta_y \bar{u}^x + \bar{\Phi}_x^y) - \bar{l}^{xy} \bar{v}^{xy}]^{xy}, \\ \delta_t \bar{v}^t &= - [\bar{m}^{xy} (\bar{u}^{xy} \delta_x \bar{v}^y + \bar{v}^{xy} \delta_y \bar{v}^x + \bar{\Phi}_y^x) + \bar{l}^{xy} \bar{u}^{xy}]^{xy}, \\ \delta_t \bar{\Phi}^t &= - \bar{m}^{xy} [\bar{u}^{xy} \delta_x \bar{\Phi}^y + \bar{v}^{xy} \delta_y \bar{\Phi}^x + \bar{\Phi}^{xy} (\delta_x \bar{u}^y + \delta_y \bar{v}^x)]^{xy}\end{aligned}\quad (6.1)$$

где m — масштабный множитель.

Внешнее осреднение по xy всех членов в правых частях уравнений обеспечивает дополнительное сглаживание и получение решений на следующем уровне по времени в тех же узлах, в которых задаются функции u, v, Φ на предыдущем уровне. На первом шаге используются направленные разности по времени. Данная модель была применена для прогноза u, v, Φ на изобарической поверхности 500 гПа в пределах северного полушария с граничными условиями на экваторе вида

$$C_n|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial C_k}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (6.2)$$

где C_n и C_k — нормальная и касательная к границе составляющие вектора скорости ветра $\mathbf{C}(u, v)$; n — нормаль к границе.

Ряд явных схем для моделей, основанных на уравнениях мелкой воды, был разработан в СССР.

Применение схемы Лакса—Вендрофа, обладающей свойством фильтрации коротких волн, способствует подавлению нелинейной неустойчивости.

Рассмотрим применение схемы Лакса—Вендрофа на расштанной по пространству сетке, которая представляет собой совокупность двух видов точек с целыми (i, j) и дробными $(i \pm 1/2, j \pm 1/2)$ индексами. В начальный момент времени переменные задаются в узлах с целыми индексами. Решение на каждом шаге по времени осуществляется в два этапа.

Сначала определяется решение на уровне $s + 1/2$ в точках сетки с дробными индексами $i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}$ с использованием схемы направленных вперед разностей по времени и центральных разностей по пространству.

Уравнения записываются в виде

$$\begin{aligned} u_{i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}}^{s + \frac{1}{2}} &= \left(\bar{u}_{i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}}^{xy} \right)^s - \\ &- \frac{\Delta t}{2} (\bar{u}^{xy} \delta_x \bar{u}^y + \bar{v}^{xy} \delta_y \bar{u}^x + \delta_x \bar{\Phi}^y - \bar{l} \bar{v}^{xy})_{i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}}^s, \\ v_{i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}}^{s + \frac{1}{2}} &= \left(\bar{v}_{i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}}^{xy} \right)^s - \\ &- \frac{\Delta t}{2} (\bar{u}^{xy} \delta_x \bar{v}^y + \bar{v}^{xy} \delta_y \bar{v}^x + \delta_y \bar{\Phi}^x + \bar{l} \bar{u}^{xy})_{i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}}^s, \\ \Phi_{i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}}^{s + \frac{1}{2}} &= \left(\bar{\Phi}_{i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}}^{xy} \right)^s - \\ &- \frac{\Delta t}{2} [\bar{u}^{xy} \delta_x \bar{\Phi}^y + \bar{v}^{xy} \delta_y \bar{\Phi}^x + \bar{\Phi}^{xy} (\delta_x \bar{u}^y + \delta_y \bar{v}^x)]_{i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}}^s. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Затем, используя схему центральных разностей по времени и по пространству, вычисляют прогностические переменные на уровне $s + 1$ в точках с целыми индексами i, j с помощью уравнений, представленных в следующей форме:

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{s+1} &= (\bar{u}_{i,j}^{xy})^s - \Delta t (\bar{u}^{xy} \delta_x \bar{u}^y + \bar{v}^{xy} \delta_y \bar{u}^x + \delta_x \bar{\Phi}^y - \bar{l} \bar{v}^{xy})_{i,j}^{s+1/2}, \\ v_{i,j}^{s+1} &= (\bar{v}_{i,j}^{xy})^s - \Delta t (\bar{u}^{xy} \delta_x \bar{v}^y + \bar{v}^{xy} \delta_y \bar{v}^x + \delta_y \bar{\Phi}^x + \bar{l} \bar{u}^{xy})_{i,j}^{s+1/2}, \\ \Phi_{i,j}^{s+1} &= (\bar{\Phi}_{i,j}^{xy})^s - \Delta t [\bar{u}^{xy} \delta_x \bar{\Phi}^y + \bar{v}^{xy} \delta_y \bar{\Phi}^x + \bar{\Phi}^{xy} (\delta_x \bar{u}^y + \delta_y \bar{v}^x)]_{i,j}^{s+1/2}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

где

$$\bar{f}_{i,j}^{xy} = \frac{1}{4} \left(f_{i+\frac{1}{2},j} + f_{i-\frac{1}{2},j} + f_{i,j+\frac{1}{2}} + f_{i,j-\frac{1}{2}} \right), f = \begin{vmatrix} u \\ v \\ \Phi \end{vmatrix}.$$

Таким образом, эта схема реализуется на расштанной по времени сетке, но не расштанной по пространству. В качестве граничных условий могут использоваться условия (6.2).

Схема центральных разностей на расштанной по пространству и по времени сетке

Конечно-разностные схемы и методы интегрирования полных уравнений могут быть построены на сетках, расштаных и по пространству, и по времени. Применение таких сеток представляется целесообразным, во-первых, из-за экономичности расчетов, которая обусловлена тем, что вычисление прогнозируемых метеовеличин на каждом временном уровне предусматривается не во всех точках пространственно-временной сетки. Во-вторых, если при этом используются центральные разности по времени, то решение в одних и тех же узлах получается через шаг по времени. За счет этого исключается вычислительная мода. Действительно, поскольку множитель перехода, соответствующий вычислительной моде, $\lambda = -1$, то $f^{s+2} = (-1)^2 f^s$. Следовательно, решение не осциллирует. В этом заключается достоинство таких сеток. Недосток расштаных по пространству сеток и по времени (так же, как и сеток, расштаных только по пространству) состоит в том, что для точек, в которых значения зависимых переменных не определяются, эти значения приходится вычислять путем интерполяции.

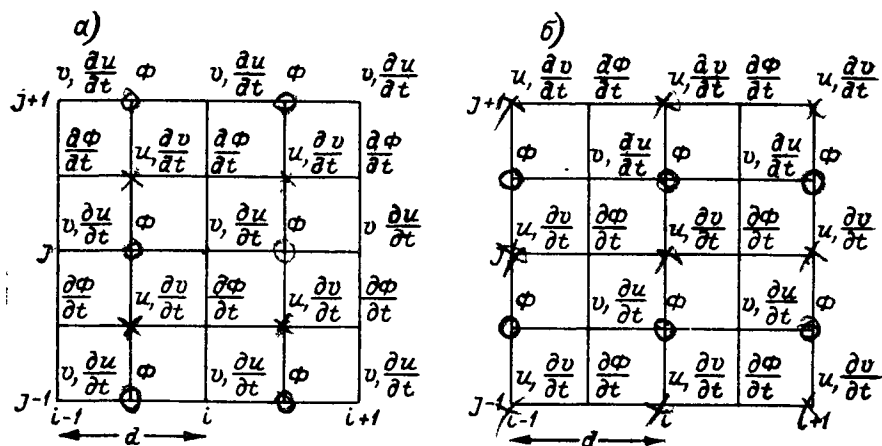


Рис. 4.3. Размещение зависимых переменных на расштанной сетке для соседних уровней по времени s (а) и $s+1$ (б).

Рассмотрим явную конечно-разностную схему центральных разностей на расштанной сетке (Элиассена) для уравнений мелкой воды, описанную Хинкельманом. Структура расштанной сетки на двух соседних уровнях по времени s и $s+1$ представлена на рис. 4.3. Из рисунка видно, что такое размещение зависимых переменных соответствует сетке D . С учетом принятого размещения зависимых переменных конечно-разностные уравнения записываются для тех точек, где предусмотрено вычисление производных по времени, в следующем виде:

$$\begin{aligned}\delta_t \bar{u}^t + (\bar{u}^{xy} \delta_x \bar{u}^y + \bar{v}^{yy} \delta_y \bar{u}^x)^s &= -\delta_x \Phi^s + l v^s + \mu V^2 u^{s, s-1}, \\ \delta_t \bar{v}^t + (\bar{u}^{xx} \delta_x \bar{v}^y + \bar{v}^{xy} \delta_y \bar{v}^x)^s &= -\delta_y \Phi^s - l u^s + \mu V^2 v^{s, s-1}, \\ \delta_t \bar{\Phi}^t + [\delta_x (u \bar{\Phi}^{xy}) + \delta_y (v \bar{\Phi}^{xy})]^s &= 0,\end{aligned}\quad (6.5)$$

$$\text{где } \delta_t \bar{u}^t = \frac{u^{s+1} - u^{s-1}}{2\Delta t}, \quad \delta_t \bar{v}^t = \frac{v^{s+1} - v^{s-1}}{2\Delta t}, \quad \delta_t \bar{\Phi}^t = \frac{\Phi^{s+1} - \Phi^{s-1}}{2\Delta t},$$

μ — коэффициент вязкости, V — конечно-разностный аналог оператора Лапласа

$$\begin{aligned}V^2 f_{i, j}^{s, s-1} &= \frac{1}{d^2} \left(f_{i+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}}^s + f_{i+\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2}}^s + f_{i-\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}}^s + \right. \\ &\left. + f_{i-\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2}}^s - 4 f_{i, j}^{s-1} \right), \quad f = \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix}, \quad d = \Delta x = \Delta y.\end{aligned}$$

Вязкие члены вводятся для подавления коротких волн. В конечно-разностном аналоге оператора Лапласа f_{ij} относится к моменту времени $s-1$, так как в момент времени s нет значений u и v в узлах, где вычисляются производные по времени. Кроме того, такая запись вязких (диффузионных) членов позволяет избежать вычислительной неустойчивости, поскольку схема центральных разностей по времени для уравнения диффузии является неустойчивой. За счет этого приема достигается также более тесная связь решений на соседних уровнях по времени, которая при возрастании числа шагов по времени может ослабевать.

Запись уравнений (6.5) предполагает, что параметр Кориолиса размещается в тех точках, где имеются значения u и v . При интегрировании уравнений (6.5) могут использоваться различные боковые граничные условия, например условие твердой стенки.

Рассмотрим применение условия твердой стенки для восьмиугольной сеточной области. Фрагмент этой сетки представлен на рис. 4.4.

Условия твердой стенки позволяют вычислять производные по времени не только для внутренних узлов, но и для узлов, лежащих на границе. Для этого используется прием, с помощью которого значения переменных «отражаются» из ближайших к границе внутренних узлов в ближайшие узлы, лежащие за пределами сеточной области. Механизм «отражения» состоит в том, что в ближайшие узлы

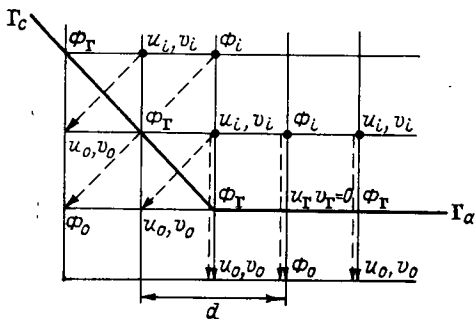


Рис. 4.4. Фрагмент восьмиугольной сеточной области.

за пределами сеточной области переносятся значения переменных из ближайших внутренних узлов. Значения «отраженных» переменных снабжены на рис. 4.4 индексами 0, а значения во внутренних узлах — индексами i . Внутренние узлы, из которых

переносятся значения, обозначены точками, а направления переноса указаны штриховыми стрелками. Перенос производится так, что $\Phi_0 = \Phi_i$, $u_0 = -v_i$, $v_0 = u_i$ (на участке границы Γ_c), $\Phi_0 = \Phi_i$, $u_0 = u_i$, $v_0 = -v_i$ (на участке границы Γ_a). Масштабный множитель и параметр Кориолиса переносятся из тех внутренних узлов, где они заданы, в ближайшие узлы за пределами сетки. При переносе у параметра Кориолиса изменяется знак, т. е. $l_0 = -l_i$. Такая процедура позволяет получить все зависимые переменные и параметры на границах, которые необходимы для вычисления производных с помощью уравнений (6.5).

4.6.2. Явные схемы для бароклинных моделей

Схема центральных разностей для пространственной (бароклинной) модели в σ -системе координат на расштанной по пространству и времени сетке

Рассмотрим один из вариантов схемы центральных разностей для квазистатических уравнений бароклинной модели в σ -системе координат. Уравнения модели запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + R \sigma^\lambda \pi^{\lambda-1} \times \right. \\ \left. \times \theta \frac{\partial \pi}{\partial x} - l v - \mu \nabla^2 u \right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + R \sigma^\lambda \pi^{\lambda-1} \times \right. \\ \left. \times \theta \frac{\partial \pi}{\partial y} + l u - \mu \nabla^2 v \right),$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} - \mu \nabla^2 \theta \right),$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \int_0^1 \left[\frac{\partial (u\pi)}{\partial x} + \frac{\partial (v\pi)}{\partial y} \right] d\sigma = 0,$$

$$\dot{\sigma} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\sigma} \left[\frac{\partial (u\pi)}{\partial x} + \frac{\partial (v\pi)}{\partial y} \right] d\sigma + \frac{\sigma'}{\pi} \int_0^1 \left[\frac{\partial (u\pi)}{\partial x} + \frac{\partial (v\pi)}{\partial y} \right] d\sigma,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -R\theta\sigma^{\lambda-1}\pi^{\lambda}, \quad (6.6)$$

где

$$\lambda = \frac{\kappa-1}{\kappa} = \frac{R}{c_p}, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v}, \quad \pi = \frac{p_s}{P},$$

$P = 1000$ гПа, остальные обозначения общепринятые.

Уравнения движения и уравнение статики системы (6.6) получены с использованием следующих преобразований. Поскольку $T = \theta (p/P)^{\lambda}$, то

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial x} = -\frac{\sigma R \theta}{p} \left(\frac{p}{P} \right)^{\lambda} \frac{\partial p_s}{\partial x} = -R\sigma^{\lambda}\pi^{\lambda-1}\theta \frac{\partial \pi}{\partial x}; \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial p_s}{\partial y} = -R\sigma^{\lambda}\pi^{\lambda-1}\theta \frac{\partial \pi}{\partial y}; \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \sigma} &= -\frac{p_s}{\rho} = -\frac{p_s R T}{p} = -R\theta\sigma^{\lambda-1}\pi^{\lambda}, \end{aligned}$$

т. е. $\partial \Phi / \partial \sigma = -R\theta\sigma^{\lambda-1}\pi^{\lambda}$. Граничные условия имеют следующий вид: $\dot{\sigma} = 0$ при $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$; $\Phi = \Phi_s$ при $\sigma = 1$. На боковых границах могут использоваться условия твердой стенки, подобные тем, которые применялись при интегрировании баротропных уравнений (6.5).

Конечно-разностные аналоги уравнений (6.6) записываются на расштанной пространственной сетке с таким же размещением зависимых переменных на основных уровнях $\sigma = \text{const}$, которое использовалось для уравнений (6.5). Зависимые переменные θ , π и $\partial \theta / \partial t$, $\partial \pi / \partial t$ размещаются на основных уровнях в тех же узлах, где Φ и $\partial \Phi / \partial t$ соответственно, а $\dot{\sigma}$ — в узлах, где размещаются $\partial \Phi / \partial t$ (см. рис. 4.3), но на промежуточных уровнях $\sigma \pm \Delta \sigma / 2$.

При таком размещении зависимых переменных производные по времени $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial \theta}{\partial t}$, $\frac{\partial \pi}{\partial t}$ рассчитываются в момент времени s в тех узлах на уровнях $\sigma = \text{const}$, где были заданы u , v , θ , π в момент времени $s-1$ и где они рассчитываются в момент времени $s+1$. С учетом такого размещения переменных конечно-разностные уравнения записываются для тех точек на основных уровнях, где предусмотрено вычисление производных по времени $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial \theta}{\partial t}$, $\frac{\partial \pi}{\partial t}$, а также значений Φ , в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta_t \bar{u}_k^t &= -(\bar{u}^{xy} \delta_x \bar{u}^y + \bar{v}^{yy} \delta_y \bar{u}^x + \overline{\sigma^y \delta \sigma} \bar{u}^{xy})_k^s - \\ &- \delta_x \Phi_k^s - R\sigma_k^{\lambda} (\pi^{\lambda-1} \theta \delta_x \pi)_k^s + l v_k^s + \mu V^2 u_k^{s-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_t \bar{v}_k^t &= -(\bar{u}^{xx} \delta_x \bar{v}^y + \bar{v}^{xy} \delta_y \bar{v}^x + \overline{\sigma^x \delta_\sigma \bar{v}^{xy}})_k^s - \\
&- \delta_y \Phi_k^s - R \sigma_k^\lambda (\pi^{\lambda-1} \theta \delta_y \pi)_k^s - l u_k^s + \mu V^2 v_k^{s, s-1}, \\
\delta_t \bar{\theta}_k^t &= -(\bar{u}^x \delta_x \bar{\theta}^y + \bar{v}^y \delta_y \bar{\theta}^x + \overline{\dot{\sigma} \delta_\sigma \bar{\theta}^{xy}})_k^s + \mu V^2 \theta_k^{s, s-1}, \\
\delta_t \bar{\pi}^t &= - \sum_{k=0}^K [\delta_x (u_k \bar{\pi}^y) + \delta_y (v_k \bar{\pi}^x)]^s \Delta \sigma_k, \\
\dot{\sigma}_{k+\frac{1}{2}}^s &= - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{k+\frac{1}{2}} [\delta_x (u_k \bar{\pi}^y) + \delta_y (v_k \bar{\pi}^x)]^s \Delta \sigma_k + \\
&+ \frac{\sigma_{k+\frac{1}{2}}}{\pi} \sum_{k=0}^K [\delta_x (u_k \bar{\pi}^y) + \delta_y (v_k \bar{\pi}^x)]^s \Delta \sigma_k, \\
\Phi_k^s &= \Phi_K^s + R \left(\pi^\lambda \sum_k^K \overline{\sigma_k^{\lambda-1} \theta_k}^\sigma \right)^s \Delta \sigma_k, \tag{6.7}
\end{aligned}$$

где

$$k = \frac{\sigma}{\Delta \sigma}, \quad K \Delta \sigma = 1, \quad \Delta \sigma_k = \sigma_{k+1} - \sigma_k \quad (k = 0, 1, K-1),$$

$$\delta \bar{f}_t^t = (f^{\tau+1} - f^{\tau-1}) \frac{1}{2 \Delta t}.$$

При вычислении первой суммы в правой части уравнения для $\dot{\sigma}_{k+\frac{1}{2}}$ последний член этой суммы, соответствующий слою $k \dots$

$k + \frac{1}{2}$, записывается для $\Delta \sigma_k = \sigma_{k+\frac{1}{2}} - \sigma_k$. Чтобы рассчитать члены уравнений (6.7), содержащие осреднение и дифференцирование по σ на уровнях $k = 0$ ($\sigma = 0$) и $k = K$ ($\sigma = 1$), используются фиктивные уровни $k = -1$ и $k = K + 1$, на которых зависимым переменным присваиваются соответственно значения на уровнях $k = 1$ и $k = K - 1$.

*Схема Лакса—Вендрофа для бароклиновой модели
в σ -системе координат
на расштанной по пространству и времени сетке*

Рассмотрим применение схемы Лакса—Вендрофа для системы уравнений (6.6) на той же пространственной сетке, для которой записана конечно-разностная схема (6.7). В схеме Лакса—Вендрофа на первом этапе предусматривается прогноз в момент времени $s + \frac{1}{2}$ на промежуточных уровнях $k + \frac{1}{2}$ в тех точках, где размещены u , v , θ , π в момент времени s . Относительно точек с производными $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial \theta}{\partial t}$, $\frac{\partial \pi}{\partial t}$ эти точки смещены на полшага. Поэтому точкам, где

предусматривается прогноз в момент времени $s + \frac{1}{2}$ на уровнях $k + \frac{1}{2}$, присваиваются дробные индексы $i \pm \frac{1}{2}$, $j \pm \frac{1}{2}$. Для аппроксимации производных по времени на интервале от s до $s + \frac{1}{2}$ используются направленные вперед разности. С учетом этого конечно-разностные аналоги уравнений (6.6), используемые для реализации первого этапа прогноза по схеме Лакса—Вендрофа, записываются для точек с индексами $i \pm \frac{1}{2}$, $j \pm \frac{1}{2}$, $k \pm \frac{1}{2}$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 u^{s+\frac{1}{2}} &= (\bar{u}^\sigma)^s - \frac{\Delta t}{2} [\bar{u}^\sigma \delta_x \bar{u}^{x\sigma} + \bar{v}^{xy\sigma} \delta_y \bar{u}^{y\sigma} + \bar{\sigma}^x \delta_\sigma u + \\
 &+ \delta_x \bar{\Phi}^{xy\sigma} + R (\bar{\sigma}^\lambda \bar{\pi}^{\lambda-1}) \bar{\theta}^{y\sigma} \delta_x \bar{\pi}^{xy} - l \bar{v}^{xy\sigma} - \mu (\delta_{xx} \bar{u}^{x\sigma} + \delta_{yy} \bar{u}^{y\sigma})]^s, \\
 v^{s+\frac{1}{2}} &= (\bar{v}^\sigma)^s - \frac{\Delta t}{2} [\bar{u}^{xy\sigma} \delta_x \bar{v}^{x\sigma} + \bar{v}^\sigma \delta_y \bar{v}^{y\sigma} + \bar{\sigma}^y \delta_\sigma v + \delta_y \bar{\Phi}^{xy\sigma} + \\
 &+ R (\bar{\sigma}^\lambda \bar{\pi}^{\lambda-1}) \bar{\theta}^{x\sigma} \delta_y \bar{\pi}^{xy} + l \bar{u}^{xy\sigma} - \mu (\delta_{xx} \bar{v}^{x\sigma} + \delta_{yy} \bar{v}^{y\sigma})]^s, \\
 \theta^{s+\frac{1}{2}} &= (\bar{\theta}^\sigma)^s - \frac{\Delta t}{2} [\bar{u}^{y\sigma} \delta_x \bar{\theta}^{x\sigma} + \bar{v}^{x\sigma} \delta_y \bar{\theta}^{y\sigma} + \bar{\sigma}^{-xy} \delta_y \bar{\theta} - \\
 &- \mu (\delta_{xx} \bar{\theta}^{x\sigma} + \delta_{yy} \bar{\theta}^{y\sigma})]^s, \\
 \pi^{s+\frac{1}{2}} &= \pi^s - \frac{\Delta t}{2} \left\{ \sum_{k=0}^K [\delta_x (\bar{u}_k^{xy} \bar{\pi})^x + \delta_y (\bar{v}^{xy} \bar{\pi}^y)] \Delta \sigma_{k'} \right\}^s, \\
 \dot{\sigma}_{k \pm \frac{1}{2}}^s &= \left\{ -\frac{1}{\bar{\pi}^{xy}} \sum_{k=0}^{k \pm \frac{1}{2}} [\delta_x (u_k \bar{\pi}^y) + \delta_y (v_k \bar{\pi}^x)] \Delta \sigma_{k'} + \right. \\
 &\left. + \frac{\sigma_{k \pm \frac{1}{2}}}{\bar{\pi}^{xy}} \sum_{k=0}^K [\delta_x (u_k \bar{\pi}^y) + \delta_y (v_k \bar{\pi}^x)] \Delta \sigma_{k'} \right\}^s, \\
 \Phi_{k \pm \frac{1}{2}}^s &= \Phi_K^s + R \left[\pi^\lambda \sum_{k=k \pm \frac{1}{2}}^K (\bar{\sigma}_k^{\lambda-1} \bar{\theta}_k^\sigma) \Delta \sigma_{k'} \right]^s. \quad (6.8)
 \end{aligned}$$

На втором этапе реализации схемы метеовеличины, полученные в момент времени $s + \frac{1}{2}$ по схеме (6.8), используются для прогноза с помощью схемы (6.7) в точках с целыми индексами, где предусмотрено вычисление производных по времени $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial \theta}{\partial t}$, $\frac{\partial \pi}{\partial t}$ и Φ .

4.6.3. Полуявные схемы

Впервые полуявные схемы для полных уравнений с неявной аппроксимацией линейных членов были предложены С. В. Немчиновым и В. П. Садовым.

На расшатанной сетке по времени, представляющей собой совокупность двух сеток A , сдвинутых одна относительно другой на полшага $1/2d$, где $d = \Delta x = \Delta y$, рассмотрим следующие варианты полунеявных схем для уравнений модели мелкой воды.

Вариант I:

$$\begin{aligned}\delta_t \bar{u}^t + (\bar{u}^{xy} \delta_x \bar{u}^y + \bar{v}^{xy} \delta_y \bar{u}^x)^s &= -(\delta_x \bar{\Phi}^y - l \bar{v}^{xy})^s, \\ \delta_t \bar{v}^t + (\bar{u}^{xy} \delta_x \bar{v}^y + \bar{v}^{xy} \delta_y \bar{v}^x)^s &= -(\delta_y \bar{\Phi}^x + l \bar{u}^{xy})^s, \\ \delta_t \bar{\Phi}^t + (\bar{u}^{xy} \delta_x \bar{\Phi}^y + \bar{v}^{xy} \delta_y \bar{\Phi}^x)^s &= -(\bar{\Phi}^{xy})^s (\delta_x \bar{u}^y + \delta_y \bar{v}^x)^{s+1}. \quad (6.9)\end{aligned}$$

Вариант II:

$$\begin{aligned}\delta_t \bar{u}^t + (\bar{u}^{xy} \delta_x \bar{u}^y + \bar{v}^{xy} \delta_y \bar{u}^x)^s &= -(\delta_x \bar{\Phi}^y)^{s+1} + l (\bar{v}^{xy})^s, \\ \delta_t \bar{v}^t + (\bar{u}^{xy} \delta_x \bar{v}^y + \bar{v}^{xy} \delta_y \bar{v}^x)^s &= -(\delta_y \bar{\Phi}^x)^{s+1} - l (\bar{u}^{xy})^s, \\ \delta_t \bar{\Phi}^t + (\bar{u}^{xy} \delta_x \bar{\Phi}^y + \bar{v}^{xy} \delta_y \bar{\Phi}^x)^s &= -[\bar{\Phi}^{xy} (\delta_x \bar{u}^y + \delta_y \bar{v}^x)]^s. \quad (6.10)\end{aligned}$$

В полунеявных схемах (6.9) и (6.10) неявно записаны не все члены уравнений, описывающие поведение инерционно-гравитационных волн. При применении этих схем следует сначала интегрировать те уравнения, в которых все члены записаны явно. В схеме (6.9) сначала необходимо интегрировать первые два уравнения. Полученные значения u^{s+1} и v^{s+1} затем подставляются в выражение для дивергенции в третьем уравнении.

В схеме (6.10) сначала вычисляются Φ^{s+1} из третьего уравнения. Полученные значения Φ^{s+1} используются затем в первых двух уравнениях. Таким образом, если придерживаться указанной последовательности решения, то полунеявные схемы (6.9) и (6.10) реализуются как явные. При этом прогноз осуществляется на расшатанной по времени сетке. На четных шагах по времени ($s = 2, 4, 6, \dots$) все переменные вычисляются в узлах с целыми индексами i, j , а на нечетных ($s = 1, 3, 5, \dots$) — в узлах с дробными индексами $i \pm 1/2, j \pm 1/2$.

Вариант III. Построим полунеявную конечно-разностную схему на расшатанной сетке по времени с неявной записью всех членов уравнений, описывающих поведение инерционно-гравитационных волн. Для этого сначала выполним преобразования уравнений. Уравнения движения запишем в полудискретной (дифференциально-разностной) форме, представив производные по времени центральными разностями, а составляющие градиента геопотенциала и кориолисовы ускорения включим неявно по схеме трапеций:

$$u^{s+1} = u^{s-1} - 2\Delta t A_u^s - \Delta t \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^{s-1} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^{s+1} \right] + l \Delta t (v^{s-1} + v^{s+1}), \quad (6.11)$$

$$v^{s+1} = v^{s-1} - 2\Delta t A_v^s - \Delta t \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^{s-1} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^{s+1} \right] - l \Delta t (u^{s-1} + u^{s+1}), \quad (6.12)$$

где

$$A_u^s = \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)^s, \quad A_v^s = \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)^s.$$

В уравнении неразрывности производную по времени представим центральной разностью, а дивергенцию запишем неявно на схеме трапеций:

$$\Phi^{s+1} = \Phi^{s-1} - 2\Delta t A_\Phi^s - \Delta t \Phi^s \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^{s-1} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^{s+1} \right], \quad (6.13)$$

где $A_\Phi^s = \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^s$.

Разрешив уравнения (6.11) и (6.12) относительно u^{s+1} и v^{s+1} , получим:

$$u^{s+1} = \alpha \left[(1 - (l \Delta t)^2) u^{s-1} - 2\Delta t A_u^s - \Delta t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^{s-1} + 2l \Delta t v^{s-1} - \right. \\ \left. - 2l (\Delta t)^2 A_v^s - l (\Delta t)^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^{s-1} - \Delta t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^{s+1} - l (\Delta t)^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^{s+1} \right], \quad (6.14)$$

$$v^{s+1} = \alpha \left[(l - (l \Delta t)^2) v^{s-1} - 2\Delta t A_v^s - \Delta t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^{s-1} - 2l \Delta t u^{s-1} + \right. \\ \left. + 2l (\Delta t)^2 A_u^s + l (\Delta t)^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^{s-1} - \Delta t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^{s+1} - l (\Delta t)^2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^{s+1} \right], \quad (6.15)$$

где $\alpha = \frac{1}{1 + (l \Delta t)^2}$.

Подставляя u^{s+1} и v^{s+1} в выражение для дивергенции $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^{s+1}$ уравнения (6.13), получаем:

$$\Phi^{s+1} - f \Delta t \left(\frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial y} - \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial x} \right) - f \left(\frac{\partial^2 \Phi^{s+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi^{s+1}}{\partial y^2} \right) = \Phi^{s-1} + F^{s, s-1}, \quad (6.16)$$

где

$$F^{s, s-1} = -2\Delta t A_\Phi^s - \Delta t \Phi^s \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^{s-1} + \alpha \right] - \\ - \alpha \Phi^s \Delta t \left[-2\Delta t \left(\frac{\partial A_u}{\partial x} + \frac{\partial A_v}{\partial y} \right)^s - \Delta t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^{s-1} + \right. \\ \left. + 2l \Delta t (v - u)^{s-1} - 2(\Delta t)^2 \left(\frac{\partial l}{\partial x} A_v^s - \frac{\partial l}{\partial y} A_u^s \right) - \right. \\ \left. - 2l (\Delta t)^2 \left(\frac{\partial A_v}{\partial x} - \frac{\partial A_u}{\partial y} \right) - (\Delta t)^2 \left(\frac{\partial l}{\partial x} \frac{\partial \Phi^{s-1}}{\partial y} - \frac{\partial l}{\partial y} \frac{\partial \Phi^{s-1}}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + 2l (\Delta t)^2 \left(\frac{\partial l}{\partial x} u^{s-1} - \frac{\partial l}{\partial y} v^{s-1} \right) + (l \Delta t)^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^{s-1} \right], \\ f = \alpha \Phi^s (\Delta t)^2.$$

При получении уравнения (6.16) полагалось, что $\alpha = \text{const}$.

Запишем уравнения (6.14)—(6.16) в конечно-разностной форме на расштанной сетке по времени так, чтобы на четных шагах по времени ($s = 2, 4, 6, \dots$) все зависимые переменные вычислялись в узлах с целыми индексами i, j , а на нечетных шагах ($s = 1, 3, 5, \dots$) — в промежуточных узлах с дробными индексами $i \pm 1/2, j \pm 1/2$:

$$u^{s+1} = \alpha [(1 - (l \Delta t)^2) u^{s-1} - 2 \Delta t \nabla A_u^s - \Delta t (\delta_x \bar{\Phi}^x)^{s-1} + \\ + 2l \Delta t v^{s-1} - 2l (\Delta t)^2 \nabla A_v^s - l (\Delta t)^2 (\delta_y \bar{\Phi}^y)^{s-1} - \Delta t (\delta_x \bar{\Phi}^x)^{s+1} - \\ - l (\Delta t)^2 (\delta_y \bar{\Phi}^y)^{s+1}], \quad (6.17)$$

$$v^{s+1} = \alpha [1 - (l \Delta t)^2] v^{s-1} - 2 \Delta t \nabla A_v^s - \Delta t (\delta_y \bar{\Phi}^y)^{s-1} - \\ - 2l \Delta t u^{s-1} + 2l (\Delta t)^2 \nabla A_u^s + l (\Delta t)^2 (\delta_x \bar{\Phi}^x)^{s-1} - \\ - \Delta t (\delta_y \bar{\Phi}^y)^{s+1} - l (\Delta t)^2 (\delta_x \bar{\Phi}^x)^{s+1}], \quad (6.18)$$

$$\{\Phi - f \Delta t (\delta_x l \delta_y \bar{\Phi}^y - \delta_y l \delta_x \bar{\Phi}^x) + f (\delta_{xx} \Phi + \delta_{yy} \Phi)\}^{s+1} = \Phi^{s-1} + F^{s, s-1}, \quad (6.19)$$

где

$$F^{s, s-1} = -2 \Delta t \nabla A_\Phi^s - \Delta t \Phi^s [(\delta_x \bar{u}^x)^{s-1} + (\delta_y \bar{v}^y)^{s-1} + \alpha] - \\ - \alpha \Phi^s \Delta t \left\{ -2 \Delta t (\delta_x \bar{A}_u^x + \delta_y \bar{A}_v^y) - \Delta t (\delta_x \bar{\Phi}^x + \delta_y \bar{\Phi}^y)^{s-1} + \right. \\ + 2l \Delta t (v - u)^{s-1} - 2 (\Delta t)^2 (\delta_x l \nabla A_v^s - \delta_y l \nabla A_u^s) - \\ - 2l (\Delta t)^2 (\delta_x \nabla \bar{A}_v^x - \delta_y \nabla \bar{A}_u^y)^s - (\Delta t)^2 [\delta_x l (\delta_y \bar{\Phi}^y)^{s-1} - \\ - \delta_y l (\delta_x \bar{\Phi}^x)^{s-1}] + 2l (\Delta t)^2 (u^{s-1} \delta_x l - v^{s-1} \delta_y l) + \\ \left. + (l \Delta t)^2 (\delta_x \bar{u}^x - \delta_y \bar{v}^y)^{s-1} \right\}, \\ \nabla A_u^s = (\bar{u}^{xy} \delta_x \bar{u}^y + \bar{v}^{xy} \delta_y \bar{u}^x)^s, \\ \nabla A_v^s = (\bar{u}^{xy} \delta_x \bar{v}^y + \bar{v}^{xy} \delta_y \bar{v}^x)^s, \\ \nabla A_\Phi^s = (\bar{u}^{xy} \delta_x \bar{\Phi}^y + \bar{v}^{xy} \delta_y \bar{\Phi}^x)^s.$$

Уравнение (6.19) является конечно-разностным аналогом линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами, которое в общем виде записывается следующим образом:

$$A \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + D \frac{\partial \Phi}{\partial x} + E \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -F,$$

где

$$B = 0; \quad A = C = \alpha \Phi^s (\Delta t)^2; \quad D = \alpha \Phi^s (\Delta t)^3 \delta_y l; \\ E = -\alpha \Phi^s (\Delta t)^3 \delta_x l; \quad F = \Phi^{s-1} + F^{s, s-1}.$$

Поскольку $AC - B^2 = [\alpha\Phi^s (\Delta t)^2]^2 > 0$, то уравнение (6.19) относится к эллиптическому типу. Для решения этого уравнения применяются релаксационные методы, подобные тем, которые используются в квазигеострофических и квазисоленоидальных моделях.

После того как решено уравнение (6.19), полученные значения Φ^{s+1} используются для вычисления u^{s+1} и v^{s+1} с помощью уравнений (6.17) и (6.18). Рассмотренные полунеявные схемы центральных разностей были построены на расшатанных сетках только по времени с размещением всех зависимых переменных в одних и тех же узлах пространственной сетки. При этом зависимые переменные на нечетных и четных шагах по времени вычисляются в узлах двух сеток, сдвинутых одна относительно другой на полшага по пространству.

Полунеявные схемы могут быть построены на сетках, расшатанных и по времени, и по пространству. Рассмотрим такого рода схему для уравнений модели мелкой воды с неявной аппроксимацией дивергенции и с размещением зависимых переменных на двух соседних уровнях по времени, показан на рис. 4.3. При таком размещении зависимых переменных полунеявная схема центральных разностей с неявной аппроксимацией дивергенции на расшатанной по пространству и по времени сетке записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}\delta_t \bar{u}^t + (\bar{u}^{xy} \delta_x \bar{u}^y + v \delta_y \bar{u}^x)^s &= -(\delta_x \bar{\Phi}^{xy} - lv)^s, \\ \delta_t \bar{v}^t + (u \delta_x \bar{v}^y + \bar{v}^{xy} \delta_y \bar{v}^x)^s &= -(\delta_y \bar{\Phi}^{xy} + lu)^s, \\ \delta_t \bar{\Phi}^t + (\bar{u}^y \delta_x \bar{\Phi}^y + \bar{v}^x \delta_y \bar{\Phi}^x)^s &= -(\bar{\Phi}^{xy})^s (\delta_x u + \delta_y v)^{s+1}.\end{aligned}\quad (6.20)$$

С помощью этой схемы прогнозируемые метеовеличины рассчитываются на четных и нечетных шагах по времени в соответствующих точках сеток, представленных на рис. 4.3. В качестве боковых граничных условий для рассмотренных полунеявных схем могут использоваться условия твердой стенки.

Полунеявные схемы для бароклинных моделей

Так же как в случае баротропных моделей, при построении полунеявных схем, используемых для численного интегрирования уравнений бароклинных моделей, линейные члены уравнений, описывающие быстрые волновые процессы, целесообразно аппроксимировать неявно. В этом случае шаг по времени может быть достаточно большим (как показывают эксперименты, в 4—6 раз больше, чем в явных схемах), так как критерий Куранта—Фридрихса—Леви (КФЛ) должен выполняться только для медленных квазигеострофических процессов адвекций.

При использовании систем уравнений бароклинных моделей представляются более широкие возможности для разработки различных вариантов полунеявных схем, чем в случае баротропных моделей. Это обусловлено большим числом уравнений и их модификаций, а также большим разнообразием возможных способов разме-

щения переменных на нерасшатанных и расшатанных по пространству и времени сетках.

Основные подходы к построению конечно-разностных схем на расшатанных сетках были рассмотрены выше. Поэтому, чтобы не усложнять изложение, ограничимся рассмотрением процедуры интегрирования по времени получающей схемы с неявной аппроксимацией линейных членов на примере уравнений бароклинической модели в σ -системе координат (6.6). Для конечно-разностного представления производных по пространству будем использовать центральные разности.

В уравнениях движения производные по времени представим центральными разностями, составляющие градиентов геопотенциала и давления, а также кориолисовы ускорения запишем неявно по схеме трапеций:

$$\begin{aligned} u^{s+1} &= u^{s-1} + l \Delta t (v^{s-1} + v^{s+1}) - 2 \Delta t F_u^s - \Delta t \left(\frac{\partial \Phi^{s-1}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial x} \right) - \\ &\quad - \Delta t R \sigma^\lambda \left[\left(\pi^{\lambda-1} \theta \frac{\partial \pi}{\partial x} \right)^{s-1} + \left(\pi^{\lambda-1} \theta \frac{\partial \pi}{\partial x} \right)^{s+1} \right], \\ v^{s+1} &= v^{s-1} - l \Delta t (u^{s-1} + u^{s+1}) - 2 \Delta t F_v^s - \Delta t \left(\frac{\partial \Phi^{s-1}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial y} \right) - \\ &\quad - \Delta t R \sigma^\lambda \left[\left(\pi^{\lambda-1} \theta \frac{\partial \pi}{\partial y} \right)^{s-1} + \left(\pi^{\lambda-1} \theta \frac{\partial \pi}{\partial y} \right)^{s+1} \right], \end{aligned}$$

где

$$F_u = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} - \mu \nabla^2 u, \quad F_v = v \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} - \mu \nabla^2 v.$$

Разрешив эти уравнения относительно u^{s+1} и v^{s+1} , получим:

$$\begin{aligned} u^{s+1} &= \frac{1}{1 + (l \Delta t)^2} \left\{ u^{s-1} [1 - (l \Delta t)^2] - 2 \Delta t F_u^s - 2l (\Delta t)^2 F_v^s + \right. \\ &\quad + 2l \Delta t v^{s-1} - \Delta t \left(\frac{\partial \Phi^{s-1}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial x} \right) + l (\Delta t)^2 \left(\frac{\partial \Phi^{s-1}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial y} \right) - \\ &\quad - \Delta t R \sigma^\lambda \left[\left(\pi^{\lambda-1} \theta \frac{\partial \pi}{\partial x} \right)^{s-1} + \left(\pi^{\lambda-1} \theta \frac{\partial \pi}{\partial x} \right)^{s+1} \right] - \\ &\quad \left. - l (\Delta t)^2 R \sigma^\lambda \left[\left(\pi^{\lambda-1} \theta \frac{\partial \pi}{\partial y} \right)^{s-1} + \left(\pi^{\lambda-1} \theta \frac{\partial \pi}{\partial y} \right)^{s+1} \right] \right\}. \quad (6.21) \\ v^{s+1} &= \frac{1}{1 + (l \Delta t)^2} \left\{ v^{s-1} [1 - (l \Delta t)^2] - 2 \Delta t F_v^s + \right. \\ &\quad + 2l (\Delta t)^2 F_u^s - 2l \Delta t u^{s-1} - \Delta t \left(\frac{\partial \Phi^{s-1}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial y} \right) + \\ &\quad + l (\Delta t)^2 \left(\frac{\partial \Phi^{s-1}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial x} \right) - \Delta t R \sigma^\lambda \left[\left(\pi^{\lambda-1} \theta \frac{\partial \pi}{\partial y} \right)^{s-1} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\pi^{\lambda-1} \theta \frac{\partial \pi}{\partial y} \right)^{s+1} \right] + l (\Delta t)^2 R \sigma^\lambda \left[\left(\pi^{\lambda-1} \theta \frac{\partial \pi}{\partial x} \right)^{s-1} + \left(\pi^{\lambda-1} \theta \frac{\partial \pi}{\partial x} \right)^{s+1} \right] \right\}. \quad (6.22) \end{aligned}$$

Для того чтобы воспользоваться уравнениями (6.21) и (6.22), необходимо предварительно рассчитать Φ^{s+1} и π^{s+1} с помощью четвертого, третьего и последнего уравнений системы (6.6):

$$\pi^{s+1} = \pi^{s-1} - 2\Delta t \int_0^1 \left[\frac{\partial(u\pi)}{\partial x} + \frac{\partial(v\pi)}{\partial y} \right]^s d\sigma, \quad (6.23)$$

$$\theta^{s+1} = \theta^{s-1} - 2\Delta t F_\theta^s, \quad (6.24)$$

$$\Phi^{s+1}(\sigma) = \Phi^{s+1}(\sigma = 1) + R \int_\sigma^1 \sigma^{\lambda-1} \theta^{s+1} (\pi^\lambda)^{s+1} d\sigma, \quad (6.25)$$

где

$$F_\theta = u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + \sigma \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} - \mu \nabla^2 \theta.$$

К системе уравнений (6.21)—(6.25) следует присоединить уравнение для вертикальной скорости

$$\dot{\sigma} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\sigma \left[\frac{\partial(u\pi)}{\partial x} + \frac{\partial(v\pi)}{\partial y} \right] d\sigma' + \frac{\sigma}{\pi} \int_0^1 \left[\frac{\partial(u\pi)}{\partial x} + \frac{\partial(v\pi)}{\partial y} \right] d\sigma. \quad (6.26)$$

Эта система уравнений интегрируется по времени в следующем порядке. Сначала с помощью уравнений (6.26), (6.24), (6.25) и (6.23) последовательно вычисляются вертикальная скорость, потенциальная температура, геопотенциал и функция $\pi = p_s/P$.

Полученные метеовеличины используются затем в уравнениях (6.21) и (6.22) для расчетов u^{s+1} и v^{s+1} . Рассмотренная последовательность интегрирования позволяет реализовать полунявную схему на различных расштатанных и нерасштатанных сетках. От выбора структуры сетки будет зависеть вид конечно-разностных уравнений. При интегрировании уравнений (6.21)—(6.26) могут использоваться те же боковые граничные условия, что и для системы уравнений (6.5).

4.6.4. Неявные схемы

Если в прогностических уравнениях аппроксимировать неявно не только линейные, но и нелинейные члены, то конечно-разностная схема будет полностью неявной, а следовательно, устойчивой при использовании больших шагов по времени. Шаги по времени в таких схемах не ограничиваются критерием устойчивости Курант—Фридрихса—Леви. Однако и в неявных схемах их следует ограничивать, так как использование слишком больших шагов по времени может сопровождаться потерей точности решений.

Основная трудность применения неявных схем связана с построением процессов итераций, обеспечивающих сходимость численных решений к точным. Процесс итераций может сходиться медленно. Поэтому, несмотря на устойчивость неявных схем, преимущество

их, которое заключается в возможности использования шагов по времени, больших, чем в полунявных схемах, утрачивается ввиду дополнительных затрат машинного времени на итерации. Процедуру интегрирования по времени с помощью неявных схем поясним на примере уравнений бароклинической модели (6.6) с теми же начальными и граничными условиями. Конечно-разностные уравнения системы (6.6) запишем в неявном виде по схеме трапеций, предусмотрев итерационную процедуру в решении на каждом шаге по времени:

$$\begin{aligned}(u_k^{s+1})^{v+1} &= u_k^{s-1} - \Delta t (F_u^{s-1} + F_u^{s+1})_k^v, \\ (v_k^{s+1})^{v+1} &= v_k^{s-1} - \Delta t (F_v^{s-1} + F_v^{s+1})_k^v, \\ (\theta_k^{s+1})^{v+1} &= \theta_k^{s-1} - \Delta t (F_\theta^{s-1} + F_\theta^{s+1})_k^v, \\ (\pi_k^{s+1})^{v+1} &= \pi_k^{s-1} - \Delta t (F_\pi^{s-1} + F_\pi^{s+1})_k^v,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_{k+\frac{1}{2}}^{s+1} &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{k+\frac{1}{2}} (\operatorname{div} C_k \pi)^{s+1} \Delta \sigma_{k'} + \frac{\sigma_{k+\frac{1}{2}}}{\pi} \sum_{k=0}^K \operatorname{div} (C_k \pi)^{s+1} \Delta \sigma_{k'}, \\ \Phi_k^{s+1} &= \Phi_K^{s+1} + R \left(\pi^\lambda \sum_k \overline{\sigma_k^{\lambda-1} \theta_k^\sigma} \right)^{s+1} \Delta \sigma_{k'},\end{aligned} \quad (6.27)$$

где $k = \sigma/\Delta\sigma$; $\Delta\sigma_{k'} = \sigma_{k+1} - \sigma_k$ ($k = 0, 1, \dots, K-1$); $v = 0, 1, 2, \dots$ — номер итерации; $F_u, F_v, F_\theta, F_\pi$ — конечно-разностные аналоги правых частей уравнений (6.6); $\operatorname{div} C_k \pi$ — конечно-разностный аналог плоской дивергенции; C_k — двумерный вектор скорости ветра с составляющими u, v на уровне k .

Конкретный вид этих конечно-разностных аналогов определяется структурой используемых сеток и способом размещения на них зависимых переменных. Остальные обозначения — те же, что и в уравнениях (6.6) и (6.7).

Для простоты предположим, что u, v, Φ, θ задаются и рассчитываются в одних и тех же узлах на основных уровнях k . Вертикальные токи вычисляются на промежуточных уровнях $k + 1/2$.

На первом шаге по времени ($s = 0, s+1 = 1$) используются направленные разности по времени, а нулевые приближения ($v = 0$) для правых частей прогностических уравнений

$$(F_u^{s+1})^0 \equiv (F_u^1)^0, (F_v^{s+1})^0 \equiv (F_v^1)^0, (F_\theta^{s+1})^0 \equiv (F_\theta^1)^0, (F_\pi^{s+1})^0 \equiv (F_\pi^1)^0$$

определяются по начальным условиям. На всех последующих шагах по времени применяются центральные разности. В качестве нулевых приближений ($v = 0$) для правых частей прогностических уравнений на шаге по времени $s+1$ принимаются их значения на предыдущем шаге:

$$(F_u^{s+1})^0 = F_u^s, (F_v^{s+1})^0 = F_v^s, (F_\theta^{s+1})^0 = F_\theta^s, (F_\pi^{s+1})^0 = F_\pi^s.$$

Итерационная процедура предусматривает последовательное решение всех уравнений системы (6.17), включая диагностические

уравнения, так как для вычисления F_u^{s+1} , F_v^{s+1} , F_θ^{s+1} , F^π^{s+1} необходимо иметь значения u^{s+1} , v^{s+1} , σ^{s+1} , θ^{s+1} , Φ^{s+1} , π^{s+1} на каждой итерации ($v = 0, 1, \dots$).

Таким образом, на каждом шаге по времени система уравнений (6.27) решается многократно методом итераций.

Вычисления контролируются с помощью условий сходимости. В качестве условий сходимости можно, например, использовать следующие:

$$\max_G |(f_i^{s+1})^{v+1} - (f_i^{s+1})^v| \leq \varepsilon_i \quad (v = 0, 1, \dots), \quad (6.24)$$

где

$$f_i = \begin{vmatrix} u \\ v \\ \theta \\ \pi \end{vmatrix},$$

ε_i — малые числа, выбираемые с учетом требуемой точности, G — область определения решений.

При выполнении условий (6.28) итерации заканчиваются, а метеовеличины, соответствующие итерации $v + 1$, принимаются в качестве прогностических значений на временном уровне $s + 1$. Многократное повторение рассмотренной процедуры позволяет осуществить прогноз метеовеличин на заданный момент времени.

4.6.5. Схемы интегрирования методом расщепления

Полные уравнения, лежащие в основе большинства современных прогностических моделей, описывают физические процессы, различающиеся пространственными и временными масштабами. Даже для систем полных уравнений в адиабатическом приближении, описывающих адвекцию и волновые процессы, трудно построить единую конечно-разностную схему и метод интегрирования по времени, которые бы в полной мере учитывали различия в свойствах этих процессов.

Указанные трудности могут быть преодолены с помощью метода расщепления, предложенного и развитого в работах Г. И. Марчука. Основная идея этого метода заключается в том, что сложное уравнение или система уравнений расщепляются на несколько простых уравнений или подсистем уравнений, решаемых последовательно на дробных шагах — интервалах времени, в сумме составляющих шаг по времени. Такой подход позволяет сложную задачу представить в виде конечного числа элементарных алгоритмов, эффективно реализуемых с использованием хорошо отработанных конечно-разностных схем.

Кроме того, метод расщепления дает возможность для каждого простого уравнения построить такие конечно-разностные схемы, которые учитывают пространственные и временные масштабы процессов, описываемых этими уравнениями.

Решение уравнения адвекции

В задачах прогноза погоды первостепенное значение имеет решение уравнения адвекции. Поэтому сначала рассмотрим применение метода расщепления для уравнения адвекции вида

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0, \quad (6.29)$$

где u , v , ω считаются известными величинами.

Построим конечно-разностную схему для этого уравнения на интервале времени, равном шагу по времени от t до $t + \Delta t$. Уравнение (6.29) расщепляют на три уравнения так, чтобы в каждом из них присутствовали производные только по одной пространственной переменной:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \omega \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0. \quad (6.30)$$

Уравнения системы (6.30) решаются на первой половине шага по времени, т. е. на интервале от t до $t + \Delta t/2$, который разбивается на три части (дробных шага), с помощью следующих неявных двух-точечных схем направленных разностей против потока:

$$\varphi_{i,j,k}^{s+\frac{1}{6}} = \varphi_{i,j,k}^s - \mu_i \begin{cases} \varphi_{i+1,j,k}^{s+\frac{1}{6}} - \varphi_{i,j,k}^{s+\frac{1}{6}} & \text{при } \mu_i < 0, \\ \varphi_{i,j,k}^{s+\frac{1}{6}} - \varphi_{i-1,j,k}^{s+\frac{1}{6}} & \text{при } \mu_i > 0; \end{cases} \quad (6.31)$$

$$\varphi_{i,j,k}^{s+\frac{2}{6}} = \varphi_{i,j,k}^{s+\frac{1}{6}} - \mu_j \begin{cases} \varphi_{i,j+1,k}^{s+\frac{2}{6}} - \varphi_{i,j,k}^{s+\frac{2}{6}} & \text{при } \mu_j < 0, \\ \varphi_{i,j,k}^{s+\frac{2}{6}} - \varphi_{i,j-1,k}^{s+\frac{2}{6}} & \text{при } \mu_j > 0, \end{cases} \quad (6.32)$$

$$\varphi_{i,j,k}^{s+\frac{1}{2}} = \varphi_{i,j,k}^{s+\frac{2}{6}} - \mu_k \begin{cases} \varphi_{i,j,k+1}^{s+\frac{1}{2}} - \varphi_{i,j,k}^{s+\frac{1}{2}} & \text{при } \mu_k < 0, \\ \varphi_{i,j,k}^{s+\frac{1}{2}} - \varphi_{i,j,k-1}^{s+\frac{1}{2}} & \text{при } \mu_k > 0, \end{cases} \quad (6.33)$$

где

$$\mu_i = \frac{\Delta t u_{i,j,k}}{2 \Delta x}, \quad \mu_j = \frac{\Delta t v_{i,j,k}}{2 \Delta y}, \quad \mu_k = \frac{\Delta t \omega_{i,j,k}}{2 \Delta \xi}.$$

Эти конечно-разностные схемы применяются последовательно так, что решение, полученное на предыдущем дробном шаге, используется в качестве начального условия для следующего дробного шага. В совокупности схемы (6.31)—(6.33) обеспечивают получение решения в момент времени $t + \Delta t/2$.

Поскольку в схемах (6.31)—(6.33) применяются направленные разности по времени и по пространству, то аппроксимация ими урав-

нения (6.29) имеет первый порядок точности. Эти схемы называются схемами предиктора.

Далее на интервале от t до $t + \Delta t$ решается уравнение (6.29) с помощью схемы центральных разностей

$$\varphi_{i,j,k}^{s+1} = \varphi_{i,j,k}^s - [\mu_i(\varphi_{i+1,j,k} - \varphi_{i-1,j,k}) + \mu_j(\varphi_{i,j+1,k} - \varphi_{i,j-1,k}) + \mu_k(\varphi_{i,j,k+1} - \varphi_{i,j,k-1})]^{s+\frac{1}{2}}, \quad (6.34)$$

которая аппроксимирует уравнение (6.29) со вторым порядком точности. Эта схема называется схемой корректора.

Рассмотрим подробнее решение системы уравнений (6.30). Поскольку все уравнения этой системы однотипны, рассмотрим решение только первого уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \quad (6.35)$$

Для простоты разобьем шаг по времени на два равных интервала от t до $t + \Delta t/2$ и от $t + \Delta t/2$ до $t + \Delta t$. На первом интервале (дробном шаге) от t до $t + \Delta t/2$ используется схема предиктора

$$\varphi_n^{s+\frac{1}{2}} = \varphi_n^s - \mu_n \begin{cases} \varphi_{n+1}^{s+\frac{1}{2}} - \varphi_n^{s+\frac{1}{2}} & \text{при } \mu_n < 0, \\ \varphi_n^{s+\frac{1}{2}} - \varphi_{n-1}^{s+\frac{1}{2}} & \text{при } \mu_n > 0, \end{cases} \quad (6.36)$$

где $n = \frac{x}{\Delta x}$, $\mu_n = \frac{\Delta t}{2} \frac{u_n}{\Delta x}$. Здесь индексы j и k опущены, а вместо индекса i используется индекс n , так как через i будет обозначаться $\sqrt{-1}$. Двухточечные схемы (6.36) можно формально записать в виде единой трехточечной схемы, объединяющей случаи $\mu_n < 0$ и $\mu_n > 0$:

$$a_n \varphi_{n-1}^{s+\frac{1}{2}} - 2b_n \varphi_n^{s+\frac{1}{2}} + c_n \varphi_{n+1}^{s+\frac{1}{2}} = -f_n, \quad (6.37)$$

где

$$a_n = |\mu_n| + \mu_n, \quad b_n = 1 + |\mu_n|, \quad c_n = |\mu_n| - \mu_n, \quad f_n = 2\varphi_n^s.$$

Схема (6.37), записанная для точек $n = 1, 2, \dots, N-1$, представляет собой систему алгебраических уравнений, в которых содержатся неизвестные $\varphi^{s+\frac{1}{2}}$ в трех соседних точках $n-1, n, n+1$. Матрица коэффициентов этой системы уравнений — трехдиагональная. В точках $n=0, n=N$ ставятся граничные условия φ_0, φ_N . Система уравнений с граничными условиями является замкнутой. Для решения таких систем уравнений применяется метод разностной факторизации (прогонки). Этот метод реализуется с помощью двух циклов вычислений, которые называются прогонками вперед и

назад. На прогонке вперед (индекс n возрастает, пробегая значения $n = 1, 2, \dots, N - 1$) рассчитываются вспомогательные величины

$$\beta_{n+1} = \frac{c_n}{2b_n - a_n\beta_n}, \quad \beta_1 = 0,$$

$$z_{n+1} = \frac{a_n z_n + f_n}{2b_n - a_n\beta_n}, \quad z_1 = \varphi_0 (n = 1, 2, \dots, N - 1).$$

На прогонке назад (индекс n убывает от $N - 1$ до 1) определяются искомые величины

$$\varphi_n^{s+\frac{1}{2}} = \beta_{n+1}\varphi_{n+1}^{s+\frac{1}{2}} + z_{n+1}; \quad \varphi_N = \varphi(x_N) (n = N - 1, N - 2, \dots, 1).$$

Нетрудно убедиться в том, что граничные условия в точках $n = 0$, $n = N$ будут использоваться только тогда, когда поток направлен внутрь области определения решений, т. е. если $u_1 > 0$, $u_{N-1} < 0$ ($\mu_1 > 0$, $\mu_{N-1} < 0$). В противных случаях ($\mu_1 < 0$, $\mu_{N-1} > 0$) граничные условия не используются. Метод прогонки устойчив, если $a_n + c_n \leq 2b_n$. Это условие выполняется, так как $a_n + c_n = 2|\mu_n|$, $2b_n = 2|\mu_n| + 2$.

