

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

А. М. ДАНОВИЧ, Б. Д. ПАНИН, И. Н. РУСИН

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОГНОСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ОСНОВАННЫЕ НА ПОЛНЫХ УРАВНЕНИЯХ

Конспект лекций

Под редакцией проф. *Б. Д. Панина*

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени М. И. КАЛИНИНА

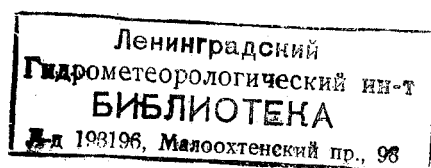
ЛЕНИНГРАД
1983

УДК 551.509.333(075.8)

Данович А. М., Панин Б. Д., Русин И. Н. Современные прогностические модели, основанные на полных уравнениях. Конспект лекций. — Л., Изд. ЛПИ, 1983, 54 с. (ЛГМИ).

Рассматриваются оперативные прогностические модели метеорологических служб СССР, США, Великобритании и ФРГ, основанные на сеточном (конечно-разностном) решении полных уравнений гидротермодинамики, а также вопросы, связанные с применением спектрального метода в задачах численного прогноза погоды.

Рецензенты: кафедра гидрометеорологического обеспечения ВИКИ им. А. Ф. Можайского; Е. П. Борисенков, проф. (ГГО имени А. И. Воейкова).



© Ленинградский гидрометеорологический институт (ЛГМИ), 1983.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в оперативной практике службы погоды широко применяются гидродинамические прогностические модели, основанные на полных уравнениях. Для целей краткосрочного прогноза погоды применяются как разностные численные модели, так и модели, основанные на представлении решений в виде рядов по системам базисных функций, которые принято называть спектральными.

Вопросы, связанные с построением численных разностных моделей прогноза погоды, основанных на полных уравнениях, подробно рассматриваются в соответствующих разделах курса «Численные методы прогноза погоды». В данном конспекте лекций описываются оперативные численные прогностические модели атмосферы, используемые в службах погоды СССР, Великобритании, ФРГ и США, а также основные принципы построения спектральных моделей.

В связи с этим прежде всего обратим внимание на некоторые обстоятельства, касающиеся практического применения оперативных схем краткосрочного численного прогноза. Время, затрачиваемое на подготовку начальных данных и для расчетов прогнозов, должно значительно «опережать» реальное время.

За интервал времени между сроками метеорологических наблюдений и началом расчетов прогнозов необходимо закодировать и передать данные наблюдений по линиям связи, произвести прием, сбор и комплектацию данных в прогностических метеорологических центрах, декодировать и проконтролировать собранные данные, осуществить анализ (согласование и интерполяцию значений метеорологических величин в узлы сетки точек), ввести результаты интерполяции в накопители ЭВМ. После этого осуществляются расчеты прогнозов, выдача результатов прогнозов в виде карт и в других формах, которые доводятся до населения и потребителей.

Время, необходимое для закодирования, передачи, приема, сбора и контроля данных, т. е. между наблюдениями и окончанием приема метеорологической информации, называют временем «отсечения» данных наблюдений. Перечисленные операции, начиная от приема данных и кончая разработкой (расчетами) и выдачей прогнозов погоды потребителем, выполняются в метеорологических (прогностических) центрах четырех категорий:

— территориальных (ТМЦ);

- региональных (РМЦ);
- мировых (ММЦ);
- национальных (НМЦ).

В ТМЦ осуществляют сбор, обработку, анализ данных наблюдений, разработку и распространение прогнозов погоды для территорий краев, областей и республик СССР или небольших государств.

— РМЦ обеспечивают выполнение указанных видов работы для крупных регионов СССР (ЕТС, Западная Сибирь, Восточная Сибирь и Дальний Восток, Средняя Азия) или отдельных государств.

На ММЦ возлагаются такого рода работы в интересах большинства или всех государств. Всего имеется три ММЦ, которые находятся в Москве, Вашингтоне и Мельбурне.

Для территорий ряда государств функции ТМЦ, а также функции РМЦ и ММЦ выполняют НМЦ.

К концу 70-х годов ТМЦ, РМЦ, НМЦ и ММЦ стали обеспечивать регулярную разработку и распространение численных прогнозов практически для всех районов земного шара. При этом глобальные и полусферные прогнозы разрабатываются и распространяются во всех ММЦ, а также в наиболее крупных РМЦ и НМЦ. Прогнозы с помощью глобальных и полусферных моделей рассчитываются на 1—5 суток по данным наблюдений в 0 и 12 часов СГВ, т. е. два раза в сутки. Время «отсечения» данных наблюдений, используемых в качестве начальных, составляет для этих моделей 3—5 часов.

В ТМЦ, РМЦ, а также в ММЦ 2—4 раза в сутки рассчитываются численные прогнозы погоды с помощью региональных моделей. Время «отсечения» данных для них составляет от одного до 3—4 часов (в зависимости от размеров и расположения регионов).

Ниже рассматриваются прогностические модели, используемые для оперативных целей в Гидрометцентре СССР (выполняющего функции НМЦ и ММЦ), НМЦ США, в службах погоды Великобритании и ФРГ, основанные на конечно-разностных методах интегрирования полных уравнений. Рассмотрению этих моделей посвящен первый раздел конспекта лекций.

Во-втором разделе приводятся основные сведения о спектральном методе интегрирования прогностических уравнений, а также показывается применение спектрального метода при решении задач прогноза на основе баротропного уравнения вихря скорости и полных уравнений баротропной модели.

ОПЕРАТИВНЫЕ ПРОГНОСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ОСНОВАННЫЕ НА КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОМ МЕТОДЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПОЛНЫХ УРАВНЕНИЙ

Модель Гидрометцентра (ГМЦ) СССР

Рассматриваемая ниже модель создавалась, начиная с 1973 г., путем соединения наиболее эффективных элементов трех оперативных моделей, разработанных к этому времени в ГМЦ Л. В. Берковичем, С. О. Кричаком, Д. Я. Прессманом и др. К таким элементам относятся системы уравнений, граничные условия, способы разностной аппроксимации, методы интегрирования уравнений и параметризации процессов подсеточного масштаба.

В модели используется система полных квазистатических уравнений в изобарической квазидекартовой системе координат

$$\frac{\partial u}{\partial t} + m \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \tau \frac{\partial u}{\partial p} = lv + F_x, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + m \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \tau \frac{\partial v}{\partial p} = -lu + F_y, \quad (2)$$

$$m \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Phi}{\partial t} + m \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - \alpha \frac{RT_1}{p_0} \tau_1 + m \int_p^{p_0} \left(\frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dp' - \frac{R^2}{g} \int_p^{p_0} \frac{T}{p^2} (\gamma_a - \gamma) \tau dp' = \frac{R}{c_p} \int_p^{p_0} \frac{\varepsilon}{p} dp', \quad (4) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + m \left(u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} \right) + \tau \frac{\partial q}{\partial p} = \varepsilon_\omega, \quad (5)$$

где x, y — горизонтальные координаты; t — время; p — давление; p_0 — стандартное давление (1000 гПа); u и v — горизонтальные составляющие скорости ветра; τ — аналог вертикальной скорости

в изобарической системе координат $\left(\tau = \frac{dp}{dt}\right)$; l — параметр

Кориолиса; T — температура °К; Φ — геопотенциал; γ_a и γ — сухоадиабатический и вертикальный градиенты температуры; τ_1 и T_1 — значения τ и T при $p = p_0$; $\alpha = 0,35$ — эмпирический коэффициент (вводится для подавления вычислительных шумов); m — масштабный множитель; F_x и F_y — составляющие турбулентной вязкости вдоль осей x и y ; q — удельная влажность; ε — удельный приток тепла (на единицу массы в единицу времени), обусловленный фазовыми переходами, радиацией и турбулентностью; ε_w — притоки (стоки) влаги, обусловленные конденсацией и турбулентностью (на единицу массы в единицу времени).

Система уравнений (1)–(5) дополняется уравнениями и соотношениями, позволяющими параметризовать притоки тепла ε и влаги ε_w , а также турбулентную вязкость, осадки и конвективные процессы. Применяемые при этом методы параметризации указанных процессов рассматриваются в соответствующем разделе курса «Численные методы прогноза погоды».

Фигурирующее в системе (1)–(5) уравнение для геопотенциала (4) является следствием уравнения притока тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{RT(\gamma_a - \gamma)}{g} \frac{\tau}{p} = \frac{\varepsilon}{c_p}, \quad (6)$$

уравнения статики

$$T = -\frac{p}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \quad (7)$$

и граничного условия на нижней границе атмосферы, т. е. при $z = 0$ ($p = p_0$),

$$w = \frac{dz}{dt} = 0. \quad (8)$$

Условие (8) с учетом соотношения

$$\frac{d\Phi}{dt} = gw$$

означает, что

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + m \left(u_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right) - \alpha \frac{RT_1}{p_0} \tau_1 = 0 \text{ при } p = p_0, \quad (9)$$

где индекс «1» означает принадлежность к уровню $p = p_0$.

С помощью уравнения статики (7) уравнение (6) представляется в виде

$$-\frac{p}{R} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial p} + u \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial p} + v \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) - \frac{RT}{g} (\gamma_a - \gamma) \frac{\tau}{p} = \frac{\varepsilon}{c_p}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial p} + u \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial p} + v \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{R^2 T}{g} (\gamma_a - \gamma) \frac{\tau}{p^2} = - \frac{R}{c_p} \frac{\dot{\epsilon}}{p}.$$

В результате интегрирования последнего уравнения по p в пределах от p до p_0 имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \int_p^{p_0} \left(u \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial p} + v \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) dp' + \frac{R^2}{g} \int_p^{p_0} \frac{T}{p^2} (\gamma_a - \gamma) \tau dp' = \\ = \frac{R}{c_p} \int_p^{p_0} \frac{\epsilon}{p} dp', \end{aligned} \quad (10)$$

где $\Phi_1 = \Phi$ при $p = p_0$,

$$\begin{aligned} \int_p^{p_0} \left(u \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial p} + v \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) dp' = u_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} - \\ - \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - \int_p^{p_0} \left(\frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dp'. \end{aligned} \quad (11)$$

При получении соотношения (11) использовано правило интегрирования по частям. С учетом (11) и (9) уравнение (10) преобразуется в уравнение (4). Помимо граничного условия (8) при интегрировании системы уравнений (1)–(5) используется условие на верхней границе атмосферы

$$\text{при } p=0 \quad \tau=0, \quad (12)$$

а также «боковые» граничные условия (по x и y)

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_r = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Big|_r = 0, \quad (13)$$

где индекс «г» означает принадлежность к боковой границе.

Система уравнений (1)–(5) с граничными условиями (12) и (13) интегрируется численно методом шагов по времени на пространственной сетке точек, для которой вводится индексация узлов

$$i = \frac{x}{\Delta x}, \quad j = \frac{y}{\Delta y}, \quad k = \frac{p}{\Delta p} \quad (\Delta x = \Delta y = \Delta s).$$

Сеточная область, где осуществляется численное интегрирование уравнений модели, представляет собой квадрат, вписанный в окружность экватора на карте стереографической проекции

северного полушария. Вершины квадрата опираются на окружность экватора в точках с долготой 0° ; 90° з.д.; 90° в.д.; 180° . В пределах этого квадрата строится шахматная сетка точек, образуемая двумя вложенными сетками размером 29×29 и 28×28 узлов, сдвинутых относительно друг друга на $1/2\Delta s$; для каждой из этих сеток шаг $\Delta s = 600$ км. Таким образом, на каждом уровне значения зависимых переменных задаются в 1625 точках. Прогностические поля определяются попеременно в узлах то одной, то другой сетки.

По вертикали сетка содержит шесть уровней ($k = 1, 2, \dots, 6$), совпадающих с изобарическими поверхностями 1000, 850, 700, 500, 300 и 100 гПа.

При записи конечно-разностных аналогов уравнений модели используются формулы численного дифференцирования и сглаживания

$$f_q = \frac{1}{2\Delta q} (f_{q+\Delta q} - f_{q-\Delta q}), \quad (14)$$

$$\bar{f}^q = \frac{1}{2} (f_{q+\Delta q} + f_{q-\Delta q}),$$

где $q = (x, y, p, t)$.

С помощью формул (14) записываются уравнения (1)–(5) применительно к численному интегрированию на шахматной сетке.

Адиабатический вариант такого рода уравнений модели имеет вид

$$u_t - l\bar{v}^t = -m (\bar{u}^{xy} \bar{u}_x^y + \bar{v}^{xy} \bar{u}_y^x + \frac{1}{m} \tau \bar{u}_p^{xy} + \bar{\Phi}_x^y) \quad (15)$$

$$v_t + l\bar{u}^t = -m (\bar{u}^{xy} \bar{v}_x^y + \bar{v}^{xy} \bar{v}_y^x + \frac{1}{m} \tau \bar{v}_p^{xy} + \bar{\Phi}_y^x), \quad (16)$$

$$\tau_k = \tau_{k-1} + m \sum_{k'=0}^{k'-k} \frac{\tau_{k'}}{(\bar{u}_x^y + \bar{v}_y^x)_{k'}} \Delta p_{k'}, \quad (17)$$

$$\Phi_t = -m (\bar{u}^{xy} \bar{\Phi}_x^y + \bar{v}^{xy} \bar{\Phi}_y^x) + \alpha \frac{RT_1}{p_0} \tau_1 - m \sum_{k'=k}^{k'=K} \frac{\tau_{k'}}{(\bar{u}_p^{xy} \bar{\Phi}_x^y + \bar{v}_p^{xy} \bar{\Phi}_y^x)_{k'}} \Delta p_{k'} +$$

$$+ \frac{R^2}{g} \sum_{k'=k}^{k'=K} \frac{T_{k'}}{p_{k'}^2} (\gamma_a - \gamma_{k'}) \tau_{k+1} \Delta p_k; \quad (18)$$

где k' — номера слоев (отсчитываются сверху) между уровнями $k-1$ и k ; K — номер уровня, соответствующего $p = p_0$, а также слоя, заключенного между уровнями 850 и 1000 гПа.

