

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Б. Д. ПАНИН

## НЕГЕОСТРОФИЧЕСКИЕ ПРОГНОСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Конспект лекций

Под редакцией проф. *В. И. ВОРОБЬЕВА*

Ленинградский  
Гидрометеорологический ин-т  
БИБЛИОТЕКА  
Л-д 195196 Малоохтинский пр., 98

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
имени М. И. КАЛИНИНА

ЛЕНИНГРАД  
1978

УДК 551.509.333 (075.8)

*Одобрено Ученым советом  
Ленинградского гидрометеорологического института*

Рассматриваются вопросы построения и реализации не-  
геострофических прогностических моделей, основанных на  
интегрировании нефильтрованных уравнений гидротермоди-  
намики.

## Глава I

### НЕГЕОСТРОФИЧЕСКИЕ ПРОГНОСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Современные представления о путях совершенствования численных прогнозов связываются, в частности, с отказом от ограничений на связи полей ветра и давления, налагаемых в квази-геострофических и соленоидальных моделях, и возвратом к идеям В. Бьеркнеса. В настоящее время состояние математических методов и вычислительной техники, а также достижения в области теоретической и прикладной метеорологии позволяют отказаться от этих ограничений и перейти к построению прогностических моделей на основе замкнутых систем уравнений гидротермодинамики в их первоначальной (невидоизмененной) форме. Такие уравнения принято называть полными или негеострофическими (в литературе их называют также примитивными), а прогностические модели, построенные на основе этих уравнений, называют негеострофическими моделями или моделями по полным уравнениям.

Следует заметить, что в большинстве разработанных к настоящему времени негеострофических моделях третье уравнение движения (вдоль вертикальной координаты) используется в форме уравнения статики. Несмотря на это, замкнутые системы уравнений, в которых используется уравнение статики, также принято называть системами полных уравнений.

#### § 1. Система полных уравнений

Рассмотрим замкнутую систему полных уравнений в адиабатическом приближении, включающую уравнение статики, и разберем принципиальную схему прогноза. Запишем эту систему в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial \zeta} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial \zeta} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - lu, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} &= -\frac{R}{\zeta} T, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{RT}{g} (\gamma_a - \gamma) \frac{\omega}{\zeta} &= 0, \end{aligned} \right\} (1.1)$$

где  $u, v$  — составляющие вектора скорости ветра вдоль осей  $x$  и  $y$ ;  
 $\omega = \frac{d\zeta}{dt}$  — аналог вертикальной скорости;  $\zeta = \frac{p}{p_0}$ ,  $p$  — давление,  
 $p_0 = 1000$  мбар;  $R$  — газовая постоянная;  $\Phi$  — геопотенциал;  $T$  — температура;  
 $l = 2\bar{\omega} \sin \varphi$  — параметр Кориолиса,  $\bar{\omega}$  — угловая скорость вращения Земли,  $\varphi$  — широта;  $g$  — ускорение силы тяжести;  
 $\gamma_a = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{g}{R}$  — сухоадиабатический градиент;  $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ ,  $c_p, c_v$  — удельные теплоемкости при постоянном давлении и объеме;  
 $\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z}$  — вертикальный градиент температуры.

Система уравнений (1.1) не содержит членов, описывающих неадиабатичность и трение. Неадиабатичность и трение наиболее существенно проявляются в пограничном слое. Поэтому систему уравнений (1.1) наиболее оправдано использовать для краткосрочного прогноза в свободной атмосфере, где для небольших промежутков времени можно пренебречь неадиабатическими воздействиями и трением.

Несмотря на указанные ограничения, система уравнений (1.1) обладает большой общностью, так как описывает широкий класс атмосферных движений за исключением звуковых волн, которые отфильтровываются из решений этой системы с помощью уравнения статики.

## § 2. Принципиальная схема прогноза на основе полных уравнений

Система пяти уравнений (1.1) в том виде, как она записана, содержит пять функций —  $u, v, \omega, \Phi, T$  — и в принципе позволяет рассчитать их значения в любой момент времени, если задать начальные и граничные условия. Эта система включает три уравнения, содержащие производные по времени, а поэтому их называют прогностическими, и два уравнения, которые не содержат производных по времени и являются диагностическими, так как позволяют по трем спрогнозированным с помощью прогностических уравнений функциям  $u, v, T$  определить две другие функции  $\omega$  и  $\Phi$ .

Прогностические уравнения являются нелинейными, и поэтому могут быть проинтегрированы только приближенно шагами по времени. При этом весь промежуток времени, на который необходимо рассчитать прогноз, разбивается на малые части  $\Delta t$  (шаги). В пределах каждого шага изменения всех функций, фигурирующих под знаками производных по времени, считаются линейными и определяются по формулам вида

$$\varphi^{t_0 + \Delta t} = \varphi^{t_0} + F^{t_0} \Delta t, \quad (2.1)$$

где  $t_0$  — начальный момент времени;  $\varphi$  — любая из функций, подлежащая определению. Через  $F$  обозначены все члены прогностических уравнений, не содержащие производных по времени. Верхний индекс  $t_0$  у  $F$  обозначает, что все члены, входящие в  $F$ , определены в начальный момент времени.

Формула (2.1) получена в результате замены производной по времени направленной разностью вперед, когда  $F$  берется в начальный момент времени. Такой прием иллюстрирует так называемый явный метод вычисления функций в процессе интегрирования прогностических уравнений по времени. Явный метод является наиболее простым, но не единственным и не лучшим. Вопросы построения схем интегрирования уравнений будут обсуждаться ниже. Здесь же мы рассматриваем принципиальную схему прогноза и будем полагать, что будущие значения функций могут вычисляться простейшим явным методом, не считаясь с проблемами, возникающими при интегрировании полных уравнений, в частности, в связи с необходимостью обеспечения вычислительной устойчивости.

Как следует из формулы (2.1), для вычисления будущих значений функций  $\varphi^{t_0+\Delta t}$  необходимы их значения в начальный момент времени  $t_0$ , т. е. начальные условия.

Кроме начальных необходимо также поставить граничные условия по переменным  $x$ ,  $y$ ,  $\zeta$ . По  $x$  и  $y$  простейшие граничные условия ставятся в виде неизменности во времени функций, фигурирующих под знаком производных по времени в прогностических уравнениях, на боковых границах области, для которой решается задача прогноза, т. е.  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} = 0$ . По переменной  $\zeta$  граничные условия ставятся для  $\omega$  в виде:

$$\omega = 0 \text{ при } \zeta = 0, \quad (2.2)$$

$$\omega = \frac{1}{RT} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \text{ при } \zeta = 1. \quad (2.3)$$

Начальные условия для  $u$ ,  $v$ ,  $\Phi$  и  $T$  задаются по данным наблюдений на сети станций, проинтерполированным в узлы сеточной области  $G$ , на которой строится решение системы уравнений (1.1).

Вертикальная скорость  $\omega$  не измеряется, но она может быть рассчитана на любом уровне  $\zeta$  по начальным значениям  $u$  и  $v$  с помощью уравнения неразрывности, проинтегрированного по переменной  $\zeta$  в пределах от 0 до  $\zeta$ .

С учетом граничного условия (2.2) имеем

$$\omega(\zeta) = - \int_0^{\zeta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) d\zeta'. \quad (2.4)$$

Таким образом получают начальные данные для всех пяти функций, подлежащих прогнозированию с помощью системы (1.1).

Принципиальная схема прогноза на основе уравнений (1.1) представляется следующим образом. По значениям всех функций  $u, v, \omega, \Phi, T$  в начальный момент времени  $t_0$  с помощью прогностических уравнений рассчитываются  $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial T}{\partial t}$  и  $u^{t_0 + \Delta t}, v^{t_0 + \Delta t}, T^{t_0 + \Delta t}$  на различных уровнях  $\zeta = \text{const}$ , а с помощью уравнения неразрывности определяется  $\omega^{t_0 + \Delta t}$ :

$$\omega(\zeta)^{t_0 + \Delta t} = - \int_0^{\zeta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^{t_0 + \Delta t} d\zeta'. \quad (2.5)$$

Затем с помощью граничного условия (2.3) вычисляются  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  и  $\Phi^{t_0 + \Delta t}$  на уровне  $\zeta=1$ :

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{\zeta=1} = R (\omega T)_{\zeta=1} - \left( u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{\zeta=1}; \quad (2.6)$$

$$\Phi_{\zeta=1}^{t_0 + \Delta t} = \Phi_{\zeta=1}^{t_0} + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{\zeta=1} \cdot \Delta t. \quad (2.7)$$

После этого определяется геопотенциал всех вышележащих уровней по уравнению статики

$$\Phi(\zeta) = R \int_{\zeta}^1 \frac{T(\zeta')}{\zeta'} d\zeta'. \quad (2.8)$$

В результате получаются значения всех пяти функций в конце первого шага по времени, т. е.  $u^{t_0 + \Delta t}, v^{t_0 + \Delta t}, \omega^{t_0 + \Delta t}, T^{t_0 + \Delta t}, \Phi^{t_0 + \Delta t}$ . Повторяя многократно эти вычисления можно получить прогноз на нужный интервал времени.

### § 3. Особенности полных уравнений

Прежде чем переходить к рассмотрению вопросов, связанных с построением конкретных схем прогноза, следует обратить внимание на некоторые особенности полных уравнений.

Прогностические уравнения квазигеострофических и квазисолепоидальных моделей приспособлены для описания только крупномасштабных возмущений синоптического масштаба (волн Россби). Поэтому эти уравнения принято называть фильтрованными. Система полных уравнений, включающая нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, описывает не только волны Россби, но и более мелкие возмущения типа гравитационных волн (звуковые волны, как уже указывалось, отфиль-

трованы с помощью уравнения статики). Эти возмущения непосредственно не связаны с погодообразующими процессами и поэтому их называют метеорологическими шумами.

Скорость распространения шумов значительно больше скорости волн Россби. В атмосфере скорость звуковых волн составляет около 300 м/с, а скорость гравитационных волн лежит в пределах от 100 до 300 м/с. Волны Россби распространяются в среднем со скоростью, соизмеримой со скоростью ветра. Амплитуда волн в поле давления составляет для звуковых волн доли миллибара, амплитуда гравитационных волн может достигать 5—10 мбар, а волн Россби — 10 — 100 мбар. Длина звуковых волн невелика — от нескольких сантиметров до сотен метров, в то время как длина гравитационных волн может достигать сотен, а волн Россби — тысяч километров.

Звуковые волны не могут оказать заметного влияния на погодообразующие процессы. Взаимодействие же волн Россби с гравитационными может быть существенным, предопределяя в некоторых случаях эволюцию барических образований. Поэтому с помощью фильтрованных уравнений, содержащих решения только для длинных волн (волн Россби), невозможно достаточно полно описать эволюцию барических образований. Указанные соображения, в частности, лежат в основе современного подхода к проблеме гидродинамического прогноза с помощью полных уравнений.

Если бы удалось проинтегрировать полные уравнения и получить точные решения, то эти решения правильно описывали бы как длинные волны, так и шумы. Однако в силу нелинейности этих уравнений получить их точные решения не удастся, а поэтому прибегают к методам, позволяющим получить приближенные решения. При этом широкое применение получили методы, в основе которых лежит конечно-разностная аппроксимация дифференциальных уравнений. Как будет показано ниже, получаемые после такой аппроксимации разностные уравнения не могут правильно описывать возмущения меньшие, чем разрешающая способность сеточной области, на которой строятся решения. За счет этого нереально возрастают амплитуды шумов так, что они могут превышать амплитуду волн Россби. В результате спектр атмосферных движений в решении совершенно искажается, что приводит к неудовлетворительным прогнозам.

Следует также иметь в виду, что решения конечно-разностных уравнений получаются в численном виде, вследствие чего из решений этих уравнений невозможно выделить эффекты, обусловленные шумами. Поэтому следует принимать специальные меры, которые предотвращали бы искажения спектра атмосферных движений. Эти меры должны быть предусмотрены на этапе построения прогностической модели, при конечно-разностной аппроксимации уравнений, а также при подготовке исходных данных. Что касается мер на стадии построения прогностической модели, то можно,

например, указать на включение в систему прогностических уравнений уравнения статики, с помощью которого отфильтровываются решения, описывающие звуковые волны. Но и после исключения из решений звуковых волн полные уравнения описывают не только волны Россби, но и гравитационные, скорость которых значительно больше скорости ветра и скорости перемещения барических образований. Поэтому при численном интегрировании полных уравнений необходимо оперировать значительно более мелкими, чем для фильтрованных уравнений, шагами по пространству и времени. Ниже будет показано, например, что шаг по времени должен быть примерно на порядок меньше, чем при интегрировании фильтрованных уравнений.

Кроме отмеченных особенностей полных уравнений следует указать также на необходимость более полного задания исходного состояния атмосферы, чем для фильтрования уравнений. Действительно, для квазигеострофических моделей исходное состояние атмосферы задается полями геопотенциала или функции тока. В то же время даже для простейшей пространственной модели по полным уравнениям, как это было показано в § 2, необходимы начальные данные о полях ветра, геопотенциала и температуры, которые получаются независимо друг от друга, а поэтому недостаточно согласованы друг с другом. Эта несогласованность во многом предопределяет появление и развитие шумов в процессе интегрирования уравнений прогностической модели. При этом нужно учитывать, что ошибки в значениях функций в процессе интегрирования уравнений трансформируются так же, как и реальные возмущения. Поэтому при реализации прогностических моделей по полным уравнениям подготовка исходных данных приобретает первостепенное значение и должна включать в себя специальные процедуры, позволяющие по возможности исключить ошибки и обеспечить согласование исходных полей.

