

П. Н. Белов

**СБОРНИК УПРАЖНЕНИЙ
ПО ЧИСЛЕННЫМ
МЕТОДАМ
ПРОГНОЗА
ПОГОДЫ**

*Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов вузов,
обучающихся по специальности
«Метеорология»*



ЛЕНИНГРАД
ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ
1980

УДК 551.509(076)

Рецензенты:

В. В. Быков, С. А. Бортников, В. М. Кадышников, Е. М. Пекелис, Я. М. Хейфец (отдел гидродинамических краткосрочных прогнозов погоды и мезометеорологии Гидрометеорологического научно-исследовательского центра СССР)
Б. Д. Панин (кафедра метеорологических прогнозов Ленинградского гидрометеорологического института)

Ответственный редактор

Л. В. Беркович (Гидрометеорологический научно-исследовательский центр СССР)

В книге приводятся упражнения по курсу «Численные методы прогноза погоды», имеющие целью углубление знаний теории анализа и прогноза погоды, а также получение практических навыков по применению указанной теории для решения практических задач анализа и прогноза погоды.

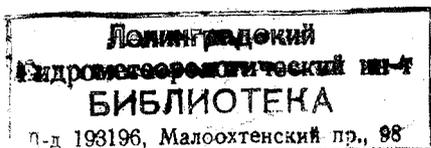
Сборник предназначен в качестве учебного пособия для студентов университетов и гидрометеорологических институтов, аспирантов, слушателей курсов повышения квалификации инженеров-метеорологов и др. Он может быть использован также для самостоятельной работы с целью изучения и применения на практике современных методов анализа и прогноза погоды.

Предполагается, что читатель уже знаком с курсами высшей математики и метеорологии в объеме программ для студентов гидрометеорологических институтов и географических факультетов университетов.

This book contains the exercises to provide training on the course «Numerical methods of weather prediction».

It is intended for students of Universities, Hydrometeorological Institutes and for postgraduate students. However it will be found useful to any who are in one way or another concerned with numerical weather analysis or prognosis but more especially to those under training.

It is supposed that users are equipped with mathematical and meteorological knowledge within the syllabus compiled for the students of Hydrometeorological Institutes and geographical faculties of Universities.



Б 1903040000-001 2-79
069(02)-80

© Гидрометеоиздат, 1980 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора	5
Основные обозначения и постоянные	7
1. Преобразования уравнений гидротермодинамики для целей численного прогноза крупномасштабных атмосферных движений	9
Упражнения	15
Ответы и решения	20
2. Волновые движения в атмосфере в связи с задачей численного прогноза погоды	23
Упражнения	25
Ответы и решения	29
3. Некоторые сведения по численным методам математического анализа	33
Упражнения	39
Ответы и решения	42
4. Методы краткосрочного прогноза, основанные на использовании квазигеострофического приближения	48
Упражнения	52
Ответы и решения	59
5. Методы краткосрочного прогноза, основанные на интегрировании полных уравнений гидротермодинамики	69
Упражнения	71
Ответы и решения	74
6. Задача детализированного локального прогноза погоды методами мезометеорологии	79
Упражнения	81
Ответы	82
7. Методы гидродинамического долгосрочного прогноза погоды	83

Упражнения	86
Ответы и решения	89
8. Статистические методы численного прогноза погоды	91
Упражнения	99
Ответы и решения	107
9. Численный анализ метеорологической информации . . .	111
Упражнения	116
Ответы и решения	124
Приложения:	
1. Единицы измерения некоторых физических величин в различных системах	129
2. Случайные числа	131
3. Перевод английских мер в метрические. Приставки для образования кратных и дольных единиц	135
Список литературы	136

ОТ АВТОРА

Опыт работы со студентами на географическом факультете МГУ и с молодыми специалистами в Гидрометеорологическом научно-исследовательском центре СССР (Гидрометцентр СССР), а также в Государственном научно-исследовательском центре изучения природных ресурсов (ГосНИЦИПР) убедил автора в необходимости подготовки специального учебного пособия, направленного на закрепление теоретических основ анализа и прогноза погоды и получение практических навыков решения конкретных задач численными методами.

В упражнениях данного сборника ставятся четыре задачи, которые автор считает главными:

1. Вывод или доказательство основных и «промежуточных» уравнений.

2. Разработка математического алгоритма решения поставленной задачи.

3. Расчет различных параметров и переменных задачи по исходным данным при заданных условиях с помощью малой вычислительной техники и представление результатов расчета в различных системах единиц.

4. Подготовка задачи к ее решению на ЭВМ, составление программы, расчет на ЭВМ по составленной программе, анализ результатов расчета.

Все разделы сборника снабжены предварительными замечаниями, а также основными сведениями, необходимыми для выполнения упражнений. К большинству упражнений даны ответы, а к некоторым из них, являющимся наиболее характерными, — и решения. Часть упражнений требует вычислений на электрических счетных машинках, а некоторые из них — расчетов на ЭВМ.

В каждом разделе сборника приводятся основные сведения, необходимые для выполнения упражнений. Однако при этом предполагается, что читатель будет иметь возможность пользоваться основной учебной литературой, приведенной в конце книги.

При решении задач, требующих вычислений, рекомендуется вначале получить общее решение в аналитическом виде, затем привести полученную формулу к «рабочему» виду, т. е. к такому, при котором массовые

расчеты могут быть произведены наиболее экономичным образом, и лишь после этого произвести необходимые вычисления. При этом рекомендуется пользоваться какой-либо из трех основных систем единиц: СИ, МТС и СГС (см. приложение 1). Величины, выраженные внесистемными единицами, которые до сих пор широко используются в метеорологии (мбар, кал и пр.), целесообразно перед расчетами привести к системным.

Результат счета рекомендуется давать в нормализованной форме с четырьмя (в некоторых случаях с тремя) верными значащими цифрами. В случае когда конечному результату необходимо дать метеорологическую трактовку, ответы следует представить в единицах, которые приняты в метеорологической практике (например, скорость — в км/ч, давление — в мбар и т. д.).

Раздел 5 написан совместно с Л. В. Берковичем. Автор выражает признательность Г. В. Мостовому, А. В. Блохину и А. Ю. Щербакову за помощь в подготовке решений к ряду упражнений.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТОЯННЫЕ

- A — термический эквивалент работы (0,2388 кал/Дж = $2,388 \times 10^{-8}$ кал/эрг); амплитуда волны
 a — средний радиус Земли (6371 км); абсолютная влажность; скорость звука в изотермической атмосфере (330 м/с)
 c — скорость перемещения волны
 $c_p = 1,007 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К) = $1,007 \cdot 10^7$ эрг/(г·К) = 0,2405 кал/(г·К) — удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении
 $c_v = 0,720$ Дж/(кг·К) = $0,720 \cdot 10^7$ эрг/(г·К) = 0,1719 кал/(г·К) — удельная теплоемкость воздуха при постоянном объеме
 $c^2 = \frac{R^2 T (\gamma_a - \gamma)}{g}$ — параметр статической устойчивости
 D — дивергенция скорости
 D — горизонтальная дивергенция скорости
 d — дефицит точки росы
 \mathcal{E} — приток тепла к единице объема
 F — вектор сил, отнесенных к единице массы
 F — поток длинноволновой радиации в полусферу
 G — функция Грина (функция влияния); нисходящий поток длинноволновой радиации
 $g = 9,81$ м/с² — ускорение свободного падения
 ∇ = grad — градиент
 H — турбулентный поток тепла
 H — высота изобарической поверхности
 h — высота
 i — единичный вектор, направленный по оси x
 i — мнимая единица; индекс точки на оси x или в пространстве
 $J = 4,187$ Дж/кал = $4,187 \cdot 10^7$ эрг/кал — механический эквивалент теплоты
 $J(A, B)$ = (A, B) — якобиан
 $J_s(A, B)$ = $(A, B)_s$ — якобиан на сферической поверхности
 j — единичный вектор, направленный по оси y
 j — индекс точки на оси y
 k — единичный вектор, направленный по вертикали
 k — коэффициент турбулентной вязкости, соответствующий вертикальному направлению; волновое число, соответствующее оси z ; индекс точки на оси z или p
 k' — коэффициент турбулентной вязкости, соответствующий горизонтальной плоскости
 L — длина волны; характерный горизонтальный масштаб
 $\mathcal{L} = 25 \cdot 10^5$ Дж/кг = $25 \cdot 10^9$ эрг/г = 597 кал/г — теплота конденсации или испарения влаги
 $l = 2\omega \sin \varphi$ — параметр Кориолиса
 M — масштаб карты
 m — масштабный множитель; волновое число, отвечающее оси x ; значение корреляционной функции
 N — балл облачности
 n — волновое число, отвечающее оси y
 O — символ порядка величины или характерного значения
 $P = 1000$ мбар — стандартное давление на уровне моря
 P_n^m — полином Лежандра
 p — давление воздуха; независимая переменная по вертикали
 Q — поток субстанции; количество осадков
 q — удельная влажность воздуха

R — удельная газовая постоянная сухого воздуха ($287 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}) = 2,87 \cdot 10^6 \text{ эрг}/(\text{г}\cdot\text{К}) = 287 \text{ м}^2/(\text{с}\cdot\text{К}) = 6,856 \cdot 10^{-2} \text{ кал}/(\text{г}\cdot\text{К})$);
 радиационный баланс
 $R_{\text{п}}$ — удельная газовая постоянная водяного пара ($462 \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К}) = 4,615 \cdot 10^6 \text{ эрг}/(\text{г}\cdot\text{К}) = 1,102 \cdot 10^{-1} \text{ кал}/(\text{г}\cdot\text{К})$)
 r — радиус-вектор
 r — расстояние; коэффициент корреляции
 S — поток солнечной радиации; нормированная спектральная плотность
 S^0 — $1382 \text{ Дж}/(\text{м}^2\cdot\text{с}) = 1382 \cdot 10^9 \text{ эрг}/(\text{см}^2\cdot\text{с}) = 1,98 \text{ кал}/(\text{см}^2\cdot\text{мин})$ — солнечная постоянная.
 s — расстояние; спектральная плотность; индекс
 T — температура по абсолютной шкале; период колебаний
 T_d — температура точки росы по абсолютной шкале
 t — время; температура по шкале Цельсия
 t_d — температура точки росы по шкале Цельсия
 U — трехмерный вектор скорости
 U — скорость основного потока; амплитуда колебаний; восходящий поток длинноволновой радиации
 u — составляющая скорости по оси x
 V — вектор горизонтальной скорости ветра
 V — абсолютное значение скорости; амплитуда колебаний
 v — составляющая скорости по оси y
 w — составляющая скорости по оси z
 x — декартова горизонтальная координата по оси OX
 y — декартова горизонтальная координата по оси OY
 z — декартова вертикальная координата
 α — индекс циркуляции
 $\beta = \frac{1}{a} \frac{dt}{dy}$ — параметр Россби
 γ — вертикальный градиент температуры
 $\gamma_a = 0,98 \cdot 10^{-2} \text{ }^\circ\text{C}/\text{м}$ — сухоадиабатический градиент температуры
 $\gamma_{\text{ва}}$ — влажноадиабатический градиент температуры
 Δ — оператор Лапласа на плоскости
 Δ_s — оператор Лапласа на сферической поверхности
 δ — разность; средняя абсолютная ошибка
 ε — параметр малости И. А. Кибеля; невязка; относительная ошибка
 $\zeta = p/P$ — безразмерная вертикальная координата ($P = \text{const}$)
 Θ — потенциальная температура
 $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ — полярный угол
 $\kappa = 1,4$ — отношение теплоемкостей при постоянных давлении и объеме; постоянная Кармана
 λ — длина волны; долгота места; коэффициент температуропроводности
 μ — значение нормированной ковариационной функции
 ρ — плотность воздуха
 σ — постоянная Стефана—Больцмана ($5,669 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4) = 5,699 \cdot 10^{-5} \text{ эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{К}^4) = 0,816 \cdot 10^{-10} \text{ кал}/(\text{см}^2 \cdot \text{К}^4)$);
 p/p_s — безразмерная вертикальная координата (p_s — давление на земной поверхности); среднее квадратическое отклонение
 $\tau = \frac{dp}{dt}$ — аналог вертикальной скорости
 φ — широта места; потенциал скорости
 ψ — функция тока
 Ω — вихрь скорости
 Ω — вертикальная составляющая вихря скорости
 ω — угловая скорость вращения Земли ($0,729 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$); круговая частота

**1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ
ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ
ДЛЯ ЦЕЛЕЙ ЧИСЛЕННОГО ПРОГНОЗА
КРУПНОМАСШТАБНЫХ АТМОСФЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ**

В этом разделе используется следующая система исходных уравнений гидротермодинамики, записанных в локальной декартовой системе координат, без учета сил турбулентной вязкости:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + lw, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - lu, \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} &= 0, \\ p = R\rho T, \quad \frac{dT}{dt} - \frac{\gamma_a}{g\rho} \frac{dp}{dt} &= \frac{1}{c_p\rho} \mathcal{E}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где u, v, w — проекции вектора ветра U на оси координат x, y, z ; p, ρ и T — давление, плотность и температура воздуха соответственно; g — ускорение силы тяжести; c_p — теплоемкость при постоянном давлении; R — удельная газовая постоянная; γ_a — сухоадиабатический градиент температуры; \mathcal{E} — приток тепла к единице объема; $l = 2\omega \sin \varphi$ — параметр Кориолиса; ω — угловая скорость вращения Земли;

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}.$$

Для исследований крупномасштабных атмосферных движений используется изобарическая система координат, полученная при условии квазистатичности атмосферы. В этой системе уравнения гидротермодинамики записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -g \frac{\partial H}{\partial x} + lw, \\ \frac{dv}{dt} &= -g \frac{\partial H}{\partial y} - lu, \\ T &= -\frac{g}{R} p \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{c^2}{Rp} \tau + \frac{1}{c_p\rho} \mathcal{E}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где H — высота изобарической поверхности,

$$c^2 = \frac{R^2 T (\gamma_a - \gamma)}{g}$$

— параметр статической устойчивости, $\tau = \frac{dp}{dt}$ — аналог вертикальной скорости

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial p}.$$

Система уравнений (1.2) носит название *полных уравнений гидротермодинамики*.

В ряде случаев вместо координаты p применяется координата $\zeta = p/P$, где $P = 1000$ мбар — стандартное давление на уровне моря, и σ — координата $\sigma = p/p_s$, где $p_s(x, y, t)$ — давление на поверхности Земли.

При решении ряда задач могут быть использованы сферическая, цилиндрическая и полярная системы координат. Переход от одной системы координат к другой делается по правилам дифференцирования сложных функций многих переменных.

Рассмотрим некоторую функцию Φ , являющуюся функцией четырех независимых переменных: x, y, z, t , т. е. $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$. Введем теперь новую систему координат: x_1, y_1, z_1, t_1 , и пусть $\Phi = f(x_1, y_1, z_1, t_1)$. Тогда по правилам дифференцирования связь между производными в старых и новых координатах выражается в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial x}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial y}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial z}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \frac{\partial z_1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Для обратного перехода от производных в новых координатах к старым используются выражения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial y_1}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial z_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial z_1}, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t_1} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t_1}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Некоторые уравнения часто записываются в векторной форме. Так, уравнения движения и неразрывности записываются в виде

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U} + \mathbf{g}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{U}) = 0. \quad (1.6)$$

Здесь \mathbf{U} — вектор скорости, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения Земли, \mathbf{g} — вектор ускорения силы тяжести.

В ряде случаев удобно отдельно выделить векторное уравнение горизонтального движения. Пусть \mathbf{V} — вектор скорости по горизонтали. Тогда, учитывая, что горизонтальные составляющие вектора \mathbf{g} равны нулю, уравнение движения примет вид

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}. \quad (1.7)$$

Переход от векторных уравнений к координатным производится по правилам векторной алгебры. Рассмотрим некоторые из этих правил применительно к системе координат с единичными ортами \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} . В случае декартовой системы координат примем, что указанные орты соответствуют осям x , y и z . В этом случае $\mathbf{U} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$, $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$, где u , v и w — проекции скорости на соответствующие оси, $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$, $\mathbf{g} = g_x\mathbf{i} + g_y\mathbf{j} + g_z\mathbf{k}$, где ω_x , ω_y и ω_z — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$, g_x , g_y и g_z — проекции вектора \mathbf{g} на оси x , y и z .

Приведем теперь некоторую сводку операций с векторами. Любые два вектора \mathbf{A} и \mathbf{B} могут быть представлены в виде

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}, \quad (1.8)$$

где A_x , A_y , A_z , B_x , B_y и B_z — проекции векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} на оси x , y , и z соответственно

Модули векторов являются скалярами и выражаются в виде

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2},$$

$$|\mathbf{B}| = B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}.$$

Сумма (разность) векторов есть новый вектор

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_x \pm B_x)\mathbf{i} + (A_y \pm B_y)\mathbf{j} + (A_z \pm B_z)\mathbf{k}.$$

Скалярное произведение векторов есть скаляр

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos \theta = AB \cos \theta,$$

где θ — угол между векторами \mathbf{A} и \mathbf{B} .

Для единичных векторов

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k})(B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) = \\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \end{aligned}$$

Векторное произведение двух векторов $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ есть новый вектор, длина которого $AB \sin \theta$, а направление совпадает с направлением движения правого винта в направлении от \mathbf{A} к \mathbf{B} . Для единичных векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0, \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}. \end{aligned}$$

Применяя эти результаты, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \times (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}) = \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \mathbf{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} \end{aligned}$$

или в виде определителей третьего и второго порядков

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} A_z & A_x \\ B_z & B_x \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Смешанное произведение векторов

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix},$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A},$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{C}.$$

Оператор набла

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Применив оператор набла к скаляру, например к давлению, получим градиент

$$\text{grad } p = \Delta p = \mathbf{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Применив оператор набла к вектору скорости

$$\mathbf{U} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k},$$

получим дивергенцию вектора

$$\text{div } \mathbf{U} = \nabla \cdot \mathbf{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Вихрь вектора скорости

$$\begin{aligned} \Omega = \text{rot } \mathbf{U} = \nabla \times \mathbf{U} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \\ &= \Omega_x \mathbf{i} + \Omega_y \mathbf{j} + \Omega_z \mathbf{k}, \end{aligned}$$

где Ω_x , Ω_y , Ω_z — проекции вектора Ω .

Рассмотрим теперь вопрос о записи уравнений в системах координат, связанных с картографическими проекциями (рис. 1.1). Наиболее важным моментом здесь является переход от географических координат (φ — широта, λ — долгота) к координатам на плоскости картографической проекции (пусть это будут декартовы координаты x и y и полярные ρ , χ) и расчет масштаба изображения (параметра увеличения) m , представляющего собой отношение длин на плоскости картографической проекции к длинам на местности.

Решение этих вопросов различно для разных проекций. В любом случае, однако, вначале необходимо на плоскости картографической проекции ввести плоскую декартову или полярную систему координат.

В случаях *стереографической* полярной и *равноугольной конической* проекции (рис. 1.1 а) начало этой системы координат помещается в точку на данной поверхности с координатами φ_0 и λ_0 , а ось y направляется параллельно проекции на плоскость изображения меридиана λ_1 при его направлении к Северному полюсу.

В случае *прямой цилиндрической равноугольной* (меркаторской) проекции (рис. 1.1 б) начало координат помещается в точку φ_0 и λ_0 , ось y направляется вдоль меридиана λ_0 при его направлении к Северному полюсу, а ось x — вдоль круга широты φ_0 .

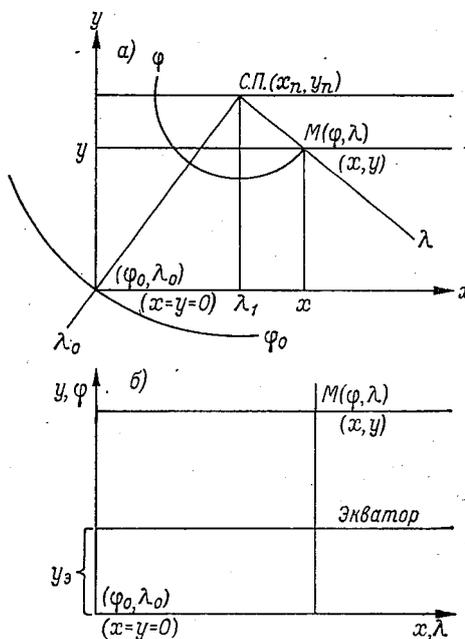


Рис. 1.1. Схема для установления связи между декартовыми и сферическими координатами для стереографической и конической (а) и цилиндрической (б) проекций.

Приведем теперь формулы для расчета координат x и y по заданным координатам φ и λ , а также параметра m .

Стереографическая полярная проекция:

$$\begin{aligned} x &= x_n + k \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \sin(\lambda - \lambda_1); \\ y &= y_n - k \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \cos(\lambda - \lambda_1); \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $k = 1,866a$ (для карт с главным масштабом на широте 60°), a — радиус Земли, x_n и y_n — координаты Северного полюса. Последние можно рассчитать по приведенным формулам, положив в них $x = y = 0$;

$$m = \frac{1,866}{1 + \sin \varphi}.$$

Широта места может быть определена по координатам x и y с помощью соотношения

$$\sin \varphi = \frac{1 - \rho/k}{1 + \rho/k},$$

где

$$\rho = \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}.$$

Равноугольная коническая проекция:

$$\begin{aligned} x &= x_n + k \left(\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \right)^\alpha \sin(\lambda - \lambda_1); \\ y &= y_n - k \left(\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \right)^\alpha \cos(\lambda - \lambda_1); \\ m &= \alpha \frac{\rho}{a} \frac{1}{\cos \varphi}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Параметр α зависит от выбора двух широт, где масштаб карты становится равным главному (широта, где $m = 1$). Для карт, на которых эти широты равны 30 и 60° , $\alpha = 0,7156$.

Меркаторская проекция:

$$\begin{aligned}x &= k(\lambda - \lambda_0); \\y &= k \ln \left(\frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \right) + y_0; \\m &= \frac{k}{a \cos \varphi} = \frac{\cos \varphi_k}{\cos \varphi},\end{aligned}\quad (1.11)$$

где $k = a \cos \varphi_k$ (φ_k — широта, для которой принят главный масштаб), λ и λ_0 выражены в радианах, y_0 — декартова координата экватора; в случае $\varphi_k = 22,5^\circ$ (карты тропической зоны) $k = a \cos 22,5^\circ$.

Упражнения

1.1. Показать, что

$$\mathbf{U} \cdot \nabla p = u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z}.$$

1.2. Показать, что

$$\mathbf{k} \times \mathbf{U} = -v\mathbf{i} + u\mathbf{j}.$$

1.3. Показать, что

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{du}{dt} \mathbf{i} + \frac{dv}{dt} \mathbf{j}.$$

1.4. Показать, что

$$\frac{g}{l} \mathbf{k} \times \nabla H = \frac{g}{l} \left(-\frac{\partial H}{\partial y} \mathbf{i} + \frac{\partial H}{\partial x} \mathbf{j} \right) = u_g \mathbf{i} + v_g \mathbf{j}.$$

1.5. Показать, что

$$\mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{U} = \mathbf{k} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{U} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \Omega_z.$$

1.6. Показать, что

$$\mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} \times \nabla w = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x}.$$

1.7. Показать, что

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = \operatorname{div} \mathbf{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

1.8. Показать, что

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U} = (\omega_y w - \omega_z v) \mathbf{i} + (\omega_z u - \omega_x w) \mathbf{j} + (\omega_x v - \omega_y u) \mathbf{k}.$$

1.9. Показать, что векторному уравнению горизонтального движения

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - l\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$$

в декартовой системе координат соответствуют уравнения

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + lv,$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - lu.$$

1.10. Показать, что векторному уравнению баланса

$$\nabla u \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \nabla v \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} - \mathbf{k} \cdot \nabla \times l\mathbf{V} = -g \Delta H$$

в координатной форме соответствует уравнение

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + u \frac{\partial l}{\partial y} - v \frac{\partial l}{\partial x} - l\Omega = -g \Delta H.$$

1.11. Показать, что для исследования крупномасштабных атмосферных движений справедливо уравнение статики

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g.$$

1.12. Показать, что в изобарической системе координат уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0.$$

1.13. Показать, что в σ -системе координат уравнение движения, соответствующее оси x , имеет вид

$$\frac{d_{\sigma} u}{dt} = -g \frac{\partial H}{\partial x_{\sigma}} + g \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial H}{\partial \sigma} \frac{\partial p_s}{\partial x_{\sigma}} + lv.$$

1.14. Показать, что в σ -системе координат уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{\partial u p_s}{\partial x} + \frac{\partial v p_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\sigma} p_s}{\partial \sigma} = 0.$$

1.15. Рассчитать координаты ξ и σ изобарических поверхностей 1000, 850, 700, 500, 300, 200, 100 и 50 мбар, если $p_s = 900$ мбар.

1.16. Показать, что оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

в полярной системе координат (ρ, χ) имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}.$$

1.17. Показать, что оператор горизонтальной дивергенции

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

в полярной системе координат имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = (\cos \chi + \sin \chi) \frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} (\sin \chi - \cos \chi) \frac{\partial v_\chi}{\partial \chi},$$

где v_ρ, v_χ — проекции вектора \mathbf{V} .

1.18. Показать, что оператор для вертикальной проекции вихря

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

в цилиндрической (и полярной) системах координат имеет вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = (\sin \chi - \cos \chi) \frac{\partial v_\chi}{\partial \rho} + (\sin \chi + \cos \chi) \frac{\partial v_\rho}{\partial \chi}.$$

1.19. Показать, что при использовании сферической системы координат (начало координат совпадает с центром Земли) можно принять

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r v_\theta}{\partial r} \approx \frac{\partial v_\theta}{\partial z}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial r v_\lambda}{\partial r} \approx \frac{\partial v_\lambda}{\partial z}, \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 v_r}{\partial r} \approx \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

1.20. Показать, что при исследовании крупномасштабных атмосферных движений уравнение неразрывности в сферической системе координат можно записать в виде

$$\frac{\partial \rho v_z}{\partial z} + \frac{\rho}{a \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (v_\vartheta^2 \sin \vartheta) + \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} \right] = 0.$$

1.21. Рассчитать значения масштаба изображения m для различных картографических проекций и широт:

	Проекция	φ°
1.21.1	Стереографическая	30
1.21.2	»	60
1.21.3	»	85
1.21.4	Коническая	30
1.21.5	»	60
1.21.6	»	85
1.21.7	Цилиндрическая	30
1.21.8	»	60
1.21.9	»	85

1.22. Рассчитать декартовы координаты точек a ($\varphi = 45^\circ$, $\lambda = 60^\circ$ в. д.), b ($\varphi = 60^\circ$, $\lambda = 80^\circ$ в. д.) и c ($\varphi = 60^\circ$, $\lambda = 60^\circ$ в. д.) для проекций (см. рис. 1.1):

1.22.1. Стереографическая.

1.22.2. Коническая.

1.22.3. Цилиндрическая.

При этом $\lambda_1 = 45^\circ$ в. д., $x_n = y_n = 8400$ км, $\lambda_0 = 0^\circ$, $y_s = 0$. Результат выразить в километрах с округлением до 10 км.

1.23. Рассчитать значения широты φ и параметров увеличения m и Кориолиса l в точках сетки: a ($i = 20$, $j = 10$), b ($i = 21$, $j = 10$), c ($i = 20$, $j = 11$), d ($i = 19$, $j = 10$) и e ($i = 20$, $j = 9$) (рис. 1.2) при $ds = 300$ км для картографических проекций.

1.23.1. Стереографическая при $x_n = y_n = 8400$ км ($i_n = j_n = 28$).

1.23.2. Коническая при $x_n = y_n = 8400$ км ($i_n = j_n = 28$).

1.23.3. Цилиндрическая (при $\lambda_0 = 0$, $y_s = 0$).

1.24. Показать, что при учете стереографической картографической проекции между оператором горизонтальной адвекции на плоскости

$$A = - \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

и оператором на сфере

$$A_s = - \left(\frac{v_\varphi}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{v_\lambda}{a \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right)$$

существует соотношение

$$A_s = mA.$$

Указание. Под u и v следует понимать проекцию вектора ветра на горизонтальную поверхность.

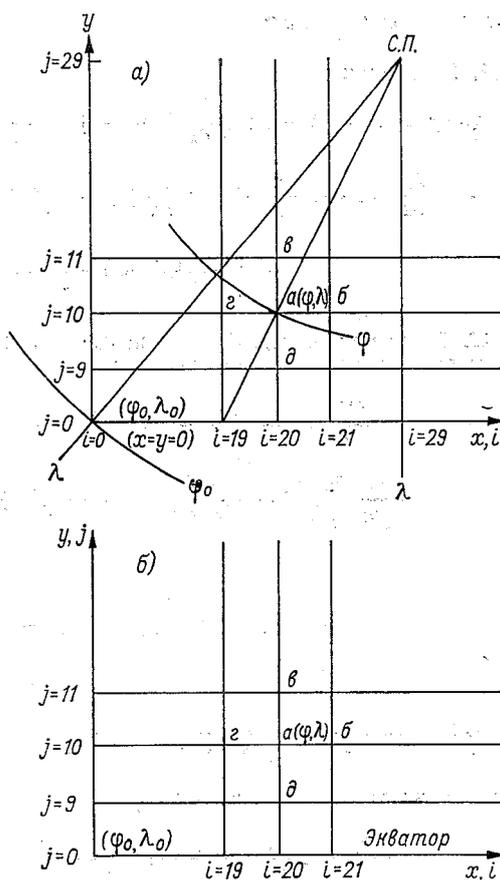
1.25. Показать, что при учете картографической проекции между оператором Лапласа на плоскости

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

и оператором на сфере

$$\Delta_s = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}$$

Рис. 1.2. Схема для установления связи между безразмерными координатами точек сетки и сферическими координатами для проекций: стереографической и конической (а), цилиндрической (б).



существует соотношение

$$\Delta_s = m^2 a^2 \Delta.$$

1.26. Показать, что при учете картографической проекции между оператором Якоби на плоскости

$$(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x}$$

и оператором на сфере

$$\frac{1}{\sin \vartheta} (A, B)_s = \frac{1}{\sin \vartheta} \left(\frac{\partial A}{\partial \vartheta} \frac{\partial B}{\partial \lambda} - \frac{\partial A}{\partial \lambda} \frac{\partial B}{\partial \vartheta} \right)$$

существует соотношение

$$\frac{1}{\sin \vartheta} (A, B)_s = m^2 a^2 (A, B).$$

Ответы и решения

1.1. Решение.

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \cdot \nabla p &= (ui + vj + wk) \left(\frac{\partial p}{\partial x} i + \frac{\partial p}{\partial y} j + \frac{\partial p}{\partial z} k \right) = u \frac{\partial p}{\partial x} i \cdot i + u \frac{\partial p}{\partial y} i \cdot j + \\ &+ u \frac{\partial p}{\partial z} i \cdot k + v \frac{\partial p}{\partial x} j \cdot i + v \frac{\partial p}{\partial y} j \cdot j + v \frac{\partial p}{\partial z} j \cdot k + w \frac{\partial p}{\partial x} k \cdot i + w \frac{\partial p}{\partial y} k \cdot j + \\ &+ w \frac{\partial p}{\partial z} k \cdot k = u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

1.10. Решение. Преобразуем каждый из всех членов левой части исходного векторного уравнения в отдельности:

$$\begin{aligned} \nabla u \frac{\partial v}{\partial x} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} i + \frac{\partial v}{\partial y} j \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 (i)^2 + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} i \cdot j + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} i \cdot i + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} (j)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla v \cdot \nabla \times l\mathbf{V} &= \mathbf{k} \cdot \text{rot} (l\mathbf{V}) = \mathbf{k} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ lu & lv & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{k} \left[\left(-\frac{\partial lv}{\partial z} \right) \cdot i + \left(\frac{\partial lu}{\partial z} \right) \cdot j + \left(\frac{\partial lv}{\partial x} - \frac{\partial lu}{\partial y} \right) \cdot k \right] = v \frac{\partial l}{\partial x} - u \frac{\partial l}{\partial y} + l\Omega. \end{aligned}$$

Объединяя результаты, получаем

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - v \frac{\partial l}{\partial x} + u \frac{\partial l}{\partial y} - l\Omega = -g \Delta H.$$

1.15. p , мбар . . . 1000 850 700 500 300 200 100 50
 ξ 1,000 0,850 0,700 0,500 0,300 0,200 0,100 0,050
 σ 1,111 0,944 0,779 0,556 0,339 0,222 0,111 0,056

1.16. Решение. Координаты x и y выражаются через полярные координаты ρ и χ по соотношениям

$$x = \rho \cos \chi, \quad y = \rho \sin \chi.$$

Применяя правила дифференцирования сложных функций, находим

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial x}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial y} = \cos \chi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \chi \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial \chi} = \frac{\partial x}{\partial \chi} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \chi} \frac{\partial}{\partial y} = -\sin \chi \rho \frac{\partial}{\partial x} + \cos \chi \rho \frac{\partial}{\partial y},$$

отсюда

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \chi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \chi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \chi},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \chi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\cos \chi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \chi}.$$

Дифференцируя второй раз, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \cos \chi \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\cos \chi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \chi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \chi} \right) - \frac{\sin \chi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \chi} \left(\cos \chi \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin \chi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \chi} \right).$$

Получив аналогичное выражение для $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ и сложив результат, находим

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \chi^2}.$$

1.21.1.	1,244.
1.21.2.	1,000.
1.21.3.	0,935.
1.21.4.	1,000.
1.21.5.	1,000.
1.21.6.	1,567.
1.21.7.	1,067.
1.21.8.	1,848.
1.21.9.	10,595.

1.22.

	а		б		в	
	х	у	х	у	х	у
1.22.1	9670	3640	11 220	4370	9220	5320
1.22.2	9370	2530	11 890	3420	9550	4100
1.22.3	6160	5190	8 220	5190	6160	7750

1.23.

		а	б	в	г	д
1.23.1	φ	37,1°	38,1°	39,3°	36,1°	35,0°
	m	1,162	1,174	1,147	1,170	1,184
	l · 10 ⁴	0,880	0,899	0,923	0,860	0,837
1.23.2	φ	46,6°	47,7°	49,1°	45,4°	44,0°
	m	0,966	0,966	0,968	0,966	0,966
	l · 10 ⁴	1,059	1,078	1,102	1,038	1,013
1.23.3	φ	28,0°	28,0°	30,6°	28,0°	25,4°
	m	1,046	1,046	1,073	1,046	1,023
	l · 10 ⁴	0,685	0,685	0,741	0,685	0,626

1.25. Р е ш е н и е. В соответствии с теорией картографических проекций между сферическими координатами (ϑ, λ) и полярными координатами на плоскости проекции (ρ, χ) существуют следующие соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \chi}, \quad \frac{\partial}{\partial \vartheta} = m a \frac{\partial}{\partial \rho}.$$

Учитывая это, для оператора A_s получаем

$$A_s = \frac{v_\vartheta}{a} m a \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{v_\lambda}{a \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \chi}.$$

Теперь сделаем переход к декартовым координатам. В соответствии с правилами дифференцирования сложных функций (см. задачу 1.16) имеем

$$\frac{\partial}{\partial \rho} = \cos \chi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \chi \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial \chi} = \rho \left(-\sin \chi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \chi \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

В то же время проекции скоростей в сферической и декартовой (локальной) системах координат связаны соотношениями

$$v_\vartheta = u \cos \lambda + v \sin \lambda,$$

$$v_\lambda = -u \sin \lambda + v \cos \lambda.$$

Учитывая сказанное, а также, что $\lambda = \chi$, для A_s получаем

$$A_s = m \left(u \cos \lambda + v \sin \lambda \right) \left(\cos \lambda \frac{\partial}{\partial x} + \sin \lambda \frac{\partial}{\partial y} \right) +$$

$$+ \frac{\rho}{a \sin \vartheta} \left(-u \sin \lambda + v \cos \lambda \right) \left(-\sin \lambda \frac{\partial}{\partial x} + \cos \lambda \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Так как по теории картографических проекций

$$\frac{\rho}{a \sin \vartheta} = m,$$

то получим

$$A_s = m \left\{ (u \cos \lambda + v \sin \lambda) \left(\cos \lambda \frac{\partial}{\partial x} + \sin \lambda \frac{\partial}{\partial y} \right) + \right.$$

$$\left. + (-u \sin \lambda + v \cos \lambda) \left(-\sin \lambda \frac{\partial}{\partial x} + \cos \lambda \frac{\partial}{\partial y} \right) \right\} =$$

$$= m \left\{ u (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) \frac{\partial}{\partial x} + v (\cos^2 \lambda + \sin^2 \lambda) \frac{\partial}{\partial y} \right\} =$$

$$= m \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) = mA.$$

Здесь под u и v понимаются проекции вектора ветра на плоскость, перпендикулярную местной вертикали (т. е. проекции, получающиеся при локальной декартовой системе координат). Если же под u и v понимать проекции вектора ветра на плоскость картографической проекции, то полученный результат надо еще умножить на параметр увеличения и мы получим, что

$$A_s = m^2 A.$$

В практике численных прогнозов обычно в уравнениях вводятся проекции вектора ветра на горизонтальную (относительно данной точки) плоскость и тогда

$$A_s = mA.$$

2. ВОЛНОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ В АТМОСФЕРЕ В СВЯЗИ С ЗАДАЧЕЙ ЧИСЛЕННОГО ПРОГНОЗА ПОГОДЫ

Дифференциальные уравнения современных прогностических моделей атмосферы описывают самые разнообразные физические процессы. С точки зрения физического механизма формирования погоды наибольший интерес представляют такие погодообразующие процессы, как адвекция метеорологических субстанций, приток тепла, крупномасштабные атмосферные волны и т. д.

Однако указанные уравнения описывают не только эти процессы, но и такие, как, например, гравитационные и акустические волны. Первые из них на формирование погоды оказывают в основном лишь косвенное влияние (посредством генерации отклонений ветра от состояния равновесия — агеострофического ветра), а вторые — не оказывают никакого влияния.

В силу сказанного крайне необходимы детальный количественный анализ роли каждого из процессов, описываемых системой прогностических уравнений, выделение главных из них и отфильтровывание несущественных. В некоторых случаях отфильтровывание малозначащих или совсем не значащих факторов удастся сделать еще до интегрирования прогностических уравнений. Так, например, в квазигеострофических и квазисоленоидальных моделях были отфильтрованы гравитационные и акустические волны.

Современные же прогностические модели, основанные на интегрировании полных уравнений гидротермодинамики, описывают гравитационные, а также один тип акустических волн (двумерные волны). В случае, если бы мы имели возможность получить точное решение в аналитическом виде, наличие этих волн в решении не исказило бы главную часть решения, обусловленную корректным учетом основных погодообразующих факторов.