Вследствие неравномерного расположения уровней (по давлению) при расчете производных, а также осредненных величин

по давлению и сумм по индексам $k(k')$ вводятся поправки, учитывающие эту неравномерность.

Как видно из уравнений (15) и (16), в них члены lv и lu записаны по схеме трапеций (по времени). Такая форма записи уравнений движения позволяет преобразовать уравнения к виду, удобному для определения значений u и v в момент времени $t + \Delta t$. Обозначив правые части уравнений (15) и (16) через F_u и F_v , запишем производные и осредненные по времени u и v в соответствии с формулами (14):

$$u^{t+\Delta t} - u^{t-\Delta t} - l(v^{t+\Delta t} + v^{t-\Delta t}) = 2F_u \Delta t,$$

$$v^{t+\Delta t} - v^{t-\Delta t} + l(u^{t+\Delta t} + u^{t-\Delta t}) = 2F_v \Delta t.$$

Решая эту систему уравнений относительно $u^{t+\Delta t}$ и $v^{t+\Delta t}$ имеем

$$u^{t+\Delta t} = \frac{1}{1 + (l\Delta t)^2} \left\{ [1 - (l\Delta t)^2] u^{t-\Delta t} + 2l\Delta t v^{t-\Delta t} + \right. \\ \left. + 2l(\Delta t)^2 F_v^t + 2\Delta t F_u^t \right\},$$

$$v^{t+\Delta t} = \frac{1}{1 + (l\Delta t)^2} \left\{ [1 - (l\Delta t)^2] v^{t-\Delta t} - 2l\Delta t u^{t-\Delta t} - \right. \\ \left. - 2l(\Delta t)^2 F_u^t + 2\Delta t F_v^t \right\}.$$

В таком виде уравнения (15) и (16) используются для нахождения $u^{t+\Delta t}$ и $v^{t+\Delta t}$ при интегрировании уравнений по времени.

Интегрирование по времени всех прогностических уравнений производится с помощью центральных разностей при шаге по времени $\Delta t = 12$ мин. На первом шаге по времени используются направленные разности вперед.

С целью обеспечения вычислительной устойчивости, помимо сглаживания функций с помощью формулы (14), в процессе интегрирования применяется также следующая процедура сглаживания:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_0 &= (1 - v_k) \varphi_0 + v_k \bar{\varphi}, \\ v_k &= v_k^0 + \delta \eta (|D_{500}|)_{cp}, \\ \delta &= \begin{cases} 0, & \text{если } (|D_{500}|)_{cp} < D_0, \\ 1, & \text{если } (|D_{500}|)_{cp} \geq D_0, \end{cases} \end{aligned}$$

где $\varphi = (u, v, \Phi)$; $\tilde{\varphi}$ — сглаженное значение; φ_0 — значение φ в точке расчета; $\bar{\varphi} = \overline{\varphi^{xy}}$; v_k^0 , η , D_0 — эмпирические постоянные;

$(|D_{500}|)_{\text{ср}}$ — среднее по области интегрирования значение дивергенции на уровне 500 гПа; k — номер уровня $(k = \frac{p}{\Delta p})$.

В качестве начальных данных для интегрирования системы уравнений модели используются значения геопотенциала на счетных уровнях ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) в узлах одной из вложенных сеток, получаемые в результате объективного анализа, и значения геострофического ветра, рассчитываемые по формулам

$$u_g = -\frac{m}{l} \bar{\Phi}_y^x, \quad v_g = \frac{m}{l} \bar{\Phi}_x^y.$$

При расчете геострофического ветра и в процессе интегрирования уравнений по времени параметр Кориолиса в точках, лежащих южнее 40° с. ш., принимается постоянным и равным его значению на этой широте. Предусмотрена также подготовка начальных данных о ветре о помощью процедуры инициализации.

Последовательность расчетов прогноза на каждом шаге по времени следующая.

1. По значениям u^t, v^t в узлах одной из вложенных сеток на всех уровнях по формуле (17) вычисляются значения τ^t в узлах другой сетки на тех же уровнях. Здесь и далее верхний индекс t указывает на принадлежность к моменту времени.

2. По значениям u^t, v^t, τ^t и Φ^t с помощью уравнений (15), (16), (18) вычисляются u_t, v_t, Φ_t , затем определяются $u^{t+\Delta t}, v^{t+\Delta t}, \Phi^{t+\Delta t}$ в узлах другой сетки на всех уровнях

$$f^{t+\Delta t} = f^{t-\Delta t} + 2\Delta t F^t,$$

где через f обозначены u, v, Φ , через F^t правые части уравнений (15), (16), (18).

На первом шаге по времени для определения $u^{t_0+\Delta t}, v^{t_0+\Delta t}, \Phi^{t_0+\Delta t}$ используются направленные разности, т. е.

$$f^{t_0+\Delta t} = f^{t_0} + \Delta t F^{t_0}.$$

На этом заканчиваются расчеты на данном шаге по времени.

При переходе к следующему шагу по времени расчеты ведутся по той же системе, но с начальными данными, полученными на предыдущем шаге в узлах другой сетки.

По прогностическим значениям геопотенциала уровня 1000 гПа рассчитываются значения давления на уровне моря.

При реализации модели в неадиабатическом варианте используется уравнение (5) и другие уравнения и соотношения, с помощью которых параметризуются притоки (стоки) тепла и влаги. Необходимые для расчетов потоков длинноволновой радиации значения температуры вычисляются с помощью уравнения статки (7).

Оперативные прогнозы с помощью рассмотренной модели рассчитываются два раза по данным наблюдений в 0 и 12 ч СГВ.

Результаты прогнозов на 24, 48 и 72 ч по данным наблюдений в 0 ч СГВ выдаются в виде карт приземного давления и высот изобарических поверхностей 500, 300, 200, 100 гПа и OT_{1000}^{500} (на 24 ч), карт приземного давления и высот изобарической поверхности 500 гПа (на 48 и 72 ч). По данным наблюдений в 12 ч СГВ рассчитываются прогностические карты приземного давления и высот изобарических поверхностей на 36, 60, 84 ч. Кроме давления и высот изобарических поверхностей выдаются также прогностические поля температуры.

Прогностические карты расчерчиваются автоматически и передаются по факсимильным линиям связи.

О качестве прогнозов можно судить по характеристикам их оправдываемости. Средние относительные ошибки (т. е. отношение средней абсолютной ошибки прогноза к средней абсолютной изменчивости) для прогноза приземного давления на одни и три суток лежат в пределах от 0,74 до 0,93, а для высот поверхности 500 гПа — от 0,68 до 0,88.

Модель постоянно совершенствуется в направлении увеличения пространственного разрешения, более полного и строгого учета неадиабатических факторов, орографии и эффектов динамического взаимодействия с подстилающей поверхностью, уточнения методов параметризации процессов подсеточного масштаба и др.

За счет этих усовершенствований достигнуто ощутимое улучшение качества прогнозов, а также увеличение числа прогнозируемых величин и заблаговременности прогнозов.

Модель реализуется и совершенствуется также и в региональном варианте, в котором увеличено пространственное разрешение, уточнены методы расчета турбулентных и радиационных процессов, осадков при сохранении основных свойств полусферной модели. Это позволяет осуществлять прогнозы для полусферы и регионов с использованием принципа телескопизации, что способствует уточнению решений уравнений модели в пределах регионов за счет более строгой постановки боковых граничных условий.

Модель национального метеорологического центра (НМЦ) США

Модель численного прогноза НМЦ для Северного полушария была введена в оперативную практику в 1966 г. С тех пор она непрерывно совершенствовалась, однако, основные черты модели оставались практически неизменными.

Впервые наиболее полное описание первого варианта модели было сделано Ф. Т. Шуманом и Дж. Ховермейлом в 1968 г. Изложим основные черты этой модели.

В качестве исходной берется система полных уравнений в квазистатическом приближении в σ -системе координат. Уравнения движения записываются в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial x} + lv + F_x, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial y} - lv + F_y. \quad (2)$$

Здесь θ — потенциальная температура

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}, \quad (3)$$

а π — новая переменная

$$\pi = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R/c_p}, \quad (4)$$

F_x, F_y — составляющие силы вязкости, $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$, остальные обозначения общепринятые.

Покажем, как в уравнениях (1) и (2) получаются члены $c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial x}$ и $c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial y}$. Для этого рассмотрим, например, первое уравнение движения с произвольной вертикальной координатой η в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \dot{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + lv + F_x. \quad (5)$$

Преобразуем в нем член $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$. Для этого воспользуемся уравнением состояния

$$p = R\rho T, \quad (6)$$

и соотношениями для π (4) и θ (3). Используя соотношение (3) и (6) в виде $\rho = \frac{p}{R\theta\pi}$, с помощью (4) можно получить

$$\frac{1}{\pi} \frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = R \frac{\kappa}{\kappa-1} \theta \frac{\partial \pi}{\partial x}, \quad R \frac{\kappa}{\kappa-1} = \frac{c_p R}{AR} = \frac{c_p}{A} = c'_p.$$

Уравнение статики с учетом переменной π будет иметь вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial \sigma}. \quad (7)$$

Уравнения притока тепла и неразрывности имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{\varepsilon}{c_p}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\dot{\sigma} \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) = 0. \quad (9)$$

Система уравнений (1), (2), (7)–(9) и соотношение для π (4) содержат семь неизвестных функций u , v , $\dot{\sigma}$, π , p , Φ , θ . В качестве седьмого замыкающего уравнения системы используются соотношения, с помощью которых задается вертикальная координата в виде разрывной функции.

Атмосфера по вертикали делится на четыре слоя: пограничный слой, тропосфера, стратосфера, изэнтропический слой. Для каждого из этих слоев задается собственная вертикальная координата

$$\sigma = \frac{p - p_b}{p_n - p_b}, \quad (10)$$

где p_b — давление на верхней границе слоя; p_n — давление на нижней границе слоя.

При этом вводятся следующие предположения:

1. Воздух не проникает через подстилающую поверхность, т. е. $\dot{\sigma} = 0$, при $\sigma = 1$.

2. Пограничный слой имеет постоянную толщину по давлению, т. е. принимается

$$p_6 - p_5 = 50 \text{ гПа},$$

что соответствует примерно толщине 400 м (p_6 — приземное давление, p_5 — давление на верхней границе пограничного слоя).

3. Внутри пограничного слоя используется вертикальная координата

$$\sigma_n = \frac{p - p_5}{p_6 - p_5},$$

так, что $\sigma_n|_{p=p_6} = 1$, $\sigma_n|_{p=p_5} = 0$.

4. В тропосфере вертикальной координатой является функция

$$\sigma_T = \frac{p - p_2}{p_5 - p_2},$$

где p_2 — давление на верхней границе тропосферы, так, что

$$\sigma_T|_{p=p_6} = 1, \quad \sigma_T|_{p=p_2} = 0.$$

5. Считается, что тропопауза все время состоит из одних и тех же частиц, которые могут перемещаться лишь вдоль нее, т. е. $\dot{\sigma}_2 = 0$.

6. Внутри тропосферы вводятся два промежуточных счетных уровня:

$$(\sigma_T)_4 = \frac{2}{3}, \quad (\sigma_T)_3 = \frac{1}{3}.$$

7. За верхнюю границу модели принимается стратосферный уровень p_0 . Вертикальной координатой в стратосфере является функция

$$\sigma_c = \frac{p - p_0}{p_2 - p_0},$$

так, что

$$\sigma_c|_{p=p_2} = 1, \quad \sigma_c|_{p=p_0} = 0.$$

Внутри стратосферы вводится один промежуточный счетный уровень

$$\sigma_c|_{p=p_1} = \frac{1}{2}.$$

8. За верхнюю границу атмосферы принимается некий уровень $p_{-1} = 0$. В слое $p_0 \div p_{-1}$ вертикальной координатой служит

$$\sigma_b = \frac{p}{p_0},$$

так что

$$\sigma_b|_{p=p_0} = 1, \quad \sigma_b|_{p=0} = 0.$$

В этом слое потенциальная температура принимается постоянной, т. е. $\theta = \text{const}$ и притоки тепла не учитываются.

Слой $p_0 \div p_{-1}$ является фиктивным и вводится для «отделения» фиктивного верхнего граничного условия и уменьшения его искажающего влияния. Предполагается, что этот слой неподвижен, в нем нет горизонтальных градиентов давления.

Область, для которой дается прогноз, представляет собой восьмиугольник. Используется квадратная сетка на карте полярной стереографической проекции с главным масштабом по широте 60° , шаг сетки $\Delta s = \Delta x = \Delta y = 381$ км. В области, где дается прогноз (размер области 45×45 узлов), задаются начальные поля, которые экстраполируются во внешнюю, ограниченную квадратом область (57×57 узлов). Внешняя область является фиктивной и введена для уменьшения искажающего влияния

искусственных граничных условий, заданных на внешнем контуре квадрата в виде

$$V_n = \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) = 0, \quad (11)$$

где n — внешняя нормаль к границе (так называемая «липкая» граница, вдоль которой воздух скользит с обеих сторон одинаково и через которую воздух не проходит). Для конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений системы для четырех основных слоев используются операторы дифференцирования и сглаживания:

$$f_n = \frac{1}{\Delta r} (f_{n+\frac{1}{2}} - f_{n-\frac{1}{2}}), \quad (12)$$

$$\bar{f}^n = \frac{1}{2} (f_{n+\frac{1}{2}} + f_{n-\frac{1}{2}}), \quad (13)$$

$$\bar{f}_n^n = \frac{1}{2\Delta r} (f_{n+1} - f_{n-1}), \quad (14)$$

$$\bar{f}^{nn} = \frac{1}{4} (f_{n+1} + 2f_n + f_{n-1}). \quad (15)$$

Здесь Δr — шаг сетки по переменным x, y, σ, t ; n — индекс узла сетки вдоль осей x, y, t или σ . Операторы дифференцирования и сглаживания могут быть применены неоднократно.