Напомним также, что в уравнениях движения, фигурирующих в негеострофических прогностических моделях, производные по времени определяются как малые разности больших величин. Это следует из оценки порядков величин, которая показывает, что сила Кориолиса и градиент давления значительно больше, чем ускорение. Причем производные по времени имеют такой же порядок, что и ошибки вычислений силы Кориолиса и барического градиента. На первый взгляд такая особенность полных уравнений исключает возможность осуществления прогноза с их помощью. Однако это не так. Дело в том, что даже сравнительно большие ошибки в значениях силы Кориолиса и градиента давления значительно меньше, чем сами эти величины, а поэтому они не могут существенно исказить картину крупномасштабных составляющих атмосферных движений, которые порождаются этими силами и, в свою очередь, порождают их же, а искажают главным образом коротковолновую часть спектра.



Реальная атмосфера постоянно адаптируется к геострофическому равновесию. Ошибки в значениях ветра и давления и порождаемую за счет ошибок несогласованность этих полей практически невозможно отличить от реальной несогласованности, объективно существующей в атмосфере, а следовательно, и устранить ее. Важно, чтобы эти ошибки и порождаемая ими несогласованность, к которым чувствительны главным образом мелкомасштабные возмущения (шумы), не искажали длинноволновую часть спектра атмосферных движений. А это может быть достигнуто за счет фильтрации (подавления) мелкомасштабных возмущений.

Таким образом, фильтрация шумов при интегрировании полных уравнений с помощью конечно-разностных методов является основным условием успешности прогнозов. Задача эта весьма сложная и все известные методы фильтрации не обеспечивают полного подавления шумов без искажения волн Россби. Однако накопленный опыт говорит о том, что, несмотря на ошибки в исходных данных и несовершенство методов фильтрации, использование полных уравнений для решения прогностических задач вполне оправдано уже при существующей точности исходных данных.

#### § 4. Баротропная негеострофическая модель

Для получения прогностических уравнений будем исходить из квазистатической системы полных уравнений в изобарических координатах в том виде, как она была записана в § 1, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial \zeta} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial \zeta} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - lu, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} &= -\frac{R}{\zeta} T, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{RT}{g} (\gamma_a - \gamma) \frac{\omega}{\zeta} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Введем обозначение  $S=x, y$  и примем следующие предположения для  $\frac{\partial \Phi}{\partial S}, u, v$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial S}(x, y, \zeta, t) = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial S}(x, y, t) \cdot f_1(\zeta); \quad (4.2)$$

$$u(x, y, \zeta, t) = \bar{u}(x, y, t) \cdot f_2(\zeta); \quad (4.3)$$

$$v(x, y, \zeta, t) = \bar{v}(x, y, t) \cdot f_2(\zeta), \quad (4.4)$$

где черта сверху означает осреднение по переменной  $\zeta$ :

$$\bar{(\quad)} = \int_0^1 (\quad) d\zeta. \quad (4.5)$$

Так как, согласно постулатов осреднения  $\bar{\Phi} = \bar{\bar{\Phi}}$ , то из выражений (4.2), (4.3), (4.4) следует, что

$$\bar{f}_1(\zeta) = 1, \quad \bar{f}_2(\zeta) = 1. \quad (4.6)$$

Предположения (4.2) — (4.4) означают, что модуль вектора градиента геопотенциала и модуль плоского градиента скорости ветра подобны над каждой точкой. Функции  $f_1$  и  $f_2$  подбираются так, чтобы они убывали с ростом  $\zeta$ , т. е.  $\frac{\partial f_1}{\partial \zeta} < 0$ ,  $\frac{\partial f_2}{\partial \zeta} < 0$ .

В соответствии с оценкой порядка величин пренебрежем в уравнениях движения системы (4.1) членами, содержащими вертикальную скорость, и, воспользовавшись выражениями (4.2) — (4.3), осредним эти уравнения по  $\zeta$ . Так как операция осреднения линейна и перестановочна, то результаты осреднения этих уравнений с учетом (4.6) можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{f}_2^2 \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + l\bar{v}, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{f}_2^2 \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} - l\bar{u}. \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Полученные уравнения (4.7) отличаются от первых двух уравнений системы (4.1) отброшенными членами с вертикальной скоростью и множителями  $\bar{f}_2^2$ . Если  $\bar{f}_2 = 1$ , то  $\bar{f}_2^2 \geq 1$ , причем  $\bar{f}_2^2 = 1$  только в случае, когда  $f_2 = 1$  при любых  $0 \leq \zeta \leq 1$ .

Будем считать, что  $f_2(\zeta)$  есть линейная функция вида

$$f_2(\zeta) = a - b\zeta. \quad (4.8)$$

Такой вид функции  $f_2(\zeta)$  обеспечивает выполнение условия  $\frac{\partial f_2}{\partial \zeta} < 0$ . Так как  $f_2(\zeta) = 1$ , то  $a$  и  $b$  должны быть подчинены условию  $a = 1 + \frac{b}{2}$ . Учитывая это, получаем, что

$$f_2(\zeta) = 1 - b \left( \zeta - \frac{1}{2} \right),$$

$$\bar{f}_2^2(\zeta) = \int_0^1 \left[ \left( 1 + \frac{b}{2} \right) - b\zeta \right]^2 d\zeta = 1 + \frac{b^2}{12}.$$

Чтобы  $\bar{f}_2 = 1$ , необходимо принять, что  $0 \leq b \leq 2$ . При  $b = 0$   $\bar{f}_2^2 = 1$ , а при  $b = 2$   $\bar{f}_2^2 = 1^{1/3}$ . Таким образом,  $1 \leq \bar{f}_2^2 \leq 1^{1/3}$ , и можно считать, что в уравнениях (4.7) сомножители у вторых членов левых частей близки к единице.

Уравнение притока тепла также осредним по  $\zeta$ , но предварительно проделаем некоторые преобразования с уравнением статики.

Продифференцировав уравнение статики по  $S$ ,

$$\frac{\partial T}{\partial S} = - \frac{\zeta}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta \partial S}, \quad (4.9)$$

и полагая, что профили  $\frac{\partial \Phi}{\partial S}$  над точкой подобны во все моменты времени, с учетом (4.2) получим

$$\frac{\partial T}{\partial S} = - \frac{\zeta}{R} \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial S} \cdot f'_1. \quad (4.10)$$

В уравнении (4.10) через  $f'_1$  обозначена производная от  $f_1(\zeta)$  по  $\zeta$ . Введем обозначение

$$- \zeta f'_1 = f_3. \quad (4.11)$$

Очевидно, что  $f_3 > 0$ , так как  $\zeta > 0$ , а  $f'_1 = \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} < 0$ .

Уравнение (4.10) запишем, используя обозначение (4.11), в виде

$$\frac{\partial T}{\partial S} = \frac{f_3}{R} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial S}. \quad (4.12)$$

Проинтегрировав уравнение неразрывности по  $\zeta$  и учтя граничное условие

$$\omega = 0 \text{ при } \zeta = 0$$

и соотношения (4.3) и (4.4), получим

$$\omega(\zeta) = - \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \cdot \int_0^\zeta f(\eta) d\eta. \quad (4.13)$$

После подстановки выражений (4.13), (4.3) и (4.4) в уравнение притока тепла и интегрирования по  $\zeta$  имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R} \bar{f}_3 \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + \frac{1}{R} \bar{f}_2 \bar{f}_3 \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{RT}{g} (\gamma_a - \gamma) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \frac{1}{\zeta} \int_0^\zeta f_2(\eta) d\eta = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Выполним интегрирование по частям в последнем члене уравнения (4.14)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta} \int_0^{\zeta} f_2(\eta) d\eta &= \int_0^1 \int_0^{\zeta} f_2(\eta) d\eta \frac{d\zeta}{\zeta} = \left[ \ln \zeta \int_0^{\zeta} f_2(\eta) d\eta \right]_{\zeta=0}^{\zeta=1} - \\ &- \int_0^1 \ln \zeta \cdot f_2(\zeta) d\zeta = \int_0^1 f_2(\zeta) \ln \frac{1}{\zeta} d\zeta. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $\ln \frac{1}{\zeta} > 0$ , а  $\ln \zeta < 0$ .

Таким образом, уравнение (4.14) после умножения на  $\frac{R}{f_3}$  запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + \frac{\bar{f}_2 \bar{f}_3}{\bar{f}_3} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \right) + \\ + \frac{1}{\bar{f}_3} \overline{f_2 \ln \frac{1}{\zeta}} \cdot \frac{R^2 T}{g} (\gamma_a - \gamma) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{f}_2^2 &= \alpha_1, \\ \frac{\bar{f}_2 \bar{f}_3}{\bar{f}_3} &= \alpha_2, \\ \frac{\bar{f}_2 \ln \frac{1}{\zeta}}{\bar{f}_3} &= \alpha_3, \\ \frac{R^2 T}{g} (\gamma_a - \gamma) &= C_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

С учетом обозначений (4.16) уравнения (4.7) и (4.14) записываются в виде замкнутой системы уравнений относительно неизвестных функций  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{\Phi}$ :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \alpha_1^2 = - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + \bar{v}; \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \alpha_1^2 = - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} - \bar{u}; \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \right) \alpha_2^2 + (\alpha_3^2 C_0^2) \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) = 0. \quad (4.19)$$

Функции  $\alpha_1^2$  и  $\alpha_2^2$  мало отличаются от единицы, а поэтому уравнения движения (4.17), (4.18) имеют тот же вид и смысл, что и соответствующие уравнения системы (4.1), описывающие движения на конкретных уровнях. Однако следует помнить, что уравнения (4.17) и (4.18) описывают средний ветер. Уравнение (4.19) является следствием уравнений притока тепла, неразрывности и статики. Это уравнение описывает локальные изменения среднего геопотенциала под влиянием адвекции геопотенциала и за счет горизонтальной дивергенции среднего ветра. Так как фигурирующий в уравнении средний ветер не геострофический, то адвекция геопотенциала и дивергенция отличны от нуля. Действительно,  $\bar{u} = \bar{u}_g + u'$ ,  $\bar{v} = \bar{v}_g + v'$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= -\frac{1}{l} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} + u', \\ \bar{v} &= \frac{1}{l} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + v'. \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

Адвекция и дивергенция с учетом соотношений (4.20) могут быть разделены на геострофические:

$$A_g = -\left(-\frac{1}{l} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + \frac{1}{l} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y}\right) = 0,$$

$$D_g = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{l} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{l} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x}\right) = -\frac{\beta}{l^2} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \quad \left(\beta = \frac{\partial l}{\partial y}\right)$$

и негеострофические составляющие:  $\nabla_g$

$$A' = -\left(u' \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + v' \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y}\right),$$

$$D' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}.$$

Как следует из оценок порядка величин членов, фигурирующих в выражении для дивергенции

$$D = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = -\frac{\beta}{l^2} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} + D',$$

$$0(D') < 0 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right); 0(D') < 0 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right); 0 \left(\frac{\beta}{l^2} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y}\right) < 0 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right);$$

$$0 \left(\frac{\beta}{l^2} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y}\right) < 0 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right),$$

т. е. все члены, составляющие дивергенцию, имеют меньший порядок, чем  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$ . Следовательно, дивергенция определяется

как малая разность больших величин  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$ , а поэтому вычисления изменений среднего геопотенциала за счет дивергенции с помощью уравнения (4.19) могут сопровождаться большими ошибками.

Вводя обозначение  $\alpha_3^2 C_0^2 = C^2$ , принимая  $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$ , а также опуская знаки осреднения, систему уравнений (4.17) — (4.19) представим в том виде, как она используется для построения прогностической схемы

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - lu, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + C^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

Покажем, что система уравнений, очень похожая по виду на систему (4.21), может быть получена из других теоретических предположений.

Рассмотрим тонкий слой тяжелой однородной идеальной жидкости, ограниченной снизу горизонтальной поверхностью  $z=0$ , а сверху — свободной поверхностью  $h(t, x, y)$ , выше которой расположена другая среда очень малой плотности или вакуум, так что на свободной поверхности давление постоянно  $p=p_0$ . Так как жидкость однородна, то плотность ее также постоянна, т. е.  $\rho = \text{const}$ . В силу того, что рассматривается тонкий слой жидкости и из-за отсутствия вязкости (жидкость идеальна) можно считать, что

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (4.22)$$

Получим уравнение движения этой жидкости. Для этого воспользуемся уравнением статики

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g, \quad (4.23)$$

и, проинтегрировав его в пределах от некоторой высоты  $z$  с давлением  $p$  до верхней границы слоя, т. е. до  $h(t, x, y)$  с давлением  $p_0$ , имеем

$$p = p_0 + \rho g (h - z). \quad (4.24)$$

Так как  $\rho_0 = \text{const}$ , а  $z$  — независимая переменная, то из формулы (4.24) следует, что

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = g \frac{\partial h}{\partial y}.$$

Учитывая условия (4.22) и помня, что  $\Phi = gh$ , уравнения движения рассматриваемой жидкости запишутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + l v, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - l u. \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

В силу постоянства плотности ( $\rho = \text{const}$ ) из уравнения статики (4.23) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0,$$

т. е., что  $\frac{\partial p}{\partial x}$  и  $\frac{\partial p}{\partial y}$ , а следовательно,  $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$  и  $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$  также не зависят от  $z$ . А это означает, что уравнения (4.25) применимы к любому уровню в пределах рассматриваемого тонкого слоя жидкости.