Покажем, что аппроксимация уравнения (6.35) конечно-разностным уравнением (6.36) приводит к появлению эффекта счетной вязкости. Разложим решение уравнения (6.35) в ряды Тэйлора в окрестности точки $x = x_n$, $t = t_s$:

$$\begin{aligned} \varphi\left(x_n, t_s + \frac{\Delta t}{2}\right) &= \varphi(x_n, t_s) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_n \frac{\Delta t}{2} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)_n \frac{(\Delta t)^2}{4 \cdot 2} + \dots \\ \varphi\left(x_n \pm \Delta x, t_s + \frac{\Delta t}{2}\right) &= \varphi(x_n, t_s) \pm \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_n \Delta x + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_n \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_n \frac{\Delta t}{2} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)_n \frac{(\Delta t)^2}{4 \cdot 2} + \dots \end{aligned} \quad (6.38)$$

Из уравнения (6.35) следует, что

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (6.39)$$

Подставляя разложения (6.38) в конечно-разностное уравнение (6.37) и учитывая (6.39), получаем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} = v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (6.40)$$

где $v = u^2 \Delta t / 4 + |u| \Delta x / 2$ — коэффициент счетной вязкости. При получении уравнения (6.40) предполагалось, что отброшенные члены в разложениях (6.38) малы.

Таким образом, конечно-разностное уравнение (6.36) в действительности аппроксимирует не уравнение (6.35), а уравнение (6.40), которое описывает не только адвекцию, но и вязкость.

Для уточнения решения используется схема корректора второго порядка точности с центральными разностями, применение которой не приводит к появлению эффекта счетной вязкости.

Схема корректора для уравнения (6.35) записывается в следующем виде:

$$\varphi_n^{s+1} = \varphi_n^s - \mu_n \left(\varphi_{n+1}^{s+\frac{1}{2}} - \varphi_{n-1}^{s+\frac{1}{2}} \right). \quad (6.41)$$

Таким образом, применение схем предиктора и корректора обеспечивает получение решения в момент времени $t + \Delta t$. Аппроксимация уравнения (6.35) схемами предиктора и корректора имеет второй порядок точности.

Покажем, что комбинация схем (6.37) и (6.41) оказывается устойчивой. При этом будем полагать, что $\mu_n = \text{const}$. Пусть $\mu_n > 0$. В этом случае схема (6.37) имеет вид

$$\varphi_n^{s+\frac{1}{2}} = \varphi_n^s - \mu_n \left(\varphi_n^{s+\frac{1}{2}} - \varphi_{n-1}^{s+\frac{1}{2}} \right). \quad (6.42)$$

Из конечно-разностных схем (6.41) и (6.42) исключим неизвестную величину φ с дробным индексом $s + \frac{1}{2}$. Для этого запишем схему (6.42) для точек $n + 1$ и $n - 1$:

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}^{s+\frac{1}{2}} &= \varphi_{n+1}^s - \mu_n \left(\varphi_{n+1}^{s+\frac{1}{2}} - \varphi_n^{s+\frac{1}{2}} \right), \\ \varphi_{n-1}^{s+\frac{1}{2}} &= \varphi_{n-1}^s - \mu_n \left(\varphi_{n-1}^{s+\frac{1}{2}} - \varphi_{n-2}^{s+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Вычитая из первой формулы вторую, получаем:

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}^{s+\frac{1}{2}} - \varphi_{n-1}^{s+\frac{1}{2}} &= \varphi_{n+1}^s - \varphi_{n-1}^s - \mu_n \left(\varphi_{n+1}^{s+\frac{1}{2}} - \varphi_{n-1}^{s+\frac{1}{2}} \right) + \\ &+ \mu_n \left(\varphi_n^{s+\frac{1}{2}} - \varphi_{n-2}^{s+\frac{1}{2}} \right). \end{aligned} \quad (6.43)$$

Схему (6.41) запишем для точки $n - 1$: $\varphi_{n-1}^{s+1} = \varphi_{n-1}^s - \mu_n \left(\varphi_n^{s+\frac{1}{2}} - \varphi_{n-2}^{s+\frac{1}{2}} \right)$. Отсюда имеем:

$$\mu_n \left(\varphi_n^{s+\frac{1}{2}} - \varphi_{n-2}^{s+\frac{1}{2}} \right) = -(\varphi_{n-1}^{s+1} - \varphi_{n-1}^s). \quad (6.44)$$

Используя выражение (6.44) уравнение (6.43) представим в виде

$$\varphi_n^{s+1} - \varphi_n^s + \mu_n (\varphi_{n+1}^{s+1} - \varphi_{n-1}^s) + \mu_n (\varphi_{n+1}^s - \varphi_n^s) = 0. \quad (6.45)$$

Подставляя в уравнение (6.45) волновое решение вида $\varphi_n^{(s)} = \hat{\varphi}^0 \lambda^s e^{imn\Delta x}$ и сокращая результат на общий сомножитель $\hat{\varphi}^0 \lambda^s e^{imn\Delta x}$, получаем следующее выражение для множителя перехода:

$$\lambda = \frac{1 + \mu (1 - \cos m \Delta x) - i\mu \sin m \Delta x}{1 + \mu (1 - \cos m \Delta x) + i\mu \sin m \Delta x},$$

где $\lambda = \varphi_n^{s+1}/\varphi_n^s$. Поскольку модули комплексных чисел в числителе и знаменателе равны, то $|\lambda| = 1$. Это означает, что рассмотренная схема предиктор—корректор устойчива.

Решение системы уравнений

Рассмотрим применение метода расщепления для решения системы уравнений пространственной прогностической модели в ζ -системе координат следующего вида:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x} + lv + \left(\frac{g}{R\bar{T}}\right)^2 \frac{\partial}{\partial\zeta} k\zeta^2 \frac{\partial u}{\partial\zeta} + k_1 \nabla^2 u, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y} - lu + \left(\frac{g}{R\bar{T}}\right)^2 \frac{\partial}{\partial\zeta} k\zeta^2 \frac{\partial v}{\partial\zeta} + k_1 \nabla^2 v, \\ \frac{du}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial\zeta} &= 0, \\ \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{g} (\gamma_a - \gamma) \frac{\omega}{\zeta} &= \left(\frac{g}{R\bar{T}}\right)^2 \frac{\partial}{\partial\zeta} k\zeta^2 \frac{\partial T}{\partial\zeta} + k_1 \nabla^2 T \quad (\bar{T} = \bar{T}(\zeta)), \\ T &= -\frac{\zeta}{R} \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}.\end{aligned}\tag{6.46}$$

Граничные условия по вертикали имеют вид

$$\begin{aligned}u = v = 0, \quad \omega = \frac{1}{RT} \frac{\partial\Phi}{\partial t}, \quad k \frac{\partial T}{\partial\zeta} &= 0 \quad \text{при } \zeta = 1; \\ k\zeta^2 \frac{\partial u}{\partial\zeta} = k\zeta^2 \frac{\partial v}{\partial\zeta} = k\zeta^2 \frac{\partial T}{\partial\zeta} &= 0, \quad \omega = 0 \quad \text{при } \zeta = 0.\end{aligned}\tag{6.47}$$

Условие $\omega = \frac{1}{RT} \frac{\partial\Phi}{\partial t}$ соответствует условию $\rho\omega = 0$ ($\omega = dz/dt$) при $z = 0$. На боковых границах принимаем

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial T}{\partial t} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right) \right|_{\Gamma} = 0.\tag{6.48}$$

Расщепление системы уравнений (6.46) произведем, следуя Г. И. Марчуку (1967), с учетом основных факторов, определяющих эволюцию метеорологических полей. Прежде всего следует учесть адвекцию. При переносе (адвекции) воздушных масс происходит перестройка метеорологических полей, которая нарушает квазигеострофическое равновесие. Равновесие будет восстановлено посредством механизма адаптации. Для описания этого механизма следует решить уравнения адаптации, используя в качестве начальных данных метеовеличины, полученные в результате решения уравнений адвекции.

Адаптация полей достигается за счет дисперсии волн, генерируемых при нарушении квазигеострофического равновесия. После

адаптации полей с помощью механизма турбулентного обмена сглаживаются мелкомасштабные возмущения. Этот механизм описывается уравнениями, содержащими вязкие и диффузионные члены. В качестве начальных условий для решения этих уравнений используются поля метеовеличин, полученные в результате решения уравнений адаптации.

Таким образом, вместо непрерывной эволюции полей метеовеличин метод расщепления предусматривает последовательное дискретное описание этого процесса. Конечно, такое представление динамики атмосферных процессов является упрощенным. Однако оно учитывает основные факторы, определяющие эволюцию метеорологических полей. Очевидно, что чем меньше будет выбранный шаг по времени, тем точнее будет описываться эволюция полей.

Интервал времени, равный шагу по времени Δt , представим в виде суммы дробных шагов, полагая $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3$ ($\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3$). С учетом этого имеем

$$t + \Delta t = t + \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3,$$

$$(t + \Delta t)/\Delta t = s + 1 = s + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}.$$

В принципе дробные шаги могут быть разными, т. е. $\Delta t_1 \neq \Delta t_2 \neq \Delta t_3$.

В соответствии с приведенными выше соображениями система уравнений (6.46) расщепляется на три следующие подсистемы:

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{dT}{dt} = 0; \quad (6.49)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - lu, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{c^2}{R} \frac{\omega}{\xi}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \xi} &= 0, \quad T = -\frac{\xi}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (6.50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \left(\frac{g}{RT} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} k \xi^2 \frac{\partial u}{\partial \xi} + k_1 \nabla^2 u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \left(\frac{g}{RT} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} k \xi^2 \frac{\partial v}{\partial \xi} + k_1 \nabla^2 v, \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \left(\frac{g}{RT} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} k \xi^2 \frac{\partial T}{\partial \xi} + k_1 \nabla^2 T, \end{aligned} \quad (6.51)$$

где

$$c^2 = ((R^2 T)/g) (\gamma_a - \gamma), \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}.$$

Индивидуальные производные в уравнениях (6.49) записываются без членов, содержащих производные по ξ , так как для первых двух уравнений эти члены малы, а в третьем уравнении этот член отсутствует. Уравнения подсистемы (6.49) решаются с помощью схемы

предиктор — корректор, рассмотренной выше, на интервале времени от t до $t + \Delta t_1 + \Delta t_2$ (от s до $s + 2/3$). При этом используются боковые граничные условия (6.48). На первом дробном шаге (Δt_1) реализуются схемы предиктора, а затем полученные решения уточняются с помощью схемы корректора. В результате реализации схем предиктор—корректор получаются решения в момент времени $t + \Delta t_1 + \Delta t_2$, т. е. $u^{s+2/3}$, $v^{s+2/3}$, $T^{s+2/3}$, которые используются в качестве начальных условий для решения подсистемы (6.50).

Подсистема уравнений (6.50) решается на интервале времени от $t + 2/3 \Delta t$ до $t + \Delta t$ (от $s + 2/3$ до $s + 1$). Заменяя производные по времени конечными разностями, уравнения (6.50) представим в неявном виде

$$\begin{aligned} \frac{u^{s+1} - u^{s+\frac{2}{3}}}{\Delta t} - l v^{s+1} &= - \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial x}, \quad \frac{v^{s+1} - v^{s+\frac{2}{3}}}{\Delta t} + l u^{s+1} = - \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial y}, \\ \frac{T^{s+1} - T^{s+\frac{2}{3}}}{\Delta t} &= \frac{c^2}{R \zeta} \omega^{s+1}, \quad \frac{\partial u^{s+1}}{\partial x} + \frac{\partial v^{s+1}}{\partial y} + \frac{\partial \omega^{s+1}}{\partial \zeta} = 0, \\ T^{s+1} &= - \frac{\zeta}{R} \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial \zeta}. \end{aligned} \quad (6.52)$$

На основе системы уравнений (6.52) получим одно уравнение для Φ^{s+1} . Из первых двух уравнений находим

$$\begin{aligned} u^{s+1} &= \frac{1}{1 + (l \Delta t)^2} \left(u^{s+\frac{2}{3}} + l \Delta t v^{s+\frac{2}{3}} - l (\Delta t)^2 \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial y} - \right. \\ &\quad \left. - \Delta t \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial x} \right), \\ v^{s+1} &= \frac{1}{1 + (l \Delta t)^2} \left(v^{s+\frac{2}{3}} - l \Delta t u^{s+\frac{2}{3}} + \right. \\ &\quad \left. + l (\Delta t)^2 \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial x} - \Delta t \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (6.53)$$

Третье уравнение, используя уравнение статики, запишем в виде

$$\omega^{s+1} = - \frac{1}{\Delta t c^2} \left(\zeta^2 \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial \zeta} + R \zeta T^{s+\frac{2}{3}} \right). \quad (6.54)$$

Подставляя полученные выражения для всех трех составляющих скорости в уравнение неразрывности, получим уравнение для Φ^{s+1} :

$$\frac{\alpha}{\sqrt{c \Delta t}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial \zeta} \right) + \left(\frac{\partial^2 \Phi^{s+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi^{s+1}}{\partial y^2} - \Delta t \beta \frac{\partial \Phi^{s+1}}{\partial x} \right) = - F^{s+\frac{2}{3}}, \quad (6.55)$$

где

$$\alpha = 1 + (l \Delta t)^2, \quad \beta = \frac{\partial l}{\partial y},$$

$$F^{s+\frac{2}{3}} = \frac{R\alpha}{(c \Delta t)^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta}{c^2} T^{s+\frac{2}{3}} \right) - \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial u^{s+\frac{2}{3}}}{\partial x} + \frac{\partial v^{s+\frac{2}{3}}}{\partial y} \right) - \\ - l \left(\frac{\partial v^{s+\frac{2}{3}}}{\partial x} - \frac{\partial u^{s+\frac{2}{3}}}{\partial y} \right) + \beta u^{s+\frac{2}{3}}.$$

При получении уравнения (6.55) полагалось, что $\partial l / \partial x = 0$, $c^2 = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$. Уравнение (6.55) относительно Φ^{s+1} является линейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка эллиптического типа. Аппроксимируя производные отношениями конечных разностей, получаем конечно-разностный аналог этого уравнения:

$$\frac{\alpha}{c^2 (\Delta t)^2 \left(\zeta_{m+\frac{1}{2}} - \zeta_{m-\frac{1}{2}} \right)} \left[\zeta_{m+\frac{1}{2}}^2 \frac{(\Phi_{i,j,m+1}^{s+1} - \Phi_{i,j,m}^{s+1})}{\zeta_{m+1} - \zeta_m} - \right. \\ \left. - \zeta_{m-\frac{1}{2}}^2 \frac{(\Phi_{i,j,m}^{s+1} - \Phi_{i,j,m-1}^{s+1})}{\zeta_m - \zeta_{m-1}} \right] + \frac{1}{d^2} (\Phi_{i+1,j,m}^{s+1} + \Phi_{i-1,j,m}^{s+1} + \\ + \Phi_{i,j+1,m}^{s+1} + \Phi_{i,j-1,m}^{s+1} - 4\Phi_{i,j,m}^{s+1}) - \\ - \frac{\Delta t \beta_{i,j}}{d} (\Phi_{i+1,j,m}^{s+1} - \Phi_{i-1,j,m}^{s+1}) = -F_{i,j,m}^{s+\frac{2}{3}}, \quad (6.56)$$

где $i = x/\Delta x$, $j = y/\Delta y$; $\Delta x = \Delta y = d$; $m = \zeta/\Delta \zeta$, $F_{i,j,m}^{s+\frac{2}{3}}$ — конечно-разностный аналог правой части уравнения (6.55).

Записав конечно-разностное уравнение (6.56) для всех внутренних точек пространственной сетки в пределах области прогноза, приходим к системе линейных алгебраических уравнений для неизвестных величин Φ^{s+1} .

Система линейных уравнений с граничными условиями (6.47), (6.48), которые также записываются в конечно-разностном виде, оказывается замкнутой.

Для решения этой системы можно применить метод релаксаций. Используя полученные значения Φ^{s+1} , с помощью уравнений (6.53) определяются u^{s+1} и v^{s+1} . Затем с помощью уравнений неразрывности и статики системы (6.52) находятся ω^{s+1} и T^{s+1} .

Уравнения подсистемы (6.51) однотипны, и их можно записать в общем виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{g}{RT} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} k \zeta^2 \frac{\partial f}{\partial \zeta} + k_1 \nabla^2 f, \quad (6.57)$$

$$\text{где } f = \begin{vmatrix} u \\ v \\ T \end{vmatrix},$$

Для этого уравнения в качестве начальных условий используются решения уравнений адаптации, т. е. $f^s = f_1^{s+1}$, где $f_1^{s+1} = \begin{vmatrix} u_1^{s+1} \\ v_1^{s+1} \\ T_1^{s+1} \end{vmatrix}$ — решения уравнений адаптации.

Для решения уравнения (6.57) используется явная конечно-разностная схема:

$$\begin{aligned} f_{i,j,m}^{s+1} = & f_{i,j,m}^s + \\ & + \left(\frac{g}{RT_m^2} \right)^2 \frac{\Delta t k}{\zeta_{m+\frac{1}{2}} - \zeta_{m-\frac{1}{2}}} \left[\zeta_{m+\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{f_{i,j,m+1}^s - f_{i,j,m}^s}{\zeta_{m+1} - \zeta_m} \right) - \right. \\ & \left. - \zeta_{m-\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{f_{i,j,m}^s - f_{i,j,m-1}^s}{\zeta_m - \zeta_{m-1}} \right) \right] + \frac{k_1 \Delta t}{d^2} [f_{i+1,j,m}^s + f_{i-1,j,m}^s + \\ & + f_{i,j+1,m}^s + f_{i,j-1,m}^s - 4f_{i,j,m}^s], \end{aligned} \quad (6.58)$$

где $\bar{T}_m$ — зависит только от ζ .

С помощью этой схемы и граничных условий вычисляются u^{s+1} , v^{s+1} , T^{s+1} , а затем по уравнениям неразрывности и статики рассчитываются ω^{s+1} и Φ^{s+1} . Применение явной схемы для решения уравнений (6.51) допустимо, так как эффекты турбулентной вязкости и диффузии оказываются малыми.

В последние годы, наряду с сеточными (конечно-разностными) методами решения, традиционно используемыми в прогностических моделях, все шире применяются такие методы, в которых пространственная зависимость прогнозируемых метеовеличин (зависимых переменных) представляется в виде рядов по системам функций, обладающих определенными свойствами. В этом случае прогностическое уравнение или система прогностических уравнений в частных производных относительно зависимых переменных сводится к системам дифференциальных уравнений для коэффициентов разложения, зависящих от времени. При таком подходе искомыми величинами являются не значения прогнозируемых функций в узлах сетки точек, как в случае применения сеточных методов, а коэффициенты разложения рядов. Один из вариантов указанного метода в задачах численного прогноза погоды принято называть спектральным методом, а прогностические модели, в которых уравнения решаются спектральным методом, — спектральными моделями.

В большинстве спектральных моделей зависимость прогнозируемых функций от времени и от вертикальной координаты представляется в дискретной форме, а интегрирование по времени относительно коэффициентов разложения осуществляется методом шагов по времени. В этой главе будут рассмотрены вопросы, связанные с построением решений уравнений гидротермодинамики с помощью рядов. При этом в силу ограниченного объема книги мы не пытались дать описание конкретных моделей, основанных на использовании рядов, полагая что с ними студенты ознакомятся по книге С. А. Машковича «Спектральные модели общей циркуляции атмосферы и численного прогноза погоды».

5.1. Некоторые сведения о решении задачи прогноза погоды с помощью рядов

Спектральный метод, являясь одним из вариантов метода решения дифференциальных уравнений с помощью рядов, сводится к определению некоторых параметров — коэффициентов разложения или производных по времени от них. Поясним сущность этого метода на примере прогностического уравнения, в качестве которого возьмем уравнение адвекции

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial r} = 0, \quad (1.1)$$

где $f(t, r)$ — искомая скалярная функция; v — скорость переноса, которую пока будем считать постоянной.

Решение уравнения (1.1) будем строить для дискретных моментов времени $s = t/\Delta t$ (Δt — шаг по времени) методом шагов по времени в пределах области G , определенной на оси $r \in [0, 2\pi]$.

Потребуем, чтобы в области G решение удовлетворяло условию периодичности $f(t, r + 2\pi) = f(t, r)$.

Начальные значения функции $f(t_0, r)$ и искомые (прогностические) значения этой функции $f(t, r)$ представим рядом с конечным числом членов:

$$\bar{f}(t, r) = \sum_{m=0}^M f_m(t) u_m(r), \quad (1.2)$$

где $f_m(t)$ — искомые коэффициенты, зависящие от времени; $u_m(r)$ — базисные линейно независимые функции, зависящие от пространственных координат (в данном случае от r); M — число членов разложения. Начальные значения функции $f(t_0, r)$ представляются рядом (1.2) с коэффициентами $f_m(t_0)$. Базисные функции $u_m(r)$ должны быть периодическими, так как $f(r, t)$ периодична.

Поскольку в ряду (1.2) используется ограниченное число членов разложения, то он позволяет в принципе определить лишь приближенные значения функции $f(t, r)$, обозначаемые через $\bar{f}(t, r)$. Поэтому, если подставить ряд (1.2) в уравнение (1.1), то вместо нуля в правой части получится некоторая величина — невязка ε :

$$\sum_{m=0}^M \frac{df_m(t)}{dt} u_m(r) + v \sum_{m=0}^M f_m(t) \frac{du_m(r)}{dr} = \varepsilon. \quad (1.3)$$

В уравнении (1.3) в отличие от уравнения (1.1) фигурируют полные производные, так как коэффициенты $f_m(t)$ зависят только от t , а базисные функции $u_m(r)$ — только от r .

В зависимости от способа минимизации невязки ε различаются системы уравнений, носящие названия «определяющих», с помощью которых находятся искомые параметры. В рассматриваемом примере искомыми параметрами буду производные по времени от коэффициентов разложения, т. е. $df_m(t)/dt$.

При построении определяющих систем уравнений, используемых для нахождения параметров, применяются следующие методы.

Метод коллокации

Определяющая система уравнений строится с помощью условия $\varepsilon = 0$, задаваемого в n точках коллокации, равномерно размещенных в области определения решения G .

В этом случае (при $\varepsilon = 0$) выражение (1.3) записывается для каждой точки коллокации в виде

$$\sum_{m=0}^M \frac{df_m(t)}{dt} u_m(r_n) + v \sum_{m=0}^M f_m(t) \frac{du_m(r_n)}{dr} = 0, \quad n=0, 1, \dots, M. \quad (1.4)$$

Система этих выражений представляет собой определяющую систему уравнений для нахождения $df_m(t)/dt$, ($m = 0, 1, \dots, M$).

Метод наименьших квадратов

Определяющая система уравнений строится так, чтобы выполнялось условие

$$J = \int_G \varepsilon^2 dr = \min,$$

т. е. из условия экстремума для J :

$$\frac{\partial J}{\partial \left(\frac{df_m(t)}{dt} \right)} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M.$$

Метод Галеркина (метод ортогональных проекций)

Определяющая система уравнений получается из условий ортогональности невязки координатным (базисным) функциям:

$$\int_G \varepsilon u_m(r) dr = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M.$$

Нетрудно убедиться в том, что определяющие системы уравнений, получаемые по методу наименьших квадратов и по методу ортогональных проекций, идентичны и имеют вид

$$\int_G \left\{ \sum_{m=0}^M \frac{df_m(t)}{dt} u_m(r) + v \sum_{m=0}^M f_m(t) \frac{du_m(r)}{dr} \right\} u_k(r) dr = 0, \\ k = 0, 1, 2, \dots, M. \quad (1.5)$$

В общем случае решение определяющих систем уравнений требует обращения матриц. Однако этого можно избежать, если в качестве базисных используются ортогональные функции, удовлетворяющие условию

$$\int_G u_m(r) u_k(r) dr = \begin{cases} c_{mm}^2 & \text{при } m = k, \\ 0 & \text{при } m \neq k. \end{cases}$$

Если базисные функции $u_m(r)$ обладают свойством ортогональности, то отпадает необходимость обращения матриц, так как в этом случае

$$\frac{df_m(t)}{dt} = -\frac{1}{c_{mm}^2} \int_G v \sum_{m=0}^M f_m(t) \frac{du_m(r)}{dr} u_k(r) dr, \quad k = 0, 1, 2, \dots, M.$$

После определения $df_m(t)/dt$ вычисляются значения коэффициентов в момент времени $t + \Delta t$:

$$f_m(t + \Delta t) = f_m(t) + \frac{df_m(t)}{dt} \Delta t, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M,$$

а в результате применения процедуры шагов по времени рассчитываются коэффициенты на срок прогноза $f_m(t_n)$. Затем с помощью ряда (1.2) определяются прогностические поля функции $f(t_n, r)$. Таким образом, прогноз функции $f(t, r)$ с помощью рядов сводится к прогнозу коэффициентов разложения.

Выше была рассмотрена задача прогноза на основе уравнения (1.1), в котором скорость переноса v принималась постоянной. Если считать, что скорость переноса во времени и в пространстве меняется, т. е. $v(t, r)$, то при построении определяющей системы уравнений следует использовать разложение в ряд не только функции $f(t, r)$, но и скорости переноса:

$$\hat{v}(t, r) = \sum_{m=0}^M v_m(t) u_m(r).$$

В этом случае определяющая система уравнений для $df_m(t)/dt$, построенная по методу Галеркина, имеет вид

$$\int_G \left\{ \sum_{m=0}^M \frac{df_m(t)}{dt} u_m(r) + \sum_{m=0}^M v_m(t) u_m(r) \sum_{m=0}^M f_m(t) \frac{du_m(r)}{dr} \right\} \times \\ \times u_k(r) dr = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, M. \quad (1.6)$$

При этом коэффициенты $v_m(t)$ определяются с помощью уравнения движения, которое, так же как уравнение (1.1), решается с помощью рядов с соответствующими начальными и граничными условиями. Вполне естественно, что совокупность уравнений для функций $f(t, r)$ и $v(t, r)$ должна представлять замкнутую систему уравнений.

В рассмотренном примере решение строилось для уравнения (1.1), в котором под знаком производной по времени стояла искомая функция, т. е. тождественный оператор.

В задачах прогноза приходится иметь дело с прогностическими уравнениями, которые могут быть записаны в следующем общем виде:

$$\frac{\partial \mathcal{L}[f_i(t, r)]}{\partial t} = F_i(f_i), \quad i = 1, 2, \dots, I, \quad (1.7)$$

где r — любая пространственная независимая переменная ($x, y, z, \zeta(p)$); $\mathcal{L}$ — линейный дифференциальный оператор по пространственным независимым переменным, действующий на зависимые переменные f_i (число которых равно I); F_i — линейные и нелинейные члены прогностических уравнений, не содержащие производных по времени. Если прогностическая модель строится на основе полных уравнений гидротермодинамики, то оператор $\mathcal{L}$ является тождественным: $\mathcal{L}(f_i) \equiv f_i$. В квазигеострофических и квазисоленоидальных моделях $I = 1$, так как в этих моделях одна зависимая переменная (геопотенциал или функция тока), а $\mathcal{L}$ является двумерным (для баротропных моделей) или трехмерным (для бароклинических моделей) эллиптическим оператором.

Если оператор $\mathcal{L}$ нетождественный, то определяющая система уравнений, получаемая по методу Галеркина для (1.7) при $I = 1$ имеет вид

$$\int_G \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L} \left[\sum_{m=0}^M f_m(t) u_m(r) \right] - F \left[\sum_{m=0}^M f_m(t) u_m(r) \right] \right\} \times u_k(r) dr = 0,$$

или

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^M \frac{df_m(t)}{dt} \int_G \mathcal{L} [u_m(r) u_k(r)] dr - \\ & - \int_G F \left[\sum_{m=0}^M f_m(t) u_m(r) \right] u_k(r) dr = 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, M.$$

При получении системы (1.8) использовалось разложение (1.2) Система уравнений (1.8) в общем случае нелинейна.

Прежде чем приступить к более полному рассмотрению методов решения задачи прогноза погоды с помощью разложения зависимых переменных в ряды, сформулируем некоторые установившиеся в литературе понятия.

Прогностические модели, в которых решение уравнений строится с помощью разложений по ортогональным базисным функциям с минимизацией невязки по методу наименьших квадратов или по методу ортогональных проекций (метод Галеркина), принято называть спектральными. Если же для построения определяющей системы уравнений используется метод коллокации, то прогностические модели называют псевдоспектральными. Термин «спектральный» отражает тот факт, что множество коэффициентов разложения зависимых переменных в ряды рассматривается в качестве их спектров.

В последние годы уделяется значительное внимание моделям, в которых для решения прогностических уравнений применяется метод конечных элементов. В этих моделях область прогноза разбивается на конечное число подобластей, называемых элементами, для каждой из которых строятся простые функции, аппроксимирующие зависимые переменные в пределах подобластей, но так, чтобы аппроксимация для всей области прогноза была непрерывной. Построение определяющих систем уравнений в таких моделях может выполняться любым из рассмотренных методов, т. е. методом наименьших квадратов, Галеркина или методом коллокации.

В заключение заметим, что при использовании рядов для решения прогностических уравнений, так же как и в случае применения метода сеток, задача сводится к определению конечного числа параметров. При этом искомыми параметрами являются производные по времени для коэффициентов разложения, а вычисляются эти параметры путем решения определяющих систем уравнений. Так как

в этих уравнениях содержится конечное число базисных функций и искоемых параметров, то их принято называть пространственно усеченными.

5.2. Базисные функции, используемые в спектральных моделях.

Разложение в ряды по базисным функциям

Как отмечалось выше, чтобы избежать обращения матриц при решении определяющих систем уравнений, в качестве базисных целесообразно использовать линейно-независимые ортогональные функции.

Если базисные функции ортогональны, т. е.

$$\int_G u_m(r) u_k(r) dr = \begin{cases} c_{mm}^2 & \text{при } m = k, \\ 0 & \text{при } m \neq k, \end{cases} \quad (2.1)$$

то можно получить ортонормированные базисные функции

$$\tilde{u}_m(r) = c_{mm}^{-1} u_m(r), \quad (2.2)$$

которые удовлетворяют условиям

$$\int_G \tilde{u}_m(r) \tilde{u}_k(r) dr = \begin{cases} 1 & \text{при } m = k, \\ 0 & \text{при } m \neq k. \end{cases} \quad (2.3)$$

Базисные функции должны удовлетворять краевым условиям, используемым при решении прогностических уравнений. В этом случае решение задачи, полученное с помощью рядов, будет удовлетворять условиям на границах для прогностических уравнений.

Ряды, членами которых являются базисные функции, должны быть сходящимися:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^M f_m(t) u_m(r) = f(t, r).$$

Если с помощью рядов предполагается решать прогностическое уравнение или систему вида (1.7), в которых $\mathcal{L}$ представляет собой нетождественный линейный дифференциальный оператор, то в качестве базисных функций целесообразно использовать собственные функции этого оператора.

Собственные функции $u_m(r)$ линейного дифференциального оператора удовлетворяют уравнению

$$\mathcal{L}[u_m(r)] = \lambda_m u_m(r), \quad (2.4)$$

где λ_m — собственные числа.

Система собственных функций должна быть ортогональной и полной в области G .

В большинстве прогностических моделей, в которых решение строится с помощью рядов, сохраняют конечно-разностное представление производных по времени и по вертикальной координате, а разложение в ряды осуществляется по базисным функциям, зависящим только от горизонтальных координат. Здесь будут рассматриваться только такие модели.

5.2.1. Тригонометрические функции

В качестве базисных функций удобно использовать тригонометрические функции, которые линейно независимы, ортогональны и периодичны.

Тригонометрические функции образуют полную ортогональную систему. Для достаточно гладких функций ряды Фурье с тригонометрическими функциями обладают хорошей сходимостью. При использовании тригонометрических функций в качестве базисных ряд (1.2) записывается в виде

$$\bar{f}(t, r) = \frac{f_0^c(t)}{2} + \sum_{m=1}^M [f_m^c(t) \cos mr + f_m^s(t) \sin mr],$$

где $m = 2\pi/L$, L — длина волны.

Если иметь в виду построение решения для уравнения (1.1), то, полагая, что v — составляющая скорости, направленная на восток по кругу широты длиной L , а r — расстояние вдоль круга широты, удобно ввести вместо r долготу $\lambda = 2\pi/L r$ и угловую скорость $\omega = (2\pi/L) v$. При $v = \text{const}$ $\omega = \text{const}$.

В этом случае уравнение (1.1) записывается в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \omega \frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0, \quad (2.5)$$

где $f(\lambda, t)$ — периодическая функция с периодом 2π :

$$f(\lambda, t) = f(\lambda + 2\pi n, t).$$

Усеченный ряд Фурье для $f(\lambda, t)$ имеет вид

$$\bar{f}(\lambda, t) = \frac{f_0^c(t)}{2} + \sum_{m=1}^M [f_m^c(t) \cos m\lambda + f_m^s(t) \sin m\lambda], \quad (2.6)$$

где $f_m^c(t) \cos m\lambda + f_m^s(t) \sin m\lambda$ — компоненты Фурье, m — зональное волновое число (число волн на круге широты), M — максимальное волновое число. Общее число членов ряда (2.6) равно $N = 2M + 1$, включая $f_0^c(t)$. С помощью формул Эйлера

$$\cos m\lambda = \frac{e^{im\lambda} + e^{-im\lambda}}{2}, \quad \sin m\lambda = \frac{e^{im\lambda} - e^{-im\lambda}}{2i}$$

ряд (2.6) можно записать более компактно:

$$\bar{f}(\lambda, t) = \sum_{m=-M}^M f_m(t) e^{im\lambda}, \quad (2.7)$$

где

$$f_0^s(t) = 0, \quad f_m(t) = \frac{1}{2} [f_m^s(t) - if_m^c(t)] \quad \text{при } m > 0,$$

$$f_m(t) = \frac{1}{2} [f_m^s(t) + if_m^c(t)] \quad \text{при } m < 0.$$

Так как функция $f(\lambda, t)$ является вещественной, то для ее представления в ряду (2.7) достаточно ограничиться членами с $0 \leq m = M$:

$$\tilde{f}(\lambda, t) = \sum_{m=0}^M f_m(t) e^{im\lambda}. \quad (2.8)$$

Условие ортогональности для функций $e^{im\lambda}$ имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\lambda} e^{im_1\lambda} d\lambda = \begin{cases} 1 & \text{при } m = m_1, \\ 0 & \text{при } m \neq m_1, \end{cases} \quad (2.9)$$

с помощью которого вычисляются коэффициенты разложения

$$f_m(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda, t) e^{-im\lambda} d\lambda. \quad (2.10)$$

5.2.2. Сферические функции.

Разложение по сферическим функциям

При описании атмосферных процессов, протекающих на Земле, обычно используют сферические координаты. Если система уравнений модели записана так, что вертикальные производные аппроксимированы конечными разностями, то в такой системе зависимость от вертикальной координаты будет параметрической, а прогностические переменные будут функциями только географического положения и времени. Для глобальных моделей в качестве базисных функций удобно выбрать сферические функции, которые непрерывны и определены всюду на сфере. Разложения в ряды по сферическим функциям достаточно гладких функций сходятся довольно быстро. Даже если в отдельных точках имеется разрыв, то сходимость рядов всегда будет обеспечена, хотя и хуже, чем при отсутствии разрывов. А главное, представления таких полей с помощью разложений по сферическим функциям будут давать гладкие поля, т. е. сглаживать разрывы. Поэтому при выборе формы уравнений модели необходимо стремиться к тому, чтобы они не содержали переменных, для которых имеются точки разрыва. В сферических координатах такими точками разрыва являются полюса, в которых вектор горизонтального ветра непрерывен, а его составляющие u и v терпят разрыв.

Для того чтобы преодолеть эту трудность, используют два приема. Первый прием состоит в том, что составляющие ветра u и v пред-

ставляют с помощью функции тока ψ и потенциала χ и вместо обычных уравнений движения для составляющих u и v используют уравнение для вихря скорости ($\Omega = \nabla^2 \psi$) и уравнение для двумерной дивергенции ($D = \nabla^2 \chi$).

Второй прием сводится к тому, что в исходные уравнения движения вводятся новые функции

$$U = u \cos \varphi, \quad V = v \cos \varphi, \quad (2.11)$$

которые на полюсах обращаются в нуль; поля таких функций оказываются уже непрерывными. В формулах (2.11) φ — географическая широта.

Первый прием на практике используется чаще.

Предположим, что наша прогностическая задача имеет решение, непрерывное вместе со своими вторыми производными на всей сфере. Тогда оно может быть представлено бесконечным рядом по сферическим функциям, который сходится абсолютно и равномерно. Формально разложение, например, функции тока $\psi(\lambda, \mu, t)$ в ряд по сферическим функциям представляется следующим образом:

$$\psi(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \psi_{m,n}(t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (2.12)$$

где Y_n^m — сферическая функция порядка m и степени n , λ — долгота, $\mu = \sin \varphi$ — гауссова широта, φ — географическая широта.

Сферические функции являются полной системой собственных функций уравнения Гельмгольца на сфере следующего вида:

$$\nabla^2 Y_n^m + \frac{n(n+1)}{a^2} Y_n^m = 0, \quad (2.13)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right),$$

a — радиус Земли.

Сферические функции выражаются через другие ортогональные функции:

$$Y_n^m(\lambda, \mu) = P_n^m(\mu) e^{im\lambda}, \quad (2.14)$$

где $P_n^m(\mu)$ — нормированные присоединенные функции (полиномы) Лежандра. Эти функции затабулированы, а в случае необходимости их нетрудно вычислять на ЭВМ по специальным рекуррентным формулам. Выпишем некоторые из этих формул — они понадобятся нам в последующем:

$$(1 - \mu^2) \frac{dP_n^m}{d\mu} = (n+1) D_{m,n} P_{n-1}^m - n D_{m,n+1} P_{n+1}^m, \quad (2.15)$$

$$\mu P_n^m = D_{m,n+1} P_{n+1}^m + D_{m,n} P_{n-1}^m, \quad (2.16)$$

где

$$D_{m,n} = \left(\frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1} \right)^{1/2}. \quad (2.16')$$

Полиномы Лежандра, а следовательно, и сферические функции обладают рядом свойств. Функция P_n^m определена для всех целых значений m, n при $n \geq |m|$, откуда следует:

$$P_n^{-m}(\mu) = (-1)^m P_n^m(\mu). \quad (2.17)$$

Воспользовавшись выражением (2.14), получим аналог (2.17) для сферических функций в виде

$$Y_n^{-m} = (-1)^m Y_n^m, \quad (2.18)$$

где чертой обозначена комплексно-сопряженная функция:

$$\overline{Y}_n^m(\lambda, \mu) = P_n^m(\mu) e^{-im\lambda}. \quad (2.19)$$

Сферические функции с $m \geq 0$ симметричны относительно экватора, если $n - m$ — четное, и антисимметричны, если $n - m$ — нечетное. При этом $n - m$ равно числу нулевых точек по φ между Северным и Южным полюсом. Сферические функции обращаются в нуль на полюсах при $m \neq 0$ и отличны от нуля при $m = 0$. В последнем случае $Y_n^0 = P_n(\mu)$ — обычные полиномы Лежандра. Сферические функции ортогональны, т. е.

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 Y_n^m(\lambda, \mu) \overline{Y}_{n'}^{m'}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = \begin{cases} 1 & \text{при } \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}, \\ 0 & \text{при } \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (2.20)$$

С помощью условий ортогональности (2.20) определяются коэффициенты ряда (2.12)

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \psi(\lambda, \mu, t) \overline{Y}_n^m(\lambda, \mu) d\mu d\lambda. \quad (2.21)$$

На практике удобнее формулу (2.21) заменить на эквивалентные формулы

$$\psi_m(\mu, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\lambda, \mu, t) e^{-im\lambda} d\lambda, \quad (2.22)$$

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \psi_m(\mu, t) P_n^m(\mu) d\mu. \quad (2.23)$$

Выражение (2.22) представляет собой обычное разложение в ряд Фурье вдоль кругов широт, а в формуле (2.23) осуществляется

Рис. 5.1. Диаграмма m, n .

интегрирование коэффициентов ряда Фурье по μ с весами $P_n^m(\mu)$.

Компоненты ряда (2.12) условно можно представить как совокупность точек в заштрихованной области на диаграмме в плоскости m, n (рис. 5.1).

Из диаграммы видно, что ряд (2.12) эквивалентен следующему ряду:

$$\psi(\lambda, \mu, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \psi_{m, n}(t) Y_n^m(\lambda, \mu). \quad (2.24)$$

5.2.3. Усечение бесконечных рядов

В применении к глобальным моделям всегда используются пространственно усеченные ряды. При этом, естественно, спектральное представление будет приближенным. Поскольку ряды по сферическим функциям содержат два индекса, то форма усечения рядов может быть различной. На основе ряда (2.24) можно проиллюстрировать один из распространенных типов усечения, а именно треугольное усечение. В ряде (2.24) суммирование по n можно ограничить числом N . Соответственно этому ряд (2.12) представляется в виде

$$\hat{\psi}(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \psi_{m, n} Y_n^m(\lambda, \mu). \quad (2.25)$$

В таком представлении число членов второй суммы линейно убывает при увеличении m . Если потребовать, чтобы величина m была ограниченной значением M , а число членов суммы по n в (2.12) было постоянным для всех m , то в таком случае ряд (2.12) будет выглядеть следующим образом:

$$\hat{\phi}(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^{|m|+J} \psi_{m, n}(t) Y_n^m(\lambda, \mu). \quad (2.26)$$

В ряду (2.26) использовано так называемое параллелограммное усечение. Обычно M выбирают равным J . Тогда усечение называют ромбоидальным. Естественно, выбор типов усечений на этом не ограничивается. Он может меняться в зависимости от решаемой задачи. Во всех этих процедурах остается пока открытым вопрос об оптимальности усечения. Поскольку это трудный вопрос, то единственным средством, определяющим достоинства и недостатки раз-

личных типов усечения могут быть практические расчеты. Эксперименты показывают, что при одинаковом числе членов ряда при ромбоидальном усечении разрешение в высоких широтах лучше, а в низких хуже, чем при треугольном усечении, которое дает равномерное разрешение на всей сфере. В этом заключается преимущество треугольного усечения по сравнению с ромбоидальным.

5.3. Применение спектрального метода для решения уравнения вихря скорости

5.3.1. Решение уравнения вихря скорости спектральным методом

В условиях бездивергентного потока его скорость определяется функцией тока ψ . В силу этого уравнение вихря скорости будет содержать одну неизвестную функцию ψ ; его можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \frac{2\omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \frac{1}{a^2} J(\psi, \nabla^2 \psi), \quad (3.1)$$

где $J(\alpha, \beta) = \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \frac{\partial \beta}{\partial \lambda} - \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} \frac{\partial \beta}{\partial \mu}$ — якобиан.

Уравнение (3.1) записано таким образом, чтобы нелинейный член находился справа. Решая это уравнение с помощью разложения в ряд по сферическим функциям, необходимо выбрать определенный тип усечения этого ряда, так как некоторые выводы, вытекающие из методики решения, существенно зависят от того, какой тип усечения выбран. Применим треугольный тип усечения и будем искать решение уравнения (3.1) в виде

$$\hat{\psi}(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \psi_{m,n}(t) Y_n^m(\lambda, \mu). \quad (3.2)$$

На сферической Земле этот усеченный ряд удовлетворяет условиям периодичности и особенностям на полюсах, но не удовлетворяет точно самому дифференциальному уравнению, если коэффициенты ряда отличны от нуля.

Подставляя ряд (3.2) в левую часть уравнения (3.1), получаем для линейных членов уравнения ряд следующего вида:

$$\frac{\partial \nabla^2 \hat{\psi}}{\partial t} + \frac{2\omega}{a^2} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \lambda} = \frac{1}{a^2} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \left[-n(u+1) \frac{d\psi_{m,n}}{dt} + 2im\omega \varphi_{m,n} \right] Y_n^m. \quad (3.3)$$

Рассмотрим теперь нелинейный член. Подставив в него ряд (3.2), получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} J(\hat{\psi}, \nabla^2 \hat{\psi}) = & -\frac{1}{a^2} \left\{ \left[\sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N \psi_{m_1, n_1} \frac{\partial Y_{n_1}^{m_1}}{\partial \mu} \right] \times \right. \\ & \times \left[\sum_{m_2=-N}^N \sum_{n_2=|m_2|}^N i m_2 \psi_{m_2, n_2} \frac{n_2(n_2+1)}{a^2} Y_{n_2}^{m_2} \right] - \\ & - \left[\sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N i m_1 \psi_{m_1, n_1} Y_{n_1}^{m_1} \right] \times \\ & \times \left. \left[\sum_{m_2=-N}^N \sum_{n_2=|m_2|}^N \frac{n_2(n_2+1)}{a^2} \psi_{m_2, n_2} \frac{\partial Y_{n_2}^{m_2}}{\partial \mu} \right] \right\} = \\ = & -\frac{1}{a^4} \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N \sum_{m_2=-N}^N \sum_{n_2=|m_2|}^N i \psi_{m_1, n_1} \psi_{m_2, n_2} W_{n_1 n_2}^{m_1 m_2}, \quad (3.4) \end{aligned}$$

где

$$W_{n_1 n_2}^{m_1 m_2} = n_2(n_2+1) \left[m_2 Y_{n_2}^{m_2} \frac{\partial Y_{n_1}^{m_1}}{\partial \mu} - m_1 Y_{n_1}^{m_1} \frac{\partial Y_{n_2}^{m_2}}{\partial \mu} \right]. \quad (3.5)$$

Выражение (3.4) можно записать в симметричной форме. Для этого поменяем в нем индексы m_1 на m_2 и n_1 на n_2 . Полученное таким образом выражение сложим с выражением (3.4) и результат разделим на 2. В итоге получим

$$\frac{1}{a^2} J(\hat{\psi}, \nabla^2 \hat{\psi}) = -\frac{1}{a^4} \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N \sum_{m_2=-N}^N \sum_{n_2=|m_2|}^N i \psi_{m_1, n_1} \psi_{m_2, n_2} \tilde{W}_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}, \quad (3.6)$$

где

$$\tilde{W}_{n_1, n_2}^{m_1, m_2} = \frac{1}{2} [n_2(n_2+1) - n_1(n_1+1)] \left(m_1 Y_{n_1}^{m_1} \frac{\partial Y_{n_2}^{m_2}}{\partial \mu} - m_2 Y_{n_2}^{m_2} \frac{\partial Y_{n_1}^{m_1}}{\partial \mu} \right). \quad (3.7)$$

В то же время, учитывая квадратичность нелинейных членов, их можно представить как разложение в следующий ряд:

$$J(\hat{\psi}, \nabla^2 \hat{\psi}) = \sum_{m=-2(N-1)}^{2(N-1)} \sum_{n=|m|}^{2(N-1)} J_{m, n} Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (3.8)$$

где

$$J_{m, n} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 J(\hat{\psi}, \nabla^2 \hat{\psi}) \bar{Y}_n^m(\lambda, \mu) d\lambda d\mu. \quad (3.9)$$

Заметим, что ряды (3.3) и (3.8) усечены. Следовательно, после подстановки этих рядов в уравнение (3.1) появится невязка. Применяя процедуру минимизации по методу Галеркина, получаем систему уравнений следующего вида:

$$\frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \left[-n(n+1) \frac{d\psi_{m,n}}{dt} + 2im\omega\psi_{m,n} \right] Y_n^m + \sum_{m=2}^{2(N-1)} \sum_{h=|m|}^{2(N-1)} J_{m,n} Y_n^m \right\} \bar{Y}_n^m d\lambda d\mu = 0, \quad (3.10)$$

где m_1 и n_1 пробегает все значения m и n соответственно. Отсюда получаем следующую усеченную систему спектральных уравнений:

$$u(n+1) \frac{d\psi_{m,n}}{dt} - 2im\omega\psi_{m,n} = -J_{m,n} \quad (3.11)$$

при $0 \leq |m| < n \leq N$.

В линейных членах учтены все члены разложения, а в нелинейных, как видно из системы (3.10), члены с $N < n \leq 2(N-1)$ зануляются. Следовательно, если усеченный ряд точно воспроизводит функцию ψ на системе точек дискретной географической сетки, то в спектральной системе (3.11) не будут появляться гармоники ложного представления, т. е. такие гармоники, которые невозможно представить на данной сетке. Это исключает появление нелинейной неустойчивости. Система (3.11) обладает еще одним важным свойством. Для нее, так же как и для дифференциального уравнения (3.1), сохраняются такие интегральные инварианты, как угловой момент, кинетическая энергия и энтропия.

5.3.2. Метод взаимодействия коэффициентов

При решении системы (3.11) наибольшие трудности возникают при вычислении нелинейных членов. Для их вычисления существует несколько методов. Первый из них был предложен Зильберманом. Смысл его заключается в следующем. Подставив выражение (3.6) в формулу (3.9), получим:

$$J_{m,n} = -\frac{1}{a^4} \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N \sum_{m_2=-N}^N \sum_{n_2=|m_2|}^N i\psi_{m_1,n_1} \psi_{m_2,n_2} \tilde{W}_{nn_1n_2}^{mm_1m_2}, \quad (3.12)$$

где

$$\tilde{W}_{nn_1n_2}^{mm_1m_2} = \begin{cases} \frac{1}{2} [n_2(n_2+1) - n_1(n_1+1)] \int_{-1}^1 \left[P_n^m \left(m_1 P_{n_1}^{m_1} \frac{dP_{n_2}^{m_2}}{d\mu} - \right. \right. \\ \left. \left. - m_2 P_{n_2}^{m_2} \frac{dP_{n_1}^{m_1}}{d\mu} \right) \right] d\mu & \text{при } m = m_1 + m_2, \\ 0 & \text{при } m \neq m_1 + m_2. \end{cases} \quad (3.13)$$

Операторы $\tilde{W}_{nn_1 n_2}^{mm_1 m_2}$ называют коэффициентами взаимодействия. Это название отражает тот факт, что каждый коэффициент описывает вклад в общем ряде произведений коэффициентов разложения различных комбинаций. Приемы, с помощью которых по выражениям (3.13) определяются коэффициенты взаимодействия, равные нулю, называются правилами отбора.

Недостатком рассмотренного метода решения, названного методом взаимодействия коэффициентов, является необходимость хранить большое число коэффициентов взаимодействия в памяти ЭВМ. Несмотря на то что разработаны правила отбора, позволяющие уменьшать массив коэффициентов взаимодействия, все же трудоемкость метода взаимодействия коэффициентов остается, и она тем больше, чем выше разрешение спектральной модели.

5.3.3. Метод спектрально-сеточного преобразования

В тех случаях, когда необходимо увеличить горизонтальное разрешение модели, применение метода коэффициентов взаимодействия может оказаться затруднительным из-за большого объема вычислений, связанных с расчетами коэффициентов взаимодействия, и объема памяти ЭВМ для их хранения. Для преодоления этих трудностей используется метод спектрально-сеточного преобразования, который называют также просто методом преобразования. При использовании этого метода решение тоже представляется в виде рядов по базисным (ортогональным) функциям, которые используются и при применении метода взаимодействия коэффициентов, но нелинейные члены вычисляются сеточно, т. е. в узлах пространственной (двумерной) географической сетки точек. Затем полученные сеточные значения нелинейных членов представляются в виде ряда по базисным функциям.

В случае уравнения (3.1) метод преобразования реализуется следующим образом. В этом уравнении нелинейные члены, описывающие адвекцию, обозначим через $f(\lambda, \mu)$:

$$f(\lambda, \mu) = J(\psi, \nabla^2 \psi). \quad (3.14)$$

Задача заключается в вычислении функции $f(\lambda, \mu)$ в узлах сетки точек, а затем в представлении ее усеченным рядом по сферическим функциям:

$$\hat{f}(\lambda, \mu) = \sum_m \sum_n f_{m, n}(t) e^{im\lambda} P_n^m(\mu), \quad (3.15)$$

где

$$f_{m, n}(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \hat{f}(\lambda, \mu, t) e^{-im\lambda} P_n^m(\mu) d\mu d\lambda, \quad (3.16)$$

или

$$f_m(\mu, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{f}(\lambda, \mu, t) e^{-im\lambda} d\lambda;$$

$$f_{m, n}(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_m(\mu, t) P_n^m(\mu) d\mu. \quad (3.17)$$

Пусть функция тока ψ представлена усеченным рядом

$$\hat{\psi}(\lambda, \mu, t) = \sum_m \sum_n \psi_{m, n}(t) e^{-im\lambda} P_n^m(\mu), \quad (3.18)$$

коэффициенты которого $\psi_{m, n}(t)$ известны.

Если подставить ряд (3.18) в правую часть выражения (3.14), то, зная коэффициенты $\psi_{m, n}(t)$, можно вычислить $J(\psi, \nabla^2 \psi)$ в узлах сетки, задавая их координаты λ_j, μ_k (здесь j и k — индексы точек сетки). При этом используются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \nabla^2 (e^{im\lambda} P_n^m) &= -n(n+1) e^{im\lambda} P_n^m, \\ \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \lambda} &= i \sum_m \sum_n m \psi_{m, n} P_n^m(\mu) e^{im\lambda}, \\ (1 - \mu^2) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \mu} &= - \sum_m \sum_n \psi_{m, n} (1 - \mu^2) \frac{dP_n^m}{d\mu} e^{im\lambda}, \\ (1 - \mu^2) \frac{dP_n^m}{d\mu} &= (n+1) D_{m, n} P_{n-1}^m - n D_{m, n+1} P_{n+1}^m, \\ \frac{\partial \nabla^2 \hat{\psi}}{\partial \lambda} &= - \sum_m \sum_n imn(n+1) \psi_{m, n}(t) e^{im\lambda} P_n^m, \\ (1 - \mu^2) \frac{\partial \nabla^2 \hat{\psi}}{\partial \mu} &= - \sum_m \sum_n f_{m, n} n(n+1) e^{im\lambda} [n D_{m, n+1} - \\ &\quad - (n+1) D_{m, n} P_{n-1}^m], \end{aligned}$$

где

$$D_{m, n} = \left(\frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Затем полученные сеточные значения представляются усеченным рядом (3.15). Коэффициенты этого ряда вычисляются по формулам (3.16) или (3.17), в которых интегралы приходится вычислять численно с помощью квадратурных формул, так как величины f заданы сеточно. Эти формулы имеют следующий вид:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda, \mu, t) e^{-im\lambda} d\lambda \cong \frac{1}{J} \sum_{j=1}^K \hat{f}_{j, k} e^{-im\lambda_j}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (3.19)$$

$$\int_{-1}^1 f_m(\mu, t) P_n^m(\mu) d\mu \cong \sum_{k=1}^K \frac{2(1 - \mu_k^2)}{[K P_{k-1}(\mu_k)]^2} f_m(\mu_k, t) P_n^m(\mu_k), \quad (3.20)$$

где μ_k — корни полинома Лежандра $P_k(\mu)$.

За счет приближенного (численного) вычисления интегралов при использовании метода преобразования могут возникать ошибки. Метод преобразования применяется многократно в процессе реализации модели, поэтому ошибки приближенного вычисления интегралов могут исказить результаты решения задачи прогноза. Для того чтобы избежать этого, применяют формулы численного интегрирования с использованием большого числа узлов сетки. Проведенные исследования показали, что если используется достаточно большое число точек по λ и μ , обеспечивающее высокую точность квадратурных формул (3.19) и (3.20), то метод преобразования дает значительный выигрыш в числе операций и в объеме памяти по сравнению с методом взаимодействия. Таким образом, метод преобразования имеет определенные преимущества в вычислительном отношении по сравнению с методом коэффициентов взаимодействия в тех случаях, когда прибегают к высокому разрешению по пространству (т. е. когда используются пространственно-усеченные ряды с большим числом членов разложения).

5.4. Применение спектрального метода к моделям, основанным на полных уравнениях

Существует особенность в применении спектральных разложений в зависимости от того, какую конкретно систему уравнений используют в модели. Для системы уравнений, в которой уравнения движения записаны для скоростей, возникает трудность спектрального представления поля скорости. Это связано с тем, что компоненты вектора горизонтальной скорости на полюсах терпят разрыв и поэтому не могут быть точно представлены усеченными рядами сферических функций. Для преодоления этой трудности используют ряд способов, которые оказываются эффективными. Однако практический опыт показывает, что целесообразно отдать предпочтение другому подходу, в котором вместо уравнений для горизонтальных компонент ветра используются уравнения для горизонтальной дивергенции и вихря скорости. Этот прием связан с использованием скалярных полей функции тока ψ и потенциала скорости χ . Тогда компоненты скорости определяются соотношениями Гельмгольца:

$$u = \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \lambda} - \cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right), \quad v = \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \cos \varphi \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right). \quad (4.1)$$

5.4.1. Модель мелкой воды

Рассмотрим особенности применения спектрального метода на примере модели мелкой воды, систему уравнений которой можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} &= -\nabla \cdot \Omega \mathbf{V}; \quad \frac{\partial D}{\partial t} = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \Omega \mathbf{V} - \nabla^2 \left(\frac{V^2}{2} + \Phi' \right); \\ \frac{\partial \Phi'}{\partial t} &= -\nabla \cdot \Phi \mathbf{V} - \bar{\Phi}' D, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\Phi = \bar{\Phi} + \Phi'$ — геопотенциал, $\bar{\Phi}$ — среднее значение Φ (постоянная величина), Φ' — отклонение от $\bar{\Phi}$; $\Omega = \nabla^2 \psi + 2\omega \sin \varphi$ — абсолютный вихрь; $D = \nabla^2 \chi$ — горизонтальная дивергенция; $\mathbf{V} = \{U, V\} = \{u \cos \varphi, v \cos \varphi\}$ — оператор Набла, $\mathbf{k}$ — единичный вектор (орт). Систему (4.2) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (U \nabla^2 \psi) + (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} (V \nabla^2 \psi) \right] - 2\omega \left(\mu \nabla^2 \chi + \frac{V}{a} \right), \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \chi}{\partial t} = \frac{1}{a(1-\mu^2)} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (V \nabla^2 \psi) - (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} (U \nabla^2 \psi) \right] + 2\omega \left(\mu \nabla^2 \psi - \frac{U}{a} \right) - \nabla^2 \left(\frac{U^2 + V^2}{2(1-\mu^2)} + \Phi' \right), \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = -\frac{1}{a(1-\mu^2)} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (U \Phi') + (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} (V \Phi') \right] - \bar{\Phi} \nabla^2 \chi, \quad (4.5)$$

где

$$U = \frac{1}{a} \left[\frac{\partial \chi}{\partial \lambda} - (1-\mu^2) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right], \quad V = \frac{1}{a} \left[\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + (1-\mu^2) \frac{\partial \chi}{\partial \mu} \right]. \quad (4.6)$$

Такая система уравнений оказывается более компактной по сравнению с вариантом, в котором используются уравнения для u и v , так как в ней приходится рассчитывать минимальное число нелинейных комбинаций: $U \nabla^2 \psi$, $V \nabla^2 \psi$, $U \Phi'$, $V \Phi'$, $U^2 + V^2$.