Используя эти операторы и их комбинации, конечно-разностные аналоги дифференциальных уравнений (1), (2), (7)–(9) записываются следующим образом:

$$\frac{\bar{u}_t^{\sigma t} + \bar{\sigma}^{\sigma} \bar{u}_{\sigma}^{xy} - \bar{l}_{xy} \bar{v}^{\sigma xy} - F_x^{xy} + \bar{u}^{\sigma xy} \bar{u}_x^{\sigma y} + \bar{v}^{\sigma xy} \bar{u}_y^{\sigma x} + (\bar{\Phi}_x^y + c_p \bar{\theta}^{xy} \bar{\pi}_x^y)^{\sigma}}{xy} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{\bar{v}_t^{\sigma t} + (\bar{\sigma}^{\sigma} \bar{v}_{\sigma}^{xy} + \bar{l}^{xy} \bar{u}^{\sigma xy} - F_y)^{xy} + \bar{u}^{\sigma xy} \bar{v}_x^{\sigma y} + \bar{v}^{\sigma xy} \bar{v}_y^{\sigma x} + (\bar{\Phi}_y^x + c_p \bar{\theta}^{xy} \bar{\pi}_y^x)^{\sigma}}{xy} = 0, \quad (17)$$

$$\Phi_{\sigma} + c_p \bar{\theta}^{\sigma} \pi_{\sigma} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\bar{p}_{\sigma t}^t + \bar{u}^{\sigma xy} \bar{p}_{\sigma x}^y + \bar{v}^{\sigma xy} \bar{p}_{\sigma y}^x + \bar{p}_{\sigma}^{xy} \bar{\sigma}_{\sigma} + \bar{p}_{\sigma}^{xy} (\bar{u}_x^{\sigma y} + \bar{v}_y^{\sigma x})}{xy} = 0, \quad (19)$$

$$\bar{\theta}_t^{\sigma t} + \bar{u}^{\sigma xy} \bar{\theta}_x^{\sigma y} + \bar{v}^{\sigma xy} \bar{\theta}_y^{\sigma x} + \bar{\theta}^{\sigma} \bar{\theta}_{\sigma}^{xy} - \frac{\varepsilon}{c_p} = 0. \quad (20)$$

В модели упрощенно учитывается ряд физических эффектов, в частности, сила вязкости и притоки тепла.

Турбулентная вертикальная вязкость F_x , F_y учитывается только в пределах пограничного слоя по формулам «типа сопротивления»:

$$\begin{aligned} F_x &= -c \sqrt{u_5^2 + v_5^2} u_5, \\ F_y &= -c \sqrt{u_5^2 + v_5^2} v_5. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь c — коэффициент пропорциональности, индекс «5» указывает на верхнюю границу пограничного слоя.

Приток тепла учитывается эмпирически в пределах пограничного слоя как сумма двух эффектов:

1. Турбулентный приток тепла ε над океанами, если он направлен вверх задается в виде

$$\varepsilon \sim T_{\text{воды}} - \theta_{\text{воздуха}}.$$

Температура океана задается по фактическим данным и предполагается постоянной в течение всего срока прогноза.

2. Эффект ночных инверсий вводится для поверхности, покрытой снегом или льдом при безоблачном небе. В этом случае вводятся эмпирические поправки (главным образом в пограничном слое), соответствующие скорости понижения температуры в нижних слоях атмосферы на величину $\frac{\partial \theta}{\partial t} = 2,5$ град/сутки. Граница снежной или ледовой поверхности фиксируется по спутниковым данным и предполагается неизменной на весь срок прогноза.

Другие виды тепла в явной форме не учитываются.

Алгоритм прогноза шагами по времени представляется следующим:

1. Начальные данные задаются с карт АТ (с p -поверхностей путем интерполяции на σ -поверхности).

Начальные поля задаются для функций u , v , θ , $\frac{\partial p}{\partial \sigma}$. Сначала определяются $\frac{\partial p}{\partial \sigma} = \frac{p_n - p_b}{\sigma_n - \sigma_b}$ для каждого слоя и на каждом уровне.

2. Затем вычисляется σ .

Для пограничного слоя $\frac{\partial p}{\partial \sigma} = \text{const}$. Поэтому в уравнении неразрывности $\frac{\partial p}{\partial \sigma}$ можно вынести за знак производных и сократить. Тогда имеет место соотношение

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} = - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

16

Интегрируя его по σ от $\sigma = 1$ до $\sigma = 0$ и используя условие $\dot{\sigma}_6 = 0$ при $\sigma = 1$, получим

$$\dot{\sigma}_5 = - \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\sigma.$$

На других уровнях $\frac{\partial p}{\partial \sigma} \neq \text{const}$. В результате дифференцирования уравнения неразрывности по σ получается уравнение вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial \sigma} \left(u \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial \sigma} \left(v \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} (\sigma) \frac{\partial p}{\partial \sigma} = 0.$$

После интегрирования этого уравнения по σ определяются $\dot{\sigma}$ при $\sigma_T = \frac{2}{3}$ и $\sigma_T = \frac{1}{3}$.

3. Определяется $p_{t,\sigma}$ и затем $\left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} \right)^{t+\Delta t}$. По известному $\left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} \right)^{t+\Delta t}$ однократным интегрированием по σ при граничном условии $p_0 = 0$ (интегрирование сверху вниз) определяется p на счетных уровнях σ .

4. Зная p , алгебраически находится π из (4) и затем $\frac{\partial \pi}{\partial \sigma}$ в конце шага, т. е. в момент времени $t + \Delta t$.

5. Зная $\frac{\partial \pi}{\partial \sigma}$ и θ , определяется $\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}$ из (7), а затем и Φ , интегрируя уравнение статики

$$\Phi_\sigma = gh + c_p \int_0^1 \theta \frac{\partial \pi}{\partial \sigma} d\sigma.$$

Весьма сложной является задача определения взаимно согласованных начальных полей. Исходными данными служат результаты численного анализа геопотенциала Φ и температуры T на десяти главных изобарических поверхностях: 1000, 850, 700, 500, 400, 300, 250, 200, 150, 100 гПа. При этом поля T являются вспомогательными, а именно, вычисляются вертикальные градиенты T , которые затем используются для интерполяции на модельные уровни. Поле же температуры в модели везде описывается относительным геопотенциалом. После окончания прогноза производится обратная интерполяция на стандартные поверхности, результаты интерполяции выдаются потребителю.

Оперативная модель НМЦ дает также прогноз влажности и весьма грубо — осадков. Для этого привлекается уравнение переноса влажности. Вертикальный профиль удельной влажности q задается стандартным от уровня подстилающей поверхности до 3,5 км, выше 3,5 км считается $q = 0$. Если в слое 0—3,5 км относительная влажность превышает 80%, то этот избыток рассматривается как выдающий осадки (производится суммирование по всем шагам).

С 1966 г. в оперативную модель были введены некоторые существенные изменения:

1. Изменилась вертикальная структура модели. Вместо слоя с постоянной потенциальной температурой введен третий стратосферный слой. Верхняя граница модели располагается на уровне 50 гПа.

2. За прошедшие годы была изменена область прогнозирования. Первоначально область интегрирования содержала сетку размером 53×57 точек с шагом сетки 381 км. Размеры сетки были расширены на всю полусферу и содержат теперь 65×65 точек. В дальнейшем шаг сетки был уменьшен вдвое до 190,5 км на широте 60° , и теперь сетка содержит 129×129 узлов.

Как показала серия испытаний, качество прогнозов в целом улучшилось, положение центров высокого и низкого давления стало ближе к истинному. Но в прогнозе осадков не было заметно какого-либо улучшения. Вероятно, для улучшения прогноза влажности и осадков требуются модели с большим разрешением.

С увеличением разрешения время счета прогноза на сутки существенно увеличивается. Если по модели с шагом сетки 381 км прогноз на сутки занимал 8 мин, то по модели с шагом сетки 190,5 км требуется 28 мин.

3. Было внесено большое число изменений в параметризацию физических процессов. Так, в частности, поправка на понижение температуры в нижнем слое за счет эффекта ночных инверсий над поверхностью снега для безоблачного неба стала 3,84 град/сутки. Вводится также в крайне упрощенной форме постоянная поправка в 0,8 град/сутки за счет длинноволнового излучения во всех слоях выше верхнего слоя, содержащего облачность. Предполагается, что облачность существует в каждом из трех нижних слоев, если относительная влажность более 60%.

Модель метеорологической службы Великобритании

В настоящее время используется 11-уровневая модель, которая является модернизацией 5-уровневой модели, предложенной в 1974 г.

Горизонтальная сетка представляет собой узлы на широтных кругах с шагом 2° , причем число узлов убывает к полюсу. Используется σ -система координат. Значения σ уровней и границ слоев представлены в следующей таблице.

Номер уровня k	Граница слоя $\sigma_{k-\frac{1}{2}}$	$\sigma_{k+\frac{1}{2}}$	Значения координаты соответствующего уровня σ_k
1	0	0,06	0,02207
2	0,06	0,125	0,08856
3	0,125	0,195	0,15741
4	0,195	0,27	0,23047
5	0,27	0,37	0,31738
6	0,37	0,51	0,43626
7	0,51	0,65	0,57717
8	0,65	0,79	0,71772
9	0,79	0,90	0,84320
10	0,90	0,975	0,93701
11	0,975	1,0	0,98744

Основные уравнения представлены в моментной и дивергентной форме и имеют следующий вид:

Уравнения движения

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (Uu) + \frac{\partial}{\partial \theta} (Vu \cos \theta) \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} (p_* \dot{\sigma} u) -$$

$$- V \left(f + \frac{u \operatorname{tg} \theta}{a} \right) + \frac{1}{a \cos \theta} \left[p_* \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + RT \frac{\partial p_*}{\partial \lambda} \right] = D_u + \frac{g \partial \tau_\lambda}{\partial \sigma}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (Uv) + \frac{\partial}{\partial \theta} (Vv \cos \theta) \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} (p_* \dot{\sigma} v) +$$

$$+ U \left(f + \frac{u \operatorname{tg} \theta}{a} \right) + \frac{1}{a \cos \theta} \left[p_* \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + RT \frac{\partial p_*}{\partial \theta} \right] = D_v + g \frac{\partial \tau_\theta}{\partial \sigma}. \quad (2)$$

Уравнение статики

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \frac{RT}{\sigma} = 0. \quad (3)$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial p_*}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (U) + \frac{\partial}{\partial \theta} (V \cos \theta) \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} (p_* \dot{\sigma}) = 0. \quad (4)$$

Уравнение притока тепла

$$\frac{\partial}{\partial t} (p_* T) + \frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (UT) + \frac{\partial}{\partial \theta} (VT \cos \theta) \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} (p_* \dot{\sigma} T) -$$

$$- \frac{\kappa T}{\sigma} \omega = D_T + \frac{g}{c_p} \frac{\partial H}{\partial \sigma} + \frac{p_*}{c_p} [\dot{Q}_R + L\dot{P}]. \quad (5)$$

Уравнение переноса водяного пара

$$\frac{\partial}{\partial t} (p_* q) + \frac{1}{a \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (Uq) + \frac{\partial}{\partial \theta} (Vq \cos \theta) \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \sigma} (p_* \dot{\sigma} q) = D_q + g \frac{\partial M}{\partial \sigma} - p_* \dot{P}. \quad (6)$$

Здесь приняты следующие обозначения: a — радиус земли; θ — широта; λ — долгота; p — давление; p_* — давление на подстилающей поверхности; $\sigma = \frac{p}{p_*}$ — вертикальная координата; $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$;

$\omega = \frac{dp}{dt}$; u , v — зональная и меридиональная компоненты скорости ветра: $U = p_* u$, $V = p_* v$; q — отношение смеси водяного пара; f — параметр Кориолиса; τ_λ , τ_θ — турбулентные потоки зонального и меридионального количества движения; H , M — турбулентные потоки тепла и влаги; \dot{Q}_R — скорость нагрева единицы массы за счет радиации; $\dot{P} = \dot{P}_c + \dot{P}_i$ — скорость конденсации в единице массы при конвекции (\dot{P}_c) и крупномасштабных процессах (\dot{P}_i); $\kappa = \frac{R}{c_p}$, D_u , D_v , D_T , D_q — скорости диссипации U , V , $p_* T$, $p_* q$ вследствие турбулентного перемешивания подсеточных масштабов.

