

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

---

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

*Р. П. РЕПИНСКАЯ*

## КВАЗИСОЛЕНОИДАЛЬНЫЕ ПРОГНОСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

*Утверждено ученым советом института  
в качестве учебного пособия*

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
имени М. И. КАЛИНИНА

ЛЕНИНГРАД  
1985

УДК 551.509.333

Р44

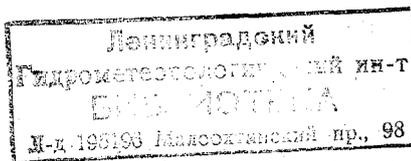
Репинская Р. П. Квазисолеоидальные прогностические модели. Учебное пособие. — Л., изд. ЛПИ, 1985, 52 с. (ЛГМИ)

В учебном пособии излагаются вопросы солеоидального и квазисолеоидального баротропного и бароклинного прогнозов и устойчивости соответствующих численных схем. Обсуждаются пути уточнения гипотезы квазисолеоидальности.

Материал излагается в соответствии с действующей программой курса «Численные методы прогноза погоды». Учебное пособие предназначено для студентов-метеорологов гидрометеорологических институтов и географических факультетов университетов.

Табл. 1. Илл. 4. Библ. 8.

Рецензенты: кафедра гидрометеорологического обеспечения ВИКИ имени А. Ф. Можайского; Л. К. Ефимова, канд. физ.-мат. наук (ГГО имени А. И. Воейкова).



© Ленинградский гидрометеорологический институт (ЛГМИ), 1985.

## ВВЕДЕНИЕ

В атмосфере имеет место резко выраженная многомасштабность элементов движения, поэтому в основу любой прогностической модели должна быть положена система уравнений динамики, адекватная задаче предвычисления учитываемых процессов. Рассмотрим кратко физические гипотезы, на основании которых можно проводить приспособление исходных уравнений динамики атмосферы применительно к движениям различных пространственно-временных масштабов.

Напомним, что атмосферные движения представляют собой совокупность вынужденных и собственных колебаний атмосферы, имеющих различные амплитуды, длину и скорость. Вынужденные колебания возникают под действием притяжения Луны, орोगрафии, притока солнечной радиации и других факторов. Примером собственных колебаний атмосферы являются длинные волны, возникающие под действием инерционных сил, обусловленных движением воздуха на вращающейся Земле.

Все волновые возмущения подразделяются на звуковые, гравитационные и инерционные.

Звуковые волны возникают при сжатии или разряжении воздуха. Их длина от нескольких сантиметров до десятков и сотен метров. Однако имеются типы звуковых волн с длиной до сотен километров. Перемещаются звуковые волны со скоростью около  $300 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ .

Гравитационные волны чаще всего возникают на поверхностях раздела (фронты, инверсии, тропопауза) под действием силы тяжести при нарушении равновесия. Длина гравитационных волн от нескольких десятков до сотен километров, скорость распространения зависит от длины волны и равна  $100 \div 300 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ .

Инерционные волны (волны Россби) имеют длину от  $2 \div 4$  до  $10$  тыс. км, перемещаются преимущественно с запада на восток со скоростью, как правило, не превышающей  $50 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ . Однако некоторые типы очень длинных волн (например, суточная волна в полях температуры, давления и движения) распространяются со скоростями несколько сот метров в секунду. Длинные волны имеют важное значение для метеорологии, так как с ними связаны наиболее существенные изменения погоды. Действительно, амплитуда их в поле давления достигает  $100 \text{ гПа}$ , гравитационных — до  $10 \text{ гПа}$ , а звуковых — лишь доли гектопаскаля. Очевидно, что

звуковые волны не могут оказывать заметного влияния на погодообразующие процессы. Взаимодействие же гравитационных волн с длинными в некоторых случаях определяет эволюцию барических образований (главным образом, в самых начальных стадиях цикло- и антициклогенеза).

Уравнения динамики атмосферы в их общей форме справедливы для движений любых масштабов и периодов. Однако основные свойства движений различных масштабов существенно различны, так как их изменения во времени и в пространстве определяются различными физическими факторами. Математическая сторона проблемы заключается в том, что при изменении длины волнового вектора и частоты колебания изменяется соотношение членов в уравнениях динамики. Поэтому при прогнозе каждого класса движений целесообразно выделить наиболее важные факторы и ввести соответствующие упрощения в исходные уравнения, так как учет второстепенных факторов может скрыть основные особенности перестройки термобарического поля.

Рассмотрим сформулированную проблему подробнее. Если бы удалось получить точные решения неупрощенных уравнений, то эти решения описывали бы эволюцию длинных, гравитационных и звуковых волн. Однако уравнения динамики нелинейны, поэтому при практической реализации моделей атмосферы приходится использовать приближенные методы интегрирования. Используя такие решения для описания звуковых и гравитационных волн, необходимо в процессе интегрирования уравнений соблюдать определенные соотношения между временным ( $\Delta t$ ) и пространственным ( $\Delta s$ ) шагами, детально задавать начальные и граничные условия. В противном случае возникают ложные колебания\*, скорости перемещения и периоды которых близки к соответствующим значениям для реальных гравитационных и звуковых волн. В процессе интегрирования уравнений по времени амплитуды ложных возмущений могут быстро возрасти и превысить амплитуду длинных волн. Ясно, что наличие мелкомасштабных быстро распространяющихся гравитационных и звуковых волн сильно затрудняет интегрирование уравнений динамики в целях прогноза погоды. Поэтому при разработке численных схем необходимо так упростить систему уравнений, чтобы она не содержала решений, описывающих мелкомасштабные волны, а также селективно подавлять и отфильтровывать ложные возмущения.

Основные идеи упрощения уравнений динамики атмосферы применительно к задаче прогноза погоды (квазистатическое, квазигеострофическое и квазиadiaбатическое приближения) были выдвинуты И. А. Кибелем (1940 г.). В рамках поставленной задачи мы рассмотрим первые две гипотезы.

\* Возмущения, появляющиеся вследствие низкого качества наблюдений, ошибок интерполяции данных со станций в узлы регулярной сетки, трункационных ошибок и других причин.

Квазистатическое приближение заключается в том, что вместо третьего уравнения движения используют уравнение статики и таким образом полностью исключают из рассмотрения мелкомасштабные движения типа звуковых волн\*. Уравнение неразрывности в квазистатических схемах должно описывать закон сохранения массы для несжимаемой среды. Однако квазистатическое условие само по себе менее ограничительное.

Гипотеза квазигеострофичности заключается в том, что движение воздуха считается близким к геострофическому. Можно показать, что применение этой гипотезы позволяет исключить решения для гравитационных волн. Однако, фильтруя гравитационные волны, мы иногда исключаем возможность предвычислить развитие синоптически значимых волновых возмущений, которые в ряде случаев имеют в начальной стадии развития такой же характерный масштаб, какой содержат гравитационные волны или ложные возмущения. Внутренние гравитационные и звуковые волны, несмотря на малость их амплитуд и малый вклад в формирование поля ветра, приводят к адаптации полей давления и движения, то есть являются не только механизмом в приспособлении движения к геострофическому, но и причиной нарушения геострофического равновесия\*\*. Поэтому исключение гравитационных волн для прогностических задач является излишне жестким требованием, приводящим к заметному снижению оправданности прогнозов крупномасштабных явлений погоды (особенно при резких перестройках атмосферных процессов, поскольку в этих ситуациях мелкомасштабные быстро распространяющиеся волны играют главную роль).

Квазистатические и квазигеострофические схемы обладают рядом специфических недостатков (плохо прогнозируется возникновение новых барических центров, занижается скорость их перемещения, в низких широтах имеет место ложный антициклогенез), что привело к отказу от геострофического приближения и к использованию более реалистических соотношений между полями ветра и давления, учитывающих более тонкую структуру связи. Непо-

\* При этом фильтруются и мезомасштабные процессы, обусловленные действием архимедовой силы.

\*\* При несоответствии полей давления и ветра, вызванном местными возмущениями барического поля, возникает аperiodический процесс, приводящий к стационарному состоянию, удовлетворяющему условию геострофичности. Происходит взаимная подстройка полей, при этом особенно быстро изменяется поле давления, приспособливаясь к полю движения. Время, необходимое для восстановления геострофического равновесия, составляет 1-1,5 часа. Процесс адаптации сопровождается уменьшением кинетической энергии, так как часть ее расходуется на генерацию волновых возмущений.

Таким образом, в атмосфере непрерывно происходят два противоположных процесса. С одной стороны, в результате влияния рельефа, неадиабатичности и других факторов происходит нарушение геострофичности и порождение волновых движений. С другой стороны, волновые движения приводят к адаптации полей и восстановлению геострофичности. Поэтому в свободной атмосфере ветер всегда близок к геострофическому.

средственным обобщением геострофического приближения является гипотеза квазисоленоидальности. Преимущество квазисоленоидальных моделей — частичный учет агеострофического ветра — является весьма важным, так как в среднем агеострофический ветер составляет 20—30% от полной скорости, а максимальные значения его связаны с зонами резкой перестройки термобарического поля.

### 1. ГИПОТЕЗА КВАЗИСОЛЕНОИДАЛЬНОСТИ

Соленоидальным называется вектор, дивергенция ( $D$ ) которого равна нулю. Такой вектор всегда можно представить в виде вихря некоторого потенциального вектора. Если горизонтальную компоненту вектора скорости  $\vec{C}$  стилизовать в виде соленоидального вектора, то по определению должно выполняться следующее соотношение:

$$\operatorname{div} \vec{C} = D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1.1)$$

Уравнение (1.1) представляет собой частный случай уравнения неразрывности и описывает закон сохранения массы несжимаемой атмосферы при плоском движении.

Двумерный соленоидальный вектор можно выразить через единственную скалярную функцию — функцию тока  $\psi$  [ $\text{м}^2/\text{с}$ ] для плоского движения. Действительно, если положить, что компоненты соленоидального ветра равны

$$u_\psi = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1.2)$$

то уравнение (1.1) тождественно удовлетворяется. Уравнение линий тока  $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$  приобретает вид  $d\psi = 0$  и означает, что в случае бездивергентного движения функция тока постоянна вдоль каждой линии тока.

Выясним, в какой части атмосферы лучше всего выполняется соленоидальное приближение. С этой целью сначала сравним порядки величин  $D$  и среднего значения ее при осреднении по давлению. Будем рассматривать движение над плоской подстилающей поверхностью. Воспользуемся уравнением неразрывности в изобарической системе координат (ИСК)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \zeta} = 0, \quad (1.3)$$

где  $\dot{\omega} = \frac{1}{p_0} \frac{dp}{dt}$  — аналог вертикальной скорости. Проинтегрируем уравнение (1.3) по переменной  $\zeta$  от верхней ( $\zeta = \frac{p}{1000} = 0$ ) до ниж-

ней границы атмосферы ( $\zeta=1$ ), полагая, что обмен воздухом между космическим пространством и атмосферой отсутствует, то есть

$$\dot{\omega}|_{\zeta=0}=0, \quad (1.4)$$

а линейная вертикальная скорость

$$w = \frac{dz}{dt} = 0 \text{ при } z=0, \zeta=1. \quad (1.5)$$

Условие (1.5) означает, что отсутствует обмен воздухом между атмосферой и деятельным слоем почвы, то есть подстилающая поверхность представляет собой ровную, непористую твердую стенку.

Поскольку

$$\dot{\omega} = \frac{\zeta}{RT} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} - gw \right), \quad (1.6)$$

где  $\Phi = gz$  — геопотенциал, то, полагая движение геострофическим, при котором

$$u_g = -\frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (1.7)$$

( $l$  — параметр Кориолиса), получим нижнее граничное условие на поверхности земли в приближенной форме:

$$\dot{\omega}|_{\zeta=1} = \frac{1}{RT} \frac{\partial \Phi}{\partial t}. \quad (1.8)$$

В результате интегрирования уравнения (1.3) при краевых условиях (1.4) и (1.8) будем иметь

$$\int_0^1 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\zeta' = \frac{1}{RT} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\zeta=1}. \quad (1.9)$$

Нетрудно видеть, что в области движений синоптического масштаба порядок отношения  $D$  к ее интегральному значению приближенно равен 10:

$$\frac{0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}{0 \left( \frac{1}{RT} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)} \approx 10.$$

Таким образом, среднее значение  $D$  на порядок меньше, чем ее характерное значение. Следовательно,  $D$  является знакопеременной величиной, так что значение интеграла (1.9) в тех слоях, где  $D < 0$ , приблизительно компенсируется его значением в тех слоях, где  $D > 0$ . Из уравнения неразрывности (1.3) видно, что

переход значения  $D$  через нуль происходит на том уровне  $\xi$ , где значение аналога вертикальной скорости экстремальное. Понятно, что этот уровень меняется в пространстве и во времени. Таким образом, соленоидальное приближение лучше всего выполняется там, где имеет место переход через нуль значения  $D$ . Обработка данных о фактическом ветре показала, что в среднем величина  $D$  убывает от поверхности земли до высоты  $2 \div 8$  км, а затем возрастает. Наиболее часто высота с минимальной дивергенцией составляет  $3 \div 5$  км, поэтому уровень с  $D_{\min}$  можно рассматривать как средний уровень атмосферы. Именно поэтому соленоидальное приближение было предложено Дж. Чарни (1955 г.) с целью уточнения квазигеострофических прогнозов геопотенциала на среднем уровне, который интерпретируется обычно как изобарическая поверхность 500 гПа. Однако в реальной атмосфере уровней, где во всех точках выполнялось бы одно из условий  $D = D_{\min}$  или  $D = 0$ , не существует. Следовательно, на изобарических поверхностях соотношения (1.2) не являются точными.

Итак, именно в средней тропосфере  $u_\phi, v_\phi$  являются лучшим приближением к составляющим фактического ветра, чем  $u_g$  и  $v_g$ , поскольку в свободной атмосфере реальная дивергенция, обусловленная агеострофическими отклонениями и изменениями параметра Кориолиса с широтой, оказывается весьма малой. Наибольшее уточнение имеет место в областях интенсивных циклонов.

Прогностические модели, в которых постулируется соленоидальность поля скорости и предполагается, что  $D = 0$ , называются соленоидальными бездивергентными моделями или моделями среднего уровня. Схемы, в которых горизонтальное движение на изобарических поверхностях описывается соотношениями (1.2), но принимается, что

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \neq 0, \quad (1.10)$$

где

$$u = u_\phi + u', \quad v = v_\phi + v', \quad (1.11)$$

называются квазисоленоидальными дивергентными моделями.

Рассмотрим связь между геострофическим и соленоидальным движениями. Для уровня, на котором  $D = 0$ , геострофическая функция тока  $\psi_g$  определяется соотношениями:

$$u_g = -\frac{\partial \psi_g}{\partial y}, \quad v_g = \frac{\partial \psi_g}{\partial x}. \quad (1.12)$$

Если пренебречь изменением параметра Кориолиса по всей рассматриваемой области, то геострофическое движение можно

считать бездивергентным. Однако только на среднем уровне имеют место равенства:

$$u_g = u_\psi = -\frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_g}{\partial y}, \quad v_g = v_\psi = \frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi_g}{\partial x}. \quad (1.13)$$

Откуда с точностью до постоянного слагаемого находим:

$$\psi_g = \frac{\Phi}{l} + \text{const} \quad (1.14)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \psi_g}{\partial s} = \frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial s} \quad (s = x \text{ или } y, \text{ или } t). \quad (1.15)$$

Соотношение (1.14) выражает связь между функцией тока и геопотенциалом лишь на среднем бездивергентном уровне, а для других уровней не выполняется.

