Государственный комитет РСФСР по делам науки и высшей школы

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Р. П. РЕПИНСКАЯ

ФИЛЬТРОВАННЫЕ ПРОГНОСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И СПОСОБЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Утверждено ученым советом института в качестве учебного пособия

ЛЕНИНГРАД
1991

УДК 551.509.333

Репинская Р. П. Фильтрованные прогностические модели и способы исследования вычислительной устойчивости разностных схем. Учебное пособие. Л., изд. ЛГМИ, 1991, 105 с.

Пособие содержит краткое изложение постановки задачи гидродинамического прогноза погоды, фильтрованных моделей и схем численного интегрирования эволюционных уравнений. Наряду с рассмотрением традиционного материала большое внимание уделяется современным идеям и подходам к анализу свойств разностных схем и проблеме обеспечения вычислительной устойчивости.

Ил. 9. Библ. 10.

Рецензенты: ВИКИ им. А. Ф. Можайского; *Б. М. Ильин*, канд. физ.-мат. наук, ГГО им. А. И. Воейкова.

РЕПИНСКАЯ РАИСА ПЕТРОВНА

ФИЛЬТРОВАННЫЕ ПРОГНОСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И СПОСОБЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

Учебное пособие

© Ленинградский гидрометеорологический институт (ЛГМИ), 1991

Ленинградский
Гидрометеорологический ин-т
БИБЛИОТЕКА
Л-д 19[illegible] Малоохтинский пр., 99

Глава 1. ПОГОДООБРАЗУЮЩИЕ ПРОЦЕССЫ. КЛАССИФИКАЦИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОГНОЗОВ ПОГОДЫ

1.1. Предмет и задачи гидродинамических методов прогноза погоды

Задачей данной отрасли метеорологической науки является разработка методов прогноза погоды на основе интегрирования уравнений гидротермодинамики атмосферы, стилизуемой в виде сплошной среды. Эта задача решается на основе физических представлений об атмосфере, рассматриваемых в гидромеханике, общей, динамической и синоптической метеорологии с применением методов вычислительной математики и электронно-вычислительной техники.

С точки зрения классификации гидродинамические прогнозы погоды можно разделить на краткосрочные, среднесрочные и долгосрочные малой заблаговременности.

Краткосрочные прогнозы погоды (на 1—2 сут.) можно составлять без учета неадиабатических факторов, так как в течение 1—2 сут. основной вклад в эволюцию погодообразующих процессов вносит начальное состояние атмосферы.

При долгосрочных прогнозах малой заблаговременности (на 5—10 сут.) необходим учет неадиабатических факторов, поскольку по прошествии некоторого времени вклад начального состояния исчерпывается и эволюцию атмосферных процессов полностью определяют неадиабатические воздействия.

Среднесрочные прогнозы (на 3—5 сут.) занимают особое место, так как в начале указанного периода вклад исходного состояния и неадиабатических факторов примерно одинаков, а в конце срока влияние притоков тепла заметно превалирует. В результате в течение 3—5 сут. удается проследить основные изменения начального состояния и выявить возмущения, возникающие благодаря влиянию неадиабатических факторов. При прогнозе на 5—10 сут. и более не удается проследить эволюцию индивидуальных возмущений, поскольку здесь происходит наложение ошибок начального поля и ошибок, возникающих при численном интегрировании уравнений.

В данном учебном пособии рассматриваются в основном методы краткосрочных гидродинамических (численных) прогнозов погоды.

Идея о возможности численного прогноза погоды на основе уравнений динамики сплошной среды была высказана В. Бьеркнесом в 1904 г., а первая попытка ее осуществления была предпринята Л. Ричардсоном в 1913 г. Однако рассчитанный прогноз оказался абсурдным, так как конечно-разностная схема интегрирования уравнений не предусматривала селективного подавления мелкомасштабных возмущений; информации о начальном состоянии атмосферы было недостаточно; отсутствовали сведения о том, какие основные закономерности процессов должны быть учтены при прогнозе.

В 1948—1949 гг. А. М. Обухов и Дж. Чарни получили уравнения квазигеострофического приближения и предложили методы интегрирования нелинейного уравнения баротропной модели атмосферы. В 1950—1953 гг. были разработаны методы решения трехмерной нелинейной задачи и выполнены первые прогнозы на ЭВМ.

Современные ЭВМ позволяют получать прогнозы различной заблаговременности на основе решений полной системы уравнений гидротермодинамики атмосферы. Однако трудности, связанные с быстрой передачей результатов наблюдений в прогностические центры, с ее обработкой и анализом, полностью еще не преодолены. Не решены также проблемы учета эффектов пограничного слоя атмосферы (ПСА), лучистых, фазовых и турбулентных притоков тепла, задача прогноза ряда метеовеличин и явлений локальной погоды.

1.2. Многомасштабность атмосферных движений и их классификация

Атмосферные движения представляют собой суперпозицию системы вынужденных и собственных колебаний атмосферы, имеющих различные амплитуды, длину и скорость. Вынужденные колебания возникают под действием внешних факторов: притяжения Луны, рельефа подстилающей поверхности, притока солнечной радиации и других. Примером собственных (свободных) колебаний атмосферы являются инерционные (длинные), гравитационные и акустические (звуковые) волны.

Все собственные колебания, вытекающие из решения системы уравнений гидротермодинамики, подразделяют на продольные, вертикально-поперечные и горизонтально-поперечные.

Продольные (акустические) волны обусловлены сжатием или разрежением воздуха, поэтому траектория частиц лежит на линиях, параллельных направлению распространения волны.

Вертикально-поперечные (гравитационные) волны связаны с влиянием гравитационного поля Земли и возникают при изменении с высотой плотности воздуха, когда частица, вышедшая из состояния равновесия, испытывает действие силы Архимеда. Колебания и смещения частиц происходят в вертикальной плоскости перпендикулярно направлению перемещения волны. Следо-

вательно, $\omega = 0$ свидетельствует об отсутствии гравитационных волн.

Горизонтально-поперечные (инерционные) волны возникают под действием инерционных сил, обусловленных движением воздуха на вращающейся Земле. При их распространении частицы двигаются в горизонтальной плоскости перпендикулярно направлению перемещения волн. В атмосфере наблюдаются также смешанные инерционно-гравитационные волны.

Возникшие волновые колебания могут существовать в атмосфере длительное время, претерпевая изменения и переходя из одной формы в другую. В этом смысле атмосфера представляет собой автоколебательную систему.

Инерционные волны имеют длину от сотен до нескольких тысяч километров, период — до нескольких суток; перемещаются преимущественно с запада на восток со скоростью, не превышающей 50 м/с. Некоторые типы очень длинных волн (например, суточная волна в полях температуры, давления и ветра) распространяются со скоростями несколько сотен метров в секунду. К инерционным волнам относятся также циклонические волны на атмосферных фронтах с длинами порядка сотен и тысяч километров и связанные с ними волны тропопаузы. Инерционные волны имеют важное значение для метеорологии, так как с ними связаны наиболее крупномасштабные преобразования полей давления и движения воздуха. Действительно, амплитуда их в поле давления может достигать 100 гПа.

Гравитационные волны чаще всего возникают на поверхностях раздела под действием силы тяжести при нарушении равновесия. Скорость их распространения изменяется от десятков до сотен метров в секунду, достигая в отдельных случаях 300 и даже 500 м/с, периоды колебаний составляют около 330 с, а амплитуда в поле давления может достигать 5—10 гПа. С гравитационными волнами связаны образование волнистых облаков, колебания поверхности раздела и другие процессы. Взаимодействуя с инерционными волнами, они могут предопределить эволюцию барических образований, находящихся в начальных стадиях развития.

Акустические волны могут привести к изменению давления на несколько десятых долей гПа (за исключением случаев взрывных волн). Длина таких волн имеет порядок сантиметров и метров, период колебаний не превышает 300 с, а скорость распространения колеблется около 300 м/с.

Возмущения, непосредственно не связанные с погодообразующими процессами (звуковые волны и некоторые типы гравитационных волн), называют *«метеорологическим шумом»*.

Для краткосрочных прогнозов погоды наиболее важны крупномасштабные движения, связанные с перемещением циклонов, антициклонов, ложбин, гребней и соответствующих воздушных течений. Движения меньшего масштаба (бризы, фены, образование облач-

ных гряд или скоплений и т. д.) называют *мезомасштабными*. Движения, характерный масштаб которых соизмерим с размерами больших частей земной поверхности, называют *планетарными*.

Глава 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГНОЗА ПОГОДЫ

2.1. Уравнения гидротермодинамики атмосферы — теоретическая основа гидродинамических методов прогнозов погоды

Фундаментальные физические законы, управляющие движением сплошной среды, в виде которой стилизуется атмосфера, математически выражают системой уравнений термодинамики атмосферы.

Закон сохранения количества движения выражается для единицы массы векторным уравнением движения

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla\vec{p} - 2\vec{\omega}\times\vec{V} + \vec{g} + \vec{F},$$

где $\vec{V}$ — вектор скорости движения воздушной частицы относительно вращающейся Земли; t — время; $\frac{d\vec{V}}{dt}$ — вектор ускорения; $\nabla\vec{p} = \operatorname{grad}\vec{p}$ — вектор поверхностных сил давления; ρ — плотность воздуха; $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения Земли; $2\vec{\omega}\times\vec{V}$ — отклоняющая сила вращения Земли; $\vec{g}$ — сила тяжести.

Для гидродинамического прогноза векторное уравнение движения разлагают на три скалярных уравнения, соответствующих составляющим по трем координатным направлениям, например, по осям x, y, z локальной декартовой системы координат:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + lv + \frac{\partial}{\partial z}k\frac{\partial u}{\partial z}, \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - lu + \frac{\partial}{\partial z}k\frac{\partial v}{\partial z}, \quad (2.1.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} =$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g - 2\omega_0\cos\varphi u + \frac{\partial}{\partial z}k\frac{\partial w}{\partial z}, \quad (2.1.3)$$

где u, v, w — составляющие вектора скорости; ω_0 — угловая скорость вращения Земли; $l = 2\omega_0\sin\varphi$ — параметр Кориолиса; φ — широта места; k — коэффициент турбулентности.

Закон сохранения массы применительно к движущейся воздушной частице выражается уравнением неразрывности:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \qquad (2.1.4)$$

Атмосфера является сжимаемой смесью газов, однако уравнение (2.1.4) используют и в виде

$$\operatorname{div}\vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \qquad (2.1.5)$$

поскольку при скоростях атмосферных движений, значительно меньших скорости звука, эффектом сжимаемости можно пренебречь.

Закон сохранения энергии выражается уравнением притока тепла

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\frac{T}{p}\frac{dp}{dt} = \frac{\varepsilon}{c_p}. \qquad (2.1.6)$$

Здесь T — температура воздуха; ε — приток тепла к единице массы движущегося воздуха за единицу времени; $\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$, где $c_p (c_v)$ — удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении (объеме). Для адиабатических процессов (2.1.6) записывают в виде

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\frac{T}{p}\frac{dp}{dt} = 0. \qquad (2.1.7)$$

Уравнение состояния

$$p = \rho RT, \qquad (2.1.8)$$

где R — удельная газовая постоянная сухого воздуха, выражающее тот факт, что практически на всех высотах воздух можно рассматривать как идеальную среду.

Система уравнений (2.1.1)—(2.1.3), (2.1.4), (2.1.7), (2.1.8) содержит шесть функций: u, v, w, p, ρ, T (k обычно принимают заданным) и представляет собой замкнутую систему для прогноза в адиабатическом приближении, в которой прогностическое значение имеют уравнения, содержащие производную $\frac{\partial}{\partial t}$, а остальные уравнения — диагностические. Если уравнение притока тепла использовать в виде (2.1.6), то необходимо для замыкания системы привлечь уравнения переноса влаги, лучистого, турбулентного и конвективного притоков тепла.

2.2. Уравнения динамики для крупномасштабных атмосферных движений

Уравнения динамики атмосферы в общей форме справедливы для движений любых масштабов и периодов. Однако основные свойства движений различных масштабов существенно различны, так как их изменения во времени и пространстве определяют различные факторы. Поэтому при прогнозе каждого класса движений целесообразно выделить наиболее важные факторы и ввести упрощения в уравнения, чтобы учет второстепенных факторов не завуалировал основные особенности перестройки термобарического поля.

Соотношения членов уравнений применительно к движениям определенного масштаба можно выяснить путем анализа уравнений с помощью метода теории подобия. Основа метода — введение характерных масштабов изменений функций и независимых переменных, производимое на основании требования, чтобы порядок величины производной любой функции f по любому аргументу ψ был равен отношению характерных масштабов L_f и L_ψ:

$$\mathrm{O}\left(\frac{\partial f}{\partial \psi}\right) = \frac{L_f}{L_\psi}. \tag{2.2.1}$$

Соотношения порядков членов уравнений выражают безразмерными критериями подобия, представляющими комбинации масштабов. На основании гипотез, относящихся к выбору масштабов, оценивают значения критериев и получают заключения о соотношениях членов уравнений применительно к рассматриваемым движениям. Так, для движений синоптического масштаба

$$\mathrm{O}(u) = \mathrm{O}(v) = L_V; \quad \mathrm{O}(w) = L_w; \tag{2.2.2}$$

$$\mathrm{O}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \mathrm{O}\left(u\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathrm{O}\left(v\frac{\partial f}{\partial y}\right) = L_V\frac{L_f}{L_s}; \tag{2.2.3}$$

$$\mathrm{Sh} = L_s/L_V L_t = 1; \tag{2.2.4}$$

$$\mathrm{Ki} = 1/lL_t; \tag{2.2.5}$$

$$\mathrm{B} = \beta L_s/l, \tag{2.2.6}$$

где $\mathrm{O}(f)$ или $\mathrm{O}\left(\frac{\partial f}{\partial \psi}\right)$ означает порядок функции или дифференциального оператора; $L_V = 10$ м/с — характерный масштаб горизонтальной скорости; L_w — характерный масштаб вертикальной скорости; L_t — характерный масштаб времени, равный 1 сут.; $L_x = L_y = L_s \approx 1000$ км — характерный горизонтальный масштаб; $\beta = \frac{\partial l}{\partial y} = \frac{2\omega_0}{a_0}\cos\varphi$ — параметр Россби; Sh — число Струхаля; пара-

метр Кибеля Ki и критерий B отделяют движения синоптического масштаба соответственно снизу — от мезомасштабных и сверху — от планетарных движений. Для умеренных широт $\mathrm{Ki} \approx 0{,}1$ и $\mathrm{B} \approx 0{,}1$. Например, в уравнении (2.1.1), в котором пренебрежем членом $\frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial u}{\partial z}$, имеем

$$\mathrm{O}\left(\frac{du}{dt}\right) \Big/ \mathrm{O}(lv) = \frac{L_v}{L_t} \Big/ lL_v = \frac{1}{lL_t} = \mathrm{Ki}. \qquad (2.2.7)$$

Отсюда следует, что $\mathrm{O}\left(\frac{du}{dt}\right)$ примерно в 10 раз меньше $\mathrm{O}(lv)$. Если в (2.1.1) пренебречь членом $\frac{du}{dt}$, то в уравнении останутся слагаемые lv и $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$, порядки которых равны. Если записать уравнения движения, в которых фигурируют только главные члены, то первые два уравнения превращаются в диагностические уравнения равновесия, а третье — в уравнение статики:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + lv, \qquad (2.2.8)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - lu, \qquad (2.2.9)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g. \qquad (2.2.10)$$

Если в прогностической модели компоненты вектора ветра выражают через геострофические соотношения (2.2.8)—(2.2.9), а агеострофические отклонения не учитывают, то модель называют квазигеострофической. Такие модели косвенно учитывают главную часть ускорений воздушных частиц. Это достигается сохранением производных $\frac{\partial}{\partial t}$ в уравнениях горизонтального движения, а геострофические соотношения используют только при переходе от поля ветра к полю давления.

Использование уравнения статики, которое выполняется в атмосфере с большой точностью, позволяет отфильтровать из решений системы (2.1.1)—(2.1.3), (2.1.4), (2.1.7), (2.1.8) акустические волны. Однако квазистатическое приближение исключает и мезомасштабные движения, возникающие под действием архимедовой силы. Тем не менее для процессов с $L_s \approx 1000$ км квазистатическое приближение необходимо. Действительно, если в каком-либо районе возникло несоответствие уравнению статики, то происходит быстрая перестройка поля p так, что примерно через минуту оно вновь начинает удовлетворять этому уравнению.

Применение гипотезы квазигеострофичности позволяет исключить решение для гравитационных волн. Однако, фильтруя внут-

ренние гравитационные волны, являющиеся вместе со звуковыми волнами механизмом, с помощью которого происходит установление (нарушение) геострофического равновесия, мы иногда исключаем возможность предвычислить развитие синоптически значимых возмущений.

2.3. Уравнения гидротермодинамики атмосферы в различных системах координат

Для численного интегрирования уравнений гидротермодинамики атмосферы в зависимости от масштаба изучаемых движений и в целях наглядной интерпретации решения удобно введение различных систем координат. Существенную роль при выборе системы координат играют: возможность получения уравнений в наиболее простом виде; постановка краевых условий по вертикали; удобство численной реализации модели.

Рассмотрим уравнения гидротермодинамики идеальной атмосферы в различных системах координат.

2.3.1. Локальная декартова система координат. В локальной декартовой системе координат ось z направлена в зенит, а оси x и y выбраны произвольно в плоскости, перпендикулярной местной вертикали. Направим ось x по касательной к широтному кругу на восток, а ось y — по касательной к меридиану на север. Такую систему называют стандартной декартовой системой координат (ДСК). Очевидно, ДСК является ортогональной криволинейной системой, поэтому вид проекций векторного уравнения движения в ней отличается от вида уравнений в локальной прямоугольной системе координат. Однако, если размеры области прогноза невелики, а ее боковые границы не слишком близки к полюсам, можно пренебречь малыми поправочными членами и записать уравнения движения в форме (2.1.1)—(2.1.3).

2.3.2. Полные уравнения динамики атмосферы с обобщенной вертикальной координатой. Квазистатическая система полных уравнений в ДСК имеет следующие недостатки, с точки зрения размещения расчетной сетки: область интегрирования не ограничена по отношению к оси z, так как верхней границы для конечного z не существует и поэтому при интегрировании уравнений граничные условия должны ставиться на бесконечности; реальная подстилающая поверхность не совпадает с уровнем координаты $z=\text{const}$, что требует неравномерного размещения точек вблизи нижней кинематической границы. Чтобы устранить указанные недостатки, введем вместо z обобщенную вертикальную координату η, обладающую следующими свойствами: η монотонно возрастает или убывает в зависимости от z; η является одной из зависимых переменных или функций. Осуществляют такой переход от ДСК x, y, z, t к системе x_1, y_1, η, t_1 (индекс 1 — указатель ηСК), при котором независимая и зависимая переменные меняются местами. Заметим, что переход от z к η оправдан лишь для квази-

статического случая. Выведем формулы, с помощью которых проводят преобразования одной системы координат в другую.

Пусть f — зависимая переменная. Учитывая, что в ДСК $\eta=\eta(x, y, z, t)$, а в новой системе отсчета $z=z_1(x_1, y_1, \eta, t_1)$, рассмотрим тождество

$$f(x, y, z, t)\equiv f_1[x_1(x),\ y_1(y),\ \eta(x, y, z, t),\ t_1(t)]. \quad (2.3.1)$$

Полагая, что моменты времени t и t_1 совпадают, продифференцируем (2.3.1) по переменным ДСК. В общем случае направление ортов осей x и x_1, y и y_1 не совпадают, поэтому $\frac{dx_1}{dx}\neq 1$, $\frac{dy_1}{dy}\neq 1$. Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f_1}{\partial t_1}+\frac{\partial f_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t},\quad \frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f_1}{\partial s_1}\frac{ds_1}{ds}+\frac{\partial f_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial s}, \quad (2.3.2)$$

$$s=x \text{ либо } y.$$

Продифференцируем тождество (2.3.1) по переменной z:

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z}. \quad (2.3.3)$$

В новой системе координат z переходит в число искомых функций и находится из соотношения $\Phi=gz+\text{const}$. Применим (2.3.2) и (2.3.3) к геопотенциалу Φ, полагая, что ускорение силы тяжести g не зависит от x, y. Тогда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s}=0=\frac{\partial \Phi_1}{\partial s_1}\frac{ds_1}{ds}+\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial s},\quad \frac{\partial \Phi}{\partial t}=0=\frac{\partial \Phi_1}{\partial t_1}+\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z}=g=\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z};$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}=-\frac{\partial \Phi_1}{\partial t_1}\Big/\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}, \quad (2.3.4)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial s}=-\frac{\partial \Phi_1}{\partial s_1}\frac{ds_1}{ds}\Big/\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}, \quad (2.3.5)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z}=g\Big/\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}. \quad (2.3.6)$$

Подставим (2.3.5) в (2.3.2), а (2.3.6) в (2.3.3):

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f_1}{\partial s_1}\frac{ds_1}{ds}-\frac{\partial \Phi_1}{\partial s_1}\frac{ds_1}{ds}\frac{\partial f_1}{\partial \eta}\Big/\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}, \quad (2.3.7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=g\frac{\partial f_1}{\partial \eta}\Big/\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}. \quad (2.3.8)$$

Получим выражение для индивидуальной производной в ηСК:

$$\frac{df_1}{dt_1}=\frac{\partial f_1}{\partial t_1}+u_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx}+v_1\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dy}+$$
$$+\left(gw_1-\frac{\partial\Phi_1}{\partial t_1}-u_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}-v_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_1}\right)\frac{\partial f_1}{\partial\eta}\Big/\frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta}, \qquad (2.3.9)$$

где обобщенный аналог вертикальной скорости в ηСК

$$\dot\eta=\left(gw-\frac{\partial\Phi_1}{\partial t_1}-u_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}-v_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_1}\right)\frac{1}{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\eta}}. \qquad (2.3.10)$$

По аналогии с $w=dz/dt$ в ДСК имеем

$$\dot\eta=d\eta/dt_1. \qquad (2.3.11)$$

Преобразуем уравнения термодинамики атмосферы из ДСК в ηСК.

Уравнение состояние в ηСК не отличается от его выражения в ДСК:

$$p_1=\rho_1RT_1. \qquad (2.3.12)$$

Уравнение статики, согласно формулам (2.3.3) и (2.3.6), примет вид

$$\frac{\partial p_1}{\partial\eta}=-\rho_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta}. \qquad (2.3.13)$$

В уравнениях движения $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ и $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ преобразуем с помощью формул (2.3.7) и (2.3.9):

$$\frac{du_1}{dt_1}=-\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx}+lv_1, \qquad (2.3.14)$$

$$\frac{dv_1}{dt_1}=-\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dy}-\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dy}-lu. \qquad (2.3.15)$$

В уравнении неразрывности (2.1.4) преобразуем производную $\frac{\partial w}{\partial z}$:

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\frac{dz}{dt}=\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{d\Phi_1}{dt_1}\frac{1}{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\eta}}=$$
$$=\left[\frac{d}{dt_1}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta}+\frac{\partial\dot\eta}{\partial\eta}+\left(\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx}+\frac{\partial v_1}{\partial\eta}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dy}\right)\right]\frac{1}{\dfrac{\partial\Phi_1}{\partial\eta}}. \qquad (2.3.16)$$

Подставляя в (2.1.4) ρ из (2.3.1), а $\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial w}{\partial z}$ — на основании (2.3.9), (2.3.2) и (2.3.16), получим

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dy}+\frac{1}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}}\frac{d}{dt_1}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}=0. \qquad (2.3.17)$$

Более компактно уравнение (2.3.17) запишется, если прологарифмировать (2.3.13), взять затем индивидуальную производную и подставить результат в (2.3.17):

$$\frac{1}{\frac{\partial p_1}{\partial \eta}}\frac{d}{dt_1}\frac{\partial p_1}{\partial \eta}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dy}+\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta}=0. \qquad (2.3.18)$$

Уравнение притока тепла при $\varepsilon=0$ формально запишется в виде

$$\frac{dT_1}{dt_1}-\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{T_1}{p_1}\frac{dp_1}{dt_1}=0. \qquad (2.3.19)$$

Таким образом, получена квазистатическая, адиабатическая система полных уравнений термодинамики идеальной атмосферы в ηСК. Пока η не определена, система уравнений (2.3.12)—(2.3.15), (2.3.18), (2.3.19) незамкнута, так как содержит семь искомых функций. Задавая η, получают замкнутую систему уравнений в выбранной системе координат. Так, если $\eta=z$, система уравнений в ηСК примет вид исходной системы в ДСК.

2.3.3. Изобарическая система координат. Роль вертикальной координаты в изобарической системе координат (ИСК) играет давление p, либо давление, отнесенное к стандартному давлению $P_0=1000$ гПа:

$$\zeta=p/P_0. \qquad (2.3.20)$$

Ось ζ является нормалью к изобарической поверхности и направлена в сторону возрастания давления. Оси x_1, y_1 располагаются в плоскости поверхности $p=\text{const}$ и направлены по касательной к ней соответственно на восток и на север. Таким образом, x_1, y_1 — эйлеровы координаты, а ζ — лагранжева координата. ИСК не ортогональна, но близка к ортогональной, так как угол между направлениями вертикального градиента давления и местной вертикали мал и составляет обычно $5(10^{-5}—10^{-4})$ рад.

Получим уравнения термодинамики атмосферы в ИСК. Примем, что $\eta=\zeta$, и воспользуемся уравнениями в ηСК. Учтем, что с большой точностью $x_1=x$, $y_1=y$, $\frac{dx_\zeta}{dx}=\frac{dx_1}{dx}=1$, $\frac{dy_\zeta}{dy}=\frac{dy_1}{dy}=1$. Опуская индекс 1, запишем уравнения в ИСК.

Уравнение состояния (2.3.12) принимает вид

$$P_0\zeta = \rho RT. \tag{2.3.21}$$

Уравнение статики (2.3.13) после замены ρ из (2.3.21) запишется так:

$$T = -\frac{\zeta}{R}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}. \tag{2.3.22}$$

В уравнениях движения (2.3.14), (2.3.15) при ρ=const члены $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$ равны нулю. Следовательно,

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} + lv, \tag{2.3.23}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} - lu, \tag{2.3.24}$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \dot{\omega}\frac{\partial}{\partial\zeta}, \tag{2.3.25}$$

$$\dot{\omega} = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{P_0}\frac{dp}{dt}. \tag{2.3.26}$$

С учетом (2.3.10) изобарическая вертикальная скорость

$$\dot{\omega} = \left(g w - \frac{\partial\Phi}{\partial t} - u\frac{\partial\Phi}{\partial x} - v\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\frac{1}{\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}}. \tag{2.3.27}$$

Размерность $\dot{\omega}$ — $с^{-1}$. Часто при вычислении $\dot{\omega}$ переходят от ζ к p и выражают $\dot{\omega}P_0$ в гПа/12 ч. В формуле (2.3.27) gw значительно больше других членов, поэтому

$$\dot{\omega} = gw \Big/ \frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}. \tag{2.3.28}$$

Поскольку $\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} < 0$, то знаки $\dot{\omega}$ и w противоположны.

Так как $\frac{\partial p}{\partial\eta} = P_0\frac{\partial p}{\partial\zeta}$ = const, уравнение неразрывности для сжимаемой атмосферы запишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\dot{\omega}}{\partial\zeta} = 0. \tag{2.3.29}$$

В уравнении (2.3.19) раскроем $\frac{dT}{dt}$. Используя (2.3.26) и учитывая, что $\gamma_a=\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{g}{R}$, $\gamma=-\frac{\partial T}{\partial z}$, получим уравнение притока тепла в ИСК:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}-\frac{RT}{g\zeta}\dot{\omega}(\gamma_a-\gamma)=0. \qquad (2.3.30)$$

Связь между производными по p и по ζ следующая:

$$\frac{\partial}{\partial p}=\frac{1}{P_0}\frac{\partial}{\partial\zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial\zeta}=P_0\frac{\partial}{\partial p}. \qquad (2.3.31)$$

С помощью (2.3.31) переходят к уравнениям в P-системе координат.

Опираясь на формулу (2.3.27), рассмотрим постановку граничных условий по вертикали. На верхней границе атмосферы $p\to 0$, поэтому

$$\dot{\omega}|_{\zeta=0}=0. \qquad (2.3.32)$$

Это условие означает, что атмосфера сохраняет свою массу и допускает возможность поднятия и опускания ее верхней границы. При определении $\dot{\omega}|_{\zeta=1}$ положим, что подстилающая поверхность твердая, плоская и непористая (отсутствуют потоки массы в деятельный слой почвы и из него). В этом случае $w|_{z=0}=0$. Пренебрежем отличием наземного давления от P_0, т. е. будем полагать, что уровни $z=0$ и $\zeta=1$ совпадают. Если в ПСА положить ветер геострофическим, из (3.3.27) следует, что $\dot{\omega}|_{\zeta=1}=-\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big/\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}$. Подставляя сюда $\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}$ из (2.3.22), получим:

$$\dot{\omega}|_{\zeta=1}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big/RT, \qquad (2.3.33)$$

где $\sqrt{RT}=c_0$ — скорость распространения звука при изотермических условиях. Поскольку характерное значение $\dot{\omega}$ в ПСА составляет 10^{-2}—10^{-1} сут$^{-1}$ и на 1—2 порядка меньше, чем в средней тропосфере, можно считать

$$\dot{\omega}|_{\zeta=1}=0. \qquad (2.3.34)$$

Так как величина $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ ограничена, то (2.3.34) означает, что атмосфера стилизуется в виде несжимаемой среды, в которой невозможны упругие колебания ($c_0\to\infty$).

Рассмотрим преимущества ИСК по сравнению с ДСК: уравнения движения и неразрывности не содержат ρ, сильно меняющейся с высотой, поэтому коэффициент пропорциональности между гра-

диентом абсолютного геопотенциала и геострофическим ветром не зависит от высоты; большинство уравнений в ИСК имеют более простой вид, чем в ДСК. Так, уравнение неразрывности (2.3.29) для общего случая движения аналогично по форме уравнению (2.1.5) в ДСК для частного случая несжимаемого движения, а уравнение притока тепла имеет одну производную по времени; с целью упрощения решения системы уравнений легче выполнить исключение некоторых функций. Например, исключив уравнение состояния, получим замкнутую систему пяти уравнений с пятью функциями: u, v, $\dot{\omega}$, Φ, T, из которой нетрудно исключить T путем подстановки (2.3.22) в (2.3.30). Можно исключить и $\dot{\omega}$; безразмерная координата $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$ удобна при постановке краевых условий по вертикали и численном интегрировании уравнений, так как представляет собой конечный отрезок. Необходимость перехода к таким координатам следует также из того, что в синоптической практике высотные карты погоды составляют в виде карт барической топографии.

2.3.4. σ-система координат. ДСК и ИСК обладают принципиальным недостатком: поверхность Земли не совпадает ни с уровнем $z=\text{const}$, ни с поверхностью $\zeta=1$, что вызывает затруднения при описании атмосферных движений у подстилающей поверхности. Определенным преимуществом в этом отношении обладает σ-система координат (σСК). Роль вертикальной координаты играет здесь отношение давления p в рассматриваемой точке к давлению

$$p_* = p_*(x, y, t) \tag{2.3.35}$$

на уровне подстилающей поверхности:

$$\sigma = p/p_*. \tag{2.3.36}$$

Диапазон изменений σ заключен между нулем на верхней границе атмосферы ($p \to 0$) и единицей на нижней границе атмосферы ($p=p_*$). Земная поверхность в σСК совпадает с поверхностью $\sigma=1$.

Опираясь на уравнения в ηСК, отождествляя σ с η и полагая, что $x_\sigma = x_\zeta = x_1 = x$, $y_\sigma = y_\zeta = y_1 = y$, выведем уравнения в σСК.