Применим к данной системе метод преобразования. Основными функциями задачи являются ψ , χ и Φ' , а вспомогательными — U и V . Зададим эти функции усеченными рядами:

$$\begin{aligned} \hat{\psi} &= a^2 \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \psi_{m,n}(t) Y_n^m(\lambda, \mu), \\ \hat{\chi} &= a^2 \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \chi_{m,n}(t) Y_n^m(\lambda, \mu), \\ \hat{\Phi}' &= a^2 \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \Phi_{m,n}(t) Y_n^m(\lambda, \mu), \\ \hat{U} &= a \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^{N+1} U_{m,n}(t) Y_n^m(\lambda, \mu), \\ \hat{V} &= a \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^{N+1} V_{m,n}(t) Y_n^m(\lambda, \mu). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Подставляя ряды для ψ , χ , U , V в соотношения (4.6) и применяя рекуррентные соотношения (2.15), (2.16), получаем следующие выражения, связывающие коэффициенты разложения $U_{m,n}$, $V_{m,n}$ с $\psi_{m,n}$, $\chi_{m,n}$:

$$\begin{aligned} U_{m,n} &= (n-1) D_{m,n} \psi_{m,n-1} - (n+2) D_{m,n+1} \psi_{m,n+1} + im \chi_{m,n}, \\ V_{m,n} &= -(n-1) D_{m,n} \chi_{m,n-1} + (n+2) D_{m,n+1} \chi_{m,n+1} + im \psi_{m,n}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из этих выражений видно, что степень представления U и V по n должна быть на единицу больше, чем для ψ и χ .

Нелинейные члены в системе (4.3)—(4.5) представим рядами:

$$\begin{aligned}\widehat{U \nabla^2 \psi} &= a \sum_{m=-N}^N A_m(\mu) e^{im\lambda}, \\ \widehat{V \nabla^2 \psi} &= a \sum_{m=-N}^N B_m(\mu) e^{im\lambda}, \quad \widehat{U \Phi'} = a^3 \sum_{m=-N}^N C_m(\mu) e^{im\lambda}, \\ \widehat{V \Phi'} &= a^3 \sum_{m=-N}^N D_m(\mu) e^{im\lambda}, \\ \frac{\widehat{U^2 + V^2}}{2} &= a^2 \sum_{m=-N}^N E_m(\mu) e^{im\lambda}.\end{aligned}\quad (4.9)$$

В этих рядах каждый из коэффициентов разложения выражается через интегралы обратного преобразования Фурье. Например, для $A_m(\mu)$ имеем

$$A_m(\mu) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \widehat{U \nabla^2 \psi} e^{-im\lambda} d\lambda. \quad (4.10)$$

Аналогично для $B_m(\mu)$, $C_m(\mu)$, $D_m(\mu)$, $E_m(\mu)$. Подставляя ряды (4.7) и (4.9) в уравнения (4.3)—(4.5) и используя условия ортогональности, получаем спектральные уравнения следующего вида:

$$\begin{aligned}& n(n+1) \frac{d\psi_{m,n}}{dt} - 2\omega [n(n-1) D_{m,n} \chi_{m,n-1} + \\& + (n+1)(n+2) D_{m,n+1} \chi_{m,n+1} - V_{m,n}] = \\& = \int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} [im A_m P_n^m(\mu) + B_m H_n^m(\mu)] d\mu = im A_{m,n} + \tilde{B}_{m,n}, \\& n(n+1) \frac{d\chi_{m,n}}{dt} - 2\omega [n(n-1) D_{m,n} \psi_{m,n-1} + \\& + (n+1)(n+2) D_{m,n+1} \psi_{m,n+1} + U_{m,n}] + n(n+1) [\Phi_{m,n} + E_{m,n}] = \\& = - \int_{-1}^1 [im B_m P_n^m - A_m H_n^m] \frac{d\mu}{1-\mu^2} = -im B_{m,n} + \tilde{A}_{m,n}, \\& \frac{d\Phi_{m,n}}{dt} - n(n+1) \overline{\Phi} \chi_{m,n} = - \int_{-1}^1 [im C_m P_n^m + D_m H_n^m] \frac{d\mu}{1-\mu^2} = \\& = -im C_{m,n} - \tilde{D}_{m,n},\end{aligned}\quad (4.11)$$

где

$$E_{m,n} = \int_{-1}^1 E_m(\mu) P_n^m(\mu) \frac{d\mu}{1-\mu^2}, \quad A_{m,n} = \int_{-1}^1 A_m(\mu) P_n^m(\mu) \frac{d\mu}{1-\mu^2},$$

$$H_n^m(\mu) = -(1-\mu^2) \frac{dP_n^m}{d\mu}, \quad \tilde{A}_{m,n} = - \int_{-1}^1 A_m(\mu) H_n^m(\mu) \frac{d\mu}{1-\mu^2}$$

и т. д.

Поскольку мы ввели явно коэффициенты $U_{m,n}$, $V_{m,n}$, то, естественно, необходимо к уравнениям (4.11) добавить выражения (4.8).

Интегралы типа

$$\int_{-1}^1 A_m P_n^m(\mu) \frac{d\mu}{1-\mu^2}, \quad \int_{-1}^1 A_m H_n^m(\mu) \frac{d\mu}{1-\mu^2}$$

и т. п. вычисляются с помощью квадратурных формул.

Коэффициенты $A_m(\mu)$, $B_m(\mu)$ и т. д. можно получить, подставив в формулы типа (4.10) усеченные ряды Фурье для $\widehat{U}$ и $\widehat{\nabla^2 \psi}$, а затем, перемножив эти ряды, оставить только члены с $m \leq N$. В итоге, например, для $A_m(\mu)$ получим

$$A_m(\mu) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \widehat{U \nabla^2 \psi} e^{-im\lambda} d\lambda \simeq \sum_{m_1=m-N}^N U_{m-m_1} \Omega_{m_1},$$

где

$$\Omega_{m_1} = \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \widehat{\nabla^2 \psi} e^{-im_1\lambda} d\lambda.$$

В общем порядок и способ вычисления нелинейных членов может быть различным. Главное заключается в том, чтобы, обеспечивая высокую точность вычисления нелинейных членов в процессе спектрально-сеточного преобразования с помощью квадратурных формул, избежать ложного представления волновых гармоник.

В отношении метода интегрирования по времени спектральных уравнений заметим, что запись уравнений движения относительно дивергенции и вихря оказалась очень удобной для применения полунейного метода интегрирования, обладающего большей устойчивостью и, следовательно, позволяющего выбирать достаточно большие шаги по времени.

5.4.2. Бароклинная модель

Особенности построения спектральных бароклинных моделей рассмотрим на примере глобальной модели, разработанной С. А. Машковичем и И. Г. Вейль.

Модель построена на основе полных уравнений в сферических координатах с вертикальной σ -координатой. Вместо уравнений для

горизонтальных составляющих вектора скорости ветра используются уравнения для вертикальной составляющей вихря скорости (Ω) и горизонтальной дивергенции (D).

Для простоты будем рассматривать модель, в которой не учитывается орография. Уравнения модели записываются для безразмерных величин, которые вводятся с помощью соотношений

$$\psi_{\delta/p} = \frac{\psi}{\tilde{\psi}}, \quad \chi_{\delta/p} = \frac{\chi}{\tilde{\chi}}, \quad T_{\delta/p} = \frac{T}{T}, \quad \Omega_{\delta/p} = \frac{\Omega}{\tilde{\Omega}}, \quad D_{\delta/p} = \frac{D}{\tilde{D}},$$

$$u_{\delta/p} = \frac{u}{\tilde{u}}, \quad v_{\delta/p} = \frac{v}{\tilde{v}}, \quad z_{\delta/p} = \frac{z}{\tilde{z}}, \quad \dot{\sigma}_{\delta/p} = \frac{\dot{\sigma}}{\tilde{\sigma}}, \quad t_{\delta/p} = \frac{t}{\tilde{t}}, \quad (4.12)$$

где волнистой чертой сверху обозначены масштабы соответствующих величин.

Ниже индексы у безразмерных величин опускаются. Вместо дополнения широты Θ вводится $x = \cos \Theta$, а также используются следующие обозначения:

$$T = T_0(\sigma) + T'(x, \lambda, \sigma, t), \quad \Phi = z + T_0 \ln p_s,$$

$$A = \frac{u}{1-x^2} \frac{\partial (\ln p_s)}{\partial \lambda} - v \frac{\partial (\ln p_s)}{\partial x}, \quad \bar{f} = \int_1^0 f \, d\sigma, \quad f^{-\sigma} = \int_0^\sigma f \, d\sigma,$$

$$Q = Q_0(\sigma) + Q'(x, \lambda, \sigma, t), \quad E = \frac{u^2 + v^2}{2(1-x^2)},$$

$$u = u_\lambda \sin \Theta, \quad v = v_\theta \sin \Theta. \quad (4.13)$$

Здесь Q — отношение смеси, $T_0(\sigma)$, $Q_0(\sigma)$ — средние значения температуры и отношения смеси водяного пара, зависящие только от σ ; p_s — приземное давление; E — кинетическая энергия двумерного движения; f — любая функция; z — высота координатных поверхностей $\sigma = \text{const}$. Остальные обозначения общепринятые. С учетом этих обозначений система уравнений модели для безразмерных величин записывается в виде (индексы у безразмерных величин опускаются)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} - \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{1}{1-x^2} \frac{\partial F_2}{\partial \lambda} + 2(xD - v) = H_H^{(1)} + H_v^{(1)}, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{1-x^2} \frac{\partial F_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial F_2}{\partial x} + 2(u - x\Omega) = -\nabla^2(E + \Phi) + H_H^{(2)} + H_v^{(2)}, \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial (T'v)}{\partial x} + \frac{1}{1-x^2} \frac{\partial (T'u)}{\partial \lambda} - T'D + \left(\frac{\partial T}{\partial \sigma} - \frac{R}{c_p} \frac{T}{\sigma} \right) \dot{\sigma} -$$

$$- \frac{RT}{c_p} (\bar{A} + A + \bar{D}) = H_H^{(3)} + H_v^{(3)}, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial (Q'v)}{\partial x} + \frac{1}{1-x^2} \frac{\partial (Q'u)}{\partial \lambda} - Q'D + \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \dot{\sigma} = H_H^{(4)} + H_v^{(4)}, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \ln p_s}{\partial t} + A + D = 0, \quad (4.18)$$

$$T = -\sigma \frac{\partial z}{\partial \sigma}, \quad (4.19)$$

где

$$F_1 = v\Omega + \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} + T' \frac{\partial (\ln p_s)}{\partial \lambda},$$

$$F_2 = u\Omega - \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} + T' \frac{\partial (\ln p_s)}{\partial x} (1 - x^2).$$

Члены вида $H_H^{(i)}$, $H_v^{(i)}$ — описывают эффекты перемешивания по горизонтали и по вертикали. Параметризация вертикального перемешивания осуществляется с помощью следующих формул для безразмерных величин:

$$H_v^{(i)} = \frac{1}{p_s} \frac{\partial \tau^{(i)}}{\partial \sigma} \tilde{H}, \quad \tau^{(i)} = \frac{\rho^2}{p_s} \kappa_v \frac{\partial f^{(i)}}{\partial \sigma},$$

$$H_H^{(i)} = \frac{\kappa_H}{\omega a^2} \nabla^2 f^{(i)}, \quad \kappa_v = \frac{\rho}{p_s} \left| \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \sigma} \right|,$$

$$\tilde{H} = \left(\frac{g\bar{\rho}}{p_s} \right)^2 \tilde{l}_0^2 a, \quad \tilde{\tau} = \frac{g\bar{\rho}^2 \kappa_v}{\bar{p}_s},$$

$$\tilde{\kappa}_v = \frac{g\bar{\rho} l_0^2 \omega a^2}{\bar{p}_s},$$

κ_v , κ_H — безразмерные коэффициенты вертикального и горизонтального перемешивания; $\bar{\rho}$, $\bar{p}_s$ — масштабы для плотности ρ и приземного давления p_s ; $l_0 = 30$ м — путь смещения; $\mathbf{V}(uv)$ — вектор скорости ветра; индексам $i = 1, 2, 3, 4$ соответствуют Ω , D , T , Q . При $i = 3$ (для T) в выражение для $\tau^{(3)}$ вводится множитель $(p/p_s)^{R/c_p}$:

$$\tau^{(3)} = \frac{\rho^2}{p_s} \left(\frac{p}{p_s} \right)^{R/c_p} \kappa_v \frac{\partial T}{\partial \sigma}.$$

На нижней границе атмосферы используются формулы для потоков соответствующих субстанций (импульса, тепла и влаги):

$$\tau^{(1)} = \tau^{(2)} = \rho_1 C_D |\mathbf{V}_1| f^{(i)},$$

$$\tau^{(3)} = \rho_1 C_D |\mathbf{V}_1| (\theta_s - \theta_1),$$

$$\tau^{(4)} = \rho_1 C_D C_w |\mathbf{V}_1| [Q_s(T_s) - Q_1],$$

где C_D — коэффициент сопротивления, C_w — поправка на влажность, Q_s — насыщающее значение отношения смеси при температуре поверхности, $\theta = T \left(\frac{1000}{p} \right)^{R/c_p}$ — потенциальная температура, индексами s и 1 отмечены величины на поверхности и на нижнем счетном уровне модели соответственно.

С помощью выражения для $H_H^{(i)}$ параметризуется горизонтальное турбулентное перемешивание по схеме нелинейной вязкости, в которой коэффициент горизонтального перемешивания (κ_H) является функцией горизонтальных координат и нелинейно зависит от характеристик течения (см. главу 6). Для расчетов κ_H используется формула Шнайдемана В. А.

$$\kappa_H = \gamma_3 |\nabla^2 \Omega| L^2,$$

где $L = 2\pi a \sin \varphi / \max m$; $\gamma_3 = \theta/18$; $\max m$ — максимальное волновое число по долготе, φ — широта.

В рассматриваемой модели используются и другие параметризации горизонтальной турбулентности, которые мы здесь обсуждать не будем.

По вертикали в модельной атмосфере введены десять основных уровней, соответствующих значениям $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{10}$. Для простоты изложения будем ориентироваться на вариант модели, в котором уровни являются равноотстоящими по координате σ . Между основными уровнями располагаются промежуточные. На основных уровнях задаются и вычисляются все метеорологические величины за исключением вертикальной скорости $\dot{\sigma}$, которая размещается на промежуточных уровнях $\sigma_{1,5}, \sigma_{2,5}, \dots, \sigma_{9,5}$. Граничные условия по σ ставятся на уровнях $\sigma_{0,5} = 1$ и $\sigma_{10,5} = 0$, которые отождествляются с нижней и верхней границами атмосферы.

Полагается, что

$$\dot{\sigma} = 0 \quad \text{при } \sigma = 0, \quad \sigma = 1. \quad (4.20)$$

Интегрируя уравнение (4.18) по σ от 1 до 0 и от 1 до σ , с учетом граничных условий (4.20) получаем:

$$\frac{\partial (\ln p_s)}{\partial t} = \overline{A} + \overline{D}, \quad (4.21)$$

$$\dot{\sigma} = (1 - \sigma) (\overline{A} + \overline{D}) - (\overline{A} + \overline{D})^\sigma. \quad (4.22)$$

Составляющие скорости u и v , вихрь Ω и дивергенция D связаны с функцией тока ψ и потенциалом скорости χ соотношениями

$$u = -(1 - x^2) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial \lambda}, \quad (4.23)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - (1 - x^2) \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad (4.24)$$

$$\Omega = \nabla^2 \psi, \quad (4.25)$$

$$D = \nabla^2 \chi. \quad (4.26)$$

С учетом этих соотношений записываются все уравнения модели. В результате в уравнениях модели зависимыми переменными будут $\psi, \chi, T, \ln p_s, T, Q$. В уравнениях модели (4.14) — (4.17), (4.21), (4.22) поля этих зависимых переменных представляются усеченными рядами по нормированным сферическим функциям вида

$$\tilde{f} = \sum_{m=-M}^m \sum_{n=|m|}^{|m|+J} f_{m,n} e^{im\lambda} P_n^m(x), \quad (4.27)$$

где $\tilde{f}$ — любая из указанных зависимых переменных, $f_{m,n}$ — коэффициенты разложения для соответствующих переменных.

На основе соотношений (4.23), (4.24), используя разложения (4.27) для ψ и χ , а также рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} x P_n^m &= R_{n+1}^m P_{n+1}^m + R_n^m P_{n-1}^m, \\ (x^2 - 1) \frac{dP_n^m}{dx} &= n R_{n+1}^m P_{n+1}^m - (n+1) R_n^m P_{n-1}^m, \end{aligned} \quad (4.28)$$

где

$$R_n^m = \sqrt{\frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1}},$$

получаем выражения для коэффициентов разложения полей u и v через коэффициенты разложения полей ψ и χ :

$$u_{m,n} = (n-1) R_n^m \psi_{m,n-1} - (n+2) R_{n+1}^m \psi_{m,n+1} + im \chi_{m,n}, \quad (4.29)$$

$$v_{m,n} = (n-1) R_n^m \varphi_{m,n-1} - (n+2) R_{n+1}^m \chi_{m,n+1} - im \psi_{m,n}. \quad (4.30)$$

При представлении полей u и v рядами вида (4.27) с использованием коэффициентов разложения, полученных с помощью выражений (4.29), (4.30), верхний предел во внутренней сумме заменяется на $|m| + J + 1$.

Коэффициенты разложения для T ($T_{m,n}$) определяют на основе уравнения статики (4.19) по коэффициентам разложения для z ($z_{m,n}$):

$$T_{m,n} = -\sigma \frac{\partial z_{m,n}}{\partial \sigma}. \quad (4.31)$$

Уравнение (4.31) представляет собой уравнение статики в спектральной форме.

В модели используется метод спектрально-сеточного преобразования, с помощью которого получают ряды по сферическим функциям для нелинейных членов в уравнениях модели по их значениям в узлах сеточной области (x_i, λ_j). Коэффициенты разложения групп слагаемых в уравнениях вихря скорости и дивергенции, содержащих F_1 и F_2 , вычисляются с помощью оператора вида

$$Y_n^m(F_2, F_1) = \int_{-1}^1 \left[im F_{2,m} P_n^m + F_{1,m} (1-x^2) \frac{dP_n^m}{dx} \right] \frac{dx}{1-x^2}. \quad (4.32)$$

Аналогичным образом вычисляются коэффициенты разложения нелинейных членов $T'u$, $T'v$, $Q'u$, $Q'v$ в уравнении для T и для Q .

Система уравнений модели в спектральной форме записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} -n(n+1) \frac{\partial \psi_{m,n}}{\partial t} &= -Y_n^m(F_2, m, F_1, m) + \\ &+ 2[v_{m,n} + n(n-1) R_n^m \chi_{m,n-1} + (n+1)(n+2) R_{n+1}^m \chi_{m,n+1}] + H_{m,n}^{(1)}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} -n(n+1) \frac{\partial \chi_{m,n}}{\partial t} &= -Y_n^m(F_1, m, F_2, m) - \\ &- 2[u_{m,n} + n(n-1) R_n^m \psi_{m,n-1} + (n+1)(n+2) R_{n+1}^m \psi_{m,n+1}] + \\ &+ n(n+1)(E_{m,n} + \Phi_{m,n}) + H_{m,n}^{(2)}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial T_{m,n}}{\partial t} = -Y_n^m(T'u, T'v) + S_{m,n}^{(T)} + H_{m,n}^{(3)}, \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial Q_{m,n}}{\partial t} = Y_n^m (Q'u, Q'v) + S_{m,n}^{(Q)} + H_{m,n}^{(4)}, \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial q_{m,n}}{\partial t} = \bar{A}_{m,n} - n(n+1) \bar{\chi}_{m,n}, \quad (4.37)$$

где $q_{m,n} = (\ln p_s)_{m,n}$; $H_{m,n}^{(i)}$ — коэффициенты разложения слагаемых $H_H^{(i)} + H_v^{(i)}$; $S_{m,n}^{(T)}$, $S_{m,n}^{(Q)}$ — коэффициенты разложения всех остальных членов в уравнениях (4.16) и (4.17). По вертикали в модели сохраняется дискретное представление переменных. Интегралы по вертикали для внутренних слоев по σ вычисляются методом трапеций, а в нижнем и верхнем слоях (от $\sigma_{0,5}$ до σ_1 и от σ_{10} до $\sigma_{10,5}$) — методом прямоугольников. Выражения типа $\dot{\sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma}$ представляются конечными разностями:

$$\begin{aligned} \left(\dot{\sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_k &= \frac{1}{2} \left[\left(\dot{\sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{k-\frac{1}{2}} + \left(\dot{\sigma} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{k+\frac{1}{2}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\dot{\sigma}_{k-\frac{1}{2}} \frac{f_k - f_{k-1}}{\sigma_k - \sigma_{k-1}} + \dot{\sigma}_{k+\frac{1}{2}} \frac{f_{k+1} - f_k}{\sigma_{k+1} - \sigma_k} \right], \end{aligned} \quad (4.38)$$

где $k = \sigma/\Delta\sigma$.

Уравнение статики в конечно-разностном виде записывается следующим образом:

$$z_{k+1} - z_k = \frac{T_k + T_{k+1}}{2} \ln \frac{\sigma_k}{\sigma_{k+1}}. \quad (4.39)$$

Интегралы от дивергенции, которые используются при вычислении $\dot{\sigma}$ и p_s в уравнениях системы (4.33)–(4.37), записываются в виде

$$\begin{aligned} \int_1^{\sigma_j} D \, d\sigma &\equiv \bar{D}_j^\sigma = D_1 \Delta\sigma_1 + \sum_{k=1}^{j-1} (D_k + D_{k+1}) \frac{\Delta\sigma_{k+1}}{2}, \\ \int_1^0 D \, d\sigma &\equiv \bar{D}_N^\sigma = D_1 \Delta\sigma_1 + \sum_{k=1}^{N-1} (D_k + D_{k+1}) \frac{\Delta\sigma_{k+1}}{2}, \\ \bar{D} &= \bar{D}_N^\sigma + D_N \Delta\sigma_{N+1}, \\ \bar{D} - \bar{D}_j^\sigma &= \sum_{k=1}^{N-1} (D_k + D_{k+1}) \frac{\Delta\sigma_{k+1}}{2} + D_N \Delta\sigma_{N+1}, \end{aligned}$$

где $\Delta\sigma_k = \sigma_{k-1} - \sigma_k$, j — номер расчетного уровня, N — число уровней по вертикали ($k = 0, 1, \dots, N$).

Для интегрирования прогностических уравнений модели по времени используется полунявная схема центральных разностей, в которой неявно представляются члены, описывающие горизонтальную турбулентность. На первом шаге по времени применяется схема Эйлера с пересчетом.

Для более детального ознакомления с моделью, и в частности с полунявным методом интегрирования по времени, следует обра-

титься к книге С. А. Машковича «Спектральные модели общей циркуляции атмосферы и численного прогноза погоды».

Для решения системы уравнений (4.14)—(4.19) необходимо задать начальные условия. Так как вихрь скорости Ω , дивергенция D и компоненты вектора скорости ветра u и v выражаются через функцию тока ψ и потенциал скорости χ , то начальные условия задаются для ψ , χ , m , p_s и Q в виде разложений (4.27).

Коэффициенты разложения функции тока ($\psi_{m,n}$) и потенциала скорости ($\chi_{m,n}$) определяются с помощью выражений (4.29), (4.30), в которых заданными являются коэффициенты $u_{m,n}$ и $v_{m,n}$ (при соответствующих ограничениях на максимальные значения индексов m и n , обусловленных характером усечения разложений для u и v).

Таким образом, определение $\psi_{m,n}$ и $\chi_{m,n}$ сводится к решению систем алгебраических уравнений (4.29), (4.30).

Коэффициенты разложения температуры ($T_{m,n}$) определяются на основе уравнения статики (4.31) по коэффициентам $z_{m,n}$. Поскольку в модели принята σ -система координат, то при подготовке начальных условий предусмотрена процедура интерполяции метеовеличин с изобарических поверхностей на σ -поверхности.

Разложение начальных полей указанных метеовеличин по сферическим функциям (4.27) осуществляется по их значениям в узлах широко-долготной сетки.

5.5. Псевдоспектральный метод

Модели, в которых решение прогностических уравнений строится с помощью рядов, а минимизация невязки осуществляется по методу коллокации, называются псевдоспектральными. При этом в отличие от спектрального метода все операции, кроме дифференцирования по пространственным независимым переменным, выполняются на сетке точек. За счет этого достигается более высокая точность вычисления пространственных производных, а также фазовых скоростей. При использовании псевдоспектрального метода исключаются трудности, которые характерны для спектрального метода и связаны с перемножением рядов. Однако псевдоспектральный метод не свободен от ошибок ложного представления, которые могут приводить к развитию нелинейной вычислительной неустойчивости.

Проиллюстрируем основные положения псевдоспектрального метода на примере решения нелинейного уравнения адвекции

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad (5.1)$$

где $u(r, t)$ — составляющая вектора скорости в направлении оси r , являющаяся периодической по r скалярной функцией с периодом 2π .

Построим решение уравнения (5.1) и схему прогноза функции $u(r, t)$ псевдоспектральным методом на одномерной сетке, узлы которой определены соотношением $r_m = 2\pi m/M$. Пусть начальные

данные для функции $u(r, t)$ заданы набором значений в узлах сетки $u_m(t_0) = u(r_m, t_0)$, где t_0 — начальный момент времени. Поскольку $u_m(t_0)$ периодична по m с периодом M , то этот набор значений может быть представлен с помощью дискретного (конечного) преобразования Фурье. Если положить, что $M = 2K + 1$, то это преобразование запишется в виде

$$u_m(t_0) = \sum_{k=-K}^K u_k(t_0) e^{ikr_m}, \quad (5.2)$$

где

$$u_k(t_0) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M u_m(t_0) e^{-ikr_m} \quad (5.3)$$

представляют собой коэффициенты преобразования.

В соответствии с основным положением псевдоспектрального метода значения производных по r от функции $u(r, t_0)$ в узлах сетки вычисляются по формуле

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_m = \sum_{k=-K}^K iku_k(t_0) e^{ikr_m}. \quad (5.4)$$

Перемножая значения u_m и $(\partial u/\partial r)_m$, получаем значения производной по времени в узлах сетки:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_m = -u_m \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_m. \quad (5.5)$$

Затем методом шагов по времени вычисляем

$$u_m(t_0 + \Delta t) = u_m(t_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_m^* \Delta t. \quad (5.6)$$

Для полученных значений $u_m(t_0 + \Delta t)$ снова применяются формулы (5.2)—(5.6) и т. д. В результате получаются прогностические значения $u_m(t_0 + N \Delta t)$. Здесь N — число шагов по времени, $N \Delta t$ — прогностический интервал времени.

Рассмотренный метод решения может быть реализован с использованием других периодических функций. Важно, чтобы для этих функций существовал метод быстрого определения коэффициентов преобразования.

Псевдоспектральный метод может быть применен для решения уравнений и систем уравнений баротропных и бароклинических моделей.

Применение псевдоспектрального метода в прогностических задачах основывается на использовании быстрого преобразования Фурье. Если в качестве базисных использовать сферические функции, то возникает затруднение, обусловленное тем, что в этом случае быстрое преобразование Фурье возможно только по одной из горизонтальных координат (λ). В связи с этим естественным представляется привлечение других функций, например тригонометрических, позволяющих применять быстрое преобразование по обоим горизонтальным

координатам (λ, Θ) . Однако применение тригонометрических функций, зависящих от λ и Θ , затруднительно из-за наличия особенностей на полюсах. Проблему полюсов можно разрешить, используя модифицированные функции Робера

$$G_n^m(\Theta, \lambda) = \sin^{|m|} \Theta \cos n\Theta e^{im\lambda},$$

для которых может быть реализовано прямое и обратное преобразование Фурье. Однако ввиду трудоемкости и плохой обусловленности вычислений при реализации преобразования Фурье использование функций Робера оправдано лишь для решения уравнений псевдоспектральным методом в моделях с низким разрешением по пространству.

Проблема полюсов снимается, если применять в качестве базисных присоединенные функции Чебышева

$$T_n^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m T_n}{dx^m},$$

где $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ — полином Чебышева n -й степени.

Присоединенные функции Чебышева обладают свойствами ортогональности и образуют полную систему на сфере в том смысле, что любая гладкая функция $f(\lambda, \Theta)$ может быть представлена рядом

$$f(\lambda, \Theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq n}^N f_{m,n} e^{im\lambda} T_n^{(m)}(\cos \Theta),$$

где $\Theta = \pi/2 - \varphi$, φ — широта.

Такие ряды позволяют производить прямое и обратное преобразование Фурье быстрее, чем ряды по сферическим функциям.

5.5.1. Баротропная квазисоленоидальная прогностическая модель для ограниченной территории

В псевдоспектральных моделях для ограниченных территорий, не охватывающих полюса, удобно использовать двойные ряды Фурье.

Рассмотрим применение псевдоспектрального метода при прогнозе функции тока на среднем бездивергентном уровне атмосферы для ограниченной территории на основе баротропного уравнения вихря скорости

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \psi + l) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \psi + l), \quad (5.7)$$

где ψ — функция тока, $\nabla^2 \psi = \Omega_p = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ — проекция вектора вихря на ось p , $-\partial \psi / \partial y = u$, $\partial \psi / \partial x = v$.

Для решения уравнения (5.7) на двумерной сетке с $N \times N$ равноотстоящих друг от друга узлов $x_j = \frac{2\pi}{N} j$, $y_m = \frac{2\pi}{N} m$ ($j, m =$

$= 1, 2, \dots, N$) будем использовать периодические граничные условия с периодом 2π :

$$\psi(0, m) = \psi(N + 1, m), \quad \psi(j, 0) = \psi(j, N + 1).$$

Начальное поле функции тока ψ^{t_0} определяется с помощью уравнения баланса (см. главу 3) и подставляется в виде двумерного ряда Фурье:

$$\psi^{t_0}(x_j, y_m) = \sum_{p=-K}^K \sum_{q=-K}^K \psi_{p,q}^{t_0} e^{i(px_j + qy_m)}, \quad (5.8)$$

коэффициенты которого $\psi_{p,q}^{t_0}$ определяются по формуле

$$\psi_{p,q}^{t_0} = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N \psi^{t_0}(x_j, y_m) e^{-i(px_j + qy_m)}, \quad p, q = 0, 1, 2, \dots, K. \quad (5.9)$$

При этом исключаются случаи, когда одновременно p и q равны нулю, так как функция тока определяется с точностью до произвольной постоянной.

Дифференцируя ряд (5.8), получаем:

$$\begin{aligned} u_{j,m} &= -\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{j,m} = -\sum_{p=-K}^K \sum_{q=-K}^K iq \psi_{p,q}^{t_0} e^{i(px_j + qy_m)}, \\ v_{j,m} &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{j,m} = \sum_{p=-K}^K \sum_{q=-K}^K ip \psi_{p,q}^{t_0} e^{i(px_j + qy_m)}, \\ \Omega_{j,m} &= \nabla^2 \psi_{j,m} = -\sum_{p=-K}^K \sum_{q=-K}^K (p^2 + q^2) \psi_{p,q}^{t_0} e^{i(px_j + qy_m)}, \\ \left(\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x}\right)_{j,m} &= -\sum_{p=-K}^K \sum_{q=-K}^K ip(p^2 + q^2) \psi_{p,q}^{t_0} e^{i(px_j + qy_m)}, \\ \left(\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y}\right)_{j,m} &= -\sum_{p=-K}^K \sum_{q=-K}^K iq(p^2 + q^2) \psi_{p,q}^{t_0} e^{i(px_j + qy_m)}. \end{aligned}$$

С помощью этих формул рассчитываются сеточные значения производных по x и y , входящих в уравнения (5.7). Производные от параметра Кориолиса могут вычисляться с помощью конечных разностей. В результате получаются сеточные значения $\left(\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t}\right)_{j,m}^{t_0}$, а затем вычисляются сеточные значения

$$(\nabla^2 \psi)_{j,m}^{t_0 + \Delta t} = (\nabla^2 \psi)_{j,m}^{t_0} + \left(\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t}\right)_{j,m}^{t_0} \Delta t.$$

Полученное поле значений $(\nabla^2 \psi)_{j,m}^{t_0+\Delta t}$ представляется рядом

$$\nabla^2 \psi^{t_0+\Delta t}(x_j, y_m) = \sum_{p=-K}^K \sum_{q=-K}^K \nabla^2 \psi_{p,q}^{t_0+\Delta t} e^{i(p x_j + q y_m)},$$

коэффициенты которого $\nabla^2 \psi_{p,q}^{t_0+\Delta t}$ определяются по формуле

$$\nabla^2 \psi_{p,q}^{t_0+\Delta t} = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N \nabla^2 \psi_{j,m}^{t_0+\Delta t}(x_j, y_m) e^{-i(p x_j + q y_m)}.$$

Путем обращения ряда для $\nabla^2 \psi^{t_0+\Delta t}$ определяется разложение для $\psi^{t_0+\Delta t}(x_j, y_m)$:

$$\psi^{t_0+\Delta t}(x_j, y_m) = - \sum_{p=-K}^K \sum_{q=-K}^K \frac{\nabla^2 \psi_{p,q}^{t_0+\Delta t}}{p^2 + q^2} e^{-i(p x_j + q y_m)}.$$

Описанная процедура шагами по времени повторяется до тех пор, пока не будут получены значения $\psi(x_j, y_m)$ на срок прогноза.

На всех последующих шагах по времени (кроме первого) для вычисления $(\nabla^2 \psi)_{j,m}^{t+\Delta t}$ используются центральные разности по времени:

$$(\nabla^2 \psi)_{j,m}^{t+\Delta t} = (\nabla^2 \psi)_{j,m}^{t-\Delta t} + 2 \left(\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} \right)_{j,m} \Delta t.$$

5.5.2. Глобальная прогностическая модель на основе уравнений мелкой воды

Уравнения мелкой воды запишем в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= - \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} - \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + l^* v - \frac{g}{a \cos \varphi} \frac{\partial h}{\partial \lambda}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= - \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - l^* u - \frac{g}{a} \frac{\partial h}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= - \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (hu) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (hv \cos \varphi) \right], \end{aligned} \quad (5.10)$$

где $l^* = 2\omega \sin \varphi + \frac{u}{a} \operatorname{tg} \varphi$ — модифицированный параметр Кориолиса; φ — широта; h — высота свободной поверхности; u и v — составляющие двумерного вектора скорости ветра, направленные на восток и на север соответственно; g — ускорение свободного падения.

Решение уравнений (5.10) строится на двумерной широтно-долготной сетке, узлами которой являются точки $\lambda_j = j \Delta \lambda$, $\varphi_m = m \Delta \varphi + \varphi_0$ ($j = 1, 2, \dots, 2N$; $m = 1, 2, \dots, M$), где $\Delta \lambda$ и $\Delta \varphi$ — шаги сетки по долготе и широте, $\varphi_0 = \pi/2 - \Delta \varphi/2$. Вдоль круга широты размещается четное число узлов сетки. При таком выборе сетки удастся избежать попадания узлов на полюса.

Решение уравнений (5.10) псевдоспектральным методом осуществляется по той же схеме, что и решение уравнения баротропного вихря скорости. Различия состоят в том, что, во-первых, при решении уравнений мелкой воды отпадает необходимость обращения оператора Лапласа, а во-вторых, при решении уравнений мелкой воды на сфере возникает проблема полюсов. В связи с этим обсудим применение псевдоспектрального метода к решению уравнений мелкой воды, имея в виду прежде всего эту проблему.

Обозначим через $f(\lambda_j, \varphi_m)$ любую зависимую переменную (u, v, h) .

Вычисление производных по λ для u, v и h не связано с какими-либо трудностями, так как они являются периодическими функциями по λ .

Рассмотрим этот вопрос, имея в виду только зависимость f от λ , т. е. полагая

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_{j, \tau m} = \sum_{p=-(N-1)}^{N-1} i p a_p e^{i p j \Delta \lambda}, \quad (5.11)$$

где

$$a_p = \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^{2N} f(\lambda_j, \varphi_m) e^{-i p j \Delta \lambda}.$$

В сумме (5.11) индекс p не принимает значения, равного N , так как этому значению соответствует двухшаговая волна.

При определении производных по φ на полюсах следует различать скалярные величины (h) и составляющие вектора скорости (u, v) . Для скалярной непрерывной величины при переходе через полюс необходимо лишь учесть изменение долготы λ на $\lambda + \pi$. Таким образом, для скалярной величины производную по φ можно записать по аналогии с (5.11):

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{j, m} = \sum_{q=-(M-1)}^{(M-1)} i q b_q e^{i q m \Delta \varphi}, \quad m = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N, \quad (5.12)$$

где

$$b_q = \frac{1}{2M} \sum_{m=1}^{2M} f(\lambda_j, \varphi_m) e^{-i q m \Delta \varphi},$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right)_{j+N, 2M-q+1} = \sum_{q=-(M-1)}^{(M-1)} i q b_q e^{i q m \Delta \varphi}, \quad m = M+1, M+2, \dots, 2M;$$

$$j = 1, 2, \dots, N. \quad (5.13)$$

Составляющие вектора скорости ветра на полюсе терпят разрыв.

Однако если использовать вспомогательную функцию F_m , которая обладает свойством изменять знак при переходе через полюс, например

$$F_m = \begin{cases} f(\lambda_j, \varphi_m) & \text{при } m = 1, 2, \dots, M, \\ -f(\lambda_{j+N}, \varphi_{2M-m+1}) & \text{при } M+1, M+2, \dots, 2M, \end{cases}$$

то с помощью этой функции можно представить составляющие u и v как непрерывные и периодические функции по φ . В этом случае производные от u и v по φ вдоль долготы $\lambda + \pi$ не будут менять знак, так как два изменения знака (одно у F_m , а другое у u или v) взаимно компенсируются.

С учетом этого производные для u и v по φ можно вычислять по формулам (5.12) и (5.13), в которых для определения коэффициентов разложения используется вспомогательная функция F_m :

$$b_q = \frac{1}{2M} \sum_{m=1}^{2M} F_m e^{-iqm\Delta\varphi}.$$

Описанная методика вычислений производных была апробирована в глобальной псевдоспектральной модели Мерлисом. Численные эксперименты с этой моделью показали, что при одинаковом разрешении по пространству качество прогнозов, полученных на основе псевдоспектрального метода значительно выше качества прогнозов, полученных с помощью конечно-разностной модели.

Псевдоспектральный метод был разработан Мерлисом. Этот метод пока не нашел такого широкого применения в атмосферных моделях, как спектральный.

Более подробно с псевдоспектральным методом можно ознакомиться по работе Мерлиса, помещенной во второй части монографии «Численные методы, используемые в атмосферных моделях».

5.6. Решение прогностических уравнений методом конечных элементов

Метод конечных элементов применяется для приближенного решения дифференциальных уравнений с помощью рядов, в которых используются базисные функции с конечными носителями. Функциями с конечными носителями (финитными функциями) называются такие функции, которые отличны от нуля лишь на небольшой части области определения решений.

Методом конечных элементов приближенные решения дифференциальных уравнений строятся с помощью проекционных или вариационных алгоритмов. В результате применения этих алгоритмов получаются системы уравнений, подобные тем, к которым приводят конечно-разностные методы, т. е. с небольшим числом элементов матриц этих систем, отличных от нуля. Этим и объясняется название метода.

5.6.1. Базисные финитные функции. Конечно-элементные аппроксимации

С помощью базисных финитных функций аппроксимируются решения в пределах подобластей, на которые разбиваются области определения решения D . Эти подобласти называются конечными элементами. Такие аппроксимации называются конечно-элементными.

Способы разбиения (триангуляции) областей D на конечные элементы и финитные функции могут быть различными в зависимости от конфигурации областей и характера решаемой задачи. Выбор финитных функций осуществляется с учетом краевых условий и характера дифференциальных операторов уравнений решаемой задачи, а также требований к точности аппроксимации полей зависимых переменных и устойчивости решения.

Рассмотрим в качестве примера способ построения одномерных кусочно-линейных финитных функций, которые в дальнейшем будут использоваться для получения решения методом конечных элементов нелинейного одномерного уравнения адвекции

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (6.1)$$

где $u = u(x, t)$.

В качестве области определения решения, включая границу $\Gamma(D + \Gamma)$, выберем отрезок на оси x ($x_0 \leq x \leq x_{N_x}$); этой области поставим в соответствие сеточную область $D^n + \Gamma^h$ ($x_0 \leq x_i \leq x_{N_x}$, $i = x/\Delta x$, $\Delta x = x_{i+1} - x_i$).

В сеточной области $D^h + \Gamma^h$ выделим N равных между собой конечных элементов, ограниченных точками x_i и x_{i+1} . В точке x_{N_x} поставим граничное условие

$$u(x_{N_x}) = u_{N_x}. \quad (6.2)$$

Функцию $u(x, t)$ в пределах каждого конечного элемента (на локальном носителе, содержащем точки $i, i+1$) аппроксимируем линейной базисной функцией

$$u(x, t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t)x, \quad (6.3)$$

где α_1, α_2 — коэффициенты, определяемые по значениям функции в точках носителя, т. е. $u_i(t), u_{i+1}(t)$; черта над u означает, что величина аппроксимирована. Здесь учтено, что при использовании метода конечных элементов для решения нестационарных задач зависимость от времени учитывается в коэффициентах разложения.

Запишем выражение (6.3) в точках локального носителя:

$$\bar{u}_i(t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t)x_i, \quad \bar{u}_{i+1}(t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t)x_{i+1}. \quad (6.4)$$

С помощью выражений (6.4) получаем

$$\alpha_1(t) = \frac{u_i(t)x_{i+1} - u_{i+1}(t)x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad \alpha_2(t) = \frac{u_{i+1}(t) - u_i(t)}{x_{i+1} - x_i}. \quad (6.5)$$

Подставляя выражение (6.5) в формулу (6.3), находим:

$$\bar{u}_t(x, t) = u_i(t) \omega_1(x) + u_{i+1}(t) \omega_2(x), \quad (6.6)$$

где

$$\omega_1(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, \quad \omega_2(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad (6.7)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_x - 1.$$

Функции $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ являются кусочно-линейными финитными функциями. Они принимают значения, равные единице, в точках $x = x_i$, $x = x_{i+1}$ и обращаются в нуль в точках, не принадлежащих локальному носителю, т. е. при $x < x_i$, $x > x_{i+1}$. Кусочно-линейные функции, обладающие такими свойствами, называются функциями-крышками.

Аппроксимация решения функциями $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ удовлетворяет граничному условию (6.2), так как в точке $i = N_x$ (при $x = x_{N_x}$)

$$\bar{u}_{N_x} = u_{N_x} \frac{x_{N_x+1} - x_{N_x}}{x_{N_x+1} - x_{N_x}} + u_{N_x+1} \frac{x_{N_x} - x_{N_x}}{x_{N_x+1} - x_{N_x}} \equiv u_{N_x}.$$

Полученные финитные функции линейно независимы и позволяют вычислить первые производные по времени (t) и по пространственной координате (x).

Для сеточной области $D^h + \Gamma^h$, определенной выше, можно выбрать и другие локальные носители. Для локального носителя, содержащего точки $i - 1$, i , $i + 1$, в пределах сеточной области $D^h + \Gamma^h$ ($i = 0, 1, \dots, N_x$) можно построить кусочно-линейные финитные функции вида

$$\omega_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{при } x \in (x_{i-1}, x_i), \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & \text{при } x \in (x_i, x_{i+1}), \\ 0 & \text{при } x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}), \\ (i = 1, 2, \dots, N_x - 1); \end{cases}$$

$$\omega_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} & \text{при } x \in (x_0, x_1), \\ 0 & \text{при } x \notin (x_0, x_1); \end{cases}$$

$$\omega_{N_x}(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{N_x-1}}{x_{N_x} - x_{N_x-1}} & \text{при } x \in (x_{N_x-1}, x_{N_x}), \\ 0 & \text{при } x \notin (x_{N_x-2}, x_{N_x}). \end{cases} \quad (6.8)$$

Функции $\omega_i(x)$ линейно независимы, и каждая из них отлична от нуля лишь в интервале длиной $2\Delta x$. 

Если любую функцию $f(x)$ представить усеченным рядом:

$$\bar{f}(x) = \sum_{i=0}^{N_x} a_i \omega_i(x), \quad x_i \in D^h + \Gamma^h,$$

то коэффициенты a_i будут равны значениям этой функции в точках i , т. е. $a_i = f_i$.

Для двумерной сеточной области $\Omega^h + \Gamma^h$ ($x_0 < x_t \leq x_{N_x}$, $y_0 \leq y_j \leq y_{N_y}$)

$$\Delta x = \begin{cases} x_i - x_{i-1}, \\ x_{i+1} - x_i; \end{cases} \quad \Delta y = \begin{cases} y_j - y_{j-1}, \\ y_{j+1} - y_j; \end{cases} \quad \Delta x = \Delta y = h$$

в каждой точке i, j ($i = 0, 1, \dots, N_x; j = 0, 1, \dots, N_y$) на локальном носителе $i, j; i \pm 1, j; i, j \pm 1$ можно использовать кусочно-линейные функции (6.8) и аналогичные функции аргумента y :

$$\omega_j(y) = \begin{cases} \frac{y - y_{j-1}}{y_j - y_{j-1}} & \text{при } y \in (y_{j-1}, y_j), \\ \frac{y_{j+1} - y}{y_{j+1} - y_j} & \text{при } y \in (y_j, y_{j+1}), \\ 0 & \text{при } y \notin (y_{j-1}, y_{j+1}); \end{cases}$$

$$\omega_0(y) = \begin{cases} \frac{y_1 - y}{y_1 - y_0} & \text{при } y \in (y_0, y_1), \\ 0 & \text{при } y \notin (y_0, y_1); \end{cases}$$

$$\omega_{N_y}(y) = \begin{cases} \frac{y - y_{N_y-1}}{y_{N_y} - y_{N_y-1}} & \text{при } y \in (y_{N_y-1}, y_{N_y}), \\ 0 & \text{при } y \notin (y_{N_y-1}, y_{N_y}). \end{cases} \quad (6.9)$$

Используя $\omega_i(x)$ и $\omega_j(y)$, строят функцию

$$Q_{i,j}(x, y) = \omega_i(x) \omega_j(y). \quad (6.10)$$

Функции $\omega(y)$ линейно независимы, и каждая из них отлична от нуля лишь в интервале длиной $2\Delta y$. Функции $Q_{i,j}(x, y)$ также линейно независимы и отличны от нуля лишь на конечных элементах площадью $2\Delta x \times 2\Delta y$. Функции $\omega_i(x)$ и $\omega_j(y)$ почти ортогональны. Это означает, что для функций в соседних точках выполняется соотношение

$$\int_{\xi_0}^{\xi_N} \omega_k(\xi) \omega_{k'}(\xi) d\xi \begin{cases} = 0 & \text{при } |k - k'| > 1, \\ \neq 0 & \text{при } |k - k'| \leq 1, \end{cases}$$

где $\xi = (x, y)$, $k(k') = (i, j)$.

Функции $Q_{ij}(x, y)$ называют билинейными финитными базисными функциями. С помощью функций (6.10) можно выполнить конечно-элементную аппроксимацию любой двухмерной функции:

$$\bar{f}(x, y) = \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_y} a_{i,j} Q_{i,j}(x, y),$$

где коэффициенты $a_{i,j}$ равны значениям функции f в точках i, j , т. е. $a_{i,j} = f_{i,j}$.

На практике применяются и другие конечно-элементные аппроксимации, например с использованием кусочно-квадратичных и кусочно-кубических полиномов. Мы их рассматривать не будем, так как они применяются реже, чем линейные и билинейные. Здесь же напомним, что точность конечно-элементной аппроксимации (так же как и обычной полиномиальной аппроксимации) зависит от степени используемых полиномов. Если степень полиномов не выше r , то ошибка аппроксимации функции составляет $O(h^{r+1})$ (где h — размер конечного элемента), а ошибка аппроксимации p -й производной имеет порядок $O(h^{r+1-p})$. Таким образом, для рассмотренных линейных и билинейных полиномов ошибки кусочно-линейных аппроксимаций для функций имеют второй порядок: $O(h^2)$, а для производных — первый порядок: $O(h)$.

В области D строится многоугольная сеточная область $D^h + \Gamma^h$, которая тем или иным способом разбивается на конечные элементы, например на треугольники или параллелограммы (не обязательно прямоугольные или равные). При этом локальные носители могут включать не только вершины треугольников (или параллелограммов), но и точки пересечения границ областей Γ и Γ^h , а поэтому базисные финитные функции ставятся в соответствие не только каждому узлу сеточной области, но и точкам пересечения границ. Метод конечных элементов удобен при решении задач в областях D с криволинейными границами Γ .

При решении прогностических задач конечно-элементная аппроксимация используется лишь по горизонтальным координатам, а по вертикали и времени применяется конечно-разностное представление производных.

5.6.2. Применение метода конечных элементов

Сначала проиллюстрируем применение метода конечных элементов к решению одномерного нелинейного уравнения адвекции (6.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

с граничным условием (6.2)

$$u(x_{N_x}) = u_{N_x}.$$

Решение будем строить на сеточной области $D^h + \Gamma^h$, используя конечно-элементную аппроксимацию (6.6)

$$\bar{u}_i(x, t) = u_i(t) \omega_1(x) + u_{i+1}(t) \omega_2(x),$$

где $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ определены формулами (6.7).

По начальным данным задаются $u_i(t_0)$ и вычисляются

$$\bar{u}_i(x, t_0) = u_i(t_0) \omega_1(x) + u_{i+1}(t_0) \omega_2(x),$$

$$i = 1, 2, \dots, N_x - 1.$$

$$(6.11)$$

Подставляя выражение (6.11) в уравнение (6.1), находим:

$$\begin{aligned} \frac{du_i(t_0)}{dt} \omega_1(x) + \frac{du_{i+1}(t_0)}{dt} \omega_2(x) + [u_i(t_0) \omega_1(x) + u_{i+1}(t_0) \omega_2(x)] \times \\ \times \left[u_i(t_0) \frac{d\omega_1(x)}{dx} + u_{i+1}(t_0) \frac{d\omega_2(x)}{dx} \right] = \varepsilon, \end{aligned} \quad (6.12)$$

где ε — невязка.

Минимизируя невязку по методу Галеркина:

$$\int_0^{x_{N_x}} \varepsilon \omega_k(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \quad (6.13)$$

получаем определяющую систему уравнений для производных $du_i(t_0)/dt$, $du_{i+1}(t_0)/dt$:

$$\begin{aligned} \frac{du_i(t_0)}{dt} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_1^2(x) dx + \frac{du_{i+1}(t_0)}{dt} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_2(x) \omega_1(x) dx = \\ = - \left[u_i^2(t_0) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\omega_1(x)}{dx} \omega_1^2(x) dx + u_{i+1}(t_0) u_i(t_0) \times \right. \\ \times \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\omega_1(x)}{dx} \omega_2(x) \omega_1(x) dx + u_i(t_0) u_{i+1}(t_0) \times \\ \times \left. \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\omega_2(x)}{dx} \omega_1^2(x) dx + u_{i+1}^2(t_0) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\omega_2(x)}{dx} \omega_2(x) \omega_1(x) dx \right], \\ \frac{du_i(t_0)}{dt} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_1(x) \omega_2(x) dx + \frac{du_{i+1}(t_0)}{dt} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_2^2(x) dx = \\ = - \left[u_i(t_0) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\omega_1(x)}{dx} \omega_1(x) \omega_2(x) dx + u_{i+1}(t_0) u_i(t_0) \times \right. \\ \times \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\omega_1(x)}{dx} \omega_2^2(x) dx + u_i(t_0) u_{i+1}(t_0) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\omega_2(x)}{dx} \omega_1(x) \omega_2(x) dx + \\ \left. + u_{i+1}^2(t_0) \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\omega_2(x)}{dx} \omega_2^2(x) dx \right], \quad i = 1, 2, \dots, N_x - 1. \quad (6.14) \end{aligned}$$

Вычислим интегралы, входящие в уравнения (6.14):

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_1^2(x) dx &= \frac{1}{3} \Delta x; & \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_2^2(x) dx &= \frac{1}{3} \Delta x; \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_1(x) \omega_2(x) dx &= \frac{1}{6} \Delta x; & \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\omega_1(x)}{dx} \omega_1(x) \omega_2(x) dx &= -\frac{1}{6}; \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\omega_2(x)}{dx} \omega_1(x) \omega_2(x) dx &= \frac{1}{6}; & \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\omega_1(x)}{dx} \omega_1^2(x) dx &= -\frac{1}{3}; \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\omega_2(x)}{dx} \omega_1^2(x) dx &= \frac{1}{3}; & \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\omega_2(x)}{dx} \omega_2^2(x) dx &= \frac{1}{3}; \\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\omega_1(x)}{dx} \omega_2^2(x) dx &= -\frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Следует иметь в виду, что интегрирование в (6.14) и (6.15) выполняется в пределах локального носителя, т. е. от x_i до x_{i+1} , так как при $x_i > x > x_{i+1}$ финитные функции обращаются в нуль. Используя значения этих интегралов, уравнения (6.14) приводим к виду

$$\begin{aligned} 2 \frac{du_i(t_0)}{dt} + \frac{du_{i+1}(t_0)}{dt} = \\ = - \left\{ \frac{u_{i+1}(t_0) [u_{i+1}(t_0) - u_i(t_0)] + 2u_i(t_0) [u_{i+1}(t_0) - u_i(t_0)]}{\Delta x} \right\}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_i(t_0)}{dt} + 2 \frac{du_{i+1}(t_0)}{dt} = \\ = - \left\{ \frac{(u_i(t_0) [u_{i+1}(t_0) - u_i(t_0)] + 2u_{i+1}(t_0) [u_{i+1}(t_0) - u_i(t_0)])}{\Delta x} \right\}, \\ i = 1, 2, \dots, N_x - 1. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Из уравнений (6.16), (6.17) находим

$$\frac{du_i(t_0)}{dt} = - \frac{u_i(t_0) [u_{i+1}(t_0) - u_i(t_0)]}{\Delta x} \quad \text{при } u_i < 0, \quad (6.18)$$

$$\frac{du_{i+1}(t_0)}{dt} = - \frac{u_{i+1}(t_0) [u_{i+1}(t_0) - u_i(t_0)]}{\Delta x} \quad \text{при } u_{i+1} > 0. \quad (6.19)$$

Таким образом, мы получили исходное уравнение (6.1) в дифференциально-разностной форме. Здесь производная по x аппроксимирована направленной конечной разностью (вперед или назад).

Теперь получим уравнение для определения $\frac{\partial \bar{u}_i(x, t_0)}{\partial t}$. Для этого умножим уравнения (6.18) и (6.19) соответственно на $\omega_1(x) =$

$= \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x}$ и $\omega_2(x) = \frac{x - x_i}{\Delta x}$, а результаты сложим. В итоге получим

$$\frac{\partial \bar{u}_i(x, t_0)}{\partial t} = - \left\{ \frac{u_i(t_0) [u_{i+1}(t_0) - u_i(t_0)]}{\Delta x} \frac{(x_{i+1} - x)}{\Delta x} + \frac{u_{i+1}(t_0) [u_{i+1}(t_0) - u_i(t_0)]}{\Delta x} \frac{(x - x_i)}{\Delta x} \right\}. \quad (6.20)$$

Поскольку локальный носитель определен на сетке D^h , то, естественно, его точки совпадают с узлами сетки. Поэтому при $x = x_i$ второй член в правой части уравнения (6.20) обращается в нуль, так как $x - x_i = 0$, и она приобретает вид

$$\frac{-u_i(t_0) [u_{i+1}(t_0) - u_i(t_0)]}{\Delta x}.$$

Здесь учтено, что

$$\frac{x_{i+1} - x}{\Delta x} = 1.$$

По этой же причине $\bar{u}_i(x, t_0) = u_i(t_0)$, а следовательно,

$$\frac{\partial \bar{u}_i(x, t_0)}{\partial t} = \frac{du_i(t_0)}{dt}.$$

С помощью уравнений (6.18) и (6.19) вычисляются значения производной во всех узлах сеточной области D^h . При вычислении производной в точке $i = N_x - 1$ используется граничное условие (6.2). Затем вычисляются значения u_i в конце первого шага по времени. При этом для аппроксимации производной по времени на правом шаге прибегают к направленной вперед разности

$$u_i(t_0 + \Delta t) = u_i(t_0) + \frac{du_i(t_0)}{dt} \Delta t. \quad (6.21)$$

На всех последующих шагах производная по времени аппроксимируется центральной разностью:

$$u_i(t + \Delta t) = u_i(t - \Delta t) + 2 \frac{du_i(t)}{dt} \Delta t. \quad (6.22)$$

С помощью метода шагов по времени рассчитываются прогностические величины $u_i(t_0 + N \Delta t)$, где N — число шагов по времени. Рассмотренный алгоритм является явным.

Разумеется, при интегрировании по времени могут применяться полунявные или неявные алгоритмы.

Обобщение рассмотренного метода решения на более сложные уравнения не связано с принципиальными трудностями. Однако при получении прогностических формул, естественно, усложняются выкладки.

В заключение рассмотрим конечно-элементную аппроксимацию на примере уравнения движения модели мелкой воды

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + l v \quad (6.23)$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (6.24)$$

Приближенное решение уравнения (6.23) будем строить в прямоугольной области D с границей Γ . Области $D + \Gamma$ поставим в соответствие сеточную область $D^h + \Gamma^h$ с узлами $i = x/\Delta x$; $j = y/\Delta y$ ($\Delta x = \Delta y = h$; $i = 0, 1, \dots, N_x$; $j = 0, 1, \dots, N_y$). Границу сеточной области определим так, чтобы она проходила через узлы с индексами $i = 0, N_x$; $j = 0, 1, \dots, N_y$; $j = 0, N_y$; $i = 0, 1, \dots, N_x$, координаты которых обозначим через x_0, x_{N_x} ; $y_0, y_1, \dots, y_{N_y}$; $y_0, x_0, x_1, \dots, x_{N_x}$.

В качестве базисных будем использовать финитные функции $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, $\omega_1(y)$, $\omega_2(y)$. Функции $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$ определены формулами (6.7). По аналогии определим функции $\omega_1(y)$, $\omega_2(y)$:

$$\omega_1(y) = \frac{y_{j+1} - y}{y_{j+1} - y_j}, \quad \omega_2(y) = \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j}; \quad (6.25)$$

а также билинейную функцию

$$Q_{i,j}(x, y) = \omega_i(x) \omega_j(y), \quad i = 1, 2; j = 1, 2. \quad (6.26)$$

Точками локального носителя функции Q_{ij} служат четыре точки с индексами i, j ; $i+1, j$; $i, j+1$; $i+1, j+1$.