Однако современные методы математического анализа не позволяют получить точного решения прогностических уравнений ввиду их нелинейности. Приближенные же или численные методы решения соответствующих конечно-разностных аналогов исходных уравнений по начальным данным в узлах некоторой сетки точек могут привести к искажению амплитуд некоторых волн. Это обстоятельство усугубляется тем, что исходные данные, заданные в узлах сетки, содержат ошибки, обусловленные погрешностями измерений, интерполяции и т. д. Поля этих ошибок воспринимаются прогностической моделью как некоторые системы ложных гравитационных или акустических волн. В процессе интегрирования уравнений по времени амплитуды этих фиктивных волн могут расти, так что через некоторое время реальные

метеорологические поля могут полностью исказиться указанными ложными волнами.

В силу изложенного развитие численных методов прогноза погоды невозможно без детального количественного изучения волновых процессов разных типов.

Исследование волновых движений в атмосфере производится методом малых возмущений. Возможность применения этого метода обусловлена малостью амплитуд изменений метеорологических элементов, обусловленных волновыми процессами, по сравнению с величинами их изменений, обусловленных другими процессами, от рассмотрения которых отвлекаются вообще, полагая, что они создают лишь основной фон, на котором происходят волновые колебания.

Применение метода малых возмущений возможно лишь в случаях, когда процесс описывается линейными дифференциальными уравнениями. Исходные же уравнения гидротермодинамики являются нелинейными. Поэтому возникает необходимость линеаризации либо исходных уравнений, либо уравнений, полученных на их основе.

Линеаризация уравнений основана на представлении любого элемента f в виде суммы основного (фонового) значения \bar{f} и малой величины отклонения $f' = f - \bar{f}$. Так что любой член уравнения представляется в виде

$$f = \bar{f} + f'.$$

Важным моментом является предположение о том, что

$$\left| \frac{f'}{\bar{f}} \right| \ll 1.$$

Это обстоятельство позволяет выделить в уравнениях самые существенные члены и опустить малые. Покажем сказанное на примере. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Это уравнение нелинейно, так как содержит произведение неизвестной величины u и производной от нее $\partial u / \partial x$.

Положим, что $u = \bar{u} + u'$ и что $\bar{u} = \text{const}$. Тогда вместо данного уравнения получим

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + \underline{u' \frac{\partial u'}{\partial x}} = 0.$$

Подчеркнутый член содержит произведение малых величин и им можно пренебречь. В результате получим линейное уравнение

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} = 0.$$

После линеаризации уравнений, принятых для исследования, основной задачей при изучении волновых процессов является определение частоты и скорости перемещения волн. Для этой цели весьма удобным является представление реальных изменений метеорологических элементов в виде суперпозиции гармонических составляющих. В таком случае предполагается, что в начальный момент $t = 0$ исходное поле любого элемента f можно представить в виде

$$f = \sum_{m, n, k} A_{mnk} e^{i(mx+ny+kz)},$$

где A_{mnk} — амплитуда волны, $m = 2\pi/L_x$, $n = 2\pi/L_y$, $k = 2\pi/L_z$ — волновые числа, а L_x , L_y и L_z — длины волн по соответствующим осям.

Основываясь на таком представлении начального поля, решение ищем в виде

$$f = \sum_{m, n, k} A_{mnk} e^{i(mx+ny+kz-\sigma_{mnk}t)},$$

где σ_{mnk} — круговая частота. Заметим, что круговая частота связана с периодом колебаний T следующим образом: $\sigma = 2\pi/T$.

Чтобы определить σ , совсем не требуется знать реальное поле. Достаточно только задать интересующие нас длины волн (а следовательно, и волновые числа).

Имея величины σ , скорости перемещения волн определяются по соотношениям

$$c_x = \frac{\sigma_{mnk}}{m}, \quad c_y = \frac{\sigma_{mnk}}{n}, \quad c_z = \frac{\sigma_{mnk}}{k}.$$

Упражнения

2.1. Произвести линеаризацию прогностического уравнения квазигеострофической баротропной модели атмосферы

$$\Delta \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{g}{l} (H, \Delta H) + \beta \frac{\partial H}{\partial x} = 0$$

относительно основного состояния атмосферы, характеризуемого постоянной скоростью \bar{u} , направленной вдоль оси x , и распределением высоты изобарической поверхности $\bar{H}(y)$, причем

$$\bar{u} = - \frac{g}{l} \frac{\partial \bar{H}}{\partial y},$$

для случая, когда $H = \bar{H}(y) + H'(x, y, t)$, при постоянных значениях параметров g , l и β и линейной зависимости \bar{H} от y .

2.2. Получить выражение для круговой частоты σ_{mn} и скорости перемещения волны вдоль оси x (c_{xmn}) при крупномасштабном движении, описываемом уравнением

$$\frac{\partial \Delta H'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \Delta H'}{\partial x} + \beta \frac{\partial H'}{\partial x} = 0,$$

при постоянных значениях \bar{u} и β .

Указание. Принять, что в момент времени $t = 0$ функция $H'(x, y, t)$ удовлетворяет условию

$$H'_{mn}(x, y) = A_{mn} e^{i(mx+ny)},$$

где A_{mn} — амплитуда волны с волновыми числами m и n , а решение искать в виде

$$H'_{mn}(x, y, t) = A_{mn} e^{i(mx+ny-\sigma_{mn}t)}.$$

2.3. Получить выражение для круговой частоты σ_{mn} и скорости c_{xmn} перемещения волны вдоль оси x с волновым числом m при крупномасштабном движении, описываемом уравнением

$$\frac{\partial \Delta H'}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial H'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \Delta H'}{\partial x} + \beta \frac{\partial H'}{\partial x} = 0,$$

при постоянных значениях параметров \bar{u} , β , α^2 .

Указание. Принять, что в момент времени $t = 0$ функция H' удовлетворяет уравнению

$$H'_{mn}(x, y) = A_{mn} e^{i(mx+ny)},$$

где A_{mn} — амплитуда волны с волновыми числами m и n , а решение искать в виде

$$H'_{mn}(x, y, t) = A_{mn} e^{i(mx+ny-\sigma_{mn}t)}.$$

2.4. Рассчитать значения параметра Россби $\beta = \frac{\partial l}{\partial y} = \frac{2\omega}{a} \cos \varphi$ при $a = 0,6371 \cdot 10^7$ м для случаев:

2.4.1. $\varphi = 60^\circ$.

2.4.2. $\varphi = 50^\circ$.

2.5. Рассчитать значение параметра $\alpha^2 = l^2/g\bar{H}$ для случаев:

2.5.1. $\bar{H} = 0,551 \cdot 10^4$ м, $\varphi = 60^\circ$.

2.5.2. $\bar{H} = 0,551 \cdot 10^4$ м, $\varphi = 50^\circ$.

2.6. Рассчитать значения скорости перемещения крупномасштабных волн c_x , удовлетворяющих уравнению и условиям задания 2.2, при $n = 0$ ($L_y \rightarrow \infty$) и следующих значениях параметров:

	\bar{u} м/с	$L_x \cdot 10^7$ м	φ°
2.6.1	10	0,8	60
2.6.2	10	0,8	50
2.6.3	10	0,5	60
2.6.4	10	0,5	50
2.6.5	20	0,8	60
2.6.6	20	0,8	50
2.6.7	20	0,5	60
2.6.8	20	0,5	50

Ответ выразить в м/с и км/ч. По результатам решения задачи проанализировать влияние скорости основного потока, длины волн и широты места на скорость перемещения волн.
2.7. Рассчитать значения скорости перемещения крупномасштабных волн c_x , удовлетворяющих уравнению и условиям задачи 2.3, при $n = 0$ ($L_y \rightarrow \infty$) и следующих значениях параметров:

	\bar{u} м/с	$L_x \cdot 10^7$ м	φ°	$\alpha^2 \cdot 10^{-12}$ м ⁻²
2.7.1	10	0,8	60	0,2941
2.7.2	10	0,8	50	0,2298
2.7.3	10	0,5	60	0,2941
2.7.4	10	0,5	50	0,2298
2.7.5	20	0,8	60	0,2941
2.7.6	20	0,8	50	0,2298
2.7.7	20	0,5	60	0,2941
2.7.8	20	0,5	50	0,2298

Ответ выразить в м/с. По результатам решения задачи проанализировать роль параметра α^2 на скорость перемещения волн.
2.8. Показать, что при движении на вращающейся Земле скорость перемещения вдоль оси x внешних гравитационных волн, описываемых системой уравнений

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} - l v' + g \frac{\partial h'}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} + l u' = 0,$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial h'}{\partial x} + \bar{h} \frac{\partial h'}{\partial x} = 0,$$

выражается в виде

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{g\bar{h} + \frac{l^2}{m^2}}.$$

2.9. Рассчитать абсолютные значения скоростей перемещения вдоль оси x гравитационных волн, удовлетворяющих условиям задачи 2.8, при $\bar{u} = 0$ и следующих значениях параметров:

	\bar{h} м	$L_x \cdot 10^6$ м	φ°
2.9.1	10^2	0,8	60
2.9.2	10^2	0,8	50
2.9.3	10^2	0,5	60
2.9.4	10^2	0,5	50
2.9.5	$0,8 \cdot 10^4$	0,8	60
2.9.6	$0,8 \cdot 10^4$	0,8	50
2.9.7	$0,8 \cdot 10^4$	0,5	60
2.9.8	$0,8 \cdot 10^4$	0,5	50

Ответ выразить в системе единиц СИ. По результатам задачи проанализировать влияние глубины жидкости \bar{h} и широты места φ на скорость перемещения волн.

2.10. Показать, что исходя из выражения для круговых частот внутренних волн

$$\sigma^2 = \frac{a^2}{2} \left[(m^2 + n^2) + \frac{k^2}{\mu} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\beta + g}{2a^2} \right)^2 \right] \times \\ \times \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4g\beta}{\mu a^4} \frac{m^2 + n^2}{\left[(m^2 + n^2) + \frac{k^2}{\mu} + \frac{1}{\mu} \left(\frac{\beta + g}{2a^2} \right)^2 \right]^2}} \right\},$$

где m , n и k — волновые числа, соответствующие осям x , y , z ; $\beta = (\lambda - 1)g + da^2/dz$; $\lambda = (c_p - c_\pi)/(c_v - c_\pi)$ — показатель политропы; c_π — теплоемкость политропического процесса, $a^2 = \lambda RT$; μ — параметр, равный 1 при наличии вертикальных ускорений и 0 при их отсутствии, в изотермической атмосфере ($\partial T/\partial z = 0$) при изостерическом процессе ($\rho = \text{const}$) акустические волны отсутствуют.

2.11. Исходя из выражения для круговых частот задачи 2.10 показать, что в изотермической атмосфере ($\partial T/\partial z = 0$) при изотермическом процессе ($\lambda = 1$, $\beta = (\lambda - 1)g = 0$) гравитационные волны отсутствуют.

2.12. Показать, что уравнение адаптации полей давления и ветра

$$c^2 \Delta \varphi + \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + l^2 \varphi \right) = 0$$

может быть приведено к виду

$$c^2 \Delta R + \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right) R = 0,$$

где

$$\xi = -\ln \zeta, \text{ а } R = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \int_0^{\zeta} \varphi d\zeta.$$

2.13. Рассчитать абсолютные значения скорости перемещения внутренних гравитационных волн, соответствующих решению уравнения адаптации полей давления и ветра, для круговой частоты

$$\sigma = \pm c \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{k^2 + 1/4} + \frac{l^2}{c^2}},$$

при $n = 0$ ($L_y \rightarrow \infty$), $k = 0$ ($L_z \rightarrow \infty$), $c = 100$ м/с для длин волн L_x и широт φ :

2.13.1. $L_x = 0,8 \cdot 10^7$ м, $\varphi = 60^\circ$.

2.13.2. $L_x = 0,5 \cdot 10^7$ м, $\varphi = 60^\circ$.

2.13.3. $L_x = 0,8 \cdot 10^7$ м, $\varphi = 50^\circ$.

2.13.4. $L_x = 0,5 \cdot 10^7$ м, $\varphi = 50^\circ$.

По результатам решения задачи проанализировать влияние длины волны и широты места на скорость перемещения волн.

Ответы и решения

2.1.

$$\Delta \frac{\partial H'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \Delta H'}{\partial x} + \beta \frac{\partial H'}{\partial x} = 0.$$

Решение. Используя представление $H = \bar{H}(y) + H'(x, y, t)$, получаем выражения для производных, входящих в исходное уравнение:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H'}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 H'}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} + \frac{\partial H'}{\partial y} = -\frac{l}{g} \bar{u} + \frac{\partial H'}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 H'}{\partial y^2}, \quad \Delta H = \Delta H',$$

$$\frac{\partial \Delta H}{\partial x} = \frac{\partial \Delta H'}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Delta H}{\partial y} = \frac{\partial \Delta H'}{\partial y},$$

$$\Delta \frac{\partial H}{\partial t} = \Delta \frac{\partial H'}{\partial t}, \quad \frac{g}{l}(H, \Delta H) =$$

$$= \frac{g}{l} \left[\frac{\partial H'}{\partial x} \frac{\partial \Delta H'}{\partial y} - \left(-\frac{l}{g} \bar{u} + \frac{\partial H'}{\partial y} \right) \frac{\partial \Delta H'}{\partial x} \right].$$

Подставляя найденные выражения для производных в исходное уравнение, получаем

$$\Delta \frac{\partial H'}{\partial t} + \frac{g}{l} \frac{\partial H'}{\partial x} \frac{\partial \Delta H'}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial \Delta H'}{\partial x} - \frac{g}{l} \frac{\partial H'}{\partial y} \frac{\partial \Delta H'}{\partial x} + \beta \frac{\partial H'}{\partial x} = 0.$$

Подчеркнутые члены содержат произведения малых величин, поэтому ими можно пренебречь. В итоге получаем линеаризованное уравнение, данное в ответе.

2.2.

$$\sigma_{mn} = \bar{u}m - \frac{\beta m}{m^2 + n^2}, \quad c_{mn} = \bar{u} - \frac{\beta}{m^2 + n^2}.$$

Решение. Исходя из заданного вида искомого решения

$$H'_{mn}(x, y, t) = A_{mn} e^{i(mx+ny-\sigma_{mn}t)}$$

исходного уравнения, выразим все производные, входящие в это уравнение:

$$\frac{\partial H'}{\partial x} = imA_{mn} e^{i(mx+ny-\sigma_{mn}t)} = imH'_{mn},$$

$$\frac{\partial^2 H'}{\partial x^2} = -m^2 H'_{mn}, \quad \frac{\partial H'}{\partial y} = inH'_{mn},$$

$$\frac{\partial^2 H'}{\partial y^2} = -n^2 H'_{mn}, \quad \Delta H' = -(m^2 + n^2) H'_{mn},$$

$$\frac{\partial \Delta H'}{\partial t} = i\sigma_{mn} (m^2 + n^2) H'_{mn},$$

$$\frac{\partial \Delta H'}{\partial x} = -im (m^2 + n^2) H'_{mn}.$$

После подстановки этих выражений исходное уравнение примет вид

$$i\sigma_{mn} (m^2 + n^2) H'_{mn} - \bar{u}im (m^2 + n^2) H'_{mn} + \beta im H'_{mn} = 0$$

или

$$\sigma_{mn} (m^2 + n^2) = \bar{u}m (m^2 + n^2) - \beta m.$$

В итоге получаем выражение для круговой частоты

$$\sigma_{mn} = \bar{u}m - \frac{\beta m}{m^2 + n^2}.$$

Далее определяем c_x — скорость распространения крупномасштабных волн вдоль оси x по известному соотношению $c_x = \sigma_{mn}/m$. В итоге получим

$$c_x = \bar{u} - \frac{\beta}{m^2 + n^2}.$$

2.3.

$$\sigma_{mn} = \frac{\bar{u}m(m^2 + n^2)}{m^2 + n^2 + \alpha^2} - \frac{\beta m}{m^2 + n^2 + \alpha^2},$$

$$c_{xm} = \frac{\bar{u}m^2}{m^2 + \alpha^2} - \frac{\beta}{m^2 + \alpha^2}.$$

2.4.1. $0,1144 \cdot 10^{-10}$ м·с⁻¹.

2.4.2. $0,1471 \cdot 10^{-10}$ м·с⁻¹.

2.5.1. $0,2941 \cdot 10^{-12}$ м⁻².

2.5.2. $0,2298 \cdot 10^{-12}$ м⁻².

2.6. Волны движутся на запад (знак минус) или на восток (знак плюс) со скоростью:

2.6.1. -8,5 м/с, -31 км/ч.

2.6.2. -13,8 м/с, -50 км/ч.

2.6.3. +2,8 м/с, +9 км/ч.

2.6.4. +0,7 м/с, +2 км/ч.

2.6.5. +1,5 м/с, +5 км/ч.

2.6.6. -3,8 м/с, -14 км/ч.

2.6.7. +12,8 м/с, +46 км/ч.

2.6.8. +10,7 м/с, +38 км/ч.

Решение для случая 2.6.1 ($\bar{u} = 10$ м/с, $L = 0,8 \cdot 10^7$ м, $\varphi = 60^\circ$)

$$c_{xL} = \bar{u} - \frac{\beta L^2}{4\pi^2}$$

Рассчитаем параметр β для широты 60° : $\beta = 0,1144 \cdot 10^{-10} \text{ м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$. Приведем формулу для скорости к рабочему (удобному для расчетов) виду. Для этой цели введем вспомогательную переменную $L' = L \cdot 10^{-7}$. Рассчитаем вспомогательную величину

$$\frac{\beta \cdot (10^7)^2}{4\pi^2} = 28,93.$$

Тогда формула для скорости запишется так:

$$c_{xL} = 10 - 28,93 (L')^2.$$

При $L = 0,8 \cdot 10^7$, $L' = 0,8$

$$c_{xL} = 10 - 28,93 \cdot (0,8)^2 = -8,5 \text{ м/с.}$$

Переведем скорость из м/с в км/ч:

$$c \text{ км/ч} = 10^{-3} \cdot 3600 c \text{ м/с} = 36 c \text{ м/с.}$$

Скорость 8,5 м/с соответствует скорости 30,6 км/ч.

Ответ: Волна движется на запад со скоростью 8,5 м/с, или 31 км/ч.

2.7. Формула для расчета скорости перемещения волны имеет вид

$$c_{xm} = \frac{1}{m^2 + \alpha^2} (\bar{u} m^2 - \beta).$$

Волны движутся на запад (знак минус) или на восток (знак плюс) со скоростью:

2.7.1. $-5,8$ м/с.

2.7.2. $-10,1$ м/с.

2.7.3. $+2,3$ м/с.

2.7.4. $+0,6$ м/с.

2.7.5. $+2,0$ м/с.

2.7.6. $-2,8$ м/с.

2.7.7. $+10,8$ м/с.

2.7.8. $+9,3$ м/с.

2.9. Гравитационные волны движутся со скоростью:

2.9.1. 164 м/с.

2.9.2. 145 м/с.

2.9.3. 105 м/с.

2.9.4. 94 м/с.

2.9.5. 323 м/с.

2.9.6. 312 м/с.

2.9.7. 297 м/с.

2.9.8. 294 м/с.

2.12. Р е ш е н и е. Проинтегрируем исходное уравнение по ζ от 0 до ζ , результат поделим на $\sqrt{\zeta}$. Будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta}} \int_0^\zeta c^2 \Delta \varphi d\zeta + \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \int_0^\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + l^2 \varphi \right) d\zeta = 0.$$

или, учитывая, что Δ — плоский оператор Лапласа и вводя новую функцию R

$$R = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \int_0^\zeta \varphi d\zeta,$$

получим уравнение

$$c^2 \Delta R + \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \int_0^\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + l^2 \varphi \right) \right] d\zeta = 0. \quad (2.1)$$

Подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал, поэтому уравнение (2.1) можно записать в виде

$$c^2 \Delta R + \zeta^{3/2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right) \varphi = 0$$

или

$$c^2 \Delta R + \zeta^{3/2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = 0. \quad (2.2)$$

Дифференцируя R по ζ , получим

$$V\bar{\zeta} \frac{\partial R}{\partial \zeta} + \frac{1}{2V\bar{\zeta}} R = \varphi.$$

Подставим этот результат в уравнение (2.2):

$$c^2 \Delta R + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right) \zeta^{3/2} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial \zeta^2} V\bar{\zeta} + \frac{\partial R}{\partial \zeta} \frac{1}{2} \frac{1}{V\bar{\zeta}} - \frac{R}{4V\bar{\zeta}} + \frac{1}{2} \frac{1}{V\bar{\zeta}} \frac{\partial R}{\partial \zeta} \right] = 0$$

или

$$c^2 \Delta R + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right) \zeta^{3/2} \left[V\bar{\zeta} \frac{\partial^2 R}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{V\bar{\zeta}} \frac{\partial R}{\partial \zeta} - \frac{R}{4V\bar{\zeta}} \right] = 0.$$

Преобразовывая, будем иметь

$$c^2 \Delta R + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right) \left[\zeta^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{1}{4} \right] R = 0.$$

Поменяв операторы местами, получим

$$c^2 \Delta R + \left(\zeta^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right) R = 0. \quad (2.3)$$

Введем новую независимую переменную $\xi = -\ln \zeta$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции $f[\xi(\zeta)]$, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} = \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \zeta} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial \zeta^2}.$$

Поэтому можно записать

$$\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} = -\frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \zeta^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Учитывая это, выражение (2.3) можно переписать так:

$$c^2 \Delta R + \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l^2 \right) R = 0,$$

что и требовалось показать.

2.13. Абсолютные скорости перемещения внутренних гравитационных волн равны:

2.13.1. 256 м/с.

2.13.2. 224 м/с.

2.13.3. 245 м/с.

2.13.4. 218 м/с.

3. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В численных методах математического анализа вместо непрерывных координат вводятся дискретные безразмерные координаты. В случае декартовых координат x, y, z, t соответствующие безразмерные координаты вводятся по соотношениям

$$i = \frac{x}{\delta x}, \quad j = \frac{y}{\delta y}, \quad k = \frac{z}{\delta z}, \quad s = \frac{t}{\delta t},$$

где $\delta x, \delta y$ и δz — шаги по координатам x, y и z , а δt — шаги по времени. Как правило, безразмерным координатам придаются целые значения. Однако они могут быть и дробными.

Функции непрерывных координат заменяются дискретными значениями функций в отдельных точках (x_i, y_j, z_k, t_s) или $(ijks)$. Для дискретных значений функций в точках принято следующее обозначение:

$$X(x_i, y_j, z_k, t_s) = X_{ijk_s},$$

где X — любая функция.

В численных методах любые дифференциальные операторы заменяются некоторыми арифметическими выражениями. В основе перехода от дифференциальных операторов к соответствующим конечно-разностным аналогам лежит выражение для первой производной. Наиболее широкое распространение имеют следующие два способа замены производных:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial r}\right)_n \approx (\delta_r^I X)_n = \frac{1}{\delta r} (X_{n+1} - X_n),$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial r}\right)_n \approx (\delta_{r_2}^{II} X)_n = \frac{1}{2\delta r} (X_{n+1} - X_{n-1}),$$

где r — любая из координат, δr — шаг по этой координате, n — безразмерная координата (индекс) точки, для которой производится расчет производной.

В первом случае использована односторонняя разность, а во втором — центральная. Оценка точности (или погрешности) замены производных конечными разностями производится с помощью разложения функций в ряд Тэйлора в окрестности точки n . Рассмотрим это на примере первого способа. Применяя формулу Тэйлора при $\delta r = h$

$$X(r+h) = X(r) + \frac{\partial X}{\partial r} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} h^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 X}{\partial r^3} h^3 + \dots$$

к функции в точке n , находим

$$X_{n+1} = X_n + \left(\frac{\partial X}{\partial r}\right)_n h + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial r^2}\right)_n h^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 X}{\partial r^3}\right)_n h^3 + \dots$$

Получим теперь выражение для погрешности замены производной, т. е. для разности между приближенным и точным значением производной:

$$\varepsilon = \delta_r^I X - \frac{\partial X}{\partial r}.$$

Используя разложение функции в ряд Тэйлора в точке n , получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{h} (X_{n+1} - X_n) - \left(\frac{\partial X}{\partial r} \right)_n = \frac{1}{h} \left[X_n + \left(\frac{\partial X}{\partial r} \right)_n h + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial r^2} \right)_n h^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 X}{\partial r^3} \right)_n h^3 + \dots - X_n \right] - \\ &\quad - \left(\frac{\partial X}{\partial r} \right)_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial r^2} \right)_n h + \dots \end{aligned}$$

Так как h величина малая (по сравнению с характерным масштабом колебаний), то главным членом в полученном выражении является первый. Следовательно, можно записать

$$\varepsilon \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial r^2} \right)_n h.$$

В этом выражении h является заданной величиной, в то время как $\frac{\partial^2 X}{\partial r^2}$ зависит от конкретных данных. В силу этого величину погрешности удобно оценить только с помощью этого параметра, т. е. h .

Принято оценку погрешности давать в виде порядка этого параметра. В данном случае это выразится так:

$$\varepsilon = O(h).$$

Это означает, что погрешность замены производной имеет первый порядок малости. Аппроксимация производной с помощью второго способа (с помощью центральных разностей) является более точной. Погрешность замены производной в этом случае имеет второй порядок малости, т. е. $\varepsilon = O(h^2)$.

С помощью выражений для первой производной можно произвести замену любого дифференциального выражения. Например, используя замену производных конечными разностями по второму способу, для оператора Лапласа на плоскости получим

$$\begin{aligned} (\Delta X)_{ij} &= \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \right)_{ij} + \left(\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} \right)_{ij} \approx \Delta_{ij} X = \frac{1}{(\delta s)^2} (X_{i+1, j} + X_{i-1, j} + \\ &\quad + X_{i, j+1} + X_{i, j-1} - 4X_{ij}), \end{aligned}$$

где $\delta s = \delta x = \delta y$.

При вычислении производных с помощью конечно-разностных выражений по каким-либо данным возможна еще дополнительная погрешность, обусловленная ошибками этих данных (ошибками измерений или вычислений, с помощью которых эти данные были получены).

Если ошибки в значениях функции X в точках, которые используются при вычислениях производных, известны, то можно оценить погрешность в определении производной. Так, если δX_{n+1} и δX_{n-1} — абсолютные величины ошибок в значениях X в точках $n+1$ и $n-1$ и если эти величины являются независимыми и равными δX_1 , то для ошибки в определении разности получим

$$\delta(X_{n+1} - X_{n-1}) = \sqrt{(\delta X)_{n+1}^2 + (\delta X)_{n-1}^2} = \delta X_1 \sqrt{2}.$$

Тогда для ошибки вычисления производной с помощью центральной разности получим

$$\delta\left(\frac{\partial X}{\partial r}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2 \delta r} \delta X,$$

где δX — погрешность в данных.

Таким образом, производные, полученные с помощью приближенных выражений и вычисленные по конкретным данным, содержат погрешности двух родов: аппроксимации и используемых данных.

При замене дифференциальных выражений, содержащих производные по времени, различают явные и неявные схемы. *Явные* схемы получаются тогда, когда искомые переменные можно выразить через известные явным образом. Рассмотрим это на примере линейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (3.1)$$

где c — постоянная. Отнесем это уравнение к точке js :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{js} + c \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{js} = 0. \quad (3.2)$$

Применяя к производной по y центральную разность, а к производной по времени как одностороннюю, так и центральную разности, получим следующие два варианта конечно-разностного уравнения:

$$u_{j, s+1} - u_{js} + \frac{\alpha}{2} (u_{j+1, s} - u_{j-1, s}) = 0, \quad (3.3)$$

$$u_{j, s+1} - u_{j, s-1} + \alpha (u_{j+1, s} - u_{j-1, s}) = 0, \quad (3.4)$$

где $\alpha = c \delta t / \delta s$ при $\delta s = \delta y$.

Полагая, что значения функции u в данный и предшествующий моменты времени, т. е. при s и $s-1$, известны, с помощью любого из последних соотношений можно выразить значения функции u в будущий момент времени, т. е. величину $u_{j, s+1}$ через известные функции явным образом. Например, на основе соотношения (3.3) получим

$$u_{j, s+1} = u_{js} - \frac{\alpha}{2} (u_{j+1, s} - u_{j-1, s}).$$

По этой причине подобные конечно-разностные аппроксимации и называют явными.

Неявные схемы — схемы или алгоритмы, когда искомая функция не может быть выражена через известные явным образом. Эти схемы получаются в случаях, если производные по времени и остальные члены дифференциального уравнения отнести к разным моментам времени. При этом искомые переменные через известные явным образом не выражаются. Возможны различные варианты аппроксимации.

Один из них имеет место, например, если производную по времени отнести к моменту s , а другие члены уравнения — к моменту $s + 1$, тогда

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{js} + c \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{j, s+1} = 0.$$

Применяя, например, второй способ аппроксимации производных, получаем следующее конечно-разностное уравнение:

$$u_{j, s+1} - u_{j, s-1} + \alpha(u_{j+1, s+1} - u_{j-1, s+1}) = 0.$$

Другой вариант аппроксимации получается в случае, если производную по времени отнести к моменту s , а остальные члены уравнения выразить через значения функций в разные моменты времени, включая момент $s + 1$. Положив, например, что

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{js} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{j, s+1} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{j, s-1} \right],$$

и применив к производным по t и по y второй способ аппроксимации производных, получаем

$$u_{j, s+1} - u_{j, s-1} + \frac{\alpha}{2} (u_{j+1, s+1} - u_{j-1, s+1} + u_{j+1, s-1} - u_{j-1, s-1}) = 0.$$

При интегрировании конечно-разностных уравнений может возникнуть явление, которое называется *вычислительной неустойчивостью*. Это явление заключается в том, что в процессе численного интегрирования малые ошибки в данных неограниченно возрастают. Рост ошибок при многократных повторениях заданной вычислительной процедуры может быть настолько значительным, что ошибки полностью искажают истинное решение.

Для избежания указанного явления необходимо должным образом согласовать шаги по различным координатам. Теоретически такое согласование удастся сделать лишь для линейных дифференциальных уравнений. Для этой цели применяется способ представления рассматриваемых функций в ряды по тригонометрическим или показательным функциям. Например, функция $u(y, t)$ представляется в виде

$$u(y, t) = Ae^{i(ny - \sigma t)},$$

где A — амплитуда, $n = 2\pi/L$ — волновое число, $\sigma = 2\pi/T$ — круговая частота, L и T — длина и период волны, $i = \sqrt{-1}$. Если $y = j\delta y$, $t = s\delta t$, то в точке js имеем

$$u_{js} = Ae^{i(nj\delta y - \sigma s\delta t)} = Ae^{inj\delta y} e^{-i\sigma s\delta t}.$$

В последнем выражении множитель $e^{inj\delta y}$ всегда остается ограниченным, так как числа n , j и δy всегда являются действительными числами. Множитель же $e^{-i\sigma s\delta t}$ может быть ограниченным, но может и неограниченно возрастать с увеличением времени t (или s). Это возможно в том случае, когда круговая частота является комплексным числом. Если, например, $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$, где σ_r и σ_i — действительные и мнимые части, то

$$e^{-i\sigma s\delta t} = e^{-i\sigma_r s\delta t} e^{\sigma_i s\delta t}.$$

Отсюда следует, что если $\sigma_i > 0$, то второй множитель в последнем выражении неограниченно растет с увеличением t (s), что и приводит к вычислительной неустойчивости.

Таким образом, мы приходим к выводу, что достаточным условием отсутствия вычислительной неустойчивости является то, что круговая частота σ должна быть действительным числом.

Для выявления условий этого необходимо получить выражение для σ исходя из данного конечно-разностного уравнения, параметров задачи и вычислительной схемы (шаги по координатам).

Рассмотрим этот вопрос на примере волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Вначале исследуем точное решение. Пусть в начальный момент функция u имеет вид

$$u = Ae^{ny}.$$

Решение будем искать в виде

$$u = Ae^{i(ny - \sigma t)}.$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -A\sigma^2 e^{i(ny - \sigma t)}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -An^2 e^{i(ny - \sigma t)}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получаем

$$Ae^{i(ny - \sigma t)} (\sigma^2 - c^2 n^2) = 0.$$

Так как

$$Ae^{i(ny - \sigma t)} \neq 0,$$

то

$$\sigma^2 - c^2 n^2 = 0,$$

откуда

$$\sigma = \pm cn.$$

При любых значениях c и n σ является действительным числом. Это значит, что физический процесс, описываемый данным уравнением, является устойчивым, т. е. здесь мы имеем дело с физической устойчивостью.

Рассмотрим теперь соответствующее конечно-разностное уравнение (при использовании центральных разностей)

$$u_{j, s+1} - 2u_{js} + u_{j, s-1} = \alpha^2 (u_{j+1, s} - 2u_{js} + u_{j-1, s}),$$

где $\alpha = c\delta t/\delta s$.

Разыскиваем решение в виде

$$u_{js} = Ae^{i(nj\delta y - \sigma s\delta t)}.$$

Можно убедиться, что, например,

$$u_{j+1, s} = Ae^{i[n(j+1)\delta y - \sigma s\delta t]} = Ae^{i(nj\delta y - \sigma s\delta t)} e^{in\delta y} = u_{js} e^{in\delta y}.$$

Подставляя это и аналогичные выражения в исходное уравнение и полагая, что $u_{js} \neq 0$, получаем

$$e^{-i\sigma\delta t} + e^{i\sigma\delta t} - 2 = \alpha^2 (e^{in\delta y} + e^{-in\delta y} - 2).$$

Используя формулу Эйлера $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, из которой следует, что

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z \text{ и } e^{iz} + e^{-iz} = 2 \cos z,$$

находим

$$\cos(\sigma t) - 1 = \alpha^2 [\cos(n\delta y) - 1].$$

Так как

$$1 - \cos z = 2 \sin^2 \frac{z}{2},$$

то

$$\sin^2 \frac{\sigma \delta t}{2} = \alpha^2 \sin^2 \frac{n \delta y}{2}.$$

Отсюда

$$\sin \frac{\sigma \delta t}{2} = \pm \alpha \sin \frac{n \delta y}{2}$$

и значит

$$\frac{\sigma \delta t}{2} = \pm \arcsin \left[\alpha \sin \frac{n \delta y}{2} \right].$$

Из этого следует, что σ будет действительным числом, если

$$\left| \alpha \sin \frac{n \delta y}{2} \right| \leq 1.$$

Но $\left| \sin \frac{n\delta y}{2} \right| \ll 1$. Значит необходимо иметь $\alpha \ll 1$. Или

$$c \frac{\delta t}{\delta y} \ll 1.$$

Таким образом, приходим к выводу, что вычислительная схема будет устойчивой, если выполняется последнее соотношение, представляющее отношение между шагом по времени и шагом по горизонтальной координате при заданном параметре c , имеющим смысл скорости. Если шаг δy задан, а скорость известна, то условием вычислительной устойчивости является

$$\delta t \ll \frac{\delta y}{c}.$$

Упражнения

3.1. Произвести оценку точности конечно-разностной аппроксимации второй производной $\partial^2 X / \partial x^2$ при использовании центральной разности (II способ представления первой производной).

3.2. Используя центральные разности (II способ представления первой производной), записать уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[A(\zeta) \frac{\partial q}{\partial \zeta} \right] = f(\zeta)$$

в конечных разностях, если A и f — заданные функции координаты ζ ; а $\delta \zeta$ — шаг по этой координате.

3.3. Используя центральные разности, записать в конечных разностях уравнение вихря скорости

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial x} + v \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial y} = -l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

считая, что $l = l(x, y)$ и приняв в качестве шага по горизонтальным координатам δs , а по времени δt .

3.4. Высота изобарической поверхности H выражается в виде следующей функции горизонтальных координат и времени:

$$H(x, y, t) = a_0 - a_1 \cos(mx - \sigma t) + a_2 \cos n(y + y_0).$$

Получить рабочую формулу для расчета значений H (м) в узлах пространственно-временной сетки ijs при $\delta s = 300$ км, $\delta t = 1$ ч, $a_0 = 5300$ м, $a_1 = 60$ м, $a_2 = 60$ м, $y_0 = 1200$ км, $L_x = 3600$ км, $L_y = 4800$ км, $T = 5$ сут.

3.5. По данным задачи 3.4 рассчитать значение скорости перемещения крупномасштабной волны вдоль оси x .

3.6. По рабочей формуле, полученной при решении задачи 3.4, рассчитать значения H (м) в точках сетки с безразмерными координатами: $i = -2, -1, 0, 1, 2$; $j = -2, -1, 0, 1, 2$; $s = 0, 1, 12, 24$ (всего $25 \times 4 = 100$ значений). Результаты расчетов нанести на 4 квадратные таблицы (с масштабом в 1 см 200 км). Провести изолинии, кратные 4 дам. Проследить характер изменения поля со временем.

3.7. По данным задачи 3.4 получить выражения для производных $\frac{\partial H}{\partial x}$, $\frac{\partial H}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$, ΔH , $\frac{\partial H}{\partial t}$, $\Delta \frac{\partial H}{\partial t}$. Рассчитать значения этих производных по заданным параметрам задачи 3.4 для точки $x = y = t = 0$.

3.8. По результатам задачи 3.6 рассчитать для точки $i = j = s = 0$ приближенные значения производных $\frac{\partial H}{\partial x}$, $\frac{\partial H}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$, ΔH , $\frac{\partial H}{\partial t}$, $\Delta \frac{\partial H}{\partial t}$ (производные по горизонтальным координатам рассчитывать с использованием центральных разностей, а по времени — односторонних; первые производные по горизонтальным координатам вычислять при шаге, равном $2\delta s$, а вторые — при шаге δs).

Результаты расчетов приближенных значений производных сравнить с их точными значениями, полученными в задаче 3.7.

3.9. Произвести оценку величины абсолютной (δ) и относительной (ϵ) ошибок вычисления первой и второй производных температуры по горизонтали, обусловленных ошибками измерений у земной поверхности при $\delta s = 300$ км (3.9.1) и $\delta s = 600$ км (3.9.2) на высотах: 5 км при $\delta s = 300$ км (3.9.3) и $\delta s = 600$ км (3.9.4), 10 км при $\delta s = 300$ км (3.9.5) и $\delta s = 600$ км (3.9.6), 20 км при $\delta s = 300$ км (3.9.7) и $\delta s = 600$ км (3.9.8).

Погрешности измерения температуры составляют: у земной поверхности $0,4^\circ \text{C}$, на высотах 5, 10 и 20 км соответственно 0,7; 0,9 и $1,0^\circ \text{C}$. Под относительной ошибкой ϵ понимать отношение полученной величины δ к характерным значениям величин горизонтальных производных, составляющим

$$O\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right) = 7 \cdot 10^{-6} \text{C/м} \text{ и } O\left(\frac{\partial^2 T}{\partial s^2}\right) = 2 \cdot 10^{-11} \text{C/м}^2.$$

3.10. Произвести оценку величины абсолютной (δ) и относительной (ϵ) ошибки вычисления первой и второй производных по горизонтали, обусловленной ошибками измерений давления на уровне моря при $\delta s = 300$ км (3.10.1) и $\delta s = 600$ км (3.10.2) и высот изобарических поверхностей 500 мбар при $\delta s = 300$ км (3.10.3) и $\delta s = 600$ км (3.10.4), 300 мбар при $\delta s = 300$ км (3.10.5) и $\delta s = 600$ км (3.10.6), 50 мбар при $\delta s = 300$ км (3.10.7) и $\delta s = 600$ км (3.10.8).

