

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В. М. РАДИКЕВИЧ

ДИНАМИЧЕСКАЯ МЕТЕОРОЛОГИЯ ДЛЯ ОКЕАНОЛОГОВ

*Допущено Министерством высшего и среднего специального
образования СССР*

*в качестве учебного пособия для студентов вузов,
обучающихся по специальности «Океанология»*

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени М. И. КАЛИНИНА

ЛЕНИНГРАД
1985

УДК 551.5(075.) + 551.46(075.8)

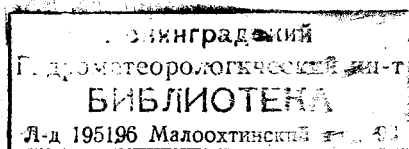
Радикевич В. М. Динамическая метеорология для океанологов. Учебное пособие. — Л., изд. ЛПИ, 1985, с. 157. (ЛГМИ).

В основу учебного пособия положены лекции, читаемые в течение ряда лет в Ленинградском гидрометеорологическом институте. Наряду с изложением основ динамики и термодинамики атмосферы в целом, большое внимание уделяется теории ее пограничного и приземного слоя, а также процессам, протекающим вблизи границы раздела между атмосферой и морем (процессы трансформации, бризы и муссоны).

Книга предназначена для студентов гидрометеорологических институтов и государственных университетов по специальности «Океанология», а также может представлять интерес для специалистов-океанологов и морских метеорологов.

Илл. 40. Библ. 5.

Рецензенты: кафедра климатологии географического факультета ЛГУ имени А. А. Жданова; Д. В. Чаликов д-р физ.-мат. наук, зав. лабораторией динамической метеорологии ЛО ИОАН СССР.



ПРЕДИСЛОВИЕ

Существующие учебники и учебные пособия по «Динамической (теоретической) метеорологии» рассчитаны на студентов метеорологической специальности. В связи с этим ощущается потребность в специальном учебном пособии для студентов океанологической специальности.

В основу данного учебного пособия положено ранее изданное в ЛГМИ пособие «Динамическая метеорология» (учебное пособие для океанологов), написанное И. И. Мельниковой и В. М. Радиковичем в 1974 г. Это учебное пособие в свое время было призвано в рамках сравнительно небольшого курса решать три задачи: познакомить студентов-океанологов с основами динамики и термодинамики атмосферы, необходимыми для изучения ряда других курсов, формирующих специалиста океанолога широкого профиля; обратить внимание на процессы, протекающие в слоях, прилегающих к водной поверхности и, наконец, познакомить студентов-океанологов с вопросами взаимодействия океана и атмосферы. За прошедшие годы вопросы взаимодействия океана и атмосферы получили столь широкое развитие, что возникла необходимость в специальном учебном курсе «Взаимодействие океана и атмосферы», который в настоящее время читается для студентов-океанологов. Последнее обстоятельство позволило исключить из нового учебного пособия вопросы, относящиеся к взаимодействию океана и атмосферы, что сделало возможным более глубокое изложение основ динамики и термодинамики атмосферы, которое нашло свое отражение в существенной переработке и расширении соответствующих разделов курса. К сожалению, из-за ограниченности курса не все вопросы термодинамики и энергетики атмосферы изложены с достаточной подробностью.

В плане подготовки студентов к пониманию механизмов взаимодействия океана и атмосферы; в новом учебном пособии по-прежнему большое внимание уделяется изложению теории пограничного и приземного слоя атмосферы и процессов, протекающих вблизи раздела воздух — вода (трансформация, бризы, муссоны). Указанные разделы заметно переработаны и дополнены с учетом исследований, выполненных за прошедшие годы.

Изложение материала дополнено примерами задач и вопросами для самоконтроля.

Автор выражает глубокую благодарность профессорам И. М. Безуглому, Ю. П. Доронину, В. Г. Морачевскому, доцентам К. Л. Егорову, И. А. Бауману и И. И. Мельниковой за ценные замечания и предложения, высказанные по рукописи, которые были учтены при подготовке ее к печати.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Предмет и задачи динамической метеорологии

Метеорология — это наука о физических и химических процессах в атмосфере, о их временном и пространственном режиме, методах их прогноза и воздействия на них.

Динамическая (теоретическая) метеорология является разделом физики атмосферы и исходит из основных законов физики (законов сохранения количества движения, массы и энергии), выраженных в виде дифференциальных уравнений, связывающих скорость, температуру, давление и плотность. Предметом и задачей динамической метеорологии является изучение теоретическими методами атмосферных движений в их связи и взаимодействии с термодинамическими процессами в атмосфере. Непосредственной причиной атмосферных движений является неравномерность распределения давления, обусловленная процессами теплообмена в атмосфере. Они в значительной мере связаны с преобразованием лучистой энергии в тепловую, а также с выделением или поглощением тепла при фазовых превращениях воды, и не только обуславливают атмосферные движения, но и сами в большой степени определяются ими.

Динамическая метеорология использует основные уравнения гидромеханики, термодинамики, и теории излучения, решая их применительно к специфике атмосферных процессов.

Большое влияние на современный этап развития динамической метеорологии оказывает широкое использование метеорологических ракет и искусственных спутников Земли (ИСЗ), а также численных методов решения задач с помощью электронных вычислительных машин (ЭВМ).

Ракеты обеспечивают зондирование высоких слоев, сведения о которых до последнего времени были недостаточными. Здесь, благодаря наличию озона, начинаются преобразования солнечной энергии в тепловую, и эти процессы играют важную роль в формировании погоды и климата. ИСЗ позволяют получить почти синхронные наблюдения по всему земному шару за облачностью и радиационными потоками тепла. Наконец, с помощью современных ЭВМ можно решать сложные нелинейные задачи, учитывающие многообразие факторов и взаимосвязь между отдельными факторами, формирующими погоду.

1.2. Связь процессов в атмосфере и гидросфере

Динамическая метеорология важна для океанологов как необходимая часть современного подхода к изучению процессов в океане на основе теории взаимодействия океана и атмосферы. Специфика взаимодействия океана и атмосферы определяется рядом факторов: а) подвижностью водной поверхности; б) большой по сравнению с воздухом удельной теплоемкостью воды; в) интенсивным турбулентным перемешиванием в океане.

В качестве примера тесной взаимосвязи между процессами в атмосфере и океане рассмотрим случай с неравномерным нагреванием поверхности океана, связанным либо с широтным ходом солнечной радиации, либо с влиянием крупномасштабных систем облаков. В океане за счет различий температур и, следовательно, плотности возникает плотностная циркуляция. В атмосфере, за счет лучистого и турбулентного теплообмена между океаном и атмосферой, возникает горизонтальный градиент температуры, что приведет к неравномерности в распределении давления и к появлению движений в атмосфере. Движение воздуха за счет действия сил трения вызовет дрейфовые течения и волны на поверхности океана. Возникшие потоки воздуха и воды будут переносить тепло и тем самым стремиться выравнять первоначальные контрасты температуры. Но с развитием волн увеличивается трение воздуха о морскую поверхность, и это должно приводить к постепенному затуханию движения в атмосфере. Таким образом, при отсутствии постоянных внешних источников энергии (поддерживающих либо контраст температур, либо движение) через некоторое время исчезнет различие температур и вызванные им движения в атмосфере и океане.

Рассмотренный выше пример дает только чисто принципиальную схему взаимодействия и связи процессов в атмосфере и океане. В действительности картина взаимодействия осложняется за счет влияния процессов большого масштаба и различий характерного времени развития процессов в атмосфере и океане, приводящих к тому, что, например, возникновение плотностной циркуляции в океане будет иметь последствия для атмосферы через довольно большой промежуток времени, то есть будет влиять на процессы, непосредственно несвязанные с теми, которые вызвали возникновение этой циркуляции.

Поскольку в наиболее тесном взаимодействии с океаном находятся нижние слои атмосферы, то в курсе динамической метеорологии для океанологов большое внимание уделяется описанию строения пограничного и приземного слоя атмосферы, а также процессов, протекающих вблизи границы раздела воздух — вода. Прежде чем переходить к изучению этих вопросов, необходимо, однако, познакомиться с основами динамики атмосферы, вспомнив некоторые понятия из гидромеханики и термодинамики атмосферы.

2. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ

2.1. Общие принципы

Ламинарное и турбулентное движение жидкостей

Все движения жидкостей и газов делятся на два типа: спокойные и плавные течения, называемые ламинарными, и турбулентные течения, при которых скорость, температура и другие характеристики крайне нерегулярно изменяются в пространстве и времени. Другими словами можно утверждать, что при ламинарном течении отдельные частицы жидкости движутся по плавным траекториям, а при турбулентном режиме частицы имеют неправильные хаотические траектории с поперечными и даже обратными (по отношению к общему движению) перемещениями. При ламинарном режиме движения перенос свойства поперек потока происходит только за счет молекулярного перемешивания. Поясним этот механизм на примере переноса количества движения.

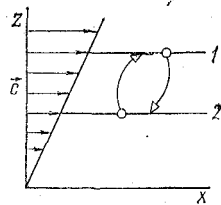


Рис. 1. Схематическое объяснение молекулярного перемешивания.

Рассмотрим поток жидкости, в котором скорость растет с высотой (рис. 1). За счет теплового движения молекулы с уровня 1 могут попадать на уровень 2 и переносить сюда некоторое дополнительное количество движения. И, наоборот, молекулы с уровня 2 будут переносить на уровень 1 меньшее количество движения, т. е. затормаживать движение на этом уровне. Таким образом, под влиянием молекулярного перемешивания возникает поток количества движения, приводящий к постепенному выравниванию скоростей. Из общих физических соображений понятно, что поток будет тем больше, чем больше градиент скорости. Поток количества движения можно рассматривать как снесенную к единице поверхности касательную силу, называемую касательным напряжением τ_m . Итак, за счет молекулярного перемешивания в потоке жидкости с вертикальным градиентом скорости возникает касательное напряжение

$$\tau_m = \mu \cdot \frac{dc}{dz}, \quad (2.1.1)$$

где коэффициент пропорциональности μ называется динамическим коэффициентом вязкости и зависит от свойств жидкости и температуры.

Рассматривая поток жидкости с заданным вертикальным профилем удельного содержания свойства s и рассуждая аналогич-

Но, можно получить выражение для молекулярного потока любого свойства

$$Q_{ms} = \mu_s \cdot \frac{ds}{dz} \quad (2.1.2)$$

Для потока тепла ($s \equiv c_p \cdot T$) $\mu_s = \frac{\lambda}{c_p}$, λ — коэффициент теплопроводности,

$$Q_{mT} = -\lambda \frac{dT}{dz} \quad (2.1.3)$$

Для потока водяного пара ($s \equiv q$ — массовая доля водяного пара), $\mu_s = D$ — динамический коэффициент диффузии,

$$Q_{mq} = -D \cdot \frac{dq}{dz} \quad (2.1.4)$$

Знак минус в формулах (2.1.3—2.1.4) показывает, что свойство переносится в направлении противоположном направлению градиента.

Наряду с коэффициентами μ , λ , D часто используются соответствующие им кинематические коэффициенты: $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ — кинематический коэффициент вязкости, $\kappa = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ — коэффициент температуропроводности, $d_s = \frac{D}{\rho}$ — коэффициент диффузии.

Из общих физических соображений ясно (более строго это доказывается в гидромеханике), что при чисто молекулярном перемешивании изменения удельного содержания свойства в частице жидкости будет связано с дивергенцией соответствующих потоков Q_{ms} или, другими словами, с притоками свойства, которые могут быть выражены при условии постоянства коэффициентов в трехмерном случае (для несжимаемой жидкости) как

$$\vec{F}_{тр.м} = \nu \cdot \Delta \vec{c}; \quad (2.1.5)$$

$$\epsilon_{Tм} = c_p \cdot \kappa \cdot \Delta T; \quad (2.1.6)$$

$$\epsilon_{qм} = d_s \cdot \Delta q, \quad (2.1.7)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Согласно (2.1.5), $\vec{F}_{тр.м}$ имеет размерность силы, отнесенной к единице массы, и называется силой молекулярного трения. Видно, что эта сила в общем случае является тензором второго ран-

га, т. е. имеет девять компонент. Величины ε_{Tm} и ε_{qm} называются молекулярными притоками тепла и водяного пара, соответственно. За исключением движения в очень тонком слое воздуха, так называемом ламинарном подслое, прилегающем к поверхности земли (воды), все атмосферные движения имеют турбулентный характер. Из гидромеханики известно, что критерием перехода от ламинарного к турбулентному режиму движения является безразмерное число Рейнольдса:

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu}, \quad (2.1.8)$$

представляющее отношение силы инерции к силе вязкости (u — характерное значение скорости потока, L — характерный размер потока). При малых значениях Re ($Re < Re_{кр. мин}$) движение имеет ламинарный характер, при больших — турбулентный (силы инерции способствуют порождению контрастов и неоднородностей, а сила вязкости — сглаживанию их). По наблюдениям в аэродинамических трубах $Re_{кр. мин} \approx 3000$.

Можно выделить две основные причины смены режима течений:

- а) гидродинамическую неустойчивость,
- б) конечные возмущения.

Вопрос о гидродинамической неустойчивости сводится к рассмотрению поведения в потоке бесконечно малых возмущений. Если они затухают со временем — движение устойчиво. Если они могут неограниченно возрастать, то возникают беспорядочные пульсации, появляются турбулентные пятна, которые сливаются друг с другом и захватывают весь поток. Конечные возмущения могут проникать в поток извне или возникать в нем из-за наличия разных сопротивлений. В полуэмпирической теории турбулентности предполагается, что при турбулентном режиме перенос любой субстанции происходит за счет хаотического движения отдельных масс жидкости, называемых турбулентными молями, которые представляют вихрь, возникающий за счет гидродинамической неустойчивости основного потока. Этот вихрь отрывается от потока в одной точке и смешивается с ним в другой точке. Хотя практически смешение идет непрерывно, по аналогии с теорией молекулярного перемешивания вводится понятие пути смешения (аналог пути свободного пробега молекулы) как расстояние l , которое пройдет вихрь от момента зарождения до полного смешения с окружающей средой. Наряду с этим подходом существует и статистическая теория турбулентности, которая не будет здесь рассматриваться ввиду ограниченности курса.

Прохождение через данную точку пространства вихрей разных размеров, несущих свойства из различных частей основного

потока, и создает сложную картину изменения любой метеорологической величины. Более подробно эти вопросы будут рассмотрены позже, после вывода основных уравнений.

Методы исследования движения жидкости

Существуют два метода изучения движения жидкости — Лагранжа и Эйлера. В методе Лагранжа объектом изучения являются отдельные частицы жидкости, т. е. изучается изменение во времени различных векторных и скалярных величин, характеризующих фиксированную частицу (скорость, ускорение, плотность и т. д.), а также изменения этих же величин при переходе от одной частицы к другой. Индивидуальность рассматриваемой частицы может быть определена через задание ее координат (x_{0i}) в момент времени t_0 . В таком случае любое свойство частицы при методе Лагранжа должно выражаться как

$$s = f(x_{0i}, t),$$

где x_{0i} и t называются переменными Лагранжа. В метеорологии примером применения метода Лагранжа является использование для изучения свойств воздушного потока свободных аэростатов и уравновешенных шаров-пилотов, перемещающихся вместе с воздушной массой (частицей воздуха) и фиксирующих (с помощью установленных на них приборов) изменение ее свойств. В последние годы этот метод получает все более широкое распространение, основанием для которого является то, что законы сохранения при этом выражаются в форме обыкновенных дифференциальных уравнений.

Следует иметь в виду, однако, что для получения достаточно полной картины движения воздуха и изменения его свойств необходимы наблюдения большого количества аэростатов и шаров-пилотов, но информация, получаемая при этом, не позволяет непосредственно ответить на важный для практики вопрос: какое изменение свойства можно ожидать в данной точке пространства. Этому требованию, а также принятой сети фиксированных метеорологических станций отвечает метод Эйлера, где изучается изменение свойств среды с течением времени в фиксированной точке пространства и изменение их при переходе к другим точкам. В данном случае свойство s должно выражаться как функция координат (x_i) и времени t

$$s = f(x_i, t),$$

где x_i и t называются переменными Эйлера. В дальнейшем, в курсе динамической метеорологии будет, в основном, использоваться метод Эйлера. Переход от переменных Лагранжа к переменным Эйлера основан на использовании выражения для полной или индивидуальной производной.

Связь полной, локальной и конвективной производных

Допустим, что после свойства s можно записать в виде: $s = s(x, y, z, t)$ и что движение происходит только вдоль оси x со скоростью u (тогда $dx = u dt$). В таком случае, если обозначить через ds изменение свойства в движущейся частице, то

$$s(x + dx, t + dt, y, z) = s(x, t, y, z) + ds. \quad (2.1.9)$$

Разложим в ряд Тейлора левую часть (2.1.9) и, считая dx и dt малыми величинами, ограничимся членами, содержащими их только в первой степени:

$$s(x + dx, t + dt, y, z) = s(x, t, y, z) + \frac{\partial s}{\partial t} dt + \frac{\partial s}{\partial x} dx + \dots$$

Подставляя это выражение в (2.1.9) и деля все члены на dt , получим

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (2.1.10)$$

Соотношение (2.1.10) легко обобщается на случай трехмерного движения

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} + w \frac{\partial s}{\partial z}, \quad (2.1.11)$$

где v и w — проекции вектора скорости на оси y и z .

Первый член в правой части (2.1.11) называется локальной производной и характеризует изменение свойства в данной точке пространства. Остальные три члена называются конвективной производной и характеризуют адвекцию свойства в данную точку за счет прихода в нее частицы из другой точки. Индивидуальная или полная производная (ds/dt) характеризует изменение свойства в движущейся частице.

Таким образом, соотношение (2.1.11) действительно связывает эйлерово и лагранжево изменение свойства s .

Физический смысл этого соотношения лучше понятен, если его переписать в виде

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{ds}{dt} - \left(u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} + w \frac{\partial s}{\partial z} \right), \quad (2.1.11')$$

т.е. изменение свойства в данной точке пространства ($\partial s/\partial t$) связано с адвекцией (переносом) свойства частицами из других точек пространства $\left(u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} + w \frac{\partial s}{\partial z} \right)$ и изменением свойства в самих движущихся частицах под влиянием внешних воздействий (ds/dt).

Конвективная производная представляет скалярное произведение вектора скорости $\vec{c} = \vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w$ и вектора градиента свойства $\text{grad } s = \vec{i} \frac{\partial s}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial s}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial s}{\partial z}$. Так как в атмосфере (так же как и в океане) существенно различаются, как правило, даже порядки величин горизонтальных и вертикальных компонент этих векторов, то целесообразно отдельно выделить произведение плоских векторов и тогда (2.1.11) примет вид

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial s}{\partial n} \cos \alpha + w \frac{\partial s}{\partial z}, \quad (2.1.11'')$$

где V — модуль плоского вектора скорости ($\vec{V} = \vec{i}u + \vec{j}v$); $\frac{\partial s}{\partial n}$ — модуль плоского вектора градиента ($\frac{\partial \vec{s}}{\partial n} = \vec{i} \frac{\partial s}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial s}{\partial y}$); α — угол между векторами \vec{V} и $\frac{\partial \vec{s}}{\partial n}$. Напомним, что за положительное направление градиента принимается направление в сторону максимального возрастания величины.

Задача. За какое время температура в метеорологической будке уменьшится на 4° при скорости восточного ветра $5,5$ м/с, если температура убывает с запада на восток на $3^\circ/100$ км, а движение воздушной массы происходит изотермически?

Вспользуемся (2.1.11'') при $s \equiv T$. По условию задачи $\frac{dT}{dt} = 0$, $w \frac{\partial T}{\partial z} = 0$, $\cos \alpha = 1$, $\Delta T = -4\text{К}$, $\frac{\partial T}{\partial n} = 3 \cdot 10^{-5}$ К/м, $V = 5,5$ м/с. Так как $\Delta T = \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t$, то $\Delta t = - \frac{\Delta T}{v \cdot \frac{\partial T}{\partial n} \cos \alpha}$ и $\Delta t = 6,75$ ч.

