

**Р.П. Репинская, О.Г. Анискина**

**КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ  
В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ  
АТМОСФЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ**

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением по образованию в области гидрометеорологии в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению «Гидрометеорология» и специальности «Метеорология»*



Санкт-Петербург

2002

УДК 551.509.313

*Рецензенты: С.И. Мазовер, канд. физ.-мат. наук (Военно-морской институт),  
Б.Е. Шнееров, канд. физ.-мат. наук (Главная Геофизическая обсерватория им. А.И. Воейкова)*

Рассматриваются математические аспекты построения и анализа конечно-разностных схем интегрирования прогностических уравнений гидротермодинамики, в том числе схем, сохраняющих интегральные свойства простейших инерционных моделей атмосферы.

Материал излагается в соответствии с действующей программой дисциплины «Гидродинамические прогнозы», читаемого студентам метеорологам, экологам и измерителям очной и заочной форм обучения, а также может быть полезен всем, интересующимся соответствующими проблемами.

ISBN 5-86813-030-8

- © Р.П. Репинская, О.Г. Анискина, 2002
- © Российский государственный гидрометеорологический университет (РГГМУ), 2002

## ВВЕДЕНИЕ

При решении различных задач геофизической гидродинамики с помощью приближенных методов (например, численном прогнозе погоды с требуемой заблаговременностью, моделировании общей циркуляции атмосферы и климата и др.) приходится оперировать со скалярными и векторными случайными полями метеорологических величин (функций).

Способы аналитической аппроксимации (представления) полей могут быть различными. Тип аппроксимации определяет выбор численного метода решения системы уравнений атмосферной модели.

Существует два типа аппроксимации пространственных распределений метеорологических величин и, соответственно, два метода численного интегрирования моделей.

Первый тип базируется на методе сеток, который может быть реализован на основе эйлерова или лагранжева подходов.

При эйлеровом подходе используется закрепленная в пространстве расчетная сетка точек, охватывающая рассматриваемую область прогноза. При записи системы уравнений модели в качестве независимых переменных в этом случае выбираются пространственные координаты и время. Иначе, дискретные значения метеорологических величин (т.е. зависимых переменных) задаются в начальный момент времени на множестве узлов (точек) расчетной сетки (именуемой также разностной сеткой или разностной решеткой), а затем вычисляются для последующих (будущих) моментов времени в этих же узлах.

При численном интегрировании лагранжевой системы уравнений приходится преодолевать серьезные трудности, поэтому чаще строят так называемые полулагранжевы методы, когда часть узлов сетки (или все узлы) движутся вместе с воздушными частицами по линиям тока. Такие методы применяются, например, для прогноза перемещения тропических возмущений – тайфунов, обладающих огромной разрушительной силой. При этом, учитывая пространственные масштабы тайфунов и физические процессы, протекающие в них, шаг движущейся сетки выбирают в несколько раз меньшим, чем шаг закрепленной сетки, на которой интегрируются уравнения для более крупномасштабных (синоптически значимых) атмосферных возмущений (таких, как волны Россби).

Результаты численных экспериментов, полученные в последние годы, показывают, что перспективно также использование подстраиваемых (в зависимости от градиентности моделируемых полей метеорологических величин) сеток.

Другой подход к интегрированию атмосферных моделей базируется на использовании проекционных методов, в рамках которых предусматривается аппроксимация полей метеорологических величин рядами по априори заданным (т.е. неслучайным) базисным функциям, зависящим только от пространственных координат. Названные функции должны обладать рядом специфических свойств, таких, как свойство ортогональности (или ортонормированности), свойство полноты, свойство замкнутости. Естественно, что для любой атмосферной функции аппроксимирующий ряд по базисным функциям должен быть сходящимся. Желательно также, чтобы базисные функции были собственными решениями некоторого дифференциального оператора, воздействующего на метеорологические величины на сфере, и отвечали естественным для сферы условиям периодичности.

Базисные функции могут быть скалярными (например, тригонометрические полиномы, полиномы Лежандра, полиномы Чебышева и др.), векторными (например, трехмерные функции Хафа) и даже смешанными. Ряды, аппроксимирующие поля метеорологических величин по базисным функциям, подставляются затем в уравнения атмосферной модели. В этом случае исходная система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая эволюцию барико-циркуляционных и термических полей, сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение названных уравнений относительно коэффициентов разложения, являющихся случайными функциями времени, ищется спектральным методом.

В рамках атмосферной модели возможно также сочетание спектрального и конечно-разностного подходов.

Выбор того или иного метода интегрирования атмосферной модели (т.е. подхода к решению) определяется формой области прогноза (так как от нее зависит тип требуемых базисных функций), характером рассматриваемого поля (влияющим на точность спектральной или конечно-разностной аппроксимации) и другими факторами.

В данной книге рассматриваются техника применения метода се-

ток, проблемы и трудности, связанные с интегрированием линейных и нелинейных эволюционных уравнений с помощью различных схем, реализующих метод шагов по времени, и способы их преодоления.

Книга рассчитана на студентов (бакалавров IV курса и специалистов-инженеров V курса), магистров и аспирантов, обучающихся по направлению гидрометеорология, а также на всех интересующихся вычислительными аспектами гидродинамического моделирования и прогнозирования атмосферных процессов.

# Глава 1. МЕТОД СЕТОК И АППРОКСИМАЦИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

## 1.1. Метод сеток

Пусть в области  $D$  с границей  $\Gamma$  требуется найти решение дифференциальной краевой задач

$$LU = F. \quad (1.1)$$

Здесь  $L$  – некоторый дифференциальный оператор, действующий на физическую функцию  $U$  (например,  $\partial U/\partial t$ , где  $t$  – время;  $\partial U/\partial t + C \partial U/\partial x$ , где  $C = \text{const}$ ;  $\partial U/\partial t + U \partial U/\partial x$ ), удовлетворяющую уравнению (1.1) внутри области  $D$ , а на границе  $\Gamma$  – условию

$$U = g(x, y),$$

где  $g(x, y)$  – заданная непрерывная функция.

Сформулированную задачу называют задачей Дирихле для дифференциального (непрерывного, континуального) уравнения (1.1).

Сущность метода сеток состоит в следующем.

1) На рассматриваемой области непрерывного изменения аргументов  $x, y$  вводится дискретное множество точек, принадлежащих  $D + \Gamma$ , именуемое сеточной областью (разностной сеткой, разностной решеткой). Каждая точка представляет собой узел сетки. В данном случае множество точек образуется пересечением семейства двух прямых (осей  $x$  и  $y$ ) с координатами

$$x = m \Delta x, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M;$$

$$y = j \Delta y, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm J.$$

Здесь  $\Delta x, \Delta y$  – шаги сетки по осям  $x$  и  $y$  соответственно;  $m, j$  – номера узлов.

Если  $\Delta x = \Delta y = \Delta S$ , то рассматривается симметричная (равномерная, регулярная) сетка, в противном случае – несимметричная.

2) Выделив граничные и внутренние узлы области, заменяют частные производные во внутренних узлах сетки конечно-разностными (сеточными) аналогами (отношениями), а в точках границы  $\Gamma$  значения функции  $U(x, y)$  находят из дополнительного граничного условия или уравнения.

Функцию, областью определения которой является разностная сетка, называют сеточной функцией.

Подставив конечно-разностные аналоги частных производных в дифференциальную задачу, получают систему конечно-разностных (линейных алгебраических, сеточных, конечно-разностных) уравнений, именуемую разностной схемой.

Замена непрерывной информации, содержащейся в точном решении дифференциального уравнения, дискретными значениями называется дискретизацией пространства и времени.

Простые алгебраические уравнения, включающие неизвестные значения зависимой переменной, т.е. физической (метеорологической) функции (величины) в узловых точках расчетной области, называют также дискретным (сеточным) аналогом дифференциального уравнения.

3) Решают замкнутую (с помощью граничных условий) систему сеточных уравнений и получают значения искомой функций в узлах расчетной сетки.

Рассмотрим этапы сеточного метода.

Пусть в пространственно-временной области  $-\infty < x < \infty, t \geq 0$  требуется найти функцию  $U(x, t)$ , удовлетворяющую при  $t > 0$  одномерному линейному эволюционному (прогностическому) дифференциальному уравнению

$$\partial U / \partial t + C \partial U / \partial x = F(x, t), \quad C = \text{const}, \quad (1.2)$$

а при  $t = 0$  принимающую заданные начальные значения (условия)

$$U(x, 0) = G(x). \quad (1.3)$$

Точное решение сформулированной задачи дается формулой

$$U(x, t) = G(x - Ct) + \int_0^t F(x - Ct + Ct', t') dt', \quad (1.4)$$

где  $t'$  — переменная интегрирования.

Для построения численного (приближенного) решения задачи (1.2)–(1.3) воспользуемся дискретной пространственно-временной сеткой (рис. 1.1):

$$\begin{aligned} x &= m \Delta x, m = 0, 1, 2, \dots, M; \\ t^i &= \tau \Delta t, \tau = 0, 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.5)$$

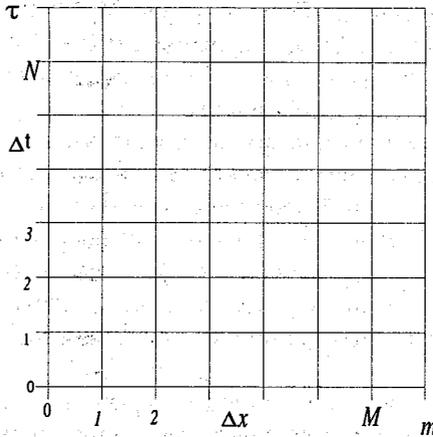


Рис. 1.1.  
Пространственно-временная сетка.

Здесь  $\Delta t$  – шаг интегрирования уравнения по времени;  $\tau$  – шаг сетки на сегменте временной числовой оси  $[0\Delta t, N\Delta t]$  (говорят также: номер шага интегрирования, временной слой точек или, иначе, уровень по времени).

Вместо непрерывных функций  $U(x, t)$ ,  $G(x)$ ,  $F(x, t)$  будем рассматривать сеточные (дискретные) функции  $U_m^\tau$ ,  $G_m$ ,  $F_m^\tau$ , т.е. числовые последовательности, соответствующие узлам используемой пространственно-временной сетки  $x_m, t^\tau$ .

Частные производные в дифференциальном уравнении заменим выбранными конечно-разностными (сеточными) аналогами и будем интегрировать систему сеточных уравнений методом шагов по времени на заданном временном интервале, т.е. с требуемой заблаговременностью (упреждением). В результате получим прогностические значения функции во всех узлах области построения решения, кроме граничных узлов.

## 1.2. Конечно-разностная аппроксимация производных по горизонтальным пространственным переменным и по времени

Используя приближенное представление производной по пространству в виде

$$\partial U/\partial x \approx [U(x) - U(x - \Delta x)]/\Delta x = \Delta U/\Delta x, C \geq 0$$

или

$$\partial U/\partial x \approx [U(x + \Delta x) - U(x)]/\Delta x = \Delta U/\Delta x, C < 0, \quad (1.6a)$$

получим направленные против потока (децентрированные, нецентральные) пространственные разности.

Направленные по потоку разности имеют следующий вид:

$$\partial U/\partial x \approx [U(x) - U(x - \Delta x)]/\Delta x = \Delta U/\Delta x, C < 0, \quad (1.6b)$$

$$\partial U/\partial x \approx [U(x + \Delta x) - U(x)]/\Delta x = \Delta U/\Delta x, C \geq 0.$$

В случае

$$\partial U/\partial x \approx [U(x + \Delta x) - U(x - \Delta x)]/2\Delta x = \Delta U/2\Delta x \quad (1.6в)$$

получим симметричные (центрированные, центральные) конечные разности.

Аналогично получают сеточные (дискретные) аналоги производных по времени:

$$\partial U/\partial t \approx [U(t + \Delta t) - U(t)]/\Delta t = \Delta U/\Delta t \quad (1.7a)$$

– направленные вперед по времени (т.е. в будущее) разности;

$$\partial U/\partial t \approx [U(t) - U(t - \Delta t)]/\Delta t = \Delta U/\Delta t \quad (1.7b)$$

– направленные назад по времени (в прошлое) разности;

$$\partial U/\partial t \approx [U(t + \Delta t) - U(t - \Delta t)]/2\Delta t = \Delta U/2\Delta t \quad (1.7в)$$

– центральные разности по времени.

Если конечно-разностное отношение используется для аппроксимации какой-либо производной, то **аппроксимация должна быть согласованной**, т.е. приближаться к точной производной при стремлении соответствующего шага пространственно-временной сетки к нулю:  $\Delta x \rightarrow 0$  или  $\Delta t \rightarrow 0$ .

**Ошибка конечно-разностного приближения** (иначе, трунка-

ционная ошибка) равна ошибке, которая имеет место при отбрасывании членов высоких порядков при разложении сеточной функции в ряд Тейлора в окрестности заданной точки  $m$  (или точки  $m, j$  в двумерном случае). Например, ошибка аппроксимации производной по пространству направленными разностями равна

$$\varepsilon = [U(x + \Delta x) - U(x)]/\Delta x - \partial U/\partial x = [(U(x) + U'(x)\Delta x/1! + U''(x)(\Delta x)^2/2! + \dots) - U(x)]/\Delta x - \partial U/\partial x = U''(x)\Delta x/2 + O[(\Delta x)^3] \dots, \quad (1.8a)$$

т.е. сумме членов, которые были отброшены в ряду Тейлора при формировании конечно-разностного приближения. В этой формуле штрихи обозначают порядок производных по переменной  $x$ .

Аналогичным образом для центральных разностей (1.6б) получим

$$\varepsilon = U'''(x)(\Delta x)^2/3! + O[(\Delta x)^5]. \quad (1.8б)$$

Самая низкая степень приращения аргумента, фигурирующая в выражении для ошибки  $\varepsilon$ , является порядком ( $k$ ) точности аппроксимации непрерывной производной выбранным сеточным аналогом.

Отношения (1.6а), (1.6б) и (1.7а), (1.7б) являются аппроксимациями первого порядка точности, так как в этом случае

$$O(\varepsilon) = O(\Delta x), \quad O(\varepsilon) = O(\Delta t).$$

Сеточные аналоги, полученные с помощью центральных разностей (1.6в) и (1.7в), обеспечивают второй порядок точности аппроксимации производных, т.е. соответственно

$$O(\varepsilon) = O[(\Delta x)^2] \text{ и } O(\varepsilon) = O[(\Delta t)^2].$$

*Резюме.* Точность аппроксимации производной повышается при увеличении порядка  $O[(\Delta x)^k, (\Delta t)^k]$ .

*Анонс.* Для повышения порядка точности аппроксимации производной можно привлечь данные в большем числе узлов, т.е. воспользоваться многоточечным сеточным аналогом. Покажем, каким образом это можно сделать, на примере первой производной функции  $U(x)$ , обладающей, как и поля основных метеорологических функций, свойством аналитичности.

*(Примечание.* Аналитичность функции  $U(x)$ , определенной в области  $D$  на комплексной плоскости  $C$ , означает, что в каждой точке  $x_0 \in D$  функция  $U(x)$  бесконечно дифференцируема и ее ряд Тейлора

сходится к ней в некоторой окрестности  $\pm \Delta x$  рассматриваемой точки.)

Представим функцию  $U(x \pm \Delta x)$  в окрестности точки  $x$  рядами Тейлора:

$$U(x + \Delta x) = U(x) + U'(x)\Delta x/1! + U''(x)(\Delta x)^2/2! + U'''(x)(\Delta x)^3/3! \dots,$$

$$U(x - \Delta x) = U(x) - U'(x)\Delta x/1! + U''(x)(\Delta x)^2/2! - U'''(x)(\Delta x)^3/3! \dots$$

и, вычитая второй ряд из первого, получим

$$U(x + \Delta x) - U(x - \Delta x) = 2U'(x)\Delta x + U'''(x)(\Delta x)^3/3.$$

Отсюда следует, что в произвольной точке  $m$  производная

$$(\partial U/\partial x)_m = (U_{m+1} - U_{m-1})/2\Delta x - U'''(x_m)(\Delta x)^2/3. \quad (1.9)$$

В выражении (1.9) представим третью производную  $U'''(x_m)$  с помощью центральных разностей, составленных из вторых производных на интервале  $2\Delta x$ :

$$U'''(x_m) \approx [U''(x_{m+1}) - U''(x_{m-1})]/2\Delta x. \quad (1.10)$$

Вторые производные аппроксимируем в (1.10) следующими отношениями:

$$U''(x_{m+1}) \approx [U(x_m) + U(x_{m+2}) - 2U(x_{m+1})]/(\Delta x)^2, \quad (1.11)$$

$$U''(x_{m-1}) \approx [U(x_m) + U(x_{m-2}) - 2U(x_{m-1})]/(\Delta x)^2,$$

в которых использовано сеточное представление первых производных с помощью центральных разностей на интервале  $\Delta x$ , т.е.

$$(\partial U/\partial x)_m \approx (U_{m+1/2} - U_{m-1/2})/\Delta x.$$

Иными словами, в этом случае привлекаются данные в точках  $m \pm 1/2$  (или, что то же самое,  $x_m \pm \Delta x/2$ ).

С учетом формул (1.10), (1.11) аппроксимация (1.9) принимает вид:

$$(\partial U/\partial x)_m \approx 2(U_{m+1} - U_{m-1})/3\Delta x - (U_{m+2} - U_{m-2})/12\Delta x. \quad (1.12)$$

Нетрудно убедиться в том, что отношение (1.12) обеспечивает четвертый порядок точности аппроксимации производной  $\partial U/\partial x$ , т.е.  $O(\varepsilon) = O[(\Delta x)^4]$ .

Приведем более сложный сеточный аналог:

$$\begin{aligned}
(\partial U/\partial x)_{ij} \approx & [8(U_{j+1,i} - U_{j-1,i})/2\Delta x + 4(U_{j+2,i} - U_{j-2,i})/4\Delta x - \\
& - 2(U_{j+1,i+2} - U_{j-1,i-2} + 2U_{j+2,i-1} - 2U_{j-2,i+1} + 2U_{j+2,i+1} - \\
& - 2U_{j-2,i-1} + U_{j+1,i-2} - U_{j-1,i+2})/2\sqrt{5}\Delta x + 8(U_{j+1,i+1} - \\
& - U_{j-1,i-1} + U_{j+1,i-1} - U_{j-1,i+1})/2\sqrt{2}\Delta x + (U_{j+2,i+2} - U_{j-2,i-2} + \\
& + U_{j+2,i-2} - U_{j-2,i+2})/2\sqrt{8}\Delta x]/24,
\end{aligned} \tag{1.13}$$

полученный Д. Иенсенем и Дж. Страудом посредством представления функции  $U$  в точке, расположенной от узла симметрии  $j, i$  на двумерной плоскости (см. рис. 1.2) на расстоянии  $h$  и  $r$  соответственно в направлениях  $x$  и  $y$ , с помощью двойного ряда Тейлора. Символическую запись такого ряда можно представить в следующем виде:

$$U_{h,r} = \exp [(r \partial/\partial x + h \partial/\partial y) U_{j,i}]$$

или, иначе,

$$U_{h,r} = \sum_{k=0,1,\dots,\infty} [(r \partial/\partial x + h \partial/\partial y)^k U_{j,i}].$$

Соотношение (1.13) дает ошибку

$$\varepsilon = U''''''(x)(\Delta x)^5/30 + O[(\Delta x)^7],$$

т.е. аппроксимирует производную с пятым порядком точности. Заметим, что на рис. 1.2 справа от узлов указаны весовые коэффициенты, с которыми берутся значения функции  $U(x)$  в этих узлах (NB! Все эти коэффициенты в соотношении (1.13) нужно умножить на  $1/24$ .)

*Резюме.* Чтобы выбранная алгебраическая аппроксимация была согласованной, она должна быть по крайней мере первого порядка точности.

Пусть теперь функция  $U(x)$  представляет собой синусоиду

$$U(x) = A \sin(kx). \tag{1.14}$$

Здесь  $A$  и  $k = 2\pi/L$  — соответственно постоянные амплитуда рассматриваемой волны и ее волновое число, а  $L$  — длина волны.

Точное значение производной для функции  $U$ , заданной в виде синусоиды формулой (1.14), есть

$$(\partial U/\partial x)_r = A k \cos kx. \tag{1.15}$$

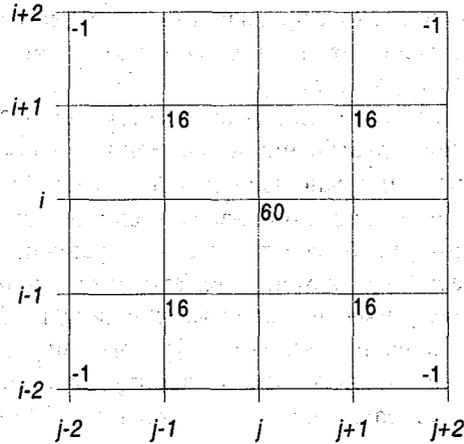


Рис. 1.2.

Двумерная пространственная сетка точек.

Если использовать соответственно формулу центральных разностей (1.6e) и формулу четвертого порядка точности (1.12), то с учетом выражения (1.14) аппроксимированная производная будет равна

$$\begin{aligned}
 (\partial U / \partial x)_a &= (A / 2\Delta x) [\sin k(m+1)\Delta x - \sin k(m-1)\Delta x] = \\
 &= (A / \Delta x) \sin k\Delta x \cos km\Delta x,
 \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$(\partial U / \partial x)_a = [A(\sin k\Delta x) / \Delta x] [1 + (1 - \cos k\Delta x) / 3] \cos km\Delta x. \quad (1.17)$$

Отношение аппроксимированного (приближенного) значения производной, которая при использовании центральных разностей дается формулой (1.16), к точному значению, определенному формулой (1.15), имеет вид

$$(\partial U / \partial x)_a / (\partial U / \partial x)_T = \alpha = (\sin k\Delta x) / k\Delta x. \quad (1.18)$$

С помощью формулы (1.18) можно оценить относительную ошибку аппроксимации производной центральными разностями (1.6e) в зависимости от длины шага сетки  $\Delta x$  и длины волны  $L$  конкретного синусоидального возмущения. Так, если  $L = 6\Delta x$ , то из формулы (1.18) следует, что отношение  $(\partial U / \partial x)_a / (\partial U / \partial x)_T \cong 1$  (точнее,  $\alpha = 0,827$ ), т.е. ошибка разностной аппроксимации производной

близка к нулю и, значит, производная вычисляется достаточно правильно. Для более коротких волн ( $L < 6\Delta x$ ) ошибка аппроксимации производной быстро растет.

Таким образом, при построении сеточных аппроксимаций производных по пространственным переменным на основе схемы центральных разностей нужно выбирать шаг сетки  $\Delta x$  таким, чтобы отношение  $(\sin k\Delta x)/k\Delta x$  было близким к единице для всех атмосферных возмущений, которые описываются уравнением (или системой уравнений) рассматриваемой математической модели атмосферы и имеют метеорологически значимые амплитуды. Например, длина гравитационных волн, амплитуды которых значимы для прогноза крупномасштабных (погодообразующих) атмосферных процессов на коротких интервалах времени, составляет  $\sim 200\text{--}300$  км. Следовательно, если ориентироваться на интегрирование уравнений нефильТРованной (неупрощенной) модели (т.е. модели по полным уравнениям гидротермодинамики в квазистатическом (гидростатическом) приближении, фильтрующем звуковые возмущения, а также процессы, обусловленные силой плавучести), которые описывают и эти волны, то шаг сетки по горизонтальным координатам  $\Delta S$  должен составлять  $\sim 30\text{--}50$  км. Однако следует иметь в виду, что в данных наблюдений невозможно правильно описать волны столь малой длины, так как измерения производятся на метеорологических станциях, отстоящих друг от друга (даже на материках) на сотни километров. Поэтому стремятся уменьшить ошибку сеточной аппроксимации производных не за счет уменьшения шага сетки, а за счет привлечения большего числа узлов. В самом деле, если использовать аппроксимацию четвертого порядка точности (1.12), то в рассматриваемом примере отношение значения сеточного аналога производной (1.12) к точной производной (1.15) дает

$$(\partial U/\partial x)_a / (\partial U/\partial x)_T = [(\sin k\Delta x)/k\Delta x] [1 + (1 - \cos k\Delta x)/3]. \quad (1.19)$$

Из (1.19) следует, что, если длина волны  $L = 4\Delta x$ , то  $(\partial U/\partial x)_a / (\partial U/\partial x)_T \approx 1$ , т.е. в этом случае обеспечивается достаточно точное вычисление производной с помощью сеточного аналога. Если же  $L < 3\Delta x$ , то расчеты производной становятся неточными.

Таким образом, применение аппроксимации четвертого порядка точности по пространству (1.12) позволяет правильно вычислять

производную  $\partial U/\partial x$  с шагом  $\Delta x$ , в два раза большим, чем с помощью схемы центральных разностей (1.6e). В этом случае для корректного описания гравитационных волн шаг сетки должен быть  $\sim 70\text{--}100$  км. Однако, учитывая плотность станций вертикального зондирования атмосферы, а также точность исходных эмпирических данных, в прогностических численных схемах по полным уравнениям используют шаг сетки  $\Delta S = 300$  км и, значит, по формулам (1.12) и (1.6e) в этом случае удастся правильно описать атмосферные возмущения, длина которых не менее 600 и 1200 км соответственно, т.е. волны Россби (характерный масштаб длины этих волн  $L = 1000$  км). При этом даже самые длинные гравитационные волны ( $L_{\text{max}} \cong 300$  км) не могут быть разрешены.

Формулы типа (1.18), (1.19), которые можно легко получить для любых других аппроксимаций производной, позволяют выбрать необходимый шаг сетки для правильного описания рассматриваемого атмосферного возмущения.

## Глава 2. СХЕМЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Конечно-разностная аппроксимация прогностических моделей атмосферы по полным (неупрощенным, нефильТРованным) уравнениям гидротермодинамики сопряжена с необходимостью решить ряд вопросов:

- Как аппроксимировать производные по времени?
- Как аппроксимировать производные по пространству?
- Какую схему применить для аппроксимации по времени правой части уравнения или системы уравнений модели?
- Какую временную схему численного интегрирования уравнений использовать?
- Каким требованиям должна удовлетворять выбранная схема?
- Как выбирать шаги дискретной пространственно-временной сетки, на которой строится численное (приближенное) решение системы дифференциальных уравнений модели?

Дадим ответы на поставленные вопросы.

При аппроксимации прогностических уравнений в целом следует стремиться к возможно более высокой точности аппроксимации производных по пространству с помощью многоточечных сеточных аналогов, так как ошибки, обусловленные дифференцированием функций по пространству, оказываются много больше, чем ошибки дифференцирования по времени, и служат источником нелинейной вычислительной неустойчивости, возникающей при многократном повторении вычислений с помощью используемого метода шагов по времени (или, иначе, численной схемы).

Производные по времени обычно аппроксимируют схемами второго и даже первого порядка точности. Однако при аппроксимации пространственных производных следует отдавать предпочтение схемам возможно более высокого порядка точности (если, конечно, используемая схема интегрирования априори не требует применения той или иной аппроксимации, как, скажем, это имеет место в методе расщепления). Данная рекомендация вытекает из следующих соображений и фактов:

- Погрешности численного решения дифференциального уравнения в частных производных определяются не только неадекватностью математической модели реальной атмосфере из-за внесен-

ных физических упрощений, но также точностью и плотностью задания начальных условий в дискретных узлах пространственной сетки;

– По существующим оценкам ошибки численного интегрирования уравнений прогноза примерно на 40 % обусловлены конечно-разностной аппроксимацией производных по пространству и лишь на 1 % – конечно-разностной аппроксимацией производных по времени;

– Аппроксимации производных по пространственным переменным порождают вычислительную дисперсию, являются источниками таких специфических ошибок, как ошибки ложного представления, которые при проведении вычислений методом шагов по времени приводят при  $\tau \rightarrow \infty$  к неправильному описанию распределения энергии по спектру волновых чисел атмосферных процессов (интерпретируемых в виде суперпозиции волн различной длины) и к развитию нелинейной вычислительной неустойчивости.

### 2.1. Схемы интегрирования эволюционных уравнений

Дадим определение основных временных конечно-разностных (численных) схем на примере эволюционного (прогностического) уравнения

$$dU/dt = F(U, t). \quad (2.1)$$

С этой целью введем следующие обозначения:

$U^\tau$  – приближенное значение метеорологической функции  $U$  в начальный момент времени  $t^\tau = \tau \Delta t$ ,  $\tau = 0, 1, 2, \dots$ ;

$U^{\tau+1}$  – искомое прогностическое значение функции  $U$  на следующем временном слое (т.е. будущее значение);

$U^{\tau-1}$  – предшествующее (прошлое) значение функции  $U$  (или, в терминах синоптической метеорологии, предыстория).

*Анонс.* Построим различные конечно-разностные схемы для аппроксимации точной формулы прогноза на временном интервале  $[\tau \Delta t, (\tau + 1)\Delta t]$ :

$$U^{\tau+1} = U^\tau + \int_{\tau \Delta t}^{(\tau+1)\Delta t} F(U, t) dt \quad (2.2)$$

### 2.1.1. Двухуровневые безитерационные схемы

*Схема Эйлера*, или схема с вперед направленными (в будущее) разностями

$$U^{\tau+1} = U^{\tau} + \Delta t F^{\tau}, \quad (2.3)$$

в которой правая часть уравнения (2.1) представляет собой  $F^{\tau} = F(U, \tau \Delta t)$ . Таким образом, подынтегральное выражение в точном решении (2.2) задано явно, а именно: не центрировано относительно прогностического интервала  $[\tau \Delta t, (\tau + 1) \Delta t]$ , взято постоянным (в течение одного малого шага по времени  $\Delta t$ ) и равным его значению на нижней границе  $\tau$  (на временном слое  $\tau$  или, иначе, на временном уровне  $\tau$ ).

### *Неявная схема односторонних разностей назад*

Если в точном решении (2.2) значение подынтегрального выражения берется постоянным и равным его значению на верхней границе  $(\tau + 1) \Delta t$  интервала  $[\tau \Delta t, (\tau + 1) \Delta t]$ , тогда прогнозируемое значение равно

$$U^{\tau+1} = U^{\tau} + \Delta t F^{\tau+1}, \quad (2.4)$$

где величина

$$F^{\tau+1} = F(U^{\tau+1}, (\tau + 1) \Delta t).$$

### *Схема трапеций*

Если в точном решении аппроксимировать правую часть уравнения (функцию  $F$ ) как среднее значение ее величин в начале ( $\tau$ ) и в конце  $(\tau + 1)$  шага по времени, то получается неявная схема:

$$U^{\tau+1} = U^{\tau} + (F^{\tau} + F^{\tau+1}) \Delta t / 2. \quad (2.5)$$

Безитерационные двухуровневые схемы можно описать с помощью одного конечно-разностного аналога:

$$U^{\tau+1} = U^{\tau} + \Delta t (\alpha F^{\tau} + \beta F^{\tau+1}), \quad (2.6)$$

в котором весовые коэффициенты  $\alpha + \beta = 1$ .

### 2.1.2. Двухуровневые итерационные схемы

Названные схемы строятся с целью повышения точности получаемого решения. Чтобы такие схемы были явными, используют итерационную процедуру, именуемую "предиктор-корректор".

*Схема Эйлера с пересчетом* (иначе, *схема Мацуно*) предусматривает на первом этапе расчет предиктора (т.е. предварительной оценки искомого значения функции  $U_*^{\tau+1}$ ) по явной схеме Эйлера (2.3), а затем уточнение этого значения (коррекцию) по неявной схеме (2.4):

$$U_*^{\tau+1} = U^\tau + \Delta t F^\tau \text{ (схема предиктор)}, \quad (2.7)$$

$$U^{\tau+1} = U^\tau + \Delta t F_*^{\tau+1} \text{ (схема корректор)},$$

Здесь  $F_*^{\tau+1} = F[U_*^{\tau+1}, (\tau+1)\Delta t]$ .

*Схема Хойна* строится аналогично двухшаговой схеме Мацуно, но с использованием схемы трапеций в корректоре:

$$U_*^{\tau+1} = U^\tau + \Delta t F^\tau \text{ (схема предиктор)}, \quad (2.8)$$

$$U^{\tau+1} = U^\tau + (F^\tau + F_*^{\tau+1})\Delta t/2 \text{ (схема корректор)}.$$

Двухшаговые схемы Мацуно и Хойна также можно описать с помощью одного конечно-разностного уравнения:

$$U_*^{\tau+1} = U^\tau + \Delta t F^\tau, \quad (2.9)$$

$$U^{\tau+1} = U^\tau + \Delta t (\alpha F^\tau + \beta F_*^{\tau+1})/2,$$

где, как и в формуле (2.6),  $\alpha + \beta = 1$ .

Заметим, что на первом шаге по времени ( $\tau = 1$ ) интегрирование эволюционного уравнения может осуществляться только по двухуровневым схемам, так как известно единственное начальное условие  $U(x_m, t^{\tau=0})$ . Начиная со второго шага ( $\tau = 2$ ), можно применять трехуровневые схемы с учетом предыстории  $U^{\tau-1}$ . Значение  $U^{\tau-1}$  представляет собой вычислительное начальное условие, содержит дополнительную информацию о развитии моделируемого процесса, который описывается эволюционным уравнением, и позволяет аппроксимировать производную по времени центральными разностями. Такие схемы аппроксимируют точную формулу прогноза на интервале  $[(\tau-1)\Delta t, (\tau+1)\Delta t]$ :

$$U^{\tau+1} = U^\tau + \int_{(\tau-1)\Delta t}^{(\tau+1)\Delta t} F(U, t) dt \quad (2.10)$$

и обеспечивают лучшее приближение в континуальном уравнении (2.1).

### 2.1.3. Трехуровневые безитерационные схемы

*Схема центральных разностей* использует центрированную оценку интеграла в решении (2.10), представляющую собой постоянную величину, равную его значению в середине двухшагового прогностического интервала:

$$U^{\tau+1} = U^{\tau-1} + 2\Delta t F^{\tau} \quad (2.11)$$

*Схема Адамса–Бешфорта* использует значение  $F$  в решении (2.2), полученное в центральной точке интервала  $\Delta t$  путем линейной экстраполяции значений  $F^{\tau-1}$  и  $F^{\tau}$ :

$$U^{\tau+1} = U^{\tau} + \Delta t (3F^{\tau} - F^{\tau-1})/2. \quad (2.12)$$

*Схема разностей назад* имеет вид:

$$U_*^{\tau+1} = U^{\tau-1} + 2\Delta t F^{\tau}, \quad (2.13)$$

$$U^{\tau+1} = U^{\tau-1} + 2\Delta t F_*^{\tau+1}/2.$$

*Схема центральных разностей (трапеций):*

$$U_*^{\tau+1} = U^{\tau-1} + 2\Delta t F^{\tau}, \quad (2.14)$$

$$U^{\tau+1} = U^{\tau-1} + \Delta t (F^{\tau-1} + F_*^{\tau+1})/2.$$

На практике используют множество других разностных схем. Например, трехуровневые схемы типа схемы Адамса–Бешфорта (2.12) строят, используя различные правила получения оценок интеграла в точном решении (2.10). Существуют также *итерационные схемы, использующие один предиктор и два корректора*:

$$U_*^{\tau+1} = U^{\tau-1} + 2\Delta t F^{\tau} \text{ (предиктор),}$$

$$U_{**}^{\tau+1} = U^{\tau-1} + \Delta t (F^{\tau-1} + F_*^{\tau+1})/2 \text{ (первый корректор),} \quad (2.15)$$

$$U^{\tau+1} = U^{\tau-1} + \Delta t (F_*^{\tau+1} + F_{**}^{\tau+1})/2 \text{ (второй корректор).}$$

При решении нелинейных эволюционных уравнений могут быть построены и более сложные пространственно-временные схемы, чем те, которые приведены для уравнения (2.1). Используют также комбинации схем, применяя разные схемы для интегрирования различных членов в уравнениях гидротермодинамики (например, члены, описывающие процесс адаптации полей движения и

полей массы, интегрируют по какой-либо неявной схеме, а члены, описывающие эффекты трехмерной турбулентности, — по явной схеме), либо периодически включают в процесс интегрирования схемы, обладающие требуемыми свойствами, не только с целью обеспечения счетной устойчивости, но и для правильного описания распределения энергии по спектру волновых чисел. Последнее означает недопущение каскада (т.е. систематической перекачки) "энергии" из области крупных погодообразующих волн (волн Россби) к наиболее коротким двухшаговым волнам, разрешимым на сетке, где эта "энергия" будет накапливаться и приведет к "взрыву" вычислительного процесса. В качестве таких схем используют схемы, обладающие селективной (избирательной) вычислительной (счетной, разностной, сеточной, искусственной) вязкостью на участке наиболее коротких волн, разрешимых сеткой. К таковым относятся, например, схема Лакса-Вендрофа. Необходимо лишь, чтобы приближенное решение, получаемое с помощью численной схемы, сходилась к точному решению континуального уравнения, когда приращения всех независимых переменных стремятся к нулю в данной точке пространственно-временной сетки.

Запишем здесь применительно к одномерному линейному уравнению адвекции (адвективному уравнению, или уравнению горизонтального переноса)

$$\partial U / \partial t = -C \partial U / \partial x, \quad U = U(x, t), \quad C = \text{const} \quad (2.16)$$

еще две часто используемые схемы численного решения:

**явная схема четвертого порядка точности аппроксимации по пространству и второго по времени**

$$(U_m^{\tau+1} - U_m^{\tau}) / 2\Delta t = -C [4(U_{m+1}^{\tau} - U_{m-1}^{\tau}) - (U_{m+2}^{\tau} - U_{m-2}^{\tau}) / 2] / 6\Delta x; \quad (2.17)$$

**схема, обеспечивающая второй порядок точности аппроксимации по  $\Delta t$  и первый по  $\Delta x$ ,**

$$(U_m^{\tau+1} - U_m^{\tau}) / \Delta t = -C [(U_m^{\tau+1} + U_m^{\tau}) / 2 - (U_{m-1}^{\tau+1} + U_{m-1}^{\tau}) / 2] / \Delta x. \quad (2.18)$$

Положив в формуле (2.18)  $C \Delta t / 2\Delta x = \mu$ , запишем рекуррентное соотношение, с помощью которого реализуется данная схема:

$$U_m^{\tau+1} = [(1 - \mu) / (1 + \mu)] U_m^{\tau} + [\mu / (1 + \mu)] (U_{m-1}^{\tau+1} + U_{m-1}^{\tau}). \quad (2.19)$$

### Глава 3. ТРЕБОВАНИЯ К ЧИСЛЕННЫМ СХЕМАМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Для оценки и выбора схем из почти неограниченного числа вариантов опираются на следующие критерии: *согласованность, точность, устойчивость и эффективность.*

#### 3.1. Согласованность конечно-разностных схем

*Согласованность* – первое и необходимое условие любой схемы численного интегрирования дифференциального уравнения. Как указывалось выше, согласованность состоит в том, что аппроксимация должна переходить в исходное непрерывное уравнение в пределе бесконечно малых временного и пространственного шагов интегрирования. Например, с однородным линейным одномерным уравнением адвекции (1.2) будет согласована явная схема центральных разностей (2.11), так как

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{U[(\tau+1)\Delta t, m\Delta x] - U[(\tau-1)\Delta t, m\Delta x]}{2\Delta t} \right\} + \\ & + \lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \left\{ \frac{U[\tau\Delta t, (m+1)\Delta x] - U[\tau\Delta t, (m-1)\Delta x]}{2\Delta x} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Поскольку уравнения гидротермодинамики атмосферы, стилизуемой в виде сплошной среды, обратимы во времени, то желательным свойством согласованности сеточной аппроксимации с дифференциальным уравнением является совпадение их свойств симметрии относительно времени. Это означает, что, если движение частицы воздуха по линии тока проинтегрировать вперед по времени в заданном поле результирующей вынуждающей силы, а затем обратить время и скорость, то частица должна вернуться в исходную точку по пройденному пути. Обратимые во времени схемы обеспечивают центрированные по времени разности. Таким свойством обладают, например, схема центральных разностей (2.11) и *схема Кранка-Николсона*, которая для адвективного уравнения (2.16) записывается в следующем виде:

$$(U_m^{\tau+1} - U_m^{\tau})/\Delta t + C(U_{m+1}^{\tau+1/2} - U_{m-1}^{\tau+1/2})/2\Delta x = 0. \quad (3.2)$$

Однако согласованность схемы (в том числе и схемы, обладающей свойством симметрии) еще не гарантирует сходимости численного решения к точному решению дифференциальной задачи.

### 3.2. Точность и устойчивость конечно-разностных схем

Такие свойства, как точность и устойчивость конечно-разностных схем связаны с требованием малости отклонения вычисленных значений координат воздушных частиц и скоростей от точного решения дифференциального уравнения.

*Точность конечно-разностной схемы* связана с локальными погрешностями, которые в атмосферных моделях обусловлены

- физическими упрощениями модели (т.е. неадекватностью математической модели реальным атмосферным процессам),
- погрешностями дискретизации непрерывных пространства и времени,
- ошибками, содержащимися в исходных данных,
- погрешностями округления, проистекающими из-за конечной длины представления чисел в слове компьютера.

Погрешности конечно-разностной аппроксимации можно описать либо на языке статистической выборки требуемого объема, где они проявляются как сложные спектральные компоненты, либо исходя из разности между непрерывным и дискретным уравнениями. Во втором случае мерой малости погрешности аппроксимации уравнения в целом служит порядок ( $k$ ) разностной аппроксимации схемы, который, как и для отдельных производных, означает, что при малых шагах пространственно-временной сетки  $\Delta t$  и  $\Delta x$  ошибки аппроксимации пропорциональны  $(\Delta t)^k$  и  $(\Delta x)^k$ . Так, схема Эйлера (2.3) в случае замены производной  $\partial U/\partial x$  в формуле (1.2) направленными разностями:

$$(U_m^{\tau+1} - U_m^{\tau})/\Delta t + C(U_{m+1}^{\tau} - U_m^{\tau})/\Delta x = 0, C < 0 \quad (3.3)$$

аппроксимирует уравнение с первым порядком точности по  $t$  и по  $x$ , в чем легко убедиться. С этой целью найдем разность между численной схемой (3.3) и точным уравнением адвекции (1.2):

$$\varepsilon^\tau = [(U_m^{\tau+1} - U_m^\tau)/\Delta t + C(U_{m+1}^\tau - U_m^\tau)/\Delta x] - (\partial U/\partial t - C\partial U/\partial x). \quad (3.4)$$

Представляя здесь сеточные функции  $U_m^{\tau+1}$ ,  $U_m^\tau$ ,  $U_{m+1}^\tau$  рядами Тейлора около точки с координатами  $(\tau \Delta t, m \Delta x)$ , получим:

$$\varepsilon^\tau = (\partial^2 U/\partial t^2)_m^\tau \Delta t/2! + C(\partial^2 U/\partial x^2)_m^\tau \Delta x/2! + \dots \quad (3.5)$$

Откуда следует:  $O(\varepsilon^\tau) = O(\Delta t, \Delta x)$ .

Если же в точном уравнении (2.16) представить производную  $\partial U/\partial x$  центрированной, а производную  $\partial U/\partial t$  направленной разностями, то аналогичным образом получим:  $O(\varepsilon^\tau) = O[\Delta t, (\Delta x)^2]$ .

**Устойчивость конечно-разностной схемы** связана с распространением погрешностей. Если влияние даже малых погрешностей аппроксимации быстро распространяется, то такая схема приведет в конечном итоге к абсурдным результатам.

**Резюме.** Численная схема интегрирования непрерывного эволюционного уравнения будет устойчивой, если малая погрешность, внесенная на любом уровне (шаге) по времени, не накапливается на узлах сетки.

**Анонс.** Чтобы получить количественную меру устойчивости схемы интегрирований, необходимо найти уравнение, описывающее эволюцию погрешностей, и, значит, дать ответ на вопрос:

Как ведут себя решения такого уравнения при переходе от одного временного шага (слоя точек) к другому?