Погрешности измерения составляют: давления у земной поверхности 0,2 мбар, высот изобарических поверхностей 500, 300

и 50 мбар соответственно 6, 15 и 47 м. Характерные значения производных принять равными

$$O\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) = 8 \cdot 10^{-7}, \quad O\left(\frac{\partial^2 p}{\partial s^2}\right) = 1,5 \cdot 10^{-12},$$

$$O\left(\frac{\partial H}{\partial s}\right) = 8 \cdot 10^{-5}, \quad O\left(\frac{\partial^2 H}{\partial s^2}\right) = 1,5 \cdot 10^{-10}$$

(система единиц МТС).

3.11. Дать пример явной (3.11.1) и неявной (3.11.2) схем для уравнения

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + X = a,$$

где a — постоянная (при шаге по времени, равном δt).

3.12. Дать пример явной (3.12.1) и неявной (3.12.2) схем для уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} - lv = a, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + lu = b,$$

где a, b, l — постоянные.

3.13. Дать пример явной (3.13.1) и неявной (3.13.2) схем для уравнения

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0,$$

если \bar{u} постоянная. Вывести условие устойчивости (или неустойчивости) решения конечно-разностных уравнений в связи с соотношением шагов по времени и горизонтальной координате для случаев односторонних и центрированных разностей по времени.

Указание. Функцию Ω представить в виде

$$\Omega_{js} = A e^{i k (m_j \delta s - \sigma_s \delta t)},$$

где A — амплитуда волны.

3.14. Получить точное решение уравнения Пуассона, записанного в конечно-разностной форме

$$X_{i-1, j} + X_{i+1, j} + X_{i, j-1} + X_{i, j+1} - 4X_{ij} = F_{ij}$$

для точки ij по известным значениям F в этой точке и в 8 ближайших окружающих точках, если значения X за пределами этих точек равны нулю.

3.15. Получить точное решение уравнения предыдущей задачи для точки ij по известным значениям F в этой точке и в 24 ближайших окружающих точках, если значения X за пределами этих точек равны нулю.

Ответы и решения

3.1.

$$\varepsilon = O(h^2).$$

Решение. Запишем приближенное значение $\partial^2 X / \partial x^2$, используя метод центральных разностей в точке i :

$$\left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)_i = (\delta_{xx} X)_i = \frac{1}{(\delta s)^2} (X_{i+1} - 2X_i + X_{i-1}),$$

где $\delta s = h$ — шаг сетки, X_{i+1} и X_{i-1} — значения функции X в точках $i+1$ и $i-1$.

Точность аппроксимации второй производной ε можно вычислить как разность между приближенным и точным значениями $\partial^2 X / \partial x^2$:

$$\varepsilon = (\delta_{xx} X)_i - \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.$$

Теперь воспользуемся формулой Тейлора в случае разложения функции $X(x)$ в окрестности точки

$$X(x+h) = X(x) + \frac{\partial X}{\partial x} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} h^2 + \dots$$

Для функции X в точках $i+1$ и $i-1$ будем иметь

$$X_{i+1} = X_i + \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_i h + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)_i h^2 + \dots$$

$$X_{i-1} = X_i - \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_i h + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)_i h^2 - \dots$$

Тогда выражение для ε можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{h^2} \left[2X_i + \frac{2}{2!} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)_i h^2 + \frac{2}{4!} \left(\frac{\partial^4 X}{\partial x^4}\right)_i h^4 + \dots - 2X_i \right] - \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right)_i = \frac{2}{4!} \left(\frac{\partial^4 X}{\partial x^4}\right)_i h^2 + \dots = O(h^2). \end{aligned}$$

3.2.

$$a_k q_{k+1} + b_k q_k + c_k q_{k-1} = f_k,$$

где

$$a_k = \frac{A_{k+1/2}}{(\delta \zeta)^2}, \quad b_k = -\frac{A_{k+1/2} + A_{k-1/2}}{(\delta \zeta)^2},$$

$$c_k = \frac{A_{k-1/2}}{(\delta \zeta)^2}.$$

Решение. Введем уровни $k = \frac{1}{2} + \zeta_k/\delta\zeta$ с тем, чтобы записать для них производные $\partial q/\partial\zeta$, а окончательную аппроксимацию получим для целочисленных номеров уровней $\zeta_k = k\delta\zeta$. Теперь запишем

$$\left[\frac{\partial}{\partial\zeta} A(\zeta) \frac{\partial q}{\partial\zeta} \right]_k = f_k.$$

Используя центральные разности для аппроксимации производной, получим

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial\zeta} A(\zeta) \frac{\partial q}{\partial\zeta} \right]_k &= \frac{1}{\delta\zeta} \left\{ \left[A(\zeta) \frac{\partial q}{\partial\zeta} \right]_{k+1/2} - \left[A(\zeta) \frac{\partial q}{\partial\zeta} \right]_{k-1/2} \right\} = \\ &= \frac{1}{\delta\zeta} \left[A_{k+1/2} \frac{1}{\delta\zeta} (q_{k+1} - q_k) - A_{k-1/2} \frac{1}{\delta\zeta} (q_k - q_{k-1}) \right] = \\ &= \frac{A_{k+1/2}}{\delta\zeta^2} q_{k+1} - \frac{A_{k+1/2} - A_{k-1/2}}{\delta\zeta^2} q_k + \frac{A_{k-1/2}}{\delta\zeta^2} q_{k-1}. \end{aligned}$$

Приняв обозначения для a_k, b_k, c_k , получим ответ.

3.3.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\delta t} (\Omega_{i,j,s+1} - \Omega_{i,j,s-1}) + \frac{u_{ijs}}{2\delta s} [(\Omega_{i+1,j,s+l_{i+1,j}}) - \\ &- (\Omega_{i-1,j,s+l_{i-1,j}})] + \frac{v_{ijs}}{2\delta s} [(\Omega_{i,j+1,s+l_{i,j+1}}) - (\Omega_{i,j-1,s+l_{i,j-1}})] = \\ &= -\frac{l_{ij}}{2\delta s} (u_{i+1,j,s} - u_{i-1,j,s} + v_{i,j+1,s} - v_{i,j-1,s}). \end{aligned}$$

3.4.

$H(ijs) = \{5300 - 60 \cos [0,1667\pi (i - 0,1s)] + 60 \cos [0,125\pi (j + 4)]\}$ м
или

$$H_{ijs} = \{5300 - 60 \cos [30^\circ (i - 0,1s)] + 60 \cos [22,5^\circ (j + 4)]\} \text{ м.}$$

Решение. По определению имеем

$$m = \frac{2\pi}{L_x}, \quad n = \frac{2\pi}{L_y}, \quad \sigma = \frac{2\pi}{T}.$$

Подставим эти соотношения в исходное уравнение и сделаем переход от x и y к дискретным координатам i, j и дискретному времени $s = \frac{t}{\delta t}$. Тогда получим

$$H_{ijs} = a_0 + a_1 \cos \left(\frac{2\pi}{L_x} i \delta s - \frac{2\pi}{T} s \delta t \right) + a_2 \cos \frac{2\pi}{L_y} \delta s (j + j_0).$$

Теперь подставим значения $a_0, a_1, a_2, L_x, L_y, T, j_0$ в это выражение. Получим

$$\begin{aligned} H_{ijs} &= 5300 - 60 \cos 2\pi \left(\frac{300}{3600} i - \frac{1}{5 \cdot 24} s \right) + 60 \cos 2\pi \left(\frac{300}{4800} j + 1200 \right) = \\ &= \{5300 - 60 \cos [0,1667\pi (i - 0,1s)] + 60 \cos [0,125\pi (j + 4)]\} \text{ м.} \end{aligned}$$

3.5. 8,3 м/с.

Решение.

$$c_x = \frac{\sigma}{m} = \frac{2\pi}{T} : \frac{2\pi}{L_x} = \frac{L_x}{T} = \frac{3,6 \cdot 10^6}{5 \cdot 0,864 \cdot 10^5} = 8,33 \text{ м/с.}$$

3.6. Результаты расчетов H_{ijs} в точках ijs см. на рис. 3.1.

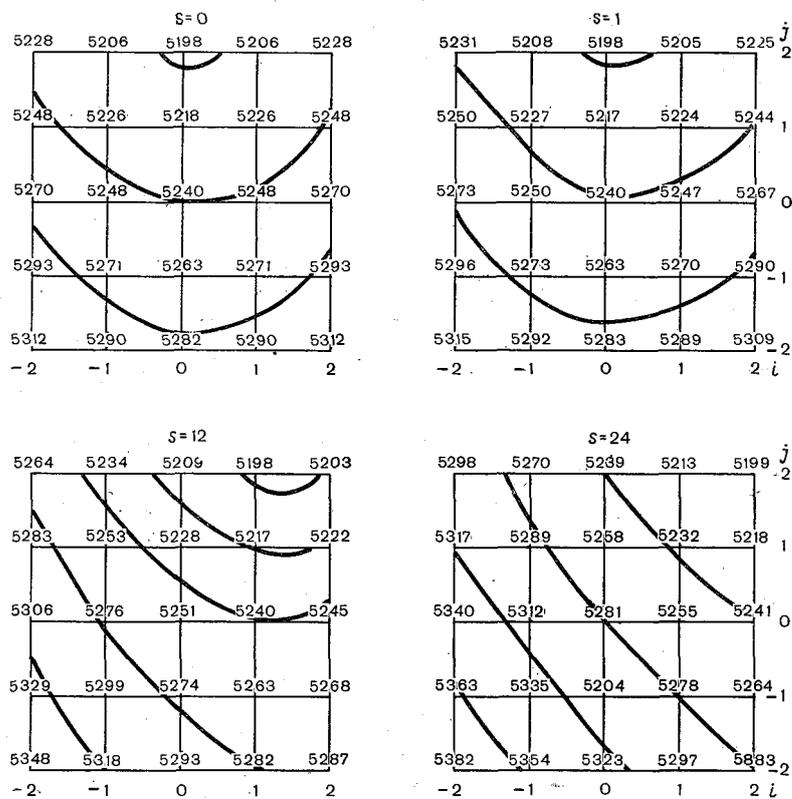


Рис. 3.1. Значения высоты (м) изобарической поверхности 500 мбар в узлах сетки.

3.7.

$$\frac{\partial H}{\partial x} = a_1 m \sin(mx - \sigma t), \quad \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{000} = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -a_2 n \sin n(y + y_0), \quad \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{000} = -0,785 \cdot 10^{-4},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = a_1 m^2 \cos(mx - \sigma t), \quad \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right)_{000} = 1,82 \cdot 10^{-10},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = -a_2 n^2 \cos n(y + y_0), \quad \left(\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)_{000} = 0,$$

$$\Delta H = a_1 m^2 \cos(mx - \sigma t) - a_2 n^2 \cos n(y + y_0),$$

$$(\Delta H)_{000} = 1,82 \cdot 10^{-10} \text{ м}^{-2},$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -a_1 \sigma \sin(mx - \sigma t), \quad \left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{000} = 0,$$

$$\Delta \frac{\partial H}{\partial t} = a_1 m^2 \sigma \sin(mx - \sigma t), \quad \left(\Delta \frac{\partial H}{\partial t}\right)_{000} = 0.$$

3.8.

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -0,75 \cdot 10^{-4},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 1,78 \cdot 10^{-10} \text{ м}^{-1}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 0,111 \cdot 10^{-10} \text{ м}^{-1},$$

$$\Delta H = 1,89 \cdot 10^{-10} \text{ м}^{-1}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \Delta \frac{\partial H}{\partial t} = 0.$$

3.9.

	$\delta \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right) \text{ } ^\circ\text{C}/\text{м}$	$\varepsilon \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)$	$\delta \left(\frac{\partial^2 T}{\partial s^2}\right) \text{ } ^\circ\text{C}/\text{м}^2$	$\varepsilon \left(\frac{\partial^2 T}{\partial s^2}\right)$
3.9.1	$0,187 \cdot 10^{-5}$	0,269	$0,889 \cdot 10^{-11}$	0,444
3.9.2	$0,943 \cdot 10^{-6}$	0,135	$0,222 \cdot 10^{-11}$	0,111
3.9.3	$0,330 \cdot 10^{-5}$	0,471	$0,156 \cdot 10^{-11}$	0,778
3.9.4	$0,165 \cdot 10^{-5}$	0,236	$0,339 \cdot 10^{-11}$	0,194
3.9.5	$0,424 \cdot 10^{-5}$	0,606	$0,200 \cdot 10^{-11}$	0,100
3.9.6	$0,212 \cdot 10^{-5}$	0,303	$0,500 \cdot 10^{-11}$	0,250
3.9.7	$0,471 \cdot 10^{-5}$	0,673	$0,222 \cdot 10^{-10}$	1,111
3.9.8	$0,236 \cdot 10^{-5}$	0,337	$0,556 \cdot 10^{-11}$	0,278

Примечание. Абсолютная погрешность разности двух величин T_1 и T_2 $\delta(T_1 - T_2)$ вычисляется по соотношению

$$\delta(T_1 - T_2) = \sqrt{\delta T_1^2 + \delta T_2^2},$$

где δT_1 и δT_2 — погрешности T_1 и T_2 .

3.10

	$\delta \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) \text{ т}/\text{м}^2 \cdot \text{с}^2$	ε	$\delta \left(\frac{\partial^2 p}{\partial s^2}\right) \text{ т}/\text{м}^3 \cdot \text{с}^2$	ε
	$\delta \left(\frac{\partial H}{\partial s}\right) \text{ м}^{-1}$		$\delta \left(\frac{\partial^2 H}{\partial s^2}\right) \text{ м}^{-1}$	
3.10.1	$0,943 \cdot 10^{-7}$	0,100	$0,444 \cdot 10^{-12}$	0,296
3.10.2	$0,471 \cdot 10^{-7}$	0,059	$0,111 \cdot 10^{-12}$	0,074
3.10.3	$0,283 \cdot 10^{-4}$	0,354	$0,133 \cdot 10^{-9}$	0,889
3.10.4	$0,141 \cdot 10^{-4}$	0,177	$0,333 \cdot 10^{-10}$	0,222
3.10.5	$0,707 \cdot 10^{-4}$	0,884	$0,333 \cdot 10^{-9}$	0,222
3.10.6	$0,354 \cdot 10^{-4}$	0,442	$0,883 \cdot 10^{-10}$	0,557
3.10.7	$0,222 \cdot 10^{-3}$	0,277	$0,104 \cdot 10^{-8}$	0,696
3.10.8	$0,111 \cdot 10^{-3}$	0,138	$0,261 \cdot 10^{-9}$	0,174

3.11. Явная схема

$$X_{i, s+1} - [2 - (\delta t)^2] X_{i, s} + X_{i, s-1} = a (\delta t)^2.$$

Неявная схема

$$[1 + (\delta t)^2] X_{i, s+1} - 2X_{is} + X_{i, s-1} = a (\delta t)^2.$$

Решение. В явной схеме полагаем, что $\left(\frac{d^2 X}{dt^2}\right)_{is} = \frac{1}{(\delta t)^2} (X_{i, s+1} - 2X_{is} + X_{i, s-1})$, а второй член левой части уравнения относим к моменту s , т. е. берем X_{is} . Объединяя выписанные выражения и умножая на $(\delta t)^2$, получаем ответ.

В неявной схеме вторая производная заменяется конечной разностью, как и в явной схеме, а второй член в левой части уравнения относится к моменту времени $s+1$, т. е. берется $X_{i, s+1}$.

3.12. Явная схема

$$u_{i, s+1} = u_{i, s-1} + 2 \delta t v_{is} + 2 \delta t a,$$

$$v_{i, s+1} = v_{i, s-1} - 2 \delta t u_{is} + 2 \delta t b.$$

Неявная схема

$$u_{i, s+1} - 2l \delta t v_{i, s+1} = 2 \delta t a + u_{i, s-1},$$

$$v_{i, s+1} + 2l \delta t u_{i, s+1} = 2 \delta t b + v_{i, s-1}.$$

3.13.1. Явная схема. Односторонние разности;

$$\Omega_{j, s+1} = \Omega_{js} - \frac{\alpha}{2} (\Omega_{j+1, s} - \Omega_{j-1, s}),$$

где $\alpha = \bar{u} \delta t / \delta s$. Вычислительная схема неустойчива.

Явная схема. Центральные разности;

$$\Omega_{j, s+1} = \Omega_{j, s-1} + \alpha (\Omega_{j+1, s} - \Omega_{j-1, s}).$$

Условие устойчивости

$$\bar{u} \frac{\delta t}{\delta s} \leq 1.$$

3.13.2. Неявная схема. Односторонние разности;

$$\Omega_{j, s+1} - \Omega_{j, s} + \frac{\bar{u} \delta t}{4 \delta s} (\Omega_{j+1, s+1} - \Omega_{j-1, s+1} + \Omega_{j+1, s} - \Omega_{j-1, s}) = 0.$$

Вычислительная схема устойчива.

Неявная схема. Центральные разности;

$$\Omega_{j, s+1} - \Omega_{j, s-1} + \frac{\bar{u} \delta t}{2 \delta s} (\Omega_{j+1, s+1} - \Omega_{j-1, s+1} + \Omega_{j+1, s-1} - \Omega_{j-1, s-1}).$$

Вычислительная схема устойчива.

Решения:

3.13.1. Явная схема. Односторонние разности. Полагая, что

$$\Omega_{j, s} = A e^{i(mj\delta s - \sigma s \delta t)}$$

и подставляя значения $\Omega_{j, s+1}$, $\Omega_{j+1, s}$ и $\Omega_{j-1, s}$ в уравнение явной схемы, будем иметь

$$A e^{i(mj\delta s - \sigma s \delta t)} e^{-i\sigma \delta t} = A e^{i(mj\delta s - \sigma s \delta t)} - \frac{\alpha}{2} (A e^{i(mj\delta s - \sigma s \delta t)} e^{im\delta s} - A e^{i(mj\delta s - \sigma s \delta t)} e^{-im\delta s}).$$

Сократив, получаем

$$e^{-i\sigma \delta t} = 1 - \frac{\alpha}{2} (e^{im\delta s} - e^{-im\delta s}).$$

Согласно формуле Эйлера, $e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z$. Тогда

$$e^{-i\sigma \delta t} = 1 - \alpha i \sin (m\delta s).$$

Положим, что $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$. Преобразуем

$$e^{-i\sigma \delta t} = e^{-i(\sigma_r + i\sigma_i) \delta t} = e^{\sigma_i \delta t} [\cos(\sigma_r \delta t) - i(\sigma_r \delta t)].$$

Тогда имеем

$$e^{\sigma_i \delta t} [\cos(\sigma_r \delta t) - i \sin(\sigma_r \delta t)] = 1 - \alpha i \sin(m\delta s).$$

Отделяя действительную и мнимую части, получим

$$e^{\sigma_i \delta t} \cos(\sigma_r \delta t) = 1,$$

$$e^{\sigma_i \delta t} \sin(\sigma_r \delta t) = \alpha \sin(m\delta s).$$

Возводя обе части равенств в квадрат и складывая, получим

$$e^{2\sigma_i \delta t} = 1 + \alpha^2 \sin^2(m\delta s).$$

Так как всегда $1 + \alpha^2 \sin^2(m\delta s) \geq 1$, то

$$2\sigma_i \delta t \geq 0, \quad \sigma_i > 0.$$

Решение имеет вид

$$\Omega_{is} = Ae^{i(mj\delta s - \sigma s \delta t)} = Ae^{i[mj\delta s - (\sigma_r + i\sigma_i) s \delta t]} = Ae^{\sigma_i s \delta t} e^{i(mj\delta s - \sigma_r s \delta t)}.$$

Ясно, что множитель $e^{\sigma_i s \delta t}$ в решении при $\sigma_i > 0$ будет расти с увеличением времени. Это значит, что амплитуда возмущения будет увеличиваться, т. е. схема является неустойчивой.

Явная схема. Центральные разности;

$$\Omega_{j, s+1} = \Omega_{j, s-1} + \alpha (\Omega_{j+1, s} - \Omega_{j-1, s}).$$

Полагая, что

$$\Omega_{js} = Ae^{i(mj\delta s - \sigma s \delta t)},$$

и сократив на $Ae^{i(mj\delta s - \sigma s \delta t)}$, получим

$$e^{i\sigma \delta t} = e^{-i\sigma \delta t} + \alpha (e^{im\delta s} - e^{-im\delta s}).$$

Учитывая формулу Эйлера, будем иметь

$$2i \sin(\sigma \delta t) = \alpha 2i \sin(m\delta s),$$

$$\sigma \delta t = \arcsin[\alpha \sin(m\delta s)]$$

Если $\alpha \sin(m\delta s) > 1$, то σ — мнимое и схема неустойчива. Схема устойчива, если $\alpha \sin(m\delta s) \leq 1$. Так как всегда $\sin(m\delta s) \leq 1$, то $\alpha \leq 1$ и $\bar{u} \frac{\delta t}{\delta s} \leq 1$.

3.14.

$$X_{ij} = -\frac{3}{8} F_{ij} - \frac{1}{8} (F_{i-1, j} + F_{i+1, j} + F_{i, j-1} + F_{i, j+1}) - \\ - \frac{1}{16} (F_{i-1, j-1} + F_{i+1, j-1} + F_{i-1, j+1} + F_{i+1, j+1}).$$

4. МЕТОДЫ КРАТКОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА, ОСНОВАННЫЕ НА ИСПОЛЬЗОВАНИИ КВАЗИГЕОСТРОФИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Уравнения квазигеострофических прогностических моделей можно получить исходя из системы полных уравнений гидротермодинамики крупномасштабных атмосферных процессов. Для бароклинной атмосферы в изобарической системе координат эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} &= -g \frac{\partial H}{\partial x} + l v + F_x, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \tau \frac{\partial v}{\partial p} &= -g \frac{\partial H}{\partial y} - l u + F_y, \\ T &= -\frac{g}{R} p \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{c^2}{R p} \tau + \frac{1}{c_p \rho} \mathcal{E}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$c^2 = R^2 T (\gamma_a - \gamma) / g$$

— параметр статической устойчивости; F_x и F_y — компоненты силы турбулентной вязкости, отнесенной к единице массы; \mathcal{E} — приток тепла к единице объема.

В качестве условий на верхней и нижней границах атмосферы принимаются:

$$\begin{aligned} \text{при } p \rightarrow 0 \quad \tau &\rightarrow 0, \\ \text{при } p = P \quad \tau &= g \rho \left(\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Последнее условие после исключения из него τ с помощью уравнения притока тепла может быть записано в виде

$$\text{при } p = P \quad \frac{d_r}{dt} \left(p \frac{\partial H}{\partial p} + \alpha H \right) = -\frac{R^2 T}{g c_p \rho} \mathcal{E},$$

где

$$\frac{d_r}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}, \quad \alpha = R (\gamma_a - \gamma) / g.$$

Для баротропной атмосферы полные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -g \frac{\partial H}{\partial x} + l v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -g \frac{\partial H}{\partial y} - l u, \\ \frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} &= -H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Используя метод разложения по малому параметру $\varepsilon = 1/l_0 t_0$ (параметру И. А. Кибеля), можно показать, что между проекциями скорости и высотой изобарической поверхности существуют соотношения

$$u = -\frac{g}{l} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{g}{l^2} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t} + \frac{g}{l} \left(H, \frac{\partial H}{\partial x} \right) \right],$$

$$v = \frac{g}{l} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{g}{l^2} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial t} + \frac{g}{l} \left(H, \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right]. \quad (4.4)$$

Уравнения прогностических квазигеострофических моделей атмосферы получаются на основе систем полных уравнений гидротермодинамики (4.1) или гидродинамики (4.3) при использовании соотношений (4.4). Однако наиболее целесообразный путь преобразования уравнений заключается в следующем. Прежде всего с помощью уравнений движения выводится уравнение вихря скорости, которое после исключения несущественных членов имеет вид

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial x} + v \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial y} = -lD,$$

где

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

— горизонтальная дивергенция скорости.

В баротропном варианте далее из полученного уравнения вихря скорости исключается горизонтальная дивергенция с помощью третьего уравнения системы (4.3). Наконец, в полученном уравнении компоненты скорости заменяются их геострофическими значениями.

В бароклинном варианте горизонтальная дивергенция скорости исключается с помощью уравнения неразрывности. Далее с помощью уравнения притока тепла исключается аналог вертикальной скорости w , а затем с помощью уравнения статики исключается температура. В результате после замены компонент скорости u и v их геострофическими значениями получается одно уравнение для H .

При учете в прогностических моделях неадиабатических факторов необходим расчет величины притока тепла \mathcal{E} , входящей в уравнение притока тепла системы уравнений (4.1). Остановимся здесь на методике расчета части притока тепла, обусловленной переносом лучистой энергии \mathcal{E}_L . Лучистый приток тепла к единице объема выражается через радиационный баланс

$$R = G - U + S,$$

где G , U — нисходящий и восходящий потоки длинноволновой радиации, S — нисходящий поток коротковолновой (солнечной) радиации, по соотношению

$$\mathcal{E}_\lambda = \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Для расчета составляющих радиационного баланса широкое применение получил метод интегральных функций пропускания. С помощью этих функций нисходящий и восходящий потоки длинноволновой радиации в безоблачной атмосфере выражаются так:

$$G(\omega) = - \int_{\omega}^{\omega_\infty} B dP(\omega' - \omega),$$

$$U(\omega) = \delta B_\pi P(\omega) + \int_0^{\omega} B dP(\omega - \omega') - (1 - \delta) \int_0^{\omega_\infty} B dP(\omega' + \omega),$$

где $B = \sigma T^4$; $B_\pi = \sigma T_\pi^4$; T_π — температура подстилающей поверхности; σ — постоянная Стефана — Больцмана; $\omega = \int_0^z \rho dz$,

$\omega_\infty = \int_0^\infty \rho dz$ — массы излучающих и поглощающих веществ в единичном столбце атмосферы от земной поверхности до высоты z и до верхней границы атмосферы соответственно; ω' — переменная интегрирования; δ — интегральное значение излучательной способности подстилающей поверхности;

$$P(\xi) = 0,515e^{-0,8 \sqrt{\xi}} + 0,485e^{-2,0 \sqrt{\xi}}$$

— интегральная функция пропускания по Х. Нийлиск; ξ принимает значения: ω , $\omega - \omega'$, $\omega + \omega'$.

Для расчета нисходящего потока прямой солнечной радиации используется формула

$$S(\omega) = S^0 (1 - \tilde{\Gamma}) \cos \vartheta P_k(\xi),$$

где $S^0 = 1,98$ кал/(см²·мин) — солнечная постоянная, ϑ — угол падения радиации, $\xi = (\omega_\infty - \omega)/\cos \vartheta$,

$$P_k(\xi) = 1 - 0,090\xi^{0,303}$$

— функция пропускания по В. Меллеру и В. Кастрову, $\tilde{\Gamma}$ — альbedo системы Земля — атмосфера.

Расчет величины $\cos \vartheta$ в точке прогностической сетки производится по соотношению

$$\cos \vartheta = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega.$$

Здесь и далее φ и λ — широта и долгота точки, δ — склонение Солнца, $\omega = \lambda + \frac{\pi}{12} t - \pi$ — часовой угол, t — время (λ выражено в радианах, t — в часах по Гринвичу).

Величина δ на 22-е число каждого месяца имеет следующее значение:

Январь	$-19^{\circ} 55'$	Июль	$19^{\circ} 55'$
Февраль	$-11^{\circ} 25'$	Август	$11^{\circ} 25'$
Март	0°	Сентябрь	0°
Апрель	$11^{\circ} 25'$	Октябрь	$-11^{\circ} 25'$
Май	$19^{\circ} 55'$	Ноябрь	$-19^{\circ} 55'$
Июнь	$23^{\circ} 27'$	Декабрь	$-23^{\circ} 27'$

Положительные значения δ соответствуют северной широте, отрицательные — южной.

Рассмотрим теперь пример на вычисление величин. Этот пример относится к расчетам, когда различные величины, входящие в формулу, даны в различных системах единиц.

В граничное условие у земной поверхности входит член

$$a = \frac{R^2 T}{P g c_p} \mathcal{E}.$$

Необходимо рассчитать его величину при температуре 0°C и давлении 1000 мбар, если приток тепла \mathcal{E} равен $0,2 \cdot 10^{-6}$ кал/(см³ × мин). Результаты выразить в системах СИ, МТС и СГС. Постоянные, входящие в формулу, имеют значения: $R = 287 \text{ м}^2/(\text{с}^2 \times \text{К})$, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ и $c_p = 0,2405 \text{ кал}/(\text{г} \cdot \text{К})$.

Некоторая сложность задачи заключается в том, что исходные значения заданы в различных системах единиц. Поэтому первым этапом решения задачи является приведение всех величин к системным единицам. Это приведение делается с учетом размерности величин и в соответствии с соотношениями исходных единиц (длины и массы) между собой. Кроме того, учитывается значение механического эквивалента теплоты $J = 4,187 \cdot 10^7$ эрг/кал; в соответствии с этим $1 \text{ кал} = 4,187 \cdot 10^7 \text{ эрг} = 4,187 \text{ Дж}$.

Результат перевода всех исходных значений в заданные системы единиц приведен в табл. 4.1. Арифметические действия умножения и деления целесообразно заменить операциями с таблицами логарифмов (четырёхзначными).

После получения числового значения искомого коэффициента необходимо определить его единицы. В данной задаче для трех заданных систем это будут: м/с, м/с и см/с.

Таблица 4.1

Исходные значения	R		T	p
	287 м ² ·с ⁻² ·К ⁻¹		0° С	1000 мбар
Значения в системах: СГС МТС СИ	2,87·10 ⁶ см ² ·с ⁻² ·К ⁻¹		273 К	10 ⁶ г/см ⁻¹ ·с ⁻²
	287 м ² ·с ⁻² ·К ⁻¹		273 К	10 ³ т·м ⁻¹ ·с ⁻¹
	287 м ² ·с ⁻² ·К ⁻¹		273 К	10 ⁵ кг·м ⁻¹ ·с ⁻²
Исходные значения	g	c _p		ε
	9,8 м·с ⁻²	0,2405 кал·г ⁻¹ ·К ⁻¹		0,2 кал·см ⁻³ ·мин ⁻¹
Значения в системах: СГС МТС СИ	980 см·с ⁻²	1,007·10 ⁷ см ² ·с ⁻² ·К ⁻¹		1,396·10 ⁵ г·см ⁻¹ ·с ⁻³
	9,8 м·с ⁻²	1,007·10 ³ м ² ·с ⁻² ·К ⁻¹		1,396·10 ¹ т·м ⁻¹ ·с ⁻³
	9,8 м·с ⁻²	1,007·10 ³ м ² ·с ⁻² ·К ⁻¹		1,396·10 ⁴ кг·м ⁻¹ ·с ⁻³

Упражнения

4.1. Используя метод последовательных приближений, показать, что во втором приближении проекции скорости ветра u и v связаны с полем высоты изобарических поверхностей $H(x, y)$ следующим образом:

$$u = -\frac{g}{f} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{g}{f^2} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial t} + \frac{g}{f} \left(H, \frac{\partial H}{\partial x} \right) \right],$$

$$v = \frac{g}{f} \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{g}{f^2} \left[\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial t} + \frac{g}{f} \left(H, \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right].$$

4.2. Показать, что, используя формулы связи между ветром и давлением (во втором приближении), горизонтальную дивергенцию скорости ветра $D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ можно выразить в виде

$$D = -\frac{g}{f^2} \left[\Delta \frac{\partial H}{\partial t} + \left(H, \frac{g}{f} \Delta H + l \right) \right].$$

4.3. Показать, что упрощенное уравнение вихря скорости в геострофическом приближении имеет вид

$$\Delta \frac{\partial H}{\partial t} - A_{\Omega} = 0,$$

где

$$A_{\Omega} = - \left(H, \frac{g}{f} \Delta H + l \right).$$

4.4. Показать, что функция

$$H(x, y, t) = a_0 - \frac{l}{g} \bar{u}y + a_1 \cos [m(x - ct) + ny],$$

где a_0, a_1, l, g, \bar{u} — постоянные, $m = 2\pi/L_x, n = 2\pi/L_y, L_x$ и L_y — длины волн вдоль осей x и y , удовлетворяет прогностическому уравнению баротропной модели атмосферы

$$\Delta \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{g}{l} (H, \Delta H) + \beta \frac{\partial H}{\partial x} = 0,$$

если

$$\beta = \frac{\partial l}{\partial y} = 2\omega a \cos \varphi, \quad c = \bar{u} - \frac{\beta}{m^2 + n^2}.$$

4.5. Показать, что исходя из системы полных уравнений баротропной модели атмосферы можно получить следующее прогностическое уравнение квазигеострофической модели атмосферы:

$$\Delta \frac{\partial H}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial H}{\partial t} = A_\Omega,$$

где $\alpha^2 = l^2/g\bar{H}$ — параметр, \bar{H} — среднее для рассматриваемой области значение H .

4.6. Используя метод Фурье [6], показать, что решение уравнения Пуассона

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

при условии ограниченности решения на бесконечности и при условии, что

$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} A_{mn} e^{i(mx+ny)} dm dn,$$

где A_{mn} — коэффициенты, имеет вид

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{r} f(x', y') dx' dy',$$

где x', y' — переменные интегрирования, $r^2 = x^2 + y^2$.

4.7. Показать, что исходя из уравнения геострофической прогностической модели атмосферы

$$\Delta \frac{\partial H}{\partial t} = A_\Omega$$

$\frac{\partial H}{\partial t}$ может быть представлено в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \ln \frac{R}{r} A_\Omega r dr d\varphi + \frac{1}{2\pi R} \oint \frac{\partial H}{\partial t} dS,$$

где r, φ — полярные координаты, S — переменная интегрирования в криволинейном интеграле, R — некоторое фиксированное значение r .

4.8. Показать, что в случае геострофической баротропной модели атмосферы при положительной адвекции вихря скорости ($A_\Omega > 0$) $\frac{\partial H}{\partial t} < 0$, а при отрицательном значении адвекции ($A_\Omega < 0$) $\frac{\partial H}{\partial t} > 0$.

4.9. Используя результаты решения задач 3.6 и 1.23.1, положив, что $i_{4.9} = i_{1.23} - 20$ и $j_{4.9} = j_{1.23} - 10$, где индексы при i и j означают номер точки, рассчитать значения адвекции вихря скорости в геострофическом приближении для точек: а) ($i = j = s = 0$), б) ($i = j = 0, s = 12$), в) ($i = j = 0, s = 24$).

Указание. Использовать формулы центральных разностей и выражение

$$\left(\frac{g}{l} \Delta H + l\right)_{ij} = \frac{g}{l_{ij} (\delta s)^2} (H_{i-1, j} + H_{i+1, j} + H_{i, j-1} + H_{i, j+1} - 4H_{ij}) + l_{ij}.$$

4.10. Показать, что, используя «локальное» решение уравнения Пуассона, приближенное решение уравнения вихря скорости в баротропном случае и в геострофическом приближении можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{k=0} = \sum_{k=0}^{N-1} b_k \bar{A}_{\Omega k},$$

где k — номер кольца на плоскости, b_k — коэффициенты.

4.11. Рассчитать сглаженные значения \bar{H}_{ij} по формуле

$$\bar{H}_{ij} = \alpha_0 H_{ij} + \alpha_1 (H_{i-1, j} + H_{i+1, j} + H_{i, j-1} + H_{i, j+1}) + \alpha_2 (H_{i-1, j-1} + H_{i+1, j-1} + H_{i-1, j+1} + H_{i+1, j+1})$$

по данным задачи 3.6 в точках: а) ($i = j = s = 0$), б) ($i = j = 0, s = 12$), в) ($i = j = 0, s = 24$) при значениях коэффициентов:

4.11.1.

$$\alpha_0 = \frac{5}{9}, \quad \alpha_1 = \frac{2}{9}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{9}.$$

4.11.2.

$$\alpha_0 = \frac{5}{8}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{16}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{32}.$$

Сравнить полученные результаты.

4.12. Записать прогностическое уравнение квазигеострофической модели атмосферы

$$\Delta \frac{\partial H}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial H}{\partial t} = A_\Omega$$

в конечно-разностной форме для сетки точек ij с шагами по горизонтальным координатам (δs) и по времени (δt).

Указание. Использовать центральные разности. Принять, что

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{ij} \delta t = q_{ij}.$$

4.13. Рассчитать значение максимального шага по времени при численном интегрировании прогностического уравнения квазигеострофической баротропной модели атмосферы (задача 4.12) при $v_{\max} = 50$ м/с, $\delta s = 300$ км (4.13.1) и $\delta s = 150$ км (4.13.2).

4.14. Показать, что граничное условие на нижней границе атмосферы с учетом орографии и (или) трения

$$\tau = \frac{gp}{RT} \left(\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} - w_0 \right),$$

где w_0 — вертикальная скорость на этой границе, может быть записано в виде

$$\frac{d_r}{dt} \left(p \frac{\partial H}{\partial p} + \alpha H \right) = - \frac{R^2 T}{P g c_p} \mathcal{E} + \alpha w_0,$$

где $\alpha = R(\gamma_a - \gamma)/g = 0,1$ — параметр,

$$\frac{d_r}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}.$$

Указание. Использовать уравнение притока тепла.

4.15. Исходя из системы полных уравнений гидротермодинамики для бароклинной атмосферы при условии адиабатичности получить прогностическое уравнение квазигеострофической бароклинной модели атмосферы

$$\Delta \frac{\partial H}{\partial t} + l^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\zeta^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial H}{\partial t} = A_\Omega - l^2 \frac{R}{g} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\zeta}{c^2} A_T,$$

где

$$A_T = \frac{g}{l} (T, H) = \frac{g^2}{Rl} \zeta \left(H, \frac{\partial H}{\partial \zeta} \right).$$

4.16. Получить прогностическое уравнение квазигеострофической модели (см. задачу 4.15), используя уравнения неразрывности, притока тепла, статики и уравнение вихря скорости, взятого в виде

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + u \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial x} + v \frac{\partial (\Omega + l)}{\partial y} = -l \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

4.17. Исходя из системы уравнений задачи 4.15 получить диагностическое уравнение для аналога вертикальной скорости τ квазигеострофической бароклининой модели атмосферы

$$\Delta\tau + l^2 \frac{\zeta^2}{c^2} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \zeta^2} = -Pg \frac{\zeta^2}{c^2} \frac{\partial A_\Omega^2}{\partial \zeta} - \frac{RP_\zeta}{c^2} \Delta A_T.$$

4.18. Полагая, что приближенно

$$\tau_p = -a_p \omega_p,$$

где $a_p = pg/RT$, рассчитать значения коэффициента a_p для $p = 1000, 850, 700, 500, 300, 200, 100$ и 50 мбар в случае стандартной атмосферы ГОСТ 4401—64, если τ выражено в мбар/12 ч, а ω в $\text{см} \cdot \text{с}^{-1}$.