2.2. Основные уравнения динамики и термодинамики атмосферы

Уравнение состояния

Ранее было показано, что реальные газы очень мало отличаются от гипотетического совершенного газа. Поэтому уравнение состояния можно получить на основании закона Бойля — Мариотта и Гей-Люссака. Атмосферу можно рассматривать как термодинамическую систему, внутреннее состояние которой однозначно определяется только двумя параметрами. В данном случае, если записать уравнение состояния в общем виде

$$p = p(\rho, t), \quad (2.2.1)$$

где t — температура, и продифференцировать (2.2.1), то

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{t=\text{const}} d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_{\rho=\text{const}} dt. \quad (2.2.2)$$

На основании закона Бойля—Мариотта для неизменной массы газа M , при фиксированной температуре $t = \text{const}$, произведение давления p на объем $V = \frac{M}{\rho}$ остается постоянной величиной:

$$p \frac{M}{\rho} = p_0 \frac{M}{\rho_0} = \text{const}.$$

В таком случае

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{t=\text{const}} = \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p}{\rho}. \quad (2.2.3)$$

Согласно закону Гей-Люссака, при постоянном объеме (или для неизменной массы при постоянной плотности) давление является линейной функцией температуры

$$p = p_0 (1 + \alpha t),$$

где α — коэффициент объемного расширения газа равный $1/273$, откуда следует, что

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_{\rho=\text{const}} = p_0 \alpha = \frac{p \cdot \alpha}{1 + \alpha t}. \quad (2.2.4)$$

Подставляя (2.2.3) и (2.2.4) в (2.2.2), получаем

$$dp = \frac{p}{\rho} d\rho + \frac{p \alpha dt}{1 + \alpha t}.$$

Проинтегрировав это выражение и введя понятие абсолютной температуры

$$T = t + \frac{1}{\alpha} = t + 273, \quad (2.2.5)$$

получаем

$$\frac{p}{\rho (1 + \alpha t)} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{p}{\rho T} = \alpha \cdot \text{const} = R, \quad \text{т. е.}$$

$$p = R \rho T. \quad (2.2.6)$$

В общем случае ненасыщенного влажного воздуха, считая его идеальной двухкомпонентной смесью газов,

$$p = p' + e, \quad (2.2.7)$$

где p и p' — давление влажного и сухого воздуха, соответственно; e — парциальное давление водяного пара (упругость водяного пара). Подставляя в (2.2.7) уравнение состояния для сухого воздуха и водяного пара, а также выражая газовую постоянную

водяного пара (R_n) через газовую постоянную сухого воздуха (R'), получаем

$$p = \rho' R' T + \rho_n R_n T = \rho R' T (1 + 0,605 q) = \rho R' T_v, \quad (2.2.8)$$

где

$$\rho = \rho' + \rho_n; \quad \rho_n = \rho q; \quad R_n = 1,605 R'; \quad T_v = T (1 + 0,605 q). \quad (2.2.9)$$

За исключением определения вертикальной статистической устойчивости, различием T и T_v можно пренебречь из-за малости q .

Газовые постоянные R' и R_n связаны с универсальной газовой постоянной R^* через относительные молекулярные массы сухого воздуха μ и водяного пара μ_n :

$$R' = \frac{R^*}{\mu}, \quad R_n = \frac{R^*}{\mu_n}.$$

Из (2.2.8) следует, что при одинаковых температуре и давлении плотность влажного воздуха меньше плотности сухого в $(1 + 0,605 q)$ раз (это связано с тем, что относительная молекулярная масса водяного пара меньше соответствующей массы сухого воздуха).

Уравнения движения

Уравнения движения являются математическим выражением закона сохранения количества движения, и на основании второго закона механики в инерциальной системе координат могут быть записаны в виде

$$\frac{d\vec{c}_a}{dt} = \Sigma \vec{F}'_i, \quad (2.2.10)$$

где \vec{F}'_i — силы (отнесенные к единице массы), действующие на частицу воздуха в инерциальной системе; \vec{c}_a — вектор скорости абсолютного движения частицы в этой же системе координат.

Абсолютное ускорение можно представить в виде суммы относительного ($\vec{d}\vec{c}/dt$), переносного (\vec{a}_n) и кориолисова (\vec{a}_k) ускорений

$$\frac{d\vec{c}_a}{dt} = \frac{d\vec{c}}{dt} + \vec{a}_n + \vec{a}_k.$$

Таким образом, для описания относительного движения в неинерциальной системе координат, связанной с вращающейся Землей, уравнение сохранения количества движения или уравнение движения должно иметь вид

$$\frac{d\vec{c}}{dt} = \Sigma \vec{F}'_i - \vec{a}_n - \vec{a}_k, \quad (2.2.11)$$

Дополнительные слагаемые в правой части этого уравнения могут рассматриваться как инерционные силы, и с учетом этого уравнение можно записать в форме

$$\frac{d\vec{c}}{dt} = \Sigma \vec{F}_i, \quad (2.2.11')$$

где \vec{F}_i — все силы, приложенные к частице, включая и силы инерции, которые по модулю равны соответствующим ускорениям, но направлены противоположно им.

С учетом (2.1.11) векторное уравнение движения (2.2.11') можно записать в проекциях на координатные оси (в декартовой системе

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \Sigma F_x, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \Sigma F_y, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \Sigma F_z. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Здесь F_x, F_y, F_z — проекции сил на оси координат.

Уравнение неразрывности

Уравнение неразрывности является математическим выражением закона сохранения массы.

Рассмотрим фиксированный в пространстве элементарный объем $dx dy dz$, расположенный в потоке жидкости, составляющие скорости которой в начале координат равны u, v, w (рис. 2).

Если за единицу времени через грань $OABC$ втекает масса жидкости $\rho u dy dz$, то через грань $LFDK$ вытекает масса

$$\left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx \right) dy dz.$$

Итак, приток жидкости (воздуха) через грани, перпендикулярные оси x , равен

$$\rho u dy dz - \left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx \right) dy dz = - \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx dy dz.$$

Аналогично можно получить выражения для притока жидкости через грани, перпендикулярные осям y и z :

$$-\frac{\partial \rho v}{\partial y} dx dy dz, \quad -\frac{\partial \rho w}{\partial z} dx dy dz.$$

Общий приток жидкости в элементарный объем за единицу времени равен

$$-\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) dx dy dz.$$

На основании закона сохранения массы этот общий приток жидкости должен быть равен изменению массы объема

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz.$$

В таком случае уравнение неразрывности будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z}\right) = 0, \quad (2.2.13)$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{c} = 0.$$

Если воспользоваться соотношением (2.1.11), то (2.2.13) можно записать так

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{c} = 0. \quad (2.2.14)$$

Для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) уравнение неразрывности примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{div} \vec{c} = 0. \quad (2.2.15)$$

Так как с помощью интеграла Бернулли можно показать, что относительное изменение плотности не превышает 1% при изменении скорости на 50 м/с, то уравнение (2.2.15) и используется обычно для описания метеорологических процессов (только при достижении скоростей, близких к скорости звука, относительное изменение плотности может достигать 50%). Для стационарного процесса ($d\rho/dt = 0$) из (2.2.13.)

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \quad \text{или} \quad \operatorname{div} \rho \vec{c} = 0. \quad (2.2.16)$$

Уравнение притока тепла

Уравнение притока тепла является следствием закона сохранения энергии. Любую систему можно характеризовать тремя видами энергии: кинетической E_k , связанной с движением отдельных частей или всей системы в целом; потенциальной E_n , если система находится в силовом поле (для атмосферы наиболее важным видом потенциальной энергии является гравитационная потенциальная энергия, связанная с полем силы тяжести) и внутренней энергией E_v , представляющей собой кинетическую и потенциальную энергию молекул.

Закон сохранения энергии утверждает, что если система не подвержена внешним воздействиям (изолированная система), то сумма всех видов энергии в ней остается постоянной, хотя один вид энергии может превращаться в другой. В более общем случае система может подвергаться внешним воздействиям: к системе извне может поступать тепло или над системой может совершаться работа. При этом, согласно закону сохранения энергии, изменение полной энергии такой системы равно работе, совершаемой внешними силами над системой, и притоку тепла извне.

Обозначим через $\delta\Phi$ и $\frac{dQ}{dt}$ — работу внешних сил и приток тепла извне (выраженный в единицах работы) за единицу времени и на единицу массы. Тогда закон сохранения энергии в общем случае запишется следующим образом:

$$\frac{dE_k}{dt} + \frac{dE_n}{dt} + \frac{dE_v}{dt} = \frac{dQ}{dt} + \delta\Phi. \quad (2.2.17)$$

Работа внешних сил складывается из трех частей:¹

а) работы сил, имеющих потенциал, переходящей в кинетическую и потенциальную энергию

$$\delta\Phi_1 = \frac{dE_k}{dt} + \frac{dE_n}{dt};$$

б) работы сил трения, переходящей в тепло

$$\delta\Phi_2 = \varepsilon,$$

где ε — скорость диссипации;

в) работы остальных сил (сжатия, расширения, электростатических и т. д.). Если рассматривать только силы сжатия (расширения), то

$$\delta\Phi_3 = F \frac{dL}{dt} = \frac{F}{ds} \cdot \frac{dV}{dt} = -p \frac{dV}{dt}.$$

¹ Строгое доказательство этого можно получить, если из уравнения движения (2.2.11) составить уравнение баланса механической энергии, но для этого нужно вначале получить выражения для \vec{F}_i .

Подставив $\delta \Phi_i$ в выражение для закона сохранения энергии (2.2.17), получим

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dE_v}{dt} + p \frac{dV}{dt} + \varepsilon. \quad (2.2.18)$$

Соотношение (2.2.18) называется уравнением первого начала термодинамики, которое утверждает, что изменение внутренней энергии единичной массы за единицу времени складывается из притока тепла извне, потери механической энергии, благодаря трению, и работы сжатия (расширения).

Диссипация энергии играет заметную роль в общем балансе кинетической энергии атмосферы. Однако изменения внутренней энергии воздуха за счет диссипации, обычно, малы по сравнению с изменениями, вызванными притоком тепла и работой сил сжатия, поэтому в динамической метеорологии принято пренебрегать ε в уравнении (2.2.18).

На основании кинетической теории газов можно предполагать, что внутренняя энергия связана с внутренними параметрами газа: температурой и давлением или температурой и объемом:

$$E_v = E_v(T, V), \text{ тогда}$$

$$dE_v = \left(\frac{\partial E_v}{\partial T} \right)_{V=\text{const}} dT + \left(\frac{\partial E_v}{\partial V} \right)_{T=\text{const}} dV.$$

Экспериментально показано, что для реальных газов $\partial E_v / \partial V$ стремится к нулю (для идеальных газов эта частная производная точно равна нулю) и, следовательно, внутренняя энергия зависит только от температуры:

$$dE_v = \frac{\partial E_v}{\partial T} dT.$$

Если пренебречь ε , то (2.2.18) примет вид

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial E_v}{\partial T} \frac{dT}{dt} + p \frac{dV}{dt}.$$

При неизменном объеме ($dV = 0$) $\frac{\partial E_v}{\partial T} = \frac{dQ}{dT}$,

т. е. определяет количество тепла, которое нужно подвести к единице массы, чтобы изменить ее температуру на 1° , и имеет смысл удельной теплоемкости при постоянном объеме c_v . С учетом этого первое начало термодинамики запишется как

$$\frac{dQ}{dt} = c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{dV}{dt}. \quad (2.2.19)$$

Если в уравнении состояния для единицы массы заменить ρ на $1/V$ и продифференцировать его, тогда

$$p dV = R dT - V dp,$$

и (2.2.19) примет вид

$$\frac{dQ}{dt} = (c_v + R) \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt}.$$

Видно, что при неизменном давлении ($dp = 0$) $c_v + R = \frac{dQ}{dT}$,

т. е. имеет смысл удельной теплоемкости при постоянном давлении:

$$c_p = c_v + R. \quad (2.2.20)$$

В таком случае (2.2.19) запишется в Форме

$$\frac{dQ}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt}. \quad (2.2.21)$$

Уравнения (2.2.19) и (2.2.21) часто называются уравнениями притока тепла; $\frac{dQ}{dt} = \epsilon_{Ti}$ определяет притоки тепла (молекулярный, лучистый и фазовый), которые будут рассмотрены ниже. Следует иметь в виду, что ϵ_{Ti} — приток тепла на единицу массы за единицу времени, кал/(г·с) или дж/(кг·с).

С учетом уравнения состояния (2.2.6), для единицы массы уравнение (2.2.21) примет вид

$$\epsilon_{Ti} = \frac{dQ}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} - \frac{RT}{p} \cdot \frac{dp}{dt}. \quad (2.2.21')$$

Для адиабатического процесса ($\epsilon_{Ti} = 0$) из (2.2.21')

$$\frac{dT}{T} = \frac{R}{c_p} \cdot \frac{dp}{p},$$

откуда после интегрирования получается уравнение Пуассона

$$T = T_0 \cdot (p/p_0)^{R/c_p}.$$

Таким образом, для адиабатического процесса целесообразно для сравнения состояния различных частиц воздуха (воздушных масс) вместо p и T использовать одну характеристику θ — потенциальную температуру:

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p}, \quad (2.2.22)$$

которая определяется как температура, которую будет иметь частица, обладающая при давлении p температурой T , если ее адиабатически привести к давлению p_0 (обычно принимают $p_0 = 1000$ гПа).

Если продифференцировать выражение для θ , то

$$c_p dT - \frac{RT}{p} dp = c_p \frac{T}{\theta} d\theta$$

и с учетом уравнения состояния (2.2.6) можно записать (2.2.21') в виде

$$\varepsilon_{Ti} = c_p \frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (2.2.21'')$$

Отношение T/θ в нижнем 1,5 км слое находится в пределах $(1+1,05) \approx 1,0$, однако при $p=500$ гПа ($z \approx 5$ км) оно уже достигает значения 1,22.

Уравнение притока водяного пара

Уравнение притока водяного пара является следствием закона сохранения массы (в данном случае массы водяного пара). Исходя из простых физических соображений ясно, что изменение за единицу времени массовой доли водяного пара в частице воздуха должно быть связано с различными видами притока водяного пара, т. е.

$$\frac{dq}{dt} = \varepsilon_{qi} \quad (2.2.23)$$

где ε_{qi} — молекулярный и фазовый притоки водяного пара (будут рассмотрены позже).

Итак, полученная система уравнений (2.2.6, 2.2.12, 2.2.15, 2.2.21', 2.2.23), дополненная граничными условиями, в принципе, позволяет определить все интересующие нас метеорологические характеристики: u , v , ω , ρ , p , T и q , если известны выражения для сил в (2.2.12) и притоков тепла и влаги в (2.2.21') и (2.2.23) и если в этих выражениях не содержится новых неизвестных (для определения которых пришлось бы дополнять систему). Следует иметь, конечно, в виду, что полученные уравнения составляют только принципиальную основу динамической метеорологии, так как относятся к ламинарному движению. Об особенностях описания реальных турбулентных движений речь пойдет ниже (см. 2.6).

2.3. Силы, действующие в атмосфере

При выводе уравнений движения было показано, что относительное ускорение частицы определяется воздействием как реальных, действующих в инерциальной системе, сил (сила тяготения, сила барического градиента, сила трения), так и инерционных сил (переносная сила и сила Кориолиса).

Все указанные силы, действующие на некоторый объем V , можно разделить на два класса:

1) массовые — силы, действующие на каждый элемент объема независимо от того, существуют или нет рядом с объемом другие части жидкости (сила тяготения, переносная сила и отклоняющая сила вращения Земли, или сила Кориолиса). В геофизике принято рассматривать векторную сумму сил тяготения и переносной, называемую силой тяжести;

2) поверхностные — силы взаимодействия между объемом V и окружающей средой (сила барического градиента и сила трения).

Сила тяжести

Сила тяжести складывается из силы гравитационного притяжения Земли и центробежной силы, связанной с вращением Земли. Первая сила направлена вдоль радиуса к центру Земли и для единицы массы на поверхности Земли

$$G = k \frac{M}{R^2}, \quad (2.3.1)$$

где M — масса Земли; R — радиус Земли; k — универсальная постоянная тяготения ($6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$).

Центробежная сила направлена вдоль радиуса широтного круга от оси вращения, для единицы массы она выражается как

$$F = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r, \quad (2.3.2)$$

где $v = \omega r$; ω — угловая скорость вращения Земли; r — радиус широтного круга.

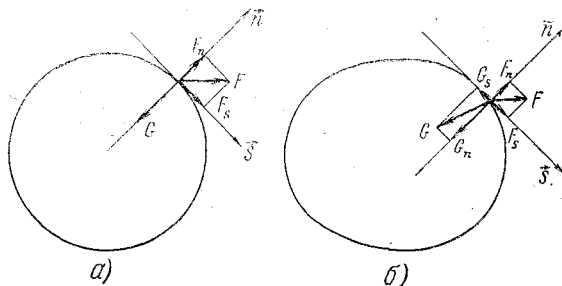


Рис. 3. Векторная схема силы тяготения, центробежной силы и силы тяжести.

Если \vec{n} — направление нормали, \vec{s} — направление касательной к поверхности, то для Земли в форме шара (рис. 3, а) $G_n = G$, $G_s = 0$. Под влиянием F_s Земля должна сплющиваться до тех пор, пока возникающая при этом касательная составляющая G_s не уравновесит F_s (рис. 3, б).

Сила тяжести определяется как равнодействующая \vec{G}_n и \vec{F}_n .
Для единицы массы воздуха

$$\vec{F}_T = -\vec{g} \quad (2.3.3)$$

и направлена к поверхности Земли (g — модуль ускорения свободного падения). Для атмосферных движений над горизонтальной поверхностью $F_{Tx} = F_{Ty} = 0$, $\vec{F}_T = F_{Tz} = -g$. В противном случае проекции силы тяжести на координатные оси выражаются через тригонометрические функции угла наклона поверхности Земли по отношению к уровенной поверхности.

Сила тяжести убывает от полюса к экватору (на полюсе $F_n = 0$) и уменьшается с высотой (за счет увеличения $R + z$ и, следовательно, уменьшения G_n). В среднем, ускорение свободного падения составляет: на полюсе $9,832 \text{ м/с}^2$, на широте 45° $9,806 \text{ м/с}^2$, на экваторе $9,780 \text{ м/с}^2$.

В пределах исследуемой в метеорологии части атмосферы зависимостью силы тяжести от высоты можно пренебречь, так как высота этой части мала по сравнению с радиусом Земли.

Отклоняющая сила вращения Земли (сила Кориолиса)

Отклоняющая сила вращения Земли представляет дополнительную инерционную силу, действующую на частичку воздуха, движущуюся относительно поверхности Земли. Сила Кориолиса (названа по имени французского механика Густава Гаспара Кориолиса, впервые рассчитавшего эту силу) возникает за счет вращения Земли. Если бы Земля не вращалась, то путь частицы воздуха за время δt от полюса в сторону экватора был бы NA (рис. 4), за счет вращения Земли частица попадает в точку A_1 , $NA_1 = c\delta t$ (c — скорость частицы), так как за время δt Земля повернется на угол $\delta\alpha = \omega\delta t$ и $AA_1 = NA_1 \delta\alpha = c\omega(\delta t)^2$. Однако для равномерно-ускоренного движения $AA_1 = \frac{1}{2} a_k (\delta t)^2$, где a_k должно представлять

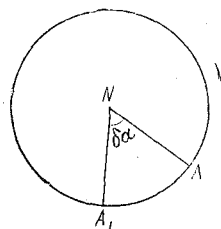


Рис. 4. Траектория движения частицы от полюса в сторону экватора.

ускорение за счет вращения Земли или ускорение Кориолиса. Из сравнения выражений для AA_1 получаем

$$a_k = 2\omega c. \quad (2.3.4)$$

С учетом векторного характера величин угловой скорости вращения Земли ($\vec{\omega}$) и скорости движения частиц (\vec{c}), общее выражение для ускорения Кориолиса имеет вид

$$\vec{a}_k = 2(\vec{\omega} \times \vec{c}). \quad (2.3.5)$$

В таком случае силу Кориолиса, действующую на единицу массы, можно представить как

$$\vec{F}_k = 2(\vec{c} \times \vec{\omega}) = 2(v \cdot \omega_z - \omega \omega_y) \vec{i} + 2(\omega \omega_x - u \omega_z) \vec{j} + 2(u \cdot \omega_y - v \cdot \omega_x) \vec{k}, \quad (2.3.6)$$

где u , v , ω — проекции скорости ветра; ω_x , ω_y , ω_z — проекции вектора угловой скорости вращения Земли $\vec{\omega}$. Таким образом, компоненты силы Кориолиса можно записать как

$$F_{kx} = 2(\omega_z v - \omega_y \omega), \quad F_{ky} = 2(\omega_x \omega - \omega_z u), \\ F_{kz} = 2(\omega_y u - \omega_x v). \quad (2.3.7)$$

Так как \vec{F}_k направлена перпендикулярно к относительной скорости, то она не изменяет ее числового значения, но меняет направление. Очевидно, что сила Кориолиса не может совершать работы.