В качестве примера возьмем схему Эйлера для одномерного уравнения (1.2):

$$(U_m^{\tau+1} - U_m^\tau)/\Delta t + C(U_{m+1}^\tau - U_m^\tau)/\Delta x = F_m^\tau. \quad (3.6)$$

Откуда при

$$C \Delta t/\Delta x = \mu \quad (3.7)$$

находим вычислительный алгоритм получения прогностических значений величины  $U_m^{\tau+1}$  в точках  $m$  по данным на предыдущем слое по времени  $\tau$  на основе дифференциального уравнения (1.2):

$$U_m^{\tau+1} = (1 + \mu)U_m^\tau - \mu U_{m+1}^\tau + \Delta t F_m^\tau. \quad (3.8)$$

Точное решение уравнения (1.2) определяется формулой (1.4). Начальные данные задачи преобразуются к виду:

$$U_m^{\tau=0} = g_m \quad (3.9)$$

*Анонс.* Выясним, будет ли решение  $U_m^{\tau+1}$ , генерируемое вычислительным алгоритмом (3.8), близко к точному решению (1.4) дифференциальной задачи?

Представим с этой целью значение сеточной функции  $U_m^\tau$  в виде

$$U_m^\tau = u(x_m, t^\tau) + \delta U_m^\tau. \quad (3.10)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

- $u(x_m, t^\tau)$  - точное значение непрерывной функции  $U(x, t)$  в точке  $x_m$  в момент времени  $t^\tau$ , получаемое из (1.4);
- $\delta U_m^\tau$  - ошибка конечно-разностной аппроксимации.

Подстановка формулы (3.10) в разностную схему (3.8) дает:

$$\begin{aligned} & (\delta U_m^{\tau+1} - \delta U_m^\tau) / \Delta t + C(\delta U_{m+1}^\tau - \delta U_m^\tau) / \Delta x = \\ & = F_m^\tau - [(u_m^{\tau+1} - u_m^\tau) / \Delta t - C(u_{m+1}^\tau - u_m^\tau) / \Delta x]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Оценим правую часть этого уравнения.

Пусть непрерывная функция  $u(x, t)$  является гладкой функцией.

*(Примечание.* Функция называется гладкой, если каждое значение ее аргумента является гладкой точкой, т.е. такой точкой, в которой функция имеет первую производную (а вторая производная равна нулю) и, в силу этого, для нее справедливы основные теоремы дифференциального исчисления.)

Тогда при малых шагах  $\Delta t$  и  $\Delta x$  можно записать:

$$\begin{aligned} u_m^{\tau+1} &= u_m^\tau + \Delta t (\partial u / \partial t)_m^\tau + O[(\Delta t)^2], \\ u_{m+1}^\tau &= u_m^\tau + \Delta x (\partial u / \partial x)_m^\tau + O[(\Delta x)^2]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Откуда

$$\begin{aligned} (U_m^{\tau+1} - U_m^\tau) / \Delta t + C(U_{m+1}^\tau - U_m^\tau) / \Delta x = \\ = (\partial u / \partial t + C(\partial u / \partial x))_m^\tau + O(\Delta t, \Delta x). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Поскольку функция  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению (1.2), то соотношение (3.13) означает, что

$$(u_m^{\tau+1} - u_m^\tau) / \Delta t + C(u_{m+1}^\tau - u_m^\tau) / \Delta x = F_m^\tau + O(\Delta t, \Delta x). \quad (3.14)$$

Сравнивая соотношения (3.14) и (3.6), видим, что решение

дифференциальной задачи  $u(x, t)$  удовлетворяет сеточному уравнению (3.6) с точностью до порядка  $O(\Delta t, \Delta x)$ , т.е. аппроксимация имеет место.

Подставив в правую часть формулы (3.11) правую часть из (3.14), получим:

$$(\delta U_m^{\tau+1} - \delta U_m^\tau) / \Delta t + C(\delta U_{m+1}^\tau - \delta U_m^\tau) / \Delta x = O(\Delta t, \Delta x). \quad (3.15)$$

Отсюда следует, что процесс эволюции ошибки  $\delta U$  при переходе с исходного временного слоя точек  $\tau$  к прогностическому слою  $\tau+1$  описывается формулой

$$\delta U_m^{\tau+1} = (1 + \mu) \delta U_m^\tau - \mu \delta U_{m+1}^\tau + \Delta t O(\Delta t, \Delta x). \quad (3.16)$$

Из формулы (3.16) вытекает, что ошибка разностной аппроксимации является сложной функцией пространственного индекса  $m$ , а ее порядок не превышает  $\Delta t \times O(\Delta t, \Delta x)$ .

Пусть величины  $\Delta t$ ,  $\Delta x$  и  $C$  удовлетворяют семейству неравенств

$$0 \leq -\mu \leq 1, \quad (3.17)$$

в которых  $\mu$  дается формулой (3.7). Тогда коэффициенты при  $\delta U_m^\tau$  и  $\delta U_{m+1}^\tau$  положительны, поэтому можно записать:

$$|\delta U_m^{\tau+1}| \leq (1 + \mu) |\delta U_m^\tau| + (-\mu) |\delta U_{m+1}^\tau| + \Delta t O(\Delta t, \Delta x) \leq \max_m (|\delta U_m^\tau|, |\delta U_{m+1}^\tau|) + \Delta t O(\Delta t, \Delta x). \quad (3.18)$$

Норму решения разностной схемы определим как

$$\|\delta U^\tau\| = \max_m |\delta U_m^\tau| \quad (3.19)$$

Тогда из равенства (3.18) следует:

$$\|\delta U^{\tau+1}\| \leq \|\delta U^\tau\| + \Delta t O(\Delta t, \Delta x), \quad (3.20)$$

т.е. увеличение максимальной погрешности аппроксимации по пространству за один шаг по времени  $\Delta t$  не превышает величины  $[\Delta t \times O(\Delta t, \Delta x)]$ . После прогноза на  $N$  шагов по времени

$$\|\delta U^\tau\| \leq \|\delta U^{\tau=0}\| + N[\Delta t \times O(\Delta t, \Delta x)]. \quad (3.21)$$

Пусть конечное значение  $t = N\Delta t$ , шаги пространственно-

временной сетки  $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ , а  $N \rightarrow \infty$ . Так как погрешность аппроксимации начальных условий

$$\delta U_m^0 = G_m - g_m = 0,$$

то из неравенства (3.20) вытекает:

$$\|\delta U(t)\| = O(\Delta t, \Delta x). \quad (3.22)$$

*Резюме.* Таким образом, доказано, что, если при  $(\Delta t, \Delta x) \rightarrow 0$  выполняется условие (3.17), то решение конечно-разностной задачи (3.6), (3.9) сходится к решению дифференциальной задачи (1.2), (1.3), которую она аппроксимирует. Если хотя бы одно из условий (3.17) нарушено, то сходимости нет и отклонение сеточного решения  $U_m^\tau$  от точного  $u(x_m, t^\tau)$  может быть любым.

*Анонс.* Выясним теперь, какой характер имеет численное решение  $U_m^\tau$  при конечных значениях  $\Delta t$  и  $\Delta x$  и как оно меняется при их уменьшении?

Представим погрешность  $\delta U_m^\tau$  в формуле (3.16) в виде суммы различных погрешностей, одна из которых имеет осциллирующий характер:

$$\begin{aligned} \delta U_m^\tau &= \varepsilon(-1)^m, \\ O(\varepsilon) &= \Delta t \times O(\Delta t, \Delta x). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Проследим за эволюцией этой компоненты ошибки. Для этого найдем величины  $\delta U_m^{\tau+1}, \delta U_m^{\tau+2}, \dots, \delta U_m^N$ . Вклад члена  $\Delta t \times O(\Delta t, \Delta x)$ , вносимый на последующих шагах по времени, учитывать не будем. На основании (3.16) в этом случае получим:

$$\begin{aligned} \delta U_m^{\tau+1} &= (1 + 2\mu) \varepsilon(-1)^m, \\ \delta U_m^{\tau+2} &= (1 + 2\mu)^2 \varepsilon(-1)^m, \\ &\dots\dots\dots, \\ \delta U_m^{\tau+N} &= (1 + 2\mu)^N \varepsilon(-1)^m. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Видно, что эволюция осциллирующей компоненты ошибки определяется величиной  $(1 + 2\mu)$ . Если потребовать, чтобы

$$|1 + 2\mu| \leq 1, \quad (3.25)$$

то, очевидно, ошибка затухает либо не увеличивается. В противном

случае для конечного времени  $t = N \Delta t$  при  $(\Delta t, \Delta x) \rightarrow 0$  формула (3.24) дает

$$\delta U_m^{\tau+1} = |1 + 2\mu|^{t/\Delta t} \Delta t \times O(\Delta t, \Delta x), \quad (3.26)$$

т.е. ошибка нарастает экспоненциально, а решение  $U_m^\tau$ , содержащее эту ошибку, превращается в хаотическую последовательность больших чисел (иначе, в вычислительный хаос). Описанный эффект называют *вычислительной неустойчивостью*, а неравенство (3.25), эквивалентное неравенству (3.17), – достаточным условием устойчивости конечно-разностной схемы.

*Резюме.* Корректно поставленной задаче с начальными условиями (т.е. такой задаче, решение которой существует, единственно и непрерывно зависит от начальных условий), соответствующей линейному эволюционному уравнению переноса, аппроксимированной с помощью согласованной схемы, устойчивость является необходимым и достаточным условием сходимости сеточного решения к точному.

#### Глава 4. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ВРЕМЕННЫХ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ МЕТОДОМ НЕЙМАНА

При исследовании устойчивости конечно-разностных схем большую роль играет специфика рассматриваемой задачи. Прямая оценка решений через правую часть, как это было показано выше, удается далеко не всегда. Для широко класса задач (в частности, для систем прогностических уравнений) более перспективен метод Неймана или метод разложения функций в ряды Фурье. Обычно его применяют для анализа линеаризованных аналогов нелинейных уравнений, поскольку решения таких уравнений можно представить в виде суммы гармоник и проследить устойчивость любой гармонической компоненты. Устойчивость всех допустимых гармоник (т.е. разрешимых на используемой сетке) является необходимым условием устойчивости конечно-разностной схемы.

##### 4.1. Точное решение линейного одномерного уравнения переноса

Для демонстрации метода Неймана вначале найдем аналитическое (точное) решение линейного уравнения переноса (2.16), с известными свойствами которого будем сравнивать свойства решений, получаемых по той или иной численной схеме.

Постоянную скорость адвекции  $C$  можно интерпретировать как фазовую скорость перемещения возмущения в направлении оси  $x$ , которое в начальный момент времени  $t = 0$  представляет собой волну (волновую моду):

$$U(x, 0) = A(0) \exp(i k x), \quad (4.1)$$

где  $A(0) = A(t_0)$  – исходная амплитуда волны;  $k = 2\pi/L$  – волновое число;  $L$  – длина волны;  $i = (-1)^{1/2}$ .

Для нахождения решения уравнения (2.16) воспользуемся методом разделения переменных. С этой целью представим функцию  $U(x, t)$  в виде произведения двух функций:

$$U(x, t) = \varphi_1(x)\varphi_2(t). \quad (4.2)$$

Подставим формулу (4.2) в уравнение (2.16) и, разделив результат на  $\varphi_1(x)\varphi_2(t)$ , получим:

$$(\varphi_2(t))^{-1} d\varphi_2(t)/dt = -C[\varphi_1(x)]^{-1} d\varphi_1(x)/dx = -W = const.$$

Выполнив интегрирование по частям, будем иметь:

$$\int [(\varphi_2(t))^{-1} d\varphi_2(t)/dt] dt = -\int Q dt,$$

$$\int [(\varphi_1(x))^{-1} d\varphi_1(x)/dx] dx = \int (Q/C) dx$$

или

$$\ln \varphi_2(t) = \ln A_2 - Qt,$$

$$\ln \varphi_1(x) = \ln A_1 + Q C/x,$$

где  $A_1, A_2$  – постоянные интегрирования. Следовательно,

$$\varphi_1(x) = A_1 \exp(Qx/C),$$

$$\varphi_2(t) = A_2 \exp(-Qt)$$

или

$$U(x, t) = A_1 A_2 \exp[Q((x/C) - t)].$$

Учитывая начальное условие (4.1), имеем:  $Q = ikC, A_1 A_2 = A(0)$  и, значит, решение адвективного уравнения (1.23) можно представить в виде

$$U(x, t) = A(0) \exp[i k(x - Ct)]. \quad (4.2a)$$

От независимых переменных  $(x, t)$  удобно перейти к переменным  $(\xi, t)$  путем подстановки

$$\xi \equiv (x - Ct).$$

Тогда, положив

$$U(x, t) = u(\xi, t),$$

из уравнения (2.16) получим

$$\partial u(\xi, t) / \partial t = 0.$$

Последнее уравнение означает, что функция  $u$  не может быть функцией времени, но может быть произвольной функцией аргумента  $\xi$ , т.е.  $u = u(\xi)$ . Таким образом, выяснено, что выражение

$$U(x, t) = u(x - Ct)$$

является решением уравнения (2.16), удовлетворяющим произвольному начальному условию

$$U(x, 0) = u(x).$$

При

$$x - Ct = \text{const} \quad (4.3)$$

функция  $U(x, t) = \text{const}$ . Следовательно, на координатной плоскости  $(x, t)$  (рис. 4.1) на прямых  $x - Ct = \text{const}$  решение остается неизменным (т.е. распространяется вдоль этих линий), а начальные условия (т.е. значения функции  $U$ , соответствующие моменту времени  $t = 0$ ) однозначно определяют константу в правой части уравнения (4.3). Последнее является, очевидно, уравнением характеристик для линейного адвективного уравнения (2.16).

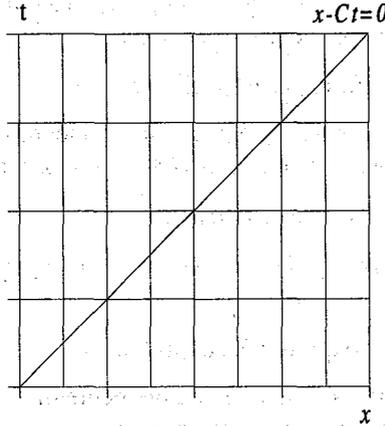


Рис. 4.1.

Характеристика  $x - Ct = x_0$  ( $x_0 = 0$ )  
линейного уравнения адвекции.

## 4.2. Метод Неймана

В соответствии с начальным условием (4.1) решение уравнения (2.16) запишем в следующем виде:

$$U(x, t) = A(t) \exp(ikx), \quad (4.4)$$

где амплитуда волны с произвольным волновым числом  $k$  зависит от времени. Подставив волновое решение (4.4) в уравнение (2.16), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для амплитуды рассматриваемой волны с волновым числом  $k$ :

$$dA(t)/dt + ikCA(t) = 0. \quad (4.5)$$

Решение уравнения (4.5) имеет вид

$$A(t) = A(0) \exp(-ik C t) = A^0 \exp(-ik C t) \quad (4.6)$$

(где  $A^0$  – начальное значение амплитуды волны), в чем можно убедиться подстановкой формулы (4.6) в уравнение (4.5).

Положим, что угловая частота  $\omega = -kC$ , тогда уравнение (4.5) преобразуется в уравнение колебаний

$$dA(t)/dt = i \omega A(t), \quad (4.7)$$

в котором частота  $\omega = 2\pi/T$ , где  $T$  – период колебаний.

Общее решение уравнения (4.7) таково:

$$A(t) = A(0) \exp(i \omega t) = A^0 \exp(i \omega t). \quad (4.8)$$

Таким образом, решение уравнения адвекции (2.16) в форме (4.4) после подстановки выражения (4.8) преобразуется к виду:

$$U(x, t) = A^0 \exp(i \omega t) \exp(ikx). \quad (4.9)$$

Запишем решение (4.9) для дискретных аргументов  $t = \tau \Delta t$  и  $x = m \Delta x$ :

$$U_m^\tau = A^0 \exp(i \omega \tau \Delta t) \exp(ikm \Delta x). \quad (4.10)$$

Теперь будем искать аналогичное решение любого конечно-разностного аналога уравнения адвекции в виде

$$U_m^{\tau+1} = A^{\tau+1} \exp(ikm \Delta x). \quad (4.11)$$

В формуле (4.11) величина

$$\begin{aligned} A^{\tau+1} &= A^0 \exp[i \omega (\tau+1) \Delta t] = \\ &= A^0 \exp(i \omega \tau \Delta t) \exp(i \omega \Delta t) = A^\tau \exp(i \omega \Delta t) \end{aligned} \quad (4.12)$$

представляет собой амплитуду численного решения на прогностическом временном слое  $\tau+1$  и включает следующие параметры:  $A^0$  – физическое (точное) условие;  $A^\tau$  – амплитуда численного решения на предшествующем временном слое  $\tau$  ( $\tau = 0, 1, 2, \dots$ );  $\exp(i \omega \Delta t) = \lambda$  – множитель перехода с некоторого исходного временного слоя  $\tau$  на прогностический слой  $\tau+1$ .

Из формулы (4.12) вытекает:

– если  $\lambda = 1$ , то амплитуда волны, получаемая на выходе используемой схемы интегрирования эволюционного уравнения, остается неизменной, т.е.  $A^\tau = A^0$ ,  $\tau = 1, 2, \dots$ , и, следовательно, схема является нейтральной (т.е. не воздействующей на амплитуду волновой моды);

– если  $|\lambda| > 1$ ,  $A^\tau > A^{\tau-1}$  и амплитуда растет быстрее, чем по экспоненте, то при продвижении в будущее шагами по времени (т.е. при увеличении числа шагов по времени,  $\tau \rightarrow \infty$ ) используемая схема приводит к развитию вычислительной неустойчивости и, в конечном итоге, к “взрыву” схемы. Такая схема называется неустойчивой;

– если  $|\lambda| < 1$ , то  $A^{\tau-1} > A^\tau$  и, значит, схема диссипативная (вязкая) и поэтому абсолютно устойчивая.

Подстановка формулы (4.11), например, в схему Эйлера (2.3) дает, что выражение (4.11) является решением, если

$$A^{\tau+1} = \lambda A^\tau = \lambda^\tau A^0, \quad (4.13)$$

где

$$\lambda = [1 + \mu(1 - \cos k\Delta x)] - i \mu \sin k\Delta x. \quad (4.14)$$

Из соотношения (4.13) вытекает:

$$|A^{\tau+1}| = |\lambda| |A^\tau| = |\lambda|^\tau |A^0|. \quad (4.15)$$

Решение (4.11) будет устойчивым для каждой гармоники, если

$$|A^{\tau+1}| = |\lambda|^\tau |A^0| < \alpha, \quad (4.16)$$

где  $\alpha$  – конечное положительное число. Отсюда следует условие устойчивости сеточного решения в виде

$$\ln |\lambda| < \tau^{-1} \ln(\alpha / |A^0|) \equiv \alpha' / \tau = \alpha' \Delta t / t. \quad (4.17)$$

Пусть требуется ограниченность решения в течение конечного времени  $t$ . Тогда условие (4.17) запишется в виде

$$\ln |\lambda| \leq O(\Delta t). \quad (4.18)$$

Введя определение

$$|\lambda| \equiv 1 + \varepsilon, \quad (4.19)$$

где  $\varepsilon$  – малая величина, прологарифмируем условие (4.18) с учетом (4.19) и разложим функцию  $\ln(1 + \varepsilon)$  в степенной ряд:

$$\ln(1 + \varepsilon) = \varepsilon - \varepsilon^2/2 + \varepsilon^3/3.$$

В результате получим, что условие устойчивости (4.17) эквивалентно выражению

$$\varepsilon \leq O(\Delta t) \text{ или } |\lambda| \leq 1 + O(\Delta t), \quad (4.20)$$

которое является необходимым условием устойчивости по Нейману численной схемы интегрирования эволюционного уравнения. Оно допускает экспоненциальный рост сеточного решения. Такое допущение необходимо для анализа случаев, когда точное решение задачи растет экспоненциально. В противном случае необходимое условие заменяют достаточным условием сходимости:

$$|\lambda| \leq 1, \quad (4.21)$$

именуемым *критерием Куранта-Фридрихса-Левы* (КФЛ).

Условие (4.21) интерпретируется следующим образом: чтобы численная схема была устойчивой, характеристические решения (корни)  $\lambda$  уравнения эволюции ее погрешности должны лежать внутри или на границе единичного круга.

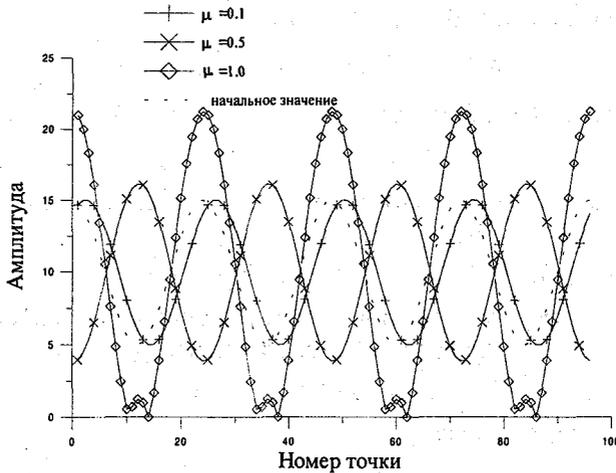


Рис. 4.2.

Результаты интегрирования линейного уравнения адвекции по схеме Эйлера с разными значениями параметра  $\mu$ .

На рис. 4.2 показаны решения уравнение адвекции, аппроксимированного схемой Эйлера, на 25-м шаге по времени с разными значениями параметра  $\mu$ . Видно, как сильно зависит амплитуда решения от выбора шагов интегрирования по времени и пространству.

Теперь проведем анализ методом Неймана схемы Эйлера (2.3) с направленными разностями против потока ( $C < 0$ ). Из формул (4.13), (4.14) следует, что значение модуля множителя перехода

$$|\lambda| = [1 + 2\mu(1 + \mu)(1 - \cos k\Delta x)]^{1/2}. \quad (4.22)$$

Откуда вытекает, что явная схема (2.3) с направленными разностями против потока (т.е. первого порядка точности) будет устойчива, если выполняется критерий КФЛ:

$$|\mu| = |C\Delta t/\Delta x| \leq 1. \quad (4.23)$$

На рис.4.3 показаны результаты интегрирования уравнения адвекции с помощью схемы Эйлера с разной аппроксимацией производной по пространству.

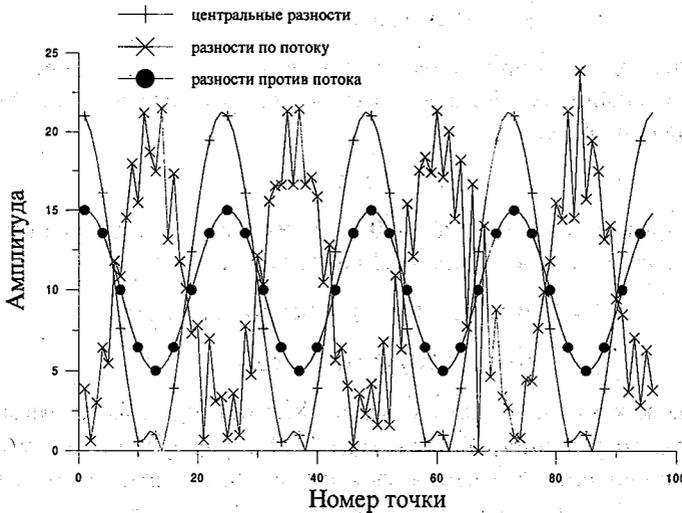


Рис. 4.3.

Результаты интегрирования линейного уравнения адвекции по схеме Эйлера с разной аппроксимацией производной по пространству ( $\mu = 1$ ; 25-й шаг по времени).

Условно-устойчивой является и схема центральных разностей (2.11) для уравнения (2.16):

$$U_m^{\tau+1} - U_m^{\tau-1} = -(C \Delta t / \Delta x)(U_{m+1}^{\tau} - U_{m-1}^{\tau}). \quad (4.24)$$

При этом условием устойчивости также является критерий КФЛ. Действительно, подставляя в схему (4.24) вместо сеточных функций волновое решение для дискретных аргументов

$$U_m^{\tau} = A^0 \exp [i (k m \Delta x + \omega \tau \Delta t)], \quad (4.25)$$

получим для угловой частоты

$$\omega = \omega_{Re} + i \omega_{Im} \quad (4.26)$$

следующее выражение:

$$\omega = (1/\Delta t) \arcsin [(-C \Delta t / \Delta x) \sin k \Delta x]. \quad (4.27)$$

Из формулы (4.27) вытекает, что угловая частота  $\omega$  будет действительным числом, если модуль аргумента арксинуса

$$|(-C \Delta t / \Delta x) \sin k \Delta x| \leq 1. \quad (4.28)$$

Поскольку по определению  $|\sin k \Delta x| \leq 1$ , то для обеспечения вычислительной устойчивости схемы центральных разностей (4.24) необходимо положить

$$|-C \Delta t / \Delta x| \leq 1. \quad (4.29)$$

В противном случае  $\omega_{Im} \neq 0$  и может быть отрицательной величиной, а волновое решение (4.25) будет иметь вид

$$\begin{aligned} U_m^{\tau} &= A^0 \exp [i(\omega_{Re} + i\omega_{Im})\tau \Delta t] \exp (i k m \Delta x) = \\ &= [A^0 \exp(-\omega_{Im} \tau \Delta t)] \exp (i \omega_{Re} \tau \Delta t). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Так как мнимая часть угловой частоты  $\omega_{Im} < 0$ , то амплитуда разностного решения  $[A^0 \exp(-\omega_{Im} \tau \Delta t)]$  в формуле (4.30) будет неограниченно возрастать при увеличении числа шагов по времени  $\tau = 1, 2, \dots, N$  при любых значениях шагов  $\Delta t$  и  $\Delta x$ , что противоречит дифференциальной задаче, описывающей процесс линейного переноса субстанции  $U$  в направлении  $x$  с постоянной скоростью  $C$ .

Заметим, что схемы с направленными пространственными разностями против потока

$$(\partial U/\partial t)_m = -(C/\Delta x)(U_m - U_{m-1}), C > 0, \quad (4.31)$$

$$(\partial U/\partial t)_m = -(C/\Delta x)(U_{m+1} - U_m), C < 0 \quad (4.32)$$

при аппроксимации производных по времени одним из возможных методов будут только первого порядка точности (устойчивость таких схем диктуется критерием КФЛ (4.21)). Однако в приложении к уравнению адвекции атмосферных возмущений они имеют преимущество по сравнению с центрированными пространственными схемами, заключающееся в том, что возмущение не может распространяться в направлении, противоположном направлению физической адвекции, и, таким образом, никакие паразитарные волны не будут искажать численного решения. Разумеется, для других схем интегрирования критерии вычислительной (счетной) устойчивости могут быть иными.

*Анонс.* Рассмотрим для примера явную схему четвертого порядка точности аппроксимации по пространству

$$(U_m^{\tau+1} - U_m^{\tau-1}) = -C \Delta t [4(U_{m+1}^{\tau} - U_{m-1}^{\tau}) - (U_{m+2}^{\tau} - U_{m-2}^{\tau})/2]/3\Delta x. \quad (4.33)$$

Подставляя в схему (4.33) волновое решение, получим

$$\omega = \frac{1}{\Delta t} \arcsin \left\{ -\frac{C \Delta t}{\Delta x} \left[ \frac{4}{3} \sin(k \Delta x) - \frac{1}{6} \sin(2k \Delta x) \right] \right\} \quad (4.34)$$

Следовательно, чтобы частота  $\omega$  была вещественной, должно выполняться следующее неравенство:

$$\left| -\frac{C \Delta t}{\Delta x} \left[ \frac{4}{3} \sin(k \Delta x) - \frac{1}{6} \sin(2k \Delta x) \right] \right| \leq 1. \quad (4.35)$$

Иными словами, соотношение (4.35) является критерием устойчивости схемы (4.33). Выясним, какие ограничения необходимо налагать в критерии (4.35) на множитель  $(-C \Delta t/\Delta x)$ ? С этой целью положим

$$(4/3) \sin k \Delta x - (1/6) \sin 2k \Delta x = \max$$

и, дифференцируя это равенство по аргументу синуса ( $k \Delta x$ ), получим квадратное уравнение

$$2 \cos^2 k \Delta x - 4 \cos k \Delta x - 1 = 0,$$

решение которого таково:

$$\cos k\Delta x = 1 \pm 1.225.$$

Вещественному корню  $\cos k\Delta x = -0.225$  соответствует значение аргумента  $k\Delta x \approx 103^\circ$ , а  $\max [(4/3) \sin k\Delta x - (1/6) \sin 2k\Delta x] \approx 1.372$ . С учетом этого на основе неравенства (4.35) получаем условие счетной устойчивости для явной схемы четвертого порядка точности по пространству (4.33) в виде

$$|C \Delta t / \Delta x| \leq 0.729. \quad (4.36)$$

Таким образом, при одном и том же значении шага по пространству  $\Delta x$  шаг по времени  $\Delta t$  для схемы четвертого порядка может быть меньше примерно на 27 %, чем для схем второго порядка, и, следовательно, схема будет более экономичной.

Помимо условно-устойчивых схем интегрирования эволюционных уравнений существуют *нейтральные и диссипативные* (демпфирующие, вязкие) *схемы*.

Нейтральные схемы не изменяют амплитуды волн в процессе многократного повторения вычислений. Выше показано, что для таких схем множитель перехода с одного временного слоя точек на последующий слой точек  $|\lambda| \equiv 1$  и  $A^\tau = A^0$ . Примером нейтральной схемы является схема Кранка–Николсона (3.8) (см. рис. 4.4).

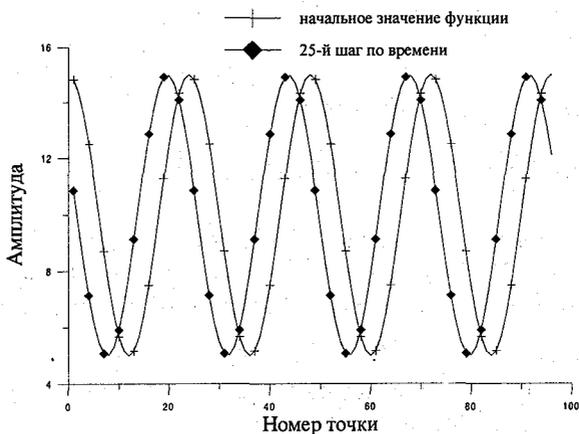


Рис. 4.4.

Результаты интегрирования линейного уравнения адвекции, аппроксимированного схемой Кранка–Николсона.

Для диссипативных схем  $|\lambda| < 1$  и, значит, в процессе интегрирования уравнений наблюдается уменьшение амплитуд волн. Следовательно, такие схемы дают  $A^0 > A^1 > A^2 > \dots > A^\tau > A^{\tau+1}$ . Поэтому решения, получаемые с помощью диссипативных схем, оказываются затухающими (т.е. абсолютно устойчивыми). Такой схемой является, например, неявная схема односторонних разностей (2.4) (рис. 4.5).

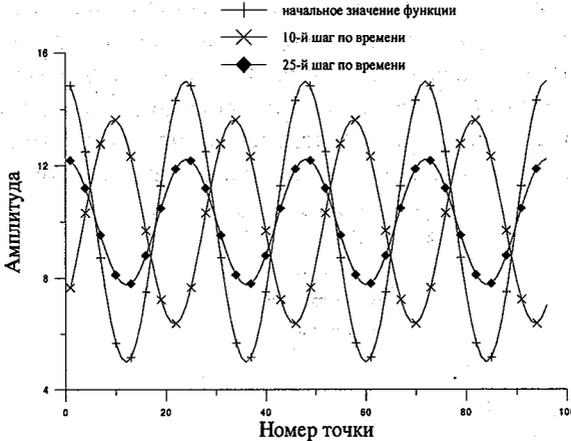


Рис. 4.5.

Результаты интегрирования линейного уравнения адвекции, аппроксимированного неявной схемой односторонних разностей.

Действительно, применив названную схему к уравнению адвекции (2.16), получим сеточное уравнение

$$(U_m^{\tau+1} - U_m^\tau) / \Delta t = -C(U_m^{\tau+1} - U_{m-1}^{\tau+1}) / \Delta x, \quad C \geq 0, \quad (4.37)$$

для которого

$$|\lambda| = \{ [1 + \mu(1 - \cos k \Delta x)]^2 + \mu \sin^2 k \Delta x \}^{-1/2} < 1, \quad (4.38)$$

т.е. схема (4.37) абсолютно устойчивая.

Поскольку амплитуда моделируемой волны является эквивалентом энергии, которую несет эта волна, то уменьшение амплитуды в процессе интегрирования линейного уравнения адвекции по схеме (4.37) означает, что энергия волны должна расходоваться на совершение какой-либо работы, а это не соответствует сути физического процесса, описываемого уравнением адвекции (2.16). Ана-

логичный вывод вытекает и в том случае, когда амплитуда волны, моделируемой по некоторой численной схеме, растет, т.е. вычислительный алгоритм порождает (генерирует) "энергию", что приводит к вычислительной неустойчивости процесса интегрирования.

Формулы типа (4.22), (4.38) легко получаются для любых разностных схем и могут использоваться для анализа зависимостей  $|\lambda| = f(\mu)$  в области устойчивости решения (т.е. для различных шагов  $\Delta t$  и  $\Delta x$ ) в соответствии с критерием КФЛ и длин волн, разрешаемых сеткой, с целью выбора оптимального значения параметра схемы  $\mu$  для самых быстрых волн, описываемых континуальным уравнением (на рис. 4.6 приведены результаты интегрирования уравнения адвекции различными конечно-разностными схемами).

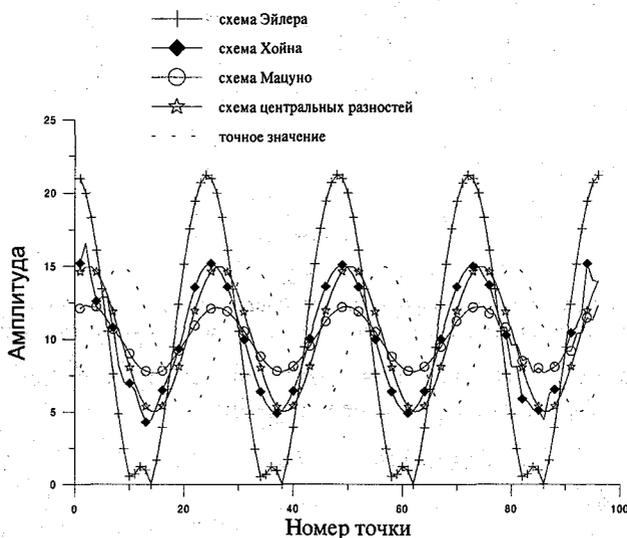


Рис. 4.6.

Результаты интегрирования линейного уравнения адвекции различными конечно-разностными схемами ( $\mu = 1$ ).

*Анонс.* Последнее замечание важно в том смысле, что критерии устойчивости и другие важные свойства численных схем не остаются неизменными при применении их к различным уравнениям, а существенно зависят от характера уравнений. Проиллюстрируем это утверждение на примерах.

### 4.3. Анализ устойчивости схем интегрирования некоторых волновых уравнений методом Неймана

Рассмотрим вначале простейшее уравнение, не содержащее производной по горизонтальной координате, именуемое *уравнением колебаний*, или осцилляционным уравнением

$$dA/dt = i\omega A, \quad A = A(t). \quad (4.39)$$

Иногда уравнение (4.39) называют также частотным уравнением. Его можно получить, например, из уравнения (4.5), положив угловую частоту  $\omega = -kC$ . Тогда величина  $A(t)$  будет выступать как амплитуда решения линейного уравнения адвекции. Будем считать амплитуду  $A(t)$  в (4.39) комплексной величиной. В этом случае общее решение двух уравнений (для реальной и мнимой частей движения) имеет вид:

$$A(t) = A(0) \exp(i\omega t) \quad (4.40)$$

или, для дискретных моментов времени  $t = \tau \Delta t$ ,

$$A(t) = A(0) \exp(i\omega \tau \Delta t) \quad (4.41)$$

и означает, что при  $\tau \rightarrow \infty$  в комплексной  $A$ -плоскости модуль амплитуды остается неизменным (в соотношении (4.15) величина  $|\lambda| = 1$ ), а его аргумент (иначе, фаза) изменяется при переходе с уровня  $\tau$  на последующий уровень  $\tau + 1$  на угол  $\theta = \omega \Delta t$ . Следовательно, как указывалось выше,

$$\exp(i\omega \Delta t) = \lambda = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Тогда в точном решении

$$|\lambda| = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^{1/2} = 1,$$

$$\theta = \arctg(\lambda_{\text{Im}}/\lambda_{\text{Re}}),$$

$$\exp(i\theta) = \lambda^{\tau},$$

где  $\tau\theta$  — фаза в решении на некотором временном слое  $\tau$ . На рис. 4.7 показаны  $A^0$  и  $\theta$  — соответственно амплитуда и фаза в точном решении на исходном временном слое  $\tau$ ,  $\delta\theta$  — изменение фазы в решении за один шаг по времени.

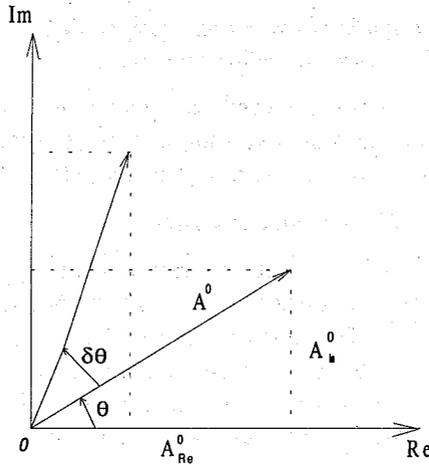


Рис. 4.7.

Геометрическая интерпретация решения уравнения колебаний  $A^\tau = A^0 \exp(\omega \tau \Delta t)$ . Re – действительная ось, Im – мнимая ось.

Таким образом, формула (4.13), отражающая метод Неймана, формально запишется в виде:

$$A^{\tau+1} = \lambda A^\tau \equiv |\lambda| A^\tau = |\lambda| A^0. \quad (4.42)$$

Здесь  $|\lambda| \equiv \exp(i\varphi)$ , где  $\varphi$  – изменение фазы в численном решении за один шаг по времени. Рассматривая множитель перехода в комплексной  $\lambda$ -плоскости как  $\lambda = \lambda_{Re} + i\lambda_{Im}$ , получим изменение фазы в решении с помощью конкретной схемы

$$\varphi = \arctg(\lambda_{Im}/\lambda_{Re}). \quad (4.43)$$

Относительное изменение фазы находится по формуле

$$\varphi/\omega \Delta t = \varphi/\theta = (1/\theta) \arctg(\lambda_{Im}/\lambda_{Re}). \quad (4.44)$$

Для обеспечения устойчивости численного решения (4.42) будем требовать выполнения условия (4.21) и дадим определение временных разностных схем в зависимости от их влияния на фазовую скорость волн:

- при  $\varphi/\omega \Delta t = 1$  – нейтральная схема,
- при  $\varphi/\omega \Delta t < 1$  – замедляющая схема,

– при  $\varphi/\omega\Delta t > 1$  – ускоряющая схема.

Проведем анализ изменений фазы численного решения для некоторых схем.

**Явная двухуровневая схема.** Конечно-разностный аналог уравнения колебаний в этом случае имеет вид

$$A^{\tau+1} = A^{\tau} + i\omega\Delta t A^{\tau}.$$

Отсюда множитель перехода

$$\lambda = 1 + i\omega\Delta t,$$

то есть

$$\lambda_{\text{Re}} = 1, \lambda_{\text{Im}} = \omega\Delta t.$$

Следовательно,

$$\varphi/\omega\Delta t = (1/\omega\Delta t)\text{arctg}(\omega\Delta t).$$

Поскольку  $(1/\omega\Delta t)\text{arctg}(\omega\Delta t) < 1$ , то  $\varphi/\omega\Delta t < 1$ , и, следовательно, явная двухуровневая схема является замедляющей.

**Схема центральных разностей** имеет вид

$$A^{\tau+1} = A^{\tau-1} + i\omega 2\Delta t A^{\tau}.$$

Отсюда

$$\lambda_1 = \sqrt{1 - (\omega\Delta t)^2} + i\omega\Delta t,$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{1 - (\omega\Delta t)^2} + i\omega\Delta t,$$

$$\lambda_{1,\text{Re}} = \sqrt{1 - (\omega\Delta t)^2}, \lambda_{1,\text{Im}} = \omega\Delta t,$$

$$\lambda_{2,\text{Re}} = -\sqrt{1 - (\omega\Delta t)^2}, \lambda_{2,\text{Im}} = \omega\Delta t.$$

Следовательно,

$$\frac{\varphi_1}{\omega\Delta t} = \frac{1}{\omega\Delta t} \text{arctg} \left( \frac{\omega\Delta t}{\sqrt{1 - (\omega\Delta t)^2}} \right),$$

$$\frac{\varphi_2}{\omega\Delta t} = \frac{1}{\omega\Delta t} \text{arctg} \left( \frac{\omega\Delta t}{-\sqrt{1 - (\omega\Delta t)^2}} \right).$$

При  $0 < \omega\Delta t < 1$  имеем:  $0 < \varphi_1 < \pi/2$ ,  $\pi/2 < \varphi_2 < \pi$  ( $\varphi_2 < \pi - \varphi_1$ ).

При  $\omega\Delta t < 0$ , ( $\omega\Delta t < 1$  и, следовательно,  $\varphi_1 = -\pi - \varphi_1$ ).

Для малых  $\varphi$  следует:  $\varphi_1/\omega\Delta t > 1$ ,  $\varphi_2/\omega\Delta t > 1$ , т.е. для физической и вычислительной мод схема является ускоряющей.

Если рассматривать поведение физической и вычислительной мод в комплексной плоскости, то за шаг по времени физическая мода поворачивается против часовой стрелки на угол  $\varphi_1$ , а вычислительная мода – по часовой стрелке на угол  $\varphi_2$ . При этом угол поворота обеих мод за шаг по времени по абсолютному решению превышает угол поворота в точном решении.

Наглядное представление о влиянии схемы интегрирования на фазовую скорость волн дает график на рис. 4.8. Вычислительная мода схемы центральных разностей (ЦР) на графике не приведена, так как она получается из физической моды умножением на  $-1$ .

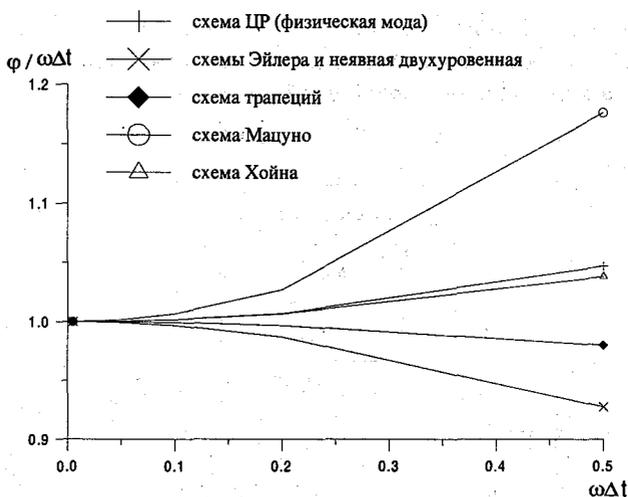


Рис. 4.8. Зависимость фазы численного решения уравнения колебаний от параметра увеличения.  $\omega\Delta t$

*Резюме.* Для обеспечения большей точности расчетов необходимо, чтобы множитель перехода  $\lambda$ , соответствующий физическому решению задачи, был близок к единице, а фазовая скорость волновых мод не искажалась.