4.19. Показать, что функция

$$H(x, y, \zeta, t) = a_0 - \frac{l}{g} \bar{u} y + a_1 \zeta^r \cos[m(x - ct) + ny],$$

где g, \bar{u}, a_0, a_1 и r — постоянные, $\zeta = p/P$, $m = 2\pi/L_x$, $n = 2\pi/L_y$, удовлетворяет прогностическому уравнению квазигеострофической бароклининой модели атмосферы

$$\Delta \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{m_1^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial H}{\partial t} = - \left[\frac{g}{l} \frac{\partial H}{\partial x} + \beta \frac{\partial H}{\partial x} \right] - m_1^2 \frac{g}{l} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\zeta^2 \left(H, \frac{\partial H}{\partial \zeta} \right) \right],$$

где $\beta = \partial l / \partial y$, $m_1^2 = [R^2 T (\gamma_a - \gamma) / g l^2]$ — постоянные, при условии, что

$$c = \bar{u} - \frac{\beta m_1^2}{m_1^2 (m^2 + n^2) - r(r+1)}.$$

4.20. Исходя из аналитического решения прогностического уравнения квазигеострофической бароклининой модели атмосферы, записанной в форме тройных интегралов, и знака функций влияния G_Ω и G_T (рис. 4.3—4.6 из книги [1]) определить знаки $\partial H / \partial t$ изобарической поверхности 1000 мбар для случаев, когда во всей толще атмосферы:

- | | |
|---------|--------------------------|
| 4.20.1. | $A_\Omega > 0, A_T > 0.$ |
| 4.20.2. | $A_\Omega > 0, A_T < 0.$ |
| 4.20.3. | $A_\Omega < 0, A_T > 0.$ |
| 4.20.4. | $A_\Omega < 0, A_T < 0.$ |

4.21. Исходя из условий задачи 4.20, определить знаки $\partial H/\partial t$ для изобарической поверхности 500 мбар, когда во всей толще атмосферы:

4.21.1. $A_{\Omega} > 0, A_T > 0.$

4.21.2. $A_{\Omega} > 0, A_T < 0.$

4.21.3. $A_{\Omega} < 0, A_T > 0.$

4.21.4. $A_{\Omega} < 0, A_T < 0.$

4.22. По значениям H поверхностей 700, 500 и 300 мбар, приведенным на рис. 4.1, рассчитать значения A_T для слоев 700—500 и 500—300 мбар для центральной точки сетки (при $l = 1,2 \times 10^{-4} \cdot \text{с}^{-1}$).

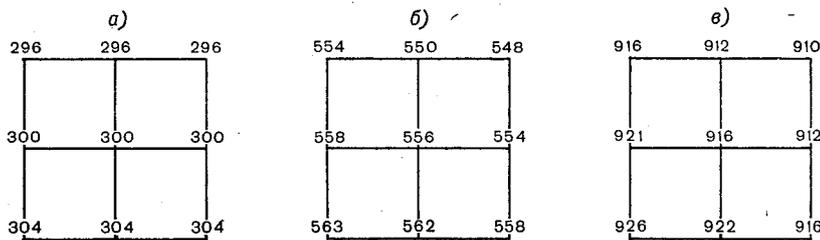


Рис. 4.1. Значения высот (дам) изобарических поверхностей 700 (а), 500 (б) и 300 (в) мбар в узлах сетки.

4.23. Вертикальная скорость на верхней границе планетарного пограничного слоя выражается в виде

$$w_h = a_1 \Delta p_0 = b_1 \Delta H_0,$$

где p_0 — давление на уровне моря, H_0 — высота изобарической поверхности 1000 мбар,

$$a_1 = \frac{1}{l\rho_h} \frac{1}{2\delta(1 + 2b\delta + 2b^2\delta^2)}, \quad \delta = \sqrt{l/2k},$$

$b = 25$ м. Рассчитать значения коэффициентов a_1 и b_1 при $l = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$, $\rho_h = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ т} \cdot \text{м}^{-3}$, $k = 5 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$.

4.24. Рассчитать значения вертикальной скорости w_h и τ на верхней границе планетарного пограничного слоя по данным задачи 3.6 для точек: а) ($i = j = s = 0$), б) ($i = j = 0, s = 12$), в) ($j = i = 0, s = 24$). Результаты выразить в $\text{см} \cdot \text{с}^{-1}$ и мбар/12 ч.

4.25. Рассчитать значение вертикальной скорости w_0 , обусловленной крупномасштабной орографией, при $u = 10$, $v = 5$ м/с, $\delta s = 300$ км в точке А по значениям высоты местности, приведенным на рис. 4.2. Результаты выразить в $\text{см} \cdot \text{с}^{-1}$ и мбар/12 ч.

4.26. Рассчитать значение фазового притока тепла на высоте 1,5 км, если за 3 ч максимальная удельная влажность q уменьшилась с 8 до 5 г/кг. Результат выразить в системе единиц СИ, а также в кал/($\text{см}^3 \cdot \text{мин}$) и отнести к единицам объема и массы.

4.27. Рассчитать величины потоков нисходящей длинноволновой радиации $G(\omega)$ на высотах 0, 2, 4, 6, 8 и 10 км по следующим данным:

z км	0	2	4	6	8	10
p мбар	1017	800	624	482	367	274
t °С	14,7	6,2	-4,2	-16,2	-30,7	-44,8
q г/кг	7,3	5,1	2,5	1,2	0,4	0,1

Указание. Использовать интегральную функцию пропускания X. Нийлиск.

4.28. Рассчитать величины потоков нисходящей солнечной радиации $S(\omega)$ на высотах 0, 2, 4, 6, 8 и 10 км по данным задачи 4.27 и при условии, что $S^0 = 1,98$ кал/(см²·мин), $\cos \phi = 0,5$.

Указание. Использовать интегральную функцию пропускания В. Меллера и В. Г. Кастрова.

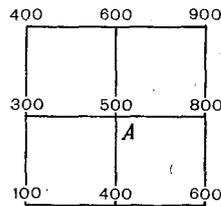


Рис. 4.2. Высота земной поверхности в узлах сетки (м).

4.29. Рассчитать величины притока тепла \mathcal{E}_L к слоям 0—2, 2—4, 4—6 и 8—10 км, обусловленного поглощением солнечной радиации, при условиях задач 4.27 и 4.28. Результат выразить в кал/мин и отнести к: а) единичному столбу слоя атмосферы с основанием см²; б) единице массы (г); в) единице объема (см³).

4.30. Рассчитать величину турбулентного потока тепла по формуле

$$H_s = \rho_h c_p C_h |V| (T_s - T_h)^{3/2}$$

при следующих значениях параметров: $\rho_h = 1,21 \cdot 10^{-3}$ г/см³, $C_h = [0,4/(\ln h/z_0)]^2$, $|V| = 10$ м/с, $T_s = 300^\circ$, $T_h = 297^\circ$, $h = 75$ м, $z_0 = 10$, 1 см.

4.31. Записать прогностическое уравнение квазигеострофической бароклинной модели атмосферы (в случае адиабатичности и $\omega_0 = 0$)

$$\Delta \frac{\partial H}{\partial t} + l^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\zeta^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial H}{\partial t} = \tilde{F}(x, y, \zeta)$$

в конечно-разностной форме для случая равных шагов по координате ζ ($\delta\zeta = \text{const}$).

Указание. Принять, что $\tilde{F}_{ijk} (\delta s)^2 \delta t = F_{ijk}$ — известная функция, l — постоянное.

4.32. Рассчитать значения параметра статической устойчивости

$$c^2 = R^2 T (\gamma_a - \gamma) / g$$

по данным стандартной атмосферы применительно к трехслойной модели атмосферы с равным шагом по координате ζ ($\delta\zeta = 0,333$).

Указание. Принять, что средняя температура слоя равна сумме ее значений на границах слоя.

4.33. Рассчитать значения коэффициентов a_k , b_k и c_k в конечно-разностном уравнении квазигеострофической бароклиной модели атмосферы (задача 4.31) применительно к трехслойной модели атмосферы с равным шагом по координате ζ ($\delta\zeta = 0,333$) при использовании результатов задачи 4.32 и при $l = 1,2 \cdot 10^{-4} \cdot \text{с}^{-1}$.

Указание. Учесть граничные условия на верхней и нижней границах атмосферы и принять, что $q_{1,000} = 1,312q_{0,833} - 0,312q_{0,500}$ ($q = \frac{\partial H}{\partial t} \delta t$).

4.34. Вывести прогностическое уравнение квазисоленоидальной дивергентной баротропной модели атмосферы.

4.35. Составить программу сглаживания значений H_{ij} в $(M - 2) \times (N - 2)$ узлах сетки по данным H в $M \cdot N$ узлах сетки по формулам задачи 4.11. Произвести расчеты, проанализировать результаты.

4.36. Составить программу расчета параметра Кориолиса l в $(M - 2) \cdot (N - 2)$ узлах сетки на плоскости карты стереографической проекции при шаге $\delta s = 300$ км на широте 60° . Ось y параллельна меридиану 45° в. д. Один из узлов сетки совпадает с Северным полюсом и имеет координаты: i_n, j_n . Произвести расчеты и проанализировать результаты.

4.37. Разработать алгоритм и составить программу расчета параметра увеличения m по условиям задачи 4.36.

4.38. Разработать алгоритм и составить программу расчета величины A_Ω для $(M - 4) \cdot (N - 4)$ узлов сетки по данным H_{ij} в $M \cdot N$ узлах и результатам задач (4.36) и (4.37).

4.39. Разработать алгоритм и составить программу решения конечно-разностного уравнения квазигеострофической баротропной модели атмосферы

$$\Delta q_{ij} - \alpha^2 q_{ij} = A_{\Omega_{ij}} (\delta s)^2 \delta t = f_{ij}$$

для сетки из $(M - 4) \cdot (N - 4)$ узлов, используя результаты решения задачи 4.38.

4.40. Используя результаты задач (4.35)–(4.39), составить программу прогноза высоты изобарической поверхности 500 мбар в $M \cdot N$ узлах сетки, описанной в задачах (4.35)–(4.39). Подготовить исходные данные H , произвести расчеты, проанализировать результаты.

Указание. Шаг по времени принять $\delta t = 1$ ч, а на двух крайних рядах и столбцах сетки принять $\partial H / \partial t = 0$.

Ответы и решения

4.4. Решение. Дифференцируя, находим

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -m a_1 \sin [m(x - ct) + ny],$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{l}{g} \bar{u} - n a_1 \sin [m(x - ct) + ny],$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} &= -m^2 a_1 \cos [m(x-ct) + ny], \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} &= -n^2 a_1 \cos [m(x-ct) + ny], \\ \Delta H &= -(m^2 + n^2) a_1 \cos [m(x-ct) + ny], \\ \frac{\partial \Delta H}{\partial x} &= m(m^2 + n^2) a_1 \sin [m(x-ct) + ny], \\ \frac{\partial \Delta H}{\partial y} &= n(m^2 + n^2) a_1 \sin [m(x-ct) + ny], \\ \frac{\partial \Delta H}{\partial t} &= -mc(m^2 + n^2) a_1 \sin [m(x-ct) + ny].\end{aligned}$$

Подставляя результаты в уравнение, получаем

$$\begin{aligned}& -mc(m^2 + n^2) a_1 \sin [m(x-ct) + ny] + \\ & + \frac{g}{l} \{-ma_1 \sin [m(x-ct) + ny]\} \{n(m^2 + n^2) a_1 \sin [m(x-ct) + ny]\} - \\ & - \left\{ -\frac{l}{g} \bar{u} - na_1 \sin [m(x-ct) + ny] \right\} \{m(m^2 + n^2) a_1 \sin [m(x-ct) + ny]\} - \\ & - \beta m a_1 \sin [m(x-ct) + ny] = 0.\end{aligned}$$

Полагая, что в общем случае

$$a_1 \sin [m(x-ct) + ny] \neq 0,$$

получаем

$$\begin{aligned}& -mc + \frac{g}{l} \{-ma_1 \sin [m(x-ct) + ny]\} n - \\ & - \left\{ -\frac{l}{g} \bar{u} - na_1 \sin [m(x-ct) + ny] \right\} m - \frac{\beta m}{m^2 + n^2} = 0\end{aligned}$$

или

$$-mc + \bar{u} m - \frac{\beta m}{m^2 + n^2} = 0.$$

Последнее равенство возможно лишь в случае, когда

$$c = \bar{u} - \frac{\beta}{m^2 + n^2}.$$

4.6. Решение. Решение уравнения Пуассона ищем в виде

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q_{mn} e^{i(mx+ny)} dm dn,$$

где q_{mn} — коэффициенты.

Дифференцируя это выражение, получаем

$$\Delta u = -(m^2 + n^2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q_{mn} e^{i(mx+ny)} dm dn.$$

Подставляя результат в уравнение и учитывая выражение для $f(x, y)$, находим

$$-(m^2 + n^2) \iint_{-\infty}^{\infty} q_{mn} e^{i(mx+ny)} dm dn = - \iint_{-\infty}^{\infty} A_{mn} e^{i(mx+ny)} dm dn.$$

Отсюда следует, что

$$q_{mn} = - \frac{1}{m^2 + n^2} A_{mn}.$$

Учитывая этот результат, получим

$$u = - \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{A_{mn}}{m^2 + n^2} e^{i(mx+ny)} dm dn.$$

Исходя из условия, что

$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} A_{mn} e^{i(mx+ny)} dm dn,$$

получим

$$A_{mn} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} f(\zeta, \xi) e^{i(m\zeta+n\xi)} d\zeta d\xi.$$

Учитывая это, находим

$$u = - \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{m^2 + n^2} f(\zeta, \xi) e^{i[m(x-\zeta)+n(y-\xi)]} dm dn d\zeta d\xi.$$

Вычислим интеграл

$$B = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{m^2 + n^2} e^{i[m(x-\zeta)+n(y-\xi)]} dm dn.$$

Введем новые координаты с помощью соотношений

$$m = \rho \cos \alpha, \quad n = \rho \sin \alpha,$$

$$x - \zeta = r \cos \delta, \quad y - \xi = r \sin \delta,$$

Легко видеть, что

$$r^2 = (x - \zeta)^2 + (y - \xi)^2,$$

$$m(x - \zeta) + n(y - \xi) = \rho r (\cos \alpha \cos \delta + \sin \alpha \sin \delta) = \rho r \cos(\alpha - \delta).$$

Меняя пределы интегрирования, получаем

$$B = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{i\rho r \cos(\alpha - \delta)} \rho d\rho d\alpha.$$

Положим $\alpha - \delta = \vartheta$. Тогда $d\alpha = d\vartheta$ и

$$B = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\rho r \cos \vartheta}}{\rho} d\rho d\vartheta.$$

Но интеграл

$$\int_0^{2\pi} e^{i\rho \cos \vartheta} d\vartheta = 2\pi J_0(\rho r),$$

где J_0 — функция Бесселя.
Значит

$$B = 2\pi \int_0^{\infty} J_0(\rho r) \frac{1}{\rho} d\rho.$$

Продифференцируем функцию B по r :

$$\begin{aligned} \frac{dB}{dr} &= 2\pi \int_0^{\infty} J_0'(\rho r) d\rho = \frac{2\pi}{r} \int_0^{\infty} J_0'(\rho r) d(\rho r) = \\ &= \frac{2\pi}{r} J_0(\rho r) \Big|_0^{\infty} = \frac{2\pi}{r} [J_0(\infty) - J_0(0)] = -\frac{2\pi}{r}. \end{aligned}$$

Так как

$$\frac{dB}{dr} = -\frac{2\pi}{r},$$

то

$$B = -2\pi \ln r = 2\pi \ln \frac{1}{r}.$$

Окончательно получаем

$$u = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{1}{r} f(\zeta, \xi) d\zeta d\xi,$$

или в полярных координатах

$$u = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{r} f(r, \delta) r dr d\delta.$$

4.8. Решение. Исходим из решения прогностического уравнения упомянутой модели в виде

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} \ln \frac{R}{r} A_{\Omega} r dr d\varphi.$$

При положительной адвекции геострофического значения вихря скорости

$$A_{\Omega} = -\frac{l}{g} \left(u_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial x} + v_g \frac{\partial \Omega_g}{\partial y} \right) = -\left(H, \frac{g}{l} \Delta H + l \right)$$

$A_{\Omega} > 0$, при отрицательной адвекции $A_{\Omega} < 0$. При $r \ll R$ функция влияния (функция Грина) $\ln \frac{R}{r} \geq \ln 1 \geq 0$. Учитывая знак перед двойным интегралом, получаем, что

$$\text{при } A_{\Omega} > 0 \quad \frac{\partial H}{\partial t} < 0, \quad \text{при } A_{\Omega} < 0 \quad \frac{\partial H}{\partial t} > 0.$$

4.9.

а	б	в
$A_{\Omega}^{r_{k=0}^{-1} \cdot c^{-1}} \dots 0,3875 \cdot 10^{-15}$	$0,4894 \cdot 10^{-15}$	$0,30 \cdot 10^{-17}$

4.10. Р е ш е н и е. Используем выражение для $\frac{\partial H}{\partial t}$ в виде двойного интеграла

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} G(r) A_{\Omega}(r, \varphi) r dr d\varphi,$$

где $G(r)$ — функция влияния (функция Грина), зависящая только от r .

Проведем в области интегрирования, ограниченной радиусом $r = R$, ряд concentрических окружностей r_k , $k = 0, \dots, N$ ($r_{k=0} = 0$, $r_{k=N} = R$ (рис. 4.3 для случая $N=5$)).

Введем в рассмотрение средние значения A_{Ω} вдоль окружностей радиусом r

$$\bar{A}_{\Omega r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_{\Omega}(r, \varphi) d\varphi.$$

Тогда получаем

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\int_0^R G(r) \bar{A}_{\Omega}(r) r dr.$$

Последний интеграл запишем в виде суммы интегралов:

$$\begin{aligned} & \int_0^R G(r) \bar{A}_{\Omega}(r) r dr = \\ & = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \bar{A}_{\Omega}(r) r dr. \end{aligned}$$

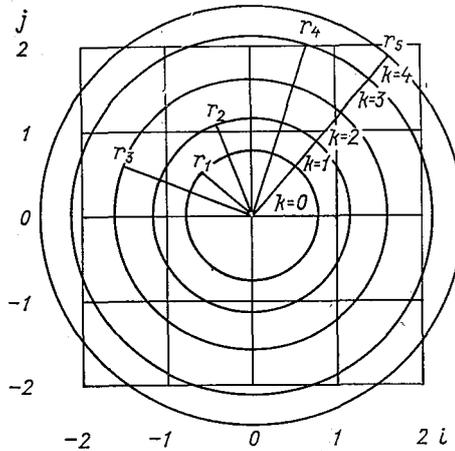


Рис. 4.3. Область интегрирования в виде колец.

Теперь введем средние из величин $\bar{A}_{\Omega}(r)$ для каждого из колец с индексом k , образованного окружностями r_k и r_{k+1} , и обозначим их через $\bar{A}_{\Omega k}$. Тогда

$$\int_0^R G(r) \bar{A}_{\Omega}(r) r dr = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{A}_{\Omega k} \int_{r_k}^{r_{k+1}} G(r) r dr.$$

Так как функция G зависит только от r , то интегралы, входящие в сумму, могут быть вычислены точно. Обозначим их

$$\int_{r_k}^{r_{k+1}} G(r) r dr = b_k.$$

Учитывая все сказанное, для $\frac{\partial H}{\partial t}$ получим

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sum_{k=0}^{N-1} b_k \bar{A}_{\Omega k}.$$

Остается определить способ расчета $\bar{A}_{\Omega k}$ по значениям A_{Ω}^{II} в узлах сетки. Простейшим способом является использование средней арифметической величины. Например, для кольца $k=1$ (находящегося между окружностями r_1 и r_2 (рис. 4.3)) получаем

$$\bar{A}_{\Omega, 1} = \frac{1}{4} (A_{\Omega, i-1, j} + A_{\Omega, i+1, j} + A_{\Omega, i, j-1} + A_{\Omega, i, j+1}).$$

Покажем еще, как могут быть вычислены величины b_k для случаев, когда $G(r) = \ln \frac{R}{r}$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \int_{r_k}^{r_{k+1}} \ln \frac{R}{r} r dr &= \ln R \int_{r_k}^{r_{k+1}} r dr - \int_{r_k}^{r_{k+1}} \ln r r dr = \ln R \frac{r^2}{2} \Big|_{r_k}^{r_{k+1}} - \\ &- \left[r^2 \left(\frac{\ln r}{2} - \frac{1}{4} \right) \right]_{r_k}^{r_{k+1}} = \ln R \frac{r_{k+1}^2 - r_k^2}{2} - r_{k+1}^2 \left(\frac{\ln r_{k+1}}{2} - \frac{1}{4} \right) + \\ &+ r_k^2 \left(\frac{\ln r_k}{2} - \frac{1}{4} \right). \end{aligned}$$

Особый случай представляется при $r_k = 0$, так как в этом случае $\ln r_k \rightarrow -\infty$. В связи с этим рассмотрим интеграл

$$J = \int_0^{r_1} \ln r r dr = \left[r^2 \left(\frac{\ln r}{2} - \frac{1}{4} \right) \right] \Big|_0^{r_1}.$$

Очевидно, здесь надо использовать предельные соотношения. Тогда

$$J = r_1^2 \left(\frac{\ln r_1}{2} - \frac{1}{4} \right) - \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \left(\frac{\ln r}{2} - \frac{1}{4} \right).$$

Вычислим предел

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 \ln r = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(\ln r)'}{\left(\frac{1}{r}\right)'} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{r}}{-\frac{2}{r^3}} = -\frac{1}{2} \lim_{r \rightarrow 0} r^2 = 0.$$

Учитывая это, получаем

$$J = r_1^2 \left(\frac{\ln r_1}{2} - \frac{1}{4} \right).$$

Переход к средним значениям A_{Ω} для колец не является обязательным. Двойной интеграл можно записать в виде суммы произведений. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=0}^M a_k A_{\Omega k},$$

где k — индекс отдельного узла сетки, а M — общее число учитываемых точек.

Отметим, что тот же результат можно получить и другим путем, не прибегая к делению заданной области на части с помощью окружностей. Можно, например, разбить заданную область на $M + 1$ частей произвольным образом, а затем для каждой части подсчитать значения коэффициентов a_k , вычисляя двойной интеграл от функции влияния. При этом принимается, что для каждой выделенной части значение A_{Ω} является постоянным.

4.11. Сглаженные значения равны (м):

	а	б	в
4.11.1.	5240	5251	5281
4.11.2.	5242	5253	5282

4.12.

$$q_{i-1, j} + q_{i+1, j} + q_{i, j-1} + q_{i, j+1} - a q_{ij} = F_{ij},$$

где

$$a = (4 + \alpha^2 \delta s^2), \quad F_{ij} = A_{\Omega ij} (\delta s)^2 \delta t.$$

4.13.1. 70,7 мин.

4.13.2. 35,4 мин.

4.14. Решение. Из уравнения притока тепла

$$\tau = \frac{pg}{RT(\gamma_a - \gamma)} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{RT}{pc_p} \mathcal{E} \right).$$

Подставив это выражение в исходное условие, получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{RT}{pc_p} \mathcal{E} = (\gamma_a - \gamma) \left(\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} - w_0 \right).$$

Исключим температуру из первых трех членов в левой части уравнения, с помощью уравнения статики, введем параметр $\alpha = R(\gamma_a - \gamma)/g$ и умножим результат на R/g . Получим

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} p \frac{\partial H}{\partial p} - u \frac{\partial}{\partial x} p \frac{\partial H}{\partial p} - v \frac{\partial}{\partial y} p \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{R^2 T}{pgc_p} \mathcal{E} = \\ = \alpha \left(\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \alpha w_0 \end{aligned}$$

или после перегруппировки

$$\frac{d_r}{dt} \left(p \frac{\partial H}{\partial p} + \alpha H \right) = -\frac{R^2 T}{pgc_p} \mathcal{E} + \alpha w_0.$$

4.18. Значения коэффициентов a_p мбар/см:

p мбар	T К	a_p	p мбар	T К	a_p
1000	287,4	51,3	200	216,7	13,6
850	278,7	45,0	100	216,7	6,8
700	268,5	38,5	50	216,7	3,4
500	251,9	29,3	10	216,7	0,66
300	228,5	19,4			

Решение. $\tau = \frac{dp}{dt} \approx \frac{dp}{dz} w = -g_0 w = -\frac{g_0 p}{RT} w$.
 Для поверхности $p = \text{const}$ получаем

$$\tau_p = -\frac{g}{R} \frac{p}{T_p} w.$$

В системе МТС (w в м/с, p в сбар, $g = 9,8$, $R = 287$):

$$\tau \text{ сбар/с} = -\frac{9,8}{287} \frac{p \text{ сбар}}{T} w \text{ м/с};$$

$$\tau \text{ мбар/12 ч} = 12 \cdot (60)^2 \cdot 10^1 \text{ сбар/с}, w \text{ см/с} = 10^{-2} w \text{ м/с};$$

$$\tau \text{ мбар/12 ч} = -\frac{9,8}{287} \cdot 12 \cdot (60)^2 \cdot 10^{-2} \frac{p}{T} w = -14,75 \frac{p \text{ мбар}}{T} w \text{ см/с}.$$

Например, при $p = 1000$ мбар, $T = 287,4^\circ \text{C}$ $a = 51,3$.

4.22. $(AT)_{700-500} = 0,7436 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C/с};$

$(AT)_{500-300} = 0,1053 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C/с};$

4.23. $a_1 = 0,9203 \cdot 10^9 \text{ м}^4 \cdot \text{г}^{-1} \cdot \text{с}, b_1 = 0,9921 \cdot 10^7 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}.$

4.24. а) $w = 0,19 \text{ см/с}, \tau = -5,5 \text{ мбар/12 ч};$ б) $w = -0,29 \text{ см/с}, \tau =$

$= 8,4 \text{ мбар/12 ч};$ в) $w = 0,06 \text{ см/с}, \tau = -1,6 \text{ мбар/12 ч}.$

4.25. $w = 1 \text{ см/с}, \tau = 54 \text{ мбар/12 ч}.$

4.26. $0,4205 \text{ Дж/м}^3 \cdot \text{с}; 0,0106 \text{ кал/ (см}^3 \cdot \text{мин)}.$

4.27.

z км	0	2	4	6	8	10
$G(w)$ кал/(см ² ·мин)	0,3836	0,3259	0,2117	0,1170	$0,5118 \cdot 10^{-1}$	$0,1696 \cdot 10^{-1}$

4.28.

z км	0	2	4	6	8	10
$S(w)$ кал/(см ² ·мин)	0,7612	0,7899	0,8168	0,8391	0,8584	0,8736

4.29

	Слой, км				
	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10
кал/(см ² ·мин)	$0,2867 \cdot 10^{-1}$	$0,2695 \cdot 10^{-1}$	$0,2232 \cdot 10^{-1}$	$0,1921 \cdot 10^{-1}$	$0,1521 \cdot 10^{-1}$
кал/(г·мин)	$0,2039 \cdot 10^{-1}$	$0,3795 \cdot 10^{-1}$	$0,7965 \cdot 10^{-1}$	0,1933	0,6023
кал/(см ³ ·мин)	$0,1433 \cdot 10^{-6}$	$0,1347 \cdot 10^{-6}$	$0,1116 \cdot 10^{-6}$	$0,9607 \cdot 10^{-7}$	$0,7605 \cdot 10^{-7}$

4.30.

z_0 см	10	1
H_s кал/(см ² ·мин)	0,241	0,107

4.31.

$$q_{i-1, j, k} + q_{i+1, j, k} + q_{i, j-1, k} + q_{i, j+1, k} +$$

$$+ a_{ijk} q_{i, j, k+1} + b_{ijk} q_{ijk} + c_{ijk} q_{i, j, k-1} = F_{ijk},$$

где

$$a_{ijk} = b_{ij}^2 \left(\frac{\delta s}{\delta \zeta} \right)^2 \left(\frac{\zeta^2}{c^2} \right)_{k+1/2},$$

$$b_{ijk} = -4 - b_{ij}^2 \left(\frac{\delta s}{\delta \zeta} \right)^2 \left[\left(\frac{\zeta^2}{c^2} \right)_{k+1/2} + \left(\frac{\zeta^2}{c^2} \right)_{k-1/2} \right],$$

$$c_{ijk} = b_{ij}^2 \left(\frac{\delta s}{\delta \zeta} \right)^2 \left(\frac{\zeta^2}{c^2} \right)_{k-1/2}.$$

4.32. Значения параметра c^2 , а также температуры и ее вертикального градиента для уровней k следующие:

k	p_k мбар	ζ_k	T_k	\bar{T}_k	γ_k К/м	c^2 м ² /с ²
0,5	0	0	216	216	0	17 792
1,0	167	0,167	216	224	0	
1,5	333	0,333	232	234	0,006	7 474
2,0	500	0,500	252	249	0,006	
2,5	667	0,667	266	265	0,006	8 464
3,0	833	0,833	278	276	0,006	
3,5	1000	1,000	287	287	0,006	9 167

Р е ш е н и е. В случае трехслойной атмосферы $\delta\zeta = 0,3333$. Введем уровни $k = \frac{1}{2} + \zeta_k \delta\zeta$. Определим уровни верхней и нижней границ каждого из трех слоев. Это будут $k = 0,5$, $\zeta = 0$; $k = 1,5$, $\zeta = 0,333$; $k = 2,5$, $\zeta = 0,667$ и $k = 3,5$, $\zeta = 1,000$. Для этих уровней выпишем из таблицы стандартной атмосферы значения температуры T_k и затем вычислим средние значения температуры для середин слоев. Так что $\bar{T}_{k+1/2} = \frac{1}{2} (T_{k+1} + T_k)$. Результат вписываем в расчетную таблицу. Туда же впишем и значение γ для стандартной атмосферы. Наконец делаем вычисление параметра

$$c^2 = \frac{R^2 \bar{T} (\gamma_a - \gamma)}{g},$$

полагая, что $\gamma_a = 0,0098$ °С/м, а $R = 287$ м²/(с²·К).

4.33. Значения коэффициентов a_k , b_k и c_k в системе единиц МТС, а также найденного в задаче параметра c^2 следующие:

k	ζ_k	c^2	a_k	b_k	c_k
0,5	0	17 792			
1,0	0,167		0,1938	-4,1938	0
1,5	0,333	7 474			
2,0	0,500		0,6865	-4,8803	0,1938
2,5	0,667	8 464			
3,0	0,833		0	-4,7472	0,7010
3,5	1,000	9 167	(1,4248)	(-6,1113)	(0,6865)
4,0	1,167				

Р е ш е н и е. Краевое условие на верхней границе атмосферы возьмем в виде

$$\text{при } k = 0,5 \quad q_{k=1} - q_{k=0} = 0,$$

а на нижней — в виде

$$\text{при } k = 3,5 \quad \frac{1}{\delta\zeta} (q_4 - q_3) + \alpha q_{3,5} = f_{3,5} \delta t,$$

где $\alpha = c^2/RT = 0,1$. Для исключения $q_{3,5}$, которое не входит в конечно-разностное уравнение, примем, что

$$q_{3,5} = 1,312q_3 - 0,312q_2$$

(что следует из предположения о линейном изменении величины q с высотой). С помощью двух последних соотношений получаем

$$q_4 - q_3 + \alpha \delta\zeta (1,312q_3 - 0,312q_2) = f_{3,5} \delta\zeta \delta t,$$

откуда

$$q_4 = (1 - \alpha \delta \zeta \cdot 1,312) q_3 + \alpha \delta \zeta \cdot 0,312 q_2 + f_{3,5} \delta \zeta \delta t,$$

или

$$q_4 = 0,9573 q_3 + 0,0102 q_2 + f_{3,5} \delta \zeta \delta t.$$

Величину $f_{3,5} \delta \zeta \delta t$ включим в правую часть конечно-разностного уравнения задачи 4,31, а величину q_4 учтем при расчете коэффициентов левой части уравнения для уровня $k = 3$. Учтем, что для всех уровней

$$l^2 \left(\frac{\delta s}{\delta \zeta} \right)^2 = 1,44 \cdot 10^{-8} \left(\frac{0,3 \cdot 10^6}{0,333} \right)^2 = 1,306 \cdot 10^4.$$

В результате вычислений получаем значения девяти искомым коэффициентов конечно-разностного уравнения, которые вписаны в таблицу с ответами. Заметим, что в скобках проставлены значения коэффициентов a , b и c для уровня $k = 3$, которые получились бы без учета краевого условия на нижней границе.

5. МЕТОДЫ КРАТКОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА, ОСНОВАННЫЕ НА ИНТЕГРИРОВАНИИ ПОЛНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ

В этих методах в качестве исходных используются полные уравнения гидротермодинамики, записанные в изобарической системе координат в форме (4.1).

Последнее из уравнений системы (4.1), т. е. уравнение притока тепла, часто записывается применительно к потенциальной температуре $\Theta = T (P/p)^\lambda$ в виде

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \tau \frac{\partial \Theta}{\partial p} = \left(\frac{P}{p}\right)^\lambda \frac{\mathcal{E}}{c_p \rho}, \quad (5.1)$$

где $\lambda = (c_p - c_v)/c_p$.

В качестве условий на верхней ($p = 0$) и нижней ($p = P$) границах атмосферы принимаются условия (4.2), т. е. условия

$$\begin{aligned} &\text{при } p \rightarrow 0 \quad \tau \rightarrow 0, \\ &\text{при } p = P \quad \tau = g \rho_1 \left(\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где ρ_1 — значение ρ при $p = P$.

На горизонтальных границах области расчета (которые обычно проводят вблизи экватора) принимается, что

$$V_n|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial V_\tau}{\partial n}|_\Gamma = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial n}|_\Gamma = 0, \quad (5.3)$$

где индекс Γ означает горизонтальную границу, V_n и V_τ — нормальная и тангенциальная составляющие ветра.

Для баротропной модели атмосферы система полных уравнений гидродинамики записывается в виде (4.3).

Если в качестве вертикальной координаты используется σ (в простейшем варианте $\sigma = p/p_s$, где p_s — давление на земной поверхности), то система полных уравнений обычно записывается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d_\sigma u}{dt} &= -g \frac{\partial H}{\partial x} + g \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x} + l v + F_x, \\ \frac{d_\sigma v}{dt} &= -g \frac{\partial H}{\partial y} + g \frac{\sigma}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial y} - l u + F_y, \\ T &= -\frac{g}{R} \sigma \frac{\partial H}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{\partial u p_s}{\partial x} + \frac{\partial v p_s}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\sigma} p_s}{\partial \sigma} = 0, \\ \frac{d_\sigma \Theta}{dt} &= \frac{1}{c_p \rho} \frac{\Theta}{T} \mathcal{E}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где

$$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}, \quad \frac{d_\sigma}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma}, \quad (5.5)$$

F_x и F_y — составляющие силы турбулентной вязкости по осям x и y .

В качестве условий на верхней ($\sigma = 0$) и нижней ($\sigma = 1$) границах атмосферы принимается

$$\dot{\sigma} = 0. \quad (5.6)$$

Для записи дифференциальных уравнений в конечно-разностной форме применяются явные, неявные и полунявные схемы. Это обуславливается тем, к какому моменту времени (исходному, центральному или конечному) относительно шага по времени относят линейные (сила Кориолиса, дивергенция скорости и сила барического градиента) и нелинейные члены уравнений. Если, например, все члены уравнения отнесены к исходному моменту времени, то получается *явная* конечно-разностная схема. Если же все члены уравнения, не содержащие производных во времени, отнесены к конечному моменту времени, то получается *неявная* схема.

В том случае, когда линейные члены (все или часть из них) записываются с осреднением по времени, т. е. отнесены с определенными весами к конечному и начальному моментам времени, схема называется *полунявной*.

При замене дифференциальных уравнений на соответствующие им конечно-разностные используются следующие обозначения:

$$i = \frac{x}{\delta s}, \quad j = \frac{y}{\delta s}, \quad k = \frac{p}{\delta p}, \quad s = \frac{t}{\delta t}, \quad (5.7)$$

где δs , δp и δt — шаги по горизонтальной, вертикальной координатам и по времени соответственно. Для первой производной наиболее широкое распространение получили следующие представления:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial r_n} \right)_n &= \frac{1}{\delta r_n} (X_{n+1} - X_n), \quad \left(\frac{\partial X}{\partial r_n} \right)_n = \\ &= \frac{1}{2 \delta r_n} (X_{n+1} - X_{n-1}), \quad X_n = \frac{1}{\delta r_n} (X_{n+1/2} - X_{n-1/2}), \end{aligned} \quad (5.8)$$

где X — любая функция; r_n — любая координата, имеющая индекс n ; δr — приращение данной координаты.

При записи дифференциальных уравнений в конечно-разностной форме возникает необходимость в осреднении функций по какой-либо координате или по нескольким из них. В простейшем случае при осреднении по двум точкам на одной координате операция осреднения производится следующим образом:

$$\bar{X}^n = \frac{1}{2} (X_{n+1/2} + X_{n-1/2}).$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}\overline{X^{nn}} &= \overline{X^{nn}} = \frac{1}{4} (X_{n+1} + 2X_n + X_{n-1}), \\ \overline{X_n^n} &= \frac{1}{2\delta r_n} (X_{n+1} - X_{n-1}).\end{aligned}\quad (5.9)$$

Упражнения

5.1. Записать неявную схему для решения уравнений горизонтального движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - lv = -F_u, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + lu = -F_v,$$

где F_u и F_v — известные функции относительно значений u , v , H и τ в момент времени δt (будущие значения F_u и F_v).

Указание. Принять, что в момент $t = 0$ $u = u^0$, $v = v^0$ и в момент $t = \delta t$ $u = u^1$, $v = v^1$ и что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\delta t} (u^1 - u^0),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\delta t} (v^1 - v^0).$$

5.2. Получить выражения для u^1 и v^1 задачи 5.1 в явном виде.

5.3. Записать систему уравнений для баротропной одномерной модели атмосферы

$$\begin{aligned}u_t + uu_x + gH_x &= 0, \\ H_t + uH_x + Hu_x &= 0,\end{aligned}$$

являющейся частным случаем системы полных уравнений баротропной модели (5.4), в конечно-разностной форме, используя выражения (5.8) и (5.9).

5.4. Сделать то же для системы уравнений, записанной в виде

$$\begin{aligned}\bar{u}_t^t + u\bar{u}_x^x + g\bar{H}_x^x &= 0, \\ \bar{H}_t^t + u\bar{H}_x^x + H\bar{u}_x^x &= 0.\end{aligned}$$

5.5. Сделать то же для системы уравнений

$$\begin{aligned}\bar{u}_t^t + \bar{u}^{xx}\bar{u}_x^x + g\bar{H}^x &= 0, \\ \bar{H}_t^t + \bar{u}^{xx}\bar{H}_x^x + \bar{H}^{xx}\bar{u}_x^x &= 0.\end{aligned}$$

5.6. Сделать то же для системы уравнений

$$\begin{aligned}\bar{u}_t^t + \frac{1}{2} (\bar{u}^x\bar{u}^x)_x + g\bar{H}_x^x &= 0, \\ \bar{H}_t^t + (\bar{H}^x\bar{u}^x)_x &= 0.\end{aligned}$$

5.7. Сделать то же для системы уравнений

$$\begin{aligned}\bar{u}_t^t + \frac{1}{2} (\overline{uu})_x^x + g\bar{H}_x^x &= 0, \\ \bar{H}_t^t + (\overline{Hu})_x^x &= 0.\end{aligned}$$

5.8. Сделать то же для системы уравнений

$$\begin{aligned}(\overline{uH})_t^t + (\overline{Huu})_x^x + gH\bar{H}_x^x &= 0, \\ \bar{H}_t^t + (\overline{Hu})_x^x &= 0.\end{aligned}$$

5.9. Применить формулы (5.9) в случае функции двух переменных (например x и y) для аппроксимации выражений: \bar{X}_x^y , \bar{X}_y^x , \bar{X}^{xy} .