Конечно-разностная аппроксимация уравнений осуществляется на основе следующих разностных операторов сглаживания и численного дифференцирования:

$$\bar{A}_x = \frac{1}{2} \left[A \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) + A \left(x - \frac{\Delta x}{2} \right) \right], \quad (7)$$

$$\delta_x A = \frac{1}{\Delta x} \left[A \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) - A \left(x - \frac{\Delta x}{2} \right) \right], \quad (8)$$

$$\tilde{A}B^x = \frac{1}{2} \left[A \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) B \left(x - \frac{\Delta x}{2} \right) + \right.$$

$$\left. + B \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) A \left(x - \frac{\Delta x}{2} \right) \right]. \quad (9)$$

Конечно-разностные уравнения, представляющие систему уравнений (1)–(6), будут выражаться следующим образом:

$$\delta_t \bar{u}^t + \frac{1}{a \cos \theta} [\delta_\lambda (\bar{U}^\lambda \bar{u}^\lambda) + \delta_\theta (\bar{v}^\theta \bar{u}^\theta \cos \theta)] + \delta_\sigma (\dot{\sigma} \bar{u}^\sigma) - \\ - V \left(f + \frac{u \operatorname{tg} \theta}{a} \right) + \frac{p_*}{a \cos \theta} [\delta_\lambda \bar{\Phi}^\lambda + R \bar{T}^\lambda \delta_\lambda \log p_*]^\lambda = D_u + g \frac{\partial \tau_\lambda}{\partial \sigma}, \quad (10)$$

$$\delta_t \bar{v}^t + \frac{1}{a \cos \theta} [\delta_\lambda (\bar{U}^\lambda \bar{v}^\lambda) + \delta_\theta (\bar{v}^\theta \bar{v}^\theta \cos \theta)] + \delta_\sigma (\dot{\sigma} \bar{v}^\sigma) + \\ + U \left(f + \frac{u \operatorname{tg} \theta}{a} \right) + \frac{p_*}{a \cos \theta} [\cos \theta \delta_\theta \bar{\Phi}^\theta + R \cos \theta \bar{T}^\theta \delta_\theta \log p_*]^\theta = \\ = D_v + g \frac{\partial \tau_\theta}{\partial \sigma}; \quad (11)$$

$$\delta_{\log \sigma} (\Phi) + R \bar{T}^\sigma = 0, \quad (12)$$

$$\delta_t \bar{p}_*^t + \frac{1}{a \cos \theta} [\delta_\lambda \bar{U}^\lambda + \delta_\theta (\bar{v}^\theta \cos \theta)] + \delta_\sigma (p_* \dot{\sigma}), \quad (13)$$

$$\delta_t \bar{p}_*^t T^t + \frac{1}{a \cos \theta} [\delta_\lambda (\bar{u} \bar{T}^\lambda) + \delta_\theta (\bar{v} \bar{T}^\theta \cos \theta)] + \delta_\sigma (p_* \dot{\sigma} \bar{T}^\sigma) - \\ - \frac{\alpha T \omega}{\sigma} = D_T + \frac{g}{c_p} \frac{\partial H}{\partial \sigma} + \frac{p_*}{p} (\dot{Q}_R + L \dot{P}), \quad (14)$$

$$\delta_t \bar{p}_*^t q^t + \frac{1}{a \cos \theta} [\delta_\lambda (\bar{u}^\lambda \bar{q}^\lambda) + \delta_\theta (\bar{v}^\theta \bar{q}^\theta \cos \theta) J] + \\ + \delta_\sigma (p_* \dot{\sigma} \bar{q}^\sigma) = D_q + g \frac{\partial M}{\partial \sigma} - p_* \dot{P}. \quad (15)$$

Интегрирование по времени производится с шагом 7,5 минуты. Используется схема центральных разностей. Граничные условия по вертикали: при $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$ $\dot{\sigma} = 0$.

При интегрировании по всему Земному шару горизонтальные граничные условия не требуются. Предполагается отсутствие адвективных потоков через экватор.

Чтобы избежать возникновения вычислительной неустойчивости после каждого временного шага используются временные фильтры.

Рассмотрим, как рассчитываются в данной модели крупномасштабные осадки и скрытая теплота парообразования. В начальной стадии предполагается, что адвекция температуры осуществляется при сухоадиабатическом процессе, а адвекция отношения смеси осуществляется как консервативный процесс. Если

наблюдается состояние насыщения, то вводятся соответствующие поправки. Так, если после очередного шага по времени в данном узле модели найдены значения T и q и если q превышает значение q_s соответствующее состоянию насыщения при температуре T , то температура увеличится на величину ΔT , где

$$\Delta T = \frac{L}{c_p} (q - q_s), \quad (16)$$

q'_s — есть насыщающее отношение смеси при $T + \Delta T$.

Можно записать приближенно

$$q'_s = q_s + \frac{\partial q}{\partial T} \Delta T = q_s + \frac{L q_s \Delta T}{R_H T^2}, \quad (17)$$

где R_H — газовая постоянная для водяного пара.

Скорость конденсации водяного пара в единице массы $\dot{P}_L = \frac{q - q'_s}{\Delta t}$ будет

$$\dot{P}_L = \frac{q - q_s}{\Delta t} / \left(1 + \frac{L q_s}{c_p R_H T^2} \right). \quad (18)$$

Если умножить это выражение на L/c_p , то получим выражение для скорости изменения температуры вследствие выделения скрытой теплоты парообразования. Для определения насыщающего значения отношения смеси используется формула

$$q_s = 0,622 \frac{e_s}{p}, \quad (19)$$

где e_s — упругость насыщения.

Предполагается, что конденсация начинается при значении относительной влажности 100%, и сконденсированная влага медленно выпадает в виде осадков, не испаряясь в слоях ниже уровня конденсации.

Осадки формируются в виде дождя или снега в зависимости от того, больше или меньше нуля градусов температура воздуха. Вид осадков, достигающих земной поверхности, зависит только от температуры нижнего уровня модели.

Для расчета турбулентных потоков тепла, влаги и количества движения в приземном слое используется выражение вида

$$F_x = -c_x V_{11} \Delta x, \quad (20)$$

где V_{11} — скорость ветра на уровне σ_{11} — нижнем уровне модели, $\Delta x = x_{11} - x_*$, x_* — высота подстилающей поверхности; z_{11} — высота уровня σ_{11} ; $c_x = c_x(z_{11}, z_0, R_i)$ — коэффициент переноса; z — параметр шероховатости; R_i — число Ричардсона.

Если вертикальный турбулентный перенос водяного пара и тепла мал по сравнению с конвективным переносом, то используется выражение, описывающее свободную конвекцию,

$$F_{\theta} = \alpha \left(\frac{g}{T} \right)^{1/2} z_{II} |\Delta\theta|^{3/2}, \quad (21)$$

где

$$\alpha = \left\{ 3c \left[\left(\frac{z}{z_0} \right)^{1/3} - 1 \right] \right\}^{-3/2}, \quad (22)$$

c — эмпирическая постоянная, принятая равной 0,84; $\Delta\theta$ — градиент потенциальной температуры. Градиент потенциальной температуры рассчитывается по значениям θ_{II} и θ_* .

Расчет градиента удельной влажности сложнее, поскольку q_* — отношение смеси у поверхности земли не является переменной величиной, определяемой в модели. Градиент Δq зависит от содержания влаги в почве μ и от q_* насыщающего ($q_{*H} = q_s(T_*)$) и определяется формулой

$$\Delta q = \alpha (q_{II} - q_{*H}), \quad (23)$$

где $\alpha = \alpha(\mu)$ и $\alpha = 1$ для водной поверхности.

На подстилающей поверхности используются следующие уравнения:

$$c \frac{\partial T_*}{\partial t} + R_* + H_* + LM_* + L_f S_M + H_J = 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = P_r - E + S_M - Y, \quad (25)$$

$$\frac{\partial S_N}{\partial t} = P_s - E_l - S_M. \quad (26)$$

Здесь T_* — температура подстилающей поверхности; c — теплоемкость почвы; μ — влагосодержание почвы, S_N — толщина снежного покрова; R_* , H_* , LM_* — результирующие потоки радиации, тепла и влаги у земной поверхности; S_M — скорость таяния снега; L_s — скрытая теплота таяния; H_J — поток тепла от поверхности океана, покрытой льдом; P_r , P_s — осадки, выпадающие в виде дождя и снега; E , E_l — скорости испарения и сублимации; Y — сток.

Модель службы погоды ФРГ

Полусферная 9-уровневая модель предназначена для краткосрочного прогноза в высоких и средних широтах и является развитием 6-уровневой модели, бывшей в оперативной практике с 1967 г. Модель включает и прогноз влажности. Интегрирование

производится дважды в день на срок до 96 часов и дважды в неделю на срок до 144 часов. Прогноз на 96 часов требует машинного времени несколько более двух часов. Область интегрирования представляет собой симметричный восьмиугольник на карте полярной стереографической проекции, покрывающей большую часть северного полушария. Шаг сетки на сфере на широте 60° равен 254 км; сетка содержит 5137 узлов.

Граничные условия по горизонтали имеют вид («жесткая» стенка при отсутствии сил трения)

$$v_n = 0, \quad \frac{\partial v_t}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial q}{\partial n} = 0, \quad (1)$$

n и t означают нормальную и тангенциальную составляющую. В модели используется так называемая сетка Элиассена, расширенная по времени и пространственным координатам.

В качестве вертикальной координаты принимается давление p . Компоненты скорости u , v , потенциальная температура θ , геопотенциал Φ и удельная влажность q определяются на девяти уровнях модели, а вертикальная скорость ω для середин слоев. Для трех верхних уровней влажность не определяется. За нижнюю границу модели принимается уровень 1000 гПа. Подстилающая поверхность рассматривается как водная с заданной температурой поверхности или как сильно упрощенная модель почвы, состоящей из тонкого верхнего слоя (температура и влагосодержание заданы) и более толстого нижнего слоя (также с фиксированными температурой и влагосодержанием). Принимается во внимание наличие снега или льда на поверхности.

В качестве верхних граничных условий принимаются

$$\omega = 0 \quad \text{при} \quad p = 0, \quad (2)$$

$$(\omega q) = 0 \quad \text{при} \quad p = 250 \text{ гПа}. \quad (3)$$

На нижней границе для членов, характеризующих вертикальный перенос, используются следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} V_{1000} &= V_{950}, \\ \theta_{1000} &= \theta_{950}, \\ q_{1000} &= q_{950}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Используется явная схема интегрирования (схема центральных разностей) с шагом по времени 3,5 минуты.

Основные уравнения системы в конечно-разностном приближении записываются следующим образом.

Уравнения движения в адвективной форме

$$\begin{aligned} \bar{U}_t^i &= -m^2 (\bar{U}^{xy} \bar{U}_x^y + \bar{V}^{yy} \bar{U}_y^x + V_{\text{ert}} (\bar{\Omega}^y, \bar{U}^{xy})) - \\ &- \frac{1}{2} [(\bar{U}^{xy})^2 + (\bar{V}^{yy})^2] m_x^2 + f V - \Phi_x + m^2 AL_4(U) + F_x, \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_t^t = & -m^2 (\bar{U}^{xx} \bar{V}_x^y + \bar{V}^{xy} \bar{V}_y^x + V_{\text{ert}}(\bar{\Omega}^x, \bar{V}^{xy})) - \\ & - \frac{1}{2} [(\bar{U}^{xx})^2 + (\bar{V}^{xy})^2] m_y^2 - fU - \Phi_y + m^2 AL_4(V) + F_y. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь принято:

$$U = \frac{u}{m}, \quad V = \frac{v}{m}, \quad \Omega = \frac{\omega}{m}, \quad (7)$$

F_x, F_y — члены, учитывающие трение; m — масштабный множитель для карты стереографической проекции, операторы осреднения и численного дифференцирования имеют вид

$$\bar{\psi}^x = \frac{\psi\left(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}\right) + \psi\left(\alpha - \frac{\Delta\alpha}{2}\right)}{2}, \quad \psi_x = \frac{\psi\left(\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2}\right) - \psi\left(\alpha - \frac{\Delta\alpha}{2}\right)}{\Delta\alpha}. \quad (8)$$

Члены, описывающие вертикальный перенос, обеспечивают согласованность между адвективной и моментной формой дифференциальных уровней. Эти члены записываются в виде

$$V_{\text{ert}}(\Omega, \psi) = \frac{\Omega_{k+\frac{1}{2}}(\psi_{k+1} - \psi_k) + \Omega_{k-\frac{1}{2}}(\psi_k - \psi_{k-1})}{2(p_{k+\frac{1}{2}} - p_{k-\frac{1}{2}})}. \quad (9)$$

В уравнениях (5) и (6) через $L_4(\psi)$ обозначен линейный оператор Лапласа 4-го порядка. Введение этого оператора объясняется необходимостью исключения нелинейной неустойчивости при интегрировании по времени. Обычная конечно-разностная форма оператора Лапласа в данном случае не позволяет исключить нежелательные эффекты.

Уравнение неразрывности

$$U_x + V_y + \Omega_p = 0 \quad (10)$$

Уравнение притока тепла

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_t^t = & -m^2 (\bar{U}^x \bar{\theta}_x^y + \bar{V}_y \bar{\theta}_y^x + V_{\text{ert}}(\Omega, \bar{\theta}^{xy})) + \\ & + m^2 AL_4(\theta) + \frac{1}{p^k} \frac{Q}{c_p}, \end{aligned} \quad (11)$$

где \dot{Q} — источники тепла.

Уравнение переноса водяного пара

$$\bar{q}_t^t = -m^2 (\bar{U}^x \bar{q}_x^y + \bar{V}_y \bar{q}_y^x + V_{\text{ert}}(\Omega, \bar{q}^{xy})) + m^2 AL_4(q) + \dot{W}, \quad (12)$$

где \dot{W} — источники влаги.

Уравнение статики

$$\Phi_k = \Phi_{k+1} + \alpha_k \theta_{vk+1} + \beta_k \theta_{vk+1}. \quad (13)$$

Предполагается, что виртуальная температура T_v между двумя уровнями модели k и $k+1$ является линейной функцией p^k .
Здесь

$$\theta_v = \theta(1 + 0,604q), \quad (14)$$

$$\alpha_k = \frac{R}{k} p_{k+1}^k \left(1 - \frac{\ln \pi}{\pi - 1} \right), \quad (15)$$

$$\beta_k = \frac{R}{k} p_k^k \left(-1 + \frac{\pi \ln \pi}{\pi - 1} \right). \quad (16)$$

$\pi = \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \right)^n$, $n = 0,286$; R — газовая постоянная.

На нижней границе модели ставится следующее кинематическое условие:

$$W_s = m^2 V_s \nabla Z_s, \quad (17)$$

которое позволяет грубо учесть топографию $Z_s(x, y)$. Это условие преобразуется к виду

$$W_{1000} = m^2 V_{1000} \nabla Z_s. \quad (18)$$

Вертикальная турбулентная диффузия в модели сейчас не рассматривается.

Большое внимание уделяется в модели процессам в пограничном слое, параметризации конвекции, облачности, радиации, процессам в почве.

Пограничный слой делится на два слоя — слой Прандтля и слой Экмана.

Потоки количества движения, тепла и влаги в слое Прандтля определяются следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} (F_m)_n &= -\rho C_D |V_a| (V_a - 0), \\ (F_T)_n &= -c_p \rho C_D |V_a| (\theta_a - \theta_s), \\ (F_q)_n &= -L \rho C_D |V_a| (q_a - q_s). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Коэффициент сопротивления C_D различен для океана и поверхности суши.