*Анонс.* Применим изложенные рассуждения к анализу схемы Эйлера (2.3), записав ее для уравнения колебаний (4.39):

$$A^{\tau+1} = (1 + i\omega\Delta t)A^{\tau} = (1 + ip)A^{\tau}, \omega > 0. \quad (4.45)$$

Отсюда

$$|\lambda| = (1 + p^2)^{1/2} > 1, \quad (4.46)$$

т.е. для уравнения колебаний схема Эйлера неустойчива для любых шагов интегрирования  $\Delta t$  и угловых частот  $\omega$ .

Теперь применим схему Эйлера к **фрикционному уравнению** (к уравнению трения)

$$dA/dt = -hA, h > 0, \quad (4.47)$$

описывающему равнозамедленное движение. Получим

$$A^{\tau+1} = (1 - h\Delta t)A^{\tau}. \quad (4.48)$$

Схема (4.48) будет устойчивой, если

$$|\lambda| = |1 - h\Delta t| \leq 1. \quad (4.49)$$

Для исключения знакопеременных осцилляций численного решения от шага к шагу необходимо при заданном  $h$  выбрать  $\Delta t$  таким, чтобы

$$h\Delta t < 1. \quad (4.50)$$

Для **уравнения теплопроводности** (уравнения переноса тепла или, иначе, диффузионного уравнения Фикка)

$$\partial U/\partial t = \alpha \partial^2 U/\partial x^2, \alpha > 0, \quad (4.51)$$

схема Эйлера имеет вид

$$(U_m^{\tau+1} - U_m^{\tau})/\Delta t = \alpha(U_{m+1}^{\tau} + U_{m-1}^{\tau} - 2U_m^{\tau})/(\Delta x)^2. \quad (4.52)$$

Подставляя в (4.52) волновое решение в дискретном виде (4.41), получим характеристическое уравнение для множителя перехода  $\lambda$ :

$$\lambda = 1 - 2\alpha\Delta t/\Delta x^2 + i(2\alpha\Delta t/\Delta x^2) \sin k\Delta x. \quad (4.53)$$

Откуда

$$|\lambda| = \{1 - 4(\alpha\Delta t/\Delta x^2) [1 - (\alpha\Delta t/\Delta x^2)(1 + \sin^2 k\Delta x)]\}^{1/2}. \quad (4.54)$$

Здесь  $\sin^2 k\Delta x \leq 1$ , поэтому схема Эйлера для уравнения теплопро-

водности (4.52) будет счетно устойчивой, если

$$\alpha \Delta t / \Delta x^2 \leq 1/4. \quad (4.55)$$

*Резюме.* Схема Эйлера условно устойчива для уравнения трения и уравнения теплопроводности (см. критерии (4.50) и (4.55)), однако она дает всегда неустойчивое решение для уравнения колебания и линейного адвективного уравнения (если в последнем применяются центрированные разности для аппроксимации производной по пространству  $\partial U / \partial x$ . Если же использовать направленные против потока разности, то схема становится условно устойчивой согласно критерию (4.23)).

*Анонс.* Рассмотрим теперь *двумерное уравнение адвекции* (т.е. уравнение, описывающее распространение возмущений вдоль направлений  $x$  и  $y$ ):

$$\partial U / \partial t + C_x \partial U / \partial x + C_y \partial U / \partial y = 0, \quad C_x, C_y = \text{const}, \quad (4.56)$$

где:  $U = U(x, y, t)$  – функция двух пространственных переменных;  $C_x, C_y$  – составляющие вектора скорости двумерного горизонтального переноса. Тогда результирующая скорость адвекции дается выражением

$$C = (C_x^2 + C_y^2)^{1/2}. \quad (4.57)$$

Аппроксимируем в уравнении (4.56) пространственные производные разностями второго порядка точности

$$(\partial U / \partial t)_{m,j} = -(C_x / 2\Delta x)(U_{m+1,j} - U_{m-1,j}) - (C_y / 2\Delta y)(U_{m,j+1} - U_{m,j-1}) \quad (4.58)$$

(где  $x = m\Delta x$ ,  $y = j\Delta y$ ;  $\Delta x = \Delta y = \Delta S$ ;  $U(m\Delta x, j\Delta y) = U_{m,j}$ ) и исследуем устойчивость решения, которое генерирует сконструированное полудискретное уравнение (4.58). В качестве частного решения уравнения (4.58) подставим

$$U_{m,j} = \text{Re}\{A(t) \exp[i(kx + ny)]\}, \quad (4.59)$$

в котором  $k$  и  $n$  волновые числа по координатным осям  $x$  и  $y$ . Подставляя решение (4.59) в уравнение (4.58), приходим к уравнению колебаний

$$\frac{dA}{dt} = -i \left[ \frac{C_x}{\Delta S} \sin(k\Delta S) + \frac{C_y}{\Delta S} \sin(n\Delta S) \right], \quad A = A(t). \quad (4.60)$$

Если в уравнении (4.60) производную по времени аппроксимировать центральными разностями, то получим следующее выражение для параметра увеличения:

$$\omega \Delta t = \arcsin \left[ \frac{C_x \Delta t}{\Delta S} \sin(k \Delta S) + \frac{C_y \Delta t}{\Delta S} \sin(n \Delta S) \right].$$

Откуда вытекает следующее: чтобы угловая частота была вещественной величиной, должен выполняться критерий

$$\left| \frac{C_x \Delta t}{\Delta S} \sin(k \Delta S) + \frac{C_y \Delta t}{\Delta S} \sin(n \Delta S) \right| \leq 1. \quad (4.61)$$

Разумеется, этот критерий должен удовлетворяться для любых допустимых разрешением двумерной сетки значений волновых чисел  $k$  и  $n$ . Пусть, например,

$$C_x = C_y = \frac{\sqrt{2} \cdot C}{2}; \quad \sin k \Delta S = \sin n \Delta S = 1,$$

тогда на основании неравенства (4.61) получаем критерий устойчивости схемы центральных разностей для двумерного уравнения адвекции:

$$\frac{\sqrt{2} \cdot C \cdot \Delta t}{\Delta S} \leq 1. \quad (4.62)$$

Следовательно, в случае двумерного переноса шаг интегрирования по времени должен выбираться в  $\sqrt{2}$  раз меньшим, чем в одномерном случае. Заметим, что также, как и в одномерном случае, минимум устойчивости связан с длинами волн по  $x$  и  $y$ , которые в два раза больше, чем самые короткие допустимые волны. Двумерное волновое число для этой волны  $(k^2 + n^2)^{1/2}$  оказывается в  $\sqrt{2}$  раз больше, чем волновые числа вдоль осей  $x$  и  $y$ , а длина этой волны будет короче в  $\sqrt{2}$  раз (при  $k = n$ ).

*Анонс.* Рассмотрим теперь вопрос о вычислительной устойчивости численного решения *волнового уравнения* (описывающего распространение акустических волн)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad C = \text{const}, \quad (4.63)$$

генерируемого схемой центральных разностей:

$$U_m^{\tau+1} - 2U_m^\tau + U_m^{\tau-1} = (C \Delta t / \Delta x)^2 (U_{m+1}^\tau + U_{m-1}^\tau - 2U_m^\tau). \quad (4.64)$$

Подставляя в схему (4.64) дискретное волновое решение в форме (4.5), после несложных преобразований получим:

$$\omega = \pm (2/\Delta t) \arcsin[(C \Delta t / \Delta x) \sin(k \Delta x / 2)]. \quad (4.65)$$

Вычислительная схема (4.64) будет устойчивой, если частота  $\omega = \omega_{Re}$ . Однако это возможно лишь в случае, если

$$|(C \Delta t / \Delta x) \sin(k \Delta x / 2)| \leq 1. \quad (4.66)$$

Так как  $|\sin(k \Delta x / 2)| \leq 1$ , то необходимым условием вычислительной устойчивости схемы (4.64) является следующее неравенство

$$|C \Delta t / \Delta x| \leq 1. \quad (4.67)$$

Внешне условие (4.67) совпадает с условиями (4.29) и (4.23). Однако в последних под величиной  $C$  подразумевается характерная фазовая скорость (скорость перемещения) крупномасштабных волн ( $C \cong 10$  м/с), а в условии (4.67) величина  $C$  имеет смысл фазовой скорости акустических (звуковых) волн ( $C \cong 330$  м/с). Следовательно, при фиксированном шаге по пространству ( $\Delta x = 300$  км) для интегрирования линейного уравнения адвекции (2.16) по схеме центральных разностей шаг по времени  $\Delta t \leq 500$  мин, а для волнового уравнения (4.63)  $\Delta t \leq 15$  мин.

*Анонс.* Рассмотрим более сложные волновые уравнения, описывающие распространение звуковых, гравитационных и длинных волн, существующих в атмосфере.

#### *а) Уравнение для звуковых волн*

Несложно показать, что на основе линеаризованного уравнения движения вдоль оси  $x$

$$\partial U' / \partial t + \bar{U} \partial U' / \partial x = -\rho^{-1} \partial P' / \partial x \quad (4.68)$$

и линеаризованного одномерного уравнения неразрывности

$$\partial P' / \partial t + \bar{U} \partial P' / \partial x + (\kappa P) \partial U' / \partial x = 0, \quad (4.69)$$

(где  $\bar{U}$ ,  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{P}$  – скорость, плотность и давление основного стационарного движения, на которое накладываются малые отклонения  $U'$ ,  $P'$ ;  $\kappa = c_p / c_v \cong 1.4$ ;  $c_p$  и  $c_v$  – удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении и объеме соответственно) получается волновое уравнение для звуковых волн:

$$(\partial / \partial t + \bar{U} \partial / \partial x) (\partial P' / \partial t + \bar{U} \partial P' / \partial x) = (\kappa P / \bar{\rho}) \partial^2 P' / \partial x^2, \quad (4.70)$$

имеющее периодическое (“волновое”) решение:

$$P' = A \exp[i k(x - C t)]. \quad (4.71)$$

Здесь  $C$ ,  $A$  и  $k$  – соответственно постоянные фазовая скорость, амплитуда и волновое число рассматриваемого атмосферного возмущения.

Путем подстановки можно убедиться, что функция типа (4.71) является решением волнового уравнения (4.70), если

$$C = \bar{U} \pm (\kappa P / \bar{\rho})^{1/2} = \bar{U} \pm (\kappa R \bar{T})^{1/2}, \quad (4.72)$$

т.е. волна смещается в оба направления вдоль оси  $x$  со скоростью звука плюс скорость среднего ветра.

### **б) Уравнение для гравитационных волн**

Если в одномерных уравнениях

$$\begin{aligned} \partial U / \partial t + U \partial U / \partial x + g \partial h / \partial x &= 0, \\ \partial h / \partial t + U \partial h / \partial x + h \partial U / \partial x &= 0, \end{aligned} \quad (4.73)$$

описывающих эволюцию полей функций  $U$  и  $h$  на оси  $x$  в тонком слое тяжелой однородной невязкой несжимаемой (плотность  $\rho = \text{const}$ ) физической среде, положить

$$U = \bar{U} + U', \quad h = H + h',$$

где  $H$  – основное положение свободной поверхности, разделяющей, скажем, воду и воздух, то линеаризованные уравнения (4.73) запишутся в виде:

$$\partial U' / \partial t + \bar{U} \partial U' / \partial x + g \partial h' / \partial x = 0, \quad (4.74)$$

$$\partial h' / \partial t + \bar{U} \partial h' / \partial x + H \partial U' / \partial x = 0. \quad (4.75)$$

Исключая из этих уравнений функцию  $U'$ , приведем их к волновому уравнению

$$(\partial / \partial t + \bar{U} \partial / \partial x)(\partial h' / \partial t + \bar{U} \partial h' / \partial x) = gH. \quad (4.76)$$

Решение уравнения (4.76) аналогично решению уравнения (4.70) в форме (4.71):

$$h' = A \exp [i k(x - Ct)]. \quad (4.77)$$

Указанное решение удовлетворяет уравнению (4.76), если фазовая скорость гравитационных волн определяется формулой:

$$C = \bar{U} \pm (gH)^{1/2}. \quad (4.78)$$

Заметим, что в океанологии решение (4.78) известно как скорость распространения гравитационных волн для "мелкой воды".

**в) Уравнение для длинных (горизонтально-поперечных) волн (волн Россби)** можно получить, если считать атмосферу несжимаемой и горизонтально однородной, а движение горизонтальным. При этих условиях вертикальная компонента вектора скорости  $W = 0$ , уравнение неразрывности в декартовой системе координат имеет вид

$$\partial U / \partial x + \partial V / \partial y = 0, \quad (4.79)$$

а уравнение для вихря (завихренности) поля скорости  $\Omega_z = \partial V / \partial x - \partial U / \partial y$  запишется следующим образом:

$$\partial \Omega_z / \partial t + U \partial \Omega_z / \partial x + V \partial \Omega_z / \partial y + \beta V = 0. \quad (4.80)$$

Здесь

$$\beta = \partial(2\omega_0 \sin \varphi) / \partial y = (2\omega_0 \cos \varphi) / r_0$$

– изменение параметра Кориолиса в направлении к высоким широтам (именуемое параметром Россби).

Для определения фазовой скорости длинных волн положим, что движение волн происходит только в направлении оси  $x$ , т.е. компоненты вектора горизонтального переноса  $U$  и  $V$  не зависят от  $y$  (ось  $y$  направлена на север) и, значит,

$$\Omega_z = \partial V / \partial x, \quad \partial U / \partial x = 0, \quad U = \bar{U} = \text{const.}$$

В этом случае уравнение (4.80) приводится к виду

$$\partial^2 V / \partial x \partial t + \bar{U} \partial V^2 / \partial x^2 + \beta V = 0 \quad (4.81)$$

и имеет периодическое волновое решение

$$V = A \exp[i k(x - Ct)], \quad (4.82)$$

если

$$C = \bar{U} - \beta / (2\pi/L) \quad (4.83)$$

Волны Россби (инерционные волны), фазовая скорость которых дается формулой (4.83), перемещаются преимущественно с запада на восток с фазовыми скоростями  $C \sim 15-20$  км/час и приводят к существенным изменениям погоды, поэтому их прогнозирование (предвычисление) должно осуществляться атмосферной моделью с высокой точностью.

Применяя теперь схему центральных разностей для интегрирования волновых уравнений (4.70), (4.76), (4.81), описывающих эволюцию звуковых, гравитационных и длинных волн, нетрудно убедиться в том, что во всех случаях вычислительная схема будет условно устойчивой согласно критерию КФЛ:  $\Delta t \leq \Delta x / C$ , где  $C$  — фазовая скорость волн, которая дается формулами (4.72), (4.78) и (4.83) соответственно.

#### 4.4. Анализ устойчивости конечно-разностным схем энергетическим методом

Суть рассматриваемого метода заключается в следующем. Если известно, что точное решение дифференциальной задачи ограничено, то целесообразно проверить, ограничена ли  $\sum_m (f_m^5)^2$ . Если указанная сумма ограничена, то, следовательно, и каждое значение  $f_m^5$  также должно быть ограничено, а это доказывает устойчивость используемой численной схемы. Метод называется энергетическим, поскольку во многих физических приложениях выражение  $f^2$  пропорционально некоторой форме энергии. Так, квадраты составляющих скорости ветра и геопотенциала (давления) пропорциональны соответственно кинетической и потенциальной энергиям.

Энергетический метод более универсален, чем метод Неймана, так как с его помощью может быть проанализирована устойчивость не только линейных, но и некоторых нелинейных конечно-разностных схем.

Итак, анализ устойчивости конечно-разностных схем энергетическим методом строится на основе анализа суммарного по всем точкам расчетной сетки квадрата решения на двух последовательных уровнях по времени.

Запишем явную схему для линейного уравнения адвекции (2.16) с помощью направленной вперед разности по времени и направленной против потока разности по пространству

$$\frac{f_m^{\tau+1} - f_m^\tau}{\Delta t} + C \cdot \frac{f_m^\tau - f_{m-1}^\tau}{\Delta x} = 0, C > 0. \quad (4.84)$$

На границе области определения решения уравнения (4.84) (в точке  $m = M$ ) поставим периодические (циклические) граничные условия  $f_0 = f_M$ . Возведем в квадрат соотношение (4.84) и выполним суммирование по всем точкам сетки  $m$ .

$$\sum_m (f_m^{\tau+1})^2 = (1-\mu)^2 \sum_m (f_m^\tau)^2 + 2\mu(1-\mu) \sum_m f_m^\tau f_{m-1}^\tau + \mu^2 \sum_m (f_{m-1}^\tau)^2 \quad (4.85)$$

В силу периодических граничных условий

$$\sum_m (f_m^\tau)^2 = \sum_m (f_{m-1}^\tau)^2,$$

поэтому выражение (4.85) можно записать в следующем виде:

$$\sum_m (f_m^{\tau+1})^2 = [(1-\mu)^2 + \mu^2] \sum_m (f_m^\tau)^2 + 2\mu(1-\mu) \sum_m f_m^\tau f_{m-1}^\tau \quad (4.86)$$

Применим к последнему слагаемому в (4.86) неравенство Шварца

$$\sum ab \leq \sqrt{\sum a^2 \cdot \sum b^2}. \quad (4.87)$$

Тогда, учитывая периодичность граничных условий, получим

$$\sum_m f_m^\tau f_{m-1}^\tau \leq \sqrt{\sum_m (f_m^\tau)^2 \sum_m (f_{m-1}^\tau)^2} = \sqrt{\sum_m (f_m^\tau)^2 \sum_m (f_m^\tau)^2} = \sum_m (f_m^\tau)^2 \quad (4.88)$$

Если множитель  $2\mu(1-\mu)$  положителен, то, заменяя  $\sum_m f_m^\tau f_{m-1}^\tau$  в выражении (4.86) на  $\sum_m (f_m^\tau)^2$  согласно (4.88), мы уве-

личиваем правую часть (4.86) по сравнению с тем, какой она была до применения неравенства Шварца. Поэтому

$$\sum_m (f_m^{\tau+1})^2 \leq [(1-\mu)^2 + \mu^2 + 2\mu(1-\mu)] \sum_m (f_m^\tau)^2$$

или

$$\sum_m (f_m^{\tau+1})^2 \leq \sum_m (f_m^\tau)^2. \quad (4.89)$$

Неравенство (4.89) означает ограниченность суммы квадратов, из чего следует ограниченность величины  $f_m^{\tau+1}$ . Таким образом, доказано, что схема (4.84) при выполнении условия  $(1-\mu) > 0$  и периодических граничных условиях является устойчивой.

Аналогичным образом проанализируем теперь явную схему аппроксимации линейного уравнения адвекции (2.16) с направленной вперед разностью по времени и направленной по потоку разностью по пространству

$$\frac{f_m^{\tau+1} - f_m^\tau}{\Delta t} + C \cdot \frac{f_{m+1}^\tau - f_m^\tau}{\Delta x} = 0, \quad C > 0. \quad (4.90)$$

Возведем в квадрат конечно-разностное уравнение (4.90) и выполним суммирование по всем точкам сеточной области:

$$\sum_m (f_m^{\tau+1})^2 = (1+\mu)^2 \sum_m (f_m^\tau)^2 - 2\mu(1+\mu) \sum_m f_m^\tau f_{m+1}^\tau + \mu^2 \sum_m (f_{m+1}^\tau)^2. \quad (4.91)$$

При использовании периодических граничных условий ( $f_M = f_0$ )

$$\sum_m (f_m^\tau)^2 = \sum_m (f_{m+1}^\tau)^2$$

выражение (4.91) записывается в виде

$$\sum_m (f_m^{\tau+1})^2 = [(1+\mu)^2 + \mu^2] \sum_m (f_m^\tau)^2 - 2\mu(1+\mu) \sum_m f_m^\tau f_{m+1}^\tau. \quad (4.92)$$

Последнее слагаемое в формуле (4.92) преобразуется (в силу неравенства Шварца и периодичности граничных условий) к виду

$$\sum_m f_m^\tau f_{m+1}^\tau \leq \sqrt{\sum_m (f_m^\tau)^2 \sum_m (f_{m+1}^\tau)^2} = \sqrt{\sum_m (f_m^\tau)^2 \sum_m (f_m^\tau)^2} = \sum_m (f_m^\tau)^2. \quad (4.93)$$

Сомножитель  $2\mu(1+\mu)$  всегда положителен, поэтому, заменяя  $\sum_m f_m^\tau f_{m+1}^\tau$  в выражении (4.92) на  $\sum_m (f_m^\tau)^2$  согласно (4.93), мы уменьшаем правую часть (4.92) по сравнению с изначальной. Поэтому

$$\sum_m (f_m^{\tau+1})^2 \geq [(1+\mu)^2 + \mu^2 - 2 \cdot \mu(1+\mu)] \cdot \sum_m (f_m^\tau)^2$$

или

$$\sum_m (f_m^{\tau+1})^2 \geq \sum_m (f_m^\tau)^2. \quad (4.94)$$

Неравенство (4.94) означает увеличение суммы квадратов решения во времени, из чего следует, что во времени будет расти и амплитуда решения, генерируемого схемой (4.90). Значит, рассматриваемая схема является неустойчивой.

Одним из достоинств энергетического метода является возможность анализа нелинейных уравнений.

Запишем явную схему для нелинейного уравнения адвекции

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.95)$$

с помощью направленной вперед разности по времени и направленной против потока разности по пространству

$$\frac{u_m^{\tau+1} - u_m^\tau}{\Delta t} + u_q^\tau \cdot \frac{u_m^\tau - u_{m-1}^\tau}{\Delta x} = 0. \quad (4.96)$$

На границе области определения решения уравнения (4.96) поставим периодические граничные условия.

Возведем выражение (4.96) в квадрат и выполним суммирование по всем точкам сетки  $m = 1, \dots, M$ :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M (u_m^{\tau+1})^2 &= \sum_{m=1}^M (u_m^{\tau})^2 + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sum_{m=1}^M (u_m^{\tau})^4 + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sum_{m=1}^M (u_m^{\tau})^2 (u_{m-1}^{\tau})^2 \\ &- 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{m=1}^M (u_m^{\tau})^3 + 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{m=1}^M (u_m^{\tau})^2 u_{m-1}^{\tau} - 2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sum_{m=1}^M (u_m^{\tau})^3 u_{m-1}^{\tau}. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Воспользовавшись неравенством Шварца (4.87) и учитывая периодичность граничных условий, получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M (u_m^{\tau})^2 u_{m-1}^{\tau} &\leq \sum_{m=1}^M (u_m^{\tau})^3, \\ \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sum_{m=1}^M (u_m^{\tau})^4 + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sum_{m=1}^M (u_m^{\tau})^2 (u_{m-1}^{\tau})^2 - \\ - 2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \sum_{m=1}^M (u_m^{\tau})^3 u_{m-1}^{\tau} &\approx 0. \end{aligned} \quad (4.98)$$

После подстановки (4.98) в (4.97) имеем  $\sum_{m=1}^M (u_m^{\tau+1})^2 \leq \sum_{m=1}^M (u_m^{\tau})^2$ .

Следовательно, при периодических граничных условиях суммарный квадрат амплитуды численного решения, генерируемый конечно-разностной схемой (4.96), не растет во времени, т.е. схема является устойчивой.

## Глава 5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МОДЫ И СПОСОБЫ ИХ ПОДАВЛЕНИЯ

### 5.1. Понятие о вычислительных модах

Вычислительные моды возникают при использовании трехуровневных схем интегрирования. Так, применив схему центральных разностей (2.11) к уравнению колебаний (4.39), получим соотношение

$$A^{\tau+1} = A^{\tau-1} + 2i\omega\Delta t A^{\tau}, \quad (5.1)$$

где амплитуда  $A^{\tau-1}$  выступает как вычислительное начальное условие, получаемое с помощью какой-либо двухуровневой схемы. Подстановка (4.13) в схему (5.1) приводит к квадратному уравнению для множителя перехода  $\lambda$ :

$$\lambda^2 - 2ip\lambda - 1 = 0, \quad p = \omega\Delta t. \quad (5.2)$$

Из него следует два решения волнового уравнения типа (5.1):

$$A^{\tau+1} = \lambda_1 A^{\tau} = (\sqrt{1-p^2} + ip) A^{\tau}, \quad (5.3)$$

$$A^{\tau+1} = \lambda_2 A^{\tau} = (-\sqrt{1-p^2} + ip) A^{\tau},$$

где при  $\Delta t \rightarrow 0$  множитель  $\lambda_1 \rightarrow 1$ , а  $\lambda_2 \rightarrow -1$ .

В общем случае  $z$ -уровневая схема дает  $(z-1)$  решение вида (5.3). Решения, соответствующие одному из характеристических корней  $\lambda$ , называют модой. Решения, связанные с  $\lambda_1$ , называют физическими модами, так как исходные дифференциальные уравнения всегда описывают какие-либо физические процессы. Решения, связанные с  $\lambda_2, \dots, \lambda_{z-1}$ , не являются приближениями к точному решению и поэтому называются вычислительными модами.

*Анонс.* С помощью уравнения

$$dA/dt = 0, \quad A = \text{const}, \quad \omega = 0 \quad (5.4)$$

покажем необходимость хорошего выбора вычислительного начального условия  $A^{\tau=1}$  с целью получения удовлетворительного численного решения. Применив схему центральных разностей (2.11) к уравнению (5.4), получим:

$$A^{\tau+1} = A^{\tau-1} \quad (5.5)$$

Пусть некоторая двухуровневая схема дала величину амплитуды  $A_1^{\tau=1} = A_1^{\tau=0}$ . Тогда для всех временных слоев ( $\tau + 1$ ) на основе равенств (5.5) и (4.13) получим:

$$A^{\tau+1} = \lambda_1 A_1^{\tau} = \lambda_1^{\tau} A_1^0, \lambda_1 = 1, \quad (5.6)$$

т.е. численное решение оказывается равным точному решению (в котором  $A = \text{const}$ ) и состоит только из физической моды.

Теперь пусть вычислительное значение содержит амплитуду  $A_2^{\tau=1} = -A_2^{\tau=0}$ . Тогда для любых временных слоев ( $\tau + 1$ ) можно записать:

$$A_2^{\tau+1} = -A_2^{\tau} = \lambda_2 A_2^{\tau} = -\lambda_2^{\tau} A_2^{\tau=0}, \quad (5.7)$$

т.е. решение содержит только вычислительную моду.

*Резюме.* В общем случае решение любого линейного уравнения в частных производных представляет собой линейную комбинацию (суперпозицию) физической и вычислительной мод, т.е.

$$A^{\tau} = \alpha \lambda_1^{\tau} A_1^{\tau=0} + \beta \lambda_2^{\tau} A_2^{\tau=0}, \quad (5.8)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – весовые коэффициенты, с которыми входят эти моды в результирующее решение. Названное решение должно удовлетворять начальным условиям задачи, т.е.

$$A^0 = \alpha A_1^0 + \beta A_2^0, \quad (5.9)$$

$$A^1 = \alpha \lambda_1 A_1^0 + \beta \lambda_2 A_2^0.$$

Решив систему двух линейных алгебраических уравнений (5.9) относительно амплитуд  $A_1^0$  и  $A_2^0$  и подставив результат в формулу (5.8), найдем

$$A^{\tau} = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} [\lambda_1^{\tau} (A^1 - \lambda_2 A^0) - \lambda_2^{\tau} (A^1 - \lambda_1 A^0)], \quad (5.10)$$

где амплитуды физической ( $A^1 - \lambda_2 A^0$ ) и вычислительной ( $A^1 - \lambda_1 A^0$ ) мод пропорциональны вычислительному начальному условию  $A^1$ . Поскольку полностью исключить вычислительную моду не удастся, то, чтобы она не забивала физическую моду при  $\tau \rightarrow \infty$ , необходимо применять наиболее точные схемы для расчета начального условия  $A^1$ , на выходе которых вычислительная мода имеет маленькую амплитуду. Таким свойством обладает, например, схема Хойна (см. Приложение 1).

*Анонс.* Рассмотрим теперь более подробно решения уравнения колебаний (5.1) для трех частных случаев множителя увеличения амплитуды  $p = \omega \Delta t$ :

$$1) |p| < 1,$$

$$2) |p| = 1,$$

$$3) |p| > 1.$$

Если  $|p| < 1$ , то  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$  (обе моды устойчивы и нейтральны).

Из формулы (4.43) следует:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \text{arctg}[p/(1-p^2)^{1/2}], \\ \varphi_2 &= \text{arctg}[-p/(1-p^2)^{1/2}]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Откуда видно, что для  $p > 0$  и для  $p < 0$  фаза вычислительной моды

$$\varphi_2 = \pm \pi - \varphi_1.$$

Чтобы обеспечить точность физической моды, ее фаза  $\varphi_1$  должна возможно точнее аппроксимировать изменение фазы точного решения  $p = \omega \Delta t$ . Так, если  $p \rightarrow 0$ , то  $\varphi_1 \rightarrow p$ .

Если  $|p| = 1$ , то из решений (5.3) вытекает, что  $\lambda_1 = \lambda_2 = ip$  и  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$  (обе моды нейтральные).

Для  $p = \pm 1$  фаза  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pm \pi/2$ , т.е. в комплексной А-плоскости модули обеих мод поворачивают на каждом шаге по времени на угол  $\pm \pi/2$ , а фаза точного решения изменяется только на  $\pm 1$ . Следовательно, при  $|p| = 1$  имеет место большая ошибка фазы.

Если  $|p| > 1$ , то

$$\lambda_{1,2} = i |p + (p^2 - 1)^{1/2}|,$$

$$|\lambda_1| = |p - (p^2 - 1)^{1/2}|,$$

$$|\lambda_2| = |p \pm (p^2 - 1)^{1/2}|.$$

Откуда при  $p > 1$  имеем  $|\lambda_1| > 1$ , а при  $p < -1$  величина  $|\lambda_2| > 1$ . В комплексной А-плоскости обе моды поворачивают за один шаг по времени на угол  $\pm \pi/2$ . Однако при  $\tau \rightarrow \infty$  амплитуда физической моды уменьшается, а амплитуда вычислительной моды растет, т.е. схема центральных разностей неустойчивая.

## 5.2. Способы подавления вычислительной неустойчивости, порождаемой трехуровневыми схемами

Для подавления вычислительной неустойчивости, связанной с наличием вычислительной моды, обычно периодически используют двухуровневые схемы (так как они исключают вычислительную моду) или любую многоуровневую схему, селективно (избирательно) подавляющую ложные решения.

*Анонс.* Проиллюстрируем последнее на примере *двухшаговой схемы Лакса-Вендрофа*, которую построим для линейного уравнения адвекции (2.16) с помощью шаблона пространственно-временной сетки, показанной на рис. 5.1.

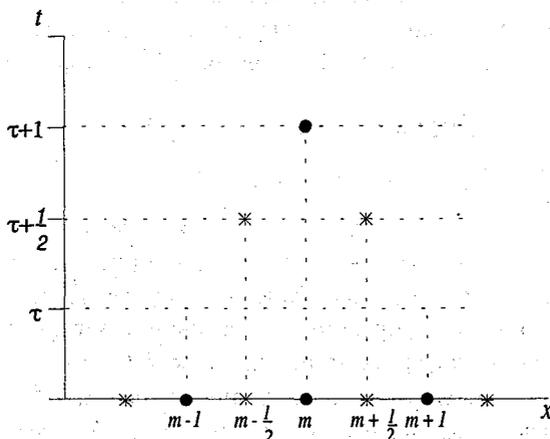


Рис. 5.1.

Нумерация узлов пространственно-временной сетки для размещения зависимых переменных при интегрировании одномерного уравнения адвекции с помощью схемы Лакса-Вендрофа.

В начале в момент времени  $\tau + 1/2$  (т.е. на полшага вперед от некоторого исходного момента  $\tau$ ), вычисляют промежуточные значения функции в точках  $m + 1/2$  и  $m - 1/2$  по следующим формулам:

$$\begin{aligned} U_{m+1/2}^{\tau+1/2} - U_{m+1/2}^{\tau} &= (-C \Delta t / 2 \Delta x) (U_{m+1}^{\tau} - U_m^{\tau}), \\ U_{m-1/2}^{\tau+1/2} - U_{m-1/2}^{\tau} &= (-C \Delta t / 2 \Delta x) (U_m^{\tau} - U_{m-1}^{\tau}), \end{aligned} \quad (5.12)$$

в которых производная  $\partial U / \partial x$  вычисляется явно и представлена направленными разностями, а величины  $(U_{m \pm 1/2})^{\tau}$  находятся как сред-

ние арифметические из значений в двух ближайших точках пространственной сетки, т.е.

$$(U_{m+1/2})^\tau = (U_{m+1}^\tau + U_m^\tau)/2, \quad (5.13)$$

$$(U_{m-1/2})^\tau = (U_m^\tau + U_{m-1}^\tau)/2.$$

Далее с помощью вычисленных значений  $(U_{m \pm 1/2})^{\tau+1/2}$  проводится расчет величин  $U_m^{\tau+1}$  по методу центральных разностей по времени и пространству:

$$U_m^{\tau+1} = U_m^\tau - (C \Delta t / \Delta x) [(U_{m+1/2})^{\tau+1/2} - (U_{m-1/2})^{\tau+1/2}]. \quad (5.14)$$

Здесь разности по времени и пространству центрированы относительно момента времени  $\tau + 1/2$  и пространственной точки  $m$ .

Подстановка равенств (5.12) с учетом (5.13) в формулу (5.14) дает:

$$\begin{aligned} (U_m^{\tau+1} - U_m^\tau) / \Delta t = & -C(U_{m+1}^\tau - U_{m-1}^\tau) / 2\Delta x + \\ & + (C^2 \Delta t / 2) (U_{m+1}^\tau - 2U_m^\tau + U_{m-1}^\tau) / (\Delta x)^2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Здесь второй член справа при  $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$  обращается в нуль, а при  $\Delta x \rightarrow 0$ , но фиксированном  $\Delta t$  стремится к выражению  $(C^2 \Delta t / 2) \partial^2 U / \partial x^2$ , которое представляет собой вычислительную (счетную) вязкость. По форме это выражение эквивалентно сеточной аппроксимации диффузионного члена  $k_0 \nabla^2 U$  (где  $k_0$  — коэффициент турбулентной вязкости в направлении оси  $x$ ;  $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2$  — оператор Лапласа), вычисляемого на интервале  $2\Delta x$  (как и диффузионный член уравнения теплопроводности (4.51)), и дает демпфирующий (диссипативный) эффект. Зависимость диссипативных свойств от длины волны  $L$  часто является полезным свойством разностной схемы, так как существуют серьезные трудности при конечно-разностных вычислениях для коротких волн (особенно в окрестности длин  $L = 2\Delta x$ ).

Чтобы проверить схему Лакса-Вендрофа (5.15) на устойчивость, подставим точное (тестовое) решение (4.10) в схему (5.15). В результате получим:

$$A^{\tau+1} = [1 + \mu^2 (\cos k\Delta x - 1) - i \mu \sin k\Delta x] A^\tau = \lambda A^\tau, \quad (5.16)$$

где  $\mu = C \Delta t / \Delta x$ . В соотношении (5.16) множитель перехода

$$|\lambda| = [1 - 4\mu^2(1 - \mu^2) \sin^4(k \Delta x/2)]^{1/2}. \quad (5.17)$$

Из формулы (5.17) вытекает, что схема Лакса–Вендрофа будет устойчивой, если выполняется условие КФЛ.

Теперь исследуем зависимость степени подавления волновых мод схемой Лакса–Вендрофа от их длины  $L$  и от параметра  $\mu$ . С этой целью найдем минимум пучка кривых  $|\lambda| = f(\mu)$  для любых волновых чисел  $k$ :

$$\partial |\lambda| / \partial \mu = -4\mu(1 - 2\mu^2) \sin^4(k \Delta x/2) [1 - 4\mu^2(1 - \mu^2) \sin^4(k \Delta x/2)]^{-1/2} = 0. \quad (5.18)$$

Из соотношения (5.18) следует, что в точке  $|\lambda|_{\min}$  параметр  $\mu = (1/2)^{1/2}$ . Используя это значение в формуле (5.17), получим:

$$|\lambda|_{\min} = [1 - \sin^4(k \Delta x/2)]^{1/2}, \quad (5.19)$$

т.е. для двухшаговых волн  $L = 2\Delta x$  величина  $|\lambda|_{\min} = 0$ , а при  $L \rightarrow \infty$  величина  $|\lambda|_{\min} \rightarrow 1$ . Подставляя найденные значения  $|\lambda|_{\min}$  в формулу (5.16), видим, что эффект подавления будет максимальным именно для двухшаговых волн. При этом схема Лакса–Вендрофа будет демпфирующей, если выполняется условие  $|C| \Delta t / \Delta x < 1$ . Степень демпфирования зависит также от скорости адвекции  $C$  и шага по времени  $\Delta t$ , что не следует из физических соображений и поэтому является недостатком схемы, так как непрактично (либо невозможно) контролировать демпфирование путем изменения величин  $C$  и  $\Delta t$ . Однако ряд полезных свойств схемы Лакса–Вендрофа обусловили ее широкое применение в атмосферных моделях. Перечислим основные из этих свойств:

- второй порядок точности аппроксимации по времени и пространству, т.е. тот факт, что схема имеет ошибку аппроксимации  $O[(\Delta x)^2] + O[(\Delta t)^2]$ ;
- расчет явным образом правой части исходного уравнения;
- условная устойчивость согласно критерию КФЛ;
- максимальное подавление наиболее плохо разрешимых на сетке двухшаговых волн и, что особенно важно, уменьшение диссипативности по мере увеличения длин волн;
- использование данных лишь на двух временных слоях точек  $\tau$  и  $\tau + 1$  и, как следствие, отсутствие вычислительной моды;
- возможность построения решений на расшатанных по времени

(и одновременно расшатанных по пространству) сетках Элиасена.

Укажем, что диссипативность схемы Лакса–Вендрофа не будет приводить к чрезмерному сглаживанию моделируемых атмосферных полей, если этот эффект будет пренебрежимо мал по сравнению с физической диссипацией, которая также полезна для фильтрации самых коротких волн. Если же физическая диссипация мала или вообще отсутствует, то в таких случаях лучше пользоваться какой-либо нейтральной схемой.

Отметим, что конечно-разностное уравнение, очень похожее на схему Лакса–Вендрофа (5.15), получается и для схемы Мацуно (2.7). Действительно, записав схему Мацуно для линейного уравнения переноса:

$$(U_*^{\tau+1})_m = U_m^\tau - (C \Delta t / 2 \Delta x)(U_{m+1}^\tau - U_{m-1}^\tau), \quad (5.20)$$

$$U_m^{\tau+1} = U_m^\tau - (C \Delta t / 2 \Delta x)[(U_*^{\tau+1})_{m+1} - (U_*^{\tau+1})_{m-1}] \quad (5.21)$$

и исключив из схемы корректора (5.21) приближенные величины  $(U_*^{\tau+1})_{m+1}$ ,  $(U_*^{\tau+1})_{m-1}$  с помощью схемы предиктора (5.20), записанной для точек  $m+1$  и  $m-1$  соответственно, т.е.

$$(U_*^{\tau+1})_{m+1} = U_{m+1}^\tau - (C \Delta t / 2 \Delta x)(U_{m+2}^\tau - U_m^\tau),$$

$$(U_*^{\tau+1})_{m-1} = U_{m-1}^\tau - (C \Delta t / 2 \Delta x)(U_m^\tau - U_{m-2}^\tau),$$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{U_m^{\tau+1} - U_m^{\tau-1}}{\Delta t} = & -C \frac{U_{m+1}^\tau - U_{m-1}^\tau}{2 \Delta x} + \\ & + \left( \frac{C \Delta t}{\Delta x} \right)^2 \frac{1}{2} (U_{m+2}^\tau - 2 \cdot U_m^\tau + U_{m-2}^\tau). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Для фиксированного  $\Delta t$  второй член справа в формуле (5.22) стремится к выражению  $C^2 \Delta t \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ , т.е. он имеет ту же самую форму,

что и диффузионный член уравнения теплопроводности (4.51), и дает демпфирующий эффект. Так как этот член вычисляется на интервале  $4\Delta x$ , то максимальный демпфирующий эффект имеет место также на волнах, длиной  $4\Delta x$ . Наиболее короткие двухшаговые волны при этом не подавляются. Следовательно, схема Мацуно, яв-

ляющаяся согласованной и устойчивой схемой для линейного уравнения переноса (2.16), не подходит для численного интегрирования этого уравнения. В самом деле, если шаг сетки  $\Delta x = 300$  км, как это имеет место для крупномасштабных атмосферных моделей, то наиболее сильно схемой будут трансформироваться возмущения, длина которых близка к характерному пространственному масштабу волн Россби, являющихся носителями погоды.

В заключение подчеркнем, что с целью получения желаемого действия того или иного эффекта, который вносят различные схемы интегрирования, можно последовательно (т.е. через определенное число шагов  $\Delta t$ ) изменять временные конечно-разностные схемы в процессе интегрирования системы уравнений атмосферной модели.

## Глава 6. ДИСПЕРСИОННЫЕ СВОЙСТВА КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

### 6.1. Влияние сеточной аппроксимации производных по пространству на свойства схем. Вычислительная дисперсия

Рассмотрим вопрос о влиянии конечно-разностной аппроксимации производных по пространству на свойства численного решения континуального уравнения.

Выше было показано, что линейное уравнение адвекции (2.16) формально приводится к уравнению колебаний (4.39), если угловая скорость  $\omega = -kC$ . В этом случае *фазовая скорость* волны

$$C = \omega/k, \quad (6.1)$$

причем метеорологическая функция  $U(x, t)$  переносится вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью без изменения фазы, т.е. все волны, описываемые континуальным уравнением, перемещаются с одинаковой фазовой скоростью  $C$ .

Пусть теперь уравнение адвекции является полудискретным (иначе, дифференциально-разностным), в котором сеточным аналогом аппроксимирована только производная  $\partial U/\partial x$ , а производная  $\partial U/\partial t$  остается непрерывной т.е.

$$C_{\phi} = C \sin(k\Delta x)/k\Delta x \quad (6.2)$$

Тогда все погрешности в уравнении (6.2) будут обусловлены именно ошибкой аппроксимации производной по пространственной координате.

Подставив решение (4.10) в уравнение (6.2), получим:

$$\frac{dA}{dt} = -A \frac{C}{2\Delta x} [\exp(ik\Delta x) - \exp(-ik\Delta x)] = -ikA \frac{C \sin(k\Delta x)}{k\Delta x} \quad (6.3)$$

где, по аналогии с уравнением (4.5), фазовая скорость распространения волн равна

$$C_{\phi} = C \sin(k\Delta x)/k\Delta x \quad (6.4)$$

и зависит от волнового числа  $k$ . Следовательно, дискретное пред-

ставление производных по пространству порождает паразитарную дисперсию волновых возмущений, которая называется эффектом вычислительной дисперсии.

Из формулы (6.4) видно, что в численном решении волны любой длины замедляются (т.е.  $C_\phi < C$ ), а именно:

– при увеличении аргумента  $k\Delta x$  от нуля фазовая скорость численного решения  $C_\phi$  монотонно уменьшается от точной фазовой скорости  $C$  до нуля;

– двухшаговые волны ( $L = 2\Delta x$ ) стационарны ( $C_\phi = 0$ ).

Если переносится пакет волн, то вычислительная дисперсия будет вызывать деформацию этой системы, особенно в мелкомасштабной части спектра атмосферных возмущений, допустимых разрешением сетки. В первую очередь это относится к фронтальным разделам, а также к циклонам и антициклонам (находящимся в начальной стадии развития), линиям скачков ветра и другим атмосферным образованиям (объектам).

Вычислительная дисперсия, наряду с искажением амплитуд волн, является дополнительным источником ошибок численных решений.

За счет конечно-разностного представления производных по пространственным координатам искажается также групповая скорость  $C_g$ , характеризующая скорость переноса энергии.

По определению групповая скорость

$$C_g = d(kC)/dk \quad (6.5)$$

представляет собой скорость распространения волн с максимальной амплитудой, порождаемой суперпозицией группы волн с близкими волновыми числами.