Обратимся к уравнению неразрывности

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4.26)$$

Очевидно, что  $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = 0$ , так как  $\rho = \text{const}$ , и уравнение (4.26) преобразуется к виду

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (4.27)$$

Так как снизу жидкость ограничена горизонтальной (непроницаемой) поверхностью, то

$$w \Big|_{z=0} = 0. \quad (4.28)$$

Проинтегрируем уравнение (4.27) по переменной  $z$  в пределах от 0 до  $h$  при условии (4.28), учитывая, что  $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ . В результате получим

$$w \Big|_{z=h} = - \int_0^h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = -h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (4.29)$$

Принимая во внимание, что  $h(t, x, y)$ , имеем  $w \Big|_{z=h} = \frac{dh}{dt}$ , или

$$w \Big|_{z=h} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (4.30)$$

Таким образом, объединяя выражения (4.29) и (4.30) и умножив их на  $g$ , получаем уравнение для геопотенциала свободной поверхности  $\Phi = gh$  в следующем виде:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \Phi \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (4.31)$$

Уравнения (4.25) и (4.31) представляют собой замкнутую систему уравнений «мелкой воды».

Если сравнить эту систему с системой (4.21), то внешние отличия состоят только в сомножителях у дивергенции скорости ветра в уравнениях для геопотенциала. Однако это различие принципиально, так как уравнение (4.31) получено из уравнения неразрывности, а аналогичное уравнение в системе (4.21) получено из уравнения притока тепла. На практике для построения прогностических схем, основанных на интегрировании уравнений баротропной негеострофической модели, часто используют систему уравнений (4.21), в последнем уравнении которой вместо  $C^2$  берут  $\Phi$ , так как в этом случае достигается лучшее качество прогнозов.

#### § 5. Интегральные инварианты баротропной негеострофической модели

Будем считать, что сеточная область, в которой необходимо получить решение системы уравнений (4.21) представляет собой прямоугольник. Длина сторон этого прямоугольника по оси  $x$  составляет  $(B - A)$ , а по оси  $y$  —  $(D - C)$ . Границы этого прямоугольника будем считать непроницаемыми стенками так, что выполняются условия равенства нулю нормальных к стенкам составляющих скорости ветра:

$$u \Big|_{x=A} = u \Big|_{x=B} = v \Big|_{y=C} = v \Big|_{y=D} = 0. \quad (5.1)$$

Рассмотрим интеграл

$$J_1 = \int_A^B \int_C^D \Phi \, dy \, dx. \quad (5.2)$$

Покажем, что если уравнение для геопотенциала взять в форме (4.31), то

$$\frac{\partial J_1}{\partial t} = 0. \quad (5.3)$$



Запишем уравнение (4.31) в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} (u \Phi) - \frac{\partial}{\partial y} (v \Phi), \quad (5.4)$$

Проинтегрируем уравнение (5.4) по  $x$  и  $y$  в пределах от  $A$  до  $B$  и от  $C$  до  $D$ :

$$\int_A^B \int_C^D \frac{\partial \Phi}{\partial t} dy dx = - \int_A^B \int_C^D \frac{\partial}{\partial x} (u \Phi) dy dx - \int_A^B \int_C^D \frac{\partial}{\partial y} (v \Phi) dy dx. \quad (5.5)$$

Интегралы в правой части уравнения (5.5) равны нулю в силу условий (5.1), так как

$$\int_A^B \int_C^D \frac{\partial}{\partial x} (u \Phi) dy dx = \int_C^D \int_A^B \frac{\partial}{\partial x} (u \Phi) dx dy = \int_C^D (u \Phi) \Big|_{x=A}^{x=B} dy = 0,$$

$$\int_A^B \int_C^D \frac{\partial}{\partial y} (v \Phi) dy dx = \int_A^B (v \Phi) \Big|_{y=C}^{y=D} dx = 0.$$

Таким образом, мы получим, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A^B \int_C^D \Phi dy dx = \frac{\partial J_1}{\partial t} = 0.$$

Следовательно,  $J_1$  представляет собой интегральный инвариант. Заметим, что если уравнение для геопотенциала взять в форме третьего уравнения системы (4.21), т. е. с  $C^2$ , то условие (5.3) не имеет места.

Если полученный результат трактовать с точки зрения уравнений мелкой воды, то условие (5.3) означает сохранение массы воды в объеме

$$V = sh, \quad (5.6)$$

где  $s$  — площадь прямоугольника со сторонами  $AB$  и  $CD$ ;  $h$  — высота слоя воды.

Действительно, масса воды  $M$  в объеме  $V$  определяется интегралом

$$M = \int_A^B \int_C^D \int_0^h \rho dz dy dx = \rho \int_A^B \int_C^D h dy dx = \frac{\rho}{g} \int_A^B \int_C^D \Phi dy dx.$$

При этом принимается, что  $\rho = \text{const}$ .

Покажем, что помимо инварианта  $J_1$  для баротропной модели имеет место энергетический инвариант  $J_2$ . Для этого получим уравнение кинетической энергии. Умножим первое уравнение системы (4.25) на  $u$ , второе на  $v$  и результаты сложим. Тогда имеем

$$\frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial E}{\partial x} + v \frac{\partial E}{\partial y} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0,$$

или

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \left[ u \frac{\partial (E + \Phi)}{\partial x} + v \frac{\partial (E + \Phi)}{\partial y} \right], \quad (5.7)$$

где  $E = \frac{u^2 + v^2}{2}$  — кинетическая энергия.

Уравнения (5.7) и (5.4) умножим на  $\Phi$

$$\Phi \frac{\partial E}{\partial t} = - \left[ u\Phi \frac{\partial (E + \Phi)}{\partial x} + v\Phi \frac{\partial (E + \Phi)}{\partial y} \right]; \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\Phi^2}{2} \right) = - \left[ \Phi \frac{\partial}{\partial x} (u\Phi) + \Phi \frac{\partial}{\partial y} (v\Phi) \right]. \quad (5.9)$$

Уравнение (5.4) умножим на  $E$

$$E \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \left[ E \frac{\partial}{\partial x} (u\Phi) + E \frac{\partial}{\partial y} (v\Phi) \right]. \quad (5.10)$$

Сложим уравнения (5.8), (5.9) и (5.10), и результат запишем в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\Phi^2}{2} + E\Phi \right) = & - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [(E + \Phi) u\Phi] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial y} [(E + \Phi) v\Phi] \right\}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Проинтегрировав уравнение (5.11) по  $x$  и  $y$  в пределах от  $A$  до  $B$  и от  $C$  до  $D$  с учетом условий (5.1), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A^B \int_C^D \left( \frac{\Phi^2}{2} + E\Phi \right) dy dx = \frac{\partial J_2}{\partial t} = 0, \quad (5.12)$$

где

$$J_2 = \int_A^B \int_C^D \left( \frac{\Phi^2}{2} + E\Phi \right) dy dx. \quad (5.13)$$

Таким образом,  $J_2$  есть второй интегральный инвариант баротропной негеострофической модели.

Чтобы выяснить физический смысл интегрального инварианта  $J_2$ , обратимся к уравнениям мелкой воды и рассмотрим кинетическую и потенциальную энергию в объеме  $V$ :

$$\int_A^B \int_C^D \int_0^h \rho E dz dy dx = \rho \int_A^B \int_C^D E h dy dx = \frac{\rho}{g} \int_A^B \int_C^D E \Phi dy dx; \quad (5.14)$$

$$\int_A^B \int_C^D \int_0^h \rho g z dz dy dx = \rho g \int_A^B \int_C^D \frac{h^2}{2} dy dx = \frac{\rho}{g} \int_A^B \int_C^D \frac{\Phi^2}{2} dy dx. \quad (5.15)$$

Сумма правых частей выражений (5.14) и (5.15) представляет собой полную механическую энергию жидкости в объеме  $V$ . Если сравнить эту сумму с  $J_2$ , то нетрудно заметить, что  $J_2$  с точностью до постоянного множителя  $\frac{\rho}{g}$  также представляет собой полную механическую энергию.

Таким образом, для баротропной негеострофической модели характерно постоянство во времени полной механической энергии в пределах области интегрирования уравнений этой модели. Так же как для  $J_1$  второй интегральный инвариант  $J_2$  не имеет места, если уравнение для геопотенциала используется в форме третьего уравнения системы (4.21).

Это обстоятельство позволяет объяснить, почему результаты прогноза с помощью баротропной негеострофической модели оказываются лучшими, если в третьем уравнении системы (4.21) вместо  $C^2$  берется  $\Phi$ . Дело здесь в том, что наличие интегральных инвариантов обеспечивает меньшую зависимость схемы интегрирования уравнений модели от ошибок.

Отметим, что интегральные инварианты  $J_1$  и  $J_2$  имеют место для любой области интегрирования. Важно только, чтобы выполнялось условие непроникновения воздуха через границы.

### § 6. Энергетический инвариант пространственной негеострофической модели

Запишем квазистатическую систему уравнений пространственной негеострофической модели в системе координат  $x, y, \zeta, t$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial \zeta} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv; \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial \zeta} = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - lv; \quad (6.2)$$

$$T = - \frac{\zeta}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}; \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} = 0; \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \omega \frac{\partial T}{\partial \zeta} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{T}{\zeta} \omega = 0. \quad (6.5)$$

Эта система уравнений записана в адиабатическом приближении, а поэтому в уравнении притока тепла отсутствуют члены, описывающие неадиабатические эффекты. В уравнениях движения этой системы отсутствуют члены, описывающие турбулентную вязкость. Как указывалось в § 1, в таком виде система уравнений является замкнутой и она может служить основой для краткосрочного прогноза в свободной атмосфере.

Будем рассматривать процессы в квазипрямоугольной призме, длина сторон которой по осям  $x$ ,  $y$ ,  $\zeta$  составляет:  $x_2 - x_1$  (по оси  $x$ ),  $y_2 - y_1$  (по оси  $y$ ),  $\zeta_2 - \zeta_1$  (по оси  $\zeta$ ). На гранях этой призмы поставим условия непроницаемости воздуха, т. е.

$$u \Big|_{\substack{x=x_1 \\ x=x_2}} = 0; \quad v \Big|_{\substack{y=y_1 \\ y=y_2}} = 0; \quad \omega \Big|_{\substack{\zeta=\zeta_1 \\ \zeta=\zeta_2}} = 0. \quad (6.6)$$

Из уравнений (6.1) и (6.2) образуем уравнение для кинетической энергии плоского движения

$$E_k = \frac{u^2 + v^2}{2}. \quad (6.7)$$

Для этого умножим уравнение (6.1) на  $u$ , уравнение (6.2) на  $v$  и результаты сложим

$$\frac{\partial E_k}{\partial t} + u \frac{\partial E_k}{\partial x} + v \frac{\partial E_k}{\partial y} + \omega \frac{\partial E_k}{\partial \zeta} = -u \frac{\partial \Phi}{\partial x} - v \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (6.8)$$

Заметим, что уравнение для кинетической энергии трехмерного движения в рамках рассматриваемой модели получить нельзя, так как третье уравнение движения записано в форме уравнения статики

Из уравнения притока тепла (6.5) получим уравнение для внутренней энергии в механических единицах

$$E_v = \frac{c_p}{A} T, \quad (6.9)$$

где  $A = 2,3884 \cdot 10^{-8}$  кал/эрг (термический эквивалент работы). Согласно уравнению Мейера

$$A = \frac{c_p - c_v}{R},$$

а, следовательно,

$$E_B = \frac{c_p R}{c_p - c_v} \cdot T = \frac{x \cdot \bar{R}}{x - 1} \cdot \bar{T}, \quad \left( x = \frac{c_p}{c_v} \right). \quad (6.10)$$

Умножив уравнение (6.5) на  $\frac{x \cdot R}{x - 1}$  и учитывая (6.4) и (6.10); получаем уравнение внутренней энергии

$$\frac{\partial E_B}{\partial t} + u \frac{\partial E_B}{\partial x} + v \frac{\partial E_B}{\partial y} + \omega \frac{\partial E_B}{\partial \zeta} = -\omega \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}. \quad (6.11)$$

Суммируя уравнения (6.8) и (6.11), получим

$$\frac{\partial (E_K + E_B)}{\partial t} = \left[ u \frac{\partial}{\partial x} (E_K + E_B + \Phi) + v \frac{\partial}{\partial y} (E_K + E_B + \Phi) + \omega \frac{\partial}{\partial \zeta} (E_K + E_B + \Phi) \right], \quad (6.12)$$

которое связывает локальные изменения кинетической и внутренней энергии с адвекцией суммарной энергии  $(E_K + E_B + \Phi)$ .