В дальнейшем нам понадобится также соленоидальное приближение для завихренности вектора скорости

$$\Omega_\psi = \frac{\partial v_\psi}{\partial x} - \frac{\partial u_\psi}{\partial y} = \nabla^2 \psi. \quad (1.16)$$

Подставляя соотношение (1.14) в формулу (1.16) и полагая  $l = \text{const}$ , получим  $\Omega_\psi = \Omega_g$ , то есть

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{l} \nabla^2 \Phi. \quad (1.17)$$

## 2. ПРОГНОСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ КВАЗИСОЛНОИДАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

На основании баротропного квазигеострофического уравнения вихря и соотношения (1.14), а также с учетом вытекающего из (1.14) равенства (1.15) получим прогностическое уравнение соленоидальной бездивергентной модели в виде

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\nabla^2 \psi + l, \psi) \quad (2.1)$$

при условии, что изменением параметра Кориолиса по широте не пренебрегается. В правой части уравнения (2.1) стоит величина  $A_\psi^\psi$ , представляющая собой горизонтальную адвекцию абсолютного соленоидального вихря. Таким образом, уравнение (2.1) является уравнением вихря применительно к соленоидальному вектору горизонтальной скорости. Оно содержит одну искомую функцию  $\psi$  и может быть использовано как прогностическое уравнение для определения будущих значений  $\psi$  по ее начальным зна-

чениям. Уравнение (2.1) является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных третьего порядка. Получить точное решение его относительно  $\psi$  как функции горизонтальных координат и времени оказывается невозможным. Относительно  $q = \frac{\partial \psi}{\partial t}$  уравнение (2.1) представляет собой линейное уравнение

второго порядка, принадлежит к типу эллиптических уравнений, известно в математике как уравнение Пуассона и может быть решено численными методами и аналитически с помощью функций Грина. Из него следует, что изменение функции  $\psi$  на бездивергентном уровне обусловлено горизонтальной адвекцией соленоидального вихря: уменьшение (увеличение) значений функции  $\psi$  на среднем уровне происходит при уменьшении (увеличении) положительного циклонического вихря, либо при увеличении (уменьшении) отрицательного антициклонического вихря на этом уровне; процессы, протекающие в ниже- и вышележащих слоях атмосферы, никакого участия в формировании изменений завихренности соленоидального вектора скорости не принимают.

Еще раз подчеркнем, что наиболее строго соленоидальное приближение можно использовать только применительно к бездивергентному уровню в баротропной несжимаемой среде. Заметим также, что при этом имеется в виду стационарная задача, хотя соленоидальное движение не обязательно стационарное.

В случае решения плоской задачи для среднего уровня баротропной сжимаемой атмосферы прогностическое уравнение принимает вид

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\nabla^2 \psi + l, \psi) + l \frac{\partial \omega}{\partial t} \quad (2.2)$$

или, учитывая нижнее граничное условие (1.8) и соотношение (1.15),

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{l^2}{RT} \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\nabla^2 \psi + l, \psi). \quad (2.3)$$

Вводя  $L_0 = \frac{1}{l} \sqrt{RT}$  — характерный масштаб длины по А.М. Обузову и полагая  $L_0 = \text{const}$ , запишем уравнение (2.3) в виде

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{L_0^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\nabla^2 \psi + l, \psi). \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) представляет собой прогностическое уравнение баротропной квазисоленоидальной модели и относится к уравнениям типа Гельмгольца. Обычно его называют обобщенным баротропным уравнением вихря в квазисоленоидальном приближении. Решение этого уравнения относительно функции  $q = \frac{\partial \psi}{\partial t}$  возможно как аналитически, так и численно.

Для любых других уровней необходимо строить бароклинную квазисолеоидальную модель, то есть пользоваться соотношениями (1.2) только в тех членах исходного уравнения вихря, в которых дивергенция не содержится в явном виде. Тогда уравнение (2.2) является незамкнутым, так как в нем фигурируют две искомые функции:  $\psi$  и  $\dot{\omega}$ . Интерпретируя атмосферу как бароклинную среду, функцию  $\dot{\omega}$  будем определять из адиабатического уравнения притока тепла в ИСК

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{RT}{g\zeta} (\gamma_a - \gamma) \dot{\omega} = 0. \quad (2.5)$$

Подставив в уравнение (2.5) соленоидальные компоненты вектора ветра, а вместо температуры воздуха ее значение из уравнения статики

$$T = - \frac{\zeta}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \quad (2.6)$$

получим

$$\begin{aligned} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \zeta^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \\ + \frac{R^2 T}{g} (\gamma_a - \gamma) \dot{\omega} = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Система двух уравнений (2.2) и (2.7) также незамкнута, так как содержит три неизвестные функции:  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  и  $\dot{\omega}$ . Для замыкания системы положим, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} = \frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}. \quad (2.8)$$

Формально предположение (2.8) эквивалентно условию (1.15), но не тождественно геострофическому приближению, так как, в отличие от последнего, соотношение (2.8) используется лишь для определения производной по вертикальной координате.

Переходя в уравнении (2.7) с помощью (1.15) и (2.8) от геопотенциала к функции тока (при  $l = \text{const}$ ), получим:

$$\kappa^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \kappa^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}, \psi \right) = - \frac{R^2 T}{g} (\gamma_a - \gamma) \dot{\omega}. \quad (2.9)$$

Обозначим функцию

$$c^2 = \frac{R^2 T}{g} (\gamma_a - \gamma) \quad (2.10)$$

и будем называть ее параметром вертикальной статической устойчивости атмосферы\*. Поделим уравнение (2.9) на  $c^2$ , умножим на  $l$ , продифференцируем по  $\zeta$  и сложим с (2.2). В результате получим прогностическое уравнение бароклиной квазисолоноидальной модели

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} + l^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\zeta^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\nabla^2 \psi + l, \psi) + l^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\zeta^2}{c^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}, \psi \right). \quad (2.11)$$

Уравнение (2.11) нелинейное в частных производных третьего порядка относительно  $\psi$  с четырьмя независимыми переменными. Современные методы математического анализа не позволяют получить его решение в виде функций  $\psi(x, y, \zeta, t)$ . Относительно тенденции  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  уравнение (2.11) является неоднородным линейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка, принадлежит к эллиптическому типу и решается численными методами. Однако при некоторых видах граничных условий могут быть получены и решения в замкнутой форме.

### 3. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Для простейших видов атмосферных движений удается найти аналитические решения уравнений Пуассона (2.1) и Гельмгольца (2.3). Примером могут служить решения тестовых задач, полученные для ряда идеализированных случаев, когда начальное поле функции тока (геопотенциала) представляет собой систему синусоидальных волн или когда на основной «ведущий» поток наложена циркуляция тайфуна, стилизованного в виде симметричного вихря. Однако, чтобы осуществлять прогноз функции тока независимо от формы начального поля, необходимо разработать метод решения указанных уравнений при начальном условии общего вида:

$$\psi |_{t=t_0} = \psi_0(x, y), \quad (3.1)$$

где  $\psi_0(x, y)$  — произвольная функция горизонтальных координат.

Правые части уравнений (2.1) и (2.3) могут считаться известными функциями горизонтальных координат. Тогда, решив уравнение (2.1) или (2.3), в исходный момент времени  $t_0$  определим тенденции  $q_{i,j}(t_0)$ , а это дает возможность применить метод шагов по времени для прогноза функции  $\psi_{i,j}$ . Для получения однозначного решения названных уравнений необходимо задать соответствующие граничные условия. В данном случае достаточно

\* Функция  $c^2$  меняется с высотой, главным образом, за счет изменения вертикального градиента температуры  $\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z}$  и, в меньшей мере, благодаря систематическому падению температуры.

задать прогностические значения  $q$  на границе прогностической области. Поскольку такие значения априори неизвестны, то можно интегрировать уравнения применительно к поверхности среднего уровня земного шара, не имеющей границ, что вообще снимает проблему постановки граничных условий. При решении задачи для полусферы в качестве граничных условий задается, что вблизи экватора тенденция  $q_{i,j}=0$ , то есть функция тока не меняется во времени:  $\psi(x_i, y_j, t_0) = \psi(x_i, y_j, t_0 + n \Delta t)$ , где  $n=1, 2, \dots, N$  — число шагов интегрирования. Постановка таких условий может быть объяснена тем, что изменения давления в приэкваториальной зоне заметно меньше, чем во внетропических широтах. Если прогноз дается для ограниченной области, то ставятся «фиктивные» граничные условия. В этом случае на всех участках границы области задается равенство тенденций нулю.

Граничные условия могут ставиться и отдельно для каждой точки сеточной области, где вычисляется тенденция  $q$ , на окружности заданного радиуса  $R$ . Такие условия называются локальными. Исследования показали, что при  $R \approx 1000$  км среднее значение тенденции на окружности  $(\bar{q}|_R)$  в несколько раз меньше характерного значения  $q$  в центре. Поэтому использование локальных граничных условий

$$q=0 \text{ при } r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty, \quad (3.2)$$

в принципе, не должно приводить к крупным ошибкам прогноза.

Рассмотренные три вида граничных условий позволяют получить решения уравнений Пуассона и Гельмгольца относительно  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ .

Остановимся еще на одной особенности, с которой приходится сталкиваться при интегрировании названных уравнений. Поскольку в действительности метеорологические функции заданы значениями в дискретных точках пространства, то все величины, фигурирующие в прогностических уравнениях, вычисляются для отдельных точек сеточной области. Пусть сеточная область имеет вид, показанный на рис. 1. Выясним, в каких точках области может быть вычислена правая часть названных уравнений.

Если производные  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  аппроксимировать конечно-разностными выражениями вида

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2 \Delta s}, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2 \Delta s}, \quad (3.3)$$

а лапласиан записать по пятиточечной схеме

$$(\nabla^2 f)_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 4 f_{i,j}}{(\Delta s)^2}, \quad (3.4)$$

то значения якобиана будут получены в области, внешние узлы которой помечены на рис. 1 звездочками. Таким образом, величины адвекции вихря  $A_{\Omega}^{\psi}$  и тенденции  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  в момент времени  $t_0$  будут вычислены в  $(n-4) \times (m-4)$  внутренних узлах сетки.

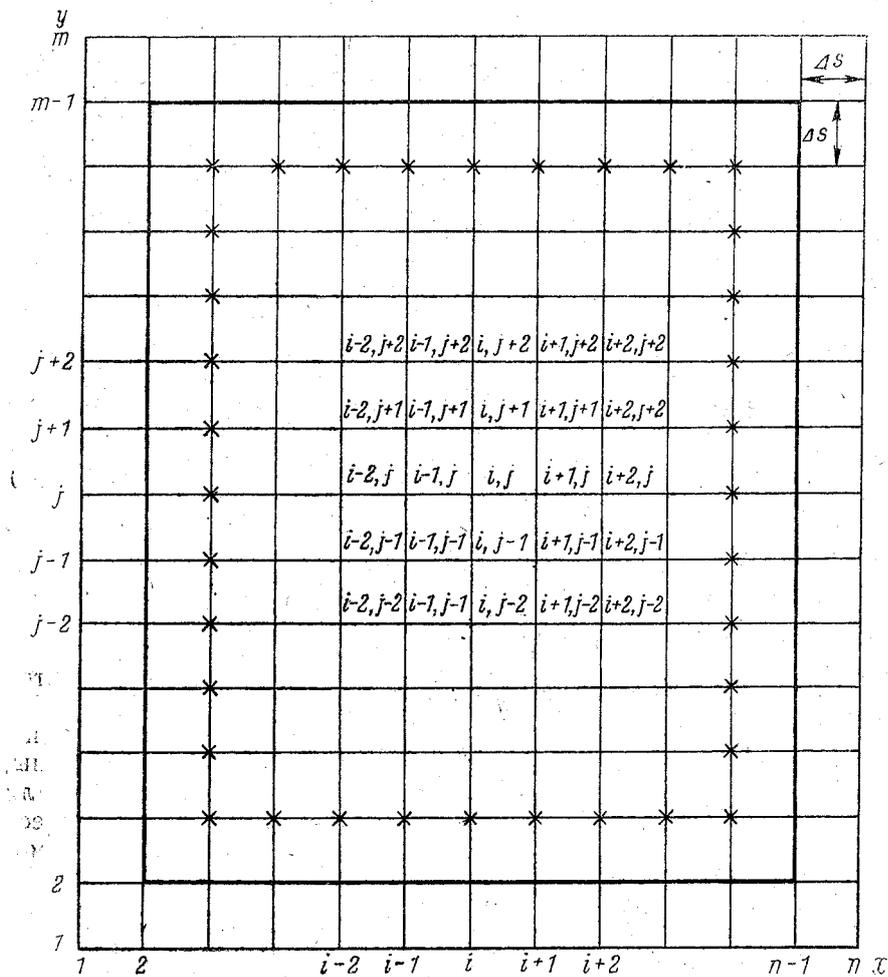


Рис. 1. Расположение и нумерация узлов двумерной разностной сетки.

Если воспользоваться более точными конечно-разностными аналогами производных:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{1}{8\Delta s} [(f_{i+1,j-1} + 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j+1}) - (f_{i-1,j-1} + 2f_{i-1,j} + f_{i-1,j+1})],$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{i,j} &= \frac{1}{8\Delta s} [(f_{i-1,j+1} + 2f_{i,j+1} + f_{i+1,j+1}) - (f_{i-1,j-1} + 2f_{i,j-1} + f_{i+1,j-1})], \\ (\nabla^2 f)_{i,j} &= \frac{1}{24(\Delta s)^2} [(f_{i-2,j-2} + f_{i-2,j+2} + f_{i+2,j-2} + f_{i+2,j+2}) + \\ &+ 4(f_{i-2,j} + f_{i,j+2} + f_{i+2,j} + f_{i,j-2}) - 20f_{i,j}], \end{aligned}$$

то величины  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  будут найдены в  $(n-6) \times (m-6)$  узлах. Другими словами, для сеточной области, включающей  $m \times n$  узлов, в первом случае можно составить  $(n-4) \times (m-4)$ , а во втором  $(n-6) \times (m-6)$  конечно-разностных уравнений. Эти системы уравнений будут незамкнутыми, так как неизвестны значения  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$

в узлах, расположенных на втором и на втором и третьем рядах точек соответственно. Теперь становится очевидным, что «фиктивных» граничных условий, заданных в узлах на внешнем периметре границы сеточной области, недостаточно. Необходимо поставить дополнительное граничное условие: положить, что и в точках, расположенных на втором периметре области (первый вариант аппроксимации производных),  $q=0$ . Для второго варианта аппроксимации надо положить, что  $q=0$  и в точках на третьем ряду. Таким образом, структура правой части уравнений и способ аппроксимации горизонтальных производных, вынуждают постулировать неизменность функции тока в точках на первых двух-трех рядах сеточной области.