В случае континуального уравнения адвекции (2.16) групповая скорость распространения волн постоянна и равна фазовой скорости ( $C_g = C$ ), а для полудискретного уравнения (6.2)

$$C_g = d(kC_\phi)/dk = C \cos k\Delta x. \quad (6.6)$$

Из формулы (6.6) вытекает, что

– групповая скорость  $C_g$  монотонно уменьшается от  $C$  при  $k = 0$ ,  $L \rightarrow \infty$  до нуля для четырехшаговых волн, т.е. при  $k = \pi/2\Delta x$ ;

– при  $L = 2\Delta x$ ,  $k = \pi/\Delta x = k_{\max}$  значение  $C_g = -C_\phi$ , т.е. волновые

пакеты, сформированные из таких волн, перемещаются в направлении, противоположном вектору скорости физической адвекции и распространению более длинных волн.

*Резюме.* Дискретизация континуальных уравнений по пространству приводит к тому, что фазовая и групповая скорости волн уменьшаются с увеличением волнового числа  $k$ . Эта ошибка оказывается особенно большой для самых коротких атмосферных возмущений, допустимых разрешением сетки. В результате энергия волн, длиной от  $2\Delta x$  до  $4\Delta x$ , которые плохо представляются на сетках и поэтому воспринимаются в моделях как шумы, может распространяться против потока, искажая реальный процесс переноса энергии. Энергия более длинных волн ( $L > 4\Delta x$ ) переносится в направлении потока, но с заниженными скоростями.

## 6.2. Влияние сеточной аппроксимации континуальных уравнений на фазовые и групповые скорости атмосферных возмущений

На примере схемы центральных разностей (2.11) оценим влияние конечно-разностного представления производных по времени и по пространству на фазовую и групповую скорости волновых возмущений.

Привлекая формулу для угловой частоты  $\omega$  (4.27) и критерий вещественности этой величины (4.28) для схемы центральных разностей, получим формулу для фазовой скорости численного решения в виде:

$$C_{\phi} = \omega / k = (1 / k\Delta t) \arcsin (\mu \sin k\Delta x), \mu = C \Delta t / \Delta x. \quad (6.7)$$

Если в формуле (6.7) положить параметр  $\mu = 1$ , то фазовая скорость  $C_{\phi}$  в численном решении будет равна фазовой скорости  $C$  в точном решении.

Используя в соотношении (6.7) разложение в степенные ряды функций  $\sin (k \Delta x)$  и  $\arcsin [\mu \sin (k \Delta x)]$ :

$$\sin (k \Delta x) \cong k \Delta x - (k\Delta x)^2 / 3! + \dots ;$$

$$\arcsin [\mu \sin (k\Delta x)] \cong \mu \sin (k\Delta x) + [\mu \sin (k\Delta x)]^3 / 6 + \dots,$$

получим

$$C_{\phi} / C \cong 1 - (1 - \mu^2) (k \Delta x)^2 / 6. \quad (6.8)$$

Из соотношения (6.8) вытекает, что по сравнению с величиной истинной фазовой скорости  $C$  фазовая скорость численного решения  $C_\phi$  трансформируется следующим образом:

– завьшается за счет конечной разности по времени (см. член  $(1 - \mu^2)$ ),

– занижается за счет конечной разности по пространству (см. множитель  $(k\Delta x)^2$ ), т.е. зависит от волнового числа (от длины волны).

На основе выражения (6.7) найдем

$$\begin{aligned} C_r &= d \{ (k \arcsin(\mu \sin k\Delta x)) / k\Delta t \} / dk = \\ &= C \cos k\Delta x (1 - \mu^2 \sin^2 k\Delta x)^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Из анализа формулы (6.9) следует:

– при  $C\Delta t/\Delta x = 1$  процесс переноса энергии описывается правильно для всех волн, так как  $C_r = C$ ;

– при  $C\Delta t/\Delta x < 1$ : для волн длиной  $L > 4\Delta x$  групповая скорость сохраняет знак истинной скорости  $C$ , но занижается по модулю; для четырехшаговых волн  $C_r = 0$ , а для двухшаговых волн  $C_r = -C$ .

Итак, если для схемы центральных разностей задать параметр  $C\Delta t/\Delta x < 1$ , то перенос энергии в численном решении искажается особенно значительно для волн длиной  $L \leq 4\Delta x$ .

Аналогичным образом можно провести анализ фазовых и групповых скоростей волновых мод в решениях, генерируемых на основе любой численной схемы.

### **6.3. Влияние повышения порядка точности сеточной аппроксимации уравнений на свойства конечно-разностных схем**

Рассмотрим, как влияет повышение порядка точности аппроксимации производных по пространству на фазовую и групповую скорости волн.

Для схемы центральных разностей четвертого порядка точности по пространству (2.17) с учетом формулы для угловой частоты (4.27) имеем:

$$\begin{aligned} C_\phi &= (1/k\Delta t) \arcsin \{ \mu [(4/3)\sin(k\Delta x) - (1/6)\sin(2k\Delta x)] \} = \\ &= C [4\sin(k\Delta x)/3k\Delta x - \sin(2k\Delta x)/6k\Delta x], \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$C_r = C[(4/3)\cos(k\Delta x) - (1/6)\cos(2k\Delta x)] \times \\ \times \{1 - [\mu((4/3)\sin(k\Delta x) - (1/6)\sin(2k\Delta x))]\}^{1/2}. \quad (6.11)$$

Из выражения (6.10) видно, что

- для двухшаговых волн  $C_\phi = 0$ , т.е. такие волны стационарны;
- волны длиной  $L > 2\Delta x$  при удовлетворении критерию вычислительной устойчивости для рассматриваемой схемы ( $C\Delta t/\Delta x \leq 0,729$ ) замедляются, однако замедление оказывается меньше, чем для схемы центральных разностей второго порядка точности (6.8);
- при  $0.2 \leq C\Delta t/\Delta x \leq 0.4$  для волн длиной  $L \geq 8\Delta x$  фазовая скорость в численном решении практически равна истинной скорости переноса ( $C_\phi \approx C$ );
- при  $0.4 \leq C\Delta t/\Delta x \leq 0.5$  волны длиной  $L > 4\Delta x$  ускоряются незначительно ( $C_\phi > C$ );
- при  $0.6 \leq C\Delta t/\Delta x \leq 0.8$  для волн длиной  $L > 4\Delta x$  также имеет место ускорение, однако четырехшаговые волны оказываются неустойчивыми.

На рис. 6.1 показана фазовая скорость для линейного уравнения адвекции как функция длины волны ( $N$  – количество шагов сетки, укладываемых на длину волны) для точного решения и для дифференциально-разностного аналога этого уравнения в случае использования центральных пространственных разностей (ЦР) второго порядка точности аппроксимации, когда величина  $C_\phi = C^*$  дается формулой (6.4), и в случае применения соотношения (2.17) с центральными разностями четвертого порядка точности аппроксимации, когда  $C_\phi = C^{**}$  дается формулой (6.10). Кривые на графике наглядно иллюстрируют существенное увеличение точности описания фазовой скорости для крупно- и среднемасштабных волн при использовании схемы четвертого порядка. Однако, когда  $L \rightarrow 2\Delta x$  ( $N = 2$ ), увеличение фазовой скорости, полученное для разностей четвертого порядка, постепенно ослабевает и, в конечном итоге, двухшаговые волны снова становятся стационарными. Более того, для коротких волн ( $k\Delta x \rightarrow \pi$ ,  $L \rightarrow 2\Delta x$ ) наклон кривой  $C^{**} = f(k\Delta x)$  больше, чем для случая разностей второго порядка, поэтому вычислительная дисперсия этих волн (или, иначе, ложная деформация вследствие вычислительной дисперсии) больше. Таким образом, схема центральных раз-

ностей четвертого порядка аппроксимации более правильно описывает перемещение волн длиной  $L > 2\Delta x$ , чем схема второго порядка.

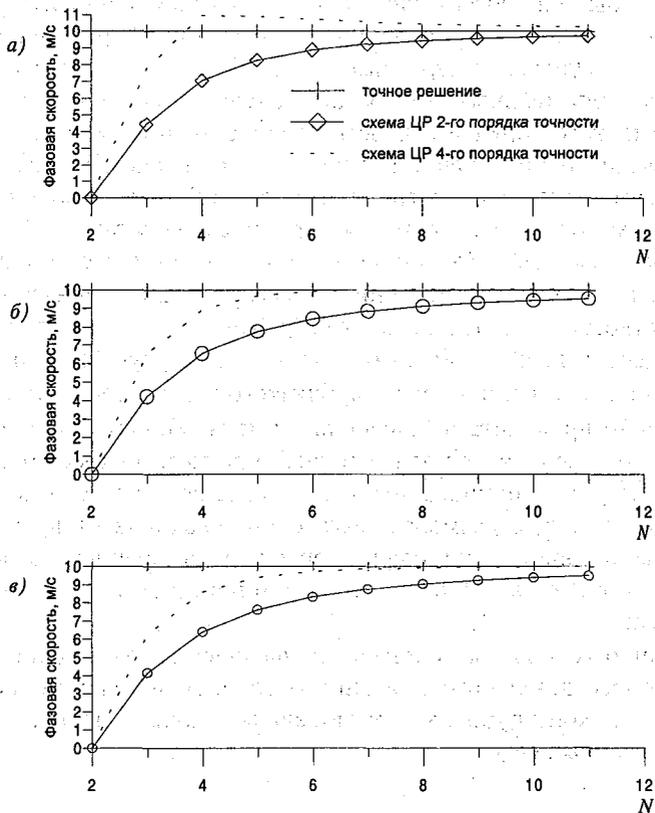


Рис. 6.1.

Зависимость фазовой скорости численного решения линейного уравнения адвекции от длины волны. а)  $\mu = 0.7$ ; б)  $\mu = 0.4$ ; в)  $\mu = 0.2$ .

Анализ формулы (6.11) для  $C_r$  показывает:

– энергия двухшаговых волн переносится со скоростью  $C_r = 1.667C$  при любых значениях параметра  $C\Delta t/\Delta x$ ;

– групповая скорость волн, длина которых превышает  $2\Delta x$ , зависит от значения параметра  $C\Delta t/\Delta x$ . Так, если  $C\Delta t/\Delta x \approx 0.73$ , то энергия волн, длиной  $4\Delta x$ , переносится со скоростью, близкой к скорости адвекции ( $C_r \approx C$ ), а при  $L > 6\Delta x$  величина  $C_r \gg C$ .

*Резюме.* При построении конечно-разностных схем для нелинейных уравнений континуальных моделей следует стремиться к тому, чтобы они достаточно точно описывали процессы распространения волновых возмущений и переноса их энергии в реальной атмосфере. Однако следует иметь в виду, что использование данных в дополнительных точках для получения конечных разностей более высокого порядка точности аппроксимации вызывает трудности, связанные с появлением вычислительной моды. Усложняется и формулирование боковых граничных условий, а их упрощенная постановка может быть источником серьезных проблем.

Поскольку ошибки аппроксимации горизонтальных адвективных членов являются источником весьма существенных ошибок при краткосрочном прогнозировании (как указывалось выше, они могут достигать 40% общей ошибки), то для улучшения описания адвекции возмущений масштаба, близкого к  $2\Delta x$ , необходимо:

- либо проводить вычисления с уменьшенным размером шага сетки, что обеспечивает более точный прогноз, но требует существенных затрат машинного времени. Так, даже в двумерных задачах уменьшение вдвое размеров шага сетки увеличивает время счета в 4 раза и, при использовании обычных временных разностных схем, еще в 2 раза для сохранения устойчивости вычислительного процесса;

- либо использовать локальное увеличение разрешения сетки с целью более детального описания мезо- и мелкомасштабных процессов, т.е. конструировать региональные модели на так называемых вложенных сетках.

## Глава 7. НЕЛИНЕЙНАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ, СПОСОБЫ ЕЕ ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ И ПОДАВЛЕНИЯ

Возьмем теперь вместо линейного адвективного уравнения (2.16) нелинейное уравнение

$$\partial U / \partial t = -U \partial U / \partial x, \quad (7.1)$$

в котором справа фигурирует произведение функции  $f_1(x, t) = U(x, t)$  на производную  $\partial U / \partial x = f_2(x, t)$ , и рассмотрим эффект, обусловленный этим нелинейным членом.

### 7.1. Ошибки ложного представления волновых возмущений

Пусть каждая волна  $n$ , допустимая разрешением (длиною  $L \geq 2\Delta x$  и волновым числом  $k_n \leq k_{\max} = \pi / \Delta x$ ), описывается формулой

$$U_n = A_n(t) \sin(k_n x). \quad (7.2)$$

Подставляя в уравнение (7.1) выражение (7.2) для волн с  $k_n = k_{\max}$ , получим:

$$\begin{aligned} U_n \partial U_n / \partial x &= A_n \sin(k_{\max} x) A_n k_{\max} \cos(k_{\max} x) = \\ &= (A_n A_n / 2) k_{\max} \sin(2k_{\max} x). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Из формулы (7.3) видно, что в результате нелинейного взаимодействия двух волн (первая волна описывается функцией  $U_n$ , вторая волна — производной  $\partial U_n / \partial x$ ) порождается новая волна с волновым числом  $k = 2k_{\max}$ , находящаяся за пределами разрешающей способности выбранной сетки. При этом амплитуда результирующей волны  $(A_n)^2 / 2 > A_n$ , т.е. имеет место ложный приток энергии к новой волне.

Процесс нелинейного взаимодействия можно проследить, если раскладывать в ряд по базисным функциям (например, в ряд Фурье) решение, получающееся при интегрировании уравнений. На рис.7.1 показаны коэффициенты разложения в ряд Фурье начального поля. Как видно, начальное поле представляет собой волну длиной  $6\Delta x$  (волновое число 16). Других волн нет. На рис.7.2 представлены коэффициенты разложения в ряд Фурье поля, полученного при интегрировании с этими начальными данными нелинейного уравнения адвекции. Результирующее поле представляет собой уже суперпозицию волн с волновыми числами 16, 32, 48. Новые волны длиной  $3\Delta x$  и  $2\Delta x$  появляются в результате нелинейного взаимодействия.

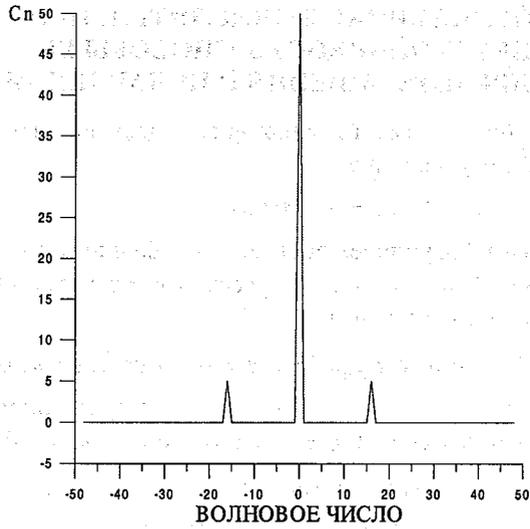


Рис.7.1  
Коэффициенты разложения в ряд Фурье начального поля.

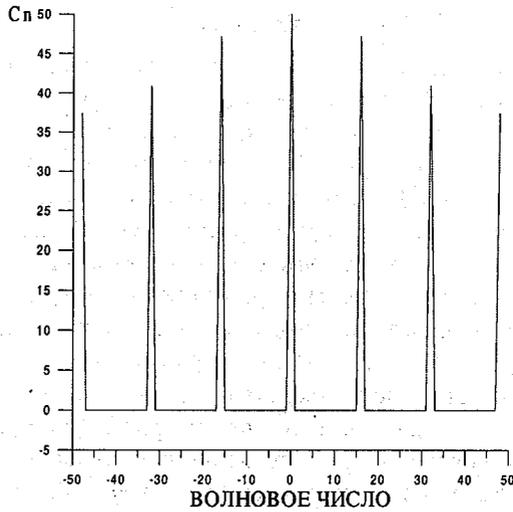


Рис. 7.2  
Коэффициенты разложения в ряд Фурье поля, полученного при интегрировании нелинейного уравнения адвекции.

Аналогично, если волновое число  $k_n$  находится на интервале  $k_{\max}/2 < k_n < k_{\max}$ , то за счет нелинейного взаимодействия могут порождаться новые волны с  $k_n > k_{\max}$ , которые невозможно представить должным образом в конечных разностях на сетке. Такие короткие волны будут накладываться в разных узлах сетки на более длинные волны, в результате чего может возникнуть так называемая *ошибка ложного представления*. Суть этого эффекта заключается в том, что волны, порождаемые нелинейным взаимодействием и находящиеся за пределами допустимых сеткой волновых чисел (имеются в виду новые волновые числа  $k > k_{\max}$ ), принимаются за более крупные (длинные) волны. Естественно, этот факт приводит на выходе вычислительной схемы к искажению реального спектра атмосферных движений. Кроме того, вследствие ошибок ложного представления может иметь место ложный приток энергии к волнам с волновым числом, ненамного меньше  $k_{\max}$ . Энергия таких спектральных компонент может выходить за пределы физически допустимых для атмосферы границ, что приводит к "взрыву решения", получаемого по используемой схеме, как следствия интенсивно развивающейся нелинейной вычислительной неустойчивости.

## 7.2. Вычислительная вязкость и ее роль в процессе интегрирования эволюционных уравнений

Помимо указанных выше способов устранения вычислительной неустойчивости рассмотрим подробнее использование с этой целью схем, обладающих вычислительной (иначе, счетной, разностной, искусственной) вязкостью. Для уяснения этого вопроса вначале напомним, что одним из важнейших элементов циркуляционного механизма в атмосфере является макро- и мезомасштабный турбулентный обмен в горизонтальном направлении, осуществляемый посредством циклогенетических возмущений, являющихся результатом разрешения атмосферой бароклинической неустойчивости, и приводящий, в конечном итоге, к выравниванию (сглаживанию, усреднению, нивелировке) полей метеорологических функций.

Чтобы учесть процессы макротурбулентного обмена, в уравнения горизонтального движения, притока тепла и массовой доли влаги вводят члены  $k_0 \nabla^2 U$ ,  $k_0 \nabla^2 V$ ,  $k_0 \nabla^2 T$  и  $k_0 \nabla^2 q$ , в которых, согласно закону Ричардсона-Обухова, коэффициент горизонтальной турбу-

лентной вязкости  $k_0 \sim \varepsilon^{1/3} L^{1/3}$  (где  $\varepsilon$  – диссипация кинетической энергии, средняя для всей атмосферы;  $L$  – масштаб движения или масштаб усреднения. Так, скажем, при  $L = 1000$  км значение  $k_0 \sim 2 \times 10^5 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ ).

Аналогичного эффекта можно добиться, добавляя в уравнения модели «искусственную вязкость», т.е. члены типа диффузионных. Например, в уравнения движения можно добавить члены  $v \nabla^2 U$ ,  $v \nabla^2 V$ , где  $v$  – коэффициент «вычислительной вязкости», задаваемый на основе результатов численных экспериментов в пределах  $10^5 - 10^7 \text{ м}^2 \text{ с}^{-1}$ .

Сглаживание решений можно проводить также с помощью специальных численных схем, обладающих диссипативными свойствами и в какой-то мере компенсирующих неучет вязких членов в уравнениях.

Исследуем для примера схему Эйлера (2.3) с точки зрения наличия счетной вязкости. Для этого сеточные функции, фигурирующие в названной схеме, представим рядами Тейлора в окрестности точки с координатами  $(x_m, t^\tau)$  на пространственно-временной сетке и, сохраняя в рядах члены не выше второго порядка малости (отброшенные члены будем полагать малыми), получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + C \frac{\partial U}{\partial x} &= -C(\Delta x/2)(1 + C\Delta t/\Delta x) \partial^2 U / \partial x^2 = \\ &= v \partial^2 U / \partial x^2, \quad C < 0. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Уравнение (7.4) отличается от исходного адвективного уравнения (2.16) наличием вычислительной вязкости (т.е. дополнительного члена  $v \partial^2 U / \partial x^2$ ). Это означает, что на самом деле дискретный (сеточный) аналог (2.3) аппроксимирует дифференциальное уравнение (7.4), содержащее член, типа диффузионного.

Если в уравнении (2.16) положить  $C > 0$  и, в отличие от схемы (2.3), аппроксимировать производную  $\partial U / \partial x$  разностями против потока, т.е. положить

$$(U_m^{\tau+1} - U_m^\tau) / \Delta t + C(U_m^\tau - U_{m-1}^\tau) / \Delta x = 0, \quad C > 0, \quad (7.5)$$

то, действуя аналогичным образом, получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + C \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{C \Delta x}{2} \left( 1 - \frac{C \cdot \Delta t}{\Delta x} \right) \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, C > 0. \quad (7.6)$$

Если в уравнениях (7.4) и (7.6) положить параметр  $|C| \Delta t / \Delta x < 1$ , то их можно трактовать как уравнения теплопроводности с областями определения решения  $x_m \leq x \leq x_{m+1}$ ,  $t^\tau \leq t \leq t^{\tau+1}$  и  $x_{m-1} \leq x \leq x_m$ ,  $t^\tau \leq t \leq t^{\tau+1}$  соответственно.

Если же положить  $|C| \Delta t / \Delta x = 1$ , то коэффициент вычислительной вязкости  $\nu$  и все члены, отброшенные в рядах Тейлора как малые, будут равны нулю, а явная схема оказывается схемой бесконечного порядка аппроксимации по приращениям независимых переменных  $\Delta t$  и  $\Delta x$ .

Если  $|C| \Delta t / \Delta x > 1$ , то уравнения (7.4), (7.6) переходят в уравнение

$$\partial U / \partial t + C \partial U / \partial x = -|v| \partial^2 U / \partial x^2, \quad (7.7)$$

которое при начальном условии  $U = U(x, t_0)$  приводит к задаче, некорректно поставленной с точки зрения решения адвективного уравнения (2.16) с помощью разностной схемы (2.3) или схемы (7.5). Выше было показано, что решение этой задачи неустойчиво: малые ошибки в начальных данных приводят к большим всплескам генерируемого вычислительной схемой решения.

Величина коэффициента вычислительной вязкости  $\nu$ , вводимой в адвективный процесс, зависит от шагов выбранной пространственно-временной сетки  $\Delta t$ ,  $\Delta x$  и скорости адвекции  $C$  и, вообще говоря, может быть очень большой. В таких случаях численное решение при увеличении числа шагов по времени (т.е. при  $\tau \rightarrow \infty$ ) будет затухать за счет чрезмерного сглаживания полей, генерируемых вычислительным алгоритмом. Следовательно, сглаживание должно быть разумным, иначе при  $\tau \rightarrow \infty$  можно получить вообще безградиентное поле прогнозируемой атмосферной функции. Искусственную вязкость подбирают так, чтобы она не приводила к значительному затуханию решений, и, кроме того, комбинируют диссипативные схемы с недиссипативными (например, со схемой Кранка-Николсона и др.), периодически корректируя решения. Необходимая частота коррекции решения устанавливается посредством численных экспериментов.

Таким образом, используя специальную сеточную аппроксимацию континуальных уравнений, можно получить сглаженные поля прогнозируемых метеорологических величин, несмотря на отсутствие в исходных уравнениях атмосферной модели членов, описывающих горизонтальную макромасштабную диффузию. При этом в численном решении уравнений можно найти члены, которые математически учитывают вязкость. Важно помнить, что в первую очередь нивелируются наиболее мелкомасштабные возмущения как реально существующие в атмосфере, так и паразитарные, порождаемые вычислительной схемой. Поэтому любая процедура сглаживания работает как своеобразный фильтр, гасящий эти возмущения и тем самым способствующий повышению устойчивости процесса численного интегрирования нелинейных прогностических уравнений. Однако сглаживание самых коротких волн приведет также к определенному искажению энергии длинных волн, ответственных за формирование погоды, эволюция которых должна описываться наиболее точно. Если в модели необходимо осуществить диссипацию энергии, то целесообразно, чтобы это вытекало из физических, а не вычислительных соображений.

## Глава 8. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА АТМОСФЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

Покажем, что первоначально малые амплитуды самых коротких волн в модели будут оставаться малыми, если исключить ложную генерацию таких волн вычислительной схемой. Для получения схем, обладающих указанными свойствами, необходимо в конечно-разностной форме обеспечить сохранение интегральных свойств исходных дифференциальных уравнений модели.

Схемы, которые выражают точный закон (законы) сохранения на расчетной сетке и не требуют введения искусственной диссипации в процесс адвекции, называют *консервативными схемами*. Впервые такие схемы сконструировал А. Аракава. С помощью консервативных схем предотвращается также ложный приток энергии к коротким волнам, разрешимым на сетках при  $L > 2\Delta S$ , за счет ошибок ложного представления.

Схемы, нарушающие законы сохранения, описываемые уравнениями континуальной модели атмосферы, называют *дисбалансными* или *неконсервативными*.

### 8.1. Интегральные инварианты баротропной соленоидальной модели

Изложим метод Аракавы на примере бездивергентной ( $\text{div } \mathbf{V} = \partial U/\partial x + \partial V/\partial y = 0$ , где:  $\mathbf{V}$  – двумерный вектор скорости, а  $U$  и  $V$  – его компоненты;  $U = -\partial\psi/\partial y$ ,  $V = \partial\psi/\partial x$ ,  $\psi$  – функция тока), баротропной модели, описываемой при постоянном значении параметра Кориолиса  $l$  уравнением вихря скорости (см. уравнение (4.80) при  $l = 2\omega_0 \sin\phi = \text{const}$ )

$$\partial\Omega_z/\partial t = -(U\partial\Omega_z/\partial x + V\partial\Omega_z/\partial y) = -\mathbf{V} \nabla \Omega_z, \quad (8.1)$$

в котором вихрь (завихренность) скорости

$$\Omega_z = \partial V/\partial x - \partial U/\partial y = \partial^2\psi/\partial x^2 + \partial^2\psi/\partial y^2 = \nabla^2\psi, \quad (8.2)$$

а скорость

$$\mathbf{V} = \mathbf{K} \times \nabla\psi, \quad (8.3)$$

т.е. представляет собой векторное произведение волнового вектора  $\mathbf{K}$  и оператора Гамильтона  $\nabla$  (набла).

Подставляя выражение (8.3) в уравнение (8.1), получим уравнение вихря скорости в виде

$$\partial \nabla^2 \psi / \partial t = J(\nabla^2 \psi, \psi), \quad (8.4a)$$

или, меняя порядок дифференцирования слева,

$$\nabla^2 (\partial \psi / \partial t) = J(\nabla^2 \psi, \psi), \quad (8.4b)$$

где  $J(\nabla^2 \psi, \psi)$  – нелинейный дифференциальный оператор, именуемый якобианом. Он раскрывается следующим образом:

$$J(\nabla^2 \psi, \psi) = (\partial \nabla^2 \psi / \partial x)(\partial \psi / \partial y) - (\partial \psi / \partial x)(\partial \nabla^2 \psi / \partial y). \quad (8.5)$$

Нелинейное уравнение (8.4a) описывает локальные изменения вихря скорости как результат его переноса бездивергентным (соленоидальным) ветром на двумерном многообразии (на изобарической поверхности 500 гПа).

Предположим, что

- в двумерной прямоугольной области прогноза  $D$  со сторонами  $L_x$  и  $L_y$  функция тока  $\psi$  периодична по  $x$  с периодом  $L_x$  и обращается в нуль при  $y = 0$  и  $y = L_y$ ;

- на боковых границах области функция  $\psi = \text{const}$ , т.е. внешний контур области  $D$  совпадает с некоторой изолинией функции тока. Последнее означает отсутствие потока воздуха через границу (т.е. нет притока и оттока массы из области построения решения  $D$  и, следовательно, боковые границы области можно интерпретировать как «жесткие» (непроницаемые) стенки). Поэтому не только масса воздуха, находящегося внутри области интегрирования  $D$  в начальный момент времени  $t_0$ , остается неизменной, но и, согласно используемой атмосферной модели (8.1), кинетическая энергия

$$E_k = (U^2 + V^2)/2 = (-\partial \psi / \partial y)^2 + (\partial \psi / \partial x)^2, \quad (8.6)$$

которой этот воздух обладает;

- в области  $D$  функция тока может быть представлена (аппроксимирована) в виде двойного ряда Фурье по некоторым априори заданным ортогональным базисным функциям, например, по тригонометрическим полиномам:

$$\Psi(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_{mn} \cos\left(\frac{2\pi mx}{L_x}\right) + B_{mn} \sin\left(\frac{2\pi mx}{L_x}\right) \right] \sin\left(\frac{\pi ny}{L_y}\right), \quad (8.7)$$

где коэффициенты разложения  $A_{mn}$  и  $B_{mn}$  есть случайные функции времени, подлежащие определению;  $m, n$  – волновые числа атмосферных возмущений (или гармоник, интерпретируемых в виде синусоид и косинусоид), переносимых соответственно вдоль направлений  $x$  и  $y$  в области  $D$ .

Вначале выясним, что является результатом нелинейного взаимодействия волн, которое описывается якобианом (8.5). С этой целью продифференцируем ряд (8.7) дважды по  $x$  и по  $y$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = & - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_{mn} \left( \frac{2\pi m}{L_x} \right)^2 \cos\left(\frac{2\pi mx}{L_x}\right) + \right. \\ & \left. + B_{mn} \left( \frac{2\pi m}{L_x} \right)^2 \sin\left(\frac{2\pi mx}{L_x}\right) \right) \sin\left(\frac{\pi ny}{L_y}\right), \end{aligned} \quad (8.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = & - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_{mn} \cos\left(\frac{2\pi mx}{L_x}\right) + B_{mn} \sin\left(\frac{2\pi mx}{L_x}\right) \right) \times \\ & \times \left( \frac{\pi n}{L_y} \right)^2 \sin\left(\frac{\pi ny}{L_y}\right). \end{aligned} \quad (8.9)$$

Сложив выражения (8.8) и (8.9), получим:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi = & - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_{mn} \cos\left(\frac{2\pi mx}{L_x}\right) + B_{mn} \sin\left(\frac{2\pi mx}{L_x}\right) \right) \times \\ & \times \sin\left(\frac{\pi ny}{L_y}\right) \left[ \left( \frac{2\pi m}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{\pi n}{L_y} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Далее используем формулу (8.10) в якобиане (8.5):

$$\begin{aligned}
J(\nabla^2\Psi, \Psi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{mn} \sin\left(\frac{2\pi mx}{L_x}\right) - B_{mn} \cos\left(\frac{2\pi mx}{L_x}\right) \right\} \times & (8.11) \\
&\times \sin\left(\frac{\pi my}{L_y}\right) \left[ \left(\frac{2\pi m}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{L_x}\right)^2 \right] \frac{2\pi m}{L_x} \times \\
&\times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_{mn} \cos\left(\frac{2\pi mx}{L_x}\right) + B_{mn} \sin\left(\frac{2\pi mx}{L_x}\right) \right) \cos\left(\frac{\pi ny}{L_y}\right) \frac{\pi n}{L_y} - \\
&- \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_{mn} \cos\left(\frac{2\pi mx}{L_x}\right) + B_{mn} \sin\left(\frac{2\pi mx}{L_x}\right) \right) \cos\left(\frac{\pi ny}{L_y}\right) \frac{\pi n}{L_y} \times \\
&\times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( -A_{mn} \sin\left(\frac{2\pi mx}{L_x}\right) + B_{mn} \cos\left(\frac{2\pi mx}{L_x}\right) \right) \sin\left(\frac{\pi ny}{L_y}\right) \frac{2\pi m}{L_x}.
\end{aligned}$$

Очевидно, в результате перемножения рядов в якобиане (8.11) появятся произведения синусов и косинусов с различными волновыми числами. Пусть, например, перемножаются члены с волновыми числами

$$m_1 = 2\pi/L_x, n_1 = \pi/L_y, m_2 = 2\pi/(L_x/2), n_2 = 2\pi/L_y.$$

Так как

$$\sin\alpha \sin\beta = (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))/2,$$

$$\cos\alpha \cos\beta = (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))/2,$$

$$\sin\alpha \cos\beta = (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))/2,$$

то в результате перемножения членов рядов (8.11), в аргументах синусов и косинусов которых фигурируют  $m_1x$ ,  $m_2x$ ,  $n_1y$ ,  $n_2y$ , получатся синусы и косинусы, содержащие в аргументах четыре пары новых волновых чисел, а именно:

$$m_1 + m_2, n_1 + n_2; m_1 - m_2, n_1 + n_2; m_1 + m_2, n_1 - n_2; m_1 - m_2, n_1 - n_2.$$

Как было показано в п. 7.1, при нелинейном взаимодействии волн могут появиться и такие волны, которых не было в разложении (8.7). На эти новые волны приходится часть энергии, которая переносится (передается) от волн, представленных в разложении (8.7). Следовательно, нелинейный член в уравнении (8.4) описывает

перенос энергии по спектру волновых чисел (или, иначе, между волнами с различными волновыми числами).

Члены ряда (8.7) являются собственными решениями (собственными функциями) уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \psi_{mn} + (\lambda_{mn})^2 \psi_{mn} = 0, \quad (8.12)$$

в котором компоненты

$$\psi_{mn} = (A_{mn} \cos(2\pi mx/L_x) + B_{mn} \sin(2\pi mx/L_x)) \sin(\pi ny/L_y), \quad (8.13)$$

а величины

$$(\lambda_{mn})^2 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{2\pi m}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{\pi n}{L_y} \right)^2 \right]$$

представляют собой собственные числа (обобщенные волновые числа компонент  $\psi_{mn}$ ). Они зависят лишь от волновых чисел  $m$ ,  $n$  (т.е. от длин волн) и не зависят от  $x$  и  $y$ . В этом можно убедиться, если записать (с учетом выражения (8.13)) правую часть лапласиана (8.10) в виде

$$(\nabla^2 \Psi)_{mn} = -\Psi_{mn} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{2\pi m}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{\pi n}{L_y} \right)^2 \right] = -\Psi_{mn} (\lambda)^2.$$

Следовательно,

$$\nabla^2 \psi = -\psi \lambda^2. \quad (8.14)$$

Определим среднее значение по области  $D$  некоторой функции  $f$  с помощью выражения

$$f = D^{-1} \int_D f dD = (L_x L_y)^{-1} \int_0^{L_x} \int_0^{L_y} f dx dy. \quad (8.15)$$

Нас интересует средняя величина кинетической энергии для единицы массы

$$\begin{aligned}
E_k &= \frac{1}{2} \left[ \left( -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 \right] = \\
&= -\frac{1}{2} \left[ -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial y} \right)^2 + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial x} \right)^2 \right] = \\
&= -\frac{1}{2} \left[ -\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{mn})^2 (\Psi_{mn})^2 \right] = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (E_k)_{mn}. \quad (8.16)
\end{aligned}$$

Таким образом, учитывая, что

– через границы прогностической области  $D$  не осуществляется переноса массы воздуха (вследствие того, что на боковых границах полагается  $\psi = \text{const}$ , т.е. внешний контур области прогноза является изолинией функции тока),

– свойство ортогональности синусов и косинусов, используемых в качестве базисных функций, т.е. тот факт, что удовлетворяется условие

$$\int_D \sin(mX) \cdot \cos(nX) dD = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n \\ 1 & \text{при } m = n \end{cases},$$

мы выразили среднюю кинетическую энергию  $\bar{E}_k$  в области  $D$  как сумму вкладов различных гармоник

$$(E_k)_m = 0.5 \lambda_m^2 \bar{\Psi}_m^2, \quad (8.17)$$

т.е.

$$\bar{E}_k = \sum_m (E_k)_m. \quad (8.18)$$

Составляющие  $(E_k)_m$ , рассматриваемые как функции  $m$ , представляют спектр кинетической энергии и, как видно из выражения (8.17), всегда положительны.

С учетом формулы (8.2) средний квадрат вихря скорости равен  $\overline{(\nabla^2 \Psi)^2}$ . Аналогичным образом он может быть выражен как сумма вкладов различных гармоник:

$$\overline{(\nabla^2 \Psi)^2} = \sum_m \lambda_m^4 \cdot \bar{\Psi}_m^2 \quad (8.19)$$

Подставляя в (8.19) формулу (8.17) для компонент кинетической энергии, получим для средней величины *энстрофии* (т.е. для половины квадрата вихря скорости) следующее выражение:

$$\frac{\overline{(\nabla^2 \Psi)^2}}{2} = \sum_m \lambda_m^4 \cdot \overline{(E_K)_m}. \quad (8.20)$$

Сравнивая выражения (8.20) и (8.18), видим, что среднее волновое число связано со средними величинами кинетической энергии и энстрофии. Определим среднее по спектру волновое число формулой

$$\bar{\lambda} = \left[ \frac{\sum_m \lambda_m^2 (E_K)_m}{E_K} \right]^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{\overline{\Omega^2}}{E_K} \right)^{\frac{1}{2}} = \left[ \frac{\overline{(\nabla^2 \Psi)^2}}{E_K} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (8.21)$$

Отсюда вытекает, что, когда скорость двумерна и бездивергентна, среднее по спектру волновое число  $\bar{\lambda}$  определяется как отношение средних значений энстрофии и кинетической энергии.

Изучим теперь временную зависимость энергии спектральных компонент, допустимую для уравнения вихря скорости (8.4). Для этого достаточно рассмотреть зависимость от времени выражения (8.21). Из уравнения вихря скорости (8.4) следует:

$$\frac{\partial \left[ \frac{\overline{(\nabla^2 \Psi)^2}}{2} \right]}{\partial t} = \overline{(\nabla^2 \Psi)} \frac{\partial \overline{(\nabla^2 \Psi)}}{\partial t} = \overline{(\nabla^2 \Psi)} \cdot J(\overline{(\nabla^2 \Psi)}, \Psi). \quad (8.22)$$

Полагая, что функция тока  $\psi$  остается постоянной вдоль границ прогностической области D, получим:

$$\frac{\partial \overline{E_K}}{\partial t} = \frac{\partial \left[ \frac{\overline{(\nabla^2 \Psi)^2}}{2} \right]}{\partial t} = -\overline{\Psi} \frac{\partial \overline{(\nabla^2 \Psi)}}{\partial t} = -\overline{\Psi} \cdot J(\overline{(\nabla^2 \Psi)}, \Psi). \quad (8.23)$$

Следовательно, если граница области непроницаемая (т.е.  $\psi|_{\Gamma} = \text{const}$ ), то из формул (8.22) и (8.23) вытекает, что в непрерывном случае в результате интегрирования энстрофии и кинетической энергии по области D получим:

$$\frac{1}{2}(\overline{\nabla^2 \Psi}) = const, \quad \overline{E_k} = const. \quad (8.24)$$

Таким образом, в двумерном бездивергентном потоке среднее по спектру волновое число  $\lambda$  не изменяется со временем. Это означает, что систематический каскад энергии в сторону больших волновых чисел (т.е. мелкомасштабных волновых мод) невозможен! Далее, так как для получения энстрофии составляющие  $(E_k)_{mn}$  умножаются на квадраты волновых чисел (см. формулу (8.20)), то, очевидно, часть энергии, которая может передаваться к коротким волнам (т.е. к большим волновым числам), ограничена и, чем больше волновое число, тем она более ограничена, так как даже небольшое увеличение значений  $(E_k)_{mn}$ , умноженных на большие значения  $(\lambda_{mn})^2$ , привело бы к нарушению постоянства суммы  $\sum_{m,n} (\lambda_{m,n})^2 (E_k)_{m,n}$ .

Итак, если конечно-разностную схему континуальной модели сконструировать таким образом, чтобы в процессе ее численного интегрирования сохранялись средние по области решения кинетическая энергия и энстрофия, то будут сохраняться основные характеристики частотного распределения вихря, будет предотвращен ложный приток энергии к коротким волнам. Следовательно, не будет ошибок ложного представления и не будет развиваться нелинейная вычислительная неустойчивость.

## 8.2. Конечно-разностная аппроксимация адвекции вихря скорости методом Аракавы

Следуя А. Аракаве, поставим задачу построить такую форму аппроксимации соленоидального уравнения вихря скорости, чтобы при ее использовании выполнялись разностные аналоги законов сохранения, полученных выше для этого уравнения.

Определим сеточную функцию тока  $\Psi_{i,j}$  на квадратной сетке с шагом  $\Delta S = \frac{L_x}{M} = \frac{L_y}{N}$ . Здесь  $L_x, L_y$  – длина сторон прямоугольника,  $M, N$  – количество точек по осям  $Ox$  и  $Oy$  соответственно.