Учитывая (2.3.36), запишем уравнение состояния

$$\sigma p_* = \rho R T. \tag{2.3.37}$$

Уравнение статики принимает следующий вид:

$$T = -\frac{\sigma}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}. \tag{2.3.38}$$

Исходя из уравнений (2.3.14), (2.3.15) и учитывая (2.3.36) и $\rho = \sigma P_0/RT$, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \dot{\sigma}\frac{\partial u}{\partial \sigma} = -\frac{RT}{p_*}\frac{\partial p_*}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv, \tag{2.3.39}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\dot{\sigma}\frac{\partial v}{\partial \sigma}=-\frac{RT}{p_*}\frac{\partial p_*}{\partial y}-\frac{\partial \Phi}{\partial y}-lu. \quad (2.3.40)$$

Здесь аналог вертикальной скорости в σСК

$$\dot{\sigma}=\frac{d\sigma}{dt} \quad (2.3.41)$$

связан с изобарической скоростью $\dot{\omega}$ следующим образом:

$$\dot{\omega}=\frac{d\zeta}{dt}=\frac{1}{P_0}\frac{d}{dt}(\sigma p_*)=\dot{\sigma}\frac{p_*}{P_0}+\frac{\sigma}{P_0}\frac{dp_*}{dt}. \quad (2.3.42)$$

Отсюда вытекают граничные условия для $\dot{\sigma}$: на верхней границе атмосферы

$$\dot{\sigma}|_{\sigma=0}=0; \quad (2.3.43)$$

если отсутствует поток массы воздуха через подстилающую поверхность, то при любой функции рельефа $h=h(x, y)$

$$\dot{\sigma}|_{\sigma=1}=0. \quad (2.3.44)$$

Уравнение притока тепла

$$\frac{dT}{dt}-\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{T}{p_*}\frac{dp_*}{dt}-\frac{\varkappa-1}{\varkappa}\frac{T}{\sigma}\dot{\sigma}=0 \quad (2.3.45)$$

с учетом соотношения

$$T=\theta\left(\frac{p_*\sigma}{1000}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \quad (2.3.46)$$

(θ — потенциальная температура) можно записать в форме

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}+u\frac{\partial \theta}{\partial x}+v\frac{\partial \theta}{\partial y}+\dot{\sigma}\frac{\partial \theta}{\partial \sigma}=0. \quad (2.3.47)$$

Преобразуем уравнение неразрывности. Перепишем (2.3.18) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{\partial p_1}{\partial \eta}+\frac{\partial}{\partial x}u_1\frac{\partial p_1}{\partial \eta}+\frac{\partial}{\partial y}v_1\frac{\partial p_1}{\partial \eta}+\frac{\partial}{\partial \eta}\dot{\eta}\frac{\partial p_1}{\partial \eta}=0. \quad (2.3.48)$$

Так как $\dot{\eta}=\dot{\sigma}$ и по определению p_* не зависит от σ, то

$$\frac{\partial p_1}{\partial \eta}=\frac{\partial p_1}{\partial \sigma}=\frac{\partial \sigma p_*}{\partial \sigma}=p_*\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma}+\sigma\frac{\partial p_*}{\partial \sigma}=p_*.$$

Используя это соотношение и опуская в (2.3.48) индекс 1, получим уравнение неразрывности

$$\frac{\partial p_*}{\partial t}+\frac{\partial up_*}{\partial x}+\frac{\partial vp_*}{\partial y}+\frac{\partial \dot{\sigma}p_*}{\partial \sigma}=0. \quad (2.3.49)$$

Ленинградский Гидрометеорологический ин-т

Интегрируя (2.3.49) по всей толще атмосферы и учитывая (2.3.43) и (2.3.44), построим уравнение тенденции приземного давления

$$\frac{\partial p_*}{\partial t} = -\int_0^1 \left(\frac{\partial u p_*}{\partial x} + \frac{\partial v p_*}{\partial y} \right) d\sigma'. \qquad (2.3.50)$$

Система уравнений (2.3.38)—(2.3.40), (2.3.46), (2.3.47), (2.3.50) содержит семь функций (u, v, $\dot{\sigma}$, Φ, T, θ, p_*) и незамкнута. Расчет $\dot{\sigma}$ выполняют по формуле

$$\dot{\sigma} = \frac{\sigma}{p_*} \int_0^1 \left(\frac{\partial u p_*}{\partial x} + \frac{\partial v p_*}{\partial y} \right) d\sigma' - \frac{1}{p_*} \int_0^\sigma \left(\frac{\partial u p_*}{\partial x} + \frac{\partial v p_*}{\partial y} \right) d\sigma', \qquad (2.3.51)$$

которая получается, если в результат интегрирования уравнения (2.3.49) по σ от 0 до некоторого σ подставить значение $\frac{\partial p_*}{\partial t}$ из (2.3.50).

Начальные данные для θ вычисляют по формуле (2.3.46) по данным наблюдений за температурой T.

Отметим, что σСК и ее модификации целесообразно применять в условиях сложной орографии, где p_* существенно отличается от стандартного давления и поэтому подстилающая поверхность не совпадает с координатной поверхностью $\zeta = 1$.

2.3.5. Сферическая система координат. Уравнения гидротермодинамики атмосферы в сферической системе координат r, ϑ, λ — ССК (r — расстояние от центра Земли до рассматриваемой частицы воздуха, λ — долгота места, $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ — полярный угол или дополнение широты φ) используют в полусферных и глобальных моделях и при решении задач общей циркуляции атмосферы и теории климата. При этом возникает ряд дополнительных трудностей математического характера, связанных с тем, что регулярная широтно-долготная сеточная область обладает слишком зависимым от широты шагом, различным в направлении круга широт и меридиана, с представлением производных в конечно-разностной форме в окрестности полюса, и других.

2.4. Учет масштабных множителей картографических проекций в уравнениях гидротермодинамики атмосферы

2.4.1. Картографические проекции. Для анализа полей метеовеличин используют географические карты. При построении картографических проекций поверхность геоида конформно *) переносят на плоскость с определенными искажениями. Если атмосферные процессы изучают над территориями, протяженностью более

*) Свойства конформной (равноугольной) проекции: угол между малыми отрезками прямых, пересекающихся на земной поверхности, равен углу между изображениями этих отрезков на карте; масштаб карты в каждом пункте не зависит от направления.

3000 км по меридиану, либо вблизи полюсов, искажения необходимо учитывать, так как имеет место несовпадение положения точек в квазидекартовых системах координат на карте с их местоположением в натуре. Поскольку декартовы координаты в натуре криволинейны и имеют метрику, зависящую от широты места, уравнения динамики атмосферы в таких координатах отличаются от уравнений в обычных декартовых координатах. Идентификацию уравнений осуществляют путем преобразования уравнений в ССК к уравнениям в прямоугольных и прямолинейных координатах с учетом масштабных множителей карт. Это позволяет использовать регулярные сеточные области на картах. Учет масштабного множителя карты $^*(m)$ приводит к тому, что одинаковые расстояния на разных широтах на карте соответствуют различным расстояниям на местности.

Получим формулы для расчета множителей m. Введем прямоугольные декартовы координаты в плоскости некоторой картографической проекции $(x_к, y_к)$. Тогда между элементарными приращениями координат $\delta x_к$, $\delta y_к$ и соответствующими приращениями в натуре s_1, s_2 можно записать соотношения $\delta s_1 = H_1 \delta x_к$, $\delta s_2 = H_2 \delta y_к$, где H_1 и H_2 — параметры Ламэ (отношение размеров в натуре и на карте). Для карт конформных проекций $H_1 = H_2 = H$, а

$$\delta s_1 = \delta x_к / M, \quad \delta s_2 = \delta y_к / M, \tag{2.4.1}$$

где $M = 1/H$ — масштаб карты в данной точке, не зависящей от направления. Введем главный масштаб карты M_0 на некоторой главной широте и масштабный множитель

$$m = M/M_0. \tag{2.4.2}$$

Получим соотношения между элементарными приращениями в натуре и на карте:

$$\delta s_1 = \delta x_1 / m, \quad \delta s_2 = \delta y_1 / m \quad (\delta x_1 = \delta x_к / M_0, \ \delta y_1 = \delta y_к / M_0). \tag{2.4.3}$$

На основании формул (2.4.3) производят преобразование векторных операторов и уравнений динамики атмосферы к прямоугольной ДСК на карте.

Картографические проекции различаются способами отображения земной поверхности на плоскости. Рассмотрим равноугольную коническую проекцию и два предельных случая ее — стереографическую и цилиндрическую (меркаторскую) проекции. Конические проекции получают в результате проектирования меридианов и параллелей геоида на поверхность касательного (секущего) конуса и развертывания его в плоскость, на которой параллели изображены в виде незамкнутых концентрических окружностей, а меридианы — в виде полупрямых, исходящих из полюса. Углы между такими меридианами пропорциональны разностям долгот в натуре

$$\lambda_к = \alpha \lambda, \tag{2.4.4}$$

где α — показатель проекции, характеризующий ее в зависимости от угла разворота при вершине. Если на карте ввести полярные

координаты ϑ, ψ, то радиусы окружностей

$$r_к = r_к(\vartheta). \tag{2.4.5}$$

Масштаб по долготе есть отношение дуговых отрезков параллели на карте и в натуре

$$M_\lambda = \delta x_к/\delta s_1 \tag{2,4.6}$$

или после подстановки (2.4.4), (2.4.5) в (2.4.6)

$$M_\lambda = \frac{r_к\,\delta\lambda_c}{a_0 \sin\vartheta\,\delta\lambda} = \frac{r_к \alpha\,\delta\lambda}{a_0 \sin\vartheta\,\delta\lambda} = \frac{\alpha r_к}{a_0 \sin\vartheta}. \tag{2.4.7}$$

Масштаб по широте — это отношение дуговых отрезков меридиана на карте и в натуре

$$M_\vartheta = \frac{\delta y_к}{\delta s_2} = \frac{\delta r_к}{a_0 \sin\delta\vartheta} = \frac{\delta r_к}{a_0\,\delta\vartheta}. \tag{2.4.8}$$

Поскольку для конформной проекции $M_\lambda = M_0$, то $\alpha r_к/\sin\vartheta = \delta r_к/\delta\vartheta$ или

$$dr_к/r_к = \alpha\, d\vartheta/\sin\vartheta. \tag{2.4.9}$$

Решение уравнения (2.4.9) имеет вид

$$\ln r_к = \alpha \ln\frac{\vartheta}{2} + \ln C. \tag{2.4.10}$$

Отсюда, потенцируя, получим

$$r_к = C\left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right)^\alpha. \tag{2.4.11}$$

Выясним смысл постоянной интегрирования C. Пусть $\vartheta = \pi/2$, тогда из (2.4.11) следует: $r_к = C = r_э$, где $r_э$ — радиус экватора. Учитывая это в (2.4.6), найдем

$$M_\lambda = M_\vartheta = M = \frac{\alpha r_э}{a_0 \sin\vartheta}\left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right)^\alpha. \tag{2.4.12}$$

Переходя к множителю m и учитывая, что главный масштаб

$$M_0 = \frac{\alpha r_э}{a_0 \sin\vartheta_0}\left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta_0}{2}\right)^\alpha, \tag{2.4.13}$$

получим

$$m = \frac{\sin\vartheta_0}{\sin\vartheta}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\vartheta_0}{2}}\right)^\alpha. \tag{2.4.14}$$

Главной широтой ϑ_0 для конической проекции выберем такую, где $M=M_{\min}$. Для этого преобразуем (2.4.12) к виду

$$M = \frac{\alpha r_э}{2a_0} \frac{\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^{\alpha-1}}{\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{\alpha+1}}. \qquad (2.4.15)$$

Применим к (2.4.15) условие минимума: $dM_{\min}/d\vartheta=0$. Отсюда

$$\alpha = \cos\vartheta_m. \qquad (2.4.16)$$

Полагая $v_0=v_m$ и подставляя (2.4.16) в (2.4.14), получим

$$m = \frac{\sin\vartheta_m}{\sin\vartheta}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\vartheta_m}{2}}\right)^{\cos\vartheta_m}. \qquad (2.4.17)$$

Формула (2.4.17) определяет семейство конических проекций, различающихся выбором широты ϑ_m. Рассмотрим предельные частные случаи конических проекций.

1. Пусть главная широта $\vartheta=\pi/2$, тогда, согласно (2.4.16), $\alpha=0$, а проектирование геоида производится на боковую поверхность внутренне касательного к нему по экватору цилиндра и развертывания его в плоскость. Меридианы изображают параллельными прямыми линиями, отстоящими друг от друга на расстояниях, равных выпрямленным дугам экватора между проектируемыми меридианами. Параллели изображают прямыми, перпендикулярными меридианным прямым. Расстояние каждой параллели от экватора равняется выпрямленной дуге меридиана до параллели данной широты. По меридианам $m=1$, а по параллелям

$$m = 1/\sin\vartheta = 1/\cos\varphi, \qquad (2.4.18)$$

так как $\sin\vartheta_0=1$, $\alpha=0$. Поскольку величина m для карт цилиндрической проекции меняется от 1 на экваторе до бесконечности у полюсов, то они удобны только для изображения тропической зоны. Для таких карт, используемых в СССР, $m=1$ задают на $\varphi_0=22{,}5°$.

2. Пусть $\vartheta_m=0$, $\alpha=1$. Раскрыв неопределенность в (2.4.17), получим

$$m = \frac{2}{1+\cos\vartheta}. \qquad (2.4.19)$$

В этом случае строится стереографическая полярная проекция, соответствующая раствору конуса в плоскость, касательную к геоиду в области полюса. Масштабы на стереографической проекции изменяются от 1 в центре до 2 на краях. Все параллели изображаются концентрическими окружностями с общим центром в точке, являющейся проекцией полюса, а меридианы — радиусами этих

окружностей. Углы между меридианами в натуре и на проекции совпадают.

В СССР применяют полярную стереографическую проекцию, где за главную широту выбрана $\varphi=60°$. Получим формулу для расчета масштабного множителя такой проекции. Положим в (2.4.13) $\vartheta_0=30°$, $\alpha=1$ ($M_0 \neq M_{min}$, $\alpha \neq \cos\vartheta_m$), тогда

$$m = 1.866/(1+\sin\varphi). \qquad (2.4.20)$$

Стереографической проекцией пользуются при прогнозе на полушарии. Для ограниченных областей более удобна коническая проекция, так как можно пренебречь зависимостью $m(\varphi)$. Для глобальных прогнозов пользуются либо ССК, либо совокупностью проекций.

В других частных случаях конической проекции ($0<\vartheta_m<\pi/2$) главный масштаб выбирают на широтах 30°, 45°, 60°. Подставляя эти значения в (2.4.17), можно получить формулы для расчета зависимости $m(\varphi)$.

2.4.2. Уравнения гидротермодинамики атмосферы в прямоугольных координатах на карте равноугольной проекции. Для преобразования уравнений к прямоугольным декартовым координатам на карте выведем формулы для простейших операций векторного анализа, опираясь на (2.4.3). Определим значение производных на местности и на карте:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta f}{\delta x} = m\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\delta y \to 0} \frac{\delta f}{\delta y} = m\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \qquad (2.4.21)$$

где величина m фиксирована для ϑ; индекс 1 указывает, что значение f берется на местности в точке соприкосновения секущей (касательной) поверхности.

Вектор плоского градиента $\mathrm{grad} f$ имеет в ДСК проекции $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$. С помощью (2.4.21) выразим градиент в проекции карты:

$$\frac{\partial f}{\partial s_1} = m\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial s_2} = m\frac{\partial f_1}{\partial y_1}. \qquad (2.4.22)$$

Формулу для преобразования плоской дивергенции D в зависимости от изменения координат можно получить, рассматривая $\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{V}}$ в точке А, находящейся в области (G), как предел отношения потока P вектора $\vec{\mathbf{V}}$ через замкнутую поверхность (σ), ограничивающую область (G), к объему области при условии, что поверхность безгранично стягивается к данной точке:

$$\mathrm{div}\,\vec{\mathbf{V}} = \lim_{(G)\to A} \frac{\iint_\sigma P n^0\, d\sigma}{G}, \qquad (2.4.23)$$

где n° — орт нормали. Будем рассматривать D как предел отношения потока P вектора $\vec{\mathbf{V}}$ через элементарный контур L площади δs, ограниченной этим контуром, при $\delta s \to 0$:

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{V}} = \lim_{\delta s \to 0} \frac{P}{\delta S}. \tag{2.4.24}$$

Контур L образован элементарными отрезками δx_1 и δy_1, представляющими собой приращения координат x_1, y_1 (с учетом искажений). Поток вектора $\vec{\mathbf{V}}$ через любой отрезок контура равен произведению его нормальной составляющей (на внешнюю нормаль) на длину отрезка. Общий поток P через весь контур равен сумме частичных потоков

$$P = P_{L_1} + P_{L_2} + P_{L_3} + P_{L_4} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{u_1}{m} + \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{v_1}{m} \right) \delta x_1 \delta y_1, \tag{2.4.25}$$

где u_1, v_1 — компоненты вектора скорости на местности. Подставляя (2.4.34) в (2.4.33) и учитывая, что $\delta s = \delta x \delta y = \frac{\delta x_1}{m} \frac{\delta y_1}{m}$, получим:

$$\operatorname{div} \vec{\mathbf{V}} = m^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{u_1}{m} + \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{v_1}{m} \right). \tag{2.4.26}$$

Ротация поля скорости $\operatorname{rot} \vec{\mathbf{V}} = \vec{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$. Будем рассматривать Ω_z, интерпретируя его как предел отношения циркуляции Γ по замкнутому контуру L элементарной площадки к ее площади δs при $\delta s \to 0$:

$$\Omega_z = \lim_{\delta s \to 0} \frac{\Gamma}{\delta S}. \tag{2.4.27}$$

Поскольку $\Gamma = \oint_L V_L dL$ представляет собой характеристику среднего переноса жидкости вдоль замкнутого контура L (V_L — скорость жидкости, dL — векторный элемент контура), то, рассматривая циркуляцию жидкости против часовой стрелки ($\Gamma > 0$), получим

$$\Omega_z = m^2 \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{v_1}{m} - \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{u_1}{m} \right). \tag{2.4.28}$$

Аналогично

$$\nabla^2 f = \operatorname{div} (\operatorname{grad} f) = m^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} \right), \tag{2.4.29}$$

$$A_f = u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = \operatorname{div} (f \vec{\mathbf{V}}) - f \operatorname{div} \vec{\mathbf{V}} = m \left(u_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \right). \tag{2.4.30}$$

Преобразуем уравнения динамики атмосферы в ИСК в натуре к ИСК на карте.

Уравнения состояния и статики не выражают зависимостей от горизонтальных координат, поэтому они не изменяются при переходе к другим координатам. В уравнении неразрывности от системы координат зависит D. С учетом (2.4.26) перепишем его в виде

$$m^2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{u_1}{m}+\frac{\partial}{\partial y_1}\frac{v_1}{m}\right)+\frac{\partial\dot{\omega}_1}{\partial\zeta}=0. \qquad (2.4.31)$$

Уравнение притока тепла преобразуется к виду

$$\frac{\partial T_1}{\partial t}+m\left(u_1\frac{\partial T_1}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial T_1}{\partial y_1}\right)-\frac{RT_1}{g\zeta}(\gamma_a-\gamma)\,\dot{\omega}_1=0. \qquad (2.4.32)$$

В уравнениях движения $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ запишем на основании (2.4.21), а адвективные производные — в форме Лэмба — Громеко:

$$A_u=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)-v\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial E}{\partial x}-v\Omega_z, \qquad (2.4.33)$$

$$A_v=u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial E}{\partial y}+u\Omega_z \qquad (2.4.34)$$

(E — кинетическая энергия горизонтального движения), тогда

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+m\left(u_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial u_1}{\partial y_1}\right)+\dot{\omega}_1\frac{\partial u_1}{\partial\zeta}=$$
$$=-m\frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1}+lv_1-v_1\left(v_1\frac{\partial m}{\partial x_1}-u_1\frac{\partial m}{\partial y_1}\right), \qquad (2.4.35)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}+m\left(u_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right)+\dot{\omega}_1\frac{\partial v_1}{\partial\zeta}=$$
$$=-m\frac{\partial\Phi_1}{\partial y_1}-lu_1+u_1\left(v_1\frac{\partial m}{\partial x_1}-u_1\frac{\partial m}{\partial y_1}\right). \qquad (2.4.36)$$

Таким образом, переход к координатам x_1, y_1 на карте приводит к двум эффектам: при членах, содержащих производные по x, y, появляется множитель m; в уравнениях движения и неразрывности появляются слагаемые, содержащие производные от m. Полученные уравнения позволяют производить прогноз атмосферных процессов над большими областями и избежать трудностей, связанных с использованием ССК.

2.5. Уравнения вихря скорости и дивергенции

2.5.1. Уравнение вихря скорости. Основное требование, предъявляемое к прогностическим уравнениям, заключается в том, чтобы члены, содержащие производные $\frac{\partial}{\partial t}$, входили в число главных по величине членов. Однако в уравнениях движения производные $\frac{\partial}{\partial t}$ на порядок меньше главных членов и определяются как малые разности больших величин, что связано с потерей точности. Получим на основе уравнений движения в ИСК уравнение, удовлетворяющее указанному требованию. С этой целью применим к ним операцию вихря Ω_z, в результате будем иметь уравнение вихря скорости:

$$\frac{d\Omega_z}{dt} + D\Omega_z + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial \zeta} - \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \zeta} = -lD - u\frac{\partial l}{\partial x} - v\frac{\partial l}{\partial y}. \quad (2.5.1)$$

Вводя абсолютный вихрь скорости $\Omega = \Omega_z + l$, запишем (2.5.1) в виде

$$\frac{d\Omega}{dt} = -D\Omega + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial \zeta} - \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial \zeta}. \quad (2.5.2)$$

Первое приближение уравнения вихря скорости, содержащее члены одинакового порядка, таково:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u\frac{\partial \Omega}{\partial x} + v\frac{\partial \Omega}{\partial y} + u\frac{\partial l}{\partial x} + v\frac{\partial l}{\partial y} = -lD. \quad (2.5.3)$$

2.5.2. Уравнение дивергенции. При применении к уравнениям движения операции плоской дивергенции получается уравнение дивергенции

$$\frac{dD}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial \zeta} =$$
$$= -\nabla^2\Phi + l\Omega_z + v\frac{\partial l}{\partial x} - u\frac{\partial l}{\partial y}. \quad (2.5.4)$$

Главными по величине членами с порядком 10^{-9} в (2.5.4) являются $\nabla^2\Phi$ и $l\Omega_z$, поэтому первое линейное приближение его имеет вид

$$-\nabla^2\Phi + l\Omega_z = 0. \quad (2.5.5)$$

Если в (2.5.4) сохранить члены на порядок меньше главных, получим уравнение баланса

$$l\Omega_z - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - u\frac{\partial l}{\partial y} + v\frac{\partial l}{\partial x} = \nabla^2\Phi, \quad (2.5.6)$$

описывающее связь между полями геопотенциала и ветра. Нелинейные члены в (2.5.6) учитывают агеострофическую часть движения.

Глава 3. КВАЗИГЕОСТРОФИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

3.1. Система уравнений квазигеострофического приближения

Уравнения движения в первом приближении вырождаются в уравнения равновесия

$$0 = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv, \quad 0 = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - lu \tag{3.1.1}$$

и весьма грубо описывают связь между полями давления и ветра. Однако применение к исходным уравнениям движения операции вихря приводит к уравнению (2.5.3). Заменив в нем u и v из (3.1.1), а Ω_z через $\Omega_g = \frac{1}{l}\nabla^2\Phi$, получим квазигеострофическое уравнение вихря скорости

$$\nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{l}\nabla^2\Phi + l\right) - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{l}\nabla^2\Phi + l\right) = -l^2 D. \tag{3.1.2}$$

Правая часть (3.1.2) содержит D, представляющую собой малую разность больших величин, которую нельзя выразить через Φ с достаточной точностью. Выразим ее из уравнения неразрывности:

$$D = -\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \zeta}. \tag{3.1.3}$$

Тогда уравнение (3.1.2) примет вид

$$\nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - J\left(\frac{1}{l}\nabla^2\Phi + l,\ \Phi\right) = l^2 \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \zeta}, \tag{3.1.4}$$

где $J\left(\frac{1}{l}\nabla^2\Phi + l,\ \Phi\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{l}\nabla^2\Phi + l\right)\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{l}\nabla^2\Phi + l\right)\frac{\partial \Phi}{\partial x}$

— якобиан, и содержит функции Φ, $\dot{\omega}$. Для получения замкнутой системы привлечем уравнение притока тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{RT}{g\zeta}(\gamma_a - \gamma)\dot{\omega} = 0. \tag{3.1.5}$$

Система (3.1.4), (3.1.5) содержит три искомые функции, поэтому подключим еще уравнение статики

$$T = -\frac{\zeta}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}. \tag{3.1.6}$$

Уравнения (3.1.4)—(3.1.6) представляют собой замкнутую систему, интегрирование которой шагами по времени при соответствующих начальных и граничных условиях позволяет дать крупномасштабный численный прогноз полей Φ, T и $\dot{\omega}$ в свободной атмосфере.

3.2. Система уравнений баротропной квазигеострофической модели

Выясним, нельзя ли в уравнении (3.1.2) пренебречь правой частью. С этой целью проинтегрируем ее по всей толще атмосферы при краевых условиях (2.3.32) и (2.3.33):

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\zeta' = \frac{1}{RT} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\zeta=1}. \tag{3.2.1}$$

Нетрудно видеть, что в области движений синоптического масштаба среднее значение D на порядок меньше ее характерного значения. Следовательно, D — величина знакопеременная, так что значение интеграла (3.2.1) в тех слоях, где $D<0$, приблизительно компенсирует его значение в тех слоях, где $D>0$. Из (3.1.3) видно, что переход значения D через нуль происходит на уровне $\omega=\omega_{max}$. Наиболее часто высота с D_{min} равна 3—5 км, так что этот уровень можно рассматривать как средний по массе уровень атмосферы и записать для него уравнение вихря в виде

$$\nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = J\left(\frac{1}{l} \nabla^2 \Phi + l, \Phi \right). \tag{3.2.2}$$

Уравнение (3.2.2) можно получить, исходя из других позиций. Проинтегрировав (3.1.2) при нулевых краевых условиях по ζ, получим

$$\nabla^2 \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial t} = J\left(\frac{1}{l} \nabla^2 \overline{\Phi} + l, \overline{\Phi} \right), \tag{3.2.3}$$

где черта сверху означает осреднение по всей толще атмосферы. Будем считать атмосферу баротропной средой, в которой изотермы параллельны изогипсам и над каждым пунктом геострофический ветер не меняет своего направления во всей толще атмосферы:

$$\begin{aligned} u_g(x, y, \zeta, t) &= \mathrm{B}(\zeta)\, u_1(x, y, 1, t), \\ v_g(x, y, \zeta, t) &= \mathrm{B}(\zeta)\, v_1(x, y, 1, t). \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Равенства (3.2.4) означают также подобие вертикальных профилей ветра во всех узлах сетки. Подставив (3.2.4) в (3.2.3), получим

$$\nabla^2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = J\left(\frac{1}{l} \nabla^2 \Phi_1 + l, \Phi_1 \right) \overline{\mathrm{B}}^2 / \overline{\mathrm{B}}, \tag{3.2.5}$$

где индекс 1 относится к уровню $\zeta=1$. Умножив (3.2.5) на $\overline{\mathrm{B}}^2/\overline{\mathrm{B}}$ и введя новые компоненты скорости

$$\begin{aligned} u_g^*(x, y, \zeta^*, t) &= u_1(x, y, 1, t)\, \overline{\mathrm{B}}^2 / \overline{\mathrm{B}}, \\ v_g^*(x, y, \zeta^*, t) &= v_1(x, y, 1, t)\, \overline{\mathrm{B}}^2 / \overline{\mathrm{B}}, \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

перепишем уравнение в виде

$$\nabla^2 \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} = J\left(\frac{1}{l}\nabla^2\Phi^* + l,\ \Phi^*\right). \qquad (3.2.7)$$

Из сопоставления (3.2.4) и (3.2.6) вытекает, что на уровне ζ^*, где

$$B(\zeta^*) = \overline{B^2}/B, \qquad (3.2.8)$$

$D=0$, т. е. условие баротропности на среднем по массе уровне совпадает с условием бездивергентности. Уравнение вихря скорости для среднего уровня имеет вид (3.2.2) и называется необобщенным баротропным уравнением вихря скорости. Значения ζ^* меняются во времени и пространстве в зависимости от изменчивости профиля ветра по горизонтали, поэтому над всей областью прогноза уровень ζ^* не совпадает ни с одной изобарической поверхностью.

Баротропное уравнение вихря скорости — это дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка относительно Φ, нелинейное. Относительно $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = q$ — это неоднородное линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка (уравнение Пуассона), принадлежит к эллиптическому типу. Для его решения достаточно задать исходное поле $\Phi(x, y)$ и граничные условия по x, y для q.

Если уравнение (3.1.2) проинтегрировать при нижнем граничном условии (2.3.33), получим обобщенное баротропное уравнение вихря скорости (уравнение Гельмгольца)

$$\nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{L_0^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = J\left(\frac{1}{l}\nabla^2\Phi + l,\ \Phi\right), \qquad (3.2.9)$$

где $L_0^2 = \sqrt{RT}/l = c_0/l$ — характерный масштаб длины, введенный А. М. Обуховым. В умеренных широтах $L_0^2 \approx 3000$ км.

3.3. Баротропная квазигеострофическая модель

3.3.1. Интегрирование шагами по времени. Пусть в начальный момент времени t_0 поле $\Phi(x, y)$ на среднем уровне известно. Тогда в уравнении Пуассона

$$\nabla^2 q = J\left(\frac{1}{l}\nabla^2\Phi + l,\ \Phi\right), \quad q = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \qquad (3.3.1)$$

может быть вычислена адвекция абсолютной завихренности и, следовательно, $\nabla^2 q$. Получив решение уравнения (3.3.1) относительно $q(t_0)$ и полагая его постоянным, найдем значения $\Phi(x, y)$ через

небольшой интервал времени Δt (шаг по времени) по формуле

$$\Phi(t_0 + \Delta t) = \Phi(t_0) + \Delta t q(t_0), \qquad (3.3.2)$$

что соответствует односторонней конечной разности по времени: $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = [\Phi(t_0+\Delta t) - \Phi(t_0)]/\Delta t$. Таким образом, зная решение уравнения (3.3.1) относительно q, можно дать прогноз Φ на время Δt. Далее, считая полученное поле $\Phi(t_0+\Delta t)$ исходным, решаем (3.3.1) относительно $q(t_0+\Delta t)$ и находим $\Phi(t_0+2\Delta t)$. Такие циклы вычислений, называемые **интегрированием шагами по времени**, проводят N раз для прогноза на срок $N\Delta t$. Поскольку многоразовое использование односторонних разностей приводит к накоплению ошибок, то, начиная со второго шага по времени, можно привлекать более точные симметричные (центральные) разности:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\Phi(t+\Delta t) - \Phi(t-\Delta t)}{2\Delta t}. \qquad (3.3.3)$$

3.3.2. **Граничные условия.** Для получения однозначного решения уравнения (3.3.1) необходимо задать условия на границе двумерной области: прогностические значения q на границе. Поскольку такие значения неизвестны, можно интегрировать (3.3.1) применительно к поверхности среднего уровня земного шара, не имеющей границ. Однако в низких широтах баротропное уравнение вихря скорости не выполняется. При полусферном прогнозе в качестве граничных условий задают $q=0$ вблизи экватора, потому что изменения давления в тропиках заметно меньше, чем во внетропических широтах. Если прогноз дают на ограниченной области, то ставят **фиктивные граничные условия**: $q|_\Gamma = 0$ (в течение срока прогноза исходные значения $\Phi(x, y)|_\Gamma = \text{const}$). Использование фиктивных условий ухудшает качество прогноза, особенно вблизи границ.

Можно ставить локальные граничные условия, т. е. отдельно для каждой точки сетки, где вычисляют q, на окружности радиуса R, внутри которой производят интегрирование, задавать $\overline{q}|_R = 0$. При $R \approx 1000$ км среднее значение $\overline{q}|_R$ в несколько раз меньше характерного значения q в центре окружности, поэтому использование таких условий в принципе не должно приводить к крупным ошибкам прогноза.

3.3.3. **Итерационные методы решения баротропного уравнения вихря скорости.** Решение уравнения (3.3.1) в полярной системе координат r, ϑ при локальных граничных условиях записывается в виде

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{r=0} = \frac{1}{2\pi R}\left[\int_0^{2\pi} q(\vartheta)\, d\vartheta - \int_0^{2\pi}\int_0^{R} \ln\frac{R}{\rho}\, l A_2(\rho, \vartheta)\, \rho\, d\rho\, d\vartheta\right],$$

где ρ — расстояние от точки, для которой дают прогноз; A_2 — адвекция абсолютной геострофической завихренности; $G(\rho) =$

$= -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{\rho}$ — функция Грина (функция влияния), определяющая вес, с которым A_{ij} в точке с координатой ρ входит в величину $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ в точке прогноза. Поскольку функциональная зависимость A_{ij} от координат не известна (двойной интеграл вычисляется приближенно как сумма произведений значений A_{ij} в дискретных точках

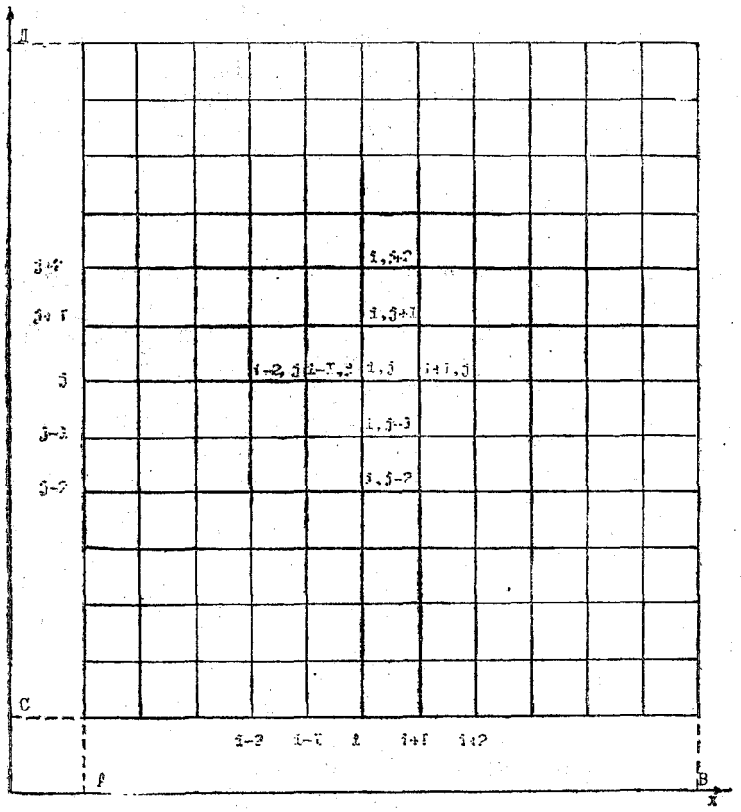

Рис. 1. Двумерный поток идеальной несжимаемой жидкости, заключенный между параллельными горизонтальными фиксированными границами, с наложенной на него квадратной разностной сеткой.