Выясним, какие граничные условия необходимо ставить для интегрирования уравнения бароклиной квазисоленоидальной модели (2.11), принадлежащего к эллиптическому типу. Последнее означает, что для получения однозначного решения этого уравнения достаточно иметь по одному граничному условию на всех поверхностях, ограничивающих область прогноза. Если уравнение (2.11) решается на бесконечной плоскости, достаточно задать граничные условия по переменной  $\zeta$ . Первое краевое условие по переменной  $\zeta$  задается у поверхности земли в виде  $\omega|_{z=0} = 0$ . Тогда при квазисоленоидальном движении у земли

$$\dot{\omega}|_{\zeta=1} = \frac{1}{RT} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (3.5)$$

Из уравнения притока тепла следует, что

$$\dot{\omega}|_{\zeta=1} = \frac{l}{c^2} \left[ \left( \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}, \psi \right) - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right]. \quad (3.6)$$

Приравнявая (3.5) и (3.6) и вводя обозначение

$$\alpha = \frac{R}{g} (\gamma_a - \gamma), \quad (3.7)$$

получим окончательный вид нижнего граничного условия

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \alpha \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}, \psi \right) \text{ при } \zeta=1. \quad (3.8)$$

Вторым граничным условием по  $\zeta$ , задаваемым на верхней границе атмосферы в виде

$$\dot{\omega} |_{\zeta=0} = 0, \quad (3.9)$$

постулируется отсутствие обмена воздухом между атмосферой Земли и космосом. Вместе с тем условие (3.9) допускает поднятие и опускание верхней границы атмосферы (поверхности  $\zeta=0$ ).

Чтобы из (3.9) получить граничное условие относительно искомой функции  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ , вновь воспользуемся уравнением притока тепла, которое представим следующим образом:

$$\dot{\omega} |_{\zeta=0} = \frac{\kappa^2}{c^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}, \psi \right) \right] = 0. \quad (3.10)$$

Условие (3.9) будет выполняться лишь в том случае, если в равенстве (3.10) выражение в квадратных скобках будет конечной величиной. Поскольку якобиан  $\left( \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}, \psi \right)$  является конечной величиной, требование ограниченности должно быть наложено на слагаемое  $\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)$ . Таким образом, условие (3.9) переходит в условие

$$\zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \text{ ограничено при } \zeta \rightarrow 0 \text{ (} p \rightarrow 0 \text{)} \quad (3.11)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = 0 \text{ при } \zeta=0. \quad (3.11')$$

Если по переменным  $x, y$  сеточная область ограничена, то для решения уравнения (2.11) также можно задать «фиктивные» граничные условия на внешнем периметре. Однако в правой части (2.11) фигурирует якобиан  $(\nabla^2 \psi + l, \psi)$ , численные значения которого будут получены, начиная лишь с третьего ряда точек (см., например, первый вариант аппроксимации производных). Таким образом, и в этом случае требуется ставить дополнительное граничное условие на втором ряду точек.

#### 4. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРОГНОСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СОЛЕНОИДАЛЬНОЙ И КВАЗИСОЛЕНОИДАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

1. Опуская выкладки ввиду их громоздкости, запишем решения уравнений Пуассона и Гельмгольца в аналитическом виде при локальных граничных условиях:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{r=0} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R \ln \frac{R}{r} A_{\frac{1}{2}}^{\psi} r dr d\varphi + \frac{1}{2\pi R} \oint_{(s)} \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{r=R} ds; \quad (4.1)$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{r=0} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R K_0\left(\frac{r}{R}\right) A_{\frac{1}{2}}^{\psi} r dr d\varphi + \frac{1}{2\pi R} \oint_{(s)} \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{r=R} ds, \quad (4.2)$$

где  $r, \varphi$  — полярные координаты;  $s$  — окружность радиусом  $R$ , внутри которой производится интегрирование;  $ds$  — элемент окружности;  $r$  — расстояние от начала координат (от центра окружности  $r=0$ ), для которого находится тенденция  $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{r=0}$ ;  $\varphi$  — угол;

$A_{\frac{1}{2}}^{\psi}(r, \varphi) = A_{\frac{1}{2}}^{\psi}$  — горизонтальная адвекция абсолютной соленоидальной завихренности;  $\ln \frac{R}{r}$  и  $K_0\left(\frac{r}{R}\right)$  — функции влияния (функции Грина), определяющие тот «вес», с которым адвекция вихря входит в величину интеграла или величину  $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{r=0}$ . Важно понимать, что на изменение функции тока в центре окружности влияет адвекция вихря не только в этой точке, но во всей плоскости круга. При  $r=R$  функция Грина  $\ln \frac{R}{r} = 0$ , а функция  $K_0\left(\frac{r}{R}\right)$ , являющаяся функцией Бесселя мнимого аргумента второго рода, близка к нулю. Заметим, что в решении (4.1) невозможно устремить  $R$  к бесконечности, так как значение  $\ln \frac{R}{r}$  также стремилось бы к бесконечности. Это обстоятельство выражает факт отсутствия ограниченного решения уравнения Пуассона всюду на бесконечной плоскости, что затрудняет количественный анализ влияния адвекции вихря из отдаленных от центра частей окружности на  $\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{r=0}$ .

Решение уравнения Гельмгольца указанным недостатком не обладает благодаря наличию в уравнении второго слагаемого слева, обусловленного отказом от стилизации атмосферы в виде несжимаемой среды.

Таким образом, в решениях (4.1) и (4.2) первый интеграл учитывает влияние горизонтальной адвекции вихря внутри локальной области  $r=R$ . Влияние адвекции в точках бесконечной плоскости (при  $r>R$ ) учитывается контурным интегралом, который равен среднему значению  $\frac{\partial\psi}{\partial t}$  на окружности радиусом  $r=R$ . Однако ве-

личина  $\frac{\partial\psi}{\partial t}$  в точках выбранной окружности заранее не известна,

поэтому при интегрировании уравнений приходится прибегать к тем или иным допущениям. Наиболее простое допущение сводится к тому, что второй интеграл в решениях (4.1) и (4.2) приравняется нулю и предполагается, что среднее значение тенденции  $\frac{\partial\psi}{\partial t}$  на окружности радиуса  $R$  также равно нулю, а функция тока

$\psi$  мало изменяется в течение каждого шага по времени. Учитывая сказанное, при  $R \approx 1000$  км контурным интегралом в первом приближении можно пренебречь. Однако при необходимости его значение можно приближенно рассчитать следующим образом:

сначала определить значения  $\frac{\partial\psi}{\partial t}$  во всех точках внутри круга и на окружности радиуса  $R$  без учета контурного интеграла; по этим данным найти среднее значение тенденции на окружности радиуса  $R$ , которое и будет дополнением к первым интегралам в решениях (4.1) и (4.2).

Вычисление первых интегралов сводится к нахождению суммы произведений значений адвекции вихря на соответствующие функции Грина во всех точках внутри области радиуса  $R$ . При численной реализации решений (4.1) и (4.2) интегралы заменяются суммами.

2. Решение прогностического уравнения бароклиной квазигеострофической модели для бесконечной плоскости с граничными условиями по  $\zeta$ , идентичными условиям (3.8) и (3.11), впервые было получено Н. И. Булеевым и Г. И. Марчуком (1951 г.). Опущен вывод этого решения\* и полагая значения параметров  $l$  и  $c^2$  постоянными, запишем результат относительно  $\frac{\partial\psi}{\partial t}$  применительно к уравнению (2.11):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{r=0} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^1 G_2^q(\eta, \zeta, r) A_2^\psi(\eta, r, \varphi) d\eta' r dr' d\varphi' + \\ &+ \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \int_0^1 G_7^q(\eta, \zeta, r) A_7^\psi(\eta, r, \varphi) d\eta' r dr' d\varphi'. \end{aligned} \quad (4.3)$$

\* Подробные выкладки приводятся, например, в книгах [4, 5].

Здесь  $G_0^q$  и  $G_T^q$  — функции Грина, характеризующие влияние на тенденцию  $q$  в рассматриваемой точке  $x, y, \zeta$  адвекций вихря  $A_0^\psi$  и температуры  $A_T^\psi$  на разных уровнях;  $\eta', r', \varphi'$  — переменные интегрирования, которое распространяется практически на всю атмосферу.

Из решения (4.3) видно, что тенденция  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  определяется как

сумма двух слагаемых, из которых первое зависит от  $A_0^\psi$ , а второе от  $A_T^\psi$ . Это позволяет рассматривать вихревой и термический факторы изменения функции тока. Не приводя здесь графиков функций влияния отметим, что  $G_0^q$  и  $G_T^q$  выражаются в условных единицах через координаты рассматриваемых точек и параметры уравнения (2.11). Все качественные правила, которые были получены с помощью квазигеострофической модели относительно

влияния  $A_0^\psi$  и  $A_T^\psi$  на тенденцию геопотенциала  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ , сохраняются и

в данном случае: при адвекции циклонического вихря  $\frac{\partial \psi}{\partial t} < 0$ , при

адвекции антициклонического вихря  $\frac{\partial \psi}{\partial t} > 0$ ; адвективное потепле-

ние (похолодание) в слое выше точки расчета  $x, y, \zeta$  приводит к уменьшению (увеличению), а ниже ее — к увеличению (уменьшению) значений  $\psi$ . Поскольку уровень  $\zeta=1$ , является нижней границей атмосферы, адвекция тепла в любом слое приводит к уменьшению значений  $\psi$  у земли, а адвекция холода — к увеличению. Для верхней границы атмосферы воздействие адвекции температуры обратное, так как все слои являются нижележащими по отношению к уровню  $\zeta=0$ . Однородная адвекция температуры во всей толще атмосферы приводит к максимальным по величине и обратным по знаку изменениям функции  $\psi$  у земли и в верхней атмосфере. На промежуточных уровнях значения  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$

будут меньше, так как обусловятся обратным по знаку воздействием адвекции в ниже- и вышележащих слоях. Взаимная компенсация вкладов адвекции температуры в нижней и верхней частях атмосферы происходит в средней ее части. Для уровня компенсации (среднего уровня) второй интеграл в решении (4.3)

обращается в нуль, а величина  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ , как и в баротропной атмосфере,

определяется лишь адвекцией вихря.

Таким образом, формула (4.3) позволяет установить физические условия, при которых атмосфера может интерпретироваться как баротропная среда, и оценить высоту среднего уровня. Положение среднего уровня атмосферы полностью определяется рас-

пределением по высоте и интенсивностью термической адвекции: при однородной адвекции во всем атмосферном столбе средний уровень может отсутствовать; если наблюдается неоднократная смена знака адвекции  $A_T^\psi$ , могут появиться несколько уровней компенсации.

3. Переход от полученной в результате решения уравнений (2.1), (2.4) или (2.11) тенденции  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  к прогностическому значению  $\psi$  осуществляется методом шагов по времени. На первом шаге по времени используется экстраполяционная формула, представляющая собой ряд Тейлора, в котором учтены первые два члена:

$$\psi(x, y, \zeta, t_0 + \Delta t) = \psi(x, y, \zeta, t_0) + \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t_0} \cdot \Delta t, \quad (4.4)$$

где  $\psi(x, y, \zeta, t_0)$  и  $\psi(x, y, \zeta, t_0 + \Delta t)$  — значения функции тока в исходный и прогностический моменты времени. На всех последующих шагах по времени, начиная со второго, целесообразно применять формулу центральных разностей:

$$\psi(x, y, \zeta, t_0 + 2\Delta t) = \psi(x, y, \zeta, t_0) + 2 \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t_0 + \Delta t} \cdot \Delta t. \quad (4.5)$$

При решении уравнений Пуассона и Гельмгольца принималось, что адвекция завихренности  $A_\psi^\psi$  не меняется в течение небольшого промежутка времени  $\Delta t$ . Уравнение (2.11) решалось в предположении стационарности полей функции тока и температуры. Понятно, что значения  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  получаются приближенными и не могут быть использованы для экстраполяции на длительный срок, вследствие чего задача прогноза решается последовательно шагами по времени.

4. Рассмотрим в общих чертах метод расчета  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  с помощью функций Грина, опираясь на квазигеострофические схемы, разработанные П. К. Душкиным и Е. Г. Ломоносовым и С. А. Белоусовым.

Сначала, исходя из практических потребностей и реальных возможностей, определяется область прогноза, а затем проводится дискретизация атмосферы по горизонтальным и вертикальной координатам (см. рис. 1 и 2) и вводятся безразмерные координаты:

$$i = \frac{x}{\Delta x}, \quad j = \frac{y}{\Delta y}, \quad k = \frac{\zeta}{\Delta \zeta},$$

где  $\Delta x = \Delta y = \Delta s$  и  $\Delta \zeta$  — шаги сеточной области соответственно по горизонтальным и вертикальной координатам: шаг  $\Delta \zeta$  определяется выбором счетных уровней и может быть переменным по

высоте; шаг  $\Delta z$  обычно принимается равным 300 км. Шаги по времени и горизонтальным координатам выбирают с помощью критерия Куранта — Фридрихса — Леви

$$\Delta t \leq \frac{\Delta z}{\sqrt{2} C_{\max}}, \quad (4.6)$$

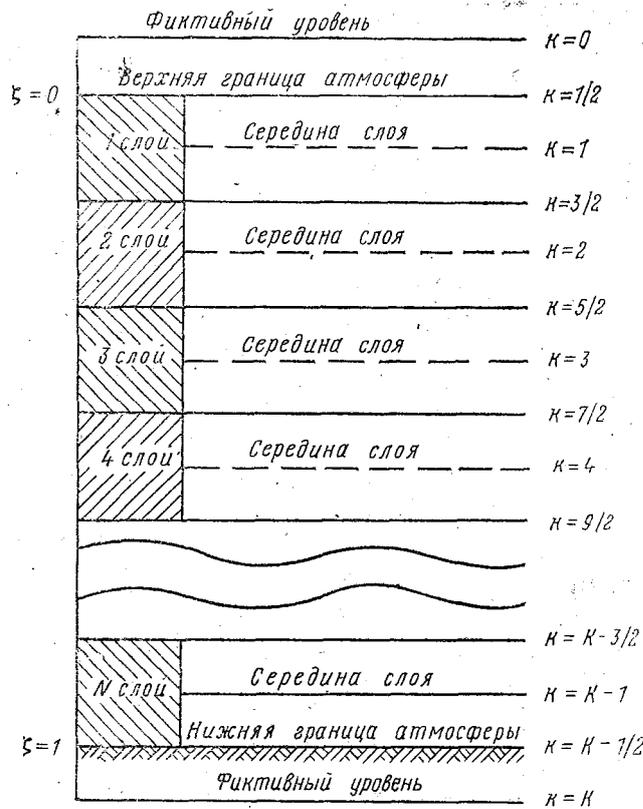


Рис. 2. Расположение и нумерация дискретных изобарических поверхностей.

где  $C_{\max}$  — максимальная скорость горизонтального переноса. При выполнении этого неравенства воздушные частицы за один шаг по времени переместятся на расстояние не большее, чем шаг сетки  $\Delta z$ . Из критерия (4.6) следует, что чем меньше шаг сетки, тем более мелкими шагами  $\Delta t$  необходимо пользоваться в численных схемах. В противном случае трукционные ошибки, обусловленные переходом от дифференциальных уравнений к сеточным, с увеличением времени  $t$  будут возрастать.