Представим все зависимые переменные уравнения (6.23) в начальный момент времени t_0 на локальном носителе следующими рядами:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i,j}(x, y, t_0) &= \sum_{i,j} u_{i,j}(t_0) Q_{i,j}(x, y), \\ \bar{v}_{ij}(x, y, t_0) &= \sum_{i,j} v_{i,j}(t_0) Q_{i,j}(x, y), \\ \bar{\Phi}_{i,j}(x, y, t_0) &= \sum_{i,j} \Phi_{i,j}(t_0) Q_{i,j}(x, y), \quad (i = 1, 2; j = 1, 2). \end{aligned} \quad (6.27)$$

Подставляя ряды (6.27) в уравнение (6.23), получаем:

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j} \frac{du_{i,j}(t_0)}{dt} Q_{i,j}(x, y) + \sum_{i,j} u_{i,j}(t_0) Q_{ij}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \times \\ &\times \sum_{i,j} u_{i,j}(t_0) Q_{i,j}(x, y) + \sum_{i,j} v_{i,j}(t_0) Q_{i,j}(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \times \\ &\times \sum_{i,j} u_{i,j}(t_0) Q_{i,j}(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i,j} \Phi_{i,j}(t_0) Q_{ij}(x, y) - l(x, y) \times \\ &\times \sum_{i,j} v_{i,j}(t_0) Q_{i,j}(x, y) = \varepsilon, \end{aligned} \quad (6.28)$$

где ε — невязка.

Минимизируя невязку по методу Галеркина, получаем определяющую систему уравнений для $du_{i,j}(t_0)/dt$:

$$\begin{aligned} \int_{D_{i,j}} \left\{ \sum_{i,j} \frac{du_{i,j}(t_0)}{dt} Q_{i,j}(x, y) + \sum_{i,j} u_{i,j}(t_0) Q_{i,j}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \times \right. \\ \times \sum_{i,j} u_{i,j}(t_0) Q_{i,j}(x, y) + \sum_{i,j} v_{i,j}(t_0) Q_{i,j}(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \times \\ \times \sum_{i,j} u_{i,j}(t_0) Q_{i,j}(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i,j} \Phi_{i,j}(t_0) Q_{i,j}(x, y) - \\ \left. - l(x, y) \sum_{i,j} v_{i,j}(t_0) Q_{i,j}(x, y) \right\} Q_{k,q}(x, y) dD_{i,j} = 0, \\ i = 1, 2; j = 1, 2; k = 1, 2; q = 1, 2; x_1 \leq x \leq x_{N_x-1}; (6.29) \\ y_1 \leq y \leq y_{N_y-1}, \end{aligned}$$

где $D_{i,j}$ — область локального носителя.

Так как функции $Q_{i,j}(x, y)$ отличны от нуля только в пределах локального носителя, то и интегрирование производится только по области локального носителя $D_{i,j}$.

В результате вычисления интегралов получаем определяющую систему уравнений четвертого порядка:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1} \frac{du_{i,j}}{dt} + \alpha_{1,2} \frac{du_{i+1,j}}{dt} + \alpha_{1,3} \frac{du_{i,j+1}}{dt} + \alpha_{1,4} \frac{d\bar{u}_{i+1,j+1}}{dt} = \\ = f_1(u_{i,j}; v_{i,j}; \Phi_{i,j}; l(x, y); \Delta x; \Delta y); \\ \alpha_{2,1} \frac{du_{i,j}}{dt} + \alpha_{2,2} \frac{du_{i+1,j}}{dt} + \alpha_{2,3} \frac{du_{i,j+1}}{dt} + \alpha_{2,4} \frac{du_{i+1,j+1}}{dt} = \\ = f_2(u_{i,j}; v_{i,j}; \Phi_{i,j}; l(x, y); \Delta x, \Delta y), \\ \alpha_{3,1} \frac{du_{i,j}}{dt} + \alpha_{3,2} \frac{du_{i+1,j}}{dt} + \alpha_{3,3} \frac{du_{i,j+1}}{dt} + \alpha_{3,4} \frac{du_{i+1,j+1}}{dt} = \\ = f_3(u_{i,j}; v_{i,j}; \Phi_{i,j}; l(x, y); \Delta x, \Delta y); \\ \alpha_{4,1} \frac{du_{i,j}}{dt} + \alpha_{4,2} \frac{du_{i+1,j}}{dt} + \alpha_{4,3} \frac{du_{i,j+1}}{dt} + \alpha_{4,4} \frac{du_{i+1,j+1}}{dt} = \\ = f_4(u_{i,j}; v_{i,j}; \Phi_{i,j}; l(x, y); \Delta x, \Delta y), \end{aligned} \quad (6.30)$$

где коэффициенты α представляют собой значения интегралов вида

$$\int_{D_{ij}} Q_{ij}(x, y) Q_{k,q}(x, y) dD_{i,j}, \quad (6.31)$$

а через f_1, f_2, f_3, f_4 обозначены значения интегралов от членов в формуле (6.29), не содержащих производные по времени.

Вычислив интегралы (6.31), можно убедиться в том, что матрица коэффициентов α симметрична и положительно определена.

Решая систему (6.30), находим четыре конечно-разностных аппроксимаций уравнения (6.23) на точках локального носителя, с по-

мощью которых представляется возможность осуществить прогноз шагами по времени. Мы эти конечно-разностные уравнения выписывать не будем. Предлагаем получить систему уравнений (6.30) и конечно-разностные аппроксимации исходного уравнения (6.23) на локальном носителе самостоятельно. Рекомендуем также построить конечно-элементную аппроксимацию других уравнений с использованием линейных и нелинейных финитных базисных функций.

На основе рассмотренных примеров нетрудно понять процедуру применения метода конечных элементов для численного интегрирования уравнений различных прогностических моделей, в том числе трехмерных.

Более подробно с методом конечных элементов можно ознакомиться по книге Г. И. Марчука и В. А. Агошкова «Введение в проекционно-сеточные методы».

Прогностические модели непосредственно описывают лишь крупномасштабные атмосферные процессы. Для расчета и прогноза характеристик таких процессов вводится сетка точек с горизонтальным шагом Δr . С помощью такой сетки точек удастся описать процессы с горизонтальным масштабом (который здесь и далее отождествляется с длиной волны соответствующих колебаний)

$$L \geq 4\Delta r.$$

В этом легко убедиться, рассматривая рис. 6.1, на котором изображено распределение по оси x величины $f = f(x)$, заданной в форме синусоиды с длиной волны L . Используя центральные разности, представим производную в виде

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i=0} = \frac{1}{2\Delta x} (f_{i+1} - f_{i-1}).$$

Отсюда следует, что, например, для точки $i = 0$ при $\Delta x = L$ и $\Delta x = L/2$ конечно-разностный аналог производной обратится в нуль, в то время как истинное значение производной в этой точке описывается выражением

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \right] = \frac{2\pi}{L} \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \Big|_{x=0} = \frac{2\pi}{L}.$$

Легко убедиться в том, что ненулевое значение аналога производной в данной точке будет иметь место при $\Delta x \leq L/4$.

Если, например, $\Delta r = 250$ км, то с помощью введенной сетки точек можно учесть лишь такие атмосферные процессы, горизонтальный масштаб которых превышает тысячи километров. Если же горизонтальные масштабы атмосферных процессов меньше, то они остаются неучтенными. Даже при уменьшении шага сетки, например до 25 км, «вне модели» остается очень большой спектр атмосферных процессов. Это все процессы микро- и мезомасштаба. В дальнейшем эти процессы будем называть процессами подсеточного масштаба. К их числу относятся процессы лучистого, турбулентного и фазового теплообмена, процессы конвекции и другие.

Непосредственное включение этих процессов в модели крупномасштабных атмосферных движений нецелесообразно по ряду причин. Во-первых, это потребовало бы уменьшения шагов сетки до размера менее $1/4$ характерного масштаба рассматриваемого явления и, следовательно, такого увеличения общего числа точек сетки, что задача численного интегрирования уравнений модели стала бы нереальной даже на самых супермощных ЭВМ. Во-вторых, не все

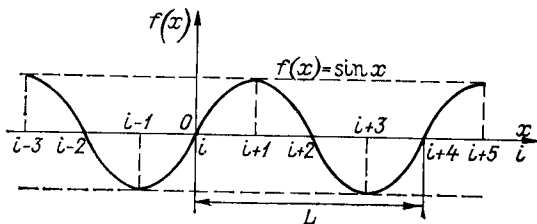


Рис. 6.1.

процессы микро- и мезомасштаба могут быть описаны с помощью точных дифференциальных уравнений.

В последние годы при разработке гидродинамических моделей атмосферы оформилось новое направление, которое получило название *параметризации* атмосферных процессов «подсеточного» масштаба. Целью этого направления является отыскание параметров или структурных элементов модели атмосферы, которые рассчитываются при интегрировании прогностических уравнений, и связей между этими параметрами или элементами модели с некоторыми величинами, которые отражают результирующий, или суммарный эффект процессов подсеточного масштаба на крупномасштабные атмосферные процессы.

Непосредственным результатом параметризации процессов подсеточного масштаба являются методы расчета следующих величин — F_x и F_y , описывающих влияние турбулентной вязкости на ускорение частиц; $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_n$, описывающих притоки тепла и влаги; составляющих теплового баланса R , H , Q и других переменных, входящих в уравнения прогностической модели. Результатом параметризации могут быть методы расчета и других величин, входящих, например, в граничные условия. В этой главе будут рассмотрены различные подходы к параметризации процессов лучистого и турбулентного теплообмена, процесса конвекции и др.

6.1. Способы параметризации лучистого теплообмена

Различные методы параметризации лучистого теплообмена уже давно применяются как в прогностических, так и в циркуляционных моделях атмосферы. Особо следует отметить, что один из первых способов параметризации лучистого теплообмена, заключающийся в представлении тепловой радиации в виде плоскопараллельных потоков (модель Шварцшильда — Эмдена), был применен еще в 1946—1947 гг. Е. Н. Блиновым для теоретического решения задачи распределения температуры воздуха с высотой, а затем и в прогностических моделях для долгосрочного прогноза погоды. Теоретической основой всех способов параметризации лучистого теплообмена является уравнение переноса лучистой энергии для стационарного поля излучения, рассмотренного в курсе «Метеорология».

6.1.1. Плоскопараллельная модель переноса радиации

В этой модели, известной как модель Шварцшильда — Эмдена, предполагается, что излучение может быть представлено в виде плоскопараллельных потоков длинноволновой нисходящей G и

восходящей U радиации и коротковолновой нисходящей радиации S . Учет диффузности процесса производится косвенно. Уравнения для указанных потоков записываются в виде

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \alpha \rho_{\pi} (G - B), \quad \frac{\partial U}{\partial z} = \alpha \rho_{\pi} (B - U), \quad \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\beta \rho_{\pi}}{\cos \theta_0} S, \quad (1.1)$$

где α и β — интегральные коэффициенты поглощения для потоков длинноволновой и коротковолновой радиации соответственно. В качестве граничных условий принимаются следующие:

$$\begin{aligned} \text{при } z \rightarrow \infty \quad G = 0, \quad S = S^0 (1 - \tilde{A}) \cos \theta_0, \\ \text{при } z = 0 \quad B = \delta \sigma T_0^{*4}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где S^0 — солнечная постоянная, $\tilde{A}$ — альбеда системы Земля — атмосфера, θ_0 — зенитное расстояние Солнца, δ — относительная излучательная способность подстилающей поверхности для длинноволновой радиации, T_0^* — температура земной поверхности, $B = \sigma T^4$.

После введения переменной $w = \int_0^z \rho_{\pi} dz'$ решения уравнений (1.1) при граничных условиях (1.2) записываются в виде

$$\begin{aligned} G(w) &= -\alpha \int_w^{w_{\infty}} e^{\alpha(w-w')} B(T) dw', \\ U(w) &= \delta \sigma T_0^{*4} e^{-\alpha w} + \alpha \int_0^w e^{-\alpha(w-w')} B(T) dw', \\ S(w) &= S^0 (1 - \tilde{A}) \cos \theta_0 e^{-\beta(w_{\infty}-w)}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

На основе уравнений (1.1) получим следующее уравнение для притока тепла к единице объема:

$$\mathcal{E}_{\pi} = \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial (S + G - U)}{\partial z} = \alpha \rho_{\pi} (G + U - 2B) + \beta \rho_{\pi} S. \quad (1.4)$$

Более детальная параметризация переноса лучистой энергии на основе плоскопараллельной модели предложена Г. И. Марчуком. Им введены в рассмотрение отдельные спектральные интервалы i , а уравнения переноса лучистой энергии записываются в виде

$$\frac{\partial G_i}{\partial z} = \alpha_i \rho_{\pi} (G_i - B), \quad \frac{\partial U_i}{\partial z} = \alpha_i \rho_{\pi} (B - U_i), \quad \frac{\partial S_i}{\partial z} = \frac{\beta_i \rho_{\pi}}{\cos \theta_0} S_i, \quad (1.5)$$

где индексом i обозначены величины, относящиеся к данному спектральному интервалу. В качестве граничных условий принимаются следующие:

$$\begin{aligned} \text{при } z \rightarrow \infty \quad G_i = 0, \quad S_i = \chi_i S^0 \cos \theta_0, \\ \text{при } z = 0 \quad U_i = \eta_i B(T_0^*), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где χ_i и η_i — доли длинноволновой и солнечной радиации в рассматриваемом спектральном интервале. Решения уравнений (1.5) при граничных условиях (1.6) записываются в виде

$$\begin{aligned} G_i(z) &= \alpha_i \int_z^\infty B(T) e^{-\alpha_i \int_z^{z_1} \rho_\Pi dz''} \rho_\Pi dz', \\ U_i(z) &= \eta_i B(T_0^*) e^{-\alpha_i \int_0^z \rho_\Pi dz'} + \alpha_i \int_0^z B(T) e^{-\alpha_i \int_{z'}^z \rho_\Pi dz''} \rho_{\Pi i} dz', \\ S_i(z) &= \chi_i S^0 \cos \Theta_0 e^{-\frac{\beta_i}{\cos \Theta_0} \int_z^\infty \rho_\Pi dz'}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где z' и z'' — переменные интегрирования.

Радиационный баланс на высоте z представляет собой результат суммирования по всем спектральным интервалам:

$$R = \sum_i (S_i + G_i - U_i). \quad (1.8)$$

6.1.2. Параметризация лучистого теплообмена на основе интегральных функций пропускания

Под интегральной функцией пропускания $P(\xi)$ понимается отношение полного потока радиации $F(z)$, приходящего к слою толщиной Δz , содержащему массу ξ поглощающих и излучающих веществ, к полному потоку радиации, выходящему из этого слоя — $F(z + \Delta z)$, т. е. отношение

$$P(\xi) = \frac{F(z)}{F(z + \Delta z)}. \quad (1.9)$$

Такие функции пропускания могут быть определены с помощью специальных экспериментов и расчетов.

Для длинноволновой радиации известны интегральные функции пропускания Ф. Н. Шехтер

$$P(\xi) = 0,471e^{-0,696 \sqrt{\xi}} + 0,529e^{-8,94 \sqrt{\xi}} \quad (1.10)$$

и Х. Нийлиск

$$P(\xi) = 0,515e^{-0,8 \sqrt{\xi}} + 0,485e^{-2,0 \sqrt{\xi}}. \quad (1.11)$$

Процесс переноса коротковолновой радиации может быть описан с помощью интегральной функции пропускания В. Меллера и В. Г. Кастрова

$$P_K(\xi) = 1 - 0,09\xi^{0,303}. \quad (1.12)$$

При использовании интегральных функций пропускания для полных потоков радиации и притока тепла к единице объема ($\mathcal{E}_\pi$) имеют место следующие выражения:

$$G(\omega) = - \int_{\omega}^{\omega_{\infty}} B(T) dP(\omega' - \omega),$$

$$U(\omega) = \delta B(T_0) P(\omega) + \int_0^{\omega} B(T) dP(\omega - \omega') -$$

$$- (1 - \delta) \int_0^{\omega_{\infty}} B(T) dP(\omega + \omega'), \quad (1.13)$$

$$S(\omega) = S^0 (1 - \tilde{A}) \cos \Theta_0 P_{\kappa} \left(\frac{\omega_{\infty} - \omega'}{\cos \Theta_0} \right), \quad \mathcal{E}_\pi = \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial (S + G - U)}{\partial z}.$$

В этих соотношениях под ρ_π понимается содержание водяного пара. Содержание же других поглощающих и излучающих веществ (углекислый газ и озон) учитывается косвенно с помощью коэффициентов, входящих в выражения для функций пропускания.

Изложенные способы параметризации лучистого теплообмена могут быть обобщены для случая облачной атмосферы. Наиболее просто это делается для бесконечных по горизонтали облачных слоев. Полагая, что внутри облака эффективное излучение $U - G$ и поток коротковолновой радиации S равны нулю, можно проинтегрировать уравнение переноса лучистой энергии отдельно для надоблачной и подоблачной частей атмосферы и для безоблачных слоев. После этого можно рассчитать для каждого уровня радиационный баланс и приток тепла к отдельным слоям.

В случае несплошной облачности расчет может быть произведен дважды: для ясного неба и для сплошной облачности. Приток тепла при количестве облаков N (баллы) описывается соотношением

$$\mathcal{E}_\pi^N = \frac{N}{10} \mathcal{E}_\pi^{10} + \left(1 - \frac{N}{10} \right) \mathcal{E}_\pi^0, \quad (1.14)$$

где $\mathcal{E}_\pi^{10}$ и $\mathcal{E}_\pi^0$ — притоки тепла для сплошной облачности и ясного неба.

6.1.3. Параметризация лучистого теплообмена на основе гипотезы Ньютона

Согласно гипотезе Ньютона, в любой точке атмосферы для данного момента времени существует некоторое состояние «равновесия», которому соответствуют конкретные значения метеорологических элементов. Если по каким-либо причинам произошло отклонение от этого состояния, то атмосфера стремится вновь к нему вернуться за некоторое время t_0 , называемое временем релаксации. Если происходит изменение температуры, то это сопровождается выделением или поглощением тепла. Если T — температура в данный момент,

а T — значения температуры в состоянии равновесия, то приток тепла можно выразить в виде

$$\mathcal{E}_\pi = k\rho_p (\tilde{T} - T), \quad (1.15)$$

где $k = 1/t_0$. Метод прост в реализации. Трудности связаны с определением состояния равновесия и времени релаксации (в некоторых работах принимается $t_0 \approx 10^6$ с).

6.1.4. Параметризация лучистого теплообмена в модели ЕЦСПП

Детальное описание этой схемы параметризации ввиду ее сложности выходит за рамки книги, поэтому здесь будут изложены основные принципы этой параметризации.

Полный спектр коротковолновой (солнечной) радиации делится на два диапазона, а длинноволновой — на три. Расчет потоков радиации в каждом из этих диапазонов производится для уровней модели с учетом распределения следующих характеристик атмосферы:

- отношения смеси водяного пара;
- массовой доли насыщенного водяного пара;
- водности;
- содержания углекислого газа, озона и аэрозоля;
- температуры воздуха;
- облачности в слоях модели атмосферы;
- альбедо и излучательной способности подстилающей поверхности;
- зенитного угла Солнца в фиксированные моменты суток при интегрировании уравнений по времени;
- солнечной постоянной.

При расчетах потоков используются заранее затабулированные функции пропускания для каждого из указанных пяти диапазонов спектра излучения как для безоблачной атмосферы, так и для конкретного распределения облачных слоев.

Реализация схемы параметризации при интегрировании уравнений модели во времени производится не на каждом шаге, а через каждые 3—4 ч, что является достаточным для учета и расчета суточного хода метеорологических величин.

6.2. Теоретические основы параметризации процесса турбулентного обмена

Параметризация этого процесса основана на полуэмпирической теории турбулентности и соображениях теории размерности. В соответствии с полуэмпирической теорией турбулентности принимается, что вектор турбулентного потока $\mathbf{Q}_\Phi$ любой скалярной величины Φ , отнесенной к единице объема, представляется в виде

$$\mathbf{Q}_\Phi = \overline{\mathbf{V}'\Phi'} = -K \nabla \Phi, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{V}' = \mathbf{V} - \bar{\mathbf{V}}$ — отклонение вектора ветра $\mathbf{V}$ от его среднего значения $\bar{\mathbf{V}}$; $\varphi' = \varphi - \bar{\varphi}$ — отклонение величины φ от ее среднего значения; $K = \{\kappa_{ij}\}$ — тензор коэффициентов турбулентности; индексы i, j принимают значения 1, 2, 3 и соответствуют трем координатам, например координатам x, y, z ; $\nabla = \text{grad}$ — градиент.

В соответствии с выражением (2.1) формулы для турбулентных потоков импульса $\rho \overline{\mathbf{V}'u'}$, $\rho \overline{\mathbf{V}'v'}$, $\rho \overline{\mathbf{V}'w'}$ по осям x, y, z , потоков тепла $\mathbf{H} = c_p \rho \overline{\mathbf{V}'\theta'}$, влаги $\mathbf{Q} = \rho \overline{\mathbf{V}'q'}$ и атмосферных примесей $\mathbf{Q}_a = \overline{\mathbf{V}'s'_a}$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho \overline{\mathbf{V}'u'} &= i \overline{\rho u'u'} + j \overline{\rho v'u'} + k \overline{\rho w'u'} = -i \rho \kappa_x \frac{\partial u}{\partial x} - j \rho \kappa_y \frac{\partial u}{\partial y} - k \rho \kappa_z \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \rho \overline{\mathbf{V}'v'} &= i \overline{\rho u'v'} + j \overline{\rho v'v'} + k \overline{\rho w'v'} = -i \rho \kappa_x \frac{\partial v}{\partial x} - j \rho \kappa_y \frac{\partial v}{\partial y} - k \rho \kappa_z \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \rho \overline{\mathbf{V}'w'} &= i \overline{\rho u'w'} + j \overline{\rho v'w'} + k \overline{\rho w'w'} = -i \rho \kappa_x \frac{\partial w}{\partial x} - \\ &\quad - j \rho \kappa_y \frac{\partial w}{\partial y} - k \rho \kappa_z \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \mathbf{H} &= c_p \rho \overline{\mathbf{V}'\theta'} = i c_p \rho \overline{u'\theta'} + j c_p \rho \overline{v'\theta'} + k c_p \rho \overline{w'\theta'} = \\ &= -i c_p \rho \kappa_x \frac{\partial \theta}{\partial x} - j c_p \rho \kappa_y \frac{\partial \theta}{\partial y} - k c_p \rho \kappa_z \frac{\partial \theta}{\partial z}, \\ \mathbf{Q} &= \rho \overline{\mathbf{V}'q'} = i \overline{\rho u'q'} + j \overline{\rho v'q'} + k \overline{\rho w'q'} = \\ &= -i \rho \kappa_x \frac{\partial q}{\partial x} - j \rho \kappa_y \frac{\partial q}{\partial y} - k \rho \kappa_z \frac{\partial q}{\partial z}, \\ \mathbf{Q}_a &= \overline{\mathbf{V}'s'_a} = i \overline{u's'_a} + j \overline{v's'_a} + k \overline{w's'_a} = -i \kappa_x \frac{\partial s_a}{\partial x} - j \kappa_y \frac{\partial s_a}{\partial y} - k \kappa_z \frac{\partial s_a}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из этих соотношений следует, что

$$\begin{aligned} \overline{u'u'} &= -\kappa_x \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \overline{v'u'} = -\kappa_y \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \overline{w'u'} = -\kappa_z \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \overline{u'v'} &= -\kappa_x \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \overline{v'v'} = -\kappa_y \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \overline{w'v'} = -\kappa_z \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \overline{u'w'} &= -\kappa_x \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \overline{v'w'} = -\kappa_y \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \overline{w'w'} = -\kappa_z \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \overline{u'\theta'} &= -\kappa_x \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \overline{v'\theta'} = -\kappa_y \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad \overline{w'\theta'} = -\kappa_z \frac{\partial \theta}{\partial z}, \\ \overline{u'q'} &= -\kappa_x \frac{\partial q}{\partial x}, \quad \overline{v'q'} = -\kappa_y \frac{\partial q}{\partial y}, \quad \overline{w'q'} = -\kappa_z \frac{\partial q}{\partial z}, \\ \overline{u's'_a} &= -\kappa_x \frac{\partial s_a}{\partial x}, \quad \overline{v's'_a} = -\kappa_y \frac{\partial s_a}{\partial y}, \quad \overline{w's'_a} = -\kappa_z \frac{\partial s_a}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$ — коэффициенты турбулентности, соответствующие осям x, y, z . Подставляя соотношения (2.3) в выражения (2.8) и (2.9) из главы 1, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial}{\partial x} \kappa_x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \kappa_y \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \kappa_z \frac{\partial u}{\partial z}, \\ F_y &= \frac{\partial}{\partial x} \kappa_x \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \kappa_y \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \kappa_z \frac{\partial v}{\partial z}, \\ F_z &= \frac{\partial}{\partial x} \kappa_x \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \kappa_y \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \kappa_z \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \mathcal{E}_T &= c_p \rho \left(\frac{\partial}{\partial x} \kappa_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \kappa_y \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \kappa_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right), \\ \mathcal{E}_{\text{пт}} &= \rho \left(\frac{\partial}{\partial x} \kappa_x \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \kappa_y \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \kappa_z \frac{\partial q}{\partial z} \right), \\ \mathcal{E}_{\text{ат}} &= \frac{\partial}{\partial x} \kappa_x \frac{\partial s_a}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \kappa_y \frac{\partial s_a}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \kappa_z \frac{\partial s_a}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Полученные теоретические зависимости (2.4) турбулентных вкладов в ускорения частиц, притоки тепла, влаги и атмосферных примесей от осредненных значений скорости, температуры, отношения смеси и содержания атмосферных примесей служат основой для получения параметризационных формул.

Прежде чем переходить к получению этих формул и их интерпретации подчеркнем следующее. Атмосферную турбулентность можно разделить на два класса: мелкомасштабную турбулентность, горизонтальный масштаб которой имеет порядок метров, и вихревую (среднемасштабную) турбулентность, горизонтальный масштаб которой составляет от 100 км (движения мезомасштаба) до тысячи километров (движения подсиноптического масштаба). Методы параметризации процессов мелкомасштабной и вихревой турбулентности существенно различаются, поэтому рассмотрим их в отдельности.

6.3. Параметризация мелкомасштабной турбулентности

Мелкомасштабная (микромасштабная) турбулентность — это беспорядочные перемещения в различных направлениях на расстояния порядка метров элементарных объемов среды в виде небольших вихрей (диаметром порядка десятков сантиметров), оси которых могут располагаться произвольным образом. Пройдя это расстояние l , называемое путем смешения (перемешивания), частицы воздуха мелкомасштабного вихря полностью смешиваются с окружающим воздухом. При этом происходит передача свойств воздуха (температуры и др.) от одних объемов к другим. Мелкомасштабная турбулентность оказывает существенное влияние на крупномасштабные процессы.

В различных моделях атмосферы, как правило, принимается, что для небольших площадей, порядка $(\Delta r)^2 \approx 10^4 \text{ км}^2$ $\kappa_x = \kappa_y = \kappa_1 =$

$= \text{const}$, а $\kappa_z = \kappa(z)$. В этом случае выражения для F , $\mathcal{E}$ в соотношениях (2.4) упрощаются и приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} E_x &= \kappa_1 \Delta u + \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial u}{\partial z}, \quad F_y = \kappa_1 \Delta v + \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \mathcal{E}_\tau &= c_p \rho \left(\kappa_1 \Delta \theta + \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} \right), \quad \mathcal{E}_{\text{пт}} = \rho \left(k_1 \Delta q + \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial q}{\partial z} \right), \\ \mathcal{E}_{\text{ат}} &= \kappa_1 \Delta s_a + \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial s_a}{\partial z}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где Δ — плоский оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

При использовании температуры T вместо потенциальной температуры θ для $\mathcal{E}_\tau$ получаем

$$\mathcal{E}_\tau = c_p \rho \kappa_1 \Delta T + c_p \rho \frac{\partial}{\partial z} \left[\kappa \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a \right) \right], \quad (3.2)$$

где γ_a — сухоадиабатический градиент температуры.

Если в выражениях (3.1) u , v , θ , q , s_a — осредненные величины, задаваемые в узлах сетки, а коэффициенты турбулентности κ_1 и κ определяются по принципу Прандтля в зависимости от пути смешения l , то порядок величин последних членов в каждом из этих соотношений значительно превышает порядок величин предпоследних членов. Например, при шагах по координатам $\Delta z = 1$ км, $\Delta r = 100$ км и $O(u) = O(v) = V$ имеем:

$$Q \left(\frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \kappa \frac{V}{(\Delta z)^2}, \quad O(\kappa_1 \Delta u) = \kappa_1 \frac{V}{(\Delta r)^2}.$$

Определим отношение порядков этих членов при $\kappa_1 = \kappa$:

$$O \left(\frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial u}{\partial z} \right) / O(\kappa_1 \Delta u) = \left(\kappa \frac{V}{(\Delta z)^2} \right) / \left(\kappa_1 \frac{V}{(\Delta r)^2} \right) = \left(\frac{\Delta r}{\Delta z} \right)^2 = 10^4.$$

Таким образом, с высокой степенью точности для членов, описывающих мелкомасштабную турбулентность, можно принять, что

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial u}{\partial z}, \quad F_y = \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \mathcal{E}_\tau &= c_p \rho \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial \theta}{\partial z}, \quad \mathcal{E}_{\text{пт}} = \rho \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial q}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

6.4. Параметризация планетарного пограничного слоя

Из выражений (3.3) для величин F и $\mathcal{E}$ следует, что мелкомасштабная турбулентность может быть наиболее существенной в слоях со значительными градиентами скорости ветра, температуры и влажности. Как известно, слои с большими градиентами величин называются пограничными. Из всех пограничных слоев, существующих

в атмосфере, наиболее важным является планетарный пограничный слой (ППС), прилегающий к земной поверхности.

Высоту ППС h можно приближенно оценить исходя из равенства порядков величин силы турбулентной вязкости и силы Кориолиса:

$$O\left(\frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial u}{\partial z}\right) = O(lv). \quad (4.1)$$

Отсюда следует, что

$$h \approx \sqrt{\kappa/l}. \quad (4.2)$$

При $\kappa = 10 \text{ м}^2/\text{с}$ и $l = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ $h \approx 330 \text{ м}$. Более детальные оценки высоты ППС, основанные на его определении как слоя, в котором направления фактического и геострофического ветра различаются, дают $h \approx 1 \text{ км}$.

Из соотношения (4.2) следует, что у полюсов высота ППС меньше, в других широтах больше. Однако, как это следует из формулы (4.2), в экваториальной зоне, где $l \rightarrow 0$, ППС при данном определении исчезает. Там образуется особый пограничный слой со своими специфическими свойствами.

Внутри ППС, у самой земной поверхности формируется особый слой, называемый внутренним приземным пограничным слоем (ВПС). Это слой, в котором сила турбулентной вязкости существенно превышает все остальные силы, в том числе и силу Кориолиса. Для такого слоя вместо (4.1) можно записать

$$O\left(\frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial u}{\partial z}\right) \gg O(lv).$$

Из соотношения

$$O\left(\frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 10 \cdot O(lv)$$

для высоты ВПС h_1 получаем оценку: $h_1 \approx 30 \text{ м}$.

Первый способ параметризации эффектов ППС в прогностической модели был предложен И. А. Кибелем. Этот эффект он предложил включить в квазигеострофическую модель с помощью граничного условия на нижнем уровне прогностической модели в виде

$$\text{при } p = P \quad w = w_h, \quad (4.3)$$

где w_h — вертикальная скорость на верхней границе ППС, обусловленная турбулентной вязкостью. Она находится путем решения уравнений горизонтального движения, записанных при условии стационарности процесса, горизонтальной однородности поля ветра и отсутствия крупномасштабных вертикальных движений в виде:

$$O = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + lv + \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial u}{\partial z}, \quad O = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - lu + \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (4.4)$$

при условии «прилипания» у земной поверхности:

$$\text{при } z = 0 \quad u = v = w = 0,$$

$$\text{при } z \rightarrow \infty \quad u, v \text{ ограничены.} \quad (4.5)$$

Для случаев постоянства силы градиента давления с высотой внутри ППС и постоянства коэффициента турбулентности или при задании какой-либо закономерности его изменения с высотой решение уравнений (4.4) при условиях (4.5) для u и v имеет вид

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{l\rho} \frac{\partial p}{\partial y} (1 - e^{-\delta z} \cos \delta z) - \frac{1}{l\rho} \frac{\partial p}{\partial x} e^{-\delta z} \sin \delta z, \\ v &= \frac{1}{l\rho} \frac{\partial p}{\partial x} (1 - e^{-\delta z} \cos \delta z) - \frac{1}{l\rho} \frac{\partial p}{\partial y} e^{-\delta z} \sin \delta z, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $\delta = \sqrt{l/2\kappa}$.

Проинтегрировав уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

по высоте от $z = 0$ до $z = h$ при условии (4.5), для w_h получим:

$$w_h = a \Delta p_0, \quad (4.7)$$

где p_0 — давление на уровне моря, a — коэффициент, Δ — плоский оператор.

В современных прогностических моделях атмосферы с полными уравнениями гидротермодинамики учет мелкомасштабной турбулентности в ППС производится путем расчета ее вкладов в изменение скорости ветра, температуры и влажности, т. е. путем расчета величин F_x , F_y , $\mathcal{E}_T$ и $\mathcal{E}_{\text{пт}}$ в ППС.

Одним из простейших способов параметризации ППС является полуэмпирический. Произведя замену в уравнениях (3.3) первых производных по z от величин $\kappa \frac{\partial u}{\partial z}$, $\kappa \frac{\partial v}{\partial z}$, $\kappa \frac{\partial \theta}{\partial z}$ и $\kappa \frac{\partial q}{\partial z}$ конечными разностями по их значениям при $z = h$ (на верхней границе ППС) и при $z = 0$ (у земной поверхности), получаем:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{h} \left[\left(\kappa \frac{\partial u}{\partial z} \right)_h - \left(\kappa \frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 \right], \\ F_y &= \frac{1}{h} \left[\left(\kappa \frac{\partial v}{\partial z} \right)_h - \left(\kappa \frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 \right], \\ \mathcal{E}_T &= \frac{c_p \rho}{h} \left[\left(\kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_h - \left(\kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_0 \right], \\ \mathcal{E}_{\text{пт}} &= \frac{\rho}{h} \left[\left(\kappa \frac{\partial q}{\partial z} \right)_h - \left(\kappa \frac{\partial q}{\partial z} \right)_0 \right], \end{aligned}$$

где индексами h и 0 обозначены произведения κ на производные при $z = h$ и $z = 0$. Принимая, что при $z = h$, т. е. на верхней границе ППС, вертикальные турбулентные потоки всех величин равны нулю, находим:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{1}{h} \left(\kappa \frac{\partial u}{\partial z} \right)_0 = -\frac{1}{\rho h} \tau_{x0}, \quad F_y = \frac{1}{h} \left(\kappa \frac{\partial v}{\partial z} \right)_0 = -\frac{1}{\rho h} \tau_{y0}, \\ \mathcal{E}_T &= -\frac{c_p \rho}{h} \left(\kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_0 = \frac{H_0}{h}, \quad \mathcal{E}_{\text{пт}} = -\frac{\rho}{h} \left(\kappa \frac{\partial q}{\partial z} \right)_0 = \frac{Q_0}{h}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $\tau_{x0} = \rho\kappa \frac{\partial u}{\partial z}$, $\tau_{y0} = \rho\kappa \frac{\partial v}{\partial z}$ — вертикальные потоки импульса по осям x и y , $H_0 = -c_p \rho\kappa \frac{\partial \theta}{\partial z}$, $Q_0 = -\rho\kappa \frac{\partial q}{\partial z}$ — вертикальные потоки тепла и влаги у земной поверхности.

Таким образом, для определения величин F_x , F_y , $\mathcal{E}_T$ и $\mathcal{E}_{пт}$ в ППС достаточно определить турбулентные вертикальные потоки соответствующих величин у земной поверхности. Для этих потоков широкое распространение получили следующие параметризационные формулы:

$$\begin{aligned}\tau_{x0} &= -\rho h_1 C |V_{h_1}| u_{h_1}, \quad \tau_{y0} = -\rho h_1 C |V_{h_1}| v_{h_1}, \\ H_0 &= \rho h_1 C |V_{h_1}| (T_{h_1} - T_0), \quad Q_0 = -\rho h_1 f C_{п},\end{aligned}\quad (4.9)$$

где величины с индексами 0 и h_1 относятся к земной поверхности ($z = 0$) и верхней границе приземного подслоя ($h_1 \approx 50$ м), в котором вертикальные потоки постоянны; f — относительная влажность воздуха; V — горизонтальный вектор скорости ветра; C и $C_{п}$ — безразмерные коэффициенты (коэффициенты сопротивления), подбираемые эмпирическим путем. Так, в глобальной модели Национального центра атмосферных исследований США, $C = 0,003$, $C_{п} = 0,76$; в модели СО АН СССР, в пятиуровневой модели метеорологической службы Соединенного Королевства и в моделях ЕЦСПП эти коэффициенты зависят от числа Ричардсона

$$= Ri \frac{g}{\beta^2 \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{g}{\beta^2 T} (\gamma_a - \gamma), \quad (4.10)$$

где

$$\beta^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2.$$

Эта зависимость такова, что вклад турбулентных членов в формирование вертикальных потоков увеличивается при уменьшении числа Ri .

Главным недостатком параметризационных формул вида (4.9) является недостаточная обоснованность задания коэффициентов сопротивления.

В. А. Шнайрманом и А. Г. Тарнопольским был предложен метод параметризации ППС, основанный на решении системы уравнений гидротермодинамики, включающей уравнения горизонтального движения (4.4), а также уравнения притоков тепла и влаги при условии стационарности процесса, однородности полей температуры и влажности и отсутствия лучистого теплообмена и фазовых превращений влаги в виде

$$\frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial q}{\partial z} = 0. \quad (4.11)$$

Кроме того, в систему уравнений входит уравнение баланса кинетической энергии турбулентных пульсаций:

$$\kappa \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] - \beta \kappa \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial E'}{\partial z} - \mathcal{E}_д = 0, \quad (4.12)$$

где

$$E' = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}),$$

u' , v' , w' — турбулентные пульсации составляющих скоростей, а черта сверху означает осреднение; $\beta = g/\bar{\theta}$ — параметр конвекции; $\bar{\theta}$ — среднее значение θ ; $\mathcal{E}_d$ — скорость диссипации кинетической энергии турбулентных пульсаций в тепло, происходящей вследствие трения воздуха о подстилающую поверхность. Дополнительно используется ряд соотношений из теории размерности.

На основании решения указанной системы уравнений получены простые параметризационные формулы для всех характеристик ППС, включая турбулентные потоки, коэффициента турбулентности κ , высоту ППС h . Все указанные характеристики ППС выражаются через три параметра, характеризующих крупномасштабное движение:

1) число Россби

$$Ro = \frac{V_g}{f z_0}, \quad (4.13)$$

2) внешний параметр стратификации

$$M = \frac{g}{f V_g} \frac{\delta \theta}{\theta_0}, \quad (4.14)$$

3) внутренний параметр стратификации

$$\mu_0 = \frac{M - 2,5\chi\kappa^4 (\gamma_a - \gamma_h) g / l^2 \theta_0}{1,14\chi [lg(Ro\chi) - 1,14]}. \quad (4.15)$$

Здесь и далее $\delta\theta = \theta_h - \theta_0$ — разность потенциальной температуры на верхней границе ППС и у земной поверхности; γ_h — вертикальный градиент температуры при $z = h$; $C_D = 10^{-3}$ — коэффициент сопротивления; z_0 — параметр шероховатости, χ — «геострофический» коэффициент трения:

$$\chi = \frac{v^*}{\kappa V_g} = a (\lg Ro)^2 + b \lg Ro + c; \quad (4.16)$$

v^* — динамическая скорость; $\kappa = 0,38$; $a = 0,00405$; $b = -0,068$; $c = 0,37$; α — угол между векторами геострофического и фактического ветра:

$$\alpha = a_1 \lg(Ro)^2 + b_1 \lg Ro + c_1 \quad (4.17)$$

$$(a_1 = 1, b_1 = -15, c_1 = 82).$$

Величины турбулентных потоков выражаются через приведенные параметры следующим образом:

$$\tau_{x0} = \rho \kappa^2 \chi V_g (u_g \cos \alpha - v_g \sin \alpha),$$

$$\tau_{y0} = \rho \kappa^2 \chi V_g (u_g \sin \alpha + v_g \cos \alpha),$$

$$H_0 = - \frac{c_D \rho l}{g} V_g^2 \chi^2 \theta_0 \mu_0,$$

$$Q_0 = \rho C_D V_{1000} (q_{1000} - q_{850}), \quad (4.18)$$

где V_g и V_{1000} — значения модуля скорости геострофического ветра на верхней границе ППС и на поверхности 1000 гПа, q_{850} и q_{1000} — значения массовой доли влаги на поверхностях 850 и 1000 гПа.

В рассмотренной методике возможен учет бароклинности ППС. Для этого вводится средний для ППС горизонтальный градиент температуры $\Gamma = |\partial \bar{T} / \partial n|$, где n — нормаль к изотермам, и с его помощью учитывается изменение с высотой силы градиента давления.

Параметризация внутреннего пограничного (приземного) слоя основана на теории подобия А. С. Момина и А. М. Обухова. Согласно этой теории вводится безразмерная высота $\xi = z/L^*$, называемая параметром стратификации, где L^* — масштаб длины:

$$L^* = u^* / \kappa^2 \beta T^*,$$

u^* — динамическая скорость, T^* — масштаб температуры:

$$T^* = -H_0 / \kappa c_p \rho u^*.$$

Далее вводятся безразмерные скорость ветра V/u^* и температура T/T^* . Доказывается, что безразмерные скорости ветра и температура являются универсальными функциями одного параметра ξ , т. е. параметра статической устойчивости. Если известны значения V и T на каком-либо одном уровне z_1 , находящемся вблизи подстилающей поверхности (например, $z_1 = 1$ м), то значения $V(z)$ и $T(z)$ внутри приземного слоя можно представить в виде

$$V(z) = V(z_1) + \frac{u^*}{\kappa} [f_v(\xi) - f_v(\xi_1)],$$

$$T(z) = T(z_1) + T^* [f_\theta(\xi) - f_\theta(\xi_1)],$$

где безразмерные переменные ξ и ξ_1 соответствуют высотам z и z_1 , f_v и f_θ — универсальные функции для скорости ветра и температуры соответственно. Для этих функций на основе обработки измерений получены различные аппроксимации. Например, для случая сильной неустойчивости ($\xi < -0,07$)

$$f_v(\xi) = f_\theta(\xi) = 0,25 + 1,2\xi^{-1/3}.$$

6.5. Параметризация процессов вихревой (среднемасштабной) турбулентности

Под вихревой (среднемасштабной) турбулентностью будем понимать обмен значительных объемов воздуха, происходящий в результате перемещения вихрей с вертикальной осью, горизонтальные размеры которых не превышают $4\Delta r$. Такие движения не могут быть непосредственно описаны численными методами по значениям осредненных метеорологических величин в узлах сетки точек. Это связано, в частности, с тем, что осреднение исходных уравнений гидротермодинамики производится по площадям элементарных ячеек сетки, т. е. по площадям, равным $(\Delta r)^2$. Следовательно, такие дви-

жения являются движениями подсеточных масштабов. К их числу относятся движения в небольших ложбинах и гребнях с горизонтальной протяженностью порядка $2\Delta r$, некоторые мезомасштабные движения, а также часть гравитационных колебаний.

При построении уравнений зональной модели циркуляции атмосферы, например, осреднение уравнений производится по кругам широты. Основные члены уравнений зональной модели атмосферы, содержащие осредненные величины, описывают меридиональный обмен в среднем для кругов широты. В реальной же атмосфере на каждом круге широты может быть несколько вихрей диаметром до нескольких тысяч километров. Эти вихри обуславливают меридиональный обмен воздуха, существенно отличающийся от среднего вдоль круга широты. При исследовании зональной циркуляции атмосферы этот процесс принято называть *вихревой среднемасштабной турбулентностью*.

Несмотря на существенное различие процессов вихревой (среднемасштабной), а также крупномасштабной турбулентности (в зональных моделях атмосферы), общие подходы к их параметризации являются схожими. Этот подход в конечном итоге сводится к описанию членов уравнений модели, содержащих отклонения величин от средних значений, через осредненные величины в узлах сетки, т. е. через параметры основной модели.

Однако существует одно принципиальное различие в проявлениях процесса турбулентности разных масштабов. При развитии мелкомасштабной турбулентности происходит передача энергии от движений мелкого масштаба к движениям еще более мелких масштабов и в конечном итоге переход ее в тепло, т. е. имеет место диффузионный процесс. В случае же вихревых турбулентных движений среднего и крупного масштаба могут происходить два противоположных процесса: передача энергии от движений более крупного масштаба к движениям более мелкого масштаба, т. е. диффузионный процесс, и (реже) передача энергии от движений более мелких масштабов к движениям более крупных масштабов. В этом случае говорят о движениях с *отрицательной вязкостью*. Этот последний процесс особенно важен при интенсификации циклонов и формировании интенсивных зональных движений в умеренных широтах, в частности струйных течений.

В простейшем случае параметризация вихревой турбулентности сводится к использованию соотношений вида предпоследних членов выражений (4.1), т. е. принимается, что влияние вихревой горизонтальной вязкости на крупномасштабную циркуляцию описывается соотношениями

$$\begin{aligned} F_x &= \kappa_\Omega \Delta u, & F_y &= \kappa_\Omega \Delta v, \\ \mathcal{E}_T &= c_p \rho \kappa_\Omega \Delta \theta, & \mathcal{E}_{\text{пт}} &= \rho \kappa_\Omega \Delta q, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где Δ — плоский оператор Лапласа, нижний индекс Ω при соответствующих коэффициентах турбулентности означает, что они описывают влияние вихревой турбулентности на поля ветра, температуры и влажности.

Отличие соотношений (5.1) от соотношений (3.1) сводится к определению коэффициентов турбулентности. Если в соотношениях (3.1) коэффициент κ_1 определяется главным образом на основании положений Прандтля, то в соотношениях (5.1) коэффициенты κ_Ω определяются в основном с помощью эмпирических данных. Так, в модели общей циркуляции атмосферы Гидрометцентра СССР принято, что коэффициенты вихревой турбулентной вязкости пропорциональны модулям лапласиана от осредненных величин:

$$\kappa_\Omega = k_0 |\Delta u|, \quad (5.2)$$

где k_0 — постоянная (например, $k_0 = 10^{15} \text{ м}^3$).

Более общее выражение для описания эффекта сил горизонтальной вихревой турбулентности может быть получено на основе теории двумерной турбулентности. Согласно этой теории принимается, что силы горизонтальной вихревой вязкости обусловлены деформацией (D) и описываются выражениями

$$F_\lambda = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\kappa_\Omega D_T) + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\kappa_\Omega D_s), \quad (5.3)$$

где

$$\begin{aligned} D_T &= \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \varphi} v_\varphi \cos \varphi \right), \\ D_s &= \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} v_\lambda \cos \varphi \right), \\ D &= (D_T^2 + D_s^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \kappa_\Omega = \gamma L^2 D. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Коэффициент L связывается с шагом сетки, а γ подбирается эмпирическим путем ($\gamma \approx 0,18$).

На основании анализа переходов энергии В. А. Шпайдман для коэффициента вихревой турбулентной диффузии предложил следующее соотношение:

$$\kappa_\Omega = \gamma L_{\min}^2 |\Omega|, \quad (5.5)$$

где $|\Omega|$ — модуль вихря скорости, $L_{\min}$ — минимальная длина волны, которая описывается моделью явно ($L_{\min} = 4\Delta r$).

6.6. Параметризация процесса крупномасштабной конденсации

Образование облачности и осадков происходит в основном в результате процессов конденсации при подъеме воздуха при крупномасштабных и мезомасштабных процессах. Процесс конденсации описывается с помощью параметризации.

Важнейшим моментом параметризации конденсации при крупномасштабном процессе является предположение о возможности вычисления осредненной по площади вертикальной скорости или ее

аналога $\tau = dp/dt$ независимым от параметризации способом, путем интегрирования основных уравнений модели атмосферы.

В этом параграфе будет изложен вариант параметризации конденсации при крупномасштабном процессе (для краткости в дальнейшем этот процесс будет называться крупномасштабной конденсацией) в предположении о том, что аналог вертикальной скорости является известным.

Для вывода параметризационных соотношений отвлечемся от адвективных процессов, а также от всех видов притоков тепла и влаги, кроме их притоков, обусловленных фазовыми превращениями влаги.

В качестве одного из основных уравнений возьмем уравнение притока тепла

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\gamma_a}{g\rho} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c_p\rho} \mathcal{E}. \quad (6.1)$$

При сделанных предположениях

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\Phi = \mathcal{L}m, \quad (6.2)$$

где $\mathcal{L}$ — теплота конденсации, m — скорость конденсации (изменение количества водяного пара в единице объема в единицу времени).

Учитывая, что $\tau = dp/dt$, а $\gamma_a = g/c_p$, уравнение притока тепла перепишем в виде

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{c_p\rho} \tau + \frac{\mathcal{L}m}{c_p\rho}. \quad (6.3)$$

Будем считать, что конденсация водяного пара происходит, когда относительная влажность достигает 100 %, т. е. когда водяной пар становится насыщенным.

Очевидно, что если ρ_n — плотность насыщенного водяного пара, то

$$m = -d\rho_n/dt. \quad (6.4)$$

Используя уравнение состояния водяного пара

$$E = R_n \rho_n T,$$

где R_n — удельная газовая постоянная водяного пара, E — парциальное давление насыщенного водяного пара, получаем:

$$m = - \left(\frac{1}{R_n T} \frac{dE}{dt} - \frac{E}{R_n T^2} \frac{dT}{dt} \right).$$

Учитывая, что

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dT} \frac{dT}{dt},$$

и используя соотношение Клаузиуса — Клапейрона, находим:

$$m = - \frac{E}{R_n T^2} \left(\frac{\mathcal{L}}{R_n T} - 1 \right) \frac{dT}{dt}.$$

Введем далее вместо величины m величину $C = m/\rho$ — скорость конденсации водяного пара в единице массы воздуха. Очевидно, что

$$C = -\frac{E}{\rho R_{\Pi} T^2} \left(\frac{\mathcal{L}}{R_{\Pi} T} - 1 \right) \frac{dT}{dt}. \quad (6.5)$$

Подставим теперь в выражение (6.5) величину dT/dt из соотношения (6.3). В результате получим

$$C = -\frac{E}{\rho R_{\Pi} T^2} \left(\frac{\mathcal{L}}{R_{\Pi} T} - 1 \right) \left(\frac{\tau}{c_p \rho} + \frac{\mathcal{L}}{c_p} C \right).$$

Отметим, что

$$\frac{1}{\rho T} = \frac{R}{p}, \quad \text{а} \quad \frac{R}{R_{\Pi}} \frac{E}{p} = q_m,$$

где q_m — массовая доля насыщенного водяного пара. Тогда для величины C получаем

$$C = F(p, T) \tau, \quad (6.6)$$

где F — функция только переменных p и T и известных параметров:

$$F(p, T) = \frac{\frac{q_m}{p} \left(\frac{R}{c_p} - \frac{\mathcal{L}}{c_p T} \frac{R}{R_{\Pi}} \right)}{1 + \frac{q_m \mathcal{L} (\mathcal{L} - R_{\Pi} T)}{c_p R_{\Pi} T^2}}. \quad (6.7)$$

Эта функция может быть заранее затабулирована.

Приток тепла может быть теперь определен по соотношению (6.2).

Приток тепла и изменения температуры воздуха в результате фазовых переходов влаги описываются соотношениями

$$\mathcal{E}_{\Phi} = \mathcal{L} \rho C, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\Phi} = \frac{1}{c_p \rho} \mathcal{E}_{\Phi}. \quad (6.8)$$

Количество осадков, выпавших из единичного столба воздуха за время t_1 , рассчитывается по формуле А. Ф. Дюбука

$$W = \frac{1}{g} \int_0^{t_1} \int_p^0 \frac{dq_m}{dt} dp dt, \quad (6.9)$$

в которой

$$\frac{dq_m}{dt} = -\frac{1}{\rho} m = -C.$$

6.7. Параметризация процесса конвекции методом конвективного приспособления

Конвекция является очень сложным физическим процессом, поэтому ее нельзя описать с помощью уравнений точно. Если бы это и удалось сделать, то все равно возникли бы трудности при реализации из-за недостатка сведений о микроструктуре облаков, а также сложности необходимых расчетов. Ввиду сказанного наметилась определенная тенденция к созданию упрощенных теоретических

моделей конвекции, в которых характеристики конвекции, а также ее проявление (облачность, осадки, притоки тепла и пр.) могли быть описаны с помощью простейших уравнений и соотношений и выражены через параметры крупномасштабных процессов (осредненные значения скорости ветра, температуры, влажности и др.). Такой подход к задаче и получил название параметризации процесса конвекции.

Существует ряд методов параметризации процесса конвекции. Эти методы условно можно разбить на три группы, различающиеся принципиальной постановкой задачи и способами ее решения.

К первой группе можно отнести методы параметризации, основанные на гипотезе *конвективного приспособления* (Манабе и др.). Ко второй группе относятся методы, в которых используется гипотеза об *условной неустойчивости второго рода* (Куо и др.). В третью группу можно выделить методы параметризации конвекции при наличии *скоплений (ансамблей)* кучевых облаков (Аракава и др.).

В этом и следующем параграфах будут рассмотрены два из трех выше упомянутых методов параметризации.

В методе конвективного приспособления не делается попыток описания физического процесса конвекции, но дается простой алгоритм учета его влияния на тепло- и влагообмен, а также расчета количества осадков.

Основные положения данного метода параметризации сводятся к следующему. Если в каких-то слоях атмосферы возникла статическая неустойчивость, то конвекция должна приводить к перераспределению по вертикали тепла и влаги таким образом, чтобы в результате конвекции в этих и в соседних слоях атмосферы установилось устойчивое состояние. Если в этих слоях имеет место состояние насыщения, то при влажноадиабатическом процессе выделяется тепло конденсации и происходит образование осадков.

Рассмотрим, каким образом производится расчет изменений температуры δT (или тепла конденсации) и влажности δr при влажноадиабатическом процессе конвективного приспособления насыщенной водяным паром воздушной массы, а также количества выпавших при этом осадков.

Прежде всего по значениям температуры и влажности, полученным в узлах сетки прогностической или циркуляционной модели атмосферы (параметры крупномасштабного процесса), или по данным радиозондирования отыскиваются верхние (p_v) и нижние (p_n) границы слоев с влажноадиабатической неустойчивостью и состоянием насыщения по критериям

$$\gamma \geq \gamma_{ва} \quad \text{и} \quad r \geq r_m, \quad (7.1)$$

где $\gamma_{ва}$ — влажноадиабатический градиент температуры, r_m — значение отношения смеси при состоянии насыщения.

Искомые изменения температуры и массовой доли влаги q находят исходя из условий о неизменности в процессе конвекции в этих слоях (т. е. в слоях с конвекцией) влажной статической энергии

$$E_v = c_p T + gz + \mathcal{L}q, \quad (7.2)$$

установления в слоях влажноадиабатического градиента, при котором эквивалентно-потенциальная температура при вертикальных перемещениях не изменяется, и равенства нового значения влажности ее значению при состоянии насыщения при новом значении температуры.

Эти условия описываются следующими соотношениями:

$$\int_{p_H}^{p_B} (c_p \delta T + \mathcal{L} \delta r) dp = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial p} [\theta^* (T + \delta T, r + \delta r, p)] = 0, \quad (7.3)$$

$$r + \delta r = r_m (T + \delta T),$$

где $\theta^* = \theta \exp (\mathcal{L} r_m / c_p T)$ — эквивалентно-потенциальная температура, а δT и δr — приращения величин T и r .

Для нахождения значений δT и δr между уровнями p_B и p_H введем промежуточные уровни p_k . Далее интеграл в соотношении (7.3) запишем приближенно с учетом этих уровней (используя, например, метод трапеций). Производную по p представим конечными разностями с учетом уровней p_k . Для каждого из этих уровней запишем также и последнее из соотношений (7.3). В результате получится система линейных алгебраических уравнений для определения искоемых значений δT_k и δr_k на всех введенных уровнях, решая которую и складывая найденные приращения δT_k и δr_k с исходными значениями T_k и r_k , получаем их новые значения.

Далее процесс повторяют, используя эти новые значения: с помощью критерия (7.1) отыскиваются новые значения p_B и p_H , вновь составляется система линейных алгебраических уравнений и т. д. Описанный вычислительный процесс заканчивается, если на всех уровнях данной вертикали будут выполняться условия $\gamma_k < \gamma_{\text{ва}}$, $r_k < r_{mk}$. После получения окончательного значения δr (или δq) рассчитывается количество выпавших осадков по соотношению

$$W = -\frac{1}{g} \int_0^{p_s} \delta r dp. \quad (7.4)$$

Этот интеграл вычисляется численно (p_s — давление на поверхности Земли).

В случае сухоадиабатического процесса (сухоадиабатическое конвективное приспособление) вместо критерия (7.1) принимается критерий $\gamma \geq \gamma_a$, а для определения приращения температуры используются соотношения

$$\int_{p_H}^{p_B} c_p \delta T dp = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial p} [\theta (T + \delta T, p)] = 0, \quad (7.5)$$

которые являются частным случаем соотношений (7.3).

6.8. Метод параметризации кучевой конвекции, основанный на гипотезе условной неустойчивости второго рода

В изложенном в предыдущем параграфе методе конвективного приспособления не делается никаких предположений относительно причин и природы конвективных движений. Это существенно ограничивает возможности метода. В частности, этот метод совершенно исключает конвекцию в инверсионных слоях атмосферы, что противоречит данным наблюдений.

Физически более обоснованными являются способы параметризации кучевой конвекции, основанные на гипотезе условной неустойчивости второго рода, которую называют также гипотезой «проникающей» конвекции или гипотезой «горячих башен». Согласно этой гипотезе конвективные движения возможны как в слоях с влажноадиабатической неустойчивостью, так и в инверсионных слоях. Возникнув под действием силы Архимеда или беспорядочных турбулентных пульсаций, конвективные движения стимулируются крупномасштабными восходящими движениями и притоком влаги в результате ее горизонтальной адвекции и испарения с земной поверхности. Эти факторы можно рассматривать как своего рода вторичную неустойчивость атмосферы, которую и называют условной неустойчивостью второго рода (CISK).