области $\rho \leqslant R$ на соответствующие значения функции Грина), целесообразно использовать приближенные методы интегрирования уравнения (3.3.1), основанные на методе сеток. Чаще всего используют квадратную сетку (рис. 1), обладающую симметрией по отношению к двум взаимно перпендикулярным направлениям. Перейдем к конечно-разностному аналогу дифференциального

уравнения (3.3.1) на основе симметричных разностей:

$$q_{i+1,\,j} + q_{i-1,\,j} + q_{i,\,j+1} + q_{i,\,j-1} - 4q_{i,\,j} = \\ = \Delta s^2 J\left(\frac{1}{l}\nabla^2\Phi + l,\ \Phi\right)_{i,\,j} = F_{i,\,j}. \qquad (3.3.4)$$

Такие сеточные уравнения записывают для всех внутренних узлов области с использованием граничных условий. Система алгебраических уравнений может быть решена итерационными методами с заданной точностью. Разрешим уравнение (3.3.4) относительно

$$q^{(\nu)}_{i,\,j} = \frac{1}{4}\left(q^{(\nu)}_{i+1,\,j} + q^{(\nu)}_{i-1,\,j} + q^{(\nu)}_{i,\,j+1} + q^{(\nu)}_{i,\,j-1}\right) - \frac{1}{4}F_{i,\,j}, \qquad (3.3.5)$$

где $\nu=0, 1, 2, \ldots$ — номер итерации. Зададим вначале произвольно значения q во всех узлах сетки. Используем эти значения в качестве нулевого приближения ($\nu=0$). Затем по схеме (3.3.5) вычислим первое приближение $q^{(1)}_{i,\,j}$ и, привлекая его в качестве начального, определим второе приближение $q^{(2)}_{i\,j}$. Если число таких итерационных циклов $\nu\to\infty$, получаемое решение стремится к точному решению системы алгебраических уравнений независимо от конфигурации и размеров сеточной области задачи прогноза, нулевого приближения и вида правой части в (3.3.4). От всех этих факторов зависит число итераций, которое необходимо выполнить, чтобы получить решение с требуемой точностью. Итерационный процесс прекращают, когда выполняется условие

$$\max_{i,\,j} |q^{(\nu+1)} - q^{(\nu)}| \leqslant \varepsilon, \qquad (3.3.6)$$

где ε — заданное число. Итерационный процесс (3.3.5), предложенный Ричардсоном, сходится, но медленно, поэтому были разработаны различные модификации его.

Либман предложил вести счет в строго определенном порядке (например, вдоль строки j слева направо на рис. 1, затем переходить к $j+1$ строке и т. д.)

$$q^{(\nu+1)}_{i,\,j} = \frac{1}{4}\left(q^{(\nu)}_{i+1,\,j} + q^{(\nu+1)}_{i-1,\,j} + q^{(\nu)}_{i,\,j+1} + q^{(\nu+1)}_{i,\,j-1}\right) - \frac{1}{4}F_{i,\,j}, \qquad (3.3.7)$$

что позволяет ускорить сходимость итерационного процесса благодаря использованию тенденций $q^{(\nu+1)}_{i-1,\,j}$ и $q^{(\nu+1)}_{i,\,j-1}$, рассчитанных в пределах $(\nu+1)$-го цикла.

Саусвелл предложил метод релаксаций, суть которого заключается в следующем. Пусть имеется поле $q^{(\nu)}_{i,\,j}$, найденное на предыдущей итерации. Если подставить эти значения в уравнения (3.3.5), то последние не будут удовлетворяться точно. Найдем разность (невязку) по итерации ν между левой и правой частями

уравнения (3.3.4), записанного для узла i, j

$$R_{i,j}^{(\nu)} = q_{i+1,j}^{(\nu)} + q_{i-1,j}^{(\nu)} + q_{i,j+1}^{(\nu)} + q_{i,j-1}^{(\nu)} - 4q_{i,j}^{(\nu)} - F_{i,j}. \quad (3.3.8)$$

Тенденцию на следующей итерации будем определять по формуле

$$q_{i,j}^{(\nu+1)} = q_{i,j}^{(\nu)} + \alpha R_{i,j}^{(\nu)}, \quad (3.3.9)$$

где α — коэффициент релаксации, характеризующий затухание невязки и подбираемый путем численных экспериментов. При $\alpha=0{,}25$ метод Саусвелла вырождается в метод Ричардсона. Для ограниченных сеточных областей $\alpha \approx 0{,}4$.

Комбинацию метода релаксации и метода Либмана называют экстраполированным методом Либмана. Расчеты проводят по формулам

$$q_{i,j}^{(\nu+1)} = q_{i,j}^{(\nu)} + \alpha R_{i,j}^{(\nu,\nu+1)}, \quad (3.3.10)$$

$$R_{i,j}^{(\nu,\nu+1)} = q_{i+1,j}^{(\nu)} + q_{i-1,j}^{(\nu+1)} + q_{i,j+1}^{(\nu)} + q_{i,j-1}^{(\nu+1)} - 4q_{i,j}^{(\nu)} - F_{i,j}. \quad (3.3.11)$$

3.4. Бароклинная квазигеострофическая модель

3.4.1. Уравнения трехмерной квазигеострофической модели. Для прогноза Ф на нескольких изобарических поверхностях необходимо учесть изменение геострофического ветра с высотой по скорости и по направлению. Основными уравнениями трехмерной пространственной модели в квазигеострофическом, адиабатическом и квазистатическом приближениях служат уравнения вихря скорости, притока тепла и статики

$$\nabla^2 q - l^2 \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \zeta} = J\left(\frac{1}{l}\nabla^2\Phi + l, \Phi\right), \quad (3.4.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{RT}{g\zeta}(\gamma_a - \gamma)\dot{\omega} = 0, \quad (3.4.2)$$

$$T = -\frac{\zeta}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}. \quad (3.4.3)$$

Эти уравнения образуют замкнутую относительно $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, $\frac{\partial T}{\partial t}$ и $\dot{\omega}$ линейную систему трех уравнений, которую можно свести к уравнению, замкнутому для q. Подставляя (3.4.3) в (3.4.2), получим

$$\frac{\zeta^2}{c^2}\frac{\partial q}{\partial \zeta} + \dot{\omega} = \frac{R\zeta}{c^2}A_T, \quad (3.4.4)$$

где $c^2 = \frac{R^2 T}{g}(\gamma_a - \gamma)$ — параметр статической устойчивости, A_T — адвекция температуры.

Продифференцируем (3.4.4) по ζ, умножим на l^2 и, сложив с (3.4.1), получим уравнение бароклинной квазигеострофической модели (q-уравнение):

$$\nabla^2 q + l^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\zeta^2}{c^2} \frac{\partial q}{\partial \zeta} = J\left(\frac{1}{l} \nabla^2 \Phi + l, \Phi\right) - l \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\zeta^2}{c^2} J\left(\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\right) = F_q, \tag{3.4.5}$$

являющееся нелинейным уравнением в частных производных третьего порядка относительно Φ. Современные методы математического анализа не позволяют получить решение его в виде $\Phi(x, y, \zeta, t)$. Относительно q — это неоднородное линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, принадлежит к эллиптическим уравнениям и решается численными методами. При некоторых видах граничных условий по x, y могут быть получены и решения в замкнутой форме.

3.4.2. Граничные условия. Для решения уравнения (3.4.5) нужно поставить боковые граничные условия по x, y и краевые условия на нижней и верхней границах атмосферы. Простейшими граничными условиями по ζ служат

$$\dot{\omega}|_{\zeta=0} = 0, \tag{3.4.6}$$

$$w|_{z=0,\ \zeta=1} = 0. \tag{3.4.7}$$

Преобразуем (3.4.7) так, чтобы в него входила функция q. Поскольку

$$gw = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \dot{\omega} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \tag{3.4.8}$$

то для квазигеострофического и квазистатического приближений

$$gw = q - \frac{RT}{\zeta} \dot{\omega}. \tag{3.4.9}$$

Применительно к (3.4.7) соотношение (3.4.9) при $\zeta = 1$ приобретает вид

$$q - RT\dot{\omega} = 0 \tag{3.4.10}$$

Исключим из (3.4.10) $\dot{\omega}$ и, привлекая (3.4.4), получим нижнее граничное условие в виде

$$\frac{\partial q}{\partial \zeta} + \alpha q = -RA_T \text{ при } \zeta = 1 \text{ и } \alpha = \frac{R}{g}(\gamma_a - \gamma). \tag{3.4.11}$$

Применив (3.4.4) к верхнему граничному условию (3.4.6), получим

$$\zeta^2 \frac{\partial q}{\partial \xi} = 0 \text{ при } \zeta = 0. \tag{3.4.12}$$

Смысл (3.4.12) таков: при $\zeta \to 0$ произведение $\zeta^2 \frac{\partial q}{\partial \zeta}$ должно быть ограниченной величиной.

3.4.3. Точное решение q-уравнения. Решение уравнения (3.4.5) в цилиндрической системе координат для бесконечной плоскости с граничными условиями по вертикали (3.4.11) и (3.4.12) было получено Н. И. Булеевым и Г. И. Марчуком. Опуская вывод решения и полагая l и c^2 постоянными, запишем

$$q|_{r=0} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} G_{\Omega}^{q}(\eta, \zeta, r)\, A_{\Omega}(\eta, r, \vartheta)\, r\, dr'\, d\vartheta'\, d\eta' + \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} G_{T}^{q}(\eta, \zeta, r)\, A_{T}(\eta, r, \vartheta)\, r\, dr'\, d\vartheta'\, d\eta'. \quad (3.4.13)$$

Здесь $q|_{r=0}$ — искомое значение $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ в точке, расположенной на оси системы координат; ζ — вертикальная координата точки, где ищется решение; η — вертикальная координата влияющей точки; G_{Ω}^{q} и G_{T}^{q} — функции Грина, характеризующие влияние на $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ в точке x, y, ζ адвекции A_{Ω} и A_T соответственно на различных уровнях (G_{Ω}^{q} и G_{T}^{q} выражают через координаты рассматриваемых точек и параметры q-уравнения); η', r', ϑ' — переменные интегрирования.

Из (3.4.13) видно, что $q|_{r=0}$ определяется как сумма двух слагаемых, из которых первое зависит от A_{Ω}, второе от A_T. Это позволяет рассматривать вихревой и термический факторы изменения Ф.

Функция $G_{\Omega}^{q}(\eta, \zeta, r)$ всюду отрицательна, а в точке прогноза стремится к $-\infty$. Функция $G_{T}^{q}(\eta, \zeta, r)$ выше точки прогноза отрицательна, ниже положительна, а точка $r=0$ является диполем: в ней функция влияния претерпевает бесконечный разрыв.

Рассмотрим качественные правила влияния A_{Ω} и A_T на $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$.

При адвекции циклонического (положительного) вихря $q<0$, при адвекции антициклонического (отрицательного) вихря $q>0$; адвективное потепление (похолодание) в слое выше точки расчета приводит к уменьшению (увеличению), а ниже ее — к увеличению (уменьшению) значений Ф.

Адвекция тепла (холода) в любом слое приводит к уменьшению (увеличению) значений Ф у земли, а для верхней границы атмосферы воздействие A_T обратное. Однородная A_T во всей толще атмосферы приводит к максимальным по величине и обратным по знаку изменениям Ф у земли и в верхней атмосфере. На промежуточных уровнях в точке прогноза функция G_{T}^{q} претерпевает бесконечный разрыв, поэтому значения q будут меньше,

так как обусловятся обратным по знаку воздействием A_T в нижеи вышележащих слоях. Взаимная компенсация вкладов A_T в нижней и верхней частях атмосферы происходит в средней ее части. Для среднего уровня второй интеграл в (3.4.13) обращается в нуль, а q определяется лишь величиной A_2. Положение среднего уровня определяется распределением по высоте и интенсивностью A_T: при однородной A_T во всей атмосфере средний уровень может от-

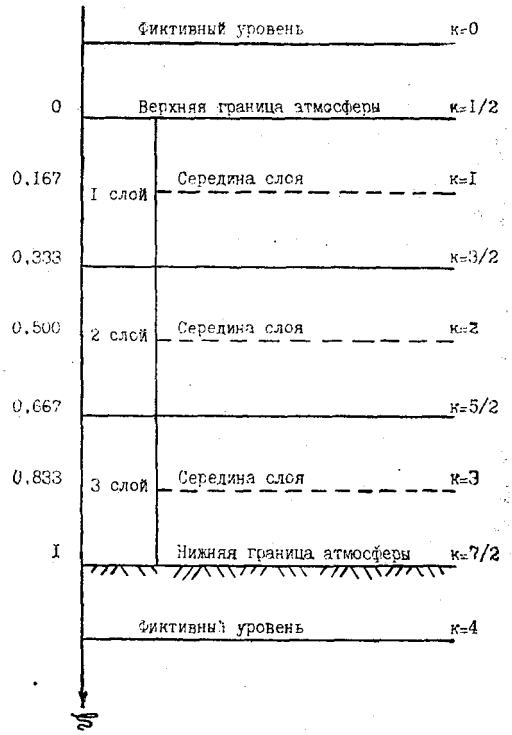

Рис. 2. Дискретизация атмосферы по вертикали в трехуровенной квазигеострофической модели П. Н. Белова.

сутствовать; если наблюдается неоднократная смена знака A_T, могут появиться несколько уровней компенсации. Адвекция A_T на рассматриваемой поверхности не сказывается на $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$. Влияние ее уменьшается с ростом горизонтального и вертикального удаления. Горизонтальный масштаб влияния A_T в несколько раз меньше, чем A_2.

3.4.4. Итерационный метод решения q-уравнения. Рассмотрим названный метод на примере трехуровенной схемы прогноза П. Н. Белова, где дискретизация атмосферы выполняется по всем трем переменным, т. е. используется метод пространственных решеток. Границы слоев (рис. 2) имеют дробные индексы: к=1/2 (ζ=0); 3/2 (ζ=0.333); 5/2 (ζ=0.667); 7/2 (ζ=1), а середины слоев — целочисленные индексы: к=1 (ζ=0.167); 2 (ζ=0.500);

3 ($\zeta=0.833$). Изобарические поверхности 850, 500 и 200 гПа — прогностические уровни, шаг по вертикали $\Delta\zeta=333$ гПа. Полагая, что ниже уровня к=3 и выше уровня к=1 атмосфера баротропна, т. е. имеют место соотношения

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{к=1}=a\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{к=0},\quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{к=1}=a\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{к=0};$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{к=3}=b\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_{к=4},\quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{к=3}=b\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_{к=4}$$

(a, b — коэффициенты пропорциональности), получим формулы для расчета правой части F_q в (3.4.5)

$$\left.\begin{aligned}
F_{i,j,1}&=J\left(\frac{1}{l}\nabla^2\Phi+l,\ \Phi\right)_{i,j,1}-\\
&-J(\Phi_1,\ \Phi_2)_{i,j}\,(l/\Delta\zeta^2)\,(0{,}111/c^2_{3/2}),\\
F_{i,j,2}&=J\left(\frac{1}{l}\nabla^2\Phi+l,\ \Phi\right)_{i,j,2}-\\
&-[J(\Phi_2,\ \Phi_3)_{i,j}\,(0{,}444/c^2_{5/2})-J(\Phi_1,\ \Phi_2)_{i,j}\,(0{,}111/c^2_{3/2})]\,l/\Delta\zeta^2,\\
F_{i,j,3}&=J\left(\frac{1}{l}\nabla^2\Phi+l,\ \Phi\right)_{i,j,3}-\\
&-J(\Phi_2,\ \Phi_3)_{i,j}\,(l/\Delta\zeta^2)\,(0{,}444/c^2_{5/2})
\end{aligned}\right\}\quad (3.4.14)$$

Запишем (3.4.5) в сеточной форме для точки с координатами i, j, k

$$(q_{i+1,j}+q_{i-1,j}+q_{i,j+1}+q_{i,j-1}-4q_{i,j})_к-$$
$$-l^2\frac{\Delta s^2}{\Delta\zeta^2}\left[\left(\frac{\zeta^2}{c^2}\right)_{к+\frac{1}{2}}(q_{к+1}-q_к)_{i,j}-\left(\frac{\zeta^2}{c^2}\right)_{к-\frac{1}{2}}(q_к-q_{к-1})_{i,j}\right]=$$
$$=\Delta s^2\,(F_q)_{i,j,к}. \qquad (3.4.15)$$

При записи (3.4.15) для уровней к=1, 3 привлекают соответственно верхнее и нижнее граничные условия

$$q_{i,j,к=1}=q_{i,j,0}\ \text{при}\ \zeta=0, \qquad (3.4.16)$$
$$q_{i,j,4}-q_{i,j,3}+\Delta\zeta\alpha q_{i,j,7/2}=0\ \text{при}\ \zeta=1. \qquad (3.4.17)$$

Для исключения $q_{i,j,7/2}$ в (3.4.17) барометрическую формулу $\Phi_в-\Phi_н=R\overline{T}\ln p_н/p_в$ дифференцируют по времени и записывают для слоев 850—1000 и 500—850 гПа. Если $\frac{\partial T}{\partial t}$ в этих слоях положить одинаковыми, то

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{к=1}=q_{к=7/2}=1.312q_{к=3}-0.312q_{к=2}. \qquad (3.4.18)$$

По переменным x, y задают фиктивные граничные условия на двух внешних рядах точек. Таким образом получают замкнутую систему алгебраических уравнений для уровней k=1, 2, 3, которую решают экстраполированным методом Либмана. Вначале все искомые функции $q_{i,j,\kappa}$ задают на нулевом приближении. Расчет начинают с крайнего левого узла на уровне к=1 (рис. 2). Последовательно от узла к узлу проводят расчет невязки на этом уровне, затем на уровнях к=2, 3. Один проход по всем узлам и уровням представляет собой цикл итерации и увеличивает номер приближения на единицу. После завершения ν приближений невязку представляют в виде

$$R^{(\nu,\nu+1)}_{i,j,\kappa} = (q^{(\nu)}_{i+1,j} + q^{(\nu+1)}_{i-1,j} + q^{(\nu)}_{i,j+1} + q^{(\nu+1)}_{i,j-1} - 4q^{(\nu)}_{i,j})_\kappa + \\ + l^2 \frac{\Delta s^2}{\Delta\zeta^2}\left[\left(\frac{\zeta^2}{c^2}\right)_{\kappa+\frac{1}{2}} (q^{(\nu)}_{\kappa+1} - q^{(\nu)}_{\kappa})_{i,j} - \left(\frac{\zeta^2}{c^2}\right)_{\kappa-\frac{1}{2}} (q^{(\nu)}_{\kappa} - q^{(\nu+1)}_{\kappa-1})_{i,j}\right] - \\ - \Delta s^2 F_{i,j,\kappa}. \qquad (3.4.19)$$

Следующее $\nu+1$ приближение определяют по формуле

$$q^{(\nu+1)}_{i,j,\kappa} = q^{(\nu)}_{i,j,\kappa} + \alpha_\kappa R^{(\nu,\nu+1)}_{i,j,\kappa}. \qquad (3.4.20)$$

После окончания цикла итерации значение $|R^{\nu,\nu+1}_{\max}|_{i,j,\kappa}$ сравнивают с заданной точностью решения R_T. Если $R_T < |R^{\nu,\nu+1}_{\max}|_{i,j,\kappa}$, выполняют следующую итерацию, в противном случае итерационный процесс заканчивают. Найденные значения $q^{(\nu+1)}_{i,j,\kappa}$ будут решением q-уравнения с заданной точностью R_T, их используют для расчета прогностических значений Ф.

В рассмотренной модели: $\Delta t=1$ часу, $\Delta s=300$ км, $R_T=1$ м, $\alpha_{\kappa=1}=0{,}275$, $\alpha_{\kappa=2}=0{,}237$, $\alpha_{\kappa=3}=0{,}244$; исходное поле Ф задают в пространственной решетке, содержащей $3\times26\times22$ узла, а прогностические значения определяют в $3\times22\times18$ узлах.

3.4.5. Прогноз полей температуры и вертикальных токов. Получаемые в результате интегрирования q-уравнения прогностические значения Ф можно использовать на каждом шаге по времени для расчета $\frac{\partial T}{\partial t}$ и $\dot{\omega}$. Так, дифференцируя уравнение статики по времени, получим выражение

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\zeta}{R}\frac{\partial}{\partial\zeta}\frac{\partial\Phi}{\partial t}, \qquad (3.4.21)$$

которое можно записать для середин слоев. Зная $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{i,j,\kappa\pm\frac{1}{2}}$ и

пользуясь методом шагов по времени, получают прогноз T:

$$T^{t+\Delta t}_{i,\,j,\,\text{к}\pm\frac{1}{2}} = T^{t-\Delta t}_{i,\,j,\,\text{к}\pm\frac{1}{2}} + 2\Delta t \frac{\partial}{\partial t} T^{t}_{i,\,j,\,\text{к}\pm\frac{1}{2}}. \qquad (3.4.22)$$

Для построения полей T на основных уровнях производят линейную интерполяцию

$$T^{t+\Delta t}_{i,\,j,\,\text{к}} = 0{,}5\left(T^{t+\Delta t}_{i,\,j,\,\text{к}+\frac{1}{2}} + T^{t+\Delta t}_{i,\,j,\,\text{к}-\frac{1}{2}}\right). \qquad (3.4.23)$$

Для получения значений $\dot{\omega}$ на каждом шаге по времени используют уравнение (3.4.4)

$$\dot{\omega}_{i,\,j,\,\text{к}\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{c^2_{i,\,j,\,\text{к}\pm\frac{1}{2}}}\left[R\,(\zeta A_T)_{i,\,j,\,\text{к}\pm\frac{1}{2}} - \left(\zeta^2 \frac{\partial q}{\partial \zeta}\right)_{i,\,j,\,\text{к}\pm\frac{1}{2}}\right]. \qquad (3.4.24)$$

3.4.6. Достоинства и недостатки квазигеострофических моделей. Основным достоинством квазигеострофических моделей является простота их реализации и достаточно высокая оправдываемость прогнозов Ф, u_g, v_g, T выше ПСА. Вместе с тем указанным моделям свойствен ряд недостатков, снижающих их практическую ценность: неточность физической постановки задачи и исключение из рассмотрения внутренних гравитационных волн; исключение из рассмотрения или приближенный учет турбулентной вязкости и орографии; неточный прогноз возникновения новых барических образований; занижение скорости перемещения различных элементов барического рельефа; недооценка интенсивности барических образований — в центрах циклонов (антициклонов) давление завышается (занижается); фиктивное увеличение геопотенциала изобарических поверхностей (ложный антициклогенез), что связано с пренебрежением дивергенцией скорости; невозможность использования квазигеострофических моделей в экваториальной области.

С точки зрения физики основной недостаток квазигеострофических моделей заключается в неучете агеострофических отклонений ветра u_a, v_a. Действительно, атмосфера колеблется вблизи геострофического равновесия, так как имеет место непрерывное приспособление ветра к геострофическому. В среднем агеострофический ветер составляет 20—30% полной скорости. Поскольку наибольшие значения u_a, v_a связаны с зонами резкой перестройки термобарического поля, то с принятием этого условия модель сильно обедняется. Более строгая постановка задачи о прогнозе связана с учетом негеострофичности атмосферных движений, которую можно осуществить путем использования гипотезы квазисоленоидальности, либо привлекая полные уравнения гидротермодинамики. Рассмотрим ниже первый подход.

Глава 4. КВАЗИСОЛЕНОИДАЛЬНЫЕ ПРОГНОСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

4.1. Гипотеза квазисоленоидальности

Соленоидальным называется вектор, дивергенция которого равна нулю. Такой вектор можно представить в виде вихря некоторого потенциального вектора. Если горизонтальную компоненту вектора скорости $\vec{\mathbf{V}}$ стилизовать в виде соленоидального вектора, то, по определению,

$$\operatorname{div}\vec{\mathbf{V}}=0. \tag{4.1.1}$$

Двумерный соленоидальный вектор можно выразить через единственную скалярную функцию — функцию тока ψ. Если положить компоненты соленоидального ветра

$$u_\psi=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v_\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{4.1.2}$$

то уравнение (4.1.1) тождественно удовлетворяется, а уравнение линий тока $d\psi=0$ означает, что при бездивергентном движении ψ постоянна вдоль каждой линии тока. Соленоидальное приближение лучше всего выполняется вблизи среднего уровня атмосферы, где имеет место переход через нуль значения D. Однако уровней, где во всех точках $D=D_{\min}$ или $D=0$, не существует, поэтому на изобарических поверхностях соотношения (4.1.2) неточны. Численные схемы, в которых движение на изобарических поверхностях описывают соотношениями (4.1.2), но принимают

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\neq 0\quad (u=u_\psi+u',\ v=v_\psi+v'), \tag{4.1.3}$$

называют квазисоленоидальными дивергентными моделями.

Для уровня, где $D=0$, геострофическую функцию тока ψ_g определяют соотношениями

$$u_g=-\frac{\partial\psi_g}{\partial y},\quad v_g=\frac{\partial\psi_g}{\partial x}. \tag{4.1.4}$$

Если в области прогноза положить $l=\text{const}$, геострофическое движение можно считать бездивергентным. Однако только на среднем уровне

$$u_g=u_\psi,\quad -\frac{1}{l}\frac{\partial\Phi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi_g}{\partial y};\quad v_g=v_\psi,\quad \frac{1}{l}\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi_g}{\partial x}. \tag{4.1.5}$$

Откуда

$$\psi_g = \Phi/l + \text{const}, \tag{4.1.6}$$

$$\frac{\partial \psi_g}{\partial s} = \frac{1}{l}\frac{\partial \Phi}{\partial s} \quad (s = x;\ y;\ t). \tag{4.1.7}$$

В дальнейшем нам понадобится соленоидальное приближение

$$\Omega_z = \Omega_\psi = \frac{\partial v_\psi}{\partial x} - \frac{\partial u_\psi}{\partial y} = \nabla^2\psi. \tag{4.1.8}$$

Подставляя (4.1.6) в (4.1.8) при $l=\text{const}$, получим $\nabla^2\psi = \frac{1}{l}\nabla^2\Phi$.

4.2. Прогностические уравнения квазисоленоидального приближения

На основании баротропного уравнения вихря скорости, соотношений (4.1.6) и (4.1.8) получим уравнение соленоидальной бездивергентной модели

$$\nabla^2\frac{\partial \psi}{\partial t} = J(\nabla^2\psi + l,\ \psi), \quad l = \text{const}. \tag{4.2.1}$$

Для среднего уровня баротропной сжимаемой атмосферы уравнение принимает вид

$$\nabla^2\frac{\partial \psi}{\partial t} = J(\nabla^2\psi + l,\ \psi) + l^2\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \zeta}, \quad l = \text{const} \tag{4.2.2}$$

или, учитывая нижнее граничное условие $\dot{\omega}|_{\zeta=1} = \frac{1}{RT}\frac{\partial \psi}{\partial t}$ и (4.1.7),

$$\nabla^2\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{L_0^2}\frac{\partial \psi}{\partial t} = J(\nabla^2\psi + l,\ \psi). \tag{4.2.3}$$

Для других уровней необходимо строить квазисоленоидальную модель, т. е. применять (4.1.2) в тех членах уравнения вихря скорости, в которых D не содержится в явном виде. Тогда уравнение (4.2.2) является незамкнутым, поэтому функцию $\dot{\omega}$ определяют из уравнения притока тепла (2.3.30). Подставив в него u и v из (4.1.2), а T из уравнения статики, получим

$$\zeta^2\frac{\partial}{\partial \zeta}\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \zeta^2 J\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta},\ \psi\right) + \frac{RT}{g}(\gamma_a - \gamma)\dot{\omega} = 0. \tag{4.2.4}$$

Положив

$$\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = \frac{1}{l}\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \tag{4.2.5}$$

и переходя в (4.2.4) с помощью (4.1.7) и (4.2.5) от Ф к ψ при l=const, получим

$$l\zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi}{\partial t} - l\zeta^2 J\left(\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}, \psi\right) = -\frac{R^2 T}{g}(\gamma_a - \gamma)\dot{\omega} = -c^2\dot{\omega}. \quad (4.2.6)$$

Поделим (4.2.6) на c^2, умножим на l, продифференцируем по ζ и, сложив с (4.2.2), построим уравнение бароклинной квазисоленоидальной модели:

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} + l^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\zeta^2}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} = J(\nabla^2 \psi + l, \psi) + l^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\zeta^2}{c^2} J\left(\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}, \psi\right). \quad (4.2.7)$$

4.3. Уравнение баланса и методы его решения

Итак, если поле функции ψ известно в начальный момент времени, ее прогноз на основании уравнений (4.2.1), (4.2.4) и (4.2.8) отличается от прогноза Ф с помощью соответствующих квазигеострофических уравнений отсутствием деления на параметр l. Однако ψ — величина расчетная, поэтому сначала решают задачу определения начальных полей ψ. Поскольку ветер измеряют с большими ошибками, строят поля ψ через Ф с помощью уравнения баланса, которое в соленоидальном приближении имеет вид

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{l} \nabla^2 \Phi - \frac{2}{l}\left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}\right)^2\right] - \frac{\beta}{l}\frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (4.3.1)$$

Линейное приближение уравнения баланса при l=const записывают как уравнение Лапласа

$$\nabla^2\left(\psi - \frac{\Phi}{l}\right) = 0, \quad (4.3.2)$$

имеющее только одно решение, ограниченное на всей плоскости (x, y)

$$\psi = \Phi/l = \psi_g. \quad (4.3.3)$$

Таким образом, первое приближение уравнения дивергенции эквивалентно (4.1.6), а второе приближение позволяет оценить погрешности, вызванные предположением о геострофичности вихря скорости. Уравнение (4.3.1) нелинейное, двумерное, связывает функции Ф и ψ и применительно к любому уровню позволяет решать две диагностические задачи: определять функцию ψ, отвечающую начальному распределению Ф; по прогностическому полю ψ на выходе квазисоленоидальной модели строить поле Ф.

Относительно функции ψ уравнение (4.3.1) принадлежит к семейству уравнений типа Монжа — Ампера и может быть гиперболического, параболического или эллиптического типа в зависимо-

сти от коэффициентов перед производными. Относительно ψ уравнение решается лишь в том случае, если оно эллиптического типа. Критерий эллиптичности таков: $l^2+2\nabla^2\Phi>0$. Так как в циклонических областях $\nabla^2\Phi>0$, то в них условие эллиптичности выполняется, а в антициклонических областях, где $\nabla^2\Phi<0$, не будет выполняться, если $|\Omega_z|>0{,}7\cdot10^{-4}\,\text{с}^{-1}$. В таких точках сеточной области поле Φ предварительно подправляют (например, сглаживанием). Добившись выполнения условия эллиптичности во всех точках сетки, используют видоизмененное поле Φ для решения уравнения баланса относительно ψ. Для получения однозначного решения уравнения (4.3.1) достаточно задать граничные условия вида

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial s}\right|_\Gamma=\left.\frac{1}{l}\frac{\partial\Phi}{\partial s}\right|_\Gamma, \tag{4.3.4}$$

где s — касательная к границе, или

$$\psi|_\Gamma=\Phi/l|_\Gamma+\text{const}. \tag{4.3.5}$$

В силу нелинейности уравнения баланса его решение строят методом сеток, используя различные итерационные процедуры. Наиболее простой способ решения записывают в виде

$$\nabla^2\psi^{(\nu+1,\,\mu)}=\frac{\nabla^2\Phi}{l}-\frac{2}{l}\left[\frac{\partial^2\psi^{(\nu,\,\mu)}}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2\psi^{(\nu,\,\mu)}}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2\psi^{(\nu,\,\mu)}}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]-\frac{\beta}{l}\frac{\partial\psi^{(\nu,\,\mu)}}{\partial y}, \tag{4.3.6}$$

где $\nu=0,\ 1,\ 2,\ldots$ — номер итерации, $\mu=1,\ 2,\ldots$ — номер приближения при вычислении лапласиана $\nabla^2\psi$.

Использование в (4.3.6) трех нелинейных членов справа на предыдущей итерации обусловлено тем, что они на порядок меньше главных членов. Сначала в правой части (4.3.6) в геострофическом приближении задают $\psi_{i,j}^{(0,1)}=(\Phi/l)_{i,j}$ и вычисляют производные от ψ. Затем рассчитывают значения $\nabla^2\Phi$ во внутренних узлах сеточной области. Далее (4.3.6) решают как уравнение Пуассона относительно $\psi_{i,j}^{(1,1)}$ экстраполированным методом Либмана, внутренний цикл итераций которого нумеруют с помощью индекса ν. Вначале находят невязку между левой и правой частями сеточного аналога уравнения (4.3.6), а затем уточненное значение функции тока:

$$R_{i,j}^{(\nu+1,\,\nu,\,\mu)}=\psi_{i+1,j}^{(\nu,\,\mu)}+\psi_{i-1,j}^{(\nu+1,\,\mu)}+\psi_{i,j+1}^{(\nu,\,\mu)}+\psi_{i,j-1}^{(\nu+1,\,\mu)}-4\psi_{i,j}^{(\nu,\,\mu)}-\Delta s^2F_{i,j}^{(\nu,\,\mu)}, \tag{4.3.7}$$

$$\psi_{i,j}^{(\nu+1,\,\mu)}=\psi_{i,j}^{(\nu,\,\mu)}+\alpha R_{i,j}^{(\nu+1,\,\nu,\,\mu)}, \tag{4.3.8}$$

где $F_{i,j}$ — значение правой части уравнения $i,\ j$.