На формирование горизонтальных атмосферных движений главное влияние оказывает ω_z , так как именно эта составляющая $\vec{\omega}$ определяет проекции силы Кориолиса в горизонтальной плоскости, если пренебречь членами, содержащими ω (вертикальная составляющая скорости обычно в десятки и сотни раз меньше u и v):

$$F_{kx} = 2\omega_z v, \quad F_{ky} = -2\omega_z u, \quad (2.3.7')$$

где $\omega_z = \omega \sin \varphi$ (φ — широта).

Из (2.3.7') видно, что горизонтальная составляющая силы Кориолиса направлена под углом 90° к направлению движения частицы (вправо в северном полушарии и влево в южном). Соотношения (2.3.7') обычно и используются для определения горизонтальных компонент силы Кориолиса.

При описании процессов вблизи экватора ($\varphi \rightarrow 0$, $F_{kx} \rightarrow 0$, $F_{ky} \rightarrow 0$) целесообразно использовать полные выражения для F_{kx} и F_{ky} (2.3.7). В географической системе координат (ось x направлена вдоль широты с запада на восток, ось y — вдоль меридиана с юга на север, ось z — вертикально вверх) они имеют вид ($\omega_x = 0$, $\omega_y = \omega \cos \varphi$):

$$F_{kx} = 2\omega(\sin \varphi v - \cos \varphi \omega), \quad F_{ky} = -2\omega \sin \varphi u. \quad (2.3.7'')$$

Вертикальной компонентой силы Кориолиса $F_{kz} = 2\omega \cos \varphi u$ всегда можно пренебречь по сравнению с силой тяжести.

Сила барического градиента

Рассмотрим в поле давления элементарный объем $dx dy dz$ (рис. 5). Обозначим через $p_1 = p(x)$ и $p_2 = p(x+dx)$ давление, дей-

ствующее на грани, перпендикулярные оси x . В таком случае, сила, действующая на объем $dx dy dz$, может быть записана в виде

$$F_x = (p_1 - p_2) dy dz$$

или, раскладывая p_2 в ряд;

$$p(x + dx) = p(x) + \frac{\partial p}{\partial x} dx + \dots;$$

получим $F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz$.

На единицу массы будет действовать сила

$$F_{px} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2.3.8)$$

Эта сила называется силой барического градиента (вернее ее проекций на ось x). Аналогично F_{px} , можно получить и другие составляющие силы барического градиента:

$$F_{py} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad F_{pz} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (2.3.8)$$

Таким образом, сила барического градиента выражается как

$$\vec{F}_p = -\frac{1}{\rho} \left(\vec{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial p}{\partial z} \right). \quad (2.3.9)$$

Главной причиной возникновения горизонтальной силы барического градиента в атмосфере является неравномерность нагревания подстилающей поверхности.

Сила трения

Для случая ламинарного потока жидкости, когда перенос количества движения происходит только за счет молекулярного перемешивания, в 2.1 было получено выражение для касательного напряжения (2.1.1) и силы молекулярного трения (для $v = \text{const}$) (2.1.5).

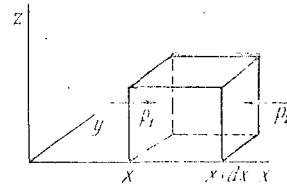


Рис. 5. Действие давления на элементарный объем.

Согласно (2.1.5) сила молекулярного трения представляет тензор второго ранга, имеющий девять компонент

$$\vec{F}_{\text{тр.м}} = \nu \left[\vec{i} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \right]. \quad (2.3.10)$$

Если учесть, что в общем случае напряжение τ также является тензором второго ранга, так как оно зависит от вектора силы и ориентации площадки, то (2.3.10) можно записать в виде

$$\vec{F}_{\text{тр.м}} = \frac{1}{\rho} \left[\vec{i} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \right], \quad (2.3.11)$$

где

$$\tau_{ij} = \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i}; \quad u_i = \{ u, v, w \}; \quad x_j = \{ x, y, z \}.$$

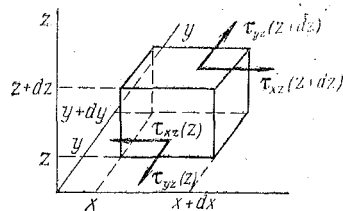


Рис. 6. Действие касательных напряжений на элементарный объем.

Для пояснения физического смысла выражений (2.3.10) или (2.3.11) рассмотрим элементарный объем $dx dy dz$, расположенный в потоке, скорость которого возрастает вдоль оси z (рис. 6). Обозначим через $\tau_{xz}(z)$ и $\tau_{xz}(z+dz)$ касательные напряжения, действующие на нижнюю и верхнюю грань объема соответственно, и связанные с молекулярным переносом проекции скорости на

ось x (т. е. u) вдоль оси z ($\tau_{xz} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$). Силу трения, действующую на объем за счет этих напряжений, можно представить как

$$f_{\text{тр.}x}^z = [\tau_{xz}(z+dz) - \tau_{xz}(z)] dx dy.$$

Если $\tau_{xz}(z+dz)$ разложить в ряд

$$\tau_{xz}(z+dz) = \tau_{xz}(z) + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz + \dots,$$

подставить в выражение для $f_{\text{тр.}x}^z$ и отнести силу к единице массы, то

$$F_{\text{тр.}x}^z = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Аналогично можно получить и другие компоненты силы трений, в которых нижний индекс обозначает проекцию силы, а верхний обозначает либо направление внешней нормали к рассматриваемой площадке, либо компоненту градиента вектора скорости.

2.4. Притоки тепла и водяного пара

Молекулярные притоки тепла и водяного пара

Выражения для молекулярных потоков и притоков тепла и водяного пара были уже получены ранее (см. (2.1.6) и (2.1.7)). Их можно также записать в виде:

$$\epsilon_{Tm} = c_p \left(\frac{\partial}{\partial x} \times \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \times \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \times \frac{\partial T}{\partial z} \right); \quad (2.4.1)$$

$$\epsilon_{qm} = \frac{\partial}{\partial x} d_s \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} d_s \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} d_s \frac{\partial q}{\partial z}. \quad (2.4.2)$$

Фазовые притоки тепла и водяного пара

В атмосфере вода может находиться в трех фазовых состояниях: газообразном (водяной пар), жидком и твердом. При переходе воды из жидкого или твердого состояния в газообразное (это соответственно называется испарением или возгонкой) увеличивается содержание водяного пара, т. е. происходит положительный приток водяного пара. В обратном случае (конденсация или сублимация) содержание водяного пара уменьшается и происходит отрицательный приток водяного пара. С положительным притоком водяного пара связан отрицательный приток тепла (за счет затрат тепла на испарение или возгонку), а с отрицательным притоком водяного пара — положительный приток тепла (за счет выделения тепла при конденсации и сублимации).

Если обозначить через m количество водяного пара, воды или льда, образующееся за единицу времени и отнесенное к единице объема, то фазовые притоки водяного пара и тепла можно записать в виде:

$$\epsilon_{qф} = \frac{m}{\rho}; \quad (2.4.3)$$

$$\epsilon_{Tф} = -L \frac{m}{\rho}, \quad (2.4.4)$$

где $m > 0$ для испарения и возгонки и $m < 0$ для конденсации и сублимации; L — удельная скрытая теплота парообразования (L_p) или сублимации (L_c).

Так как для атмосферы наиболее характерным является фазовый переход между жидким и газообразным состоянием воды, то в дальнейшем $L_p = L \approx 600$ кал/г или $2,5 \cdot 10^6$ Дж/кг.

Лучистые притоки тепла

Главным источником радиации в атмосфере Земли является Солнце, земная поверхность, облака и сама атмосфера.

Полный или интегральный поток радиации F (количество лучистой энергии, приходящей за единицу времени из полусферы на единичную горизонтальную площадку во всем диапазоне длин волн) определяется как

$$F = \int_0^{\infty} F_{\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} d\lambda \cdot \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi/2} J_{\lambda}(z, \theta, \psi) \cos \theta \sin \theta d\theta, \quad (2.4.5)$$

где F_{λ} — монохроматический или спектральный поток радиации; J_{λ} — интенсивность монохроматического излучения; λ — длина волны; z, ψ, θ — сферические координаты (θ — угол, образуемый лучом с вертикалью).

Законы, используемые для описания излучения и поглощения радиации (законы Планка, Вина, Кирхгофа, Стефана—Больцмана) справедливы строго только при наличии полного термодинамического равновесия — состояния, к которому в конце концов должна прийти система, заключенная внутри замкнутой полости (установившееся при этом излучение называется равновесным тепловым излучением или излучением абсолютно черного тела). В атмосфере до $z \approx 70$ км обычно существует локальное термодинамическое равновесие, при котором выполняются все законы, связывающие излучение с температурой, однако лучистый поток тепла не равен нулю (т. е. атмосфера может нагреваться или охлаждаться за счет радиационного обмена).

В общем виде уравнения переноса радиации очень трудно проинтегрировать, однако с учетом того, что спектральные области для коротковолновой солнечной и длинноволновой радиации практически не перекрываются, можно рассматривать их переносы отдельно и за счет этого упростить уравнения переноса.

При описании переноса длинноволновой радиации можно пренебречь рассеянием и использовать приближение локального термодинамического равновесия; при описании переноса коротковолновой радиации в уравнениях переноса можно пренебречь собственным излучением атмосферы.

Радиационный баланс на уровне z

$$R(z) = s(z) \sec \theta_{\odot} + D^{\downarrow}(z) - D^{\uparrow}(z) + F^{\downarrow}(z) - F^{\uparrow}(z), \quad (2.4.6)$$

где $s(z)$ — поток прямой солнечной радиации; θ_{\odot} — полярный угол Солнца; $F^{\downarrow}(z), F^{\uparrow}(z)$ — соответственно интегральные потоки нисходящей и восходящей длинноволновой радиации; D^{\downarrow} и D^{\uparrow} — потоки рассеянной радиации. Приток лучистой энергии ($\epsilon_{\text{л}}$) представляет дивергенцию результирующего потока ($\Phi = -R$); так как радиационные потоки существенно изменяются только по вертикали, то

$$\epsilon_{\text{л}} = - \frac{1}{\rho} \frac{d\Phi}{dz} = \frac{1}{\rho} \frac{dR}{dz}. \quad (2.4.7)$$

Для расчета радиационного баланса поверхности океана используются, в основном, полуэмпирические и эмпирические соотношения, полученные с учетом имеющихся измерений:

$$R(0) = (Q + q)_0 (1 - A) f_1(N) - E_{эф} f_2(N), \quad (2.4.8)$$

где $(Q + q)_0$ — максимально возможная сумма прямой и рассеянной радиации, зависящая от широты места, времени года, времени суток и характеристик прозрачности атмосферы; A — альбедо подстилающей поверхности (в общем случае зависит от высоты солнца и волнения поверхности, а также загрязненности поверхности); $f_1(N)$ — учитывает ослабление коротковолновой радиации облачностью и выражается в разных формах, иногда с учетом вклада разных форм облаков, но чаще зависит только от общей облачности; $E_{эф}$ — эффективное излучение ($E_a - E_a$), $E_a = \delta \sigma T_a^4$, а E_a — излучение атмосферы часто определяется по формуле Брента: $E_a = \sigma T_a^4 (a_1 + b_1 \sqrt{e})$. здесь σ — постоянная Стефана—Больцмана ($5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м²·К⁴) или $8,16 \cdot 10^{-11}$ кал/(см²·мин·К⁴), δ — поглощательная способность земной поверхности; если e взято в гПа, то $a_1 = 0,526$, $b_1 = 0,065$; $f_2(N)$ — учитывает влияние облачности на эффективное излучение.

Следует иметь в виду, что радиационный баланс поверхности океана практически равен

$$R(0) = -E_{эф}, \quad (2.4.9)$$

так как коротковолновая радиация не поглощается поверхностью, а проникает на большую глубину (это имеет важное значение при объяснении образования «холодной пленки» на поверхности океана).

2.5. Основы статики и термодинамики атмосферы

В 2.2 была получена квазизамкнутая система уравнений для определения всех основных метеорологических характеристик. Ряд очень важных выводов об изменениях внутренних параметров системы (атмосферы), однако, можно сделать без непосредственного учета движения воздуха (статика) или при его параметрическом описании (термодинамика).

Уравнение статики. Барометрические формулы

Для неподвижной атмосферы давление на уровне z равно весу вертикального столба воздуха, расположенного выше этого уровня и имеющего единичную площадь сечения. Так как сила тяжести, действующая на единицу объема, равна ρg , то давление на любой высоте z выражается как

$$p = \int_z^{\infty} \rho g dz'.$$

Если продифференцировать это выражение по z , то получаем уравнение статики атмосферы:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g. \quad (2.5.1)$$

Ранее было показано, что в пределах атмосферы ускорение свободного падения можно считать постоянным, в таком случае уравнение (2.5.1) показывает, что давление с высотой убывает тем быстрее, чем больше плотность воздуха.

Выразим плотность воздуха ρ из уравнения состояния для влажного воздуха (2.2.8), тогда (2.5.1) примет вид

$$\frac{dp}{p} = -g \frac{dz}{RT_b};$$

проинтегрируем его, допустим, от p_0 до p и от 0 до z :

$$p(z) = p_0 \exp \left[- \int_0^z \frac{g}{RT_b} dz \right]. \quad (2.5.2)$$

Формула (2.5.2) связывает давление на высоте z с давлением у поверхности земли (p_0) в зависимости от вертикального распределения виртуальной температуры. Так как фактическое распределение температуры трудно выразить простой аналитической функцией, то окончательное интегрирование (2.5.2) возможно только для ряда частных случаев. Интегралы уравнения статики называются барометрическими формулами.

В общем случае (2.5.2) можно записать в виде

$$p(z) = p_0 \exp \left[- \frac{gz}{RT_{m0}} \right], \quad (2.5.2')$$

где $T_{m0} = \frac{z}{\int_0^z \frac{dz}{T_b}}$ — средняя барометрическая температура (тем-

пература фиктивного изотермического слоя, при которой толщина слоя и разность давлений на его границах равны, соответственно, толщине слоя и разности давлений на границах в данных условиях). Так как T_{m0} до высоты 5 км мало отличается от сред-

ней виртуальной температуры $T_{mv} = \frac{1}{z} \int_0^z T_b dz$, которую можно

вычислить по данным температурного зондирования, то для реальной атмосферы барометрическую формулу можно представить в виде

$$p(z) = p_0 \exp \left[- \frac{gz}{RT_{mv}} \right]. \quad (2.5.3)$$

Геопотенциал. Карты барической топографии

Геопотенциалом или потенциалом силы тяжести называется работа, совершаемая при подъеме единицы массы от одного уровня до другого

$$\Phi = \int g dz, [\Phi] = L^2 T^{-2}.$$

Геопотенциал характеризует потенциальную энергию воздушной частицы, находящейся на высоте z . Поверхности равных значений Φ называются поверхностями уровня (при перемещении вдоль них работа силы тяжести равна нулю). За нулевую поверхность принимают поверхность уровня невозмущенного океана. На полюсе поверхности проходят ближе друг к другу, чем на экваторе (на полюсе больше g).

Понятие геопотенциала получило широкое применение в связи с такими методами анализа атмосферных процессов как аэрологические диаграммы, вертикальные разрезы, карты барической топографии. Последние используются для характеристики поля давления на высотах.

Если представить $d\Phi = g dz$ и воспользоваться уравнением статики, то $d\Phi = -\frac{dp}{\rho}$ или, учитывая, что $\rho = \frac{p}{R T_v}$,

$$d\Phi = -R T_v \frac{dp}{p}. \quad (2.5.4)$$

Введем среднюю виртуальную температуру слоя T_v и проинтегрируем (2.5.4) по Φ от 0 до Φ , а по p от p_0 до p , тогда имеем

$$\Phi_{абс} = R \bar{T}_v \ln \frac{p_0}{p}. \quad (2.5.5)$$

Полученная величина характеризует геопотенциал данной изобарической поверхности над уровнем моря и называется абсолютным геопотенциалом.

Из (2.5.5) видно, что абсолютный геопотенциал данной изобарической поверхности ($p = \text{const}$) зависит от p_0 и \bar{T}_v . Прологарифмируем, а потом продифференцируем (2.5.5), тогда

$$\frac{d\Phi_{абс}}{\Phi_{абс}} = \frac{d\bar{T}_v}{\bar{T}_v} + \frac{1}{p_0} \frac{dp_0}{\ln \frac{p_0}{p}}$$

или с учетом (2.5.5) получаем

$$d\Phi_{абс} = R d\bar{T}_v \ln \frac{p_0}{p} + R \bar{T}_v \frac{dp_0}{p_0}. \quad (2.5.6)$$

Формула (2.5.6) позволяет найти изменение абсолютного геопотенциала данной изобарической поверхности, если известно изменение давления на уровне моря и изменение средней виртуальной температуры слоя. Хорошо видно, что если изменение p_0 приводит к одинаковому изменению $d\Phi_{абс}$ для разных изобарических поверхностей, то изменение $\bar{T}_в$ сказывается по-разному для разных поверхностей.

Обычно вычисляются абсолютные геопотенциалы поверхностей: 1000, 850, 700, 500, 300, 200, 100, 50 гПа, по которым строятся карты АТ с изолиниями равного геопотенциала (изогипсами).

Наряду с $\Phi_{абс}$ используется понятие относительного геопотенциала, который характеризует потенциальную энергию одной изобарической поверхности $p_2 = \text{const}$ над другой $p_1 = \text{const}$.

Для определения относительного геопотенциала проинтегрируем (2.5.4) от Φ_1 до Φ_2 и от p_1 до p_2 , тогда

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \Phi_{p_1}^{p_2} = R \bar{T}_в \ln \frac{p_1}{p_2}. \quad (2.5.7)$$

Относительный геопотенциал зависит только от средней температуры слоя между изобарическими поверхностями $p_1 = \text{const}$ и $p_2 = \text{const}$. Можно сделать и обратный вывод: относительный геопотенциал (для заданных p_1 и p_2) характеризует среднюю температуру слоя и поле изогипс относительного геопотенциала можно рассматривать как поле средней температуры слоя.

Наиболее часто используют карты OT_{1000}^{500} , OT_{000}^{700} , OT_{500}^{300} .

Карта OT_{1000}^{500} определяет распределение средней виртуальной температуры в нижнем пятикилометровом слое атмосферы. Области низкого значения геопотенциала соответствуют областям холода, области высокого значения геопотенциала — областям тепла. Совмещенные карты АТ₇₀₀ и OT_{1000}^{500} позволяют судить о характере и величине адвекции тепла и холода.

В системе СГС единицей геопотенциала является $1 \text{ см}^2/\text{с}^2$, практической единицей до 1950 г. был динамический метр ($10^5 \text{ см}^2/\text{с}^2$ или $10 \text{ м}^2/\text{с}^2$), $\Phi_{\text{дин. м}} = 0,98 z$. Так как геопотенциал, выраженный в динамических метрах, на больших высотах заметно отличается от геометрической высоты, то в дальнейшем была введена новая единица — геопотенциальный метр $\Phi_{\text{гп. м}} = H = \frac{gz}{9,8}$, т. е.

практически геопотенциал в гп. м совпадает по величине с геометрической высотой данной изобарической поверхности. Изогипсы абсолютного и относительного геопотенциала проводятся через 40 гп. м или 4 гпдк. м.

Задача. Каково изменение температуры $\Delta \bar{T}$, если при изменении давления на уровне моря $\Delta p_0 = 6$ гПа изобарическая поверхность 850 гПа поднялась на 25 гп. м, $\bar{T} = 265^\circ$, давление на уровне моря 1000 гПа.

Выражая геопотенциал в геопотенциальных метрах, можно переписать (2.5.6) в виде

$$\Delta H = 67,4 \Delta \bar{T} \lg \frac{p_0}{p} + 29,3 \bar{T} \frac{\Delta p_0}{p_0};$$

подставляя заданные величины, получаем $\Delta \bar{T} = -4,6 \text{ К}$.