Вначале для некоторой сеточной функции  $f_{i,j}$  определим ее среднее значение по области

$$\overline{f}^{XY} = \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{N} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N f_{i,j} \quad (8.25)$$

Далее, используя *стандартные операторы дифференцирования вдоль направлений X и Y*, соответственно

$$f_X = (f_{i+1/2,j} - f_{i-1/2,j})/\Delta x, \quad (8.26a)$$

$$f_Y = (f_{i,j+1/2} - f_{i,j-1/2})/\Delta y \quad (8.26b)$$

*и стандартные операторы сглаживания вдоль направлений X и Y*

$$\overline{f}^X = (f_{i+1/2,j} + f_{i-1/2,j})/2, \quad (8.27a)$$

$$\overline{f}^Y = (f_{i,j+1/2} + f_{i,j-1/2})/2, \quad (8.27b)$$

докажем, что при соответствующем определении составляющих вектора ветра  $U_i, V_i$  в граничных узлах

$$\overline{U \overline{V}_X^X} = -V \overline{U}_X^X \quad (8.28)$$

среднее значение (8.25) сохраняется. Действительно,

$$\begin{aligned} \overline{U \overline{V}_X^X} &= \frac{1}{2N\Delta S} [U_1(V_2 - V_0) + U_2(V_3 - V_1) + U_3(V_4 - V_2) + \dots \\ &+ U_{N-2}(V_{N-1} - V_{N-3}) + U_{N-1}(V_N - V_{N-2}) + U_N(V_{N+1} - V_{N-1})] = \\ &= \frac{1}{2N\Delta S} [-V_2(U_3 - U_1) - V_3(U_4 - U_2) - \dots - V_{N-1}(U_N - U_{N-2}) - \\ &- U_1 V_0 - U_2 V_1 + V_N U_{N+1} + V_{N+1} U_N] = \\ &= -V \overline{U}_X^X + \frac{1}{2N\Delta S} [-U_1 V_0 - U_0 V_1 + U_{N+1} V_N + U_N V_{N+1}] \end{aligned} \quad (8.29)$$

В случае периодических граничных условий

$$U_0 = U_N, \quad U_{N+1} = U_1, \quad V_0 = V_N, \quad V_{N+1} = V_1 \quad (8.30)$$

выражение в квадратных скобках (8.29) обращается в нуль. Граничные условия, «обнуляющие» это выражение, можно записать также в виде

$$U_0 = -U_{-1}, \quad U_{N+1} = -U_N, \quad V_0 = -V_1, \quad V_{N+1} = -V_N. \quad (8.31)$$

Исследуем интегральные свойства различных схем сеточной аппроксимации якобиана, используя схему (8.28). Рассмотрим вначале схему

$$J_1(\Psi, \nabla^2 \Psi) = \overline{\overline{\Psi}}_x^x \left( \overline{\nabla^2 \Psi} \right)_y^y - \overline{\overline{\Psi}}_y^y \left( \overline{\nabla^2 \Psi} \right)_x^x \quad (8.32)$$

для которой получаем:

$$J_1(\Psi, \nabla^2 \Psi) = \overline{\overline{\overline{\overline{\Psi}}_x^x \left( \overline{\nabla^2 \Psi} \right)_y^y - \overline{\overline{\overline{\overline{\Psi}}_y^y \left( \overline{\nabla^2 \Psi} \right)_x^x}}}} = \quad (8.33)$$

$$-\overline{\overline{\overline{\overline{\Psi}}_x^y \left( \overline{\nabla^2 \Psi} \right)_{xy}^{xy} + \overline{\overline{\overline{\overline{\Psi}}_y^x \left( \overline{\nabla^2 \Psi} \right)_{xy}^{xy}}}}}} = 0.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\overline{\overline{\Psi} J_1(\Psi, \nabla^2 \Psi)}^{xy}}} &= \overline{\overline{\overline{\overline{\left[ \overline{\overline{\overline{\overline{\Psi}}_x^x \left( \overline{\nabla^2 \Psi} \right)_y^y - \overline{\overline{\overline{\overline{\Psi}}_y^y \left( \overline{\nabla^2 \Psi} \right)_x^x}}}} \right]}^{xy}}} = \\ &= -\overline{\overline{\overline{\overline{\left[ \overline{\overline{\overline{\overline{\Psi} \left( \overline{\nabla^2 \Psi} \right)_y^y} + \overline{\overline{\overline{\overline{\Psi} \left[ \overline{\overline{\overline{\overline{\Psi} \left( \overline{\nabla^2 \Psi} \right)_x^x}} \right]} \right]} \right]} \right]}^{xy}}} \end{aligned} \quad (8.34)$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\overline{\overline{\left( \overline{\nabla^2 \Psi} \right) J_1(\Psi, \nabla^2 \Psi)}^{xy}}} &= \overline{\overline{\overline{\overline{\left( \overline{\nabla^2 \Psi} \right) \left[ \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\Psi}}_x^x \left( \overline{\nabla^2 \Psi} \right)_y^y - \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\Psi}}_y^y \left( \overline{\nabla^2 \Psi} \right)_x^x}}}}}}}}}} \right]} \right]} \right]} = \\ &= -\overline{\overline{\overline{\overline{\left( \overline{\nabla^2 \Psi} \right) \left[ \left( \overline{\nabla^2 \Psi} \right) \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\Psi}}_x^x}}}}}} \right]}_y^y} + \left( \overline{\nabla^2 \Psi} \right) \left[ \left( \overline{\nabla^2 \Psi} \right) \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\Psi}}_y^y}}}}}} \right]}_x^x \right]} \end{aligned} \quad (8.35)$$

В соответствии с формулами (8.34), (8.35) введем еще две схемы аппроксимации якобиана:

$$J_2(\Psi, \nabla^2 \Psi) = \left[ \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\Psi}}_y^y \left( \overline{\nabla^2 \Psi} \right)_x^x}}}}}} \right]_x^x - \left[ \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\Psi}}_x^x \left( \overline{\nabla^2 \Psi} \right)_y^y}}}}}} \right]_y^y, \quad (8.36)$$

$$J_3(\Psi, \nabla^2 \Psi) = \left( \overline{\nabla^2 \Psi} \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\Psi}}_x^x}}}}}} \right)_y^y - \left( \overline{\nabla^2 \Psi} \overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{\Psi}}_y^y}}}}}} \right)_x^x. \quad (8.37)$$

Можно показать, что

$$\overline{\Psi J_1(\Psi, \nabla^2 \Psi)^{XY}} = -\overline{\Psi J_2(\Psi, \nabla^2 \Psi)^{XY}}, \quad (8.38)$$

$$\overline{\nabla^2 \Psi J_1(\Psi, \nabla^2 \Psi)^{XY}} = -\overline{\nabla^2 \Psi J_3(\Psi, \nabla^2 \Psi)^{XY}}, \quad (8.39)$$

$$\overline{\nabla^2 \Psi J_2(\Psi, \nabla^2 \Psi)^{XY}} = \nabla^2 \Psi \left\{ \left[ \overline{\Psi (\nabla^2 \Psi)_Y^Y} \right]_X^X - \left[ \overline{\Psi (\nabla^2 \Psi)_X^X} \right]_Y^Y \right\} = \quad (8.40)$$

$$= -\Psi \left[ \overline{(\nabla^2 \Psi)_X^X (\nabla^2 \Psi)_Y^Y} \right] + \Psi \left[ \overline{(\nabla^2 \Psi)_Y^Y (\nabla^2 \Psi)_X^X} \right] = 0,$$

$$\overline{\Psi J_3(\Psi, \nabla^2 \Psi)^{XY}} = \Psi \left[ \overline{(\nabla^2 \Psi \overline{\Psi}_X^X)_Y^Y} - \overline{(\nabla^2 \Psi \overline{\Psi}_Y^Y)_X^X} \right] = \quad (8.41)$$

$$= -\nabla^2 \Psi \left( \overline{\overline{\Psi}_X^X \overline{\Psi}_Y^Y} \right) + \nabla^2 \Psi \left( \overline{\overline{\Psi}_Y^Y \overline{\Psi}_X^X} \right) = 0,$$

$$\overline{J_2(\Psi, \nabla^2 \Psi)^{XY}} = 0, \quad (8.42a)$$

$$\overline{J_3(\Psi, \nabla^2 \Psi)^{XY}} = 0. \quad (8.42b)$$

Как показал Н. Филлипс, схема, сохраняющая лишь линейный инвариант соленоидальной модели  $\overline{\nabla^2 \Psi}^{XY}$ , является безусловно неустойчивой в области высоких частот. Наличие у схемы свойства сохранения хотя бы одного из квадратичных инвариантов  $\overline{\Psi \nabla^2 \Psi}^{XY}$  или  $\overline{(\nabla^2 \Psi)^2}^{XY}$  есть достаточное условие ее устойчивости. Наиболее корректным является требование сохранения средней энтропии  $\overline{(\nabla^2 \Psi)^2}^{XY}$  и средней кинетической энергии  $\overline{\Psi \nabla^2 \Psi}^{XY}$ , так как эти условия, действуя совместно, накладывают ограничения и на спек-

тральное изменение энергии. Поскольку среднее волновое число не должно меняться во времени, то условия  $\overline{(\nabla^2 \Psi)^2}^{XY}$  и  $\overline{\Psi \nabla^2 \Psi}^{XY}$  касаются не только среднего значения вихря и квадратичных величин, но и спектрального распределения энергии. Это означает, что в двумерном несжимаемом потоке воздуха не может осуществляться систематический каскад энергии только к коротким волнам. Энергия и энтропия должны передаваться от одной волны к другой согласованно без их ложного роста или уменьшения. Следовательно, при разностной аппроксимации уравнения перенос квадратичных величин в двумерной области от одного узла к другому также должен осуществляться без их фиктивного роста или уменьшения.

Схему аппроксимации якобиана, сохраняющую все интегральные свойства соленоидальной модели, будем искать, используя метод неопределенных коэффициентов.

Пусть

$$J = \alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3, (*)$$

где  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ . На основании формул (8.33), (8.38)–(8.42) запишем соотношения

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3}^{XY} &= 0 \\ \overline{\Psi (\alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3)}^{XY} &= \overline{\Psi J_2}^{XY} (-\alpha_1 + \alpha_2), \\ \overline{\nabla^2 \Psi (\alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3)}^{XY} &= \overline{\nabla^2 \Psi J_3}^{XY} (-\alpha_1 + \alpha_2), \end{aligned} \quad (8.43)$$

из которых следует, что для сохранения величин  $\overline{(\nabla^2 \Psi)^2}^{XY}$ ,  $\overline{\Psi \nabla^2 \Psi}^{XY}$  и  $\overline{\nabla^2 \Psi}^{XY}$  необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1, \quad \alpha_2 - \alpha_1 = 0, \quad \alpha_3 - \alpha_1 = 0, \quad (8.44)$$

откуда находим, что в формуле (\*)  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{3}$ .

Подчеркнем, что аппроксимация якобиана по Аракаве (\*) позволяет контролировать энергетический каскад путем сохранения

среднего волнового числа или адвекции посредством бездивергентного потока. Аналогично рассмотренной схеме можно построить аппроксимацию адвективных членов и для нефильТРованных уравнений, когда ветер дивергентен.

Таким образом, рационально построив вычислительную процедуру на основе схем, обладающих свойством сохранения, удастся правильно описать эволюцию атмосферных движений на различных участках спектра, избежать появления нелинейной вычислительной неустойчивости и тем самым увеличить временной интервал интегрирования и повысить точность решения эволюционного уравнения.

### 8.3. Сеточная аппроксимация якобиана в индексной форме

Итак, согласно Аракаве, с целью сохранения интегральных свойств баротропной бездивергентной соленоидальной модели и, следовательно, предотвращения нелинейной вычислительной неустойчивости в процессе численного интегрирования модели, якобиан, описывающий двумерную адвекцию относительного вихря скорости соленоидальным ветром, необходимо вычислять следующим образом:

$$J_{i,j} = \{[J_1]_{i,j} + [J_2]_{i,j} + [J_3]_{i,j}\} / 3.$$

Здесь сеточная запись якобиана  $J_1$  в символьной форме с помощью стандартных операторов дифференцирования и сглаживания дается формулой (8.32), запись  $J_2$  — формулой (8.36) и запись  $J_3$  — формулой (8.37).

Используя индексную форму записи стандартных операторов дифференцирования (8.26a), (8.26б) и сглаживания (8.27a), (8.27б), приведем конечно-разностную аппроксимацию якобиана Аракавы для произвольного узла симметрии  $i, j$ :

$$J_{i,j} = \{[(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})(\nabla^2 \psi)_{i,j+1} - (\nabla^2 \psi)_{i,j-1}] + [\psi_{i+1,j}((\nabla^2 \psi)_{i+1,j+1} - (\nabla^2 \psi)_{i+1,j-1}) - \psi_{i-1,j}((\nabla^2 \psi)_{i-1,j+1} - (\nabla^2 \psi)_{i-1,j-1}) - \psi_{i,j+1}((\nabla^2 \psi)_{i+1,j+1} - (\nabla^2 \psi)_{i-1,j+1}) + \psi_{i,j-1}((\nabla^2 \psi)_{i+1,j-1} - (\nabla^2 \psi)_{i-1,j-1})] + [(\nabla^2 \psi)_{i,j+1}(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1}) - (\nabla^2 \psi)_{i,j-1}(\psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j-1}) - (\nabla^2 \psi)_{i+1,j}(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1}) + (\nabla^2 \psi)_{i-1,j}(\psi_{i-1,j+1} - \psi_{i-1,j-1})]\} / 12\Delta x \Delta y.$$

Здесь лапласиан  $\nabla^2 \psi$  в любом из указанных узлов аппроксимируется по правилу "пятиточечный прямой крест":

$$(\nabla^2 \psi)_{i,j} = (\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - 4\psi_{i,j})/(\Delta S)^2, \Delta S = \Delta x = \Delta y;$$

$$(\nabla^2 \psi)_{i\pm 1, j\pm 1} = (\psi_{i\pm 2, j\pm 1} + \psi_{i, j\pm 1} + \psi_{i\pm 1, j\pm 2} + \psi_{i\pm 1, j} - 4\psi_{i\pm 1, j\pm 1})/(\Delta S)^2.$$

#### 8.4. Интегральные свойства нелинейного одномерного уравнения адвекции

Рассмотрим интегральные свойства модели, основанной на нелинейном уравнении адвекции субстанции  $U$  вдоль направления  $X$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (8.45)$$

Будем считать, что область определения решения представляет собой отрезок, параллельный координатной оси  $X$ , длина которого равна  $X_2 - X_1$ .

На границах области поставим условия

$$U|_{x=X_1, x=X_2} = 0, \quad (8.46)$$

отражающие тот факт, что через боковые границы воздух не втекает в область интегрирования извне и не вытекает из области в окружающее пространство.

Уравнение (8.45) можно записать к виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial U^2}{\partial x} = 0. \quad (8.47)$$

Проинтегрируем (8.47) по  $x$  в пределах от  $X_2$  до  $X_1$ :

$$\int_{X_1}^{X_2} \frac{\partial U}{\partial t} dx + \frac{1}{2} \int_{X_1}^{X_2} \frac{\partial U^2}{\partial x} dx = 0. \quad (8.48)$$

Здесь второй интеграл равен нулю в силу граничных условий (8.46). Таким образом,

$$\int_{X_1}^{X_2} \frac{\partial U}{\partial t} dx = 0$$

или

$$\int_{X_1}^{X_2} U dx = \text{const}. \quad (8.49)$$

Следовательно, в процессе интегрирования модели должно сохраняться суммарное по области решения значение функции  $U$ .

Для получения энергетического инварианта нелинейного уравнения адвекции умножим его на  $U$ :

$$\partial \frac{U^2}{2} + \frac{1}{3} \frac{\partial U^3}{\partial x} = 0. \quad (8.50)$$

После интегрирования уравнения (8.50) по  $x$  в пределах от  $X_2$  до  $X_1$  имеем

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{U^2}{2} dx = \text{const.}$$

Выражение под знаком интеграла, представляющее собой кинетическую энергию единицы массы одномерного движения, является инвариантом рассматриваемой модели.

### 8.5. Интегральные свойства баротропной негеострофической модели

Рассмотрим интегральные свойства модели, основанной на системе уравнений «мелкой воды»:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + IV, \quad (8.51)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - IU, \quad (8.52)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial (U\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial (V\Phi)}{\partial y} = 0. \quad (8.53)$$

Здесь: геопотенциал  $\Phi = gh$ , где  $h$  – глубина «мелкой воды», или (применительно к атмосфере) геометрическая высота изобарической поверхности, интерпретируемой в виде свободной поверхности, окаймляющей сверху рассматриваемый слой атмосферы (обычно это поверхность 500 гПа); уравнение (8.53) записано в «дивергентной форме». Заметим, что в случае использования системы уравнений «мелкой воды» для разработки баротропной модели атмосферы воздух в слое, простирающемся от подстилающей поверхности до уровня 500 гПа, стилизуется в виде баротропной среды. Иными словами, подразумевается, что на атмосферу налагаются не

только ограничения, соответствующие модели “мелкой воды”, но и ограничения, удовлетворяющие условиям баротропности.

Уравнения (8.51) – (8.53) интегрируются в области, представляющей собой прямоугольник, стороны которого ориентированы параллельно координатным осям  $OX$  и  $OY$ . Длины сторон прямоугольника равны  $X_2 - X_1$  и  $Y_2 - Y_1$  (рис. 8.1).

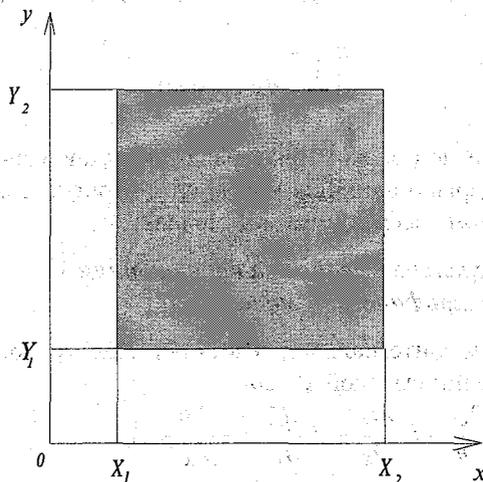


Рис. 8.1

Область интегрирования уравнений модели «мелкой воды».

Поставим на границах области интегрирования граничные условия, означающие отсутствие переноса воздуха через боковые границы, т.е.

$$U|_{x=X_1, x=X_2} = V|_{y=Y_1, y=Y_2} = 0. \quad (8.54)$$

(Заметим, что граничные условия (8.54) не соответствуют действительности и редко используются в прогностических моделях.)

**1) Масса воздуха, заключенная в объеме  $V = (X_2 - X_1) \times (Y_2 - Y_1)h$ , – инвариант модели “мелкой воды”**

Масса воздуха  $M$  в объеме  $V$  при условии, что плотность воздуха  $\rho$  постоянна, определяется интегралом

$$M = \int_{Y_1}^{Y_2} \int_{X_1}^{X_2} \int_0^h \rho dz dx dy = \rho \int_{Y_1}^{Y_2} \int_{X_1}^{X_2} h dx dy = \frac{\rho}{g} \int_{Y_1}^{Y_2} \int_{X_1}^{X_2} \Phi dx dy. \quad (8.55)$$

Поскольку  $\rho/g = \text{const}$  (согласно нашему предположению о том, что воздух в рассматриваемом слое несжимаемый), то, значит, постоянство суммарного геопотенциала в области интегрирования свидетельствует о сохранении массы воздуха, находящейся внутри области интегрирования с непроницаемыми границами.

Для доказательства последнего утверждения проинтегрируем уравнение (8.53) по всей области определения решения

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dx dy = - \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(U\Phi)}{\partial x} dx dy - \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(V\Phi)}{\partial y} dx dy. \quad (8.56)$$

Учитывая граничные условия (8.54), получим

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial(U\Phi)}{\partial x} dx dy &= \int_{y_1}^{y_2} \left[ (U\Phi)_{(x=x_2)} - (U\Phi)_{(x=x_1)} \right] dy = \\ &= \int_{y_1}^{y_2} [(0 \cdot \Phi) - (0 \cdot \Phi)] dy = 0. \end{aligned}$$

Аналогично, второй интеграл в правой части (8.56) также будет равен нулю. Следовательно,

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} dx dy = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \Phi dx dy \right] = 0, \quad (8.57)$$

т.е.

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \Phi dx dy = \text{const}. \quad (8.58)$$

Именно это и требовалось доказать. Таким образом, масса воздуха в объеме интегрирования является инвариантом модели «мелкой воды».

## 2) Энергетический инвариант модели «мелкой воды»

Получим уравнение для кинетической энергии единицы массы

$$E = \frac{U^2 + V^2}{2}. \quad \text{Для этого уравнение (8.51) умножим на } U, \text{ а (8.52) —}$$

на  $V$  и, сложив результаты, будем иметь

$$\frac{\partial E}{\partial t} + U \frac{\partial(E + \Phi)}{\partial x} + V \frac{\partial(E + \Phi)}{\partial y} = 0. \quad (8.59)$$

Умножая (8.59) на  $\Phi$ , а уравнение (8.53) последовательно на  $\Phi$  и  $E$ , получим

$$\Phi \frac{\partial E}{\partial t} + \Phi U \cdot \frac{\partial(E + \Phi)}{\partial x} + \Phi V \frac{\partial(E + \Phi)}{\partial y} = 0, \quad (8.60)$$

$$\frac{\partial \left( \frac{\Phi^2}{2} \right)}{\partial t} + \Phi \frac{\partial(U\Phi)}{\partial x} + \Phi \frac{\partial(V\Phi)}{\partial y} = 0, \quad (8.61)$$

$$E \frac{\partial \Phi}{\partial t} + E \frac{\partial(U\Phi)}{\partial x} + E \frac{\partial(V\Phi)}{\partial y} = 0. \quad (8.62)$$

Суммируя уравнения (8.60)–(8.62), получаем уравнение

$$\frac{\partial \left( \frac{\Phi^2}{2} + E\Phi \right)}{\partial t} + \frac{\partial(U\Phi(E + \Phi))}{\partial x} + \frac{\partial(V\Phi(E + \Phi))}{\partial y} = 0,$$

интегрируя которое по  $x$  и  $y$  в пределах от  $X_1$  до  $X_2$  и от  $Y_1$  до  $Y_2$  с учетом граничных условий (8.54), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{Y_1}^{Y_2} \int_{X_1}^{X_2} \left( \frac{\Phi^2}{2} + E\Phi \right) dx dy = 0.$$

Таким образом,

$$\int_{Y_1}^{Y_2} \int_{X_1}^{X_2} \left( \frac{\Phi^2}{2} + E\Phi \right) dx dy = \text{const}$$

и, значит, полная механическая энергия (т.е. сумма кинетической ( $E\Phi$ ) и потенциальной ( $\Phi^2/2$ ) энергий) массы воздуха в объеме  $V$  является интегральным инвариантом модели.

**3) Потенциальная энтрофия – интегральный инвариант модели «мелкой воды»**

Согласно определению, энтрофия есть квадрат завихренности,

т.е.  $\Omega^2 = \left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2$ . Потенциальная энтрофия получается при

умножении энтрофии на скалярную величину – геопотенциал.

Чтобы доказать, что в рассматриваемой непрерывной модели со-

храняется интегральное значение потенциальной энтропии, необходимо предварительно выполнить ряд несложных преобразований.

Прибавим и вычтем в левой части уравнения (8.51) член  $V \frac{\partial V}{\partial x}$ ,

а в левой части (8.52) – член  $U \frac{\partial U}{\partial y}$ :

$$\frac{\partial U}{\partial t} - V(\Omega + l) + \frac{\partial}{\partial x}(E + \Phi) = 0, \quad (8.63)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U(\Omega + l) + \frac{\partial}{\partial y}(E + \Phi) = 0. \quad (8.64)$$

Уравнения (8.63), (8.64) называют *уравнениями горизонтального движения в форме Лэмба*. Их можно записать в ином виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \tilde{V}\tilde{\Omega} + \frac{\partial}{\partial x}(E + \Phi) = 0, \quad (8.65)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \tilde{U}\tilde{\Omega} + \frac{\partial}{\partial y}(E + \Phi) = 0. \quad (8.66)$$

Здесь использованы следующие обозначения для составляющих горизонтального вектора скорости:

$$\tilde{U} = U\Phi, \quad (8.67)$$

$$\tilde{V} = V\Phi \quad (8.68)$$

и для потенциального вихря скорости

$$\tilde{\Omega} = \frac{\Omega + l}{\Phi}. \quad (8.69)$$

Применив к уравнениям (8.65) и (8.66) операцию вихря (т.е. (8.65) продифференцируем по  $y$ , а (8.66) – по  $x$  и из второго уравнения вычтем первое), в результате получим уравнение потенциального вихря скорости

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{\Omega}\Phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{\Omega}U) + \frac{\partial}{\partial y}(\tilde{\Omega}V) = 0 \quad (8.70)$$

или, учитывая соотношения (8.67)–(8.69),

$$\Phi \left( \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial x} + V \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial y} \right) + \tilde{\Omega} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial U\Phi}{\partial x} + V \frac{\partial V\Phi}{\partial y} \right) = 0. \quad (8.71)$$

Согласно уравнению (8.53), второе слагаемое в (8.71) равно нулю, поэтому

$$\Phi \left( \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial x} + V \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial y} \right) = 0. \quad (8.72)$$

Умножив это уравнение на  $\tilde{\Omega}$  и прибавив результат к (8.53), получим

$$\frac{\partial \left( \Phi \frac{\tilde{\Omega}^2}{2} \right)}{\partial t} + \frac{\partial \left( U \Phi \frac{\tilde{\Omega}^2}{2} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left( V \Phi \frac{\tilde{\Omega}^2}{2} \right)}{\partial y} = 0. \quad (8.73)$$

Проинтегрировав (8.73) по  $x$  и  $y$  в пределах от  $X_1$  до  $X_2$  и от  $Y_1$  до  $Y_2$ , с учетом граничных условий (8.54) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{Y_1}^{Y_2} \int_{X_1}^{X_2} \left( \frac{\tilde{\Omega}^2}{2} \Phi \right) dx dy = 0$$

или, иначе,

$$\int_{Y_1}^{Y_2} \int_{X_1}^{X_2} \left( \frac{\tilde{\Omega}^2}{2} \Phi \right) dx dy = \text{const}. \quad (8.74)$$

Таким образом, для баротропной негеострофической модели потенциальная энтрофия сохраняется, т.е. является ее интегральным инвариантом.

В заключение отметим следующее:

а) Кроме рассмотренных выше характеристик могут быть получены и другие инварианты баротропной негеострофической модели (точнее, модели "мелкой воды");

б) Рассмотренные характеристики будут инвариантами модели не только при граничных условиях (8.54), имитирующих непроницаемые (жесткие) боковые стенки области интегрирования, но и при периодических (циклических) граничных условиях:

$$U|_{X_1} = U|_{X_2}, \quad V|_{X_1} = V|_{X_2}, \quad \Phi|_{X_1} = \Phi|_{X_2};$$

в) При выводе полученных формул для инвариантов выполнялись нелинейные преобразования. Результат этих преобразований (вывод о постоянстве во времени некоторого функционала) мы

приписывали первоначальным (непреобразованным) уравнениям модели, что, конечно, является некорректным;

г) Можно показать, что и для любого варианта бароклининой инерционной модели атмосферы (т.е. такой, система уравнений которой не описывает неадиабатические процессы и турбулентную вязкость) существует энергетический инвариант (представляющий собой сумму кинетической, внутренней и потенциальной энергий), сохранения которого и нужно добиваться при разработке и компьютерной реализации конечно-разностной (численной) версии модели. Если некоторая модель атмосферы обладает несколькими инвариантами (как, скажем, модель «мелкой воды», баротропная соленидальная модель, баротропная квазигеострофическая модель и др.), то, естественно, и численная модель также должна сохранять все интегральные свойства континуальной модели. В противном случае, если хотя бы один функционал не будет сохраняться, то в конечном итоге (т.е. при многократном повторении решения на основе используемой схемы интегрирования шагами по времени) это приведет к развитию нелинейной вычислительной неустойчивости и к получению на выходе численной модели вычислительного хаоса.

### **8.6. Потокосая форма записи уравнений динамики атмосферы и их конечно-разностная аппроксимация с помощью бокс-метода**

Как следует из изложенного в п. 8.1 – 8.2, основным способом, позволяющим доказать наличие инвариантов моделей по полным уравнениям, является запись адвективных членов в дивергентной форме. В этом случае локальные изменения функции  $f$  во времени ( $\partial f / \partial t$ ) определяются ее трехмерной (а в двумерной модели – двумерной) дивергенцией, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{C} f. \quad (8.75)$$

В соответствии с теоремой Остроградского-Гаусса в случае трехмерного движения воздуха (или жидкости) можно выразить тройной интеграл по объему  $V$  от дивергенции скалярного потока поля функции  $f$  через интеграл от названного потока через замкнутую ориентированную поверхность  $S$ , внутри которой заключен объем  $V$ :

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{C} f \, dv = \iint_S C_n f \, ds. \quad (8.76)$$

В этом равенстве обозначено:  $dv$  – элемент рассматриваемого объема воздуха  $V$  (т.е. элемент области интегрирования, в качестве которого берется трехмерная сеточная ячейка (бокс – параллелепипед или кубик));  $ds$  – элемент поверхности  $S$  (т.е. двумерная сеточная ячейка);  $C_n$  – нормальная составляющая вектора скорости  $\mathbf{C}(U, V, \omega)$  к границам трехмерной области интегрирования, где  $\omega = d\zeta/dt$  – аналог вертикальной скорости (иначе, изобарическая вертикальная скорость),  $\zeta = p/1000$  гПа,  $p$  – давление воздуха на произвольном уровне атмосферы.

В случае, если рассматривается двумерное движение воздуха (скажем, на изобарической поверхности, т.е. в плоскости  $XOY$ , или в одной из вертикальных плоскостей, а именно:  $XOP$  или  $YOP$ , где символом  $P$  обозначена ось давления), то, согласно теореме Остроградского-Гаусса, можно выразить интеграл от дивергенции скалярного потока поля функции  $f$ , распространенный на площадь интегрирования  $S$ , через интеграл от этого потока через замкнутый контур  $L$ , стягивающий площадь  $S$ :

$$\iint_S \operatorname{div} \mathbf{C} f \, ds = \oint_L C_n f \, dl.$$

Здесь  $C_n$  – нормальная составляющая двумерного вектора скорости  $\mathbf{C}$  (где  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(U, V)$  – движение происходит в горизонтальной плоскости  $XOY$ , либо  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(U, \omega)$  – движение в вертикальной плоскости  $XOP$ , либо  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(V, \omega)$  – движение в плоскости  $YOP$ ) к границам области интегрирования, т.е. к контуру  $L$ .

При определенных граничных условиях (например, при периодических граничных условиях, при условии равенства нулю нормальной составляющей скорости к границе и т.п.) интеграл от трех- или двумерной дивергенции вектора скорости течения воздуха равен нулю и, значит (см. результат интегрирования уравнения (8.75) по объему  $V$  или по площади  $S$ ), можно записать

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V f \, dv = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_S f ds = 0.$$

Первое равенство означает постоянство во времени величины  $\iiint_V f dv$ . Следовательно, эта величина является инвариантом трехмерной модели атмосферы по полным уравнениям. Из второго равенства вытекает, что величина  $\iint_S f ds$  — инвариант двумерной модели.

Построение конечно-разностных схем, обеспечивающих сохранение интегральных свойств, для уравнений, записанных в так называемой «поточковой форме», можно осуществить с помощью **бокс-метода**.

Подчеркнем, что под поточковой формой записи любого прогностического уравнения гидродинамической модели по полным уравнениям понимается такая его запись, в которой локальные изменения функции в уравнении, взятом в дивергентной форме, выражаются с помощью теоремы Остроградского-Гаусса через скалярные потоки соответствующей функции через границы области получения решения.

Рассмотрим применение бокс-метода на примере построения конечно-разностной схемы для уравнения трехмерного переноса субстанции  $f$  (т.е. переноса в некотором объеме  $V$  или, иначе, в пространстве  $XV\zeta$ ):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U \frac{\partial f}{\partial x} + V \frac{\partial f}{\partial y} + \omega \frac{\partial f}{\partial \zeta} = 0. \quad (8.77)$$

Умножив уравнение неразрывности

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} = 0, \quad (8.78)$$

на  $f$  и сложив его с уравнением переноса (8.77), запишем последнее в дивергентной форме:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial Uf}{\partial x} + \frac{\partial Vf}{\partial y} + \frac{\partial \omega f}{\partial \zeta} = 0$$

или 
$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div} Cf = 0. \quad (8.79)$$

Будем решать полученное уравнение трехмерного переноса

(8.79) в области, представляющей собой параллелепипед, длина ребра которого: по оси  $x$  равна  $X_2 - X_1$ , по оси  $y - Y_2 - Y_1$ , по оси  $\zeta$  — от 0 до 1 (рис. 8.2).

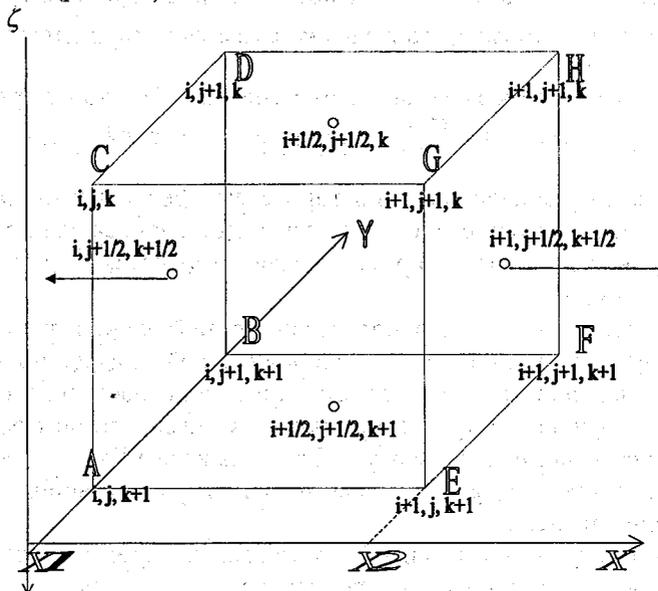


Рис. 8.2

Нумерация точек в ячейке (боксе) трехмерной области определения.

Выберем следующие граничные условия:

$$U|_{x=X_1, x=X_2} = V|_{y=Y_1, y=Y_2} = \omega|_{\zeta=0, \zeta=1} = 0, \quad (8.80)$$

полагая тем самым, что через все ребра параллелепипеда потоки массы воздуха отсутствуют.

Если проинтегрировать уравнение (8.77) по объему  $V = (X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1)(1 - 0)$ , то, очевидно, что в силу граничных условий (8.78) имеет место равенство

$$\iiint_V f \, dx \, dy \, d\zeta = \text{const}.$$

Разобьем всю область определения решения (т.е. объем  $V$ ) на параллелепипеды (боксы) со сторонами, равными  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta \zeta$ , и

объемом  $\Delta V = \Delta x \times \Delta y \times \Delta z$ . В центр каждого параллелепипеда поместим узел сетки с дробным индексом  $i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2$ . Для этого узла сетки и записывается уравнение (8.79) в конечно-разностной форме (см. ниже формулу (8.87)).

Проинтегрируем уравнение (8.79) по небольшому объему бокса  $\Delta V$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Delta V} f dV + \iiint_{\Delta V} \operatorname{div} \mathbf{C} f dV = 0. \quad (8.81)$$

По теореме Остроградского-Гаусса

$$\iiint_{\Delta V} \operatorname{div} \mathbf{C} f dv = \iint_S C_n f ds, \quad (8.82)$$

где  $C_n$  — нормальная составляющая вектора скорости ветра  $\mathbf{C}(U, V, \omega)$  к боковым граням бокса.

Рассмотрим отдельно правую и левую части уравнения (8.82).

Вначале напомним, что, согласно определению, дивергенция векторного поля  $\mathbf{C}$  в данной точке равна пределу отношения потока  $F = \iint_S \mathbf{C} \cdot d\mathbf{S}$  через малую поверхность  $\Delta S$ , окружающую эту точку,

к объему  $\Delta V$ , ограниченному этой поверхностью, при стремлении последнего к нулю, т.е.

$$\operatorname{div} \mathbf{C} = \lim_{V \rightarrow 0} \left\{ \frac{\iint_S \mathbf{C} d\mathbf{S}}{V} \right\} = \frac{dF}{dV} \approx \frac{\Delta F}{\Delta V}.$$

Поскольку здесь  $\mathbf{C}$  означает скорость воздуха (жидкости), то  $\operatorname{div} \mathbf{C}$  в данной точке равна отношению объема воздуха  $dF$ , вытекающего за единицу времени из бесконечно малого объема  $dV$ , к величине  $dV$ . Отсюда и произошел термин *дивергенция* (расходимость): жидкость растекается из тех точек (источников), где  $\operatorname{div} \mathbf{C} > 0$ , и, наоборот, стекается туда, где  $\operatorname{div} \mathbf{C} < 0$  (стоки).

Итак, применяя равенство (8.82) к объему небольшого бокса  $\Delta V$ , ограниченного малой поверхностью  $\Delta S$ , и используя теорему о среднем, левую часть можно приближенно записать в виде:

$$\iiint_{\Delta V} \operatorname{div} \mathbf{C} f dv \approx \overline{\operatorname{div} \mathbf{C} f}^{\Delta V} \Delta V = \overline{\operatorname{div} \mathbf{C} f}^{xy\zeta}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} \cdot \Delta x \Delta y \Delta z, \quad (8.83)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{F}^{xy\zeta} = \frac{1}{8} & \left( F_{i,j,k} + F_{i+1,j,k} + F_{i+1,j+1,k} + F_{i,j+1,k} + \right. \\ & \left. + F_{i,j,k+1} + F_{i+1,j,k+1} + F_{i+1,j+1,k+1} + F_{i,j+1,k+1} \right). \end{aligned}$$

Последнее соотношение означает, что значение некоторой функции в центре параллелепипеда находится как результат осреднения по его сторонам.

В правой части формулы (8.80) стоит интеграл, представляющий собой потоки через грани параллелепипеда (бокса), который приближенно можно записать в следующем виде:

$$\iint_S C_n f ds \approx F_{X_1} + F_{X_2} + F_{Y_1} + F_{Y_2} + F_{\zeta=1} + F_{\zeta=0}, \quad (8.84)$$

где  $F_{X_1}$  – поток через грань бокса, перпендикулярную оси  $OX$  и пересекающую ее в точке  $X_1$  (рис. 8.2). Остальные обозначения аналогичные.

$$\begin{aligned} F_{X_1} &= - \left( \bar{U}^{y\zeta} \bar{f}^{y\zeta} \right)_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \Delta y \Delta \zeta, \\ F_{X_2} &= \left( \bar{U}^{y\zeta} \bar{f}^{y\zeta} \right)_{i+1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \Delta y \Delta \zeta, \\ F_{Y_1} &= - \left( \bar{V}^{x\zeta} \bar{f}^{x\zeta} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \Delta x \Delta \zeta, \\ F_{Y_2} &= \left( \bar{V}^{x\zeta} \bar{f}^{x\zeta} \right)_{i+\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}} \Delta x \Delta \zeta, \\ F_{\zeta_1} &= - \left( \bar{\omega}^{xy} \bar{f}^{xy\zeta} \right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \Delta x \Delta y, \\ F_{\zeta_2} &= \left( \bar{\omega}^{xy} \bar{f}^{xy\zeta} \right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1} \Delta x \Delta y, \end{aligned} \quad (8.85)$$

где

$$\bar{f}^x = \frac{f_{i+\frac{1}{2},j,k} + f_{i-\frac{1}{2},j,k}}{2},$$

$$\overline{f}^{-y} = \frac{f_{i,j+\frac{1}{2},k} + f_{i,j,-\frac{1}{2},k}}{2},$$

$$\overline{f}^{-\zeta} = \frac{f_{i,j,k+\frac{1}{2}} + f_{i,j,k-\frac{1}{2}}}{2}.$$

При осреднении по нескольким переменным операция осреднения производится последовательно, например,

$$\begin{aligned} \overline{f}^{-xy} &= \frac{\overline{f_{i+\frac{1}{2},j,k} + f_{i-\frac{1}{2},j,k}}^{-y}}{2} = \frac{1}{2} \left( \overline{f_{i+\frac{1}{2},j,k}^{-y}} + \overline{f_{i-\frac{1}{2},j,k}^{-y}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}}{2} + \frac{f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[ f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} + f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} + f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} \right]. \end{aligned}$$

Знак потока определяется по совпадению (положительный) или несовпадению (отрицательный) его направления с направлением координатной оси, вдоль которой осуществляется перенос. Например,  $F_{X_1}$  направлен справа налево (согласно с направлением нормали к соответствующей грани) (рис. 8.2) и противоположно оси  $OX$ , поэтому имеет отрицательный знак. Поток  $F_{X_2}$  положителен, так как направлен так же, как нормаль, к грани, что совпадает с направлением оси  $OX$ .

Учитывая формулы (8.84) и (8.85), соотношение (8.83) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} C f^{xy\zeta} &= \frac{1}{\Delta x} \left[ \left( \overline{u^{-y\zeta} f^{-y\zeta}} \right)_{i+1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \left( \overline{u^{-y\zeta} f^{-y\zeta}} \right)_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right] + \\ &+ \frac{1}{\Delta y} \left[ \left( \overline{v^{-x\zeta} f^{-x\zeta}} \right)_{i+\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}} - \left( \overline{v^{-x\zeta} f^{-x\zeta}} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \right] + \\ &+ \frac{1}{\Delta \zeta} \left[ \left( \overline{\omega^{-xy} f^{-xy}} \right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1} - \left( \overline{\omega^{-xy} f^{-xy}} \right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \right]. \end{aligned} \quad (8.86)$$

Тогда уравнение (8.77) для центра любого бокса (т.е. для точек с индексами  $i+1/2, j+1/2, k+1/2$ ) записывается в виде

$$\frac{\overline{\partial f}^{xy\zeta}}{\partial t}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} = - \left[ \delta_x \left( \overline{u}^{y\zeta} \overline{f}^{y\zeta} \right) + \delta_y \left( \overline{v}^{x\zeta} \overline{f}^{x\zeta} \right) + \delta_\zeta \left( \overline{w}^{xy} \overline{f}^{xy} \right) \right], \quad (8.87)$$

где

$$\delta_x f = \frac{f_{i+\frac{1}{2}, j, k} - f_{i-\frac{1}{2}, j, k}}{\Delta x},$$

$$\delta_y f = \frac{f_{i, j+\frac{1}{2}, k} - f_{i, j-\frac{1}{2}, k}}{\Delta y},$$

$$\delta_\zeta f = \frac{f_{i, j, k+\frac{1}{2}} - f_{i, j, k-\frac{1}{2}}}{\Delta \zeta}.$$

Если просуммировать конечно-разностное уравнение (8.87) по всей области решения (по объему  $V$ ), то его правая часть обратится в нуль. Это обусловлено тем, что

– потоки через внутренние границы, разделяющие соседние боксы (сеточные ячейки), равны по величине, но противоположны по знаку (так как внешние нормали к этим граням направлены в противоположные стороны) и, значит, в сумме равны нулю,

– потоки через внешние границы равны нулю в силу граничных условий.

Таким образом, конечно разностная схема (8.87) обладает интегральным свойством (инвариантом)  $\iiint_V f \, dv = \text{const}$ , означающим,

что в области получения решения (т.е. в рассматриваемом объеме воздуха  $V$ ) среднее значение субстанции  $f$  остается постоянным на любых временных интервалах, равных заблаговременности прогноза. Однако в каждом отдельном боксе сетки среднее значение

$\iiint_{\Delta V} f \, dv$  будет меняться во времени (т.е. в процессе интегрирования конечно-разностной модели) за счет трехмерного переноса субстанции и взаимной адаптации полей различных метеорологических

величин. Последняя осуществляется в модели благодаря распространению (рассеиванию) гравитационных волн в трехмерном пространстве. В реальной атмосфере в этом процессе заметную роль играют и звуковые волны.

В гидродинамических моделях атмосферы решаются уравнения, содержащие не только члены, описывающие трехмерный перенос атмосферных субстанций, но и линейные члены (сила барического градиента и сила Кориолиса), которые при рассмотрении бокс-метода не учитывались. Это связано с тем, что эти члены уравнений при численном интегрировании не порождают нелинейной вычислительной неустойчивости и не влияют на изменение суммарной энергии описываемого процесса, поэтому они аппроксимируются так, как это рационально при выбранном методе интегрирования по времени на используемой пространственной сетке.

## Глава 9. МОНОТОННЫЕ СХЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

### 9.1. Основные понятия

Характерными особенностями полей всех малых примесей атмосферы являются большие градиенты по пространству и малые концентрации. Например, плотность водяного пара экспоненциально убывает с высотой, а распределение облачных капель или атмосферных примесей (к примеру, антропогенного происхождения) в пространстве имеет разрывы по всем направлениям. Эти свойства и определяют основные трудности, возникающие при численном моделировании переноса малых примесей в атмосфере.

Уравнение трехмерного переноса примеси можно записать в адвективной форме

$$\frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial x} + V \frac{\partial q}{\partial y} + \omega \frac{\partial q}{\partial \zeta} = 0. \quad (9.1)$$

Здесь  $q$  – концентрация некоторой атмосферной примеси, например, массовая доля водяного пара;  $\omega = \frac{d\zeta}{dt}$  – аналог вертикаль-

ной скорости в изобарической  $\zeta$  – системе координат,  $\zeta = \frac{P}{1000}$ ,  $P$  – давление [гПа] на рассматриваемом атмосферном уровне.

При численном интегрировании уравнения (9.1) с использованием стандартных схем интегрирования (например, схемы с центральными разностями) в окрестностях больших градиентов или разрывов возникают ложные осцилляции, проявляющиеся в виде ложных максимумов и минимумов. В результате нарушается одно из основных свойств малых примесей в атмосфере – отсутствие отрицательных значений.

Для интегрирования уравнений с неотрицательными решениями, обладающих большими пространственными градиентами, возникает необходимость применения *монотонных* или *квазимонотонных схем*.

Монотонной называется разностная схема, которая переводит все монотонные функции в монотонные функции с тем же направлением роста. Такие схемы гарантируют положительность (неотри-

цательность) решения разностной задачи, если искомые величины являются положительными.

Построение монотонных схем первого порядка точности для уравнения (9.1) не сложно – это схемы, в которых производные по пространству аппроксимируются направленными разностями «против потока»:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial r} \right)_q = \frac{f_n - f_{n-1}}{\Delta r}, \quad r = x; y.$$

Однако, для сохранения монотонности в этих схемах необходимо высокое пространственное и временное разрешение, что очень трудно обеспечить в многомерных задачах. Кроме этого, схемы с направленными разностями имеют только первый порядок точности. Желательно использование монотонных схем более высокого порядка. Так как в линейных схемах с порядком точности выше первого принцип монотонности нарушается (генерируются ложные осцилляции), возникает необходимость привлечения для интегрирования нелинейных схем.

Суть такого подхода заключается в том, что для интегрирования уравнений типа (9.1) используются совместно монотонная схема первого порядка точности и немонотонная схема более высокого, например второго, порядка. При этом дополнительно вводится некоторая «управляющая» функция  $f(\lambda)$ . Принимая значения, равные либо нулю, либо единице, «управляющая» функция  $f(\lambda)$  подключает к решению ту или иную схему. Определяется же функция  $f(\lambda)$  так, что она стремится к нулю в точке с большими градиентами (разрывами) решения и стремится к единице там, где решение гладкое. Недостатком данного подхода является сложность определения аргумента «управляющей» функции.

Другой подход используется в так называемых «квазимонотонных» схемах, дающих решения, свойства которых в некотором смысле близки к свойствам решений, полученных с помощью монотонных схем.