Внутренний процесс итерации продолжают, пока не станет

$$\max_{i,j} |R^{(\nu+1,\ \nu,\ \mu)}| \leqslant \varepsilon_1. \qquad (4.3.9)$$

Уравнение Пуассона интегрируют на исходной сеточной области с использованием на внешнем периметре ее границы геострофического приближения (4.3.5). Найденные по (4.3.8) значения $\psi_{i,j}^{(\nu+1,\ \mu)}$ используют для вычисления значения $(\nabla^2\psi)_{i,j}$ на $\mu+1$ приближении. Затем снова решают задачу (4.3.7)—(4.3.9). Итерации на внешнем цикле контролируют с помощью теста

$$\max_{i,j} |\psi^{(\mu+1)} - \psi^{(\mu)}| \leqslant \varepsilon_2. \qquad (4.3.10)$$

Полученные поля ψ используют в качестве исходных в моделях прогноза. Наиболее существенное различие в конфигурации и густоте изолиний ψ и изогипс наблюдается в областях интенсивных циклонов.

Процесс (4.3.6) сходится очень медленно. Поэтому рассмотрим итерационный алгоритм, предложенный Арнасоном и обеспечивающий лучшую сходимость процесса

$$\nabla^2\psi^{(\nu+1,\ \mu)} = \frac{\nabla^2\Phi}{l} - \frac{1}{l}\left[\frac{\partial^2\psi^{(\nu,\ \mu)}}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi^{(\nu+1,\ \mu)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi^{(\nu+1,\ \mu)}}{\partial x^2}\frac{\partial^2\psi^{(\nu,\ \mu)}}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2\psi^{(\nu,\ \mu)}}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2\psi^{(\nu+1,\ \mu)}}{\partial x\,\partial y}\right] - \frac{\beta}{l}\frac{\partial\psi^{(\nu+1,\ \mu)}}{\partial y}. \qquad (4.3.11)$$

Здесь на каждой итерации решают линейное уравнение эллиптического типа с переменными коэффициентами.

Теперь запишем оператор Монжа — Ампера так, чтобы в нем появился лапласиан от ψ. Воспользуемся преобразованием С. Петерсена

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[\Omega_z^2 + D^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right].$$

Подставив его в (2.5.6) и записав u, v, D, Ω_z через ψ, получим

$$(\nabla^2\psi)^2 + 2l\nabla^2\psi - \left[\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)^2 + \left(2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\right) - 2\beta\frac{\partial\psi}{\partial y} + 2\nabla^2\Phi\right] = 0. \qquad (4.3.12)$$

На основе решения этого уравнения относительно $\nabla^2\Phi$, приближенно удовлетворяющего выполнению геострофических соотношений,

можно построить итерационный алгоритм

$$\nabla^2\psi^{(\nu+1,\,\mu)} = -l + \sqrt{l^2 + \left(\frac{\partial^2\psi^{(\nu,\,\mu)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi^{(\nu,\,\mu)}}{\partial y^2}\right)^2 + \left(2\,\frac{\partial^2\varphi^{(\nu,\,\mu)}}{\partial x\,\partial y}\right) - 2\beta\,\frac{\partial\psi^{(\nu,\,\mu)}}{\partial y} + 2\nabla^2\Phi}\,, \tag{4.3.13}$$

предусматривающий решение уравнения Пуассона на каждой внешней итерации и обеспечивающий лучшую сходимость последовательности внешних итераций, чем (4.3.6).

Рассмотрим теперь задачу перехода от предвычисленных полей ψ к полям Φ путем «обращения уравнения баланса». В этом случае уравнение баланса решают как линейное уравнение Пуассона. На границах области точное условие заменяется приближенным: $\Phi|_{\text{г}} = l\psi|_{\text{г}}$.

Положительными сторонами квазисоленоидальных моделей являются: использование уравнений движения в более полном виде, чем это позволяет сделать квазигеострофическое приближение; простота модели и формальная замкнутость используемой системы уравнений; отсутствие ложного антициклогенеза в низких широтах; повышение оправдываемости суточных прогнозов поля давления в среднем на 4—5% за счет более строгого описания связи между полями давления и ветра.

В негеострофических моделях уравнение баланса применяют для получения согласованных между собой полей давления и ветра со свойствами прогностических моделей.

4.4. Уточнение бароклинной квазисоленоидальной модели

Реальные атмосферные движения не являются ни геострофическими, ни соленоидальными, ни безвихревыми. Безвихревое движение определяется условием

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{4.4.1}$$

а составляющие вектора скорости выражают через потенциал скорости φ:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}. \tag{4.4.2}$$

Безвихревое движение называют потенциальным. Под потенциалом поля движения понимают скалярную величину φ, градиент которой равен вектору скорости при безвихревом движении, а

$$D = \nabla^2\varphi. \tag{4.4.3}$$

Более полно негеострофичность атмосферных движений учитывается, если представить скорость через ψ и φ

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{4.4.4}$$

Рассмотрим уточнение квазисоленоидальной пространственной модели атмосферы по И. А. Кибелю. Используем уравнения вихря скорости и дивергенции, адиабатическое уравнение притока тепла и уравнение неразрывности:

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = F_\varphi(\varphi, \psi, \dot{\omega}), \tag{4.4.5}$$

$$\nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = F_D(\varphi, \psi, \dot{\omega}, \Phi), \tag{4.4.6}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = F_T(\varphi, \psi, \dot{\omega}, T), \tag{4.4.7}$$

$$D = -\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \zeta}, \tag{4.4.8}$$

Из (4.4.8) с учетом (4.4.3) находим

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \zeta}. \tag{4.4.9}$$

Интегрируя (4.4.9) по переменной ζ при $\dot{\omega}|_{\zeta=0}=0$, получаем

$$\dot{\omega}|_\zeta = -\int_0^\zeta \nabla^2 \varphi \, d\varphi. \tag{4.4.10}$$

Таким образом, уравнения (4.4.5), (4.4.6), (4.4.9), (4.4.10) и уравнение статики

$$T = -\frac{\zeta}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \tag{4.4.11}$$

представляют собой замкнутую систему относительно функций φ, ψ, $\dot{\omega}$, T, Φ, которую решают численными методами. Определив $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, $\frac{\partial \psi}{\partial t}$, $\frac{\partial T}{\partial t}$ в каждом узле сетки, строят прогностические поля φ, ψ, T. Диагностические уравнения (4.4.10), (4.4.11) позволяют определить недостающие функции на каждом шаге по времени.

Для получения однозначного решения системы уравнений необходимо задать начальные и граничные условия. На боковых границах можно поставить фиктивные условия $\frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big| = \frac{\partial \psi}{\partial t}\Big|_\Gamma = \frac{\partial T}{\partial t}\Big|_\Gamma = 0$

и так называемое вязкое условие $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_{\Gamma}=0$ (n — нормаль к границе), которое означает, что в узлах, где решение не может быть получено, присваивают значения решений, полученных в ближайших внутренних узлах сетки. Верхнее краевое условие ставят в виде $\dot{\omega}|_{\zeta=0}=0$, а на нижней границе атмосферы принимают $w|_{\zeta=1,\,z=0}=0$. Из формулы для изобарической скорости в этом случае следует

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big|_{\zeta=1}=-\left(u\frac{\partial\Phi}{\partial x}+v\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\dot{\omega}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right)\Big|_{\zeta=1}. \qquad (4.4.12)$$

Рассмотрим, как задают начальные условия для функций φ, ψ, T, Φ, $\dot{\omega}$. Поскольку поле T задать сложнее, чем поле Φ, обычно используют результаты наблюдений за Φ, а T рассчитывают по уравнению статики. Начальные поля ψ определяют по полям Φ с помощью уравнения баланса, а поля φ можно строить с помощью полей ветра. Однако ветер наблюдается с недостаточной точностью и D рассчитывается с крупными ошибками, поэтому рассмотрим лишь принципиальную сторону вопроса: по полям составляющих ветра можно вычислить D и использовать ее при решении уравнения Пуассона (4.4.3), для чего на периметре области задают однородное граничное условие $\varphi|_{\Gamma}=0$. Построив поля φ, интегрируют (4.4.10) и рассчитывают значения $\dot{\omega}_{\zeta}$. Для вычисления интеграла весь атмосферный слой разбивают на небольшие слои, чтобы в каждом из них интеграл был достаточно мал, и заменяют его суммой интегралов. Определив $\dot{\omega}$ на всех счетных уровнях, интегрируют прогностические уравнения модели с целью расчета $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, $\frac{\partial\psi}{\partial t}$, $\frac{\partial T}{\partial t}$ в начальный момент времени. При известных правых частях все прогностические уравнения представляют собой уравнения Пуассона и могут быть решены относительно $\frac{\partial}{\partial t}$ итерационным методом.

Прогноз Φ осуществляется следующим образом. С помощью (4.4.12), где используют начальные значения u, v, $\dot{\omega}$, T, определяют $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)_{i,\,j,\,\zeta=1}$, затем прогностическое поле Φ. На всех остальных счетных уровнях поля Φ строят по прогностическим полям T с помощью уравнения статики, которое интегрируют по переменной ζ

$$R\overline{T}\ln\zeta\Big|_{\zeta_к}^{\zeta_{к+1}}=-\int\limits_{\zeta_к}^{\zeta_{к+1}}\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\,d\zeta.$$

Отсюда получают формулу для относительного геопотенциала, с помощью которой находят Ф вышележащей поверхности $\zeta_к$. Прогностические поля $\dot{\omega}_\zeta$ строят так же, как для начального момента времени. Повторяя все расчетные процедуры, получают прогноз полей φ, ψ, ω, T, Ф, а затем строят поля u, v с учетом соленоидальной и потенциальной компонент движения по (4.4.4).

Преимущество изложенного подхода заключается в том, что связь между полями давления и ветра задается более строго. Функцию тока ψ рассчитывают через Ф, а потенциал скорости φ — с помощью уравнения дивергенции. Если бы начальное поле ψ определялось через поле реального ветра, то связь между полями ветра и давления была установлена строже.

Глава 5. СХЕМЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПРОГНОСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И АНАЛИЗ ИХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СВОЙСТВ

5.1. Схемы численного интегрирования уравнений прогноза. Понятие об устойчивости разностных схем

Конечно-разностная аппроксимация эволюционных уравнений сопряжена с необходимостью решать ряд вопросов: как аппроксимировать производные по времени и производные по пространству; какую схему применить для аппроксимации по времени правой части уравнения (или системы уравнений); какую временну́ю схему численного интегрирования уравнений использовать; каким требованиям выбранная схема должна удовлетворять? Дадим ответы на поставленные вопросы.

При аппроксимации уравнений следует стремиться к возможно более высокой точности аппроксимации производных по пространству с помощью многоточечных сеточных аналогов, так как ошибки, обусловленные дифференцированием по пространству, оказываются много бо́льшими, чем ошибки дифференцирования по времени, и служат источником нелинейной вычислительной неустойчивости. Производные $\frac{\partial}{\partial t}$ обычно аппроксимируют схемами второго и даже первого порядка точности, поскольку погрешности численного решения дифференциального уравнения в частных производных определяются не только неадекватностью математической модели реальной атмосфере, но и точностью и плотностью задания начальных условий в дискретных узлах сетки.

Дадим определение основных временных разностных схем на примере уравнения

$$\frac{du}{dt} = F(u, t). \qquad (5.1.1)$$

Обозначим u^τ — приближенное значение некоторой метеовеличины в начальный момент времени $t_\tau = \Delta t\tau$; $u^{\tau+1}$ — искомое прогностическое значение, а $u^{\tau-1}$ — «предыстория». Построим различные разностные схемы для аппроксимации точной формулы прогноза на временном интервале $[\tau\cdot\Delta t,\ (\tau+1)\Delta t]$:

$$u^{\tau+1} = u^\tau + \int_{\tau\,\Delta t}^{(\tau+1)\,\Delta t} F(u,\ t)\,dt. \qquad (5.1.2)$$

Двухуровенные безытерационные схемы

1. **Схема Эйлера** (с вперед направленными разностями)

$$u^{\tau+1} = u^\tau + \Delta t F^\tau, \qquad (5.1.3)$$

в которой правая часть (5.1.1) представляет собой $F^\tau = F(u^\tau,\ \tau\Delta t)$. Таким образом подынтегральное выражение в точном решении (5.1.2) задано **явно**: центрировано относительно прогностического интервала, взято постоянным и равным значению на временном слое τ.

2. **Неявная схема односторонних разностей назад.** Если в (5.1.2) значение подынтегрального выражения берут постоянным и равным его значению на верхней границе $\tau+1$ временного интервала, то

$$u^{\tau+1} = u^\tau + \Delta t F^{\tau+1}, \qquad (5.1.4)$$

где $F^{\tau+1} = F(u^{\tau+1},\ (\tau+1)\Delta t)$.

3. **Схема трапеций.** Если в (5.1.2) F аппроксимируют как среднее значение его величин в начале и конце шага по времени, то получают неявную схему

$$u^{\tau+1} = u^\tau + \frac{\Delta t}{2}(F^\tau + F^{\tau+1}). \qquad (5.1.5)$$

Безытерационные двухуровенные схемы можно описать с помощью сеточного аналога

$$u^{\tau+1} = u^\tau + \Delta t\,(\alpha F^\tau + \beta F^{\tau+1}),\quad \alpha+\beta = 1. \qquad (5.1.6)$$

Двухуровенные итерационные схемы строят с целью повышения точности решения. Чтобы сделать их явными, используют итерационную процедуру «предиктор-корректор».

4. **Схема Эйлера с пересчетом** (схема Мацуно) предусматривает вначале расчет предварительного значения $u_*^{\tau+1}$ (предиктор) по схеме (5.1.3), а затем его коррекцию по схеме (5.1.4):

$$\begin{aligned} u_*^{\tau+1} &= u^\tau + \Delta t F^\tau, \\ u^{\tau+1} &= u^\tau + \Delta t F_*^{\tau+1}, \end{aligned} \qquad (5.1.7)$$

где $F_*^{\tau+1} \equiv F(u_*^{\tau+1},\ (\tau+1)\Delta t)$.

5. **Схема Хойна** строится с использованием схемы трапеций в корректоре

$$u_*^{\tau+1} = u^\tau + \Delta t F^\tau.$$
$$u^{\tau+1} = u^\tau + \frac{\Delta t}{2}(F^\tau + F_*^{\tau+1}). \qquad (5.1.8)$$

Схемы (5.1.7) и (5.1.8) можно описать с помощью одного конечно-разностного уравнения

$$u_*^{\tau+1} = u^\tau + \Delta t F^\tau,$$
$$u^{\tau+1} = u^\tau + \Delta t\,(\alpha F^\tau + \beta F^{\tau+1}). \qquad (5.1.9)$$

Заметим, что на первом шаге по времени ($\tau=1$) интегрирование можно осуществлять только по двухуровенным схемам, так как известно единственное начальное условие. Начиная со второго шага, когда известны прогноз на первом шаге u^τ и начальное значение $u^{\tau-1}$, можно строить трехуровенные схемы с учетом $u^{\tau-1}$, которое несет дополнительную информацию и позволяет аппроксимировать производную $\frac{\partial}{\partial t}$ центральными разностями. Такие схемы аппроксимируют точную формулу прогноза на интервале $[(\tau-1)\Delta t, (\tau+1)\Delta t]$

$$u^{\tau+1} = u^{\tau-1} + \int_{(\tau-1)\Delta t}^{(\tau+1)\Delta t} F(u, t)\,dt \qquad (5.1.10)$$

и обеспечивают лучшее приближение в дифференциальном уравнении.

Трехуровенные безытерационные схемы

6. **Схема центральных разностей** использует центрированную оценку интервала времени в (5.1.10), представляющую собой постоянную величину, равную его значению в середине двухшагового прогностического интервала

$$u^{\tau+1} = u^{\tau-1} + 2\Delta t F^\tau. \qquad (5.1.11)$$

7. **Схема Адамса — Бешфорта** использует значение F в (5.1.2), полученное в центральной точке интервала Δt путем линейной экстраполяции значений $F^{\tau-1}$ и F^τ

$$u^{\tau+1} = u^\tau + \frac{\Delta t}{2}(3F^\tau - F^{\tau-1}). \qquad (5.1.12)$$

Трехуровенные итерационные схемы

8. **Схема центральных разностей (трапеций)**

$$u_*^{\tau+1} = u^{\tau-1} + 2\Delta t F^{\tau},$$
$$u^{\tau+1} = u^{\tau-1} + \Delta t\,(F^{\tau} + F_*^{\tau+1}). \tag{5.1.13}$$

9. **Схема разностей назад**

$$u_*^{\tau+1} = u^{\tau-1} + 2\Delta t F^{\tau},$$
$$u^{\tau+1} = u^{\tau} + \Delta t F_*^{\tau+1}. \tag{5.1.14}$$

На практике используют множество других схем. Например, трехуровенные схемы типа схемы Адамса — Бешфорта (5.1.12) строят, используя различные правила получения оценок интеграла в точном решении (5.1.10). Существуют также итерационные схемы, использующие один предиктор и два корректора. При решении нелинейных эволюционных уравнений строят и более сложные пространственно-временные схемы. Используют и комбинации схем, применяя разные схемы для интегрирования различных членов уравнения, либо периодически включая в процесс интегрирования схемы, обладающие требуемыми свойствами. Необходимо лишь, чтобы приближенное решение, получаемое с помощью численной схемы, сходилось к точному решению дифференциального уравнения.

Для оценки и выбора схем из почти неограниченного числа вариантов опираются на следующие критерии: согласованность, точность, устойчивость и эффективность.

Согласованность схемы численного интегрирования дифференциального уравнения состоит в том, что алгебраическая аппроксимация должна переходить в исходное непрерывное уравнение в пределе бесконечно малых временного и пространственного шагов. Например, с однородным линейным уравнением адвекции (переноса)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad u = u(x,\ t), \quad C = \text{const} \tag{5.1.15}$$

(C — скорость переноса вдоль оси x) будет согласована явная схема центральных разностей (5.1.11), так как

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{u\,[(\tau+1)\,\Delta t,\ q\,\Delta x] - u\,[(\tau-1)\,\Delta t,\ q\,\Delta x]}{2\Delta t} +$$
$$+ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta t\to 0}} \frac{C\,\{u\,[\tau\,\Delta t,\ (q+1)\,\Delta x] - u\,[\tau\,\Delta t,\ (q-1)\,\Delta x]\}}{2\Delta x} = 0. \tag{5.1.16}$$

Поскольку уравнения динамики атмосферы обратимы во времени, то желательным свойством согласованности сеточной аппрок-

симации с дифференциальным уравнением является *совпадение их свойств симметрии относительно времени.* Это означает, что если движение частицы воздуха проинтегрировать вперед по времени в заданном поле вынуждающей силы, а затем обратить время и скорость, то частица должна вернуться в исходную точку по пройденному пути. Обратимые во времени схемы обеспечивают центрированные во времени разности. Таким свойством обладают, например, схема (5.1.11) и схема Кранка — Николсона, которую запишем для уравнения переноса:

$$\frac{u_q^{\tau+1}-u_q^{\tau}}{\Delta t}+C\frac{u_{q+1}^{\tau+\frac{1}{2}}-u_{q-1}^{\tau+\frac{1}{2}}}{2\Delta x}=0, \qquad (5.1.17)$$

$$q=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots;\quad x=q\Delta x;\quad \tau=0,\ 1,\ \ldots,\ N;\quad t^{\tau}=\tau\Delta t.$$

Однако согласованность схемы еще не гарантирует сходимости численного решения к точному решению дифференциальной задачи.

Точность и устойчивость разностных схем связаны с требованием малости отклонения вычисленных значений координат воздушных частиц и скоростей от точного решения дифференциального уравнения. Точность связана с локальными погрешностями, которые в атмосферных моделях обусловлены физическими упрощениями; погрешностями дискретизации; ошибками, содержащимися в исходных данных; погрешностями округления, проистекающими из-за конечной длины представления чисел в слове компьютера.

Погрешности аппроксимации можно описать либо на языке выборки, где они проявляются как сложные спектральные компоненты, либо исходя из разности между непрерывными и дискретными уравнениями. Во втором случае *мерой малости погрешности аппроксимации уравнения в целом служит порядок разностной аппроксимации* (n), который, как и для отдельных производных, означает, что при малых Δt и Δx ошибки аппроксимации *) про-

*) Ошибка разностного приближения равна ошибке, которая имеет место при отбрасывании членов высоких порядков при разложении функции в ряд Тейлора в окрестности заданной точки. Например, ошибка аппроксимации $\frac{\partial u}{\partial x}$ направленными разностями в (5.1.19) равна

$$\varepsilon=\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}-\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\Delta x}\left[(u)_x+(u')_x\Delta x+(u'')_x\frac{\Delta x^2}{2!}+\ldots\right]-$$
$$-\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_x\Delta x+\ldots, \qquad (5.1.18)$$

т. е. сумме членов, которые были отброшены в ряду Тейлора при формировании приближения. Самая низкая степень приращения аргумента Δx (или Δt), фигурирующая в выражении для ошибки ε, является порядком аппроксимации (n). Аппроксимация (5.1.18) является аппроксимацией первого порядка точности: $O(\varepsilon)=O(\Delta x)$, как и аппроксимация $\frac{\partial u}{\partial t}$ в (5.1.17): $O(\varepsilon)=O(\Delta t)$. Точность аппроксимации повышается при увеличении порядка $O(\Delta x^n,\ \Delta t^n)$.

порциональны Δt^n и Δx^n. Так, схема (5.1.3) в случае замены $\frac{\partial u}{\partial x}$ в (5.1.15) направленными разностями

$$\frac{u_q^{\tau+1} - u_q^\tau}{\Delta t} + C\frac{u_{q+1}^\tau - u_q^\tau}{\Delta x} = 0, \quad C < 0 \tag{5.1.19}$$

аппроксимирует уравнение с первым порядком по t и по x.

Устойчивость разностной схемы связана с распространением погрешностей. Если влияние даже малых погрешностей аппроксимации быстро распространяется, то схема приводит к абсурдным результатам.

Численная схема будет устойчива, если малая погрешность, внесенная на любом уровне по времени, не накапливается.

Чтобы получить количественную меру устойчивости схемы, необходимо найти уравнение, описывающее эволюцию погрешностей, и исследовать, как ведут себя решения такого уравнения при переходе от одного временного слоя точек к другому. В качестве примера для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C\frac{\partial u}{\partial x} = F(x, t) \tag{5.1.20}$$

возьмем схему Эйлера

$$\frac{u_q^{\tau+1} - u_q^\tau}{\Delta t} + C\frac{u_{q+1}^\tau - u_q^\tau}{\Delta x} = f_q^\tau, \tag{5.1.21}$$

где f_q^τ — разностный аналог функции $F(x, t)$. Откуда получаем алгоритм расчета прогностических значений $u_q^{\tau+1}$ в точках q по данным на предыдущем слое τ на основе дифференциального уравнения (5.1.20)

$$u_q^{\tau+1} = \left(1 + \frac{C\Delta t}{\Delta x}\right)u_q^\tau - \frac{C\Delta t}{\Delta x}u_{q+1}^\tau + \Delta t f_q^\tau. \tag{5.1.22}$$

Точное решение уравнения (5.1.20) при начальных значениях

$$u(x, 0) = G(x) \tag{5.1.23}$$

дается формулой

$$u(x, t) = G(x - Ct) + \int_0^t F(x - Ct + Ct', t')\,dt'. \tag{5.1.24}$$

Начальные значения задачи преобразуем к виду

$$u_q^0 = g_q. \tag{5.1.25}$$

Выясним, будет ли решение, генерируемое вычислительным алгоритмом (5.1.22), близко к точному решению (5.1.24) дифференциальной задачи. Представим значение сеточной функции u_q^τ в виде

$$u_q^\tau = U(x_q,\ t^\tau) + \varepsilon u_q^\tau, \tag{5.1.26}$$

где $U(x_q,\ t^\tau)$ — точное значение непрерывной функции $u(x,\ t)$ в точке x_q в момент времени t^τ, получаемое из (5.1.24); εu_q^τ — ошибка разностной аппроксимации. Подстановка (5.1.26) в схему (5.1.21) дает

$$\frac{\varepsilon u_q^{\tau+1} - \varepsilon u_q^\tau}{\Delta t} + C\frac{\varepsilon u_{q+1}^\tau - \varepsilon u_q^\tau}{\Delta x} = \\ = f_q^\tau - \left(\frac{U_q^{\tau+1} - U_q^\tau}{\Delta t} - C\frac{U_{q+1}^\tau - U_q^\tau}{\Delta x}\right). \tag{5.1.27}$$

Оценим правую часть (5.1.27). Пусть $U(x,\ t)$ — гладкая функция, тогда при малых Δt и Δx можно записать

$$U_q^{\tau+1} = U_q^\tau + \Delta t\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_q^\tau + O(\Delta t^2), \\ U_{q+1}^\tau = U_q^\tau + \Delta x\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_q^\tau + O(\Delta x^2). \tag{5.1.28}$$

Откуда

$$\frac{U_q^{\tau+1} - U_q^\tau}{\Delta t} + C\frac{U_{q+1}^\tau - U_q^\tau}{\Delta x} = \left(\frac{\partial U}{\partial t} + C\frac{\partial U}{\partial x}\right)_q^\tau + O(\Delta t,\ \Delta x). \tag{5.1.29}$$

Поскольку функция $U(x,\ t)$ удовлетворяет уравнению (5.1.20), то (5.1.29) означает, что

$$\frac{U_q^{\tau+1} - U_q^\tau}{\Delta t} + C\frac{U_{q+1}^\tau - U_q^\tau}{\Delta x} = f_q^\tau + O(\Delta t,\ \Delta x). \tag{5.1.30}$$

Сравнивая (5.1.30) с (5.1.21), видим, что решение дифференциальной задачи $U(x,\ t)$ удовлетворяет сеточному уравнению (5.1.21) с точностью до порядка $O(\Delta t,\ \Delta x)$, т. е. *аппроксимация имеет место*. Подставив правую часть (5.1.30) в (5.1.27), получаем, что процесс эволюции ошибки εu при переходе от слоя точек τ к слою $\tau+1$ описывается формулой

$$\varepsilon u_q^{\tau+1} = \left(1 + \frac{C\Delta t}{\Delta x}\right)\varepsilon u_q^\tau - \frac{C\Delta t}{\Delta x}\varepsilon u_{q+1}^\tau + \Delta t O(\Delta t,\ \Delta x). \tag{5.1.31}$$

Откуда вытекает, что *ошибка аппроксимации является сложной функцией пространственного индекса q, а ее порядок не превышает* $\Delta t \cdot O(\Delta t,\ \Delta x)$.

Пусть величины C, Δx, Δt в (5.1.31) удовлетворяют семейству неравенств

$$0 \leqslant -\mu \leqslant 1, \quad \mu = \frac{C\,\Delta t}{\Delta x}. \tag{5.1.32}$$

Тогда коэффициенты при εu_q^τ и εu_{q+1}^τ положительные, поэтому

$$|\varepsilon u_q^{\tau+1}| \leqslant (1+\mu)|\varepsilon u_q^\tau| + (-\mu)|\varepsilon u_{q+1}^\tau| + \Delta t O(\Delta t, \Delta x) \leqslant$$
$$\leqslant \max(|\varepsilon u_q^\tau|, |\varepsilon u_{q+1}^\tau|) + \Delta t O(\Delta t, \Delta x). \tag{5.1.33}$$

Норму решения разностной схемы определим следующим образом:

$$\|\varepsilon u^\tau\| = \max |\varepsilon u_q^\tau|. \tag{5.1.34}$$

Тогда из (5.1.33) следует

$$\|\varepsilon u^{\tau+1}\| \leqslant \|\varepsilon u^\tau\| + \Delta t O(\Delta t, \Delta x), \tag{5.1.35}$$

т. е. увеличение максимальной погрешности аппроксимации по пространству за один шаг по времени не превышает $\Delta t \cdot O(\Delta t, \Delta x)$. После прогноза на N шагов норма решения

$$\|\varepsilon u^N\| \leqslant \|\varepsilon u^0\| + N\,\Delta t O(\Delta t, \Delta x). \tag{5.1.36}$$

Пусть конечное $t = N\Delta t$, шаги Δt, $\Delta x \to 0$, а $N \to \infty$. Так как погрешность аппроксимации начальных условий $\varepsilon u_q^0 = G_q - g_q = 0$, то из (5.1.35) вытекает

$$\|\varepsilon u(t)\| = O(\Delta t, \Delta x). \tag{5.1.37}$$

Таким образом, доказано, что если при Δt, $\Delta x \to 0$ выполняются условия (5.1.32), то решение разностной задачи (5.1.21), (5.1.25) сходится к решению дифференциальной задачи (5.1.20), (5.1.23), которую она аппроксимирует. *Если хотя бы одно из условий (5.1.32) нарушено, отклонение сеточного решения u_q^τ от точного $U(x_q, t^\tau)$ может быть любым.*

Выясним, какой характер имеет численное решение u_q^τ при конечных значениях Δt, Δx и как оно меняется при их уменьшении. Представим погрешность εu_q^τ в (5.1.31) в виде суммы различных погрешностей, одна из которых имеет осциллирующий характер:

$$\varepsilon u_q^\tau = \delta(-1)^q, \quad O(\delta) = \Delta t O(\Delta t, \Delta x). \tag{5.1.38}$$

Проследим за эволюцией этой компоненты ошибки. С этой целью найдем $\varepsilon u_q^{\tau+1}$, $\varepsilon u_q^{\tau+2}$, ..., εu_q^N. Вклад члена $\Delta t \cdot O(\Delta t, \Delta x)$, вносимый на следующих шагах, учитывать не будем. На основании (5.1.31) получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon u_q^{\tau+1} &= (1+2\mu)\delta(-1)^q, \\ \varepsilon u_q^{\tau+2} &= (1+2\mu)^2\delta(-1)^q, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon u_q^{\tau+N} &= (1+2\mu)^N\delta(-1)^q. \end{aligned} \tag{5.1.39}$$

Видно, что эволюция осциллирующей компоненты ошибки определяется величиной $1+2\mu$. Если

$$|1+2\mu|\leqslant 1, \tag{5.1.40}$$

ошибка затухает либо не увеличивается. В противном случае для конечного $t=N\Delta t$ при Δt, $\Delta x\to 0$ формула (5.1.39) дает

$$\varepsilon u_q^{\tau+1}=|1+2\mu|^{t/\Delta t}\Delta t O(\Delta t,\ \Delta x), \tag{5.1.41}$$

т. е. ошибка нарастает экспоненциально, а решение u_q^{τ}, содержащее ее, превращается в хаотическую последовательность больших чисел. Описанный эффект называют **вычислительной неустойчивостью**, а неравенство (5.1.40), эквивалентное (5.1.32), — **достаточным условием устойчивости. Для корректно поставленной задачи** *) **с начальными условиями, соответствующей линейному эволюционному уравнению и аппроксимированной с помощью согласованной схемы, устойчивость является необходимым и достаточным условием сходимости сеточного решения к точному.**

При исследовании устойчивости большую роль играет специфика задачи. Прямая оценка решений через правую часть, как показано выше, удается не всегда. Для широкого класса задач, в частности для систем уравнений, более перспективен метод Неймана.

5.2. Физические и вычислительные моды. Вычислительная дисперсия **)

Обычно анализ вычислительной устойчивости разностных схем выполняют для линейных аналогов нелинейных уравнений. Однако устойчивость линейных задач является необходимым, но недостаточным условием устойчивости нелинейной задачи.

Рассмотрим уравнение (5.1.15), полагая $C>0$, а величину u периодической по x:

$$u(x+L,\ t)=u(x,\ t), \tag{5.2.1}$$

где L — длина прогностической области $\mathscr{D}$ (например, длина круга широты). Точное решение уравнения (5.1.15) с граничными условиями (5.2.1) имеет вид

$$u(x,\ t)=F(x-Ct), \tag{5.2.2}$$

где F — функция, определяемая начальными условиями. Решение (5.2.2) в системе координат, движущейся со скоростью C, стационарно. Так как решение уравнения (5.1.15) можно представить бесконечной суммой гармонических волн, то в качестве началь-

*) Задача поставлена корректно, если ее решение существует, единственно и непрерывно зависит от начальных условий.

**) Параграфы 5.2—5.4, 5.6 составлены совместно с И. В. Царицыным.

ного условия возьмем волну с волновым числом m и комплексной амплитудой $U(0)$ в виде

$$u(x,\ 0) = U(0)\, e^{imx}. \tag{5.2.3}$$

Из (5.2.2), (5.2.3) вытекает, что

$$F(x - Ct) = U(0)\, e^{im(x-Ct)}. \tag{5.2.4}$$

Поскольку

$$U(t) = U(0)\, e^{-i\sigma t}, \tag{5.2.5}$$

где частота

$$\sigma = mC, \tag{5.2.6}$$

точное решение уравнения (5.1.15) принимает вид

$$u(x,\ t) = U(t)\, e^{imx} \tag{5.2.7}$$

и показывает, что начальная волна с увеличением t перемещается в области $\mathscr{D}$ с постоянной фазовой скоростью C_Φ, не зависящей от m и совпадающей со скоростью адвекции C. При этом модуль амплитуды волны остается постоянным: $|U(t)| = |U(0)|$, а фаза решения $\theta = -\sigma t$. На рис. 3 показано, что в случае непрерывного изменения аргументов x и t фиксированной частоте σ_0 соответствует одно волновое число m_0, а $\sigma_0/m_0 = C_\Phi = C = \operatorname{tg}\alpha$ не зависит от m_0.