Изменение температуры перемещающейся по вертикали массы воздуха

Согласно (2.2.21''), в случае сухого и влажного ненасыщенного воздуха

$$\frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{c_p} \frac{dQ}{dz}, \quad (2.5.8)$$

в таком случае для адиабатического процесса потенциальная температура частицы не изменяется с высотой или является консервативной субстанцией

$$\frac{d\theta}{dz} = 0. \quad (2.5.9)$$

Если в (2.5.8) раскрыть левую часть, исходя из определения θ (2.2.22) и использовать условие квазистатичности ($p = \tilde{p}$, где волной обозначено давление в окружающей среде), а также уравнения статики и состояния, то после простых преобразований получаем

$$\frac{dT}{dz} + \frac{T}{\tilde{T}} \frac{g}{c_p} = \frac{1}{c_p} \frac{dQ}{dz}. \quad (2.5.10)$$

При $\frac{T}{\tilde{T}} \approx 1$ для адиабатического процесса

$$\frac{dT}{dz} = - \frac{g}{c_p} = - \gamma_a \quad (2.5.10')$$

(γ_a — сухоадиабатический градиент).

Из (2.5.10) следует, что в более общем случае

$$\frac{dT}{dz} = - \gamma_a + \frac{1}{c_p} \frac{dQ}{dz}. \quad (2.5.11)$$

В частном случае политропического процесса $dQ = cdT$, поэтому

$$\frac{dT}{dz} = - \gamma_a + \frac{c}{c_p} \frac{dT}{dz}, \quad \text{или} \quad \frac{dT}{dz} = - \frac{\gamma_a}{1 - \frac{c}{c_p}}. \quad (2.5.11')$$

Из (2.5.10) видно, что при $\frac{dQ}{dz} \neq 0$ потенциальная температура уже не является консервативной характеристикой. Роль новой консервативной характеристики в этом случае играет некоторая условно потенциальная температура

$$\frac{d\theta_1}{dz} = \frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dz} - \frac{1}{c_p} \frac{dQ}{dz}. \quad (2.5.12)$$

В случае влажного насыщенного воздуха для влажноадиабатического процесса, когда существует только приток тепла, связанный с фазовыми переходами (испарением или конденсацией)

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{c_p} \varepsilon_{\text{тф}},$$

так как $\varepsilon_{\text{тф}} = -L\varepsilon_{q\text{ф}}$, где $\varepsilon_{q\text{ф}} = \frac{dq}{dt}$ согласно (2.2.23), или $\frac{d\theta}{dz} = -\frac{L}{c_p} \frac{dq}{dz}$, откуда

$$\frac{d}{dz} \left(\theta + \frac{L}{c_p} q \right) = 0, \quad (2.5.13)$$

т. е. в данном случае консервативной характеристикой является эквипотенциальная температура

$$\theta_s = \theta + \frac{L}{c_p} m, \quad (2.5.14)$$

где m — отношение смеси (близкое к q).

Задача. Масса воздуха, имеющая при $z=0$ температуру 295° , поднимается вверх и получает за счет лучистого притока тепла $0,36$ кал/г на каждые 100 метров. Какую температуру она будет иметь на $z = 500$ м? Согласно (2.5.10) и (2.5.11)

$$\frac{dT}{dz} = -\gamma_a + \frac{1}{c_p} \frac{dQ}{dz} = (-0,98 + 1,5) \cdot 10^{-2} = 0,52 \cdot 10^{-2} \text{ К/м},$$

$$T_{500} = T_0 + \frac{dT}{dz} z = 297,6 \text{ К}.$$

Условия вертикальной статической устойчивости. Уровень конвекции

Некоторые метеорологические процессы в значительной мере зависят от вертикальной скорости потока воздуха (развитие облаков, образование осадков и т. д.). Вертикальные скорости могут быть связаны как с динамическими причинами — дивергенцией воздушного потока (об этих вертикальных скоростях будет

сказано ниже), так и с конвективным фактором — различием плотностей воздушной массы и окружающей среды, приводящим к появлению конвективных ускорений. Состояние атмосферы, при котором смещающаяся по вертикали воздушная масса получает положительное ускорение (т. е. ускорение совпадает с направлением скорости) называется неустойчивым, когда воздушная масса получает отрицательное ускорение — устойчивым. Наконец, случай, когда движение воздушной массы происходит без ускорений, соответствует безразличному состоянию.

Для определения возникающих ускорений можно использовать третье уравнение движения (2.2.12) с учетом (2.3.3) и (2.3.8), оставив только главные члены и считая $\rho = \tilde{\rho}$,

$$\frac{dw}{dt} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z}; \quad (2.5.15)$$

используя уравнение статики (2.5.1), получаем

$$\frac{dw}{dt} = g \frac{\tilde{\rho} - \rho}{\rho}. \quad (2.5.16)$$

Если выразить плотности на основании уравнения состояния влажного воздуха (2.2.8) и использовать $\rho = \tilde{\rho}$, то

$$\frac{dw}{dt} = g \frac{T_b - \tilde{T}_b}{\tilde{T}_b}, \quad (2.5.17)$$

т. е. вертикальное ускорение массы воздуха связано с разностью виртуальных температур массы T_b и окружающей среды \tilde{T}_b . Выразим указанные температуры на уровне z через температуры на начальном уровне и градиенты

$$\begin{aligned} T_b &= T_b(z_1) + \frac{dT_b}{dz} \delta z + \dots, \\ \tilde{T}_b &= \tilde{T}_b(z_1) + \frac{\partial \tilde{T}_b}{\partial z} \delta z + \dots, \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

где $\delta z = z - z_1$.

Подставляя (2.5.18) в (2.5.17), получаем

$$\frac{dw}{dt} = \frac{g}{\tilde{T}_b} \left[T_b(z_1) - \tilde{T}_b(z_1) - \left(\frac{\partial \tilde{T}_b}{\partial z} - \frac{dT_b}{dz} \right) \delta z \right], \quad (2.5.19)$$

т. е. вертикальное ускорение связано с различием температур частицы воздуха и среды на начальном уровне и различием градиен-

тов температуры. Соотношение (2.5.19) можно использовать для определения уровня, на котором вертикальное ускорение частицы обратится в нуль (этот уровень иногда трактуется как уровень конвекции)

$$\delta z_k = \frac{T_b(z_1) - \tilde{T}_b(z_1)}{\frac{\partial \tilde{T}_b}{\partial z} - \frac{dT_b}{dz}} \quad (2.5.20)$$

(на этом уровне температура частицы станет равной температуре среды).

Выражение (2.5.19) можно использовать для определения условий вертикальной статической устойчивости. Обычно предполагается, что на исходном уровне $T_b(z_1) = \tilde{T}_b(z_1)$, тогда выражая $\delta z = \omega \delta t$, получаем

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{\tilde{T}_b} \left(\frac{\partial \tilde{T}_b}{\partial z} - \frac{dT_b}{dz} \right) \omega \delta t.$$

В таком случае, согласно введённому ранее определению устойчивости, видно, что ее характер определяется знаком скобки (на-

пример, $\left(\frac{\partial \tilde{T}_b}{\partial z} - \frac{dT_b}{dz} \right) < 0$ — неустойчивое состояние, и т. д.)

Над водной поверхностью в адиабатическом приближении $\left(\frac{dT_b}{dz} = -\gamma_a \right)$ с учетом определения T_b целесообразно использовать соотношения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \gamma_a + 0,605 T \frac{\partial q}{\partial z} \right) < 0 & \text{ — неустойчивое состояние;} \\ \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \gamma_a + 0,605 T \frac{\partial q}{\partial z} \right) > 0 & \text{ — устойчивое состояние;} \\ \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \gamma_a + 0,605 T \frac{\partial q}{\partial z} \right) = 0 & \text{ — безразличное состояние;} \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

которые для сухого воздуха ($q = 0$) или при отсутствии вертикального градиента удельной влажности переходят в обычно рассматриваемые условия вертикальной устойчивости (например, $\left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \gamma_a \right) < 0$ или $\frac{\partial \theta}{\partial z} < 0$ — неустойчивое состояние).

Из (2.5.21) видно, что при характерном над водной поверхностью изменении q с высотой ($dq/dz < 0$) усиливается статическая

неустойчивость и ослабляется устойчивость (ниже будет дана количественная оценка влияния этого фактора на развитие турбулентности).

Задача. Перегретая на 10° частица воздуха поднимается в атмосфере на 1500 м, получая тепло за счет поглощения коротковолновой радиации по политропическому закону, с $c = -0,04$ кал/(г·К). Определить вертикальный температурный градиент в атмосфере. Согласно (2.5.11')

$$\frac{dT}{dz} = - \frac{\gamma_a}{1 - \frac{c}{c_p}} = - \frac{0,98 \cdot 10^{-2}}{1 + 0,167} = - 0,84 \cdot 10^{-2} \text{ К/м.}$$

Используя (2.5.22), получаем

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} = \frac{dT}{dz} + \frac{2 \left[\Gamma(z_1) - \tilde{T}(z_1) \right]}{\delta z_k \Big|_{w=0}} = 0,49 \text{ К/100 м.}$$

2.6. Осреднение уравнений

Так как почти все движения в атмосфере имеют турбулентный характер, и практически невозможно описать движение каждого турбулентного моля, то количественное описание характеристик турбулентного потока возможно только при переходе к их статистическим средним значениям. В 2.1 говорилось о том, что за счет прохождения через данную точку пространства вихрей из различных частей потока в ней наблюдается очень сложная картина изменения во времени содержания субстанции s . В качестве примера на рис. 7 показана зависимость скорости ветра от времени у поверхности земли.

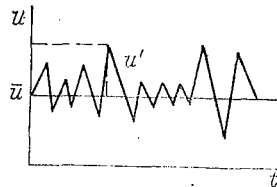


Рис. 7. Изменение во времени горизонтальной компоненты скорости ветра.

Очевидно, что любую характеристику можно представить как

$$s = \bar{s} + s', \quad (2.6.1)$$

где s — мгновенное значение; \bar{s} — среднее значение; s' — отклонение от средней (пульсация).

Строго говоря, под средним значением нужно понимать предел, к которому стремится пульсирующая величина при неограниченно возрастающем числе наблюдений, если внешние условия не изменяются (осреднение по ансамблю). Так как в метеорологии практически невозможно получить множество наблюдений при неизменных внешних условиях, то обычно используется эргодическая гипотеза, согласно которой для стационарного процесса (средние величины не зависят от времени) возможна замена средних по множеству средними по времени или пространству:

$$\bar{s}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t + \tau) d\tau = \text{const.} \quad (2.6.2)$$

Реальные метеорологические поля, конечно, не являются эргодическими, и указанная замена может рассматриваться только как определенное приближение. При этом вместо $T \rightarrow \infty$ приходится выбирать конечный интервал осреднения T , который должен быть, с одной стороны, значительно больше характерного периода турбулентных пульсаций T_2 (только в этом случае можно ожидать, что $\bar{\epsilon}$ не будет зависеть от T), а, с другой стороны, значительно меньше характерного времени изменения среднего поля T_1 (только в этом случае процесс можно считать квазистационарным). Таким образом, выбор оптимального периода осреднения (интервала сглаживания) с учетом реального широкого диапазона и изменения T_1 и T_2 представляет очень трудную задачу. Большинство процессов, связанных с турбулентностью, однако, развиваются в нижних слоях атмосферы, где основная доля энергии пульсационного движения сосредоточена в сравнительно небольших участках спектра (распределение амплитуд пульсаций в зависимости от частоты). На рис. 8 показан спектр скорости ветра вблизи поверхности земли, полученный впервые Ван-дер-Ховеном в интервале частот от 0,0007 до 900 цикл/ч. Так как по оси ординат отложена величина ωE_ω (амплитуда пульсаций), а по оси абсцисс $\ln \omega$, (ω — частота), то площадь, ограниченная кривой, дает истинное значение средней в любом интервале частот амплитуды пульсаций ($\int E_\omega d\omega = \int \omega E_\omega d \ln \omega$). В таком случае видно, что наибольшая энергия пульсаций сосредоточена в двух четко разделенных областях: в области

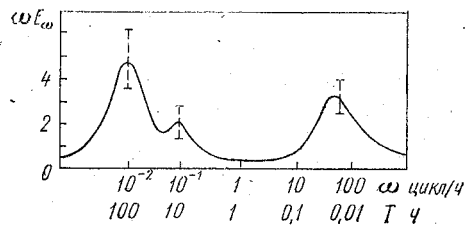


Рис. 8. Спектр горизонтальной скорости ветра в приземном слое атмосферы.

крупномасштабных пульсаций (так называемой синоптической области) с центром около частоты $\omega_1 = 0,01$ цикл/ч (период около 4 суток) и в области мелкомасштабных пульсаций, с центром около частоты $\omega_2 = 60$ цикл/ч (период около 1 мин). Следует иметь в виду, что амплитуда синоптического максимума заметно изменяется от сезона к сезону, а амплитуда микрометеорологического максимума — в течение суток и ото дня ко дню. Если низкочастотная область соответствует изменениям скорости ветра, связанным с прохождением циклонов и антициклонов, то высокочастотная часть спектра соответствует турбулентным пульсациям, которые нужно сгладить при осреднении. (Промежуточный максимум для периода около 12 часов можно считать незначимым). Наличие широкого минимума с центром, приходящимся на периоды 7—60 мин, указывает на возможность выбора такого периода осреднения, для которого эргодическая гипотеза выполнялась бы достаточно надежно при описании мелкомасштабной турбулентности. Если, как следует из приведенного спектра, отклонение скорости ветра с климатической нормы приближенно аппроксимировать суммой двух гармоник:

$$u(t) = A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t,$$

тогда

$$\bar{u}(t) = A_1 \frac{2 \sin \omega_1 t \sin \omega_1 \frac{T}{2}}{\omega_1 T} + A_2 \frac{2 \sin \omega_2 t \sin \omega_2 \frac{T}{2}}{\omega_2 T}$$

и выбрать T так, чтобы

$$\omega_2 T = \frac{1}{\omega_1 T} = \epsilon \gg 1,$$

то, считая, что A_1 и A_2 имеют одинаковый порядок и $\sin \omega_1 \frac{T}{2} \approx \omega_1 \frac{T}{2}$, получаем

$$\bar{u}(t) = A_1 \sin \omega_1 t,$$

т. е. в этом случае осредненное значение скорости не зависит от периода осреднения T . Нетрудно оценить самый оптимальный период осреднения:

$$T = \frac{1}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \approx 1,3 \text{ ч.}$$

Эта величина достаточно хорошо согласуется с определенными эмпирическими периодами сглаживания около 1 часа.

Спектр колебаний температуры качественно очень похож на рассмотренный выше спектр пульсации скорости ветра (имеет 2 максимума на примерно тех же частотах или периодах — 4 суток и 1 мин; широкий минимум), но обладает дополнительным резко выраженным минимумом, соответствующим суточному периоду.

Таким образом, при выборе конечного, но оптимального периода осреднения можно для определения средних величин использовать выражение

$$\bar{s}(t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t + \tau) d\tau, \quad (2.6.3)$$

при этом нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений (часто называемых аксиомами осреднения):

$$\begin{aligned} \overline{s_1 + s_2} &= \bar{s}_1 + \bar{s}_2; \quad \overline{\bar{s}} = \bar{s}, \quad \overline{s'} = 0, \quad \overline{s_1 \cdot s_2} = 0, \\ \frac{\partial \bar{s}}{\partial x_i} &= \overline{\frac{\partial s}{\partial x_i}}, \quad \overline{s_1 \cdot s_2} = \bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 + \overline{s'_1 \cdot s'_2} \end{aligned} \quad (2.6.4)$$

(если s_1 и s_2 независимы, то $\overline{s'_1 \cdot s'_2} = 0$).

Рассмотрим теперь процедуру осреднения уравнений динамики атмосферы на примере первого уравнения движения (в проекции на ось x). В соответствии с выражениями для действующих сил (2.3.7; 2.3.9; 2.3.10) запишем (2.2.12) в виде

$$\frac{du}{dt} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2(\omega_z v - \omega_y w) + \nu \Delta u \quad (2.6.5)$$

с учетом уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости (2.2.15) добавим в левую часть (2.6.5) выражение

$$u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right).$$

В таком случае уравнение движения можно записать

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u u) + \frac{\partial}{\partial y} (u v) + \frac{\partial}{\partial z} (u w) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2(\omega_z v - \omega_y w) + \nu \Delta u.$$

Если использовать (2.6.1) и применить процедуру осреднения с учетом рассмотренных выше соотношений, то, считая $\rho' \ll \bar{\rho}$ и пренебрегая возможной изменчивостью ω_z , ω_y и ν , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{u} \bar{u} + \overline{u' u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{u} \bar{v} + \overline{u' v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{u} \bar{w} + \overline{u' w'}) = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + 2(\omega_z \bar{v} - \omega_y \bar{w}) + \nu \Delta \bar{u}. \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

С учетом того, что уравнение (2.2.15) выполняется для средних величин:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \quad (2.6.7)$$

уравнение (2.6.6) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + 2(\omega_z \bar{v} - \omega_y \bar{w}) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} (-\bar{\rho} \overline{u' u'}) \right] + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial y} (-\bar{\rho} \overline{u' v'}) \right] + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial z} (-\bar{\rho} \overline{u' w'}) \right] \right] \right]. \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

Таким образом, за счет нелинейности уравнения при осреднении появились дополнительные члены, физический смысл которых лучше понятен, если их объединить с членами, описывающими вязкое (молекулярное) трение. В таком случае с учетом (2.3.11)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + 2(\omega_z \bar{v} - \omega_y \bar{w}) + \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} [\tau_{xx}^M - (\bar{\rho} \overline{u' u'})] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} [\tau_{xy}^M - (\bar{\rho} \overline{u' v'})] + \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} [\tau_{xz}^M - (\bar{\rho} \overline{u' w'})]. \end{aligned} \quad (2.6.9)$$

Теперь видно, что новые члены играют роль дополнительных напряжений, описывающих суммарный эффект беспорядочных от-

клонений компонент скорости от средних величин; они называются напряжениями Рейнольдса.

Применяя такую же процедуру осреднения ко второму и третьему уравнению движения, можно записать их в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + 2(\omega_x \bar{w} - \omega_z \bar{u}) + \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} [\tau_{yx}^M - (\bar{\rho} \overline{u'v'})] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} [\tau_{yy}^M - (\bar{\rho} \overline{v'v'})] + \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} [\tau_{yz}^M - (\bar{\rho} \overline{v'w'})]; \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} [\tau_{zx}^M - \\ & - (\bar{\rho} \overline{u'w'})] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} [\tau_{zy}^M - (\bar{\rho} \overline{v'w'})] + \\ & + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} [\tau_{zz}^M - (\bar{\rho} \overline{w'w'})]. \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

Ясно, что турбулентные напряжения, так же как и вязкие, образуют тензор второго ранга, для которого только шесть компонент являются независимыми. Обозначая турбулентные напряжения аналогично молекулярным и пренебрегая последними, можно записать уравнения, описывающие среднее движение в виде (опуская знак осреднения):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + 2(\omega_z \bar{v} - \omega_y \bar{w}) + \\ & + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + 2(\omega_x \bar{w} - \omega_z \bar{u}) + \\ & + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= -\rho \overline{u' u'}; \quad \tau_{yy} = -\rho \overline{v' v'}; \quad \tau_{zz} = -\rho \overline{w' w'}; \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = -\rho \overline{u' v'}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = -\rho \overline{u' w'}; \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = -\rho \overline{v' w'}.\end{aligned}\quad (2.6.13)$$

Напомним, что последние слагаемые в правой части (2.6.12) представляют компоненты силы турбулентного трения.