Далее по исходным полям функции  $\psi(x, y, \zeta, t_0)$ ; способ расчета которых будет рассмотрен ниже, вычисляются  $A_{\frac{1}{2}}^{\psi}$  и  $A_{\frac{1}{T}}^{\psi}$ .

Аппроксимируем адвекцию вихря следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (A_B^\psi)_{i,j} = & \frac{1}{4(\Delta S)^2} \left\{ \left[ (l_{i+1,j} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\psi_{i+2,j} + \psi_{i+1,j+1} + \psi_{i,j} + \psi_{i+1,j-1} - 4\psi_{i+1,j}}{(\Delta S)^2} \right) - (l_{i-1,j} + \right. \\
 & \left. + \frac{\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i-2,j} + \psi_{i-1,j-1} - 4\psi_{i-1,j}}{(\Delta S)^2} \right)] \cdot (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) - \\
 & - \left[ \left( \frac{\psi_{i+1,j+1} + \psi_{i,j+2} + \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i,j} - 4\psi_{i,j+1}}{(\Delta S)^2} + l_{i,j+1} \right) - \right. \\
 & \left. - \left( \frac{\psi_{i+1,j-1} + \psi_{i,j} + \psi_{i-1,j-1} + \psi_{i,j-2} - 4\psi_{i,j-1}}{(\Delta S)^2} + l_{i,j-1} \right) \right] \times \\
 & \left. \times (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Получим формулы для расчета  $A_T^\psi$ :

$$(A_T^\psi)_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \left[ \frac{\kappa}{R} \left( \psi, \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) \right]_{i,j,k+\frac{1}{2}},$$

$$(A_T^\psi)_{i,j,k-\frac{1}{2}} = \left[ \frac{\kappa}{R} \left( \psi, \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right) \right]_{i,j,k-\frac{1}{2}},$$

где  $\psi_{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\psi_{k+1} + \psi_k)$ ;  $\psi_{k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\psi_k + \psi_{k-1})$ ;  $\left( \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right)_{k+\frac{1}{2}} =$   
 $= \frac{\psi_{k+1} - \psi_k}{\zeta_{k+1} - \zeta_k}$ ;  $\left( \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right)_{k-\frac{1}{2}} = \frac{\psi_k - \psi_{k-1}}{\zeta_k - \zeta_{k-1}}$ .

Тогда

$$(A_T^\psi)_{i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{l_{i,j} \zeta_{k+\frac{1}{2}}}{2R(\zeta_{k+1} - \zeta_k)} \cdot (\psi_{k+1} + \psi_k, \psi_{k+1} - \psi_k)_{i,j},$$

$$(A_T^\psi)_{i,j,k-\frac{1}{2}} = \frac{l_{i,j} \zeta_{k-\frac{1}{2}}}{2R(\zeta_k - \zeta_{k-1})} \cdot (\psi_k + \psi_{k-1}, \psi_k - \psi_{k-1})_{i,j}$$

или, используя свойство якобиана  $(\alpha + \beta, \alpha - \beta) = 2(\alpha, \beta)$ , будем иметь:

$$\begin{aligned}
 (A_T^\psi)_{i,j,k+\frac{1}{2}} = & \frac{l_{i,j} \zeta_{k+\frac{1}{2}}}{4(\Delta S)^2 R (\zeta_{k+1} - \zeta_k)} \left[ (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})_{k+1} \cdot (\psi_{i,j+1} - \right. \\
 & \left. - \psi_{i,j-1})_k - (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1})_{k+1} \cdot (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})_k \right], \tag{4.8}
 \end{aligned}$$

$$(A_T^\psi)_{i,j,k-\frac{1}{2}} = \frac{l_{i,j} \zeta_{k-\frac{1}{2}}}{R(\zeta_k - \zeta_{k-1})} \cdot (\psi_k, \psi_{k-1})_{i,j} = \frac{l_{i,j} \zeta_{k-\frac{1}{2}}}{4(\Delta S)^2 R (\zeta_{k+1} - \zeta_k)} \times$$

$$\times [(\psi_{i+1, j} - \psi_{i-1, j})_k \cdot (\psi_{i, j+1} - \psi_{i, j-1})_{k-1} - (\psi_{i, j+1} - \psi_{i, j-1})_k \cdot (\psi_{i+1, j} - \psi_{i-1, j})_{k-1}]. \quad (4.9)$$

В горизонтальной плоскости интегралы в решении (4.3) вычисляются приближенно путем их замены суммами по кольцам (рис. 3). По вертикали интегрирование осуществляется методом трапеций. В результате тройные интегралы сводятся к суммам парных произведений вида

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{i, j, k} = \sum_{r=0}^4 \sum_{m=1}^M (\bar{A}_\Omega^\psi)_{r, m} \cdot a_{k, r, m} + \sum_{r=0}^4 \sum_{s=1}^S (\bar{A}_T^\psi)_{r, s} \cdot b_{k, r, s}, \quad (4.10)$$

где  $k$  — номер уровня, на котором вычисляется тенденция;  $m(s)$  — номер уровня (слоя), для которого рассчитывается адвекция  $A_\Omega^\psi$  ( $A_T^\psi$ );  $r$  — номер кольца, по которому проводится суммирование ( $r_0=0, r_1=360, r_2=640, r_3=900, r_4=1080$  км);  $\bar{A}_\Omega^\psi$  и  $\bar{A}_T^\psi$  — значения конечно-разностных аналогов адвекции вихря и температуры в узлах сетки, осредненные по соответствующим кольцам;  $a_{k, r, m}$  и  $b_{k, r, s}$  — весовые коэффициенты, полученные с помощью функций Грина  $G_\Omega^\psi$  и  $G_T^\psi$ , определяющие вклад  $\bar{A}_\Omega^\psi$  и  $\bar{A}_T^\psi$ , рассчитанных в кольце  $r$  на уровне  $m$  (в слое  $s$ ), в изменение функции тока  $\psi$  на уровне  $k$ .

Второй этап решения задачи заключается в определении прогностических полей  $\psi(x, y, \zeta, t_0 + \Delta t)$  с помощью формулы (4.4). На всех последующих шагах по времени вычисления повторяются. Каждый раз в качестве исходных используются поля функции тока, полученные на предыдущем шаге интегрирования, а экстраполяция по времени осуществляется по формуле (4.5). Выполнив необходимое число шагов по времени, получают прогностические поля  $\psi(x, y, \zeta, t_0 + N \Delta t)$ . При указанных значениях радиусов колец  $r$  на трех крайних рядах точек сетки необходимо постулировать неизменность значений  $\psi$  на весь срок прогноза.

5. Рассмотрим основные черты итерационного метода решения уравнений (2.1), (2.4) и (2.11), имея в виду, что в принципе конфигурация прогностической области может быть любой. Как уже отмечалось, для решения уравнений Пуассона и Гельмгольца, содержащих производные лишь по горизонтальным переменным,

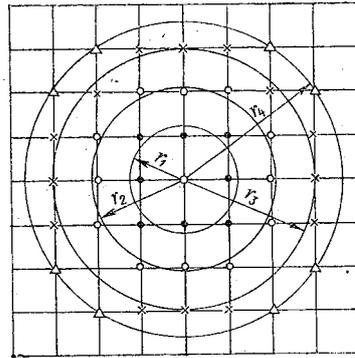


Рис. 3. Точечный шаблон для вычисления пространственных интегралов.

достаточно задать «фиктивные» граничные условия по этим переменным, а также дополнительное граничное условие на втором (или третьем) ряду точек. Для уравнения (2.11) ставятся, кроме того, краевые условия по переменной  $\zeta$  в виде (3.8) и (3.11').

Запишем сеточные уравнения (2.1) и (2.4), используя простейшие конечно-разностные эквиваленты с шагом  $(\Delta s)^2$ : уравнение Пуассона

$$\frac{1}{(\Delta s)^2} (q_{i+1,j} + q_{i-1,j} + q_{i,j+1} + q_{i,j-1} - 4q_{i,j}) = F_{i,j}, \quad (4.11)$$

уравнение Гельмгольца

$$\frac{1}{(\Delta s)^2} (q_{i+1,j} + q_{i-1,j} + q_{i,j+1} + q_{i,j-1} - 4q_{i,j}) - \frac{q_{i,j}}{L_0^2} = F_{i,j}, \quad (4.12)$$

где правая часть  $F_{i,j} = (\nabla^2 \psi + l, \psi)_{i,j}$ .

Разрешим формально каждое уравнение относительно  $q_{i,j}$ . Из (4.11) следует, что

$$q_{i,j} = \frac{1}{4} (q_{i+1,j} + q_{i-1,j} + q_{i,j+1} + q_{i,j-1}) - \frac{(\Delta s)^2}{4} F_{i,j}, \quad (4.13)$$

а из (4.12)

$$q_{i,j} = \frac{1}{\left(4 + \frac{(\Delta s)^2}{L_0^2}\right)} \cdot [(q_{i+1,j} + q_{i-1,j} + q_{i,j+1} + q_{i,j-1}) - F_{i,j}(\Delta s)^2]. \quad (4.14)$$

Задавая нулевое приближение и используя какой-либо итерационный метод, можно по исходным данным функции  $\psi_{i,j}$  вычислить  $q_{i,j}(t_0)$  с любой наперед заданной точностью. Далее, для получения прогностического поля используется на первом шаге формула направленных разностей (4.4), а на последующих шагах — симметричных разностей (4.5).

Конечно-разностное уравнение бароклинной модели (2.11) для случая неравномерного разделения атмосферы по вертикали на слои и изменяющего параметра статической устойчивости  $c^2$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\Delta s)^2} (q_{i+1,j} + q_{i-1,j} + q_{i,j+1} + q_{i,j-1} - 4q_{i,j})_k + \\ & + \frac{l_{i,j}^2}{\zeta_{k+\frac{1}{2}} - \zeta_{k-\frac{1}{2}}} \left[ \left( \frac{\zeta^2}{c_{i,j}^2} \right)_{k+\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{q_{i,j,k+1} - q_{i,j,k}}{\zeta_{k+1} - \zeta_k} \right) - \left( \frac{\zeta^2}{c_{i,j}^2} \right)_{k-\frac{1}{2}} \times \right. \\ & \left. \times \left( \frac{q_{i,j,k} - q_{i,j,k-1}}{\zeta_k - \zeta_{k-1}} \right) \right] = (\nabla^2 \psi + l, \psi)_{i,j,k} - \\ & - R l_{i,j} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\zeta}{c^2} A_T^\psi \right)_{i,j,k} = F_{i,j,k}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Откуда

$$\begin{aligned}
 q_{i,j,k} = & \frac{1}{4 + \frac{l_{i,j}^2 (\Delta s)^2}{\zeta_{k+\frac{1}{2}} - \zeta_{k-\frac{1}{2}}} \left[ \frac{1}{\zeta_{k+1} - \zeta_k} \cdot \left( \frac{\zeta^2}{c_{i,j}^2} \right)_{k+\frac{1}{2}} + \frac{1}{\zeta_k - \zeta_{k-1}} \cdot \left( \frac{\zeta^2}{c_{i,j}^2} \right)_{k-\frac{1}{2}} \right]} \times \\
 & \times \left\{ (q_{i+1,j} + q_{i-1,j} + q_{i,j+1} + q_{i,j-1})_k + \frac{l_{i,j}^2 (\Delta s)^2}{\zeta_{k+\frac{1}{2}} - \zeta_{k-\frac{1}{2}}} \left[ \frac{1}{\zeta_{k+1} - \zeta_k} \times \right. \right. \\
 & \times \left. \left( \frac{\zeta^2}{c_{i,j}^2} \right)_{k+\frac{1}{2}} \cdot q_{i,j,k+1} + \frac{1}{\zeta_k - \zeta_{k-1}} \times \right. \\
 & \left. \left. \times \left( \frac{\zeta^2}{c_{i,j}^2} \right)_{k-\frac{1}{2}} \cdot q_{i,j,k-1} \right] - (\Delta s)^2 \cdot F_{i,j,k} \right\}. \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

Чтобы записать такие уравнения для крайних счетных уровней, необходимо привлечь граничные условия по  $\zeta$  в сеточной форме. Рассмотрим вариант определения тенденций  $q|_{\zeta=1}$  и  $q|_{\zeta=0}$ , которые будут фигурировать в уравнениях, при условии, что уровни  $\zeta=1$  и  $\zeta=0$  имеют дробные индексы (см. рис. 2). В этом случае можно ввести так называемые «фиктивные» уровни\*, чтобы аппроксимировать производную  $\frac{\partial q}{\partial \zeta}$ , фигурирующую в краевых

условиях, симметричными разностями. Воспользуемся предположением о баротропности среды выше уровня  $k-1$  (верхний счетный уровень) и ниже уровня  $K-1$  (нижний счетный уровень). Это означает, что имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{k-1} &= a \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{k=0}, \quad \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{k-1} = a \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{k=0}; \\
 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{K-1} &= b \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_K, \quad \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{K-1} = b \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_K,
 \end{aligned}$$

где  $a, b$  — коэффициенты пропорциональности. Приведенные соотношения обращают в нуль следующие якобианы:

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}, \psi \right)_{k-\frac{1}{2}} &= \left( \frac{\psi_{k=1} - \psi_{k=0}}{\zeta_{k=1} - \zeta_{k=0}}, \psi_{k=0} \right), \quad (4.17) \\
 \left( \frac{\partial \psi}{\partial \zeta}, \psi \right)_{K-\frac{1}{2}} &= \left( \frac{\psi_K - \psi_{K-1}}{\zeta_K - \zeta_{K-1}}, \psi_K \right).
 \end{aligned}$$

В этом случае условие (3.8) в сеточной форме принимает вид:

$$q_{i,j,K} - q_{i,j,K-1} + \alpha (\zeta_K - \zeta_{K-\frac{1}{2}}) q_{i,j,K-\frac{1}{2}} = 0. \quad (4.18)$$

\* Такие уровни используются в квазигеострофической схеме П. Н. Белова [2], в которой  $K=4$ .

Чтобы исключить из (4.18) значение тенденции на нижней границе атмосферы ( $q_{i,j,K-\frac{1}{2}}$ ), воспользуемся барометрической формулой геопотенциала, выполнив в ней переход к функции тока:

$$\psi_{\text{в}} - \psi_{\text{н}} = \frac{R}{l} \left( \frac{T_{\text{в}} + T_{\text{н}}}{2} \right) \cdot \ln \frac{\zeta_{\text{н}}}{\zeta_{\text{в}}}, \quad (4.19)$$

где индексы «н» и «в» означают соответственно нижний и верхний уровни. Дифференцируя равенство (4.19) по времени и записав его для двух нижних слоев атмосферы ( $K \div K-1$  и  $K-1 \div K-2$ ) при условии, что локальные изменения средней температуры воздуха в этих слоях одинаковы, найдем связь между значениями тенденций на уровне  $K$  и на уровнях  $K-1$  и  $K-2$ . Верхнее граничное условие  $q_{i,j,h=1} = q_{i,j,h=0}$  исключает тенденцию для верхнего фиктивного уровня. Таким образом, в уравнениях (4.16) значения функций  $q$  и  $\psi$  на обоих фиктивных уровнях будут определены, а система уравнений замкнутой.