Применение этой гипотезы для параметризации кучевой конвекции рассмотрим на примере методики, предложенной Куо. В основе этой методики лежат следующие положения:

1) кучевое облако имеет форму прямого цилиндра, основанием которого является уровень конденсации, а вершиной — уровень конвекции;

2) внутри облака вертикальные градиенты температуры и влажности равны их значениям при влажноадиабатическом процессе;

3) отсутствует какое-либо взаимодействие между облаком и окружающей средой, отсутствует вовлечение воздуха в облако;

4) кучевое облако существует непродолжительное время (δt), а при достижении определенного состояния «растворяется» в окружающей среде мгновенно, в результате чего изменяются температура, влажность, энергия и другие характеристики воздуха в пространстве, занятом облаком, и прилегающих к нему районах (окружающей среде).

Пусть α есть доля площади, занимаемой конвективной облачностью внутри единичной площадки, T_c и $\tilde{T}$ — температура воздуха в облаке и в окружающей среде, r_c и $\tilde{r}$ — отношение смеси в облаке и в окружающей среде, $\bar{T}$ и $\bar{r}$ — средние значения температуры и отношения смеси воздуха на исследуемой площади, которые устанавливаются по окончании процесса конвекции (конденсации и выпадения осадков).

Согласно рассматриваемой гипотезе в результате (по окончании) конвекции средние по площади значения температуры и отношения смеси определяются по формулам

$$\bar{T} = \alpha T_c + (1 - \alpha) \tilde{T}, \quad \bar{r} = \alpha r_c + (1 - \alpha) \tilde{r}.$$

Отсюда следует, что изменения температуры воздуха и влажности на данной площадке, произошедшие в процессе развития конвекции, описываются выражениями

$$\delta T = \bar{T} - \tilde{T} = \alpha T_c + (1 - \alpha) \tilde{T} - \tilde{T} = \alpha (T_c - \tilde{T}),$$

$$\delta r = \bar{r} - \tilde{r} = \alpha r_c + (1 - \alpha) \tilde{r} - \tilde{r} = \alpha (r_c - \tilde{r}).$$

Таким образом, если значения температуры и отношения смеси в облаке и окружающей среде в некоторый момент времени известны, то для определения их значений, которые установятся на исследуемой площадке в результате развития конвекции, необходимо определить величину α .

Для этого, согласно методике Куо, предполагается равенство между количеством влаги, поступающей в облако, и ее количеством, необходимым для установления состояния насыщения внутри объема облака.

Предполагается также, что поступление влаги в облако $\mathcal{E}_n$ происходит в результате адвекции влаги из подоблачного слоя (A_r) и испарения с подстилающей поверхности (Q_s). Величина A_r для слоя между поверхностями p_s и $p_{\text{конд}}$ рассчитывается по соотношению

$$\int_{p_s}^{p_{\text{конд}}} \nabla (\mathbf{V} \cdot \mathbf{r}) dp = -\frac{1}{g} \int_{p_s}^{p_{\text{конд}}} \left[\left(u \frac{\partial r}{\partial x} + v \frac{\partial r}{\partial y} \right) + r \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dp,$$

где $p_{\text{конд}}$ — уровень конденсации, а величина Q_s описывается формулой

$$Q_s = \rho_{h_1} C |V_{h_1}| (r_s - r_{h_1}),$$

где индексом h_1 отмечены величины, относящиеся к верхней границе приземного подслоя ($h_1 = 75$ м). Уровень конденсации $z_{\text{конд}}$ (м) может быть рассчитан, например, по формуле Ферреля

$$z_{\text{конд}} = 122 (t_s - \tau_s),$$

где t_s и τ_s — температура воздуха и точка росы у земной поверхности ($^{\circ}\text{C}$). Количество же влаги, необходимое для достижения состояния насыщения в облаке, можно определить по соотношению

$$\mathcal{E}_{n,2} = \frac{1}{g} \int_{p_{\text{конв}}}^{p_{\text{конд}}} \left[(r_m - \bar{r}) + \frac{c_p}{\mathcal{L}} (T_c - \bar{T}) \right] dp,$$

где $p_{\text{конв}}$ — уровень конвекции, который определяется как точка пересечения кривых состояния и стратификации (задаваемых в форм соответствующих уравнений).

Если δt — время формирования (существования) кучевого облака, то указанное выше предположение о равенстве влаги, поступающей в облако и необходимой для достижения воздухом состояния насыщения, применительно к единице времени и площади можно представить в виде

$$\mathcal{E}_{п,1} \delta t = \alpha \mathcal{E}_{п,2}.$$

Отсюда для α получаем

$$\alpha = \frac{\mathcal{E}_{п,1}}{\mathcal{E}_{п,2}} \delta t.$$

С учетом сказанного для притоков к единице объема тепла и влаги в результате процесса конвекции получаем

$$\mathcal{E} = c_p \rho \frac{\alpha}{\delta t} (T_c - \bar{T}),$$

$$\mathcal{E}_п = \frac{\alpha}{\delta t} (r_c - \bar{r}).$$

Для определения количества выпадающих осадков достаточно проинтегрировать последнее выражение от уровня конденсации до уровня конвекции. Полагая, что уровень конвекции совпадает с верхней границей кучевого облака, мы тем самым определяем его высоту.

6.9. Параметризация конвекции в скоплениях (ансамблях) кучевых облаков

Этот метод, предложенный Аракавой, Шубертом и др., основан на предположении о взаимодействии кучевых облаков с окружающей их атмосферой, состояние которой описывается метеорологическими величинами; значения последних определяются крупномасштабным процессом.

Указанная связь описывается уравнениями баланса энергии и влаги, осредненными по площади, достаточно большой, чтобы содержать совокупность облаков, различающихся по размерам, но меньшей, чем крупномасштабное возмущение. Считая площадь осреднения (равную площади ячейки сетки прогностической модели) единичной, запишем уравнения баланса статической энергии $E_c = c_p T + gz$ при отсутствии лучистого теплообмена и массовой доле влаги q в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{E}_c}{\partial t} &= -\nabla \bar{V} \bar{E} - \frac{\partial \bar{\tau} \bar{E}}{\partial p} + \mathcal{L} (c - e) - \frac{\partial \bar{\tau}' \bar{E}'}{\partial p}, \\ \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} &= -\nabla \bar{V} \bar{q} - \frac{\partial \bar{\tau} \bar{q}}{\partial p} + e - c - \frac{\partial \bar{\tau}' \bar{q}'}{\partial p}, \end{aligned} \quad (9.1)$$

где e и c — скорость изменения массовой доли влаги за счет испарения капель и конденсации соответственно, черта сверху над перемен-

ными означает осреднение по единичной площади, а штрих — отклонение переменных от средних значений.

Величины $\tau'E'$ и $\tau'q'$, которые характеризуют интенсивность турбулентных потоков энергии и влаги, связанных с кучевыми облаками, можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}\overline{\tau'E'} &= -M(p)(E - \bar{E}), \\ \overline{\tau'q'} &= -M(p)(q - \bar{q}),\end{aligned}\quad (9.2)$$

где $M(p)/g$ — вертикальный поток облачной массы в кучевых облаках; E и q — энергия и влажность в облаках; $\bar{E}$ и $\bar{q}$ — энергия и влажность в окружающем облака пространстве. Величину $M(p)$ в дальнейшем будем называть полным потоком массы в кучевых облаках.

Приведенные приближенные соотношения для вертикальных турбулентных потоков получены в предположении о том, что вертикальная скорость в облаках больше, чем в окружающем воздухе, а доля покрытия площади ячейки сетки облаками невелика (менее 0,1).

Система уравнений (9.1)—(9.2) будет замкнутой лишь в том случае, если известны вертикальные профили переменных M , E , q , c и e .

Замыкание этой системы уравнений возможно с помощью введения показателя скорости вовлечения массы в облака λ (параметр вовлечения). Можно предположить, что этот параметр определяется радиусом облака r по соотношению $\lambda \approx cr^{-1}$, где c — постоянная.

Для этого показателя принимается условие его постоянства по высоте; он описывается следующим выражением

$$\lambda = \frac{1}{m(z, \lambda)} \frac{dm(z\lambda)}{dz}, \quad (9.3)$$

где $m(z, \lambda) d\lambda$ — поток на уровне z массы в облаках, имеющих показатель вовлечения λ в интервале $\Delta\lambda/2 + \lambda \geq \lambda \geq \lambda - \Delta\lambda/2$.

Совокупность кучевых облаков можно разделить на типы по величине λ , что в общем эквивалентно их делению по максимальной высоте их вершин.

Из соотношения (9.3) следует, что

$$m(z, \lambda) = \begin{cases} m_b(\lambda) e^{\lambda(z-z_b)} & \text{при } z_b < z < z_d, \\ 0 & \text{при } z > z_d, \end{cases} \quad (9.4)$$

где $m_b(\lambda)$ — поток массы в облаках на уровне их основания $z = z_b$; z_d — уровень «вытекания», или диссипации облаков. Чем меньше радиус облака, тем больше параметр вовлечения и ниже расположен уровень диссипации z_d .

Общий поток массы в ансамбле кучевых облаков выразится в виде

$$M(z) = \int_0^{\lambda_d(z)} m(z, \lambda) d\lambda, \quad (9.5)$$

где $\lambda_d(z)$ — максимальная величина λ , при которой облака достигают высоты z .

Вытекание же массы из облаков описывается выражением

$$D(z) = m(z, \lambda_d) \frac{d\lambda_d(z)}{dz}. \quad (9.6)$$

Для замыкания выписанной системы уравнений необходимо еще одно уравнение для переменной $m_v(\lambda)$. Определение этой функции связано с большими трудностями, описание которых выходит за рамки книги. Здесь лишь отметим, что в одном из конкретных методов параметризации такое дополнительное соотношение получено из предположения о статическом равновесии ансамбля кучевых облаков с крупномасштабным процессом. Последнее сводится к постоянству во времени существования ансамбля облаков работы A , совершаемой силами плавучести в облаках, т. е. к условию

$$dA/dt = 0. \quad (9.7)$$

Окончательные результаты при использовании изложенного метода получаются после численного решения (на основе выражения (9.7)) интегрального уравнения Фредгольма первого рода.

В заключение необходимо подчеркнуть, что в этой главе изложены лишь общие, принципиальные основы методов параметризации того или иного физического процесса. При реализации же каждого метода в конкретной прогностической или циркуляционной модели атмосферы вводятся еще дополнительные физические условия или эмпирические соотношения. Кроме того, ввиду недостаточного объема в книгу не включены многие другие способы параметризации, в том числе параметризации процессов гидрологического цикла, имеющих важное значение в модели общей циркуляции атмосферы.

В главе 1 приведена система уравнений, на основе которой может быть поставлена задача прогноза метеорологических полей с учетом неадиабатичности атмосферных процессов. Для решения этой задачи необходимо использовать системы уравнений, содержащие уравнения переноса влаги. Прогноз влаги важен сам по себе, а также необходим для прогноза облачности и осадков. Прогноз влаги в неадиабатических моделях необходим, кроме того, для реализации схем параметризации лучистых и фазовых притоков тепла, а также турбулентных притоков влаги, которые рассмотрены в предыдущей главе.

В атмосфере влага может находиться в газообразном (парообразном), жидком (капельном) и твердом (кристаллическом) агрегатных состояниях (фазах). Разумеется, желательно прогнозировать влагу в трех фазах. Однако из-за отсутствия регулярных измерений содержания в атмосфере влаги в жидкой и твердой фазах, а также в связи с трудностями параметризации фазовых переходов в большинстве современных моделей предусматривается прогноз только характеристик влажности (влаги в газообразной фазе). Поэтому здесь основное внимание будет уделено рассмотрению различных подходов к прогнозу характеристик влажности, используемых в прогностических моделях, а также методов расчета облачности и осадков, базирующихся на прогнозе влаги в газообразной фазе. Что касается прогноза влаги в трех фазах, то постановка такой задачи также рассматривается в этой главе. Однако следует иметь в виду, что практическая реализация моделей влаги в трех фазах в настоящее время затруднена в силу указанных выше причин.

7.1. Прогноз влажности

7.1.1. Прогноз массовой доли водяного пара

Простейший вариант краткосрочного прогноза влаги в газообразной фазе в свободной атмосфере (вне пограничного слоя) можно построить, полагая, что перенос водяного пара происходит адиабатически, т. е. без учета диффузии, а также притока и стока, обусловленных испарением и конденсацией (сублимацией). В этом случае для ненасыщенного влажного воздуха справедливо уравнение, выражающее закон сохранения массы водяного пара в единице объема воздуха:

$$\frac{\partial (\rho q)}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathbf{V} \rho q) = 0, \quad (1.1)$$

где $q = 0,622 \frac{ET_d}{p}$ — массовая доля водяного пара; E — парциальное давление водяного пара; T_d — точка росы; p — давление; $\mathbf{V}$ — вектор скорости ветра; ρ — плотность воздуха.

Умножая уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{V} \rho) = 0$$

на q и вычитая результат из уравнения (1.1), получаем уравнение переноса массовой доли водяного пара

$$dq/dt = 0. \quad (1.2)$$

Уравнение (1.2) означает, что массовая доля водяного пара при указанных предположениях не изменяется в движущейся воздушной частице, т. е. является консервативной характеристикой потока.

Уравнение (1.2) в системе координат x, y, ζ, t ($\zeta = p/1000$) может быть записано в адвективной или дивергентной форме

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + \omega \frac{\partial q}{\partial \zeta} = 0, \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial (uq)}{\partial x} + \frac{\partial (vq)}{\partial y} + \frac{\partial (\omega q)}{\partial \zeta} = 0, \quad (1.4)$$

где $\omega = \partial \zeta / \partial t$ — аналог вертикальной скорости в изобарической системе координат. На основе уравнений (1.3) или (1.4), задавая граничные и начальные условия $q(x, y, \zeta, t_0)$, можно реализовать прогноз $q(x, y, \zeta, t)$ шагами по времени, используя на каждом шаге значения u, v, ω , рассчитываемые в процессе интегрирования уравнений той или иной прогностической модели. Для решения уравнений (1.3) и (1.4) применяются рассмотренные ранее методы численного интегрирования.

Если при интегрировании уравнений (1.3) и (1.4) предполагается использовать вложенные сетки, то боковые граничные условия (по x и y) ставятся с учетом одно- или двустороннего взаимодействия (см. главу 4). При прогнозе на ограниченной территории без вложенных сеток простейшие боковые граничные условия могут быть заданы в виде

$$\left. \frac{\partial q}{\partial t} \right|_{\Gamma} = 0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial q}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (1.5)$$

где Γ — боковая граница; n — нормаль к границе. Первое из них означает неизменность q , а второе обеспечивает отсутствие потока q через боковые границы. Естественно, в процессе решения уравнения (1.3) или (1.4) используется одно из этих условий.

Условия по ζ ставятся на верхней и нижней границах слоя атмосферы, где сосредоточена основная масса водяного пара, т. е. при $\zeta = \zeta_B$ и $\zeta = 1$, например, в виде

$$\left. \frac{\partial q}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=\zeta_B} = 0, \quad (1.6)$$

$$q|_{\zeta=1} = f q_m|_{\zeta=1}. \quad (1.7)$$

Здесь ζ_v — верхняя граница слоя, где сосредоточена основная масса водяного пара (обычно верхняя граница тропосферы, отождествляемая с изобарическим уровнем); $q_m = 0,622E(T)/p$ — массовая доля насыщенного водяного пара; $E(T)$ — парциальное давление насыщенного водяного пара; f — относительная влажность воздуха у подстилающей поверхности, которая может быть задана по данным о q и q_m на предыдущем шаге по времени ($f = q/q_m$). Условие (1.6) обеспечивает отсутствие потока водяного пара через верхнюю границу.

Выше было рассмотрено уравнение для массовой доли водяного пара, которое не учитывает ряд важных физических процессов, происходящих в реальной атмосфере. К числу таких процессов относятся турбулентная диффузия водяного пара и конденсация (сублимация). Атмосфера представляет собой турбулентную среду. Причем турбулентность играет наиболее существенную роль в пограничном слое атмосферы. Однако и в свободной атмосфере нередко встречаются слои, в которых также развивается интенсивная турбулентность. Поэтому более строгая постановка задачи прогноза влажности может быть выполнена на основе уравнений переноса влажности, в которых учтены члены, описывающие турбулентность.

Уравнение переноса влажности в турбулентной атмосфере имеет вид

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + \omega \frac{\partial q}{\partial \zeta} = \left(\frac{g}{RT} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \kappa \zeta^2 \frac{\partial q}{\partial \zeta} + \kappa' \nabla^2 q, \quad (1.8)$$

где κ и κ' — коэффициенты турбулентной диффузии водяного пара по вертикали и горизонтали соответственно.

Если предполагается использовать уравнение (1.8) для прогноза массовой доли насыщенного водяного пара, то следует учесть конденсацию (сублимацию) водяного пара. Обозначив скорость конденсации (сублимации) водяного пара в единице объема воздуха через m , уравнение (1.8) для насыщенного воздуха запишем в виде

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + \omega \frac{\partial q}{\partial \zeta} = -\frac{m}{\rho} + \left(\frac{g}{RT} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \kappa \zeta^2 \frac{\partial q}{\partial \zeta} + \kappa' \nabla^2 q. \quad (1.9)$$

Для вычисления скорости конденсации применяется формула, приведенная в главе 6:

$$c = \frac{m}{\rho} = F(\zeta, T) \omega,$$

где

$$F(\zeta, T) = \frac{\frac{q_m}{\zeta} \left(\frac{R}{c_p} - \frac{\mathcal{L}}{c_p T} \frac{R}{R_n} \right)}{1 + \frac{q_m \mathcal{L} (\mathcal{L} - R_n T)}{c_p R_n T^2}},$$

$\mathcal{L}$ — скрытая теплота конденсации (сублимации); R_n — газовая постоянная водяного пара.

Уравнение (1.9) используется для прогноза, если воздух достиг насыщения, т. е. при $q = q_m$. При $q < q_m$ при прогнозировании прибегают к уравнению (1.8). Для того чтобы определить, какое из уравнений следует использовать, необходимо иметь сведения о значениях q_m . Поскольку q_m является функцией температуры, то необходимо одновременно прогнозировать и температуру, используя уравнение притока тепла, в котором, наряду с другими неадиабатическими факторами, следует учесть тепло конденсации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{RT}{g} (\gamma_a - \gamma) \frac{\omega}{\xi} = \\ = \frac{\mathcal{Q}_m}{\rho c_p} + \left(\frac{g}{R\bar{T}} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \kappa \xi^2 \frac{\partial T}{\partial \xi} + \kappa' \nabla^2 T + \frac{\mathcal{E}}{\rho c_p}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $\mathcal{E}$ — лучистый приток тепла к единице объема воздуха (рассчитывается на основе решения уравнений переноса радиации (см. главу 6)).

Уравнения (1.10), (1.9) или (1.8) решаются численными методами одновременно с уравнениями, описывающими динамические процессы, с помощью которых вычисляются составляющие скорости.

Для решения уравнений (1.8)—(1.10) необходимо поставить начальные условия $q(x, y, \xi, t_0)$, $T(x, y, \xi, t_0)$, а также граничные условия. В качестве боковых граничных условий для уравнений (1.8), (1.9) можно использовать одно из условий (1.5). Аналогичные условия для уравнения (1.10) имеют вид

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{\Gamma} = 0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0.$$

Разумеется, в процессе интегрирования уравнений используется одно из этих условий.

Сформулируем условия по ξ . Можно положить

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial q}{\partial \xi} \right|_{\xi=\xi_b} = 0.$$

При $\xi = 1$ на суше граничное условие для (1.10) записывается в виде уравнения баланса тепла на подстилающей поверхности:

$$\frac{g}{R\bar{T}} \kappa \frac{\partial T}{\partial \xi} + \lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial z} + \frac{g}{R\bar{T}} \frac{\mathcal{Q}}{c_p} \kappa \frac{\partial q}{\partial \xi} = S(1 - \tilde{\Gamma}_n) + G(1 - \delta) - \delta \sigma T_n^4,$$

где T^* и λ^* — температура и коэффициент теплопроводности почвы; S и G — нисходящие потоки коротковолновой и длинноволновой радиации; $\tilde{\Gamma}_n$, δ и T_n — альбеда, относительная излучательная способность и температура подстилающей поверхности соответственно; σ — постоянная Стефана—Больцмана. Обычно второй член в левой части этого уравнения, описывающий теплообмен в почве, при краткосрочном прогнозе не учитывается.

На водной поверхности при $\xi = 1$ можно считать, что T_n является функцией x, y , но не зависит от времени. Для уравнений (1.8) и (1.9) нижнее граничное условие при $\xi = 1$ обычно записы-

вается в виде соотношения, параметризующего поток водяного пара:

$$Q_s = -\rho_{h_1} f C_D |\mathbf{v}_{h_1}| (q_{h_1} - q_s),$$

где величины с индексами h_1 и s относятся к верхней границе приземного слоя и к подстилающей поверхности соответственно; C_D — безразмерный эмпирический коэффициент (коэффициент сопротивления); $|\mathbf{v}|$ — модуль горизонтального вектора ветра.

Одновременно с прогнозом влажности по данным о скорости конденсации можно рассчитывать количество осадков, предполагая, что вся сконденсированная влага выпадает в виде осадков. В этом случае облака не прогнозируются. Количество осадков, выпавших за интервал времени от t_1 до t_2 из столба воздуха единичного сечения, ограниченного уровнями $\zeta = \zeta_B$ и $\zeta = 1$, можно рассчитать по формуле А. Ф. Дюбюка

$$Q = \frac{1}{g} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\zeta_B}^1 F(\zeta, T) \omega d\zeta dt,$$

где $F(\zeta, T) \omega$ — скорость конденсации (см. главу 6).

7.1.2. Прогноз точки росы и дефицита точки росы

Напомним, что точкой росы (T_d) называется температура, при которой содержащийся в воздухе водяной пар (при фиксированных значениях давления и массовой доли водяного пара) становится насыщенным по отношению к плоской поверхности воды. Точка росы, хотя и определяется в градусах, однако является характеристикой влажности, а не термического состояния воздуха, так как при одной и той же температуре она может принимать разные значения в зависимости от количества содержащегося в воздухе водяного пара.

Получим уравнение, которое может быть использовано для прогноза точки росы. С этой целью выражение для массовой доли водяного пара

$$q = 0,622 \frac{E(T_d)}{p}$$

прологарифмируем, а затем продифференцируем по времени. В результате получим

$$\frac{1}{q} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{E(T_d)} \frac{dE(T_d)}{dT_d} \frac{dT_d}{dt} - \frac{1}{p} \frac{dp}{dt}. \quad (1.11)$$

Для определения $\frac{1}{E(T_d)} \frac{dE(T_d)}{dT_d}$ воспользуемся формулой Магнуса

$$E(T_d) = E(273) e^{\frac{a(T_d - 273)}{b + T_d - 273}}, \quad (1.12)$$

где $E(273 \text{ K}) = 6,1078 \text{ гПа}$ — упругость насыщенного пара при $T = 273 \text{ K}$; a и b — безразмерные постоянные величины ($a = 17,1$; $b = 235$). Логарифмическая производная от $E(T_d)$ по T_d имеет вид

$$\frac{1}{E(T_d)} \frac{dE(T_d)}{dT_d} = \frac{a(T_d - 273 + b) - a(T_d - 273)}{(b + T_d - 273)^2} \approx \frac{a}{b}. \quad (1.13)$$

Так как $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\omega}{\xi}$, то с учетом выражения (1.13) уравнение (1.11) запишется в виде

$$\frac{1}{q} \frac{dq}{dt} = \frac{a}{b} \frac{dT_d}{dt} - \frac{\omega}{\xi},$$

или

$$\frac{dT_d}{dt} = \frac{b}{aq} \frac{dq}{dt} + \frac{b}{a} \frac{\omega}{\xi}. \quad (1.14)$$

Если воздух не насыщен, то из уравнения (1.8) следует, что

$$\frac{dq}{dt} = \left(\frac{g}{RT}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \kappa \xi^2 \frac{\partial q}{\partial \xi} + \kappa' \nabla^2 q.$$

Следовательно, для ненасыщенного воздуха уравнение (1.14) с учетом турбулентности записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_d}{\partial t} + u \frac{\partial T_d}{\partial x} + v \frac{\partial T_d}{\partial y} + \omega \frac{\partial T_d}{\partial \xi} - \frac{b}{a} \frac{\omega}{\xi} = \\ = \frac{b}{aq} \left[\left(\frac{g}{RT}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \kappa \xi \frac{\partial q}{\partial \xi} + \kappa' \nabla^2 q \right]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Преобразуем два последних члена в левой части уравнения (1.15). Поскольку

$$\frac{\partial T_d}{\partial \xi} = - \frac{RT}{g\xi} \frac{\partial T_d}{\partial z} = \frac{RT}{\xi g} \gamma_d,$$

то

$$\frac{\omega}{\xi} \frac{\partial T_d}{\partial \xi} - \frac{b}{a} \frac{\omega}{\xi} = \frac{RT}{g} \left(\gamma_d - \frac{b}{a} \frac{g}{RT} \right) \frac{\omega}{\xi} = - \frac{RT}{g} (\gamma_{ad} - \gamma_d),$$

где $\gamma_d = - \frac{\partial T_d}{\partial z}$ — вертикальный градиент точки росы; $\gamma_{ad} = \frac{b}{a} \frac{g}{RT}$ — адиабатический градиент точки росы. С учетом этого преобразования уравнение (1.15) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_d}{\partial t} + u \frac{\partial T_d}{\partial x} + v \frac{\partial T_d}{\partial y} - \frac{RT}{g} (\gamma_{ad} - \gamma_d) \frac{\omega}{\xi} = \\ = \frac{b}{aq} \left[\left(\frac{g}{RT}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \kappa \xi^2 \frac{\partial q}{\partial \xi} + \kappa' \nabla^2 q \right]. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Численное интегрирование уравнения (1.16) шагами по времени позволяет получить прогноз точки росы. Разумеется, одновременно необходимо прогнозировать составляющие скорости u , v , ω , а также

температуру T . На каждом шаге по времени для расчета турбулентных членов следует вычислять q по формуле

$$q = \frac{0,622}{p} E (273) e^{\frac{a(T_d - 273)}{b + T_d - 273}}.$$

Температура также необходима для того, чтобы в процессе интегрирования уравнения (1.16) контролировать степень приближения воздуха к состоянию насыщения, которое характеризуется дефицитом точки росы $\Delta = T - T_d$. Если $\Delta \neq 0$, то точка росы вычисляется с помощью уравнения (1.16), а температура — по уравнению притока тепла (1.10), в котором $\mathcal{L}m/\rho c_p = 0$. Если $\Delta = 0$, то температура рассчитывается по уравнению (1.10), в котором учитывается тепло конденсации. В этом случае $T_d = T$, а следовательно, отпадает необходимость решать уравнение (1.16). Для решения уравнения (1.16) в качестве боковых граничных условий можно использовать одно из условий:

$$\left. \frac{\partial T_d}{\partial t} \right|_{\Gamma} = 0 \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial T_d}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0.$$

На верхней границе полагается, что $\partial T_d / \partial \xi|_{\xi=\xi_b} = 0$.

При постановке нижнего граничного условия будем исходить из условия (1.7), на основании которого имеем

$$E(T_d)_{\xi=1} = f E(T)_{\xi=1},$$

где f — относительная влажность, рассчитываемая по значениям $E(T_d)_{\xi=1}$ и $E(T)_{\xi=1}$ на предыдущем шаге по времени.

Используя формулу Магнуса, получаем нижнее граничное условие для T_d :

$$T_d|_{\xi=1} = \frac{273a + (b - 273) \left(\ln f + \frac{aT}{b + T} \right)}{a - \ln f - \frac{aT}{b + T}} \bigg|_{\xi=1}. \quad (1.17)$$

В ряде случаев целесообразно прогнозировать непосредственно дефицит точки росы $\Delta = T - T_d$. Чтобы получить уравнение для дефицита точки росы, нужно из уравнения (1.10) вычесть уравнение (1.16), положив при этом $m = 0$, так как при $\Delta \neq 0$ конденсация отсутствует. В результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial t} + u \frac{\partial \Delta}{\partial x} + v \frac{\partial \Delta}{\partial y} - \frac{RT}{g} (\gamma_{a,\Delta} - \gamma_{\Delta}) \frac{\omega}{\xi} &= \left(\frac{g}{RT} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \kappa \xi^2 \frac{\partial T}{\partial \xi} + \\ &+ \kappa' \nabla^2 T + \frac{\varepsilon}{\rho c_p} - \frac{b}{aq} \left[\left(\frac{g}{RT} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \kappa \xi^2 \frac{\partial q}{\partial \xi} + \kappa' \nabla^2 q \right], \end{aligned} \quad (1.18)$$

где $\gamma_{a,\Delta} = \gamma_a - \gamma_{a,d}$ — адиабатический градиент дефицита точки росы; $\gamma_{\Delta} = \gamma - \gamma_d$ — вертикальный градиент дефицита точки росы.

Для вычисления турбулентных членов в правой части полученного уравнения необходимы данные о температуре и массовой доле водяного пара. Что касается температуры, то она рассчитывается

по уравнению притока тепла (1.10), которое интегрируется наряду с другими уравнениями модели, обеспечивающими получение составляющих скорости ветра. При этом в уравнении (1.10) тепло конденсации учитывается лишь тогда, когда дефицит точки росы оказывается равным нулю. Необходимые для расчетов турбулентных притоков влаги в уравнении (1.18) значения массовой доли водяного пара вычисляются через $T_d = T - \Delta$ с помощью формулы

$$q = \frac{0,622}{p} E(273) e^{\frac{a(T_d - 273)}{b + T_d - 273}}.$$

При интегрировании уравнения (1.18) используются следующие боковые граничные условия: $\partial \Delta / \partial t|_{\Gamma} = 0$ или $\partial \Delta / \partial n|_{\Gamma} = 0$. Верхнее граничное условие по ζ имеет вид $\partial \Delta / \partial \zeta|_{\zeta=\zeta_B} = 0$. Нижнее граничное условие по ζ формулируется на основе условия для $T_d|_{\zeta=1}$ (1.17) в виде

$$\Delta|_{\zeta=1} = T|_{\zeta=1} - \frac{273a + (b - 273) \left(\ln f + \frac{aT}{b + T} \right)}{a - \ln f - \frac{aT}{b + T}} \bigg|_{\zeta=1}.$$

7.1.3. Прогноз облачности и осадков

Гидродинамический прогноз облачности и осадков является одной из наиболее сложных задач метеорологии.

В рассмотренных методах прогноза влажности облачность не прогнозируется, так как предполагается, что вся сконденсированная влага выпадает в виде осадков.

Первые попытки прогнозировать облачность с помощью гидродинамических моделей, предусматривающих интегрирование уравнения переноса влаги в газообразной фазе, сводились к установлению связей между облачностью и факторами, способствующими конденсации водяного пара. Такими факторами являются понижение температуры и увеличение влажности. При этом принимается, что конденсация всегда наступает при дефиците, равном нулю, а основным фактором, способствующим охлаждению воздуха, являются восходящие упорядоченные вертикальные движения. Такого рода связи представляются в виде корреляционных графиков, которые были впервые построены В. Льюисом, а затем П. К. Душкиным, Е. Г. Ломоносовым и Ю. Н. Луниным на основе обработки диагностических вертикальных скоростей и фактических данных о количестве баллов облачности и дефиците. График, построенный Душкиным, Ломоносовым и Луниным, позволяет по предвычисленным значениям температуры и точки росы (или дефицита) и вертикальных скоростей классифицировать погоду по градиентам: осадки, сплошная облачность, несплошная облачность и ясно (рис. 7.1).

Основной недостаток таких графиков состоит в том, что с их помощью нельзя прогнозировать положение границ облачности.

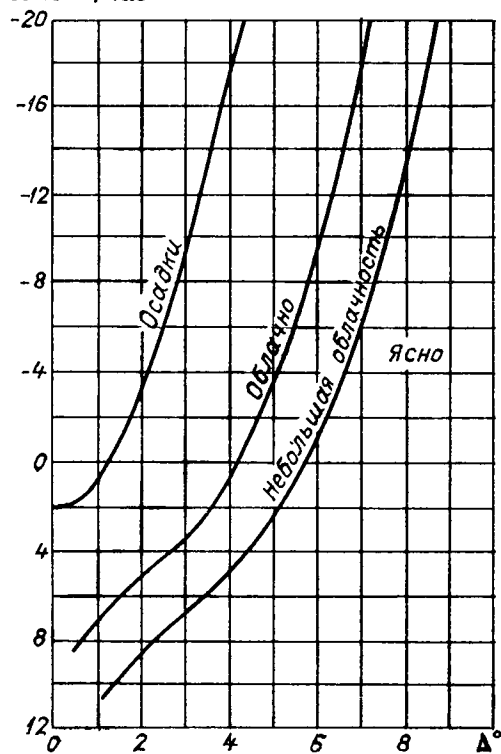
$\omega \cdot 10^3 \text{ 1/час}$ 

Рис. 7.1. График для определения явлений погоды по ω и Δ на уровне 850 гПа.

Смагоринским был предложен график, позволяющий прогнозировать количество облаков нижнего, среднего и верхнего ярусов, а также факт выпадения осадков по значениям относительной влажности $f = E(T_d)/E(T)$ (рис. 7.2). Связь количества облаков трех ярусов с относительной влажностью по Смагоринскому аппроксимируется линейными соотношениями вида

$$n_k = a_k f + b_k,$$

где n_k — количество облаков в долях единицы; k — индекс, указывающий ярус; a_k и b_k — эмпирические коэффициенты. Значения n_k , рассчитываемые по формулам или

по графику, лежат в пределах 0—1,3. Область значений n_k от 1 до 1,3 соответствует осадкам.

По поводу рассмотренных методов прогноза облачности и осадков можно заметить, что в них не учитываются многие факторы, имеющие существенное значение для облакообразования и формирования осадков, такие как турбулентные притоки тепла и влаги, радиационный теплообмен, конвективные вертикальные движения, а также микрофизические процессы.

Если в прогностической модели предусмотрено интегрирование уравнения притока тепла и уравнения для массовой доли водяного пара, то с помощью получаемых на каждом шаге значений q и T представляется возможность прогнозировать осадки. Приведенная выше формула А. Ф. Дюбука позволяет рассчитывать количество осадков. Однако при этом не учитывается тот факт, что за счет тепла, выделяющегося при конденсации повышается температура, и, следовательно, воздух удаляется от состояния насыщения.

При более строгом подходе к прогнозу осадков по предвычисленным значениям массовой доли водяного пара и температуры необходимо учитывать взаимное влияние тепла конденсации на температуру и температуры — на условия конденсации.

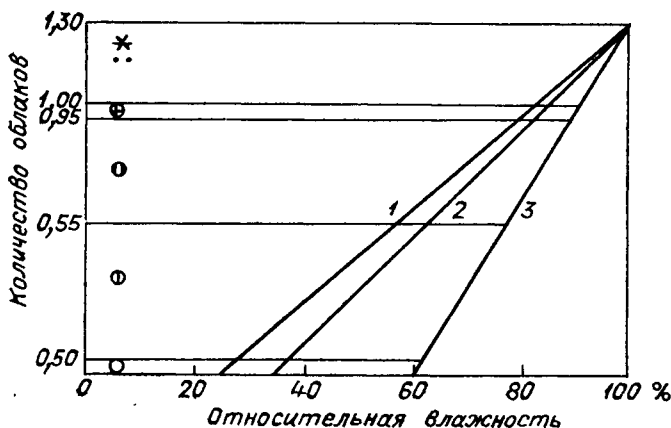


Рис. 7.2. График для прогноза облачности и осадков.
1 — облака нижнего яруса 2 — облака среднего яруса, 3 — облака верхнего яруса.

Начиная с работы Манабе, Смагоринского и Стриклера этот учет обычно осуществляется с помощью итерационной процедуры, которая строится на основе следующих предположений.

Конденсация наступает тогда, когда относительная влажность $f = q/q_m$ достигает единицы. Если относительная влажность превышает единицу, то весь избыток водяного пара (сверх насыщения) конденсируется и мгновенно выпадает в виде осадков.

При этих предположениях масса сконденсировавшегося водяного пара с учетом тепла конденсации определяется путем решения системы уравнений

$$\begin{aligned} q + \delta q &= q_m(T + \delta T, p), \\ c_p \delta T + \mathcal{L} \delta q &= 0, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где δq — масса сконденсировавшегося водяного пара; δT — изменение температуры, обусловленное выделением теплоты при конденсации массы водяного пара δq . Представим величину массовой доли насыщенного водяного пара $q_m(T + \delta T, p)$ в виде ряда, в котором ограничимся линейными членами:

$$q_m(T + \delta T, p) = q_m(T, p) + \left(\frac{\partial q_m}{\partial T} \right)_p \delta T. \quad (1.20)$$

Здесь индекс p у $\partial q_m / \partial T$ означает, что дифференцирование выполняется при фиксированном давлении. Подставляя (1.20) в первое уравнение системы (1.19), получаем:

$$\delta q = (1 - f) q_m(T, p) + \left(\frac{\partial q_m}{\partial T} \right)_p \delta T. \quad (1.21)$$

Из второго уравнения системы (1.19) и уравнения (1.21) получаем

$$\delta q = \frac{q_m(1 - f)}{1 + \frac{\mathcal{L}}{c_p} \left(\frac{\partial q_m}{\partial T} \right)_p}, \quad \delta T = - \frac{q_m(1 - f)}{\left(\frac{\partial q_m}{\partial T} \right)_p - \frac{c_p}{\mathcal{L}}}. \quad (1.22)$$

Для определения $(\partial q_m / \partial T)_p$ можно использовать формулу Магнуса или уравнение Клаузиуса—Клапейрона

$$\frac{dE}{dT} = \frac{\mathcal{L}E}{R_{\pi} T^2}.$$

Из уравнения Клаузиуса—Клапейрона получаем

$$\left(\frac{\partial q_m}{\partial T} \right)_p = \frac{\mathcal{L}q_m(T, p)}{R_{\pi} T^2}.$$

Расчет осадков выполняется следующим образом.

По предвычисленным значениям T рассчитываются q_m и $f = \frac{q}{q_m}$. В тех точках сеточной области, где прогностические значения $f > 1$, по формулам (1.22) рассчитываются δq и δT и определяются исправленные значения T и q

$$T^{(1)} = T + \delta T, \quad q^{(1)} = q + \delta q.$$

По полученному (исправленному) значению $T^{(1)}$ вычисляются $q_m^{(1)}(T + \delta T, p)$ и рассчитывается

$$f^{(1)} = \frac{q^{(1)}}{q_m^{(1)}} = \frac{q + \delta q}{q_m(T + \delta T, p)}.$$

Если $f^{(1)} > 1$, то по формулам (1.22) вычисляются новые значения δq и δT с использованием $f^{(1)}$ и $q_m^{(1)}(T + \delta T, p)$ и т. д. до тех пор, пока не окажется, что f будет близко к единице. Таким образом, решение уравнений (1.19) строится с помощью итераций. Опыт показывает, что достаточно выполнить одну-две итерации, чтобы получить f , близкое к единице с точностью около 1 %. Полученные на последней итерации значения δq и δT , которым соответствует $f \simeq 1$, являются решением системы уравнений (1.19). Значения δT , умноженные на шаг по времени, прибавляются к предвычисленной температуре в соответствующих точках сеточной области.

Количество сконденсировавшегося водяного пара, за счет которого формируются осадки в слое, расположенном между уровнями $\zeta = \zeta_B$ и $\zeta = 1$, за шаг по времени Δt определяется по формуле

$$Q^{\Delta t} = \frac{\Delta t}{g} \int_{\zeta_B}^1 \delta q d\zeta,$$

а за весь прогностический период — по формуле

$$Q = \frac{1}{g} \int_0^{t_0 + N \Delta t} \int_{\zeta_B}^1 \delta q d\zeta dt,$$

где N — число шагов по времени.

7.2. Постановка задачи о прогнозе влаги в трех фазах

Выше были рассмотрены методы прогноза влажности, облачности и осадков, основанные на ряде упрощающих предположений. Более строгая постановка задачи прогноза указанных элементов погоды может быть выполнена на основе уравнений переноса влаги в трех фазах с явным описанием процессов перехода влаги из одних фаз в другие. К сожалению, эти процессы к настоящему времени изучены еще недостаточно. Несмотря на отсутствие достаточно полных и надежных сведений о весьма сложных физических и химических процессах, определяющих механизмы фазовых переходов и формирование источников и стоков влаги в атмосфере, уже сейчас имеются работы, в которых сформулирована теоретическая модель прогноза влажности в трех фазах.

Рассмотрим такого рода модель, предложенную Г. И. Марчуком (1967), имея в виду прежде всего постановку задачи и методы решения уравнений переноса влаги.

7.2.1. Система уравнений модели

В модели переноса влаги в газообразной, жидкой (капельной) и твердой (кристаллической) фазах, разработанной Г. И. Марчуком, используются уравнения для массовой доли водяного пара (q_1), жидкой (q_2) и твердой (q_3) фаз, которые связаны с плотностью воздуха (ρ), плотностями водяного пара ($\rho_{\text{п}}$), капель ($\rho_{\text{в}}$) и кристаллов ($\rho_{\text{к}}$) соотношениями

$$q_1 = \frac{\rho_{\text{п}}}{\rho}, \quad q_2 = \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho}, \quad q_3 = \frac{\rho_{\text{к}}}{\rho}, \quad (2.1)$$

$$\rho_{\text{п}} + \rho_{\text{в}} + \rho_{\text{к}} \ll \rho.$$

Уравнения переноса для q_1 , q_2 , q_3 в декартовой системе координат записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial t} + u \frac{\partial q_1}{\partial x} + v \frac{\partial q_1}{\partial y} + \omega \frac{\partial q_1}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho \frac{\partial q_1}{\partial z} + \kappa' \nabla^2 q_1 + f_1, \\ \frac{\partial q_2}{\partial t} + u \frac{\partial q_2}{\partial x} + v \frac{\partial q_2}{\partial y} + \omega \frac{\partial q_2}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho \frac{\partial q_2}{\partial z} + \kappa' \nabla^2 q_2 + f_2, \\ \frac{\partial q_3}{\partial t} + u \frac{\partial q_3}{\partial x} + v \frac{\partial q_3}{\partial y} + \omega \frac{\partial q_3}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho \frac{\partial q_3}{\partial z} + \kappa' \nabla^2 q_3 + f_3, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где κ , κ' — коэффициенты турбулентной диффузии влаги по вертикали и по горизонтали (считаются заданными); f_1 , f_2 , f_3 — источники и стоки влаги, зависящие от переходов влаги из одних фаз в другие. Остальные обозначения — общепринятые.

В уравнениях (2.2) использована простейшая параметризация турбулентного обмена. Эта параметризация может быть уточнена на основе более строгой теории.

7.2.2. Модель фазовых переходов влаги

Источники и стоки влаги описываются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}f_1 &= \frac{1}{\rho} [I + J - (K + S)], \\f_2 &= \frac{1}{\rho} [K + T_a - (J + Z + R_m)], \\f_3 &= \frac{1}{\rho} [Z + S - (I + T_a + R_M)],\end{aligned}\quad (2.3)$$

где I — переход из твердой фазы в газообразную (испарение кристаллов); J — переход из жидкой фазы в газообразную (испарение капель); K — переход из газообразной фазы в жидкую (конденсация водяного пара); S — переход из газообразной фазы в твердую (сублимация водяного пара); T_a — переход из твердой фазы в жидкую (таяние кристаллов); Z — переход из жидкой фазы в твердую (замерзание капель); R_m — выпадение жидко-капельных осадков (дождя); R_M — выпадение осадков в твердой фазе (снега).

Все перечисленные переходы должны быть определены количественно в единицах плотности за единицу времени.

Как указывалось выше, механизмы, определяющие переходы в формулах (2.3), изучены недостаточно. В нашу задачу не входит детальный разбор этих параметризаций, и мы ограничимся общими соображениями, которые могут дать лишь некоторое представление о них. Более детально с параметризацией фазовых переходов можно ознакомиться в специальной литературе.

Наша цель состоит главным образом в формулировании задачи и рассмотрении принципов построения решения.

Для простоты можно принять, например, что при положительных температурах отсутствуют переходы I , S , Z и осадки в твердой фазе, а при отрицательных температурах отсутствуют переходы J , K , T_a и осадки в жидкой фазе.

Для определения $K(S)$ можно использовать соотношения, приведенные в п. 7.1. Процессы испарения описываются формулами

$$J = \alpha_m (\rho_p^* - \rho_p) \rho_v, \quad (2.4)$$

$$I = \alpha_M (\rho_p^* - \rho_p) \rho_v, \quad (2.5)$$

где ρ_p^* — максимальная плотность водяного пара; α_m и α_M — сложные функции, зависящие от диффузии водяного пара с поверхности капель и кристаллов, плотности и размеров капель и кристаллов. Значения α_m и α_M отличны от нуля при $\rho_p^* > \rho_p$, а также при положительных и отрицательных температурах соответственно.

Для описания процессов таяния и замерзания используются соотношения

$$T_a = \alpha_T (T - T_0) \rho_v, \quad (2.6)$$

$$Z = \alpha_Z (T_0 - T) \rho_v, \quad (2.7)$$

где T_0 — температура таяния; T — температура воздуха; α_T и α_Z — функции, зависящие от теплопередачи к кристаллам (каплям), от затрат тепла на таяние (замерзание), размеров и плотности кристаллов (капель).

Самым сложным является вопрос о параметризации процессов формирования и выпадения осадков. При определении количества осадков (массы капель или кристаллов), выпадающих из единичного объема облака, применяются параметризации вида

$$R_m = \alpha_R^m (\rho_v - \rho_v^*), \quad (2.8)$$

$$R_M = \alpha_R^M (\rho_K - \rho_K^*), \quad (2.9)$$

которые не являются следствием какой-либо теории, а строятся на основе предположения, что R_m и R_M пропорциональны разностям $\rho_v - \rho_v^*$ и $\rho_K - \rho_K^*$, где ρ_v^* и ρ_K^* — максимальные плотности капель и кристаллов в облаках (их можно определить экспериментально). Здесь имеется в виду, что если ρ_v и ρ_K превосходят максимальные значения, то часть избытка капель или кристаллов выпадает в виде осадков.

Подчеркнем, что модель фазовых переходов, построенная на основе соотношений (2.4)—(2.9), весьма упрощена и ее следует рассматривать в качестве первого приближения к решению данной задачи.

Важно отметить, что фазовые переходы влаги мало влияют на изменения плотности воздуха. Поэтому переход от плотностей влаги к массовому содержанию на основе соотношений (2.1) не связан с какими-либо существенными погрешностями. На основе вышеизложенного записываются выражения для f_1 , f_2 и f_3 :

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha_m (\rho_p^* - \rho_p) q_2 + \alpha_M (\rho_p^* - \rho_p) q_3 - C_m - C_M, \\ f_2 &= \alpha_T (T - T_0) q_3 + C_m - [\alpha_m (\rho_p^* - \rho_p) + \\ &\quad + \alpha_Z (T_0 - T)] q_2 - \alpha_R^m (q_2 - q_2^*), \\ f_3 &= \alpha_Z (T_0 - T) q_2 + C_M - [\alpha_M (\rho_p^* - \rho_p) + \\ &\quad + \alpha_T (T - T_0)] q_3 - \alpha_R^M (q_3 - q_3^*), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $C_m = K/\rho$, $C_M = S/\rho$, а звездочкой обозначены максимально возможные значения соответствующих величин. Слагаемые в правой части выражений (2.10), содержащие разности, положительны или отрицательны в зависимости от знака разностей $\rho_p^* - \rho_p$, $T_0 - T$, $T - T_0$, $q_2 - q_2^*$, $q_3 - q_3^*$. Для выражений (2.10) должны выполняться следующие условия: $\alpha_m \neq 0$, $\alpha_R^m \neq 0$, $\alpha_T \neq 0$ при $T > T_0$; $\alpha_Z \neq 0$, $\alpha_M \neq 0$, $\alpha_R^M \neq 0$ при $T < T_0$; $C_m = 0$, $C_M = 0$ при $\rho < \rho^*$; если $\rho > \rho^*$: $C_m \neq 0$ при $T > T_0$, $C_M \neq 0$ при $T < T_0$.

7.2.3. Граничные и начальные условия

Для уравнений системы (2.2) граничные условия необходимо поставить по трем пространственным независимым переменным. По x и y могут быть использованы простейшие условия, означающие неизменность q_2 , q_3 на боковых границах (Γ):

$$\left. \frac{\partial q_i}{\partial t} \right|_{\Gamma} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.11)$$

По переменной z требуется по два условия для каждой искомой функции (q_1 , q_2 , q_3): при $z = 0$ и $z = H$ (H — высота верхней границы той части атмосферы, в пределах которой изучается перенос влаги (например, тропосферы).

Постановка нижнего граничного условия представляет собой сложную задачу. Ниже будут рассмотрены условия, лишь приближенно отражающие процессы поступления влаги в атмосферу и трансформацию ее в приземном слое. Простейшие условия при $z = 0$ можно записать в виде

$$\frac{\partial q_1}{\partial z} = \begin{cases} 0 & \text{для суши} \\ -\beta (q_1^* - q_1) & \text{для водной поверхности,} \end{cases} \quad (2.12)$$

$$q_2 = 0, \quad q_3 = 0,$$

где β — коэффициент массопередачи водяного пара.

На верхней границе, при $z = H$, используются следующие условия:

$$\frac{\partial q_1}{\partial z} = 0, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = 0. \quad (2.13)$$

Условия (2.12) и (2.13) означают отсутствие потока водяного пара на поверхности суши и на верхней границе, а также отсутствие влаги в жидкой и твердой фазах на нижней и верхней границах. Для водной поверхности (при $z = 0$) поток водяного пара отличен от нуля; исключение составляет случай, когда $q_1 \geq q_1^*$.

Отсутствие потока водяного пара при $z = 0$ для суши плохо отражает действительную картину. Более обоснованным является условие, которое учитывает испарение влаги с поверхности Земли, поступающей из деятельного слоя по капиллярам. Такой учет может быть осуществлен с помощью функции $Q(x, y, t)$, которая характеризует распределение во времени и по поверхности суши количества влаги в столбе деятельного слоя единичной площади. Значения функции Q могут изменяться за счет испарения влаги с поверхности, выпадения осадков и фильтрации влаги в почве. При этом считается, что количество испаряющейся влаги пропорционально запасу влаги в деятельном слое:

$$\frac{\partial q_1}{\partial z} = \begin{cases} -\beta (\sigma Q - q_1) & \text{при } \sigma Q > q_1 \\ 0 & \text{при } \sigma Q < q_1, \end{cases} \quad (2.14)$$

где σ — функция, которая определяет ту часть запаса влаги в деятельном слое, которая поступает к поверхности в единицу вре-

мени и обуславливает массовую долю влаги в приземном слое, равную σQ .

Если температура приземного слоя отрицательна и влага из замерзшей почвы на поверхность не поступает, то можно принять условие отсутствия потока водяного пара, т. е. $\partial q_1 / \partial z = 0$ при $z = 0$. Для поверхности, покрытой снегом, условие (2.14) сохраняется, но вместо β и σ используются β_c и σ_c , которые имеют тот же смысл, но характеризуют массопередачу водяного пара в атмосферу и поступление влаги к поверхности в снежном покрове.

Для введенной в граничное условие функции Q представляется возможным записать уравнение

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \kappa \rho \frac{\partial q_1}{\partial z} + \int_0^H [\alpha_R^m (\rho_v - \rho_v^*) + \alpha_R^M (\rho_k - \rho_k^*)] dz - \delta Q, \quad (2.15)$$

которое с учетом (2.14) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\kappa \beta \rho (\sigma Q - q_1) + \int_0^H [\alpha_R^m (\rho_v - \rho_v^*) + \alpha_R^M (\rho_k - \rho_k^*)] dz - \delta Q, \quad (2.16)$$

где δ — функция, характеризующая фильтрацию влаги (приток или отток от поверхности почвенных вод). Первый член в правой части уравнения (2.16) описывает приток влаги от земной поверхности в атмосферу за счет турбулентной диффузии, второй и третий члены характеризуют увеличение почвенной влаги за счет осадков и изменение ее за счет притока (оттока) почвенных вод. Количество осадков определяется интегралом

$$\int_0^H [\alpha_R^m (\rho_v - \rho_v^*) + \alpha_R^M (\rho_k - \rho_k^*)] dz.$$

При отрицательных температурах для поверхности со снежным покровом уравнение (2.16) записывается без третьего члена:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\kappa \beta_c (\sigma_c Q - q_1) + \int_0^H [\alpha_R^m (\rho_v - \rho_v^*) + \alpha_R^M (\rho_k - \rho_k^*)] dz. \quad (2.17)$$

В этом случае считается, что фильтрации влаги в почве нет, а Q определяет запас влаги в столбе единичной площади снежного покрова.

Таким образом, использование граничного условия (2.14) сопряжено с усложнением задачи за счет привлечения уравнений (2.16) или (2.17), которые следует решать совместно с уравнениями (2.2).

Необходимые для интегрирования этих уравнений начальные условия задаются для q_1, q_2, q_3, Q :

$$q_1 = q_1(x, y, z, t_0),$$

$$q_2 = q_2(x, y, z, t_0),$$

$$q_3 = q_3(x, y, z, t_0),$$

$$Q = Q(x, y, t_0).$$

7.2.4. Решение уравнений

Существует ряд приближенных методов решения уравнений для влажности. Рассмотрим алгоритм решения, предложенный Г. И. Марчуком (1967), основанный на методе расщепления многомерной задачи. При этом будем полагать, что решение уравнений (2.2), (2.16) или (2.17) осуществляется одновременно с прогнозом составляющих скорости ветра и температуры.

Для компактной записи алгоритма вводятся вектор-функции

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix},$$

которые позволяют систему уравнений (2.2) записать в виде одного уравнения.

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z} + \kappa' \nabla^2 \mathbf{q} + \mathbf{f}. \quad (2.18)$$

Рассмотрим решение уравнения (2.18) на шаге по времени, т. е. на интервале от s до $s+1$ ($s = t/\Delta t$) методом расщепления. Это уравнение расщепляется на три:

$$\frac{\partial \mathbf{q}_1}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{q}_1}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{q}_1}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{q}_1}{\partial z} = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}_2}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho \frac{\partial \mathbf{q}_2}{\partial z} + \kappa' \nabla^2 \mathbf{q}_2, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}_3}{\partial t} = \mathbf{f}, \quad (2.21)$$

где $\mathbf{q}_1^s = \mathbf{q}^s$, $\mathbf{q}_2^s = \mathbf{q}_1^{s+1}$, $\mathbf{q}_3^s = \mathbf{q}_2^{s+1}$. Здесь $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ — решения уравнений (2.19)—(2.21) для вектор-функции $\mathbf{q}$ (не путать с q_1, q_2, q_3).

Уравнение (2.19) решается на шаге по времени по значениям вектор-функции $\mathbf{q}$ в начальный для данного шага момент s . Для уравнения (2.20) в качестве начальных условий используются полученные в результате решения уравнения (2.19) значения $\mathbf{q}_1^{s+1}$, а для уравнения (2.21) — решения уравнения (2.20), т. е. $\mathbf{q}_2^{s+1}$.

Сначала рассмотрим решение уравнения переноса (2.19). Оно решается методом расщепления с использованием схемы предиктор—корректор.

Интервал времени, соответствующий шагу Δt , разбивается на две равные части: от s до $s + 1/2$, от $s + 1/2$ до $s + 1$. Интервал от s до $s + 1/2$ разбивается на три: от s до $s + 1/6$, от $s + 1/6$ до $s + 2/6$; от $s + 2/6$ до $s + 1/2$, на которых решаются уравнения

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} = -u \frac{\partial q_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial q_1}{\partial t} = -v \frac{\partial q_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial q_1}{\partial t} = -w \frac{\partial q_1}{\partial z}. \quad (2.22)$$

Метод решения этих уравнений рассмотрен в главе 4.

В совокупности решения уравнений (2.22) определяют функцию $\bar{q}_1$ в момент времени $s + 1/2$.

Для аппроксимации уравнений (2.22) используются неявные конечно-разностные схемы против потока (см. главу 4) первого порядка точности, применение которых сопровождается появлением эффекта «счетной вязкости».

Для получения решения уравнения (2.19) в момент времени $s + 1$ и преодоления эффекта счетной вязкости целесообразно воспользоваться схемой корректора с центральными разностями второго порядка точности

$$q_1^{s+1}_{i,j,k} = q_1^s_{i,j,k} - [\mu_i (q_1_{i+1,j,k} - q_1_{i-1,j,k}) + \\ + \mu_j (q_1_{i,j+1,k} - q_1_{i,j-1,k}) + \mu_k (q_1_{i,j,k+1} - q_1_{i,j,k-1})]^{s+\frac{1}{2}}.$$

Здесь

$$\mu_i = \frac{u \Delta t}{2 \Delta x}, \quad \mu_j = \frac{v \Delta t}{2 \Delta y}, \quad \mu_k = \frac{w \Delta t}{2 \Delta z}.$$

Более точные решения уравнений (2.19)—(2.21) могут быть построены, если использовать дивергентную форму этих уравнений и решать их относительно интегральных характеристик:

$$\tilde{q} = \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} q \rho dz.$$

После решения уравнения (2.19) уравнение (2.20) решается:

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho \frac{\partial q_2}{\partial z} + \kappa' \nabla^2 q_2 (q_2^s = q_1^{s+1}). \quad (2.23)$$

Разностный аналог этого уравнения записывается в виде

$$q_2^{s+1}_{i,j,k} = q_2^s_{i,j,k} + \\ + \frac{\Delta t}{\rho (\Delta z)^2} \left[(\kappa \rho)_{k+\frac{1}{2}} (q_{2,k+1} - q_{2,k}) - (\kappa \rho)_{k-\frac{1}{2}} (q_{2,k} - q_{2,k-1}) \right]_{i,j}^s + \\ + \frac{\kappa' \Delta t}{(\Delta s)^2} [q_{2,i+1,j,k} + q_{2,i,j+1,k} + q_{2,i-1,j,k} + q_{2,i,j-1,k} - 4q_{2,i,j,k}]^s. \quad (2.24)$$

Разностный аналог (2.24) уравнения (2.20) для q_2 записан по явной схеме с аппроксимацией пространственных производных

центрными разностями. Решение этого уравнения по явной схеме возможно, так как эффект турбулентной вязкости мал по сравнению с адвекцией и при малом Δt критерий счетной устойчивости удовлетворяется.

Расчетная схема для q_2 , так же как и схема для q_1 , удовлетворяет закону сохранения влаги при отсутствии потоков на границах области решения.