Осредненное уравнение состояния с учетом $\rho' \ll \bar{\rho}$, $T' \ll \bar{T}$ не изменит своего первоначального вида

$$\begin{aligned}\rho &= R' \rho T \text{ — для сухого воздуха,} \\ \rho &= R' \rho T_v \text{ — для влажного воздуха.}\end{aligned}\quad (2.6.14)$$

Нетрудно убедиться, что, осредняя уравнения притока тепла и водяного пара (2.2.21'') и (2.2.23) и пренебрегая молекулярными притоками, можно записать эти уравнения в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{1}{c_p} (\epsilon_{Tn} + \epsilon_{T\Phi}) + \\ &+ \frac{1}{\rho c_p} \left(\frac{\partial Q_{Tx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{Ty}}{\partial y} + \frac{\partial Q_{Tz}}{\partial z} \right); \end{aligned}\quad (2.6.15)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} &= \epsilon_{q\Phi} + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial Q_{qx}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{qy}}{\partial y} + \frac{\partial Q_{qz}}{\partial z} \right), \end{aligned}\quad (2.6.16)$$

где

$$\begin{aligned}Q_{Tx} &= -\rho c_p \overline{u' \theta'}; \quad Q_{Ty} = -\rho c_p \overline{v' \theta'}; \quad Q_{Tz} = -\rho c_p \overline{w' \theta'}; \\ Q_{qx} &= -\rho \overline{u' q'}; \quad Q_{qy} = -\rho \overline{v' q'}; \quad Q_{qz} = -\rho \overline{w' q'}.\end{aligned}\quad (2.6.17)$$

Полученная система осредненных уравнений (2.6.7, 2.6.12, 2.6.13—2.6.17) используется для описания метеорологических процессов, однако, пока не определены входящие в нее компоненты силы турбулентного трения, а также турбулентные притоки тепла и влаги, нельзя говорить о ее замкнутости, т. е. способности описать интересующие нас метеорологические характеристики: u , v , w , ρ , p , T , q . В последние годы довольно широкое распространение получили подходы, основанные на замыкании указанной системы уравнениями для моментов второго и более высокого порядка. Можно, например, получить уравнения, содержащие в левой части в качестве новой переменной величины вторые моменты ($\overline{u' w'}$, $\overline{w' \theta'}$ и т. д.), но тогда они будут выражаться через входящие в правую часть третьи моменты ($\overline{u' u' w'}$ и т. д.), для определения

которых необходимо записывать дополнительные уравнения или использовать дополнительные гипотезы. Из-за сложности указанной процедуры и ее условной замкнутости, ограничимся в дальнейшем определением неизвестных вторых моментов (турбулентных потоков субстанции) на основе полуэмпирической теории турбулентности.

2.7. Описание атмосферной турбулентности

Выражения для турбулентных потоков и притоков субстанции

Так как на формирование полей метеорологических элементов основное влияние оказывают вертикальные турбулентные потоки, то получим вначале выражение для вертикального турбулентного потока любой субстанции s , понимая под s удельное содержание субстанции, $s = \{c_p, \theta, q, u_i\}$, где $u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 = w$,

$$Q_{st} = \bar{\rho} \overline{s' w'}. \quad (2.7.1)$$

Согласно процедуре осреднения в уравнения входят значения, относящиеся к окружающей среде, т. е. $s = \tilde{s}$, в таком случае из (2.6.1)

$$\tilde{s}'(z) = \tilde{s}(z) - \bar{s}(z).$$

Будем считать (см. 2.1), что вихрь (турбулентный моль) после своего возникновения проходит расстояние l до полного смешения с окружающей средой. В таком случае мгновенное значение свойства s на уровне z должно быть равно содержанию свойства в вихре, пришедшем на этот уровень с уровня $(z-l)$, где $l > 0$ для вихрей, движущихся вверх и наоборот), а $\bar{s}(z)$ — среднее содержание свойства на уровне z . Таким образом, опуская обозначение среды,

$$s'(z) = s(z) - \bar{s}(z). \quad (2.7.2)$$

Если s — консервативная субстанция, то $s(z) = s(z-l)$, в более общем случае нужно учесть возможность изменения содержания свойства в вихре на расстоянии l , т. е.

$$s(z) = s(z-l) + \frac{ds}{dz} l + \frac{1}{2} \frac{d^2 s}{dz^2} l^2 + \dots \quad (2.7.3)$$

Тогда как $\bar{s}(z)$ также можно выразить через $\bar{s}(z-l)$,

$$\bar{s}(z) = \bar{s}(z-l) + \frac{\partial \bar{s}}{\partial z} l + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial z^2} l^2 + \dots \quad (2.7.4)$$

С учетом (2.7.3, 2.7.4) можно записать (2.7.2) в виде

$$s'(z) = s(z-l) - \bar{s}(z-l) + \left(\frac{ds}{dz} - \frac{\partial \bar{s}}{\partial z} \right) l + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 s}{dz^2} - \frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial z^2} \right) l^2 + \dots;$$

подставляя это выражение в (2.7.1), получаем

$$Q_{st} = \bar{\rho} \overline{[s(z-l) - \bar{s}(z-l)] w'} - \bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial z} - \frac{ds}{dz} \right) l w' - \\ - \bar{\rho} \frac{1}{2} \overline{\left(\frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial z^2} - \frac{d^2 s}{dz^2} \right) l^2 w'}. \quad (2.7.5)$$

При выводе этого соотношения считалось, что l одинаково для разных субстанций. Такое допущение представляется вполне приемлемым, если индивидуальность вихря определяется его вихревой энергией и переносится консервативная субстанция. Только в этом случае можно считать, что вихрь, образовавшийся на уровне $(z-l)$, придя на уровень z , исчезнет, т. е. превратится просто в элемент объема среды, а все его свойства мгновенно становятся свойствами среды. При этом $\left(\frac{ds}{dz} = \frac{d^2 s}{dz^2} = 0 \right)$ можно записать (2.7.5) в виде

$$Q_{st} = \bar{\rho} \overline{[s(z-l) - \bar{s}(z-l)] w'} - \bar{\rho} \frac{\partial \bar{s}}{\partial z} \times \\ \times \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{s} / \partial z^2}{\partial \bar{s} / \partial z} l \right) l w', \quad (2.7.6)$$

сохраняя член с $\partial^2 \bar{s} / \partial z^2$ для случая заметной кривизны профиля (у поверхности земли или в области инверсии) или для больших l .

В более общем случае неконсервативной субстанции есть основание считать, что l будет различным для разных s (т. е. $l = l_s$), так как вихри, которые смешались по свойству s с окружающей средой на уровне z могут зарождаться на разных уровнях $(z-l_s)$, т. е. в зависимости от их взаимодействия с окружающей средой (а это причина неконсервативности субстанции) они должны проходить различные расстояния от момента возникновения до момента смешения их по свойству s . Это расстояние l_s должно определяться притоками субстанции к вихрю. В этом случае (2.7.5) должно иметь вид

$$Q_{st} = \bar{\rho} \overline{[s(z-l_s) - \bar{s}(z-l_s)] w'} - \bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial z} - \frac{ds}{dz} \right) l_s w' - \\ - \frac{1}{2} \bar{\rho} \overline{\left(\frac{\partial^2 \bar{s}}{\partial z^2} - \frac{d^2 s}{dz^2} \right) l_s^2 w'}. \quad (2.7.7)$$

Для обычно используемых приближений: свойство вихря на уровне зарождения совпадает со свойством среды * $s(z-l_s) = \bar{s}(z-l_s)$, малы l_s или вторые производные, соотношение (2.7.7) запишется как

$$Q_{st} = -\bar{\rho} \overline{\left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial z} - \frac{ds}{dz} \right) l_s w'}. \quad (2.7.8)$$

Если считать, что изменение содержания субстанции в вихре (ds/dz) вызывается притоками (или другими причинами), не связанными с характеристиками турбулентности l_s и w' , то

$$Q_{st} = -\bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial z} - \frac{ds}{dz} \right) \overline{l_s w'}. \quad (2.7.9)$$

По аналогии с молекулярным перемешиванием, где коэффициент вязкости $\nu \sim u_m l_m$ (u_m — средняя скорость молекул, l_m — средняя длина свободного пробега молекулы), можно считать, что $\overline{l_s w'}$ является коэффициентом турбулентности для потока субстанции s :

$$\overline{l_s w'} = k_{sz}. \quad (2.7.10)$$

С учетом (2.7.10) из (2.7.9) можно получить выражения для турбулентных потоков субстанции:

$$Q_{Tt} = P = -\bar{\rho} c_p \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \frac{d\theta}{dz} \right) k_{Tz}; \quad (2.7.11)$$

$$Q_{qt} = E = -\bar{\rho} \cdot \left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial z} - \frac{dq}{dz} \right) k_{qz}; \quad (2.7.12)$$

$$Q_{u_i t} = \tau_i = -\bar{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial z} - \frac{du_i}{dz} \right) k_{mz}. \quad (2.7.13)$$

Для влажного ненасыщенного воздуха $dq/dz = 0$ (массовая доля водяного пара является консервативной субстанцией), в насыщенном влажном воздухе dq/dz должно описывать изменение q частицы на единицу высоты за счет фазовых переходов ($dq > 0$ при испарении). Количество движения (или скорость) лишь условно можно рассматривать как консервативную характеристику, тем не менее такое допущение обычно делается, т. е. считается, что $du/dz = 0$. Наконец, выражение для турбулентного потока тепла обычно записывается в адиабатическом приближении ($d\theta/dz = 0$)

$$Q_{Tt} = -\bar{\rho} c_p k_{Tz} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \gamma_a \right) \quad (2.7.11')$$

* Это условие выполняется в случае чисто динамической (сдвиговой) турбулентности.

однако, фактически, с учетом (2.5.8)

$$Q_{Tz} = -\bar{\rho} c_p k_{Tz} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \gamma_p \right), \quad (2.7.14)$$

где

$$\gamma_p = \gamma_a + \frac{1}{c_p} \frac{d\bar{Q}}{dz}, \quad (2.7.15)$$

где γ_p — так называемый равновесный градиент температуры. Итак, в общем случае есть основания считать, что $\gamma_p \neq \gamma_a$. В целом, представляется, что введение понятия пути перемешивания отдельного вихря при описании турбулентных потоков способствует только кажущемуся улучшению понимания физического смысла, так как требует в дальнейшем ряда упрощающих гипотез (о них речь шла выше), которые лишают этот подход каких-либо преимуществ по сравнению с использованием чисто формальной аналогии с молекулярным перемешиванием

$$Q_{sT x_i} = -\bar{\rho} \cdot k_{s x_i} \left(\frac{\partial \bar{s}}{\partial x_i} + \gamma_{s x_i} \right), \quad (2.7.16)$$

где $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $\gamma_{s x_i}$ — равновесный градиент, при котором поток равен нулю.

Так как в настоящее время величины k_{sx} , k_{sy} определяются с точностью до порядка, то это дает основание пока считать, что $k_{sx} = k_{sy} = k_l$ — коэффициент горизонтальной турбулентности.

На основе общего выражения (2.7.16) можно определить притоки субстанции как дивергенцию потоков, отнесенную к единице массы:

$$\varepsilon_{Tz} = c_p \frac{\partial}{\partial z} k_{Tz} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \gamma_p \right), \quad (2.7.17)$$

$$\varepsilon_{Tsx} = c_p \frac{\partial}{\partial x} k_l \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \gamma'_p \right),$$

$$\varepsilon_{Tsy} = c_p \frac{\partial}{\partial y} k_l \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \gamma'_p \right), \quad (2.7.18)$$

$$\varepsilon_{qz} = \frac{\partial}{\partial z} k_{qz} \left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial z} + \gamma_q \right), \quad (2.7.19)$$

$$\varepsilon_{qsx} = \frac{\partial}{\partial x} k_l \left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial x} + \gamma'_q \right),$$

$$\varepsilon_{qsy} = \frac{\partial}{\partial y} k_l \left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial y} + \gamma'_q \right), \quad (2.7.20)$$

где γ_r' и γ_q' — равновесные градиенты температуры и удельной влажности для горизонтальных турбулентных потоков тепла и влаги (обычно они считаются равными нулю); γ_q — равновесный градиент удельной влажности для вертикального турбулентного потока водяного пара.

Согласно (2.7.16) входящие в осредненные уравнения движения турбулентные притоки количества движения (образующие тензор второго ранга) могут по аналогии с молекулярным перемешиванием (2.3.11) рассматриваться как компоненты силы турбулентного трения и с учетом сделанных выше допущений записываться в форме:

$$\begin{aligned} F_{\text{тр.}x} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial z} k_{mz} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} k_l \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} k_l \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right\}, \\ F_{\text{тр.}y} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial z} k_{mz} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} k_l \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} k_l \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right\}, \\ F_{\text{тр.}z} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial z} k_{mz} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} k_l \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} k_l \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right\}. \end{aligned} \quad (2.7.21)$$

Таким образом, при осреднении полученной ранее квазизамкнутой системы уравнений появились новые неизвестные величины: k_l , k_{sz} . Если считать k_l заданной величиной, а коэффициенты k_{sz} выразить в виде

$$k_{sz} = \alpha_s \cdot k_{mz} = \alpha_s \cdot k, \quad (2.7.22)$$

где $\alpha_s = \frac{k_{sz}}{k_{mz}} = \frac{k_s}{k_m} = \frac{k_s}{k}$ (например, в частном случае турбулентного потока тепла $\alpha_T = \frac{k_T}{k}$ называется обратным турбулент-

ным числом Прандтля) принять известными постоянными или функциями других неизвестных величин, то по сути дела, необходимо для замыкания системы получить дополнительное соотношение (уравнение) для определения k .

Полученное ранее выражение для k (2.7.11) не является конструктивным, так как содержит характеристики, которые нельзя определить из осредненных уравнений ($l=l'$ и w'). Целесообразно попытаться выразить k через осредненные величины. Исходя из аналогии с молекулярным перемешиванием, можно предположить, что k должно зависеть от $l = (\bar{l}^2)^{\frac{1}{2}}$. Для определения аналога u_m используем понятие кинетической энергии потока. Отнесенная к единице массы кинетическая энергия потока, имеющего скорость $\vec{c} = \vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w$,

$$E_k = \frac{1}{2} \vec{c}^2 = \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2);$$

в таком случае средняя кинетическая энергия потока жидкости с учетом принятой ранее процедуры осреднения

$$\begin{aligned}\bar{E}_k &= \frac{1}{2} (\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \overline{u_i^2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\overline{u_i^2} + \overline{u_i'^2}) = \\ &= E_{k \text{ ср}} + b,\end{aligned}\quad (2.7.23)$$

где $E_{k \text{ ср}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \overline{u_i^2}$ — кинетическая энергия среднего потока;

$b = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \overline{u_i'^2}$ — кинетическая энергия турбулентности.

Таким образом, аналогом u_m можно считать $b^{1/2}$ и выражение для k должно иметь вид:

$$k = c, l \sqrt{b}. \quad (2.7.24)$$

Соотношение (2.7.24) обычно получают на основании анализа размерности, предполагая, что $k = f(l, b)$.

Добавление соотношения (2.7.24) не замыкает систему уравнений, так как теперь необходимо определить величины l и b , выразив их через другие неизвестные величины.

Уравнение баланса кинетической энергии турбулентности. Выражение для пути перемешивания

Рассмотрим факторы, приводящие к изменению кинетической энергии турбулентности. Согласно общему принципу это изменение должно определяться притоками кинетической энергии турбулентности. Ранее уже говорилось, что одной из причин возникновения турбулентности является потеря гидродинамической устойчивости основного (среднего) потока жидкости. Обозначим через E_1 — приток кинетической энергии турбулентности от среднего потока жидкости (за счет его гидродинамической неустойчивости). Вихри, возникающие при этом, перемещаются в потоке жидкости, и, если плотность окружающей среды отличается от плотности вихря, то на него начинает действовать сила Архимеда. Обусловленное ею ускорение либо совпадает с направлением движения вихря и увеличивает его кинетическую энергию, либо направлено в сторону противоположную движению вихря и уменьшает его энергию. Обозначим через E_2 приток энергии турбулентности за счет действия силы Архимеда. Благодаря соприкосновению и поверхностному трению между вихрями часть их энергии может переходить в тепловую. Такой переход называется диссипацией энергии турбулентности — обозначим ее через E_3 . Наконец, через E_4 обозначим приток (отток) энергии турбулентности за счет обмена вихревой энергией между соседними слоями (диффузия энергии турбулентности).

С учетом введенных обозначений можно записать в общем виде уравнение баланса энергии турбулентности

$$\frac{db}{dt} = E_1 + E_2 + E_3 + E_4. \quad (2.7.25)$$

Уравнение (2.7.25) утверждает, что изменение кинетической энергии турбулентности связано с притоком энергии турбулентности от среднего потока, притоком за счет действия силы Архимеда, диссипацией и диффузией. Так как это уравнение предназначается для определения $k_{mz} = k_z = k$, то будем учитывать только влияние вертикальных градиентов субстанции.

Для определения E_1 рассмотрим взаимодействие фиксированного в пространстве элементарного объема $dx dy dz$ с окружающей средой (см. рис. 6). Обозначим через $\vec{c}(z)$ и $\vec{c}(z + dz)$ — вектора скорости на уровне z и $z + dz$, а через $\vec{\tau}(z)$ и $\vec{\tau}(z + dz)$ — касательные напряжения, действующие на нижнюю и верхние грани объема. В таком случае работу, совершаемую касательными напряжениями на площадках $dx dy$ за единицу времени, можно выразить как

$$W = [\vec{c}(z + dz) \vec{\tau}(z + dz) - \vec{c}(z) \vec{\tau}(z)] dx dy, \quad (2.7.26)$$

где $\vec{c} = iu + jv$; $\vec{\tau} = i\tau_x + j\tau_y$.

Если $\vec{\tau}(z + dz)$ и $\vec{c}(z + dz)$ разложить в ряд:

$$\vec{\tau}(z + dz) = \vec{\tau}(z) + \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial z} dz + \dots,$$

$$\vec{c}(z + dz) = \vec{c}(z) + \frac{\partial \vec{c}}{\partial z} dz + \dots,$$

то, подставляя их в (2.7.26), пренебрегая членами второго порядка малости и относя работу к единице массы, получим

$$W_1 = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial (\tau_x u)}{\partial z} + \frac{\partial (\tau_y v)}{\partial z} \right]. \quad (2.7.27)$$

Работа, совершаемая турбулентными напряжениями, частично идет на изменение кинетической энергии среднего движения, а частично переходит в кинетическую энергию турбулентных пульсаций.

Определим интересующую нас энергию турбулентности, возникающую за счет кинетической энергии среднего потока, как разность между работой, совершаемой турбулентными напряжениями и той ее частью, которая идет на изменение кинетической энергии среднего движения. Последнюю выразим из уравнения баланса кинетической энергии среднего движения, которое полу-

чается, если осредненные уравнения движения (2.6.12) (с упрощенным выражением для силы Кориолиса и учетом только вертикального притока количества движения) умножить, первое на u , второе на v , и сложить:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) = - \frac{1}{\rho} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \left(u \frac{\partial \tau_x}{\partial z} + v \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \right). \quad (2.7.28)$$

В этом уравнении слева стоит изменение кинетической энергии единицы массы воздуха; первое слагаемое в правой части может быть записано как $\frac{1}{\rho} (\vec{c} \cdot \vec{F}_p)$, т. е. представляет работу, совершаемую горизонтальным градиентом давления при движении единичной массы воздуха; второе слагаемое в правой части характеризует изменение кинетической энергии среднего движения под влиянием силы турбулентного трения.

Таким образом, кинетическую энергию турбулентности, возникающую за счет основного потока, можно определить как разность между (2.7.27) и вторым членом в правой части (2.7.28)

$$E_1 = \frac{1}{\rho} \left[\tau_x \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_y \frac{\partial v}{\partial z} \right] \quad (2.7.29)$$

или, так как $\tau_x = \rho k \frac{\partial u}{\partial z}$, $\tau_y = \rho k \frac{\partial v}{\partial z}$, то

$$E_1 = k \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right]. \quad (2.7.30)$$

В области мелкомасштабной турбулентности (максимальная величина $l = 0(10^2 \text{ м})$) можно считать, что коэффициент турбулентности всегда положителен и E_1 является всегда приходной частью уравнения баланса энергии турбулентности. При рассмотрении (крупномасштабной турбулентности (величина $l = 0(10^5)$) оказывается, что k может быть меньше нуля (явление отрицательной вязкости) и часть энергии крупномасштабной турбулентности может идти на развитие крупномасштабных движений (в океанологии это проявляется в том, что, например, вихри, образующиеся в Гольфстриме, отдают часть своей энергии среднему потоку; в метеорологии в качестве крупномасштабной турбулентности можно рассматривать циклоны и антициклоны, которые также передают часть своей энергии крупномасштабной общей циркуляции атмосферы). В дальнейшем нас будет интересовать только мелкомасштабная турбулентность, и можно считать, что $E_1 > 0$.