Для потоков количества движения, тепла и влаги, поступающих в слой Экмана снизу, используются выражения

$$\left. \begin{aligned} (F_m)_s &= -\rho K_v \frac{\partial v}{\partial z}, \\ (F_T)_s &= -c_p \rho K_v \frac{\partial \theta}{\partial z}, \\ (F_q)_s &= -L \rho K_v \frac{\partial q}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где

$$K_v = l^2 \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (21)$$

l — длина пути смещения.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЧИСЛЕННОГО ПРОГНОЗА ПОГОДЫ

В последние годы наряду с сеточными (конечно-разностными) методами решения, традиционно используемыми в прогностических моделях, все шире применяются такие методы, в которых пространственная зависимость прогнозируемых функций (зависимых переменных) представляется в виде рядов по системам функций, обладающих определенными свойствами. В этом случае исходное уравнение или исходная система прогностических уравнений в частных производных относительно зависимых переменных сводится к системам обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов разложения, зависящих от времени. При таком подходе искомыми величинами являются не значения прогнозируемых функций в узлах сетки точек, как это имеет место в случае применения сеточных методов, а коэффициенты разложения рядов. Один из вариантов указанного метода в задачах численного прогноза погоды принято называть спектральным методом, а прогностические модели, в которых уравнения решаются спектральным методом — спектральными моделями.

В большинстве спектральных моделей зависимость прогнозируемых функций от времени и от вертикальной координаты представляется в дискретной форме, а интегрирование по времени относительно коэффициентов разложения осуществляется методом шагов по времени.

Некоторые сведения о решении задачи прогноза погоды с помощью рядов

Спектральный метод, являясь одним из вариантов метода решения дифференциальных уравнений с помощью рядов, сводится к определению некоторых параметров — коэффициентов разложения или производных по времени от них. При этом численные значения параметров определяются с помощью уравнений, получаемых путем минимизации ошибки (невязки) решений, представленных в виде рядов по той или иной системе базисных (координатных) функций. Вопрос о том, какими свойствами должны обладать базисные функции, будет рассмотрен специально. Здесь мы поясним сущность этого метода на примере уравнения адвекции вида

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

не затрагивая вопроса о свойствах базисных функций. В уравнении (1) $f(t, x)$ — искомая скалярная функция; v — скорость переноса, которую пока будем считать постоянной.

Решение уравнения (1) будем строить для дискретных моментов времени $\tau = \frac{t}{\Delta t}$ (Δt — шаг по времени) методом шагов по времени в пределах области G , определенной на оси абсцисс.

Начальные значения функции $f(t_0, x)$ и искомые (прогностические) значения этой функции $f(t, x)$ представим рядом с конечным числом членов

$$\hat{f}(t, x) = \sum_{n=0}^N c_n(t) u_n(x), \quad (2)$$

где $c_n(t)$ — искомые коэффициенты (параметры), зависящие от времени; $u_n(x)$ — базисные функции, зависящие от пространственных координат (в данном случае от x); N — целое положительное число, определяющее число членов разложения. Начальные значения функции $f(t_0, x)$ представляются рядом (2) с коэффициентами $c_n(t_0)$.

Так как в ряду (2) используется ограниченное число членов разложения, то он позволяет в принципе определить лишь приближенное — «усеченное» решение, обозначаемое через $\hat{f}(t, x)$. Поэтому, если подставить ряд (2) в уравнение (1), то вместо нуля в правой части получится некоторая величина — невязка ε , т. е.

$$\sum_{n=0}^N \frac{dc_n(t)}{dt} \cdot u_n(x) + v \sum_{n=0}^N c_n(t) \frac{du_n(x)}{dx} = \varepsilon. \quad (3)$$

В уравнении (3) в отличие от уравнения (1) фигурируют полные производные, так как коэффициенты $c_n(t)$ зависят только от t , а базисные функции $u_n(x)$ — только от x .

В зависимости от способа минимизации невязки ε различаются системы уравнений, носящие названия «определяющих систем», с помощью которых находятся искомые параметры. В рассматриваемом примере решается гиперболическое уравнение, а поэтому искомыми параметрами будут производные по времени для коэффициентов разложения, т. е. $\frac{dc_n(t)}{dt}$.

Существуют следующие наиболее часто встречающиеся методы построения определяющих систем уравнений, используемых для нахождения параметров.

1. Метод коллокации

Определяющая система уравнений строится с помощью условия $\varepsilon = 0$, задаваемого в m точках коллокации, равномерно раз-

мещенных в области G . Число точек коллокации должно быть равным числу членов разложения ряда (2), т. е.

$$m = 0, 1, 2, \dots, N.$$

В этом случае (при $\varepsilon = 0$) выражение (3) записывается для каждой точки коллокации в виде

$$\sum_{n=0}^N \frac{dc_n(t)}{dt} u_n(x_m) + v \sum_{n=0}^N c_n(t) \frac{du_n(x_m)}{dx} = 0 \quad (4)$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots, N).$$

Система этих выражений представляет собой определяющую систему уравнений для нахождения $\frac{dc_n(t)}{dt}$ ($n = 0, 1, 2, \dots, N$).

2. Метод наименьших квадратов

Определяющая система уравнений строится так, чтобы

$$J = \int_G \varepsilon^2 dx = \min,$$

т. е. из условия экстремума для J

$$\frac{\partial J}{\partial \left(\frac{dc_n(t)}{dt} \right)} = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N).$$

3. Метод ортогональных проекций (метод Галеркина)

Определяющая система уравнений получается из условий ортогональности невязки координатным функциям, т. е.

$$\int_G \varepsilon u_n(x) dx = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N).$$

Нетрудно убедиться в том, что определяющие системы уравнений, получаемые по методу наименьших квадратов и по методу ортогональных проекций идентичны и имеют вид

$$\int_G \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{dc_n(t)}{dt} u_n(x) + v \sum_{n=0}^N c_n(t) \frac{du_n(x)}{dx} \right\} u_n(x) dx = 0, \quad (5)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots, N).$$

В общем случае решение определяющих систем уравнений требует обращения матриц. Однако этого можно избежать, если

В качестве базисных используются ортогональные функции, удовлетворяющие условию

$$J_{nn'} = \int_G u_n(x) u_{n'}(x) dx = 0 \quad \text{при } n \neq n'.$$

Если базисные функции $u_n(x)$ обладают свойствами ортогональности, то отпадает необходимость обращения матриц, так как в этом случае

$$\frac{dc_n(t)}{dt} = \frac{1}{J_{nn'}} \int_G v \sum_{n=0}^N c_n(t) \frac{du_n(x)}{dx} u_{n'}(x) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N).$$

После определения $\frac{dc_n(t)}{dt}$ вычисляются значения коэффициентов в конце шага по времени

$$c_n(t + \Delta t) = c_n(t) + \frac{dc_n(t)}{dt} \Delta t \quad (n = 0, 1, 2, \dots, N),$$

а в результате применения процедуры шагов по времени рассчитываются коэффициенты на срок прогноза $c_n(t_n)$. Затем с помощью ряда (2) определяются прогностические поля функции $f(t_n, x)$. Таким образом, прогноз функции $f(t, x)$ с помощью рядов сводится к прогнозу коэффициентов разложения.

Выше была рассмотрена задача прогноза на основе уравнения (1), в котором скорость переноса v принималась постоянной. Если считать, что скорость переноса во времени и пространстве меняется, т. е. $v(t, x)$, то при построении определяющей системы уравнений используется разложение в ряд не только функции $f(t, x)$, но и скорости переноса

$$\hat{v}(t, x) = \sum_{n=0}^N v_n(t) u_n(x).$$

В этом случае определяющая система уравнений для $\frac{dc_n(t)}{dt}$, построенная по методу ортогональных проекций, имеет вид

$$\int_G \left\{ \sum_{n=0}^N \frac{dc_n(t)}{dt} u_n(x) + \frac{d}{dx} \left[\sum_{n=0}^N v_n(t) u_n(x) \sum_{n=0}^N c_n(t) u_n(x) \right] \right\} u_n(x) = 0 \quad (6)$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots, N)$$

При этом коэффициенты $v_n(t)$ определяются с помощью уравнения движения, которое, также как уравнение (1), решается с помощью рядов с соответствующими начальными и граничными

условиями. Вполне естественно, что совокупность уравнений для функций $f(t, x)$ и $v(t, x)$ должна представлять замкнутую систему уравнений.

Если с помощью рядов решается задача прогноза на основе полных уравнений пространственной модели, среди которых, наряду с прогностическими, фигурируют диагностические уравнения, то диагностические уравнения используются для определения коэффициентов разложения одной из функций через коэффициенты разложения других функций. Поясним это на примере уравнения статики

$$T = - \frac{p}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial p},$$

где T — температура °К; R — газовая постоянная; Φ — геопотенциал; p — давление.

По переменной p введем дискретизацию

$$k = \frac{p}{\Delta p} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, K).$$

Для простоты будем полагать, что, также как в рассмотренном выше примере, $T^k(t, x)$ и $\Phi^k(t, x)$. Верхний индекс « k » указывает на принадлежность к определенному изобарическому уровню.

Функции $T^k(t, x)$ и $\Phi^k(t, x)$ представляются рядами вида (1), т. е.

$$\hat{T}(t, x) = \sum_{n=0}^N c_n^{T, k}(t) u_n(x),$$

$$\hat{\Phi}(t, x) = \sum_{n=0}^N c_n^{\Phi, k}(t) u_n(x).$$

Коэффициенты $c_n^{T, k}(t)$ на каждом шаге по времени определяются с помощью уравнения притока тепла аналогично тому, как это было показано на примере уравнения (1). Таким же образом на каждом шаге по времени определяются коэффициенты разложения для геопотенциала с помощью нижнего граничного условия $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ при $p = 1000$ гПа, т. е. при $k = K$.

Имея значения коэффициентов $c_n^{T, k}(t)$ для всех уровней k и коэффициенты $c_n^{\Phi, K}(t)$ для уровня $k = K$ ($p = 1000$ гПа), с помощью уравнения статики, представленного в виде

$$\Phi_{k-1} = \Phi_k + R \bar{T}^p \ln \frac{p_k}{p_{k-1}},$$

$$\text{где } \bar{T}^p = \frac{T_k + T_{k-1}}{2},$$

последовательно, начиная с уровня $K - 1$, определяются коэффициенты $c_n^{\Phi, k}(t)$

$$c_n^{\Phi, k-1}(t) = c_n^{\Phi, k}(t) + R \ln \frac{p_k}{p_{k-1}} \left[\frac{c_n^{T, k}(t) + c_n^{T, k-1}(t)}{2} \right].$$

$$(k = K, K-1, \dots, 1, 0).$$

Прежде чем приступить к более строгому рассмотрению методов решения задачи прогноза погоды с помощью разложения зависимых переменных в ряды, сформулируем некоторые установившиеся в литературе понятия.

Прогностические модели, в которых решение уравнений строится с помощью разложений по ортогональным базисным функциям с минимизацией невязки по методу наименьших квадратов или по методу ортогональных проекций (методом Галеркина), принято называть спектральными. Если же для построения определяющей системы уравнений используется метод коллокации, то прогностические модели называют псевдоспектральными.

В последние годы уделяется значительное внимание моделям, в которых для решения прогностических уравнений применяются методы конечных элементов. В этих моделях область прогноза разбивается на конечное число подобластей, называемых элементами, для каждой из которых строятся простые функции, аппроксимирующие зависимые переменные в пределах подобластей, но так, чтобы аппроксимация для всей области прогноза была непрерывной. В качестве аппроксимирующих функций в пределах подобластей могут, например, использоваться степенные полиномы низких степеней. Построение определяющих систем уравнений в таких моделях может выполняться любым из рассмотренных методов, т. е. по методу наименьших квадратов, методом Галеркина или методом коллокации.

В заключение заметим, что при использовании рядов для решения прогностических уравнений, так же как и в случае применения метода сеток, задача сводится к определению конечного числа параметров. При этом искомыми параметрами являются производные по времени для коэффициентов разложения, а вычисляются эти параметры путем решения определяющих систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Так как в этих уравнениях содержится конечное число базисных функций и искомым параметрам, то эти уравнения принято называть пространственно-усеченными уравнениями модели.

О свойствах базисных функций

Рассмотрим снова уравнение адвекции:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где f — искомая функция; v — скорость переноса, которую для простоты примем постоянной.

Областью определения решения задачи выберем множество значений аргумента $x \in [1, 2\pi]$ и потребуем, чтобы разыскиваемое решение удовлетворяло условию периодичности:

$$f(t, x) = f(t, x + 2\pi). \quad (2)$$

Будем искать решение этой задачи в виде разложения по системе заданных базисных функций. Особо следует оговорить, какими свойствами должны обладать базисные функции. Во-первых, они должны быть линейно-независимыми, а, во-вторых, они должны удовлетворять краевым условиям поставленной задачи. Именно последнее требование является самым главным, так как решение, составленное из таких базисных функций, будет автоматически удовлетворять условиям на границах области. Итак, будем искать приближенное решение задачи (1), (2) в виде

$$\hat{f}(t, x) = \sum_{n=0}^N c_n(t) u_n(x), \quad (3)$$

где N — число используемых базисных функций; $u_n(x)$ — базисные функции; $c_n(t)$ — коэффициенты, подлежащие определению.

Базисные функции $u_n(x)$ должны быть периодическими. В качестве таких функций удобно использовать тригонометрические, так как они не только обладают периодичностью и линейной независимостью, но и образуют полную ортогональную систему. Эти свойства тригонометрических функций позволяют упростить решение поставленной задачи и представить решение в виде ряда Фурье. Точность найденного спектральным методом приближенного решения может быть оценена.

С учетом сказанного, (3) можно переписать в виде:

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^N (c_{1n}(t) \sin nx + c_{2n}(t) \cos nx), \quad (4)$$

где $n = \frac{2\pi}{L}$, L — длина волны.