5.10. С помощью выражений, полученных в предыдущей задаче, записать в конечно-разностном виде систему уравнений для баротропной атмосферы

$$\begin{aligned}u_t + \bar{u}^{xy}\bar{u}_x^y + \bar{v}^{xy}\bar{u}_y^x + g\bar{H}_x^y - \bar{l}^{xy}\bar{v}^{xy} &= 0, \\ v_t + \bar{u}^{xy}\bar{v}_x^y + \bar{v}^{xy}\bar{v}_y^x + g\bar{H}_y^x + \bar{l}^{xy}\bar{u}^{xy} &= 0, \\ H_t + \bar{u}^{xy}\bar{H}_x^y + \bar{v}^{xy}\bar{H}_y^x + \bar{H}^{xy}(\bar{u}_x^y + \bar{v}_y^x) &= 0,\end{aligned}$$

относя все члены уравнений к центральному моменту времени.

5.11. Сделать то же для следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned}\bar{u}_t^t + (\overline{\bar{u}^{xy}\bar{u}_x^y + \bar{v}^{xy}\bar{u}_y^x + g\bar{H}_x^y - \bar{l}^{xy}\bar{v}^{xy}})^{xy} &= 0, \\ \bar{v}_t^t + (\overline{\bar{u}^{xy}\bar{v}_x^y + \bar{v}^{xy}\bar{v}_y^x + g\bar{H}_y^x + \bar{l}^{xy}\bar{u}^{xy}})^{xy} &= 0, \\ \bar{H}_t^t + (\overline{\bar{u}^{xy}\bar{H}_x^y + \bar{v}^{xy}\bar{H}_y^x + \bar{H}^{xy}(\bar{u}_x^y + \bar{v}_y^x)})^{xy} &= 0.\end{aligned}$$

5.12. Систему уравнений для бароклиной атмосферы записать в конечно-разностной форме, используя формулы (5.8) и (5.9):

$$\begin{aligned}\bar{u}_t^t - lv &= -(\bar{u}\bar{u}_x^x + \bar{v}\bar{u}_y^y + \bar{\tau}\bar{u}_p^p + g\bar{H}_x^x), \\ \bar{v}_t^t + lu &= -(\bar{u}\bar{v}_x^x + \bar{v}\bar{v}_y^y + \bar{\tau}\bar{v}_p^p + g\bar{H}_y^y), \\ \bar{u}_x^x + \bar{v}_y^y + \bar{\tau}_p^p &= 0, \\ \bar{\Theta}_t^t + u\bar{\Theta}_x^x + v\bar{\Theta}_y^y + \bar{\tau}\bar{\Theta}_p^p &= 0, \\ \bar{H}_p^p + \frac{R}{pg} \left(\frac{p}{P}\right)^\lambda \bar{\Theta} &= 0.\end{aligned}$$

5.13. Сделать то же для системы уравнений, записанной в дивергентной форме,

$$\bar{u}_t^t - lv = - [(\overline{uu})_x^x + (\overline{uv})_y^y + (\overline{u\tau})_p^p + g\bar{H}_x^x],$$

$$\bar{v}_t^t + lu = - [(\overline{uv})_x^x + (\overline{vv})_y^y + (\overline{v\tau})_p^p + g\bar{H}_y^y],$$

$$\bar{u}_x^x + \bar{v}_y^y + \bar{\tau}_p^p = 0,$$

$$\Theta_t + (\overline{u\Theta})_x^x + (\overline{v\Theta})_y^y + (\overline{\tau\Theta})_p^p = 0,$$

$$\bar{H}_p^p + \frac{R}{pg} \left(\frac{p}{P} \right)^\lambda \Theta = 0.$$

5.14.1. Сделать то же для системы уравнений

$$u_t - l\bar{v}^t + g\bar{H}_x^t = f_1,$$

$$v_t + l\bar{u}^t + g\bar{H}_y^t = f_2,$$

где f_1 и f_2 — заданные функции.

5.14.2. Получить выражения для u^{s+1} и v^{s+1} в явном виде путем решения конечно-разностных уравнений, полученных в результате решения задачи 5.14.1.

5.15. Сделать то же для системы уравнений

$$u_t - l\bar{v}^t = - [(\overline{uu})_x^x + (\overline{uv})_y^y + (\overline{u\tau})_p^p + g\bar{H}_x^y],$$

$$v_t + l\bar{u}^t = - [(\overline{uv})_x^x + (\overline{vv})_y^y + (\overline{v\tau})_p^p + g\bar{H}_y^x],$$

$$\bar{u}_x^y + \bar{v}_y^x + \bar{\tau}_p^p = 0,$$

$$\Theta_t = - [(\overline{u\Theta})_x^y + (\overline{v\Theta})_y^x + (\overline{\tau\Theta})_p^p],$$

$$\bar{H}_p^p + \frac{R}{pg} \left(\frac{p}{P} \right)^\lambda \Theta = 0.$$

5.16. Записать в разностной форме уравнения движения

$$u_t - l\bar{v}^t = -F_u,$$

$$v_t + l\bar{u}^t = -F_v,$$

где F_u и F_v — остальные члены уравнений движения, и решить их относительно будущих значений u и v .

5.17. Определить p , H , T , Θ на поверхности $\sigma = 1/2$, если $p_s = 1020$ мбар. На изобарической поверхности 700 мбар $H_{700} = 3020$ м и $T_{700} = 272$ К, а на поверхности 500 мбар $H_{500} = 5580$ м и $T_{500} = 252$ К.

Указание. Принять, что температура изменяется линейно (относительно координаты p) между указанными изобарическими поверхностями, т. е., что $\frac{\partial T}{\partial p} = \text{const.}$

Ответы и решения

5.1.

$$\begin{aligned} u^1 - l \delta t v^1 &= u^0 - \delta t F_u, \\ v^1 + l \delta t u^1 &= v^0 - \delta t F_v. \end{aligned}$$

Решение. Положим, что при $t = 0$ $u = u^0$ и $v = v^0$, а при $t = \delta t$ $u = u^1$ и $v = v^1$. Для производных по времени примем, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\delta t} (u^1 - u^0), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\delta t} (v^1 - v^0).$$

В соответствии с условиями неявной схемы силу Кориолиса отнесем к моменту времени δt , т. е. примем что

$$lu = lu^1, \quad lv = lv^1.$$

Учитывая все принятые обозначения, вместо исходной системы дифференциальных уравнений получаем следующие конечно-разностные уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} (u^1 - u^0) - lv^1 &= -F_u, \\ \frac{1}{\delta t} (v^1 - v^0) + lu^1 &= -F_v. \end{aligned}$$

Умножая полученные выражения на δt и перенеся члены, содержащие u^0 и v^0 , вправо, получаем искомое решение.

5.2.

$$\begin{aligned} u^1 &= \frac{1}{1 + (l \delta t)^2} [u^0 + l \delta t v^0 - \delta t (F_u + l \delta t F_v)], \\ v^1 &= \frac{1}{1 + (l \delta t)^2} [v^0 - l \delta t u^0 - \delta t (F_v - l \delta t F_u)]. \end{aligned}$$

Решение. Умножая второе выражение решения задачи (5.1) на $l \delta t$, складывая результат с первым выражением решения задачи и умножая первое выражение решения задачи (5.1) на $l \delta t$ и вычитая результат из второго выражения, получаем

$$\begin{aligned} [1 + (l \delta t)^2] u^1 &= u^0 + l \delta t v^0 - \delta t (F_u + l \delta t F_v), \\ [1 + (l \delta t)^2] v^1 &= v^0 - l \delta t u^0 - \delta t (F_v - l \delta t F_u). \end{aligned}$$

Деля полученные выражения на $[1 + (l \delta t)^2]$, получаем искомый результат.

5.3.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} (u_{i, s+1/2} - u_{i, s-1/2}) + u_{is} \frac{(u_{i+1/2, s} - u_{i-1/2, s})}{\delta x} + \\ + g \frac{(H_{i+1/2, s} - H_{i-1/2, s})}{\delta x} &= 0, \\ \frac{1}{\delta t} (H_{i, s+1/2} - H_{i, s-1/2}) + u_{is} \frac{(H_{i+1/2, s} - H_{i-1/2, s})}{\delta x} + \\ + H_{is} \frac{(u_{i+1/2, s} - u_{i-1/2, s})}{\delta x} &= 0. \end{aligned}$$

$$5.4. \quad \frac{1}{2\delta t} (u_{i,s+1} - u_{i,s-1}) + u_{is} \frac{(u_{i+1,s} - u_{i-1,s})}{2\delta x} + \\ + g \frac{(H_{i+1,s} - H_{i-1,s})}{2\delta x} = 0,$$

$$\frac{1}{2\delta t} (H_{i,s+1} - H_{i,s-1}) + u_{is} \frac{(H_{i+1,s} - H_{i-1,s})}{2\delta x} + \\ + H_{is} \frac{(u_{i+1,s} - u_{i-1,s})}{2\delta x} = 0.$$

5.5.

$$\frac{1}{2\delta t} (u_{i,s+1} - u_{i,s-1}) + \frac{1}{4} (u_{i+1,s} + 2u_{is} + u_{i-1,s}) \frac{(u_{i+1,s} - u_{i-1,s})}{2\delta x} + \\ + g \frac{(H_{i+1,s} - H_{i-1,s})}{2\delta x} = 0,$$

$$\frac{1}{2\delta t} (H_{i,s+1} - H_{i,s-1}) + \frac{1}{4} (u_{i+1,s} + 2u_{is} + u_{i-1,s}) \frac{(H_{i+1,s} - H_{i-1,s})}{2\delta x} + \\ + \frac{1}{4} (H_{i+1,s} + 2H_{is} + H_{i-1,s}) \frac{(u_{i+1,s} - u_{i-1,s})}{2\delta x} = 0.$$

5.6.

$$\frac{1}{2\delta t} (u_{i,s+1} - u_{i,s-1}) + \frac{1}{8\delta x} [(u_{i+1,s} + u_{is})^2 - (u_{is} + u_{i-1,s})^2] + \\ + g \frac{(H_{i+1,s} - H_{i-1,s})}{2\delta x} = 0,$$

$$\frac{1}{2\delta t} (H_{i,s+1} - H_{i,s-1}) + \frac{1}{4\delta x} [(H_{i+1,s} + H_{is})(u_{i+1,s} + u_{is}) - \\ - (H_{is} + H_{i-1,s})(u_{is} + u_{i-1,s})] = 0.$$

5.7.

$$\frac{1}{2\delta t} (u_{i,s+1} - u_{i,s-1}) + \frac{1}{4\delta x} (u_{i+1,s}^2 - u_{i-1,s}^2) + g \frac{(H_{i+1,s} - H_{i-1,s})}{2\delta x} = 0,$$

$$\frac{1}{2\delta t} (H_{i,s+1} - H_{i,s-1}) + \frac{1}{2\delta x} (u_{i+1,s} H_{i+1,s} - u_{i-1,s} H_{i-1,s}) = 0.$$

5.8.

$$\frac{1}{2\delta t} (u_{i,s+1} H_{i,s+1} - u_{i,s-1} H_{i,s-1}) + \frac{1}{2\delta x} (u_{i+1,s}^2 H_{i+1,s} - \\ - u_{i-1,s}^2 H_{i-1,s}) + g H_{is} \frac{(H_{i+1,s} - H_{i-1,s})}{2\delta x} = 0,$$

$$\frac{1}{2\delta t} (H_{i,s+1} - H_{i,s-1}) + \frac{1}{2\delta x} (u_{i+1,s} H_{i+1,s} - u_{i-1,s} H_{i-1,s}) = 0.$$

5.9.

$$\bar{X}_x^y = \frac{1}{2\delta r} \left(X_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - X_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + X_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} - X_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right),$$

$$\bar{X}_y^x = \frac{1}{2\delta r} \left(X_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - X_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + X_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} - X_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right),$$

$$\bar{X}^{xy} = \frac{1}{4} \left(X_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + X_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} + X_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}} + X_{i-\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}} \right).$$

5.10. Выражение для первого из уравнений задачи 5.10

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} (u_{i, j, s+1/2} - u_{i, j, s-1/2}) + \frac{1}{8\delta r} (u_{i+1/2, j+1/2, s} + u_{i+1/2, j-1/2, s} + \\ & + u_{i-1/2, j+1/2, s} + u_{i-1/2, j-1/2, s}) (u_{i+1/2, j+1/2, s} - u_{i-1/2, j+1/2, s} + \\ & + u_{i-1/2, j-1/2, s} - u_{i+1/2, j-1/2, s}) + \frac{1}{8\delta r} (v_{i+1/2, j+1/2, s} + v_{i+1/2, j-1/2, s} + \\ & + v_{i-1/2, j+1/2, s} + v_{i-1/2, j-1/2, s}) (u_{i+1/2, j+1/2, s} - u_{i+1/2, j-1/2, s} + \\ & + u_{i-1/2, j+1/2, s} - u_{i-1/2, j-1/2, s}) + \frac{g}{2\delta r} (H_{i+1/2, j+1/2, s} - \\ & - H_{i-1/2, j+1/2, s} + H_{i+1/2, j-1/2, s} - H_{i-1/2, j-1/2, s}) - \\ & - \frac{1}{16} (l_{i+1/2, j+1/2} + l_{i+1/2, j-1/2} + l_{i-1/2, j+1/2} + l_{i-1/2, j-1/2}) \times \\ & \times (v_{i+1/2, j+1/2, s} + v_{i+1/2, j-1/2, s} + v_{i-1/2, j+1/2, s} + v_{i-1/2, j-1/2, s}). \end{aligned}$$

5.11. Выражения для первых двух членов третьего уравнения задачи 5.11 имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\delta t} (H_{i, j, s+1} - H_{i, j, s-1}) + \frac{1}{32\delta r} \{ [(u_{i+1, j, s} + u_{i+1, j+1, s} + u_{i, j+1, s} + \\ & + u_{i, j, s}) (H_{i+1, j+1, s} - H_{i, j+1, s} + H_{i+1, j, s} - H_{i, j, s}) + \dots] + \\ & + [(u_{i, j+1, s} + u_{i-1, j+1, s} + u_{i-1, j, s} + u_{i, j, s}) (H_{i, j+1, s} - H_{i-1, j+1, s} + \\ & + H_{i, j, s} - H_{i-1, j, s}) + \dots] + [(u_{i, j, s} + u_{i-1, j, s} + u_{i-1, j-1, s} + \\ & + u_{i, j-1, s}) (H_{i, j, s} - H_{i-1, j, s} + H_{i, j-1, s} - H_{i-1, j-1, s}) + \dots] + \\ & + [(u_{i+1, j, s} + u_{i, j, s} + u_{i, j-1, s} + u_{i+1, j-1, s}) (H_{i+1, j, s} - H_{i, j, s} + \\ & + H_{i+1, j-1, s} - H_{i, j-1, s}) + \dots] \} = 0. \end{aligned}$$

Аналогичным образом записываются и остальные члены этого уравнения и два первых уравнения задачи 5.11.

5.12. Первое уравнение

$$\frac{1}{2\delta t} (u_{i, j, s+1} - u_{i, j, s-1}) - l_{ij} v_{ijs} = - \frac{1}{2\delta r} [u_{ijs} (u_{i+1, j, s} - u_{i-1, j, s}) + \dots].$$

5.13. Первое уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\delta t} (u_{i, j, s+1} - u_{i, j, s-1}) - l_{ij} v_{ijs} = - \frac{1}{2\delta r} \{ [(uu)_{i+1, j, s} - \\ & - (uu)_{i-1, j, s}] + [(uv)_{i, j+1, s} - (uv)_{i, j-1, s}] + \dots \}. \end{aligned}$$

5.14.1.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} \left(u_{i, j, s + \frac{1}{2}} - u_{j, l, s - \frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} l_{ij} \left(v_{i, j, s + \frac{1}{2}} + v_{i, j, s - \frac{1}{2}} \right) + \\ & + \frac{g}{\delta r} \left[\left(H_{i + \frac{1}{2}, j, s + \frac{1}{2}} - H_{i - \frac{1}{2}, j, s + \frac{1}{2}} \right) + \left(H_{i + \frac{1}{2}, j, s - \frac{1}{2}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - H_{i - \frac{1}{2}, j, s - \frac{1}{2}} \right) \right] = -f_1; \quad \frac{1}{\delta t} \left(v_{i, j, s + \frac{1}{2}} - v_{i, j, s - \frac{1}{2}} \right) + \\ & + \frac{1}{2} l_{ij} \left(u_{i, j, s + \frac{1}{2}} + u_{i, j, s - \frac{1}{2}} \right) + \frac{g}{\delta r} \left[\left(H_{i, j + \frac{1}{2}, s + \frac{1}{2}} - \right. \right. \\ & \left. \left. - H_{i, j - \frac{1}{2}, s + \frac{1}{2}} \right) + \left(H_{i, j + \frac{1}{2}, s - \frac{1}{2}} - H_{i, j - \frac{1}{2}, s - \frac{1}{2}} \right) \right] = -f_2. \end{aligned}$$

5.15. Первое уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} \left(u_{i, j, s + \frac{1}{2}} - u_{i, j, s - \frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} l_{ij} \left(v_{i, j, s + \frac{1}{2}} + v_{i, j, s - \frac{1}{2}} \right) = \\ & = -\frac{1}{2\delta r} \left\{ \left[(uu)_{i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, s} - (uu)_{i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, s} + (uu)_{i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, s} - \right. \right. \\ & \left. \left. - (uu)_{i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, s} \right] + \dots \right\}. \end{aligned}$$

5.16.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} \left(u_{i, j, s + \frac{1}{2}} - u_{i, j, s - \frac{1}{2}} \right) - \\ & - \frac{1}{2} l_{ij} \left(v_{i, j, s + \frac{1}{2}} + v_{i, j, s - \frac{1}{2}} \right) = -F_{uijs}, \\ & \frac{1}{\delta t} \left(v_{i, j, s + \frac{1}{2}} - v_{i, j, s - \frac{1}{2}} \right) + \\ & + \frac{1}{2} l_{ij} \left(u_{i, j, s + \frac{1}{2}} + u_{i, j, s - \frac{1}{2}} \right) = -F_{vij s}, \\ & u_{i, j, s + \frac{1}{2}} = \left[\left(1 - \frac{l_{ij}^2 (\delta t)^2}{4} \right) u_{i, j, s - \frac{1}{2}} + l_{ij} \delta t v_{i, j, s - \frac{1}{2}} - \right. \\ & \left. - \frac{l_{ij} (\delta t)^2}{2} F_{vij s} - \delta t F_{uijs} \right] : \left(1 + \frac{l_{ij}^2 (\delta t)^2}{4} \right), \\ & v_{i, j, s + \frac{1}{2}} = \left[\left(1 - \frac{l_{ij}^2 (\delta t)^2}{4} \right) v_{i, j, s - \frac{1}{2}} - l_{ij} \delta t u_{i, j, s - \frac{1}{2}} + \right. \\ & \left. + \frac{l_{ij} (\delta t)^2}{2} F_{uijs} - \delta t F_{vij s} \right] : \left(1 + \frac{l_{ij}^2 (\delta t)^2}{4} \right). \end{aligned}$$

5.17. $p = 510$ мбар, $H_{510} = 543,4$ дам, $T = 253$ К, $\theta = 307$ К.

Решение. По определению, $\sigma = p/p_s$. Отсюда при $p_s = 1020$ мбар $p = \sigma p_s = 510$ мбар, т. е. поверхность $\sigma = 1/2$ находится между изобарическими поверхностями 700 и 500 мбар. Вследствие линейности изменения температуры найдем величину

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{T_{700} - T_{500}}{p_{700} - p_{500}} = 0,1 \text{ К/мбар.}$$

Отсюда T на $\sigma = 1/2$ равна 253 К. Используя уравнение статики $\frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{R}{g} \frac{T}{p}$ и интегрируя его от $p = 500$ мбар до $p = 510$ мбар, считая T и p в этом слое равными полусумме их значений на границе слоя: $T_{\text{ср}} = \frac{1}{2} (T_{500} + T_{510})$ и $p_{\text{ср}} = \frac{1}{2} (p_{510} + p_{500})$, находим

$$\frac{H_{510} - H_{500}}{p_{510} - p_{500}} = -\frac{R}{g} \frac{T_{500} + T_{510}}{p_{500} + p_{510}}.$$

Отсюда получаем $H_{510} = 5434$ м. Исходя из соотношения

$$\Theta = T \left(\frac{1000}{p} \right)^{0,288}$$

при $p = 510$, $T = 253$ К находим

$$\lg \Theta = \lg 253 + 0,288 (3 - \lg 510),$$

откуда $\theta = 307$ К.

6. ЗАДАЧА ДЕТАЛИЗИРОВАННОГО ЛОКАЛЬНОГО ПРОГНОЗА ПОГОДЫ МЕТОДАМИ МЕЗОМЕТЕОРОЛОГИИ

Данная задача еще не получила своего решения, даже и приближенного. Она находится в стадии постановки и исследования отдельных частных случаев в «идеализированных» вариантах. Анализ результатов расчетов в этих случаях и их сравнение с эмпирическими данными показали, что постановка задачи о детализированном локальном прогнозе погоды методами мезометеорологии является вполне корректной, а исследования в этой области — перспективными.

Задачи этого раздела имеют целью закрепить понимание именно постановки задачи. Главное внимание здесь уделено выводу уравнений гидротермодинамики мезопроцессов. Эти уравнения существенно отличаются от уравнений гидротермодинамики крупномасштабных процессов. Это в первую очередь касается уравнения движения по вертикали, в котором сохраняется член с вертикальным ускорением — dw/dt . Весьма существенным является и различие в порядке величины вертикальных скоростей. Если для крупномасштабных процессов характерной единицей вертикальных движений является см/с, то для мезопроцессов — уже м/с.

Задачи этого раздела направлены также на понимание граничных условий.

Уравнения гидротермодинамики мезопроцессов получаются на основе исходных уравнений гидротермодинамики с учетом атмосферной турбулентности, записанных в локальной декартовой системе координат в виде

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + lv + k' \Delta u + k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - lu + k' \Delta v + k \frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + k' \Delta w + k \frac{\partial^2 w}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0,$$

$$p = R\rho T,$$

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\gamma_a}{g\rho} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c_p \rho} (\mathcal{E}_\pi + \mathcal{E}_\phi) + k' \Delta T + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{m}{\rho} + k' \Delta q + k \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}.$$

Отметим, что в уравнении неразрывности опущен малый член $\partial \rho / \partial t$, что позволяет с самого начала исключить из рассмотрения акустические волны.

Упрощения приведенных уравнений производятся методом свободной конвекции. Каждый метеорологический элемент данной системы уравнений (кроме ветра) представляется в виде

$$f(x, y, z, t) = \bar{f}(z) + f'(x, y, z, t).$$

Предполагается, что переменные $\bar{f}(z)$ являются известными стандартными функциями одной высоты и что для них справедливы следующие соотношения:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g = 0, \quad \bar{p} = R \rho \bar{T}, \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = -\bar{\gamma}, \quad \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = \bar{\gamma}_q.$$

Далее принимается, что

$$\left| \frac{f'}{\bar{f}} \right| \ll 1.$$

Последнее предположение позволяет линеаризовать ряд нелинейных членов приведенных уравнений. При этом используется приближенное равенство

$$\ln(1+x) \approx x,$$

справедливое при $|x| \ll 1$.

Приведем пример линеаризации члена уравнения движения, учитывающего силу барического градиента. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{RT}{p} \frac{\partial p}{\partial x} = RT \frac{\partial \ln p}{\partial x} = RT \frac{\partial}{\partial x} \left[\ln \left(\frac{\bar{p} + p'}{\bar{p}} \right) \right] = \\ &= RT \frac{\partial}{\partial x} \left[\ln \left(1 + \frac{p'}{\bar{p}} \right) + \ln \bar{p} \right] = \\ &= RT \frac{\partial}{\partial x} \left[\ln \left(1 + \frac{p'}{\bar{p}} \right) \right] \approx RT \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p'}{\bar{p}} \right). \end{aligned}$$

Положим далее, что $T = T_{\text{ср}}$, где $T_{\text{ср}}$ — средняя температура, и введем обозначение

$$\Phi = RT_{\text{ср}} \frac{p'}{\bar{p}}.$$

Тогда получим

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Таким образом, в результате проведенных преобразований сила барического градиента стала выражаться линейным образом.

Упражнения

6.1. Показать, что для мезо процессов можно принять

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \approx \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$
$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \approx \frac{\partial \Phi}{\partial z} - g - \beta g,$$

где $\Phi = RT_{\text{ср}} \frac{p'}{p}$; $T_{\text{ср}}$ — среднее значение температуры для области исследования атмосферы; $\bar{p} = \bar{p}(z)$ и $T = \bar{T}(z)$ — фоновое значение давления и температуры, зависящее только от z ; $\beta = T'/T_{\text{ср}}$ — параметр конвекции (плаучести); $T' = T - \bar{T}(z)$.

6.2. Показать, что для мезо процессов уравнение неразрывности можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \sigma w,$$

где $\sigma = (g - R\bar{\gamma})/RT_{\text{ср}}$, $\bar{\gamma}$ — среднее для исследуемого участка атмосферы значение γ ($\bar{\gamma} = \overline{\partial T/\partial z}$).

6.3. Показать, что для мезо процессов в уравнении притока тепла можно принять

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\gamma_a}{g\rho} \frac{dp}{dt} = \frac{dT'}{dt} + (\gamma_a - \bar{\gamma}) w.$$

6.4. Показать, что в уравнении переноса влаги можно принять

$$\frac{dq}{dt} = \frac{dq'}{dt} - \bar{\gamma}_q w,$$

где $\bar{\gamma}_q$ — средние значения вертикального градиента влажности.

6.5. Произвести оценку порядков величин отдельных членов уравнения движения по вертикальной оси

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + g\beta + k' \Delta w + k \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

в области кучевого облака.

6.6. Сформулировать краевые условия задачи обтекания воздушным потоком со скоростью U , не зависящей от координат, препятствия, высота которого задана в виде $z = \delta(x, y)$, в случае стационарности процесса и наличия горизонтальной поверхности раздела $z = H = \text{const}$.

6.7. Рассчитать значения вертикальной скорости w на верхней границе препятствия (холма), имеющего вид параболоида

$$\delta(x, y) = c - b(x^2 + y^2),$$

где $C = 800$ м — высота параболоида, $b = 5 \cdot 10^{-2}$ км⁻¹, в точках:

6.7.1. $x = -4$, $y = 0$ км.

6.7.2. $x = 0$, $y = 0$ км.

6.7.3. $x = 4$, $y = 0$ км.

6.7.4. $x = 0$, $y = -4$ км.

6.7.5. $x = 0$, $y = 4$ км.

При этом $u = 5$ м/с, $v = 10$ м/с.

6.8. Проанализировать характер влияния одиночного холма на распределение вертикальных движений при заданном потоке.

6.9. Сформулировать краевые условия задачи вынужденной конвекции в пограничном слое при наличии перегретой площадки в форме прямоугольника, при однородном воздушном потоке со скоростью V , не зависящей от координат, в случае стационарности процесса и наличия горизонтальной поверхности раздела.

6.10. Проанализировать характер влияния на распределение вертикальных движений перегретой площади подстилающей поверхности, заданной в форме прямоугольника, при граничных условиях, сформулированных в задаче 6.9.

Ответы

6.7. Вертикальные скорости на верхней границе препятствия в его различных точках составляют:

6.7.1. 2 м/с.

6.7.2. 0 м/с.

6.7.3. -2 м/с.

6.7.4. 4 м/с.

6.7.5. -4 м/с.

7. МЕТОДЫ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ДОЛГОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА ПОГОДЫ

71. Уравнения гидротермодинамики в сферической системе координат. В задачах гидродинамического долгосрочного прогноза погоды, основы которого были заложены Е. Н. Блиновой, широко используется сферическая система координат. Начало этой системы координат помещается в центр Земли, из которого одна из осей направляется вдоль оси Земли, а вторая — так, чтобы она была перпендикулярна первой оси и проходила через гринвичский меридиан. Через центр Земли перпендикулярно оси Земли проведем плоскость — экваториальную плоскость. Пусть N — точка на земной поверхности или в атмосфере. Проведем через нее плоскость так, чтобы она проходила через ось Земли, а из центра Земли через эту точку проведем радиус-вектор.

Тогда (рис. 7.1) сферическими координатами будут r , ϕ , λ : r — радиус — расстояние от начала координат до данной точки, ϕ — полярный угол, т. е. угол между осью Земли и радиусом-вектором, и λ — долгота — угол между плоскостью гринвичского меридиана и плоскостью, проходящей через ось Земли и данную точку.

Для перехода от сферических координат к декартовым и обратно поместим начало декартовой системы координат в центр Земли, ось z направим вдоль оси Земли, а ось x из начала координат к гринвичскому меридиану перпендикулярно оси z . Тогда между сферическими и декартовыми координатами будут справедливы следующие соотношения:

$$x = r \sin \phi \cos \lambda, \quad y = r \sin \phi \sin \lambda, \quad z = r \cos \phi,$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \lambda = \arctg \frac{y}{x}, \quad \phi = \arctg \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}.$$

Отметим еще, что, если в заданной конкретной задаче используется декартова система координат, начало которой помещено не в центре Земли на ее поверхности, а оси x и y направлены произвольно, то для перехода от сферических координат к декартовым и обратно необходимо произвести операции переноса начала координат и поворота осей. Это же относится и к составляющим скорости.

Для практической цели вместо координаты r удобно ввести координату $z = r - a$, где a — радиус Земли (поверхность Земли считается шаром). В этом случае $\partial/\partial z = \partial/\partial r$, и вместо координат r , ϕ , λ будем иметь координаты z , ϕ , λ . В этой системе координат

(которую в дальнейшем и будем называть сферической) составляющими линейной скорости будут

$$v_{\vartheta} = a \frac{d\vartheta}{dt}, \quad v_{\lambda} = a \sin \vartheta \frac{d\lambda}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

Между составляющими скорости в сферической системе координат (с учетом замены координаты r на координату z) и декартовой ($U_x = u$, $U_y = v$ и $U_z = w$, при указанном ранее направлении осей) справедливы следующие соотношения:

$$v_{\vartheta} = u \cos \vartheta \cos \lambda + v \cos \vartheta \sin \lambda - w \sin \vartheta, \\ v_{\lambda} = -u \sin \lambda + v \cos \lambda, \quad v_z = w.$$

Учитывая, что $z \ll r$, можно показать, что

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial r} \approx \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial z}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial r} \approx \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial z}, \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial r' v_r}{\partial r} \approx \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

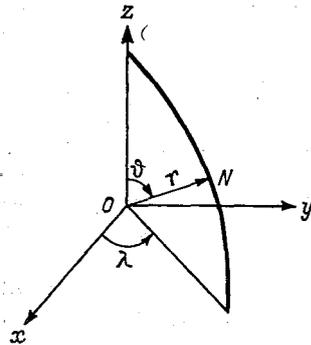


Рис. 7.1. Сферическая и декартова системы координат.

В сферической системе координат упрощенное уравнение вихря скорости после исключения из него горизонтальной дивергенции с помощью уравнения неразрывности и замены плотности ρ на ее стандартное значение $\bar{\rho}(z)$ имеет вид

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{v_{\vartheta}^2}{a} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\Omega + 2\omega \cos \vartheta) + \frac{v_{\lambda}}{a \sin \vartheta} \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} = -\frac{2\omega \cos \vartheta}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho} v_z}{\partial z}, \quad (7.1)$$

где

$$\Omega = \frac{1}{a \sin \vartheta} \left(\frac{\partial \sin \vartheta v_{\lambda}}{\partial \vartheta} - \frac{\partial v_{\vartheta}}{\partial \lambda} \right), \quad (7.2)$$

$\bar{\rho} = \bar{\rho}(z)$ — заданная функция высоты.

Уравнение притока тепла записывается с учетом того, что

$$\frac{dp}{dt} = \tau \approx -g\rho v_z,$$

и имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{v_{\vartheta}}{a} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} + \frac{v_{\lambda}^2}{a \sin \vartheta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} + (\gamma_a - \gamma) v_z = \frac{1}{c_p \bar{\rho}} \mathcal{E}. \quad (7.3)$$

В соленоидальном приближении, когда

$$v_{\vartheta}^{\bar{}} = -\frac{1}{a \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \quad v_{\lambda} = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}, \\ \Omega = \frac{1}{a^2} \Delta \psi, \quad (7.4)$$

где ψ — функция тока, а Δ — оператор Лапласа,

$$\Delta = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}, \quad (7.5)$$

уравнение вихря скорости (7.1) принимает вид

$$\Delta \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{a^2 \sin \vartheta} (\psi, \Delta \psi) + 2\omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \frac{2\omega \cos \vartheta a^2}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho} v_z}{\partial z}, \quad (7.6)$$

где

$$\frac{1}{\sin \vartheta} (A, B) = \frac{1}{\sin \vartheta} \left(\frac{\partial A}{\partial \vartheta} \frac{\partial B}{\partial \lambda} - \frac{\partial A}{\partial \lambda} \frac{\partial B}{\partial \vartheta} \right) \quad (7.7)$$

— оператор Якоби на сфере.

Для записи уравнения притока тепла (7.3) в соленоидальном приближении используется преобразованное уравнение статики

$$T' = T - \bar{T}(z) = \frac{2\omega \cos \vartheta}{g} T_{\text{cp}} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (7.8)$$

где $\bar{T}(z)$ — заданная функция высоты, а T_{cp} — среднее для всей атмосферы значение температуры. С учетом выражения (7.8), а также (7.4) уравнение притока тепла записывается в виде

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} + \frac{1}{a^2 \cos \vartheta} \left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{g(\gamma_a - \gamma)}{2\omega \cos \vartheta T_{\text{cp}}} v_z = \frac{g}{2\omega \cos \vartheta T_{\text{cp}}} \frac{1}{c_p \bar{\rho}} \mathcal{E}. \quad (7.9)$$

Преобразованные уравнения вихря скорости (7.6) и притока тепла (7.9) составляют систему уравнений прогностической бароклинной квазисолеоидальной модели атмосферы.

Для практического использования указанных уравнений целесообразно ввести новую вертикальную координату

$$\xi = \frac{\bar{p}(z)}{P},$$

где $\bar{p}(z)$ — стандартное распределение давления по высоте, а $P = 1000$ мбар.

В этом случае уравнения указанной модели примут вид

$$\Delta \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{a^2 \sin \vartheta} (\psi, \Delta \psi) + 2\omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = - \frac{2\omega \cos \vartheta a^2 g}{P} \frac{\partial \bar{\rho} v_z}{\partial \xi}, \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial t} + \frac{1}{a^2 \sin \vartheta} \left(\psi, \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{R^2 T_{\text{cp}} (\gamma_a - \gamma)}{2\omega \cos \vartheta P \xi^2} \bar{\rho} v_z = \\ = - \frac{P}{2\omega \cos \vartheta T_{\text{cp}} \bar{\rho}^2 c_p} \mathcal{E}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

7.2. Индекс циркуляции атмосферы. Для описания атмосферных процессов часто используются обобщенные показатели или индексы. В методах долгосрочного прогноза погоды особое значение имеет индекс циркуляции α , характеризующий угловую скорость вращения атмосферы вокруг полюса. Индекс циркуляции

связан со значениями средних для кругов широты (зональной) скорости ветра \bar{v}_λ и высотой изобарической поверхности $\bar{H}(\vartheta)$ следующим образом:

$$\alpha = \frac{\bar{v}_\lambda}{a \sin \vartheta} = \frac{g}{2\omega a^2 \sin \vartheta \cos \vartheta} \frac{\partial \bar{H}(\vartheta)}{\partial \vartheta}. \quad (7.12)$$

Способ расчета индекса циркуляции, характеризующего движение атмосферы на полушарии, предложен Е. Н. Блиновой и основан на методе наименьших квадратов. Положим, что

$$\bar{H}(\vartheta) = A + B \sin^2 \vartheta, \quad (7.13)$$

где A и B — коэффициенты. Пусть нам известны значения \bar{H}_k на широтах с номерами $k = 1, 2, \dots, n$. По методу наименьших квадратов коэффициенты A и B находим исходя из условия минимума величины

$$\sum_{k=1}^n [A + B \sin^2 \varphi_k - \bar{H}_k]^2.$$

Составив и решив соответствующую систему нормальных уравнений, получим значения A и B . Для B имеем

$$B = \frac{n \sum_{k=1}^n x_k \bar{H}_k - \sum_{k=1}^n x_k \sum_{k=1}^n \bar{H}_k}{n \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2}, \quad (7.14)$$

где $x_k = \sin^2 \varphi_k$. Дифференцируя выражение (7.13) по ϑ и подставляя результат в соотношение (7.12), получаем

$$\alpha = \frac{g}{\omega a^2} B. \quad (7.15)$$

Задавая конкретные значения широт φ_k , выражение для α теперь можно записать в виде

$$\alpha = \sum_{k=1}^n \beta_k \bar{H}_k, \quad (7.16)$$

где β_k — коэффициенты, рассчитываемые на основе выражений (7.14) и (7.15).

Упражнения

7.1. Исходя из формул для индекса циркуляции α (7.14)—(7.16) рассчитать значения коэффициентов a_k в выражении

$$\frac{\alpha}{\omega} \cdot 1000 = \sum_{k=1}^6 a_k \bar{H}_k,$$

где \bar{H}_k (дам) — среднее значение H для широты φ_k , если $\varphi_{k=1} = 65^\circ$, $\varphi_{k=2} = 60^\circ$, $\varphi_{k=3} = 55^\circ$, $\varphi_{k=4} = 50^\circ$, $\varphi_{k=5} = 45^\circ$ и $\varphi_{k=6} = 40^\circ$.

7.2. Рассчитать значения индекса циркуляции α/ω по формуле задачи 7.1 для поверхностей 700 и 300 мбар по данным, приведенным в табл. 7.1.

Таблица 7.1

Высоты (дам) изобарических поверхностей 700 и 300 мбар
в узлах географической сетки точек
(0 ч 11 января 1977 г.)