Чтобы получить выражение для E_2 , рассмотрим на уровне z некоторую площадку σ , через которую проходят вихри с уровнем

$z-l$ и $z+l$ (рис. 9). Будем считать, что средние температуры на этих уровнях соответственно равны: $\tilde{T}(z)$, $\tilde{T}(z-l)$, $\tilde{T}(z+l)$. Так как температура (а значит и плотность) вихрей, проходящих через уровень z , будут отличаться от температуры и плотности воздуха на уровне, то вихри должны двигаться с ускорением, которое можно определить из третьего уравнения движения (если пренебречь малыми членами). По сути дела нами уже ранее была получена формула (2.5.19), из которой при равенстве температуры вихря и среды на исходном уровне $z_1 = z - l$, т. е. $T(z-l) = \tilde{T}(z-l)$ и $\delta z = l_{T\uparrow}$, как частный случай в адиабатическом приближении, следует, что

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{\bar{T}_B} \left(\frac{\partial \bar{T}_B}{\partial z} + \gamma_a \right) l_{T\uparrow}. \quad (2.7.31)$$

Вихрь, движущийся снизу вверх с этим ускорением, совершает за единицу времени на пути $\Delta z = \omega_{\uparrow}$ работу, отнесенную к единице массы

$$\delta E_1 = \frac{d\omega}{dt} \omega_{\uparrow} = -\frac{g}{\bar{T}_B} \left(\frac{\partial \bar{T}_B}{\partial z} + \gamma_a \right) l_{T\uparrow} \omega_{\uparrow}.$$

Записав аналогичное выражение для вихрей, движущихся сверху вниз, можно определить среднюю работу всех вихрей, отнесенную к единице массы и к единице времени, как

$$E_2 = -\frac{g}{\bar{T}_B} \left(\frac{\partial \bar{T}_B}{\partial z} + \gamma_a \right) (l_{T\uparrow} \omega_{\uparrow} + l_{T\downarrow} \omega_{\downarrow}) = -\frac{g}{\bar{T}_B} \left(\frac{\partial \bar{T}_B}{\partial z} + \gamma_a \right) l_{T\uparrow} \omega_{\uparrow},$$

или с учетом (2.7.11)

$$E_2 = -\frac{g}{\bar{T}_B} \left(\frac{\partial \bar{T}_B}{\partial z} + \gamma_a \right) k_T, \quad (2.7.32)$$

где $k_T = \alpha_T \cdot k$.

В более общем случае

$$E_2 = -\frac{g}{\bar{T}_B} \left(\frac{\partial \bar{T}_B}{\partial z} + \gamma_p \right) k_T = -\frac{g}{\bar{\theta}_B} \left(\frac{\partial \bar{\theta}_B}{\partial z} + \gamma_T \right) k_T. \quad (2.7.32')$$

Итак, при неустойчивой стратификации $E_2 > 0$ (кинетическая энергия турбулентности увеличивается за счет действия силы Архимеда).

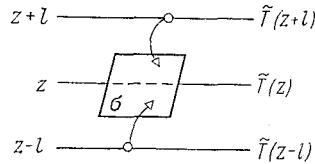


Рис. 9. Ускорение вихря за счет действия силы Архимеда.

Для определения E_3 можно использовать следующие рассуждения: так как E_3 представляет скорость диссипации, то она должна зависеть прямо пропорционально от кинетической энергии турбулентности b и обратно пропорционально от среднего времени существования вихрей, которое можно определить как l/\sqrt{b} , так как \sqrt{b} определяет среднюю скорость вихрей. В таком случае

$$E_3 = \text{Diss} \sim \frac{b}{t} = -c_2 \frac{b \sqrt{b}}{l}. \quad (2.7.33)$$

Обычно это выражение получается на основе анализа размерности, если просто предполагать, что $E_3 = f(l, b)$.

Выражение для E_4 можно получить, если, согласно (2.7.16), представить поток энергии турбулентности как

$$Q_b = \rho k_b \frac{\partial b}{\partial z},$$

где k_b — коэффициент турбулентности для потока кинетической энергии ($k_b = \alpha_b \cdot k$). Тогда отнесенный к единице массы приток энергии турбулентности в слой dz , равный изменению энергии турбулентности за счет диффузии, определится как

$$E_4 = \frac{\partial}{\partial z} k_b \frac{\partial b}{\partial z}. \quad (2.7.34)$$

В формулы (2.7.24) и (2.7.33) вошли две постоянные: c_1 и c_2 , если ввести $\tilde{l} = c_1 l$, тогда

$$k = \tilde{l} \sqrt{b}; \quad (2.7.24')$$

$$E_3 = -c \frac{b \sqrt{b}}{\tilde{l}}, \quad (2.7.33')$$

где $c = c_1 \cdot c_2$. В дальнейшем будем опускать значек „ \sim “.

С учетом полученных выражений для E_i можно записать уравнения баланса кинетической энергии турбулентности (2.7.25) в виде

$$\begin{aligned} \frac{db}{dt} = k \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{g}{\bar{T}_b} \alpha_T k \left(\frac{\partial \bar{T}_b}{\partial z} + \gamma_p \right) - c \frac{b \sqrt{b}}{l} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_b k \frac{\partial b}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.7.35)$$

Наконец, необходимо каким-то образом определить l . Для одномерного потока жидкости и нейтральной стратификации согласно Карману,

$$l = -c_1 \kappa \frac{du/dz}{d^2u/dz^2} = -2c_1 \kappa \frac{(du/dz)^2}{d(du/dz)^2}, \quad (2.7.36)$$

где κ — постоянная Кармана (0,35—0,40). Для двухмерного потока и произвольной стратификации было предложено следующее обобщение формулы (2.7.36):

$$l = -\tilde{\kappa} \frac{\psi}{d\psi/dz}, \quad \tilde{\kappa} = 2\kappa c_1 = 2\kappa c_1', \quad (2.7.37)$$

где

$$\psi = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 - \alpha_T \frac{g}{T_b} \left(\frac{\partial \bar{T}_b}{\partial z} + \gamma_p\right). \quad (2.7.38)$$

Полученные соотношения (2.7.24), (2.7.33), (2.7.35), (2.7.37) и (2.7.38) позволяют определить все характеристики турбулентности через другие неизвестные величины, т. е. позволяют замкнуть систему уравнений. Следует, конечно, иметь в виду, что рассмотренный подход к замыканию уравнений является одним из наиболее простых, однако его применение оправдано лишь для определенного класса задач, связанных, в основном, с описанием прилегающих к поверхности земли слоев атмосферы.

2.8. Замкнутая система уравнений

Выпишем теперь замкнутую систему осредненных уравнений (опуская значки осреднения).

Уравнения движения с учетом (2.6.12) и (2.7.21):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2(\omega_z v - \omega_y w) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} k_l \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_l \frac{\partial u}{\partial y}; \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + 2(\omega_x w - \omega_z u) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} k_l \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_l \frac{\partial v}{\partial y}; \end{aligned} \quad (2.8.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial w}{\partial z} + \\ + \frac{\partial}{\partial x} k_l \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_l \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.8.3)$$

Уравнение неразрывности (2.6.7):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Уравнение притока тепла с учетом (2.6.15), (2.4.4), (2.4.7), (2.7.17), (2.7.18):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} k_T \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_p \right) + \frac{\partial}{\partial x} k_l \frac{\partial T}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} k_l \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{L}{c_p} \frac{m}{\rho} \end{aligned} \quad (2.8.4)$$

(пренебрегается молекулярным притоком тепла, так как $\kappa \ll k_T$ и k_l).

Уравнение притока водяного пара с учетом (2.6.16), (2.4.3), (2.7.19), (2.7.20):

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{m}{\rho} + \frac{\partial}{\partial z} k_q \left(\frac{\partial q}{\partial z} + \gamma_q \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} k_l \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_l \frac{\partial q}{\partial y} \end{aligned} \quad (2.8.5)$$

(пренебрегая молекулярным притоком водяного пара, так как $d_s \ll k_q$ и k_l).

Уравнение состояния (2.6.14) при $R' \equiv R$:

$$p = R \rho T_b,$$

Замыкающие соотношения для определения характеристик турбулентности (2.7.24') (2.7.35), (2.7.37), (2.7.38):

$$k = l \sqrt{b};$$

$$\begin{aligned} \frac{db}{dt} = k \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{g}{T_b} \alpha_T k \left(\frac{\partial T_b}{\partial z} + \gamma_p \right) - c \frac{b \sqrt{b}}{l} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_b k \frac{\partial b}{\partial z}; \end{aligned}$$

$$l = -\tilde{\alpha} \cdot \frac{\psi}{d\psi/dz}, \quad \tilde{\alpha} = 2\alpha \cdot c^{1/4};$$

$$\psi = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 - \alpha_T \frac{g}{T_b} \left(\frac{\partial T_b}{\partial z} + \gamma_p \right).$$

В выписанной системе из 11 уравнений содержится 11 неизвестных величин ($u, v, w, \theta, q, \rho, p, k, l, b, \psi$), т. е. она действительно является замкнутой и, в принципе, будучи дополненной необходимыми граничными и начальными условиями, позволяет определить все неизвестные искомые величины.

2.9. Упрощение уравнений. Классификация атмосферных движений

Выписанная в 2.8 замкнутая система уравнений является очень сложной, в полном виде ее трудно проинтегрировать даже с применением современных численных методов. С учетом этого возникает необходимость разумного упрощения уравнений. В известной мере условно, можно выделить два подхода к упрощению уравнений.

1. Упрощения, основанные на оценке порядка отдельных членов с помощью эмпирических оценок порядка самих физических величин и их производных, полученных для некоторых средних условий (в метеорологии используются таблицы А. А. Фридмана и Г. Гессельберга, а также таблицы М. И. Юдина). В принципе, этот же подход иногда оказывается эффективным и для рассмотрения возможности упрощения уравнений в более определенном диапазоне внешних условий.

2. Упрощения, основанные на оценке с помощью теории подобия и эмпирических оценок порядков физических величин условий, когда можно пренебречь отдельными членами уравнений.

Особенности применения первого подхода к упрощению уравнений рассмотрим на примере уравнения притока тепла (2.8.4) и третьего уравнения движения (2.8.3). Если (2.8.4) с учетом (2.2.22) записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a \right) - \frac{1}{\rho c_p} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial z} k_r \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a \right) + k_t \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{L}{c_p} \frac{m}{\rho}, \end{aligned}$$

то с помощью таблиц А. А. Фридмана, Г. Гессельберга [5] можно оценить порядки слагаемых в левой части этого уравнения. При этом, однако, принятый в них способ указания пределов порядков является недостаточно определенным. Более конструктивные возможности для упрощения уравнений дают таблицы М. И. Юдина [5], в которых в системе МТС (метр — тонна — секунда) для интервалов независимых переменных: $\Delta t = 4,3 \cdot 10^4$ с (12 часов), $\Delta s = 4 \cdot 10^5$ м ($s = \{x, y\}$), $\Delta z = 2,5 \cdot 10^3$ м, приводятся средние квадратические значения производных основных метеорологических величин. С помощью этих таблиц с учетом $\sigma(v_s) = 10$ м/с, $\sigma(w) = 10^{-2}$ м/с, $\sigma(\rho) = 10^{-3}$ т/м³, можно оценить $\sigma \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) \approx 7 \cdot 10^{-5}$, $\sigma \left(v_s \frac{\partial T}{\partial s} \right) \approx 7 \cdot 10^{-5}$, $\sigma \left(\frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial p}{\partial t} \right) \approx 8 \cdot 10^{-6}$, $\sigma \left(\frac{1}{\rho c_p} v_s \frac{\partial p}{\partial s} \right) \approx 8 \cdot 10^{-6}$, $\sigma \left[w \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a \right) \right] \approx 4 \cdot 10^{-5}$. Итак, слагаемые $\frac{\partial T}{\partial t}$, $v_s \frac{\partial T}{\partial s}$ и $w \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a \right)$ для средних условий имеют

Одинаковый порядок и это заставляет проявлять большую осторожность при пренебрежении отдельными из этих членов (особенно последним за пределами нижнего 0,5—1,0 км слоя). Члены, содержащие производные от давления в среднем на порядок меньше ранее рассмотренных, однако член с $\frac{\partial p}{\partial t}$ при определенных условиях может также быть вполне значимым. Что касается членов с $\frac{\partial p}{\partial s}$, то наблюдения показывают, что сумма этих членов, как правило, в несколько раз меньше по абсолютной величине каждого из слагаемых (теоретическое объяснение этого факта будет дано в гл. 3). Возможность исключения из рассмотрения того или иного вида притока тепла может быть обоснована только особенностями рассматриваемой задачи.

Наиболее эффективным этот подход оказывается при упрощении третьего уравнения движения (2.8.3): $\sigma \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \approx 2 \cdot 10^{-7}$, $\sigma \left(v_s \frac{\partial w}{\partial s} \right) \approx 2 \cdot 10^{-7}$, $\sigma \left(w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \approx 3 \cdot 10^{-8}$, $\sigma \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \approx 10$, $\sigma(g) \approx 10$.

Таблицы М. И. Юдина не позволяют оценить средние квадратические величины компонент силы трения, однако при $k_t = 10^6$ м²/с, $k = 10$ м²/с из таблиц А. А. Фридмана, Г. Гессельберга следует, что они также должны иметь $0(10^{-7})$. Таким образом, в (2.8.3) можно оставить только два слагаемых:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g, \text{ или } \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (2.9.1)$$

Полученное уравнение внешне напоминает уравнение статики атмосферы (2.5.1), однако, входящая в него плотность относится к частице воздуха, тогда как в (2.5.1) входит плотность среды. Указанное различие в большинстве случаев не играет существенной роли (за исключением оценок условий вертикальной статистической устойчивости и конвективных вертикальных движений, о которых уже речь шла раньше) и уравнение (2.9.1) трактуется как уравнение статики. Следует помнить, что оно неприменимо для больших значений вертикальной скорости и ускорений, характерных для развитой конвекции (кучевые и грозовые облака, термики) и горных районов.

✓ Применение теории подобия сводится к выражению всех размерных физических величин s через масштаб (характерное ее значение) s_0 и безразмерную величину s_n : $s = s_0 s_n$. Под масштабом понимают такую единицу измерений s_0 , для которой

$$s_n = \frac{s}{s_0} = 0 \quad (1). \quad (2.9.2)$$

Представляя размерные координаты $x_i = \{x, y, z, t\}$ как $x_i = x_{0i} \dot{x}_n$ и определяя x_{0i} как характерные величины x_i , для которых s изменяется на собственный порядок величины, т. е. на s_0 , можно показать, что

$$\frac{\partial s}{\partial x_i} = 0 \left(\frac{s_0}{x_{0i}} \right) = \frac{s_0}{x_{0i}} \frac{\partial s_n}{\partial x_n} \quad \text{или} \quad \frac{\partial s_n}{\partial x_{ni}} = 0 \quad (1). \quad (2.9.3)$$

Таким образом, с учетом (2.9.2) и (2.9.3) все безразмерные члены в уравнениях должны иметь $O(1)$. В этом случае вклад каждого слагаемого определяется порядком коэффициента, составленного из соответствующих масштабов s_0, x_{0i} .

Рассмотрим теперь на примере первого уравнения движения (2.8.1) применение этого подхода к упрощению уравнений и на основе его произведем классификацию атмосферных движений.

Считая при произвольном направлении осей координат $u_0 = v_0 = V_0, x_0 = y_0 = L_0$, упрощая выражение для компонент силы Кориолиса (за исключением случая $\varphi \rightarrow 0, \omega_z u \gg \omega_x \omega$ и $\omega_z v \gg \omega_y \omega$) и деля все члены на $2\omega_z V_0$, запишем (2.8.1) в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\omega_z t_0} \frac{\partial u_n}{\partial t_n} + \frac{V_0}{2\omega_z L_0} \left(u_n \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + v_n \frac{\partial u_n}{\partial y_n} \right) + \frac{\omega_0}{2\omega_z H_0} \omega_n \frac{\partial u_n}{\partial z_n} = \\ & = - \frac{p_0}{2\omega_z \rho_0 V_0 L_{0p}} \frac{1}{\rho_n} \frac{\partial p_n}{\partial x_n} + v_n + \frac{k_0}{2\omega_z H_0^2} \frac{\partial}{\partial z_n} k_n \frac{\partial u_n}{\partial z_n} + \\ & + \frac{k_{l_0}}{2\omega_z L_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial x_n} k_{ln} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + \frac{\partial}{\partial y_n} k_{ln} \frac{\partial u_n}{\partial y_n} \right). \end{aligned} \quad (2.9.4)$$

В полученном уравнении все коэффициенты могут сопоставляться с коэффициентом при v_n , т. е. 1,0. Это позволяет оценить условия, при которых можно пренебречь теми или иными членами уравнения (по сравнению с силой Кориолиса), т. е. по существу произвести классификацию атмосферных движений.

1. $\frac{1}{2\omega_z t_0} \ll 1$. В этом случае в (2.9.4) можно пренебречь первым членом, и такое движение называется стационарным. Оценим критерий стационарности для средних широт ($\omega_z = 5 \cdot 10^{-5}$ 1/с):

$$t_0 \gg \frac{1}{2\omega_z} = 10^4 \text{ с} \approx 3 \text{ ч}. \quad (2.9.5)$$

Таким образом, если скорость изменяется на порядок своей величины за время много большее, чем 3 ч, то движение можно считать стационарным.

2. $\frac{V_0}{2\omega_z L_0} \ll 1$. В этом случае в (2.9.4) можно пренебречь вторым членом, и такое движение называется горизонтально-однородным.

При $V_0 = 10$ м/с для того, чтобы движение можно было бы считать горизонтально-однородным, необходимо

$$L_0 \gg \frac{V_0}{2\omega_z} = 10^5 \text{ м} = 100 \text{ км} \quad (2.9.6)$$

(т. е. скорость должна изменяться на порядок своей величины на расстоянии значительно большем 100 км). Нетрудно показать, что для горизонтально-однородного движения можно пренебречь и членом, учитывающим горизонтальный турбулентный обмен. При $k_{10} = 10^6 \text{ м}^2/\text{с}$ из неравенства

$$\frac{k_{10}}{2\omega_z L_0^2} \ll 1$$

следует, что

$$L_0 \gg \sqrt{\frac{k_{10}}{2\omega_z}} = 100 \text{ км}$$

3. $\frac{\omega_0}{2\omega_z H_0} \ll 1$. При этом в (2.9.4) можно пренебречь третьим членом, и такое движение называется плоским. При $\omega_0 = 0,5$ см/с движение можно считать плоским, если

$$H_0 \gg \frac{\omega_0}{2\omega_z} = 50 \text{ м} \quad (2.9.7)$$

(т. е. горизонтальная скорость должна изменяться на порядок своей величины на расстояниях значительно больших 50 м).

4. $\frac{k_0}{2\omega_z H_0^2} \ll 1$. В этом случае в (2.9.4) можно пренебречь членом, учитывающим влияние сил трения, возникающих у земной поверхности. Слой атмосферы от подстилающей поверхности до высоты, на которой можно пренебречь силой трения (т. е. слой, где существенно влияние силы трения), называется **планетарным пограничным слоем (ППС) атмосферы**.

Из записанного выше неравенства можно определить толщину слоя, в котором скорость должна меняться на порядок своей величины, чтобы можно было пренебречь силой трения:

$$H_0 \gg \sqrt{\frac{k_0}{2\omega_z}} \text{ при } k_0 = 5 \text{ м}^2/\text{с},$$

$$H_0 \gg 220 \text{ м}. \quad (2.9.8)$$

Таким образом, если скорость меняется на порядок своей величины в слое толщиной значительно большей, чем 220 м, то силой трения можно пренебречь. Если считать, что знак « \gg » соответствует превышению, по крайней мере, в 5—10 раз, то $H_0 \approx 1500$ — 2000 м. Начиная с этих высот можно пренебречь влиянием силы трения. Расположенная выше планетарного пограничного слоя атмосфера называется **свободной атмосферой**.

Рассмотренный выше подход неприменим к уравнению неразрывности, где все члены в общем случае имеют один порядок, т. е. для горизонтально-однородных движений уравнение неразрывности не изменяет своего вида.

В заключение, следует отметить, что упрощение уравнений не является формальной процедурой, а требует глубокого физического понимания рассматриваемых процессов. Малость отдельных членов уравнений не всегда является основанием для пренебрежения ими. Малые слагаемые в дифференциальном уравнении, сохраняющие свой знак, при интегрировании по большому интервалу времени могут оказываться столь же и более значимыми, как большие, но знакопеременные члены. Пренебрежение такими «малыми» слагаемыми может нарушать условия баланса субстанции (в качестве примера можно указать на невозможность пренебрегать скоростью диссипации в уравнении первого начала термодинамики при описании общей циркуляции атмосферы). Следует помнить также, что при пренебрежении малыми старшими производными меняется класс дифференциального уравнения и значит вид его решения, а это может вызывать трудности в выборе устойчивой схемы численного решения и в удовлетворении граничных условиям. Наконец, малые слагаемые могут быть важны, если другие члены уравнения образуют малые разности больших величин.