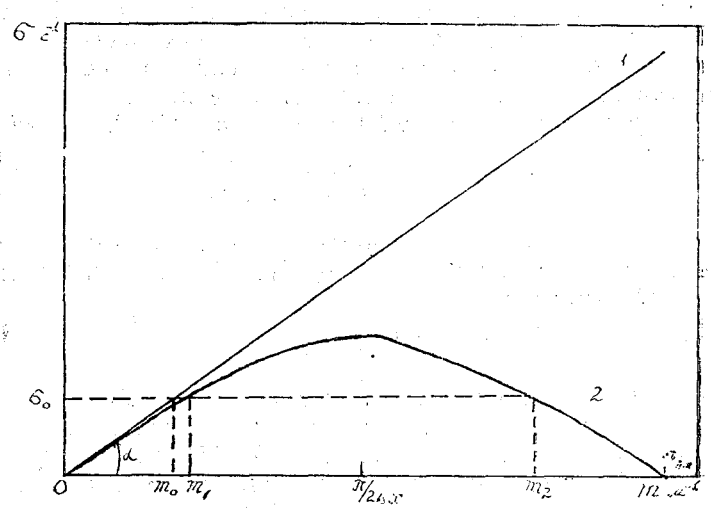

Рис. 3. Зависимость волнового числа m от частоты σ для уравнения адвекции в непрерывной (1) и дифференциально-разностной (2) формах.

Решение уравнения (5.1.15) при гладком начальном условии (5.2.3) можно представить в виде ряда по собственным функциям оператора $A=C\frac{\partial}{\partial x}$ этого уравнения. Такими собственными функциями являются экспоненты $\omega=e^{imx}$, а соответствующие собственные числа —

$$\lambda_m = imC_\Phi = i\sigma. \tag{5.2.8}$$

Если собственные функции искать в виде $\omega=e^{im(x-Ct)}$, то для любого m при $C=C_\Phi$ величины

$$\lambda_m = 0. \tag{5.2.8'}$$

Поэтому (5.2.7) можно интерпретировать как m-ю компоненту (моду) решения уравнения (5.1.15) в виде ряда по собственным функциям оператора этого уравнения. При начальном условии (5.2.3) в такой ряд входит только одна мода. Собственные функции линейного (или линеаризованного) дифференциального оператора (например, такого, как A) называют **нормальными модами**[1].

Зададим в области $\mathscr{D}$ одномерную сетку с постоянным шагом Δx, представим $\frac{\partial u}{\partial x}$ в (5.1.15) с помощью центральных разностей и запишем его в дифференциально-разностной форме[2] для точки q:

$$\frac{\partial u_q}{\partial t} + C\frac{u_{q+1}-u_{q-1}}{2\Delta x} = 0. \tag{5.2.9}$$

Определим собственные функции и собственные числа оператора $A_{\Delta x}$ уравнения (5.2.9). Для этого необходимо решить спектральную задачу

$$(A_{\Delta x}\omega)_q = C\frac{\omega_{q+1}-\omega_{q-1}}{2\Delta x} = \lambda_m\omega_q. \tag{5.2.10}$$

Собственные функции будем искать в виде $\omega_q=e^{iqm\Delta x}$. Тогда на основании (5.2.10) получим

$$\lambda_m = i\frac{C}{\Delta x}\sin(m\Delta x). \tag{5.2.11}$$

Сравнивая (5.2.8) и (5.2.11), видим, что решение уравнения (5.2.9) с начальными условиями типа (5.2.3) имеет вид волны

$$u_q(0) = U(0)\,e^{imq\Delta x}, \tag{5.2.12}$$

---

[1] Нормальными модами часто называют только собственные функции линеаризованных уравнений.

[2] Гибрид дифференциального и разностного уравнений, в котором производная $\frac{\partial}{\partial t}$ непрерывна, а производная по пространству аппроксимирована некоторым разностным аналогом.

перемещающейся с фазовой скоростью

$$C_\Phi = C\,\frac{\sin(m\,\Delta x)}{m\,\Delta x}, \qquad (5.2.13)$$

отличающейся от скорости адвекции C и зависящей от m, т. е. имеет место **вычислительная дисперсия**. При $m\Delta x \to 0$ $C_\Phi \to C$. С учетом (5.2.6) из (5.2.8) и (5.2.11) получаем соотношение для частоты

$$\sigma = \frac{C}{\Delta x}\sin(m\,\Delta x). \qquad (5.2.14)$$

На рис. 4 кривая соответствует дисперсионному соотношению (5.2.14) при фиксированных m, C, Δx. Видно, что в дифференциально-разностном случае фиксированной частоте σ_0 соответствуют два волновых числа m_1 и m_2, причем $m_1 \leqslant m_2$, а $m_1 + m_2 = \pi/\Delta x$. При $\sigma_0 \to 0$ $m_1 \to m_0 \to 0$. Отсюда вытекает, что мода

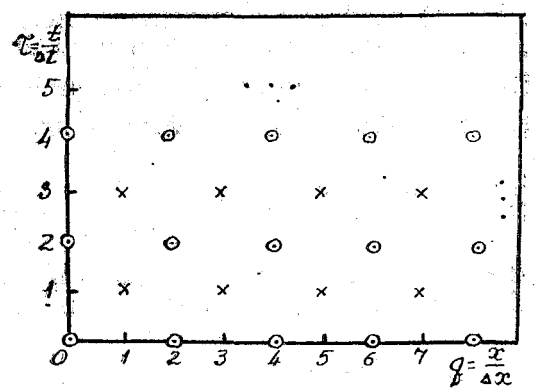

Рис. 4. Узлы, в которых получается решение уравнения (5.3.14) на каждом шаге по времени.

$$u_q(t) = U(t)\,e^{im_1 q\,\Delta x} \qquad (5.2.15)$$

является **физической модой**, поскольку при $\sigma_0 \to 0$ она стремится к физическому решению задачи (5.2.7). Одновременно $m_2 \to \pi/\Delta x$, поэтому моду

$$u_q(t) = U(t)\,e^{im_2 q\,\Delta x}, \qquad (5.2.16)$$

удаляющуюся с уменьшением σ от точного решения, называют **вычислительной модой.** Ее существование обусловлено использованием трехточечной схемы аппроксимации производной $\frac{\partial u}{\partial \overline{x}}$. Если использовать двухточечные схемы первого порядка точности $O(\Delta x)$, то вычислительная мода не возникает.

Энергия волны с волновым числом m распространяется с групповой скоростью $C_г = \frac{d}{dm}(C_ф m)$, поэтому для непрерывного случая $C_г = C_ф = C$, а для дифференциально-разностного

$$C_г = C\cos(m\Delta x). \qquad (5.2.17)$$

Из анализа формул (5.2.13), (5.2.17) и рис. 4 следует, что при $m > \pi/2\Delta x$, т. е. для волн длиной $L_m = 2\pi/m < 4\Delta x$ $C_г$ противоположна по знаку скоростям $C_ф$ и C, поэтому энергия вычислительной моды распространяется навстречу потоку и направлению распространения отдельных волн. Поскольку схемы первого порядка точности $O(\Delta x)$ дают слишком сглаженное решение, часто используют многоточечные схемы, дающие вычислительные моды. Важно только, чтобы амплитуда последних оставалась малой.

Вычислительные моды, вызванные использованием многоточечных схем аппроксимации пространственных производных, необходимо отличать от вычислительных мод, возникающих вследствие многослойной аппроксимации производной по времени. В этом случае для фиксированного m_0 имеется более одного значения σ. Такие вычислительные моды возникают даже при аппроксимации пространственной производной с помощью схем первого порядка точности. В современных прогностических моделях многослойные схемы аппроксимации по времени объединяют с многоточечными схемами по пространственным переменным. Поэтому в общем случае фиксированному m_0 соответствует более одного σ, а фиксированному σ_0 — более одного m.

5.3. Анализ устойчивости конечно-разностного решения по Нейману

Пусть уравнение (5.1.15) при $C > 0$ интегрируется на сеточной области $\mathscr{D}_{\Delta x}$ шагами по времени $\Delta t = \text{const} = t/\tau$. Предположим, что начальные данные в узлах $\mathscr{D}_{\Delta x}$ представимы в виде дискретного гармонического ряда Фурье, а компонента разложения имеет вид гармонической волны (5.2.12)

$$u_q^{(0)} = U^{(0)} e^{iqm\Delta x}. \qquad (5.3.1)$$

Исследуем устойчивость компонент конечно-разностного решения уравнения (5.1.15) при всех начальных условиях вида (5.3.1). Для линейного дифференциального уравнения с периодическими граничными условиями устойчивость каждой компоненты Фурье является достаточным условием устойчивости их суммы, т. е. конечно-разностного решения. Анализ устойчивости отдельных волн проиллюстрируем на двух примерах.

1. Запишем явную схему аппроксимации уравнения (5.1.15) первого порядка точности $O(\Delta t, \Delta x)$ с односторонней разностью

по x, направленной «против потока»:

$$\frac{u_q^{\tau+1} - u_q^\tau}{\Delta t} + C\frac{u_q^\tau - u_{q-1}^\tau}{\Delta x} = 0. \qquad (5.3.2)$$

Перепишем (5.3.2) в виде

$$u_q^{\tau+1} = (1-\mu)\,u_q^\tau + \mu u_{q-1}^\tau, \quad \mu = \frac{C\Delta t}{\Delta x}. \qquad (5.3.3)$$

Подставив сюда гармоническую волну (5.3.1) при $\tau=0$, получим

$$U^{(1)} = \lambda U^{(0)}, \qquad (5.3.4)$$

где множитель перехода от решения на временном слое $\tau=0$ к решению на слое $\tau=1$ определяется формулой

$$\lambda = 1 - \mu + \mu e^{im\Delta x}. \qquad (5.3.5)$$

Очевидно, в этом случае λ не зависит от q и τ и при фиксированном m является константой. Поэтому можно записать: $U^{(\tau)} = \lambda^\tau U^{(0)}$ или

$$|U^{(\tau)}| = |\lambda|^\tau |U^{(0)}|. \qquad (5.3.6)$$

Таким образом, возмущение вида (5.3.1), внесенное в начальные данные задачи (5.3.2), вызовет возмущение с амплитудой $\mathbf{U}^{(\tau)}$, которая не более чем в $|\lambda|^\tau$ раз превосходит по модулю возмущение в начальных данных. Для устойчивости конечно-разностного решения требуется, чтобы оно было ограниченным. Применительно к модулю амплитуды это требование запишется так: $|U^{(\tau)}| = |\lambda|^\tau |U^{(0)}| < \kappa_1$, где κ_1 — конечное число. Отсюда: $\tau \ln|\lambda| < \ln(\kappa_1/|U^{(0)}|) = \kappa_2$ или $\ln|\lambda| < \kappa_2 \Delta x/t$, что при конечном t равносильно условию

$$\ln|\lambda| \leqslant O(\Delta t), \qquad (5.3.7)$$

Пусть $|\lambda| = 1 + \delta$. Поскольку

$$\ln(1+\delta) = \delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} + O(\delta^4) \approx \delta, \qquad (5.3.8)$$

то, с учетом (5.3.7), имеем $1+\delta \leqslant 1 + O(\Delta t)$ и, следовательно,

$$|\lambda| \leqslant 1 + O(\Delta t). \qquad (5.3.9)$$

Выражение (5.3.9) называют **необходимым спектральным условием устойчивости по Нейману.** Из (5.3.8) следует, что $|\lambda| = e^\delta$, а это означает, что критерий (5.3.9) допускает рост точного решения со временем, но не более, чем экспоненциальный. При этом разностное решение также может расти экспоненциально, однако должно оставаться ограниченным на конечном интервале времени. Точное решение уравнения (5.1.15) со временем не растет, поэто-

му необходимое условие устойчивости (5.3.9) заменяется **достаточным условием**

$$|\lambda| \leqslant 1, \tag{5.3.10}$$

которое означает, что спектр λ_m (полный набор собственных чисел изучаемого оператора перехода (5.3.3), ставящего в силу конечно-разностного уравнения (5.3.2) для любого q из области $\mathscr{D}_{\Delta x}$ в соответствие функции u_q^{τ}, определяемой на временном слое τ, функцию $u_q^{\tau+1}$ на слое $\tau+1$) должен лежать в круге единичного радиуса на комплексной плоскости.

Собственными функциями оператора перехода являются гармоники $\omega_q = e^{imq\Delta x}$, а собственными числами — множители перехода, определяемые выражением (5.3.5). Если для конечно-разностной схемы

$$|\lambda| \begin{cases} = 1, \text{ схему называют нейтральной;} \\ < 1, \text{ схему называют диссипативной;} \\ > 1, \text{ схему называют неустойчивой.} \end{cases}$$

Диссипативные и нейтральные схемы являются устойчивыми.

Для нелинейного уравнения адвекции устойчивость отдельных гармоник не гарантирует устойчивости схемы в целом. Если начальные данные имеют разрыв, приведенные оценки не гарантируют сходимости конечно-разностного решения к точному даже в линейном случае.

Выясним теперь, при каких μ выполняется критерий (5.3.10). Используя формулу Эйлера для экспоненты и правило определения модуля комплексного числа, из (5.3.5) получим

$$|\lambda| = [1 - 2\mu(1-\mu)(1-\cos m\Delta x)]^{1/2}, \tag{5.3.11}$$

Поскольку $\mu \geqslant 0$, то при $1-\mu \geqslant 0$ критерий (5.3.10) будет выполняться. Так как $\mu = \frac{C\Delta t}{\Delta x}$, получаем критерий линейной устойчивости, совпадающий с критерием Куранта — Фридрихса — Лёви (КФЛ):

$$\frac{C\Delta t}{\Delta x} \leqslant 1. \tag{5.3.12}$$

С уменьшением m (с увеличением длины волны L_m) $|\lambda| \to 1$, но в области устойчивости $\mu \leqslant 1$ численное решение всегда оказывается затухающим.

2. Проанализируем схему для уравнения (5.1.15), в которой разность по x направлена «по потоку» ($C > 0$)

$$\frac{u_q^{\tau+1} - u_q^{\tau}}{\Delta t} + C\,\frac{u_{q+1}^{\tau} - u_q^{\tau}}{\Delta x} = 0. \tag{5.3.13}$$

В этом случае $\lambda = 1 - \mu - \mu e^{im\Delta x}$, а $|\lambda|^2 = 1 + 2\mu(1+\mu)(1-\cos m\Delta x)$. Следовательно, при любом $\mu > 0$ схема (5.3.13) неустойчива, т. к. здесь ошибки конечно-разностной аппроксимации распространяются вдоль потока и возрастают. В схеме «против потока» ошибки гасятся потоком и не распространяются.

Вернемся к вопросу о вычислительных модах. Рассмотрим аппроксимацию уравнения (5.1.15) явной схемой второго порядка точности $O(\Delta t^2, \Delta x^2)$ с использованием центральных разностей по пространству и времени

$$\frac{u_q^{\tau+1} - u_q^{\tau-1}}{2\Delta t} + C\frac{u_{q+1}^{\tau} - u_{q-1}^{\tau}}{2\Delta x} = 0. \qquad (5.3.14)$$

Подставив в (5.3.14) решение (5.3.1), получим

$$U^{(\tau+1)} = U^{(\tau-1)} - 2i\mu \sin(m\Delta x)\, U^{(\tau)} \qquad (5.3.15)$$

и выясним, как дискретизация по времени повлияла на частоту гармонической волны. Рассмотрим спектральную задачу

$$(A_{\Delta x}(\omega)_q^{(\tau)} = \frac{\omega_q^{\tau+1} - \omega_q^{\tau-1}}{2\Delta t} + C\frac{\omega_{q+1}^{\tau} - \omega_{q-1}^{\tau}}{2\Delta x} = \lambda_m \omega_q, \qquad (5.3.16)$$

собственные функции которой будет искать в виде $\omega_q = e^{im(q\Delta x - C\tau\Delta t)}$. Подставляя ω_q в (5.3.16), с учетом (5.2.6), (5.2.8′) получим

$$\lambda_m = \frac{1}{\Delta t}[\mu \sin(m\Delta x) - \sin(\sigma\Delta t)] = 0. \qquad (5.3.17)$$

Отсюда при $\Delta t \to 0$ величина λ_m стремится к значению, определенному соотношением (5.2.11). Из (5.3.17) вытекает, что

$$\sigma = \frac{1}{\Delta t}\arcsin[\mu \sin(m\Delta x)] \qquad (5.3.18)$$

при $\Delta t \to 0$ стремится к значению, определенному соотношением (5.2.14). Частота (5.3.18) будет вещественной, если $|\mu \sin(m\Delta x)| \leqslant 1$. Поэтому схема центральных разностей является устойчивой с критерием устойчивости (5.3.12).

Выражение (5.3.15) с учетом (5.3.6) и $p = -\mu \sin(m\Delta x)$ преобразуем к виду

$$\lambda^2 - 2ip\lambda - 1 = 0, \qquad (5.3.19)$$

Откуда

$$\lambda_{1,2} = ip \pm \sqrt{1 - p^2}, \qquad (5.3.20)$$

т. е. решению с амплитудой $U^{(\tau-1)}$ соответствует на шаге τ два конечно-разностных решения с амплитудами $U_1^{(\tau)} = a_1 U^{(\tau-1)}$, $U_2^{(\tau)} =$

$= \lambda_2 U^{(\tau-1)}$. Поскольку $(1-p^2)^{1/2} \simeq 1 - p^2/2 + p^4/8 + O(p^6)$, то при $\Delta t \to 0$, $p \to 0$ $\lambda_1 = 1 + ip + O(p^2) = 1 + O(\Delta t) \to 1$, а $\lambda_2 = -1 + ip + O(p^2) = -1 + O(\Delta t) \to -1$. Для точного решения при $\Delta t \to 0$ множитель $\lambda = |\lambda| e^{-i\sigma \Delta t} \to 1$. Поэтому решения, связанные с λ_1 и λ_2, называют соответственно физической и вычислительной модами. Поскольку уравнение (5.1.15) линейное, то **разностное решение u_q^τ для фиксированного m можно представить линейной комбинацией физической и вычислительной мод.** Если использовать начальное условие (5.3.1), решение можно записать в виде

$$u_q^\tau = \lambda_1^\tau \frac{u_q^{(1)} - \lambda_2 u_q^{(0)}}{\lambda_1 - \lambda_2} + \lambda_2^\tau \frac{u_q^{(1)} - u_q^{(0)}}{\lambda_2 - \lambda_1}. \qquad (5.3.21)$$

Для решения уравнения (5.1.15) необходимо одно начальное условие вида (5.2.3). Для трехслойного по времени уравнения (5.3.14), как видно из (5.3.21), требуется два начальных условия: физическое $u_q^{(0)}$ и вычислительное $u_q^{(1)}$. На рис. 4 показаны узлы, в которых получают решение уравнения (5.3.14) на четных (О) и нечетных (+) шагах по времени. Поскольку при $\Delta t \to 0$ $\lambda_2 \to -1$, вычислительная мода меняет знак в ходе численного интегрирования. Из (5.3.21) при $\Delta t \to 0$ в узлах-кружочках получаем решение, близкое к физической моде, определяемое физическими начальными условиями, а в узлах-крестиках — решение, близкое к вычислительной моде, определяемое вычислительными начальными условиями. Схему расчета *«leap — frog»*, показанную на рис. 4, широко применяют на практике. Это объясняется тем, что, например, для схемы (5.3.14) в области устойчивости $|\lambda_2| = 1$ и вычислительная мода остается нейтральной (постоянной по модулю с увеличением t). Однако для нелинейных уравнений это не так, поэтому необходимо следить, чтобы решения в узлах-крестиках и в узлах-кружочках «не разделялись» при $\Delta t \to 0$, что может привести к вычислительной неустойчивости.

Вычислительная мода искажает решение, поэтому ее необходимо подавлять. Этому способствует, например, периодическое применение в ходе численного интегрирования уравнения (5.1.15) наряду с трехслойной схемой центральных разностей любой двухслойной схемы, т. к. они исключают вычислительную моду; использование трехслойных схем (или их комбинаций), для которых при $\Delta t \to 0$ $|\lambda_2| \to 0$, а также полунеявных схем; использование наиболее точных схем расчета начального условия, на выходе которых вычислительная мода имеет маленькую амплитуду (напр., таким свойством обладает схема Хойна), а также любой многоуровенной схемы, селективно подавляющей ложные решения. Покажем последнее на примере двухшаговой схемы Лакса — Вендрофа, построенной применительно к уравнению (5.1.15) с помощью шаблона пространственно-временной сетки, изображенного на рис. 5.

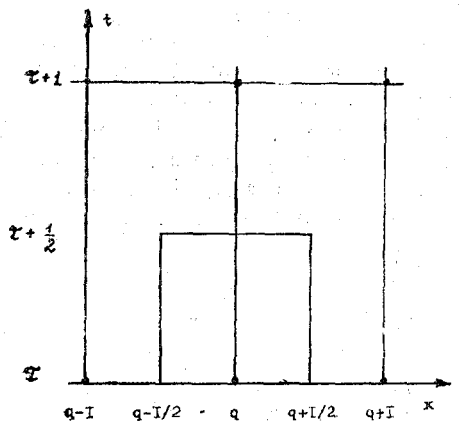

Рис. 5. Шаблон пространственно-временной сетки для построения схемы Лакса-Вендрофа.

$$\frac{u^{\tau+\frac{1}{2}}_{q+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(u^{\tau}_{q+1} + u^{\tau}_{q})}{\Delta t/2} = -C\frac{u^{\tau}_{q+1} - u^{\tau}_{q}}{\Delta x},$$
$$\frac{u^{\tau+\frac{1}{2}}_{q-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(u^{\tau}_{q} + u^{\tau}_{q-1})}{\Delta t/2} = -C\frac{u^{\tau}_{q} - u^{\tau}_{q-1}}{\Delta x}; \qquad (5.3.22)$$

$$\frac{u^{\tau+1}_{q} - u^{\tau}_{q}}{\Delta t} = -C\frac{u^{\tau+\frac{1}{2}}_{q+\frac{1}{2}} - u^{\tau+\frac{1}{2}}_{q-\frac{1}{2}}}{\Delta x}. \qquad (5.3.23)$$

Подстановка (5.3.22) в (5.3.23) дает

$$\frac{u^{\tau+1}_{q} - u^{\tau}_{q}}{\Delta t} = -C\frac{u^{\tau}_{q+1} - u^{\tau}_{q-1}}{2\Delta x} + \frac{C^2}{2}\Delta t\frac{u^{\tau}_{q+1} - 2u^{\tau}_{q} + u^{\tau}_{q-1}}{\Delta x^2}, \qquad (5.3.24)$$

где второй член справа при Δt, $\Delta x \to 0$ обращается в нуль, а при $\Delta x \to 0$ и фиксированном Δt стремится к выражению $\frac{C^2\Delta t}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, которое по форме эквивалентно сеточной аппроксимации диффузного члена, вычисляемого на интервале $2\Delta x$, и дает демпфирующий эффект. Для проверки схемы Лакса — Вендрофа на устойчивость подставим тестовое решение (5.2.12) в (5.3.24)

$$U^{(\tau+1)} = [(1 + \mu^2(\cos m\Delta x - 1) - i\mu \sin m\Delta x]\, U^{(\tau)} = \lambda U^{(\tau)}, \qquad (5.3.25)$$

где

$$|\lambda| = \left[1 - 4\mu^2(1 - \mu^2)\sin^4\frac{m\Delta x}{2}\right]^{1/2}. \qquad (5.3.26)$$

Из (5.3.26) вытекает, что схема будет устойчива, если выполняется критерий (5.3.12).

Теперь исследуем зависимость степени подавления волн от их длины L и от μ. С этой целью найдем минимум пучка кривых $|\lambda| = |\lambda|(\mu)$ для любых волновых чисел m

$$\frac{d|\lambda|}{d\mu} = -\frac{4\mu(1-2\mu^2)\sin^4\frac{m\Delta x}{2}}{1-4\mu^2(1-\mu^2)\sin^4\frac{m\Delta x}{2}} = 0. \qquad (5.3.27)$$

Отсюда следует, что в точке $|\lambda|_{\min}$ параметр $\mu = 2^{-1/2}$. Используя это значение μ в (5.3.26), получим

$$|\lambda|_{\min} = \left(1-\sin^4\frac{m\Delta x}{2}\right)^{1/2}, \qquad (5.3.28)$$

т. е. при $L=2\Delta x$ $|\lambda|_{\min}=0$, а при $L\to\infty$ $|\lambda|_{\min}\to 1$. Подставляя найденные значения $|\lambda|_{\min}$ в (5.3.25), видим, что эффект подавления будет максимальным для двухшаговых волн. Степень демпфирования зависит также от скорости адвекции и Δt, что не следует из физических соображений и является недостатком схемы. Однако ее полезные свойства (второй порядок аппроксимации по времени и пространству, явное задание правой части уравнения, условная устойчивость согласно КФЛ, максимальное подавление двухшаговых волн, использование данных лишь на двух уровнях и, как следствие, отсутствие вычислительной моды) обусловили широкое применение схемы в атмосферных моделях.

Заметим, что формулы типа (5.3.11) легко получаются для любых разностных схем и могут использоваться для анализа зависимостей $|\lambda| = |\lambda|(\mu)$ в области устойчивости, т. е. для различных шагов Δt и Δx и длин волн, разрешаемых сеткой, с целью **выбора оптимального значения μ для самых быстрых волн**, описываемых уравнениями модели. Последнее важно потому, что критерии устойчивости схем не остаются неизменными при их применении к различным уравнениям, а существенно зависят от характера уравнений. Проиллюстрируем это утверждение на простых примерах.

Рассмотрим вначале уравнение колебаний

$$\frac{dU}{dt} = -i\sigma U, \quad U = U(t). \qquad (5.3.29)$$

Такое уравнение можно получить из линейного уравнения адвекции, если подставить в (5.1.15) тестовое решение в виде одной гармоники типа (5.2.7)

$$\frac{dU}{dt} + imCU = 0, \qquad (5.3.30)$$

Положив здесь $\sigma = -mC$, приходим к (5.3.29), где U будет выступать как амплитуда решения уравнения (5.1.15). Будем считать U в (5.3.30) комплексной величиной. Тогда решение для реальной и мнимой частей движения имеет вид

$$U(t) = U(0)\, e^{i\sigma t} \tag{5.3.31}$$

или для дискретных моментов времени

$$U(t) = U(0)\, e^{i\sigma\tau\Delta t} \tag{5.3.32}$$

и означает, что при $\tau \to \infty$ в комплексной U-плоскости модуль амплитуды остается неизменным ($|\lambda| = 1$), а его аргумент (фаза) $\sigma\tau\Delta t$ изменяется при переходе с уровня τ на уровень $\tau+1$ на угол $\mathbf{p} = \sigma\Delta t$. Тогда формула, отражающая метод Неймана, формально запишется в виде

$$U^{(\tau+1)} = \lambda U^{(\tau)} \equiv |\lambda|\, e^{i\theta} U^{(\tau)} = |\lambda|^{\tau} e^{i\tau\theta} U^{(0)}. \tag{5.3.33}$$

Рассматривая множитель перехода в комплексной λ-плоскости как $\lambda = \lambda_{re} + i\lambda_{im}$, получим фазу для конкретной схемы

$$\Theta = \operatorname{arctg} \frac{\lambda_{im}}{\lambda_{re}}. \tag{5.3.34}$$

Целесообразно рассматривать отношение $\theta/\sigma\Delta t = \theta/p$. При построении численного решения (5.3.33) будем требовать выполнения достаточного условия сходимости (5.3.10) и дадим определение временных разностных схем в зависимости от их влияния на фазовую скорость волн:

$$\text{при } \frac{\Theta}{p} \begin{cases} = 1 - \text{нейтральная схема}, \\ < 1 - \text{замедляющая схема}, \\ > 1 - \text{ускоряющая схема}. \end{cases}$$

Для обеспечения большей точности расчетов необходимо, чтобы множитель перехода λ, соответствующий физическому решению задачи, был близок к единице, а фазовая скорость волн не искажалась.

Применим изложенное к анализу схемы (5.1.3), записав ее для уравнения (5.3.29)

$$U^{(\tau+1)} = (1 + i\sigma\Delta t)\, U^{(\tau)} = (1 + ip)\, U^{(\tau)}, \quad \sigma > 0. \tag{5.3.35}$$

Отсюда $|\lambda| = (1+p^2)^{1/2} > 1$, т. е. схема Эйлера неустойчива для любых Δt и σ.

Теперь применим схему Эйлера к фрикционному уравнению

$$\frac{dU}{dt} = -hU. \quad h > 0. \tag{5.3.36}$$

описывающему равнозамедленное движение:

$$U^{(\tau+1)} = (1 - h\Delta t)\, U^{(\tau)}. \qquad (5.3.37)$$

Очевидно, схема (5.3.37) будет устойчива, если $|\lambda| = |1 - h\Delta t| \leqslant 1$. Для исключения знакопеременных осцилляций численного решения от шага к шагу при заданном h необходимо выбрать Δt таким, чтобы выполнялось условие

$$h\Delta t < 1. \qquad (5.3.38)$$

Таким образом, схема Эйлера дает всегда неустойчивое решение для уравнения колебаний, но условно устойчива для уравнения трения и линейного уравнения адвекции при $C<0$.

Теперь применим схему центральных разностей (5.1.11) к уравнению колебаний (5.3.29), получим соотношение

$$U^{(\tau+1)} = U^{(\tau-1)} + 2i\sigma\, \Delta t\, U^{(\tau)}. \qquad (5.3.39)$$

Подстановка (5.3.33) в схему (5.3.39) приводит к квадратному уравнению для λ: $\lambda^2 - 2ip\lambda - 1 = 0$. Из него следует два решения волнового типа (5.3.33)

$$\begin{aligned} U^{(\tau+1)} &= \lambda_1 U^{(\tau)} = \left(\sqrt{1-p^2} + ip\right) U^{(\tau)}, \\ U^{(\tau+1)} &= \lambda_2 U^{(\tau)} = \left(-\sqrt{1-p^2} + ip\right) U^{(\tau)}, \end{aligned} \qquad (5.3.40)$$

где при $\Delta t \to 0$: $\lambda_1 \to 1$, $\lambda_2 \to -1$. Рассмотрим решения (5.3.40) для трех частных случаев p: $|p|<1$, $|p|=1$, $|p|>1$.

Если $|p|<1$, то $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, т. е. обе моды устойчивы и нейтральны. Из (5.3.34) следует

$$\Theta_1 = \operatorname{arctg}\left[p\,(1-p^2)^{-1/2}\right], \quad \Theta_2 = \operatorname{arctg}\left[-p\,(1-p^2)^{-1/2}\right], \qquad (5.3.41)$$

откуда видно, что для $p \gtrless 0$ фаза вычислительной моды $\theta_2 = \pm\pi - \theta_1$. Чтобы обеспечить точность физической моды, ее фаза θ_1 должна возможно точнее аппроксимировать изменение фазы точного решения $p = \sigma\Delta t$. Так, если $p \to 0$, то $\theta_1 \to p$.

Если $|p| = 1$, то из (5.3.40) вытекает, что $\lambda_1 = \lambda_2 = ip$ и $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. Для $p = \pm 1$ фаза $\Theta_1 = \Theta_2 = \pm\pi/2$, т. е. в комплексной U — плоскости модуля обеих мод поворачивают на каждом шаге по времени на угол $\pm\pi/2$, а фаза точного решения изменится только на угол ± 1. Следовательно, при $|p| = 1$ имеет место большая ошибка фазы.

Если $|p|>1$, то $\lambda_{1,2} = i\left(p \pm \sqrt{p^2-1}\right)$, а $|\lambda_1| = \left|p + \sqrt{p^2-1}\right|$, $|\lambda_2| = \left|p - \sqrt{p^2-1}\right|$. Откуда при $p>1$ имеем $|\lambda_1|>1$, а при $p<-1$ $|\lambda_2|>1$. В комплексной области обе моды поворачивают на $\pm\pi/2$. Однако при $\tau \to \infty$ амплитуда физической моды уменьшается, а амплитуда вычислительной моды растет, т. е. при $|p|>1$ схемы центральных разностей неустойчива.

5.4. Нелинейная вычислительная неустойчивость и способы ее устранения

В уравнении (5.1.15) скорость переноса C предполагалась постоянной и положительной. Если $C<0$, то замена x на $-x$ вновь приводит к уравнению (5.1.15). При $C=C(x)$ или $C=C(x, t)$ имеем нелинейное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad u=u(x, t) \tag{5.4.1}$$

с переменными коэффициентами, решая которое численно, можно столкнуться с эффектом нелинейной вычислительной неустойчивости, когда решение начинает приобретать характерную структуру удлинения, а поток распадается на отдельные вихри нитевидной формы, размер которых составляет несколько шагов сетки. При продолжении процесса интегрирования интенсивность таких вихрей беспредельно растет, порождая взрывной рост полной кинетической энергии системы, которая распределяется по все большему диапазону волновых чисел. Природу нелинейной неустойчивости обычно иллюстрируют следующим образом. Если представить решение дифференциально-разностного или конечно-разностного уравнений и «коэффициент» $u(x_q, t_\tau)$ в виде дискретного гармонического ряда, то произведения рядов Фурье в нелинейном уравнения переноса (5.4.1) приведут к появлению гармоник более длинных и более коротких, чем взаимодействующие. В результате может произойти «перекачка» энергии из области длинных волн в область коротких, плохо представимых на сетке, что может привести к неустойчивости даже для неявных и диссипативных схем. Однако необходимо учитывать и другие обстоятельства.