λ°	700 мбар						300 мбар					
	φ° с. ш.						φ° с. ш.					
	65	60	55	50	45	40	65	60	55	50	45	40
0	278	274	270	272	280	287	845	852	844	858	875	894
15	275	272	272	284	294	300	853	856	863	882	896	906
30	275	283	286	292	298	301	848	865	876	884	892	898
45	279	284	290	294	299	304	855	857	863	873	885	903
60	289	293	297	295	295	302	874	876	883	884	882	896
75	290	292	296	296	299	304	880	880	890	888	886	891
90	292	295	298	299	301	298	874	883	887	902	912	919
105	283	286	288	287	288	293	860	862	863	860	872	889
120	277	281	282	279	282	287	848	848	849	840	840	864
135	284	278	274	271	276	289	856	848	844	836	853	884
150	290	282	272	270	275	288	866	860	852	845	848	880
165	279	273	265	262	272	286	860	855	844	839	855	884
180	286	278	270	268	269	277	870	864	848	841	852	876
195	289	282	272	272	272	280	884	878	864	874	890	904
210	288	292	294	296	296	297	888	894	890	904	918	929
225	290	293	298	298	304	309	874	900	906	908	916	928
240	281	284	290	296	302	306	844	864	878	904	916	916
255	266	268	274	281	288	296	830	832	842	850	872	898
270	261	264	273	275	276	283	840	831	839	850	854	880
285	277	276	278	270	262	272	872	852	864	868	864	878
300	292	283	280	291	300	306	896	876	882	904	922	937
315	312	310	300	300	312	318	930	928	921	916	910	916
330	304	308	308	308	309	311	910	916	928	930	924	936
345	287	287	288	288	290	294	872	872	878	888	888	896

7.3. Рассчитать значения индекса циркуляции α/ω по формуле задачи 7.1 для основных изобарических поверхностей для января и июля по климатическим данным, приведенным в табл. 7.2.

Проанализировать характер изменения индекса по высоте и временам года.

Таблица 7.2

Средние широтные значения средних месячных высот
изобарических поверхностей (дам)

Ши- рота	Изобарическая поверхность, мбар													
	1000	850	700	500	300	200	100	1000	850	700	500	300	200	100
	Январь							Июль						
85° С	13	129	270	507	841	1090	1516	9	136	291	544	901	1175	1647
80	12	129	270	507	842	1094	1520	8	139	292	548	906	1177	1646
75	11	131	273	510	847	1100	1529	8	140	295	552	913	1182	1647
70	11	132	275	514	852	1107	1540	8	142	297	556	919	1187	1649
65	11	133	277	518	857	1114	1550	8	142	299	559	923	1192	1651
60	11	134	280	523	864	1121	1561	8	143	301	563	928	1196	1653
55	12	137	284	528	873	1131	1573	9	145	304	567	934	1203	1656
50	13	139	288	535	882	1141	1583	10	147	308	571	942	1212	1660
45	14	142	292	543	893	1153	1597	11	149	311	577	951	1222	1665
40	15	145	298	552	906	1167	1608	10	151	314	582	959	1232	1670
35	16	148	303	561	921	1185	1621	11	153	316	586	965	1239	1671
30	16	151	308	570	937	1203	1633	11	152	317	589	969	1244	1672
25	15	152	312	578	949	1218	1644	10	152	317	589	969	1244	1669
20	13	152	314	582	958	1229	1650	10	151	316	588	969	1244	1665
15	12	152	314	584	963	1235	1653	10	151	315	587	968	1242	1661
10	10	150	314	585	965	1238	1656	9	150	314	586	966	1239	1657
5	9	140	313	585	966	1240	1656	10	150	314	585	966	1239	1655

7.4. Получить уравнение вихря скорости в баротропной модели атмосферы в соленоидальном приближении.

7.5. Произвести линеаризацию уравнения вихря скорости в баротропной модели атмосферы в соленоидальном приближении, полученное в задаче 7.4, относительно западного соленоидального потока ($\bar{v}_\lambda = \text{const}$, $\bar{v}_\theta = 0$), положив, что $\psi(\theta, \lambda, t) = \bar{\psi}(\theta) + \psi'(\theta, \lambda, t)$, $\bar{v}_\lambda = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \theta} = \alpha a \sin \theta$.

7.6. Получить уравнение вихря скорости в соленоидальном приближении в форме (7.6).

7.7. На основе уравнения (7.3) с помощью выражений (7.4) и (7.8) получить уравнение притока тепла в соленоидальном приближении в виде уравнения (7.9).

7.8. Получить уравнение вихря скорости в соленоидальном приближении для бароклинической атмосферы в форме (7.10).

7.9. Получить уравнение притока тепла в соленоидальном приближении в виде уравнения (7.11).

7.10. Исходя из уравнения вихря скорости в форме (7.10) и притока тепла в форме (7.11) получить уравнение соленоидальной бароклинической модели, содержащее в качестве неизвестной только функцию тока (в адиабатическом приближении).

7.11. Получить выражение для полиномов Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n [(x^2 - 1)^n]}{dx^n}$$

при $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Построить графики этих полиномов в интервале $-1 \leq x \leq 1$.

7.12. Получить выражение для присоединенных полиномов Лежандра

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$$

при следующих значениях m и n :

- 7.12.1. $m = 0, \quad n = 0, 1, 2.$
 7.12.2. $m = 1, \quad n = 1, 2.$
 7.12.3. $m = 2, \quad n = 2.$
 7.12.4. $m = 3, \quad n = 3.$

7.13. Показать, что функция

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n [D_n^m \cos(m\lambda + \sigma_n^m t) + D_n'^m \sin(m\lambda + \sigma_n^m t)] P_n^m(\cos \vartheta)$$

удовлетворяет линеаризованному уравнению баротропной модели

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \Delta \psi' + 2(\alpha + \omega) \frac{\partial \psi'}{\partial \lambda} = 0$$

при

$$\sigma_n^m = -\alpha m + \frac{2m(\alpha + \omega)}{n(n+1)}.$$

7.14. Рассчитать линейную скорость перемещения волн задачи 7.13 при $\alpha = 0,04\omega$, $n = 4$ и $m = 8$ для широт 50 и 60° .

Указание. Вначале рассчитать угловую скорость

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\sigma_n^m}{m},$$

а затем линейную

$$v_\lambda = a \sin \vartheta \frac{d\lambda}{dt}.$$

Ответы и решения

7.1. $\frac{\alpha}{\omega} \cdot 1000 = -0,7752\bar{H}_{65} - 0,4952\bar{H}_{60} -$
 $-0,1854\bar{H}_{55} + 0,1448\bar{H}_{50} + 0,4853\bar{H}_{45} + 0,8258\bar{H}_{40},$

где индекс у \bar{H} означает широту.

7.2. $\left(\frac{\alpha}{\omega} \right)_{700} = 0,012; \quad \left(\frac{\alpha}{\omega} \right)_{300} = 0,047.$

7.3. Значения индекса циркуляции $\left(\frac{\alpha}{\omega} \cdot 1000\right)$:

	Изобарическая поверхность, мбар						
	1000	850	700	500	300	200	100
Январь	4,86	13,92	23,46	38,39	55,21	60,10	66,22
Июль	3,21	10,23	17,62	26,06	41,65	46,59	22,04

$$7.5. \quad \Delta \frac{\partial \Psi'}{\partial t} + \alpha \frac{\partial \Delta \Psi'}{\partial \lambda} + 2(\alpha + \omega) \frac{\partial \Psi'}{\partial \lambda} = 0.$$

$$7.10. \quad \Gamma \Delta \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{a^2 \sin \vartheta} (\Psi, L) - 2\omega \Gamma \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda},$$

где

$$\Gamma = \frac{R^2 T_{cp} (\gamma_a - \gamma)}{4\omega^2 a^2 g (\cos^2 \vartheta)_{cp}},$$

$$L = -\frac{\partial}{\partial \xi} \xi^2 \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - \Gamma \Delta \Psi.$$

$$7.11. \quad P_0 = 1, \quad P_1 = x, \quad P_2 = \frac{1}{2} (3x^2 - 1),$$

$$P_3 = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x), \quad P_4 = \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3),$$

$$P_5 = \frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

$$P_6 = \frac{1}{48} (693x^6 - 945x^4 + 315x^2 - 15).$$

$$7.12.1. \quad P_0^0 = 1, \quad P_1^0 = x, \quad P_2^0 = \frac{1}{2} (3x^2 - 1).$$

$$7.12.2. \quad P_1^1 = \sqrt{1-x^2}, \quad P_2^1 = 3x\sqrt{1-x^2}.$$

$$7.12.3. \quad P_2^2 = 3(1-x^2).$$

$$7.12.4. \quad P_3^2 = 15(1-x^2)^{3/2}.$$

где

$$a_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N F'_{ik} F'_{jk},$$

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S'_{\phi k} F'_{ik},$$

$S_{\phi k}$ — фактическое значение S_k по данным выборки из N случаев. Система нормальных уравнений (8.3) и (8.4) может быть записана в матричной форме

$$Ax = b, \quad (8.5)$$

где $A (a_{ij})$ — квадратная матрица:

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

а x и b — матрицы-столбцы:

$$x_j = \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{vmatrix} \quad b_i = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{vmatrix}$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений может быть выполнено различным способом. В случае использования матричной формы решение имеет вид

$$x = A^{-1}b, \quad (8.6)$$

где A^{-1} — матрица, обратная матрице A , удовлетворяющая соотношению

$$AA^{-1} = E,$$

где E — единичная матрица:

$$E(\delta_{ij}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Существуют различные способы обращения матриц. Опишем здесь один из них, а именно метод А. П. Ершова.

Исходная матрица A заменяется матрицей $S^{(0)}$:

$$S^0 = A - E(\delta_{ij}).$$

Далее строятся две последовательных матрицы $S^{(1)'}$, $S^{(1)}$, ..., $S^{(n)'}$, $S^{(n)}$, ..., элементы которых вычисляются по соотношениям

$$S_{ij}^{m'} = \begin{cases} S_{ij}^{m-1}; & i \neq m \\ \delta_{mj}; & i = m \end{cases} \quad (i, j = 1, \dots, n; m = 1, \dots, n),$$

$$S_{ij}^{(m)} = S_{ij}^{(m)'} - \frac{S_{im}^{(m)'}}{1 + S_{mm}^{(m-1)}} S_{mj}^{(m-1)}.$$

Матрица $S^{m=n}$ и будет искомой матрицей A^{-1} по отношению к матрице A .

Для контроля обращения матрицы и вычисления неизвестных удобно рассчитывать столбцевую матрицу b' по отношению $b' = Ac$. При правильном решении должно выполняться равенство $b' = b$.

В ходе решения системы нормальных уравнений (или после решения) можно рассчитать ряд величин, характеризующих точность полученного уравнения регрессии (точность, соответствующая данным исходной выборки). Средняя квадратическая (стандартная) погрешность (корень квадратный из дисперсии)

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k'^2 - \sum_{j=1}^n c_j b_{j=i}}, \quad (8.7)$$

относительная ошибка

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{\sigma_\Phi}, \quad (8.8)$$

сводный (множественный) коэффициент корреляции

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_\Phi^2}}, \quad (8.9)$$

где

$$\sigma_\Phi = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k'^2} \quad (8.10)$$

— средняя квадратическая величина переменной S_k' . Коэффициент c_0 находится с помощью (8.1').

Приведем пример составления уравнения регрессии методом наименьших квадратов и оценки точности полученного уравнения. Пусть нам известны значения переменных F_1 и F_2 , а также величины S для некоторого ряда случаев ($k = 1, 2, \dots, N$). Требуется по этим значениям получить уравнение регрессии в виде

$$S = c_0 + \sum_{i=1}^2 c_i F_i = c_0 + c_1 F_1 + c_2 F_2, \quad (8.11)$$

где c_0, c_1, c_2 — коэффициенты, подлежащие определению. Введем в рассмотрение средние величины и отклонения от них и положим, что средние величины связаны соотношением

$$\bar{S} = c_0 + c_1 \bar{F}_1 + c_2 \bar{F}_2. \quad (8.12)$$

Тогда для отклонений получаем

$$S' = c_1 F'_1 + c_2 F'_2. \quad (8.13)$$

Система нормальных уравнений имеет вид

$$a_{11}c_1 + a_{12}c_2 = b_1,$$

$$a_{21}c_1 + a_{22}c_2 = b_2.$$

Для облегчения вычислений ограничим ряд десятью случаями ($N = 10$). Исходные значения S_k, F_{1k} и F_{2k} для этих случаев приведены в трех крайних левых графах табл. 8.1. Вычислим вначале величины \bar{S}, \bar{F}_{1k} и \bar{F}_{2k} . Результаты записаны в нижней части таблицы. Далее рассчитаем величины отклонений, т. е. S'_k, F'_{1k} и F'_{2k} .

Таблица 8.1

k	S_k	F_{1k}	F_{2k}	S'_k	F'_{1k}	F'_{2k}	F'^2_{1k}	F'^2_{2k}	$F'_{1k}F'_{2k}$	$F'_{1k}S'_k$	$F'_{2k}S'_k$	S'^2_k
1	2	-10	8	-2	-10	1	100	1	-10	20	-2	4
2	10	13	2	6	13	-5	169	25	-65	78	-30	36
3	0	-10	14	-4	-10	7	100	49	-70	40	-28	16
4	2	0	8	-2	0	1	0	1	0	0	-2	4
5	10	20	2	6	20	-5	400	25	-100	120	-30	36
6	2	-8	10	-2	-8	3	64	9	-24	16	-6	4
7	6	5	4	2	5	-3	25	9	-15	10	-6	4
8	0	-10	12	-4	-10	5	100	25	-50	40	-20	16
9	2	-10	6	-2	-10	-1	100	1	10	20	2	4
10	6	10	4	2	10	-3	100	9	-30	20	-6	4
$\sum_{k=1}^{10}$	40	0	70	0	0	0	1158	154	-354	364	-128	128
$\frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10}$	4	0	7	0	0	0	115,8	15,4	-35,4	36,4	-12,8	12,8

Для контроля подсчитаем средние для этих значений. При правильном счете эти средние должны равняться нулю.

Далее для каждого случая k рассчитаем парные произведения указанных переменных в различных сочетаниях, суммы этих произведений и средние величины (нижняя правая часть табл. 8.1).

Эти средние величины и представляют собой коэффициенты a_{ij} и b_i системы нормальных уравнений. Очевидно, что

$$a_{11} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{10} F_k'^2, \quad a_{12} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{10} F_{1k}' F_{2k}', \quad b_1 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{10} F_{1k}' S_k',$$

$$a_{21} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{10} F_{1k}' F_{2k}', \quad a_{22} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{10} F_{2k}'^2,$$

$$b_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{10} F_{2k}' S_k'.$$

С учетом полученных результатов система получит вид

$$\begin{aligned} 115,8c_1 - 35,4c_2 &= 36,4, \\ -35,4c_1 + 15,4c_2 &= -12,8. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Решая эту систему уравнений (например, методом исключения), находим $c_1 = 0,201$, $c_2 = -0,370$. Искомое уравнение регрессии имеет вид

$$S_1' = 0,201F_1' - 0,370F_2'. \quad (8.15)$$

Подставляя значения \bar{S}_1 , \bar{F}_1 и \bar{F}_2 , а также c_1 и c_2 в уравнение (8.1') или (8.12) для \bar{S} , получаем

$$4 = c_0 + 0,201 \cdot 0 - 0,370 \cdot 7.$$

Отсюда

$$c_0 = 4 + 0,370 \cdot 7 = 4 + 2,59 = 6,59.$$

Тогда уравнение регрессии относительно S получит вид

$$S = 6,59 + 0,20F_1 - 0,37F_2. \quad (8.16)$$

Уравнения (8.15) и (8.16) являются равнозначными.

Произведем теперь оценки точности полученных уравнений путем расчета величин

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} S_k'^2 - \sum_{j=1}^2 c_j b_{j=1}},$$

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sigma_0^2}{\sigma_\Phi^2}}, \quad \varepsilon = \frac{\sigma_0}{\sigma_\Phi}.$$

Прежде всего вычислим величины $S_k'^2$ (самая правая графа табл. 8.1) и величину

$$\sigma_\Phi^2 = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} S_k'^2 = 12,8,$$

затем $\sigma_\phi = \sqrt{\sigma_\phi^2} = 3,58$, сумму произведений

$$\sum_{j=1}^2 c_j b_{j=i} = 0,201 \cdot 36,4 + 0,370 \cdot 12,8 = 12,052.$$

Теперь получаем

$$\sigma_0 = \sqrt{12,8 - 12,052} = \sqrt{0,746} = 0,87,$$

$$R = \sqrt{1 - \frac{0,748}{12,8}} = \sqrt{0,942} = 0,97,$$

$$\varepsilon = \frac{0,865}{3,58} = 0,24.$$

Таким образом, полученное уравнение регрессии характеризуется величинами $\sigma_0 = 0,87$, $R = 0,97$ и $\varepsilon = 0,24$.

Подчеркнем, что для получения статистически обоснованного уравнения регрессии число случаев N должно значительно превышать число переменных. Поэтому полученное здесь уравнение регрессии не может иметь практического применения, так как число случаев было небольшим ($N = 10$) (что было сделано только для облегчения расчетов).

Изложенный метод множественной линейной регрессии может быть применен во втором варианте, в котором рассматриваются не переменные задачи непосредственно (или соответствующие отклонения от средних), а новые безразмерные переменные, получающиеся из первоначальных путем нормировки относительно средних квадратических значений.

Введем безразмерные переменные

$$\tilde{S} = \frac{S - \bar{S}}{\sigma_S}, \quad \tilde{F} = \frac{F - \bar{F}}{\sigma_F}, \quad (8.17)$$

где

$$\sigma_S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (S_k - \bar{S})^2}, \quad \sigma_F = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (F_k - \bar{F})^2}$$

— средние квадратические величины S и F . Уравнение регрессии возьмем теперь в виде

$$\hat{S} = \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i \tilde{F}_i. \quad (8.18)$$

Вместо системы нормальных уравнений (8.3) получим ($\tilde{c}_i = \tilde{c}_j$)

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} \tilde{c}_j = r_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8.19)$$

Легко видеть, что характеристики точности уравнений регрессии связаны соотношениями

$$\sigma_0 = \sigma_S \tilde{\sigma}_0, \quad \sigma_\phi = \sigma_S \tilde{\sigma}_\phi, \quad \varepsilon = \tilde{\varepsilon}, \quad R = \tilde{R}. \quad (8.24)$$

Отметим, что второй вариант метода множественной линейной регрессии целесообразно применять тогда, когда целью применения метода является не только получение уравнения регрессии, но и анализ корреляционных связей между различными парами переменных, так как в этом случае коэффициенты системы нормальных уравнений (8.19) и (8.20) являются нормированными корреляционными функциями. Кроме того, применение второго варианта метода является предпочтительным еще и с точки зрения точности вычислений, ибо в этом случае все числа системы нормальных уравнений оказываются близкими к единице (не превышая ее).

8.2. Разложение функций в ряд Фурье методом наименьших квадратов. Пусть функция $y = f(x)$ представляется в виде ряда Фурье

$$y(x) = c_0 + \sum_{k=1}^n (c_k \cos \omega_k x + b_k \sin \omega_k x).$$

Здесь $\omega_k = 2\pi kx/L_1$, где L_1 — длина основной волны в поле функции f по оси x . Пусть нам известны значения функции $y(x_i)$ в точках x_i ($i = 1, 2, \dots, n$). В соответствии с методом наименьших квадратов коэффициенты c и b определяются из условия минимума функции

$$\sum_{i=1}^N \left[c_0 + \sum_{k=1}^n (c_k \cos \omega_k x_i + b_k \sin \omega_k x_i) - y(x_i) \right]^2.$$

Это условие приводит к системе нормальных уравнений, решив которую, мы и находим значения коэффициентов c и b .

В случае $n = 2$ и $\sin \omega_k x_i = 0$ ряд Фурье имеет вид

$$y(x) = c_0 + \sum_{k=1}^2 c_k \cos \omega_k x_i = c_0 + c_1 \cos \omega x + c_2 \cos 2\omega x.$$

Система нормальных уравнений в этом случае составляется из условия минимума функции

$$\sum_{i=1}^N [c_0 + c_1 \cos \omega x_i + c_2 \cos 2\omega x_i - y(x_i)]^2$$

и имеет вид

$$c_0 + c_1 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos \omega x_i + c_2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos 2\omega x_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y(x_i),$$

$$c_0 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos \omega x_i + c_1 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos^2 \omega x_i +$$

$$\begin{aligned}
& + c_2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos \omega x_i \cos 2\omega x_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y(x_i) \cos \omega x_i, \\
& c_0 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos 2\omega x_i + c_1 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos \omega x_i \cos 2\omega x_i + \\
& + c_2 \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos^2 2\omega x_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y(x_i) \cos 2\omega x_i.
\end{aligned}$$

Вычислив по значениям x_i и $y(x_i)$ все коэффициенты данной системы уравнений и решив ее, мы получаем значения коэффициентов c_0 , c_1 и c_2 .

8.3. Выборка данных по таблицам случайных чисел. Статистические оценки производятся по данным некоторой ограниченной выборки из конечной генеральной совокупности. Указанная выборка должна обладать таким свойством, чтобы ее элементы были бы независимыми. Этого можно достичь путем формирования выборки с помощью таблицы случайных чисел. Пример такой таблицы, составленной из четырехзначных групп чисел, приведен в приложении 2.

Пусть нам дана конечная генеральная совокупность из N объектов (чисел, дат и т. д.). Нам необходимо из этой совокупности сделать выборку из n элементов. Нумеруем числа исходной совокупности от 0 до $N - 1$. В таблице случайных чисел берем числа с необходимым количеством знаков. Если, например, генеральная совокупность имеет 2000 элементов, то берем четырехзначные числа. В выборку включим элементы генеральной совокупности с числами, найденными в таблице. Числа, большие $N - 1$, пропускаем или вычитаем из них наибольшее, кратное N , и пропускаем только числа, большие или равные наибольшему кратному N с тем же количеством знаков, что и у N . Так делаем до тех пор, пока у нас не будет в выборке n элементов. Числа, которые уже встречались один раз, пропускаем.

Пример. Случайным образом отобрать 60 дней (дат) из 365 дней года (год невисокосный). У нас $N = 365$, $n = 60$. Пронумеруем все дни года от 0 до 364 (0, 1, 2 ... — 1-го, 2-го, 3-го ... января, 31, 32, ... — 1-го, 2-го, ... февраля и т. д.).

Так как N трехзначное число, то в таблице берем только трехзначные числа; при этом из чисел, больших 364, вычитаем наибольшее кратное, т. е. 365 или 730. Числа, равные 365 или 730, пропускаем. В результате получаем следующие числа: 229 (594—365), 308,10 (375—365), 183, 153, 285 (650—365), 82 (812—730)... Этим числам соответствуют следующие даты: 18 августа, 5 ноября, 11 января и т. д. По завершению выборки из 60 дат целесообразно переписать даты выборки в хронологическом порядке.

Упражнения

8.1. По значениям высоты изобарической поверхности 500 мбар для 60 случаев (дней) в пунктах Прага (11520) $H_1 = x$, Загреб (13130) $H_2 = y$ и Аяччо (07761) $H_3 = z$, приведенных в табл. 8.2, рассчитать следующие статистические характеристики:

8.1.1. Средние \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} .

Таблица 8.2

Значения высоты изобарической поверхности 500 мбар (H_{500} дам) в исходные моменты времени (0 ч) в пунктах Прага (11520) $H_1 = x$, Загреб (13130) $H_2 = y$ и Аяччо (07761) $H_3 = z$, а также в пункте Прага в моменты времени, отстоящие от исходного на сутки ($H_4 = u$) и двое суток ($H_5 = v$) назад для 60 ситуаций ($k = 1, 2, \dots, 60$)

k	Дата исходного дня	$H_1 = x$	$H_2 = y$	$H_3 = z$	$H_4 = u$	$H_5 = v$
1	17 X 1969	79	75	71	73	70
2	19 X	76	72	73	76	79
3	21 X	76	75	71	76	76
4	24 X	65	69	75	73	72
5	27 X	80	82	83	67	58
6	30 X	53	68	78	74	77
7	1 XI	58	66	76	47	53
8	3 XI	67	75	73	64	58
9	6 XI	48	56	69	58	74
10	9 XI	38	54	61	45	48
11	13 XI	55	68	73	63	52
12	18 XI	42	52	58	52	47
13	20 XI	56	67	68	46	42
14	23 XI	58	64	63	58	55
15	27 XI	28	26	24	32	32
16	1 XII	43	46	49	36	32
17	2 XII	37	44	45	43	36
18	11 XII	55	49	48	52	41
19	14 XII	50	50	55	52	48
20	19 XII	33	42	46	36	32
21	22 XII	50	50	64	46	34
22	28 XII	50	46	37	47	47
23	31 XII	38	40	40	37	47
24	7 I 1970	34	46	45	30	37
25	14 I	45	48	50	42	54
26	16 I	43	49	46	46	45
27	18 I	46	41	54	40	43
28	21 I	53	50	64	54	53
29	22 I	46	42	53	53	54
30	29 I	40	43	58	44	59
31	31 I	39	41	45	59	40
32	2 II	38	33	50	35	39
33	4 II	29	43	63	38	38
34	8 II	33	43	54	31	31
35	13 II	27	43	49	25	24
36	21 II	34	43	64	44	31
37	23 II	42	50	70	37	34
38	25 II	37	35	45	23	42
39	28 II	36	30	34	35	33
40	4 III	24	32	24	22	35
41	6 III	22	27	33	30	24
42	10 III	38	48	49	36	30
43	16 III	48	39	41	49	44
44	21 III	47	51	68	33	28
45	23 III	53	60	66	54	47
46	29 III	19	30	45	25	43

Продолжение табл. 8.2

k	Дата исходного дня	$H_1 = x$	$H_2 = y$	$H_3 = z$	$H_4 = u$	$H_5 = v$
47	1 IV	40	46	52	42	35
48	5 IV	28	34	38	25	30
49	7 IV	36	44	56	33	28
50	12 IV	40	43	53	34	34
51	15 IV	51	49	58	45	44
52	17 IV	70	66	76	64	51
53	20 IV	58	64	65	61	71
54	24 IV	60	73	77	68	60
55	28 IV	44	51	54	43	51
56	4 V	59	57	66	52	42
57	6 V	62	58	51	63	59
58	8 V	63	63	50	60	62
59	10 V	63	73	63	60	63
60	13 V	50	57	64	47	57

8.1.2. Дисперсии и среднеквадратические $D_x, D_y, D_z, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$.

8.1.3. Значения пространственной ковариационной (корреляционной) функции m_{xy}, m_{xz} .

8.1.4. Значения пространственной структурной функции b_{xy} и b_{xz} .

8.1.5. Значения пространственной нормированной автокорреляционной функции (коэффициента корреляции) r_{xy}, r_{xz} ; результат нанести на графики с учетом расстояния между станциями ρ (тыс. км) и при условии, что $r = 1$ при $\rho = 0$.

8.2. По значениям высоты поверхности 500 мбар в пункте Прага в исходный момент времени и в моменты, отстоящие от исходного на сутки ($H_4 = x$) и на двое суток ($H_5 = v$) назад, приведенным в табл. 8.1, используя некоторые результаты задачи 8.1, рассчитать следующие статистические характеристики:

8.2.1. Средние \bar{u}, \bar{v} .

8.2.2. Дисперсии и среднеквадратические $D_u, D_v, \sigma_u, \sigma_v$.

8.2.3. Значения временной ковариационной (корреляционной) функции m_{uv}, m_{uv} .

8.2.4. Значения временной структурной функции b_{uv}, b_{uv} .

8.2.5. Значения временной нормированной корреляционной функции (коэффициента корреляции) r_{uv}, r_{uv} . Результаты нанести на график с учетом разности во времени τ (сутки) и того, что $r = 1$ при $\tau = 0$.

8.3. По значениям F_{1k}, F_{2k} и S_k ($k = 1, 2, \dots, 10$), приведенным в табл. 8.3, методом множественной линейной регрессии (методом наименьших квадратов) рассчитать коэффициенты c_0, c_1 и c_2 в уравнении регрессии, остаточную дисперсию σ_0 , множественный коэффициент корреляции R и относительную ошибку ε .

Таблица 8.3

k	S_k	F_{1k}	F_{2k}	k	S_k	F_{1k}	F_{2k}
1	4	10	5	6	0	0	5
2	-4	5	10	7	10	5	0
3	12	20	10	8	10	20	0
4	-12	0	10	9	5	10	0
5	8	-5	5	10	-15	0	20

8.4. Зная, что значения пространственной нормированной автокорреляционной функции $r(\rho)$ высоты изобарической поверхности 500 мбар при $\rho = 0,5, 1,5$ и $2,0$ тыс. км составляют соответственно 0,80, 0,36 и 0,06, методом наименьших квадратов аппроксимировать указанную функцию выражениями

$$r(\rho) = e^{\alpha \rho^2} \text{ и } r(\rho) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(2\pi \frac{\rho}{L}\right),$$

где α и L — подлежащие определению параметры (L имеет смысл длины волны и выражено в тыс. км).

Построить графики полученных функций, нанести на них исходные данные задачи и проанализировать результаты.

8.5. Используя результаты задачи 8.1.5, методом наименьших квадратов аппроксимировать пространственную автокорреляционную функцию выражениями

$$r(\rho) = e^{\alpha \rho^2} \text{ и } r(\rho) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(2\pi \frac{\rho}{L}\right).$$

Построить графики полученных функций, нанести на них исходные данные задачи и проанализировать результаты. Сопоставить значения найденных параметров α и L с соответствующими их значениями в задаче 8.4.

Таблица 8.4

	i							
	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i сут.	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y_i	1,00	0,52	-0,40	-0,38	0	-0,38	-0,60	0,18

8.6. Используя результаты задачи 8.2.5, методом наименьших квадратов аппроксимировать временную нормированную автокорреляционную функцию выражениями

$$r(\tau) = e^{\alpha \tau^2} \text{ и } r(\tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(2\pi \frac{\tau}{T}\right),$$

где τ — разность времени, выраженная в сутках; T — неизвестный параметр, имеющий смысл периода колебаний H , выраженный в сутках.

8.7. По значениям функции y_i при t_i ($i = 1, 2, \dots, 8$), приведенным в табл. 8.4, методом наименьших квадратов произвести разложение функции $f(t)$ в ряд Фурье, ограничиваясь двумя членами разложения по \cos , т. е. в ряд

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^2 a_k \cos \omega_k t = a_0 + a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos \omega_2 t,$$

где $\omega_k = 2\pi kt/T_1$, $T_1 = 4$ сут (t выразить в сутках).

8.8. В табл. 8.5 приведены значения высоты изобарической поверхности 500 мбар в узлах сетки из $12 \times 8 = 96$ точек, полученные в результате численного прогноза на 24 ч (табл. 8.5а), численного анализа на момент прогноза (табл. 8.5б) и численного анализа в исходный (предшествующий прогнозу на сутки) момент времени (табл. 8.5в).

Таблица 8.5а

Прогностические значения H_{500} дам
(0 ч 25 ноября 1973 г.)

i	t											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	539	530	522	516	512	510	509	509	509	510	512	513
7	538	528	519	513	508	505	504	505	507	510	512	515
6	538	526	516	509	503	500	499	501	505	510	514	518
5	541	528	517	508	501	497	496	499	504	512	518	523
4	545	532	519	509	501	497	495	498	505	514	522	529
3	551	539	526	515	506	501	499	502	509	519	527	535
2	556	546	534	524	514	508	505	508	514	524	532	540
1	562	554	544	535	526	519	516	517	522	530	537	544

Таблица 8.5б

Результаты численного анализа H_{500} дам
(0 ч 25 ноября 1973 г.)

i	t											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	543	530	521	515	512	511	511	512	513	513	513	511
7	541	526	516	510	507	503	505	506	509	513	515	515
6	539	523	513	506	502	500	498	500	505	513	519	521
5	541	523	511	503	499	496	495	497	505	515	524	528
4	544	526	512	504	499	496	495	498	506	517	528	534
3	551	534	519	510	504	502	500	502	510	521	531	538
2	559	546	532	522	516	510	510	511	517	525	534	541
1	567	557	546	536	529	525	522	521	524	529	536	543

Таблица 8.5в

Результат численного анализа H_{500} дам
(0 ч 24 ноября 1973 г.)

j	i											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
8	534	523	517	513	511	509	509	510	511	513	515	519
7	538	525	517	511	507	505	505	507	509	512	515	519
6	545	531	520	511	505	501	501	504	508	511	515	520
5	553	539	526	514	505	500	500	503	509	513	516	521
4	561	548	533	513	509	502	502	506	512	517	521	526
3	566	556	542	528	516	508	507	512	519	523	527	533
2	570	562	550	536	524	516	516	520	526	530	534	539
1	572	566	557	546	535	527	526	530	535	538	542	546

Произвести оценку качества прогноза путем расчета средней ошибки прогноза a , средней абсолютной ошибки δ , относительной ошибки ε и коэффициента корреляции r для прогностических и фактических изменений высот за сутки.

8.9. Составить программу решения задачи 8.8 на ЭВМ. Произвести расчеты, сопоставить результаты расчетов на ЭВМ с данными, полученными при решении задачи 8.8 вручную.

8.10. Составить программу расчета коэффициентов уравнений регрессии

$$\hat{T}_m = c_{0m} + \sum_{i=1}^n c_{im} H_{im} \quad (m = 1, 2, \dots, M)$$

для случаев произвольных значений n , N и M , нормированных корреляционных функций r_{ij} и r_i по соотношениям (8.21) и характеристик точности уравнений регрессии σ_0 , σ_ϕ , ε и R по соотношениям (8.7)—(8.10) или (8.22) и (8.24) для случаев нормированных корреляционных функций r_{ij} и r_i по соотношениям (8.21) при произвольных значениях n , N и M .

Предусмотреть выдачу (печать) введенных в ЭВМ исходных данных, средних и средних квадратических значений переменных, коэффициентов системы нормальных уравнений (с нормированными корреляционными функциями), характеристик точности полученных уравнений регрессии.

Указания. Ввести средние величины, отклонения от средних и нормированные безразмерные переменные. Программа может быть составлена на одном из алгоритмических языков или в кодах ЭВМ.

8.11. По программе задачи 8.10 произвести расчеты коэффициентов уравнений регрессии для определения температуры t_m (°C) на изобарических поверхностях 1000 ($m = 1$), 850 ($m = 2$) и 700 ($m = 3$) мбар по данным высот H (дам) изобарических поверхностей 1000 ($i = 1$), 850 ($i = 2$) и 700 ($i = 3$) мбар по данным t и H , приведенным в табл. 8.6 (параметры программы $n = 3$, $M = 3$, $N = 100$).

Таблица 8.6

k	Температура, °C			Высота, дам		
	1000	850	700	1000	850	700
1	23	14	6	1,2	152	314
2	22	15	3	1,0	153	314
3	17	10	3	1,3	151	312
4	16	11	0	1,1	150	309
5	15	14	0	1,2	146	304
6	15	8	0	1,1	148	307
7	19	11	0	1,1	154	310
8	12	7	0	1,3	151	308
9	15	10	0	1,2	156	309
10	15	15	2	1,0	150	309
11	17	10	0	1,0	148	308
12	13	8	2	1,3	150	308
13	12	9	0	1,2	148	307
14	12	7	-1	1,0	148	304
15	12	9	-2	0,9	146	303
16	15	7	-4	0,7	143	299
17	15	11	-1	0,8	147	305
18	14	12	0	0,9	148	306
19	11	11	1	0,8	147	306
20	13	10	0	1,0	148	307
21	13	5	-3	0,9	145	301
22	10	6	-4	0,9	144	301
23	24	12	0	0,9	150	310
24	15	16	8	1,0	157	318
25	8	2	-4	0,4	138	292
26	13	5	-4	0,8	143	299
27	14	8	0	0,9	147	304
28	9	0	-6	0,3	135	289
29	8	5	-6	0,4	140	295
30	11	5	0	0,7	140	302
31	7	0	-8	-0,1	138	286
32	8	0	-7	-0,1	137	284
33	8	1	-4	-0,1	132	287
34	12	3	-3	0,0	134	290
35	9	4	-3	-0,5	129	285
36	8	1	-8	-0,3	130	284
37	9	3	-8	0,3	136	291
38	11	10	-1	-0,1	135	289
39	6	5	-1	0,4	138	296
40	8	1	0	0,3	142	299
41	10	11	1	0,6	144	303
42	19	15	3	0,1	142	304
43	18	14	5	0,1	140	301
44	21	20	6	0,2	142	306
45	17	12	4	0,4	142	303
46	16	10	3	0,5	149	301
47	20	21	4	0,1	143	311
48	20	18	9	0,6	146	309
49	15	8	3	0,9	140	306
50	20	13	5	0,7	146	307

Продолжение табл. 8.6

k	Температура, °C			Высота, дам		
	1000	850	700	1000	850	700
51	21	14	10	0,5	146	308
52	25	28	18	-0,1	143	311
53	20	22	10	0,1	143	310
54	21	18	6	0,4	144	308
55	20	16	2	0,4	147	310
56	17	14	4	0,9	148	309
57	14	13	2	1,0	148	307
58	12	9	0	1,2	149	308
59	17	11	4	0,9	147	309
60	12	7	0	1,1	147	308
61	16	15	5	0,3	150	311
62	11	2	-1	0,8	141	297
63	12	3	-1	0,8	143	302
64	14	5	-3	0,7	142	299
65	19	7	-1	0,8	143	302
66	14	7	-3	-0,1	143	301
67	21	12	0	0,3	145	300
68	11	16	-8	0,9	140	293
69	3	0	-1	1,3	142	298
70	6	5	1	1,0	144	301
71	3	10	0	0,7	146	304
72	10	6	0	1,1	144	294
73	7	2	-4	1,0	142	298
74	17	13	-3	0,8	146	307
75	21	13	4	0,7	147	307
76	18	10	-1	0,8	147	305
77	24	14	3	1,1	147	308
78	14	6	2	1,4	148	307
79	14	7	-3	1,1	142	299
80	17	11	3	0,4	145	305
81	21	11	1	0,5	142	302
82	20	14	3	0,4	143	304
83	14	14	0	0,4	142	308
84	13	7	-1	0,5	142	299
85	15	11	1	0,2	140	299
86	15	19	6	0,1	139	301
87	20	17	8	-0,7	134	296
88	26	16	8	0,3	144	307
89	20	15	6	0,3	142	306
90	8	2	-2	1,3	147	302
91	8	7	-2	0	141	300
92	12	11	2	0,5	140	297
93	8	1	-8	-0,6	127	278
94	14	8	2	1,0	150	308
95	10	9	1	1,0	148	306
96	12	12	3	0,8	146	304
97	11	7	0	0,8	142	300
98	28	25	17	0	139	307
99	10	2	-4	0,5	140	296
100	19	12	2	0,5	143	303

Рассчитать значения нормированных корреляционных функций у характеристик точности полученных уравнений регрессии. Проанализировать результаты.

8.12. На основе метода наименьших квадратов разработать алгоритм и составить программу разложения функции $y(t)$ в ряд Фурье при двух членах разложения

$$y(t) = a_0 + \sum_{k=1}^2 (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t),$$

где $\omega_k = 2\pi kt/T_1$, $T_1 = 4$ сут, а также для вычисления характеристик точности уравнения регрессии, т. е. величин σ_0 , R и ε .

Произвести расчеты по данным, приведенным в табл. 8.3. Полученные результаты сравнить с результатами задачи 8.7.