Для большей компактности записи преобразуем правую часть (4) в комплексную форму, применив формулу Эйлера

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}, \quad (5)$$

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}. \quad (6)$$

Подставив эти выражения в (4) и приведя подобные члены, получим

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{(c_{2n} - ic_{1n})e^{inx}}{2} + \frac{(c_{2n} + ic_{1n})e^{-inx}}{2} \right\} = \\ = \sum_{n=-N}^N A_n e^{-inx}, \quad (7)$$

$$\text{где } A_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 0, \\ \frac{1}{2} (c_{1n} - ic_{2n}) & \text{при } n > 0, \\ \frac{1}{2} (c_{1n} + ic_{2n}) & \text{при } n < 0, \end{cases} \quad (8)$$

c_{1n} , c_{2n} , A_n являются функциями времени.

Подставив сумму (7) в уравнение (1), получим

$$\sum_{n=-N}^N e^{inx} \left[\frac{dA_n}{dt} + in\nu A_n \right] = 0. \quad (9)$$

Учитывая ортогональность экспоненциальных функций

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in_1 x} e^{in_2 x} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n_1 \neq n_2, \\ 1 & \text{при } n_1 = n_2, \end{cases} \quad (10)$$

путем умножения уравнения (9) последовательно на e^{inx} при $n \in [-N, N]$ получим систему уравнений, которым должны удовлетворять коэффициенты $A_n(t)$.

$$\frac{dA_n}{dt} + in\nu A_n = 0. \quad (11)$$

В данном случае решение уравнений для коэффициентов имеет вид:

$$A_n(t) = A_n(0) e^{-in\nu t}. \quad (12)$$

В случае более сложной задачи, но с периодическими краевыми условиями, путем умножения соответствующего уравнения на e^{inx} и интегрирования получается система уравнений для коэффициентов. После нахождения коэффициентов на основе формул, подобных (3), в нашем случае (4) или (7), получается приближенное решение для функции $f(t, x)$.

Таким образом, при построении решения с помощью спектрального метода нет необходимости заменять производные по пространству приближенными конечно-разностными выражениями, а это значит, что не вносятся и ошибки, характерные для процедуры.

Методика построения уравнений для нахождения коэффициентов A_n известна в вычислительной методике под названием «метода Галеркина». Более подробно с этим методом можно ознакомиться в учебниках по вычислительной математике.

Для задач динамики атмосферы и численного прогноза погоды, которые решаются на сфере или полусфере, спектральный метод реализуется с помощью базисных функций, удовлетворяющих естественным для сферы краевым условиям. Семейство таких базисных функций на сфере порождается, в частности, уравнением Лапласа. В сферических координатах эти функции называются сферическими гармониками. Остановимся более подробно на процедуре их вывода.

Трехмерное уравнение Лапласа в сферических координатах, как известно, имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (13)$$

где f — решение этого уравнения; r — вертикальная координата; λ — долгота; θ — дополнительные широты $\theta = \pi - \varphi$, φ — широта места.

Будем искать частное решение этого уравнения методом разделения переменных, представив его в форме

$$f(\theta, \lambda, r) = u(r) y(\theta, \lambda). \quad (14)$$

После подстановки этого решения в (13) и деления его на $f(\theta, \lambda, r)$, получим

$$\frac{1}{u} \frac{d}{dr} r^2 \frac{du}{dr} + \frac{1}{y \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \lambda} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \right) \frac{\partial y}{\partial \theta} = 0. \quad (15)$$

Поскольку первое и второе слагаемое зависят от разных аргументов, то выполнение уравнения (15) возможно, если оба эти слагаемых равны одинаковым по модулю и противоположным по знаку постоянным $\pm \mu$. Тогда

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{du}{dr} = \mu u, \quad (16)$$

$$\nabla^2 y = -\mu y, \quad (17)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (18)$$

Анализ условий существования ограниченного решения уравнения (16) показывает, что оно имеет место только при условии

$$\mu = n(n+1), \quad (19)$$

где n — натуральное число.

Предположим, что частное решение уравнения (17) имеет вид

$$y(\theta, \lambda) = P(\theta) Q(\lambda). \quad (20)$$

Вновь используя методику разделения переменных, получим на основе уравнения (17)

$$\frac{d^2 Q}{d\lambda^2} + m^2 Q = 0, \quad (21)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{dP}{d\theta} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0, \quad (22)$$

где m — целые положительные числа ($m \leq n$), являющиеся собственными значениями задачи (21), которым соответствуют собственные функции

$$Q(\lambda) = \sin m\lambda, \quad (23)$$

или

$$Q(\lambda) = \cos m\lambda. \quad (24)$$

Уравнение (22) после введения новой переменной $x = \cos \theta$ ($\sin \theta = \sqrt{1-x^2}$) превращается в уравнение для присоединенных полиномов Лежандра. Присоединенные полиномы Лежандра являются функциями, ограниченными у полюсов. Таким образом, частные решения уравнения (17), определяемые формулой (20), имеют вид:

$$y_{mn} = \begin{cases} P_m^n(\theta) \cos m\lambda \\ P_m^n(\theta) \sin m\lambda \end{cases}. \quad (25)$$

Эти решения называют сферическими функциями (гармониками). Они ограничены у полюсов и периодичны по долготе, что является естественным условием для функций, определяющих физические процессы на сферической поверхности. Обозначения $P_m^n(\theta)$, принятые вместо $P(\theta)$, подчеркивают важное значение параметров n и m при вычислении присоединенных полиномов Лежандра.

Таким образом, частные решения (25), удовлетворяющие уравнению (17), в виде

$$\nabla^2 y_{mn} = n(n+1) y_{mn} \quad (26)$$

представляют собой сферические гармоники.

Отметим важнейшие свойства сферических гармоник. Прежде всего следует указать, что они ортогональны на сферической поверхности, т. е. для них имеет место равенство

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi y_{m_1 n_1}(\lambda, \theta) y_{m_2 n_2}(\lambda, \theta) \sin \theta d\lambda d\theta = 0. \quad (27)$$

при $n_1 \neq n_2$.

Это свойство упрощает определение коэффициентов в рядах Фурье.

Известно, что присоединенные функции Лежандра $P_m^n(\theta)$ являются нечетными по параметру m , т. е.

$$P_{-m}^n(\theta) = (-1)^m P_m^n(\theta). \quad (28)$$

Если не удовлетворяется условие $n \geq |m|$, то $P_m^n(\theta) = 0$. Для случая $m = 0$ $P_m^n(\theta)$ переходят в обычные полиномы Лежандра. Наконец, при $m > 0$ четность $n - m$ определяет симметричность $P_m^n(\theta)$ или антисимметричность относительно экватора, если $n - m$ нечетное. Сама величина $n - m$ определяет число корней $P_m^n(\theta)$ между северным и южным полюсами.

Существенные отличия $P_m^n(\theta)$ от тригонометрических функций можно показать на примере умножения и дифференцирования. Известно, что при перемножении тригонометрических функций возникает сумма тригонометрических функций с измененными значениями аргументов.

Полиномы $P_m^n(\theta)$ не обладают этим свойством. Для них справедливо менее удобное соотношение:

$$\cos \theta P_m^n(\theta) = \frac{(n - m + 1)}{(2n + 1)} P_m^{n+1}(\theta) - \frac{n + m}{(2n + 1)} P_m^{n-1}(\theta). \quad (29)$$

Аналогичное положение имеет место при дифференцировании. Тригонометрические функции при дифференцировании переходят друг в друга. Дифференцирование присоединенных функций приводит к более сложному соотношению:

$$\sin \theta \frac{dP_m^n(\theta)}{d\theta} = (n - m + 1) P_m^{n+1}(\theta) - (n + 1) \cos \theta P_m^n(\theta). \quad (30)$$

При работе со сферическими гармониками для компактности выкладок обычно переходят к использованию сферических гармоник в комплексной форме на основе формул Эйлера (5) — (6). Ряд Фурье для произвольной функции

$$f(\lambda, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (A_{mn} \sin m\lambda + B_{mn} \cos m\lambda) P_m^n(\theta). \quad (31)$$

преобразуется в комплексную форму

$$f(\lambda, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \sigma_{nm} e^{im\lambda} P_m^n(\theta), \quad (32)$$

где

$$\sigma_{nm} = \frac{1}{2} (B_{mn} - i A_{mn}), \quad m > 0 \quad (33)$$

$$\sigma_{nm} = \frac{1}{2} (B_{mn} + i A_{mn}), \quad m < 0. \quad (34)$$

метрична по отношению к экватору. Ищем решение поставленной задачи в виде ряда

$$\psi(t, \theta, \lambda) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N \psi_{mn}(t) e^{im\lambda} P_m^n(\cos \theta). \quad (3)$$

Для антисимметричности функции тока разность индексов должна быть нечетной. Для такого представления легко выписать линейные члены уравнения (1) в спектральном виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = - \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N \frac{d\psi_{m,n}}{dt} \frac{n(n+1)}{a^2} y_{nm}, \quad (4)$$

$$\frac{2\omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \frac{2\omega}{a^2} \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N im \psi_{mn} y_{nm}, \quad (5)$$

где

$$y_{nm} = e^{im\lambda} P_m^n(\cos \theta). \quad (6)$$

Представление нелинейного члена $(\psi, \nabla^2 \psi)$ осуществляется гораздо сложнее. Для его спектрального представления используем ряды (3), заменив предварительно переменную θ на x по соотношению $x = \cos \theta$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} (\psi, \nabla^2 \psi) &= \frac{1}{a^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \lambda} \right) = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \lambda} \right) = \\ &= \frac{1}{a^2} \left[\left(\sum_{m_1=-M}^M \sum_{n_1=|m_1|}^N im_1 \psi_{m_1, n_1} y_{n_1, m_1} \right) \times \left(\sum_{m_2=-M}^M \sum_{n_2=|m_2|}^N \frac{n_2(n_2+1)}{a^2} \times \right. \right. \\ &\quad \times \psi_{m_2, n_2} \frac{\partial y_{n_2, m_2}}{\partial x} \left. \right) - \left(\sum_{m_1=-M}^M \sum_{n_1=|m_1|}^N \psi_{m_1, n_1} \frac{\partial y_{n_1, m_1}}{\partial x} \right) \times \\ &\quad \times \left. \left(\sum_{m_2=-M}^M \sum_{n_2=|m_2|}^N im_2 \frac{n_2(n_2+1)}{a^2} \psi_{m_2, n_2} y_{n_2, m_2} \right) \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

Выполнив умножение рядов, получим:

$$(\psi, \nabla^2 \psi) = \frac{1}{a^4} \sum_{m_1=-M}^M \sum_{n_1=|m_1|}^N \sum_{m_2=-M}^M \sum_{n_2=|m_2|}^N i \psi_{m_1, n_1} \psi_{m_2, n_2} \times K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}, \quad (8)$$

где

$$K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2} = n_2(n_2+1) \left(m_2 F_{m_2}^{n_2} \frac{dP_{m_1}^{n_1}}{dx} - m_1 P_{m_1}^{n_1} \frac{dP_{m_2}^{n_2}}{dx} \right) e^{i(m_1+m_2)\lambda}. \quad (9)$$

Для получения уравнений для амплитуд ψ_{mn} по методу Галеркина необходимо в уравнение (1) подставить выражения (4), (5) и (8), а затем умножить его на каждую из сферических гармоник y_{nm} при $m \in [-M, M]$, $n \in [m, N]$ и произвести интегрирование произведений по сфере (полусфере).

В силу ортогональности сферических гармоник, линейные члены при этом записываются просто, а нелинейные члены в общем виде записать сложно. Если оставить нелинейные члены, не преобразуя их, то получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d\psi_{mn}}{dt} = \frac{i}{n(n+1)} \left[2\omega m \psi_{mn} - \frac{1}{a^2 n(n+1)} \sum_{m_1=-M}^M \sum_{n_1=|m_1|}^N \sum_{m_2=-M}^M \sum_{n_2=|m_2|}^N \psi_{m_1 n_1} \psi_{m_2 n_2} \times L_{n_1 n_2 n}^{m_1 m_2 m} \right], \quad (10)$$

$$L_{n_1 n_2 n}^{m_1 m_2 m} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 K_{n_1 n_2}^{m_1 m_2} y_m^n dx d\lambda. \quad (11)$$

Выражения (10) и (11) позволяют понять основную трудность применения спектрального метода к нелинейным задачам. Она состоит в том, что при решении даже простого по форме уравнения (10) приходится иметь дело с большим числом коэффициентов $L_{n_1 n_2 n}^{m_1 m_2 m}$, которые сложно вычислить и которые необходимо хранить в памяти ЭВМ. Это видно из (11). Для того, чтобы оценить эту трудность, предположим, что мы хотим ограничиться по m и по n всего четырьмя гармониками, т. е. решать задачу для самых крупномасштабных волн. Коэффициенты $L_{n_1 n_2 n}^{m_1 m_2 m}$ зависят от шести индексов. Если каждый индекс принимает четыре значения, то придется хранить в памяти ЭВМ 4096 коэффициентов. Если взять по пять гармоник, то потребуется хранить уже 15 625 коэффициентов. Таким образом, без дополнительных сведений о структуре коэффициентов $L_{n_1 n_2 n}^{m_1 m_2 m}$ нельзя реализовать даже простейшие задачи. Имеется несколько возможностей обойти эту трудность. Наиболее очевидным представляется учет того, что коэффициенты $K_{n_1 n_2}^{m_1 m_2}$ содержат произведения присоединенных полиномов Лежандра P_m^n и их производных. Поскольку эти произведения выражаются через P_m^n , хотя и с другими индексами, можно попытаться теоретически произвести эти преобразования и, используя ортогональность P_m^n , найти явные выражения для коэффициентов $L_{n_1 n_2 n}^{m_1 m_2 m}$. При этом число коэффициентов $L_{n_1 n_2 n}^{m_1 m_2 m}$ должно резко сократиться, так как многие из них должны быть равны нулю вследствие ортогональности. К сожалению, полиномы P_m^n не имеют удобной аналитической формулы умножения, для них имеется только формула типа (29). Поэтому этот путь оказывается для практических целей нереализуемым.