Решение уравнения (2.21) $\partial q_3 / \partial t = f$ ($q_3^s = q_2^{s+1}$) как уравнения согласования представляется наиболее сложным. Уравнение (2.21) запишем в компонентной форме, т. е. для массовой доли влаги в трех фазах:

$$\frac{\partial q_1}{\partial t} = f_1, \quad \frac{\partial q_2}{\partial t} = f_2, \quad \frac{\partial q_3}{\partial t} = f_3, \quad (2.25)$$

где f_1, f_2, f_3 определяются формулами (2.10). К системе уравнений (2.25) присоединим уравнение для Q

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = f_4, \quad (2.26)$$

где

$$f_4 = \kappa \beta \rho (\sigma Q - q_1) + \int_0^H [\alpha_R^m (\rho_v - \rho_v^*) + \alpha_R^M (\rho_k - \rho_k^*)] dz - \delta Q. \quad (2.27)$$

Для решения уравнений (2.25) воспользуемся неявными разностными схемами

$$\begin{aligned} & q_{1,i,j,k}^{s+1} = \\ & = q_{1,i,j,k}^s + \Delta t \{ \alpha_m (\rho_n^* - \rho_n) q_2^{s+1} + \alpha_M (\rho_n^* - \rho_n) q_3^{s+1} - C_m^s - C_M^s \}_{i,j,k} \\ & \quad q_{2,i,j,k}^{s+1} = q_{2,i,j,k}^s + \Delta t \{ \alpha_T (T - T_0) q_3^{s+1} + \\ & \quad + C_m^s - [\alpha_m (\rho_n^* - \rho_n) + \alpha_Z (T_0 - T)] q_2^{s+1} - \alpha_R^m (q_2^{s+1} - q_2^*) \}_{i,j,k}, \\ & \quad q_{3,i,j,k}^{s+1} = q_{3,i,j,k}^s + \Delta t \{ \alpha_Z (T_0 - T) q_2^{s+1} + \\ & \quad + C_M^s - [\alpha_M (\rho_n^* - \rho_n) + \alpha_T (T - T_0)] q_3^{s+1} - \alpha_R^M (q_3^{s+1} - q_3^*) \}_{i,j,k}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Нетрудно видеть, что последние два уравнения системы (2.28) содержат только две искомые функции — q_2 и q_3 , а поэтому могут быть решены независимо от первого уравнения. Определитель системы этих уравнений

$$\begin{aligned} D_{i,j,k}^s &= \left[\frac{1}{\Delta t} + \alpha_m (\rho_n^* - \rho_n) + \alpha_Z (T_0 - T) + \alpha_R^m \right]_{i,j,k} \times \\ & \times \left[\frac{1}{\Delta t} + \alpha_M (\rho_n^* - \rho_n) + \alpha_T (T - T_0) + \alpha_R^M \right]_{i,j,k} \end{aligned} \quad (2.29)$$

отличен от нуля, а поэтому решение для q_2^{s+1} и q_3^{s+1} существует.

После того как определены q_2^{s+1} и q_3^{s+1} , из первого уравнения системы (2.28) может быть найдено q_1^{s+1} . Однако такой путь определения

q_1^{s+1} может привести к нарушению баланса влаги и к неустойчивости. Поэтому целесообразно определить q_1 с помощью вспомогательной функции $R = q_1 + q_2 + q_3$ из условия

$$q_1^{s+1} = R^{s+1} - (q_2^{s+1} q_3^{s+1}), \quad (2.30)$$

где

$$R^{s+1} = R^s - \Delta t [\alpha_R^m (q_2^{s+1} - q_2^*) + \alpha_R^M (q_3^{s+1} - q_3^*)]. \quad (2.31)$$

Соотношение (2.31) получается в результате почленного сложения уравнений (2.28). При таком подходе к нахождению q_1 должно выполняться условие

$$\Delta t [\alpha_R^m (q_2^{s+1} - q_2^*) + \alpha_R^M (q_3^{s+1} - q_3^*)] \leq q_1^s + q_2^s + q_3^s, \quad (2.32)$$

которое отражает тот факт, что количество осадков за малый интервал времени (шаг по времени) не должно превышать полного запаса влаги в начальный момент времени s . В этом случае $R^{s+1} \leq R^s$, так как в квадратной скобке формулы (2.31) стоит нуль или положительная величина. Ограничение на Δt обеспечивает выполнение условия (2.32) и может трактоваться как условие вычислительной устойчивости.

Значения Q определяются с помощью уравнения (2.26), которое записывается с помощью неявной схемы:

$$\frac{(Q^{s+1} - Q^s)_{i,j}}{\Delta t} = -\kappa \beta \rho (\sigma Q^{s+1} - q_1^{s+1})_{i,j} - \delta Q_{i,j}^{s+1} + \\ + \int_0^H [\alpha_R^m (\rho_v - \rho_v^*) + \alpha_R^M (\rho_k - \rho_k^*)]_{i,j}^{s+1} dz.$$

Стоящие под интегралом величины $\rho_v = \rho q_2$ и $\rho_k = \rho q_3$ определены, а поэтому подынтегральное выражение тоже записано неявно.

Заметим, что для повышения точности решения уравнения (2.25) и сохранения баланса влаги целесообразно ввести интегральные характеристики для q_1 , q_2 и q_3 . Тогда вместо уравнений (2.25) приходим к уравнениям вида

$$\frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial t} = \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} f_{1\rho} dz, \quad \frac{\partial \tilde{q}_2}{\partial t} = \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} f_{2\rho} dz, \quad \frac{\partial \tilde{q}_3}{\partial t} = \int_{z_{k-1}}^{z_{k+1}} f_{3\rho} dz,$$

которые решаются так же как уравнения для q_1 , q_2 и q_3 .

Рассмотренный алгоритм прогноза влаги реализуется совместно с прогнозом полей ветра, температуры и давления (геопотенциала). Одновременно с прогнозом влаги в трех фазах и осадков решается задача прогноза облачности, а также определяется фазовый приток тепла. За облако принимается геометрическое место точек сетки, в которых $q_2 \neq 0$, $q_3 \neq 0$.

Фазовый приток тепла определяется с помощью соотношения

$$\mathcal{E}_\Phi = \mathcal{L}_\kappa (K - I) + \mathcal{L}_c (S - I) + \mathcal{L}_\Pi (Z - T_a),$$

где $\mathcal{L}_k$, $\mathcal{L}_c$, $\mathcal{L}_n$ — скрытая теплота конденсации, сублимации и таяния (плавления) соответственно.

Прогноз влаги может быть реализован в любой другой системе координат. В частности, в изобарической системе координат (x, y, ζ, t) для вектор-функций

$$\mathbf{q} = \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{f} = \begin{vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{vmatrix}$$

уравнения (2.2) записываются в виде

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \zeta} = \left(\frac{g}{RT} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \kappa \zeta^2 \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \zeta} + \kappa' \nabla^2 \mathbf{q} + \mathbf{f}.$$

Для решения этого уравнения нижнее и верхнее граничные условия ставятся при $\zeta = 1$ и $\zeta = 0$. В целом же алгоритм решения аналогичен изложенному выше применительно к уравнениям в системе (x, y, z, t) .

7.3. Модели прогноза влажности, облачности и осадков

Выше были рассмотрены уравнения и методы их решения, позволяющие прогнозировать характеристики влажности и основанные на использовании этих характеристик способы расчета количества облаков и осадков, а также теоретическая модель влаги в трех фазах.

Рассмотрим теперь конкретные модели прогноза влажности, облачности и осадков, разработанные Л. Т. Матвеевым и Ю. Г. Лушевым, В. П. Дымниковым и Н. В. Гусевой, а также методы, используемые в оперативных прогностических моделях Гидрометцентра СССР и Европейского центра среднесрочных прогнозов погоды.

7.3.1. Модель прогноза влажности и облачности на основе инвариантов (по Л. Т. Матвееву)

В модели прогноза, разработанной Л. Т. Матвеевым и Ю. Г. Лушевым, использованы идеи Матвеева о том, что облачные элементы (капли и кристаллы) практически полностью увлекаются турбулентными движениями воздуха.

Исходная система уравнений, описывающих перенос тепла и влаги, записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + u \frac{\partial \Pi}{\partial x} + v \frac{\partial \Pi}{\partial y} + w \frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho \frac{\partial \Pi}{\partial z}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} + w \frac{\partial s}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho \frac{\partial s}{\partial z}, \quad (3.2)$$

$$q_m = 0,622 \frac{E(T)}{p}, \quad (3.3)$$

где

$$\Pi = T + \gamma_a z + \frac{\mathcal{L}}{c_p} q, \quad (3.4)$$

$q = 0,622E(T_d)/p$ — массовая доля водяного пара,

$$s = q + \delta \quad (3.5)$$

представляет собой массу водяного пара и капель в единице массы воздуха; δ — водность облаков; остальные обозначения общепринятые.

Уравнение (3.1) получено в результате суммирования уравнения притока тепла и умноженного на L/c_p уравнения переноса массовой доли водяного пара, представленных без членов, описывающих горизонтальный турбулентный обмен:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\mathcal{L}m}{c_p \rho}, \\ \frac{L}{c_p} \frac{dq}{dt} &= \frac{\mathcal{L}}{c_p} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} k \rho \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{\mathcal{L}m}{c_p \rho}, \end{aligned}$$

где θ — потенциальная температура. При этом учитывалось, что при адиабатическом движении $\theta = T + \gamma_a z$.

Уравнение (3.2) получено путем сложения уравнений для массовой доли водяного пара и для водности, которое при полном увлечении облачных элементов без учета горизонтального турбулентного обмена записывается в виде

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} k \rho \frac{\partial \delta}{\partial z} + \frac{m}{\rho},$$

где m — скорость конденсации в единице объема воздуха.

Если не учитывать турбулентный обмен, то уравнения (3.1) и (3.2) приобретают вид $d\Pi/dt = 0$, $ds/dt = 0$. Это означает, что в движущейся частице воздуха $\Pi = \text{const}$, $s = \text{const}$, т. е. эти функции (при отсутствии турбулентного обмена) являются инвариантами независимо от того, имеет место конденсация или нет. Изменения этих функций в движущихся частицах воздуха, как это следует из уравнений (3.1) и (3.2), происходит только под влиянием турбулентного обмена. Решать систему уравнений (3.1), (3.2) значительно проще, чем уравнения для T и q , так как в них отсутствует скорость конденсации.

Решение этих уравнений строится только в пределах тропосферы. В модели уравнения (3.1), (3.2) используются в изобарической системе координат и записываются в виде

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \xi^2} + (b - \omega) \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} - \left(u \frac{\partial \Pi}{\partial x} + v \frac{\partial \Pi}{\partial y} \right), \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = a \frac{\partial^2 s}{\partial \xi^2} + (b - \omega) \frac{\partial s}{\partial \xi} - \left(u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} \right), \quad (3.7)$$

где

$$a = k \left(\frac{g \xi}{RT} \right)^2, \quad b = 2k \left(\frac{g \xi}{RT} \right)^2 \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right),$$

$\omega = \partial \zeta / \partial t$ — аналог вертикальной скорости. Остальные обозначения общепринятые. Считается, что функции a и b зависят только от ζ , и их значения затабулированы для ζ , соответствующих используемым в модели уровням. Уравнения (3.6) и (3.7) решаются с начальными условиями $\Pi(x, y, \zeta, t_0)$, $s(x, y, \zeta, t_0)$. В тех точках области определения решения, где нет облаков, $s(x, y, \zeta, t_0) = q(x, y, \zeta, t_0)$, поскольку $\delta = 0$. В облаках полагается $q = q_m$, а начальные значения водности определяются по эмпирической формуле

$$\delta(x, y, \zeta, t_0) = 0,201 \cdot 10^{-3} \frac{T(x, y, \zeta, t_0)}{\zeta} \exp 17,86 \left[1 - \frac{258}{T(x, y, \zeta, t_0)} \right]. \quad (3.8)$$

На боковых границах принимается, что

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} \Big|_{\Gamma} = \frac{\partial s}{\partial t} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (3.9)$$

или

$$\frac{\partial \Pi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = f_1, \quad \frac{\partial s}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = f_2, \quad (3.10)$$

где n — нормаль к боковым границам; f_1 и f_2 — известные функции.

На верхней границе, отождествляемой с тропопаузой, положение которой фиксируется ($\zeta_{\text{тр}} = 0,2$), полагается, что

$$\delta = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_{\text{тр}}} = \frac{\partial s}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\zeta_{\text{тр}}} = 0. \quad (3.11)$$

Нижнее граничное условие ставится на уровне $\zeta = 1$. Учитывая, что изменения температуры вблизи земной поверхности определяются адвекцией и трансформационными факторами, нижнее граничное условие для температуры записывается в виде

$$T(x, y, 1, t + \Delta t) = T(x, y, 1, t) + \Delta T(x, y, 1, t + \Delta t), \quad (3.12)$$

где

$$\Delta T = \Delta T_a [1 - (0,36 - 0,004 C_g)]; \quad (3.13)$$

$\Delta T_a = - \left(u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y} \right) \Delta t$ — изменения температуры за шаг по времени, обусловленные геострофической адвекцией; C_g — модуль геострофического ветра.

Нижнее граничное условие для влажности формируется на основе эмпирической зависимости между изменениями точки росы и температурами

$$\frac{\partial T_d(x, y, 1, t)}{\partial t} \Delta t = 1,26 \Delta T(x, y, 1, t), \quad (3.14)$$

где ΔT определяется по формуле (3.13).

Система уравнений (3.6), (3.7) с начальными и граничными условиями решается методом расщепления на уровнях $\zeta = 1; 0,85; 0,7; 0,5; 0,3$. Шаг сетки по x и y был принят равным $\Delta x = \Delta y = 300$ км, шаг по времени $\Delta t = 1$ ч. Область прогноза представляла собой прямоугольник с числом узлов сетки, равным 18×14 .

В алгоритме, разработанном авторами модели, предусматривалось использование на каждом шаге по времени значений u , v , ω , рассчитывавшихся с помощью квазигеострофической прогностической модели.

По спрогнозированным полям Π и s рассчитываются поля температуры, влажности и облачности. Для этого используются соотношения (3.3)—(3.5).

Предполагая, что воздух в данном узле насыщен, из соотношений (3.3), (3.4) методом последовательных приближений находится q_m . Полученное значение q_m сравнивается с s . Если $s \geq f q_m$ (где f — коэффициент, имеющий смысл относительной влажности воздуха), то в данном узле прогнозируется облачность. Если $s < f q_m$, то в данном узле облачности нет. В узлах, где $s < f q_m$, имеем

$$\delta = 0, \quad q = s, \quad T = \Pi - \gamma_a z - \frac{\mathcal{L}}{c_p} q.$$

В узлах, где прогнозируется облачность ($s \geq f q_m$),

$$q = q_m, \quad T = \Pi - \gamma_a z - \frac{\mathcal{L}}{c_p} q_m, \quad \delta = s - q_m.$$

Необходимые для расчетов T значения z (высота изобарической поверхности) заимствуются из решения динамических уравнений прогностической модели. Коэффициент f равен единице при $T \geq 273$ К и несколько меньше единицы при $T < 273$ К. На основе анализа экспериментальных данных установлена зависимость f от T , которая имеет вид

$$f = 0,008T - 1,184. \quad (3.15)$$

7.3.2. Модель прогноза облачности и осадков (по В. П. Дымникову)

Модель, разработанная В. П. Дымниковым и Н. В. Гусевой, основывается на уравнениях, записанных в системе координат x , y , z , t :

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho \frac{\partial q}{\partial z} - m, \\ \frac{d\delta}{dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho \frac{\partial \delta}{\partial z} + m, \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a \right) - \gamma_a \omega + \frac{\mathcal{L}m}{c_p}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $\omega = dz/dt$ — вертикальная скорость; δ — водность; m — скорость конденсации в единице массы воздуха; q — массовая доля водяного пара. На основе этих уравнений строится уравнение для функции Φ

$$\Phi = q - q_m + \left(1 + \frac{\mathcal{L}}{c_p} \frac{\partial q_m}{\partial T} \right) \delta. \quad (3.17)$$

С этой целью получается уравнение для дефицита массовой доли водяного пара $\Delta = q - q_m$ в виде

$$\frac{d\Delta}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho \frac{\partial \Delta}{\partial z} = \frac{dq}{dt} - \frac{dq_m}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho \frac{\partial q_m}{\partial z}. \quad (3.18)$$

Поскольку q_m зависит только от T и p , то

$$\frac{dq_m}{dt} = \frac{\partial q_m}{\partial T} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial q_m}{\partial p} \frac{dp}{dt}.$$

С учетом этого выражения и первого и последнего уравнений системы (3.16) уравнение (3.18) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho \frac{\partial \Delta}{\partial z} &= -m - \frac{\partial q_m}{\partial T} \frac{dT}{dt} - \frac{\partial q_m}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho \frac{\partial q_m}{\partial z} = \\ &= -m - \beta \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\mathcal{L}}{c_p} m - \gamma_a w - \frac{\gamma_a}{\rho} \frac{\partial \rho \kappa}{\partial z} \right) - \\ &\quad - \frac{\partial q_m}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho \frac{\partial q_m}{\partial z}, \end{aligned}$$

где $\beta = \partial q_m / \partial T$ (полагается постоянной величиной).

Если пренебречь малыми членами и выполнить ряд преобразований, то последнее уравнение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dt} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \left(1 + \beta \frac{\mathcal{L}}{c_p} \right) m + \left(1 + \beta \frac{\mathcal{L}}{c_p} \right) \times \\ &\quad \times \left[\frac{c_p}{\mathcal{L}} (\gamma_a - \gamma_{va}) w - \frac{c_p}{\mathcal{L} \rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho (\gamma_a - \gamma_{va}) \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

где γ_{va} — влажноадиабатический градиент.

В облаке $\Delta = 0$. В этом случае из (3.19) следует, что скорость конденсации m в облаке может быть определена из соотношения

$$m = \frac{c_p}{\mathcal{L}} \left[(\gamma_a - \gamma_{va}) w - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho (\gamma_a - \gamma_{va}) \right]. \quad (3.20)$$

Умножая второе уравнение системы (3.16) на $(1 + \beta \mathcal{L} / c_p)$, находим:

$$\frac{d}{dt} \left(1 + \beta \frac{\mathcal{L}}{c_p} \right) \delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(1 + \beta \frac{\mathcal{L}}{c_p} \right) \delta + \left(1 + \beta \frac{\mathcal{L}}{c_p} \right) m. \quad (3.21)$$

Сложив уравнения (3.19) и (3.21), получим уравнение для функции Φ :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \kappa \rho \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \left(1 + \beta \frac{\mathcal{L}}{c_p} \right) \left[\frac{c_p}{\mathcal{L}} (\gamma_a - \gamma_{va}) \left(w - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \kappa}{\partial z} \right) \right]. \quad (3.22)$$

При получении уравнения (3.22) пренебрегали зависимостью $\gamma_{\text{ва}}$ от высоты. Уравнение (3.22) в системе координат x, y, p, t имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \tau \frac{\partial \Phi}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{gp}{RT} \right)^2 \kappa \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{c_p}{\mathcal{L}} \left(1 + \beta \frac{\mathcal{L}}{c_p} \right) \times \\ \times \left[(\gamma_a - \gamma_{\text{ва}}) \frac{R\bar{T}}{gp} \tau + \frac{\partial}{\partial p} \frac{gp}{RT} \kappa (\gamma_a - \gamma_{\text{ва}}) \right] - d, \quad (3.23)$$

где $\tau = dp/dt$; $\bar{T}$ — средняя температура; $d = \delta - \delta_{\text{пор}}$ — функция, характеризующая выпадение осадков, $\delta_{\text{пор}}$ — пороговое значение водности облаков.

Уравнение (3.23) решается совместно с уравнениями притока тепла, движения и неразрывности методом расщепления на сетке размером 36×22 узла с шагом $\Delta x = \Delta y = 300$ км. По вертикали используются уровни 1000, 850, 700, 500, 300 гПа, на которых прогнозируются u и v . Решения для Φ , T и τ определяются на промежуточных уровнях 925, 775, 600 и 400 гПа.

На боковых границах прогностической области ставятся условия $\partial \Phi / \partial t|_{\Gamma} = \partial T / \partial t|_{\Gamma} = 0$. На верхней границе слоя атмосферы, в котором строится решение уравнения (3.23), полагается $\partial \Phi / \partial p = \partial T / \partial p = 0$. На нижней границе атмосферы задаются потоки тепла и влаги с помощью соотношений, подобных тем, которые рассматриваются в главе 6.

Водность δ в начальный момент времени полагалась равной нулю. Для численного интегрирования уравнений модели применялись конечно-разностные схемы четвертого порядка точности. По прогностическим значениям функции Φ представляется возможность идентифицировать облачность. В облаках $q \approx q_m$, $\delta > 0$, а следовательно, $\Phi > 0$. Вне облаков ($\delta = 0$, $q < q_m$) $\Phi < 0$.

В процессе интегрирования уравнения (3.23) представляется также возможность рассчитывать водность облаков δ и количество осадков. В облаках $q \approx q_m$, а поэтому

$$\delta = \frac{\Phi}{1 + \frac{\mathcal{L}}{c_p} \beta}.$$

Имея значение пороговой водности облаков $\delta_{\text{пор}}$, можно рассчитать ту часть водности, которая выпадает в виде осадков:

$$d = \delta - \delta_{\text{пор}}.$$

7.3.3. Прогноз влажности, облачности и осадков в оперативной прогностической модели Гидрометцентра СССР

В неадиабатической полусферной оперативной прогностической модели Гидрометцентра СССР, основанной на интегрировании полных уравнений гидротермодинамики атмосферы, для прогноза влажности используется уравнение переноса массовой доли водяного пара.

Это уравнение записывается в изобарической системе координат:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + m \left(u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} \right) + \tau \frac{\partial q}{\partial p} = \frac{RT}{p} \mathcal{E}_\Pi, \quad (3.24)$$

где q — массовая доля водяного пара; $\tau = dp/dt$ — аналог вертикальной скорости в изобарической системе координат; m — масштабный множитель; $\mathcal{E}_\Pi$ — приток влаги к единице массы воздуха в единицу времени, обусловленный горизонтальными и вертикальными турбулентными потоками, а также притоком влаги за счет фазовых переходов. Остальные обозначения общепринятые.

Приток влаги $\mathcal{E}_\Pi$ описывается следующей формулой:

$$\frac{RT}{p} \mathcal{E}_\Pi + m^2 \kappa' \nabla^2 q + g \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{q_m(T)(1-f)}{1 + \frac{\mathcal{L}^2 q_m(T)}{c_p R_\Pi T^2}}, \quad (3.25)$$

где члены в правой части описывают притоки влаги, обусловленные турбулентными потоками водяного пара по горизонтали и вертикали, а также конденсацией соответственно; Q — вертикальный турбулентный поток влаги; $q_m(T)$ — массовая доля насыщенного водяного пара; $f = q/q_m$ — относительная влажность; $\mathcal{L}$ — удельная теплота конденсации; R_Π — удельная газовая постоянная водяного пара. Последний член формулы (3.25), описывающий конденсацию, рассчитывается тогда, когда воздух достигает насыщения, т. е. при $f \geq 1$.

Турбулентные потоки влаги рассчитываются только для планетарного пограничного слоя (ППС), параметризуемого по методу В. А. Шнайдемана (см. главу 6). На верхней границе ППС вертикальный турбулентный поток влаги принимается равным нулю. На нижней границе ППС вертикальный поток влаги (Q_0) вычисляется по формуле

$$Q_0 = \rho C_D |\mathbf{V}_{1000}| (q_{1000} - q_{850}), \quad (3.26)$$

где C_D — коэффициент сопротивления; $|\mathbf{V}_{1000}|$ — модуль вектора скорости ветра на уровне 1000 гПа; нижние индексы у q указывают высоту изобарической поверхности.

Поскольку на верхней границе ППС вертикальный турбулентный поток влаги (Q) обращается в нуль, то приток влаги к ППС определяется по формуле

$$q \frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{Q_0}{\rho H_\Pi}, \quad (3.27)$$

где H_Π — высота верхней границы ППС (см. главу 6).

Уравнение (3.24) интегрируется численно по явной схеме центральных разностей на изобарических поверхностях 1000, 850, 700, 500, 400, 300, 250, 200, 150 и 100 гПа. На боковых границах ставятся условия $\partial q / \partial t|_\Gamma = 0$. На верхней границе модельной атмосферы полагается $q = 0$.

По прогностическим значениям относительной влажности на основе эмпирических формул рассчитывается количество облаков

(в долях единицы) трех ярусов (N_n , N_c , N_v), которые относятся к слоям 1000—850 гПа (нижний ярус), 850—500 гПа (средний ярус), 500—300 гПа (верхний ярус):

$$N_n = 3,25f_{1000} - 1,95,$$

$$N_c = 2f_{700} - 0,7,$$

$$N_v = 1,72f_{500} - 0,43,$$

где f_{1000} , f_{700} , f_{500} — относительная влажность в долях единицы на уровнях 1000, 700, 500 гПа соответственно.

В рассматриваемой прогностической модели рассчитывается количество осадков. Принимается, что вся сконденсировавшаяся влага, количество которой определяется последним членом формулы (3.25)

$$\delta q \Delta t = \frac{q_m(T)(1-f)}{1 + \frac{\mathcal{L}^2 q_m(T)}{c_p R_n T^2}} \Delta t,$$

выпадает в виде осадков.

Сумма $\delta q \Delta t$ на всех уровнях дает количество осадков в узле сетки за шаг по времени Δt , а сумма значений осадков на всех шагах по времени — общее количество осадков в узле за весь прогностический период времени.

Процедура численного интегрирования уравнений модели, в том числе уравнения (3.24), описана в главе 9.

7.3.4. Прогноз влажности, облачности и осадков в оперативной прогностической модели Европейского центра среднесрочных прогнозов погоды (ЕЦСПП)

В модели ЕЦСПП прогноз влажности осуществляется на основе уравнения для массовой доли водяного пара в сферических координатах с σ -координатой по вертикали:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{p} \left[\frac{1}{\cos \varphi} \left(p_s u \frac{\partial q}{\partial \lambda} + p_s v \cos \varphi \frac{\partial q}{\partial \varphi} \right) + p_s \dot{\sigma} \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right] = \\ = C^L + E^{L,c} + B^c - \frac{g}{p_s} \frac{\partial R^T}{\partial \sigma} + F_q, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где p_s — приземное давление; $\sigma = p/p_s$ — вертикальная координата; $\dot{\sigma} = d\sigma/dt$ — вертикальная скорость; λ — долгота; φ — широта; C^L — скорость крупномасштабной конденсации:

$$C^L = \frac{q - q_m(T)}{\frac{\mathcal{L}}{c_p} \frac{dq_m(T)}{dT}};$$

$E^{L,c}$ — скорость испарения крупномасштабных или конвективных осадков:

$$E^{L,c} = a_p \alpha_1 (q_m - q) \left(\frac{1}{\alpha_2} \sqrt{\sigma} \frac{p^L}{a_p} \right)^{\alpha_3},$$

$\alpha_1 = 5,44 \cdot 10^{-4}$, $\alpha_2 = 5,09 \cdot 10^{-3}$, $\alpha_3 = 0,577$ — постоянные; P^L — интенсивность осадков на уровне подстилающей поверхности:

$$P^L = \sum_{k=1}^K (C_k^L - E^{L,c}) \frac{p_s \Delta \sigma_k}{g}; \quad k = \frac{\sigma}{\Delta \sigma};$$

a_p — коэффициент, характеризующий площадь под кучевыми облаками, на которой выпадают осадки (для крупномасштабных осадков $a_p = 1$); B^c — изменение влажности за счет конвективных процессов, параметризуемых по схеме Куо:

$$B^c = -\delta^c \left(A_q - \frac{g}{p_s} \frac{\partial R^T}{\partial \sigma} \right) + \frac{\Delta q^c}{\Delta t};$$

A_q — изменение влажности за счет адвекции (члены уравнения (3.28), стоящие в квадратной скобке);

$$\delta^c \begin{cases} 1 & \text{при } \sigma_v \leq \sigma \leq \sigma_n, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

σ_v и σ_n — уровни, соответствующие верхней и нижней границам облака; $\Delta q^c = \alpha (q_c - q_e)$, q_c и q_e — массовая доля водяного пара в облаке и в окружающем воздухе соответственно; α — площадь кучевого облака в баллах:

$$\alpha = \frac{\mathcal{L} I}{P}, \quad I = \frac{\Delta t}{g} \int_0^1 [A_q p_s d\sigma - \Delta t (R^T)_s] d\sigma,$$

$$P = \frac{p_s}{q} \int_{\sigma_n}^{\sigma_v} [c_p (T_c - T_e) + \mathcal{L} (q_c - q_e)] d\sigma,$$

T_c и T_e — температура в облаке и в окружающем воздухе соответственно; R^T — турбулентный поток водяного пара по вертикали:

$$R^T = \frac{g}{p_s} \left(\rho^2 \kappa_q \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right);$$

R_s^T — поток влажности на уровне подстилающей поверхности; $F_q = -\kappa_r V (\nabla^2 Z)^2 + (\nabla^2 D)^2 \nabla^2 (\nabla^2 q)$ — приток водяного пара за счет горизонтальной турбулентной диффузии; κ_q и κ_r — коэффициент турбулентной диффузии по вертикали и горизонтали,

$$\nabla^2 = a^2 \cos^2 \varphi (\Delta \lambda)^2 \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda^2} + a^2 (\Delta \varphi)^2 \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \times \\ \times \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right),$$

Z — вертикальная составляющая потенциального абсолютного вихря скорости ветра:

$$Z = \frac{1}{p_s} \left\{ l + \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{\partial (u \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right] \right\};$$

D — дивергенция горизонтального ветра:

$$D = \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial (v \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right];$$

$\Delta \lambda$, $\Delta \varphi$ — шаги сетки по долготе и широте. Количество неконвективной облачности рассчитывается по методу Д. Смагоринского.

Для расчета вертикального турбулентного потока водяного пара необходимо задать нижнее граничное условие по σ на уровне подстилающей поверхности (s). Это условие записывается в виде

$$R_s^T = -\rho_h c_D |\mathbf{V}|_h [q_m(T_s) - q_h],$$

где ρ_h — плотность; $|\mathbf{V}|$ — модуль вектора скорости ветра; $c_D = \left[\frac{\kappa}{\ln(h/Z_0)} \right]^2$ — коэффициент сопротивления; κ — постоянная Кармана; z_0 — уровень шероховатости; h — индекс, указывающий на то, что соответствующие величины относятся к верхней границе приземного слоя.

На верхней границе модельной атмосферы ставится условие, означающее отсутствие потока водяного пара.

Процедура численного интегрирования уравнения (3.28) рассматривается в главе 9.

На основе крупномасштабных прогностических моделей, изложенных в предыдущих главах, рассчитываются прогнозы на разные сроки значений метеорологических величин, входящих в уравнения этих моделей. К этим величинам относятся давление, температура, составляющие скорости ветра и частично осадки. Соответственно же прогноз погоды должен включать также ряд других метеорологических элементов, таких как облачность, туман, видимость, максимальную и минимальную температуру воздуха, грозы, метели и пр.

Следовательно, с помощью крупномасштабных прогностических моделей прогнозируется лишь «часть погоды». В то же время с помощью указанных моделей возможно прогнозирование лишь величин, осредненных по площади элементарной ячейки прогностической сети модели, равной примерно $\Delta x \Delta y = 300 \times 300 \text{ км}^2$. С помощью таких осредненных значений можно охарактеризовать «основное» состояние погоды, или ее «фон». С помощью рассчитанных по крупномасштабной прогностической модели давления, высоты изобарических поверхностей или функции тока хорошо представляется крупномасштабный, синоптический процесс.

На фоне крупномасштабных синоптических процессов в атмосфере происходят и процессы меньших масштабов, из которых выделим процессы промежуточного, или «подсиноптического» масштаба и процессы мезомасштаба. Эти процессы вносят свой существенный вклад в формирование погоды в отдельных регионах и пунктах. Для прогнозирования этих процессов и соответствующей им погоды разрабатываются специальные региональные и локальные прогностические модели, с помощью которых и рассчитывается детализированный прогноз погоды, включающий более широкий круг метеорологических элементов.

8.1. Региональные прогностические модели

Исходя из того что горизонтальные масштабы крупномасштабных (синоптических) процессов L_k и мезомасштабных (локальных) процессов L_n составляют порядка 1000 и 100 км соответственно, примем, что горизонтальные масштабы процессов подсиноптического (промежуточного) масштаба L_n составляют 100—1000 км. Отсюда следует, что для адекватного описания процессов подсиноптического масштаба необходима пространственная сетка точек с горизонтальными шагами $(\Delta s)_n$, удовлетворяющими следующему неравенству:

$L_m/4 \leq (\Delta s)_n \leq L_k$, где $L_m/4 = 100/4 = 25$ км, $L_k/4 = 1000/4 = 250$ км.

К числу атмосферных процессов, относящихся к подсиноптическим, принадлежат процессы, происходящие в тылу крупных циклонов — в ложбинах вторичных фронтов, процессы на атмосферных фронтах, процессы, происходящие в начальной стадии развития тропических циклонов, тропических депрессий и др.

Перечисленные выше и аналогичные им процессы в значительной мере определяют отклонения погоды от фона в определенных географических регионах, горизонтальный масштаб которых составляет порядка 1000 км (это масштабы небольших государств или крупных областей СССР).

Для составления более обоснованных и детализированных в пространстве и во времени прогнозов погоды разрабатываются региональные прогностические модели. Априори можно считать, что прогноз по региональной модели в принципе будет тем более точен, чем меньше шаг сетки модели. Здесь, однако, следует подчеркнуть, что принципиальные основы (и соответствующие им уравнения) остаются в рамках крупномасштабных моделей. Поэтому бесконечное уменьшение шага сетки не может обеспечить бесконечное улучшение результатов: оно возможно лишь до тех пор, пока не будет сделан переход к мезометеорологическим процессам.

Переход к региональным прогностическим моделям требует все более обоснованно поставленных граничных условий на горизонтальных границах области расчета. Если прогноз по глобальной прогностической модели не требует никаких граничных условий, то для прогноза по полушарной модели необходимы условия на экваторе. Переход же к региональным прогностическим моделям требует постановки условий на границах, которые могут проходить через области с большими горизонтальными градиентами и большой временной изменчивостью метеорологических величин. Принятие в таких условиях слишком приближенных условий (как, например, постоянство величин на границах) приводит к значительным ошибкам в региональных прогнозах.

Исходя из этих предпосылок в современных прогностических центрах разрабатывают «многоступенчатые» системы прогностических моделей. Основной «ступенью» таких систем является глобальная или полушарная прогностическая модель, шаг сетки которой будет брать за основу для дальнейших рассуждений. Для определенности примем его равным $\Delta s = \Delta x = \Delta y = 300$ км. По этой модели рассчитывается прогноз для всех узлов сетки на разные сроки (например, 1—3 сут) с шагом по времени Δt , равным, например, 15 мин.

Для детализации прогнозов для крупных регионов и на разные сроки в прогностическом центре имеются одна или несколько региональных прогностических моделей. Пусть региональная прогностическая модель каждого последующего уровня отличается от модели предыдущего уровня тем, что ее шаг по горизонтальным координатам вдвое меньше. Тогда получается «иерархия» прогностических моде-

Таблица 8.1

Примерный шаг сетки Δs в глобальной (полушарной) прогностической модели, в региональных моделях и в мезометеорологической модели

Модель	Δs км
Глобальная (полушарная)	200—500
Региональные	50—200
Мезометеорологический	
мезо- α , β -модели	5—50
мезо- γ -модель	1—5

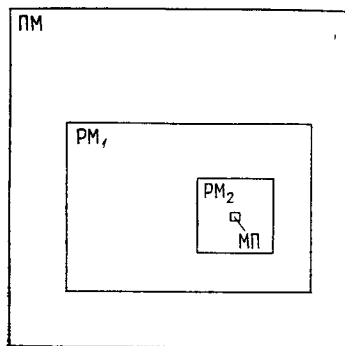


Рис. 8.1. Схема расположения на полушарии областей расчета по полушарной прогностической модели (ПМ) и региональных моделей двух уровней (PM₁ и PM₂), а также мезометеорологического полигона (МП).

лей, которую завершает локальная (мезометеорологическая или статистическая) модель (рис. 8.1, табл. 8.1).

Изложенная иерархическая система прогностических моделей реализуется с помощью модели «вложенных» сеток (рис. 8.2). Этот метод заключается в том, что горизонтальные координаты модели каждого последующего уровня получаются путем деления координат узлов сетки модели предыдущего уровня на 2 (или любое другое число). При этом все узлы сетки модели предыдущего уровня включаются в сетку модели нового уровня. Легко понять, что число узлов сетки нового уровня будет возрастать как степень дробности деления сетки на каждом уровне. Так, при уменьшении шага сетки в 2 раза число узлов новой сетки возрастет в $2^2 = 4$ раза. В целях экономичности счета уменьшение шага сетки сопровождается уменьшением области расчета таким образом, чтобы общее число узлов сетки в новой области было примерно равно их числу в прежней области.

Важнейшим моментом метода вложенных сеток является учет условий на боковых границах прогностической области. Эти границы в каждой региональной модели последующего уровня совпадают с какими-либо координатными линиями прогностической модели

предыдущего уровня. Тогда в качестве граничных условий модели данного уровня принимаются результаты прогноза на данный шаг по модели предыдущего

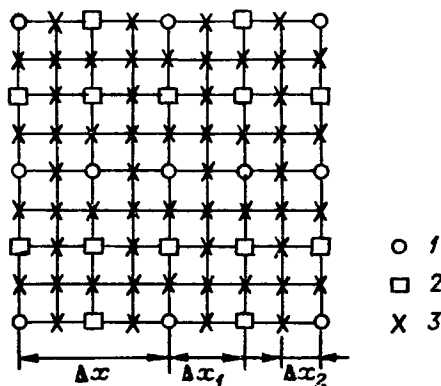


Рис. 8.2. Схема расположения узлов сетки полушарной модели и двух региональных моделей «вложенных» сеток.

1 — узлы сетки полушарной модели (шаг сетки Δx), 2 — узлы сетки региональной модели первого уровня ($\Delta x_1 = \frac{1}{2} \Delta x$), 3 — узлы сетки региональной модели второго уровня ($\Delta x_2 = \frac{1}{2} \Delta x_1$).

уровня. В методе вложенных сеток возможен также учет результатов прогноза по модели последующего уровня в прогнозе по модели предыдущего уровня. В этом случае на очередных шагах по времени в точках двух моделей, входящих в общую для них область, результаты прогноза по модели предыдущего уровня заменяются на результаты прогноза по модели последующего уровня. При этом возникает необходимость согласования прогнозов по двум моделям в узлах сетки, находящихся на границах между областями расчета двух моделей, что является весьма непростой задачей (см. главу 4).

Изложенная иерархия прогностических моделей может быть реализована и в других вариантах. Например, возможно сочетание глобальной модели с шагом 300 км с региональной моделью с шагом 50 км или даже непосредственно с мезометеорологической моделью. При этом шаги сетки в разных моделях могут быть и не кратными одна относительно другой.

Описанная система глобальных и региональных моделей частично уже реализована. Так, в СССР разработаны региональные модели с шагами 150 и 200 км, которые применяются в сочетании с полушарной моделью. В США применяются региональные модели с шагами в 190 и 127,5 км и менее, а в Великобритании — региональные модели с шагами до 15 км.

8.2. Уравнения гидротермодинамики мезопроцессов

Локальные гидродинамические прогнозы погоды разрабатываются на основе уравнений гидротермодинамики мезопроцессов. Как уже говорилось, к мезометеорологическим процессам относятся процессы с горизонтальным масштабом порядка десятков и сотен километров. В современной классификации мезопроцессов выделяют процессы следующих промежуточных масштабов:

- мезо- α -масштаба (200—2000 км),
- мезо- β -масштаба (20—200 км),
- мезо- γ -масштаба (2—20 км).

К процессам мезо- α -масштаба относятся процессы на атмосферных фронтах, в тропических циклонах и др.; к процессам мезо- β -масштаба — орографические возмущения, скопления облаков и др.; к процессам мезо- γ -масштаба — отдельные кучевые облака, некоторые типы гравитационных волн и др.

Современная постановка задачи гидродинамического локального прогноза погоды была сформулирована еще в начале 60-х годов выдающимся советским ученым И. А. Кибелем. Им же была предложена соответствующая система уравнений мезопроцессов, которую можно записать в виде

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial x} + lv + \kappa_1\Delta u + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial\Phi}{\partial y} - lu + \kappa_1\Delta v + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial v}{\partial z},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \beta T' + \kappa_1 \Delta w + \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial w}{\partial z}, \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= \sigma w, \\
\frac{dT'}{dt} + (\gamma_a - \bar{\gamma}) w &= \frac{1}{c_p \bar{\rho}} (\mathcal{E}_\pi + \mathcal{E}_\Phi) + \kappa_1 \Delta T' + \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} \left[\kappa \left(\frac{\partial T'}{\partial z} + \gamma_a - \bar{\gamma} \right) \right], \\
\frac{dq'}{dt} - \bar{\gamma}_q w &= \frac{1}{\bar{\rho}} \mathcal{E}_{\pi\Phi} + \kappa_1 \Delta q' + \frac{\partial}{\partial z} \left[\kappa \left(\frac{\partial q'}{\partial z} - \bar{\gamma}_q \right) \right]. \quad (2.1)
\end{aligned}$$

Здесь и далее $\bar{T}(z)$, $\bar{p}(z)$, $\bar{\rho}(z)$, $\bar{q}(z)$ — фоновые распределения по высоте функций T , p , ρ , q , которые могут быть заданы, например, по климатическим данным или определены с помощью какой-либо крупномасштабной прогностической модели атмосферы (в последнем случае эти функции будут относиться к фиксированному моменту времени); величины со штрихами означают отклонения реальных значений от фоновых, например $T'(x, y, z, t) = T(x, y, z, t) - \bar{T}(z)$; $\bar{\gamma} = -\partial \bar{T} / \partial z$, $\bar{\gamma}_q = -\partial \bar{q} / \partial z$; $\beta = g / T_{\text{ср}}$ — параметр плавучести (конвенции); $T_{\text{ср}}$ — средняя температура атмосферы; член $\beta T'$ описывает вертикальное ускорение частиц, обусловленное силой плавучести; $\sigma = (g - R\bar{\gamma}) / RT_{\text{ср}}$, $\Phi = RT_{\text{ср}} p' / \bar{p}$, κ_1 и κ — коэффициенты турбулентности при движении по горизонтали и по вертикали, остальные обозначения общепринятые. Переменные $\bar{p}$ и $\bar{\rho}$ связаны соотношением гидростатики:

$$\partial \bar{p} / \partial z = -g \bar{\rho}.$$

Уравнения вида (2.1) получаются из исходной системы уравнений гидротермодинамики с помощью упрощений, известными под названием *упрощений теории конвекции*. Уравнение неразрывности, взятое при условии $\partial \rho / \partial t = 0$, исключает акустические волны.

В современной терминологии уравнения вида (2.1) принято называть *уравнениями глубокой конвекции*. Если же в этих уравнениях принять, что $\bar{T} = \text{const}$, $\bar{\rho} = \text{const}$, $\bar{q} = \text{const}$, то в этом случае уравнения называют *уравнениями мелкой конвекции* (они применяются для высот порядка 3 км). Поскольку в уравнениях принято, что $\partial \rho / \partial t = 0$, то они называются также «неупругими» *уравнениями конвекции*. В некоторых задачах мезометеорологии такое условие не ставится и уравнение неразрывности записывается в полном виде. Тогда соответствующие уравнения называют «упругими» *уравнениями конвекции*.

Во многих моделях вместо температуры T используется потенциальная температура θ . Уравнение притока тепла в этом случае записывается в виде

$$\frac{d\theta'}{dt} + \bar{\gamma}_\theta w = \frac{1}{c_p \bar{\rho}} (\mathcal{E}_\pi + \mathcal{E}_\Phi) + \kappa_1 \Delta \theta' + \frac{\partial}{\partial z} \left[\kappa \left(\frac{\partial \theta'}{\partial z} - \bar{\gamma}_\theta \right) \right], \quad (2.2)$$

где $\bar{\gamma}_\theta = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = -\frac{\theta}{T} (\gamma_a - \gamma)$, $\bar{\theta} = \bar{\theta}(z)$. Ускорение, обусловленное силой плавучести, в уравнении движения по вертикали выражается теперь в виде $\beta \theta'$, где $\theta'(x, y, z, t) = \theta(x, y, z, t) - \bar{\theta}(z)$, $\beta = g/\bar{\theta}$.

Заметим, что в различных моделях величины $\mathcal{E}_\lambda$, $\mathcal{E}_\phi$, $\mathcal{E}_\pi$ могут не учитываться.

В случае учета подстилающей поверхности, а также включения в модель атмосферных примесей уравнения мезопроцессов дополняются уравнениями теплопередачи в почве и переноса примесей

$$\frac{\partial T^{**}}{\partial t} = \frac{\lambda^*}{c^* \rho^*} \frac{\partial^2 T^{**}}{\partial z^2}, \quad (2.3)$$

$$\frac{ds_a}{dt} + \frac{\partial s_a w_a}{\partial z} = \kappa_x \frac{\partial^2 s_a}{\partial x^2} + \kappa_y \frac{\partial^2 s_a}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial s_a}{\partial z} + \mathcal{E}_a, \quad (2.4)$$

где звездочкой обозначены характеристики почвы; λ^* — коэффициент теплопроводности почвы; s_a — объемная концентрация примеси a ; $\mathcal{E}_a$ — скорость возникновения (источник) или уничтожения (сток) примеси; κ_x , κ_y — коэффициенты турбулентности, описывающие турбулентные пульсации примеси по осям x и y ; w_a — собственная вертикальная скорость примеси.

Отметим, кроме того, что коэффициенты турбулентности κ_1 и κ могут задаваться или определяться с помощью дополнительных соотношений, включающих, например, уравнение баланса энергии турбулентных пульсаций.

8.3. Постановка задачи о локальном численном прогнозе погоды на основе уравнений мезометеорологии

В наиболее полном виде постановка этой задачи впервые была сформулирована И. А. Кибелем. Согласно этой постановке, детализированный, локальный прогноз погоды рассчитывается после прогноза по крупномасштабной прогностической модели. Результаты прогноза по этой модели величин u , v , p , T , q , w в мезометеорологической прогностической модели используются в качестве фоновых.

При интегрировании уравнений мезометеорологии по времени эти же значения принимаются и в качестве начальных данных. При этом считается, что мезометеорологические возмущения в начальный момент отсутствуют. Начальные условия в таком случае записываются в виде

$$\text{при } t = t_0: \quad u = \bar{u}(z), \quad v = \bar{v}(z), \quad T' = \theta' = q' = \Phi = T^{**} = 0. \quad (3.1)$$

При этом в качестве функций $\bar{u}(z)$ и $\bar{v}(z)$ принимаются величины u и v , полученные по прогностической модели на момент t_0 . Вертикальная скорость должна удовлетворять уравнению неразрывности.

В принципе, однако, возможна и такая постановка задачи, при которой мезометеорологический локальный прогноз может и не связываться с прогнозом по крупномасштабной модели. В этом случае фоновые и начальные данные должны быть получены по данным синоптических наблюдений в исходной для прогноза момент времени. Более того, начальные данные могут быть получены и с помощью специальных мезометеорологических наблюдений. Однако такой путь является весьма сложным.

Область расчетов для мезометеорологического прогноза определяется исходя из практических потребностей. Горизонтальные размеры такой области составляют 50—300 км, а ее площадь — от 50×50 до 300×300 км², что соответствует площади элементарной ячейки сетки точек крупномасштабной региональной или глобальной модели. В дальнейшем такую область будем называть мезометеорологическим полигоном. Высота верхней границы полигона $z = H$ может составлять 2—10 км, а ее нижней границей является подстилающая поверхность $z = \xi(x, y)$. В некоторых случаях в область мезометеорологического полигона включается и тонкий (толщиной $d \approx 1$ м) самый верхний слой почвы или воды при наличии в области водных бассейнов.

Перейдем к формулировке граничных условий. Начнем с условий на боковых границах (для простоты будем рассматривать прямоугольную область). Возможно несколько вариантов. Простейший из них заключается в следующем. Будем считать, что на границах области мезометеорологические возмущения в течение всего интервала времени расчета отсутствуют:

$$T' = \theta' = q' = T^{*'} = 0. \quad (3.3)$$

В то же время фоновые значения метеорологических величин на боковых границах могут изменяться в соответствии с прогнозом по крупномасштабной модели.

Второй вариант граничных условий получают исходя из предположения о возможности экстраполяции возмущений на границы из внутренней части области с помощью соотношений вида

$$\left. \frac{\partial f'}{\partial t} \right|_{\Gamma} + c_n \frac{\partial f'}{\partial n} = 0, \quad (3.4)$$

где Γ — боковая граница области, n — нормаль к ней. Производная $\partial f' / \partial n$ и величина c_n , имеющая смысл скорости переноса величины f' , определяются по значениям f' во внутренней части области в разные моменты времени.

На верхней границе полигона принимаются следующие условия:

$$\text{при } z = H: w = 0, \quad f' = 0, \quad w \frac{\partial f'}{\partial z} = 0. \quad (3.5)$$

На подстилающей поверхности принимаются условия прилипания:

$$\text{при } z = 0: u = v = w = 0. \quad (3.6)$$

Однако при наличии неровностей рельефа высотой $z = \xi(x, y)$ принимается условие обтекания, согласно которому

$$\text{при } z = \xi(x, y): \quad w_{\xi} = u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y}. \quad (3.7)$$

Кроме того, на подстилающей поверхности принимаются условия равенства температуры воздуха и почвы (воды) и условие теплового баланса:

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 (z = \xi): \quad T = T^*, \quad (1 - A)S + G + \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a \right) - \\ - \delta \sigma T_0^4 + B - \mathcal{L}Q + H_a = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где A — альбеда подстилающей поверхности; S и G — нисходящие потоки коротковолновой и длинноволновой радиации; T_0 — значение температуры при $z = 0$ ($z = \xi$); $B = -\lambda^* \partial T^* / \partial z$ — поток тепла на поверхности, обусловленный теплообменом с глубинными слоями почвы (воды), $Q = -\kappa \rho dq / dz$ — поток тепла, обусловленный испарением (конденсацией), H_a — поток тепла, обусловленный антропогенными факторами.

Применительно к мезометеорологическим возмущениям условия (3.8) примут вид

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 (z = \xi): \quad T' = T^{*'} = T'_0, \quad (1 - A)S' - G' + \lambda \frac{\partial T'}{\partial z} - \\ - \delta \mu T'_0 + B' - \mathcal{L}Q' + H_a = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$\mu = \left. \frac{d(\sigma T^4)}{dT} \right|_{T=\bar{T}_0} \approx 4\sigma \bar{T}^3.$$

При получении соотношения (3.9) было использовано следующее приближенное представление (по формуле бинома Ньютона):

$$\sigma T_0^4 = \sigma (\bar{T}_0 + T'_0)^4 = \sigma (\bar{T}_0^4 + 4\bar{T}_0^3 T'_0 + \dots) \approx \sigma \bar{T}_0^4 + 4\sigma \bar{T}_0^3 T'_0,$$

которые при условии, что $|T'| \ll \bar{T}$ выполняется с большой точностью.

Задача замыкается граничным условием для температуры почвы (воды):

$$\text{при } z = -d \quad T^* = \text{const} \text{ или } T^{*'} = 0. \quad (3.10)$$

Турбулентные потоки тепла, влаги и импульса у земной поверхности рассчитываются по теории Монина — Обухова.

При расчете (прогнозе) атмосферной примеси принимается:

$$\begin{aligned} \text{при } z = H \quad s = 0 \text{ или } \kappa \frac{\partial s}{\partial z} = 0, \\ \text{при } z = 0 \quad s = 0 \text{ или } \kappa = \frac{\partial s}{\partial z} + \omega_a s_a = \beta s - f, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где β — коэффициент, учитывающий частичное поглощение примеси подстилающей поверхностью; $f = f(x, y)$ — наземные источники

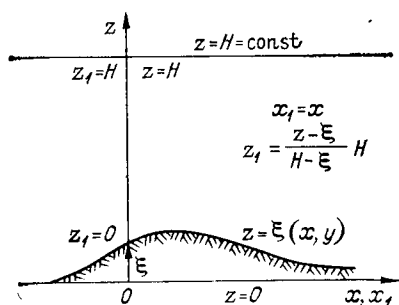


Рис. 8.3. Орографические координаты.

примеси. Условие $s_a = 0$ при $z = 0$ принимается для водной поверхности.

В современных мезометеорологических моделях неровности рельефа учитываются не с помощью условия на поверхности (3.7), а путем введения специальной системы координат. Рассмотрим область, ограниченную снизу не-

ровной поверхностью Земли $z = \xi(x, y)$, а сверху — плоскостью $z = H = \text{const}$ (рис. 8.3). Для этой части атмосферы введем новые координаты:

$$x_1 = x, \quad y_1 = y, \quad t_1 = t, \quad z_1 = \frac{z - \xi}{H - \xi} H. \quad (3.12)$$

Легко проверить, что

$$\frac{\partial z_1}{\partial z} = \frac{H}{H - \xi}. \quad (3.13)$$

Для перехода от исходных координат x, y, z к новым координатам x_1, y_1, z_1, t_1 воспользуемся известными правилами замены переменных, согласно которым

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial z_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z_1}, & \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial z_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z_1}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\partial z_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z_1}, & \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial z_1}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z_1}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Введем в рассмотрение вертикальную скорость в новой системе координат:

$$w_1 = \frac{dz_1}{dt_1} = \frac{\partial z_1}{\partial t} + u \frac{\partial z_1}{\partial x} + v \frac{\partial z_1}{\partial y} + w \frac{\partial z_1}{\partial z}.$$

В этом последнем выражении в соответствии с выражениями (3.12)—(3.14)

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_1}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial z_1}{\partial z} &= \frac{H}{H - \xi}, & \frac{\partial z_1}{\partial x} &= \left(\frac{zH}{(H - \xi)^2} - \frac{\xi H}{(H - \xi)^2} - \frac{H}{H - \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} = \\ &= \frac{H}{H - \xi} \frac{z_1 - H}{H} \frac{\partial \xi}{\partial x}, & \frac{\partial z_1}{\partial y} &= \frac{H}{H - \xi} \frac{z_1 - H}{H} \frac{\partial \xi}{\partial y}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в соотношения для новой вертикальной скорости w_1 , получаем:

$$w_1 = \frac{dz_1}{dt_1} = \frac{H}{H - \xi} w + \frac{z_1 - H}{H - \xi} \left(u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} \right). \quad (3.15)$$

Преобразуем теперь, например, уравнение движения по оси x , записав его в сокращенном варианте:

$$\frac{du}{dt} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv.$$

Полная производная du/dt в новой системе координат примет вид

$$\frac{du}{dt_1} = \frac{\partial u}{\partial t_1} + u \frac{\partial u}{\partial x_1} + v \frac{\partial u}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial u}{\partial z_1}, \quad (3.16)$$

где w_1 определяется выражением (3.15). В соответствии с формулой (3.14) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{H}{H-\xi} \frac{z_1-H}{H} \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \\ &+ \frac{z_1-H}{H-\xi} \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{z_1-H}{H-\xi} \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \frac{\partial \xi}{\partial x}. \end{aligned}$$

В результате уравнение движения в новых координатах примет вид

$$\frac{du}{dt_1} = \frac{\partial u}{\partial t_1} + u \frac{\partial u}{\partial x_1} + v \frac{\partial u}{\partial y_1} + w_1 \frac{\partial u}{\partial z_1} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{z_1-H}{H-\xi} \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \frac{\partial \xi}{\partial x} + lv.$$

Аналогичным образом преобразуются и другие уравнения системы уравнений мезометеорологии. Согласно определению новых координат по формуле (3.12) имеем: при $z = \xi$ $z_1 = 0$, при $z = H$ $z_1 = H$. В соответствии с этим граничные условия теперь должны быть отнесены к уровням

$$z_1 = 0 \ (z = \xi) \text{ и } z_1 = H \ (z = H).$$

Новые уравнения мезометеорологии должны интегрироваться теперь в прямоугольной области, ограниченной плоскостями как сверху, так и снизу, что облегчает решение задачи.

Система уравнений мезометеорологии является нелинейной. Ее решение в аналитическом виде возможно лишь при значительных упрощениях как самих нелинейных уравнений, так и граничных условий, или же после линеаризации нелинейных уравнений. Таким путем был решен ряд частных задач мезометеорологии, к числу которых относятся задачи обтекания препятствий (с идеализированной формой поверхности), местных циркуляций (бризы, горно-долинные ветры) и др.

Решение же задачи локального прогноза погоды в общей постановке возможно лишь численными методами. Для их применения в зоне мезометеорологического полигона вводится пространственная сетка точек с горизонтальными шагами $\Delta s \approx 0,5-5$ км и с вертикальными шагами $\Delta z \approx 0,1-1$ км. Сеть точек по вертикали, как правило, неравномерна: внутри ППС она более густая, над ним — более редкая. В слое почвы (воды) $\Delta z \approx 0,1$ м.

Конкретный выбор шагов по координатам производится исходя из необходимости детализированного описания мезометеорологических полей. Дифференциальные уравнения задачи аппроксимируются соответствующими им конечно-разностными аналогами. Система

уравнений мезометеорологии описывает внешние и внутренние гравитационные волны, которые вносят свой вклад в мезометеорологические возмущения. Ввиду этого применяемые схемы численного интегрирования конечно-разностных уравнений должны удовлетворять определенным критериям вычислительной устойчивости, согласно которым шаги по времени должны составлять десятки секунд или минут. Однако некоторые неявные численные схемы допускают использование шагов по времени до часа.

Изложенная общая постановка задачи локального численного прогноза погоды слишком сложна, поэтому она решается поэтапно. К уже реализованным этапам можно отнести такие частные задачи, как расчет местных ветров, вертикальных скоростей, распределения температуры в пограничном слое и др.

8.4. Особенности температурных условий большого города на основе моделирования мезометеорологических процессов

При прогнозе температуры и ее суточного хода важно учитывать местные физико-географические условия. В особенности это относится к условиям больших городов, значительная часть территории которых занята застройками и бетонно-асфальтовыми покрытиями. Это существенно отражается на физических свойствах подстилающей поверхности и характеристиках приземного и вышележащего слоев воздуха.

Так, по сравнению с окружающей (естественной) местностью застройки и покрытия в городе приводят к увеличению альбедо поверхности (примерно с 0,2 до 0,4), ее шероховатости (параметр z_0 увеличивается с 0,1 до 1 м и более), относительной влажности, коэффициента температуропроводности самой верхней части почвы или искусственных покрытий, значительному увеличению загрязнения воздуха. Весьма важным фактором городских условий является выделение значительного количества тепла при сжигании твердого и жидкого топлива в бытовых и промышленных целях; образующийся в городах поток тепла может достигать 250 Вт/м^2 . Поступая к поверхности и нагревая ее, это тепло посредством турбулентного обмена распространяется далее в приземный слой воздуха, повышая его температуру.