Итерационный процесс необходимо выполнять, начиная с верхнего счетного уровня, и заканчивать его, когда максимальная по модулю невязка, полученная в итерационном цикле, будет меньше заданной точности решения уравнения. Затем строятся prognostические поля функции  $\psi_{i,j,h}$  на момент времени  $t_0 + \Delta t$  и все вычисления повторяются заново на следующем шаге.

## 5. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА И ЕГО РЕШЕНИЕ

Итак, если поле функции тока известно в начальный момент времени, то прогноз ее на основании уравнений (2.1), (2.4) или (2.11) отличается от прогноза геопотенциала с помощью аналогичных квазигеострофических уравнений лишь отсутствием деления на параметр Кориолиса. Однако функция  $\psi$  является не измеряемой, а расчетной величиной, поэтому сначала должна быть решена задача определения начальных полей  $\psi(x, y, \zeta, t_0)$ . Наиболее простой путь получения значений функции  $\psi$  — воспользоваться соотношениями (1.2). Однако этого делать нельзя, так как скорость ветра измеряется с большими ошибками. Так, в некоторых случаях погрешности измерения могут достигать величины характерных значений скорости переноса. Поэтому строят поля  $\psi$  через геопотенциал, измеряемый значительно точнее, чем скорость ветра.

Построим диагностическое уравнение, описывающее связь между полем движения и полем геопотенциала (давления). С этой целью воспользуемся уравнениями движения без учета вязких членов:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \dot{\omega} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + l v, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \dot{\omega} \frac{\partial v}{\partial \zeta} = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - l u \quad (5.2)$$

и, применяя к ним операцию плоской дивергенции, получим уравнение дивергенции

$$\frac{\partial D}{\partial t} + u \frac{\partial D}{\partial x} + v \frac{\partial D}{\partial y} + \dot{\omega} \frac{\partial D}{\partial \zeta} + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - l\Omega + u \frac{\partial l}{\partial x} - v \frac{\partial l}{\partial y} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad (5.3)$$

описывающее индивидуальные изменения  $D$  в движущейся частице воздуха. Оставляя в уравнении (5.3) члены с порядком  $10^{-9}$ , то есть ограничиваясь линейным приближением, получим

$$l\Omega = \nabla^2 \Phi \quad \text{или} \quad l\nabla^2 \psi = \nabla^2 \Phi. \quad (5.4)$$

Если пренебречь изменением параметра Кориолиса с широтой, то уравнение (5.4) можно записать как уравнение Лапласа  $\nabla^2 \left( \psi - \frac{\Phi}{l} \right) = 0$ . Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка, имеющее только одно решение, ограниченное на всей плоскости  $(x, y)$ , а именно нулевое:  $\psi = \frac{\Phi}{l} = \psi_g$ .

Таким образом, первое приближение уравнения дивергенции эквивалентно выражению (1.22), описывающему связь между соленоидальной и геострофической завихренностями. Последующие приближения его позволяют оценить погрешности, вызванные предположением о геострофичности вихря. Так, сохраняя в уравнении (5.3) члены с порядком  $10^{-10}$  и учитывая, что для бездивергентного уровня  $D = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial x} = \frac{\partial D}{\partial y} = 0$ ,

получим второе приближение уровня дивергенции

$$l\Omega - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - u \frac{\partial l}{\partial y} + v \frac{\partial l}{\partial x} = \nabla^2 \Phi, \quad (5.5)$$

которое в метеорологии называется уравнением баланса. Это уравнение является диагностическим и учитывает более тонкие особенности взаимосвязи между полями скорости ветра и геопотенциала, чем геострофическое приближение.

Использование уравнения (5.3) в еще более полном виде связано со значительными трудностями. Так, например,  $0 \left( \frac{\partial D}{\partial t} \right) = 0 \left( u \frac{\partial D}{\partial x} \right) = 0 \left( v \frac{\partial D}{\partial y} \right) = 4 \cdot 10^{-11}$ , и учет таких слагаемых имел бы смысл, если бы погрешности определения главных членов  $\nabla^2 \Phi$  и  $l\Omega$  не превышали величину указанных малых членов. Иными

словами, главные члены должны определяться с точностью, равной 1% их величины. Однако такая точность практически недостижима.

Направив ось  $x$  по касательной к широтному кругу  $\left(\frac{\partial l}{\partial x} = 0\right)$  и выразив в уравнении (5.5) компоненты вектора скорости через функцию тока, получим уравнение баланса в соленоидальном приближении:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{l} \nabla^2 \Phi - \frac{2}{l} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - \frac{\beta}{l} \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (5.6)$$

Это уравнение является двумерным и нелинейным, связывает функции  $\psi$  и  $\Phi$  и применительно к любому атмосферному уровню позволяет решать две диагностические задачи: определять функцию тока  $\psi(x, y, t_0)$ , отвечающую начальному распределению геопотенциала  $\Phi(x, y, t_0)$ , и, наоборот, по прогностическому полю функции тока  $\psi(x, y, t_0 + N\Delta t)$  строить поле  $\Phi(x, y, t_0 + N\Delta t)$ .

М. И. Юдин показал\*, что в принципиальном отношении уравнение баланса представляет собой эквивалент одного из агеострофических соотношений, а процесс определения агеострофического ветра, как известно, приводит к выделению гравитационных волн. В частности, легко доказать, что  $\frac{1}{l} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]$  представляет собой агеострофический вихрь  $\Omega'$ .

Относительно функции  $\psi$  уравнение (5.6) принадлежит к семейству уравнений типа Монжа — Ампера (нелинейный член в квадратных скобках называется оператором Монжа — Ампера) и может быть гиперболического, параболического или эллиптического типа в зависимости от коэффициентов перед производными. Так, при

$$l^2 + 2 \nabla^2 \Phi > 0, \quad (5.7)$$

$$l^2 + 2 \nabla^2 \Phi < 0, \quad (5.8)$$

$$l^2 + 2 \nabla^2 \Phi = 0 \quad (5.9)$$

уравнение баланса относится соответственно к эллиптическому, гиперболическому и параболическому типам. Однако относительно функции  $\psi$  уравнение (5.6) решается лишь в случае, если оно

\* См. [8], с. 239.

эллиптического типа\*. Так как в циклонических областях  $\nabla^2\Phi > 0$ , то в них условие (5.7) выполняется. В антициклонах  $\nabla^2\Phi < 0$ , поэтому условие (5.7) здесь не выполняется, если  $|\Omega| > 0,7 \cdot 10^{-4} \text{с}^{-1}$ . Это означает, что изменение скорости ветра на  $70 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$  должно происходить на расстоянии 100 км. Таким образом, условие (5.7) налагает определенные ограничения на геострофический ветер в антициклонах. Нарушение эллиптичности уравнения баланса в реальных условиях наблюдается только при очень больших отрицательных значениях  $\frac{1}{l} \nabla^2\Phi$  (в областях с очень сильной антициклональной кривизной поля геопотенциала). Чаще всего это возможно на антициклонической периферии струйного течения в низких широтах, где геострофический вихрь велик по абсолютной величине, а параметр Кориолиса мал. В большинстве же синоптических ситуаций в средних и высоких широтах условие эллиптичности уравнения (5.6) выполняется. Например, на поверхности 500 гПа в умеренных широтах лишь 3% всей площади занимают области, где условие (5.7) нарушается. В таких точках сетки поле геопотенциала предварительно «подправляют», например, сглаживанием.\*\* Опыт показывает, что наибольшие исправления приходятся на низкие широты, на рай-

\* Покажем, как выводятся условия эллиптичности уравнения баланса. Чтобы выяснить, каким условиям в этом случае должны удовлетворять коэффициенты перед производными, запишем (5.6) в более общем виде:

$$A \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + D + E \left[ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0, \quad (5.10)$$

где  $A, B, C, D, E$  — непрерывные функции от  $x, y, \psi, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}$ , удовлетворяющие неравенству

$$AC - B^2 - DE > 0. \quad (5.11)$$

Сравнивая уравнения (5.10) и (5.6), найдем, что  $A=C=l, B=0, D=-\nabla^2\Phi + \beta \frac{\partial\psi}{\partial y}, E=2$ . Таким образом, условие (5.11) принимает вид

$$\nabla^2\Phi - \beta \frac{\partial\psi}{\partial y} > -\frac{l^2}{2}. \quad (5.12)$$

Поскольку для движений синоптического масштаба

$$\frac{0(\nabla^2\Phi)}{0\left(\beta \frac{\partial\psi}{\partial y}\right)} \approx 10,$$

то, пренебрегая в (5.12) малой величиной  $\beta \frac{\partial\psi}{\partial y}$ , получим критерий эллиптичности уравнения баланса в форме (5.7).

\*\* Если условие эллиптичности не выполняется хотя бы в одной или нескольких точках, уравнение баланса становится уравнением гиперболического типа и решение быстро расходится.

оны с плохой метеорологической освещенностью. Добившись выполнения условия эллиптичности (5.7) во всех точках сеточной области, используют видоизмененное поле геопотенциала как начальное поле для решения уравнения баланса относительно  $\psi$ .

Для получения однозначного решения уравнения (5.6) достаточно задать простейшие граничные условия — нормальную компоненту скорости вдоль всей границы области интегрирования:

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial s} \right|_{\Gamma} = \frac{1}{l} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right|_{\Gamma} \quad \text{или} \quad \psi|_{\Gamma} = \frac{1}{l} \Phi|_{\Gamma} + \text{const}, \quad (5.13)$$

где  $s$  — касательная к границе  $\Gamma$ .

В силу нелинейности уравнения баланса его решение может быть выполнено только методом сеток. Поскольку искомая функция  $\psi$  содержится в левой и в правой частях уравнения, для ее определения используют различные итерационные схемы. Наиболее простой способ решения записывается с помощью итерационной процедуры, в которой нелинейность линеаризуется, то есть нелинейные члены берутся из предыдущей итерации:

$$\nabla^2 \psi^{(\nu+1, \mu)} = \frac{1}{l} \nabla^2 \Phi - \frac{2}{l} \left[ \frac{\partial^2 \psi^{(\nu, \mu)}}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi^{(\nu, \mu)}}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \psi^{(\nu, \mu)}}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - \frac{\beta}{l} \frac{\partial \psi^{(\nu, \mu)}}{\partial y}, \quad (5.14)$$

где  $\mu = 1, 2, \dots$  — номер приближения при вычислении лапласиана  $\nabla^2 \psi$ ;  $\nu = 0, 1, 2, \dots$  — номер итерации при решении уравнения Пуассона. Целесообразность использования в (5.14) последних трех членов справа из предыдущей итерации объясняется тем, что они на порядок меньше главных слагаемых. Процедура (5.14) выполняется следующим образом. Сначала задаются значения функции  $\psi_{i,j}^{(\nu=0, \mu=1)}$  в геострофическом приближении  $\psi_{i,j}^{(0,1)} = \frac{\Phi_{i,j}}{l}$ ,

где  $\bar{l}$  — значение параметра Кориолиса на какой-либо фиксированной широте. Затем вычисляются все производные от функции тока, фигурирующие в (5.14) справа. По результатам наблюдений рассчитываются значения  $\frac{\nabla^2 \Phi_{i,j}}{l_{i,j}}$  во всех внутренних узлах сеточной области. Теперь, когда правая часть уравнения (5.14)  $(\Delta s)^2 \cdot F_{i,j}^{(\nu=0, \mu=1)}$  известна (известно значение лапласиана  $\nabla^2 \psi_{i,j}^{(0,1)}$ ), оно решается как уравнение Пуассона относительно функции  $\psi_{i,j}^{(1,1)}$  экстраполированным методом Либмана (внутренний цикл, итерации которого нумеруются с помощью индекса  $\nu$ ), обеспечивающим наиболее быструю сходимость процесса. Названный ме-

тод осуществляется в следующей последовательности. На первом этапе находится невязка

$$R_{i,j}^{(\nu+1, \mu)} = \psi_{i+1,j}^{(\nu, \mu)} + \psi_{i-1,j}^{(\nu+1, \mu)} + \psi_{i,j+1}^{(\nu, \mu)} + \psi_{i,j-1}^{(\nu+1, \mu)} - 4\psi_{i,j}^{(\nu, \mu)} - (\Delta s)^2 F_{i,j}^{(\nu, \mu)}, \quad (5.15)$$

представляющая собой разность между левой и правой частями уравнения баланса. Искомое значение функции тока находится по формуле

$$\psi_{i,j}^{(\nu+1, \mu)} = \psi_{i,j}^{(\nu, \mu)} + \alpha R_{i,j}^{(\nu+1, \mu)}, \quad (5.16)$$

где  $\alpha$  — коэффициент перерелаксации, подбираемый с помощью численных экспериментов.

Внутренний процесс итераций продолжается (при фиксированных значениях  $\nabla^2 \Phi_{i,j}/l_{i,j}$  найденных в каждом узле сетки по данным наблюдений) до тех пор, пока не будет выполняться следующее неравенство:

$$\max_{i,j} |R_{i,j}^{(\nu+1, \mu)}| \leq \varepsilon, \quad (5.17)$$

где величина  $\varepsilon$  — априори заданная точность решения уравнения (5.14). Заметим, что уравнение Пуассона интегрируется на исходной сеточной области с использованием на внешнем периметре геострофического приближения (5.13). Таким образом, результаты расчета значений  $\psi^{(\nu+1, \mu)}$  получаются в области, содержащей на один ряд точек меньше, чем область, в которой задается геопотенциал.

Найденные по формуле (5.16) значения  $\psi^{(\nu+1, \mu)}$  используются для вычисления нового значения правой части уравнения баланса (то есть  $(\nabla^2 \psi)_{i,j}$  на следующем  $\mu+1$ -ом приближении). Затем снова решается задача (5.15)—(5.17). Итерации на внешнем цикле контролируются с помощью следующего теста:

$$\max_{i,j} |\psi^{(\mu+1)} - \psi^{(\mu)}| \leq \varepsilon. \quad (5.18)$$

Полученные таким образом поля функции тока на одном или нескольких уровнях используются в качестве исходных в прогнозистических моделях.

Итак, процедура решения уравнения баланса по схеме (5.14) заключается в выполнении двух последовательных («вложенных» друг в друга) итерационных циклов. Поскольку итерационный процесс (5.14) сходится очень медленно, то, с целью ускорения сходимости решения, был предложен ряд других итерационных алго-

ритмов. Например, по Арнасону итерационный процесс строится следующим образом:

$$\nabla^2 \psi^{(v+1, \mu)} = \frac{\nabla^2 \Phi}{l} - \frac{1}{l} \left[ \frac{\partial^2 \psi^{(v, \mu)}}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi^{(v+1, \mu)}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi^{(v+1, \mu)}}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi^{(v, \mu)}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi^{(v, \mu)}}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi^{(v+1, \mu)}}{\partial x \partial y} \right] - \frac{\beta}{l} \frac{\partial \psi^{(v+1, \mu)}}{\partial y}. \quad (5.19)$$

Видно, что здесь на каждой итерации решается весьма сложное линейное уравнение эллиптического типа с переменными коэффициентами.