Другая возможность заключается в учете свойств ортогональности, хотя бы частично, только для тригонометрических функций. В самом деле, коэффициенты $L_{n_1, n_2, n}^{m_1, m_2, m}$ можно представить в форме двойного интеграла

$$L_{n_1, n_2, n}^{m_1, m_2, m} = \frac{n_2(n_2 + 1)}{a^2} \int_0^{2\pi} e^{i(m_1 + m_2)\lambda} e^{im\lambda} d\lambda \times \\ \times \int_0^1 \left(m_2 P_{m_2}^{n_2} \frac{dP_{m_1}^{n_1}}{dx} - m_1 P_{m_1}^{n_1} \frac{dP_{m_2}^{n_2}}{dx} \right) dx. \quad (12)$$

Учитывая ортогональность тригонометрических функций, легко установить, что

$$L_{n_1, n_2, n}^{m_1, m_2, m} = 0 \text{ при } m \neq m_1 + m_2. \quad (13)$$

Ясно, что это равенство позволяет существенно сократить число коэффициентов $L_{n_1, n_2, n}^{m_1, m_2, m}$, отличных от нуля и подлежащих хранению. Поскольку второй интеграл, входящий в произведение (12), тоже в значительном количестве случаев обратится в нуль, так как интегрируемое выражение представляется как сумма произведений P_m^n с разными индексами, то можно установить еще ряд ограничений на индексы n_1, n_2, n , когда не нужно запоминать $L_{n_1, n_2, n}^{m_1, m_2, m}$. Такие ограничения в совокупности с (13) называются правилами отбора. Если учесть все известные в настоящее время правила отбора, то можно существенно сократить число коэффициентов, подлежащих вычислению и хранению. Например, для пяти гармоник вместо 15 625 коэффициентов необходимо хранить только 3125. Метод решения задачи (10) с помощью коэффициентов, определенных по (11) при учете всех правил отбора называется методом коэффициентов взаимодействия.

Этот метод имеет широкое распространение ввиду большой точности, с которой получается решение. Он позволяет избежать многих трудностей, с которыми исследователь сталкивается, применяя метод сеток, например, не возникает нелинейной неустойчивости решения, вычислительной дисперсии волн и амплитудной ошибки приближенного дифференцирования. Для сеточных методов эти ошибки могут быть очень велики.

Использование спектрального подхода позволяет получить решение уравнения вихря с сохранением ряда нелинейных интегральных характеристик (кинетической энергии, момента, квадрата вихря). Благодаря такой высокой точности и отличным консервативным свойствам, приближенное решение уравнения вихря в спектральной форме методом коэффициентов взаимодействия нашло практическое применение при прогнозе H_{500} на срок до

пяти суток в ГМЦ СССР с помощью спектральной модели, разработанной С. А. Машковичем и И. Л. Вейль. В этой модели используются сферические гармоники с $|m| \in [0, 10]$ и $n - m \in [0, 10]$. При этом вычисляются всего 8323 коэффициента взаимодействия. Результаты расчетов по этой модели позволили уяснить многие закономерности эволюции динамики атмосферы.

Рассмотрим другой вариант спектрального метода, снова используя уравнение вихря. Одно из первых упрощений метода коэффициентов взаимодействия было предложено А. Робером. Он более полно использовал возможности метода Галеркина и предложил искать решение уравнения вихря не в форме разложения по сферическим гармоникам (3), а в форме разложения по функциям

$$R_p^m = (\cos \theta)^p (\sin \theta)^{|m|} e^{im\lambda}. \quad (14)$$

Эти функции называют теперь функциями Робера. Они имеют удобные формулы для умножения друг на друга, вследствие чего позволяют в явном виде выписать формулы для вычисления коэффициентов взаимодействия. Таким образом, отпадает необходимость хранить массивы этих коэффициентов, хотя нужно их вычислять в зависимости от n и m каждый раз, когда они используются, что приводит к быстрому росту объема расчетов с ростом числа гармоник Робера, применяемых в разложении.

Вторым видоизменением спектрального метода, нашедшим широкое распространение в настоящее время, является метод спектрально-сеточного преобразования. В его основе лежит учет того факта, что вместо полного перехода в нелинейном члене к спектральной форме, как это сделано в (10), можно, зная функцию тока ψ в спектральной форме (3), вычислить ее лапласиан с учетом свойств сферических гармоник, а затем вернуться к представлению якобиана $(\psi, \nabla^2 \psi)$ как сеточной функции, просуммировав соответствующие ряды Фурье. Зная якобиан, как функцию географических координат узла сетки, можно разложить его по сферическим гармоникам, найти их амплитуды F_{mn} и тем самым определить спектральную форму якобиана не по формулам (8), а в виде ряда Фурье типа (3). Коэффициенты этого ряда F_{mn} можно найти в таком порядке:

$$F_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\psi, \nabla^2 \psi) e^{-im\lambda} d\lambda, \quad (15)$$

$$F_{mn} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F_m(x) P_m^n(x) dx. \quad (16)$$

Отметим, что численное интегрирование с учетом спектральной структуры $(\psi, \nabla^2\psi)$ можно осуществить с высокой точностью. Необходимость хранить коэффициенты взаимодействия при таком подходе отпадает.

Решение уравнения вихря с помощью спектрально-сеточного преобразования производится в два этапа:

а) зная на предыдущем шаге коэффициенты $\psi_{m,n}$, вычисляются коэффициенты F_{mn} для якобиана;

б) подставляя эти коэффициенты в уравнение (8), определяются $\psi_{m,n}$ на следующем временном слое.

Как выяснилось, такая процедура оказывается экономичнее метода коэффициентов взаимодействия и, поскольку использует сетку, позволяет решать более сложные задачи, чем уравнение вихря, сохраняя главные преимущества спектрального метода.

Прогностические возможности баротропного уравнения вихря на полусфере на срок до 10 суток были глубоко исследованы в цикле работ С. А. Машковича и И. Л. Вейль. Ими были проведены многообразные численные эксперименты по изучению нелинейных взаимодействий, оценено влияние на прогноз различных типов ошибок в исходной информации, рассмотрена роль горизонтального разрешения при прогнозе на срок около недели.

Применение спектрального метода в баротропной модели, основанной на полных уравнениях

Применение спектрального метода в задаче численного прогноза целесообразно, как показано в предыдущем параграфе, во-первых, вследствие отсутствия ошибок при вычислении производных в этом методе, и во-вторых, вследствие достаточно простого учета естественных краевых условий на сфере или полусфере. Однако, практика численного прогноза погоды показала, что фильтрованные модели прогноза, примером которых служит баротропное уравнение вихря, рассмотренное в предыдущем параграфе, имеют некоторые систематические ошибки. Вследствие этого в настоящее время большая часть оперативных прогностических моделей основана на полных уравнениях.

Распространение спектрального метода на случай полных уравнений не является тривиальным. Мы ограничимся анализом трудностей и демонстрацией возможных путей их преодоления на примере уравнений «мелкой воды», имеющих вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \left(l + \frac{u}{a} \operatorname{ctg} \theta \right) v + \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \left(l + \frac{u}{a} \operatorname{ctg} \theta \right) u + \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{a \sin \theta} \left[\frac{\partial u \Phi}{\partial \lambda} + \frac{\partial (\Phi v \sin \theta)}{\partial \theta} \right] = 0. \quad (3)$$

Обозначения в этих уравнениях являются общепринятыми.

Краевыми условиями для геопотенциала Φ являются требование периодичности по λ , а также ограниченности его у полюсов (для случая полусферы обычно требуется обращение в нуль производной по θ от Φ). К сожалению, краевые условия для u и v сформулировать не так просто. Конечно, требование периодичности по λ остается для них в силе. Однако, полюса сферической системы координат являются для составляющих скорости особыми точками. Вектор ветра в районе полюса в естественных условиях является непрерывным. Но в силу особенностей сферической системы координат у полюсов составляющие векторов имеют разрыв.

Естественно, что эта особенность легко устранима, и при использовании метода сеток для определения составляющих скорости у полюса используют соображения гладкости поля и строят интерполяционные формулы. Однако, если разлагать составляющие скорости в ряды Фурье, то наличие особенности у полюса приводит к тому, что такие ряды будут сходиться очень медленно, т. е. для описания полей может потребоваться очень много членов ряда. Именно в этом состоит первая трудность применения спектральных методов для решения полных уравнений.

Другой трудностью при применении спектрального метода является выбор наилучшего количества спектральных компонент для представления переменных модели. Выбор количества спектральных компонент, или, как обычно говорят, решение проблемы усечения бесконечных рядов Фурье, является при численном прогнозе по полным уравнениям исключительно важным. Прежде всего, это обусловлено тем, что полные уравнения описывают не только медленные атмосферные погодообразующие процессы, но и быстрые их перестройки, имеющие природу гравитационных волн. Если взять слишком много компонент в спектральном представлении, то для устойчивости интегрирования по времени потребуются брать слишком малый временной шаг, и метод потеряет экономичность. Если взять небольшое число компонент, то при численном интегрировании по времени не будет происходить переход кинетической энергии от длинных волн к коротким. Кинетическая энергия будет распространяться по спектру до самых малых, еще разрешенных в модели компонент, а затем, как бы отражаясь, будет от них передаваться назад по спектру к более длинным. Таким образом, нарушенный процесс переноса кинетической энергии по спектру приведет к малокомпонентной модели к неправильному описанию амплитуд всех длин волн, т. е. искажению динамического равновесия, а, значит, к систематическим ошибкам описания климатического состояния.

В настоящее время вопросы, связанные с особенностью у полюса и со спектральным усечением, исследованы достаточно подробно. Ниже будет продемонстрирован лишь один из суще-

ствующих вариантов, разработанный применительно к задаче (1)–(3) Боурком.

Для того, чтобы обойти трудность, связанную с особенностью у полюса, можно перейти к представлению кинематики течения с помощью потенциала χ и функции тока ψ , введя их соотношениями:

$$u = \frac{1}{a \sin \theta} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \lambda} - \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right), \quad (4)$$

$$v = \frac{1}{a \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \sin \theta \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right). \quad (5)$$

С учетом этих представлений получим для относительного вихря Ω и дивергенции D выражения;

$$\Omega = \frac{1}{a \sin \theta} \left(\frac{\partial \sin \theta u}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial \lambda} \right) = \nabla^2 \psi, \quad (6)$$

$$D = \frac{1}{a \sin \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v \sin \theta}{\partial \theta} \right) = \nabla^2 \chi. \quad (7)$$

Обычным способом путем перекрестного дифференцирования уравнений (1) и (2) и составления нужных линейных комбинаций можно получить уравнения переноса абсолютного вихря и дивергенции:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\nabla \cdot \eta \vec{V}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \vec{K} \cdot \nabla \times \eta \vec{V} - \nabla^2 \left(\frac{\vec{V}^2}{2} + \Phi' \right), \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = -\nabla \cdot \Phi' \vec{V} - \Phi' D, \quad (10)$$

где $\Phi + \Phi' = \Phi$ — геопотенциал свободной поверхности, а $\eta = \nabla^2 \psi + 2\omega \cos \theta$ — абсолютный вихрь.

Переход к выражению кинематических свойств потока через потенциал и функцию тока обычно не производится, если планируется решать задачу методом сеток, поскольку обращение операторов Лапласа в методе сеток приводит к весьма времяемким итерационным процедурам. Но если для решения задачи планируется применить спектральный метод, то проблема перехода от функции к ее лапласиану и обратно решается элементарно.

Действительно, если искать решения χ и ψ в виде сумм Фурье по сферическим гармоникам, то есть в виде

$$\chi(t, \theta, \lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \chi_{mn}(t) y_{nm}, \quad (11)$$

$$\psi(t, \theta, \lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \psi_{mn}(t) y_{nm}, \quad (12)$$

то вихрь и дивергенция потока могут быть найдены по формулам:

$$\eta = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \eta_{mn} y_{nm}, \quad (13)$$

$$D = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} D_{mn} y_{nm}, \quad (14)$$

где

$$\eta_{mn} = \begin{cases} \frac{-n(n+1)}{a^2} \psi_{mn} & \text{при } (m, n) \neq (0, 1), \\ -\frac{2\omega}{\sqrt{3}} - \frac{n(n+1)}{a^2} \psi_{mn} & \text{при } (m, n) = (0, 1), \end{cases} \quad (15)$$

$$D_{mn} = -\frac{n(n+1)}{a^2} \chi_{mn}. \quad (16)$$

Эти формулы следуют из свойства сферических гармоник. Кроме этого, учтено, что кориолисов вихрь представляется просто полиномом Лежандра, а значит, входит в η_{mn} только при $m=0$, $n=1$.

Сняв проблему обращения оператора Лапласа, введение χ и ψ одновременно позволяет ликвидировать особые точки на полюсах. Они являются скалярными функциями, и для их определения достаточно условия ограниченности у полюсов, которому сферические гармоники удовлетворяют по построению.