Для большинства инерционных вариантов моделей (когда не учитываются неадиабатические и диссипативные эффекты) не удается доказать теорему единственности решения для произвольных интервалов времени. Наоборот, показано, что даже для уравнения (5.4.1) возможен «взрыв» решения, время которого определяется начальными и граничными условиями. Кроме того, осредненный поток энергии по спектру равен нулю только для бездивергентных движений ($D=0$), а для быстрых волновых движений с $D\neq 0$ существует систематический перенос энергии. Поэтому подавлять вычислительную неустойчивость нужно разумно, иначе устойчивое численное решение может оказаться весьма далеким от физического.

Важнейшим необходимым (но недостаточным) условием устойчивости решения уравнения (5.4.1) остается критерий КФЛ

$$\mu=|u|\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1, \tag{5.4.2}$$

а анализ устойчивости сводится к анализу по Нейману линеаризованного варианта уравнения с «замороженными» коэффициентами. Для этого в области решения $\mathscr{D}_{\Delta x}$ на каждом временном слое t_τ выбирают произвольную точку (x_q, t_τ) и коэффициент u_q^τ распространяют на всю область. Принцип «замороженных» коэффициентов означает, что для устойчивости необходимо, чтобы конечно-разностное решение уравнения (5.4.1) с периодичеескими граничными условиями (5.2.1) с постоянными коэффициентами u_q^τ удовлетворяло необходимому условию устойчивости Неймана, из которого следует выполнение критерия (5.4.2) для любых точек (x_q, t_τ) Поэтому для фиксированного временного слоя t_τ условие (5.4.2) примет вид

$$\mu = \frac{\max\limits_{x_q} |u_q^\tau| (\Delta t)_\tau}{\Delta x} \leqslant 1. \qquad (5.4.3)$$

Здесь учтено, что Δt может изменяться от слоя к слою. Естественно считать, что значения u_q^τ близки к $u(x_q, t_\tau)$ точного решения $u(x, t)$ дифференциальной задачи с гладкими начальными условиями или что коэффициент близок к непрерывной функции $u(x, t)$, которая на протяжении нескольких временных шагов изменяется мало, и определять допустимое Δt из (5.4.3). Принцип «замороженных» коэффициентов не учитывает влияние граничных условий. Однако устойчивость может иметь место при одних и не иметь места при других граничных условиях. Кроме того, если начальные условия имеют разрыв, приведенные оценки не гарантируют сходимости даже в линейном случае, поэтому будем считать такие условия гладкими.

Для обеспечения вычислительной устойчивости используют фильтрацию и сглаживание, строят разностные схемы с квадратичным сохранением, применяют диссипативные схемы с положительной счетной вязкостью, а также схемы, избирательно подавляющие короткие волны (напр., схему Лакса — Вендроффа при $\mu < 1$). Коротковолновые возмущения можно отфильтровать также путем применения операторов сглаживания не к самим переменным, а к их локальным изменениям, что позволяет, например, уменьшить искажение решения в горных районах.

Опишем некоторые приемы устранения нелинейной вычислительной неустойчивости. Одним из приемов является введение в исходное уравнение «искусственной вязкости» с $\nu > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (5.4.4)$$

Производные по x аппроксимируем центральными разностями и перепишем (5.4.4) в виде системы дифференциально-разностных

уравнений

$$\frac{du_1}{dt} = -\frac{u_1}{2\Delta x}(u_2 - u_M) + \frac{\nu}{\Delta x^2}(u_2 - 2u_1 + u_M), \quad q = 1;$$

$$\frac{du_q}{dt} = -\frac{u_q}{2\Delta x}(u_{q+1} - u_{q-1}) + \frac{\nu}{\Delta x^2}(u_{q+1} - 2u_q + u_{q-1}), \quad (5.4.5)$$

$$q = \overline{2,\ M-1};$$

$$\frac{du_M}{dt} = -\frac{u_M}{2\Delta x}(u_1 - u_{M-1}) + \frac{\nu}{\Delta x^2}(u_1 - 2u_M + u_{M-1}), \quad q = M,$$

где M — число точек в области $\mathscr{D}_{\Delta x}$. Можно показать, что на решениях системы (5.4.5) сохраняется функция $I = \frac{1}{M}\sum_{q=1}^{M} u_q(t)$.

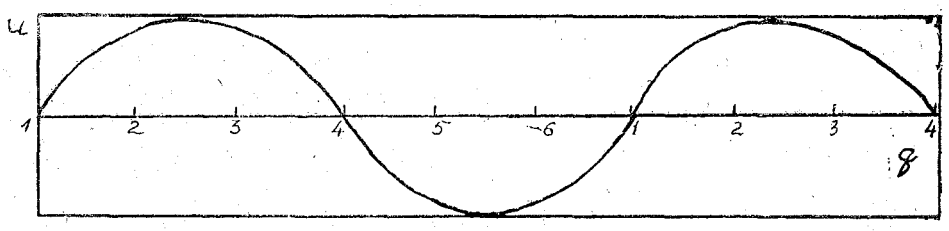

Рис. 6. Пример начальных данных для задачи (5.4.5).

Пусть M кратно 6 и начальные данные периодичны с периодом 6 (рис. 6), причем

$$u_1(0) = u_4(0) = 0, \quad u_6(0) = -u_2(0), \quad u_5(0) = -u_3(0). \quad (5.4.6)$$

Тогда свойства (5.4.6) будут справедливы на решениях системы (5.4.5) при любых t, поэтому условно можно считать, что переменные $u_2(t)$ и $u_3(t)$ эволюционируют независимо.

На рис. 7 показано поведение переменных $u_2(t)$ и $u_3(t)$ при различных ν, где стрелки изображают траектории системы, то есть изменение переменных u_2, u_3 во времени в зависимости от того, в какую область попадают начальные данные. Легко видеть, что, если такие данные находятся вне круга радиуса $\frac{6\nu}{\Delta x}\sqrt{2}$, имеет место нелинейная неустойчивость.

Рассмотрим теперь процедуры фильтрации и сглаживания. Простейший способ фильтрации коротких волн заключается в разложении численного решения уравнения (5.4.1) в ряд Фурье и зануления амплитуд гармоник длиной менее заданной (напр., менее $4\Delta x$). Для подавления вычислительных мод, возникающих при ис-

пользовании многослойных схем интегрирования по времени, применяют, например, фильтр Асселина

$$\bar{u}_q^\tau = u_q^\tau + 0{,}5\alpha\,(u_q^{\tau+1} - 2u_q^\tau + u_q^{\tau-1}), \qquad (5.4.7)$$

где α — параметр фильтра.

Опишем сглаживание по пространству, поскольку его часто используют даже при применении диссипативных схем интегрирования по времени. Выбор возможных операторов велик. Главное,

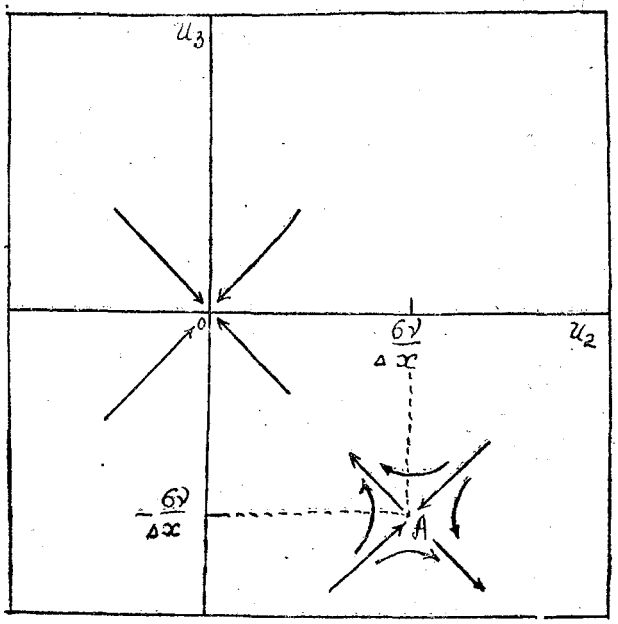

Рис. 7. Фазовый портрет системы (5.4.5) при начальных данных (5.4.6).

чтобы сумма весов равнялась единице. Простейший оператор сглаживания по пространству имеет вид

$$\bar{u}_q = (1-\alpha)\,u_q + \frac{\alpha}{2}\,(u_{q+1} + u_{q-1}), \qquad (5.4.8)$$

где α — константа (может быть отрицательной). Исследуем влияние сглаживания на гармоническую волну $u(x, t) = \mathrm{U}(t)\,e^{imq\Delta x}$. Получим

$$\bar{u}_q = Ru_q, \qquad (5.4.9)$$

$$R = 1 - \alpha\,(1 - \cos m\,\Delta x) = 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{\pi\,\Delta x}{L_m}, \qquad (5.4.10)$$

где L_m — длина волны. Из (5.4.10) видно, что оператор сглаживания (5.4.8) влияет только на амплитуду волны. При $|R| > 1$ волна

растет по амплитуде, а при $|R|<1$ подавляется. При $R<0$ наблюдается фазовый сдвиг на 180°.

Покажем, что среднее значение сглаженной волны при увеличении числа точек в области $\mathscr{D}_{\Delta x}$ стремится к среднему значению исходной. Из (5.4.8) следует, что

$$\frac{1}{2Q+1}\sum_{q=-Q}^{Q}\bar{u}_q = \frac{1}{2Q+1}\sum_{q=-Q}^{Q}u_q + \frac{\alpha}{2(2Q+1)}\sum_{q=-Q}^{Q}(u_{q+1}-2u_q+u_{q-1}) =$$

$$= \frac{1}{2Q+1}\sum_{q=-Q}^{Q}u_q + \frac{\alpha}{4Q+2}(u_{Q+1}-u_Q-u_{-Q}+u_{-Q-1}) = A+B,$$

где при $Q\to\infty$ $B\to 0$. При $\alpha=0{,}5$ оператор сглаживания (5.4.8) примет вид

$$\bar{u}_q = 0{,}25(u_{q+1}+2u_q+u_{q-1}) = u_q + 0{,}25(u_{q+1}-2u_q+u_{q-1}). \quad (5.4.11)$$

Тогда из (5.4.10) имеем $R(0{,}5) = 1-\sin^2\frac{\pi\Delta x}{L_m} = \cos^2\frac{\pi\Delta x}{L_m}$. Отсюда видно, что при $L_m=2\Delta x$ $R=0$, т. е. двухшаговые волны полностью подавляются, а более длинные волны сглаживаются (напр., амплитуда волн длиной $10\Delta x$ уменьшается на 10%). Повторное применение оператора (5.4.11) нежелательно, т. к. средние и длинные волны продолжают сглаживаться. Вообще

$$R^{\kappa}(0{,}5) = \cos^{2\kappa}\left(\frac{\pi\Delta x}{L_m}\right). \quad (5.4.12)$$

Волны длиной более $3\Delta x$ обычно желательно оставить нетронутыми. Этого можно достичь путем комбинирования нескольких операторов сглаживания. В соответствии с (5.4.10) имеем

$$R_\tau(\alpha,\ m) = R_1R_2\cdots R_\tau = \prod_{i=1}^{\tau}\left(1-\alpha_i\sin^2\frac{m\Delta x}{2}\right). \quad (5.4.13)$$

Пусть $\tau=2$, $\alpha_1=0{,}5$, а коэффициент α_2 пока не определен. Тогда

$$R_2(\alpha_2,\ m) = \left(1-\sin^2\frac{m\Delta x}{2}\right)\left(1-2\alpha_2\sin^2\frac{m\Delta x}{2}\right). \quad (5.4.14)$$

Отсюда $R_2=0$ при $L_m=2\Delta x$. При $L_m\to\infty$ $(m\to 0)$ $R_2\to 1$, т. е. волны более длинные, чем длина области $\mathscr{D}_{\Delta x}$, остаются неизмен-

ными. Найдем первую и вторую производные функции R_2

$$\frac{dR_2}{dm} = -\Delta x \sin\frac{m\Delta x}{2}\cos\frac{m\Delta x}{2}(1+2\alpha_2\cos m\Delta x),$$
$$\frac{d^2R_2}{dm^2} = \Delta x^2\left[\alpha_2\sin^2 m\Delta x - \frac{1}{2}\cos m\Delta x(1+2\alpha_2\cos m\Delta x)\right]. \quad (5.4.15)$$

Из условия $\frac{d^2R_2}{dm^2}=0$ имеем экстремумы при $\frac{m\Delta x}{2}=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi,\ldots$, а также при волновом числе m^*, для которого $\cos m^*\Delta x = -0{,}5\alpha_2$. Значения m в точках экстремумов соответствуют $L_m=\infty,\ 2\Delta x,\ \frac{2\Delta x}{3},\ldots$, а экстремальные значения R_2 равны 0 либо 1. Соответствующая m^* функция

$$R_2 = -\frac{1}{8\alpha_2}(2\alpha_2-1)^2. \quad (5.4.16)$$

Подставив в (5.4.16) $R_2=1$, получим $\alpha_2=-0{,}5$. Однако, если требуется избежать изменения фазы, минимально допустимое R_2 при $m=m^*$ должно быть равным нулю. Тогда из (5.4.16) получаем $\alpha_2=0{,}5$. В этом случае, аналогичном $k=2$ в (5.4.12), амплитуды волн длиной больше $2\Delta x$ также уменьшаются, что нежелательно. Поэтому следует выбрать $\alpha_2=-0{,}5$, при котором из (5.4.14) имеем

$$R_2(m) = \left(1-\sin^2\frac{m\Delta x}{2}\right)\left(1+\sin^2\frac{m\Delta x}{2}\right) = 1-\sin^4\frac{m\Delta x}{2}.$$

Для построения разностных схем, способствующих подавлению нелинейной вычислительной неустойчивости, используют также энергетический метод анализа устойчивости. Суть метода заключается в том, что схема аппроксимации уравнения (5.4.1), сохраняющая количество движения и кинетическую энергию ($E_к$), менее подвержена неустойчивости. Она называется схемой с квадратичным сохранением. В других моделях речь может идти о сохранении квадрата вихря, полной энергии и других характеристик. Идея метода заключается в исследовании дисперсии решения. Разностная схема устойчива, если полная дисперсия, рассчитанная по всей области $\mathscr{D}_{\Delta x}$, растет не быстрее, чем $1+O(\Delta t)$. Это своего рода обобщенный критерий Неймана.

Для уравнения (5.4.1) с граничными условиями (5.2.1) справедливо свойство

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathscr{D}} u^\varphi dx = 0, \quad (5.4.17)$$

где φ — натуральное число. Пусть $\varphi=2$. Запишем следующее из (5.4.1) уравнение кинетической энергии $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u^2}{2}\right) = -u^2\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{3}\frac{\partial u^3}{\partial x}$ и проинтегрируем его по x с учетом периодических граничных

условий $u_1 = u_м$. Имеем $\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\mathscr{D}}\left(\frac{u^2}{2}\right)dx = -\frac{1}{3}(u_м^3 - u_1^3) = 0$, т. е. $E_к$ сохраняется и свойство (5.4.7) выполняется при $\varphi = 2$.

Уравнение (5.4.1) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x} = 0 \tag{5.4.18}$$

можно аппроксимировать следующим образом:

$$\frac{\partial u_q}{\partial t} + \frac{u_{q+1}^2 - u_{q-1}^2}{4\Delta x} = 0. \tag{5.4.19}$$

В такой схеме сохраняется количество движения, т. е. свойство (5.4.17) выполняется в области $\mathscr{D}_{\Delta x}$ при $\varphi = 1$ в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_q u_q^\varphi = 0. \tag{5.4.20}$$

Однако сохранение суммарного количества движения еще не гарантирует вычислительной устойчивости, поскольку решение необязательно ограничено. С другой стороны, если свойство (5.4.20) выполняется при $\varphi = 2$, решение должно быть ограничено. Итак, схема устойчива, если сохраняются суммы u_q и u_q^2.

Перепишем уравнение (5.4.1) в форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{3}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial x}\right), \tag{5.4.21}$$

домножим его на $u/2$ и проинтегрируем по области $\mathscr{D}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\mathscr{D}}(u^2/2)\,dx + \frac{1}{6}\int\limits_{\mathscr{D}}\left(u^2\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u^2}{\partial x}\right)dx.$$

Однако

$$\int\limits_{\mathscr{D}}\left(u^2\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u^2}{\partial x}\right)dx = \int\limits_{\mathscr{D}}\frac{\partial}{\partial x}(u^2 u)\,dx = 0$$

в силу граничных условий. Таким образом, $E_к$ сохраняется.

Введем оператор

$$\mathrm{A}(u) = u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u^2}{\partial x} \tag{5.4.22}$$

и перепишем его в виде

$$(\mathrm{A}(u),\ u)_{\mathscr{D}} = 0, \tag{5.4.23}$$

где $(f_1, f_2)_{\mathscr{D}}$ — скалярное произведение, т. е. $\int\limits_{\mathscr{D}} f_1 f_2\, d\mathscr{D}$. Свойство (5.4.23) называется **кососимметричностью нелинейного оператора**

$A(u)$. Можно показать, что, если аппроксимировать кососимметричный оператор с помощью центральных разностей в виде

$$(A_{\Delta x}(u_q))_q = u_q \frac{u_{q+1} - u_{q-1}}{2\Delta x} + \frac{u_{q+1}^2 - u_{q-1}^2}{2\Delta x}, \qquad (5.4.24)$$

свойство кососимметричности будет выполняться и для разностного оператора

$$(A_{\Delta x}(u_q),\ u_q)_{\mathscr{D}_{\Delta x}} = 0 \qquad (5.4.25)$$

Это означает, что $E_к$ разностного решения (сумма в (5.4.20) при $\varphi=2$) сохраняется.

Итак, записав уравнение (5.4.1) в кососимметричной форме (5.4.22) и аппроксимировав производные по x по схеме центральных разностей, можно получить разностную схему, сохраняющую суммы u_q и u_q^2 и, следовательно, устойчивую. Фактически такая схема является квазисохраняющей, если производную $\frac{\partial}{\partial t}$ расписать с помощью центральных разностей, но она меньше подвержена нелинейной неустойчивости. Для сохранения $E_к$ необходимо расписать (5.4.22) по схеме Кранка — Николсона (трапеций)

$$\frac{u_q^{\tau+1} - u_q^{\tau}}{\Delta t} + \frac{1}{3}\left[\frac{A_{\Delta x}(u_q)^{\tau} + A_{\Delta x}(u_q)^{\tau+1}}{2}\right]_q = 0.$$

В общем случае уравнение (5.4.1) можно расписать на сетке в обобщенной форме вида

$$\frac{df(u)_q}{dt} + \frac{F(u)_{q+1} - F(u)_{q-1}}{2\Delta x} = 0 \qquad (5.4.26)$$

(где $f(u)$ — некоторая функция от u, $F(u) = \int u \frac{df(u)}{du}\, du$), позволяющей разностному решению сохранять следующие интегральные свойства

$$\frac{1}{M}\sum_{q=1}^{M} f(u_q), \quad \frac{1}{M}\sum_{q=1}^{M}\left\{\int\left[u\frac{df(u)}{du}du\right]\left[\frac{df(u)}{du}du\right]\right\}_q.$$

Выберем, например, $f(u)=u^{\varphi}$. Тогда при $\varphi=2$ возвращаемся к уравнению для $E_к$. При таком выборе $f(u)$ вновь имеем закон сохранения (5.4.20), который перепишем в форме $I_{\varphi} = \frac{1}{M}\sum_{q=1}^{M} u_q^{\varphi}$.

Можно показать, что сохраняется также величина $I_{2\varphi+1}$. Вообще при четном φ сохранение величины I_{φ} гарантирует от нелинейной неустойчивости при конечных t. Если $\varphi=1$, то $f(u)=u$, $F(u)=u^2/2$ и мы возвращаемся к уравнению (5.4.19).

Эффективным средством борьбы с нелинейной неустойчивостью является построение разностных схем, обладающих свойством подавления коротковолновых возмущений, а также добавление к уравнению (5.4.1) малой «нелинейной вязкости». Например, из (5.4.19) можно получить схему

$$\frac{du_q}{dt}=-\frac{1}{2\Delta x}\left[\left(\frac{u^2}{2}\right)_{q+1}-\left(\frac{u^2}{2}\right)_{q-1}\right]+\nu\Delta x^2\left\{\left[\chi\frac{u_{q+1}-u_q}{\Delta x}\left(\frac{u_{q+1}-u_q}{\Delta x}\right)^2\right]_q-\right.$$
$$\left.-\left[\chi\frac{u_q-u_{q-1}}{\Delta x}\left(\frac{u_q-u_{q-1}}{\Delta x}\right)^2\right]_{q-1}\right\}, \qquad (5.4.27)$$

где $\chi(\alpha)=\begin{cases}1, & \alpha\geqslant 0,\\ 0, & \alpha<0,\end{cases}$ $\nu\geqslant\frac{1}{12}$. Можно показать, что схема (5.4.27) устойчива, причем нелинейная вязкость мала и имеет $O(\Delta x^2)$, а порядок аппроксимации тот же, что в (5.4.26). Следовательно, разностное решение будет устойчивым и близким к физическому. Однако требование нелинейности вязкого члена является существенным. В более сложных уравнениях задача выбора корректирующих добавок значительно затруднена.

В заключение остановимся на основных идеях бокс-метода, также позволяющего получать разностное уравнение, сохраняющее интегральные свойства дифференциального уравнения. Исходное эволюционное уравнение записывают в дивергентной форме. Тогда интегралы по области определения решения зависят только от граничных условий, что следует из теоремы Остроградского — Гаусса, которая для двумерного потока имеет вид

$$\iint\limits_S \operatorname{div}(f\vec{V})\,ds=\oint\limits_L V_n f\,dl. \qquad (5.4.28)$$

Здесь f — функция, которая пока не определена; ds — элемент площади S, L — контур ее окаймляющий, а dl — элемент контура; V_n — нормальная составляющая вектора скорости $\vec{V}=(u, v)$ к контуру; $\operatorname{div}\vec{V}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=D$. Если вследствие граничных условий все $V_n=0$, то скалярные потоки через границу области S отсутствуют: $\oint\limits_L V_n f\,dl=0$ и $\iint\limits_S \operatorname{div}(f\vec{V})\,ds=0$. Если исходное уравнение можно записать в виде $\frac{\partial f}{\partial t}+\operatorname{div}(f\vec{V})=0$, то $\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_S f\,ds=0$ и величина $\iint\limits_S f\,ds$ сохраняется. Под f можно понимать энергию или квадрат вихря скорости. Таким образом, необходимо выразить D в области определения решения через потоки на границе. Тогда при периодических граничных условиях или при всех $V_n=0$ суммарные по области локальные изменения соответствую-

щих метеовеличин, обусловленные адвекцией, будут равны нулю. В качестве примера положим $f=u$ и воспользуемся уравнением (5.4.1) в дивергентной форме (5.4.18) с граничными условиями (5.2.1): $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial u^2}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\operatorname{div}(u\vec{\mathbf{V}})=0$, где $\vec{\mathbf{V}}=\vec{i}u$. Проинтегрировав уравнение (5.4.18) по области $\mathscr{D}$, имеем

$$\frac{\partial}{\partial s}\int\limits_{\mathscr{D}} u\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{\mathscr{D}}\frac{\partial u^2}{\partial x}\,dx=\frac{1}{2}\left[(u^2)_M-(u^2)_1=0,\right.$$

т. е. средняя величина $\overline{u}^x=\frac{1}{S}\int\limits_{\mathscr{D}} u dx$ сохраняется.

Построим конечно-разностную схему, обладающую тем же интегральным свойством. Выделим в области $\mathscr{D}_{\Delta x}$ ячейки (боксы)

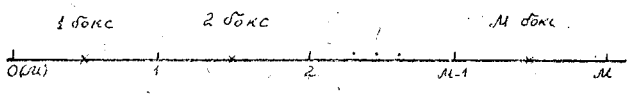

Рис. 8. Разбиение области $D_{\Delta x}$ на ячейки (боксы).

длиной Δx с центрами в точках с дробными индексами $q+\frac{1}{2}$, обозначенными крестиками на рис. 8. Проинтегрируем (5.4.18) на длине ячейки Δx

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Delta x} u\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\Delta x}\operatorname{div}(u\vec{\mathbf{V}})\,dx=0. \tag{5.4.29}$$

В одномерном случае аналог выражения (5.4.28) записать затруднительно в том смысле, что формально область интегрирования и контур совпадают и $ds=dx$, поэтому $\int\limits_{\Delta x}\operatorname{div}(u\vec{\mathbf{V}})\,dx=\oint\limits_{\Delta L} V_n u\,dl$, причем V_n равно u либо нулю. Поскольку

$$\int\limits_{\Delta x}\operatorname{div}(u\vec{\mathbf{V}})\,dx\approx\overline{(\operatorname{div}(u\vec{\mathbf{V}}))}^{\Delta x}\Delta x=\overline{(\operatorname{div}(u\vec{\mathbf{V}}))}^{x}\Delta x,$$

а $\oint\limits_{\Delta L} V_n u\,dl=[(uu)_{q+1}-(uu)_q]$, то $\overline{\operatorname{div}(u\vec{\mathbf{V}})}^{x}_{q+\frac{1}{2}}=\frac{1}{\Delta x}[(uu)_{q+1}-$ $-(uu)_q]=\delta_x(uu)$, где $\delta_x(uu)$ — разность потоков через противоположные грани (в одномерном случае — условные) ячейки Δx. Уравнение (5.4.29) для центров ячеек примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{u}^x_{q+\frac{1}{2}}=-\delta_x(uu)_{q+\frac{1}{2}}, \tag{5.4.30}$$

где $\overline{u}^x_{q+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(u_q+u_{q+1})$. Если просуммировать разностное урав-

нение (5.4.30) по области $\mathscr{D}_{\Delta x}$, его правая часть обратится в нуль, поскольку: потоки через внутренние грани, разделяющие соседние ячейки, равны по величине, но противоположны по знаку и в сумме равны нулю; потоки через внешние границы равны нулю в силу граничных условий. Таким образом, суммарное по области $\mathscr{D}_{\Delta x}$ значение $\sum_{q+\frac{1}{2}} \bar{u}^{x}_{q+\frac{1}{2}}$ сохраняется и разностная схема обладает интегральным свойством (5.4.17) дифференциального уравнения (5.4.18) при $\varphi=1$. Для двумерного уравнения адвекции последовательность действий аналогичная, но правая часть в (5.4.30) имеет вид

$$-\left[\delta_x\left(\bar{u}^{y}\bar{u}^{y}\right)_{q+\frac{1}{2},\,p+\frac{1}{2}}+\delta_y\left(\bar{v}^{x}\bar{u}^{x}\right)_{q+\frac{1}{2},\,p+\frac{1}{2}}\right],$$

а в левой части стоит величина

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}^{xy}_{q+\frac{1}{2},\,p+\frac{1}{2}}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4}\left(u_{q,\,p}+u_{q+1,\,p}+u_{q,\,p+1}+u_{q+1,\,p+1}\right)\right].$$

Подчеркнем, что бокс-метод лишь ослабляет возможность возникновения нелинейной неустойчивости, но не гарантирует (как и запись уравнений в кососимметричной форме) повышения точности по сравнению с решением, полученным с помощью схем без сохранения. Применение бокс-метода, кососимметричной записи либо схем без сохранения, но с вязкостью или сглаживанием зависит от особенностей конкретной задачи и выбранного способа интегрирования по времени.

5.5. Интегральные инварианты атмосферных моделей

5.5.1. Интегральные инварианты баротропной соленоидальной модели. В главе 4 рассматривалась простейшая соленоидальная баротропная модель, прогностическое уравнение которой

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi+J\left(\psi,\,\nabla^2\psi\right)=0 \tag{5.5.1}$$

будем решать в прямоугольной области $ABCD$ (рис. 1), где $0\leqslant x\leqslant L_x$, $0\leqslant y\leqslant L_y$. Используем два типа граничных условий:

а) условия периодичности

$$\psi(x,\,y)=\psi(x+L_x,\,y)=\psi(x,\,y+L_y); \tag{5.5.2}$$

б) условия непротекания

$$\begin{aligned} u(o,\,y)&=u(L_x,\,y)=0,\\ v(x,\,o)&=v(x,\,L_y)=0. \end{aligned} \tag{5.5.3}$$

Условия (5.5.3) означают, что масса воздуха, находящаяся на среднем уровне в пределах сеточной области, остается неизменной. Поскольку скорость скольжения на периметре области достигается только за счет касательных составляющих скорости, они должны быть непрерывными и одинаковыми на всех участках границы. Таким образом, условие непроникновения воздуха через границы области эквивалентно тому, что периметр ее является изолинией функции тока. Учитывая, что функция тока определяется с точностью до аддитивной постоянной, можно считать, например, что $\psi|_\Gamma = 0$.

При условиях (5.5.2) и (5.5.3) уравнение (5.5.1) обладает рядом интегральных инвариантов (функционалов от решения, не меняющих со временем своего значения и форму записи). Установим вид инвариантов. Рассмотрим функционал

$$\overline{J(\psi, \nabla^2\psi)} = \frac{1}{L_x L_y}\int_0^{L_y}\int_0^{L_x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial x}\right)dx\,dy, \quad (5.5.4)$$

где $\overline{(\ )}$ означает среднее по области значение соответствующей величины. Преобразуем первый член справа, осуществляя дважды интегрирование по частям:

$$\int_0^{L_y}\int_0^{L_x}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial y}dx\,dy = \int_0^{L_y}\left(\nabla^2\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\Big|_{y=0}^{y=L_y}dx - \int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\nabla^2\psi\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}dy\,dx =$$

$$= \int_0^{L_x}\left(\nabla^2\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\Big|_{y=0}^{y=L_y}dx - \int_0^{L_y}\nabla^2\psi\frac{\partial\psi}{\partial y}\Big)\Big|_{x=0}^{x=L_x}dy +$$

$$+ \int_0^{L_y}\int_0^{L_x}\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial x}dx\,dy. \quad (5.5.5)$$

Проведя аналогичное преобразование второго члена справа в (5.5.4), получим

$$\overline{J(\psi, \nabla^2\psi)} = \frac{1}{L_x L_y}\left[\int_0^{L_x}\left(\nabla^2\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\Big|_{y=0}^{y=L_y}dx - \int_0^{L_y}\left(\nabla^2\psi\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\Big|_{x=0}^{x=L_x}dy\right]. \quad (5.5.6)$$

В соответствии с тем, что $D=0$, равенство (5.5.6) в силу граничных условий (5.5.2) или (5.5.3) можно переписать в виде

$$\overline{J(\psi^K, \nabla^2\psi)} = \frac{k}{L_x L_y}\left[\int_0^{L_x}\psi^{K-1}\nabla^2\psi v\Big|_{y=0}^{y=L_y}dx + \int_0^{L_y}\psi^{K-1}\nabla^2\psi u\Big|_{x=0}^{x=L_x}dy = 0.\right. \quad (5.5.7)$$

Используя (5.5.7) и учитывая, что

$$\psi^{\kappa-1}J(\psi,\ \nabla^2\psi)=\frac{1}{\kappa}J(\psi^{\kappa},\ \nabla^2\psi),$$
$$(\nabla^2\psi)^{\kappa-1}J(\psi,\ \nabla^2\psi)=\frac{1}{\kappa}J(\chi,\ (\nabla^2\psi)^{\kappa}), \tag{5.5.8}$$

получаем соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi+\overline{J(\psi,\ \nabla^2\psi)}=\frac{\partial\nabla^2\psi}{\partial t}=0, \tag{5.5.9}$$

$$\frac{1}{2}\psi\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi+\frac{1}{4}J(\psi^2,\ \nabla^2\psi)=\frac{1}{2}\psi\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\overline{(\nabla^2\psi)^2}, \tag{5.5.10}$$

$$\overline{\nabla^2\psi\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi}+\frac{1}{2}J(\psi,\ (\nabla^2\psi)^2)=\overline{\nabla^2\psi\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi}=\frac{1}{2}\overline{\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi)^2}, \tag{5.5.11}$$

выражающие законы сохранения вихря, кинетической энергии и квадрата вихря (энстрофии).

Следуя А. Аракаве, поставим задачу построить такую форму аппроксимации соленоидального уравнения вихря скорости, чтобы при ее использовании выполнялись разностные аналоги законов сохранения. Определим сеточную функцию $\psi_{i,j}$ на квадратной сетке (рис. 1) с шагом $\Delta s=L_x/M=L_y/N$. При этом

$$\psi_{i,j}=\psi\left(\left(i-\frac{1}{2}\right)\Delta s,\ \left(j-\frac{1}{2}\right)\Delta s\right), \tag{5.5.12}$$
$$i=0,\ 1,\ \ldots,\ M+1,\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ N+1.$$

Значениям индексов $i=0,\ M+1,\ j=0,\ N+1$ соответствуют вспомогательные узлы, величины $\psi_{i,j}$ в которых определяются из условия аппроксимации граничных условий.