Теперь запишем нелинейный член уравнения баланса (5.5) так, чтобы в нем появился лапласиан от функции тока. С этой целью воспользуемся преобразованием С. Петерсена:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[ -\Omega^2 + D^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Подставив это выражение в уравнение (5.5) и записав  $u$ ,  $v$ ,  $\Omega$  через функцию тока  $\psi$ , будем иметь преобразованное уравнение баланса:

$$(\nabla^2 \psi)^2 + 2l \nabla^2 \psi - \left[ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 + \left( 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2\beta \frac{\partial \psi}{\partial y} + 2\nabla^2 \Phi \right] = 0.$$

Решая его как квадратное уравнение относительно  $\nabla^2 \psi$ , получим

$$\nabla^2 \psi = -l + \sqrt{l^2 + \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right)^2 + \left( 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2\beta \frac{\partial \psi}{\partial y} + 2\nabla^2 \Phi}. \quad (5.20)$$

Решение, содержащее минус перед радикалом, отброшено как не имеющее физического смысла. Для выяснения физического смысла решения (5.20) отбросим нелинейные члены. Тогда

$$\nabla^2 \psi = -l + l \sqrt{1 + 2 \frac{\nabla^2 \Phi}{l^2}}. \quad (5.21)$$

Поскольку в обычных условиях  $\frac{1}{l} \nabla^2 \Phi < l$ , то, очевидно,  $2 \frac{\nabla^2 \Phi}{l^2} < 1$ .

Учитывая сказанное и представляя функцию  $\left( \frac{1}{l} + 2 \frac{\nabla^2 \Phi}{l^2} \right)^{1/2}$  в виде степенного ряда, запишем выражение (5.21) следующим образом:

$$\nabla^2 \psi = -l + l \left( 1 + \frac{\nabla^2 \Phi}{l^2} + \dots \right) \approx \frac{\nabla^2 \Phi}{l}.$$

Отсюда следует вывод, что без учета нелинейных членов решение (5.20) приближенно удовлетворяет условию выполнения геострофических соотношений. На его основе можно построить следующий итерационный алгоритм:

$$\nabla^2 \psi^{(v+1, \mu)} = -l + \sqrt{l^2 + \left( \frac{\partial^2 \psi^{(v, \mu)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi^{(v, \mu)}}{\partial y^2} \right) + \left( 2 \frac{\partial^2 \psi^{(v, \mu)}}{\partial x \partial y} \right)^2} - \dots \rightarrow$$

$$\leftarrow \dots - 2\beta \frac{\partial \psi^{(v, \mu)}}{\partial y} + 2\nabla^2 \Phi, \quad (5.22)$$

предусматривающий решение уравнения Пуассона на каждой внешней итерации  $\mu$ . Алгоритм (5.22) обеспечивает лучшую сходимость последовательности внешних итераций, чем (5.14), что обеспечило его широкое применение.

Итак, решив уравнение баланса, мы получаем начальное поле функции тока  $\psi(x_i, y_j, \zeta_k, t_0)$ . Опыт показал, что наиболее существенное различие в конфигурации и густоте изогипс и изолиний функции тока наблюдается в областях интенсивных циклонов.

Рассмотрим теперь более простую задачу — переход от предвычисленных полей функции тока к полям геопотенциала путем так называемого «обращения» уравнения баланса, то есть решения его относительно геопотенциала по известному распределению  $\psi(x, y)$ . В этом случае уравнение (5.6) решается как линейное уравнение Пуассона. На границе области, в узлах которой были предвычислены значения  $\psi$ , точное условие вновь заменяется приближенным:

$$\Phi|_{\Gamma} = \bar{l}\psi|_{\Gamma}. \quad (5.23)$$

На основе соленоидальных соотношений (1.2) осуществляется переход от полей функции тока к полям скорости ветра. Направление вектора скорости ветра совпадает с касательной, проведенной к изолинии функции тока в данной точке сетки так, что слева остаются низкие значения  $\psi$ .

В заключение отметим, что устойчивость решения уравнения баланса (5.6) обеспечивается соответствующим выбором шагов  $\Delta s$  и  $\Delta t$ , который осуществляется на основе условия

$$\frac{\Delta t \cdot C_{\max}}{\Delta s} < 1. \quad (5.24)$$

Таким образом, соотношение между  $\Delta s$  и  $\Delta t$  здесь такое же, как и при решении прогностических уравнений квазигеострофических моделей.

## 6. СХЕМЫ РЕАЛИЗАЦИИ СОЛЕНОИДАЛЬНОЙ И КВАЗИСОЛЕНОИДАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

Рассмотрим последовательность вычислительных операций при построении прогностических полей геопотенциала  $\Phi$  по соленоидальной и квазисоленоидальным баротропной и бароклинической моделям.

1. По результатам наблюдений проводится интерполяция значений геопотенциала с наблюдательных станций в узлы регулярной сетки.

2. По начальным полям геопотенциала  $\Phi(x_i, y_j, \zeta_k, t_0) = \Phi_{i,j,k}$  рассчитываются значения лапласиана  $(\nabla^2 \Phi)_{i,j,k}$ .

3. Исследуется поле геострофической завихренности  $(\frac{1}{L} \nabla^2 \Phi)_{i,j,k}$  путем сравнения ее с  $-\frac{l_{i,j}}{2}$ . Там где отрицательные значения завихренности больше, чем  $-\frac{l_{i,j}}{2}$ , они заменяются значениями  $-\frac{l_{i,j}}{2}$  и таким образом обеспечивается эллиптичность уравнения баланса.

4. Решается уравнение баланса (5.6) относительно функции тока  $\psi$ , то есть определяются начальные поля  $\psi(x_i, y_j, \zeta_k, t_0) = \psi_{i,j,k}$ .

5. Решается задача прогноза поля функции тока путем интегрирования шагами по времени одного из уравнений (2.1), (2.4) или (2.11). В результате получаются прогностические поля  $\psi(x_i, y_j, \zeta_k, t_0 + N \Delta t)$ .

6. В случае баротропного прогноза на уровне 500 гПа, а в случае бароклинического прогноза на всех уровнях  $\zeta_k$  выполняется «обращение» уравнения баланса (5.6), то есть осуществляется его решение относительно геопотенциала  $\Phi_{i,j,k}$  как уравнения Пуассона. Строятся прогностические поля  $\Phi(x_i, y_j, \zeta_k, t_0 + N \Delta t)$ .

7. По соленоидальным соотношениям (1.2) рассчитываются прогностические поля составляющих вектора скорости  $u(x_i, y_j, \zeta_k, t_0 + N \Delta t)$ ,  $v(x_i, y_j, \zeta_k, t_0 + N \Delta t)$  и определяется его направление.

Перейдем теперь к общей оценке соленоидальной и квазисоленоидальных моделей. Положительными сторонами соленоидальной модели являются:

— использование уравнений движения в более полной форме, чем это позволяет сделать квазигеострофическое приближение;

— простота модели и формальная замкнутость используемой системы уравнений — баротропного уравнения вихря (2.1) и уравнения баланса (5.6), которое выполняется точно при соленоидальности скорости ветра во всей толще атмосферы. Вследствие этого решения системы уравнений (2.1) и (5.6) можно трактовать как точные решения класса соленоидальных движений, возможных в атмосфере при некоторых условиях. Это позволяет рассматривать ряд эталонных задач, точное решение которых известно, и

реальных ситуаций, не разделяя погрешностей, возникающих за счет физических упрощений и приближенных методов интегрирования. Основное допущение баротропной соленоидальной модели ( $D=0$ ) влечет за собой отбрасывание правой части уравнения вихря  $\left(l \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} = -lD\right)$  и искажает поведение планетарных волн. Та-

кие модели применялись в свое время для прогноза на срок до 3—4 суток. За счет использования гипотезы квазисоленоидальности (вместо гипотезы квазигеострофичности) оправдываемость суточных прогнозов поля давления увеличивается в среднем на 4—5%, а в низких широтах отсутствует ложный антициклонез. Уточнение прогноза достигается вследствие более строгого описания связи между полем движения и полем давления.

Для реализации баротропных квазисоленоидальных прогнозов на ЭВМ требуется примерно в два раза больше времени, чем для квазигеострофической модели. Трудоемкость здесь возрастает за счет того, что уравнение баланса решается дважды: сначала как уравнение Монжа — Ампера, затем как уравнение Пуассона. На первый этап расходуется примерно в три раза больше машинного времени, чем на второй. Это объясняется тем, что, например, для достижения точности 1 гп. дкм при решении уравнения Монжа — Ампера требуется около 80—100 итераций (поле правых частей рассчитывается 8—10 раз,  $\mu=8—10$ ), а «обращение» уравнения баланса осуществляется всего за 8—10 итераций.

Попытки построения бароклинических квазисоленоидальных прогнозов (попытки учета в той или иной форме средней горизонтальной дивергенции в воздушной колонне) не привели к успеху. Основная трудность здесь заключается в том, что в квазигеострофическое уравнение вихря входит производная по времени под знаком лапласиана  $\left(\nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)$ , а в уравнение притока тепла фигурирует производная  $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\right)$  и не существует простого перехода к гипотезе соленоидальности, поскольку замена геопотенциала близкой величиной  $\psi \cdot l$  связана с погрешностями, имеющими одинаковый порядок с поправками, которые вводятся при переходе от квазигеострофической модели к квазисоленоидальной. Для повышения точности можно рассматривать производную по времени от уравнения баланса как недостающую связь между производными  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  и  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ . Однако в этом случае утрачивается преимущество простоты по сравнению с более точной в принципиальном отношении агеострофической моделью М. И. Юдина [8].

В настоящее время уравнение баланса применяется в моделях, основанных на полных уравнениях динамики атмосферы, для получения согласованных между собой полей давления и движения со свойствами прогностических моделей.

## 7. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА БАРОТРОПНОЙ СОЛЕНОИДАЛЬНОЙ МОДЕЛИ

Применительно к инерционным вариантам моделей атмосферы (когда не учитываются неадиабатические и диссипативные эффекты) при некоторых видах граничных условий имеет место сохранение интегральных свойств (линейных и квадратичных характеристик) моделей. Однако при переходе от дифференциальных уравнений к сеточным сохранение статистических моментов не обеспечивается, в результате чего решение начинает приобретать характерную структуру «растяжения» или «удлинения», а поток распадается на отдельные вихри нитевидной формы, размер которых составляет несколько шагов сетки. Обычно при продолжении процесса интегрирования интенсивность таких вихрей беспредельно растет, порождая вычислительную неустойчивость и взрывной рост полной кинетической энергии системы, которая распределяется по все большему диапазону волновых чисел.

Причиной нелинейной вычислительной неустойчивости являются ошибки искажения спектра, обусловленные неправильным заданием фаз наиболее коротких волн вследствие невозможности их корректного представления на выбранной сетке при замене дифференциальных операторов сеточными аналогами. При этом волны с малыми амплитудами, налагаясь друг на друга, дают большие амплитуды, что приводит к «разбалтыванию» схемы.

Итак, источником нелинейной вычислительной неустойчивости служит погрешность разностной аппроксимации по пространству. Поэтому для решения уравнений динамики атмосферы необходимо применять такие формы аппроксимаций, которые обеспечивают точное сохранение интегральных свойств, имеющих место при дифференциальной формулировке задачи, и вычислительную устойчивость, хотя при этом фаза и форма колебания определяются и не с оптимальной точностью\*.

Рассмотрим простейшие интегральные свойства баротропной соленоидальной модели. Движение воздуха будем рассматривать как движение двумерного потока идеальной несжимаемой жидкости, заключенной между параллельными горизонтальными фиксированными границами (рис. 4). Пренебрежем зависимостью параметра Кориолиса от широты в пределах области интегрирования. Тогда уравнение модели принимает следующий вид:

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\nabla^2 \psi, \psi). \quad (7.1)$$

Для баротропной модели при интегрировании обычно используют специальные граничные условия на периметре границы области, где нужно получить решение, — так называемое условие

\* Неустойчивость, обусловленная ошибками временной аппроксимации, легко преодолевается сглаживанием.

скольжения, когда предполагается, что нормальная составляющая скорости к границе ( $C_n$ ) во всех ее точках равна нулю:

$$(C_n)_{i,j} = u_{i,j} = - \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{\Gamma} = 0$$

— на западной и восточной участках границы,

$$(C_n)_{i,j} = v_{i,j} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{\Gamma} = 0$$

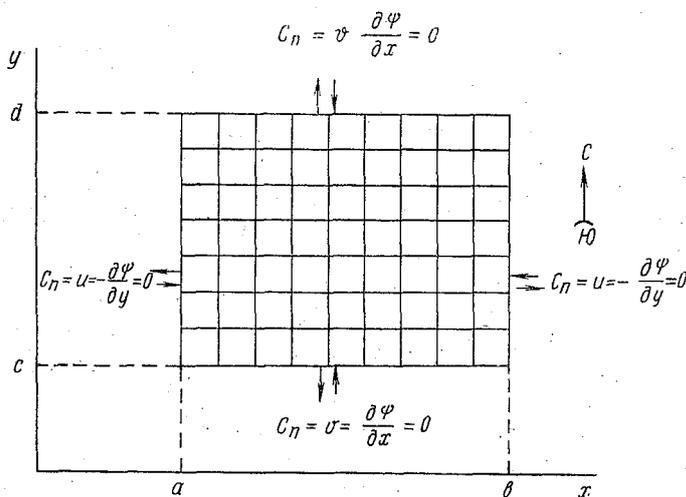


Рис. 4. Двумерный поток идеальной несжимаемой жидкости, заключенный между параллельными горизонтальными фиксированными границами, с наложенной на него разностной сеткой.

— на южном и северном участках. Иными словами предполагается, что масса воздуха, находящаяся на среднем уровне в пределах области прогноза, остается неизменной. Поскольку скорость скольжения достигается только за счет касательных составляющих, то, очевидно, они должны быть непрерывными и одинаковыми на всех участках границ, так как узлы, расположенные на стыке, принадлежат двум участкам границы.

Таким образом, условие непроникновения воздуха через границы области эквивалентно тому, что периметр ее является изолинией функции тока:  $\psi|_{\Gamma} = \text{const}$ . Учитывая, что функция  $\psi$  определяется с точностью до аддитивной постоянной, можно, не ума-

для общности, считать, что на границе  $\psi=0$ . Тогда, интегрируя уравнение (7.1) по области прогноза, получим, что

$$\begin{aligned} \int_c^a \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi \, dx dy &= \int_c^a \int_a^b (\nabla^2 \psi, \psi) \, dx dy = \int_c^a \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left( \nabla^2 \psi \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \, dx dy - \\ &- \int_c^a \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} \left( \nabla^2 \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \, dx dy = \int_c^a \nabla^2 \psi \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{x=a}^{x=b} \, dy - \\ &- \int_a^b \nabla^2 \psi \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{y=c}^{y=d} \, dx = 0, \end{aligned} \quad (7.2)$$

так как все подинтегральные функции тождественно равны нулю согласно нашему выбору на границе. Если положить  $\psi$  на границе равной любой другой константе, то интегралы взаимно уничтожаются, что вполне очевидно и не требует специального доказательства.