Контрольные вопросы

1. К чему сводится аналогия между молекулярным и турбулентным перемешиванием?
2. В чем различие Лангранжева и Эйлера описания движения жидкости?
3. От чего зависит изменение свойства в фиксированной точке пространства?
4. Следствием каких основных физических законов являются уравнения движения, неразрывности, притока тепла и водяного пара?
5. Какую роль в атмосфере в локальных и глобальных задачах играет диссипация механической энергии в тепло?
6. Какое выражение для силы Кориолиса нужно использовать вблизи экватора и почему?
7. Из чего складываются лучистые притоки тепла в атмосфере?
8. Как выглядит условие теплового баланса для поверхности океана?
9. Что такое абсолютный и относительный геопотенциал? В каких единицах они измеряются? Что характеризуют карты относительной топографии?
10. Какие критерии определяют условия вертикальной статистической устойчивости? Как влияет на нее вертикальное распределение влажности?

11. Что такое уровень конвекции? Как его можно определить?
12. Почему возникает необходимость осреднения уравнений? Какие дополнительные члены появляются при этом?
13. Какие соотношения используются для замыкания системы осредненных уравнений?
14. Какие подходы существуют к упрощению уравнений?
15. Как в теории подобия вводятся масштабы физических величин и координат?
16. К чему сводится 3-е уравнение движения для средних условий?
17. Какие критерии определяют условие стационарности, горизонтальной однородности и плоского характера атмосферных движений? Что такое планетарный пограничный слой и свободная атмосфера?

3. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ СВОБОДНОЙ АТМОСФЕРЫ

3.1. Движение без трения. Геострофический и градиентный ветер

Согласно данному выше определению свободной атмосферы здесь обычно можно в уравнениях движения пренебречь вертикальным турбулентным притоком количества движения (силами трения)*. Рассмотрим в дальнейшем частную задачу — определение ветра по заданному полю давления, которое в отличие от ветра может быть достаточно измерено.

За исключением приэкваториальных широт ($\omega_z \rightarrow 0$) реальные условия в свободной атмосфере в среднем удовлетворяют требованиям стационарности, горизонтальной однородности и плоского характера движения, и такое движение без ускорения ($\frac{du}{dt} = \frac{dv}{dt} = 0$) при прямолинейных и параллельных изобарах называется геострофическим движением или геострофическим ветром. Согласно (2.8.1—2.8.2) оно будет описываться системой уравнений:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega_z v_g = 0, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega_z u_g = 0, \quad (3.1.1)$$

откуда следует, что

$$u_g = -\frac{1}{2\omega_z \rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{2\omega_z \rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3.1.2)$$

В векторном виде (3.1.1) представляет условие равновесия силы барического градиента (\vec{F}_p) и силы Кориолиса (\vec{F}_K):

$$\vec{F}_p + \vec{F}_K = 0,$$

* Турбулентность в свободной атмосфере является «перемежающейся», т. е. наблюдается в основном в областях фронтов и струйных течений.

которое графически изображено на рис. 10 (для северного полушария) и позволяет определить направление геострофического ветра \vec{G} по направлению силы Кориолиса. Очевидно, что в северном полушарии геострофический ветер направлен вдоль изобары так, что справа остается высокое значение давления. Напомним, что в южном полушарии ($\omega_z < 0$) направление геострофического ветра получается обратным установленному выше для северного полушария.

Согласно (3.1.2) модуль геострофического ветра G определяется как

$$G = \frac{1}{2\omega_z \rho} \frac{\partial p}{\partial n}, \quad (3.1.3)$$

где $\frac{\partial p}{\partial n} = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}$ — модуль градиента давления; n — направление нормали к изобарам (рис. 10).

Таким образом, геострофический ветер пропорционален градиенту давления и обратно пропорционален ρ и $\sin \varphi$.

Так как данные аэрологических наблюдений представляются в изобарической системе координат (x, y, p) в виде карт барической топографии, то целесообразно получить выражение для геострофического ветра через градиент абсолютного геопотенциала, характеризующего наклон данной изобарической поверхности $p = \text{const}$ (см. 2.5).

В общем случае $p = p(x, y, z)$

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz. \quad (3.1.4)$$

Для изобарической поверхности $p = \text{const}$, $dp = 0$, $z = H'(x, y)$ — уравнение поверхности и

$$dz = \frac{\partial H'}{\partial x} dx + \frac{\partial H'}{\partial y} dy.$$

В таком случае из (3.1.4) с учетом уравнения статики получаем

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy = \rho g \frac{\partial H'}{\partial x} dx + \rho g \frac{\partial H'}{\partial y} dy,$$

откуда

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial H'}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial H'}{\partial y}. \quad (3.1.5)$$

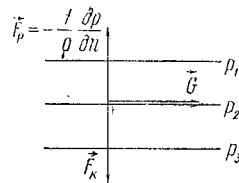


Рис. 10. Условие равновесия силы барического градиента и силы Кориолиса ($p_1 < p_2 < p_3$).

Подставляя (3.1.5) в (3.1.2), используя определение геопотенциала и выражая его в гп. м, получаем:

$$u_g = -\frac{9,8}{2\omega_z} \frac{\partial H}{\partial y}, \quad v_g = \frac{9,8}{2\omega_z} \frac{\partial H}{\partial x}, \quad G = \frac{9,8}{2\omega_z} \frac{\partial H}{\partial n}. \quad (3.1.6)$$

где H — абсолютный геопотенциал изобарической поверхности $p = \text{const}$, выраженный в гп. м; n — направление нормали к изогипсам на данной карте барической топографии.

Следует иметь в виду, что теперь геострофический ветер относится к заданной изобарической поверхности $p = \text{const}$. Из сравнения (3.1.2) и (3.1.6) видно, что он направлен вдоль изогипсы так, что в северном полушарии справа остается высокое значение геопотенциала.

Так как согласно наблюдениям реальный ветер в свободной атмосфере достаточно близок к геострофическому, то это имеет ряд важных следствий. С одной стороны, что обстоятельство с учетом (3.1.2), по крайней мере, для свободной атмосферы подтверждает возможность упрощения уравнения притока тепла (см. 2.9) за счет малости слагаемого $\frac{1}{\rho c_p} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right)$; с другой стороны, наличие в уравнениях движения малой разности двух больших и близких по величине слагаемых (силы барического градиента и силы Кориолиса) затрудняет упрощение этих уравнений и создает определенные вычислительные трудности (об этом речь пойдет в гл. 6).

Так как сеть наблюдений за полем ветра в условиях открытого океана сравнительно редкая, а сами эти наблюдения выполняются с заметными ошибками, то введение понятия геострофического ветра оказывается весьма конструктивным — оно позволяет рассчитывать поле ветра в свободной атмосфере по сравнительно неплохо измеряемому полю давления или геопотенциала. Для перехода от геострофического ветра к приземному используются модели планетарного пограничного слоя атмосферы (гл. 4); для приближенных оценок можно принять: $\frac{c_{10}}{G} \approx 0,68$, $\alpha \approx 20^\circ$, где c_{10} — скорость ветра на $z = 10$ м, α — угол между приземным и геострофическим ветром.

В общем случае заданное поле давления может характеризоваться криволинейными изобарами. Для описания возникающего при этом движения воздуха целесообразно использовать цилиндрическую или натуральную систему координат. В случае применения цилиндрической системы координат удастся методом возмущения (разложением в ряд по малому отклонению изобары от круговой) описать ветер в свободной атмосфере, дующий вдоль круговой изобары, — градиентный ветер и малые отклонения от него, приводящие к возникновению радиальной и вертикальной составляющей скорости ветра [2].

Если в первом приближении ограничиться рассмотрением стационарного, горизонтально-однородного и плоского движения с круговой линией тока, то для описания его достаточно использовать натуральную систему координат (рис. 11). Переходя при этих

условиях в (2.8.1)—(2.8.2) к натуральным координатам $x = l$, $y = n$, $u = v_l$, $v = v_n = 0$, получаем:

$$v_l \frac{\partial v_l}{\partial l} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l}, \quad v_l \frac{\partial v_n}{\partial l} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - 2\omega_z v_l. \quad (3.1.7)$$

Так как рассматривается случай $\frac{\partial v_l}{\partial l} = 0$, то $\frac{\partial p}{\partial l} = 0$ и это означает, что изобара совпадает с линией тока (движение происходит вдоль изобары). Из рис. 11 видно, что

$$\frac{\partial v_n}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{v_l \Delta \alpha}{\Delta l} = v_l \frac{\partial \alpha}{\partial l} = \frac{v_l}{R}, \quad (3.1.8)$$

где R — радиус кривизны (постоянный для круговой линии тока) считается положительным, если центр кривизны расположен слева от направления движения. Подставляя в (3.1.7) выражение (3.1.8), используя условие $\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{dp}{dR}$ и обозначая в дальнейшем $v_l = c_r$, получаем уравнение для градиентного ветра

$$c_r^2 - \frac{R}{\rho} \frac{dp}{dR} + 2\omega_z R c_r = 0, \quad (3.1.9)$$

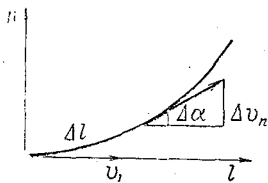


Рис. 11. Натуральная система координат.

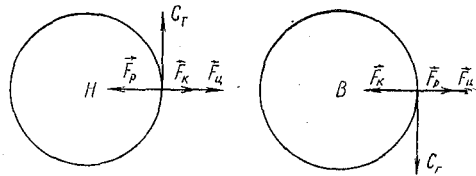


Рис. 12. Направление векторов сил: барического градиента (\vec{F}_p), Кориолиса (\vec{F}_k) и центробежной (\vec{F}_c) для случая циклона (H) и антициклона (B) северного полушария.

т. е. установившееся равномерное движение воздуха вдоль круговой изобары описывается условием статического равновесия трех сил: центробежной, барического градиента и Кориолиса. Направление векторов этих сил показано на рис. 12 и позволяет по направлению силы Кориолиса определить направление градиентного ветра: по часовой стрелке в антициклоне и против часовой стрелки в циклоне северного полушария. Для удобства последующих выкладок выразим силу барического градиента через геострофический ветер

$$c_r^2 + 2\omega_z R c_r - 2\omega_z R G = 0. \quad (3.1.9')$$

Уравнение (3.1.9') имеет два корня

$$c_r^{1,2} = \omega_z R \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{2G}{\omega_z R}} \right],$$

из которых очевидно условию: $R \rightarrow \infty$, $c_r \rightarrow G$ удовлетворяет только один

$$c_r = \omega_z R \left(\sqrt{1 + \frac{2G}{\omega_z R}} - 1 \right). \quad (3.1.10)$$

Выражение (3.1.10) устанавливает связь между градиентным и геострофическим ветром. Для антициклона ($R < 0$) второе слагаемое в подкоренном выражении должно удовлетворять условию

$$1 - \frac{2G}{\omega_z |R|} > 0 \text{ или } G < \frac{\omega_z |R|}{2}, \text{ или } \frac{dp}{dR} < \rho \omega_z^2 |R|, \quad (3.1.11)$$

что объясняет хорошо известный из наблюдений факт ограниченности градиента давления (и геострофического ветра) в случае антициклона северного полушария.

Наряду с точным выражением (3.1.10), можно получить более простое приближенное выражение, если разложить корень в биномиальный ряд и ограничиться третьим членом (для $\frac{2G}{\omega_z R} \ll 1$)

$$\left(1 + \frac{2G}{\omega_z R} \right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{2G}{\omega_z R} - \frac{1}{8} \frac{4G^2}{\omega_z^2 R^2};$$

в таком случае (3.1.10) примет вид

$$c_r = G \left(1 - \frac{G}{2\omega_z R} \right). \quad (3.1.12)$$

Это соотношение тем точнее, чем меньше второе слагаемое по сравнению с 1,0. Из (3.1.12) получается, что в северном полушарии ($\omega_z > 0$) для данного геострофического ветра в циклоне ($R > 0$) градиентный ветер меньше, чем в антициклоне ($R < 0$), однако фактически, с учетом ограничения на G в антициклоне, здесь градиентный ветер всегда меньше, чем в циклоне.

Из (3.1.9) при $\omega_z \rightarrow 0$

$$c_r = \left(\frac{R}{\rho} \frac{dp}{dR} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.1.13)$$

В рассмотренном приближении, согласно (3.1.13) и рис. 12, при $\varphi \rightarrow 0$ движение может происходить только вдоль изобар, имеющих циклоническую кривизну (наблюдения показывают, что вблизи экватора, действительно, не бывает антициклонов), и здесь, в принципе, может существовать локальная связь градиентного ветра с градиентом давления. Если принять для оценки $\frac{dp}{dR} =$

$= 0,1 \text{ ГПа}/100 \text{ км} = 10^{-4} \text{ н/м}^3$, $R=6 \cdot 10^5 \text{ м}$, $\rho=1,16 \text{ кг/м}^3$, то $r \approx 7 \text{ м/с}$, т. е. реальный ветер вблизи экватора действительно может определяться условием равновесия силы барического градиента и центробежной силы.

Задача. Определить градиентный ветер на $\varphi=60^\circ$ в точке A , расположенной на карте масштаба $1:10^7$ на расстоянии 7 см от центра кривизны, посередине между изобарами, проведенными через 5 ГПа и имеющими циклоническую кривизну. Расстояние между изобарами равно 3 см .

Определим градиент давления в точке A : $\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{5}{3} \frac{\text{ГПа}}{100 \text{ км}}$. В таком случае для $\rho = 1,27 \text{ кг/м}^3$, $G = 10,4 \text{ м/с}$. Согласно (3.1.10) $c_r = 9,3 \text{ м/с}$, а по приближенной формуле (3.1.12) $c_r = 9,2 \text{ м/с}$.

3.2. Изменение геострофического ветра с высотой. Термический ветер

В предыдущем параграфе было показано, что геострофический ветер является функцией градиента давления. Сам градиент давления может изменяться с высотой за счет неоднородности горизонтального поля температуры. Из уравнения статики атмосферы (2.5.1)

$$\frac{\partial \ln p}{\partial z} = - \frac{g}{R T_B} \quad (3.2.1)$$

Видно, что в теплой воздушной массе давление убывает с высотой медленнее, чем в холодной. Следовательно, за счет горизонтальной неоднородности поля температуры с высотой может происходить изменение наклона изобарических поверхностей, а значит изменение величины и направления барического градиента и, как следствие, — изменение геострофического ветра. Продемонстрируем сказанное на простом примере. Пусть у поверхности земли в теплой воздушной массе (точка A) давление равно 1000 ГПа , а в холодной (точка B) — 1020 ГПа , и, следовательно, градиент давления направлен от теплой массы к холодной (от A к B) рис. 13. Вследствие изменения наклона изобарических поверхностей давление на уровне z_1 над точкой A больше, чем над точкой B , и направление градиента изменится на обратное (от B к A), т. е. изменится величина и направление геострофического ветра. Для определения изменения геострофического ветра с высотой запишем выражения для компонента геострофического ветра (3.1.2) с учетом уравнения состояния для влажного воздуха (2.6.14):

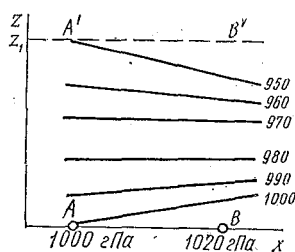


Рис. 13. Изменение градиента давления с высотой.

$$\begin{aligned} \frac{u_g}{T_B} &= - \frac{R}{2\omega_z p} \frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{R}{2\omega_z} \frac{\partial \ln p}{\partial y}, \\ \frac{v_g}{T_B} &= \frac{R}{2\omega_z p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{R}{2\omega_z} \frac{\partial \ln p}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Продифференцировав эти уравнения по z и используя уравнение (3.2.1), после ряда преобразований получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_g}{\partial z} &= + \frac{u_g}{T_b} \frac{\partial T_b}{\partial z} - \frac{g}{2\omega_z T_b} \frac{\partial T_b}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_g}{\partial z} &= \frac{v_g}{T_b} \frac{\partial T_b}{\partial z} + \frac{g}{2\omega_z T_b} \frac{\partial T_b}{\partial x}.\end{aligned}\quad (3.2.3)$$

Если для малых Δz в первом приближении считать $T_b = \bar{T}_b = \bar{T}$ и представить левые части через конечные приращения $\frac{\partial u_g}{\partial z} = \frac{u_{g2} - u_{g1}}{\Delta z}$, $\frac{\partial v_g}{\partial z} = \frac{v_{g2} - v_{g1}}{\Delta z}$, то векторная разность геострофического ветра на двух высотах

$$\vec{G}_2 - \vec{G}_1 = \vec{\Delta c}_T \quad (3.2.4)$$

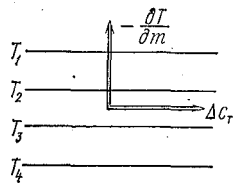


Рис. 14. Направление термического ветра в северном полушарии ($T_1 < T_4$).

называемая термическим ветром, имеет следующие компоненты:

$$u_{g2} - u_{g1} = \Delta u_T = - \frac{g \Delta z}{2\omega_z \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \quad (3.2.5)$$

$$v_{g2} - v_{g1} = \Delta v_T = \frac{g \Delta z}{2\omega_z \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x},$$

а модуль ее определяется как

$$\Delta c_T = \frac{g \Delta z}{2\omega_z \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial m}, \quad (3.2.6)$$

где \vec{m} — направление плоской нормали к изотермам.

Для приближенных оценок при $T_b = T = T_0 - \bar{\gamma}z$ и $\frac{\bar{\gamma}z}{T_0} \ll 1$ в (3.2.5), (3.2.6) можно заменить \bar{T} на T_0 . Из сравнения (3.2.5) с (3.1.2) сразу видно, что термический ветер связан с полем температуры так же, как геострофический с полем давления, т. е. направлен вдоль изотермы так, что в северном полушарии справа остается высокое значение температуры (рис. 14). Угол α_1 между векторами $\vec{\Delta c}_T$ и $\frac{\partial \bar{T}}{\partial m}$ может быть легко определен на основе их скалярного произведения с учетом (3.2.5)

$$\left(\vec{\Delta c}_T \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial m} \right) = \Delta u_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \Delta v_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = \Delta c_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial m} \cos \alpha_1 = 0,$$

т. е. $\alpha_1 = 90^\circ$.

Из (3.2.6) видно, что Δc_T пропорционален величине градиента температуры и толщине слоя. В таком случае на основании (3.2.4)

$$\frac{\vec{G}_2}{\Delta c_i} = \frac{\vec{G}_1}{\Delta c_T} + 1$$

и очевидно, что при увеличении толщины слоя $\vec{G}_2 \rightarrow \vec{\Delta c_T}$, т. е. по мере удаления от исходного уровня z_1 , геострофический ветер приближается к термическому. Под влиянием этого перестраиваются изобары — становятся параллельными изотермам (согласно наблюдениям на больших высотах в свободной атмосфере антициклонические области совпадают с очагами тепла, а циклонические — с очагами холода).

Скорость термического ветра целесообразно выразить через горизонтальный градиент относительного геопотенциала. Если использовать (2.5.7)

$$H_{p_1}^{p_2} = \frac{R}{9,8} \bar{T} \ln \frac{p_1}{p_2}$$

($H_{p_1}^{p_2}$ — геопотенциал в гп. м)

и взять логарифмическую производную от этого выражения в направлении $s = \{x, y\}$, то

$$\frac{1}{\bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial s} = \frac{1}{H_{p_1}^{p_2}} \frac{\partial H_{p_1}^{p_2}}{\partial s} = \frac{9,8}{g(z_2 - z_1)} \frac{\partial H_{p_1}^{p_2}}{\partial s}. \quad (3.2.7)$$

Подставив (3.2.7) в (3.2.5) и (3.2.6), получаем:

$$\Delta u_T = -\frac{9,8}{2\omega_z} \frac{\partial H_{p_1}^{p_2}}{\partial y}, \quad \Delta v_T = \frac{9,8}{2\omega_z} \frac{\partial H_{p_1}^{p_2}}{\partial x},$$

$$\Delta c_T = \frac{9,8}{2\omega_z} \frac{\partial H_{p_1}^{p_2}}{\partial m}, \quad (3.2.8)$$

т. е. термический ветер в изобарической системе координат выражается через градиент относительного геопотенциала так, как геострофический через градиент абсолютного геопотенциала (3.1.6) и направлен вдоль изогипсы, оставляя в северном полушарии справа более высокое значение относительного геопотенциала.