Воспользуемся уравнением неразрывности (6.4). Умножим его на  $(E_K + E_B + \Phi)$  и полученный результат суммируем с уравнением (6.12):

$$\frac{\partial (E_K + E_B)}{\partial t} = - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [u (E_K + E_B + \Phi)] + \frac{\partial}{\partial y} [v (E_K + E_B + \Phi)] + \frac{\partial}{\partial \zeta} [\omega (E_K + E_B + \Phi)] \right\}. \quad (6.13)$$

С помощью уравнения (6.13) покажем, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_{x_1, y_1, \zeta_1}^{x_2, y_2, \zeta_2} (E_K + E_B) d\zeta dy dx = \frac{\partial J}{\partial t} = 0, \quad (6.14)$$

$$\text{где } J = \int \int \int_{x_1, y_1, \zeta_1}^{x_2, y_2, \zeta_2} (E_K + E_B) d\zeta dy dx. \quad (6.15)$$

Для того чтобы доказать, что  $\frac{\partial J}{\partial t} = 0$ , проинтегрируем правую часть уравнения (6.13) по  $x, y, \zeta$  в пределах от  $x_1$  до  $x_2$ , от  $y_1$  до  $y_2$ , от  $\zeta_1$  до  $\zeta_2$  и учтем условия (6.6). Легко видеть, что все интегралы от правой части уравнения (6.13) равны нулю:

$$\int \int \int_{x_1, y_1, \zeta_1}^{x_2, y_2, \zeta_2} \frac{\partial}{\partial x} [u (E_K + E_B + \Phi)] d\zeta dy dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{y_1}^{\dot{y}_2} \int_{\zeta_1}^{\dot{\zeta}_2} u \Big|_{x_1}^{\dot{x}_2} (E_K + E_B + \Phi) d\zeta dy = 0, \\
&\int_{x_1}^{\dot{x}_2} \int_{y_1}^{\dot{y}_2} \int_{\zeta_1}^{\dot{\zeta}_2} \frac{\partial}{\partial y} [v(E_K + E_B + \Phi)] d\zeta dy dx = \\
&= \int_{x_1}^{\dot{x}_2} \int_{\zeta_1}^{\dot{\zeta}_2} v \Big|_{y_1}^{\dot{y}_2} (E_K + E_B + \Phi) d\zeta dx = 0, \\
&\int_{x_1}^{\dot{x}_2} \int_{y_1}^{\dot{y}_2} \int_{\zeta_1}^{\dot{\zeta}_2} \frac{\partial}{\partial \zeta} [\omega(E_K + E_B + \Phi)] d\zeta dy dx = \\
&= \int_{x_1}^{\dot{x}_2} \int_{y_1}^{\dot{y}_2} \omega \Big|_{\zeta_1}^{\dot{\zeta}_2} (E_K + E_B + \Phi) dy dx = 0,
\end{aligned}$$

так как согласно условиям (6.6)

$$u \Big|_{x_1}^{\dot{x}_2} = 0; \quad v \Big|_{y_1}^{\dot{y}_2} = 0; \quad \omega \Big|_{\zeta_1}^{\dot{\zeta}_2} = 0.$$

Таким образом,  $\frac{\partial J}{\partial t} = 0$ , т. е.  $J = \int_{x_1}^{\dot{x}_2} \int_{y_1}^{\dot{y}_2} \int_{\zeta_1}^{\dot{\zeta}_2} (E_K + E_B) d\zeta dy dx$  —

— интегральный инвариант суммарной энергии.

В этом инварианте в качестве суммарной энергии фигурирует только кинетическая энергия плоского движения и внутренняя энергия, но в него не входят потенциальная энергия и кинетическая энергия вертикальных движений. Это обстоятельство является следствием использования квазистатического приближения.

Полученный инвариант имеет место для области любой конфигурации при условии, что отсутствует поток через ее границы. Естественно, что при этом должны быть соблюдены и другие ограничения, связанные с отсутствием неадиабатичности и трения. Если включить в рассмотрение неадиабатические притоки тепла и трение, то вполне очевидно инвариантность будет нарушена, так как за счет неадиабатичности и трения будут изменяться внутренняя и кинетическая энергия даже в замкнутом объеме.

В заключение заметим, что при определенных идеализированных условиях для любой модели может иметь место хотя бы один инвариант. Примером этого может служить рассмотренный энергетический инвариант пространственной негеострофической модели, для которой других инвариантов нет.

Наличие инвариантов полезно при разработке численных методов интегрирования уравнений прогностических моделей, позволяющих избежать вычислительной неустойчивости. Следует иметь в виду, что замена дифференциальных уравнений разностными и использование численных методов интегрирования может привести к изменению инвариантов. Поэтому следует стремиться к тому, чтобы система конечно-разностных аналогов уравнений имела тот же инвариант, что и исходная система дифференциальных уравнений модели. Если конечно-разностная аппроксимация уравнений модели и схема численного интегрирования обеспечивает наличие инвариантов, то, вполне естественно, не может разбиваться и вычислительная неустойчивость.

На практике прогностические модели строятся при более общих предположениях, чем те, которые использовались при получении инвариантов. В частности, могут ставиться другие граничные условия, учитываться неадиабатические факторы и трение. Естественно, что за счет этого инвариантность будет нарушаться. Однако и для таких моделей контроль вычислений с помощью инвариантов полезен. Быстрое изменение инвариантов в процессе численного интегрирования уравнений моделей, очевидно, свидетельствует о неудовлетворительности выбранной схемы.

### § 7. Методы численного интегрирования негеострофических уравнений

Как указывалось выше, в силу нелинейности негеострофических уравнений для их интегрирования применяются приближенные методы и, в частности, численные методы.

Рассмотрим численные методы интегрирования на примере уравнений баротропной негеострофической модели:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - lv, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -\Phi \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Каждое из уравнений системы (7.1) запишем в сокращенном виде

$$\frac{\partial z}{\partial t} = f, \quad (7.2)$$

где через  $z$  обозначены функции, стоящие под знаком производных по времени ( $u$ ,  $v$ ,  $\Phi$ ), а через  $f$  — все остальные члены уравнений (7.1).

Произведем дискретизацию независимых переменных

$$\frac{x}{\Delta x} = i, \quad \frac{y}{\Delta y} = j, \quad \frac{t}{\Delta t} = n, \quad (7.3)$$

где  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta t$  — шаги по переменным  $x$ ,  $y$ ,  $t$ . Обычно шаги по  $x$  и  $y$  выбираются одинаковыми, т. е.  $\Delta x = \Delta y = \Delta s$ .

С помощью соотношений (7.3) задается пространственно-временная сеточная область, на которой производится представление дифференциальных уравнений разностными и строится схема численного интегрирования.

Задачей прогноза является получение значений функции, фигурирующих в уравнениях прогностической модели, в конце прогностического периода по их значениям в начальный момент времени. Так как зависимость прогнозируемых функций от времени в общем случае нелинейна, то вычисление изменений этих функций за весь прогностический период в один прием по начальным данным невозможно. Поэтому используется метод шагов по времени, который реализуется так же, как при прогнозе с помощью фильтрованных уравнений.

При построении конкретных методов численного интегрирования разностных аналогов негеострофических уравнений возникает та же проблема, что и при интегрировании прогностических уравнений в квазигеострофических и квазисоленоидальных моделях, а именно с помощью какой разностной схемы аппроксимировать производные по времени и по пространственным переменным.

### 1. Методы аппроксимации производных по времени

Производная по времени в уравнении (7.2) может быть представлена с помощью направленной разности

$$z^{n+1} = z^n + f^n \Delta t. \quad (7.4)$$

В формуле (7.4) функция  $f$  вычисляется по данным в начальный момент времени  $n$ . Вычисления  $z^{n+1}$  в данном случае производятся по известным значениям  $z^n$  и  $f^n$  и не связаны с какими-либо трудностями, так как уравнение (7.2) оказывается разрешенным относительно искомой функции в явном виде. Поэтому такой метод вычисления значений функции в конце шага по времени называется явным или эксплицитным.

Производная по времени в уравнении (7.2) может быть представлена также с помощью центральной разности

$$z^{n+1} = z^{n-1} + 2 f^n \cdot \Delta t,$$

где функция  $f$  задается в момент времени  $n$ . Такой метод расчета называется методом «чехарды» и является также явным.



Неявный метод (имплицитный) проиллюстрируем формулой

$$z^{n+1} = z^n + f^{n+1} \cdot \Delta t, \quad (7.5)$$

где для аппроксимации производной по времени применена на-  
правленная разность.

Для расчета  $z^{n+1}$  по формуле (7.5) необходимы данные о функ-  
ции  $f$  в момент времени  $n+1$ , которые неизвестны. Поэтому реали-  
зация неявного метода затруднительна.

Помимо явных и неявных методов существуют полунеявные,  
которые реализуются с помощью следующих формул:

$$\left. \begin{aligned} z^{n+1} &= z^n + \frac{1}{2} (f^n + f^{n+1}) \cdot \Delta t, \\ z^{n+1} &= z^n + \frac{1}{2} (f_{\text{л}}^n + f_{\text{л}}^{n+1}) \cdot \Delta t + f_{\text{нл}}^n \cdot \Delta t, \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

где  $f_{\text{л}}$  — линейная часть  $f$ ;  $f_{\text{нл}}$  — нелинейная часть функции  $f$   
( $f = f_{\text{л}} + f_{\text{нл}}$ ).

Все рассмотренные выше методы относятся к одношаговым,  
так как расчеты реализуются в один прием, а по числу моментов  
времени, фигурирующих в расчетных формулах, эти методы назы-  
вают двухмоментными ( $n, n+1$ ) или двухуровневыми за исключе-  
нием метода чехарды, который является трехмоментным ( $n-1,$   
 $n, n+1$ ) — трехуровневым. Трехуровневый метод реализуется  
также с помощью формулы Адамса—Бешфорда

$$z^{n+1} = z^n + \left( \frac{3}{2} f^n - \frac{1}{2} f^{n-1} \right) \cdot \Delta t.$$

Существуют также четырехуровневые методы.

При численном интегрировании полных уравнений кроме одно-  
шаговых широко применяются многошаговые методы, реализуе-  
мые по следующим схемам:

$$\left. \begin{aligned} z_*^{n+1} &= z^n + f^n \Delta t, \\ z^{n+1} &= z^n + f_*^{n+1} \Delta t; \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

$$\left. \begin{aligned} z_*^{n+1} &= z^n + f^n \Delta t, \\ z^{n+1} &= z^n + \frac{1}{2} (f^n + f_*^{n+1}) \cdot \Delta t; \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

$$\left. \begin{aligned} z_*^{n+1} &= z^n + f^n \Delta t, \\ z_{**}^{n+1} &= z^n + f_*^{n+1} \cdot \Delta t, \\ z^{n+1} &= z^n + f_{**}^{n+1} \cdot \Delta t, \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

где звездочками отмечены предварительные значения функций.  
Формулы, с помощью которых в двух- и трехшаговых схе-

маж (7.7) — (7.9) получают предварительные значения функции  $z^{n+1}$  называются предикторами, а формулы для уточненных значений  $z^{n+1}$  — корректорами.

Если функция  $f$  линейно зависит от времени, то все рассмотренные методы (7.4) — (7.9) точны. В случае нелинейности функции  $f$  более точными являются неявные и многошаговые методы.

## 2. Разностная аппроксимация пространственных производных

Введем разностные операторы, аппроксимирующие пространственные производные по переменным  $x$  и  $y$ , которые называются операторами численного дифференцирования,

$$(f_x)_{i,j} = \frac{1}{\Delta s} (f_{i+\frac{1}{2},j} - f_{i-\frac{1}{2},j}); \quad (7.10)$$

$$(f_y)_{i,j} = \frac{1}{\Delta s} (f_{i,j+\frac{1}{2}} - f_{i,j-\frac{1}{2}}), \quad (7.11)$$

где  $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\Delta s = \Delta x = \Delta y$ , и операторы сглаживания

$$(\bar{f}^x)_{i,j} = \frac{1}{2} (f_{i+\frac{1}{2},j} + f_{i-\frac{1}{2},j}); \quad (7.12)$$

$$(\bar{f}^y)_{i,j} = \frac{1}{2} (f_{i,j+\frac{1}{2}} + f_{i,j-\frac{1}{2}}). \quad (7.13)$$

Применим операторы (7.10) — (7.13) дважды:

$$(f_{xx})_{i,j} = \left( \frac{f_{i+\frac{1}{2},j} - f_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta s} \right)_x = \frac{1}{\Delta s} \left( \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta s} - \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta s} \right) = \frac{1}{(\Delta s)^2} (f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}); \quad (7.14)$$

$$(f_{yy})_{i,i} = \left( \frac{f_{i,j+\frac{1}{2}} - f_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta s} \right)_y = \frac{1}{\Delta s} \left( \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta s} - \frac{f_{i,j} - f_{i,j-1}}{\Delta s} \right) = \frac{1}{(\Delta s)^2} (f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}); \quad (7.15)$$

$$(f_{xy})_{i,j} = \left( \frac{f_{i+\frac{1}{2},j} - f_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta s} \right)_y = \frac{1}{\Delta s} \left( \frac{f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta s} - \frac{f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{\Delta s} \right) = \frac{1}{(\Delta s)^2} (f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}); \quad (7.16)$$

$$\left. \begin{aligned} (\bar{f}^{xx})_{i,j} &= \frac{1}{2} \overline{(f_{i+\frac{1}{2},j} + f_{i-\frac{1}{2},j})^x} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (f_{i+1,j} + \right. \\ &+ f_{i,j}) + \frac{1}{2} (f_{i,j} + f_{i-1,j}) \left. \right] = \frac{1}{4} (f_{i+1,j} + f_{i-1,j} + 2f_{i,j}); \\ (\bar{f}^{yy})_{i,j} &= \frac{1}{4} (f_{i,j+1} + f_{i,j-1} + 2f_{i,j}); \end{aligned} \right\} (7.17)$$

$$\begin{aligned} (\bar{f}^x)_{i,j} &= \frac{1}{2} (f_{i+\frac{1}{2},j} + f_{i-\frac{1}{2},j})_x = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\Delta s} (f_{i+1,j} - f_{i,j}) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\Delta s} (f_{i,j} - f_{i-1,j}) \right] = \frac{1}{2\Delta s} (f_{i+1,j} - f_{i-1,j}); \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} (\bar{f}^y)_{i,j} &= \frac{1}{2} (f_{i,j+\frac{1}{2}} + f_{i,j-\frac{1}{2}})_y = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\Delta s} (f_{i,j+1} - f_{i,j}) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\Delta s} (f_{i,j} - f_{i,j-1}) \right] = \frac{1}{2\Delta s} (f_{i,j+1} - f_{i,j-1}); \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$\begin{aligned} (\bar{f}^{xy})_{i,j} &= \frac{1}{2} \overline{(f_{i+\frac{1}{2},j} + f_{i-\frac{1}{2},j})^y} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \right. \\ &+ f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2} (f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) \left. \right] = \\ &= \frac{1}{4} (f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} + f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}); \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned} (\bar{f}^y_x)_{i,j} &= \frac{1}{2} (f_{i,j+\frac{1}{2}} + f_{i,j-\frac{1}{2}})_x = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\Delta s} (f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\Delta s} (f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) \right] = \frac{1}{2\Delta s} (f_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + \\ &+ f_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}). \end{aligned} \quad (7.21)$$

Из формул (7.14)–(7.21) видно, что в результате однократного или двукратного применения операторов (7.10)–(7.13) по двум разным переменным  $x$  и  $y$  в получаемых разностных формулах фигурируют функции в точках, отстоящих на половину шага  $\left(\frac{\Delta s}{2}\right)$  от той точки, для которой рассчитывается оператор.