Известно, что ложные осцилляции немонотонных схем обусловлены, в первую очередь, ошибками аппроксимации дисперсионного соотношения исходной задачи. Это означает, что если в на-

чальных данных имеется гармоническая волна  $\varphi = A \cdot \exp(i\theta)$ , то немонотонность схемы проявится прежде всего в ошибке фазы  $\theta(t)$ . Таким образом, для построения схем, близких по свойствам к монотонным, необходимо сведение к минимуму фазовых ошибок схемы.

## 9.2. Способы построения схем, близких по свойствам к монотонным схемам

Рассмотрим подходы, используемые для сведения к минимуму фазовых ошибок схемы интегрирования эволюционного уравнения.

1) *Метод Фромма*, основанный на том, что схема Лакса-Вендрофа при положительной скорости переноса имеет фазовую скорость, приводящую к замедлению волн (отставанию по фазе волнового решения разностной схемы от решения дифференциальной задачи).

2) *Схема четвертого порядка точности по пространству и второго по времени с регуляризатором четвертого порядка, обеспечивающая малость фазовой скорости:*

$$\frac{q_n^{\tau+1} - q_n^{\tau-1}}{2\Delta t} + V \cdot \left( \frac{4}{3} D_0(h) - \frac{1}{3} D_0(2h) \right) \cdot q_n^\tau = \varepsilon \cdot h^3 (D_+ \cdot D_-)^2 q_n^{\tau-1}. \quad (9.2)$$

Здесь  $\tau = t / \Delta t$ ,

$$D_0(h) = \frac{q_{n+1} - q_{n-1}}{2h}, \quad D_0(2h) = \frac{q_{n+2} - q_{n-2}}{4h},$$

$$D_+ = \frac{q_{n+1} - q_n}{h}, \quad D_- = \frac{q_n - q_{n-1}}{h},$$

$V$  – трехмерный вектор скорости с компонентами  $U, V, \omega$ ;  
 $h$  – шаг по пространству.

3) *Метод коррекции потоков*, разработанный как обобщение схемы предиктор-корректор. На шаге предиктор вносится сильная диффузия, а на шаге корректор – почти равная ей антидиффузия. Однако антидиффузия ограничена так, что в решении не возникает новых минимумов и максимумов, а имеющиеся экстремумы не усиливаются. Данный ограничительный шаг очень важен, поскольку он сохраняет положительность решения там, где это необходимо, и позволяет диффузии, введенной на шаге предиктор, уничтожить «дисперсионную рябь».

Метод коррекции потоков может быть пояснен на примере его применения к одномерному нелинейному уравнению переноса субстанции  $q$  вдоль оси  $x$ :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

На шаге предиктор для вычисления  $q^*$  используется следующий конечно-разностный аналог

$$q_n^* = q_n^s - 0.5 \cdot \mu \cdot (q_{n+1}^s - q_{n-1}^s) + (v + 0.5 \cdot \mu^2) (q_{n+1}^s - 2q_n^s + q_{n-1}^s), \quad (9.3)$$

где  $\mu = \frac{U \cdot \Delta t}{\Delta x}$ ,  $v$  – положительный диффузионный коэффициент.

Обычно  $v = 0.8$ . Если  $v = 0$ , то схема (9.3) представляет собой схему Лакса-Вендрофа (5.12), (5.14), которая, как показано в п. 5.2, сглаживает двухшаговые волны.

Антидиффузия на шаге корректор может быть введена следующим образом

$$q_n^{s+1} = q_n^* - f_{n+1/2}^c + f_{n-1/2}^c, \quad (9.4)$$

где  $f_{n+1/2}^c$  – антидиффузионный поток массы через границу  $x_{n+1/2}$ ,

$$f_{n+1/2}^c = \text{sign}(\Delta q_{n+1/2}) \times \\ \times \max \left\{ 0, \min \left[ \Delta q_{n-1/2} \text{sign}(\Delta q_{n+1/2}), \vartheta (\Delta q_{n+1/2} (\Delta q_{n+3/2} \text{sign}(\Delta q_{n+1/2}))) \right] \right\},$$

$$\Delta q_{n+1/2} = q_{n+1}^* - q_n^*, \quad \text{sign} K = \frac{K}{|K|}, \quad v = \frac{1}{6} + \frac{\mu^2}{3}, \quad \vartheta = \frac{1}{6} - \frac{\mu^2}{6}.$$

Аналогично для величины  $f_{n-1/2}^c$ .

Схема (9.3)–(9.4) для линейного уравнения переноса устойчива при выполнении условия  $\mu < 0.5$ , и это более сильное ограничение на шаг по времени, чем в схеме Лакса-Вендрофа.

Существует иная интерпретация метода коррекции потоков. Первый шаг, заменяющий (9.3), осуществляется по схеме низкого порядка, гарантирующей отсутствие осцилляций. Антидиффузионные потоки ( $\vartheta \Delta q_{n+1/2}$  и  $\vartheta \Delta q_{n-1/2}$ ) вычисляются как разность между дискретным представлением потока высокого порядка и тем же представлением низкого порядка, которое использовалось при за-

мене (9.3). Ограничение антидиффузионных потоков, эквивалентное (9.4), в этом случае обеспечивает решение с аппроксимацией потоков высокого порядка, за исключением точек, где это привело бы к ложным осцилляциям.

Недостатком метода коррекции потоков является невозможность дать ему строгого теоретического обоснования.

4) *TVD-схемы*. Повышения точности схем без потери строгого теоретического обоснования можно достичь путем замены условия сохранения монотонности условием уменьшения полной вариации (Total Variation Diminishing – TVD) (TVD-схема).

Полная вариация численного решения определяется следующим образом:

$$TV(q^S) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |q_{n+1}^S - q_n^S|.$$

Следовательно, численная схема будет TVD-схемой, если

$$TV(q^{S+1}) \leq TV(q^S).$$

Схемы TVD не приводят к образованию нефизических осцилляций, и с помощью этих схем в областях гладкого изменения решения может быть получен второй порядок точности аппроксимации уравнения. Обычный путь более высокого порядка точности состоит в введении «антидиффузионных потоков», обеспечивающих условие TVD.

Очевидно, что здесь существует некоторая аналогия с методом коррекции потоков. Эта аналогия видна при рассмотрении схемы Лакса-Вендрофа, т.е. схемы (9.3) при  $\nu = 0$ . Указанная схема может быть представлена в виде (см. п. 5.2)

$$q_n^{S+1} = q_n^S - \mu \cdot (q_n^S - q_{n-1}^S) - (f_{n+1/2}^S - f_{n-1/2}^S), \quad (9.5)$$

где  $f_{n+1/2}^S = 0.5 \cdot \mu \cdot (1 - \mu) \cdot (q_{n+1} - q_n)$ ,

аналогично для  $f_{n-1/2}^S$ .

Уравнение (9.5) можно рассматривать как замещающее уравнения (9.3) и (9.4). Таким образом, разность против потока первого порядка заменяет (9.3). Если бы не было члена  $(f_{n+1/2}^S - f_{n-1/2}^S)$ , схема (9.5) сохраняла бы монотонность и, следовательно, была бы

TVD-схемой. Член  $(f_{n+1/2}^S - f_{n-1/2}^S)$ , состоящий из антидиффузионных потоков, эквивалентен (9.4) при соответствующем выборе  $\vartheta$ . Однако полная схема Лакса-Вендрофа не является схемой TVD — она дает осциллирующее решение при больших градиентах. В рассматриваемой интерпретации это означает, что антидиффузионные потоки, присущие схеме Лакса-Вендрофа, слишком велики и приводят к появлению осцилляций. Если их каким-либо образом ограничить, то в результате получится модифицированная схема коррекции потоков.

Эффективный способ ограничения антидиффузионных потоков состоит в введении выражения

$$f_{n+1/2}^c = \phi(r_n) \cdot [0.5 \cdot \mu \cdot (1 - \mu)] \cdot (q_{n+1} - q_n) \quad (9.6)$$

и аналогичного выражения для  $f_{n-1/2}^c$  вместо  $f_{n+1/2}$  и  $f_{n-1/2}$  в (9.5). Функция  $\phi(r_n)$  называется *ограничителем*. Параметр  $r_n$  равен отношению градиентов

$$r_n = \frac{q_n - q_{n-1}}{q_{n+1} - q_n}. \quad (9.7)$$

Функция  $\phi(r_n)$  выбирается так, чтобы схема (9.5) с учетом (9.6) была схемой TVD.  $\phi(r_n)$  может рассчитываться по различным алгоритмам. Например,

$$\begin{aligned} 0 < \phi(r_n) &\leq \min(2r, 2) && \text{при } r > 0, \\ \phi(r_n) &= 0 && \text{при } r \leq 0. \end{aligned}$$

Этим ограничениям удовлетворяют схемы TVD первого и второго порядка точности производной по пространственной переменной. Чтобы обеспечить второй порядок точности по пространственной переменной, за исключением точек экстремума ( $r < 0$ ), необходимо, чтобы  $\phi(1) = 1$ . Этому условию удовлетворяет следующий алгоритм:

$$\phi(r) = \begin{cases} \min(2, r) & \text{при } r > 1, \\ \min(2r, 1) & \text{при } 0 < r \leq 1, \\ 0 & \text{при } r \leq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что в противоположность двухшаговым алгоритмам схема (9.5)–(9.6) является одношаговой. Кроме того, выбор свободных параметров сведен к выбору ограничителя  $\phi(r_n)$ . Простая структура  $\phi(r_n)$  и одношаговая структура алгоритмов ограничения потока обеспечивает экономичность их использования.

Для нестационарных течений вместо (9.5) предпочтительнее использование

$$q_n^{\tau+1} = q_n^{\tau} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\tilde{f}_{n+1/2}^{\tau} - \tilde{f}_{n-1/2}^{\tau}), \quad (9.8)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{n+1/2} &= 0.5 \cdot (f_n + f_{n+1}) - 0.5 \cdot \sigma \cdot (f_{n+1} - f_n) + \\ &+ 0.5 \cdot \phi(r) (\sigma - \mu) (f_{n+1} - f_n), \\ \sigma &= \text{sign}(\sigma_{n+1/2}). \end{aligned} \quad (9.9)$$

Данная схема пригодна как для положительных, так и для отрицательных значений скорости переноса. Более точное значение решения получается, если (9.7) заменить выражением

$$r_n = \frac{q_{n+1-\sigma} - q_{n-\sigma}}{q_{n+1} - q_n}, \quad (9.10)$$

т.е. отношение градиентов вычисляется по значениям функции в точках, расположенных против потока.

5) *Квазимонотонный метод решения конечно-разностных уравнений*, разработанный П. К. Смоляркевичем, представляет собой двухшаговую схему (предиктор-корректор) и имеет следующий вид:

$$q_n^* = q_n^S - \left[ F(q_n^S, q_{n+1}^S, U_{n+1/2}^S) - F(q_{n-1}^S, q_n^S, U_{n-1/2}^S) \right] \quad (\text{предиктор}), \quad (9.11)$$

$$q_n^{S+1} = q_n^* - \left[ F(q_n^*, q_{n+1}^*, \tilde{U}_{n+1/2}) - F(q_{n-1}^*, q_n^*, \tilde{U}_{n-1/2}) \right] \quad (\text{корректор}), \quad (9.12)$$

где

$$F(q_n^{S+1}, q_{n+1}^S, U_{n+1/2}^S) = \left[ (U + |U|)_{n+1/2}^S \cdot q_n^S + (U - |U|)_{n+1/2}^S \cdot q_{n+1}^S \right] \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x},$$

$$F(q_{n-1}^{S+1}, q_n^S, U_{n-1/2}^S) = \left[ (U + |U|)_{n-1/2}^S \cdot q_{n-1}^S + (U - |U|)_{n-1/2}^S \cdot q_n^S \right] \frac{\Delta t}{2 \cdot \Delta x},$$

$$\tilde{U}_{n+1/2} = \left[ U_{n+1/2} \cdot \Delta x - \Delta t \cdot U_{n+1/2}^2 \right] \cdot \frac{q_{n+1}^* - q_n^*}{q_{n+1}^* + q_n^*} \cdot \frac{1}{\Delta x},$$

$$\tilde{U}_{n-1/2} = \left[ U_{n-1/2} \cdot \Delta x - \Delta t \cdot U_{n-1/2}^2 \right] \cdot \frac{q_n^* - q_{n-1}^*}{q_n^* + q_{n-1}^*} \cdot \frac{1}{\Delta x}.$$

Если решается трехмерное уравнение переноса, в (9.11) и (9.12) появятся также потоки примеси вдоль осей  $y$  и  $\zeta$ , рассчитываемые аналогично (9.13), а антидиффузионные скорости  $\tilde{U}$  рассчитываются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{i+1/2,j,k} = & \left[ U_{i+1/2,j,k} \cdot \Delta x - \Delta t \cdot U_{i+1/2,j,k}^2 \right] \cdot \frac{q_{i+1,j,k}^* - q_{i,j,k}^*}{q_{i+1,j,k}^* + q_{i,j,k}^*} \cdot \frac{1}{\Delta x} - \\ & - 0.5 \cdot \Delta t \cdot U_{i+1/2,j,k} \left( \bar{V}_{i+1/2,j,k} \cdot \frac{q_{i+1,j+1,k}^* + q_{i,j+1,k}^* - q_{i+1,j-1,k}^* - q_{i,j-1,k}^*}{q_{i+1,j+1,k}^* + q_{i,j+1,k}^* + q_{i+1,j-1,k}^* + q_{i,j-1,k}^*} \cdot \frac{1}{\Delta y} + \right. \\ & \left. + \bar{\omega}_{i+1/2,j,k} \cdot \frac{q_{i+1,j,k+1}^* + q_{i,j,k+1}^* - q_{i+1,j,k-1}^* - q_{i,j,k-1}^*}{q_{i+1,j,k+1}^* + q_{i,j,k+1}^* + q_{i+1,j,k-1}^* + q_{i,j,k-1}^*} \cdot \frac{1}{\Delta \zeta} \right) - \\ & - 0.25 \cdot \Delta t \cdot U_{i+1/2,j,k} \left[ \left( U_{i+3/2,j,k} - U_{i-1/2,j,k} \right) \frac{1}{\Delta x} + \left( V_{i,j+1/2,k} + V_{i+1,j+1/2,k} - \right. \right. \\ & \left. \left. - V_{i,j-1/2,k} - V_{i+1,j-1/2,k} \right) \frac{1}{\Delta y} + \left( \omega_{i,j,k+1/2} + \omega_{i+1,j,k+1/2} - \omega_{i,j,k-1/2} - \omega_{i+1,j,k-1/2} \right) \frac{1}{\Delta \zeta} \right]. \end{aligned}$$

Аналогично для  $\tilde{U}_{i-1/2,j,k}$  и антидиффузионных компонент скорости вдоль осей  $y$  и  $\zeta$ , т.е.  $\tilde{V}_{i,j+1/2,k}, \tilde{V}_{i,j-1/2,k}, \tilde{\omega}_{i,j,k+1/2}, \tilde{\omega}_{i,j,k-1/2}$ .

Как видно из приведенных выше формул, вычисления реализуются в два этапа. Это диктуется введением диффузионных членов в схему, за счет которых повышается вычислительная устойчивость численного интегрирования для положительно определенной величины  $q_n^S$ . Однако за счет введения диффузионных членов появляется нежелательный эффект, приводящий к сглаживанию начальных амплитуд и деформации значений волновых чисел. Возникающая на этапе реализации схем «предиктор» вычислительная диффузия подавляется корректирующей схемой, в которой используется интег-

рирование на один шаг назад тех членов уравнения (9.11), которые описывают вычислительную диффузию. Для этого вводятся антидиффузионные компоненты скорости  $\tilde{U}$ ,  $\tilde{V}$ ,  $\tilde{\omega}$ .

Нетрудно заметить, что рассмотренная схема очень громоздка и требует больших затрат вычислительного времени.

Корректирующий шаг также является схемой против потока и содержит неявную диффузию, что требует применения корректировки следующим шагом. Реализуется это с помощью итерационного процесса, который сходится примерно за 4–5 итераций.

6) *Моделирование адвекции атмосферных субстанций в переменных Лагранжа.* Возникновения ложных осцилляций, обусловленного ошибками аппроксимации волновых возмущений в задачах переноса, можно избежать, если использовать для описания адвекции не эйлеров, а лагранжев подход. Метод Лагранжа описывает изменение во времени параметров движения фиксированной частицы физической среды.

Уравнение трехмерного переноса, записанное в переменных Лагранжа

$$\frac{dq}{dt} = 0, \quad (9.13)$$

отличается от уравнения в переменных Эйлера (9.1) тем, что в нём нет производных по пространству, описывающих адвекцию. Это результат того, что переменными Лагранжа являются координаты самой частицы, участвующей в процессе переноса по линиям тока.

Запишем уравнение (9.13) с помощью направленной вперед конечной разности

$$\frac{q_{i,j,k}^{\tau+1} - q_{x_0,y_0,\zeta_0}^{\tau}}{\Delta t} = 0,$$

где  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $\zeta_0$  – координаты частицы в начальный момент времени  $t_0$  (т.е. в начальной точке траектории).

Таким образом, интегрирование уравнения переноса в лагранжевых переменных сводится к нахождению начала траектории воздушной частицы, которая за промежуток времени  $\Delta t$  (равный шагу интегрирования модели по времени) окажется в узле сетки  $i, j, k$ . Координаты начала траектории вычисляются против потока по формулам

$$x_0 = -u \cdot \Delta t,$$

$$y_0 = -v \cdot \Delta t,$$

$$\zeta_0 = -\omega \cdot \Delta t.$$

После того, как начальные координаты частицы найдены, необходимо определить значения искомой функции  $q$  в начале траектории  $q_{x_0, y_0, \zeta_0}^{\tau}$ . Ложные осцилляции при таком подходе генерироваться не будут, так как искомое прогностическое значение в узле сетки определяется, как найденное в начале траектории путем интерполяции.

## Глава 10. РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ПРОЦЕДУРАХ ДИНАМИЧЕСКОГО СОГЛАСОВАНИЯ ПОЛЕЙ АТМОСФЕРНЫХ ФУНКЦИЙ

### 10.1. Проблема задания начальных данных для атмосферных моделей. Процедура четырехмерного усвоения данных наблюдений

При задании начального состояния атмосферы (т.е. начальных полей метеорологических величин, удовлетворяющих исходным уравнениям бароклинических гидростатических (квазистатических) атмосферных моделей) необходимо использовать динамически согласованные поля массы и движения.

Как известно, поля некоторых атмосферных величин находятся между собой в определенной взаимосвязи, (например, поля геопотенциала и температуры довольно точно связаны между собой уравнением статики, а поля давления и плотности – уравнением состояния).

Особый интерес представляет взаимосвязь между полями давления (массы) и ветра (движения). Как следует из первого приближения уравнений горизонтального движения, эти поля связаны между собой соотношениями геострофичности. Иными словами, поля массы и движения стремятся к состоянию равновесия, которое называется геострофическим балансом. Это объясняется тем, что в реальной атмосфере непрерывно протекают два противоположных процесса. С одной стороны, в результате воздействия орографии подстилающей поверхности на воздушные течения, неадиабатических процессов и других причин происходит нарушение геострофического баланса и генерация волновых движений. С другой стороны, волновые движения приводят к адаптации полей. Заметим, что к указанному балансу поля ветра и давления стремятся всюду вне экваториального пояса Земли. В последнем, по образному выражению Е.М. Добрышмана, скорее можно говорить о «геострофичности» в вертикальном направлении вследствие фундаментальной роли вертикальных движений (скажем, таких, которые возникают в случае развития проникающей конвекции, или движений, формирующих муссонные скопления облаков, имеющих значительные пространственные масштабы) в эволюции полей атмосферных величин.

Итак, нарушение где-либо соотношений геострофичности приводит к взаимному приспособлению (адаптации) полей ветра и геопотенциала. Естественно, что на создание этого равновесия тратится определенная энергия (в некоторых синоптических ситуациях не менее 3%). Действительно, процесс адаптации сопровождается изменением кинетической энергии крупномасштабных движений, так как часть ее идет на генерацию волновых колебаний, являющихся механизмом адаптации. Важно подчеркнуть, что в процессе адаптации изменяются как поля давления, так и поля ветра. Однако, как показывают оценки, изменение поля давления происходит более интенсивно, чем поля ветра. Это означает, что поле давления подстраивается к полю движения.

Теория адаптации полей массы (давления) и движения (ветра) для баротропной атмосферы была разработана А.М. Обуховым, а для бароклининой атмосферы – И.А. Кибелем, А.С. Мониным и А.М. Обуховым, показавшим, что монотонно затухающий процесс адаптации (приспособления) полей связан с эволюцией акустических и гравитационных волн. Названные волны, распространяясь из областей дисбаланса и рассеиваясь (затухая) в пространстве, изменяют поля массы и движения. Время, необходимое для установления геострофического равновесия в бароклининой атмосфере составляет около 1 – 1.5 часов.

Например, система уравнений «мелкой воды» описывает перемещение и эволюцию медленных крупномасштабных и быстрых гравитационных волн. Вследствие малости амплитуд вклад гравитационных волн в формирование поля ветра мал, поэтому при рассмотрении поля движения эти волны можно полагать шумовыми колебаниями, подлежащими фильтрации. Однако волновые колебания этого типа приводят к адаптации полей при нарушении геострофичности. Из этого следует, что в негеострофических прогностических моделях атмосферы учет гравитационных волн является необходимым.

Численные атмосферные модели описывают процесс приспособления полей массы и движения в течение определенного времени. Одним из подходов к решению задачи согласования является интегрирование уравнений модели вперед и назад по отношению к времени согласования  $t_0$ , давая модели возможность согласовать прогностические поля с результатами наблюдений. В ходе согласования желательно использовать численные схемы с селективными

сглаживающими свойствами (например, схемы Мацуно, Лакса-Вендрофа и др.). Необходимо также исключить из прогностических уравнений модели члены, которые являются необратимыми во времени (например, притоки тепла и слагаемые, описывающие процессы турбулентного обмена в атмосфере). Такой подход к решению проблемы подготовки начальных данных называется *динамическим согласованием*.

Используемая в модели процедура динамического согласования должна, с одной стороны, уменьшить влияние ошибок наблюдений, с другой стороны, обеспечить фильтрацию мелкомасштабных возмущений. В результате такой подготовки эмпирические данные должны быть модифицированы так, чтобы они удовлетворяли прогностическим уравнениям (иначе, соответствующим образом были согласованы в пространстве друг с другом).

Практика показала, что при прогнозе и динамическом согласовании желательно использовать одинаковые схемы интегрирования по времени. Метод динамического согласования может использоваться не только для инициализации, но и для усвоения метеорологической информации. При решении задачи гидродинамического прогноза погоды методами расщепления динамическим согласованием иногда называют решение системы уравнений адаптации.

Недостатками схем динамического согласования являются:

– отсутствие в уравнениях вязких членов. Как правило, отсутствует учет орографии и источников тепла, которые являются основными генераторами инерционно-гравитационных волн;

– неэкономичность, так как при одном цикле интегрирования уравнений вперед – назад затрачивается время, эквивалентное времени примерно двух шагов прогноза, а таких циклов может понадобиться несколько десятков.

В то же время названные схемы в сочетании со схемами пространственной интерполяции используются для усвоения результатов наблюдений в ходе интегрирования моделей. *Согласование разнородной по точности информации в пространстве и во времени с учетом свойств ошибок наблюдений с помощью уравнений прогностических гидродинамических моделей называют четырёхмерным анализом полей метеорологических величин или четырёхмерным усвоением.*

В общих чертах процедура четырехмерного усвоения может быть представлена следующим образом:

– по начальным полям, полученным в результате обычного численного анализа данных наблюдений (поступивших в синоптические и асиноптические сроки к моменту времени  $t_0$ ), выполненного по дискретной схеме, с помощью уравнений прогностической модели дается прогноз на момент времени, в который получены результаты измерений метеорологических величин;

– измеренными значениями величин заменяются прогностические значения, а затем интегрирование продолжается до следующего момента получения новых данных наблюдений. Такая процедура повторяется многократно. При этом непрерывно усваиваются любые данные наблюдений по мере их поступления в пределах области интегрирования атмосферной модели.

В заключение еще раз акцентируем внимание на том, что при практической реализации негеострофических прогностических моделей атмосферы вследствие ошибок в начальных эмпирических данных, а также при применении приближенных (конечно-разностных) методов интегрирования возникают ложные колебания, скорости перемещения и периоды которых близки к соответствующим значениям гравитационных волн. Так как в процессе интегрирования по времени амплитуды этих ложных волн могут расти, то, следовательно, в моделях атмосферы необходимо учитывать реальные волновые процессы и подавлять или отфильтровывать ложные.

## 10.2. Методы динамического согласования эмпирических данных

Одним из первых методов динамического согласования данных был метод, предложенный Нитта и заключающийся в последовательном интегрировании уравнений гидродинамической модели на шаг по времени вперед и назад, т.е. от начального момента времени  $t_0$  до  $t_0 + \Delta t$  и обратно к  $t_0$ , или на два шага по времени вперед и назад. В качестве схемы интегрирования Нитта использовал схему Эйлера с пересчетом и схему Мацуно (т.е. модифицированную схему Эйлера с пересчетом). Например, *согласование по схеме Эйлера с пересчетом* на один шаг вперед по времени имеет вид:

$F^*(t_0 + \Delta t) = F^{(v)}(t_0) + \Delta t (\partial F / \partial t)^0$  (расчет предиктора).

$F(t_0 + \Delta t) = F(t_0) + \Delta t (\partial F^* / \partial t)^{0 + \Delta t}$  (коррекция предиктора);

$F^*(t_0) = F(t_0 + \Delta t) - \Delta t (\partial F / \partial t)^{0 + \Delta t}$  (расчет предиктора),

$F^{(v+1)}(t_0) = F(t_0 + \Delta t) - \Delta t (\partial F^* / \partial t)^0$  (коррекция предиктора),

где  $v$  – номер последовательного приближения, а символом  $*$  обозначены предварительные значения (предиктор) функции в конце шага по времени.

В качестве условия окончания вычислений используется неравенство

$$\max_D |F^{(v+1)}(t_0) - F^{(v)}(t_0)| < \varepsilon, \quad (10.2)$$

в котором  $\varepsilon$  – заданное малое положительное число.

Схема Эйлера с пересчетом позволяет производить определенную фильтрацию коротковолновой части спектра атмосферных возмущений. На этапе предиктора генерируются высокочастотные волны, а на этапе коррекции волны такого типа подавляются. Ниже на примере схемы Нитта и модифицированной схемы Эйлера с пересчетом будет показано, как меняются амплитуды волн различных пространственных масштабов в процессе согласования. Многократное повторение процедуры попеременного интегрирования по схеме «вперед-назад», именуемой иногда «псевдопрогнозом», приводит к определенному равновесию полей с учетом критерия (10.2). Эти поля и принимаются в качестве согласованных.

Рассмотрим для примера подготовку начальных полей для интегрирования линеаризованной системы уравнений “мелкой воды”, на основе которой можно сконструировать баротропную негеострофическую модель эволюции полей составляющих вектора ветра  $U$ ,  $V$  и геопоренциала  $\Phi = gh$  на среднем по давлению уровне атмосферы:

$$\begin{aligned} \partial U / \partial t &= -U \partial U / \partial x - V \partial U / \partial y - g \partial h / \partial x + IV, \\ \partial V / \partial t &= -U \partial V / \partial x - V \partial V / \partial y - g \partial h / \partial y - IU, \\ \partial h / \partial t &= -U \partial h / \partial x - V \partial h / \partial y - \bar{h} (\partial U / \partial x + \partial V / \partial y). \end{aligned} \quad (10.3)$$

Пусть

$$A = U(t_0), B = V(t_0), \Phi = gh(t_0).$$

В случае гармонического синусоидального изменения переменных в области прогноза D будем называть точным решением для горизонтальных компонент вектора скорости следующие выражения:

$$A = -i \sin(k_x \Delta S) \times \Phi / l \Delta S, \quad (10.4)$$

$$B = i \sin(k_y \Delta S) \times \Phi / l \Delta S,$$

где  $k_x = 2\pi / L_x$ ;  $k_y = 2\pi / L_y$ ;  $l$  – параметр Кориолиса. Соотношения (10.4) представляют собой условие геострофического равновесия полей массы и движения, в котором учтено, что для аппроксимации пространственных производных в схеме Эйлера используются центральные разности с шагом  $2\Delta S$ .

Разность между точным решением и решением на итерации  $v$  обозначим следующим образом:

$$\begin{aligned} A - A^{(v)} &= \Delta A^{(v)}, \\ B - AB^{(v)} &= \Delta B^{(v)}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Если  $\xi$  – скорость сходимости итераций к точному решению, то

$$\xi = \Delta A^{(v)}. \quad (10.6)$$

Используя обозначения (10.5) и (10.6), из системы уравнений динамического согласования (10.1) можно получить квадратное уравнение относительно  $\xi$ , имеющее два корня. Это показывает, что схема Нитта является условно сходящейся. Критерий сходимости имеет вид

$$\Delta t \leq (h' + l^2)^{-1/2},$$

в котором

$$h' = h[\sin^2(k_x \Delta S) + \sin^2(k_y \Delta S)],$$

где величина  $h$  имеет тот же смысл, что и в уравнениях (10.3).

Рассмотрим теперь, как меняется в ходе динамического согласования амплитуда возмущений различного пространственного масштаба.

Пусть тестовое решение имеет вид простой гармонической волны с амплитудой  $U_0$ :

$$U = U_0 \exp [ik(x - Ct)], \quad (10.7)$$

где  $k = 2\pi/L$ ;  $C$  – фазовая скорость. Будем считать, что, согласно методу Неймана, решение представимо в виде

$$U(t_0 + \Delta t) = \lambda U(t_0),$$

где  $\lambda$  – множитель перехода (или коэффициент увеличения).

От схемы динамического согласования требуется, чтобы с увеличением частоты волны множитель перехода уменьшался. Для системы (10.3)

$$\lambda = 1 - i(kC \Delta t - (kC \Delta t)^2).$$

Если частота определяется формулой  $\omega = kC$ , то  $\lambda$  для шага вперед по времени имеет вид

$$\lambda_B = 1 - i\omega \Delta t - \omega^2 (\Delta t)^2,$$

а для шага назад по времени

$$\lambda_H = 1 + i\omega \Delta t - \omega^2 (\Delta t)^2.$$

Тогда для схемы динамического согласования (10.1) имеем

$$\lambda = \lambda_B \times \lambda_H^* = 1 - \omega^2 (\Delta t)^2 + \omega^4 (\Delta t)^4, \quad (10.8)$$

где  $\lambda_H^*$  – величина комплексно-сопряженная к величине  $\lambda_H$ .

Шаг по времени выбирается таким, чтобы выполнялось условие  $\omega \Delta t < 1$ .

Для модифицированной схемы Эйлера с пересчетом в случае, когда интегрирование осуществляется от момента времени  $t_0 - \Delta t$  до момента  $t_0 + \Delta t$  и обратно,

$$\lambda = \lambda_B \times \lambda_H^* = 1 - \omega^2 (\Delta t)^2 + \omega^6 (\Delta t)^6 / 6. \quad (10.9)$$

Таким образом, из формул (10.8) и (10.9) следует, что динамическое согласование по схеме Нитта подавляет высокочастотные волны, причем использование модифицированной схемы Эйлера с пересчетом дает заметно лучшие результаты.

Приведем теперь сведения о других схемах динамического согласования. Будем условно считать, что согласование применяется к уравнениям модели "мелкой воды" (10.3).

*Схема Окамуры* имеет вид:

$$\begin{aligned}
 F^*(t_0 + \Delta t) &= F^{(v)}(t_0) + \Delta t (\partial F / \partial t)^{t_0}, \\
 F^{**}(t_0) &= F^*(t_0 + \Delta t) - \Delta t (\partial F / \partial t)^{t_0 + \Delta t}, \\
 F^{(v+1)}(t_0) &= 3F^{(v)}(t_0) - 2F^{**}(t_0).
 \end{aligned}
 \tag{10.10}$$

Если в процедуру (10.10) подставить тестовое решение (10.6), то получим

$$\lambda = 1 - 2\omega^2(\Delta t)^2.$$

Видно, что схема Окамуры также подавляет высокочастотные волны. Поле массы (геопотенциала) восстанавливается после каждой итерации по согласованному полю ветра или согласовывается независимо.

*Схема Хойна:*

$$\begin{aligned}
 F^*(t_0 + \Delta t) &= F^{(v)}(t_0) + \Delta t (\partial F / \partial t)^{t_0}, \\
 F^{**}(t_0 + \Delta t) &= F^{(v)}(t_0) + \Delta t (\partial F^* / \partial t)^{t_0 + \Delta t}, \\
 F(t_0 + \Delta t) &= F^{(v)}(t_0) + \Delta t (\partial F^{**} / \partial t)^{t_0 + \Delta t}, \\
 F^*(t_0) &= F(t_0 + \Delta t) - \Delta t (\partial F / \partial t)^{t_0 + \Delta t}, \\
 F^{**}(t_0) &= F(t_0 + \Delta t) - \Delta t (\partial F^* / \partial t)^{t_0}, \\
 F^{(v+1)}(t_0) &= F(t_0 + \Delta t) - \Delta t (\partial F^{**} / \partial t)^{t_0},
 \end{aligned}
 \tag{10.11}$$

в которой

$$\begin{aligned}
 \lambda_B &= 1 - i \omega \Delta t - \omega^2(\Delta t)^2 + i \omega^3(\Delta t)^3, \\
 \lambda_H &= 1 + i \omega \Delta t - \omega^2(\Delta t)^2 - i \omega^3(\Delta t)^3.
 \end{aligned}$$

Результирующее значение множителя перехода

$$\lambda = \lambda_B \times \lambda_H^* = 1 - \omega^2(\Delta t)^2 + \omega^4(\Delta t)^4 - \omega^6(\Delta t)^6,$$

что, очевидно, лучше, чем в схеме Нитта. Однако необходимо отметить, что одна итерация по схеме Хойна требует приблизительно на треть больше компьютерного времени, чем по схеме Нитта.

*Схема Дзя:*

$$\begin{aligned}
 F^*(t_0 + \Delta t) &= F^{(v)}(t_0) + \Delta t (\partial F / \partial t)^{t_0}, \\
 F^{**}(t_0 + \Delta t) &= F^{(v)}(t_0) + \Delta t (\partial F^* / \partial t)^{t_0 + \Delta t}, \\
 F(t_0 + \Delta t) &= (1 + \alpha) F^{**}(t_0 + \Delta t) - \alpha F^*(t_0 + \Delta t); \\
 F^*(t_0) &= F(t_0 + \Delta t) - \Delta t (\partial F / \partial t)^{t_0 + \Delta t}, \\
 F^{**}(t_0) &= F(t_0 + \Delta t) - \Delta t (\partial F^* / \partial t)^{t_0}, \\
 F^{(v+1)}(t_0) &= F(t_0 + \Delta t) - \Delta t (\partial F^{**} / \partial t)^{t_0},
 \end{aligned} \tag{10.12}$$

где  $\alpha$  – параметр согласования. Видно, что при  $\alpha = 0$  схема Дзя переходит в схему Нитта.

Кроме того, уравнения модели можно интегрировать вперед – назад на несколько шагов по времени от момента  $t_0$ , например, по схеме Адамса–Бэшфорта (2.12) и усреднять полученные результаты. Нетрудно показать, что для *схемы Адамса–Бэшфорта*, которую запишем здесь в виде

$$F(t_0 + \Delta t) = F(t_0) + \Delta t \cdot \left[ \frac{3}{2} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_{t_0} - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_{t_0 - \Delta t} \right],$$

при решении одномерного линейного адвективного уравнения при  $\Delta t \rightarrow 0$  множитель перехода для вычислительной моды стремится к нулю. Этот факт может оказаться существенным, поскольку вычисления приходится повторять  $\nu$  раз, чтобы достигнуть точности согласования в соответствии с критерием (10.2).

Используя любую схему динамического согласования, можно осуществить (смоделировать) один из двух процессов согласования полей массы и движения:

- естественный для атмосферы процесс приспособления поля геопотенциала к полю ветра,
- приспособление поля ветра к полю геопотенциала.

Для этого в первом случае необходимо при переходе от цикла ( $\nu$ ) к циклу ( $\nu + 1$ ) значения функций  $(U, V)^{(\nu+1)}$  заменять на исходные значения  $U(t_0), V(t_0)$ , а во втором случае значения  $\Phi^{(\nu+1)}$  – на  $\Phi(t_0)$ .

Подчеркнем, что целесообразно разрабатывать гидродинамические модели атмосферы и процедуры динамического согласования

эмпирических данных на расштатанных по пространству и по времени сетках (иначе их называют шахматными сетками). В частности, А. Аракава показал, что лучшей для описания геострофического приспособления является сетка С (рис. 10.1), так как на ней более точно воспроизводятся фазовая и групповая скорости для инерционно-гравитационных волн, чем на любой другой сетке. Применение расштатанных сеток оправдано также экономичностью расчетов, которая обусловлена тем, что вычисление прогнозируемых величин на каждом временном уровне предусматривается не во всех точках пространственно-временной сетки. Кроме того, например, при использовании схемы центральных разностей решение в одних и тех же узлах получается через шаг по времени. За счет этого исключается вычислительная мода, обусловленная наличием трех временных уровней. Действительно, поскольку множитель перехода с одного временного уровня на другой (в методе Неймана), соответствующий вычислительной моде,  $\lambda = -1$ , то значение прогностической функции  $f^{\tau+1} = (-1)^2 f^{\tau-1}$ . Следовательно, решение не осциллирует. Важно также и то, что в тех точках расштатанных сеток, где значения зависимых переменных не определяются, эти значения вычисляются с помощью стандартных операторов сглаживания (т.е. путем линейной интерполяции), фильтрующих мелкомасштабные возмущения.

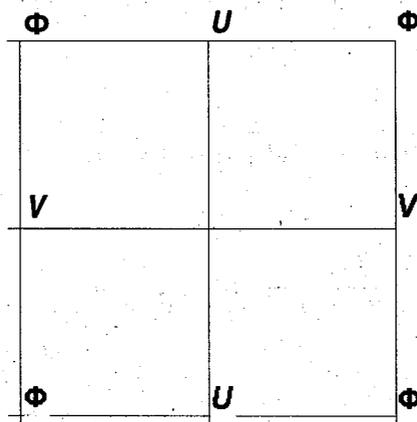


Рис. 10.1  
Пространственное распределение переменных на С-сетке Аракавы.

Запишем для примера разностную аппроксимацию уравнений “мелкой воды” для согласования полей функций  $U, V, \Phi$  на  $C$ -сетке Аракавы с помощью четырех циклов схемы Эйлера с пересчетом (два шага вперед, два шага назад), которая позволяет производить определенную фильтрацию коротковолновой части спектра атмосферных возмущений:

*на шаге вперед*

$$U_1^* = \overline{U_0}^{XY(v)} - \Delta t \left[ \left( \overline{U_0}^{XY} \delta_x \overline{U_0}^Y + V_0 \delta_y \overline{U_0}^X \right)^{(v)} - \left( \delta_x \overline{\Phi_0}^{XY} \right)^{(v)} + \ell V_0^{(v)} \right],$$

$$V_1^* = \overline{V_0}^{XY(v)} - \Delta t \left[ \left( U_0 \delta_x \overline{V_0}^Y + \overline{V_0}^{XY} \delta_y \overline{U_0}^X \right)^{(v)} - \left( \delta_y \overline{\Phi_0}^{XY} \right)^{(v)} - \ell U_0^{(v)} \right],$$

$$\Phi_1^* = \overline{\Phi_0}^{XY(v)} - \Delta t \left[ \left( \overline{U_0}^Y \delta_x \overline{\Phi_0}^Y + \overline{V_0}^X \delta_y \overline{\Phi_0}^X \right)^{(v)} - \overline{\Phi_0}^{XY(v)} (\delta_x U_1 + \delta_y V_1)^* \right];$$

$$U_1^{(v)} = \overline{U_0}^{XY(v)} - \Delta t \left[ \left( \overline{U_1}^{XY} \delta_x \overline{U_1}^Y + V_1 \delta_y \overline{U_1}^X \right)^* - \left( \delta_x \overline{\Phi_1}^{XY} \right)^* + \ell V_1^* \right],$$

$$V_1^{(v)} = \overline{V_0}^{XY(v)} - \Delta t \left[ \left( U_1 \delta_x \overline{V_1}^Y + \overline{V_1}^{XY} \delta_y \overline{U_1}^X \right)^* - \left( \delta_y \overline{\Phi_1}^{XY} \right)^* - \ell U_1^* \right],$$

$$\Phi_1^{(v)} = \overline{\Phi_0}^{XY(v)} - \Delta t \left[ \left( \overline{U_1}^Y \delta_x \overline{\Phi_1}^Y + \overline{V_1}^X \delta_y \overline{\Phi_1}^X \right)^* - \overline{\Phi_1}^{XY*} (\delta_x U_1 + \delta_y V_1)^{(v)} \right];$$

(10.13)

на шаге назад

$$\begin{aligned}
 U_0^* &= \overline{U}_1^{xy(v)} + \\
 &+ \Delta t \left[ \left( \overline{U}_1^{xy} \delta_x \overline{U}_1^y + V_1 \delta_y \overline{U}_1^x \right)^{(v)} - \left( \delta_x \overline{\Phi}_1^{xy} \right)^{(v)} + \ell V_1^{(v)} \right], \\
 V_0^* &= \overline{V}_1^{xy(v)} + \\
 &+ \Delta t \left[ \left( U_1 \delta_x \overline{V}_1^y + \overline{V}_1^{xy} \delta_y \overline{U}_1^x \right)^{(v)} - \left( \delta_y \overline{\Phi}_1^{xy} \right)^{(v)} - \ell U_1^{(v)} \right], \\
 \Phi_0^* &= \overline{\Phi}_1^{xy(v)} + \\
 &+ \Delta t \left[ \left( \overline{U}_1^y \delta_x \overline{\Phi}_1^y + \overline{V}_1^x \delta_y \overline{\Phi}_1^x \right)^{(v)} - \overline{\Phi}_1^{xy(v)} (\delta_x U_0 + \delta_y V_0)^* \right]; \\
 U_0^{(v+1)} &= \overline{U}_1^{xy(v)} + \\
 &+ \Delta t \left[ \left( \overline{U}_0^{xy} \delta_x \overline{U}_0^y + V_0 \delta_y \overline{U}_0^x \right)^* - \left( \delta_x \overline{\Phi}_0^{xy} \right)^* + \ell V_0^* \right], \\
 V_0^{(v+1)} &= \overline{V}_0^{xy(v)} + \\
 &+ \Delta t \left[ \left( U_0 \delta_x \overline{V}_0^y + \overline{V}_0^{xy} \delta_y \overline{U}_0^x \right)^* - \left( \delta_y \overline{\Phi}_0^{xy} \right)^* - \ell U_0^* \right], \\
 \Phi_0^{(v+1)} &= \overline{\Phi}_1^{xy(v)} + \\
 &+ \Delta t \left[ \left( \overline{U}_0^y \delta_x \overline{\Phi}_0^y + \overline{V}_0^x \delta_y \overline{\Phi}_0^x \right)^* - \overline{\Phi}_0^{xy*} (\delta_x U_0 + \delta_y V_0)^{(v+1)} \right].
 \end{aligned}$$

(10.14)

Здесь нижние индексы «0» и «1» указывают на принадлежность функций к моментам времени соответственно  $t_0$  и  $t_0 + \Delta t$ ;  $U^*$ ,  $V^*$ ,  $\Phi^*$  – предварительные значения адаптируемых функций в конце шага по времени  $\Delta t$ ; верхние индексы  $(v)$  и  $(v+1)$  обозначают номера итераций. В рассматриваемом случае итерационный процесс строится так, что после каждого четырехтактного цикла полученное поле геопотенциала заменяется исходным, а именно: при переходе от цикла  $(v)$  к циклу  $(v+1)$  поле  $\Phi_0^{(v+1)}$  заменяется на поле  $\Phi_0$ . Тем самым моделируется процесс приспособления поля ветра к полю геопотенциала (т.е. наблюдаемое поле геопотенциала  $\Phi_0$  “закреплено”).