Для некоторой сеточной функции $f_{i,j}$ определим ее среднее по области значение

$$\overline{f}^{ij}=\frac{1}{MN}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}f_{i,j} \tag{5.5.13}$$

и, используя стандартные операторы дифференцирования и сглаживания, докажем, что при соответствующем определении функции u_i, v_i в граничных узлах

$$\overline{uv_x}^{xi}=-\overline{vu_x}^{xi}. \tag{5.5.14}$$

Действительно,

$$\overline{uv_x}^{xi}=\frac{1}{2N\Delta s}[u_1(v_2-v_0)+u_2(v_3-v_1)+u_3(v_4-v_2)+\ldots+$$

$$+ u_{N-2}(v_{N-1} - v_{N-3}) + u_{N-1}(v_N - v_{N-2}) + u_N(v_{N+1} - v_{N-1})] =$$
$$= -\overline{\overline{vu_x}^x}^i + \frac{1}{2N\Delta s}(-v_0u_1 - v_1u_0 + v_Nu_{N+1} + v_{N+1}u_N). \quad (5.5.15)$$

В случае периодических граничных условий

$$u_0 = u_N, \quad u_{N+1} = u_1, \quad v_0 = v_N, \quad v_{N+1} = v_1 \quad (5.5.16)$$

выражение в круглых скобках в (5.5.15) равно нулю. Граничные условия, обнуляющие это выражение, можно записать также в виде

$$u_0 = -u_1, \quad u_{N+2} = -u_N, \quad v_0 = v_1, \quad v_{N+1} = v_N. \quad (5.5.17)$$

Исследуем интегральные свойства различных схем сеточной аппроксимации якобиана, используя формулу (5.5.14). Рассмотрим вначале схему

$$J_1(\psi, \nabla^2\psi) = \overline{\psi}_x^x(\overline{\nabla^2\psi})_y^y - \overline{\psi}_y^y(\overline{\nabla^2\psi})_x^x, \quad (5.5.18)$$

для которой получаем

$$\overline{J_1(\psi, \nabla^2\psi)}^{ij} = \overline{\overline{\psi}_x^x(\overline{\nabla^2\psi})_y^y - \overline{\psi}_y^y(\overline{\nabla^2\psi})_x^x}^{ij} = -\overline{\psi(\overline{\nabla^2\psi})_{xy}^{xy} + \psi(\overline{\nabla^2\psi})_{xy}^{xy}}^{ij} = 0. \quad (5.5.19)$$

Аналогично

$$\overline{\psi J_1(\psi, \nabla^2\psi)}^{ij} = \overline{\psi[\overline{\psi}_x^x(\overline{\nabla^2\psi})_y^y - \overline{\psi}_y^y(\overline{\nabla^2\psi})_x^x]}^{ij} =$$
$$= -\overline{\psi[\psi(\overline{\nabla^2\psi})_y^y] + \psi\{\psi[\psi(\overline{\nabla^2\psi})_x^x]\}}^{ij}, \quad (5.5.20)$$

$$\overline{(\nabla^2\psi)J_1(\psi, \nabla^2\psi)}^{ij} = \overline{(\nabla^2\psi)[\overline{\psi}_x^x(\overline{\nabla^2\psi})_y^y - \overline{\psi}_y^y(\overline{\nabla^2\psi})_x^x]}^{ij} =$$
$$= -\overline{(\nabla^2\psi)[(\nabla^2\psi)\overline{\psi}_x^x]_y^y + (\nabla^2\psi)[(\nabla^2\psi)\overline{\psi}_y^y]_x^x}^{ij}. \quad (5.5.21)$$

В соответствии с формулами (5.5.20), (5.5.21) введем еще две схемы аппроксимации якобиана:

$$J_2(\psi, \nabla^2\psi) = \overline{[\psi(\overline{\nabla^2\psi})_y^y]_x^x} - \overline{[\psi(\overline{\nabla^2\varphi})_x^x]_y^y}, \quad (5.5.22)$$

$$J_3(\psi, \nabla^2\psi) = \overline{(\nabla^2\psi\overline{\psi}_x^x)_y^y} - \overline{(\nabla^2\psi\overline{\psi}_y^y)_x^x}. \quad (5.5.23)$$

Можно показать, что

$$\overline{\psi J_1(\psi, \nabla^2\psi)}^{ij} = \overline{-\psi J_2(\psi, \nabla^2\psi)}^{ij}, \quad (5.5.24)$$

$$\overline{\nabla^2\psi J_1(\psi, \nabla^2\psi)}^{ij} = -\overline{\nabla^2\psi J_3(\psi, \nabla^2\psi)}^{ij}, \quad (5.5.25)$$

$$\overline{\nabla^2\psi J_2(\psi, \nabla^2\psi)}^{ij} = \nabla^2\psi\{\overline{[\psi(\overline{\nabla^2\psi})_y^y]_x^x} - \overline{[\psi(\overline{\nabla^2\psi})_x^x]_y^y}\} =$$
$$= -\overline{\psi[(\overline{\nabla^2\psi})_x^x(\overline{\nabla^2\psi})_y^y] + \psi[(\overline{\nabla^2\psi})_y^y(\overline{\nabla^2\psi})_x^x]}^{ij} = 0; \quad (5.5.26)$$

$$\overline{\psi J_3(\psi, \nabla^2\psi)}^{ij} = \overline{\psi\left[(\nabla^2\psi\bar{\psi}_x^x)_y - (\nabla^2\psi\bar{\psi}_y^y)_x\right]}^{ij} =$$

$$= \overline{-\nabla^2\psi(\bar{\psi}_x^x\bar{\psi}_y^y) + \nabla^2\psi(\bar{\psi}_y^y\bar{\psi}_x^x)}^{ij} = 0; \qquad (5.5.27)$$

$$\overline{J_2(\psi, \nabla^2\psi)}^{ij} = 0, \quad \overline{J_3(\psi, \nabla^2\psi)}^{ij} = 0. \qquad (5.5.28)$$

Как показал Н. Филлипс, схема, сохраняющая лишь линейный инвариант модели $\overline{\nabla^2\psi}^{ij}$, является безусловно неустойчивой в области высоких частот. Наличие у схемы свойства сохранения хотя бы одного из квадратичных инвариантов $\overline{\psi\nabla^2\psi}^{ij}$ или $\overline{(\nabla^2\psi)^2}^{ij}$ — достаточное условие ее устойчивости. Наиболее корректным является требование сохранения средней энстрофии $\overline{(\nabla^2\psi)^2}^{ij}$ и средней кинетической энергии $\overline{\psi\nabla^2\psi}^{ij}$, так как эти условия, действуя совместно, накладывают ограничения и на спектральное изменение энергии. Поскольку среднее волновое число не должно меняться во времени, условия $\overline{(\nabla^2\psi)^2}^{ij}$ и $\overline{\psi\nabla^2\psi}^{ij}$ касаются не только среднего значения вихря и квадратичных величин, но и спектрального распределения энергии. Это означает, что в двумерном несжимаемом потоке воздуха не может осуществляться систематический каскад энергии только к коротким волнам. Энергия и энстрофия должны передаваться от одной волны к другой согласованно без их ложного роста или уменьшения. Следовательно, при разностной аппроксимации уравнения перенос квадратичных величин в двумерной области от одного узла к другому также должен осуществляться без их фиктивного роста или уменьшения.

Схему аппроксимации якобиана, сохраняющую все интегральные свойства соленоидальной модели, будем искать, используя метод неопределенных коэффициентов. Пусть $J_f = \alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3$, где $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$. На основании формул (5.5.19), (5.5.24)—(5.5.28) запишем соотношения

$$\begin{aligned}
&\overline{\alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3}^{ij} = 0, \\
&\overline{\psi(\alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3)}^{ij} = \overline{\psi J_2}^{ij}(-\alpha_1 + \alpha_2), \\
&\overline{\nabla^2\psi(\alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3)}^{ij} = \overline{\nabla^2\psi J_3}^{ij}(-\alpha_1 + \alpha_3),
\end{aligned} \qquad (5.5.29)$$

из которых следует, что для сохранения величин $\overline{\nabla^2\psi}^{ij}$, $\overline{\psi\nabla^2\psi}^{ij}$ и $\overline{(\nabla^2\psi)^2}^{ij}$ необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \quad \alpha_2 - \alpha_1 = 0, \quad \alpha_3 - \alpha_1 = 0, \qquad (5.5.30)$$

откуда находим: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$.

В заключение подчеркнем, что аппроксимация якобиана по Аракаве позволяет контролировать вычислительный энергетический

каскад путем сохранения среднего волнового числа при адвекции посредством бездивергентного потока. Аналогично рассмотренной схеме можно построить аппроксимацию адвективных членов для нефильтрованных уравнений, когда ветер дивергентен.

Таким образом, рационально построив вычислительную процедуру на основе схем, обладающих свойством сохранения, удается правильно описать эволюцию атмосферных движений на различных участках спектра, избежать появления нелинейной вычислительной неустойчивости и тем самым увеличить временной интервал интегрирования и повысить точность решения эволюционного уравнения.

5.5.2. Интегральные инварианты баротропной негеострофической модели. Рассмотрим тонкий слой тяжелой однородной идеальной жидкости, ограниченной снизу непроницаемой горизонтальной поверхностью $z=0$, а сверху — свободной поверхностью $h(x, y, t)$, выше которой располагается среда малой плотности или вакуум, так что на свободной поверхности давление постоянно $p=p_0$. Поскольку слой идеальной жидкости очень тонок, можно положить $\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial z}=0$ и записать уравнения горизонтального движения мелкой воды в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial x}-lv=0, \tag{5.5.31}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}+lu=0. \tag{5.5.32}$$

Проинтегрировав уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \quad \rho=\text{const}. \tag{5.5.33}$$

по переменной z в пределах от 0 до h при нижнем граничном условии

$$w|_{z=0}=0, \tag{5.5.34}$$

получим

$$w|_{z=h}=-h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right). \tag{5.5.35}$$

С другой стороны, имеем

$$w|_{z=h}=\frac{dh}{dt}=\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}. \tag{5.5.36}$$

Объединяя (5.5.35) и (5.5.36) и умножив их на g, получим уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+u\frac{\partial \Phi}{\partial x}+v\frac{\partial \Phi}{\partial y}+\overline{\Phi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0, \tag{5.5.37}$$

описывающее локальные изменения геопотенциальных высот частиц жидкости, которые движутся вдоль свободной поверхности. Заметим, что в предположении

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{5.5.38}$$

которое позволяет выразить компоненты вектора скорости u и v через функцию тока

$$u=-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v=\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{5.5.39}$$

на основе системы уравнений мелкой воды при $l=\text{const}$ легко получить первое приближение соленоидального уравнения вихря скорости (5.5.1).

Уравнения, аналогичные по форме уравнениям мелкой воды, могут быть получены на основе системы квазистатических уравнений термодинамики атмосферы в изобарических координатах

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\dot{\omega}\frac{\partial u}{\partial \zeta}+\frac{\partial \Phi}{\partial x}-lv=0, \tag{5.5.40}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\dot{\omega}\frac{\partial v}{\partial \zeta}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}+lu=0, \tag{5.5.41}$$

$$T=-\frac{\zeta}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \tag{5.5.42}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \zeta}=0, \tag{5.5.43}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}-\frac{RT}{g\zeta}(\gamma_a-\gamma)\dot{\omega}=0, \tag{5.5.44}$$

если их проинтегрировать по переменной ζ, полагая, что атмосфера баротропна, т. е. модуль вектора градиента геопотенциала и модуль плоского градиента вектора скорости подобны над каждой точкой

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s}(x, y, \zeta, t)=\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s}(x, y, t) f_1(\zeta), \quad s=x, y; \tag{5.5.45}$$

$$u(x, y, \zeta, t)=\bar{u}(x, y, t) f_2(\zeta), \tag{5.5.46}$$

$$v(x, y, \zeta, t)=\bar{v}(x, y, t) f_2(\zeta) \tag{5.5.47}$$

(где $\overline{(\ )}=\int_0^1 (\ )\,d\zeta$ — осреднение по ζ; функции f_1 и f_2 подбирают так, чтобы они убывали с ростом ζ, т. е. $\frac{\partial f_1}{\partial \zeta}<0$, $\frac{\partial f_2}{\partial \zeta}<0$), а $\dot{\omega}|_{\zeta=0}=0$.

Опуская промежуточные выкладки и пренебрегая малыми членами, содержащими ω, запишем результат интегрирования

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)\alpha_1^2+\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x}-l\bar{v}=0, \tag{5.5.48}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}+\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)\alpha_1^2+\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y}+l\bar{u}=0, \tag{5.5.49}$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t}+\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y}\right)\alpha_2^2+c^2\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)=0. \tag{5.5.50}$$

Здесь $\alpha_1^2=\bar{f}_2^{-2}$, $\alpha_2^2=\dfrac{\overline{f_2 f_3}}{\bar{f}_3}$, $c^2=\alpha_3^2 C_0^2$, $\alpha_3^2=\overline{f_2 ln\frac{1}{\zeta}}\Big/\bar{f}_3$, $c_0^2=\dfrac{R^2T}{g}\times$ $\times(\gamma_a-\gamma)$, $f_3=-\zeta\dfrac{\partial f_1}{\partial \zeta}$.

Функции α_1^2, α_2^2 мало отличаются от единицы, поэтому уравнения движения для баротропной атмосферы (5.5.48), (5.5.49) имеют тот же вид и смысл, что и уравнения (5.5.40), (5.5.41), описывающие движения на изобарических поверхностях, и уравнения (5.5.31), (5.5.32), описывающие движение мелкой воды. Однако уравнения (5.5.48), (5.5.49) описывают эволюцию поля среднего ветра, а уравнение (5.5.50) является следствием интегрирования по ζ уравнений притока тепла, неразрывности и статики и описывает локальные изменения среднего геопотенциала под влиянием его адвекции и горизонтальной дивергенции среднего ветра.

Опуская знаки осреднения, полагая $\alpha_1^2=\alpha_2^2=1$, перепишем систему уравнений баротропной негеострофической модели в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial x}-lv=0, \tag{5.5.51}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \Phi}{\partial y}+lu=0, \tag{5.5.52}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+u\frac{\partial \Phi}{\partial x}+v\frac{\partial \Phi}{\partial y}+c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0 \tag{5.5.53}$$

и рассмотрим ее инварианты. Будем интегрировать уравнения на квадратной сеточной области (рис. 1) при граничных условиях (5.5.3). Рассмотрим интеграл

$$I_1=\int_0^{L_y}\int_0^{L_x}\Phi\,dx\,dy. \tag{5.5.54}$$

Нетрудно показать, что, если уравнение для Φ взять в форме (5.5.37), получим

$$\frac{\partial I_1}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{L_y}\int_0^{L_x}\Phi\,dx\,dy=0. \tag{5.5.55}$$

Следовательно, величина I_1 — интегральный инвариант модели мелкой воды. Условие (5.5.55) при $\rho=\text{const}$ означает (с точностью до постоянного множителя ρ/g) сохранение массы воды в объеме L_xL_yh:

$$M=\int_0^{L_y}\int_0^{L_x}\int_0^{h}\rho\,dz\,dx\,dy=\rho\int_0^{L_y}\int_0^{L_x}h\,dx\,dy=\frac{\rho}{g}\int_0^{L_y}\int_0^{L_x}\Phi\,dx\,dy \quad (5.5.56)$$

Покажем, что для модели мелкой воды имеет место энергетический инвариант I_2. Умножим (5.5.31) на u, (5.5.32) на v и, сложив результаты, получим уравнение кинетической энергии плоского движения $\left(E_к=\frac{u^2+v^2}{2}\right)$

$$\frac{\partial E_к}{\partial t}=-\left(u\frac{\partial(E_к+\Phi)}{\partial x}+v\frac{\partial(E_к+\Phi)}{\partial y}\right). \quad (5.5.57)$$

Запишем уравнение (5.5.53) в дивергентной форме

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-\frac{\partial u\Phi}{\partial x}-\frac{\partial v\Phi}{\partial y}=-\operatorname{div}(\Phi\vec{V}) \quad (5.5.58)$$

и, умножив (5.5.58) и (5.5.57) на Φ, а (5.5.58) на $E_к$ и сложив три полученных уравнения, запишем результат в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Phi^2}{2}+E_к\Phi\right)=-\left[\frac{\partial}{\partial x}(E_к+\Phi)u\Phi+\frac{\partial}{\partial y}(E_к+\Phi)v\Phi\right]. \quad (5.5.59)$$

Проинтегрировав уравнение (5.5.59) по области, найдем, что

$$\frac{\partial I_2}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{L_y}\int_0^{L_x}\left(\frac{\Phi^2}{2}+E_к\Phi\right)dx\,dy=0, \quad (5.5.60)$$

т. е. функционал I_2 — второй интегральный инвариант модели. Чтобы выяснить физический смысл I_2, рассмотрим кинетическую и потенциальную энергии жидкости в объеме L_xL_yh:

$$\int_0^{L_y}\int_0^{L_x}\int_0^{h}\rho E\,dz\,dx\,dy=\frac{\rho}{g}\int_0^{L_y}\int_0^{L_x}E_к\Phi\,dx\,dy, \quad (5.5.61)$$

$$\int_0^{L_y}\int_0^{L_x}\int_0^{h}\rho gz\,dz\,dx\,dy=\frac{\rho}{g}\int_0^{L_y}\int_0^{L_x}\frac{\Phi^2}{2}dx\,dy. \quad (5.5.62)$$

Сумма правых частей (5.5.61) и (5.5.62) представляет собой полную механическую энергию жидкости в рассматриваемом

объеме. Сравнивая эту сумму с I_2, видим, что I_2 с точностью до постоянного множителя ρ/g также представляет собой полную механическую энергию. Однако, если уравнение для $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ взять в форме (5.5.53), то условия (5.5.55) и (5.5.60) не имеют места. Поскольку наличие интегральных инвариантов обеспечивает меньшую зависимость схемы интегрирования уравнений модели от ошибок, то результаты прогноза с помощью баротропной негеострофической модели оказываются лучшими, если в третьем уравнении системы (5.5.51)—(5.5.53) вместо c^2 берется $\overline{\Phi}$.

5.5.3. Энергетический инвариант бароклинной негеострофической модели. Система уравнений (5.5.40)—(5.5.44) описывает эволюцию бароклинной атмосферы в адиабатическом приближении, является замкнутой и может служить основой для краткосрочного прогноза в свободной атмосфере. Будем рассматривать процессы в квазипрямоугольной призме, длина сторон которой составляет $x_2 - x_1 = L_x$, $y_2 - y_1 = L_y$, $\zeta_2 - \zeta_1 = L_\zeta$, а грани являются непроницаемыми. Тогда

$$u\big|_{\substack{x=x_1\\x=x_2}} = v\big|_{\substack{y=y_1\\y=y_2}} = \dot{\omega}\big|_{\substack{\zeta=\zeta_1\\\zeta=\zeta_2}} = 0. \qquad (5.5.63)$$

Из уравнений (5.5.40), (5.5.41) получим уравнение для $E_к$

$$\frac{\partial E_к}{\partial t} + u\frac{\partial E_к}{\partial x} + v\frac{\partial E_к}{\partial y} + \dot{\omega}\frac{\partial E_к}{\partial \zeta} = -u\frac{\partial \Phi}{\partial x} - v\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \qquad (5.5.64)$$

Из уравнения (5.5.44), которое перепишем в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} + \dot{\omega}\frac{\partial T}{\partial \zeta} - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\frac{T}{\zeta}\dot{\omega} = 0, \qquad (5.5.65)$$

получим уравнение для внутренней энергии в механических единицах

$$E_в = \frac{c_p T}{A} = \frac{\varkappa R}{\varkappa - 1} T. \qquad (5.5.66)$$

Умножая (5.5.65) на $\frac{\varkappa R}{\varkappa - 1}$ и учитывая уравнение неразрывности (5.5.43) и (5.5.66), получим уравнение внутренней энергии

$$\frac{\partial E_в}{\partial t} + u\frac{\partial E_в}{\partial x} + v\frac{\partial E_в}{\partial y} + \dot{\omega}\frac{\partial E_в}{\partial \zeta} = -\dot{\omega}\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}. \qquad (5.5.67)$$

Суммируя (5.5.64) и (5.5.67), получим

$$\frac{\partial (E_к + E_в)}{\partial t} = -\left\{u\frac{\partial}{\partial x}(E_к + E_в + \Phi) + \right.$$

$$\left. + v\frac{\partial}{\partial y}(E_к + E_в + \Phi) + \dot{\omega}\frac{\partial}{\partial \zeta}(E_к + E_в + \Phi)\right\}, \qquad (5.5.68)$$

где $(E_к+E_в+Ф)$ — суммарная энергия. Умножив теперь (5.5.43) на $E_к+E_в+Ф$ и сложив результат с (5.5.68), найдем

$$\frac{\partial (E_к + E_в)}{\partial t} = -\left\{\frac{\partial}{\partial x}[u(E_к + E_в + Ф)] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}[v(E_к + E_в + Ф)] + \frac{\partial}{\partial \zeta}[\dot{\omega}(E_к + E_в + Ф)]\right\}. \quad (5.5.69)$$

Интегрируя (5.5.69) по x, y, ζ в пределах от x_1 до x_2, от y_1 до y_2, от ζ_1 до ζ_2 с учетом граничных условий (5.5.63), получим

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{\zeta_1}^{\zeta_2}(E_к + E_в + Ф)\, d\zeta\, dy\, dx = 0, \quad (5.5.70)$$

где I — интегральный инвариант энергии, в который входят кинетическая энергия плоского движения и внутренняя энергия. Потенциальная энергия и кинетическая энергия вертикальных движений в I не входят (следствие использования квазистатического приближения). Можно показать, что для рассматриваемой модели сохраняется также масса воздуха в области решения. Изменение конфигурации прогностической области или переход к другой системе координат не нарушают консервативных свойств дифференциальной задачи.

Отметим, что для любой модели при определенных упрощающих предположениях (адиабатичность атмосферных процессов, отсутствие вязкости и потока массы через границы) может иметь место хотя бы один интегральный инвариант. Если учитывают неадиабатичность и вязкость, либо ставят другие граничные условия, инвариантность нарушается. При использовании конечно-разностных схем, обладающих свойством сохранения интегральных инвариантов дифференциальной задачи, имеется возможность контролировать вычислительную устойчивость процесса численного интегрирования уравнений. Быстрое изменение (рост или уменьшение) инвариантов в процессе интегрирования свидетельствует о неудовлетворительности выбранной схемы интегрирования. В первом случае грозит «взрыв» решения (получение хаотического набора очень больших чисел), во втором случае решение будет очень быстро затухать, в результате прогнозируемые поля метеовеличин могут оказаться практически безградиентными.

5.6. Сеточное описание инерционно-гравитационных волн и пространственное распределение переменных

Современные оперативные конечно-разностные модели гидродинамического прогноза метеовеличин основаны на схемах с порядком аппроксимации уравнений, как правило, не выше второго. Остановимся поэтому на схемах второго порядка, не забывая одна-

ко об их основных недостатках: ошибке в определении фазы волнового решения и вычислительной дисперсии. Оказывается, что вид полудискретных (дифференциально-разностных) уравнений прогноза существенно зависит от выбора сетки. Рассмотрим три часто используемые сетки и укажем на те обстоятельства, которые нужно учитывать при их выборе. Особое внимание уделим сеточному описанию инерционно-гравитационных волн.

Пусть требуется получить полудискретные аналоги уравнений баротропной атмосферы (5.5.31), (5.5.32), (5.5.37). Простейшими боковыми граничными условиями могут служить фиктивные условия: $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\Gamma} = \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{\Gamma} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}\Big|_{\Gamma} = 0$. Указанные уравнения в умеренных широтах при $l=\text{const}$ описывают баротропные волны Россби (в приближении β-плоскости) — собственные волновые решения линеаризованного относительно среднего потока баротропного уравнения вихря скорости; распространяющиеся по горизонтали инерционно-гравитационные волны. Такие волны можно считать представителями классов планетарных и инерционно-гравитационных волн, описываемых системой полных уравнений (5.5.40) — (5.5.44) и включающих наряду с ними бароклинные волны Россби, внутренние гравитационные волны и другие. Волны Россби являются медленными по сравнению с инерционно-гравитационными, поэтому их представление на сетке обычно затруднений не вызывает. Однако описание процесса геострофического приспособления, осуществляемого за счет распространения инерционно-гравитационных волн, представляет вычислительную проблему. Например, важен здесь правильный расчет фазовых ($C_ф$) и групповых ($C_г$) скоростей волн, имеющих малую длину, для которых пространственная аппроксимация может быть неудовлетворительной. При описании медленных движений более важна аппроксимация по времени, поскольку в результате нелинейных взаимодействий может возникнуть вычислительная неустойчивость. Выше отмечалось, что при дискретизации в целом руководствуются требованием выполнения для сеточных аналогов уравнений основных законов сохранения. Это уменьшает возможность нелинейной неустойчивости, однако во многих случаях уравнения приходится преобразовывать к подходящему виду (напр., уравнения мелкой воды можно записать в форме Громеки, кососимметричной форме, форме Аракавы — Лэмба и др.).

На рис. 9, а изображены три типичные схемы расположения зависимых переменных u, v, Φ в узлах сетки. Сетки B и C называют расшатанными. При моделировании на сфере или полусфере расшатанную сетку выбирают с целью наиболее точно воспроизвести характеристики дифференциальной задачи (законы сохранения, асимптотическое поведение решения и др.), а также построить экономичную схему реализации на ЭВМ. В задачах на ограниченных областях существенным фактором могут оказаться граничные условия на боковых стенках. Например, для

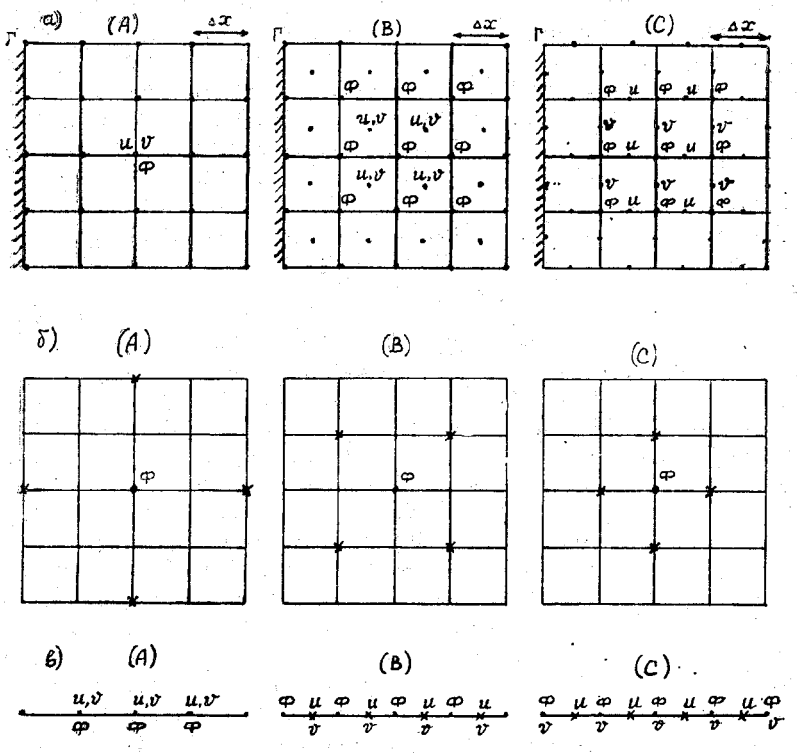

Рис. 9. Шаблоны двумерных (*а*, *б*) и одномерных (*в*) сеток A, B, C.

вычисления геопотенциала Φ из исходной системы уравнений часто выводят эллиптическое уравнение второго порядка. Однако поставить боковое условие для Φ сложнее, чем для компонент вектора скорости u, v. Достоинством сетки A является ее простота, а недостатком — необходимость задания Φ на границе. На сетках B и C определять Φ на границе не нужно.

При построении экономичных схем реализации могут возникнуть дополнительные трудности. Например, при использовании схемы центральных разностей (5.1.11) все множество сеточных решений на шагах по времени в принципе можно разбить на невзаимодействующие подмножества, причем на разных шагах эти подмножества могут быть разными. Очевидно, если все вычисления ведутся только по одному из подмножеств сетки, уменьшаются требования к ресурсам ЭВМ при сохранении погрешности расчета производной. Так, в области прогноза могут существовать две не связанные между собой системы узлов, в которых из эллиптического уравнения определяется Φ. На рис. 9, б геопотенциал вычисляют в узловых точках, а узлы-крестики используют при

аппроксимации уравнения. На сетках A и B системы точек, в которых на каждом временном слое определяют Ф, не связаны между собой. Отсюда следует, что существует два решения для Ф (отличающиеся произвольной постоянной), что может привести к возникновению осцилляций Ф, однако градиент Ф и вычисленные компоненты скорости не осциллируют. Постановка боковых граничных условий может привести к слабому взаимодействию полей. На сетке С такое разделение отсутствует, что делает ее удобной для расчетов.

Ограничимся здесь полудискретной формой записи уравнений прогноза без адвективных членов, поскольку такая запись проще и позволяет впрямую моделировать процесс геострофического приспособления. Однако в зависимости от схемы интегрирования по времени при переходе от полудискретных уравнений к разностным, главным образом, адвективные члены могут претерпеть существенные изменения за счет применения операторов сглаживания по x, y, t и др. При выборе сетки обычно уже имеют в виду конкретную схему интегрирования по времени.

Рассмотрим теперь, как влияет выбор сетки на процесс геострофического приспособления. Этот процесс по сравнению с эволюцией медленных низкочастотных движений можно считать практически линейным. Поэтому в простейшем случае задачу геострофического приспособления можно свести к линейной задаче распространения инерционно-гравитационных волн при $l=\text{const}$ и отсутствии диссипации. При изложении будем следовать, в основном, Г. И. Марчуку.

Линеаризовав систему полных уравнений в P-системе координат относительно состояния покоя, получим

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} - lv = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\
\frac{\partial v}{\partial t} + lu = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \\
T = -\frac{p}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial p}, \qquad (5.6.1) \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0, \\
\frac{\partial T}{\partial t} - \sigma\tau = 0,
\end{gathered}$$

где $\tau = dp/dt$, $\sigma = \varkappa/p$, $\varkappa = R\overline{T}(\gamma - \overline{\gamma})$. По вертикали положим $\Phi|_{p=p_1} = 0$, $\left.\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right|_{p=p_2} = 0$. Здесь p_1 и p_2 — давление соответственно на нижней и верхней границах области прогноза. Поскольку ниж-

нее граничное условие полностью устраняет «остатки» сжимаемости воздуха, мы имеем дело только с инерционно-гравитационными волнами.

Приведем систему (5.6.1) к эволюционному виду: подставим температуру из уравнения статики в уравнение притока тепла и, продифференцировав его по p, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial p}\frac{p}{R\sigma}\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}+\frac{\partial \tau}{\partial p}=0;$$

выразив $\partial\tau/\partial p$ из уравнения неразрывности и положив $\varkappa=\text{const}$, приходим к системе

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}-lv=-\frac{\partial \Phi}{\partial x},\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+lu=-\frac{\partial \Phi}{\partial y},\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial p}\frac{p^2}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial p}\right]\Phi-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0,
\end{aligned} \tag{5.6.2}$$

из которой видно, что вертикальным оператором задачи (5.6.1) является

$$\Lambda_p=\frac{\partial}{\partial p}\frac{p^2}{\varkappa}\frac{\partial}{\partial p}. \tag{5.6.3}$$

Чтобы получить дисперсионное соотношение, связывающее частоты и волновые числа инерционно-гравитационных волн, сведем трехмерную задачу (5.6.1) к совокупности двумерных. Для этого вначале найдем собственные функции $\psi_i(p)$ и собственные значения λ_i оператора Λ_p, т. е. решим спектральную задачу

$$\begin{aligned}
&\Lambda_p\psi_i=-\lambda_i\psi_i,\\
&\psi_i=0 \text{ при } p=p_1,\quad \frac{\partial\psi_i}{\partial p}=0 \text{ при } p=p_2
\end{aligned} \tag{5.6.4}$$

и представим функци u, v, Φ в виде рядов Фурье по базису $\{\psi_i\}$

$$\varphi=\sum_{i=1}\varphi_i(x,\ y)\,\psi_i(p). \tag{5.6.5}$$

Здесь $\varphi=(u,\ v,\ \Phi)^{\mathrm{T}}$, где T — знак транспонирования. Коэффициенты Фурье φ_i размерны, а собственные функции $\psi_i(p)$ безразмерны. Можно показать, что система базисных функций $\{\psi_i\}$ вещественна, полна и ортонормирована в смысле

$$\int_{p_1}^{p_2}\psi_i\psi_n\,dp=\begin{cases}0, & i\neq n,\\ 1, & i=0,\end{cases} \tag{5.6.6}$$

а все λ_i вещественны и положительны. Выполним разложение (5.6.5) в системе (5.6.2), домножим ее на ψ_n и, проинтегрировав по p от p_1 до p_2, с учетом n-й вертикальной моды получим систему уравнений для коэффициентов Фурье

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} - lv_n = -\frac{\partial \Phi_n}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v_n}{\partial t} + lu_n = -\frac{\partial \Phi_n}{\partial y}, \qquad (5.6.7)$$

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial t} + c_n^2\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y}\right) = 0,$$

где $c_n^2 = 1/\lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Поскольку каждому n соответствует некоторая высота свободной поверхности H_n (эквивалентная высота), то, опустив в (5.6.7) индекс n, приходим к системе уравнений, описывающих чисто горизонтальные процессы в покоящейся баротропной атмосфере высотой H_n. Таким образом, трехмерная задача (5.6.1) сведена к совокупности n простых независимых «плоских» задач, для которых можно получить дисперсионное соотношение. С этой целью продифференцируем первое уравнение в (5.6.7) по x, второе — по y и, сложив найденные выражения, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y}\right) - l\left(\frac{\partial v_n}{\partial x} - \frac{\partial u_n}{\partial y}\right) = -\nabla^2 \Phi_n. \qquad (5.6.8)$$

Из третьего уравнения в системе (5.6.7) коэффициент Фурье плоской дивергенции равен

$$D_n = \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial v_n}{\partial y} = -\frac{1}{c_n^2}\frac{\partial \Phi_n}{\partial t}. \qquad (5.6.9)$$

Подставив (5.6.9) в (5.6.8), получим

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial t^2} + c_n^2 l \Omega_n = c_n^2 \nabla^2 \Phi_n, \qquad (5.6.10)$$

где $\Omega_n = \frac{\partial v_n}{\partial x} - \frac{\partial u_n}{\partial y}$ — коэффициент Фурье вертикальной компоненты вихря скорости.