Вполне очевидно, что применение этих операторов по одной и той же переменной (либо  $x$ , либо  $y$ ) нечетное число раз приведет к формулам, в которых также будут фигурировать функции в точках, отстоящих на половину шага. Если операторы сглаживания и численного дифференцирования применяются четное число раз

по одной и той же переменной, то получаемые формулы будут содержать функции только в узлах с целыми индексами  $i$  и  $j$ .

Применение рассмотренных операторов к уравнениям прогнозистических моделей позволяет преобразовать дифференциальные уравнения в разностные. Эти преобразования наряду с выбором метода интегрирования по времени должны обеспечивать вычислительную устойчивость прогнозистической схемы.

Как указывалось выше, разностные уравнения, построенные с учетом интегральных свойств дифференциальных уравнений модели, оказываются более предпочтительными с точки зрения обеспечения вычислительной устойчивости. Поэтому при разностной аппроксимации дифференциальных уравнений стремятся к тому, чтобы для разностных уравнений сохранялись инварианты данной модели.

Рассмотрим в качестве примера разностные представления дифференциальных операторов уравнений, обеспечивающие сохранение во времени некоторых инвариантов.

Запишем уравнение движения в проекции на ось  $x$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \omega \frac{\partial u}{\partial \zeta} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv. \quad (7.22)$$

С помощью уравнения неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} = 0,$$

уравнение (7.22) представим в дивергентной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} + \frac{\partial (u\omega)}{\partial \zeta} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv. \quad (7.23)$$

Второй и третий члены левой части уравнения (7.23) могут быть представлены в следующих разностных формах:

$$\frac{\partial (u^2)}{\partial x} = \overline{(u^2)}_x = \frac{1}{2\Delta s} (u_{i+1,j}^2 - u_{i-1,j}^2),$$

$$\frac{\partial (uv)}{\partial y} = \overline{(uv)}_y = \frac{1}{2\Delta s} (u_{i,j+1} v_{i,j+1} - u_{i,j-1} v_{i,j-1})$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial (uv)}{\partial y} &= \overline{(u^y v^y)}_y = \left[ \frac{1}{2} (u_{i,j+\frac{1}{2}} + u_{i,j-\frac{1}{2}}) \cdot \frac{1}{2} (v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}}) \right]_y = \\ &= \frac{1}{4\Delta s} [(u_{i,j+1} + u_{i,j}) (v_{i,j+1} + v_{i,j}) - (u_{i,j} + u_{i,j-1}) (v_{i,j} + v_{i,j-1})]. \end{aligned}$$

Эта разностная аппроксимация при выполнении некоторых дополнительных условий, примененная к прогнозистическим уравнениям,

обеспечивает сохранение энергетического инварианта и используется в модели Прессмана.

В качестве другого примера рассмотрим также разностное представление, применяемое в модели Шумана, которая используется в оперативной практике метеорологической службы США.

Так разностная аппроксимация, примененная к члену  $v \frac{\partial u}{\partial y}$ , представляется следующим образом:

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = \overline{v^y u_y} = \frac{1}{4\Delta s} [(v_{i,j+1} + v_{i,j}) (u_{i,j+1} - u_{i,j}) + (v_{i,j} + v_{i,j-1}) (u_{i,j} - u_{i,j-1})].$$

Приведем также результаты применения разностной аппроксимации, названной Шуманом «полумоментной», к уравнениям баротропной негеострофической модели, которые приводятся к следующим разностным аналогам:

$$\left. \begin{aligned} \overline{u_i^t} + \overline{m^{xy}} (\overline{u^{xy} u_x^y} + \overline{v^{xy} u_y^x})^{xy} &= -\overline{\Phi_x^y} + \overline{l^{xy} v^{xy}}^{xy}, \\ \overline{v_i^t} + \overline{m^{xy}} (\overline{u^{xy} v_x^y} + \overline{v^{xy} v_y^x})^{xy} &= -\overline{\Phi_y^x} - \overline{l^{xy} u^{xy}}^{xy}, \\ \overline{\Phi_i^t} + \overline{m^{xy}} (\overline{u^{xy} \Phi_x^y} + \overline{v^{xy} \Phi_y^x})^{xy} - \overline{\Phi^{xy} m_y^x v^{xy}}^{xy} &= \\ &= \overline{\Phi^{xy} (u_x^y + v_y^x)}^{xy}, \end{aligned} \right\} (7.24)$$

где  $m$  — масштабный множитель.

## § 8. Методы интегрирования по времени уравнений баротропной негеострофической модели

Выше были приведены формулы (7.4) — (7.9), с помощью которых строятся методы интегрирования прогностических уравнений по времени.

Формулы (7.24) иллюстрируют применение операторов разностного дифференцирования и сглаживания в сочетании с явным методом интегрирования по времени с помощью центральной разности к уравнениям негеострофической баротропной модели. Покажем теперь как могут быть проинтегрированы эти уравнения с помощью полунявных и неявных методов. При этом мы не будем заниматься разностным представлением производных по пространственным координатам, полагая, что оно может быть выполнено, например, так же как в формулах (7.24).

Полунявный метод интегрирования по времени уравнений баротропной негеострофической модели может быть реализован в следующих вариантах.

Вариант I:

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} = -u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial u^n}{\partial y} - \frac{\partial \Phi^n}{\partial x} + l v^n; \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} = -u \frac{\partial v^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial v^n}{\partial y} - \frac{\partial \Phi^n}{\partial y} - l u^n; \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial \Phi^{n+1}}{\partial t} + \Phi^n \left( \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} \right) = -u^n \frac{\partial \Phi^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial \Phi^n}{\partial y}, \quad (8.3)$$

где  $n = \frac{t}{\Delta t}$ ;  $n+1 = \frac{t + \Delta t}{\Delta t}$ .

Верхний индекс  $n+1$  у производных по времени означает, что в разностном аналоге для этой производной фигурирует значение функции в момент времени  $n+1$ . Напомним, что для производной по времени могут применяться представления с помощью направленных и центральных разностей

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f^{n+1} - f^{n-1}}{2 \Delta t},$$

в которых фигурирует момент времени  $n+1$ .

Вариант II:

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} = -u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial u^n}{\partial y} - \frac{\partial \Phi^{n+1}}{\partial x} + l v^n; \quad (8.4)$$

$$\frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} = -u^n \frac{\partial v^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial v^n}{\partial y} - \frac{\partial \Phi^{n+1}}{\partial y} - l u^n; \quad (8.5)$$

$$\frac{\partial \Phi^{n+1}}{\partial t} = -u^n \frac{\partial \Phi^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial \Phi^n}{\partial y} - \Phi^n \left( \frac{\partial u^n}{\partial x} + \frac{\partial v^n}{\partial y} \right). \quad (8.6)$$

В варианте I уравнения (8.1) и (8.2) записаны явно, а уравнение (8.3) полунявно (так как в выражении для дивергенции  $u$  и  $v$  берутся в момент времени  $n+1$ ). В варианте II явно записано уравнение (8.6), а два других записаны полунявно.

Интегрирование уравнений в этих вариантах не вызывает затруднений и может быть выполнено без итераций в один прием. Действительно, в варианте I с помощью уравнений (8.1) и (8.2) вычисляются  $u^{n+1}$  и  $v^{n+1}$ , которые затем используются в уравнении (8.3) для расчетов дивергенции. В варианте II необходимо сначала решить уравнение (8.6), а затем использовать  $\Phi^{n+1}$  для расчетов  $u^{n+1}$  и  $v^{n+1}$ .

Кроме рассмотренных вариантов полунявный метод может быть реализован и в других вариантах. Например, можно дивер-

генцию записать в таком виде, чтобы под знаком производных стояли полусуммы

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^n + u^{n+1}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v^n + v^{n+1}}{2} \right) \right].$$

Прежде чем рассматривать неявные методы заметим, что в чистом виде неявные методы (когда все члены уравнений записываются неявно) для интегрирования нелинейных уравнений применить не удается. Поэтому ниже будут рассмотрены неявные методы, реализуемые с помощью итераций.

Применение неявного метода рассмотрим для уравнений модели, записанных в следующем виде:

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi^{n+1}}{\partial x} = -u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial u^n}{\partial y} + lv^n; \quad (8.7)$$

$$\frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi^{n+1}}{\partial y} = -u^n \frac{\partial v^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial v^n}{\partial y} - lv^n; \quad (8.8)$$

$$\frac{\partial \Phi^{n+1}}{\partial t} + \Phi^n \left( \frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} \right) = -u^n \frac{\partial \Phi^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial \Phi^n}{\partial y}. \quad (8.9)$$

Эту задачу нельзя решить в один прием, так как нельзя свести к явной. Для получения функций в момент времени  $n+1$  с помощью уравнений (8.7)—(8.9) требуются итерации. Сначала можно, например, в уравнении (8.9) вместо  $u^{n+1}$  и  $v^{n+1}$  использовать  $u^n$  и  $v^n$  и вычислить  $\Phi^{n+1}$ . Затем полученные  $\Phi^{n+1}$  используются в уравнениях (8.7) и (8.8). Рассчитанные таким образом  $\Phi^{n+1}$  наряду с  $u^{n+1}$  и  $v^{n+1}$  позволяют снова произвести вычисления следующего приближения для  $u^{n+1}$ ,  $v^{n+1}$ ,  $\Phi^{n+1}$  и т. д. Такая вычислительная процедура является итерационной и позволяет получить такие значения искомых функций в момент времени  $n+1$ , которые будут мало отличаться от соответствующих значений на предыдущей итерации. Неявный метод может применяться и в других вариантах.

Как следует из вышеизложенного, резкой границы между рассмотренными полунеявными и неявными методами интегрирования нелинейных уравнений по времени нет.

При применении неявных методов удается оперировать большими шагами по времени по сравнению с явными и полунеявными методами. Однако за счет больших шагов по времени не достигается экономия времени на реализацию схемы в целом, так как приходится прибегать к итерациям, которые тоже требуют затрат времени.

## § 9. Учет рельефа в негеострофических моделях

До сих пор мы имели дело с уравнениями в изобарической системе координат. Эта система удобна тем, что позволяет задавать начальные данные и решать уравнения на координатных поверхностях, которые совпадают с изобарическими.

В негеострофических моделях широко используются уравнения в системе координат, впервые предложенной Н. Филлипсом. В этой системе в качестве вертикальной координаты применяется

$$\sigma = \frac{p}{p_*}, \quad (9.1)$$

где  $p$  — давление на переменном уровне;  $p_*$  — давление на поверхности земли (на уровне рельефа), зависящее от времени и горизонтальных координат, т. е.  $p_* = p_*(x, y, z, t)$ . Очевидно, что на уровне земной поверхности  $\sigma = 1$  (независимо от высоты над уровнем моря). Последнее обстоятельство означает, что уравнения в этой системе координат позволяют описывать процессы с учетом негоризонтальности нижней координатной поверхности, т. е. рельефа.

Преимущество  $\sigma$ -системы координат состоит в том, что в этой системе удается точно поставить нижнее и верхнее граничные условия):

$$\left. \frac{d\sigma}{dt} \right|_{\sigma=1} = \dot{\sigma} \Big|_{\sigma=1} = 0; \quad (9.2)$$

$$\left. \frac{d\sigma}{dt} \right|_{\sigma=0} = \dot{\sigma} \Big|_{\sigma=0} = 0. \quad (9.3)$$

Эти условия означают отсутствие потоков воздуха через нижнюю и верхнюю границы атмосферы.

Запишем квазистатическую систему уравнений гидротермодинамики в координатах  $x, y, \sigma, t$ , отталкиваясь от уравнений в системе с произвольной вертикальной координатой.

Уравнение состояния

$$\sigma p_* = \rho RT. \quad (9.4)$$

Уравнение статики

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}.$$

С учетом (9.4) уравнение статики представляется в виде

$$T = -\frac{\sigma}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}.$$



Принтегрируем это уравнение от  $\sigma$  до 1 при условии  $\Phi = gh$  при  $\sigma = 1$ . В результате получим уравнение статики, связывающее геопотенциал, отсчитываемый от уровня рельефа, с температурой

$$\Phi = gh + \int_{\sigma}^1 \frac{R}{\sigma} T d\sigma', \quad (9.5)$$

где  $h$  — высота рельефа над уровнем моря.

Прежде чем записать уравнения движения напомним, что полная производная в системе с произвольной вертикальной координатой (в данном случае в качестве произвольной вертикальной координаты будем принимать  $\sigma$ ) представляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t} + u_1 \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) + v_1 \left( \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right) + \\ &+ w_1 \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \dot{\sigma} \frac{\partial f_1}{\partial \sigma}, \end{aligned}$$

где  $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$ , а нижние индексы  $y$  функций означают принадлежность к системе  $x, y, \sigma, t$ .