Заметим, что если в уравнениях атмосферной модели имеются необратимые по времени члены, то исходная задача является корректной только в направлении возрастания времени. В обратном направлении будет корректна так называемая сопряженная задача. Аппарат сопряженных уравнений позволяет, например, выяснить, откуда придут возмущения в район прогноза. Он дает возможность согласовать в пространстве и времени результаты различных по точности нерегулярно распределенных в пространстве и времени измерений с прогностическими полями. Поэтому схемы динамического согласования, использующие этот аппарат, могут применяться для решения задач усвоения данных наблюдений.

10100

Вопросы, связанные с применением аппарата сопряженных уравнений к задаче усвоения данных наблюдений, рассмотрены в работе [1]. В настоящей работе рассматриваются вопросы, связанные с применением аппарата сопряженных уравнений к задаче согласования результатов измерений с прогностическими полями. В работе [2] рассмотрены вопросы, связанные с применением аппарата сопряженных уравнений к задаче согласования результатов измерений с прогностическими полями. В работе [3] рассмотрены вопросы, связанные с применением аппарата сопряженных уравнений к задаче согласования результатов измерений с прогностическими полями. В работе [4] рассмотрены вопросы, связанные с применением аппарата сопряженных уравнений к задаче согласования результатов измерений с прогностическими полями. В работе [5] рассмотрены вопросы, связанные с применением аппарата сопряженных уравнений к задаче согласования результатов измерений с прогностическими полями. В работе [6] рассмотрены вопросы, связанные с применением аппарата сопряженных уравнений к задаче согласования результатов измерений с прогностическими полями. В работе [7] рассмотрены вопросы, связанные с применением аппарата сопряженных уравнений к задаче согласования результатов измерений с прогностическими полями. В работе [8] рассмотрены вопросы, связанные с применением аппарата сопряженных уравнений к задаче согласования результатов измерений с прогностическими полями. В работе [9] рассмотрены вопросы, связанные с применением аппарата сопряженных уравнений к задаче согласования результатов измерений с прогностическими полями. В работе [10] рассмотрены вопросы, связанные с применением аппарата сопряженных уравнений к задаче согласования результатов измерений с прогностическими полями.

## Глава 11. ПОСТАНОВКА БОКОВЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ ИНТЕГРИРОВАНИИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

### 11.1. Боковые граничные условия для полушарных и региональных прогностических моделей

При интегрировании эволюционных уравнений атмосферных моделей для ограниченной территории (региональной области) с помощью временных разностных схем на каждом шаге по времени необходимо предвычислять значения прогнозируемых функций не только во внутренних узлах сетки, но и на боковых границах области построения решения. В противном случае при переходе от одного временного слоя точек ( $\tau$ ) к другому ( $\tau + 1$ ) при  $\tau \rightarrow \infty$  область будет сжиматься в точку. Последний эффект устраняется следующим образом:

1) использованием направленных внутрь области конечных разностей по пространственным переменным  $x$  и  $y$ , таких, чтобы для вычисления требовались только значения функций в узлах, расположенных на границе, и в ближайших к границе внутренних узлах;

2) постановкой фиктивных боковых граничных условий

$$\partial F / \partial t |_{\Gamma} = 0 \quad (11.1)$$

(где символ  $\Gamma$  означает любой участок боковой границы области решения;  $F$  – функции, фигурирующие в эволюционных уравнениях атмосферной модели (т.е. компоненты скорости ветра  $U$  и  $V$ , температура воздуха  $T$  (или геопотенциал  $\Phi$ ), массовая доля водяного пара  $q$  и др.), с помощью которых в граничных узлах на весь срок прогноза закрепляются (замораживаются) начальные данные, так как тенденции прогнозируемых функций в этих узлах полагаются равными нулю. Разумеется, фиктивные граничные условия не соответствуют реальной эволюции атмосферных процессов, приводят к искажению решений вблизи боковых границ и порождают множество паразитарных (ложных) возмущений разных пространственных масштабов. Последние, распространяясь с различными фазовыми скоростями внутрь области интегрирования, ухудшают качество прогнозируемых полей.

Рассмотрим два приема, используемые для уменьшения указанных эффектов посредством обеспечения достаточно плавного

перехода от неизменных на границе значений функций к изменяющимся значениям в соответствии с получаемыми решениями прогностических уравнений атмосферной модели во внутренних узлах сетки:

а) значения тенденций  $\partial F/\partial t$ , определяемые с помощью прогностических уравнений модели во внутренних узлах, расположенных вблизи боковых границ, интерполируются на границу с помощью соотношения

$$(\partial F/\partial t)_m = \alpha_m (\partial F/\partial t)_M \quad (11.2)$$

так, чтобы на границе они обращались в нуль. В формуле (11.2) обозначено:  $M$  – номер узла, в котором получено решение для функции  $F$ ;  $m$  – номера узлов, расположенных между граничными узлами ( $n_\Gamma = 0$ ) и узлом  $N$ , содержащим решение ( $n = 0, 1, \dots, N$ ); весовой множитель  $\alpha_m = m/M$  изменяется от нуля (при  $m = m_\Gamma = 0$ ) до единицы (при  $m = M$ );

б) используют так называемую «буферную зону», окаймляющую область прогноза. В пределах этой буферной зоны решается краевая задача для уравнения Лапласа  $\nabla^2 F = 0$  с изменяющимися во времени граничными условиями на внутренней границе, разделяющей буферную зону и область прогноза, и с закрепленными условиями на внешней границе зоны или с условиями вида

$$\partial U/\partial n = \partial V/\partial n = \partial T/\partial n = 0, \quad (11.3)$$

в которых  $n$  – внешняя нормаль к границе  $\Gamma$ .

Так как в полушарных (полусферных) прогностических моделях граница области проходит вдоль экватора, то, предполагая, что кроссэкваториальный воздухообмен между полушариями мал, можно принять боковые условия вида

$$C_n|_\Gamma = 0, \partial C_k/\partial n|_\Gamma = 0, \partial T/\partial n|_\Gamma = 0, \quad (11.4)$$

где  $C_n$  и  $C_k$  – соответственно нормальная и касательная к границе составляющая вектора скорости;  $T$  – температура воздуха.

Если в системе полных уравнений модели вместо уравнения притока тепла используется уравнение для геопотенциала  $\Phi$ , то боковые граничные условия можно сформулировать для геопотенциала и двумерной (плоской) дивергенции  $D$  в виде:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (11.5)$$

$$D \Big|_{\Gamma} = \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) \Big|_{\Gamma}$$

В глобальных и полушарных спектральных моделях по полным уравнениям, а также в моделях для ограниченных территорий используются периодические боковые граничные условия:

$$F(x, y, t) = F(x + L_x, y, t),$$

$$F(x, y, t) = F(x, y + L_y, t).$$

Здесь  $F = U, V, \Phi, \dots$ ;  $L_x$  и  $L_y$  – размеры области интегрирования в направлениях осей  $X$  и  $Y$ .

### **11.2. Конструирование боковых граничных условий для вложенных моделей на мелких сетках**

Для учета влияния на региональный прогноз процессов, протекающих над районами, примыкающими к региональной прогностической области, конструируются решения на вложенных сетках, дающих большее пространственное разрешение. При этом для всей рассматриваемой области (скажем, для полушария) строится прогностическая крупномасштабная (фоновая) конечно-разностная гидродинамическая модель атмосферы на грубой (крупной) сетке с шагом  $\Delta S$ . Внутри этой области строится вложенная (мелкая) сетка с меньшим шагом  $(\Delta S)_m = (\Delta S)_k/q$ ,  $q = 2, 4, \dots$ , на которой методом конечных разностей интегрируется та же система уравнений гидротермодинамики. Однако последние могут дополнительно описывать ряд более мелкомасштабных физических процессов, протекающих в различных слоях атмосферы, таких, как процессы в планетарном пограничном слое атмосферы, орографические эффекты, а также diabatic процессы (например, фазовые переходы влаги; крупномасштабная конденсация; сухая и влажная конвекция в тропиках; испарение осадков; преобразование солнечной радиации на молекулах воздуха, капельно-жидких и кристаллических облачных частицах, на естественных и антропогенных примесях и т.д.). При

этом необходимые боковые граничные условия для модели на вложенной сетке получаются с помощью фоновой модели.

Разработано два метода постановки боковых граничных условий для вложенных моделей:

– *метод одностороннего взаимодействия* (воздействия) решений, предусматривающий только односторонний учет влияния процессов, эволюция которых описывается на крупной сетке, на процессы, моделируемые на учащенной сетке. Обратным влиянием в этом случае пренебрегают;

– *метод двухстороннего взаимодействия*, учитывающий взаимное влияние решений, получаемых на основе уравнений фоновой и вложенной моделей.

При реализации метода двухстороннего взаимодействия решений появляются трудности, связанные с согласованием решений на основной и вложенной сетках. Необходимость согласования решений обусловлена зависимостью фазовых и групповых скоростей от разрешения сеток. На крупной сетке фазовые и групповые скорости меньше, чем на мелкой. Различия в скоростях возрастают с уменьшением длин волн. Волны, которые могут быть представлены на обеих сетках, при переходе с крупной на мелкую сетку ускоряются и поэтому вытягиваются в направлении их перемещения, а при переходе с мелкой сетки на крупную замедляются и сплющиваются. Те волны, которые могут быть представлены только на мелкой сетке, на границе между сетками отражаются внутрь мелкой сетки и преобразуются в другие волны, порождая различные физические и вычислительные моды. За счет различий в значениях фазовых и групповых скоростей волн на сетках с различным разрешением возникают ошибки решений на мелкой и крупной сетках. Этот эффект называют вычислительным преломлением.

Процедура интегрирования модели на вложенных сетках в случае одностороннего взаимодействия решений сводится в основных чертах к следующему:

1) сначала независимо от вложенной модели интегрируется фоновая модель на определенный интервал времени  $t_1$  с шагом  $(\Delta t)_k$ . При этом значения метеорологических величин, спрогнозированных на каждом шаге по времени, запоминаются лишь в узлах крупной сетки, лежащих на границах вложенной сетки;

2) по спрогнозированным значениям зависимых переменных путем интерполяции в пространстве и во времени вычисляются их значения в граничных узлах вложенной сетки в моменты времени, соответствующие шагам по времени  $(\Delta t)_m$ , используемым на мелкой сетке;

3) интегрируются уравнения модели на вложенной сетке на интервал времени  $t_1$  с шагом  $(\Delta t)_m$  с использованием значений в граничных узлах, полученных на основе прогнозов по фоновой модели.

Описанная процедура повторяется до тех пор, пока во всех узлах области решения не будут получены прогностические значения метеорологических величин на срок прогноза  $N(\Delta t)_k = NI(\Delta t)_m$  (т.е. с требуемым упреждением, или заблаговременностью). Здесь  $N$  и  $NI$  – число шагов интегрирования соответственно фоновой и вложенной моделей.

В случае использования метода двухстороннего взаимодействия процедура интегрирования включает следующие этапы:

а) сначала интегрируется фоновая модель на один шаг вперед  $(\Delta t)_k$  и получаются зависимые переменные на узлах крупной (фоновой) сетки. Спрогнозированные значения метеорологических переменных в узлах фоновой модели, лежащих на границе вложенной сетки, и их потоки через эту границу запоминаются;

б) по указанным значениям путем интерполяции рассчитываются значения зависимых переменных в граничных узлах мелкой сетки;

в) интегрируется модель на вложенной сетке с шагом  $(\Delta t)_m$  на интервал времени, равный  $(\Delta t)_k$ , с использованием вычисленных граничных условий. Очевидно, это этап прямого воздействия решения, полученного по фоновой модели, на решение, которое строится на вложенной сетке;

г) по результатам интегрирования вложенной модели путем интерполяции получаются данные на узлах фоновой модели в области мелкой сетки на момент времени  $t_0 + (\Delta t)_k$ . Далее интегрируется фоновая модель на следующий шаг по времени, т.е. на момент времени  $t_0 + 2(\Delta t)_k$ , с использованием результатов собственного прогноза на узлах, расположенных во внешней части области, и проинтерполированных на момент времени  $t_0 + (\Delta t)_k$  результатов прогноза по вложенной модели в области мелкой сетки. Таким образом осуще-

ствляется учет влияния процессов, протекающих внутри вложенной сетки, на внешний поток, т.е. обратное взаимодействие решений.

Хотя применение метода двухстороннего взаимодействия и представляется физически более обоснованным, но может порождать большие ошибки на мелкой сетке, чем метод одностороннего взаимодействия. Именно поэтому последний нашел более широкое применение в атмосферных моделях.

Однако применение метода одностороннего взаимодействия также имеет ряд серьезных трудностей. Одна из них связана с гиперболичностью системы уравнений гидротермодинамики и заключается в том, что на границе, разделяющей крупную и мелкую сетки, следует задавать атмосферные функции только там, где осуществляется влияние извне, т.е. в местах, где воздушный поток направлен (втекает) в область вложенной сетки. Иными словами, задавать переменные на всей границе вложенной сетки на основе результатов фоновой модели нельзя, так как в противном случае может иметь место переопределение граничных условий (т.е. задание лишних условий), что приводит к большим ошибкам и даже к "взрыву" численного решения.

Таким образом, основные требования, предъявляемые к атмосферным моделям на вложенных сетках и к граничным условиям, сводятся к следующему:

- вычислительный алгоритм, реализующий модель, должен быть устойчивым,
- боковые граничные условия не должны быть переопределены,
- необходимо, чтобы при прохождении волн, движущихся из области мелкой сетки через границу, не возникали отраженные волны со значительными амплитудами.

*Анонс.* Рассмотрим некоторые *варианты постановки граничных условий в методе одностороннего взаимодействия решений на вложенных сетках.*

1. Граничные условия излучения строятся на основе предположения о том, что решения уравнений могут быть представлены в виде набора (суперпозиции) гармоник вида  $A \exp[i(\omega t - kx)]$ , энергия которых переносится с групповой скоростью. При этом полагается, что в окрестностях каждой граничной точки преобладает одна гармоника, для которой проекции фазовой и групповой скоростей

( $C_\phi = \omega/k$ ,  $C_r = \partial\omega/\partial k$ ) на нормаль к границе одинаковы по знаку. В этом случае можно приближенно считать, что решение в окрестности граничных точек удовлетворяет уравнению

$$\partial F/\partial t = -C_\phi \partial F/\partial x,$$

называемому условием излучения, в котором  $C_\phi$  – фазовая скорость преобладающей волны в численном решении у границы в данный момент времени.

Главная трудность реализации этого метода состоит в том, что нормальная составляющая скорости к границе обычно неизвестна. Поэтому значения  $C_\phi$  в граничных точках приходится определять путем экстраполяции из внутренних узлов мелкой сетки, прилегающих к границе, если  $C_\phi$  направлена из вложенной сетки, и, наоборот, – по их значениям в граничных узлах крупной сетки, если  $C_\phi$  направлена из внешней области.

2. Граничные условия конструируются в зависимости от знака нормальной к границе составляющей скорости ветра:

– граничные компоненты ветра используются в точках втекания, а в точках оттока экстраполируются из предпоследнего ряда точек вложенной сетки;

– на границах в точках втекания из решений на крупной сетке задаются только составляющие ветра, другие зависимые переменные используются во всех точках границы, а в точках оттока ветер экстраполируется из вложенной сетки;

– поскольку не всякая экстраполяция изнутри области на границу обеспечивает устойчивость вычислительной схемы, то, казалось бы, лучше задавать все переменные в граничных точках. Однако такой метод, обеспечивая устойчивость схемы интегрирования, не обеспечивает согласованность схемы для произвольных граничных условий и приводит к переопределенной задаче;

3. Для подавления роста возмущений, отраженных или порождаемых другими нежелательными эффектами на границах, вводят в уравнения диффузионные члены или применяют специальные процедуры сглаживания переменных в приграничной зоне.

Например, при задании на границе сеток метеорологических переменных, полученных на крупной сетке, целесообразно проводить сглаживание в узлах вложенной сетки, отстоящих на один шаг

от границы  $\Gamma$ , по формуле:

$$F_{\Gamma-1} = 0,5 F_{\Gamma-1} + 0,25 (F_{\Gamma} + F_{\Gamma-2}).$$

Для исключения вычислительных шумов в приграничных зонах применяется также следующая процедура сглаживания:

$$F_{\Gamma-m} = (1 - \alpha_m) F_{\Gamma-m} + \alpha_m \bar{F}_{\Gamma-m}, \quad (11.6)$$

где:  $\bar{F}_{\Gamma-m}$  — значение, осредненное по значениям в четырех окружающих узлах;  $\alpha_m$  — коэффициенты сглаживания, уменьшающиеся с ростом расстояния от границы вложенной сетки до узлов, где проводится сглаживание. Оптимальные значения коэффициентов  $\alpha_m$  подбираются путем численных экспериментов.

Наиболее перспективным способом уменьшения влияния шумов, возникающих вблизи границ, представляется согласование фазовых скоростей и амплитуд как медленных (длинных) погодообразующих волн, так и быстрых (коротких) гравитационных волн. Согласование может быть достигнуто за счет применения фильтров к уравнениям вложенной или фоновой моделей, позволяющих сблизить по порядку величины трункационные ошибки на мелкой и крупной сетках, имеющих различное разрешение, вследствие чего уменьшается различие в точности описания фазовых скоростей и амплитуд волновых мод.

Наиболее широко вложенные сетки применяют для прогноза мезомасштабных процессов для локальных районов и особенно при моделировании тропических циклонов. С целью детального описания процессов, протекающих в таких циклонах, используют процедуру телескопизации, интегрируя уравнения моделей на нескольких вложенных друг в друга сетках с увеличивающимся разрешением, в том числе и на сетках, перемещающихся вместе с циклоном (т.е. в лагранжевых координатах).

В заключение рассмотрим пример постановки граничных условий в шестиуровневой модели на вложенных сетках с односторонним взаимодействием решений, в которой в качестве фоновой модели выступает северополушарная адиабатическая модель по полным уравнениям в изобарической системе координат, а две вложенные диабатические региональные модели охватывают соответственно территорию Китая и Северо-Западную Африку и прилегаю-

щие районы полушария. В частности, при выборе расположения мелкой сетки для второй вложенной модели учитывались следующие обстоятельства:

- вложенная сетка модели должна включать районы, где доминируют барические образования и циркуляционные процессы, влияющие на погоду в Северо-Западной Африке: азорский максимум; сезонный циклон и спорадически возникающий зимой полярный фронт над Средиземным морем; влажный океанический (летний) юго-западный муссон; северо-восточный пассат; северо-восточный харматан, дующий из Сахары и являющийся по сути зимним очень сухим муссоном в Западной Африке, и др.;

- границы вложенной сетки должны отстоять от границ полушарной сетки на таком расстоянии, чтобы воздушная масса, приходящая в зону вложенной сетки, за период времени, равный заблаговременности прогноза, приходила из Северного полушария;

- чтобы обеспечивалось уменьшение влияния боковых граничных условий на результаты интегрирования вложенной модели, вложенная сетка должна охватывать значительно большую территорию, чем область регионального прогноза.

Вследствие сказанного вложенная сетка включала большие части Северной Африки, Аравии и Западной Европы и восточные районы Тропической и Северной Атлантики.

Пространственный шаг крупномасштабной фоновой модели  $(\Delta S)_k = 300$  км, шаг по времени  $(\Delta t)_k = 12$  мин., а для вложенной модели на мелкой сетке  $(\Delta S)_m = (\Delta S)_k / 2 = 150$  км,  $(\Delta t)_m = (\Delta t)_k / 2 = 6$  мин.

При формировании граничных условий для модели на вложенной сетке использовались прогностические значения переменных в граничных узлах крупной сетки, а также прогностические значения зависимых переменных в узлах мелкой сетки, отстоящих от границы на один и два шага. Полагалось, что срок прогноза ( $T$ ) разделяется на несколько равных интервалов ( $\Delta T$ ). Для любого интервала  $\Delta T = t_2 - t_1$  сначала рассчитывался прогноз на основе полушарной модели. Прогностические значения переменных в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  интерполировались в граничные узлы мелкой сетки. Обозначим значения переменных ( $F$ ) в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  через  $(F_\Gamma)^{t_1}$  и  $(F_\Gamma)^{t_2}$ . Эти значения использовались для формирования граничных условий при прогнозе на мелкой сетке на интервале времени от  $t_1$

до  $i2$ . При этом применялись нестационарные граничные условия, т.е. граничные значения зависимых переменных  $f$  менялись через каждый подинтервал  $\Delta T_1$  ( $\Delta T_1 = \Delta T / K_1$ , где  $K_1$  – целое число). В таком случае граничные условия для прогноза на  $k1$ -ом подинтервале времени имеют вид:

$$(f_{\Gamma})^t = (F_{\Gamma})^{k1} = (1 - A^t)(F_{\Gamma})^{t1} + A^t (F_{\Gamma})^{t2}, \quad (11.7)$$

где  $A^t = k1 \times \Delta T_1 / \Delta T$ ,  $k1 = 1, 2, \dots, K_1$ .

При наличии оттока воздуха на границе мелкой сетки граничные условия (11.7) уточнялись с помощью прогностических значений зависимых переменных в узлах мелкой сетки, отстоящих от границы на один и два шага сетки ( $f_{\Gamma-1}$  и  $f_{\Gamma-2}$ ). В ходе прогноза от начала до конца подинтервала ( $\Delta T_1$ ) такое уточнение может осуществляться несколько раз, т.е. через каждый подинтервал времени  $\Delta T_2$  ( $\Delta T_2 = \Delta T_1 / K_2$ , где  $K_2$  – целое число). Для  $k2$ -го подинтервала времени уточнение граничных условий проводится по формуле:

$$(f_{\Gamma})^t = B(F_{\Gamma})^{k1} + (1 - B)(2f_{\Gamma-1} - f_{\Gamma-2})^{k2}, \quad (11.8)$$

где:  $k2 = 1, 2, \dots, K2$ ;  $B$  – эмпирическая константа,  $0 \leq B \leq 1$ . Очевидно, при  $B = 1$  условия (11.8) эквивалентны условиям (11.7).

Из условий (11.8) можно получить несколько конкретных вариантов условий. Эти варианты разделяются на стационарные и нестационарные граничные условия без уточнения или с уточнением. Вариант граничных условий (11.8) стационарен, если  $\Delta T_1 = \Delta T = T$ , и нестационарен, если  $\Delta T_1 \leq \Delta T < T$ . Уточнение проводится, если принимается  $0 \leq B \leq 1$ , и не проводится, если  $B = 1$ . Лучший вариант граничных условий выбирался в ходе численных экспериментов.

Для исключения вычислительных шумов в приграничных зонах применялась процедура сглаживания типа (11.6):

$$\bar{f}_{\Gamma-m} = (1 - \alpha_m) f_{\Gamma-m} + \alpha_m \bar{f}_{\Gamma-m}. \quad (11.9)$$

Анализ решений для различных вариантов боковых граничных условий показал, что изменяющиеся нестационарные граничные условия, задаваемые по результатам полушарного прогноза, оказываются хуже, чем стационарные, зафиксированные по результатам полушарного суточного прогноза. Причиной этого является то, что моделируемые сложные нелинейные диабатические процессы на

мелкой сетке не успевают адаптироваться к постоянно меняющимся нестационарным граничным условиям. Качество прогнозов улучшается, если при наличии оттока воздуха на границе вводится корректировка граничных условий через каждые 12 часов (т.е. при  $\Delta T_2 = 12$  ч.) по прогностическим значениям на вложенной сетке в узлах, отстоящих от границы на один и два шага.

Оценка влияния корректировки граничных условий на результаты интегрирования вложенной модели показывают, что за счет корректировки значительно улучшается качество прогнозов по сравнению с полушарной моделью. Так, для геопотенциала АТ-500 во вложенной модели для Китая средняя относительная ошибка  $\varepsilon_8$  и средняя квадратическая относительная ошибка  $\varepsilon_\sigma$  уменьшаются соответственно на 50% и 35%, а коэффициент корреляции между фактическими и прогнозными значениями и качественный коэффициент корреляции  $\rho$ , характеризующий оправдываемость прогноза по знаку, увеличиваются соответственно на 50% и 45%. Кроме того, в случае одностороннего взаимодействия сглаживание решений в приграничных зонах вложенной сетки по формуле (11.9) способствует подавлению вычислительных шумов.

## Глава 12. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫБОРУ СХЕМ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Резюмируя все вышеизложенное, сформулируем основные требования и рекомендации, на которые следует опираться при конструировании схем численного интегрирования прогностических уравнений:

– Задача прогноза погоды может быть поставлена только на основе эволюционного уравнения, либо системы уравнений, включающих как эволюционные, так и диагностические уравнения;

– Задача прогноза должна быть поставлена корректно;

– Сеточное уравнение должно аппроксимировать соответствующее дифференциальное уравнение. При этом желательно, чтобы порядок аппроксимации производной по пространственной координате (координатам в случае двух- и трехмерных моделей) был выше, чем производной по времени. Это обусловлено тем, что дискретизация по пространству порождает вычислительную дисперсию моделируемых волн, искажающую реальный спектр атмосферных движений (т.е. фазовые скорости и процесс переноса энергии по спектру волновых чисел). Повышение порядка точности аппроксимации вычислительной схемы приводит к уменьшению погрешностей конечно-разностного приближения и тем самым повышает устойчивость процесса численного интегрирования. Однако аппроксимация не должна приводить к значительному уменьшению размеров сеточной области, где могут быть получены поля прогнозируемых атмосферных функций, т.е. в указанном смысле аппроксимация должна быть оптимальной.

– Численная схема должна быть согласованной с исходным континуальным уравнением и по возможности обладать свойством симметрии относительно времени.

– Для обеспечения устойчивости вычислительной схемы и сходимости численного решения к точному должно выполняться достаточное условие сходимости по Нейману. Для любой линейной корректно поставленной разностной задачи сходимость вытекает из аппроксимации и устойчивости.

– Значения шагов дискретной пространственно-временной сетки для интегрирования нелинейных уравнений переноса грубо

можно оценить с помощью критерия Куранта–Фридрихса–Леви (справедливого лишь для линейного уравнения переноса). Для любого нелинейного прогностического уравнения аналогичные оценки следует получить на основе его линеаризованного аналога.

– Множитель перехода ( $\lambda$ ) от некоторого исходного слоя точек (слоя сеточных значений функции  $f_m^s$ ) к прогностическому слою точек ( $f_m^{s+1}$ ), соответствующий физическому решению, должен быть близок к единице.

– Схема интегрирования должна быть либо нейтрально устойчивой, либо численная диссипация (обусловленная вычислительной вязкостью) должна быть меньше физической диссипации. В этом смысле наиболее подходящими являются слабо диссипативные схемы.

– Поскольку в атмосфере существуют погодообразующие волны (мгновенными портретами которых являются фронтальные раздели, циклоны, антициклоны, седловины, гребни, ложбины и другие крупномасштабные возмущения, отображенные на синоптических картах погоды), а также инерционно-гравитационные, гравитационные и акустические волны, то конечно-разностные схемы должны выбираться таким образом, чтобы выделить основные погодообразующие факторы и исключить влияние второстепенных факторов. Эта процедура, называемая отфильтровыванием (или фильтрацией) мелкомасштабных возмущений (волновых мод), может осуществляться посредством представления прогностических полей метеорологических величин рядами Фурье по ортогональным базисным функциям (например, по тригонометрическим полиномам, полиномам Лежандра, полиномам Чебышева и другим классическим ортогональным многочленам) и усечения членов, описывающих мелкомасштабные моды. В частности, для исключения ошибок ложного представления необходимо отфильтровывать двух- и трехшаговые волны.

– В численной схеме должны отсутствовать паразитарные (ложные) волновые моды, возникающие в областях резких (скачкообразных) изменений коэффициентов системы разностных уравнений из-за грубого пространственного разрешения. Паразитарные волны могут возникать также вблизи границ прогностической области из-за некорректных боковых граничных условий (таких, на-

пример, как закрепление начальных данных в узлах на границе сетки на весь срок прогноза) и из-за отражения волн от непроницаемых (жестких) боковых «стенок». Для уменьшения амплитуд таких паразитарных волн создается так называемый «пористый слой». С этой целью

а) применяют специальные процедуры сглаживания получаемых решений вблизи границ, в которых интенсивность сглаживания уменьшается вместе с удалением от границ вглубь сетки,

б) используют условие излучения, позволяющее проникать через границы наружу (в окружающее пространство атмосферы) волнам с большими фазовыми скоростями,

в) вводят буферные зоны, окаймляющие область прогноза, и т.д.;

– Схема численного интегрирования должна как можно меньше искажать фазовые и групповые скорости волн, т.е. вычислительная дисперсия схемы должна быть минимальной.

– При использовании трехуровневых схем появляются вычислительные моды, не связанные с физическими модами, но забивающие их, поэтому вычислительное начальное условие необходимо задавать с помощью наиболее точных двухуровневых схем. Весьма подходящей для этой цели является схема Хойна. Для исключения вычислительной моды целесообразно периодически включать в процесс интегрирования какую-либо корректную двухуровневую схему.

– Для уменьшения амплитуд вычислительных мод используют специальные алгоритмы, подавляющие их: вводятся либо двухшаговые схемы, селективно подавляющие наиболее мелкомасштабные волны; допустимые разрешением сетки, либо схемы, обладающие демпфирующим свойством (вычислительной вязкостью);

– С целью предотвращения роста вычислительных мод (и фильтрации мелкомасштабных волн из решений) полезно также применение специальных процедур (операторов) периодического пространственного и временного сглаживания моделируемых (прогнозируемых) полей, таких, например, как пространственный фильтр, предложенный Шапиро,

$$F_{m,j} = F_{m,j} - \beta [(\Delta x/2)^4 (\delta x)^4 F_{m,j} + (\Delta y/2)^4 (\delta y)^4 F_{m,j}], \quad (12.1)$$

в котором  $\beta$  – эмпирическая константа,

$$(\delta x)^4 F_{m,j} = (\Delta x)^{-4} (F_{m-2,j} - 4F_{m-1,j} + 6F_{m,j} - 4F_{m+1,j} + F_{m+2,j}),$$

$$(\delta y)^4 F_{m,n} = (\Delta y)^{-4} (F_{m,j-2} - 4F_{m,j-1} + 6F_{m,j} - 4F_{m,j+1} + F_{m,j+2}),$$

и временной (частотный) фильтр Робера–Асселина:

$$(F_{m,j})^{\tau} = F_{m,j} + 0,5v[(F_{m,j})^{\tau-1} - 2(F_{m,j})^{\tau} + (F_{m,j})^{\tau+1}], \quad (12.2)$$

где  $v$  – параметр фильтра (обычно принимается  $v = 0.05$ ).

– Целесообразно использовать полунявные и неявные схемы интегрирования систем уравнений модели, так как названные схемы повышают устойчивость вычислительного процесса и обеспечивают существенно более точные решения, чем явные схемы.

– Вязкие члены в эволюционных уравнениях модели лучше включать по нелинейным схемам, так как линейные схемы недостаточно избирательны в смысле подавления волн и приводят к затуханию не только коротких, но и метеорологически значимых возмущений. Именно поэтому следует отдавать предпочтение нелинейным схемам вязкости, включаемым в уравнения неявно.

– Так как фильтрация и подавление коротких волн за счет искусственной вязкости приводят к искажению распределения энергии по спектру атмосферных волн, то нужно отдавать предпочтение схемам, с помощью которых искусственно не подавлялись бы реально существующие в атмосфере короткие волны (а именно, инерционно-гравитационные и гравитационные волны, играющие важную роль в установлении квазигеострофического равновесия между полями массы и движения), но обеспечивалось бы предотвращение нелинейной неустойчивости и ложный приток энергии в мелкомасштабный участок спектра генерируемых волновых мод. К указанным схемам относятся схемы, сохраняющие интегральные свойства инерционных версий континуальных моделей, такие, как кинетическая энергия, энтропия (т.е. квадрат завихренности поля скорости), потенциальная энтропия, полная механическая энергия (т.е. сумма кинетической и потенциальной энергий в случае двумерных моделей) и полная энергия (т.е. сумма полной механической и внутренней энергий в случае трехмерных моделей). Построение таких схем для уравнений модели, записанных в потоковой форме, осуществляется на основе «блкс–метода».

– Схема должна быть эффективной с точки зрения ее реализа-

ции, т.е. использовать возможно меньший объем оперативной памяти ЭВМ и минимум счетного времени. Ограничения по памяти обеспечивают схемы, затрагивающие как можно меньше временных слоев. Ограничения по времени требуют схемы с малым числом операций при моделировании прогноза на один шаг. Требование устойчивости схемы обычно приводит к необходимости выбора малого шага интегрирования по времени по сравнению с характерными периодами рассматриваемой физической системы.

Компромисс между точностью и эффективностью схемы может быть достигнут либо использованием схемы более высокого порядка с большим шагом интегрирования по времени, либо использованием схемы низкого порядка с малым шагом.

Первый подход имеет следующие недостатки:

- шаг по времени ограничивается собственными частотами физической системы;
- большинство схем высоких порядков используют информацию на нескольких временных слоях.

Наилучший компромисс между точностью, устойчивостью и эффективностью достигается, как правило, при использовании схем второго порядка точности (таких, как схемы центральных разностей, Кранка-Николсона, Лакса-Вендрофа и др.) с выбором шага интегрирования по времени для линейного уравнения переноса на основе критерия Куранта-Фридрихса-Леви.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

### СРАВНЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СВОЙСТВ ДВУХУРОВЕННЫХ СХЕМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Как показано в главе 5, вычислительные свойства трехуровневных схем во многом зависят от точности вычислительного начального условия, т.е. от того, какая схема используется на первом шаге по времени. Чтобы выяснить, какую схему лучше использовать для получения вычислительного начального условия, проанализируем различные конечно-разностные схемы применительно к уравнению колебаний (4.39).

#### *Явная двухуровневная схема*

Для уравнения колебаний явная двухуровневная схема имеет следующий вид:

$$\frac{A^{\tau+1} - A^{\tau}}{\Delta t} = i\omega A^{\tau}.$$

Для определения множителя перехода  $\lambda$  выразим амплитуду  $A^{\tau+1}$  через  $A^{\tau}$

$$A^{\tau+1} = A^{\tau} (ip + 1), \quad (\text{П1.1})$$

где  $p = \omega\Delta t$ .

Из определения множителя перехода и (П1.1) находим множитель перехода и его модуль:

$$\lambda = 1 + ip, \quad |\lambda| = \sqrt{1 + p^2}. \quad (\text{П1.2})$$

Как видно из (П1.2),  $|\lambda| > 1$ , амплитуда решения растет с течением времени и, следовательно, явная двухуровневная схема неустойчива.

#### *Неявная двухуровневная схема*

$$\frac{A^{\tau+1} - A^{\tau}}{\Delta t} = i\omega A^{\tau+1}. \quad (\text{П1.3})$$

Разрешив уравнение (П1.3) относительно  $A^{\tau+1}$ , получим:

$$A^{\tau+1} = \frac{1}{1 - ip} A^{\tau}$$

или

$$A^{\tau+1} = \lambda A^{\tau},$$

где

$$\lambda = \frac{1}{1-ip}. \quad (\text{П1.4})$$

Для того, чтобы определить модуль множителя перехода  $\lambda$ , необходимо разделить мнимую и вещественную части выражения (П1.4). Однако пока в знаменателе присутствует мнимая единица это сделать нельзя. Чтобы избавиться от мнимой единицы в знаменателе необходимо и числитель и знаменатель умножить на число, комплексно-сопряженное знаменателю, т.е. на  $1+ip$ . Тогда получим

$$\lambda = \frac{1+ip}{(1-ip) \cdot (1+ip)} = \frac{1+ip}{1+p^2} = \frac{1}{1+p^2} + i \frac{p}{1+p^2}.$$

Отсюда

$$|\lambda| = \sqrt{\left(\frac{1}{1+p^2}\right)^2 + \left(\frac{p}{1+p^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{1+p^2}} < 1. \quad (\text{П1.5})$$

Как видно из (П1.5), схема абсолютно устойчива и диссипативна, т.е. при любых шагах по времени амплитуда убывает с увеличением числа шагов по времени.

**Схема трапеций**

$$\frac{A^{\tau+1} - A^{\tau}}{\Delta t} = i\omega \frac{1}{2} (A^{\tau+1} + A^{\tau}).$$

Выполнив анализ аналогично предыдущим схемам, получаем:

$$\lambda = \frac{1 + \frac{ip}{2}}{1 - \frac{ip}{2}} = \frac{\left(1 + \frac{ip}{2}\right)^2}{1 + \frac{p^2}{4}} = \frac{1 + ip - \frac{p^2}{4}}{1 + \frac{p^2}{4}} = \frac{1 - \frac{p^2}{4}}{1 + \frac{p^2}{4}} + i \frac{p}{1 + \frac{p^2}{4}}.$$

Отсюда

$$|\lambda| = \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{4}\right)^2 + p^2}}{\left(1 + \frac{p^2}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{1 + \frac{p^2}{2} + \frac{p^4}{16}}}{1 + \frac{p^2}{4}} < 1.$$

Следовательно, схема трапеций устойчива и диссипативна.

*Схема Мацуно* – двухуровневная:

$$\frac{A^{\tau+1,*} - A^\tau}{\Delta t} = i\omega A^\tau - \text{схема предиктор}, \quad (\text{П1.6})$$

$$\frac{A^{\tau+1} - A^\tau}{\Delta t} = i\omega A^{\tau+1,*} - \text{схема корректор} \quad (\text{П1.7})$$

Для анализа устойчивости схемы из соотношения (П1.6) выразим  $A^{\tau+1,*}$  и результат подставим в (П1.7):

$$A^{\tau+1} = A^\tau + ip(A^\tau + ipA^\tau) \quad (\text{П1.8})$$

Для схемы (П1.8) можно определить множитель перехода

$$\lambda = 1 + ip - p^2$$

и его модуль

$$|\lambda| = \sqrt{1 - p^2 + p^4}.$$

При малых шагах по времени  $p < 1$ , следовательно,  $p^2 > p^4$  и схема устойчива.

*Схема Хойна* отличается от схемы Мацуно корректором:

$$\frac{A^{\tau+1,*} - A^\tau}{\Delta t} = i\omega A^\tau - \text{схема предиктор}, \quad (\text{П1.9})$$

$$\frac{A^{\tau+1} - A^\tau}{\Delta t} = i\omega \frac{1}{2}(A^{\tau+1,*} + A^\tau) - \text{схема корректор}. \quad (\text{П1.10})$$

Множитель перехода и модуль множителя перехода таковы:

$$\lambda = 1 + ip - \frac{p^2}{2},$$

$$|\lambda| = \sqrt{1 + \frac{p^4}{4}} > 1,$$

т.е. схема Хойна неустойчива при любых шагах по времени, но эта неустойчивость невелика в силу малости члена  $p^4/4$ . Отметим, что неустойчивость схемы Хойна меньше, чем у двухуровневной явной схемы, т.к. в двухуровневной схеме неустойчивость определяется величиной  $p^2$ .

Зависимость множителя перехода от значений  $p$  приведена на рис. П1.1. Анализ рисунка позволяет сделать следующие выводы:

– явная и неявная схемы неудовлетворительно описывают ам-

плитуды волн (завышают и занижают, соответственно). Это наглядно демонстрируется на рис. П1.2 и рис. П1.3;

– схема Мацуно является диссипативной, и с увеличением  $p$  диссипативность растет, что показано на рис. П1.5;

– схема Хойна предпочтительнее всех представленных схем: при значениях  $p < 0.1$  схема абсолютно устойчива, а при больших значениях ее неустойчивость меньше, чем у явной двухуровневой схемы (см. рис. П1.4).

На рис. П1.6 показано поведение численного решения уравнения колебаний применительно к разным схемам для  $p = 0.1$ . Рисунок подтверждает все сказанное выше относительно различных схем.

На рис. П1.2 – П1.6 изображен модуль комплексного решения.

На рис. П1.7 показано влияние выбора схемы для вычислительного начального условия на поведение решения уравнений колебаний при дальнейшем интегрировании методом шагов по времени. На всех трех рисунках четко видна осцилляция решения (влияние вычислительной моды). Аналогичный рисунок для схемы Хойна не приведен, так как вычислительная мода в этом случае не возникает и изменение решения (амплитуды) во времени представляет собой прямую линию.

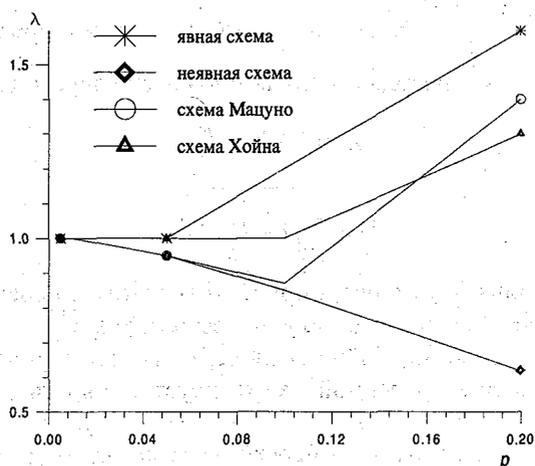


Рис. П1.1.

Зависимость множителя перехода  $\lambda$  от параметра увеличения  $p$  на выходе различных схем интегрирования уравнения колебаний.

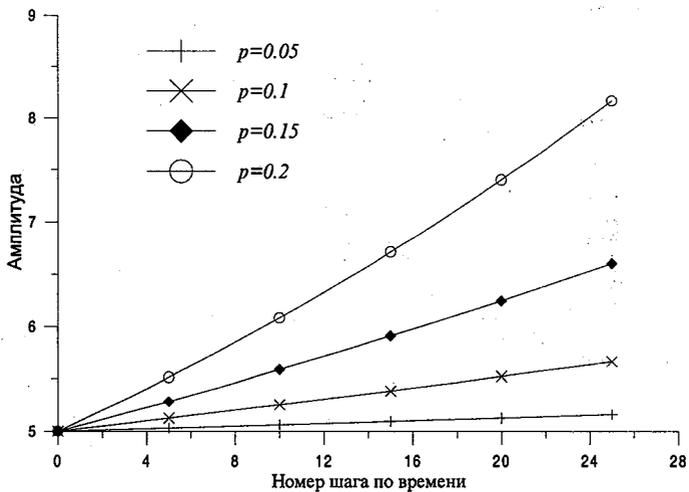


Рис. П1.2.

Изменение решения уравнения колебаний, аппроксимированного схемой Эйлера, при различных значениях параметра увеличения  $p$ .

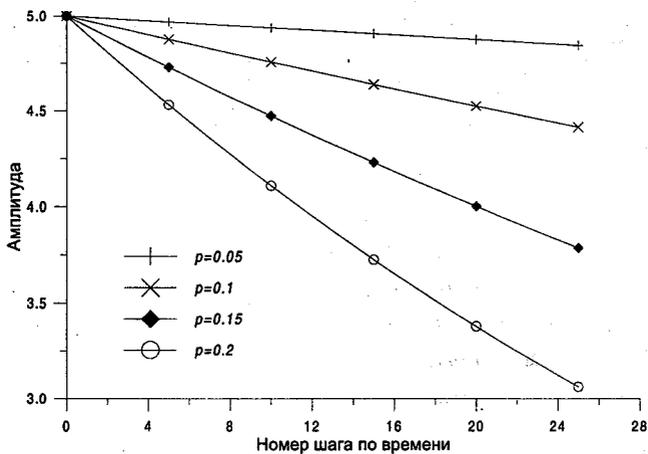


Рис. П1.3.

Изменение решения уравнения колебаний, аппроксимированного неявной схемой.