8.13. С помощью таблицы случайных чисел отобрать 60 дат из трех летних месяцев (с 1 июня по 31 августа) двух лет. Ответ дать в форме таблицы с 60 датами. Каждую дату выразить четырьмя цифрами в виде YUMJ, где YU — дата, M — месяц (6, 7 или 8), J — год (1 или 2).

Ответы и решения

8.1.1.	$\bar{x} = 47,5;$	$\bar{y} = 51,4;$	$\bar{z} = 56,6.$
8.1.2.	$D_x = 216,7;$	$D_y = 184,2;$	$D_z = 187,9;$
	$\sigma_x = 14,7;$	$\sigma_y = 13,6;$	$\sigma_z = 13,7.$
8.1.3.	$m_{xy} = 180,6;$	$m_{xz} = 159,0.$	
8.1.4.	$b_{xy} = 39,7;$	$b_{xz} = 44,2.$	
8.1.5.	$r_{xy} = 0,903;$	$r_{xz} = 0,854.$	
8.2.1.	$\bar{u} = 47,1;$	$\bar{v} = 47,8.$	
8.2.2.	$D_u = 200,7;$	$D_v = 202,2;$	
	$\sigma_u = 14,2;$	$\sigma_v = 14,2.$	
8.2.3.	$m_{uv} = 188,4;$	$m_{uv} = 177,8.$	
8.2.4.	$b_{uv} = 40,0;$	$b_{uv} = 48,2.$	
8.2.5.	$r_{uv} = 0,943;$	$v_{uv} = 0,883.$	
8.3.	$c_0 = -2,22;$	$c_1 = 0,5888;$	$c_2 = 0,0286;$
	$\sigma_0 = 6,08;$	$R = 0,601;$	$\varepsilon = 0,799.$
8.4.	$\alpha = -0,644;$	$L = 4,78.$	

Решение. Преобразуем заданную форму связи для $r(\rho)$ к линейной. Для этого прологарифмируем заданное выражение. В результате получаем

$$\ln r = \alpha \rho^2.$$

Это равенство будет справедливо для каждого индекса k . Тогда

$$\ln r_k = \alpha \rho_k^2.$$

Параметр α будем искать методом наименьших квадратов исходя из условия минимума функции

$$Q = \sum_{k=1}^3 [\alpha \rho_k^2 - \ln r_k]^2.$$

В результате получаем

$$\alpha = \frac{\sum_{k=1}^3 \ln r_k \rho_k^2}{\sum_{k=1}^3 \rho_k^4} = 0,644.$$

Для решения второй части задачи преобразуем равенство

$$r(\rho) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(2\pi \frac{\rho}{L}\right)$$

и получим новое соотношение

$$2r(\rho) - 1 = \cos\left(2\pi \frac{\rho}{L}\right).$$

Тогда имеем

$$\arccos [2r(\rho) - 1] = 2\pi \frac{\rho}{L}.$$

После введения новой переменной $c = \frac{1}{L}$ получаем

$$\arccos [2r(\rho) - 1] = 2\pi \rho c.$$

Переменную c находим методом наименьших квадратов исходя из условия минимума функции

$$Q = \sum_{k=1}^3 [2\pi \rho_k c - \arccos(2r_k - 1)]^2.$$

В результате получаем

$$c = \frac{\sum_{k=1}^3 \pi \rho_k \arccos(2r_k - 1)}{\sum_{k=1}^3 2\pi^2 \rho_k^2}.$$

И следовательно,

$$L = \frac{1}{c} = \frac{\sum_{k=1}^3 2\pi^2 \rho_k^2}{\sum_{k=1}^3 \pi \rho_k \arccos(2r_k - 1)} = 4,78.$$

8.8. $a = -0,44$ дам; $\delta = 2,46$ дам; $\varepsilon = 0,36$; $r = 0,55$.

8.10. Программа, записанная на языке АЛГОЛ-60 (вариант $n = M$).

1. Обозначения:

- H, T — массивы исходных данных;
- H1, T1 — векторы дисперсии H и T;
- Q, R — векторы средних значений T и H;
- X — вектор коэффициентов регрессии;
- A — корреляционная матрица;
- B1, Y, Z — вспомогательные массивы;

- V, D — векторы рассчитанных значений и отклонений от истинных;
 SIGF, SIGO, EPS — оценки точности полученных коэффициентов;
 КМК — коэффициент множественной корреляции.
2. Расположение исходных данных:
 п столбцов из N значений H, M столбцов из N значений T, записанных в нормализованной форме.
3. Расположение результатов:
 п столбцов из N значений H, M столбцов из N значений T, отклонения от средних, средние, средние квадратические значения, нормированные матрицы и векторы правых частей, ненормированные матрицы и векторы правых частей, коэффициенты уравнений регрессии, характеристики точности уравнений регрессии.
4. Параметры программы:
 п — количество переменных уравнений регрессии;
 N — число случаев (ситуаций);
 M — число искомым (количество уравнений регрессии).
5. Алгоритм, записанный на языке АЛГОЛ-60:

```

1. BEGIN INTEGER N, K; P0042 (N, K);
2. BEGIN ARRAY H, T [1 : K, 1 : N], T1, H1, Q,
3. R, X, B [1 : K], A, B1 [1 : K, 1 : K], Y, Z [1 : K + 2],
4. V, D [1 : N], T2, H2 [1 : N, 1 : K];
5. INTEGER I, J, M, S, L;
6. REAL F, SIGF, SIGO, EPS, КМК;
7. P0042 (T, H); P1041 (T, H);
8. FOR I := 1 STEP 1 UNTIL K DO;
9. BEGIN R [I] := 0; Q [I] := 0;
10. FOR J := 1 STEP 1 UNTIL N DO
11. BEGIN R [I] := R [I] + T [I, J]/N;
12. Q [I] := Q [I] + H [I, J]/N END END;
13. P1041 (R, Q);
14. FOR I := 1 STEP 1 UNTIL K DO
15. FOR J := 1 STEP 1 UNTIL N DO BEGIN
16. T [I, J] := T [I, J] - R [I]; H [I, J] := H [I, J] - Q [I]
17. END; P1041 (T, H);
18. FOR I := 1 STEP 1 UNTIL K DO BEGIN
19. T1 [I] := 0; H1 [I] := 0;
20. FOR M := 1 STEP 1 UNTIL N DO BEGIN
21. T1 [I] := T1 [I] + T [I, M] ↑ 2/N;
22. H1 [I] := H1 [I] + H [I, M] ↑ 2/N END END
23. P1041 (T1, H1);
24. FOR I := 1 STEP 1 UNTIL K DO
25. FOR J := 1 STEP 1 UNTIL K DO BEGIN
26. A [I, J] := 0; B1 [I, J] := 0;
27. FOR M := 1 STEP 1 UNTIL K DO BEGIN
28. A [I, J] := A [I, J] + H [I, M] × H [J, M]/(N ×
  × SQRT (H1 [I] × H1 [J]));
29. B1 [I, J] := B1 [I, J] + T [I, M] × H [J, M]/(N ×
  × SQRT (T1 [I] × H1 [J]));
30. END END; P1041 (A, B1);
31. FOR I := 1 STEP 1 UNTIL K DO
32. FOR J := 1 STEP 1 UNTIL K DO BEGIN
33. A [I, J] := A [I, J] × SQRT (H1 [I] × H1 [J]);
34. B1 [I, J] := B1 [I, J] × SQRT (T1 [I] × H1 [J]) END;
35. P1041 (A, B1);
36. FOR I := 1 STEP 1 UNTIL K DO
37. FOR J := 1 STEP 1 UNTIL N DO BEGIN
38. T2 [J, I] := T [I, J]; H2 [J, I] := H [I, J] END;
39. P1041 (T2, H2); P0037 (A, Y, Z);
40. P1041 (A);

```

```

41. FOR I := 1 STEP 1 UNTIL K DO BEGIN
42. FOR J := 1 STEP 1 UNTIL K DO B [J] := B1 [I, J];
43. FOR S := 1 STEP 1 UNTIL K DO BEGIN X [S] := 0;
44. FOR L := 1 STEP 1 UNTIL K DO
45. X [S] := X [S] + A [S, L] × B [L] END; P1041 (X);
46. FOR S := 1 STEP 1 UNTIL N DO BEGIN V [S] := 0;
47. FOR L := 1 STEP 1 UNTIL K DO V [S] := V [S] +
48. X [L] × H2 [S, L]; D [S] := T2 [S, L] - V [S]; V [S] :=
49. V [S] + R [I] END; P1041 (D, V);
50. F := 0; FOR M := 1 STEP 1 UNTIL K DO
51. F := F + X [M] × B [M];
52. SIGF := SQRT (T1 [I]); P1041 (SIGF);
53. SIGO := SQRT (T1 [I] - F); P1041 (SIGO);
54. EDS := SIGO/SIGF; P1041 (EPS);
55. KMK := SQRT (1 - EPS ↑ 2); P1041 (KMK)
56. END END; STOP END

```

Примечание. Использовались стандартные программы: P0042, P1041 — ввод/вывод информации, P0037 — обращение матрицы.

8.11.

m	c_{0m}	c_{1m}	c_{2m}	c_{3m}	σ_{0m}	R	ε
1	-1,3	-0,580	-0,008	0,067	3,1	0,79	0,61
2	-10,1	-0,683	-0,027	0,091	3,0	0,84	0,84
3	-20,5	-0,402	-0,037	0,079	2,5	0,55	0,55

9. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

9.1. Метод полиномиальной интерполяции. Рассмотрим этот метод на примере поля одного скалярного элемента высоты изобарической поверхности H одного уровня. Используя алгебраический полином второй степени, поле функции $H(x, y)$ в окрестности точки, для которой нужно произвести интерполяцию, представляется в виде

$$H(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2.$$

Легко видеть, что, если начало координат поместить в точку интерполяции, то для этой точки

$$H(x = y = 0) = a_0.$$

Коэффициенты полинома a отыскиваются методом наименьших квадратов исходя из условия минимума выражения

$$\sum_{k=1}^N g_k [H(x_k, y_k) - H_k]^2,$$

где H_k — значения H в точках k , полученные в результате измерений или каким-либо другим путем; N — число таких точек; g_k — «вес» данных H_k в точках k . Данное условие приводит к системе нормальных уравнений, которые, например, для случая трех членов полинома имеют вид

$$a_0 \tilde{m}_{11} + a_1 \tilde{m}_{12} + a_2 \tilde{m}_{13} = \tilde{n}_1,$$

$$a_0 \tilde{m}_{21} + a_1 \tilde{m}_{22} + a_2 \tilde{m}_{23} = \tilde{n}_2,$$

$$a_0 \tilde{m}_{31} + a_1 \tilde{m}_{32} + a_2 \tilde{m}_{33} = \tilde{n}_3,$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{11} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k, & \tilde{m}_{21} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k x_k, & \tilde{m}_{31} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k y_k, \\ \tilde{m}_{12} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k x_k, & \tilde{m}_{22} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k x_k^2, & \tilde{m}_{32} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k x_k y_k, \\ \tilde{m}_{13} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k y_k, & \tilde{m}_{23} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k x_k y_k, & \tilde{m}_{33} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k y_k^2, \\ \tilde{n}_1 &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k H_k, & \tilde{n}_2 &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k H x_k, & \tilde{n}_3 &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k H y_k. \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что матрица системы нормальных уравнений является симметричной. Это значит, что, например, $m_{21} = m_{12}$, $m_{31} = m_{13}$, $m_{32} = m_{23}$.

При расчетах с помощью простейших вычислительных средств, а также на ЭВМ, работающих с числами малой разрядности, целесообразно заменить исходные числа некоторыми промежуточными, абсолютные величины которых имели бы нулевой порядок, т. е. были бы близки к 1, а размерные величины — безразмерными. Так, значения высот изобарических поверхностей удобно заменить отклонениями от средних для данного участка поля, например от климатических средних значений, или норм, H , т. е. величинам

$$H'(x, y) = H(x, y) - \bar{H}.$$

Координаты x и y целесообразно заменить безразмерными координатами

$$i = \frac{x}{\delta s}, \quad j = \frac{y}{\delta s},$$

где δs — шаг сетки. Тогда вместо выписанного ранее полинома второго порядка получим

$$H'(x, y) = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 ij + a_4 i^2 + a_5 j^2,$$

где a — некоторые коэффициенты. Величины \tilde{m} и \tilde{n} системы нормальных уравнений в этом случае будут выражены в виде

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{11} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k, & \tilde{m}_{21} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k i_k, & \tilde{m}_{31} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k j_k, \\ \tilde{m}_{12} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k i_k, & \tilde{m}_{22} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k i_k^2, & \tilde{m}_{32} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k i_k j_k, \\ \tilde{m}_{13} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k j_k, & \tilde{m}_{23} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k i_k j_k, & \tilde{m}_{33} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k j_k^2, \\ \tilde{n}_1 &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k H'_k, & \tilde{n}_2 &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k i_k H'_k, & \tilde{n}_3 &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N g_k j_k H'_k. \end{aligned}$$

В тех случаях, когда расчеты производятся вручную, исходные данные и результаты вычислений целесообразно записывать в специальную таблицу. Так, при вычислении коэффициентов системы нормальных уравнений в случае трех переменных ее форма приведена в табл. 9.1. При решении задачи на ЭВМ подобная таблица должна быть «размещена» в памяти ЭВМ.

Приведенную ранее систему нормальных уравнений можно записать в матричной форме в виде $Ax = b$, где

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} \tilde{m}_{11} & \tilde{m}_{12} & \tilde{m}_{13} \\ \tilde{m}_{21} & \tilde{m}_{22} & \tilde{m}_{23} \\ \tilde{m}_{31} & \tilde{m}_{32} & \tilde{m}_{33} \end{vmatrix}$$

Таблица 9.1

k	H_k	H'_k	g_k	i_k	j_k	g_k^i	g_k^j	$g_k^i j_k$	$g_k^i k$	$g_k^j k$	$g_k H_k$	$g_k H'_k$	$g_k H_k^i k$
1													
2													
⋮													
⋮													
N													
$\sum_{k=1}^N =$													
$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N =$													

— квадратная и симметричная матрица, x и b — матрицы-столбцы

$$x_j = \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}, \quad b_i = \begin{vmatrix} \tilde{n}_1 \\ \tilde{n}_2 \\ \tilde{n}_3 \end{vmatrix}.$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений возможно любым способом. В случае, когда способ предусматривает обращение матрицы, решение записывается в виде

$$x = A^{-1}b,$$

где A^{-1} — матрица, обратная матрице A , т. е. такая матрица, что $A \cdot A^{-1} = E$, где E — единичная матрица.

Подчеркнем, что число точек k , данные в которых используются для интерполяции, т. е. число N , должно превышать число членов аппроксимирующего полинома (примерно в 1,5 раза). Это обеспечивает некоторое сглаживание исходного поля, что особенно важно при наличии ошибок в исходных данных.

9.2. Метод оптимальной интерполяции. Значения отклонений некоторого элемента f от его «нормы» \tilde{f} , т. е. величины $f' = f - \tilde{f}$ в точке $i = 0$ (здесь i — индекс точки) представляется в виде

$$f'_0 = \sum_{i=1}^n p_i \tilde{f}'_i,$$

где n — число точек, учитываемых при интерполяции; \tilde{f}'_i — значения f в точках i , полученные в результате измерений или каким-либо другим путем со случайной ошибкой $\delta = \tilde{f} - f$ (f — «точное» значение элемента); p_i — веса измерений в точке i .

Система нормальных уравнений для определения коэффициентов имеет вид

$$\sum_{j=1}^n p_j \mu_{ij} - p_i \eta_i = \mu_{0i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

или

$$p_1(\mu_{11} + \eta_1) + p_2\mu_{12} + \dots + p_n\mu_{1n} = \mu_{01},$$

$$p_1\mu_{21} + p_2(\mu_{22} + \eta_2) + \dots + p_n\mu_{2n} = \mu_{02},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$p_1\mu_{n1} + p_2\mu_{n2} + \dots + p_n(\mu_{nn} + \eta_n) = \mu_{0n},$$

где $\mu_{ij} = \mu(r_{ij})$ значения автокорреляционной функции для расстояния r_{ij} между двумя точками i и j , $\eta_i = \sigma_i^2/d^2$ — относительная ошибка данных в точке i , σ_i — среднеквадратическая ошибка данных в точке i , d^2 — дисперсия элемента f в окрестности точки, для которой проводится интерполяция.

Значения автокорреляционных функций при фиксированных величинах r определяются с помощью различных аппроксимаций. Для высоты поверхности 500 мбар эта аппроксимация имеет вид

$$\mu(r) = (1 + 0,98r) e^{-0,98r}$$

(по М. И. Юдину) или

$$\mu(r) = \frac{\sin(1,51r)}{1,51r} e^{-0,25r}$$

(по С. М. Олевской), где r выражено в тыс. км. При подсчетах вручную целесообразно предварительно разработать специальную форму таблицы. В случае трех точек ($i = 1, 2, 3$) ее примерная форма приведена в табл. 9.2.

Таблица 9.2

Пара точек	$x_i - x_j$	$y_i - y_j$	r_{ij}^2	r_{ij}	μ_{ij}	σ_i	η_i	$\mu_{ij} + \eta_i$
$i = 0, j = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$								
$i = 1, j = \begin{matrix} 1, 2 \\ 3 \end{matrix}$								
$i = 2, j = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$								
$i = 3, j = 3$								

Как и в случае полиномиальной интерполяции, система нормальных уравнений может быть записана в матричной форме

$$Ax = b,$$

где

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} \mu_{11} + \eta_1 & \mu_{12} & \dots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} + \eta_2 & \dots & \mu_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \dots & \mu_{nn} + \eta_n \end{vmatrix},$$

$$x_j = \begin{vmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ p_n \end{vmatrix}, \quad b_i = \begin{vmatrix} \mu_{01} \\ \mu_{02} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_{0n} \end{vmatrix}.$$

9.3. Метод последовательных приближений. В случае поля геопотенциала одного уровня интерполяция производится с помощью соотношения

$$H^{v+1} = H_n^v + \sum_{i=1}^N W^v(r_i) (H_i - H_{ni}^v) \quad (v = 1, 2, \dots),$$

где i — номер точки, N — их общее число, r — расстояние между узлом сетки и точкой i , H_i — исходные данные в точках i , H_{ni}^v — значения H предварительного поля в точке i при v -м приближении, $W^v(r_i)$ — вес измерений в точке i , зависящий от расстояния точки от узла сетки и номера приближений. В методике, разработанной в США, веса рассчитываются по соотношению

$$W^v(r) = \begin{cases} \frac{R^{2v} - r^2}{R^{2v} + r^2} & \text{при } r \leq R^v, \\ 0 & \text{при } r > R^v, \end{cases}$$

где R^v — некоторое предельное значение r при v -м приближении. При $v = 1$ $R = 4,75 \times 300$ км, при $v = 2$ $R = 3,6 \times 300$ км и при $v = 3$ $R = 1,8 \times 300$ км.

В качестве предварительного поля могут быть использованы данные прогноза, результат численного анализа за предыдущий срок или климатические данные.

При интерполяции любым из рассмотренных методов необходимо знать расстояния между точками наблюдений и между узлом сетки и точками наблюдений. Эти величины рассчитывают по данным географических координат станции (точек наблюдений) применительно к заданной сетке точек и картографической проекции. Соответствующие формулы и их обсуждение приведены в разделе 1.

9.4. Четырехмерный численный анализ. Все три рассмотренных метода обобщаются для случая несинхронных данных. В методе полиномиальной интерполяции с этой целью в аппроксимирующий полином в качестве дополнительной переменной вводится время. Например, полином второй степени с учетом времени записывается в виде

$$H(x, y, t) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6t + a_7xt + a_8yt + a_9t^2.$$

Метод оптимальной интерполяции обобщается путем введения пространственно-временной корреляционной функции. Так, по С. М. Олевской, пространственно-временная корреляционная функция имеет вид

$$b(r, \tau) = A(\tau) \frac{\sin [\beta(\tau) r]}{\beta(\tau) r} e^{-\gamma(\tau) r},$$

где τ — разность времени наблюдений и численного анализа; A , β , γ — коэффициенты, зависящие от τ . Для H_{500} эти коэффициенты при различных τ принимают следующие значения (при r , выраженном в тыс. км); при $\tau = 0$ $A = 172$ (дам)², $\beta = 1,51$, $\gamma = 0,25$; при $\tau = 1$ сут $A = 134$ (дам)², $\beta = 1,52$, $\gamma = 0,15$; при $\tau = 2$ сут $A = 90$ (дам)², $\beta = 1,50$, $\gamma = 0,02$.

Учет несинхронности методом последовательных приближений может быть сделан с помощью введения весовой функции $\tilde{W}(r, \tau)$, зависящей как от расстояния r , так и от разности времени анализа и наблюдений. В качестве такой функции можно принять

$$\tilde{W}(r, \tau) = \frac{\tilde{R}^2 - \tilde{r}^2}{\tilde{R}^2 + \tilde{r}^2},$$

где $\tilde{r}^2 = \alpha r^2 + \beta \tau^2$, α и β — коэффициенты, подбираемые эмпирически, а \tilde{R} — некоторое предельное значение \tilde{r} .

Упражнения

9.1. Центральный узел квадратной сетки с нечетным числом узлов по осям x и y находится в точке Северного полюса. Рассчитать общее число узлов квадратной сетки, находящейся на плоскости полярной стереографической картографической проекции северного полушария с главным масштабом на широте 60° . Шаг сетки на широте 60° составляет 300 км. Найти широту угловых точек сетки.

Указание. Использовать теорию картографических проекций, изложенную в главе 2 учебного пособия [1].

9.2. В окружность экватора на полярной стереографической проекции северного полушария вписан восьмиугольник с квадратной сеткой и шагом δs . Четыре стороны этого восьмиугольника, параллельные осям x и y , равны $m\delta s$ и между собой. Стороны квадрата, образованного продолжением упомянутых сторон восьмиугольника, равны $n\delta s$ (рис. 9.1).

9.2.1. Определить соотношение между m и n , при котором восьмиугольник был бы наиболее близок к правильному, а его внутренние углы составляли 135° .

9.2.2. Используя найденное соотношение и принимая, что m и n целые числа, рассчитать шаг сетки при $m=51$ и $n=72$.

9.2.3. Получить формулу для общего числа N узлов сетки (включая узлы, лежащие на сторонах восьмиугольника) в зависимости от чисел m и n ; рассчитать общее число узлов при $m = 51$ и $n = 72$.

9.3. Распределение высоты изобарической поверхности вдоль оси x выражается в виде

$$H(x) = a + b \sin 2\pi \frac{x}{L},$$

где a и b — постоянные, L — длина волны. Если $i=x/\delta s$, $\delta s = 300$ км — шаг по координате, $L = 3600$ км, $a = 0$, $b = 10$ дам, то вместо приведенной формулы можно записать

$$H_i = 10 \sin \left(2\pi \frac{i}{12} \right) = 10 \sin (30^\circ i) \text{ дам.}$$

В соответствии с этим выражением легко получить: $H_{i=-3} = -10$, $H_{i=-1} = -5$, $H_{i=1} = 5$, $H_{i=3} = 10$ дам.

Используя эти значения H в указанных четырех точках, методом полиномиальной интерполяции при представлении $H(x)$ в виде $H(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ рассчитать значение H в точке $x = i = 0$ при различных предположениях относительно точности данных H_i в указанных четырех точках и различных весах g_i ; результат интерполяции сравнить с «точным» значением H в точке $x = i = 0$ ($H_{i=0} = 0$) путем расчета ошибки $\delta = a_0 - H_{i=0}$.

9.3.1. Значения H_i в указанных четырех точках равны их «точным» значениям, т. е. $H_{i=-3} = -10$, $H_{i=-1} = -5$, $H_{i=1} = 5$, $H_{i=3} = 10$ дам; веса всех точек одинаковы и равны $g_i = 1$.

9.3.2. Значения H_i в указанных четырех точках даны с ошибками 5% и равны $H_{i=-3} = -9,5$, $H_{i=-1} = -5,5$, $H_{i=1} = 5,5$, $H_{i=3} = 9,5$ дам; веса всех точек одинаковы и равны $g_i = 1$.

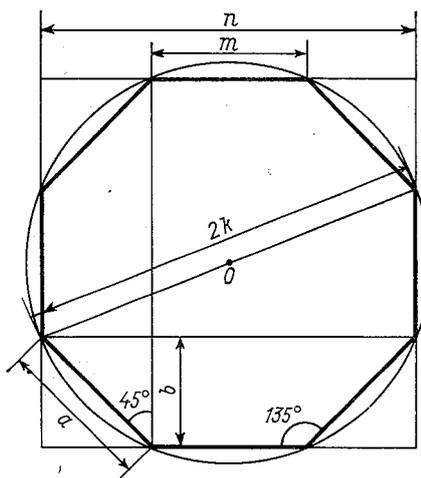


Рис. 9.1. Восьмиугольная область, вписанная в окружность экватора.

9.3.3. Значения H в трех точках равны «точным» значениям, а в одной точке имеется ошибка в 100%; эти значения равны $H_{i=-3} = -10$, $H_{i=-1} = -5$, $H_{i=1} = 0$ (большая ошибка), $H_{i=3} = 10$; веса всех точек одинаковы и равны $g_i = 1$.

9.3.4. То же, что в задаче 9.3.3, но веса точек неодинаковы и равны $g_{i=-3} = 1$, $g_{i=-1} = 1$, $g_{i=1} = 0,1$ (точка с большой ошибкой), $g_{i=3} = 1$.

Указание. Для облегчения расчетов ввести новую переменную $y = H/b$, а выражение для y представить в виде

$$y_i = a_0 + a_1 i + a_2 i^2.$$

В этом случае все числа исходных данных по абсолютной величине не будут превышать единицу, что облегчит вычисления. После нахождения коэффициента a_0 находим $H = a_0 b$.

9.4. По значениям H в четырех узлах квадратной сетки: $H_1 = H_{01}$ ($i = 0, j = 1$), $H_2 = H_{11}$ ($i = j = 1$), $H_3 = H_{10}$ ($i = 1, j = 0$), $H_4 = H_{00}$ ($i = j = 0$) получить значение H в центре квадрата, т. е. в точке $H_{0,5; 0,5}$ ($i = j = 0,5$), используя билинейное представление функции

$$H(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy.$$

9.5. Поле высоты изобарической поверхности задано в виде

$$H(x, y) = a + b \left[\sin \frac{2\pi}{L_x} x + \sin \frac{2\pi}{L_y} y \right],$$

где a и b — постоянные, L — длина волны. Если $a = 0$, $b = 10$ дам, $L_x = L_y = 3600$ км, $i = x/\delta s$, $j = y/\delta s$, $\delta s = 300$ км, то для значений H в узлах сетки получаем

$$H_{ij} = 100 [\sin(30^\circ i) + \sin(30^\circ j)] \text{ м.}$$

Результаты вычислений H_{ij} по последней формуле для точек при $i = 0, \dots, 12$ и $j = 0, \dots, 12$ приведены на рис. 9.2. Эти результаты будем рассматривать как некоторые «точные» данные и используем для экспериментов по интерполяции H в точки a ($i = j = 3$) — центр антициклона, b ($i = j = 6$) — переходная зона между циклоном и антициклоном, v ($i = 3, j = 9$) — седловина, z ($i = j = 5$) — периферия антициклона. Результат необходимо сравнить с точным значением в данной точке.

Методом полиномиальной интерполяции получить значения в точках a, b, v и z при использовании полинома

$$H(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

и значений H в точках $i - 2, i - 1, i + 1, i + 2$.

9.6. Получить значения H в точках a, b, v, z задачи 9.5 методом полиномиальной интерполяции при использовании полинома

$$H(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y$$

и значений H в точках $i - 2, j; i, j + 2; i + 1, j; i, j - 1$.

9.7. Получить значения H в точках $a, б, в, г$ методом оптимальной интерполяции при использовании значений H в четырех точках задачи 9.6 и корреляционной функции

$$\mu(r_i) = \frac{\sin(1,51r_i)}{1,51r_i} e^{-0,25r_i},$$

где r выражено в тыс. км; в качестве «нормы» для H принять $\bar{H} = 10$ дам; $\eta = 0,02$.

9.8. Получить значения H в точках $a, б, в, г$ задачи 9.5 методом последовательных приближений при использовании значений H в четырех точках задачи 9.6 и весовой функции

$$W^v(r_i) = \begin{cases} \frac{R^{2v} - r_i^2}{R^{2v} + r_i^2} & \text{при } r_i \leq R, \\ 0 & \text{при } r_i > R. \end{cases}$$

В первом приближении считать $R = 2,2\delta s$, а во втором — $1,8\delta s$. В качестве предварительного поля принять $H = 10$ дам.

Результат интерполяции для точек $a, б, в$ и $г$ сравнить с точными значениями H в этих точках, полученными по исходной формуле для $H(x, y)$.

9.9. Поле высоты изобарической поверхности представляется в виде

$$H(x, t) = 100 \sin 2\pi \left(\frac{x}{L} - \frac{t}{T} \right) \text{ м},$$

где L — длина, T — период колебаний. При $L = 3600$ км и $T = 4$ сут скорость перемещения возмущений составляет $c = L/T = 900$ км/сут. Если $i = x/\delta s$, $s = t/\delta t$, а $\delta s = 300$ км и $\delta t = 24$ ч, то

$$H_{is} = 100 \sin 2\pi \left(\frac{i}{12} - \frac{s}{4} \right) \text{ м}.$$

Значения $H(x, t)$ или H_{is} , полученные по приведенным формулам, будем считать точными значениями. В частности, при $i = s = 0$ $H_{00} = 10$ дам. Зная значения H_{is} в пяти точках: $H_{-3,0} = -10$, $H_{-2,0} = -8,7$, $H_{3,0} = 10$, $H_{-2,-1} = 5$, $H_{1,-1} = 8,7$ дам, получить приближенное значение H в точке $x = t = 0$ (т. е. величину a_0) обобщенным методом полиномиальной интерполяции, используя выражение

$$H(x, t) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3t.$$

9.10. По данным задачи 9.9 (кроме точки $i = -3, s = 0$) получить приближенное значение H в точке $x = t = 0$ обобщенным методом оптимальной интерполяции. В качестве пространственно-временной автокорреляционной функции принять

$$\mu(r_i, s) = \frac{\sin(1,51r_i)}{1,51r_i} e^{-0,25r_i}$$

при $s = 0$ и

$$\mu(r_i, s) = \frac{A_1}{A_0} \frac{\sin(1,52r_i)}{1,52r_i} e^{-0,14r_i}$$

при $s = -1$, где $A_0 = 172$, $A_1 = 134$ (дам)², а r выражено в тыс. км. Относительную ошибку η принять равной 0,02, а в качестве «нормы» для H принять $\bar{H} = 10$ дам.

9.11. По данным задачи 9.9 (кроме точки $i = -3, s = 0$) получить приближенное значение \bar{H} в точке $x = t = 0$ обобщенным методом последовательных приближений. Весовую функцию принять в виде

$$\tilde{W}^v(r_{is}) = \begin{cases} \frac{\tilde{R}^{v^2} - \tilde{r}_{is}^2}{\tilde{R}^{v^2} + \tilde{r}_{is}^2} & \text{при } \tilde{r} \leq \tilde{R}, \\ 0 & \text{при } \tilde{r} > \tilde{R}, \end{cases}$$

где $r_{is}^2 = r_i^2 + \alpha^2 s^2$, $\alpha = 900$ км. В первом приближении принять $\bar{R} = 4 \cdot 300$ км, а во втором — $3,6 \cdot 300$ км. В качестве предварительного поля для H принять $\bar{H} = 10$ дам.

9.12. Основываясь на уравнении статики и считая, что значения температуры даны без ошибок, произвести контроль вертикального распределения высот изобарических поверхностей по следующим данным:

p , мбар	1000	850	700	500	300	200	100	50
T	287,4	278,7	268,5	251,9	228,5	216,7	216,7	216,7
H , дам	11	146	402	558	918	1280	1620	2060

Произвести исправление грубых ошибок.

Указание. Одно из двух значений высот соседних изобарических поверхностей считать ошибочным, если средняя температура слоя, расположенного между двумя уровнями, определенная как средняя арифметическая из измерений и по уравнению статики, отличается более чем на 4° .

9.13. Рассчитать декартовы координаты x и y на полярной стереографической картографической проекции восьми станций, индексы и географические координаты которых приведены в табл. 9.3,

Таблица 9.3

№ пп.	Станция	Индекс станций	Широта	Долгота
0	Прага	11520	$50^\circ 06'$	$14^\circ 17'$
1	Хемсби	03496	$52^\circ 41'$	$01^\circ 41'$
2	Рига	26422	$56^\circ 58'$	$24^\circ 04'$
3	София	15614	$42^\circ 49'$	$23^\circ 23'$
4	Аяччо	07761	$41^\circ 55'$	$08^\circ 48'$
5	Грейфсвальд	10184	$54^\circ 06'$	$13^\circ 23'$
6	Попрад	11934	$49^\circ 11'$	$20^\circ 14'$
7	Загреб	13130	$45^\circ 49'$	$16^\circ 02'$
8	Нанси	07180	$48^\circ 42'$	$06^\circ 13'$

если начало координат совмещено со ст. Прага (11520), а ось y направлена по меридиану на север (рис. 9.3). Результаты выразить в километрах и в шагах сетки, равных 300 км.

Составить программу для ЭВМ. Произвести расчеты.

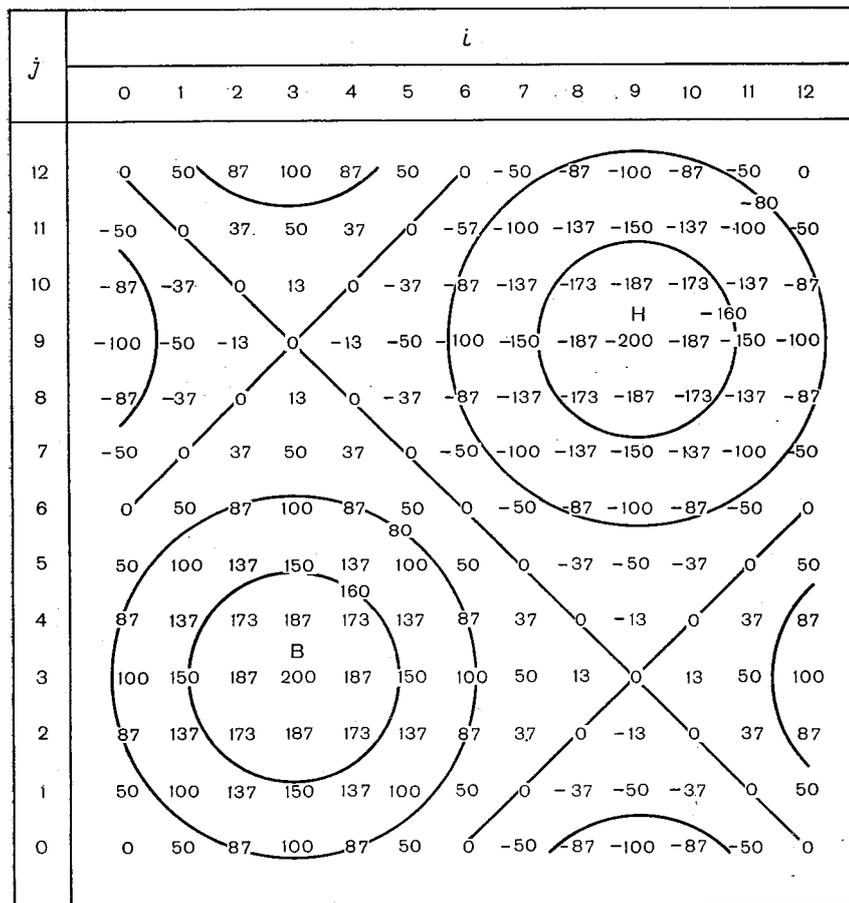


Рис. 9.2. Значения высоты изобарической поверхности (м) в узлах сетки.

Указание. Использовать теорию картографических проекций, изложенную в гл. 2 учебного пособия [1].

9.14. Разработать алгоритм и составить программу интерполяции высоты изобарической поверхности 500 мбар на ст. Прага по значениям высот на восьми станциях с заданными географическими координатами, приведенными в табл. 9.3, методом полиномиаль-

ной интерполяции при представлении поля $H(x, y)$ в виде полинома

$$H(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2,$$

считая, что:

9.14.1. Веса всех станций одинаковы ($g = 1$).

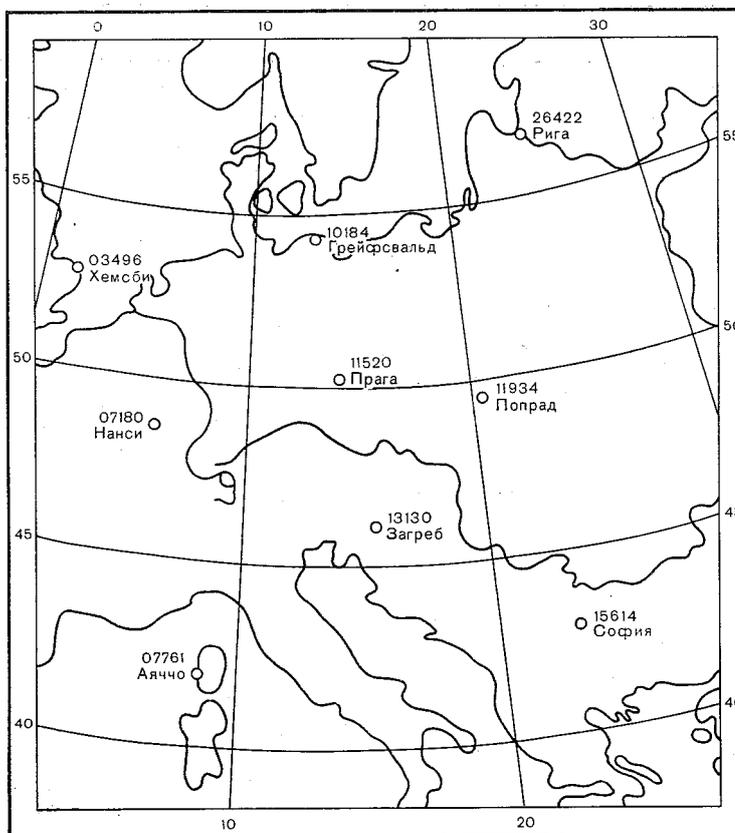


Рис. 9.3. Сеть станций.

9.14.2. Веса станций зависят от расстояний станции до точки, в которую производится интерполяция,

$$g_k = \frac{1}{1 + \alpha r_k^4},$$

где $\alpha = 10$, r выражено в тыс. км. Значения x и y взять по результатам решения задачи 9.13.

Произвести расчеты для 60 ситуаций по данным H , приведенным в табл. 9.4. Вычислить средние, средние абсолютные и средние квадратические ошибки интерполяции по 60 случаям.