Поскольку переменные  $x$ ,  $y$  и  $t$  взаимно независимы, то левую часть равенства (7.2) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_c^a \int_a^b \nabla^2 \psi \, dx dy = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial I_1}{\partial t} = 0, \quad (7.3)$$

где

$$I_1 = \int_c^a \int_a^b \nabla^2 \psi \, dx dy = \text{const} \quad (7.4)$$

является первым линейным интегральным инвариантом\* рассматриваемой модели. С точки зрения физики такой вывод вполне очевиден. Действительно, уравнение (7.1) описывает горизонтальный перенос вихря, а мы приняли, что обмен воздухом между прогностической областью и окружающей атмосферой отсутствует, поэтому не может быть и изменение вихря за счет втока и вытока воздуха.

Итак, для адвективного члена уравнения (7.1) существует строгое интегральное условие (свойство)

$$\overline{(\nabla^2 \psi, \psi)} = 0, \quad (7.5)$$

которое приводит к сохранению кинетической энергии в замкнутой области. В формуле (7.5) черта сверху означает осреднение по такой замкнутой области (поверхности) в плоскости движения воздуха, вдоль границы которой функция  $\psi$  остается постоянной.

\* Инвариантами называются функции или комбинации функций обладающие свойством не менять форму записи и значение при любых преобразованиях.

Теперь становится полностью понятным физический смысл уравнения (7.1): для индивидуальной частицы воздуха вихрь скорости сохраняет свое значение. Поэтому плотность распределения завихренности элементов воздуха в двумерном несжимаемом потоке его не должна изменяться со временем. Таким образом, условие, относящееся к среднему значению вихря  $\overline{\nabla^2 \psi}$ , является ограничением, наложенным на первый момент плотности распределения вихря.

Для получения следующего инварианта модели умножим уравнение (7.1) на лапласиан  $\nabla^2 \psi$  и, сделав в левой части очевидное преобразование  $\nabla^2 \psi \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi)^2$ , проинтегрируем уравнение по области прогноза. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_c^a \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \psi) dx dy &= \int_c^a \int_a^b \nabla^2 \psi (\nabla^2 \psi, \psi) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_c^a \int_a^b ((\nabla^2 \psi)^2, \psi) dx dy = 0, \end{aligned} \quad (7.6)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_c^a \int_a^b (\nabla^2 \psi)^2 dx dy = \frac{\partial I_2}{\partial t} = 0, \quad (7.7)$$

где

$$I_2 = \int_c^a \int_a^b (\nabla^2 \psi)^2 dx dy = \text{const} \quad (7.8)$$

— первый квадратичный интегральный инвариант модели, представляющий собой интегральное по сеточной области значение квадрата вихря (энстрофии). Для адвективного члена уравнения (7.1) второе интегральное условие записывается в виде

$$\overline{\nabla^2 \psi (\nabla^2 \psi, \psi)} = 0 \quad (7.9)$$

и является ограничением, наложенным на второй момент плотности распределения вихря.

Проделаем еще одно преобразование: умножим уравнение (7.1) на  $\psi$  и проинтегрируем результат по области прогноза. Справа опять будет ноль по теореме о якобианах:

$$\int_c^a \int_a^b \psi \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi dx dy = \int_c^a \int_a^b \psi (\nabla^2 \psi, \psi) dx dy = 0. \quad (7.10)$$

Преобразуем левую часть этого равенства:

$$\begin{aligned}
 \int_c^a \int_a^b \psi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) dx dy &= \int_c^a \int_a^b \psi \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} \right) + \right. \\
 &+ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} \right) \left. \right] dx dy = \int_c^a \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} \left[ \psi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right] dx dy - \\
 &- \int_c^a \int_a^b \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx dy + \int_c^a \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} \left[ \psi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right] dx dy - \\
 &- \int_c^a \int_a^b \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy = \int_c^a \left[ \psi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right]_{x=a}^{x=b} dy - \\
 &- \int_c^a \int_a^b \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx dy + \int_a^b \left[ \psi \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right]_{y=c}^{y=a} dx - \\
 &- \int_c^a \int_a^b \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dx dy = - \frac{\partial}{\partial t} \int_c^a \int_a^b \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy - \\
 &- \frac{\partial}{\partial t} \int_c^a \int_a^b \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0.
 \end{aligned}$$

С учетом соленоидальных соотношений этот результат запишется следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_c^a \int_a^b \frac{1}{2} (u_\psi^2 + v_\psi^2) dx dy = 0, \text{ или } \frac{\partial I_3}{\partial t} = 0, \quad (7.11)$$

где

$$I_3 = \int_c^a \int_a^b \frac{1}{2} (u_\psi^2 + v_\psi^2) dx dy = \text{const} \quad (7.12)$$

— второй квадратичный интегральный инвариант модели, представляющий собой среднее значение кинетической энергии единицы массы по области. Для адвективного члена третье интегральное свойство записывается так:

$$\overline{\psi (\nabla^2 \psi, \psi)} = 0. \quad (7.13)$$

На основании проведенных выкладок можно сделать вывод, что для баротропной соленоидальной модели существует бесчис-

ленное множество инвариантов, но среди них только один линейный и только два квадратичных.

Мы доказали существование инвариантов для упрощенного уравнения модели. Если учесть, что переносный вихрь — величина переменная, то уравнение модели принимает вид

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\nabla^2 \psi + l, \psi). \quad (7.14)$$

В этом случае аналог первого линейного интегрального инварианта следует записывать так:

$$I'_1 = \int_c^a \int_a^b (\nabla^2 \psi + l) dx dy. \quad (7.15)$$

Поскольку среднее значение переносного вихря по области  $\bar{l} = \text{const}$ , то величина  $I'_1$  действительно является инвариантом.

Легко видеть, что третий инвариант  $I'_3 = \int_c^a \int_a^b \psi (\nabla^2 \psi + l) dx dy$  также будет сохраняться. Однако величина

$$I_2 = \int_c^a \int_a^b (\nabla^2 \psi + l)^2 dx dy \quad (7.16)$$

не сводится к инварианту (7.8), так как в выражение  $(\nabla^2 \psi + l)^2 = (\nabla^2 \psi)^2 + l^2 + 2l \nabla^2 \psi$  входит изменяющаяся величина  $2l \nabla^2 \psi$ .

Итак, для дифференциальных уравнений (7.1) и (7.14) существуют инварианты  $I_1, I_2, I_3$  и  $I'_1, I'_3$ . Можно показать, что при переходе от дифференциальных уравнений к их конечно-разностным аналогам инвариантность последних относительно вихря, энтропии и кинетической энергии может нарушаться. Действительно маловероятно, чтобы какая-либо конечно-разностная аппроксимация адвективного члена могла удовлетворить всем интегральным условиям. В таком случае мы не будем уверены в том, что решения уравнений будут затухать. Поэтому при переходе к сеточным уравнениям задача заключается в том, чтобы выбрать такую конечно-разностную аппроксимацию, которая обладает свойством сохранения. Этот вопрос впервые исследовал А. Аракава, показавший, что должен быть использован специальный переход к конечным разностям в якобиане  $J = (\nabla^2 \psi, \psi)$ , а также указавший принципы построения и предложивший класс конечно-разностных схем второго порядка точности, которые сохраняют вихрь и одну из квадратичных величин (энтропию или кинетическую энергию).

Рассмотрим упомянутые разностные схемы. Переходя в уравнении (7.1) к центрированным разностям, аппроксимируем адвективный член следующими тремя способами:

$$\begin{aligned} J_{i,j}^I &= (\nabla^2 \psi, \psi)_{i,j} = (\Omega, \psi)_{i,j} = \left( \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{i,j} = \\ &= \bar{\Omega}_x^x \cdot \bar{\psi}_y^y - \bar{\Omega}_y^y \cdot \bar{\psi}_x^x, \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned} J_{i,j}^{II} &= (\Omega, \psi)_{i,j} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Omega \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \Omega \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right]_{i,j} = \\ &= \overline{(\Omega \cdot \bar{\psi}_y^y)}_x - \overline{(\Omega \cdot \bar{\psi}_x^x)}_y, \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} J_{i,j}^{III} &= (\Omega, \psi)_{i,j} = -(\psi, \Omega)_{i,j} = - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \psi \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \psi \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right) \right]_{i,j} = \\ &= - \overline{(\psi \cdot \bar{\Omega}_y^y)}_x + \overline{(\psi \cdot \bar{\Omega}_x^x)}_y. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Используемые здесь операторы дифференцирования и сглаживания имеют следующий смысл:

$$\begin{aligned} \psi_x &= \frac{1}{\Delta x} (\psi_{i+\frac{1}{2},j} - \psi_{i-\frac{1}{2},j}), & \psi_y &= \frac{1}{\Delta y} (\psi_{i,j+\frac{1}{2}} - \psi_{i,j-\frac{1}{2}}), \\ \bar{\psi}^x &= \frac{1}{2} (\psi_{i+\frac{1}{2},j} + \psi_{i-\frac{1}{2},j}), & \bar{\psi}^y &= \frac{1}{2} (\psi_{i,j+\frac{1}{2}} + \psi_{i,j-\frac{1}{2}}), \\ \bar{\psi}_x^x &= \frac{1}{2\Delta x} (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}), & \bar{\psi}_y^y &= \frac{1}{2\Delta y} (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}). \end{aligned} \quad (7.20)$$

С учетом принятых обозначений (7.20) конечно-разностные аналоги якобиана (7.17)–(7.19) примут вид:

$$\begin{aligned} J_{i,j}^I &= \frac{1}{4(\Delta s)^2} [(\Omega_{i+1,j} - \Omega_{i-1,j}) \cdot (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) - (\Omega_{i,j+1} - \\ &\quad - \Omega_{i,j-1}) \cdot (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j})]; \end{aligned} \quad (7.21)$$

$$\begin{aligned} J_{i,j}^{II} &= \frac{1}{4(\Delta s)^2} [\Omega_{i+1,j} (\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1}) - \Omega_{i-1,j} (\psi_{i-1,j+1} - \\ &\quad - \psi_{i-1,j-1}) - \Omega_{i,j+1} (\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1}) + \\ &\quad + \Omega_{i,j-1} (\psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j-1})], \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} J_{i,j}^{III} &= \frac{1}{4(\Delta s)^2} [\Omega_{i+1,j+1} (\psi_{i,j+1} - \psi_{i+1,j}) - \Omega_{i-1,j-1} (\psi_{i-1,j} - \psi_{i,j-1}) - \\ &\quad - \Omega_{i-1,j+1} (\psi_{i,j+1} - \psi_{i-1,j}) + \Omega_{i+1,j-1} (\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j-1})]. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Конечно-разностные аппроксимации якобиана (7.21)—(7.23) удовлетворяют интегральному свойству (7.5). Нетрудно показать, что они имеют второй порядок точности.

В таблице приведены свойства якобианов  $J_{i,j}^I, J_{i,j}^{II}, J_{i,i}^{III}$ , из которой видно, что ни одна из аппроксимаций (7.21)—(7.23), а также их парные комбинации не обеспечивают сохранения всех трех интегральных характеристик. Как показал впервые Н. А. Филлипс, схема  $J_{i,i}^I$  является безусловно неустойчивой по отношению к возмущениям в области высоких частот. Если добиваться лишь уничтожения вычислительной неустойчивости, то достаточно применить любую схему, обладающую свойством сохранения одной из квадратичных интегральных характеристик модели. В этом случае намного уменьшаются либо исключаются вообще тенденции к вычислительной неустойчивости. Однако сохранение только одной из средних величин равносильно невыполнению свойства якобиана  $(\nabla^2 \psi, \psi) = -(\psi, \nabla^2 \psi)$  и, следовательно, свойства  $(\nabla^2 \psi, \nabla^2 \psi) = 0$ , что также может послужить причиной появления вычислительной неустойчивости.

Если имеет место нарушение инвариантности схемы, то нужно сглаживать поток так, чтобы интегральные свойства сохранялись. Поскольку любое сглаживание уменьшает амплитуды колебаний различных масштабов, то степень сглаживания должна быть разумной. В противном случае можно получить вообще безградиентное поле.

Свойства якобианов

Свойство	Вид аппроксимации						
	$J^I$	$J^{II}$	$J^{III}$	$\frac{J^I + J^{II}}{2}$	$\frac{J^I + J^{III}}{2}$	$\frac{J^{II} + J^{III}}{2}$	$\frac{J^I + J^{II} + J^{III}}{3}$
$(\nabla^2 \psi, \psi) = -(\psi, \nabla^2 \psi)$	есть	нет	нет	нет	нет	есть	есть
$(\nabla^2 \psi, \psi) = 0$	есть	есть	есть	есть	есть	есть	есть
Сохранение энтропии	нет	нет	есть	есть	нет	нет	есть
Сохранение кинетической энергии	нет	есть	нет	нет	есть	нет	есть

Наиболее корректным является требование, чтобы сохранялись средний квадрат вихря и средняя кинетическая энергия, так как эти условия, действуя совместно, накладывают ограничения и на спектральное изменение энергии. Поскольку среднее волновое

число не должно меняться во времени, то условия (7.5), (7.9) и (7.13) касаются не только среднего значения вихря и средних квадратических величин, но и спектрального распределения энергии. Это означает, что в двумерном несжимаемом потоке не может осуществляться систематическая «перекачка» энергии только от длинных к коротким волнам. Иначе говоря, энергия и квадрат вихря должны передаваться от одной волны к другой согласованным образом без их ложного роста или уменьшения. Следовательно, и при конечно-разностной аппроксимации уравнения модели перенос квадратических величин в двумерной области от одного узла сетки к другому также должен осуществляться без их фиктивного роста или уменьшения. Таким образом, интегральные свойства указанных величин должны сохраняться и в случае замены интегрирования суммированием их значений в дискретных узлах сеточной области. Аракава показал, что условию  $(\nabla^2 \psi, \psi) = -(\psi, \nabla^2 \psi)$ , а также условиям сохранения обеих квадратических величин будет удовлетворять единственный конечно-разностный аналог якобиана

$$J_{i,j} = \frac{1}{3} (J_{i,j}^I + J_{i,j}^{II} + J_{i,j}^{III}), \quad (7.24)$$

представляющий собой линейную комбинацию трех основных якобианов. Схема (7.24) может быть переписана в развернутом виде следующим образом:

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \psi, \psi)_{i,j} = & -\frac{1}{12(\Delta S)^2} [(\psi_{i,j-1} + \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i,j+1} - \psi_{i+1,j+1}) \times \\ & \times (\nabla^2 \psi_{i+1,j} - \nabla^2 \psi_{i,j}) + (\psi_{i-1,j-1} + \psi_{i,j-1} - \psi_{i-1,j+1} - \psi_{i,j+1}) \times \\ & \times (\nabla^2 \psi_{i,j} - \nabla^2 \psi_{i-1,j}) + (\psi_{i+1,j} + \psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j} - \psi_{i-1,j+1}) \times \\ & \times (\nabla^2 \psi_{i,j+1} - \nabla^2 \psi_{i,j}) + (\psi_{i+1,j-1} + \psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j-1} - \psi_{i-1,j}) \times \\ & \times (\nabla^2 \psi_{i,j} - \nabla^2 \psi_{i,j-1}) + (\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j+1}) \cdot (\nabla^2 \psi_{i+1,j+1} - \nabla^2 \psi_{i,j}) + \\ & + (\psi_{i,j-1} - \psi_{i-1,j}) \cdot (\nabla^2 \psi_{i,j} - \nabla^2 \psi_{i-1,j-1}) + (\psi_{i,j+1} - \psi_{i-1,j}) \cdot (\nabla^2 \psi_{i-1,j+1} - \\ & - \nabla^2 \psi_{i,j}) + (\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j-1}) \cdot (\nabla^2 \psi_{i,j} - \nabla^2 \psi_{i+1,j+1})]. \quad (7.25) \end{aligned}$$

Итак, рационально построив вычислительную процедуру на основе схем, обладающих свойством сохранения, удается избежать появления нелинейной вычислительной неустойчивости и тем самым увеличить временной интервал интегрирования и повысить точность решения уравнения вихря.