Для исследования метеорологического режима городов разрабатываются специальные мезометеорологические модели. Рассмотрим одну из них.

Примем для города условия горизонтальной однородности метеорологических полей и рельефа местности. Тогда при дополнительных условиях квазистатичности, отсутствия вертикальных движений, а также отсутствия непосредственного нагревания или охлаждения

воздуха под влиянием всех факторов, кроме турбулентного обмена, систему уравнений мезопроцессов можно записать в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= l(v - v_g) + \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -l(u - u_g) + \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial \theta}{\partial z}, \\ \frac{\partial q}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} \kappa \frac{\partial q}{\partial z}, \\ p &= R_p T, \\ \frac{\partial T^*}{\partial t} &= \frac{1}{c^* \rho^*} \frac{\partial}{\partial z} \lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial z},\end{aligned}\tag{4.1}$$

где u_g, v_g — составляющие геострофического ветра, принимаемые постоянными в течение срока локального прогноза.

Приведенную систему уравнений будем интегрировать численно на интервал времени 24 ч для слоя атмосферы от поверхности Земли до высоты $z = H = 1600$ м и для верхнего слоя почвы толщиной $d = 1$ м применительно к зоне умеренных широт для июля.

В качестве граничных условий примем следующие:

$$\text{при } z = H: \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial t} = 0, \quad u = u_g = \text{const},$$

$$v = v_g = \text{const}, \quad p_H = 850 \text{ гПа}, \quad \theta = 295 \text{ К}, \quad q = 6,7 \text{ }^{\circ}/_{\infty};$$

$$\text{при } z = -d: \quad \partial T^* / \partial t = 0, \quad T^* = 295 \text{ К},$$

$$\text{при } z = 0: \quad u = v = 0, \quad T = T^* = T_0, \quad q = q_0 = f_0 q_m(T_0),$$

$$(1 - A)S + G + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} - \delta \sigma T_0^4 - \lambda^* \frac{\partial T^*}{\partial z} - \mathcal{L}Q + H_a = 0,$$

$$S = S^0 (0,947 - 0,063 \tau_L) \sin h, \tag{4.2}$$

где $q_m(T_0)$ — массовая доля насыщенного водяного пара при температуре T_0 , f_0 — относительная влажность воздуха у поверхности Земли, S^0 — солнечная постоянная, h — высота Солнца, τ_L — фактор мутности Линке. С помощью последнего в модели производится учет влияния на температуру загрязнения воздуха. Нисходящий поток длинноволновой радиации G (встречное излучение) вычисляется по формуле Брента $G = \delta \sigma T_0^4 (a - b \sqrt{e})$, где e — парциальное давление водяного пара, a и b — коэффициенты.

Введем в рассмотрение нижний приземный подслон воздуха высотой $h = 50$ м, в котором вертикальные потоки тепла, влаги и импульса постоянны. Определение в нем метеорологических величин, включая значение коэффициента турбулентности κ , производится по теории А. С. Монина и А. М. Обухова; параметр шероховатости z_0 считается известным.

В качестве начальных условий примем следующие:
при $t = 0$ $\theta = 295$ К, $u = a_0 e^{-b_0 z} + c_0$, $v = a_1 e^{-b_1 z} + c_1$,

$$u(H) = u_g, v(H) = v_g, \quad (4.3)$$

где $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1$ — коэффициенты.

Для коэффициента турбулентности выше приземного подслоя примем условия его линейного убывания с высотой:

$$\text{при } z > h \quad \kappa(z) = \kappa_h \left(1 - \frac{z-h}{H-h}\right). \quad (4.4)$$

Система уравнений (4.1), а также условия (4.2) аппроксимируются конечно-разностными соотношениями. Для численного интегрирования полученных конечно-разностных уравнений вводится система точек на оси z , включающая 19 точек в атмосфере и 6 в почве. Шаг по времени составляет 30 мин.

В результате проведения ряда численных экспериментов оценена роль отдельных физических факторов и их комплекса на температурные условия гипотетического большого города.

На основании экспериментов можно сделать ряд выводов и практических рекомендаций для локального прогноза погоды в условиях города.

Увеличение альбедо поверхности и загрязнения воздуха в городе приводит к выхолаживанию, особенно заметному днем. Увеличение шероховатости за счет застроек сопровождается значительным понижением температуры воздуха днем и некоторым ее повышением ночью, что объясняется изменением турбулентности и стратификации воздуха в течение суток под влиянием шероховатости. Уменьшение относительной влажности в городе днем практически на температуру не влияет; ночью же оно сопровождается усилением выхолаживания. Изменение температуропроводности почвы на температуре практически не сказывается.

Из всех физических факторов, связанных с воздействием города, наибольшее влияние на температуру оказывает антропогенный приток тепла, основная часть которого посредством турбулентного обмена передается в атмосферу. За счет этого температура воздуха у поверхности может повышаться на 5°C .

В целом же комплекс физических условий города приводит к образованию в городе «острова тепла»: средняя температура воздуха в городе выше температуры воздуха окружающей местности на $1-2^\circ\text{C}$. Днем это различие может быть невелико. Однако ночью разность температур составляет около 3°C , достигая при некоторых значениях параметров $7-8^\circ\text{C}$. Соответственно этому суточный ход температуры в городе более выражен, чем в его окружающей местности.

С помощью экспериментов установлено также, что «остров тепла» над городом прослеживается до значительных высот. Так, при увеличении температуры в городе по сравнению с его окружением ночью у поверхности Земли на $3,5^\circ\text{C}$ соответствующим

щее увеличение температуры воздуха на высотах 100 и 300 м составило 2,8 и 2,4 °С.

Еще один очень важный для локального прогноза вывод: увеличение антропогенного притока тепла приводит к уменьшению числа Ричардсона

$$Ri = \frac{\frac{g}{T} (\gamma_a - \gamma)}{(\partial u / \partial z)^2 + (\partial v / \partial z)^2}.$$

Уменьшение числа Ричардсона отражает факт увеличения неустойчивости атмосферы, что в свою очередь увеличивает вероятность гроз и ливневых осадков.

В целом результаты расчетов мезометеорологических эффектов по изложенной модели атмосферы не противоречат результатам, полученным по другим моделям, а также экспериментальным данным. Так, например, интенсивность «острова тепла» в Сент-Луисе (Миссури, США) превышает 2 °С.

В заключение подчеркнем, что полная реализация постановки задачи локального прогноза погоды на основе уравнений мезометеорологии сопряжена с большими трудностями, которые обусловлены негидростатичностью процессов. Наибольшие успехи в этой области достигнуты в метеорологической службе Великобритании, где создана и оперативно используется негидростатичная прогностическая модель. Обсуждение этой модели выходит за рамки этой книги.

9.1. Применение оперативных прогностических моделей атмосферы в службе погоды

В предыдущих главах были описаны принципиальные основы прогностических моделей атмосферы и способы их реализации. Однако вопросы об их возможностях и результатах их практического применения в оперативной практике гидрометеорологического обслуживания населения и в народнохозяйственной деятельности не рассматривались.

Для целей краткосрочного прогноза (1—3 сут) необходимо, чтобы все расчеты и выдача результатов были осуществлены в течение 3—6 ч после срока гидрометеорологических наблюдений. В противном случае, когда интервал времени прогностических расчетов соизмерим с интервалом времени, на который рассчитывается прогноз, применение прогностических моделей не имеет смысла. Это обстоятельство накладывает на оперативные прогностические модели жесткие ограничения на время счета прогноза на ЭВМ.

Интервал времени между сроком гидрометеорологических наблюдений и моментом «выпуска» прогноза для потребителей (населения, народнохозяйственных организаций и др.) включает в себя время, необходимое для выполнения следующих работ:

- 1) кодирования и передачи данных наблюдений по линии связи (передача должна вестись со скоростью не менее 1200 бод, т. е. двоичных знаков в одну секунду);

- 2) приема данных в метеорологических центрах, их первичной обработки и контроля;

- 3) численного объективного анализа данных наблюдений и выдачи результатов анализа в виде карт, таблиц, а также их записи на запоминающие устройства (накопители);

- 4) расчета прогнозов барического поля, температуры, влажности, скорости ветра, количества осадков и других величин и выдачи их в виде карт, таблиц, графиков и пр.;

- 5) распространения прогнозов для населения, производственных организаций и руководящих органов.

Отметим, что время, необходимое для выполнения первых двух пунктов этого комплекса работ, т. е. период между сроком наблюдений и окончанием приема метеорологической информации, называют периодом «отсечения» данных наблюдений.

Этот комплекс работ полностью или частично выполняется в метеорологических центрах разного уровня. Согласно решению Все-

мирной метеорологической организации (ВМО) метеорологические центры делятся на следующие три категории:

- территориальные метеорологические центры (ТМЦ);
- региональные метеорологические центры (РМЦ);
- мировые метеорологические центры (ММЦ).

В сферу ответственности ТМЦ входят сбор и обработка данных, составление и распространение прогнозов погоды для территорий отдельных крупных областей, республик или сравнительно небольшого (по площади) государства. В качестве примера ТМЦ можно привести метеорологический центр в г. Минске, который ответствен за выполнение указанных выше метеорологических работ по территории Белорусской ССР.

РМЦ несут ответственность за комплекс метеорологических работ в зоне крупного географического региона или среднего по площади государства. Примером РМЦ является метеорологический центр в г. Оффенбахе (ФРГ). В СССР имеются четыре РМЦ в следующих городах: Москва, Новосибирск, Ташкент и Хабаровск. Деятельность этих четырех метеорологических центров охватывает всю территорию СССР.

Наконец, деятельность ММЦ относится ко всему земному шару. Всего существуют три ММЦ — в Москве, Вашингтоне и Мельбурне.

ВМО выделяет и еще один тип метеорологических центров — национальные метеорологические центры (НМЦ), ответственные за весь комплекс метеорологических работ, связанных с прогнозами погоды в зоне своего государства.

Кроме указанных метеорологических центров, часть комплекса метеорологических работ, например составление и распространение прогнозов для отдельных пунктов и небольших районов, выполняется крупными метеорологическими и авиаметеорологическими станциями, обсерваториями, территориальными гидрометцентрами, а также бюро погоды.

Деление метеорологических центров по перечисленным категориям носит условный характер, так как их деятельность тесно переплетается. Так, РМЦ могут выполнять и функции ТМЦ. Гидрометцентр СССР, например, выполняет функции ММЦ, РМЦ, ТМЦ, а также НМЦ.

К началу 80-х годов использование численных методов прогноза погоды в том или ином виде (хотя бы в форме прогностических карт, передаваемых по линиям связи) производится практически во всех странах мира. Численное прогнозирование осуществляется более чем в 30 странах. Используемые прогностические модели могут разрабатываться в центре или заимствоваться.

Использование прогностических моделей того или иного класса определяется метеорологическими интересами данной страны, мощностью имеющихся в данном метеорологическом центре ЭВМ, а также обязательствами, взятыми в рамках ВМО или по двусторонним соглашениям с другими странами.

Глобальные и полушарные (полусферные) численные модели разрабатываются и используются во всех трех ММЦ, а также в наи-

более крупных РМЦ и НМЦ, например НМЦ США, Японии, ФРГ и др. Прогнозы по этим моделям на 1—5 сут составляются один или два раза в сутки по данным наблюдений в 0 и 12 ч СГВ.

Время отсечения данных наблюдений для численного анализа и прогноза по глобальным и полушарным моделям составляет 3—5 ч. Для реализации этих моделей используются ЭВМ, выполняющие от 10 млн. до 100 млн. и более операций в секунду.

Региональные прогностические модели применяются в РМЦ, в некоторых ТМЦ, а также в ММЦ. Прогнозы по ним рассчитываются 2—4 раза в сутки. Время отсечения данных наблюдений составляет 1—3 ч. Для реализации региональных моделей достаточно иметь ЭВМ производительностью от 1 млн. до 10 млн. операций в секунду.

Прогнозы для сравнительно небольших территорий (локальные прогнозы) рассчитываются в ТМЦ. Однако некоторые из разрабатываемых локальных прогностических моделей являются настолько сложными, что их реализация возможна только в РМЦ и НМЦ (Москва, Новосибирск, Оффенбах и др.).

Как уже говорилось, оперативная работа с использованием прогностических моделей атмосферы ведется более чем в 30 странах. В число этих стран входят: Австралия, Австрия, Болгария, Великобритания, ГДР, Израиль, Индия, Италия, Канада, Китай, Норвегия, Финляндия, Франция, Польша, Румыния, СССР, США, ФРГ, Чехословакия, Швеция, Югославия, Япония и др.

Практически во всех прогностических моделях атмосферы используются полные уравнения гидродинамики (квазигеострофические модели применяются лишь как исключение). Модели различаются вертикальным разрешением, областью прогнозирования, способами параметризации процессов подсеточного масштаба и др. Однако общие принципы построения моделей не выходят за рамки изложенных ранее.

В этой главе будут описаны основные оперативные прогностические модели трех наиболее крупных метеорологических центров мира: Гидрометцентра СССР, НМЦ США и ЕЦСПП.

9.2. Оперативная прогностическая модель атмосферы Гидрометцентра СССР

С 1970 г. в Гидрометцентре СССР в оперативной практике используются полушарные прогностические модели, обеспечивающие выдачу прогностической продукции в соответствии с функциями ММЦ, которые возложены на Гидрометцентр СССР.

Описываемая далее оперативная прогностическая модель (автор Л. В. Беркович) разрабатывалась в течение ряда лет и претерпела различные модификации в процессе развития. Эти изменения касались системы уравнений, учета физических процессов, горизонтального и вертикального разрешения и др. Неизменным оставался лишь экономичный вычислительный алгоритм модели, необходимость которого определяется условиями оперативной работы, о чем говорилось выше.

Экономичность вычислительного алгоритма обеспечивается применением шахматной пространственно-временной сетки для конечно-разностной аппроксимации системы уравнений модели, а также рациональной организацией вычислений на ЭВМ (см. ниже).

Далее прогностическая модель Гидрометцентра СССР описывается по ее состоянию на 1 января 1988 г.

Функционирование модели в оперативном режиме обеспечивается разработанной в Гидрометцентре СССР автоматизированной системой обработки оперативной информации (АСОИ).

Время отсечения данных наблюдений определяется расписанием передачи прогностических карт по каналам связи. Для прогнозов по данным наблюдений за срок 0 ч время отсечения составляет 4 ч 00 мин, срок 12 ч — 4 ч 20 мин.

Основу прогностической модели составляет система полных уравнений гидротермодинамики в изобарической системе координат, которая в рассматриваемой модели записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + m^2 \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \tau \frac{\partial u}{\partial p} + \frac{u^2 + v^2}{2} \frac{\partial m^2}{\partial x} - l v + \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= F_x, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + m^2 \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \tau \frac{\partial v}{\partial p} + \frac{u^2 + v^2}{2} \frac{\partial m^2}{\partial y} + l u + \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= F_y, \\ m^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0, \quad T = -\frac{p}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial p}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + m^2 \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{c^2}{R p} \tau &= \frac{R T}{c_p p} \mathcal{E}, \\ \frac{\partial q}{\partial t} + m^2 \left(u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} \right) + \tau \frac{\partial q}{\partial p} &= \frac{R T}{p} \mathcal{E}_n. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В качестве граничных условий на верхней ($p = 0$) и нижней ($p = P$) границах атмосферы принимается

при $p \rightarrow 0$ $\tau \rightarrow 0$,

при $p = P$ (1000 гПа) $w = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{g} \frac{d\Phi}{dt} = 0$,

или

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + m^2 \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\tau_0}{\rho_0} = 0, \quad (2.2)$$

где ρ_0 и τ_0 — значения ρ и τ при $p = 1000$ гПа.

На боковых границах области интегрирования принимается

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad D \Big|_{\Gamma} = \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial t} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (2.3)$$

где индекс Γ — означает боковую границу.

Отметим, что в первых вариантах модели в качестве граничного условия принималось отсутствие перетекания воздуха через горизонтальную границу; тогда

$$V_N \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial V \tau}{\partial N} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial N} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (2.4)$$

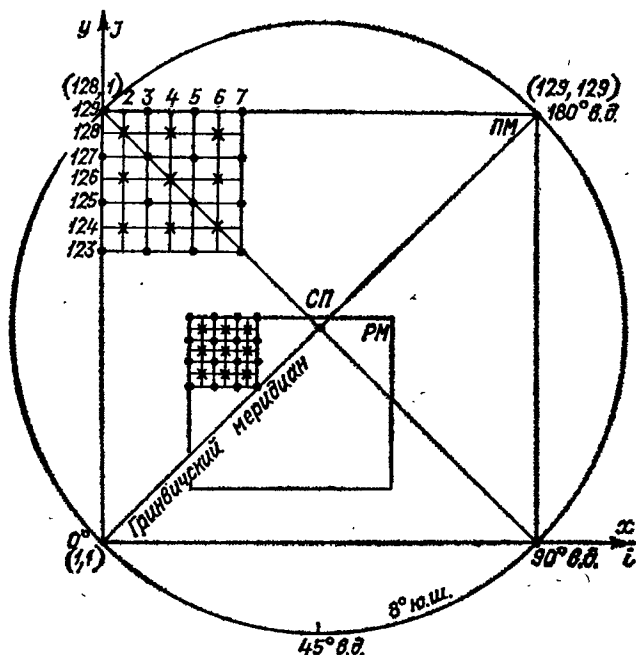


Рис. 9.1. Область анализа и прогноза прогностической модели Гидрометцентра СССР.

ПМ — полушарная модель, РМ — региональная модель, СП — Северный полюс. В верхней левой части областей прогноза ПМ и РМ приведены фрагменты сеток точек; кружками и крестиками изображены точки основной и вспомогательной сеток соответственно.

где N — нормаль к границе, V_N и V_τ — нормальная и касательная к границе составляющие вектора скорости. Путем численных экспериментов было установлено, что условия (2.3) обеспечивают более эффективное подавление вычислительных шумов у границы области расчета по сравнению с условиями (2.4).

Для численной реализации модели вводятся дискретные безразмерные координаты i, j, k, s и следующие операторы осреднения $\bar{f}^n$ и конечных разностей f_n :

$$\begin{aligned}\bar{f}^n &= \frac{1}{2} (f_{n+1} + f_{n-1}), \\ f_n &= \frac{1}{2\Delta r_n} (f_{n+1} - f_{n-1}),\end{aligned}\quad (2.5)$$

где r принимает значения x, y, p, t ; n — значения соответствующей координаты; f — значения u, v, τ, Φ, q . Область расчета прогноза покрывается прямоугольной сеткой узлов с равномерными шагами по осям x, y . Индексы узлов i, j по осям x и y изменяются в следующих пределах:

$$\begin{aligned}i &= 1, 2, \dots, I, \\ j &= 1, 2, \dots, J.\end{aligned}$$

Рис. 9.2. Шахматная сетка точек прогностической модели атмосферы Гидрометцентра СССР.

Кружками и крестиками изображены узлы основной и вспомогательной (вложенной) сеток модели соответственно.

При $\Delta x = \Delta y = 150$ км и $I = J = 129$ квадрат на рис. 9.1 является вписанным в широтный круг на карте стереографической проекции с главным масштабом 1 : 30 000 000. При этом левый нижний узел ($i = j = 1$) находится на пересечении гринвичского меридиана с кругом 8° ю. ш.

Шахматная сетка (рис. 9.2) состоит из двух обычных сеток с удвоенным шагом по x и y , сдвинутых одна относительно другой. Индексы узлов первой сетки (кружки) определяются формулой

$$i, j = 2 \left(q + \frac{1}{2} \right), \quad q = 0, 1, \dots, 65.$$

Индексы узлов второй сетки (крестики) определяются формулой

$$i, j = 2 (q + 1), \quad q = 0, 1, \dots, 64.$$

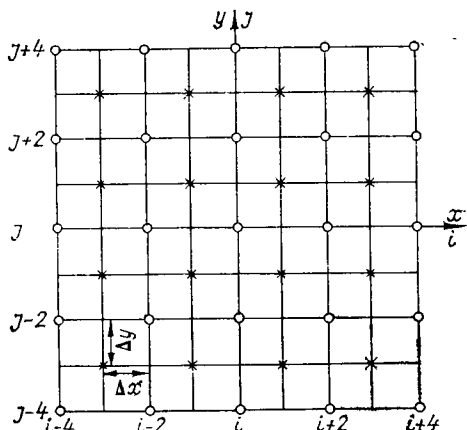
Поясним аппроксимацию функции f по формуле (2.5) с использованием шахматной сетки:

$$\begin{aligned} \bar{f}^{xy} &= \frac{1}{4} (f_{i-1, j+1} + f_{i+1, j+1} + f_{i-1, j-1} + f_{i+1, j-1}), \\ \bar{f}_x^y &= \frac{1}{4\Delta x} (f_{i+1, j+1} - f_{i-1, j+1} + f_{i+1, j-1} - f_{i-1, j-1}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Система уравнений (2.1) при указанных граничных условиях может быть реализована в двух вариантах: без учета неадиабатических и турбулентных факторов, когда принимается, что $F_x = F_y = \mathcal{E} = \mathcal{E}_n = 0$, и с их учетом.

В первом случае конечно-разностный аналог системы уравнений (2.1) с учетом (2.6) записывается в виде

$$\begin{aligned} u_t - l\bar{v}^t &= -m^2 (\bar{u}^{xy} \bar{u}_x^y + \bar{v}^{xy} \bar{u}_y^x) + \\ &+ \frac{1}{2} (\bar{u}^{2xy} + \bar{v}^{2xy}) \bar{m}_x^{2y} + \tau \bar{u}_p^{xy} + \bar{\Phi}_x^y = -F_u, \\ v_t + l\bar{u}^t &= -m^2 (\bar{u}^{xy} \bar{v}_x^y + \bar{v}^{xy} \bar{v}_y^x) + \\ &+ \frac{1}{2} (\bar{u}^{2xy} + \bar{v}^{2xy}) \bar{m}_y^{2x} + \tau \bar{v}_p^{xy} + \bar{\Phi}_y^x = -F_v, \\ \tau(p) &= -m^2 \int_0^p (\bar{u}_x^y + \bar{v}_y^x) dp', \quad T = -\frac{p}{R} \Phi_p, \end{aligned}$$



$$T_t = -m^2 (\bar{u}^{xy} \bar{T}_x^y + \bar{v}^{xy} \bar{T}_y^x) + \frac{c^2}{R\rho} \tau,$$

$$q_t = -m^2 (\bar{u}^{xy} \bar{q}_x^y + \bar{v}^{xy} \bar{q}_y^x) + \tau \bar{q}_p^{xy}. \quad (2.7)$$

На рис. 9.3 представлено расположение функций u , v , T ; q и Φ на четном и нечетном шагах по времени на шахматной сетке. Из рисунка видно, что все функции в узлах сетки меняют свое положение от шага к шагу. На четных шагах по времени ($s = 0, 2, 4, \dots$) функции u , v , T , q , Φ определяются на сетке кружков, а на нечетных шагах ($s = 1, 3, 5, \dots$) — на сетке крестиков. В соответствии с тем, что функция τ рассчитывается через интеграл по p от горизонтальной дивергенции скорости, она определяется на четных шагах на сетке крестиков, а на нечетных шагах — на сетке кружков. Для аппроксимации на соответствующем шаге производных $\partial u / \partial p$ и $\partial v / \partial p$ требуется определить u и v в тех же узлах, где находятся в этот момент τ . С этой целью применяют осреднение u и v по окружающим узлам, используя первую из формул (2.6). По той же причине члены lu и lv осредняются в формулах (2.7) по времени в соответствии с выражением (2.5).

Подобная полунейная аппроксимация для этих линейных членов уравнений движения приводит к следующей системе уравнений:

$$u_{s+1} - u_{s-1} - l\Delta t (v_{s+1} + v_{s-1}) = -2\Delta t F_u,$$

$$v_{s+1} - v_{s-1} + l\Delta t (u_{s+1} - u_{s-1}) = -2\Delta t F_v.$$

Решая эту систему двух уравнений относительно u_{s+1} и v_{s+1} , получаем:

$$u_{s+1} = \frac{1}{1 + (l\Delta t)^2} \{ [1 - (l\Delta t)^2] u_{s-1} + 2l\Delta t v_{s-1} - 2l(\Delta t)^2 F_{us} - 2\Delta t F_{us} \},$$

$$v_{s+1} = \frac{1}{1 + (l\Delta t)^2} \{ [1 - (l\Delta t)^2] v_{s-1} - 2l\Delta t u_{s-1} + 2l(\Delta t)^2 F_{vs} - 2\Delta t F_{vs} \}, \quad (2.8)$$

где индексы $s+1$, s , $s-1$ означают принадлежность переменных соответствующим шагам по времени.

Вертикальная система модели представлена на рис. 9.4. По вертикали все функции располагаются на 10 счетных уровнях, соответствующих изобарическим поверхностям 1000, 850, 700, 500, 400, 300, 250, 200, 150 и 100 гПа.

Вследствие неравномерного расположения уровней по вертикали

при расчете вертикальных производных вводится поправка, учитывающая эту неравномерность.

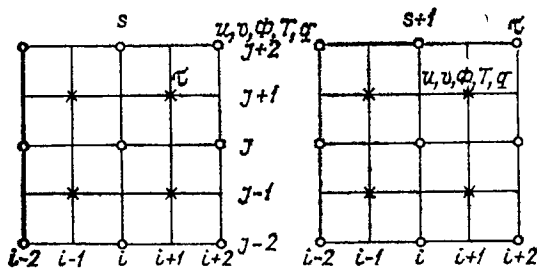


Рис. 9.3. Положение прогно- стических величин в узлах основ- ной и вспомогательной сеток точек в моменты времени s (чет- ные шаги по времени) и $s+1$ (нечетные шаги по времени).

Рис. 9.4. Вертикальная структура прогностической модели атмосферы Гидрометцентра СССР.

Интегралы, входящие в два уравнения системы (2.7), с учетом вертикальной структуры модели заменяются суммами. Так, например, вместо третьего уравнения системы получим

$$\tau_k = \tau_{k-1} - m^2 \bar{D}^k \Delta p_k, \quad (2.9)$$

где

$$\bar{D}^k = \frac{1}{2} (D_k + D_{k-1}),$$

$$D_k = (\bar{u}_x^y + \bar{v}_y^x)_k,$$

$$\Delta p_k = p_k - p_{k-1}.$$

На верхнем счетном уровне $k=1$ принимается дополнительное условие $D_{k=0} = D_{k=1}$. С учетом граничного условия $\tau_{k=0} = 0$ окончательно получаем

$$\tau_k = - \sum_{k'=1}^k d_{k, k'} D_{k'},$$

где $d_{k, k'}$ — коэффициенты, зависящие от толщины слоев Δp_k на интервале от $k=0$ до k .

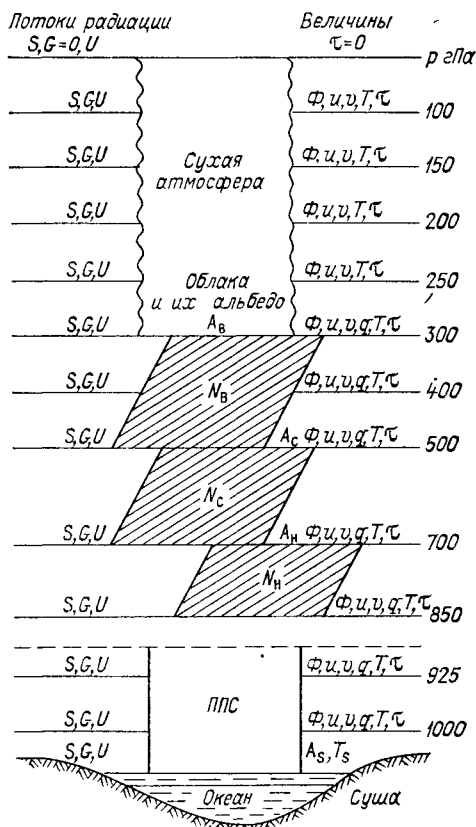
Процесс вычислений в алгоритме модели построен так, что в каждой точке сначала вычисляются производные, средние и суммы на всех уровнях k , а затем по этим «элементам» легко рассчитываются слагаемые прогностических уравнений. Такой алгоритм вычислений диктуется структурой диагностических уравнений (неразрывности и статики) и обеспечивает экономичность расчетов.

Последовательность расчетов по модели в адиабатическом варианте на каждом шаге по времени сводится к следующему.

1. По значениям u_s и v_s на основных уровнях в узлах одной из сеток по соотношению (2.9) вычисляются значения τ_s в точках второй сетки на тех же уровнях.

2. По значениям u_s и v_s и найденным на данном шаге значениям τ_s вычисляются функции F_u и F_v в соотношениях (2.7), а затем по формуле (2.8) — величины u_{s+1} и v_{s+1} в узлах второй сетки точек.

3. С помощью пятого и шестого уравнений системы (2.7) по значениям u_s , v_s и τ находим значения T_{s+1} и q_{s+1} , а на основе уравнения (2.2) и уравнения статики — Φ_{s+1} в узлах второй сетки точек. При



этом для аппроксимации производных по времени используется явная схема центральных разностей, в соответствии с которой, если

$$\frac{\partial f}{\partial t} = F(t),$$

то

$$f_{s+1} = f_{s-1} + 2\Delta t F_s. \quad (2.10)$$

На первом шаге применяется односторонняя разность:

$$f_{s+1} = f_s + \Delta t F_s.$$

На этом расчеты, относящиеся к одному шагу по времени, заканчиваются. При переходе к следующему шагу основная и вспомогательная сетки как бы меняются местами. Теперь исходными будут величины u , v , T , q и Φ в узлах вспомогательной сетки, а величина τ будет вычисляться в узлах основной сетки и т. д. (см. рис. 9.3).

В неадиабатическом варианте модели учитываются турбулентный тепло- и влагообмен, радиационные притоки тепла и обусловленные конденсацией изменения температуры и влажности. В качестве исходных уравнений модели берется система уравнений (2.1), в которой учитываются теперь члены, описывающие притоки тепла, влаги и импульса. Эти притоки рассчитываются на основе методов параметризации, описываемых ниже.

9.2.1. Параметризация физических процессов в модели

В уравнениях притока тепла и переноса влаги принимается, что

$$\frac{\mathcal{E}}{c_p \rho} = m^2 \kappa_1 \Delta T + \frac{g}{c_p} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{g}{c_p} \frac{\partial R}{\partial p} + \frac{1}{c_p \rho} \mathcal{E}_\Phi,$$

$$\frac{\mathcal{E}_\Pi}{\rho} = m^2 \kappa_1 \Delta q + g \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{1}{\rho} \mathcal{E}_{\Pi\Phi},$$

где H и Q — вертикальные турбулентные потоки тепла и влаги; κ_1 — коэффициент горизонтального турбулентного обмена, члены $m^2 \kappa_1 \Delta T$ и $m^2 \kappa_1 \Delta q$ описывают турбулентные притоки тепла и влаги, обусловленные турбулентным обменом по горизонтали; $\mathcal{E}_\Phi$ и $\mathcal{E}_{\Pi\Phi}$ — притоки тепла и влаги вследствие фазовых переходов влаги; R — радиационный баланс на любом уровне:

$$R = S - U + G;$$

S — поток суммарной коротковолновой радиации; U и G — восходящий и нисходящий потоки длинноволновой радиации.

В уравнениях движения учет турбулентной вязкости осуществляется следующим образом:

$$F_x = m^2 \kappa_1 \Delta u - g \frac{\partial \tau_x}{\partial p},$$

$$F_y = m^2 \kappa_1 \Delta v - g \frac{\partial \tau_y}{\partial p},$$

где τ_x, τ_y — вертикальные турбулентные потоки импульса по осям x и y .

Кроме граничных условий (2.2), ставится еще условие теплового баланса на подстилающей поверхности в следующем виде:

$$\text{при } z = 0 \quad S + G - U - H - Q - \Pi = 0,$$

где Π — поток тепла в почву.

Потоки радиации параметризуются методом интегральных функций пропускания, изложенным в главе 6. При этом в качестве основного вещества, поглощающего коротковолновую и длинноволновую радиацию, принимается водяной пар. Эффект озона вводится с помощью коэффициента, учитывающего ослабление солнечной радиации, поступающей на верхнюю границу атмосферы, а наличие углекислого газа учитывается с помощью интегральных функций пропускания.

В модели производится расчет количества облаков и их влияния на потоки радиации.

Принимается, что в модели существует облачность трех ярусов: нижнего (1000—850 гПа), среднего (850—500 гПа), верхнего (500—300 гПа), альбедо которых равно 0,8; 0,6; 0,5 соответственно (см. рис. 9.4). Количество облаков для нижнего (N_n), среднего (N_c) и верхнего (N_v) ярусов вычисляется по значениям относительной влажности на уровнях 1000 гПа (f_{1000}), 700 гПа (f_{700}) и 500 гПа (f_{500}) по эмпирическим формулам

$$N_v = 1,72f_{500} - 0,43; \quad N_c = 2f_{700} - 0,7; \quad N_n = 3,25f_{1000} - 1,95.$$

При расчете потоков коротковолновой радиации при наличии облачности считается, что она поглощается облачным слоем каждого яруса в соответствии с количеством облаков.

Потоки влаги и тепла и соответствующие им изменения температуры и влажности за счет фазовых переходов при крупномасштабном процессе определяются по следующим параметрическим формулам:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_\Phi = \frac{1}{\rho} \mathcal{E}_{\text{пф}} = \frac{q_n(T)(1-f)}{1 + \frac{\mathcal{L}^2 q_n(T)}{c_p R_n T^2}},$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_\Phi = \frac{1}{c_p \rho} \mathcal{E}_\Phi = \frac{\mathcal{L}}{c_p \rho} \mathcal{E}_{\text{пф}},$$

где q_n — массовая доля влаги при насыщении воздуха; R_n — удельная газовая постоянная водяного пара; f — относительная влажность.

Турбулентные вертикальные потоки тепла, влаги и импульса рассчитываются только для планетарного пограничного слоя (ППС). Приведем основные формулы метода параметризации, разработанного В. А. Шнайдманом. Сначала рассчитываются следующие безразмерные величины:

число Росби

$$Ro = V_g / l z_0,$$

внешний параметр стратификации

$$M = \frac{g}{lV_g} \frac{\delta\theta}{\theta_0},$$

внутренний параметр стратификации

$$\mu_0 = \frac{M - 2,5\chi \frac{\kappa^4 (\gamma_a - \gamma_n) g}{l^2 \theta_0}}{1,44\chi [\lg(Ro\chi) - 1,14]},$$

где V_g — скорость геострофического ветра на изобарической поверхности 1000 гПа; θ_0 — потенциальная температура воздуха у земной поверхности; $\delta\theta$ — разность потенциальных температур на границах пограничного слоя, определяемая по их значениям на изобарических поверхностях 1000 и 850 гПа; z_0 — параметр шероховатости, γ_n — вертикальный градиент температуры вне пограничного слоя, χ — геострофический коэффициент трения, рассчитываемый по числу Ro , κ — постоянная Кармана.

На основе параметров Ro , M и μ_0 производится расчет турбулентных потоков тепла, влаги и импульса по следующим формулам:

$$H_0 = \frac{\rho}{g} c_p |V_g|^2 \chi^2 l \theta_0 \mu_0,$$

$$Q_0 = \rho C_D |V_{1000}| (q_{1000} - q_{850}),$$

$$\tau_{0x} = \rho \kappa^2 \chi |V_g| (u_g \cos \alpha - v_g \sin \alpha),$$

$$\tau_{0y} = \rho \kappa^2 \chi |V_g| (u_g \sin \alpha + v_g \cos \alpha),$$

где C_D — коэффициент сопротивления, $|V_{1000}|$ — модуль скорости ветра на изобарической поверхности 1000 гПа, u_g и v_g — компоненты скорости геострофического ветра, α — угол полного поворота ветра в пограничном слое, определяемый по Ro и M .

Поскольку на верхней границе пограничного слоя турбулентные потоки тепла, влаги и импульса стремятся к нулю, производные этих потоков рассчитываются по формуле

$$\frac{\partial A}{\partial p} = \frac{A_0 - A_n}{\delta p} = \frac{A_0}{g \rho H_n},$$

где A — любой из турбулентных потоков (H , Q , τ_x , τ_y), $H_n = 0,45\kappa^2 |V_g| \chi l^{-1}$ — высота пограничного слоя (см. также главу 6).

Для геопотенциала и ветра в качестве начальных данных берутся результаты их численного анализа в узлах шахматной сетки. При этом в соответствии с системой уравнений (2.1) используются проекции указанных величин на плоскость карты стереографической проекции (см. главу 1).

Шаг по времени, удовлетворяющий условию устойчивости вычислений, составляет 6 мин. Оперативные прогнозы на основе данной модели рассчитываются два раза в сутки по данным наблюдений в 0 и 12 ч СГВ с заблаговременностью до 84 ч. Результатом расчетов являются прогностические поля приземного давления и геопотенциала изобарических поверхностей, а также скорости ветра, температуры, влажности и вертикальных движений на десяти расчетных

Таблица 9.1

Относительная ошибка (ε) оперативных прогнозов на 1—3 сут давления на уровне моря и высоты изобарической поверхности 500 гПа по полусферной модели Гидрометцентра СССР в 1978—1987 гг. по данным за 00 ч СГВ

Год	Заблаговременность прогноза, ч			Год	Заблаговременность прогноза, ч		
	24	48	72		24	48	72
Уровень моря				Поверхность 500 гПа			
1978	0,84	0,95	1,01	1978	0,80	0,84	0,96
1979	0,83	0,92	1,02	1979	0,79	0,86	0,94
1980	0,83	0,92	1,04	1980	0,76	0,84	0,94
1981	0,79	0,87	0,93	1981	0,76	0,81	0,90
1982	0,80	0,89	0,96	1982	0,75	0,83	0,92
1983	0,78	0,85	0,94	1983	0,72	0,80	0,91
1984	0,82	0,92	0,97	1984	0,75	0,82	0,92
1985	0,76	0,81	0,87	1985	0,69	0,76	0,81
1986	0,69	0,76	0,84	1986	0,61	0,68	0,79
1987	0,69	0,74	0,81	1987	0,59	0,66	0,76

уровнях модели. По факсимильным каналам передаются прогностические карты приземного давления и АТ 500 на 24, 48 и 72 ч. Прогнозы по внетропической части полушария ($\varphi > 20^\circ$ с. ш.) передаются в виде цифровых сводок (бюллетеней) в коде ГРИД (географическая сетка с шагом $5^\circ \times 5^\circ$), включающих прогнозы приземного давления, высоты изобарических поверхностей 500, 300, 200, 100 гПа на сроки от 24 до 72 ч. Прогнозы высоты изобарических поверхностей 300, 250 и 200 гПа, а также прогнозы температуры и скорости ветра на этих поверхностях передаются по программе регионального центра зональных прогнозов (РЦЗП) на 24 и 30 ч для метеорологического обслуживания авиации.

В табл. 9.1 приведены некоторые данные об оправдываемости оперативных прогнозов давления на уровне моря и высоты поверхностей 500 гПа за 10 лет с 1978 по 1987 г. В качестве критерия оправдываемости в таблице приведена средняя относительная ошибка

$$\varepsilon = \delta/\delta_{\Phi},$$

где

$$\delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |H_{\Pi} - H_{\Phi}|_i \quad \text{и} \quad \delta_{\Phi} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |H_{\Phi} - H_u|_i$$

представляют собой среднюю абсолютную ошибку прогноза и среднюю абсолютную фактическую изменчивость (за интервал времени прогноза); H_{Π} , H_{Φ} и H_u — прогностическая, фактическая и исходная высота изобарической поверхности.

Из данных табл. 9.1 видно, что за рассматриваемый период средние относительные ошибки прогнозов барического поля значительно уменьшились. Для прогнозов на 24 ч геопотенциала поверхности

500 гПа уменьшение относительной ошибки в 1987 г. по сравнению с 1978 г. составило 28 %, а для прогнозов на 72 ч — 21 %. Особенно заметное уменьшение относительных ошибок прогнозов происходило в 1985 г. в связи с изменением шага по горизонтали от 600 до 300 км, а также в 1986 г. в результате замены семиуровневого варианта модели на десятиуровневый. Аналогично поведение за этот период и других статистических оценок прогнозов: уменьшение среднеквадратической и градиентной ошибок и увеличение коэффициента корреляции.

9.2.2. Региональная прогностическая модель атмосферы

В 1981 г. в оперативную практику была внедрена региональная модель для прогноза по территории московского региона с заблаговременностью до 48 ч (автор С. О. Кричак). В модели, основанной на системе полных уравнений гидротермодинамики (аналогичной приведенной ранее), учитываются неадиабатические притоки тепла, приземное трение и орография. При численной реализации системы уравнений используется описанная выше шахматная сетка, содержащая 27×23 и 26×22 узлов в каждой из сеток с шагом 300 км. По вертикали модель включает шесть счетных уровней — поверхности 1000, 850, 700, 500, 300 и 100 гПа.

Для интегрирования по времени методом центральных разностей используется шаг по времени, равный 5 мин. Область прогноза включает территорию Европы и Западной Сибири (сетка $27 \times \times 23$ узлов).

Региональный сеанс прогноза предшествует полушарному; время отсечения исходных данных составляет 2 ч после очередного синоптического срока наблюдений. При численном анализе для регионального прогноза используется полушарный прогноз за срок анализа, рассчитанный по данным предшествующего синоптического срока, т. е. на 12 ч вперед. На границе области расчета в региональном варианте прогноза используются рассчитанные в предшествующем полушарном варианте прогноза значения функций u , v и Φ . Подобный способ учета граничных значений в модели с помощью предварительно рассчитанных прогностических значений из модели для большей территории применяются также и в ряде других оперативных моделей.

Прогнозы приземного давления и геопотенциала по данным за 0 и 12 ч СГВ рассчитываются на различные сроки до 48 ч. В качестве выходной продукции выдаются также диагностические и прогностические поля вертикальных движений на изобарических поверхностях 850, 700, 500 гПа, определяемые из уравнения притока тепла в $26 \times \times 26$ узлах сетки, прогнозы поля OT_{1000}^{500} и траекторий воздушных частиц на различных уровнях с заблаговременностью от 12 до 42 ч. Прогнозы траекторий и адвективных значений температуры и влажности для 23 пунктов европейской части СССР передаются потребителям в виде цифровых сводок по каналам связи.

9.3. Оперативная прогностическая модель атмосферы Национального метеорологического центра (НМЦ) США

Единая оперативная прогностическая модель атмосферы НМЦ США разрабатывалась более 20 лет. К концу 80-х годов было испытано и внедрено в практику более десятка различных вариантов модели. Во всех вариантах в качестве исходных уравнений используются полные уравнения гидротермодинамики, записанные с учетом неадиабатических процессов. Учет процессов подсеточного масштаба производится методами параметризации.

По своей математической реализации различные варианты модели можно разделить на две большие группы — на конечно-разностные и спектральные. В зависимости от размеров территории, охватываемой прогнозом, варианты модели подразделяются на глобальные, полушарные, региональные и мезометеорологические. Далее будет рассмотрен конечно-разностный вариант модели, а затем — спектральный (в дальнейшем варианты моделей для краткости будут называться просто моделями).

9.3.1. Конечно-разностная прогностическая модель

В качестве исходных используются записанные в σ -системе координат полные уравнения гидротермодинамики (4.14) и (4.16), приведенные в главе 1. Однако в этой системе уравнений вводится новая переменная — функция Экснера

$$\pi = (p/P)^{R/c_p} \quad (3.1)$$

и учитывается преобразование

$$g \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial H}{\partial \sigma} \frac{\partial p_s}{\partial x_\sigma} = -c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial x_\sigma}.$$

Тогда на плоскости стереографической картографической проекции (m — параметр увеличения, или масштабный множитель) указанные уравнения принимают вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + m \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial H}{\partial x} + c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial x} \right) + \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} - l v = F_x,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + m \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial H}{\partial y} + c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial y} \right) + \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} + l u = F_y,$$

$$g \frac{\partial H}{\partial \sigma} + c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial \sigma} = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + m \left(u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \dot{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{1}{c_p \rho} \frac{\theta}{T} \mathcal{E},$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + m \left(u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} \right) + \dot{\sigma} \frac{\partial q}{\partial \sigma} = \frac{1}{\rho} \mathcal{E}_n.$$

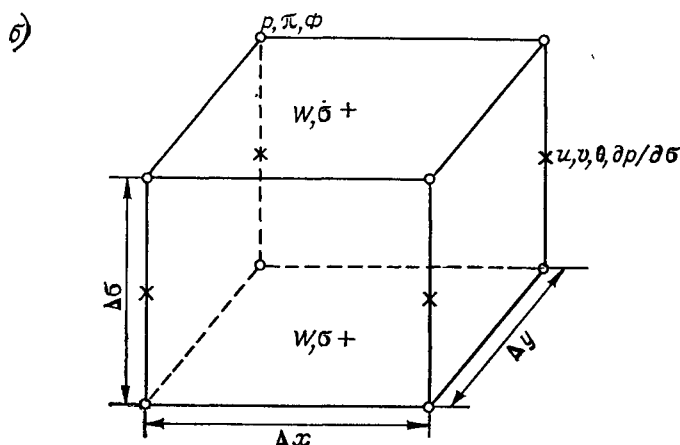
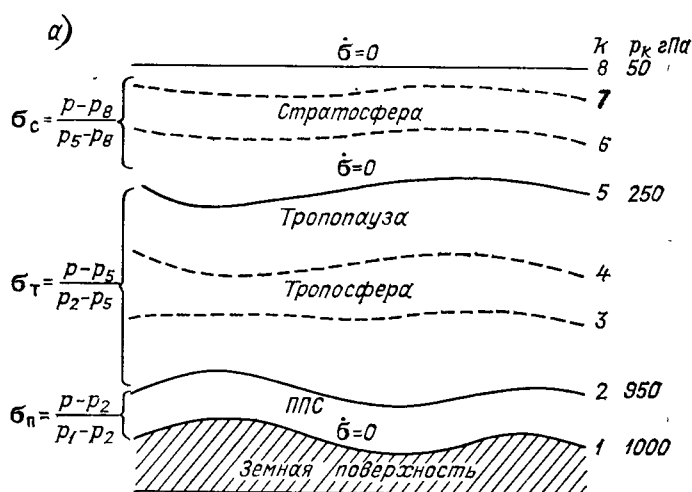


Рис. 9.5. Семислойная прогностическая модель атмосферы НМЦ США.

а — вертикальная структура, б — расположение прогностических величин в ячейке пространственной сетки.

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = -m \int_0^1 \left(\frac{\partial u p_s}{\partial x} + \frac{\partial v p_s}{\partial y} \right) d\sigma,$$

$$\dot{\sigma} = -\frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial t} - \frac{m}{p_s} \int_0^\sigma \left(\frac{\partial u p_s}{\partial x} + \frac{\partial v p_s}{\partial y} \right) d\sigma'. \quad (3.2)$$

При выводе последних двух уравнений использованы следующие краевые условия:

$$\dot{\sigma} = 0 \text{ при } \sigma = 0 \text{ и } \sigma = 1.$$

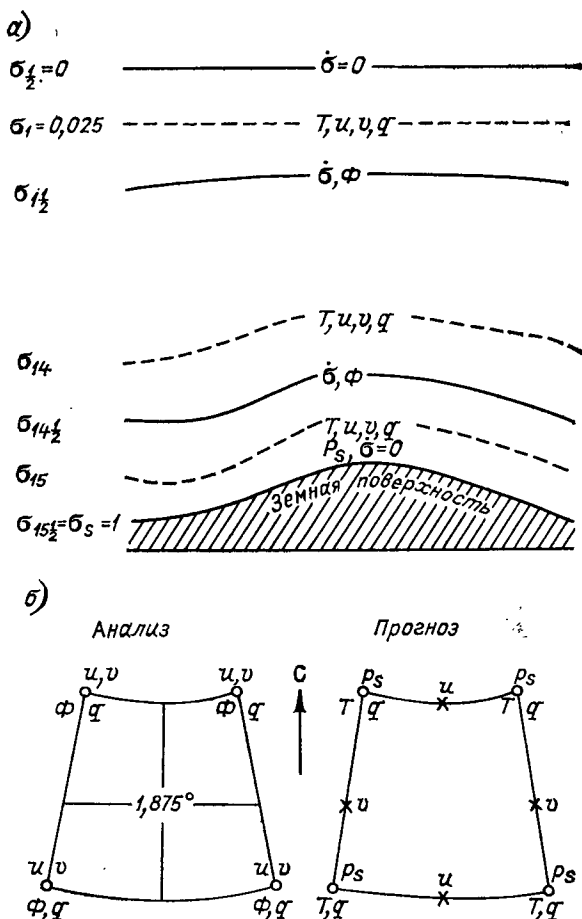


Рис. 9.6. Прогностическая модель атмосферы ЕЦСПП.
а — вертикальная структура, б — расположение величин в ячейке горизонтальной сетки при анализе и прогнозе.

Вертикальная структура модели задавалась различным образом. В одном из первых вариантов (семислойная конечно-разностная модель) атмосфера делилась на три основных слоя (стратосфера, тропосфера, ППС), внутри которых вводились дополнительные слои и собственная координата σ :

$$\sigma = \frac{p - p_{\text{в}}}{p_{\text{н}} - p_{\text{в}}}, \quad (3.3)$$

где $p_{\text{н}}$ и $p_{\text{в}}$ — давление на нижней и верхней границах данного основного слоя (рис. 9.5 а). Пространственная сетка точек получается путем наложения на картографическую поверхность координатных прямых, параллельных осям x и y с заданным горизонтальным шагом $\Delta x = \Delta y$. В первом варианте конечно-разностной модели,

предназначенной для прогноза по полушарию, принималось $\Delta x = \Delta y = 381$ км (при $\varphi = 60^\circ$ с. ш.). Расчетная область для прогноза по северному полушарию в этом случае представлялась в виде восьмиугольника с $57 \times 53 = 3026$ узлами. Пространственная ячейка сетки с указанием расположения рассчитываемых величин представлена на рис. 9.5 б.

В последующих прогностических моделях НМЦ число уровней увеличивалось и было доведено до 16 (при использовании единой координаты σ). Вертикальная структура таких моделей аналогична вертикальной структуре модели ЕЦСПП (рис. 9.6).

Для конечно-разностной аппроксимации уравнений системы (3.2) применяются операторы дифференцирования и осреднения (r — любая координата):

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{\Delta r} \left(f_{n+\frac{1}{2}} - f_{n-\frac{1}{2}} \right), \quad \bar{f}^n = \frac{1}{2} \left(f_{n+\frac{1}{2}} + f_{n-\frac{1}{2}} \right), \\ \bar{f}_n^r &= \frac{1}{2\Delta r} (f_{n+1} - f_{n-1}), \quad \bar{f}^{nn} = \frac{1}{4} (f_{n+1} + 2f_n + f_{n-1}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Например, в уравнении для $\partial\theta/\partial t$ адвективные члены аппроксимируются следующим образом:

$$m \left(u \frac{\partial\theta}{\partial x} + v \frac{\partial\theta}{\partial y} \right) = \bar{m}^{xy} (\bar{u}^{xy} \bar{\theta}_x^y + \bar{v}^{xy} \bar{\theta}_y^x),$$

а конвективный член $\dot{\sigma} (\partial\theta/\partial\sigma)$ записывается в виде

$$\left(\dot{\sigma} \frac{\partial\theta}{\partial\sigma} \right)_k = \frac{1}{2} \left(\dot{\sigma}_{k+1} \frac{\theta_k - \theta_{k+1}}{\Delta\sigma_k} + \dot{\sigma}_k \frac{\theta_{k-1} - \theta_k}{\Delta\sigma_{k-1}} \right),$$

где k — счетный уровень.

Сумма адвективных и конвективных членов (обозначим ее через F_θ) осредняется по x и y , т. е. для θ получается уравнение

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial t} \right)_s = \bar{F}_\theta^{xy} = \frac{1}{2\Delta t} (\theta_{s+1} - \theta_s). \quad (3.5)$$

Производная по времени $\partial\theta/\partial t$ аппроксимируется на всех шагах по времени, кроме первого, следующим образом:

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial t} \right)_s = \bar{\theta}_t^s = \frac{1}{2\Delta t} (\theta_{s+1} - \theta_{s-1}), \quad (3.6)$$

где s — номер шага, а на первом шаге применяется односторонняя разность

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial t} \right)_{s=1} = \frac{1}{\Delta t} (\theta_1 - \theta_0).$$

Аналогичные соотношения применяются и для других переменных и уравнений системы (3.2).

Для прогноза осадков, обусловленных крупномасштабными процессами, на основе уравнений для q и уравнения неразрывности

выводится уравнение для прогноза влагосодержания W в слое $\Delta\sigma_k (\sigma_k, \sigma_{k+1})$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{m}{g} \left[\frac{\partial}{\partial x} (u q p_s) + \frac{\partial}{\partial y} (v q p_s) \right] + \frac{1}{g} (\dot{\sigma} q p_s) \Big|_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} = \frac{1}{g p} \mathcal{E}_\pi,^k$$

где

$$W = \frac{1}{g} \int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} q p_s d\sigma.$$

Влагосодержание W может быть пересчитано в количество осажженной воды через ее плотность. Введем величину $W_n = \frac{1}{g} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} q_n p_s d\sigma$. Тогда количество выпавших осадков в слое при $W > W_n$ определяется разностью $\Delta W = W - W_n$.

Пусть q_n — массовая доля насыщенного водяного пара — известная функция температуры и давления. Тепло, выделившееся при конденсации, так же, как и затраченное при испарении, учитывается в уравнении притока тепла, обуславливая изменение температуры воздуха соответствующего слоя. Сконденсировавшаяся влага выпадает в виде осадков, причем осадки из вышележащих слоев могут испаряться в нижележащих слоях, если в последних отсутствуют условия конденсации.

В прогностической модели НМЦ процессы подсеточного масштаба весьма детально учитываются методами параметризации.

Учет конвективных процессов в модели осуществляется путем параметризации процессов конвективного перемешивания методом сухо- и влажноадиабатического приспособления, а радиационный теплообмен в модели учитывается посредством расчета коротковолнового (солнечного) нагревания и длинноволнового охлаждения атмосферы и земной поверхности (см. главу 6).

Температура поверхности морей и океанов задается в качестве начальных данных и остается неизменной в течение всего времени прогноза. При расчете собственного длинноволнового излучения атмосферы и подстилающей поверхности учитывается их зависимость от температуры и влажности воздуха, а также от количества облаков. Для верхних слоев модели считается, что влажность всегда равна нулю, а выхолаживание составляет примерно $1,7 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C/с}$. Аналогично, если во всех слоях модели относительная влажность не превышает 60 %, поверхность земли покрыта снегом или льдом и, наконец, высота солнца над горизонтом меньше 10° , задается постоянное охлаждение пограничного слоя в модели — $4,4 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C/с}$.

Турбулентные члены в уравнениях движения рассчитываются по следующим формулам:

$$F_x = \frac{g \rho_1}{\Delta \rho_1} C_D |V| u, \quad F_y = \frac{g \rho_1}{\Delta \rho_1} C_D |V| v,$$

где ρ_1 — стандартная плотность воздуха на уровне моря; $\Delta p_1 = 50$ гПа; C_D — коэффициент трения, подбираемый эмпирически.

Турбулентные потоки тепла (H_s) и влаги (Q_s) от земной поверхности вычисляются по соотношениям

$$H_s = \frac{g\rho_1}{\Delta p_1} C_D |\mathbf{V}| \Delta T, \quad Q_s = \frac{g\rho_1}{\Delta p_1} C_D |\mathbf{V}| (q_s - q_h),$$

где $\Delta T = T_s - T_h$; индексом s обозначена земная поверхность, а индексом h — счетный уровень в пограничном слое модели. Для поверхности океанов величины T_s и $q_s = q_h(T_s)$ известны из начальных данных, а для поверхности суши их необходимо определить на основе уравнений теплового и гидрологического баланса земной поверхности.

Различные варианты конечно-разностных моделей предназначены для прогнозов по полушарию и региону, имеющему масштаб континента или сравнительно небольшому району (в последнем случае модель будет мезометеорологической).

В зависимости от этого и выбирается шаг сетки. В первом варианте модели шаг сетки принимался равным 381 км. В последующем шаг сетки был уменьшен последовательно до 190,5 и 127 км.

Последний вариант, в котором число узлов сетки составило $79 \times 67 = 5293$, предназначен для детализированного прогноза по североамериканскому региону. Создаются модели с более мелкой сеткой — с шагом 50 км и менее, позволяющие учитывать процессы подсиноптического масштаба и мезометеорологические.

При расчетах по региональным моделям в качестве условий на боковых границах области прогноза принимаются результаты прогноза по полушарной модели.

Прогноз же полного комплекса метеорологических величин (собственно прогноз погоды) производится на основе прогнозов по модели НМЦ статистическими методами.

Оперативные прогнозы рассчитываются два раза в сутки. В табл. 9.2 приведены некоторые данные об оправдываемости прогнозов по трем моделям НМЦ с 1978 по 1986 г. В этой таблице LFM — непрерывно совершенствуемая конечно-разностная модель, PE — полушарная модель, действующая до 1980 г. (также конечно-разностная), а SP — спектральная модель, о которой речь пойдет далее.

Из таблицы следует, что успешность прогнозов по моделям НМЦ непрерывно увеличивается. Такой же вывод можно сделать и из данных табл. 9.5, в которой приводятся сведения о качестве прогнозов в ряде стран. Анализ оправдываемости прогнозов по месяцам показал, что в среднем она минимальна для весеннего периода (см. табл. 9.5).

Интересно также отметить, что ошибки прогнозов по западной части США больше, чем по восточной (см. табл. 9.2). Это объясняется недостаточной плотностью исходных данных над восточной частью Тихого океана, примыкающей к западной части США.