Таблица 9.4

Значения высоты изобарической поверхности 500 мбар (H дам)
на девяти станциях (см. табл. 9.3) в 0 ч для ситуаций (дат)
($k = 1, 2, \dots, 60$)

k	Дата	Индекс станции (без номера района)								
		520	496	422	614	761	184	934	130	180
1	16 X 1969	73	78	68	74	73	74	74	72	79
2	18 X	76	78	73	71	70	81	78	76	75
3	20 X	76	65	78	69	71	75	75	73	70
4	23 X	73	69	55	71	79	69	72	78	76
5	26 X	67	84	56	70	68	73	66	66	78
6	29 X	74	71	45	70	87	61	64	76	81
7	31 X	47	69	13	58	69	42	39	55	69
8	2 XI	64	67	13	68	79	52	62	70	73
9	5 XI	58	39	26	73	71	35	63	70	64
10	8 XI	45	33	42	58	63	39	49	55	45
11	12 XI	63	36	44	77	77	50	65	70	57
12	17 XI	52	27	39	70	65	43	57	59	48
13	19 XI	46	56	26	63	58	29	44	49	60
14	22 XI	58	40	32	74	62	48	62	64	54
15	26 XI	32	20	33	59	31	26	42	34	20
16	30 XI	36	37	24	56	47	25	40	45	34
17	1 XII	43	57	36	56	49	39	47	46	43
18	10 XII	52	66	55	52	45	64	57	50	60
19	13 XII	52	45	56	52	58	50	47	54	49
20	18 XII	36	35	40	39	53	32	36	42	42
21	21 XII	43	50	38	43	42	42	43	43	50
22	27 XII	47	52	51	49	39	50	43	47	51
23	30 XII	37	43	40	45	37	34	35	35	38
24	6 I 1970	30	20	24	64	49	14	41	45	27
25	13 I	42	31	47	56	35	41	47	45	38
26	15 I	46	33	34	54	51	39	44	50	42
27	17 I	40	42	37	53	40	40	42	38	46
28	20 I	54	64	51	38	62	56	50	50	65
29	21 I	53	57	52	40	64	55	49	50	61
30	28 I	44	53	37	62	61	38	46	57	53
31	30 I	59	42	23	46	55	39	36	38	48
32	1 II	35	50	39	48	49	43	43	39	48
33	3 II	38	24	34	40	61	22	40	43	49
34	7 II	31	30	08	55	53	17	32	42	35
35	12 II	25	31	12	41	54	21	24	30	34
36	20 II	44	37	33	46	64	35	39	46	55
37	22 II	37	44	38	43	63	32	35	46	54
38	24 II	23	36	29	40	62	34	29	34	48
39	27 II	35	37	44	34	27	39	32	29	34
40	3 III	22	14	19	35	38	09	26	29	22
41	5 III	30	17	54	41	29	28	35	24	15
42	9 III	36	24	47	55	45	29	47	46	26
43	15 III	49	54	43	52	35	47	47	45	46
44	20 III	33	52	22	43	47	24	31	35	50
45	22 III	54	39	29	45	72	45	49	60	56
46	28 III	25	34	31	60	54	13	36	41	30
47	31 III	42	23	18	57	61	27	42	50	44

Продолжение табл. 9.4

k	Дата	Индекс станции (без номера района)								
		520	496	422	614	761	184	934	130	180
48	4 IV	25	34	40	42	42	26	24	27	37
49	6 IV	33	32	31	44	45	16	38	36	14
50	11 IV	34	32	30	63	48	29	42	46	36
51	14 IV	45	51	35	57	61	45	45	50	47
52	16 IV	64	70	55	50	67	62	54	58	73
53	19 IV	61	44	51	60	75	50	60	67	64
54	23 IV	68	53	42	76	76	56	68	73	72
55	27 IV	43	35	49	69	58	35	47	50	38
56	3 V	52	70	57	47	61	55	49	47	67
57	5 V	63	63	71	49	62	64	65	60	65
58	7 V	60	55	75	65	53	70	66	63	64
59	9 V	60	56	71	70	66	62	65	58	53
60	12 V	47	56	62	70	57	50	56	54	48

9.15. Сделать то же, что в задаче 9.14, методом оптимальной интерполяции, полагая, что $\eta = 0,02$.

9.16. Сделать то же, что и в задаче 9.14, методом последовательных приближений при использовании трех приближений. Принять, что $H_i^n = 530$ дам.

Ответы и решения

9.1. Число узлов сетки — 3249. Широта угловых точек сетки — $0,437 \cdot 10^{-1}$ град.

Решение. Расстояние между полюсом и экватором на данной картографической проекции составляет $k = a \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6371 \times 1,866 = 11\,888,5$ км. При шаге сетки $\delta s = 300$ км диагональ квадрата сетки составляет $d = 300\sqrt{2} = 424,3$ км. Деля диаметр экватора на картографической проекции, равный $2 \cdot 11\,888,5 = 23\,777$ км, на величину d , получаем число шагов сетки по одной оси. $23\,777 : 424,3 \approx 56,04$, или после округления — 56. Очевидно, что число узлов сетки по одной оси равно $56 + 1 = 57$. Тогда общее число узлов сетки составит $57 \times 57 = 3249$.

Широту угловых точек сетки найдем из соотношения

$$\sin \varphi = \frac{1 - \left(\frac{\rho}{k}\right)^2}{1 + \left(\frac{\rho}{k}\right)^2},$$

где $\rho = 423,3 \cdot 28 = 11\,879,4$ — расстояние угловых точек от полюса. Подставив значения ρ и k в приведенную формулу, получим

$$\varphi = \arcsin(0,763 \cdot 10^{-3}) \approx 0,437 \cdot 10^{-1} \text{ град.}$$

9.2.1. $n \approx (1 + \sqrt{2})m = 2,414m$; числа m и n должны быть одинаковой четности.

9.2.2. При $n = 51$, $m = 21$ (полюс находится между узлами сетки) $\delta s = 430,1$ км, при $n = 72$, $m = 30$ (полюс находится в узле сетки) $\delta s = 304,8$ км на широте 60° .

9.2.3. $N = (n+1)(m-1) + (n-m)(n-1) + (n-m+2)(n-m+4)$.
 При $n = 51$ $N = 3692$, при $n = 72$ $N = 7123$ узла.

Решение.

9.2.1. Из условия равенства всех сторон правильного восьмиугольника следует, что $m/a \approx 1$ (см. рис. 9.1). Но $a^2 = (n-m)^2 \frac{1}{2}$ и $a = (n-m) \frac{\sqrt{2}}{2}$. Поскольку в нашем примере $m/a \approx 1$, то $2m \approx \sqrt{2}(n-m)$, откуда и получаем ответ. Так как по смыслу задачи отрезок $b = \frac{1}{2}(n-m)$ должен включать целое число шагов сетки, то числа m и n должны быть одинаковой четности.

9.2.2. Используя полученное в 9.2.1 соотношение между m и n , учитывая, что m и n целые числа, и округляя результаты с учетом положения полюса, получаем: при $n = 51$ $m = 21$ и при $n = 72$ $m = 20$.

Рассматривая рис. 9.1, можно установить, что

$$(2k)^2 = (m^2 + n^2) \delta s^2.$$

Отсюда следует, что

$$\delta s = \frac{2k}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Для полярной стереографической проекции $k = 1,866a = 1,866 \cdot 6371 \text{ км} = 11\,888,5 \text{ км}$. Тогда

$$\delta s = \frac{23777}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Подставляя сюда значения m и n , получаем ответ.

9.3.

	$H_{i=0} = a_0 b$	$H_{i=0}^{\text{точ}}$	δ , дам
9.3.1	0	0	0
9.3.2	0	0	0
9.3.3	-2,8	0	-2,8
9.3.4	-1,2	0	-1,2

При «точных» значениях H_i (задача 9.3.1) и при значениях H с малыми ошибками (задача 9.3.2) результат интерполяции является хорошим при одинаковых весах g_i . При значительных ошибках (задачи 9.3.3 и 9.3.4) лучший результат получается при различных весах g_i (задача 9.3.4), когда точке с наибольшей ошибкой придается малый вес ($g_{i-1} = 0,1$).

Решение. На первом этапе составляем расчетную таблицу, а затем путем последовательных вычислений получаем коэффициенты системы нормальных уравнений.

Для вариантов 9.3.1 и 9.3.2 имеем:

9.3.1.

i	y_i	i^2	i^3	i^4	$y \cdot i$	$y \cdot i^2$
-3	-1,0	9	-27	81	3,0	-9,0
-1	-0,5	1	-1	1	0,5	-0,5
1	0,5	1	1	1	0,5	0,5
3	1,0	9	27	81	3,0	9,0
$\sum_i = 0$	0	20	0	164	7,0	0

9.3.2.

	-3	-0,95	9	-27	81	2,85	-0,55
	-1	-0,55	1	-1	1	0,55	-0,55
	1	0,55	1	1	1	0,55	0,55
	3	0,95	9	27	81	2,85	0,55
\sum_i	= 0	0	20	0	164	6,80	0

Соответствующие системы нормальных уравнений имеют вид:

9.3.1. $4a_0 + 0a_1 + 20a_2 = 0,$

$0a_0 + 20a_1 + 0a_2 = 7,$

$20a_0 + 0a_1 + 164a_2 = 0.$

9.3.2. $4a_0 + 0a_1 + 20a_2 = 0,$

$0a_0 + 20a_1 + 0a_2 = 6,8,$

$20a_0 + 0a_1 + 165a_2 = 0.$

Решая приведенные системы уравнений, находим:

9.3.1. $a_0 = 0, a_1 = 0,35, a_2 = 0.$

9.3.2. $a_0 = 0, a_1 = 0,34, a_2 = 0.$

Для вариантов 9.3.3 и 9.3.4 имеем:

9.3.3.

i	y_i	g_i	$g_i i$	$g_i i^2$	$g_i i^3$	$g_i i^4$	$g_i y_i$	$g_i y_i i$	$g_i y_i i^2$	
-3	-1,0	1,0	-3,0	9	-27	81	-1	3	-9	
-1	-0,5	1,0	-1,0	1	-1	1	-0,5	0,5	-0,5	
1	0	1,0	1,0	1	1	1	0	0	0	
3	1,0	1,0	3,0	9	27	81	1	3	9	
\sum_i	= 0	-0,5	4,0	0	20	0	164	-0,5	6,5	0,5

9.3.4

-3	-1,0	1,0	-3,0	9	-27	81	-1	3	-9	
-1	-0,5	1,0	-1,0	1	-1	1	-0,5	0,5	-0,5	
1	0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0	0	0	
3	1,0	1,0	3,0	9	27	81	1	3	9	
\sum_i	= 0	-0,5	3,1	-0,9	19,1	-0,9	163,1	-0,5	6,5	-0,5

Соответствующие системы нормальных уравнений имеют вид:

9.3.3. $4a_0 + 0a_1 + 20a_2 = -0,5,$

$0a_0 + 20a_1 + 0a_2 = 6,5,$

$20a_0 + 0a_1 + 164a_2 = -0,5.$

9.3.3. $3,1a_0 + (-0,9)a_1 + 19,1a_2 = -0,5,$

$(-0,9)a_0 + 19,1a_1 + (-0,9)a_2 = 6,5,$

$19,1a_0 + (-0,9)a_1 + 163,1a_2 = -0,5.$

Решая приведенные системы уравнений, находим:

9.3.3. $a_0 = -0,281, a_1 = 0,325, a_2 = 0,031.$

9.3.4. $a_0 = -0,120, a_1 = 0,332, a_2 = 0,018.$

9.4. $H_{0,5; 0,5} = H(x=y=0,5) =$
 $= H_4 + 0,5(H_3 - H_4) + 0,5(H_1 - H_4) + 0,25(H_2 + H_4 - H_1 - H_3).$

Решение. Подставляя значения x и y и H для каждой из заданных точек (узлов сетки), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} H_1 &= a_0 + a_2, \\ H_2 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3, \\ H_3 &= a_0 + a_1, \\ H_4 &= a_0. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$\begin{aligned} a_0 &= H_4, \quad a_1 = H_3 - H_4, \quad a_2 = H_1 - H_4, \\ a_3 &= H_2 - H_1 + H_4 - H_3. \end{aligned}$$

Подставляя в исходное уравнение, имеем

$$H(x, y) = H_4 + (H_3 - H_4)x + (H_1 - H_4)y + (H_2 + H_4 - H_1 - H_3)xy.$$

Придавая значения $x = y = 0,5$, получаем ответ.

9.5.

Точка	$H = a_0$	$H_{\text{точ}}$	δ дам
<i>a</i>	19,9	20,0	-0,1
<i>б</i>	0	0	0
<i>в</i>	-0,1	0	-0,1
<i>г</i>	0,0	10,0	-10,0

9.6.

Точка	$H = a_0$	$H_{\text{точ}}$	δ дам
<i>a</i>	17,5	20,0	-2,5
<i>б</i>	0	0	0
<i>в</i>	0	0	0
<i>г</i>	8,7	10,0	-1,3

9.7.

Точка	H_0	$H_{\text{точ}}$	δ дам
<i>a</i>	18,2	20,0	-1,8
<i>б</i>	-0,5	0	-0,5
<i>в</i>	-2,8	0	-2,8
<i>г</i>	8,9	10,0	-1,1

Решение. Система уравнений для определения весов p_j имеет вид:

$$\begin{aligned} 1,020p_1 + 0,966p_2 + 0,719p_3 + 0,536p_4 &= 0,869, \\ 0,966p_1 + 1,020p_2 + 0,869p_3 + 0,719p_4 &= 0,966, \\ 0,719p_1 + 0,869p_2 + 1,020p_3 + 0,966p_4 &= 0,966, \\ 0,536p_1 + 0,719p_2 + 0,966p_3 + 1,020p_4 &= 0,869. \end{aligned}$$

Коэффициенты p_j равны $p_1 = 0,125$, $p_2 = 0,400$, $p_3 = 0,400$, $p_4 = 0,125$.

9.8.

Точка	H_0	$H_{\text{Точ}}$	δ дам
<i>a</i>	20,7	20,0	0,7
<i>б</i>	0,3	0	0,3
<i>в</i>	0,9	0	0,9
<i>г</i>	10,5	10,0	0,5

Решение. $R^{v=1} = 660$ км, $R^{v=2} = 540$ км.

<i>i</i>	-2	-1	1	2
r_i^2	360 000	90 000	90 000	360 000
$W^{v=1}(r_i)$	0,10	0,66	0,66	0,10
$W^{v=2}(r_i)$	0	0,53	0,53	0

В первом приближении: $H_a = 22,5$; $H_b = -5,2$; $H_v = -2,5$; $H_g = 8,6$ дам.
 9.9. $H_{00} = a_0 = 0,6$ дам; $\delta = 0,6$ дам.

Решение. Введем безразмерную переменную $y = H/100$. Значения y представим в виде

$$y = b_0 + b_1i + b_2i^2 + b_3s.$$

На основе исходных значений H получаем систему уравнений для определения коэффициентов b :

$$\begin{aligned} 1,0b_0 + 0,6b_1 + 5,4b_2 - 0,4b_3 &= 0,1, \\ 0,6b_0 + 5,4b_1 - 3,0b_2 + 0,2b_3 &= 1,5, \\ 5,4b_0 - 3,0b_1 + 39,0b_2 - 1,0b_3 &= -0,1, \\ -0,4b_0 + 0,2b_1 - 1,0b_2 + 0,4b_3 &= -0,3. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, получаем $b_0 = 0,06$. Откуда $H_{00} = a_0 = 0,6$ дам.
 9.10. $H_{00} = -0,6$, $\delta = -0,6$ дам.

Решение. Система уравнений для определения весов p_j имеет вид:

$$\begin{aligned} 1,020p_1 + 0,233p_2 + 0,779p_3 + 0,492p_4 &= 0,748, \\ 0,233p_1 + 1,020p_2 + 0,210p_3 + 0,621p_4 &= 0,574, \\ 0,779p_1 + 0,210p_2 + 1,020p_3 + 0,574p_4 &= 0,622, \\ 0,492p_1 + 0,621p_2 + 0,574p_3 + 1,020p_4 &= 0,721. \end{aligned}$$

Коэффициенты p_j равны: $p_1 = 0,560$, $p_2 = 0,259$, $p_3 = -0,041$, $p_4 = 0,302$.
 9.11. $H_{00} = -1,5$, $\delta = -1,5$ дам.

Решение. $R^{v=1} = 1200$, $R^{v=2} = 1080$.

	$i = -2$ $s = 0$	$i = 3$ $s = 0$	$i = -2$ $s = -1$	$i = 1$ $s = -1$	
\tilde{r}_{is}^2	360 000	810 000	1 170 000	900 000
$W^{v=1}(\tilde{r}_{is})$	0,60	0,28	0,10	0,23
$W^{v=2}(\tilde{r}_{is})$	0,53	0,18	0	0,13

9.12. Имеется грубая ошибка в данных о высоте изобарической поверхности 700 мбар.

Приложение 1

Единицы некоторых физических величин в различных системах

		Величины			
Система единиц	длина L	масса M	время T	сила (вес) F	
Международная, СИ (SI)	метр, м (m)	килограмм, кг (kg)	секунда, с (s)	ньютон, Н (N) = кг·м·с ⁻²	
Физическая, CGS (CGS)	сантиметр, см (cm), 1 см = 10 ⁻² м	грамм, г (g), 1 г = 10 ⁻³ кг	секунда, с	дина, дин (dyn) = г·см·с ⁻² 1 дин = 10 ⁻⁵ Н	
Промышленная, МТС (MTS)	метр, м, 1 м = 10 ² см	тонна, т (t), 1 т = 10 ³ кг = 10 ⁶ г	секунда, с	стен, сн (sn) = т·м·с ⁻² , 1 сн = 10 ³ Н = 10 ⁸ дин	
Практическая, МКС (MKS)	метр, м, 1 м = 10 ² см	килограмм, кг, 1 кг = 10 ³ г	секунда, с	ньютон, Н = кг·м·с ⁻² , 1 Н = 10 ⁵ дин	
Техническая, МКГСС (MKGS)	метр, м, 1 м = 10 ² см	инерта, и = кгс·с ² ·м ⁻¹ , 1 и = 9,81 кг = 9,81·10 ³ г	секунда, с	килограмм-сила, кгс (kg) 1 кгс = 9,81 Н = 9,81·10 ⁵ дин	

Продолжение приложения 1

Система единиц	Величины			мощность, тепловой поток N
	давление P	работа, энергия, количество теплоты A		
Международная, СИ (SI)	паскаль, Па (Pa) = Н·м ⁻² = кг·м ⁻¹ ·с ⁻² = 10 дин·см ⁻² = 10 г·см ⁻¹ ·с ⁻² = 10 ⁻² мбар	джоуль, Дж (J) = Н·м = кг·м ² ·с ⁻² 1 Дж = 10 ⁷ эрг = 0,2388 кал		ватт, Вт (W) = Дж·с ⁻¹ = кг·м ² ·с ⁻³
Физическая, СГС (CGS)	дин·см ⁻² = 0,1 Па = г·см ⁻¹ ·с ⁻² = 10 ⁻¹ Н·м ⁻² = 10 ⁻³ мбар	эрг, эрг (erg) = дин·см = г·см ² ·с ⁻² , 1 эрг = 10 ⁻⁷ Дж		эрг·с ⁻¹ = г·см ² ·с ⁻³ , 1 эрг·с ⁻¹ = 10 ⁻⁷ Вт
Промышленная, МТС (MIS)	сантибар, сбар = см·м ⁻² = г·м ⁻¹ ·с ⁻² , 1 сбар = 10 ³ Н·м ⁻² = 10 ⁻² бар = 10 мбар	килоджоуль, кДж (kJ) = см·м = т·м ² ·с ⁻² , 1 кДж = 10 ³ Дж = 10 ¹⁰ эрг		киловатт, кВт (kW) = кДж·с ⁻¹ = т·м ² ·с ⁻³ , 1 кВт = 10 ³ Вт = 10 ¹⁰ эрг·с ⁻¹
Практическая, МКС (MKS)	Н·м ⁻² = кг·м ⁻¹ ·с ⁻² , 1 Н·м ⁻² = 10 ⁻⁶ бар = 10 ⁻² мбар	джоуль, Дж = Н·м = кг·м ² ·с ⁻² , 1 Дж = 10 ⁷ эрг		ватт, Вт = Дж·с ⁻¹ = кг·м ² ·с ⁻³ , 1 Вт = 10 ⁷ эрг·с ⁻¹
Техническая, МКГСС (MKGS)	кгс·м ⁻² , 1 кгс·м ⁻² = 9,81 Н·м ⁻²	килограммометр, кгМ (kgM) = кгс·м, 1 кгМ = 9,81 Дж = 9,81·10 ⁷ эрг		кгМ·с ⁻¹ , 1 кгМ·с ⁻¹ = 9,81 Вт = 9,81·10 ⁷ эрг·с ⁻¹

Приложение 2

Случайные числа

2215	6716	0176	7252	7362	7988	0340	4740	9958	3951
0594	6677	4277	5312	9787	0195	4773	8368	4190	1226
2537	0650	5050	0838	1868	4562	7910	4780	3305	5591
8186	6897	9319	8452	0781	3957	5828	4597	3837	5648
9810	4151	1302	4064	5397	0163	8005	1704	7584	8098
8101	3288	8794	6632	1275	4104	1253	4268	9849	4428
7102	3728	6105	3900	7778	7402	2163	4597	3977	4311
4919	7877	7875	9568	1967	6554	0086	2863	3259	9357
3087	5020	9626	0297	1020	5425	9894	4126	5566	8815
0308	6808	5926	5287	0757	1570	2555	1607	2272	3574
1666	4644	7873	5759	1931	9136	0537	5600	3957	7263
5200	8994	7981	5227	1910	1458	4331	9555	4483	4152
5997	5551	8698	6322	2079	0158	0154	1124	8923	8253
5094	5432	1067	8922	5909	6021	7623	2107	5760	8631
2424	2394	1666	1562	5058	9662	1702	6044	4689	6547
9096	7615	0264	1638	0543	3464	2397	2029	3949	9953
2180	7723	7882	3109	5740	6742	8607	1382	4273	2461
5496	3741	3667	5732	3000	3624	5383	1839	7732	5854
9815	2164	6735	8960	1680	2555	1290	2427	3379	1289
8458	6454	3571	3332	3690	1040	5670	4057	1880	8429
9541	0812	0753	3456	6915	0349	7808	2446	5744	2542
9220	2718	2215	0650	6249	1074	7385	7285	0876	9936
3271	2196	1505	6897	2636	0969	0739	7120	2497	6977
1704	0664	9425	4151	6825	1131	4928	7378	6629	8323
8659	9807	3789	8110	8213	5904	2732	4430	2464	5291
9539	4996	1702	7328	1833	2602	8441	3343	7116	6341
0375	7329	4919	8777	3755	4500	0833	9356	6532	0346
9497	6558	3087	5020	8372	9025	0021	6865	5386	2952
8086	0183	0308	6808	7818	0142	8432	3434	9674	7282
9535	5419	3288	1666	2020	2762	1460	3566	2922	7744
4025	1539	5200	8086	8279	5689	7175	9724	3276	7123
4373	7988	5997	9354	9020	0212	4785	7331	4234	4754
6297	0195	5094	5515	2782	5094	2496	9939	4967	6752
7186	4562	2224	4322	7374	0189	0670	1668	8268	4268
8078	9570	4644	3949	2227	7809	3991	2091	3416	2877
1604	0207	0962	6175	7250	4736	7830	1333	1971	6258
6312	5741	1805	7723	5842	3786	3291	2713	6636	4968
7577	0474	4996	3741	8138	5962	7690	4580	8431	8203
7819	2605	8158	2664	7201	9312	7474	2216	3386	7898
6310	5452	4587	6454	5827	8360	6309	0960	7615	2412
5157	9243	9541	0812	5241	8483	5534	4981	3964	9813
0183	2020	9220	2718	5300	3004	3060	4441	1999	1634
9281	4341	3272	2196	4309	4180	3053	2214	9862	4919
0153	9570	1704	0664	6533	1469	1945	0176	7266	4192
5860	2457	8659	9807	1462	8855	4372	1684	6002	2486
6791	1201	9539	2965	1235	7279	1299	8263	9533	4046
1022	9466	0375	5801	3202	5977	8050	6344	5699	6255
6944	1332	9497	6354	1291	3294	4921	0205	9217	3073
8706	8063	3549	1940	2690	7786	1597	3643	5137	4281
8295	0176	4973	2543	3644	3857	5530	1443	2340	6038
3617	2695	6033	4897	1861	9772	6807	2032	8889	9478

¹ Янко Я. Математико-статистические таблицы. М., Госстатиздат, 1961, 243 с.

Продолжение приложения 2

5597	7749	1911	5101	1952	3707	8153	7010	3760	0202
9108	4777	3450	1479	6380	7954	9798	4191	3643	7982
8677	1526	9362	4810	8831	5217	8019	6031	5441	9141
4857	4364	7540	4365	8179	9430	5192	6962	5076	1500
1218	2074	5893	2599	3795	9082	0540	3343	5061	2512
4606	2484	5415	2139	4324	6881	6976	1020	1056	2442
2713	6196	4336	4778	9366	1376	2045	3051	7128	9056
7818	7151	5126	0262	4002	1722	0022	6020	4107	2635
2940	7567	9389	1771	6315	1685	6284	6440	5387	1199
1204	4917	3690	3581	6603	4221	2338	1295	9815	6337
3457	7112	6741	6919	2574	8136	7378	6057	5580	3284
7639	8567	8636	2255	0671	0039	0960	2904	5720	5479
4526	3143	3336	7305	8358	8905	9605	7747	2493	0203
6871	7606	9020	1501	1826	2010	9814	5467	9106	3272
6527	9712	1078	5129	3277	2022	4562	6324	2071	1995
3512	3182	2816	1030	1096	6232	9570	2758	0640	0424
9162	4092	6975	2917	7182	1646	1115	8900	1428	1092
0957	1243	0173	4674	4658	1202	5891	1582	4123	6758
5453	7065	3998	2753	1332	8627	6732	7472	8158	8083
4628	1315	5809	9384	9755	1434	4080	1033	6467	5358
0723	8419	9258	8300	1735	2040	4708	4354	6072	6092
5858	9158	5360	9242	3447	0996	4362	3136	9927	4320
4340	6877	3777	7248	7661	9281	1532	5010	8392	2044
2535	7180	5967	8560	3712	1516	2448	1226	8101	3195
2747	6862	2357	5975	5702	0935	7733	6266	7024	0682
1093	5341	9113	1101	7833	8074	1103	8348	5767	3912
5884	2038	4949	4794	9666	3355	9612	5099	9101	9041
2427	6884	3626	8104	5673	7332	0692	8282	2269	6615
0615	7272	5404	3657	3090	2054	2497	8349	4487	5280
0609	5278	5935	5982	3732	0924	2146	9721	6301	9626
4325	9050	4154	1394	8159	3200	7338	8053	7648	5926
0698	6177	3365	2679	8392	2443	4027	6538	3008	2173
5700	4496	0259	2621	8101	1987	2474	6660	6105	7645
1336	6351	3892	7713	3586	0682	3332	0818	7875	7295
2682	2013	6003	7033	9330	7723	9847	4286	2531	9090
7757	5813	9451	1374	0667	3741	5032	4805	2083	5608
2458	0192	0737	1671	6033	2164	0952	7082	8845	9752
9464	2857	5199	4476	8994	6454	2634	4087	2406	8778
4270	4071	0935	2981	5615	9541	2585	3406	6323	7379
5031	9985	3334	4901	1350	2319	1756	3312	2770	5227
0278	1290	7792	1702	3279	3008	6954	3345	5509	0322
8177	0132	5423	3639	7291	6105	8740	7259	3191	8922
7050	9184	0000	2637	1417	7875	3645	4348	0306	1562
1733	6746	1548	1921	5301	9626	4200	0865	5759	9264
7535	0215	0658	6228	5926	7827	4140	1770	7882	1309
3825	3020	7736	9178	2173	3266	5153	8645	3687	3257
8537	1392	1365	2184	7640	5280	3210	1181	6735	8960
0377	2487	6451	9192	6466	8697	6040	4283	3571	3332
7596	9486	1942	9618	3234	9718	3782	8361	1636	9753
2182	1666	7373	4982	2368	2613	9025	2836	8493	8207
1549	8441	3351	3079	0026	4161	6224	4184	2633	2736
5118	4796	7035	2010	3449	7061	3847	9508	4528	1226
6348	3420	6583	7520	4809	1575	3209	9070	0644	3614
3309	4853	4021	8644	3980	5318	1959	4783	1810	2020
2050	3603	1812	4020	6573	0312	7739	9374	4788	4350
6817	6736	4591	9037	2949	7406	4238	4279	6206	1699
8310	3044	0433	1322	7664	3310	2487	3926	2233	8260

Продолжение приложения 2

7050	7670	1848	5173	2146	1289	8504	0911	2001	5804
5637	5325	9367	5939	3191	5930	3361	6743	5995	4194
8251	3537	5139	5050	1516	8792	5513	5583	6103	9872
6129	7391	0429	2836	5284	5485	2643	4035	3089	4991
1311	4847	2317	3561	4533	6655	7354	1903	6909	9776
5151	2477	3250	7859	1764	1590	3309	2555	9434	3869
4245	4289	9301	4788	3937	9122	9301	4741	0683	0253
3395	7157	1084	0561	8388	7575	7513	0431	9659	8204
6542	9575	7896	7029	4986	6632	8145	7080	3287	3336
8008	1543	2019	3678	9248	2452	1224	0260	4158	3735
3370	3763	4713	4726	7010	3736	2412	9066	8663	5408
9306	0691	3221	3010	5948	5659	4145	2452	3340	5540
2166	2583	6878	3080	6318	6494	8057	7173	5753	3592
6844	3518	1638	7438	6106	2268	6361	7008	7995	8010
1479	7233	3827	9134	1023	6356	5108	3033	3546	0827
6342	6329	1364	1015	3892	5611	7390	2421	9873	9796
0485	7584	6030	2040	8568	3539	6208	9450	7613	4591
3603	9141	3778	1939	2596	5841	0528	4948	3849	4894
6736	5786	4356	9390	7245	7645	6476	1022	3393	5062
3044	9355	5064	6508	6771	2173	0511	7104	6753	6486
7670	6721	2387	4220	9357	2070	8506	9126	4729	1798
5325	7972	3664	8187	2040	3668	4930	9203	0248	8489
3537	8129	6485	3472	3915	2040	4353	8415	4506	3644
7391	3452	6919	3520	1417	7784	0734	7174	2648	6464
2066	3343	8506	9336	8366	9748	9925	4961	6179	0922
5120	2905	3163	6449	2833	2971	3390	4915	8231	6403
4058	0542	7260	9652	0310	5901	5420	9443	8654	5492
0079	8768	8409	2949	4751	5945	6473	7475	9696	2861
5609	9172	4284	2793	1333	2760	8276	6593	2346	7244
7070	3543	3812	8478	3696	8015	4970	1574	1636	6966
4748	0896	3758	6368	9968	6245	3108	9344	4513	0218
1093	8312	0310	1512	0178	6667	2966	0873	0582	7541
9818	4719	8187	6589	8807	2195	1160	4756	6503	1341
5690	7934	8875	9796	0520	7012	6355	5557	2070	5013
0943	8798	6149	5385	2884	1816	5453	8893	3695	4625
2166	5084	9117	0199	7127	4378	2940	2861	4690	5711
6702	2902	6365	7014	6121	5108	7369	7804	6732	3310
3208	4252	1361	8838	6770	9128	7183	8966	8292	9768
9692	1021	2415	6337	6060	5803	8205	2398	5607	0046
1211	1918	0260	7193	7603	8314	2891	9541	2529	6572
3230	7073	1890	4899	6533	4839	2512	0938	0233	7302
5969	3070	6557	9925	1969	4212	3052	4238	4210	6860
0315	9870	0611	0799	3905	3138	3326	7949	3657	5248
6970	4028	2192	6139	4041	4796	2730	1020	2418	9291
7669	5252	7613	7180	5878	8760	3502	5951	9024	3413
3030	4044	2628	4619	3946	4144	0733	9224	5937	1801
0820	8374	3852	3137	6565	7427	1125	5148	2787	8948
6713	9803	9650	5060	7665	3917	7169	8117	4134	4040
4159	9180	1702	3121	2651	1743	4469	6599	3945	4423
9205	2198	9098	1824	7501	7387	2085	9028	0523	3488
0642	1412	6797	9138	5612	5225	4842	7099	1096	1691
5811	9590	3383	0477	5168	4079	7351	6174	6420	6520
4043	8583	9226	8380	1588	6424	1467	2570	1911	2554
9044	5859	2998	3765	7890	9768	2748	7783	6226	1929
4119	6651	6116	5813	7584	3624	1827	6561	4344	3502
3071	5011	4724	3490	3027	9436	1063	8385	7194	0991
2117	7644	9041	1179	4972	2985	4648	4880	1792	3136

Продолжение приложения 2

4011	3379	9603	7710	8469	8415	0195	5304	9145	2952
3283	9340	7677	1030	6631	7848	5611	4655	3600	3247
0983	5962	5702	0111	3408	8431	2390	2577	8429	2124
9896	0924	3658	1160	2912	9604	4299	1437	9609	7960
9080	2770	9375	3482	7891	4243	7769	1416	3290	4908
2331	3275	2357	7034	6931	4191	3326	2359	8606	5618
1273	9284	0351	2933	0369	5071	3027	8864	5538	0402
2525	3418	9975	1270	8196	1222	2070	5888	6520	7531
3612	5917	0848	9251	2687	3028	3311	4212	3678	8329
2128	8715	7380	9909	5242	5295	2501	6973	0151	5918
5813	7559	0700	5044	7840	3276	4649	2130	5610	8698
0284	1165	0204	1979	6003	2037	2085	0252	1069	3909
5907	6341	6954	8087	4972	4567	4428	1070	1383	3132
3172	3029	6277	7802	2542	1230	7351	3682	7117	1579
2870	5272	8083	4891	2457	6454	1467	8316	6952	4926
1647	7625	6090	4160	1063	5348	2178	4344	2489	6748
0272	8560	1620	2840	0309	7828	8287	3591	9196	6066
2345	1697	9008	0216	4882	1141	1063	2021	7860	3272
7252	6238	8391	7864	1361	5476	4648	1360	9530	9445
5730	9716	1981	9070	1611	4965	1955	5019	0563	7412
8315	1131	3777	8591	6585	3221	6112	6249	3893	8862
0445	0798	8150	3607	3012	2154	3904	5838	0548	4642
2557	7357	6356	3663	0421	4892	2979	2184	3879	1363
6823	3161	5165	8385	9644	1386	7693	7101	5188	9010
9159	4392	2164	1710	8471	4561	7261	2057	7039	3718
2637	1631	2417	4367	5189	2147	9676	0702	2321	9391
7596	3195	4896	1051	4964	3373	8231	9180	8248	2602
0237	1091	8388	2607	0587	6878	1727	8998	4366	2820
6110	2852	5145	5735	1292	2668	2371	3034	8253	7349
2421	0423	5212	1121	6050	1561	1847	5446	3725	9698
5621	3423	1550	7330	7153	7937	1010	9147	3824	1460
2304	0934	9091	0491	1591	8478	3483	6965	6716	3141
7682	7096	3489	6030	2048	2598	8849	5825	2194	9491
3137	6080	1478	3818	3714	0133	0589	2164	3187	3118
0349	8411	8836	3981	3543	2876	1587	4454	4343	2129

Приложение 3

Перевод английских мер в метрические

Величина	Единица измерения	Значение в метрических единицах
Длина	1 дюйм	2,54 см
	1 фут	30,48 см
	1 ярд	91,44 см
	1 миля	1609,34 м
	1 морская миля между-народная	1852,34 м
	1 морская миля амери-канская	1859,25 м
Скорость	1 узел (1 морская миля в ч)	1853,25 м/ч = 0,515 м/с
Масса	1 фунт	0,4536 кг
	1 унция	28,3495 г
Температура	1 карат	0,2 г
	1 градус Фаренгейта	5/9° C
	1 градус Реомюра	5/4° C

Приставки для образования кратных и дольных единиц

Приставки кратных единиц	Отношение к основной единице	Обозначение	Приставки кратных единиц	Отношение к основной единице	Обозначение
Тера	10 ¹²	Т (T)	Деци	10 ⁻¹	д (d)
Гига	10 ⁹	Г (G)	Санتي	10 ⁻²	с (c)
Мега	10 ⁶	М (M)	Милли	10 ⁻³	м (m)
Кило	10 ³	к (k)	Микро	10 ⁻⁶	мк (μ)
Гекто	10 ²	г (h)	Нано	10 ⁻⁹	н (n)
Дека	10 ¹	да (da)	Пико	10 ⁻¹²	п (p)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белов П. Н. Численные методы прогноза погоды. — Л.: Гидрометеоздат, 1975. — 392 с.
2. Белоусов С. Л. и др. Обработка оперативной метеорологической информации с помощью электронно-вычислительных машин/С. Л. Белоусов, Л. С. Гандин, С. А. Машкович. — Л.: Гидрометеоздат, 1968. — 280 с.
3. Блинова Е. Н. Динамика атмосферных движений планетарного масштаба и гидродинамический долгосрочный прогноз погоды. — Труды Гидрометцентра СССР, 1967, вып. 15, с. 3—25.
4. Гандин Л. С., Дубов А. С. Численные методы краткосрочного прогноза погоды. — Л.: Гидрометеоздат, 1968. — 427 с.
5. Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. — М.: Гостехиздат, 1957. — 375 с.
6. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1979. — 831 с.
7. Лекции по численным методам краткосрочного прогноза погоды. — Л.: Гидрометеоздат, 1969. — 734 с.
8. Марчук Г. И. Численные методы в прогнозе погоды. — Л.: Гидрометеоздат, 1967. — 356 с.
9. Пановский Г. С., Брайер Г. В. Статистические методы в метеорологии. — Л.: Гидрометеоздат, 1967. — 242 с.
10. Практикум по численным методам прогноза погоды. — Л.: Гидрометеоздат, 1978. — 216 с.
11. Чертков А. Г. Единицы физических величин. — М.: Высшая школа, 1977. — 287 с.
12. Яворский Б. М., Детлаф А. А. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов. — М.: Высшая школа, 1978. — 942 с.

Павел Николаевич Белов

СБОРНИК УПРАЖНЕНИЙ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ ПРОГНОЗА ПОГОДЫ

Редактор Г. И. Слабкович. Художник В. А. Тюлюкин.
Технический редактор В. И. Семенова. Корректор Г. С. Макарова

ИБ № 496.

Сдано в набор 24.01.79. Подписано к печати 6.12.79.
М-13284. Формат бумаги 60×90^{1/16}. Бумага тип. № 1.
Лит. гарн. Печать высокая. Печ. л. 8,5. Уч.-изд. л. 9,13.
Тираж 2 600 экз. Индекс МЛ-78. Зак. 1252. Цена 30 коп.

Гидрометеоздат. 199053 Ленинград, 2-я линия, 23.

Ленинградская типография № 6 Ленинградского
производственного объединения «Техническая книга»
Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
193144, Ленинград, С-144, ул. Моисеенко, 10

Отпечатано в Ленинградской типографии № 8 ЛПО
«Техническая книга» Союзполиграфпрома при Государственном
комитете СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли.

190000, Ленинград, Прачечный пер., 6