Таким образом, левые части уравнений движения, содержащие оператор полной производной по времени, в  $\sigma$ -системе координат записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \dot{\sigma} \frac{\partial u_1}{\partial \sigma}, \\ \frac{\partial v_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \dot{\sigma} \frac{\partial v_1}{\partial \sigma}. \end{aligned}$$

Правые части уравнений движения в  $\sigma$ -системе координат получим, отправляясь от правых частей уравнения движения в декартовых координатах, т. е.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + lw &= -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + lw_1, \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - lu &= -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} - lu_1, \end{aligned}$$

так как

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial p_1}{\partial s_1} + \frac{\partial p_1}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial s}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial s} = -\frac{\partial \Phi_1 / \partial \Phi_1}{\partial s_1 / \partial \sigma}, \quad \frac{\partial p_1 / \partial \Phi_1}{\partial \sigma / \partial \sigma} = -\rho_1,$$

где  $s = x, y$ .

Но

$$\frac{\partial p_1}{\partial s_1} = \sigma \frac{\partial p_*}{\partial s} \left( \sigma = \frac{p}{p_*}, \quad \sigma = \text{const} \right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + l v_1 &= -\frac{\sigma}{\rho_1} \frac{\partial p_*}{\partial x_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + l v_1, \\ -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial y_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} - l u_1 &= -\frac{\sigma}{\rho_1} \frac{\partial p_*}{\partial y_1} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} - l u_1. \end{aligned}$$

Окончательно, опуская нижние индексы и учитывая (9.4), уравнения движения запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma \frac{\partial u}{\partial \sigma} = -\frac{RT}{p_*} \frac{\partial p_*}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + l v; \quad (9.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma \frac{\partial v}{\partial \sigma} = -\frac{RT}{p_*} \frac{\partial p_*}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - l u. \quad (9.7)$$

Уравнение неразрывности в системе координат  $x, y, \sigma, t$  записывается так же как в системе с произвольной вертикальной координатой, т. е.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial p}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial p}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \right) = 0.$$

Легко показать, что если перейти к декартовым координатам  $\left( \sigma = z, \frac{\partial p}{\partial \sigma} = \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \right)$ , то это уравнение переходит в обычное уравнение неразрывности

$$\frac{dp}{dt} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0.$$

Так как  $\frac{\partial p}{\partial \sigma} = p_*$  и  $p_*$  не зависит от  $\sigma$ , то уравнение неразрывности можно переписать в виде

$$\frac{\partial p_*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u p_*) + \frac{\partial}{\partial y} (v p_*) + p_* \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} = 0. \quad (9.8)$$

Проинтегрируем уравнение (9.8) по  $\sigma$  от 0 до 1 и от 0 до  $\sigma$  и воспользуемся граничными условиями (9.2) и (9.3). В результате соответственно получим:

$$\frac{\partial p_*}{\partial t} = - \int_0^1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u p_*) + \frac{\partial}{\partial y} (v p_*) \right] d\sigma; \quad (9.9)$$

$$\sigma \frac{\partial p_*}{\partial t} = - \int_0^\sigma \left[ \frac{\partial}{\partial x} (up_*) + \frac{\partial}{\partial y} (vp_*) \right] d\sigma' - p_* \dot{\sigma}. \quad (9.10)$$

Из (9.9) и (9.10) следует, что

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \frac{\sigma}{p_*} \int_0^1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} (up_*) + \frac{\partial}{\partial y} (vp_*) \right] d\sigma - \\ &- \frac{1}{p_*} \int_0^\sigma \left[ \frac{\partial}{\partial x} (up_*) + \frac{\partial}{\partial y} (vp_*) \right] d\sigma'. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Уравнение притока тепла запишем для потенциальной температуры  $\theta$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{T} \frac{\varepsilon}{c_p}, \quad (9.12)$$

где  $\theta = T \left( \frac{\sigma p_*}{p_{00}} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$ ;  $p_{00} = 1000$  мбар;  $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ .

Запишем полученные уравнения в виде системы в адиабатическом приближении:

$$\frac{du}{dt} = - \frac{RT}{p_*} \frac{\partial p_*}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv; \quad (9.13)$$

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{RT}{p_*} \frac{\partial p_*}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - lv; \quad (9.14)$$

$$\frac{\partial p_*}{\partial t} = - \int_0^1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} (up_*) + \frac{\partial}{\partial y} (vp_*) \right] d\sigma; \quad (9.15)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \frac{\sigma}{p_*} \int_0^1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} (up_*) + \frac{\partial}{\partial y} (vp_*) \right] d\sigma - \\ &- \frac{1}{p_*} \int_0^\sigma \left[ \frac{\partial}{\partial x} (up_*) + \frac{\partial}{\partial y} (vp_*) \right] d\sigma'; \end{aligned} \quad (9.16)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0; \quad (9.17)$$

$$\theta = T \left( \frac{\sigma p_*}{p_{00}} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}; \quad (9.18)$$

$$\Phi = gh + \int_0^\sigma \frac{R}{\sigma} T d\sigma'. \quad (9.19)$$

Система семи уравнений (9.13)—(9.19) содержит семь функций, подлежащих определению  $u$ ,  $v$ ,  $\sigma$ ,  $p_*$ ,  $\theta$ ,  $T$ ,  $\Phi$ , т. е. является замкнутой. Уравнения (9.13)—(9.15), (9.17) содержат производные по времени, а поэтому являются прогностическими, остальные уравнения — диагностические.

Для получения однозначного решения этой системы необходимо кроме условий по  $\sigma$  поставить граничные условия по  $x$  и  $y$ . Эти условия задаются в виде нулевых значений нормальных к боковым границам составляющих скорости и нулевых значений производных по нормали к границам для функций  $u$ ,  $v$ ,  $p_*$  и  $\theta$ .

Начальные данные также задаются для функций  $u$ ,  $v$ ,  $p_*$  и  $\theta$  на уровнях  $\sigma = \text{const}$ . При этом нужно произвести интерполяцию функций  $u$ ,  $v$  и  $\theta$  с изобарических поверхностей на  $\sigma$ -поверхности. Значения функций  $\sigma$ ,  $T$  и  $\Phi$  вычисляются с помощью диагностических уравнений (9.16), (9.18), (9.19).

Прогноз с помощью уравнений (9.13)—(9.19) выполняется по следующей принципиальной схеме, реализуемой шагами по времени.

1. С помощью прогностических уравнений определяются производные по времени  $\frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial p_*}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ , а затем значения функций  $u$ ,  $v$ ,  $p_*$ ,  $\theta$  в конце шага по времени.

2. Привлекая диагностические уравнения (9.16), (9.18), (9.19), полученные значения функций  $u$ ,  $v$ ,  $p_*$ ,  $\theta$  используем для вычисления функций  $\sigma$ ,  $T$ ,  $\Phi$ . Этот процесс методом шагов по времени повторяется до тех пор, пока не будут получены значения всех функций в конце прогностического периода.

## Глава II

### ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ, ВОЗНИКАЮЩАЯ ПРИ ИНТЕГРИРОВАНИИ ПРОГНОСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ ЕЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

В силу нелинейности прогностических уравнений их не удается проинтегрировать в квадратурах, а поэтому прибегают к при-

ближенным методам интегрирования, в частности к численным, заменяя производные отношениями конечных разностей и переходя, в конечном счете, к численному интегрированию конечно-разностных уравнений. Вполне естественно, что в отличие от дифференциальных уравнений, описывающих весь спектр атмосферных движений, разностные уравнения могут правильно описывать лишь те возмущения, размер которых больше шага сетки, принятого при конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений. Все возмущения меньше шага сетки описываются неверно и выступают как «шумы» (ошибки), которые в процессе многократного использования разностных уравнений, наряду с ошибками в исходных данных, могут неограниченно возрастать и искажать решения, характеризующие поведение и эволюцию метеорологически значимых длинных волн. Эти волны, как известно, имеют длину от сотен до тысяч километров, скорость — до десятка метров в секунду и период — до нескольких суток.

Любая замена производных конечными разностями и любая аппроксимация дифференциальных уравнений сопряжена с ошибками, которые называют ошибками аппроксимации. Однако следует стремиться построить так аппроксимацию, чтобы эти ошибки, наряду с ошибками в исходных данных, не возрастали в процессе интегрирования уравнений. Кроме этого, аппроксимация должна обеспечивать подавление или, по крайней мере, стационарирование тех возмущений, которые возникают за счет несогласованности исходных полей. Эти возмущения могут описывать реально существующие в атмосфере процессы, но эти возмущения не должны безгранично возрастать, так как в реальной атмосфере они действительно не растут безгранично.

### § 1. Аппроксимация пространственных производных

Для понимания ситуации сначала рассмотрим простейшую линейную задачу, которую приходится решать при замене производных конечными разностями по пространственным координатам. При этом заметим, что в линейных задачах новые волны не возникают, а описываются перемещения волн, которые существовали в исходный момент времени.

С помощью центральной разности производная от некоторой функции  $\varphi$  по  $x$  в точке  $n$  ( $\Delta x \cdot n$ ) на оси  $Ox$  записывается в виде

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{a, n} \approx \frac{1}{2\Delta x} (\varphi_{n+1} - \varphi_{n-1}), \quad (1.1)$$

где  $\Delta x$  — шаг сетки — расстояние между соседними точками (узлами);  $n+1$  и  $n-1$  — точки, лежащие справа и слева от точки  $n$ .

Пусть функция  $\varphi$  имеет вид синусоиды

$$\varphi = A \sin \alpha x, \quad (1.2)$$

где  $\alpha = \frac{2\pi}{X}$  — волновое число ( $X$  — длина волны);  $A$  — амплитуда.

Для функции  $\varphi$ , представленной синусоидой (1.2), формула (1.1) записывается в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{a, n} &\approx \frac{A}{2\Delta x} [\sin \alpha (n+1) \Delta x - \sin \alpha (n-1) \Delta x] = \\ &= \frac{A}{\Delta x} \sin \alpha \Delta x \cos \alpha n \Delta x. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Точное же значение  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  для функции  $\varphi$ , заданной формулой (1.2), будет

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = A \alpha \cos \alpha x. \quad (1.4)$$

Отношение приближенного значения производной, которое дается формулой (1.3), к точному, определенному формулой (1.4), составляет

$$\frac{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_a}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)} = \frac{\sin \alpha \Delta x}{\alpha \Delta x}, \quad (1.5)$$

С помощью формулы (1.5) можно оценить относительную ошибку аппроксимации производной центральной разностью (1.1) в зависимости от размеров шага сетки ( $\Delta x$ ) и длины волны конкретного возмущения ( $X$ ). Так из формулы (1.5) следует, что если на длине волны  $X$  укладывается шесть интервалов  $\Delta x$ , то отношение  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_a / \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cong 1$ , т. е. ошибка конечно-разностной аппроксимации близка к нулю. Если же отношение длины волны к шагу сетки  $\Delta x$  меньше шести, то ошибка аппроксимации быстро возрастает.

Таким образом, при построении конечно-разностной аппроксимации пространственных производных нужно выбирать шаг таким, чтобы сделать отношение  $\frac{\sin \alpha \Delta x}{\alpha \Delta x}$  близким к единице для всех волновых возмущений атмосферы, которые имеют значимые амплитуды. Длина гравитационных волн, амплитуды которых

значимы для прогноза крупномасштабных атмосферных процессов, составляет примерно 200—300 км. Таким образом, если ориентироваться на интегрирование полных уравнений, которые описывают и эти волны, то шаг сетки, используемой для аппроксимаций производных, должен составлять 30—50 км. Использование сеточных областей с таким малым шагом сопряжено с трудностями интегрирования уравнений, так как за счет этого сильно возрастает число исходных данных и операций. Кроме этого, нужно иметь в виду, что и в исходных данных мы не можем правильно задать волны столь малой длины, так как измерения производятся на станциях, отстоящих друг от друга на сотни километров.

Исходя из этих соображений, стремятся уменьшить ошибку конечно-разностной аппроксимации производных не за счет уменьшения шага сетки, а за счет привлечения большего числа узлов. Поясним это на примере вычисления первой производной по  $x$  от функции  $\varphi$ , которая имеет первые, вторые и третьи производные (по  $x$ ), т. е. обладает свойством аналитичности. Заметим, что поля большинства метеорологических элементов обладают этим свойством.

Разложим функцию  $\varphi$  в окрестности точки с координатой  $x$  в ряды Тейлора:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x+\Delta x) &= \varphi(x) + \Delta x \cdot \varphi'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} \varphi''(x) + \frac{\Delta x^3}{3!} \varphi'''(x) + \dots \\ \varphi(x-\Delta x) &= \varphi(x) - \Delta x \varphi'(x) + \frac{\Delta x^2}{2!} \varphi''(x) - \\ &\quad - \frac{\Delta x^3}{3!} \varphi'''(x) + \dots \end{aligned} \right\} (1.6)$$

где штрихи обозначают порядок производных по  $x$ .