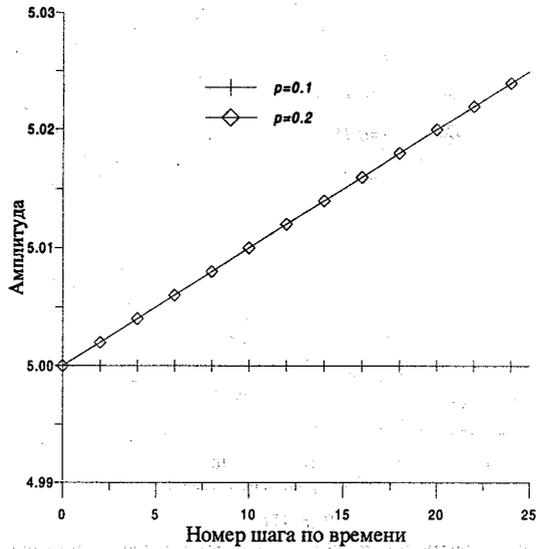


Рис. П1.4.

Изменение во времени решения уравнения колебаний, аппроксимированного схемой Хойна.

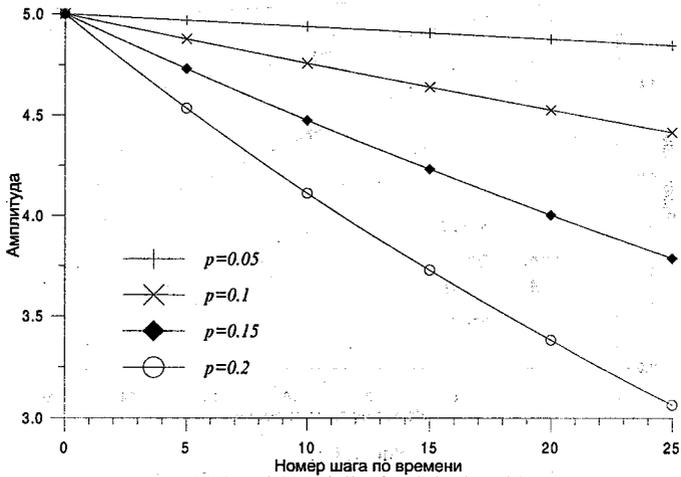


Рис. П1.5.

Изменение во времени решения уравнения колебаний, аппроксимированного схемой Мауно.

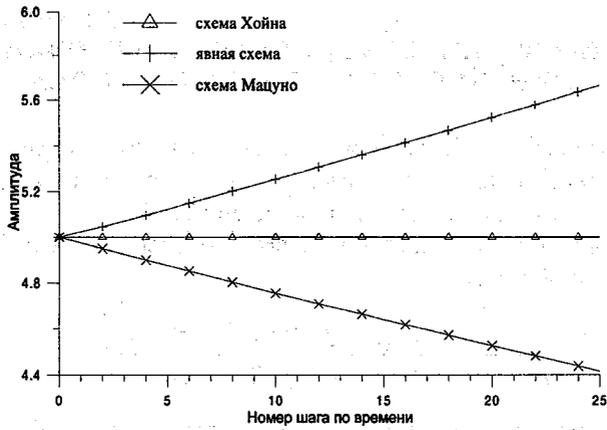


Рис. П1.6.

Изменение решения уравнения колебаний на выходе различных схем интегрирования.

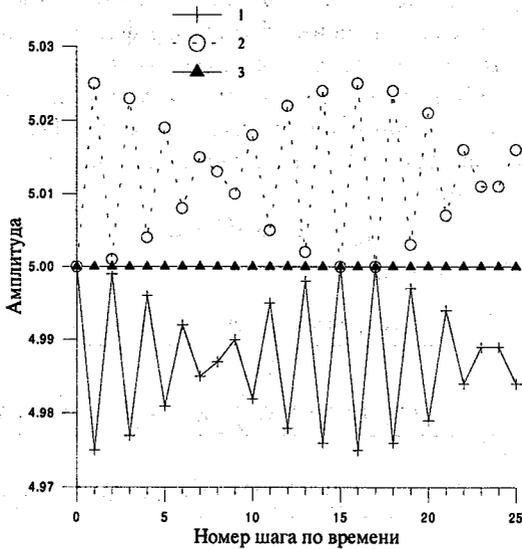


Рис. П1.7.

Решение уравнения колебаний, аппроксимированного схемой центральных разностей.

Примечание. Вычислительное начальное условие получено с помощью схемы Мацуно (1), схемы Эйлера (2) и схемы Хойна (3).

**ПРИМЕРЫ АНАЛИЗА СХЕМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ  
ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА**

**ЗАДАНИЕ 1.** Проанализировать вычислительные свойства схемы Адамса-Бешфорта применительно к линейному уравнению переноса субстанции  $f$  вдоль направления  $r$ .

Названное уравнение записывается по схеме Адамса-Бешфорта следующим образом

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\Delta t} = -\frac{3}{2} \frac{f_{q+1}^s - f_{q-1}^s}{2\Delta r} + \frac{1}{2} \frac{f_{q+1}^{s-1} - f_{q-1}^{s-1}}{2\Delta r}, \quad (\text{П2.1})$$

где  $q$  – номер узла регулярной сетки, покрывающей область решения,  $\Delta r$  – шаг пространственной сетки,  $s$  – номер временного слоя,  $\Delta t$  – шаг интегрирования по времени.

Схема (П2.1) трехуровневая по времени и трехточечная по пространству, так как значения функции  $f$  фигурируют в трех точках ( $q - 1$ ,  $q$  и  $q + 1$ ) на временных слоях  $s-1$ ,  $s$ ,  $s + 1$ .

*а) Анализ устойчивости решения, генерируемого схемой*

Для анализа устойчивости схемы по методу Неймана в конечно-разностный аналог (П2.1) подставим точное решение линейного уравнения адвекции

$$f_q^s = A^s \exp(imq\Delta r).$$

В результате получим

$$\begin{aligned} & \frac{A^{s+1} \exp(imq\Delta r) - A^s \exp(imq\Delta r)}{\Delta t} = \\ & = -\frac{3}{2} C \frac{A^s \exp(im(q+1)\Delta r) - A^s \exp(im(q-1)\Delta r)}{2\Delta r} + \\ & + \frac{1}{2} C \frac{A^{s-1} \exp(im(q+1)\Delta r) - A^{s-1} \exp(im(q-1)\Delta r)}{2\Delta r}. \end{aligned} \quad (\text{П2.2})$$

Преобразуем  $\exp(im(q+1)\Delta r)$ :

$$\exp(im(q+1)\Delta r) = \exp(imq\Delta r + im\Delta r) = \exp(imq\Delta r) \exp(im\Delta r)$$

Аналогично преобразуем  $\exp(im(q-1)\Delta r)$ .

$$\exp(im(q-1)\Delta r) = \exp(imq\Delta r - im\Delta r) = \exp(imq\Delta r)\exp(-im\Delta r).$$

После сокращения (П2.2) на  $\exp(imq\Delta r)$  будем иметь

$$A^{s+1} - A^s + A^s \frac{3 C\Delta t}{2 \Delta r} (\exp(im\Delta r) - \exp(-im\Delta r)) - A^{s-1} \frac{1 C\Delta t}{2 \Delta r} (\exp(im\Delta r) - \exp(-im\Delta r)) = 0. \quad (\text{П2.3})$$

Применяя формулу Эйлера

$$\exp(im\Delta r) - \exp(-im\Delta r) = 2i \sin(m\Delta r),$$

получаем

$$A^{s+1} - A^s + A^s \frac{3 C\Delta t}{2 \Delta r} i \sin(m\Delta r) - A^{s-1} \frac{1 C\Delta t}{2 \Delta r} i \sin(m\Delta r) = 0. \quad (\text{П2.4})$$

Учитывая определение множителя перехода

$$A^{s+1} = \lambda A^s, \quad A^s = \lambda A^{s-1}, \quad A^{s+1} = \lambda^2 A^{s-1},$$

преобразуем (П2.4) к виду

$$\lambda^2 - \lambda \left( 1 - \frac{3 C\Delta t}{2 \Delta r} i \sin(m\Delta r) \right) - \frac{1 C\Delta t}{2 \Delta r} i \sin(m\Delta r) = 0$$

Решая квадратное уравнение относительно  $\lambda$ , получаем два корня, соответствующих физической и вычислительной модам

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 - \frac{3}{2}ip \pm \sqrt{1 - \left(ip + \frac{9}{4}p^2\right)}}{2},$$

$$p = \frac{C\Delta t}{\Delta r} \sin(m\Delta r) \quad (\text{П2.5})$$

Для того, чтобы найти модуль множителя перехода, представим квадратный корень в выражении (П2.5) с помощью приближенного степенного ряда

$$\sqrt{1-X} \cong 1 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2.$$

Тогда получаем

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 - \frac{3}{2}ip \pm \left( 1 - \frac{1}{2} \left( ip + \frac{9}{4} p^2 \right) - \frac{1}{8} \left( ip + \frac{9}{4} p^2 \right)^2 \right)}{2}$$

Разделяя мнимую и вещественную части, находим модуль множителя перехода для физической моды

$$\begin{aligned} |\lambda_1| &= \sqrt{\left( 1 - \frac{p^2}{2} - \frac{81}{256} p^4 \right) + \left( p + \frac{9}{32} p^3 \right)^2} = \\ &= \sqrt{1 + \frac{23}{128} p^4 + \frac{405}{1024} p^6 + \left( \frac{81}{256} \right)^2 p^8} > 1, \end{aligned} \quad (\text{П2.6})$$

а затем для вычислительной моды

$$\begin{aligned} |\lambda_2| &= \sqrt{\left( \frac{1}{2} p^2 + \frac{81}{256} p^4 \right)^2 + \left( \frac{p}{2} - \frac{9}{32} p^3 \right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{p^2}{4} - \frac{1}{32} p^4 + \left( \frac{81}{256} \right)^2 p^8} < 1. \end{aligned} \quad (\text{П2.7})$$

Из анализа (П2.6) и (П2.7) видно, что физическая мода слабо неустойчива, а вычислительная диссипативна при  $p < 1$  ( $\mu < 1$ ). Зависимость множителя перехода физической и вычислительной мод от  $\mu$  показана на рис.П2. Рисунок соответствует волне с длиной, равной  $10 \Delta r$ . Для других длин волн общий вид зависимости будет оставаться неизменным, а значения  $\lambda$  будут меняться (чем более длинные волны, тем меньше значение множителя перехода). Так как в реальной атмосфере присутствуют волны разной длины, то нужно подобрать такую схему интегрирования, чтобы даже самые короткие из описываемых на сетке волн были аппроксимированы как можно лучше и не порождали паразитарных вычислительных эффектов.

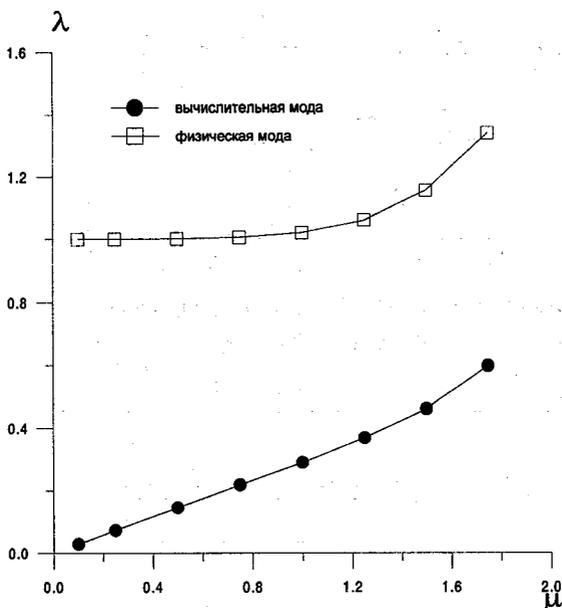


Рис. П 2.

Зависимость множителя перехода  $\lambda$  для физической и вычислительной мод от параметра  $\mu$  для схемы Адамса-Бешфорта.

### б) Ошибка аппроксимации

Для того, чтобы определить ошибку аппроксимации линейного уравнения адвекции схемой Адамса-Бешфорта, необходимо в конечно-разностный аналог уравнения (П2.1) вместо сеточных функций  $f_{q+1}^S, f_{q-1}^S, f_{q+1}^{S-1}, f_{q-1}^{S-1}, f_q^{S+1}$  подставить непрерывную функцию  $f(r, t)$ , определенную в соответствующих точках сетки. Для получения значений непрерывной функции в необходимых точках воспользуемся разложением в ряд Тейлора:

$$f(r, t \pm \Delta t) = f(r, t) \pm \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2!} \pm \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \frac{(\Delta t)^3}{3!} \pm \dots$$

$$f(r \pm \Delta r, t) = f(r, t) \pm \frac{\partial f}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{(\Delta r)^2}{2!} \pm \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} \frac{(\Delta r)^3}{3!} \pm \dots$$



$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t} \frac{\Delta r \cdot \Delta t}{2!} - \frac{\partial^3 f}{\partial r \partial t^2} \frac{\Delta r \cdot (\Delta t)^2}{3!} - \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial r^2} \frac{\Delta t \cdot (\Delta r)^2}{3!} \\ & \frac{\phantom{\partial^2 f}}{2\Delta r} \end{aligned} \right\} = 0. \quad (\text{П2.9})$$

После несложных математических преобразований получаем то дифференциальное уравнение, которое мы действительно решается после аппроксимации уравнения адвекции схемой Адамса-Бешфорта:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{\Delta t}{2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \frac{(\Delta t)^2}{2!} + C \frac{\partial f}{\partial r} + C \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} \frac{(\Delta r)^2}{3!} + \\ & + \frac{1}{2} C \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial r} \frac{\Delta t}{2!} - \frac{1}{2} C \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial r} \frac{(\Delta t)^2}{3!} = 0. \end{aligned} \quad (\text{П2.10})$$

Ошибка аппроксимации  $\varepsilon$  определяется как разность уравнения, полученного после аппроксимации схемой Адамса-Бешфорта (П2.10), и уравнения адвекции (2.16)

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{\Delta t}{2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \frac{(\Delta t)^2}{2!} + C \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} \frac{(\Delta r)^2}{3!} + \\ & + \frac{1}{2} C \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial r} \frac{\Delta t}{2!} - \frac{1}{2} C \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial r} \frac{(\Delta t)^2}{3!}. \end{aligned} \quad (\text{П2.11})$$

Схема Адамса-Бешфорта согласованная, так как при  $\Delta t, \Delta r \rightarrow 0$   $\varepsilon \rightarrow 0$ .

#### в) Порядок точности схемы

Порядок точности схемы интегрирования по времени и по пространству – это минимальная степень, в которой фигурируют шаги по времени и по пространству в выражении для ошибки аппроксимации (П2.11). Следовательно, схема Адамса-Бешфорта имеет первый порядок точности по времени (первое и четвертое слагаемое в правой части уравнения (П2.11) содержат  $\Delta t$  в первой степени) и второй порядок точности по пространству (см. третье слагаемое в правой части уравнения (П2.11)), т.е.  $O(\Delta t, \Delta r^2)$ .

Отметим, что при подстановке в конечно-разностную схему (П2.1) ряд Тейлора был усечен: оставлены только первые слагаемые

– самые большие. Если бы в ряду Тейлора было оставлено большее число членов, то общий вид ошибки аппроксимации изменился – добавились бы слагаемые с большими порядками производных, но их влияние на величину  $\varepsilon$  будет тем меньше, чем больше порядок производной.

### 2) Коэффициент вычислительной вязкости

Схема Адамса-Бешфорта является вязкой, так как в ошибке аппроксимации присутствуют вторые производные, т.е. вместо уравнения (2.16) мы решаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + C \frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{\Delta t}{2!} - \frac{1}{2} C \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial r} \frac{\Delta t}{2!}. \quad (\text{П2.12})$$

Для получения формулы коэффициента вязкости все вторые производные в правой части необходимо выразить через вторые производные по пространству. Продифференцировав уравнение адвекции последовательно по  $r$  и по  $t$ , получаем:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial r} = -C \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}.$$

Подставляем эти выражения в (П2.12)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + C \frac{\partial f}{\partial r} &= -C^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{\Delta t}{2!} + \frac{1}{2} C^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{\Delta t}{2!} = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \cdot \left( C^2 \frac{\Delta t}{4} - C^2 \frac{\Delta t}{2} \right) = -C^2 \frac{\Delta t}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}. \end{aligned}$$

Коэффициент вязкости  $\nu$  отрицательный, что говорит о некорректности схемы Адамса-Бешфорта.

**ЗАДАНИЕ 2.** Проанализировать вычислительные свойства невязной двухуровневой схемы на примере линейного уравнения адвекции.

Уравнение адвекции, записанное по названной схеме, имеет вид:

$$\frac{f_q^{s+1} - f_q^s}{\Delta t} = -C \cdot \frac{f_{q+1}^{s+1} - f_{q-1}^{s+1}}{2 \cdot \Delta r}. \quad (\text{П2.13})$$

Схема двухуровневая по времени (моменты времени  $s$  и  $s + 1$ ) и трехточечная по пространству (точки  $q - 1$ ,  $q$ ,  $q + 1$ ).

а) Анализ устойчивости схемы по методу Неймана

Подставим в (П2.13) точное решение:

$$\frac{A^{S+1} \exp(imq\Delta r) - A^S \exp(imq\Delta r)}{\Delta t} =$$

$$= -C \frac{A^{S+1} \exp(im(q+1)\Delta r) - A^{S+1} \exp(im(q-1)\Delta r)}{2\Delta r}$$

После преобразований получаем

$$A^{S+1} = A^S \frac{1}{1 + \frac{C\Delta t}{\Delta r} i \sin(m\Delta r)}$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{C\Delta t}{\Delta r} i \sin(m\Delta r)}$$

Чтобы разделить мнимую и вещественную части множителя  $\lambda$ , необходимо умножить числитель и знаменатель на комплексное число, сопряженное знаменателю:  $1 - \frac{C\Delta t}{\Delta r} i \sin(m\Delta r)$ . Тогда

$$\lambda = \frac{1 - \frac{C\Delta t}{\Delta r} i \sin(m\Delta r)}{1 + \left(\frac{C\Delta t}{\Delta r}\right)^2 \sin^2(m\Delta r)}$$

$$\lambda_{\text{Re}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{C\Delta t}{\Delta r}\right)^2 \sin^2(m\Delta r)}$$

$$\lambda_{\text{Im}} = \frac{\frac{C\Delta t}{\Delta r} \sin(m\Delta r)}{1 + \left(\frac{C\Delta t}{\Delta r}\right)^2 \sin^2(m\Delta r)}$$

Отсюда

$$|\lambda| = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{C\Delta t}{\Delta r} \sin(m\Delta r)\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{C\Delta t}{\Delta r}\right)^2 \sin^2(m\Delta r)}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{C\Delta t}{\Delta r}\right)^2 \sin^2(m\Delta r)}} < 1.$$

Таким образом, рассматриваемая схема абсолютно устойчивая, т.е. при любых шагах по времени и по пространству амплитуда решения не будет возрастать. Кроме того, схема не генерирует вычислительных мод, так как является двухуровневной.

**б) Ошибка аппроксимации уравнения разностной схемой**

Подставим разложение в ряд Тейлора (П2.8) в конечно-разностный аналог уравнения (П2.13) вместо сеточных функций  $f_{q+1}^{S+1}$ ,  $f_{q-1}^{S+1}$ ,  $f_q^{S+1}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{f(r,t) + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \frac{(\Delta t)^3}{3!} - f(r,t)}{\Delta t} + \\ & + \frac{C}{2\Delta r} \left[ f(r,t) + \frac{\partial f}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{(\Delta r)^2}{2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} \frac{(\Delta r)^3}{3!} + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \right. \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \frac{(\Delta t)^3}{3!} + \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t} \frac{\Delta r \cdot \Delta t}{2!} + \\ & + \frac{\partial^3 f}{\partial r \partial t^2} \frac{\Delta r \cdot (\Delta t)^2}{3!} + \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial r^2} \frac{\Delta t \cdot (\Delta r)^2}{3!} - \\ & - \left( f(r,t) - \frac{\partial f}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{(\Delta r)^2}{2!} - \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} \frac{(\Delta r)^3}{3!} + \frac{\partial f}{\partial r} \Delta t + \right. \\ & + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{(\Delta t)^2}{2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \frac{(\Delta t)^3}{3!} - \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial t} \frac{\Delta r \cdot \Delta t}{2!} - \\ & \left. - \frac{\partial^3 f}{\partial r \partial t^2} \frac{\Delta r \cdot (\Delta t)^2}{3!} + \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial r^2} \frac{\Delta t \cdot (\Delta r)^2}{3!} \right) = 0 \Rightarrow, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{\Delta t}{2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \frac{(\Delta t)^2}{2!} + C \frac{\partial f}{\partial r} + C \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} \frac{(\Delta r)^2}{3!} + \\
& + C \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial r} \frac{\Delta t}{2!} + C \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial r} \frac{(\Delta t)^2}{3!} = 0 \Rightarrow, \\
& \varepsilon = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{\Delta t}{2!} + \frac{\partial^3 f}{\partial t^3} \frac{(\Delta t)^2}{2!} + C \frac{\partial^3 f}{\partial r^3} \frac{(\Delta r)^2}{3!} + \\
& + C \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial r} \frac{\Delta t}{2!} + C \frac{\partial^3 f}{\partial t^2 \partial r} \frac{(\Delta t)^2}{3!}.
\end{aligned}
\tag{П2.14}$$

Видно, что неявная двухуровневая схема является согласованной, так как при  $\Delta t, \Delta r \rightarrow 0$  ошибка  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**в) Порядок точности аппроксимации уравнения разностной схемой**

Из ошибки аппроксимации следует, что  $O(\Delta t, \Delta r^2)$ .

**г) Вязкость, вносимая разностной схемой**

Неявная двухуровневая схема вязкая. Вязкость обусловлена наличием в конечно-разностной схеме направленных разностей по времени

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} + C \frac{\partial f}{\partial r} &= -\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \frac{\Delta t}{2!} - C \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial r} \frac{\Delta t}{2!} = \\
&= -C^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{\Delta t}{2!} + C^2 \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \frac{\Delta t}{2!} = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}.
\end{aligned}$$

**ПРИМЕР ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ  
УРАВНЕНИЯ АДВЕКЦИИ**

Для проведения численных экспериментов на основе некоторой конечно-разностной схемы, необходимо выполнить следующее:

**1) Выбрать область интегрирования уравнения**

В нашем случае пусть это будет прямая вдоль оси  $Ox$ , а сетка, накладываемая на область решения, содержит 100 точек с шагом 300 км.

**2). Задать начальные условия задачи**

В качестве начальных данных для функции  $f$  будем использовать вещественную часть точного решения линейного уравнения адвекции

$$\begin{aligned} f_q^{s=0} &= \operatorname{Re} [A(0) \cdot \exp(i \cdot m \cdot q \cdot \Delta x)] + \\ 20 &= A(0) \cdot \cos(m \cdot q \cdot \Delta x) + 20, \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.1})$$

где  $m = \frac{2\pi}{L}$  – волновое число;

$L$  – длина волны (для примера зададим  $L = 20\Delta x$ );

$A(0)$  – амплитуда волны в начальный момент времени.

Скорость переноса в уравнении адвекции примем равной 10 м/с (т.е. характерной скорости перемещения волн Россби в нижней тропосфере).

**3) Выбрать шаг интегрирования по времени**

Шаг по времени выбирается, исходя из критерия устойчивости, полученного при анализе схемы. Например, критерий устойчивости для схемы Адамса-Бешфорта таков:  $\mu < 1$ . Подставим выбранные значения шага по пространству и скорости переноса в критерий:

$$\frac{10 \cdot \Delta t}{300000} < 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta t < \frac{300000}{10} = 30000 \text{ сек} / 60 = 500 \text{ мин.}$$

Согласно критерию устойчивости, 500 мин. равны максимальному шагу по времени, при котором схема Адамса-Бешфорта будет устойчива при заданных шаге по пространству и скорости переноса.

**4) Разработать алгоритм интегрирования уравнения с помощью конкретной конечно-разностной схемы**

**Алгоритм интегрирования линейного уравнения адвекции, аппроксимированного схемой Адамса-Бешфорта, включает:**

- Описание необходимых массивов.
- Задание констант: скорости переноса ( $C$ ), шагов по времени ( $dt$ ) и по пространству ( $dx$ ), начальной амплитуды ( $A0$ ), длины волны ( $L$ ).
- Расчет начальных физических данных (момент времени  $s = 0$ ) по формуле (ПЗ.1).
- Расчет начальных вычислительных условий (момент времени  $s = 1$ ) по какой-либо схеме с направленными разностями по времени (скажем, по двухшаговой схеме Хойна, порождающей небольшую вычислительную моду). Этот пункт появляется за счет того, что схема Адамса-Бешфорта трехуровневая.
- Открыть цикл по времени. Номер шага по времени (параметр цикла) меняется от  $s = 1$  до  $s = N$ . Интервал прогноза (или заблаговременность) равен  $N \Delta t$ .
- Открыть цикл по пространству. Параметр цикла должен пробежать все точки, в которых можно воспользоваться основной прогностической формулой (в нашем случае формулой (П2.1)). По схеме Адамса-Бешфорта прогноз можно вычислить в точках с номерами от  $q = 2$  до  $q = 99$ . Первая и последняя точки теряются за счет использования центральных разностей по пространству. (Подчеркнем, что, вследствие указанной особенности используемой схемы, в точках  $q = 1$  и  $q = 100$  необходимо поставить какие-либо боковые граничные условия, иначе при многократном повторении вычислений, т.е. при  $s \rightarrow \infty$ , область прогноза будет сжиматься в точку.)
- Расчет значений функции  $f$  в точке  $q$  в момент времени  $s + 1$ , используя значения функции в точках  $q - 1$ ,  $q$ ,  $q + 1$  в моменты времени  $s$ ,  $s - 1$ .
- Закрыть цикл по пространству.
- Если нужно, поставить боковые граничные условия. Будем считать, что рассматриваемая нами область интегрирования охватывает круг широты, поэтому поставим периодические граничные условия.
- Закрыть цикл по времени.
- Вывести на печать результаты прогноза – значения функции  $f$  в момент времени  $s = 25$  для всех точек области определения решения от  $q = 1$  до  $q = 100$ .

**5) Написать и отладить компьютерную программу по разработанному алгоритму**

Компьютерная программа, соответствующая описанному алгоритму, приведена в приложении 4.

**6) Представить полученные результаты графически и проанализировать результаты**

## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

### ПРИМЕР КОМПЬЮТЕРНОЙ ПРОГРАММЫ НА АЛГОРИТМИЧЕСКОМ ЯЗЫКЕ FORTRAN ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ АДВЕКЦИИ ПО СХЕМЕ АДАМСА-БЕШФОРТА

```
! Определение параметров задачи:
! N_time -количество шагов по времени,
! NQ -количество точек в области интегрирования
parameter(N_time=50,NQ=96)
! Объявление массива f, содержащего значения
! прогностической функции во всех точках
! на каждом шаге по времени
real f(0:N_time,NQ)
! s-Номер шага по времени, q - номер точки
integer s,q
! L - длина волны
real mu,L
L=6.
C=10.
Dt=600. ! - шаг по времени
Dx=3.75*111000. !- шаг по пространству
pi=3.1415926
mu=C*dt/dx/2.
! Расчет начальных данных (значения прогностической
! переменной в момент времени s=0)
do q=1,NQ
  f(0,q)=5.*cos(2*pi*q/L)+10.
end do
! Так как схема Адамса-Бешфорта трехуровневная, то
! первый шаг по времени реализуем при помощи
! двухуровневной схемы Эйлера
do q=1,NQ
  qp1=q+1
  qm1=q-1
! Постановка периодических граничных условий
  if(q.eq.1) qm1=NQ
  if(q.eq.NQ) qp1=1
  DR=f(s,qp1,np)-f(s,qm1,np)
```

```

! Расчет вычислительного начального условия
! (значения прогностической переменной в момент
времени
! s=1)
  f(1,q,np)=f(s,q,np)-mu*DR
end do
! Начало цикла по времени
do s=1,N_time-1
! Начало цикла по пространству
  do q=1,NQ
    qp1=q+1
    qm1=q-1
! Постановка периодических граничных условий
    if(q.eq.1) then
      qm1=NQ
    end if
    if(q.eq.NQ) then
      qp1=1
    endif
    DR=f(s,qp1,np)-f(s,qm1,np)
    DRm=f(s-1,qp1,np)-f(s-1,qm1,np)
! Вычисление значения прогностической функции
! в момент времени s+1 в точке q
    f(s+1,q,np)=f(s,q,np)-1.5*mu*DR+0.5*mu*DRm
  end do
! Конец цикла по пространству
end do
! Конец цикла по времени
! Открытие файла и запись в него полученных резуль-
татов
open(1,file='adams.dat')
write(1,'(i5,6f12.3)')
(q,(f(s,q),s=1,N_time,5),q=1,NQ))
close(1)
stop
end

```

## ПРИЛОЖЕНИЕ 5

### ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ИНТЕГРИРОВАНИЮ УРАВНЕНИЯ АДВЕКЦИИ ПО СХЕМЕ АДАМСА-БЕШФОРТА

1) Проведены численные эксперименты по интегрированию линейного уравнения адвекции с разными значениями параметра  $\mu = 0.1; 0.5; 1$ . Использовались периодические граничные условия. Результаты приведены на рис. П5.1.

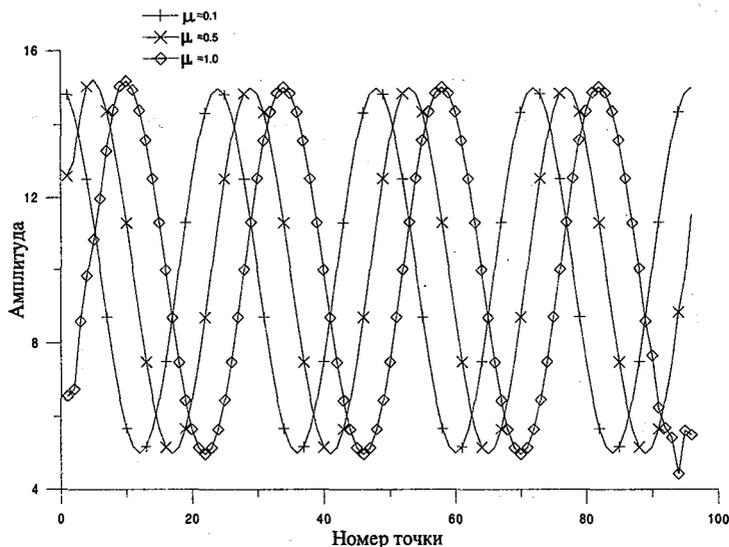


Рис. П5.1.

Решение линейного уравнения адвекции по схеме Адамса-Бешфорта для разных значений параметра  $\mu$ .

2) Проведены численные эксперименты с целью изучения влияния различных граничных условий на решение уравнения. На рис. П5.2 показан вид решения на разных шагах по времени для граничных

условия  $\left. \frac{\partial f}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0$  (где  $n$  – нормаль к границе), а на рис. П5.3 для

фиктивных граничных условий  $\frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{\Gamma} = 0$ , закрепляющих (замораживающих) в граничных узлах начальные условия на весь срок прогноза.

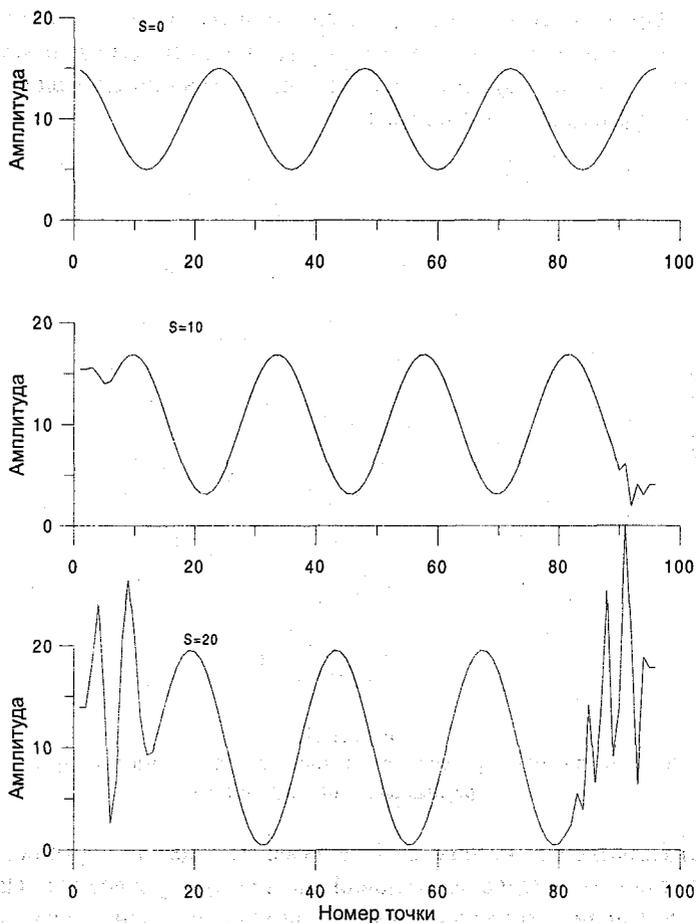


Рис. П5.2.

Решения линейного уравнения адвекции с граничными условиями

$$\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0 \text{ на разных шагах по времени.}$$

Из рисунков видно, что оба вида граничных условий плохо удовлетворяют точному решению. Причем большие ошибки возникают справа, т.е. там, где поток воздуха вытекает из области интегрирования, но чем дальше от границ, тем качество решения лучше.

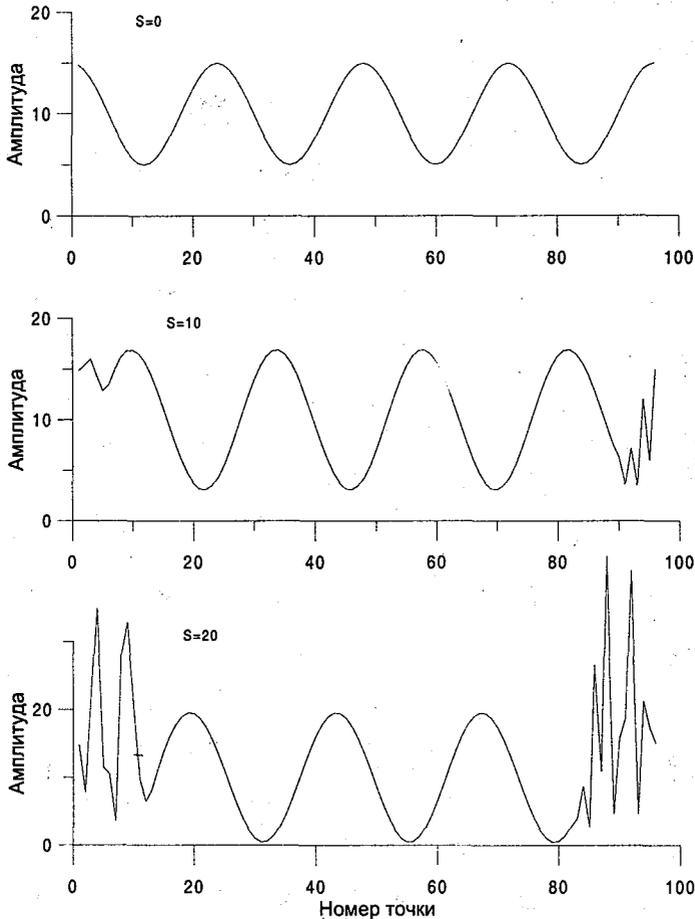


Рис. П5.3

Решения линейного уравнения адвекции с фиктивными граничными условиями  $\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\Gamma} = 0$  на разных шагах по времени.

На рис. П5.4 показана зависимость решения от длины волны в начальных данных (пунктир – начальные данные, сплошная линия – результаты прогноза на 25-м шаге по времени). Из рисунка видно, что, чем больше длина волны, тем лучше описывается волна с помощью конечных разностей.

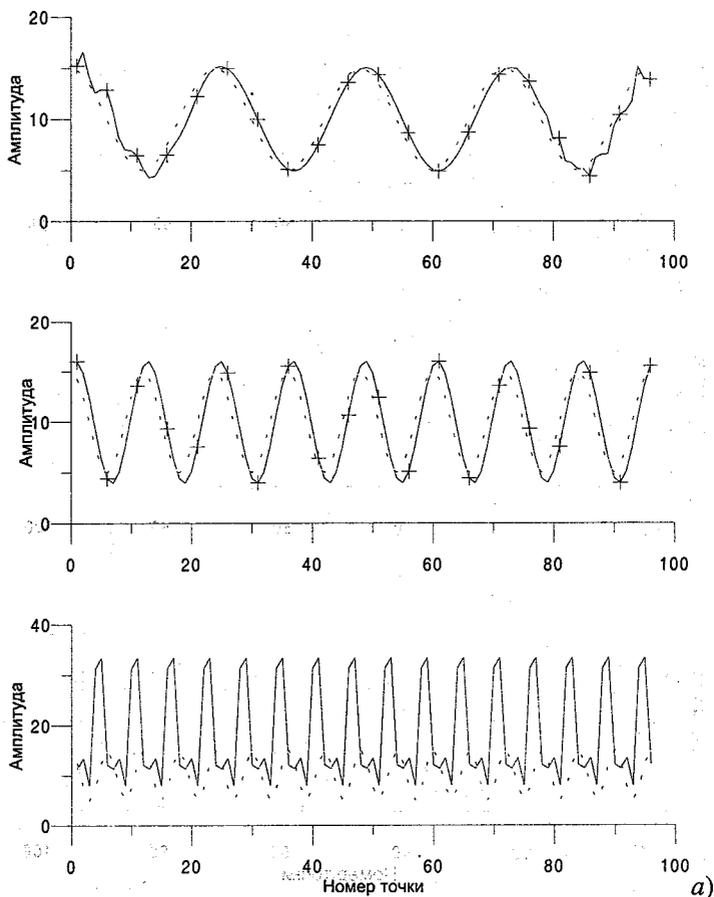


Рис. П5.4.

Решения линейного уравнения адвекции, аппроксимированного схемой Адамса-Бешфорта, при различной длине волны, заданной в начальных условиях: а)  $L = 24\Delta r$ , б)  $L = 12\Delta r$ , в)  $L = 6\Delta r$ .

### *Литература*

1. *Белов П.И., Борисенков Е.П., Панин Б.Д.* Численные методы прогноза погоды. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 376 с.
2. *Годунов С.К., Рябенкий В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 440 с.
3. Лекции по численным методам краткосрочного прогноза погоды. Л.: Гидрометеоиздат, 1969. 734 с.
4. *Мезингер Ф., Аракава А.* Численные методы, используемые в атмосферных моделях. Л.: Гидрометеоиздат, 1979, 136 с.
5. *Панин Б.Д.* Негеострофические прогностические модели. Конспект лекций. Л.: ЛПИ (ЛГМИ), 1978. 51 с.
6. *Репинская Р.П.* Фильтрованные прогностические модели и способы исследования вычислительной устойчивости разностных схем. Л.: ЛГМИ, 1991. 105 с.
7. Численные методы решения задач динамики атмосферы и океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1968. 367 с.
8. *Марчук Г.И.* и др. Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации. Л.: Гидрометеоиздат, 1987. 296 с.
9. *Марчук Г.И.* Численные методы в задачах окружающей среды. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. 300 с.
10. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. Том 2. М.: Мир, 1991. 552 с.
11. *Самарский А.А. Попов Ю.П.* Разностные методы решения задач газовой динамики М.: Наука, 1992. 422 с.
12. *Пененко В.В.* Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 352 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение .....	3
Глава 1. Метод сеток и аппроксимация производных .....	6
1.1. Метод сеток .....	6
1.2. Конечно-разностная аппроксимация производных по горизонталь- ным пространственным переменным и по времени .....	9
Глава 2. Схемы численного интегрирования эволюционных уравнений .....	16
2.1. Схемы интегрирования эволюционных уравнений .....	17
2.1.1. Двухуровневые безитерационные схемы .....	18
2.1.2. Двухуровневые итерационные схемы .....	18
2.1.3. Трехуровневые безитерационные схемы .....	19
Глава 3. Требования к численным схемам интегрирования эволюционных уравнений .....	22
3.1. Согласованность конечно-разностных схем .....	22
3.2. Точность и устойчивость конечно-разностных схем .....	23
Глава 4. Анализ устойчивости временных конечно-разностных схем мето- дом Неймана .....	29
4.1. Точное решение линейного уравнения переноса .....	29
4.2. Метод Неймана .....	31
4.3. Анализ устойчивости схем интегрирования некоторых волновых уравнений методом Неймана .....	41
4.4. Анализ устойчивости конечно-разностных схем энергетическим методом .....	51
Глава 5. Вычислительные моды и способы их подавления .....	56
5.1. Понятие о вычислительных модах .....	56
5.2. Способы подавления вычислительной неустойчивости, порождае- мой трехуровневыми схемами .....	59
Глава 6. Дисперсионные свойства конечно-разностных схем эволюционных уравнений .....	64
6.1. Влияние сеточной аппроксимации производных по пространству на свойства схем. Вычислительная дисперсия .....	64
6.2. Влияние сеточной аппроксимации континуальных уравнений на фазовую и групповую скорости атмосферных возмущений .....	66
6.3. Влияние повышения порядка точности сеточной аппроксимации уравнений на свойства конечно-разностных схем .....	67
Глава 7. Нелинейная вычислительная неустойчивость, способы ее предот- вращения и подавления .....	71
7.1. Ошибки ложного представления волновых возмущений .....	71
7.2. Вычислительная вязкость и ее роль в процессе интегрирования эво- люционных уравнений .....	73
Глава 8. Интегральные свойства атмосферных моделей .....	77
8.1. Интегральные инварианты баротропной соленоидальной модели ..	77
8.2. Конечно-разностная аппроксимация адвекции вихря скорости ме- тодом Аракавы .....	84
8.3. Сеточная аппроксимация якобиана в индексной форме .....	89

8.4	Интегральные свойства нелинейного одномерного уравнения адвекции .....	90
8.5	Интегральные свойства баротропной негеострофической модели ...	91
8.6	Потоковая форма записи уравнений динамики атмосферы и их конечно-разностная аппроксимация с помощью бокс-метода .....	106
Глава 9.	Монотонные схемы интегрирования эволюционных уравнений	
9.1.	Основные понятия .....	106
9.2.	Способы построения схем, близких по свойствам к монотонным схемам .....	108
Глава 10.	Разностные схемы, используемые в процедурах динамического согласования полей атмосферных функций .....	116
10.1.	Проблема задания начальных данных для атмосферных моделей. Процедура четырехмерного усвоения данных наблюдений .....	116
10.2.	Методы динамического согласования эмпирических данных .....	119
Глава 11.	Постановка боковых граничных условий при интегрировании эволюционных уравнений численными методами .....	129
11.1.	Боковые граничные условия для полусферных и региональных прогностических моделей .....	129
11.2.	Конструирование боковых граничных условий для вложенных моделей на мелких сетках .....	131
Глава 12.	Рекомендации по выбору схем численного интегрирования эволюционных уравнений .....	140
Приложение 1.	Сравнение вычислительных свойств двухуровневых схем интегрирования эволюционных уравнений .....	144
Приложение 2.	Примеры анализа схем интегрирования линейного уравнения переноса .....	153
Приложение 3.	Пример численного интегрирования уравнения адвекции ...	163
Приложение 4.	Пример компьютерной программы на алгоритмическом языке FORTRAN для численного интегрирования линейного уравнения адвекции по схеме Адамса-Бешфорта .....	166
Приложение 5.	Численные эксперименты по интегрированию уравнения адвекции по схеме Адамса-Бешфорта .....	168

Раиса Петровна Репинская,  
Ольга Георгиевна Анискина

**КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ  
В ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ  
АТМОСФЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ**

*Учебное пособие*

*Редактор И.Г. Максимова*  
ЛР № 020309 от 30.12.96

---

Подписано в печать 08.04.2002 г. Формат 60x90 1/16  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 11,0. Уч. -изд. л. 14,0. Тираж 400. Зак. 22  
РГГМУ, 195196, СПб, Малоохтинский пр., 98.  
Отпечатано ООО «Концепт».

---