Таблица 9.2

Среднеквадратические ошибки прогнозов НМЦ США давления на уровне моря (σ_p) и высоты изобарической поверхности 500 гПа (σ_H), а также показатель успешности прогнозов высоты изобарической поверхности 500 гПа (S_1) в отдельные годы (среднегодовые значения)

Модель	σ_p					σ_H					S_1	
	1978	1980	1981	1985	1986	1978	1980	1981	1985	1986	Западная часть США	Восточная часть США
LFM	4,3	4,4	4,4	4,6	4,5	2,4	2,7	2,5	2,4	2,4		
PE (по 1980 г.)	4,3	4,3				2,7	2,4					
SP (с 1981 г.)			4,4	3,7	3,5			2,4	2,3	2,7		
Прогноз на 1 сут												
LFM	4,3	4,4	4,4	4,6	4,5	2,4	2,7	2,5	2,4	2,4		
PE (по 1980 г.)	4,3	4,3				2,7	2,4					
SP (с 1981 г.)			4,4	3,7	3,5			2,4	2,3	2,7		
Прогноз на 2 сут												
LFM	5,6	5,7	5,6	5,6	5,5	3,7	3,7	3,8	3,5	3,5		
PE	5,7	5,7				3,7	3,3				42,6	42,0
SP			5,5	5,7	5,3			3,6	3,3	3,2	32,7	34,9

Примечания: 1. LFM — конечно-разностная модель, PE — модель с полными уравнениями, SP — спектральная модель. 2. Успешность прогнозов S_1 рассчитывается по формуле

$$S_1 = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|\delta H_i|}{\max\{|\delta H_{\Phi}|; |\delta H|\}},$$

где δH_i — ошибка в прогнозе значений H в i -й паре точек, N — число пар точек, δH_{Φ} — фактическое изменение, δH — прогноз изменений градиента H .

9.3.2. Спектральная прогностическая модель

Как уже говорилось, прогностические модели НМЦ США непрерывно совершенствуются. Наиболее крупное усовершенствование было выполнено в конце 70-х — начале 80-х годов. В этот период была создана спектральная прогностическая модель в глобальном и полушарном (модель SP) вариантах. Общие теоретические основы спектральных моделей были изложены в главе 5, поэтому здесь будут описаны лишь главные особенности спектральной модели НМЦ США.

Исходные уравнения спектральной модели в принципе аналогичны конечно-разностным уравнениям (3.2). Однако теперь эти уравнения записываются в сферической системе координат (см. главу 1) ($\varphi = \pi/2 - \Theta$ — широта, Θ — полярный угол, λ — долгота места). Связь между производными в декартовой и сферической системах координат описывается выражениями

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

где a — радиус Земли.

Вместо зональной (u) и меридиональной (v) скоростей вводятся величины

$$U = u \cos \varphi, \quad V = v \cos \varphi.$$

Тогда формулы для вертикальной составляющей вихря скорости и горизонтальной дивергенции приобретают вид

$$\Omega = \mathbf{kV} \times \mathbf{V} = \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda} - \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right), \quad D = \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{a \cos \varphi} \left(\frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right).$$

В качестве вертикальной координаты принимается величина $\sigma_1 = 1 - \sigma = 1 - p/p_s$ (в дальнейшем индекс 1 будет опускаться). Были разработаны модели с разным числом уровней по вертикали: 7, 8, а затем 18 уровней. Общая вертикальная структура моделей, а также расположение точек в элементарной горизонтальной ячейке сетки точек в сферических координатах практически такие же, как в 15-уровневой модели ЕЦСПП (см. рис. 9.6). Шаг сетки в моделях НМЦ принят равным 2,5 и 1,875°. Прогностические уравнения спектральной модели вначале записываются для каждого k -го уровня модели с одновременной заменой всех производных по вертикальной координате центральными разностями. Например, уравнение горизонтального движения (в векторной форме) записывается в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}_k}{\partial t} + (\mathbf{v}_k \cdot \nabla) \mathbf{v}_k + \frac{1}{2\Delta_k} [\dot{\sigma}_{k+1} (\mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{v}_k) + \dot{\sigma}_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{k-1})] = \\ = -\nabla \Phi_k - RT_k \nabla \ln p_s - l \mathbf{k} \times \mathbf{v}_k,$$

где $\Phi_k = gz_k$ — геопотенциал уровня k ; $k+1$ и $k-1$ — уровни, расположенные выше и ниже уровня k ; Δ_k — шаг по вертикали для уровня k .

Далее на основе уравнений горизонтального движения выводятся уравнения для изменений абсолютного вихря скорости $\eta_k = \Omega_k + l$

и дивергенции D_k . Эти уравнения для любого момента времени в общем виде можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \eta_k}{\partial t} = -F_k^1(\varphi, \lambda), \quad \frac{\partial D_k}{\partial t} = F_k^2(\varphi, \lambda),$$

где F_k^1 и F_k^2 — известные функции координат.

Уравнения притока тепла и влаги приобретают вид

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} = F_k^3(\varphi, \lambda), \quad \frac{\partial q_k}{\partial t} = F_k^4(\varphi, \lambda),$$

где F_k^3 и F_k^4 — также известные функции.

Уравнения статики и преобразованное уравнение неразрывности, являющиеся диагностическими, также записываются для уровня k :

$$\Phi_{k-1} - \Phi_k = -\frac{R}{2} \left(\frac{T_{k-1}}{\sigma_{k-1}} + \frac{T_k}{\sigma_k} \right),$$

$$\dot{\sigma}_{k+1} = \sigma_k (\bar{D} + \bar{c}) - \sum_{j=1}^K \Delta_j (D_j + c_j),$$

где $c_j = v_i \nabla \ln p_s$, K — общее число уровней,

$$\bar{D} = \sum_{j=1}^K \Delta_j D_j, \quad \bar{c} = \sum_{j=1}^K \Delta_j c_j.$$

Далее все рассматриваемые величины, т. е. U_k , V_k , η_k , D_k , q_k , T_k разлагаются в ряды по сферическим функциям (см. главу 5).

Любую скалярную величину $f(\varphi, \lambda)$ можно представить в виде

$$f(\varphi, \lambda) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N f_n^m e^{im\lambda} P_n^m(\cos \varphi),$$

где m и n — зональное и меридиональное волновое число; $P_n^m(\cos \varphi)$ — присоединенный полином Лежандра; f_n^m — коэффициенты разложения функции $f(\varphi, \lambda)$ по сфере, определяемые по значениям f в узлах сферической сетки координат (шаги сетки $\Delta\varphi = \Delta\lambda$ составляют 2,5 или 1,875°); M и N — величины, задаваемые в зависимости от требований к точности разложения (при большей точности эти величины больше); $e^{im\lambda} P_n^m(\cos \varphi)$ — комплексные сферические функции.

Приведенное разложение можно записать и по-другому, например в виде

$$f(\varphi, \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} [f_n^m \cos m\lambda + f_n^{1m} \sin m\lambda] P_n^m(\cos \varphi),$$

где

$$\cos m\lambda P_n^m(\cos \varphi) \quad \text{и} \quad \sin m\lambda P_n^m(\cos \varphi)$$

представляют собой сферические функции, f_n^m и f_n^{1m} — коэффициенты разложения.

Ограниченные возможности ЭВМ требуют ограничения числа членов ряда, поэтому в моделях спектральные разложения приме-

няются с усечением рядов определенными числами M и N . Например, в одной из спектральных моделей НМЦ США число M принималось равным 48.

Методы параметризации процессов подсеточного масштаба в спектральных моделях совпадают с соответствующими методами в конечно-разностных моделях, описанных выше. Схожим является и метод интегрирования прогностических уравнений по времени (полуявный метод). В связи с этим они здесь не описываются.

Спектральные модели применяются в оперативной практике НМЦ США начиная с 1981 г. В табл. 9.2 приведены некоторые оценки качества прогнозов по спектральной модели (модель SP) по северному полушарию. Из таблицы следует, что качество прогнозов по спектральной модели превышает качество прогнозов по конечно-разностным моделям.

9.4. Прогностическая модель атмосферы Европейского центра среднесрочных прогнозов погоды (ЕЦСПП) и другие модели

Метеорологические службы и научные учреждения ряда стран Западной Европы при содействии правительств этих стран образовали научно-оперативный центр для решения одной из наиболее сложных проблем современной метеорологии — прогноза погоды на средние (3—10 сут) сроки. В этот центр входят практически все крупные западноевропейские страны (Великобритания, Франция, ФРГ и др.).

В течение более чем 20 лет научные сотрудники центра (находящегося в Великобритании) совместными усилиями, благодаря наличию современной супер-ЭВМ, разработали наиболее совершенную прогностическую модель, предназначенную для прогноза всех основных метеорологических величин по всему земному шару или его части на сроки 3—10 сут. Заблаговременность прогноза делает необходимым учет всех действующих физических факторов, в том числе неадиабатических процессов и процессов в пограничном слое. При этом прогностическая модель обеспечивает расчет прогноза на многих уровнях, в том числе находящихся в стратосфере, на сравнительно густой сетке точек.

Для реализации модели на всем земном шаре была выбрана сферическая система координат, а из всех видов вертикальных координат — σ -координата.

Вертикальная структура модели атмосферы представлена на рис. 9.6 а и в табл. 9.3, а ячейки сетки при анализе и прогнозе — на рис. 9.6 б.

Прогностическая система ЕЦСПП включает четырехмерное усвоение данных через каждый 6-часовой период (см. п. 9.5). Усваиваемые данные наблюдений, поступившие в интервале времени ± 3 ч от синоптического срока, считаются отнесенными к этому сроку.

Таблица 9.3

Распределение метеорологических величин по вертикали в прогностической модели атмосферы ЕЦСПП на этапах анализа и прогноза

Анализ (u, v, q, Φ)		Прогноз (u, v, q, T)	
k	p , гПа	k	σ
1	10	1	0,025 (σ_1)
2	20	2	0,077
3	30	3	0,132
4	50	4	0,193
5	70	5	0,260
6	100	6	0,334
7	150	7	0,415
8	200	8	0,500
9	250	9	0,589
10	300	10	0,678
11	400	11	0,765
12	500	12	0,845
13	700	13	0,914
14	850	14	0,967
15	1000	15	0,996 (σ_{15})
		$15 \frac{1}{2}$	1,000 ($\sigma_{s=1}$)

Время отсечения исходных данных составляет 7 ч 15 мин. В соответствии с процедурой анализа в качестве первого приближения используется прогноз по модели ЕЦСПП на 6 ч вперед, так что очередной сеанс прогноза на средние сроки базируется на весьма полных начальных данных, полученных в результате предшествующих сеансов усвоения. Интерполяция данных о скорости ветра, геопотенциале и влажности в узлы сетки производится методом многоэлементного трехмерного численного анализа для уровней, указанных в табл. 9.3.

Кроме анализа указанных в таблице величин, производится численный анализ температуры поверхности океанов.

Для усвоения данных используются следующие виды информации:

- а) синоптическая (SYNOP, SHIP), измерения на буях (DRIBY);
- б) аэрологическая (TEMP), самолетные сообщения (AIREP), спутниковые температурные (SATEM) и ветровые (SATOВ) измерения.

9.4.1. Уравнения модели ЕЦСПП

Уравнения модели, аналогичные уравнениям (4.14), приведенным в главе 1, записываются по горизонтали в сферических координатах и по вертикали в σ -системе. Представим их в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} &= A_u + B_u, & \frac{\partial v}{\partial t} &= A_v + B_v, \\
 \frac{\partial T}{\partial t} &= A_T + B_T, & \frac{\partial q}{\partial t} &= A_q + B_q, \\
 \frac{\partial p_s}{\partial t} &= A_{p_s}, & \frac{\partial \Phi}{\partial (\ln \sigma)} &= -RT
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь и далее A_v, A_u, A_T, A_q — адвективные (включая вертикальный перенос) и линейные члены в уравнениях для u, v, T, q ; A_{p_s} — правая часть предпоследнего уравнения системы (3.2); B_u, B_v, B_T и B_q — соответствующие неадиабатические члены и члены, учитывающие турбулентную вязкость.

Интегрирование уравнений по времени осуществляется методом центральных разностей. Запишем любое из прогностических уравнений для u, v, T или q следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = A_f + B_f, \quad (4.2)$$

где f — любая функция.

Численное решение этого уравнения имеет вид

$$f_{s+1} = \bar{f}_{s-1} + 2\Delta t (A_f)_s + 2\Delta t (B_f)_{s-1/2} \quad (4.3)$$

Для обеспечения устойчивости решения в выражении (4.3) неадиабатические члены B_f берутся на шаге $s - 1$. С той же целью часть этих членов, описывающих вертикальную турбулентность, вычисляется с помощью неявной схемы.

В формуле (4.3) $\bar{f}$ представляет собой величину f , модифицированную с помощью временного фильтра:

$$\bar{f}_{s-1} = f_{s-1} + \alpha (\bar{f}_{s-2} - 2f_{s-1} + f_s),$$

где $\alpha = 0,05$.

Для фильтрации мелкомасштабных возмущений из численного решения в полярных областях, возникающих вследствие сходимости меридианов и быстрого убывания шага сетки вдоль широты при приближении к полюсам, применяется пространственный фильтр. Он обеспечивает устранение коротковолновой части спектра в прогностических полях метеорологических элементов путем разложения в ряд Фурье по широте, урезания членов ряда и их свертки.

В модели ЕЦСПП осуществляется весьма полный учет неадиабатических процессов.

Параметризация физических процессов. В перечень физических процессов, учитываемых в модели, входят: вертикальная турбулентность и горизонтальная турбулентная диффузия, сухая и влажная конвекция, радиация и облачность, крупномасштабная конденсация, процессы тепло- и влагообмена на земной поверхности (в том числе тепловой и водный балансы на поверхности суши) и в атмосфере.

Параметризация турбулентных потоков в приземном слое. Параметризация приземных потоков основана на теории подобия Момина — Обухова, согласно которой профили температуры и скорости ветра зависят только от высоты z , параметра $\beta = g/\theta$ и масштабов для измерения скорости u^* и температуры θ^* . Приземные потоки импульса τ и тепла H связаны с u^* и θ^* соотношениями

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}, \quad \theta^* = -\frac{H}{c_p \rho u^*}.$$

Из величин u^* , θ^* и β можно составить один безразмерный параметр $\xi = z\theta^*/(u^*)^2$, так что вертикальные профили ветра и температуры могут быть представлены как функции только ξ . Для определения этих функций применяются эмпирические данные. В результате получаются следующие расчетные формулы:

$$(u^*)^2 = u_h^2 f_1 \left(\frac{h}{z_0}, Ri \right),$$

$$u^*\theta^* = u_h (\theta_h - \theta_0) f_2 \left(\frac{h}{z_0}, Ri \right),$$

где z_0 — параметр шероховатости; h — высота приземного слоя, равная высоте самого нижнего уровня модели, Ri — число Ричардсона:

$$Ri = \beta \frac{h(\theta_h - \theta_0)}{u_h^2};$$

индексы h и 0 обозначают величины, относящиеся к уровням h и z_0 . Функции f_1 и f_2 при нейтральной стратификации имеют вид $f_1 = 1 - 10Ri$, $f_2 = 1 - 15Ri$, а для условий устойчивой и неустойчивой стратификации описываются более сложными выражениями.

Определение потока влаги q^* осуществляется аналогично определению потока тепла по соотношению

$$u^*q^* = u_h (q_h - q_0) f_2 \left(\frac{h}{z_0}, Ri \right).$$

9.4.2. Турбулентные потоки в пограничном слое

Выше приземного слоя турбулентные потоки вычисляются с помощью коэффициентов турбулентности, зависящих от масштаба турбулентности (или пути смешения). В соответствии с теорией коэффициент турбулентности κ зависит от вертикальных градиентов ветра и температуры:

$$\kappa = \bar{l}^2 f \left(\left| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right|, \frac{\partial \theta}{\partial z} \right),$$

где $\bar{l}$ — длина пути смешения Прандтля; f — заданная функция (f_1 или f_2); $\bar{l} = \kappa z / (1 + \kappa z / \lambda)$; $\lambda = 160$ м; $\kappa = 0,4$.

Турбулентные потоки импульса τ , тепла H и влаги Q выражаются в следующем виде:

$$\tau = \rho \kappa \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}, \quad H = -\rho \kappa \frac{\partial \theta}{\partial z},$$

$$Q = -\rho \kappa \frac{\partial q}{\partial z}.$$

Вид функции f в формуле для κ различен для устойчивой и неустойчивой стратификации, а $\bar{l}$ зависит только от высоты z и подбирается на основе численных экспериментов с параметром λ .

Горизонтальная турбулентная вязкость. Горизонтальная вязкость обеспечивает сглаживание полей метеоэлементов и исключение

вычислительных шумов из численного решения. Соответствующие члены в уравнениях (4.1), описывающие горизонтальную вязкость, выражаются в форме $\alpha \Delta f$. Здесь α — константа, Δ — оператор Лапласа на плоскости, f — любая из переменных u , v , θ или q .

Сухая и влажная конвекция. Сухое конвективное приспособление обеспечивается турбулентным перемешиванием, путем расчета потоков тепла, влаги и импульса. Влажная конвекция параметризуется по схеме Куо (см. главу 7). Модификация схемы Куо в модели ЕЦСПП состоит в том, что влажная конвекция учитывается везде, где имеет место конвергенция влаги, а не только в приземных слоях атмосферы.

Крупномасштабная конденсация. Конденсация влаги происходит при относительной влажности более 100 %. В этом случае конденсационные изменения температуры ΔT и влажности Δq связаны следующими соотношениями:

$$\Delta T = \frac{\mathcal{L}}{c_p} \Delta q, \quad \Delta q = q_n(T + \Delta T) - q(T).$$

где T и q — прогностические значения температуры и массовой доли влаги без учета конденсации, q_n — массовая доля насыщенного водяного пара.

Количество сконденсировавшейся влаги Δq рассчитывается по формуле

$$\Delta q = \frac{\mathcal{L}}{c_p} \frac{q - q_n(T)}{1 + \frac{\mathcal{L}^2 q_n(T)}{c_p R_n T^2}}.$$

Количество выпавших осадков определяется следующим образом:

$$W = \frac{1}{g} \int_0^\sigma (\Delta q - \Delta e) p_s d\sigma'.$$

Здесь Δe — испарение осадков, которое находится с помощью формулы

$$\Delta e = k_1 [q_n(T) - q] (b_1 \sqrt{\sigma})^{c_1},$$

где k_1 , b_1 и c_1 — константы.

Радиационные притоки тепла. Для вычисления радиационных притоков тепла рассчитываются потоки коротковолновой и длинноволновой радиации. Радиационные процессы параметризованы с выделением тех эффектов, которые наиболее сильно влияют на прогноз погоды малой заблаговременности. Облачно-аэрозольные эффекты считаются более значительными по сравнению с поглощением радиации газами. Для учета суточного хода радиационные потоки рассчитываются в модели каждые три или четыре часа. В первоначальном варианте модели суточный ход не был включен в рассмотрение, а потоки радиации пересчитывались только дважды в сутки.

Потоки коротковолновой (солнечной) радиации вычисляются для двух спектральных интервалов, а потоки длинноволновой (земной) радиации — для трех интервалов. В каждом из интервалов спектра выделяются дополнительно несколько подынтервалов, в которых

производится расчет потоков с использованием соответствующей функции пропускания. При расчете радиационных потоков в модели ЕЦСПП, кроме астрономических параметров, требуется информация о распределении температуры, влажности, жидкой влаги, количества облаков, аэрозоля, озона, углекислого газа и альбедо земной поверхности. Температура и влажность непосредственно прогнозируются в модели, а остальные перечисленные параметры задаются по климатическим данным. Радиационная схема в модели ЕЦСПП весьма сложна и более подробное описание ее выходит за рамки этого параграфа.

9.4.3. Определение температуры и влажности на земной поверхности

При вычислении потоков тепла и влаги должны быть известны температура и влажность на земной поверхности. Температура морской поверхности T_m считается известной из наблюдений и остается постоянной в период прогноза. Это условие принимается как для открытой воды, так и для морского льда. Температура поверхности почвы T_s рассчитывается при прогнозе с помощью нестационарного уравнения теплового баланса (при учете суточного хода солнечной радиации):

$$c_s \frac{\partial T_s}{\partial t} + \sigma T_s^4 - (1 - A) S - G + H + \mathcal{L}Q + \mathcal{L}_1 M + B = 0. \quad (4.4)$$

Здесь M — количество влаги, образующейся при таянии льда или снега; $\mathcal{L}_1$ — теплота плавления; B — поток тепла в почву, рассчитываемый по формуле $B = \lambda_s (T_s - T_{h_1})/h_1$; λ_s — коэффициент температуропроводности, T_{h_1} — фиксированная температура почвы на глубине h_1 .

Если суточный ход не учитывается, то первый член левой части уравнения теплового баланса (4.4) равен нулю, а температура почвы определяется вторым членом этого уравнения. Массовая доля влаги у морской поверхности q_m равна значению, соответствующему состоянию насыщения при температуре морской поверхности. Влажность поверхности почвы q_s определяется из условия гидрологического баланса, составляющими которого являются осадки, испарение, таяние снега, поверхностный сток и диффузия влаги в грунт (в дальнейшем гидрологический блок усложнен учетом влаготермического состояния почвы в трех слоях).

Модель реализуется в основном в спектральном варианте (о спектральном методе см. главу 5, а также п. 9.3) как глобальная или полусферная. Для прогнозов на короткие сроки (до 3 сут) по ограниченной территории, а в некоторых случаях и по полушарию модель применяется в конечно-разностном варианте. Шаги сетки в сферической системе координат приняты равным $\Delta\varphi = \Delta\lambda = 1,875^\circ$. Конечно-разностная аппроксимация дифференциальных уравнений близка к используемой в модели НМЦ США, которая изложена в п. 9.3. Расположение рассчитываемых прогностических величин в ячейке сетки представлено на рис. 9.6 б.

Таблица 9.4

Краткие сведения об оперативных прогностических моделях ряда стран

Страна, служба	Модель	Области прогноза
Великобритания Метеорологическая служба	Конечно-разностная модель Мезо- α , β -модели	Европейский регион Британский подрегион Северное полушарие Земной шар
ФРГ Немецкая метеорологи- ческая служба	Конечно-разностная мо- дель Мезо- α -модель	Европейский регион Центрально-европейский подрегион Северное полушарие
Франция Национальная метеоро- логическая служба	Конечно-разностная мо- дель Мезо- α -модель Спектральная модель ($m \leq 21$, $n \leq 30$)	Европейский регион Французский подрегион Северное полушарие Земной шар
Япония Японское метеорологи- ческое агенство	Конечно-разностная модель Мезо- α -модель Спектральная модель	Азиатский регион «Японский» подрегион Северное полушарие
Швеция Метеорологическая служба	Конечно-разностная модель Мезо- α , β -модель	Северное полушарие «Скандинавский» подрегион

Подчеркнем, что в качестве исходных данных используются результаты численного анализа по земному шару, представленные в узлах сферической сетки с указанными ранее шагами (см. рис. 9.6 б, табл. 9.3).

Прогностическая модель ЕЦСПП непрерывно совершенствуется. Одно из существенных изменений модели было сделано в 1985 г., когда была введена новая вертикальная структура атмосферы. Вместо координаты σ были введены смешанные координаты (p, σ) . В этой системе координат давление на уровне $k + 1/2$ определяется следующим образом:

$$p_{k+1} = A_{k+\frac{1}{2}} + B_{k+\frac{1}{2}} p_s,$$

где коэффициенты A и B имеют следующие значения:

k	$1/2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$A_{k+1/2}$ гПа . . .	0	50	99	142	173	191	194	182	157	125
$B_{k+1/2} \cdot 10^{-3}$. . .	0	0	2	13	42	94	170	268	384	511

Горизонтальные координаты, разрешение	Вертикальные координаты, уровни	Прогностическая продукция
$x, y; \Delta x = 208 \cos \varphi$ км $\Delta y = 167$ км; $\Delta x = \Delta y$ — до 15 км $\varphi, \lambda; \Delta \varphi = 1,5^\circ;$ $\Delta \lambda = 1,875^\circ$	σ -координата, 11 и 15 уровней	Прогноз давления, геопотенциала, температуры, скорости ветра на срок до 6 сут Детализированный прогноз по мезотерритории на срок до 36 ч
$x, y;$ $\Delta x = \Delta y = 254, 127,$ $63, 5$ км	p -координата, 9 уровней	Прогноз давления, геопотенциала, температуры, скорости ветра на срок до 4 сут Детализированный прогноз по мезотерритории на срок до 30 ч
$x, y;$ $\Delta x = \Delta y = 270, 90,$ 53 км	σ -координата	Прогноз давления, геопотенциала, температуры, скорости ветра на срок до 4 сут Детализированный прогноз по мезотерритории на срок до 36 ч
	смешанная p, σ -координат 15 уровней	
$x, y;$ $\Delta x = \Delta y = 384, 127,$ $63, 5$ км	σ -координата, 12 и 13 уровней	Прогноз давления, геопотенциала, температуры, скорости ветра на срок до 8 сут Детализированный прогноз по мезотерритории на срок до 36 ч
$x, y; \Delta x = \Delta y =$ $= 304$ км, для мезомодели — до 22 км $\varphi, \lambda; \Delta \varphi = \Delta \lambda = 1,65$ и $1,1^\circ$	σ -координата, 5 и 9 уровней	Прогноз давления, геопотенциала, температуры, скорости ветра на срок до 3 сут Детализированный прогноз по мезотерритории на срок до 36 ч

k	10	11	12	13	14	15	15 1/2
$A_{k+1/2}$ гПа	89	54	26	8	0	0	0
$B_{k+1/2} \cdot 10^{-3}$	638	756	856	929	973	992	1000

Таким образом, на верхней границе атмосферы ($k = 1/2$) $p = 0$, $\sigma = 0$; на земной поверхности ($k = 15$) $p = p_s$, $\sigma = 1$; на уровне $k = 1$ $p_1 = 50$ гПа. Легко определить, что, например, на уровне $k = 7$ имеем $p_7 = 182 \pm 0,268 p_s \approx 450$ гПа, $\sigma_7 \approx 0,450$. Авторы модели считают, что новый вариант вертикальной структуры атмосферы позволяет более детально описать в модели особенности фактического вертикального распределения метеорологических величин и уменьшить ошибки аппроксимации градиентов давления.

Как уже говорилось в начале этой главы, численные прогнозы рассчитываются более чем в 30 странах мира. В каждой конкретной стране используется собственная модель, либо модель, заимствованная в метеорологических центрах наиболее развитых стран. При этом модель может быть модернизирована применительно к интересам данной страны.

Таблица 9.5

Среднеквадратические ошибки (дам) прогноза высоты изобарических поверхностей 1000 и 500 гПа на 3 сут за 1980 и 1985 гг. (осредненные по кварталам (I—IV)) в ряде стран, а также по модели ЕЦСПП

	1980				1985			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV
Поверхность 1000 гПа								
Великобритания	6,7	4,7	4,1	5,8	4,6	4,1	3,4	4,5
США	6,3	4,5	4,2	5,8	6,4	4,2	3,6	4,8
Франция	7,0	5,3	4,9	6,1	4,9	3,8	3,4	4,2
ФРГ	7,6	4,7	4,0	5,8	5,8	4,4	3,6	5,1
Япония	7,3	4,8	4,2	6,0	6,1	4,7	4,0	5,6
ЕЦСПП	4,8	4,2	3,6	4,4	3,9	3,0	2,7	3,5
Поверхность 500 гПа								
Великобритания	7,8	5,9	4,8	6,8	5,0	4,3	3,7	5,0
США	7,0	5,9	5,0	5,9	6,9	5,3	4,7	5,8
Франция	9,2	7,0	6,2	8,0	6,1	5,0	4,3	5,2
ФРГ	10,5	6,8	6,5	8,0	6,4	5,2	4,3	6,0
Япония	8,9	6,2	5,1	7,5	6,8	5,2	4,4	6,3
ЕЦСПП	6,2	5,2	4,5	5,3	4,8	3,8	3,3	4,5

Таблица 9.6

Среднегодовые значения среднеквадратических ошибок прогноза высоты изобарических поверхностей 1000 и 500 гПа (σ_H) на 3 сут, температуры на поверхностях 1000, 500 и 200 гПа (σ_T) на 2 сут по разным моделям за 1980, 1985 и 1986 гг.

Год	Поверхность, гПа	σ_H * дам	σ_T ** К	σ_v м/с
1980	1000	4,3	4,6	—
	500	5,3	2,6	12,4
	200	—	4,7	13,9
1985	1000	3,3	3,7	—
	500	4,1	2,2	10,8
	200	—	3,0	11,3
1986	1000	3,1	3,6	—
	500	3,9	2,2	10,3
	200	—	3,1	11,3

* Модель ЕЦСПП для северного полушария.

** Модель Великобритании для Северной Атлантики.

Кроме описанных прогностических моделей трех стран уникальными и весьма совершенными являются прогностические модели, разработанные в национальных центрах Великобритании, ФРГ, Франции, Японии и Швеции. В табл. 9.4 приведены основные сведения о прогностических моделях этих стран, а в табл. 9.5 и 9.6 — некоторые сведения об оценке прогнозов по ряду моделей.

9.5. Подготовка начальных данных для численных прогнозов погоды

Для расчетов по прогностическим моделям атмосферы необходимо иметь значения метеорологических величин в узлах регулярной сетки точек в один (начальный) момент времени. Такие значения получают в результате специальной вычислительной процедуры пространственно-временной интерполяции наблюдений в нерегулярной сетке точек (данные наблюдений на метеорологических станциях, метеорологических спутников и пр.) в узлы регулярной сетки точек. Эта вычислительная процедура называется *численным* (объективным) анализом.

Основную часть метеорологических наблюдений составляют наблюдения на метеорологических станциях, производимые в стандартные (синоптические) сроки — в 0, 6, 12 и 18 ч СГВ (на земном шаре число таких станций составляет 4500), и наблюдения на аэрологических станциях, производящих радиозондирование атмосферы (в 0 ч СГВ наблюдения производятся на 900 таких станциях, а в 12 ч — на 800). Большая часть метеорологических и аэрологических станций находится в северном полушарии и на континентах. Распределение станций по территории является весьма неравномерным. Большую по объему часть результатов наблюдений составляют данные несинхронных наблюдений с самолетов, буев, уравновешенных шаров и спутников.

Таким образом, кроме стандартной метеорологической информации — синоптической (SYNOP, SHIP) и аэрологической (TEMP) — используются данные измерений на буйах (DRIBY), самолетные сообщения (AIREP), спутниковые данные о температуре (SATEM) и результаты ветрового зондирования (SATOВ).

Общий объем данных, используемый для целей численного прогноза, достигает десятков млн. десятичных знаков. Для примера укажем, что в Гидрометцентре СССР объем оперативной информации, принимаемый за сутки с наземных станций, составляет около 1,5, а с аэрологических — 0,4 млн. десятичных знаков.

Вся информация, поступающая в прогностический центр, проходит стадию первичной обработки. В эту стадию входят «опознавание» данных и их первичный контроль. Опознавание данных основано на сравнении заглавной части метеорологических сводок со стандартными величинами (время наблюдений и координаты точки наблюдений, индексы станций и т. д.). Первичный контроль данных основан на сравнении данных текущих наблюдений с климатическими, проверке выполнения некоторых соотношений, например уравнения статики, и т. д.

При контроле данных наблюдений, а также в процессе численного анализа необходимо учитывать ошибки измерений. В табл. 9.7 приведены сведения о погрешностях определения температуры и скорости ветра на высотах при измерении со спутников и с самолетов. Там же приведены и соответствующие погрешности данных аэрологического зондирования.

Таблица 9.7

Ошибки δ определения температуры воздуха T и скорости ветра v , производимого на основе измерений с разных наблюдательных систем

Давление, гПа	Высота, км	Аэрологическое радиозондирование		Измерения со спутников		Измерения с самолетов
		δT °C	δv м/с	δT °C	δv м/с	δv м/с
10	31	4,5	6	2,8	8	6
50	20,6	2,7	6	2,4	8	6
100	16,2	2,1	6	2,0	8	6
200	11,8	2,0	6	1,9	8	6
300	9,18	1,6	6	2,0	8	6
500	5,58	1,2	4	2,2	6	4
700	3,02	1,1	3	2,5	5	3
850	1,46	1,1	2	2,0	4	2

После опознавания и первичного контроля производится выборка данных, необходимых для численного анализа, а затем и собственно численный анализ.

Существует несколько методов численного анализа. Из них в основном используются метод полиномиальной аппроксимации,

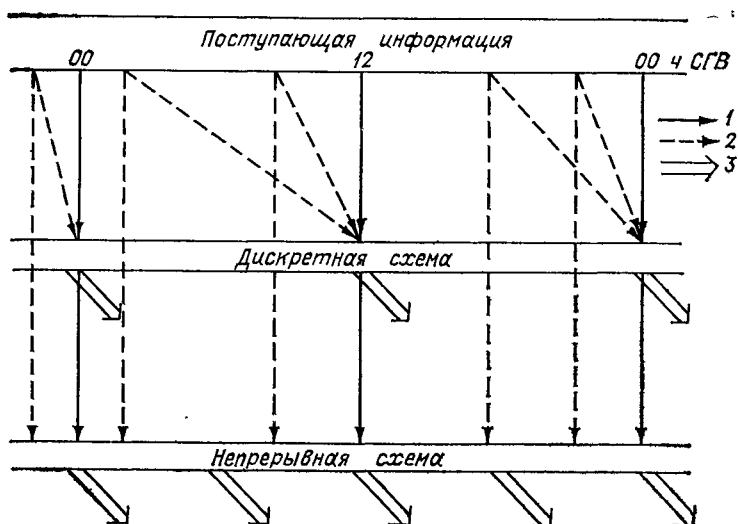


Рис. 9.7. Дискретная и непрерывная схемы четырехмерного численного анализа.

1 — поступающая в ЭВМ информация по данным наблюдений в основные синоптические сроки (00 и 12 ч СГВ), 2 — поступающая в ЭВМ несинхронная информация, 3 — выдача прогноза «потребителям» (по дискретной схеме — в 00 и 12 ч СГВ, по непрерывной схеме — в любое время).

метод оптимальной интерполяции, метод последовательных приближений (коррекции). Эти методы изучаются в курсе «Численный анализ метеорологической информации».

В последнее десятилетие система подготовки данных для численного прогноза была существенно усовершенствована. Это относится к включению в численный анализ несинхронных данных; такой анализ получил название *четырёхмерного* численного анализа. Несинхронные данные, как правило, получают с помощью новых нестандартных наблюдательных систем (спутники, самолеты и др.), поэтому их включение в систему численного анализа представляет собой особую трудность. Разрабатываемые специальные методы *четырёхмерного* численного анализа с включением нестандартных наблюдений называют также *системой усвоения* данных.

Кроме того, для расчетов по современным прогностическим моделям атмосферы требуется, чтобы данные о различных элементах в узлах регулярной сетки, а также данные на разных уровнях были бы определенным образом «согласованы» между собой. Соответствующая часть процедуры подготовки данных для прогноза получила название *согласование* данных.

Включение несинхронных данных в численный анализ и их согласование производятся в определенные моменты времени, соответствующие основным синоптическим срокам (0 и 12 ч или 0, 6, 12 и 18 ч СГВ). Таким образом, анализ метеорологических данных производится в фиксированные моменты времени. В этом случае говорят о так называемой *дискретной* схеме *четырёхмерного* численного анализа (рис. 9.7).

В *непрерывных* же схемах численного анализа (см. рис. 9.7) сбор и введение в численную процедуру всех данных и их согласование производятся по мере их поступления. Поступающие данные «замещиваются» с результатами прогноза в срок наблюдения. Последнее означает, что для каждого физического момента времени имеются прогностические значения метеорологических величин в узлах прогностической сетки. Как только получена очередная «порция» данных наблюдений, счет прогноза временно прекращается и производится пространственная интерполяция в узлы сетки при использовании прогностических значений в этих узлах и поступивших данных, а также их согласование.

В результате согласования по наиболее совершенным схемам, получившее название *инициализации*, разнородные данные преобразуются таким образом, что при интегрировании уравнений модели оказываются исключенными (отфильтрованными) высокочастотные (короткие) гравитационные волны, которые на формирование погоды существенного влияния не оказывают.

По завершении этой вычислительной процедуры счет прогноза по модели продолжается, но уже с использованием проведенного численного анализа. Получаемый таким путем прогноз является вспомогательным. По мере необходимости (обычно в стандартные синоптические сроки 0 и 12 ч СГВ) по полученным значениям метеоэлементов в узлах сетки составляется уже реальный прогноз, время

счета которого должно существенно «опережать» реальное время.

Такая непрерывная схема численного анализа-прогноза изображена на рис. 9.7.

В отношении развития методов анализа совершенно определенно можно говорить о перспективности четырехмерного многоэлементного численного анализа методом оптимальной интерполяции. Для его реализации необходимо иметь ЭВМ производительностью до десятков и сотен миллионов операций в секунду, а также технологию и радиотехнические средства для приема всей текущей оперативной информации в темпе ее поступления. Такие возможности имеются лишь в наиболее крупных метеорологических центрах, о которых говорилось ранее.

К главе 1

1. Белов П. Н. Численные методы прогноза погоды. — Л.: Гидрометеоздат, 1975. 392 с.
2. Блинова Е. Н. Гидродинамическая теория волн давления, температурных волн и центров действия атмосферы. — ДАН СССР, 1943, т. 7, с. 284—287.
3. Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. — М.: Гостехиздат, 1957. 375 с.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. Е. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. Изд. 6. — М.: Физматгиз, 1963. 584 с. Ч. 2. Изд. 4 — Физматгиз, 1963. 728 с.
5. Лекции по численным методам краткосрочного прогноза погоды. — Л.: Гидрометеоздат, 1969. 734 с.
6. Марчук Г. И. Численные методы в прогнозе погоды. — Л.: Гидрометеоздат, 1967. 356 с.
7. Марчук Г. И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. — Л.: Гидрометеоздат, 1974. 303 с.
8. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. — М.: Наука, 1982. 320 с.
9. Марчук Г. И., Агoshнов В. Н. Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981. 414 с.
10. Марчук Г. И., Дымников В. П. и др. Математическое моделирование общей циркуляции атмосферы. Л., Гидрометеоздат, 1984, 320 с.
11. Матвеев Л. Т. Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. — Л.: Гидрометеоздат, 1984. 750 с.
12. Монин А. С. Прогноз погоды как задача физики. — М.: Наука, 1969. 184 с.
13. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Т. 1. — М.: Наука, 1965. 640 с.
14. Обухов А. М. К вопросу о геострофическом ветре. — Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 1949, т. 13, № 4, с. 281—306.
15. Теоретические основы прогноза погоды на средние сроки. — Л.: Гидрометеоздат, 1979. 139 с.
16. Томпсон Ф. Анализ и предсказание погоды численными методами. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 239 с.
17. Численные методы, используемые в атмосферных моделях/Пер. с англ. — Л.: Гидрометеоздат, 1982. 360 с.
18. Юдин М. И. Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды. — Л.: Гидрометеоздат, 1963. 404 с.
19. Численные методы решения задач динамики атмосферы и океана. — Л., Гидрометеоздат, 1968. 367 с.
20. Модели общей циркуляции атмосферы/Пер. с англ. под ред. А. С. Машковича. — Л.: Гидрометеоздат, 1982. 351 с.

К главе 2

1. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. — М.: Наука, 1977. 440 с.
2. Мезингер Ф., Аракава А. Численные методы, используемые в атмосферных моделях. Пер. с англ. — Л.: Гидрометеоздат, 1979. 136 с.

К главе 3

1. Булеев Н. И., Марчук Г. И. О динамике крупномасштабных атмосферных процессов. — Труды ИФА, 1959, № 2, с. 66—104.
2. Марчук Г. И. и др. Оперативная квазигеострофическая схема краткосрочного прогноза для пяти уровней атмосферы. — Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1965, т. 1, № 2, с. 129—135.

К главе 4

1. Беркович Л. В. Шестиуровневая схема прогноза метеозадающих по полным уравнениям для большой территории. — Труды Гидрометцентра СССР, 1972, вып. 100, с. 108—115.
2. Дымников В. П., Ишимова А. В. Неадиабатическая модель краткосрочного прогноза погоды. — Метеорология и гидрология, 1979, № 6, с. 5—14.
3. Кибель И. А. Способ краткосрочного прогноза метеорологических элементов. — ДАН СССР, 1958, т. 118, № 4, с. 687—690.
4. Кибель И. А. О приспособлении движения к геострофическому. ДАН СССР, 1955, т. 104, № 1, с. 60—63.
5. Кибель И. А. Конечно-разностная схема решения системы уравнений краткосрочного прогноза погоды и соотношения квазигеострофичности. — ДАН СССР, 1960, т. 132, № 2, с. 319—322.
6. Кибель И. А. Сведение системы дифференциальных уравнений, используемых при краткосрочном прогнозе погоды, к системе алгебраических уравнений. — ДАН СССР, 1962, т. 143, № 6, с. 1336—1339.
7. Кибель И. А. Гидродинамический (численный) краткосрочный прогноз погоды. — В сб.: Механика в СССР за 50 лет. Т. 2. — М., 1970, с. 561—583.
8. Монин А. С., Обухов А. М. Малые колебания атмосферы и адаптация метеорологических полей. — Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1968, № 11, с. 1360—1373.
9. Магазенков Л. Н. Схемы интегрирования по времени уравнений движения жидкости, эффективно подавляющие высокочастотные компоненты. — Труды ГГО, 1983, вып. 481, с. 103—107.
10. Магазенков Л. Н., Шейнин Д. Л. Об интегрировании уравнений динамики атмосферы с помощью полуневяной диссипативной схемы. — Труды ГГО, 1982, вып. 459, с. 85—91.
11. Пененко В. В. Методы численного моделирования атмосферных процессов. — Л.: Гидрометеиздат, 1981. 352 с.
12. Садоков В. П. Гидродинамическая численная модель для описания крупномасштабных атмосферных процессов. — Труды Гидрометцентра СССР, вып. 192, 1977, с. 22—38.
13. Синяев В. Н. Об одном принципе построения конечно-разностных схем, основанных на законах сохранения полной энергии. — В кн.: Численные методы механики сплошной среды — Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1974, т. 5, № 2, с. 15—23.
14. Шейнин Д. А. Устойчивость полуневяной схемы при интегрировании системы уравнений бароклинической атмосферы. — Труды ГГО, 1983, вып. 481, с. 129—134.
15. Модели общей циркуляции атмосферы/Пер. с англ. под ред. С. А. Машковича. — Л.: Гидрометеиздат, 1981. 351 с.

К главе 5

1. Машкович С. А. Спектральные модели общей циркуляции атмосферы и численного прогноза погоды. — Л.: Гидрометеиздат, 1986. 287 с.
2. Махенхауэр Б. Спектральный метод. — В кн.: Численные методы, используемые в атмосферных моделях. — Л.: Гидрометеиздат, 1982, с. 88—192.
3. Мерили П. Е., Орзаг С. А. Псевдоспектральный метод. — В кн.: Численные методы, используемые в атмосферных моделях. — Л.: Гидрометеиздат, 1982, с. 193—214.

К главе 6

1. Казаков А. Л., Лыкосов В. Н. О параметризации взаимодействия атмосферы с подстилающей поверхностью при численном моделировании атмосферных процессов. — Труды ЗапСибНИИ, 1982, вып. 55, с. 3—20.
2. Казанский А. Б., Монин А. С. О динамическом взаимодействии между атмосферой и поверхностью Земли. — Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1961, № 5, с. 768—788.
3. Кондратьев К. Я. Актинометрия. — Л.: Гидрометеиздат, 1966. 691 с.
4. Краус Е. Взаимодействие атмосферы и океана/Пер. с англ. под ред. А. С. Дубова, Э. К. Бютнер. — Л.: Гидрометеиздат, 1976. 295 с.
5. Монин А. С., Обухов А. М. Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы. — Труды ин-та геофизики АН СССР, 1954, вып. 24 (151), с. 163—187.
6. Тарнопольский А. Г., Шнайман В. А. Параметризация бароклинного планетарного слоя атмосферы. — Труды Гидрометцентра СССР, вып. 180 1976, с. 32—40.
7. Хан А. П. Математическое моделирование тропических циклонов. — Л.: Гидрометеиздат, 1964, 247 с.
8. Теоретические основы прогноза погоды на средние сроки. — Л.: Гидрометеиздат, 1979. 138 с.
9. Радиация в облачной атмосфере/Под ред. Е. М. Фейгельсон. — Л.: Гидрометеиздат, 1981. 260 с.

К главе 7

1. Буйков М. В. Численное моделирование облаков слоистообразных форм. — Обнинск: Изд. ВНИИГМИ—МЦД, 1978, 62 с.
2. Буйков М. В., Пирнач А. М. Численное моделирование двухфазного слоистообразного облака с учетом микроструктуры. — Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1973, т. 9, № 5, с. 486—499.
3. Буйков М. В., Пирнач А. М. Численное моделирование трехфазной слоистообразной облачности с учетом микроструктуры. — Труды УкрНИГМИ, 1973, вып. 125, с. 3—17.
4. Дымников В. П., Гусева Н. В. Численный метод прогноза полей влажности, слоистообразной облачности и осадков в атмосфере. — Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1975, т. 11, № 6, с. 547—553.
5. Дюбюк А. Ф. К расчету осадков. — Докл. ЦИП, 1947, т. I, вып. 3, с. 31—40.
6. Козлов В. Н., Матвеев Д. Т. Численное моделирование полей влаго-содержания атмосферы и водозапаса облаков над акваториями морей и океанов. — В кн.: Доклады Всесоюзного симпозиума по ПИГАП. — М.: Гидрометеиздат, 1973, с. 10—25.
7. Лушев Ю. Г., Матвеев Л. Т. Численная схема краткосрочного прогноза облачности. — Докл. АН СССР, 1966, т. 167, № 5, с. 1042—1045.
8. Матвеев Л. Т. Динамика облаков. — Л.: Гидрометеиздат, 1981. 311 с.
9. Матвеев Л. Т. Динамика формирования и прогноз слоистообразных облачных систем. — В кн.: Динамика крупномасштабных атмосферных процессов. — М.: Наука, 1967, с. 279—292.
10. Швеиц М. Е. К вопросу предвычисления поля относительной влажности. — Труды ГГО, 1959, вып. 81, с. 3—12.

К главе 8

1. Белов П. Н., Щербakov А. Ю. Численное моделирование суточного хода метеорологических элементов в большом городе. — Метеорология и гидрология, 1983, № 7, с. 45—53.
2. Вельтищев Н. Ф. и др. Мезомасштабный численный прогноз погоды. — Метеорология и гидрология. 1962, № 4, с. 5—15.
3. Груза Г. В., Рейтенбах Р. Г. Статистика и анализ гидрометеорологических данных. — Л.: Гидрометеиздат, 1982. 216 с.

4. Гутман Л. Н. Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов. — Л.: Гидрометеоиздат, 1969. 295 с.
5. Кибель И. А. Некоторые новые задачи гидродинамического краткосрочного прогноза погоды. — Труды Гидрометцентра СССР, 1964, вып. 3, с. 3—18.
6. Кибель И. А. Гидродинамический краткосрочный прогноз в задачах мезометеорологии. — Труды Гидрометцентра СССР, 1970, вып. 48, с. 3—18.
7. Пекелис Е. М. К учету орографии в гидродинамическом прогнозе погоды. — Труды Гидрометцентра СССР, 1964, вып. 239, с. 76—101.
8. Пененко В. В., Алоян А. Е., Лазриев Г. Л. Численная модель локальных атмосферных процессов. — Метеорология и гидрология, 1979, № 4, с. 24—34.
9. Tiedtke M., Geleyn J. F., Hollingsworth A., Louis J. F. ECMWF model parameterization of subgrid processes. — ECMWF Techn. Rep., 1979, N 10, 46 p.

К главе 9

1. Багров А. Н., Шиляев В. Б., Локтионова Е. А. Оперативная схема объективного анализа метеорологических полей для численного гидродинамического прогноза погоды. — Труды Гидрометцентра СССР, вып. 280, с. 25—55.
2. Белоусов С. Л., Гандин Л. С., Машкович С. А. Обработка оперативной метеорологической информации с помощью электронно-вычислительных машин. — Л.: Гидрометеоиздат, 1968. 280 с.
3. Беркович Л. В. Глобальная прогностическая модель атмосферы. — Метеорология и гидрология, 1985, № 3, с. 18—25.
4. Беркович Л. В., Ткачева Ю. В. Развитие неадиабатической полусферной прогностической модели атмосферы. — Труды Гидрометцентра СССР, 1985, вып. 277, с. 3—29.
5. Курбаткин Г. П. Гидродинамические оперативные прогнозы. Достижения в области гидрометеорологии и контроля природной среды. — Л.: Гидрометеоиздат, 1987, с. 10—33.
6. Петросянц М. А. Результаты первого глобального эксперимента ОИГАП. — Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1982, Т. 18, № 11, с. 1123—1140.
7. Bengtsson L., Lange A. Results of the WMO/CAS numerical weather prediction data study and intercomparison project for forecasts for the northern hemisphere in 1979—80. — WMO, 1982.
8. Catalogue of numerical atmospheric models for the first GARP global experiment. — Geneva, 1980.
9. Numerical experimental programme — WGNE forecast comparison experiments. — Report No. 6, WMO, 1983.
10. Tiedtke M. The parameterization scheme of the ECMWF grid point model. — Proceeding from ECMWF Seminar 1977: The parameterization of the physical processes in the free atmosphere. 1977, pp. 374—422.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От авторов	3
Введение	4
Основные обозначения и постоянные	7
Глава 1. Основные уравнения гидротермодинамики прогностических моделей атмосферы	10
1.1. Принципы построения прогностических моделей атмосферы	10
1.2. Система основных уравнений гидротермодинамики	11
1.3. Система уравнений гидротермодинамики с произвольной вертикальной координатой	16
1.4. Уравнения гидротермодинамики в различных системах координат	21
1.4.1. Локальная изобарическая система координат	—
1.4.2. σ -система координат	24
1.4.3. Сферическая система координат	25
1.5. Учет картографических проекций	26
1.5.1. Типы картографических проекций	27
1.5.2. Преобразование уравнений гидротермодинамики для различных картографических проекций	29
Глава 2. Конечно-разностные методы решения уравнений гидротермодинамики	31
2.1. Метод сеток. Основные понятия	—
2.2. Конечно-разностная аппроксимация производных	33
2.3. Конечно-разностные схемы	40
2.3.1. Точность численного решения. Аппроксимация и согласованность	41
2.3.2. Решение конечно-разностных уравнений методом шагов по времени	46
2.3.3. Корректность, устойчивость и сходимость	48
2.3.4. Методы построения конечно-разностных схем	50
2.4. Схемы численного интегрирования по времени	55
2.5. Точные решения линейных уравнений адвекции, колебаний и трения	62
2.5.1. Уравнение адвекции	—
2.5.2. Уравнение колебаний	64
2.5.3. Уравнение трения	65
2.6. Сходимость численного решения	66
2.7. Устойчивость конечно-разностных схем	68
2.8. Анализ вычислительной устойчивости конечно-разностных схем. Вычислительная вязкость. Вычислительные моды	74
2.8.1. Уравнение адвекции	—
2.8.2. Уравнение колебаний	85
2.8.3. Уравнение трения	88
2.8.4. Ошибка ложного представления. Нелинейная вычислительная неустойчивость	90
2.8.5. Влияние ошибок на устойчивость численных решений	93
2.9. Анализ изменений фазы колебаний, фазовых и групповых скоростей. Вычислительная дисперсия	94
2.9.1. Анализ изменений фазы численных решений для уравнений колебаний	95
2.9.2. Анализ фазовых и групповых скоростей численных решений для уравнения адвекции. Вычислительная дисперсия	98

Глава 3. Квазигеострофические и квазисоленоидальные прогностические модели	103
3.1. Баротропная квазигеострофическая модель	—
3.1.1. Баротропное уравнение вихря скорости	—
3.1.2. Обобщенное баротропное уравнение вихря скорости	106
3.1.3. Решение баротропного и обобщенного баротропного уравнения вихря скорости	110
3.2. Итерационные методы решения баротропного уравнения вихря скорости	114
3.3. Квазигеострофическая бароклинная модель и методы ее реализации	119
3.3.1. Система уравнений. Точное решение для тенденции геопотенциала	—
3.3.2. Решение уравнений бароклинной модели методом плоскостей	127
3.4. Квазисоленоидальные прогностические модели	132
3.4.1. Баротропная бездивергентная квазисоленоидальная модель	—
3.5. Интегральные свойства	137
3.5.1. Интегральные инварианты баротропных квазигеострофической и квазисоленоидальной моделей	—
3.5.2. Условия, обеспечивающие сохранение интегральных инвариантов	141
Глава 4. Прогностические модели, основанные на полных уравнениях гидротермодинамики	144
4.1. Решение систем полных уравнений гидротермодинамики в адиабатическом приближении	145
4.1.1. Решение системы полных уравнений гидротермодинамики в системе координат x, y, ζ, t	—
4.1.2. Решение системы полных уравнений гидротермодинамики в σ -системе координат	154
4.2. Полные уравнения баротропной модели атмосферы	157
4.2.1. Уравнения мелкой воды	—
4.2.2. Уравнение баротропной модели в σ -системе координат	159
4.3. Интегральные свойства моделей, основанных на полных уравнениях	160
4.3.1. Интегральные свойства баротропной модели	—
4.3.2. Интегральные свойства бароклинной модели	165
4.4. Предотвращение и подавление нелинейной неустойчивости	171
4.4.1. Предотвращение нелинейной неустойчивости	172
4.4.2. Подавление нелинейной неустойчивости	175
4.4.3. Конечно-разностная аппроксимация пространственных производных, удовлетворяющая интегральным свойствам	177
4.4.4. Потокковая форма уравнений. Бокс-метод	178
4.5. Анализ конечно-разностных схем для уравнений, описывающих внешние гравитационные и инерционно-гравитационные волны	182
4.5.1. Анализ конечно-разностных схем для уравнений, описывающих внешние гравитационные волны	—
4.5.2. Точное решение уравнений адаптации модели мелкой воды. Дифференциально-разностные уравнения адаптации	185
4.5.3. Анализ свойств решений одномерных уравнений адаптации в полудискретной форме	187
4.5.4. Анализ свойств решений двумерных уравнений адаптации в полудискретной форме	190
4.5.5. Анализ свойств решений одномерных уравнений адаптации в дискретной форме. Оценка влияния конечных разностей по времени	191
4.5.6. Анализ устойчивости явных и полунявных схем для одномерных уравнений адаптации	193
4.5.7. Анализ устойчивости неявных схем для одномерных уравнений адаптации	195

4.6. Конечно-разностные схемы, применяемые в прогностических моделях	198
4.6.1. Явные схемы для баротропных моделей. Схема центральных разностей	—
4.6.2. Явные схемы для бароклинических моделей	202
4.6.3. Полунеявные схемы	205
4.6.4. Неявные схемы	211
4.6.5. Схемы интегрирования методом расщепления	213
Глава 5. Спектральные прогностические модели	223
5.1. Некоторые сведения о решении задачи прогноза погоды с помощью рядов	223
5.2. Базисные функции, используемые в спектральных моделях. Разложение в ряды по базисным функциям	228
5.2.1. Тригонометрические функции	229
5.2.2. Сферические функции. Разложение по сферическим функциям	230
5.2.3. Усечение бесконечных рядов	233
5.3. Применение спектрального метода для решения уравнения вихря скорости	234
5.3.1. Решение уравнения вихря скорости спектральным методом	—
5.3.2. Метод взаимодействия коэффициентов	236
5.3.3. Метод спектрально-сеточного преобразования	237
5.4. Применение спектрального метода к моделям, основанным на полных уравнениях	239
5.4.1. Модель мелкой воды	—
5.4.2. Бароклиническая модель	242
5.5. Псевдоспектральный метод	248
5.5.1. Баротропная квазисоленоидальная прогностическая модель для ограниченной территории	250
5.5.2. Глобальная прогностическая модель на основе уравнений мелкой воды	252
5.6. Решение прогностических уравнений методом конечных элементов	254
5.6.1. Базисные финитные функции. Конечно-элементные аппроксимации	255
5.6.2. Применение метода конечных элементов	258
Глава 6. Параметризация атмосферных процессов подсеточного масштаба	265
6.1. Способы параметризации лучистого теплообмена	266
6.1.1. Плоскопараллельная модель переноса радиации	—
6.1.2. Параметризация лучистого теплообмена на основе интегральных функций пропускания	268
6.1.3. Параметризация лучистого теплообмена на основе гипотезы Ньютона	269
6.1.4. Параметризация лучистого теплообмена в модели ЕЦСПП	270
6.2. Теоретические основы параметризации процесса турбулентного обмена	—
6.3. Параметризация мелкомасштабной турбулентности	272
6.4. Параметризация планетарного пограничного слоя	273
6.5. Параметризация вихревой (среднемасштабной) турбулентности	278
6.6. Параметризация процесса крупномасштабной конденсации	280
6.7. Параметризация процесса конвекции методом конвективного приспособления	282
6.8. Метод параметризации кучевой конвекции, основанный на гипотезе условной неустойчивости второго ряда	285
6.9. Параметризация конвекции в скоплениях (ансамблях) кучевых облаков	287
Глава 7. Прогноз влажности, облачности и осадков	290
7.1. Прогноз влажности	—
7.1.1. Прогноз массовой доли водяного пара	—

7.1.2. Прогноз точки росы и дефицита точки росы	294
7.1.3. Прогноз облачности и осадков	297
7.2. Постановка задачи о прогнозе влаги в трех фазах	301
7.2.1. Система уравнений модели	—
7.2.2. Модель фазовых переходов влаги	302
7.2.3. Граничные и начальные условия	304
7.2.4. Решение уравнений	306
7.3. Модели прогноза влажности, облачности и осадков	310
7.3.1. Модель прогноза влажности и облачности на основе инвариантов (по Л. Т. Матвееву)	—
7.3.2. Модель прогноза облачности и осадков (по В. П. Дымникову)	313
7.3.3. Прогноз влажности, облачности и осадков в оперативной прогностической модели Гидрометцентра СССР	315
7.3.4. Прогноз влажности, облачности и осадков в оперативной прогностической модели Европейского центра среднесрочных прогнозов погоды (ЕЦСПП)	317
Глава 8. Региональные и локальные численные прогнозы погоды	320
8.1. Региональные прогностические модели	—
8.2. Уравнения гидротермодинамики мезопроцессов	323
8.3. Постановка задачи о локальном численном прогнозе погоды на основе уравнений мезометеорологии	325
8.4. Особенности температурных условий большого города на основе моделирования мезометеорологических процессов	330
Глава 9. Оперативные прогностические модели атмосферы	334
9.1. Применение оперативных прогностических моделей атмосферы в службе погоды	—
9.2. Оперативная прогностическая модель атмосферы Гидрометцентра СССР	336
9.2.1. Параметризация физических процессов в модели	342
9.2.2. Региональная прогностическая модель атмосферы	346
9.3. Оперативная прогностическая модель атмосферы Национального метеорологического центра (НМЦ) США	347
9.3.1. Конечно-разностная прогностическая модель	—
9.3.2. Спектральная прогностическая модель	354
9.4. Оперативная прогностическая модель атмосферы Европейского центра среднесрочных прогнозов погоды (ЕЦСПП) и другие модели	356
9.4.1. Уравнение модели ЕЦСПП	357
9.4.2. Турбулентные потоки в пограничном слое	359
9.4.3. Определение температуры и влажности на земной поверхности	361
9.5. Подготовка начальных данных для численных прогнозов погоды	365
Список литературы	369