Вычитая второй ряд из первого, получим

$$\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x-\Delta x) = 2 \Delta x \varphi'(x) + \frac{\Delta x^3}{3} \varphi'''(x) + \dots$$

или

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_n = \frac{1}{2 \Delta x} (\varphi_{n+1} - \varphi_{n-1}) - \frac{\Delta x^2}{6} \varphi_n''' + \dots \quad (1.7)$$

Выражение (1.7) напоминает центрально-разностную формулу (1.1) для приближенного значения  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ , но отличается от нее поправочными членами порядка  $\Delta x^2$  и более высокого (которые

отброшены). Представим  $\varphi_n'''$  в выражении (1.7) с помощью центральных разностей, составленных из вторых производных

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{n+1}'' &\approx \frac{1}{\Delta x^2} (\varphi_{n+2} - 2\varphi_{n+1} + \varphi_n), \\ \varphi_{n-1}'' &\approx \frac{1}{\Delta x^2} (\varphi_n - 2\varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}), \\ \varphi_n''' &\approx \frac{1}{2\Delta x} (\varphi_{n+1}'' - \varphi_{n-1}'') \approx \frac{1}{2\Delta x^3} (\varphi_{n+2} - 2\varphi_{n+1} + \\ &\quad + 2\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}). \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Подставляя (1.8) в (1.7) получим

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_a &\approx \frac{1}{2\Delta x} (\varphi_{n+1} - \varphi_{n-1}) - \frac{1}{12\Delta x} (\varphi_{n+2} - 2\varphi_{n+1} + \\ &\quad + 2\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}) = \frac{2}{3\Delta x} (\varphi_{n+1} - \varphi_{n-1}) - \\ &\quad - \frac{1}{12\Delta x} (\varphi_{n+2} - \varphi_{n-2}). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Применяя формулу (1.9) к функции  $\varphi = A \sin \alpha x$ ,

находим

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_a = \frac{A \sin \alpha \Delta x}{\Delta x} \left[ 1 + \frac{1}{3} (1 - \cos \alpha \Delta x) \right] \cos \alpha n x.$$

Следовательно

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_a / \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\sin \alpha \Delta x}{\alpha \Delta x} \left[ 1 + \frac{1}{3} (1 - \cos \alpha \Delta x) \right]. \quad (1.10)$$

Из (1.10) следует, что конечно-разностная формула (1.9) обеспечивает достаточно точное вычисление производной, если длина волны составляет четыре шага сетки (в этом случае  $\left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_a / \frac{\partial \varphi}{\partial x} \approx 1$ ), и становится неточной, если длина волны меньше, чем три шага. Таким образом, применение конечно-разностной формулы (1.9) позволяет правильно вычислять производную с шагом, в два раза большим, чем в формуле (1.1). Если потребовать, чтобы конечно-разностная формула (1.9) правильно описывала гравитационные волны, то шаг сетки должен быть 70—100 км. Учитывая точность и плотность исходных данных, а также возможности современных вычислительных машин, в прогности-



ческих схемах по полным уравнениям используется шаг сетки по координатам  $x$  и  $y$ , равный 300 км. В этом случае с помощью формул (1.9) и (1.1) удастся правильно вычислить производные для волн, длина которых не менее 600 и 1200 км соответственно.

При такой аппроксимации обеспечивается правильное описание только волн Россби и самых длинных гравитационных волн.

## § 2. Аппроксимация уравнений в целом. Анализ вычислительной устойчивости

Кроме ошибок разностной аппроксимации пространственных производных следует иметь в виду ошибки, возникающие за счет разностной аппроксимации производных по времени и уравнений в целом. Так как интегрирование по времени уравнений прогностических моделей осуществляется методом шагов по времени, т. е. многократно, то вопрос этот чрезвычайно важен.

При построении разностных аналогов уравнений в целом и схемы их интегрирования следует добиваться такого положения, чтобы амплитуды волн в начальных полях, ошибки в исходных данных и ошибки аппроксимации не возрастали в процессе интегрирования во времени. Иначе прогноз обречен на неудачу. В этом заключается проблема вычислительной устойчивости. Следует иметь в виду, что вычислительная устойчивость (или неустойчивость) в основном представляет собой математическую проблему.

Исследование вычислительной устойчивости прогностических уравнений негеострофических моделей представляет большие трудности в силу их нелинейности. Поэтому при построении схемы интегрирования исследуются линейные задачи (аналоги нелинейных).

При этом следует иметь в виду, что устойчивость линейных задач является необходимым, но недостаточным условием устойчивости соответствующей нелинейной задачи.

Рассмотрим анализ вычислительной устойчивости на примере простейшего линейного аналога уравнения адвекции

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + C \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

где  $C$  — скорость перемещения волн Россби (считается постоянной).

Введем дискретизацию по  $x$  и  $t$ ,  $n = \frac{x}{\Delta x}$ ,  $m = \frac{t}{\Delta t}$  и заменим производную по  $x$  центральной, а по  $t$  — направленной разностью

$$\frac{\varphi_n^{m+1} - \varphi_n^m}{\Delta t} + C \frac{\varphi_{n+1}^m - \varphi_{n-1}^m}{2 \Delta x} = 0. \quad (2.2)$$

Такая форма записи уравнения представляет пример применения явного метода решения уравнения (2.1). Положим, что функция  $\varphi$  задается в виде формулы

$$\varphi_n^m = A \cdot e^{i(km \Delta t + \alpha n \Delta x)}, \quad (2.3)$$

которая удовлетворяет уравнению (2.1). В выражении (2.3)  $k = \frac{2\pi}{T}$  — частота ( $T$  — период),  $i = \sqrt{-1}$ . Подставив (2.3) в уравнение (2.2), имеем

$$Ae^{i(km \Delta t + \alpha n \Delta x)} (e^{ik \Delta t} - 1) + AC \frac{\Delta t}{2 \Delta x} [e^{i(km \Delta t + \alpha n \Delta x)} (e^{i\alpha \Delta x} - e^{-i\alpha \Delta x})] = 0,$$

или

$$e^{ik \Delta t} - 1 + C \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (e^{i\alpha \Delta x} - e^{-i\alpha \Delta x}) = 0. \quad (2.4)$$

Но, так как

$$\left. \begin{aligned} e^{iz} &= \cos z + i \sin z, \\ e^{-iz} &= \cos z - i \sin z, \end{aligned} \right\} \text{ то } e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z,$$

а поэтому выражение (2.4) приводится к виду

$$e^{ik \Delta t} - 1 + C \frac{\Delta t}{\Delta x} i \sin \alpha \Delta x = 0. \quad (2.5)$$

Учтем, что в общем случае

$$k = k_r + i k_i, \quad (2.6)$$

где  $k_r$  — вещественная частота, а  $k_i$  — мнимая частота, характеризующая затухание или усиление колебаний. Если в разностном решении мнимая частота не появляется, т. е.  $k_i = 0$ , то это означает, что амплитуда волн не будет искажаться. С учетом (2.6) преобразуем (2.5) к виду

$$e^{ik_r \Delta t} e^{-k_i \Delta t} = 1 - C \frac{\Delta t}{\Delta x} i \sin \alpha \Delta x$$

или

$$(\cos k_r \Delta t + i \sin k_r \Delta t) e^{-k_i \Delta t} = 1 - C \frac{\Delta t}{\Delta x} i \sin \alpha \Delta x. \quad (2.7)$$

Разделяя вещественную и мнимую части, имеем

$$\left. \begin{aligned} e^{-k_i \Delta t} \cos k_r \Delta t &= 1, \\ e^{-k_i \Delta t} \sin k_r \Delta t &= C \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \alpha \Delta x. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Возводя уравнения (2.8) в квадрат и суммируя результаты, имеем

$$e^{-2k_i \Delta t} = 1 + \left( C \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2 \alpha \Delta x. \quad (2.9)$$

Так как второй член в правой части (2.9) положителен ( $>0$ ), то  $e^{-2k_i \Delta t} > 1$ , т. е.  $k_i \Delta t < 0$ , а значит  $k_i \neq 0$ , а именно  $k_i < 0$ .

Таким образом, с учетом (2.6) решение (2.3) запишется в виде

$$\varphi_n^m = A e^{-k_i m \Delta t} e^{i(k_r m \Delta t + \alpha n \Delta x)}. \quad (2.10)$$

Причем  $e^{-k_i m \Delta t} > 1$  (так как  $k_i < 0$ ), а  $A e^{-k_i m \Delta t}$  — характеризует амплитуду разностного решения. Эта амплитуда будет неограниченно возрастать при увеличении  $m=1, 2, \dots, M$  при любых  $\Delta t$  и  $\Delta x$ , т. е. решение будет неустойчивым.

Если использовать центральную разность по времени, то уравнение (2.2) с помощью (2.3) запишется в виде

$$\begin{aligned} & A e^{i(km \Delta t + \alpha n \Delta x)} \left[ e^{i k \Delta t} - e^{-i k \Delta t} \right] + \\ & + C \frac{\Delta t}{\Delta x} A e^{i(km \Delta t + \alpha n \Delta x)} \left[ e^{i \alpha \Delta x} e^{-i \alpha \Delta x} \right] = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 2i \sin k \Delta t + C \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot 2i \sin \alpha \Delta x &= 0, \\ \sin k \Delta t &= -C \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \alpha \Delta x. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Таким образом, для частоты имеем следующее выражение:

$$k = \frac{1}{\Delta t} \arcsin \left( -C \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \alpha \Delta x \right). \quad (2.12)$$

Из (2.12) следует, что  $k$  будет действительным числом, если

$$\left| -C \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \alpha \Delta x \right| \leq 1.$$

Так как  $|\sin \alpha \Delta x| \leq 1$ , то для обеспечения вычислительной устойчивости необходимо, чтобы  $\left| C \frac{\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1$ . В противном случае  $k_i \neq 0$  и может быть отрицательным. А это значит, что решение следует записать в виде (2.10) и при многократном использовании этого решения может проявляться вычислительная неустойчивость.

Рассмотрим еще один конечно-разностный метод решения, который называется неявным. Неявный метод (неявная схема) решения может реализоваться в разных вариантах, например, так. Пространственные производные в прогностических уравнениях заменяются конечными разностями с использованием значений функций не только в начале шага по времени (в момент времени  $t = m\Delta t$ ), но и в конце шага по времени (в момент времени  $t = (m+1)\Delta t$ ). Поясним этот метод на примере, когда значения производной по пространственной координате относятся к середине шага по времени, т. е. к моменту времени  $t = \left(m + \frac{1}{2}\right) \Delta t$ ,

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_n \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\varphi_{n+1}^{m+1} - \varphi_{n-1}^{m+1}}{2\Delta x} + \frac{\varphi_{n+1}^m - \varphi_{n-1}^m}{2\Delta x} \right). \quad (2.13)$$

Производную по времени запишем в виде

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_n^{m+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{\Delta t} (\varphi_n^{m+1} - \varphi_n^m). \quad (2.14)$$

Применительно к исходному уравнению такая аппроксимация производных позволяет записать его в виде следующего конечно-разностного аналога:

$$\varphi_n^{m+1} - \varphi_n^m + \frac{C \Delta t}{4 \Delta x} (\varphi_{n+1}^{m+1} + \varphi_{n+1}^m - \varphi_{n-1}^{m+1} - \varphi_{n-1}^m) = 0. \quad (2.15)$$

Для того чтобы определить с помощью уравнения (2.15) значения функции  $\varphi$  в точке  $n$  в момент времени  $m+1$ , необходимо задать начальные ее значения, т. е. в момент времени  $m$  в точках  $n$ ,  $n+1$  и  $n-1$ . Кроме этого в уравнении фигурируют значения функции  $\varphi$  в точках  $n+1$  и  $n-1$  в момент времени  $m+1$ , которые тоже неизвестны. Отсюда следует, что найти значение функции  $\varphi$  в момент времени  $m+1$  только в одной точке с помощью одного уравнения (2.15), записанного для точки  $n$ , невозможно. Найти значения  $\varphi^{m+1}$  можно с помощью уравнения (2.15), записанного для всех точек. В этом легко убедиться, рассмотрев простой случай для  $n=0, 1, 2, 3, 4$ , когда в точках  $n=1, 2, 3$  задаются начальные значения  $\varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0$ , в точках  $n=0$  и  $n=4$  ставятся граничные условия, а значения функции в момент времени  $m+1$  следует определить в точках  $n=1, 2, 3$  (т. е.  $\varphi_1^1, \varphi_2^1, \varphi_3^1$ ). Записав

уравнение (2.15) для точек  $n=1, 2, 3$ , получим систему из трех уравнений с тремя неизвестными  $\varphi_1^1, \varphi_2^1, \varphi_3^1$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^1 - \varphi_1^0 + \frac{C \Delta t}{4 \Delta x} (\varphi_2^1 + \varphi_2^0 - \varphi_0^1 - \varphi_0^0) &= 0, \\ \varphi_2^1 - \varphi_2^0 + \frac{C \Delta t}{4 \Delta x} (\varphi_3^1 + \varphi_3^0 - \varphi_1^1 - \varphi_1^0) &= 0, \\ \varphi_3^1 - \varphi_3^0 + \frac{C \Delta t}{4 \Delta x} (\varphi_4^1 + \varphi_4^0 - \varphi_2^1 - \varphi_2^0) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

где  $\varphi_0^0, \varphi_1^0, \varphi_2^0, \varphi_3^0, \varphi_4^0$ , — начальные (известные) значения, а  $\varphi_0^1, \varphi_4^1$  определяются из граничных условий (в простейшем случае считается, что на границах  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ , тогда  $\varphi_0^0 = \varphi_0^1 = \varphi_0^2 = \dots = \varphi_0^m$ ;  $\varphi_4^0 = \varphi_4^1 = \varphi_4^2 = \dots = \varphi_4^m$ ).

Таким образом, с учетом начальных и граничных условий система трех уравнений (2.16) позволяет определить значения  $\varphi_1^1, \varphi_2^1$  и  $\varphi_3^1$ . Так как найти значение функции  $\varphi_n^{m+1}$  в одной точке (независимо от других точек) невозможно, то имеется основание назвать эту схему интегрирования неявной (имплицитной).