Продифференцируем теперь первое уравнение из (5.6.7) по y, второе — по x, вычтем первое из второго и найдем

$$\frac{\partial \Omega_n}{\partial t} + lD_n = 0 \qquad (5.6.11)$$

или с учетом (5.6.9)

$$\frac{\partial \Omega_n}{\partial t} = \frac{1}{c_n^2}\frac{\partial \Phi_n}{\partial t}. \qquad (5.6.12)$$

Положив здесь $$\chi_n = -\frac{\partial \Phi_n}{\partial t}, \tag{5.6.13}$$
получим уравнение
$$\frac{\partial^2 \chi_n}{\partial t^2} + l^2 \chi_n = c_n^2 \nabla^2 \chi_n, \tag{5.6.14}$$

решение которого будем искать в форме плоских волн

$$\chi_n = A \exp [i (m_x x + m_y y - \sigma t)], \tag{5.6.15}$$

где σ — частота, m_x, m_y — волновые числа по осям x и y. Подставив (5.6.15) в (5.6.14), получаем дисперсионное соотношение

$$\sigma_n^2 = l^2 + c_n (m_x^2 + m_y^2), \tag{5.6.16}$$

характеризующее систему инерционно-гравитационных волн. Периоды собственных колебаний определяются соотношением

$$T_n = \frac{2\pi}{\sigma_n} = \frac{2\pi}{\sqrt{l^2 + \frac{1}{\lambda_n}(m_x^2 + m_y^2)}}. \tag{5.6.17}$$

Прямые вычисления собственных значений оператора Λ_p показывают, что λ_1 на порядок больше λ_2. Вообще $\lambda_n > \lambda_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Для фазовых скоростей все наоборот. При $n = 1$ имеем внешнюю, самую быструю моду с фазовой скоростью около 290 м/с, а при $n \geqslant 2$ — внутренние, более медленные моды. При $n \to \infty$ соотношение (5.6.17) описывает чисто инерционные колебания с $\sigma \approx l$ и $T \approx 1$ сут. Опуская индекс n, рассмотрим вначале чисто гравитационные волны с $\sigma \gg l$ и $T \ll 1$ сут., описываемые системой

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -c^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \tag{5.6.18}$$

из которой следует, что

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \Phi. \tag{5.6.19}$$

Отсюда, используя для Φ представление (5.6.15), имеем дисперсионное соотношение

$$\sigma^2 = c^2 (m_x^2 + m_y^2). \tag{5.6.20}$$

Определим модуль волнового числа $m = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$ и фазовую скорость

$$\vec{C_\Phi} = \frac{\sigma}{m} \vec{m_0}, \tag{5.6.21}$$

где $\vec{m_0}$ — единичный волновой вектор. Очевидно, что $|C_\Phi| = |C| = |C_r| = \frac{\partial m C_\Phi}{\partial m} = \text{const}$.

Теперь аппроксимируем производные по пространству в (5.6.18) на сетках A, B, C с шагом Δs по схеме центральных разностей со вторым порядком точности. Например,

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{q,j} = \frac{\Phi_{q+1,j} - \Phi_{q-1,j}}{2\Delta s} \quad \text{для сетки } A, \tag{5.6.22}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{q+\frac{1}{2},j} = \frac{\Phi_{q+1,j} - \Phi_{q,j}}{\Delta s} \quad \text{для сетки } C. \tag{5.6.23}$$

Рассмотрим, как влияют представления (5.6.22) и (5.6.23) на фазовую скорость волн. Запишем представление вида (5.6.15):

$$\Phi_{q,j} = \Phi \exp\left[i\left(m_x q\,\Delta s + m_y j\,\Delta s - \sigma_p t\right)\right], \tag{5.6.24}$$

где индекс p у частоты означает, что рассматривается полудискретное решение. Подставим (5.6.23) в (5.6.21), (5.6.22) и, воспользовавшись формулой Эйлера для экспоненты, получим

$$\begin{aligned} &\frac{\Phi_{q+1,j} - \Phi_{q-1,j}}{2\Delta s} = i m_x \frac{\sin(m_x \Delta s)}{m_x \Delta s}\Phi_{q,j} \quad \text{для сетки } A, \\ &\frac{\Phi_{q+1,j} - \Phi_{q,j}}{\Delta s} = i m_x \frac{\sin\left(m_x \frac{\Delta s}{2}\right)}{m_x \frac{\Delta s}{2}} \quad \text{для сетки } C. \end{aligned} \tag{5.6.25}$$

Нас интересует, какой вид примет дисперсионное соотношение (5.6.20). Распишем $\nabla^2\Phi$ из (5.6.19) соответственно на сетках A и C

$$(\nabla^2\Phi)_{q,j} \approx \frac{1}{(2\Delta s)^2}\left(\Phi_{q+2,j} + \Phi_{q-2,j} + \Phi_{q,j+2} + \Phi_{q,j-2} - 4\Phi_{q,j}\right), \tag{5.6.26}$$

$$(\nabla^2\Phi)_{q,j} \approx \frac{1}{\Delta s^2}\left(\Phi_{q+1,j} + \Phi_{q-1,j} + \Phi_{q,j+1} + \Phi_{q,j-1} - 4\Phi_{q,j}\right). \tag{5.6.27}$$

Используя представление (5.6.24), получим

$$\sigma_p^2 = \frac{c^2}{\Delta s^2}\left(\sin^2 m_x \Delta s + \sin^2 m_y \Delta s\right) \quad \text{для сетки A}, \tag{5.6.28}$$

$$\sigma_p^2 = \frac{c^2}{(\Delta s/2)^2}\left(\sin^2 m_x \frac{\Delta s}{2} + \sin^2 m_y \frac{\Delta s}{2}\right) \quad \text{для сетки C}. \tag{5.6.29}$$

Тогда отношение фазовых скоростей для дифференциальной и полудискретной задач примет вид

$$\frac{C_p}{C_\Phi} = \sqrt{\frac{\sin^2 X + \sin^2 Y}{X^2 + Y^2}}, \tag{5.6.30}$$

где $X = m_x \Delta s$, $Y = m_y \Delta s$ для сетки A и $X = m_x \frac{\Delta s}{2}$, $Y = m_y \frac{\Delta s}{2}$

для сетки C. Из (5.6.30) следует, что для волн длиной $L \to \infty$ отношение $C_p/C_\Phi \to 1$. Однако в любом случае волны распространяются на сетке медленнее, чем в дифференциальном случае. Поскольку минимальная волна, разрешимая на сетке, имеет $L=2\Delta s$, а $m_{\max}=2\pi/L_{\max}=\pi/\Delta s$, то $X_{\max}=m_{\max}\Delta s=\pi$, $Y_{\max}=\pi$ для сетки A, $X_{\max}=\pi/2$, $Y_{\max}=\pi/2$ для сетки C. Таким образом, сетка C допускает меньшие волновые числа, чем сетка A. Поэтому из (5.6.30) ясно, что с точки зрения минимизации ошибки фазовой скорости сетка C предпочтительнее.

Вернемся к описанию инерционно-гравитационных волн с $\sigma \approx l$ и $l=\text{const} \neq 0$ системой (5.6.18) и запишем полудискретные уравнения так, чтобы их правые части определялись в тех же точках, что и левые

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{q,j} = -\overline{\delta_x \Phi}^{x}_{q,j} + l v_{q,j},$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{q,j} = -\overline{\delta_y \Phi}^{y}_{q,j} - l u_{q,j}, \qquad \text{для сетки A,} \qquad (5.6.31)$$
$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{q,j} = -c^2\left(\overline{\delta_x u}^{x}_{q,j} + \overline{\delta_y v}^{y}_{q,j}\right);$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{q+\frac{1}{2},\, j+\frac{1}{2}} = -\overline{\delta_x \Phi}^{y}_{q+\frac{1}{2},\, j+\frac{1}{2}} + l v_{q+\frac{1}{2},\, j+\frac{1}{2}},$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{q+\frac{1}{2},\, j+\frac{1}{2}} = -\overline{\delta_y \Phi}^{x}_{q+\frac{1}{2},\, j+\frac{1}{2}} - l u_{q+\frac{1}{2},\, j+\frac{1}{2}} \qquad \text{для сетки B,} \qquad (5.6.32)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{q,j} = -c^2\left(\overline{\delta_x u}^{y}_{q,j} + \overline{\delta_y v}^{x}_{q,j}\right);$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{q+\frac{1}{2},\, j} = -\delta_x \Phi_{q+\frac{1}{2},\, j} + \overline{lv}^{xy}_{q,\, j+\frac{1}{2}},$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_{q,\, j+\frac{1}{2}} = -\delta_y \Phi_{q,\, j+\frac{1}{2}} - \overline{lu}^{xy}_{q+\frac{1}{2},\, j}, \qquad \text{для сетки C.} \qquad (5.6.33)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{q,j} = -c^2\left(\delta_x u_{q,j} + \delta_y v_{q,j}\right)$$

Рассмотрим искажения фазовой и групповой скоростей, возникающие вследствие дискретизации по пространству. Для простоты ограничимся одномерным случаем (выводы будут качественно верными и для двумерного случая)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -lu, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial u}{\partial x}. \qquad (5.6.34)$$

Уравнения (5.6.34) получаются из (5.6.31), если предположить, что функции u, v, Φ не меняются вдоль оси y, или осреднить исходные уравнения по y и т. д. Одномерные аналоги сеток изображены на рис. 9, в. Чтобы получить дисперсионные соотношения, исключим из системы (5.6.34) переменные v, Φ. Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + l^2 u - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \qquad (5.6.35)$$

Положим

$$u = U \exp\left[i\left(m_x x - \sigma t\right)\right] \qquad (5.6.36)$$

и, подставив его в (5.6.35), получим

$$(\sigma/l)^2 = 1 + (cm_x/l)^2. \qquad (5.6.37)$$

Откуда

$$C_\Phi = \frac{1}{m_x}\sqrt{l^2 + c^2 m_x^2}, \quad C_\Gamma = c^2 m_x \left(l^2 + c^2 m_x\right)^{-1/2}.$$

Поскольку $c^2 \neq 0$, то ни фазовая, ни групповая скорости в нуль не обращаются. Это означает, что локальное насыщение волновой энергией исключается: энергия всегда распространяется от источника. Таким источником может быть район обтекания гор средним потоком. Поэтому, выбирая схему дискретизации для модели прогноза, учитывающей рельеф подстилающей поверхности, необходимо, чтобы групповая скорость не обращалась в нуль.

Перейдем к анализу дисперсионного соотношения (5.6.37) на различных сетках. Распишем уравнение (5.6.35) на сетках с учетом конечно-разностной формы выражения (5.6.36)

$$(\sigma/l)^2 = 1 + (c/l\,\Delta x)^2 \sin^2 m_x \Delta x \text{ для сетки A}, \qquad (5.6.38)$$

$$(\sigma/l)^2 = 1 + 4\,(c/l\,\Delta x)^2 \sin^2 m_x \frac{\Delta x}{2} \text{ для сетки B}. \qquad (5.6.39)$$

$$(\sigma/l)^2 = \cos^2 m_x \frac{\Delta x}{2} + 4\,(c/l\,\Delta x)^2 \sin^2 m_x \frac{\Delta x}{2} \text{ для сетки C}. \qquad (5.6.40)$$

В формуле (5.6.40) учтено, что параметр l задается в (v, Φ)-точках, поэтому в результате осреднения по x вместо l^2 появляется $l^2 \cos^2 m_x \frac{\Delta x}{2}$. Из (5.6.38)—(5.6.40) следует, что безразмерная частота σ/l зависит от параметров $m_x \Delta x$ и $c/l\Delta x$.

На сетке A дисперсионное соотношение имеет максимум при $m_x = \pi/2\Delta x$, т. е. для волн длиной $L = 4\Delta x$ групповая скорость равна нулю и волновой пакет такой энергии не может распространяться. При $\frac{\pi}{2\Delta x} < m_x < \frac{\pi}{\Delta x}$ частота σ/l уменьшается с увеличе-

нием волнового числа, групповая скорость имеет неверный знак, а при $m_x=\pi/\Delta x$ $(L=2\Delta x)$ вновь становится равной нулю.

На сетке B частота σ/l увеличивается при $0<m_x<\frac{\pi}{\Delta x}$, а фазовая и групповая скорости при $L=2\Delta x$ становятся нулевыми. Этот недостаток присущ любой сетке.

На сетке C при $c/l\Delta x>1/2$ безразмерная частота монотонно увеличивается при $0<m_x\leqslant\frac{\pi}{\Delta x}$ и, как и на сетке B, правильно описывает знак групповой скорости. При $\frac{c}{l\Delta x}=1/2$ $C_г=0$ для любых m_x, а при $\frac{c}{l\Delta x}<1/2$ направление вектора скорости будет неверным.

Таким образом, одномерный анализ показывает, что для описания инерционно-гравитационных волн в системе (5.6.1) применение сеток B и C имеет преимущества по сравнению с использованием сетки A.

Свойства временных разностных схем в приложении к уравнениям для гравитационных волн продемонстрируем на примере системы (5.6.18). Используем явную схему центральных разностей по времени (5.1.11) и по пространству на одной из сеток (рис. 9, а)

$$\begin{aligned} u^{\tau+1} &= u^{\tau-1} - 2\Delta t\,\delta_x\Phi^{\tau}, \\ v^{\tau+1} &= v^{\tau-1} - 2\Delta t\,\delta_y\Phi^{\tau}, \\ \Phi^{\tau+1} &= \Phi^{\tau-1} - 2\Delta t c^2\,(\delta_x u + \delta_y v)^{\tau+1}. \end{aligned} \tag{5.6.41}$$

Подставляя волновые решения

$$\begin{aligned} u^{\tau} &= Re\,\{\lambda^{\tau}U\exp[i(m_x x + m_y y)]\}, \\ v^{\tau} &= Re\,\{\lambda^{\tau}V\exp[i(m_x x + m_y y)]\}, \\ \Phi^{\tau} &= Re\,\{\lambda^{\tau}\Phi\exp[i(m_x x + m_y y)]\}, \end{aligned} \tag{5.6.42}$$

где $(\lambda=e^{-i\sigma\Delta t}$ — множитель перехода, связывающий решения на двух соседних уровнях по времени), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (\lambda^2-1)\,U + i\lambda\mu\Phi 2\sqrt{2}\sin X &= 0, \\ (\lambda^2-1)\,V + i\lambda\mu\Phi 2\sqrt{2}\sin Y &= 0, \\ i\lambda\mu c^2 2\sqrt{2}\,(U\sin X + V\sin Y) + (\lambda^2-1)\,\Phi &= 0, \end{aligned} \tag{5.6.43}$$

где X, Y определяются так же, как показано в (5.6.30) с учетом кратчайшего расстояния $(\Delta x)^*$ между узлами любой сетки, фигурирующее вместе с Δt в параметре μ. Известно, что система уравнений типа (5.6.43) имеет ненулевое решение лишь в случае, когда

определитель системы равен нулю. Из требования

$$D=\begin{vmatrix} \lambda^2-1 & 0 & i\mu\lambda 2\sqrt{2}\sin X \\ 0 & \lambda^2-1 & i\mu 2\sqrt{2}\sin Y \\ i\lambda\mu c^2 2\sqrt{2}\sin X & i\lambda\mu c^2 2\sqrt{2}\sin Y & \lambda^2-1 \end{vmatrix}=0$$

получаем характеристическое уравнение для λ, имеющее шесть решений: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, а остальные четыре корня задаются формулой

$$\lambda^2=1-4a\pm 2\sqrt{2a(2a-1)}, \qquad (5.6.44)$$

где $a\equiv c^2\mu(\sin^2 X+\sin^2 Y)$. Значение $\lambda_1=1$ дает нейтральное и стационарное решение. Если в этом случае $\sin X\neq 0$ и $\sin Y\neq 0$, то $\Phi=0$ и решение представляет физически значимое движение. Однако, если $\sin X=0$ и $\sin Y=0$, амплитуды всех трех зависимых переменных могут принимать любые значения. Кроме физически допустимого решения, когда $m_x=m_y=0$, имеется еще решение, в котором одно или оба волновых числа равны $\pi/(\Delta x)^*$. Это двухшаговая волна $L=2(\Delta x)^*$, появляющаяся как ложное вычислительное решение. Поскольку волна стационарна, введение аппроксимации производной по времени не окажет на нее никакого влияния.

Значение $\lambda_2=-1$ соответствует ложной вычислительной моде по времени с периодом $2\Delta t$, появляющейся в результате использования трехуровенной схемы (5.1.11).

Исследуем поведение оставшихся решений, вытекающих из (5.6.44). Они будут нейтральны при $2a=1$. Поскольку для всех допустимых волн должно выполняться выражение $\sqrt{2a}\leqslant 1$, приходим к критерию Куранта — Фридрихса — Леви в двумерном случае:

$$\sqrt{2c^2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\leqslant 1, \qquad (5.6.45)$$

где c^2 согласно уравнению (5.5.50) имеет размерность $м^2/с^2$. Выражения, полученные для λ, могут быть использованы для вычисления относительной фазовой скорости $C_\Phi/\sqrt{c^2}$. Если вместо λ, как это имеет место здесь, задано λ^2, то, используя (5.6.44), для $2a\leqslant 1$ найдем

$$\frac{C_\Phi}{\sqrt{c^2}}=\frac{1}{\Delta t\sqrt{c^2(m_x^2+m_y^2)}}\operatorname{arctg}\left(-\frac{\lambda_{im}}{\lambda_{re}}\right)=$$
$$=\frac{1}{2\mu\sqrt{2(X^2+Y^2)}}\operatorname{arctg}\left(\pm\frac{2\sqrt{2a(1-2a)}}{1-4a}\right). \qquad (5.6.46)$$

Очевидно, при $\Delta t \to 0$ это выражение стремится к выражению

$$\frac{C_\Phi}{\sqrt{c^2}} = \sqrt{\frac{\sin^2 X + \sin^2 Y}{X^2 + Y^2}}, \qquad (5.6.47)$$

совпадающему с (5.6.30). Для более наглядной иллюстрации эффекта введения разностного дифференцирования по времени разложим выражение (5.6.46) в ряд и для $\sqrt{2a} < 1/\sqrt{2}$ получим

$$\frac{C_\Phi}{\sqrt{c^2}} = \sqrt{\frac{\sin^2 X + \sin^2 Y}{X^2 Y^2}}\left(1 + \frac{1}{3}a + \frac{3}{10}a^2 + \ldots\right). \qquad (5.6.48)$$

Здесь множитель перед скобкой описывает эффект замедления, вызванный введением конечных разностей по пространственным переменным, согласно (5.6.30). Ускорение, появляющееся за счет введения явной схемы центральных разностей (5.1.11), во-первых, уменьшает фазовую ошибку, обусловленную введением пространственных разностей, во-вторых, позволяет получить новые возможности в распределении переменных, так как теперь сетка может быть шахматной (расшатанной) и во времени! В этом случае решения для функций u, v, Φ на чередующихся шагах по времени получаются то в одних, то в других узлах сетки. В результате расчетная схема оказывается более экономичной, а вычислительная мода, соответствующая решению $\lambda_2 = -1$, исключается, т. к. распределение переменных совпадает через шаг по времени, и, следовательно, решение не осциллирует. Недостаток пространственных и пространственно-временных расшатанных сеток заключается в том, что для точек, в которых значения метеовеличин не определяются, эти значения находятся путем интерполяции.

Рассмотрим теперь явную, полунеявную и неявную схемы интегрирования одномерных уравнений адаптации (5.6.34) на одной из сеток. Выберем, например, сетку С, преимущества которой выявлены выше.

В случае использования явной схемы центральных разностей по времени для системы (5.6.34) на сетке С приходим к следующим уравнениям для λ:

$$\begin{aligned} &U(\lambda^2 - 1) - 2l\,\Delta t V \lambda \cos\frac{m_x \Delta x}{2} + 4i\frac{\Delta t}{\Delta x}\Phi\lambda \sin\frac{m_x \Delta x}{2} = 0, \\ &2l\,\Delta t U \lambda \cos\frac{m_x \Delta x}{2} + V(\lambda^2 - 1) = 0, \qquad (5.6.49) \\ &4i\frac{\Delta t}{\Delta x}\Phi U \lambda \sin\frac{m_x \Delta x}{2} + \Phi(\lambda^2 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Приравнивая определитель этой системы к нулю, получаем уравнение

$$(\lambda^2 - 1)\left[(\lambda^2 - 1)^2 + 4\lambda^2(2a + b)\right] = 0, \qquad (5.6.50)$$

где

$$a = 2\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 c^2 \sin^2 \frac{m_x \Delta x}{2} > 0, \quad b = (l\,\Delta t)^2 \cos^2 \frac{m_x \Delta x}{2} > 0, \qquad (5.6.51)$$

$$O(a)/O(b) \approx 10^3, \quad b \approx 0.$$

Уравнению (5.6.50) удовлетворяют корни $\lambda_1 = 1$ (нейтральное решение), $\lambda_2 = -1$ (вычислительная мода), а остальные четыре решения задаются формулой

$$\lambda^2 = 1 - 4a - b \pm 2\sqrt{(2a+b)(2a+b-1)}. \qquad (5.6.52)$$

Решения системы (5.6.34), получаемые с помощью явной схемы центральных разностей, будут устойчивы, если $2a+b \leqslant 1$ или $\sqrt{2a} = 1$. Следовательно, условие устойчивости в одномерном случае имеет вид

$$2\frac{\Delta t}{\Delta x}\sqrt{c^2}\,\sin\frac{m_x \Delta x}{2} \leqslant 1, \qquad (5.6.53)$$

где, как и ранее, $\sqrt{c^2}$ — скорость внешних гравитационных волн в покоящейся баротропной атмосфере.

Полунеявную схему интегрирования уравнений (5.6.34) на сетке C запишем в виде

$$\begin{aligned}
\frac{u_q^{\tau+1} - u_q^{\tau}}{\Delta t} &= -\frac{\Phi^{\tau}_{q+\frac{1}{2}} - \Phi^{\tau}_{q-\frac{1}{2}}}{\Delta x} + l\,\frac{v^{\tau}_{q+\frac{1}{2}} + v^{\tau}_{q-\frac{1}{2}}}{2}, \\
\frac{v_q^{\tau+1} - v_q^{\tau}}{\Delta t} &= -l\,\frac{u^{\tau}_{q+\frac{1}{2}} - u^{\tau}_{q-\frac{1}{2}}}{2}, \qquad (5.6.54) \\
\frac{\Phi_q^{\tau+1} - \Phi_q^{\tau}}{\Delta t} &= -c^2\frac{u^{\tau+1}_{q+\frac{1}{2}} - u^{\tau+1}_{q-\frac{1}{2}}}{\Delta x}.
\end{aligned}$$

Подставляя в (5.6.54) волновые решения (5.6.42) при $m_y = 0$, получим систему уравнений для λ, определитель которой имеет вид

$$D = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -l\,\Delta t \cos\frac{m_x \Delta x}{2} & 2i\frac{\Delta t}{\Delta x}\sin\frac{m_x \Delta x}{2} \\ l\,\Delta t\cos\frac{m_x \Delta x}{2} & \lambda - 1 & 0 \\ 2i\frac{c^2 \Delta t}{\Delta x}\lambda \sin\frac{m_x \Delta x}{2} & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix}.$$

Положив $D = 0$, построим характеристическое уравнение для λ

$$(\lambda - 1)\left[(\lambda - 1)^2 + 2a\lambda + b\right] = 0, \qquad (5.6.55)$$

из которого следует, что нейтральному решению уравнений (5.6.54) соответствует $\lambda_1 = 1$, а

$$\lambda_{2,3} = 1 - a \pm \sqrt{-a(2-a) - b}. \qquad (5.6.56)$$

Здесь a, b суть (5.6.51). При $a \leqslant 2 (\sqrt{2a} \leqslant 2)$ под радикалом в (5.6.56) получается отрицательная величина, поэтому, если $\sqrt{2a} \leqslant 2$, то

$$\lambda = 1 - a \pm i\sqrt{a(2-a) + b},$$

$$|\lambda| = \sqrt{(1-a)^2 + a(2-a) + b} \approx 1.$$

Следовательно, значениям $\lambda_{2,3}$ соответствуют устойчивые решения системы (5.6.54) при условии $\sqrt{2a} \leqslant 2$ или

$$2\frac{\Delta t}{\Delta x}\sqrt{c^2}\sin\frac{m_x \Delta x}{2} \leqslant 2. \qquad (5.6.57)$$

Если в третьем уравнении системы (5.6.34) плоскую дивергенцию задать явно так же, как и правые части первых двух уравнений, то характеристическому уравнению

$$(\lambda - 1)[(\lambda - 1)^2 + 2a + b] = 0$$

будут удовлетворять нейтральное решение $\lambda_1 = 1$ и два неустойчивых решения: $\lambda_{2,3} = 1 \pm i\sqrt{2a+b}$, $|\lambda_2| > 1$, $|\lambda_3| > 1$. Такие схемы применять нецелесообразно.

Сравнение условий устойчивости (5.6.53) и (5.6.57), полученных соответственно для явной схемы центральных разностей и для полунеявной схемы с разностями «вперед — назад» показывает, что полунеявная схема более экономична, так как она устойчива с шагами по времени в два раза большими, чем явная схема, и, кроме того, она не содержит вычислительную моду *). Однако и в этом случае шаг Δt оказывается существенно меньшим, чем шаг, обеспечивающий устойчивость процесса интегрирования для уравнений адвекции.

Проведем анализ устойчивости неявной схемы трапеций с направленными разностями по времени для уравнений (5.6.34) на сетке C

$$\frac{u_q^{\tau+1} - u_q^{\tau}}{\Delta t} = -\frac{1}{2\Delta x}\left[\left(\Phi_{q+\frac{1}{2}} - \Phi_{q-\frac{1}{2}}\right)^{\tau} + \left(\Phi_{q+\frac{1}{2}} - \Phi_{q-\frac{1}{2}}\right)^{\tau+1}\right] +$$

$$+ \frac{l}{4}\left[\left(v_{q+\frac{1}{2}} + v_{q-\frac{1}{2}}\right)^{\tau} + \left(v_{q+\frac{1}{2}} + v_{q-\frac{1}{2}}\right)^{\tau+1}\right],$$

*) Полученные выводы справедливы как для других полунеявных схем (когда неявно задаются члены $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ или lv, lu), так и для двумерных уравнений адаптации полей давления и ветра.

$$\frac{v_q^{\tau+1}-v_q^{\tau}}{\Delta t}=-\frac{l}{4}\left[\left(u_{q+\frac{1}{2}}+u_{q-\frac{1}{2}}\right)^{\tau}+\left(u_{q+\frac{1}{2}}+u_{q-\frac{1}{2}}\right)^{\tau+1}\right], \quad (5.6.58)$$

$$\frac{\Phi_q^{\tau+1}-\Phi_q^{\tau}}{\Delta t}=-\frac{c^2}{2\Delta x}\left[\left(u_{q+\frac{1}{2}}-u_{q-\frac{1}{2}}\right)^{\tau}+\left(u_{q+\frac{1}{2}}-u_{q-\frac{1}{2}}\right)^{\tau+1}\right].$$

После подстановки волновых решений (5.6.42) в (5.6.58) получаем систему уравнений, определитель которой

$$D=\begin{vmatrix} \frac{\lambda-1}{\lambda+1} & -l\frac{\Delta t}{2}\cos\frac{m_x\Delta x}{2} & i\frac{\Delta t}{\Delta x}c^2\sin\frac{m_x\Delta x}{2} \\ l\frac{\Delta t}{2}\cos\frac{m_x\Delta x}{2} & \frac{\lambda-1}{\lambda+1} & 0 \\ i\frac{\Delta t}{\Delta x}c^2\sin\frac{m_x\Delta x}{2} & 0 & \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \end{vmatrix}.$$

Положив $D=0$, находим: $\lambda_1=1$ (нейтральное решение),

$$\lambda_{2,3}=\frac{1-\frac{a}{2}-\frac{b}{4}\pm i\sqrt{2a+b}}{1-\frac{a}{2}+\frac{b}{4}}, \quad |\lambda_{2,3}|=1.$$

Таким образом, неявная схема трапеций абсолютно устойчива при любых Δt. Нетрудно показать, что применение неявных схем (с направленными или центральными разностями по времени) приводит к занижению групповых скоростей, за счет чего описание процесса геострофического приспособления ухудшается. Как было показано выше на примере явной схемы центральных разностей, конечные разности по времени обусловливают увеличение групповых скоростей, которое компенсирует их занижение за счет конечных разностей по пространству. Однако для моделирования процесса геострофического приспособления с помощью явных схем требуется использовать существенно меньшие Δt, чем это необходимо для квазигеострофических процессов. Поэтому с целью рационального использования машинного времени при разработке разностных схем для полных уравнений рекомендуется задавать полунеявно или неявно члены, описывающие адаптацию полей, и выбирать Δt из соображений устойчивости квазигеострофического процесса.

ЛИТЕРАТУРА

Основная

Белов П. Н., Борисенков Е. П., Панин Б. Д. Численные методы прогноза погоды. Учебник. — Л.: Гидрометеоиздат, 1989. — 376 с.

Дополнительная

1. Белов П. Н. Численные методы прогноза погоды. Учебное пособие. — Л.: Гидрометеоиздат, 1975. — 391 с.
2. Гандин Л. С., Дубов А. С. Численные методы краткосрочного прогноза погоды. Учебник. — Л.: Гидрометеоиздат, 1968. — 427 с.
3. Лекции по численным методам краткосрочного прогноза погоды. — Л.: Гидрометеоиздат, 1969. — 734 с.
4. Марчук Г. И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. — Л.: Гидрометеоиздат, 1974. — 303 с.
5. Мезингер Ф., Аракава А. Численные методы, используемые в атмосферных моделях. Пер. с англ. В. П. Садокова. — Л.: Гидрометеоиздат, 1979. — 136 с.
6. Панин Б. Д. Негеострофические прогностические модели. Конспект лекций. — Л.: изд. ЛПИ, 1978. — 51 с. (ЛГМИ).
7. Репинская Р. П. Уравнения динамики атмосферы в координатной системе. Конспект лекций. — Л.: изд. ЛПИ, 1982. — 49 с. (ЛГМИ).
8. Репинская Р. П. Квазисоленоидальные прогностические модели. Конспект лекций. — Л.: изд. ЛПИ, 1985. — 51 с. (ЛГМИ).
9. Численные методы, используемые в атмосферных моделях. Пер. с англ. под ред. В. П. Садокова. — Л.: Гидрометеоиздат, 1982. — 360 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Глава 1. Погодообразующие процессы. Классификация гидродинамических прогнозов погоды	3
1.1. Предмет и задачи гидродинамических методов прогноза погоды	—
1.2. Многомасштабность атмосферных движений и их классификация	4
Глава 2. Постановка задачи гидродинамического прогноза погоды . .	6
2.1. Уравнения гидротермодинамики атмосферы — теоретическая основа гидродинамических методов прогноза погоды	—
2.2. Уравнения динамики для крупномасштабных атмосферных движений	8
2.3. Уравнения гидротермодинамики атмосферы в различных системах координат	10
2.4. Учет масштабных множителей картографических проекций в уравнениях гидротермодинамики атмосферы	18
2.5. Уравнения вихря скорости и дивергенции	25
Глава 3. Квазигеострофические модели	26
3.1. Система уравнений квазигеострофического приближения . .	—
3.2. Система уравнений баротропной квазигеострофической модели	27
3.3. Баротропная квазигеострофическая модель	28
3.4. Бароклинная квазигеострофическая модель	32
Глава 4. Квазисоленоидальные прогностические модели	39
4.1. Гипотеза квазисоленоидальности	—
4.2. Прогностические уравнения квазисоленоидального приближения	40
4.3. Уравнения баланса и методы его решения	41
4.4. Уточнение бароклинной квазисоленоидальной модели . . .	44
Глава 5. Схемы численного интегрирования прогностических уравнений и анализ их вычислительных свойств	47
5.1. Схемы численного интегрирования уравнений прогноза. Понятие об устойчивости разностных схем	—
5.2. Физические и вычислительные моды. Вычислительная дисперсия	55
5.3. Анализ устойчивости конечно-разностного решения по Нейману	59
5.4. Нелинейная вычислительная неустойчивость и способы ее устранения	68
5.5. Интегральные инварианты атмосферных моделей	78
5.6. Сеточное описание итерационно-гравитационных волн и пространственное распределение переменных	88

Редактор И. Г. Максимова

Сдано в набор 11.02. 1991 г. Подписано к печати 12.06. 1991 г.
Объем 6,7 печ. л.; 6,5 уч.-изд. л. Тираж 600. Зак. 246. Темплан 1991. Цена 2 руб.
ЛГМИ, 195196, Ленинград, Малоохтинский пр., 98.

Типография ВАС