Проследить, как использование ψ и χ позволяет ликвидировать проблему особых точек, можно в данном конкретном примере. Составляющие скорости имеют у полюса разрыв. Однако, функции

$$\hat{u} = u \sin \theta = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \chi}{\partial \lambda} - \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right), \quad (17)$$

$$\hat{v} = v \sin \theta = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \sin \theta \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right), \quad (18)$$

уже не имеют разрыва, стремясь у полюсов к нулю. Использование формул дифференцирования сферических гармоник (36) и (37) стр. 38 позволяет получить при разложении \hat{u} и \hat{v} в ряды

Фурье по сферическим функциям простые формулы для определения коэффициентов разложения \hat{u}_{mn} , \hat{v}_{mn}

$$\hat{U}_{mn} = \frac{1}{a} [R_{mn} (n-1) \psi_{m, n-1} + im \chi_{mn} - R_{m, n+1} (n+2) \psi_{m, n+1}], \quad (19)$$

$$\hat{V}_{mn} = \frac{1}{a} [R_{mn} (1-n) \chi_{m, n-1} + im \psi_{mn} - R_{m, n+1} (n+2) \chi_{m, n+1}], \quad (20)$$

где

$$R_{m, n} = \sqrt{\frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1}}. \quad (21)$$

Учитывая связь между коэффициентами разложения η_{mn} и D_{mn} с ψ_{mn} и χ_{mn} , нетрудно получить простые алгебраические связи между \hat{U}_{mn} , \hat{V}_{mn} и η_{mn} , D_{mn} . Но если такие связи установлены, то нет необходимости вообще использовать в расчетах разрывные функции u и v или их медленно сходящиеся разложения в ряды. Действительно, проследим процедуру перехода от одного временного слоя к другому. Пусть в начальный момент определены вихрь и дивергенция и заданы η_{mn} , D_{mn} , Φ_{mn} . Тогда, используя формулы (15), (16) и (19), (20), можно найти все коэффициенты \hat{U}_{mn} и \hat{V}_{mn} . Зная эти коэффициенты, можно восстановить все нелинейные члены, входящие в уравнения (8)–(10) (линейные члены определить просто). Воспользовавшись описанным в предыдущем параграфе методом преобразования, по восстановленным в узлах сетки нелинейным членам с помощью специально подобранных и весьма точных формул численного интегрирования нелинейных членов. Используя последние в качестве известных правых частей, можно найти вихрь и дивергенцию на следующем временном слое по уравнениям типа:

$$\frac{d\eta_{mn}}{dt} = A_{mn}, \quad (22)$$

$$\frac{dD_{mn}}{dt} = B_{mn} + \frac{n(n+1)}{a^2} \Phi_{mn}, \quad (23)$$

$$\frac{d\Phi_{mn}}{dt} = C_{mn} - \bar{\Phi} \delta_{mn}, \quad (24)$$

в которых A_{mn} , B_{mn} , C_{mn} — спектральные коэффициенты, полученные по сеточным значениям нелинейных членов уравнений (8)–(10).

Эти замечания показывают, что при использовании χ и ψ можно избежать специального рассмотрения особых точек у полюсов и построить достаточно эффективный расчетный метод.

В заключение этого параграфа следует остановиться лишь на способах усечения рядов Фурье, применяемых в таких моделях. До сих пор мы, в основном, не затрагивали вопроса о том, что уравнения в частных производных эквивалентны бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений для спектральных коэффициентов. То, что нам приходится на ЭВМ реализовывать лишь частичное решение этой системы, ограничиваясь конечным числом уравнений, порождает основную погрешность спектрального метода.

По ходу изложения ясно, что при усечении бесконечного комплексного ряда Фурье типа (32), стр. 37 следует оставлять при усечении по меридиональному волновому числу компоненты, содержащие одинаковые по модулю, но противоположные по знаку величины m . Это необходимо, поскольку мы отыскиваем вещественное, а не комплексное по природе решение. Именно поэтому в конечной сумме (3), использованной на стр. 39 этой главы, суммирование по m проводится от $-M$ до M .

При выборе границы по второму индексу n в настоящее время наиболее приемлемым считается так называемое «треугольное» усечение. В этом случае верхняя граница суммирования по n не изменяется в зависимости от индекса m . Более того, верхние границы по m и по n принимаются одинаковыми и, таким образом, функция отыскивается в форме:

$$f(t, \lambda, \theta) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^M f_{mn}(t) y_{mn}(\theta, \lambda). \quad (25)$$

Треугольное усечение обладает рядом полезных свойств, например, количество членов в сумме (25) не изменится, если выбрать другую сумму сферических координат. В настоящее время в численных моделях атмосферы принимают $M = 15-18$, хотя для целей прогноза на декаду и пентаду в ГМЦ СССР с успехом применялось и $M = 10$.

Квазисоленоидальная модель Е. Н. Блиновой

В заключение рассмотрим прогностическую модель, в которой, пожалуй, впервые был удачно применен оригинальный метод решения прогностического уравнения с помощью разложений зависимых переменных в ряды. Речь идет о линейной квазисоленоидальной полусферной модели, разработанной в 1943 г. Е. Н. Блиновой.

В качестве прогностического уравнения в этой модели используется баротропное уравнение вихря скорости в сферических

координатах, записанное применительно к соленоидальному движению на среднем (бездивергентном) уровне

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + (\psi, \nabla^2 \psi) + \frac{2\omega}{a^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0, \quad (1)$$

где

$$(\psi, \nabla^2 \psi) = \frac{1}{a^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \lambda} \right).$$

Уравнение (1) линеаризуется относительно западно-восточного переноса, скорость которого $v_\lambda = \alpha a \sin \theta$ (α — индекс циркуляции). Функция тока задается в виде

$$\psi = -a^2 \alpha \cos \theta + \psi'(t, \theta, \lambda), \quad (2)$$

а составляющие скорости определяются в этом случае соотношениями

$$v_\theta = -\frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \psi'}{\partial \lambda}, \quad v_\lambda = \alpha \cdot a \cdot \sin \theta + \frac{1}{a} \frac{\partial \psi'}{\partial \theta}. \quad (3)$$

Таким образом, движение задается в виде малых возмущений, наложенных на западно-восточный перенос.

В результате подстановки выражения (2) в уравнение (1) и пренебрежения малыми членами (линеаризации) получается линеаризованное уравнение вихря скорости

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi'}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \nabla^2 \psi'}{\partial \lambda} + 2(\alpha + \omega) \frac{\partial \psi'}{\partial \lambda} = 0. \quad (4)$$

Для решения уравнения (4) Е. Н. Блинова применяет метод Фурье. Решение уравнения (4) ищется в виде

$$\psi' = f_m e^{i(m\lambda + \sigma t)}, \quad (5)$$

где m — волновое число по долготе; σ — частота. Так как

$$\nabla^2 \psi' = \nabla^2 (f_m e^{i(m\lambda + \sigma t)}) = e^{i(m\lambda + \sigma t)} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{df_m}{d\theta} - \frac{m^2}{\sin \theta} f_m \right) \right],$$

то решение (5) будет удовлетворять уравнению (4), если

$$(\sigma + \alpha m) \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{df_m}{d\theta} - \frac{m^2}{\sin \theta} f_m \right) \right] + 2(\alpha + \omega) m f_m = 0.$$

Ограниченное решение для всей сферы будет иметь место, если

$$2 \frac{\alpha + \omega}{\sigma + \alpha m} \cdot m = n(n+1),$$

где n — целое число.

Из (5) следует, что

$$\sigma = \sigma_n^m = -\alpha m + \frac{2(\alpha + \omega)m}{n(n+1)}. \quad (5')$$

В этом случае

$$f_m = C_n^m P_n^m(\cos \theta),$$

где C_n^m — постоянная, а P_n^m — присоединенный полином Лежандра.

Одночленное решение уравнения (4) для одной гармоники имеет вид

$$\psi' = C_n^m P_n^m(\cos \theta) e^{im\lambda - imt \left(\alpha - 2 \frac{\alpha + \omega}{n(n+1)} \right)}$$

Поле геопотенциала Φ представляется в виде

$$\Phi = \alpha a^2 \left(\omega + \frac{\alpha}{2} \right) \sin^2 \theta + \Phi'(t, \theta, \lambda) + \text{const}. \quad (6)$$

На основе соотношений (3), (5) и уравнения движения вдоль круга широт

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + v_0(\Omega + 2\omega \cos \theta) = - \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\Phi + \frac{v_\theta^2 + v_\lambda^2}{2} \right)$$

$\left(\Omega = \frac{1}{a^2} \nabla^2 \psi \right)$ после отбрасывания малых нелинейных членов получается уравнение, связывающее ψ' и Φ'

$$\sin \theta \frac{\partial^2 \psi'}{\partial \theta \partial t} - 2(\alpha + \omega) \cos \theta \frac{\partial \psi'}{\partial \lambda} = - \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\Phi' + \alpha \sin \theta \frac{\partial \psi'}{\partial \theta} \right). \quad (7)$$

С помощью уравнения (7) решению (5) ставится в соответствие одночленное решение относительно Φ'

$$\Phi' = 2(\alpha + \omega) C_n^m H_n^m(\cos \theta) e^{im\lambda - imt \left(\alpha - 2 \frac{\alpha + \omega}{n(n+1)} \right)},$$

где

$$H_n^m(\cos \theta) = \frac{n(n-m+1)}{(n+1)(2n+1)} P_{n+1}^m(\cos \theta) + \frac{(n+1)(n+m)}{n(2n+1)} P_{n-1}^m(\cos \theta).$$

Решение задачи прогноза осуществляется следующим образом. Начальное поле Φ' представляется на всем северном полушарии рядом по сферическим функциям

$$\Phi'_{t=0}(\theta, \lambda) = \sum_{n=m}^N \sum_{m=1}^M (A_n^m \cos m\lambda + A_n'^m \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta). \quad (8)$$

Рассматриваемая задача линейна. Поэтому из одночленных решений составляется решение для Φ' в виде ряда

$$\Phi'(t, \theta, \lambda) = \sum_{n=m}^N \sum_{m=1}^M H_n^m(\cos \theta) [C_n^m \cos(m\lambda + \sigma_n^m t) + C_n'^m \sin(m\lambda + \sigma_n^m t)], \quad (9)$$

где C_n^m и $C_n'^m$ — произвольные постоянные.

Постоянные C_n^m и $C_n'^m$ выражаются через коэффициенты разложения начального поля $\Phi'_{t=0}$, т. е. через A_n^m и $A_n'^m$. Для этого в разложении (9) полагается $t=0$, и с помощью соотношения для H_n^m оно преобразуется в ряд по присоединенным полиномам Лежандра

$$\begin{aligned} \Phi'_{t=0} = \sum_{n=m}^N \sum_{m=1}^M \left\{ \left[C_{n-1}^m \frac{(n-1)(n-m)}{n(2n-1)} + \right. \right. \\ \left. \left. + C_{n+1}^m \frac{(n+2)(n+m+1)}{(n+1)(2n+3)} \right] \cos m\lambda + \left[C_{n-1}'^m \frac{(n-1)(n-m)}{n(2n-1)} + \right. \right. \\ \left. \left. + C_{n+1}'^m \frac{(n+2)(n+m+1)}{(n+1)(2n+3)} \right] \sin m\lambda \right\} P_n^m(\cos \theta). \quad (10) \end{aligned}$$

Путем почленного сопоставления рядов (10) и (8) получается система уравнений, связывающих коэффициенты A_n^m и $A_n'^m$ с постоянными C_n^m и $C_n'^m$

$$\begin{aligned} C_{n-1}^m \frac{(n-1)(n-m)}{n(2n-1)} + C_{n+1}^m \frac{(n+2)(n+m-1)}{(n+1)(2n+3)} = A_n^m, \\ C_{n-1}'^m \frac{(n-1)(n-m)}{n(2n-1)} + C_{n+1}'^m \frac{(n+2)(n+m-1)}{(n+1)(2n+3)} = A_n'^m. \end{aligned} \quad (11)$$

С помощью этой системы последовательно, начиная с младших номеров n и соответствующих им волновых чисел m (см. формулу (5')), определяются C_n^m и $C_n^{\prime m}$ через A_n^m и $A_n^{\prime m}$.

Полученные коэффициенты C_n^m и $C_n^{\prime m}$ используются для вычисления прогностических значений $\Phi'(t)$ с помощью ряда (9). При этом фиксируется момент времени t , на который дается прогноз. После того как рассчитаны прогностические значения $\Phi'(t, \theta, \lambda)$, с помощью соотношения (6) вычисляются прогностические значения геопотенциала $\Phi(t, \theta, \lambda)$.

Прогноз геопотенциала AT_{500} при числе членов разложения, соответствующих значениям $n \leq 20$, $m \leq 12$ с учетом только членов с нечетными $n - m$ на сроки до 10 суток оказываются вполне удовлетворительными. Хорошо прогнозируются местоположение и интенсивность основных барических образований. Наблюдающаяся сглаженность барического рельефа на прогностических картах в известной мере объясняется ограниченным числом членов разложений в ряду (9), которое использовалось. Увеличение числа членов разложения способствует устранению сглаженности прогностических полей.

Следует обратить внимание на то, что рассмотренная модель квазисоленоидальная, но позволяет решать непосредственно задачу прогноза геопотенциала Φ' или функции тока (ψ').

В последнем случае вместо разложения (9) используется разложение для ψ'

$$\psi'(t, \theta, \lambda) = \frac{1}{2(\alpha + \omega)} \sum_{m=1}^M \sum_{n=m}^N [C_n^m \cos(m\lambda + \sigma_n^m t) + C_n^{\prime m} (m\lambda + \sigma_n^m t) P_n^m(\cos \theta)], \quad (12)$$

в котором C_n^m и $C_n^{\prime m}$ определяются из системы (11) по значениям коэффициентов разложения A_n^m и $A_n^{\prime m}$ для поля $\Phi_{t=0}$ в ряд (8). Прогностическое поле $\psi(t, \theta, \lambda)$ рассчитывается с помощью соотношения (2).

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение	3
Оперативные прогностические модели, основанные на конечно-разностном методе интегрирования полных уравнений	5
Модель Гидрометцентра (ГМЦ) СССР	5
Модель Национального метеорологического центра (НМЦ) США	11
Модель метеорологической службы Великобритании	18
Модель службы погоды ФРГ	23
Спектральный метод решения задач численного прогноза погоды	27
Некоторые сведения о решении задачи прогноза с помощью рядов	27
О свойствах базисных функций	32
Применение спектрального метода для решения баротропного уравнения вихря	38
Применение спектрального метода в баротропной модели, основанной на полных уравнениях	43
Квазисолеоидальная модель Е. Н. Блиновой	48

Доп. план 1983 г. Поз. 71.

А. М. ДАНОВИЧ, Б. Д. ПАНИН, И. Н. РУСИН

Современные прогностические модели, основанные на полных уравнениях

Конспект лекций

Редактор *И. Г. Максимова*

Корректор *Л. В. Ломакина*

Сдано в набор 03.04.83. Подписано в печать 25.08.83. М-38577.
Формат бумаги 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 2. Лит. гарн. Печать высокая.
Печ. л. 3,3. Уч.-изд. л. 3,0. Тираж 500 экз. Зак. 179. Цена 25 коп.

ЛПИ им. М. И. Калинина, 195251, Ленинград, Политехническая ул., 29.
Типография ВОК ВМФ