Уравнение (2.15) также имеет решение вида

$$\varphi_n^m = A e^{i(km \Delta t + \alpha n \Delta x)}. \quad (2.17)$$

После подстановки этого решения в уравнение (2.15) и деления на  $\varphi_n^m$  оно приводится к виду

$$e^{ik \Delta t} - 1 + \frac{C \Delta t}{4 \Delta x} (e^{ik \Delta t} e^{i\alpha \Delta x} + e^{i\alpha \Delta x} - e^{ik \Delta t} e^{-i\alpha \Delta x} - e^{-i\alpha \Delta x}) = 0.$$

Вынося общий множитель  $e^{i\alpha \Delta x}$ , получим

$$e^{ik \Delta t} - 1 + \frac{C \Delta t}{4 \Delta x} [e^{i\alpha \Delta x} (e^{ik \Delta t} + 1) - e^{-i\alpha \Delta x} (e^{ik \Delta t} + 1)] = 0,$$

или

$$\frac{e^{ik \Delta t} - 1}{e^{ik \Delta t} + 1} + \frac{C \Delta t}{4 \Delta x} (e^{i\alpha \Delta x} - e^{-i\alpha \Delta x}) = 0. \quad (2.18)$$

Так как

$$e^{i\alpha \Delta x} - e^{-i\alpha \Delta x} = 2i \sin \alpha \Delta x,$$

д

$$\begin{aligned}
 e^{ik\Delta t} - 1 &= \left( e^{\frac{ik\Delta t}{2}} \right)^2 - 1 = \left( \cos \frac{k\Delta t}{2} + i \sin \frac{k\Delta t}{2} \right)^2 - 1 = \\
 &= \cos^2 \frac{k\Delta t}{2} - 1 - \sin^2 \frac{k\Delta t}{2} + 2i \sin \frac{k\Delta t}{2} \cos \frac{k\Delta t}{2} = \\
 &= 2i \sin \frac{k\Delta t}{2} \cos \frac{k\Delta t}{2} - 2 \sin^2 \frac{k\Delta t}{2} = 2 \sin \frac{k\Delta t}{2} \left( i \cos \frac{k\Delta t}{2} - \sin \frac{k\Delta t}{2} \right); \\
 e^{ik\Delta t} + 1 &= \left( e^{\frac{ik\Delta t}{2}} \right)^2 + 1 = \left( \cos \frac{k\Delta t}{2} + i \sin \frac{k\Delta t}{2} \right)^2 + 1 = \\
 &= \cos^2 \frac{k\Delta t}{2} + 2i \sin \frac{k\Delta t}{2} \cos \frac{k\Delta t}{2} + 1 - \sin^2 \frac{k\Delta t}{2} = \\
 &= 2i \sin \frac{k\Delta t}{2} \cos \frac{k\Delta t}{2} + 2 \cos^2 \frac{k\Delta t}{2} = \frac{2}{i} \cos \frac{k\Delta t}{2} \left( i \cos \frac{k\Delta t}{2} - \right. \\
 &\quad \left. - \sin \frac{k\Delta t}{2} \right),
 \end{aligned}$$

то с учетом этих соотношений уравнение (2.18) записывается в виде

$$\operatorname{tg} \frac{k\Delta t}{2} + \frac{C\Delta t}{2\Delta x} \sin \alpha \Delta x = 0,$$

откуда

$$k = \frac{2}{\Delta t} \operatorname{arctg} \left( -\frac{C\Delta t}{2\Delta x} \sin \alpha \Delta x \right). \quad (2.19)$$

Тангенс угла может принимать любые значения от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Поэтому частота  $k$  при любых значениях  $\Delta x$  и  $\Delta t$  для каждого действительного  $\alpha$  будет действительным ограниченным числом (для главных значений круговой функции), а следовательно, и  $e^{ikm\Delta t}$  в решении

$$\varphi_n^m = A e^{ikm\Delta t} e^{i\alpha n\Delta x},$$

тоже будет ограничено при любых  $m < \infty$ . Это означает, что данная неявная конечно-разностная схема будет устойчивой при любом соотношении шагов по времени и координатам.

Рассмотрим неявную схему вида

$$\frac{\varphi_n^{m+1} - \varphi_n^{m-1}}{2\Delta t} + C \frac{\varphi_{n+1}^{m+1} - \varphi_{n-1}^{m+1}}{2\Delta x} = 0. \quad (2.20)$$

Подставляя в (2.20) выражение (2.17), получаем

$$Ae^{i[k(m+1)\Delta t + \alpha n \Delta x]} - Ae^{i[k(m-1)\Delta t + \alpha n \Delta x]} + \\ + AC \frac{2\Delta t}{2\Delta x} \left[ e^{i[k(m+1)\Delta t + \alpha(n+1)\Delta x]} - e^{i[k(m+1)\Delta t + \alpha(n-1)\Delta x]} \right] = 0,$$

или

$$e^{ik\Delta t} - e^{-ik\Delta t} + C \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ e^{ik\Delta t} \left( e^{i\alpha\Delta x} - e^{-i\alpha\Delta x} \right) \right] = 0.$$

Откуда следует, что

$$1 - e^{-2ik\Delta t} + C \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( e^{i\alpha\Delta x} - e^{-i\alpha\Delta x} \right) = 0,$$

или

$$1 - e^{-2i(k_r + ik_i)\Delta t} + 2C \frac{\Delta t}{\Delta x} i \sin \alpha \Delta x = 0; \\ 1 - e^{-2ik_r\Delta t} e^{2k_i\Delta t} = -2C \frac{\Delta t}{\Delta x} i \sin \alpha \Delta x.$$

Таким образом,

$$-1 + e^{2k_i\Delta t} (\cos 2k_r\Delta t - i \sin 2k_r\Delta t) = 2C \frac{\Delta t}{\Delta x} i \sin \alpha \Delta x. \quad (2.21)$$

Разделяя вещественную и мнимую части, из формулы (2.21) имеем

$$e^{2k_i\Delta t} \cos 2k_r\Delta t = 1, \quad -e^{2k_i\Delta t} \sin 2k_r\Delta t = 2C \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \alpha \Delta x.$$

Возводя в квадрат и складывая результаты, получим

$$e^{4k_i\Delta t} (\cos^2 2k_r\Delta t + \sin^2 2k_r\Delta t) = 4 \left( C \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2 \alpha \Delta x + 1,$$

$$e^{4k_i\Delta t} = 4 \left( C \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2 \alpha \Delta x + 1, \text{ а значит}$$

$$e^{4k_i\Delta t} > 1, \text{ т. е. } k_i > 0.$$

Таким образом, в решении

$$\varphi_n^m = Ae^{i[(k_r + ik_i)m\Delta t + \alpha n \Delta x]} = Ae^{-k_i m \Delta t} e^{i[k_r m \Delta t + \alpha n \Delta x]} e^{-k_i m \Delta t} < 1,$$

а следовательно, амплитуда не будет возрастать и решение будет устойчивым.

Конечно-разностная аппроксимация должна гарантировать не только от безграничного возрастания амплитуд, но не должна также искажать фазу и фазовую скорость волн. Ошибки, которые могут возникать в фазовой скорости за счет разностной аппроксимации уравнений оценим на основе соотношения для фазовой скорости

$$C_a = \frac{k}{\alpha} = \frac{X}{T}. \quad (2.22)$$

Для аппроксимации исходного уравнения центральными разностями имеем

$$k = \frac{1}{\Delta t} \arcsin \left( -C \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \alpha \Delta x \right).$$

Так как  $C_a > 0$ , то

$$C_a = \frac{1}{\alpha \Delta t} \arcsin \left( -C \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \alpha \Delta x \right),$$

где  $C$  — истинная фазовая скорость.

$$\text{При } C \frac{\Delta t}{\Delta x} = 1 \quad C_a = \frac{1}{\alpha \Delta t} \alpha \Delta x = \frac{\alpha}{\alpha \Delta t} C \Delta t = C,$$

т. е. фазовая скорость решения будет равна истинной фазовой скорости.

Но прогностические уравнения описывают не одну волну, а набор волн и каждая из них имеет свою длину и скорость. Поэтому нельзя подобрать такое  $\Delta t$ , чтобы для всех волн выполнялось условие  $C \frac{\Delta t}{\Delta x} = 1$ , а можно, в крайнем случае, добиваться, чтобы

$$C \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Поэтому необходимо выбирать  $\Delta t$  из расчета на самую быструю фазовую скорость так, чтобы  $C \frac{\Delta t}{\Delta x}$  было немного меньше единицы. Тогда будет более или менее правильно описана и амплитуда и фаза. Отсюда следует, что любая разностная аппроксимация занижает фазовую скорость волн.

### § 3. О природе вычислительной неустойчивости для нелинейных уравнений

Филлипс, пожалуй, первым обратил внимание на особого рода неустойчивость, которая проявляется при численном решении линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и нелинейных уравнений. Природа такого рода неустой-



чивости, которую уместно называть нелинейной, состоит в следующем. При замене дифференциальных уравнений разностными применительно к конкретным сеткам предопределяется та минимальная длина волны, которая может быть правильно описана ( $X \geq 4 \Delta x$ ). В линейных задачах новые волны не возникают в процессе интегрирования уравнений и, если аппроксимация уравнений обеспечивает подавление ошибок и волн малого масштаба, а также не искажает амплитуду и фазу исходных волн, длина которых  $X \geq 4 \Delta x$ , то процесс интегрирования оказывается устойчивым.

При интегрировании нелинейных уравнений за счет нелинейного взаимодействия исходных волн (которые правильно описаны в исходном состоянии) с течением времени в решениях (и в природе) появляются новые волны, в том числе и с длиной  $X \leq 4 \Delta x$ . Эти волны неправильно описываются разностной схемой, и, приводя к росту ошибок решения, искажают другие волны и решение в целом.

Рассмотрим простейший случай, когда изменения во времени функции  $\varphi$  определяются произведением функций  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , например,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \psi_1 \cdot \psi_2, \quad (3.1)$$

где  $\psi_1 = A_1 \sin \alpha x$ ,  $\psi_2 = A_2 \cos \alpha x$ .

Под  $\psi_1$  и  $\psi_2$  можно подразумевать скорость длинных волн и производную по переменной  $x$  от функции  $\varphi$ . Подставляя в (3.1) выражения для  $\psi_1$  и  $\psi_2$ , имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= A_1 A_2 \cos(\alpha x) \sin(\alpha x) = A_1 A_2 \frac{1}{2} \sin(2 \alpha x) = \\ &= \frac{A_1 A_2}{2} \sin \alpha_1 x, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\alpha_1 = 2 \alpha = \frac{2 \cdot 2\pi}{X} = \frac{2\pi}{X/2} = \frac{2\pi}{X_1}$ ,  $X_1 = \frac{X}{2}$ .

Таким образом, в результате нелинейного взаимодействия возникла волна, которая в два раза короче исходных волн.

Подобные нелинейные взаимодействия волн постоянно порождают новые волны и, если исходный спектр был дискретным (дискретность спектра определяется помимо всего прочего заданием поля значениями в дискретных точках и разностной аппроксимацией уравнений), то по мере неоднократного применения разностного метода решения уравнений спектр становится непрерывным. Возникающие более мелкие волновые возмущения могут оказаться меньше разрешающей способности сетки. Эти волны будут неправильно описываться в процессе решения и амплитуда

их может неограниченно возрастать, приводя к потере вычислительной устойчивости. Такую неустойчивость нельзя преодолеть подбором шагов по времени и по пространству.

Заметим, что нелинейная неустойчивость возникает только при применении приближенных (в том числе конечно-разностных) методов интегрирования.!

Для преодоления нелинейной вычислительной неустойчивости применяются, в основном, два приема:

1) сглаживание (за счет этого может быть достигнуто подавление возникающих мелких волн);

2) применение методов интегрирования, обеспечивающих сохранение энергии.

Применение второго приема обосновывается тем, что нелинейная неустойчивость сопровождается ростом суммарной энергии в процессе интегрирования уравнений по времени. Таким образом, если вычислительная схема гарантирует сохранение энергетических инвариантов, то это обеспечивает и преодоление нелинейной вычислительной неустойчивости. Второй прием впервые был предложен и обоснован Лаксом и Вендрофом.



## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
<b>Глава I. Негеострофические прогностические модели</b>	
§ 1. Система полных уравнений . . . . .	3
§ 2. Принципиальная схема прогноза на основе полных уравнений . . . . .	4
§ 3. Особенности полных уравнений . . . . .	6
§ 4. Баротропная негеострофическая модель . . . . .	9
§ 5. Интегральные инварианты баротропной негеострофической модели . . . . .	16
§ 6. Энергетический инвариант пространственной негеострофической модели . . . . .	19
§ 7. Методы численного интегрирования негеострофических уравнений . . . . .	23
§ 8. Методы интегрирования по времени уравнений баротропной негеострофической модели . . . . .	29
§ 9. Учет рельефа в негеострофических моделях . . . . .	32
<b>Глава II. Вычислительная неустойчивость, возникающая при интегрировании прогностических уравнений и некоторые способы ее исследования</b>	
§ 1. Аппроксимация пространственных производных . . . . .	37
§ 2. Аппроксимация уравнений в целом. Анализ вычислительной устойчивости . . . . .	41
§ 3. О природе вычислительной неустойчивости для нелинейных уравнений . . . . .	48



*БОРИС ДАНИЛОВИЧ ПАНИН*

**Негеострофические прогностические модели**

Конспект лекций

Редактор *З. Б. Ваксенбург*

Корректор *Л. В. Ломакина*

---

М-09534                      Сдано в набор 30.03. 1978 г.                      Подп. к печати 21.06.78  
Формат бумаги 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.                      Бумага тип. № 2.                      Тираж 900 экз.  
Объем 3,25 п. л.                      Уч.-изд. л. 3.                      Зак. 140.                      Цена 23 коп.  
Темплан 1978 г., поз. 498.

---

Издание ЛПИ им. М. И. Калинина. 195251, Ленинград, Политехническая, 29.  
Типография 6 ВОК ВМФ