## 8. УТОЧНЕНИЕ БАРОКЛИННОЙ КВАЗИСОЛЕНОИДАЛЬНОЙ МОДЕЛИ

Реальные атмосферные движения не являются ни геострофическими, ни соленоидальными, ни безвихревыми. Безвихревое движение определяется условием

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (8.1)$$

В этом случае составляющие вектора скорости можно выразить через потенциал скорости \*  $\varphi$  с помощью соотношений

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad (8.2)$$

поэтому безвихревое движение называют также потенциальным. При таком идеализированном движении плоская дивергенция

$$D = \nabla^2 \varphi. \quad (8.3)$$

Более полно негеострофичность атмосферных движений удастся учесть, если использовать представление скорости через функцию тока  $\psi$  и потенциал скорости  $\varphi$ :

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (8.4)$$

Рассмотрим уточнение квазисоленоидальной пространственной модели атмосферы, предложенное И. А. Кибелем, то есть такую модель, которая позволила бы рассчитывать функции  $\Phi$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$ ,  $T$  и  $\omega$ . Для построения прогностических соотношений в уточненной постановке используются уравнения движения (5.1), (5.2). Применяя к ним операцию вихря, получим уравнение вихря скорости ветра

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = -l \nabla^2 \varphi - B_{\Omega} = F^{\Omega}(\varphi, \psi, \omega), \quad (8.5)$$

где

$$B_{\Omega} = u \frac{\partial}{\partial x} (\Omega + l) + v \frac{\partial}{\partial y} (\Omega + l) + \Omega D + \frac{\partial}{\partial x} \left( \dot{\omega} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left( \dot{\omega} \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

\* Под потенциалом поля движения понимается скалярная величина  $\varphi$ , градиент которой равен вектору скорости при безвихревом движении, так что  $\vec{C} = -\nabla\varphi = -\text{grad } \varphi$ , где  $\nabla$  — оператор Гамильтона.

С целью получения уравнения дивергенции к уравнениям движения применим операцию плоской дивергенции. В результате будем иметь

$$\nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\nabla^2 \Phi + l \nabla^2 \psi - B_D = F^D (\varphi, \psi, \dot{\omega}, \Phi). \quad (8.6)$$

Здесь

$$B_D = u \frac{\partial D}{\partial x} + v \frac{\partial D}{\partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left( \dot{\omega} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \dot{\omega} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) + \beta u - v \frac{\partial l}{\partial x}.$$

Кроме того, используются:  
уравнение притока тепла в адиабатическом приближении

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u \frac{\partial T}{\partial x} - v \frac{\partial T}{\partial y} + \dot{\omega} \frac{RT}{g\zeta} (\gamma_a - \gamma) = F^T (\varphi, \psi, \dot{\omega}, T); \quad (8.7)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \zeta} = - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (8.8)$$

из которого, с учетом (8.3), получаем

$$\frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \zeta} = -\nabla^2 \Phi. \quad (8.9)$$

Интегрируя соотношение (8.9) по переменной  $\zeta$  при условии

$$\dot{\omega} |_{\zeta=0} = 0, \quad (8.10)$$

будем иметь

$$\dot{\omega}_\zeta = - \int_0^\zeta \nabla^2 \Phi d\zeta. \quad (8.11)$$

Таким образом, уравнения (8.5), (8.6), (8.7), (8.11) и уравнение статики

$$T = -\frac{\zeta}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \quad (8.12)$$

представляют собой замкнутую систему относительно функций  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\dot{\omega}$ ,  $T$ ,  $\Phi$ , которую можно решать только численными методами.

Определив на основе уравнений (8.5)—(8.7) тенденции  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial t}$  в каждом узле сеточной области, построим поля  $\varphi_{i,j,h}$ ,

$\psi_{i,j,k}$  и  $T_{i,j,k}$ . Диагностические уравнения (8.11), (8.12) позволяют определить недостающие функции  $\Phi$  и  $\dot{\omega}$  на каждом шаге по времени.

Для получения однозначного решения системы уравнений необходимо задать начальные и граничные условия. Граничные условия ставятся по всем пространственным переменным  $x, y, \zeta$ . На боковых границах прогностической области принимается равенство нулю тенденций искомых функций:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{\Gamma} = 0. \quad (8.13)$$

Кроме того, ставится так называемое «вязкое условие»

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (8.14)$$

которое означает, что в тех узлах сеточной области, где решение не может быть получено, присваиваются значения решений, полученных в ближайших внутренних узлах. Так, очевидно, что с помощью уравнений (8.5) и (8.6) значения  $\nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$  и  $\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t}$  определяются в узлах, расположенных на третьем ряду точек. Следовательно, эти значения присваиваем и узлам, расположенным на втором ряду.

Верхнее краевое условие ставится в форме (8.10), а на нижней границе атмосферы принимается

$$w \Big|_{\zeta=1}^{z=0} = 0, \quad (8.15)$$

то есть полагается отсутствие вертикального потока. Неточность условия (8.15) заключается в отождествлении уровней  $z=0$  и  $\zeta=1$ , а также в неучете эффектов планетарного пограничного слоя (ППС): турбулентной вязкости и орографии (земля считается плоской, ППС сжимается в пленку так, что его верхняя граница совпадает с уровнем  $\zeta=1$ ).

Из формулы (1.6) для аналога вертикальной скорости в ИСК следует:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\zeta=1} = - \left( u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} - RT \dot{\omega} \right) \Big|_{\zeta=1}, \quad (8.16)$$

где

$$\dot{\omega} \Big|_{\zeta=1} = - \int_0^1 \nabla^2 \Phi d\zeta. \quad (8.17)$$

Рассмотрим, как задаются начальные условия для функций  $\psi, \Phi, T, \Phi, \dot{\omega}$ . Поскольку поле температуры задать сложнее, чем

поле геопотенциала, то обычно используют результаты наблюдений за геопотенциалом, а температура рассчитывается по уравнению статики

$$T_{i,j,k} = - \frac{\zeta_k}{R} \cdot \frac{\Phi_{i,j,k+1} - \Phi_{i,j,k-1}}{\zeta_{k+1} - \zeta_{k-1}}. \quad (8.18)$$

Начальные поля функции тока определяются по полям геопотенциала с помощью уравнения баланса (5.6), которое решается на каждой изобарической поверхности как уравнение Монжа — Ампера.

Рассмотрим принципиальную возможность построения начальных полей величины  $\varphi$ . Если бы ветер наблюдался с достаточной точностью, то по полям горизонтальных составляющих реального ветра  $u_{i,j,k}, v_{i,j,k}$  можно было бы находить дивергенцию  $D_{i,j,k}$ , а затем, пользуясь уравнением (8.3), рассчитывать значения  $\varphi_{i,j,k}$ . Так и пытаются делать, но этот путь не особенно точен. Можно также представить функции  $u_{i,j,k}$  и  $v_{i,j,k}$  в виде степенных полиномов, дифференцировать их и строить поля  $\varphi_{i,j,k}$ , не прибегая к конечно-разностным аналогам. Однако неизвестно, сколько членов разложения нужно учитывать. По-видимому, поля скорости ветра целесообразно представлять в виде рядов по естественным ортогональным функциям, обеспечивающим быструю сходимость. Однако и на этом пути возникают немалые трудности, связанные с получением базисных функций для больших областей.

Уравнение (8.3) представляет собой двумерное уравнение Пуассона. Для его решения на периметре сеточной области задается однородное граничное условие

$$\varphi|_{\Gamma} = 0. \quad (8.19)$$

Построив поля  $\varphi(x_i, y_j, \zeta_k, t_0)$ , интегрируют диагностическое соотношение (8.11) и рассчитывают значения  $\omega(x_i, y_j, \zeta_k, t_0)$ . Для вычисления интеграла весь атмосферный слой ( $0 \div \zeta$ ) разбивают на небольшие слои так, чтобы в каждом из них интеграл был достаточно мал, и заменяют его через сумму интегралов:

$$\int_0^{\zeta} \nabla^2 \varphi d\zeta = \int_0^{\zeta_1} \nabla^2 \varphi d\zeta + \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \nabla^2 \varphi d\zeta + \dots + \int_{\zeta_{k-1}}^{\zeta_k} \nabla^2 \varphi d\zeta = \sum_{k=1}^k \overline{(\nabla^2 \varphi)_k},$$

где  $\overline{(\nabla^2 \varphi)_k}$  — среднее значение лапласиана в  $k$ -ом слое.

Определив  $\omega_{i,j,k}$  на всех счетных уровнях, можно переходить к численному интегрированию прогностических уравнений (8.5), (8.6), (8.7) с целью расчета тенденций функций  $\varphi, \psi, T$  в начальный момент времени по формуле направленных разностей (4.4) и построения прогностических полей  $\varphi(x_i, y_j, \zeta_k, t_0 + \Delta t)$ ,  $\psi(x_i, y_j, \zeta_k, t_0 + \Delta t)$ ,  $T(x_i, y_j, \zeta_k, t_0 + \Delta t)$ .

Заметим, что при известных правых частях все три прогностические уравнения представляют собой уравнения Пуассона и могут быть решены относительно тенденций  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial T}{\partial t}$  с помощью итерационных методов.

Чтобы осуществить прогноз на втором шаге по времени, требуется построить прогностические поля геопотенциала  $\Phi(x_i, y_j, \zeta_h, t_0 + \Delta t)$ , которые необходимы для вычисления лапласиана  $\nabla^2 \Phi_{i,j,h}$  в правой части уравнения (8.6). Прогноз геопотенциала выполняется следующим образом. С помощью нижнего краевого условия (8.16), где используются начальные значения функций  $u_{i,j}$ ,  $v_{i,j}$ ,  $\omega_{i,j}$  и  $T_{i,j}$  на уровне  $\zeta=1$ , определяются тенденции  $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{i,j,\zeta=1}$ , а затем по формуле (4.4) — поле  $\Phi(x_i, y_j, \zeta=1, t_0 + \Delta t)$ .

На всех вышележащих счетных уровнях прогностические поля геопотенциала находятся с помощью уравнения статики, которое интегрируется по переменной  $\zeta$  и в результате получается известная формула для относительного геопотенциала

$$\Phi(x_i, y_j, \zeta_{h-1}) = \Phi_{i,j,h} + R \cdot \frac{T_{i,j,h-1} + T_{i,j,h}}{2} \cdot \ln \frac{\zeta_h}{\zeta_{h-1}}, \quad (8.20)$$

с помощью которой находится геопотенциал вышележащей изобарической поверхности  $\zeta_{h-1}$ . В формуле (8.20) принято, что температура воздуха изменяется с высотой линейно.

Прогностические поля  $\omega(x_i, y_j, \zeta_h, t_0 + \Delta t)$  строятся так же, как это показано выше для начального момента времени.

Повторяя все расчетные процедуры  $N$  раз, получают прогноз полей  $(\varphi, \psi, T, \omega, \Phi)_{i,j,h}$ .

Последний этап прогноза заключается в построении полей скорости ветра с учетом соленоидальной и потенциальной компонент движения по соотношениям (8.4).

Преимущество предложенного И. А. Кибелем подхода заключается в том, что связь между полями давления и движения задается более строго (хотя она и замаскирована), так как учитываются соленоидальная и потенциальная компоненты движения. Функция тока  $\psi$  рассчитывается через геопотенциал, а потенциал скорости  $\varphi$  с помощью уравнения дивергенции. Понятно, что если бы начальное поле функции тока определялось через поле реальной скорости ветра, то связь между полями движения и давления была установлена строже.

Следующим этапом уточнения квазисоленоидальных моделей является прогноз метеорологических величин на основе полных (нефильтрованных) уравнений динамики атмосферы.

## ЛИТЕРАТУРА

- 1\*. Аракава А. Схема численного интегрирования уравнений движения жидкости на длительный срок: случай двумерного потока несжимаемой жидкости. — В кн.: «Численные методы решения задач динамики атмосферы и океана». Л.: Гидрометеиздат, 1968, с. 226—251.
2. Белов П. Н. Численные методы прогноза погоды. — Л.: Гидрометеиздат, 1975. — 392 с.
- 3\*. Бенгтссон Л., Темпертон К. Разностные аппроксимации квазигеострофических моделей. — В кн.: «Численные методы, используемые в атмосферных моделях». — Л.: Гидрометеиздат, 1982, с. 245—273.
4. Гандин Л. С., Дубов А. С. Численные методы краткосрочного прогноза погоды. — Л.: Гидрометеиздат, 1968. — 427 с.
- 5\*. Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. — М.: ГИТТЛ, 1957. — 375 с.
- 6\*. Лилли Д. О вычислительной устойчивости численных решений нестационарных нелинейных геофизических задач динамики жидкости. — В кн.: «Численные методы решения задач динамики атмосферы и океана». Л.: Гидрометеиздат, 1968, с. 252—287.
7. Панин Б. Д., Титов С. И. Численный анализ и прогноз полей метеорологических элементов. — Л.: изд. ЛВИКА им. А. Ф. Можайского, 1969. — 293 с.
- 8\*. Юдин М. И. Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды. — Л.: Гидрометеиздат, 1963. — 404 с.

---

\* Символом \* помечена дополнительная литература.

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение . . . . .	3
1. Гипотеза квазисолеоиальности . . . . .	6
2. Прогностические уравнения квазисолеоиального приближения.	9
3. Граничные условия . . . . .	12
4. Методы решения прогностических уравнений солеоиальной и квази- солеоиальных моделей . . . . .	17
5. Уравнение баланса и его решение . . . . .	26
6. Схемы реализации солеоиальной и квазисолеоиальных моделей.	34
7. Интегральные свойства баротропной солеоиальной модели . . . .	36
8. Уточнение бароклинной квазисолеоиальной модели . . . . .	45
9. Литература . . . . .	50

**РАИСА ПЕТРОВНА РЕПИНСКАЯ**  
**КВАЗИСОЛЕНОИДАЛЬНЫЕ**  
**ПРОГНОСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ**  
**УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ**

Редактор *З. Б. Ваксенбург*

Корректор *Р. В. Федорова*

Обложка художника *Р. П. Костылева*

---

Сдано в набор 18.04.85. Подписано в печать 22.11.85. М-47876.  
Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага тип. № 2. Лит. гарн. Печать высокая. Печ. л. 3,2.  
Уч.-изд. л. 3,1. Тираж 600 экз. Темплан 1985 г., поз. 1819. Заказ 231.  
Цена 20 коп.

ЛПИ им. М. И. Калинина, 195251, Ленинград, Политехническая ул., 29.

---

Типография ВСОК ВМФ.