В общем случае в уравнениях (3.2.3) содержатся еще члены, учитывающие изменение T_B с высотой. Оценим порядки слагаемых в первом уравнении при $T_B = 300$ К, $2\omega_z = 10^{-4}$ с $^{-1}$, $\frac{\partial T_B}{\partial y} = 1$ К/100 км, $u_g = 10$ м/с, $\frac{\partial T_B}{\partial z} = -0,6$ К/100 м

$$\frac{\partial u_g}{\partial z} = (\pm 2 \cdot 10^{-4} \pm 3 \cdot 10^{-3}) \text{ с}^{-1}.$$

Таким образом, при средних условиях второе слагаемое почти на порядок больше первого (первое дает изменение скорости около 0,2 м/с, второе около 3 м/с

на 1 км). Однако нужно иметь в виду, что величина первого слагаемого пропорционально увеличивается с ростом u_g и вертикального градиента температуры. Так как реальный ветер на больших высотах может быть заметно больше 10 м/с, а локальные вертикальные градиенты температуры в инверсиях заметно превышают заданный выше средний, то есть основания ожидать, что вкладом первого слагаемого не всегда можно пренебречь. Более того, за счет его геострофического ветер, в принципе, может достигать экстремума, условием которого является

$$\frac{1}{T_B} \left(u_g \frac{\partial T_B}{\partial z} - \frac{g}{2\omega_z} \frac{\partial T_B}{\partial y} \right) = 0, \quad \left. \frac{\partial T_B}{\partial z} \right|_{z_m} = \frac{g}{2\omega_z u_g} \left. \frac{\partial T_B}{\partial y} \right|_{z=m};$$

при $\frac{\partial T_B}{\partial y} = 0,5 \text{ K}/100 \text{ км}$, $u_g = 25 \text{ м/с}$, $2\omega_z = 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ получаем, что для образования экстремума в профиле геострофического ветра $\frac{\partial T_B}{\partial z} = 2 \text{ K}/100 \text{ м}$.

Другое интересное обобщение связано с учетом горизонтального градиента виртуальной температуры

$$\frac{\partial T_B}{\partial s} = \frac{\partial T}{\partial s} + 0,605 T \frac{\partial q}{\partial s}.$$

В простейшем случае, например, вместо (3.2.5) следует записать:

$$u_{g2} - u_{g1} = \Delta u_T = - \frac{g \Delta z}{2\omega_z T} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + 0,605 \bar{T} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \right),$$

$$v_{g2} - v_{g1} = \Delta v_T = \frac{g \Delta z}{2\omega_z T} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + 0,605 \bar{T} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} \right).$$

Обычно влияние градиента удельной влажности мало по сравнению с влиянием градиента температуры, однако над океаном и вблизи раздела суша — вода этот эффект может быть заметным. По данным экспедиции ТРОПЭКС—74 $\frac{\partial \bar{q}}{\partial s}$ может достигать в слое 1—2 км величины 0,7 (‰)/100 км, и это приводит при $\varphi = 7,5^\circ$ к изменению модуля термического ветра почти на 2,2 м/с.

Наконец, можно указать на особенности расчета термического ветра вблизи экватора: здесь за счет $\varphi \rightarrow 0$ он теряет свой обычный физический смысл, и необходимо обобщение его понятия.

Согласно (3.2.4), (3.2.5), (3.2.8) и (3.1.2)

$$\vec{G}_2 = \frac{1}{2\omega_z} \left[-\vec{i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \right)_{z_1} + \frac{g \Delta z}{T} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right] + \vec{j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{z_1} + \frac{g \Delta z}{T} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \Bigg]; \quad (3.2.9)$$

$$\vec{G}_2 = \frac{g_s}{2\omega_z} \left[-\vec{i} \left(\frac{\partial H_{p_1}}{\partial y} + \frac{\partial H_{p_1}^{p_2}}{\partial y} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial H_{p_1}}{\partial x} + \frac{\partial H_{p_1}^{p_2}}{\partial x} \right) \right]. \quad (3.2.10)$$

Рассмотрим несколько примеров изменения геострофического ветра с высотой (для северного полушария) при различных соотно-

шениях между барическим градиентом $\left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial n} = \vec{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial p}{\partial y}\right)$ на нижнем уровне и градиентом температуры у поверхности земли $\left(\frac{\partial \vec{T}_0}{\partial m} = \vec{i} \frac{\partial T_0}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial T_0}{\partial y}\right)$.

1. Барический и термический градиенты параллельны друг другу:

а) направлены в одну сторону (рис. 15, а) — в этом случае за счет увеличения с высотой Δc_T ветер будет увеличиваться, не изменяя своего направления;

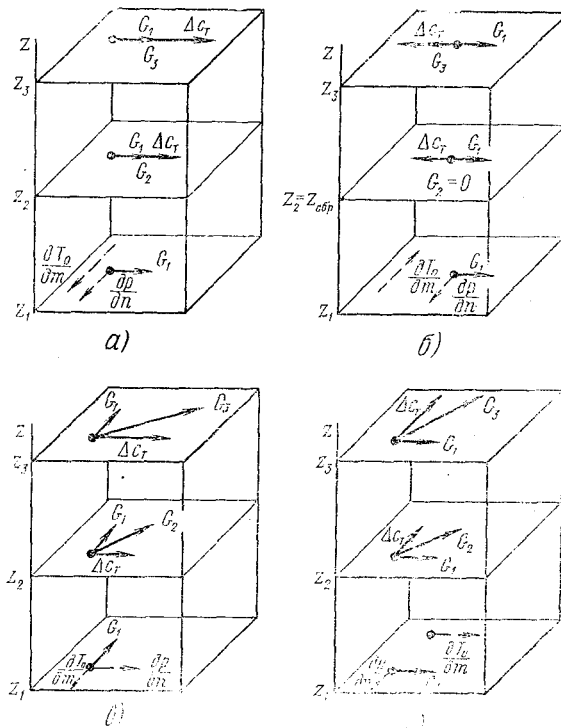


Рис. 15. Изменение геострофического ветра с высотой при разных направлениях $\frac{\partial p}{\partial n}$ и $\frac{\partial T_0}{\partial m}$.

б) направлены в противоположные стороны (рис. 15, б) — за счет увеличения с высотой Δc_T ветер будет уменьшаться, не изменяя направления, пока на некоторой высоте, называемой высотой обра-

*

щения, термический ветер не станет равным геострофическому на исходном уровне. На этой высоте ветер станет равным нулю, а выше изменит свое направление на противоположное и будет увеличиваться с высотой.

2. Барический и термический градиенты перпендикулярны друг другу:

а) барический градиент отклонен влево от термического (рис. 15, в) — геострофический ветер с высотой увеличивается и поворачивает вправо, приближаясь к термическому ветру;

б) барический градиент отклонен вправо от термического (рис. 15, г) — геострофический ветер с высотой увеличивается и поворачивает влево, приближаясь к термическому ветру.

Очевидно, что аналогичные рассуждения применимы для любого соотношения между градиентами давления и температуры. Полученные выше выводы представляют несомненный практический интерес. Они позволяют, с одной стороны, по соотношению градиентов давления и температуры на приземной синоптической карте судить о характере изменения вектора ветра на различных высотах в свободной атмосфере, а с другой стороны, дают возможность определения горизонтального распределения температуры по изменению ветра с высотой.

Задача. В северном полушарии на высоте 1 км горизонтальный градиент давления равен 5 гПа на 400 км и направлен на север, а на высоте 3 км он равен 5 гПа на 500 км и направлен на восток. Определить средний горизонтальный градиент температуры в слое от 1 до 3 км.

Задачу можно решить в проекциях, согласно (3.2.9), или графически. Определим направление геострофического ветра: на $z_1=1$ км он направлен на запад, а на $z_2=3$ км — на север. В таком случае, согласно определению термического ветра,

$$\vec{\Delta c}_T = \vec{G}_3 - \vec{G}_1, \quad \Delta c_T = \sqrt{G_3^2 + G_1^2}.$$

С учетом (3.1.3) и (3.2.6) получим (при $\bar{T} = 273$ К, $\rho = 1,27$ кг/м³)

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial m} = \frac{\bar{T}}{\rho g \Delta z} \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_1^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial n}\right)_3^2} = 1,15 \text{ К/100 км.}$$

Определим направление вектора термического ветра (в географической системе координат):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{G_1}{G_3} = \frac{(\partial p / \partial n)_1}{(\partial p / \partial n)_3} = \frac{5}{4}, \quad \alpha = 51^\circ;$$

в таком случае вектор градиента температуры имеет направление $51^\circ + 90^\circ = 141^\circ$.

3.3. Геострофическая адвекция

По распределению ветра с высотой можно определить и характер адвекции (будет ли наблюдаться адвекция тепла или холода). Из рис. 15, в видно, что для правого поворота ветра с высотой можно ожидать адвекции тепла, т. е. повышение температуры, тогда как для левого вращения — адвекции холода (рис. 15, г). Эти правила тем

более ценны, что об изменении ветра с высотой часто можно судить по косвенным признакам. Например, если облака среднего яруса движутся влево от направления движения облаков нижнего яруса (это свидетельствует о левом повороте ветра с высотой), то можно ожидать адвекции холода. Из рис. 15, а, б видно, что если облака верхнего и нижнего яруса движутся в одном или в противоположных направлениях, то нет оснований ожидать резкого изменения температуры.

Для свободной атмосферы простая формула для количественной оценки адвекции может быть получена для случая изотермического движения: $\frac{dT}{dt} = 0$ (пренебрегая $w \frac{\partial T}{\partial z}$)

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{c,a} = -\left(u_g \frac{\partial T}{\partial x} + v_g \frac{\partial T}{\partial y}\right). \quad (3.3.1)$$

Такое чисто адвективное изменение температуры называют геострофической адвекцией (она является главной частью локальных изменений температуры в свободной атмосфере). Подставив в (3.3.1) выражения для u_g и v_g , получим

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{c,a} = -\frac{1}{2\omega_z \rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x}\right). \quad (3.3.2)$$

Так как в (3.3.2) скобка есть векторное произведение векторов $\vec{\partial p / \partial n}$ и $\vec{\partial T / \partial m}$, то

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{c,a} = -\frac{1}{2\omega_z \rho} \frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial T}{\partial m} \sin \alpha, \quad (3.3.3)$$

где α — угол между горизонтальными градиентами давления и температуры.

Из (3.3.3) видно (для северного полушария $\omega_z > 0$), что левому повороту ветра с высотой ($\alpha > 0$) соответствует отрицательная геострофическая адвекция* (адвекция холода), а правому повороту ($\alpha < 0$) — положительная адвекция (адвекция тепла).

Для определения адвекции пользоваться формулой (3.3.3) не совсем удобно, так как необходимо знать градиент давления, градиент температуры и угол между ними. Ранее было показано, что соотношение между градиентом давления и температуры определяет характер изменения ветра с высотой. С учетом этого целесообразно выразить геострофическую адвекцию через изменение направления ветра с высотой. Обозначим через β угол, определяющий направление ветра. Выразим в (3.3.1) градиент температуры

* Угол считается положительным, если он отсчитывается от неподвижного луча к подвижному против часовой стрелки.

через изменение геострофического ветра с высотой на основании (3.2.3), считая $T_b = \bar{T}_b = \bar{T}$ и пренебрегая dT_b/dz :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} = \frac{2\omega_z \bar{T}}{g} \frac{\partial v_g}{\partial z}, \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = -\frac{2\omega_z \bar{T}}{g} \frac{\partial u_g}{\partial z}; \quad (3.3.4)$$

в таком случае формула для геострофической адвекции примет вид

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{c.a} = -\frac{2\omega_z \bar{T}}{g} \left(u_g \frac{\partial v_g}{\partial z} - v_g \frac{\partial u_g}{\partial z}\right) \quad (3.3.5)$$

или с учетом того, что $u_g = G \cdot \cos \beta$, $v_g = G \cdot \sin \beta$, получим после некоторых преобразований

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{c.a} = -\frac{2\omega_z \bar{T}}{g} G^2 \cdot \frac{\partial^2 \beta}{\partial z^2}.$$

Эта формула позволяет определить $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{c.a}$ по данным шароплотных наблюдений, что особенно ценно в экспедиционных и морских условиях, когда нет синоптических карт.

Контрольные вопросы

1. Что такое геострофический ветер? Как он направлен относительно изобары (изогипсы)?
2. Что происходит с геострофическим ветром вблизи экватора?
3. Что такое градиентный ветер? Как он направлен в циклоне и антициклоне? Какое ограничение существует на градиент давления в антициклоне северного полушария?
4. Что такое термический ветер? Как он направлен относительно изотермы (изогипсы)?
5. Изменяется ли с высотой термический ветер при постоянном по высоте горизонтальном градиенте температуры?
6. Какой будет характер адвекции (тепла или холода) при правом повороте геострофического ветра с высотой?

4. ПЛАНЕТАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ И ПРИЗЕМНЫЙ СЛОИ АТМОСФЕРЫ

4.1. Общая формулировка задачи о строении планетарного пограничного слоя атмосферы

1 Планетарным пограничным слоем (ППС) атмосферы называется нижний 1,5—2,0 км. слой, в пределах которого распределение метеорологических величин определяется непосредственным влиянием подстилающей поверхности и турбулентностью. Наиболее четко это можно проследить в вертикальном распределении ско-

рости ветра. Скорость ветра равна нулю на подстилающей поверхности* и стремится к геострофической на верхней границе пограничного слоя атмосферы (для горизонтально-однородных условий и прямолинейных изобар). Характер вертикального распределения скорости ветра между этими двумя уровнями определяется турбулентностью, которая вызывает обмен количеством движения между различными слоями и сглаживает профиль ветра (рис. 16).

Влияние подстилающей поверхности на вертикальный профиль температуры и влажности в пограничном слое атмосферы выражено менее четко в связи со значительным влиянием других, меняющихся в широких пределах, факторов. Например, суточные колебания коротковолновой радиации качественно меняют распределение температуры, тогда как профиль ветра, по крайней мере качественно, не изменяется. В теплом и влажном относительно подстилающей поверхности воздухе может происходить не уменьшение, а увеличение температуры и удельной влажности с высотой. Как и в случае скорости ветра, турбулентность приводит к сглаживанию профилей температуры и влажности.

При оценке влияния турбулентности следует, однако, помнить, что она не только определяет характер вертикальных профилей метеорологических величин, но и в свою очередь зависит от градиентов этих величин. В действительности поля метеорологических величин и турбулентный обмен изменяются взаимосвязанно под влиянием внешних факторов. К числу последних можно отнести приток солнечной радиации, горизонтальный градиент давления, интенсивность обмена свойствами между пограничным слоем, свободной атмосферой и верхними слоями почвы. Изменение внешних факторов, приводя к изменению профиля одной из метеорологических величин, благодаря взаимодействию полей, вследствие турбулентности или в результате лучистого теплообмена сказывается на вертикальном распределении других величин. Например, увеличение притока солнечной радиации к земной поверхности приводит к повышению ее температуры, при этом возрастает вертикальный градиент температуры в атмосфере, и усиливается турбулентность; за счет увеличения турбулентности происходит уменьшение градиентов температуры и скорости ветра, и это вызывает ослабление турбулентности. Взаимосвязанные изменения полей темпера-

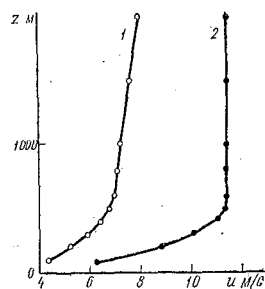


Рис. 16. Профили средней месячной скорости ветра на станции Воейково при слабой (2 — зима) и сильной (1 — лето) турбулентности.

* Вблизи водной поверхности скорость ветра равна скорости поверхностного течения, составляющей для чисто дрейфовых течений около 2—4% от скорости ветра на уровне стандартных наблюдений.

туры, влажности, скорости ветра и турбулентности будут продолжаться до тех пор, пока не установятся такие их распределения, которые обеспечат тепловое и динамическое равновесие системы воздух — деятельная поверхность для данного притока радиации и скорости поступления водяного пара в атмосферный пограничный слой.

Наличие тесной взаимосвязи между полями метеорологических величин и турбулентности делает необходимым определение их из решения совместной системы дифференциальных уравнений и граничных условий.

Обычно при описании ППС (как сравнительно тонкого слоя атмосферы) плотность воздуха считается заданной постоянной, а градиент давления (или соответствующий ему градиентный, геострофический ветер) предполагается связанным с крупномасштабной циркуляцией и также принимается известным.

С учетом сказанного выше система уравнений для описания ППС может быть получена из замкнутой системы (2.8.1—2.8.5, 2.6.7, 2.6.14, 2.7.24', 2.7.35, 2.7.37, 2.7.38) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2(\omega_z v - \omega_y w) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} k_l \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_l \frac{\partial u}{\partial y}; \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + 2(\omega_x w - \omega_z u) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} k_l \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_l \frac{\partial v}{\partial y}; \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (4.1.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \alpha_r k \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_p \right) + \frac{\partial}{\partial x} k_l \frac{\partial T}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} k_l \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{L}{c_p} \frac{m}{\rho}; \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \alpha_q k \left(\frac{\partial q}{\partial z} + \gamma_q \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x} k_l \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_l \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{m}{\rho}; \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

$$k = l \sqrt{b}; \quad (4.1.6)$$

$$\frac{db}{dt} = k \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{g}{T_u} \alpha_T k \left(\frac{\partial T_u}{\partial z} + \gamma_p \right) - c \frac{b \sqrt{b}}{l} + \frac{\partial}{\partial z} \alpha_b k \frac{db}{dz}; \quad (4.1.7)$$

$$l = -\tilde{z} \cdot \frac{\psi}{d\psi/dz}, \quad \tilde{z} = 2z c'^{1/4}; \quad (4.1.8)$$

$$\psi = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 - \alpha_T \frac{g}{T_u} \left(\frac{\partial T_u}{\partial z} + \gamma_p \right). \quad (4.1.9)$$

В выписанной системе уравнений содержится девять неизвестных величин ($u, v, w, \theta, q, k, l, b, \psi$), т. е. она является замкнутой (считается, что $k, \alpha_T, \alpha_q, \alpha_b, \gamma_p, \gamma_q$ заданные постоянные или известные функции от других неизвестных величин) и, в принципе, при формулировке соответствующих граничных и начальных условий позволяет определить все неизвестные величины.

Так как систему (4.1.1—4.1.9) в полном виде решать очень трудно, то на ее основе формулируют различные упрощенные модели ППС, обладающие разной степенью полноты учета всех влияющих факторов. Обычно в таких моделях считается, что $\frac{db}{dt} \rightarrow 0$,

т. е. характеристики турбулентности зависят от времени и координат только параметрически, предполагается отсутствие фазовых переходов, пренебрегается горизонтальными турбулентными потоками и предполагается $\varphi > 5-10^\circ$.

Из большого многообразия таких моделей рассмотрим в дальнейшем следующие модели.

8 1. Модели стационарного, горизонтально-однородного ППС с априорным заданием профиля коэффициента турбулентности и с определением его профиля на основании замкнутой системы уравнений (нелинейная модель).

7 2. Модель горизонтально-неоднородного ППС при $k = \text{const}$. Рассмотрение ППС естественно начать с моделей стационарного, горизонтально-однородного пограничного слоя, для которого система уравнений (4.1.1—4.1.9) заметно упрощается в соответствии с 2.9.

Если считать градиент давления внешним параметром, определяемым по измерениям или на основании гидродинамического прогноза крупномасштабных полей, то, выражая его через географический ветер, можно записать уравнения движения (4.1.1—4.1.2) в виде

$$\frac{d}{dz} k \frac{du}{dz} + 2\omega_z (v - v_g) = 0; \quad (4.1.10)$$

$$\frac{d}{dz} k \frac{dv}{dz} - 2\omega_z (u - u_g) = 0, \quad (4.1.11)$$

или в векторной форме

$$\vec{F}_{\text{тр}} + \vec{F}_p + \vec{F}_k = 0. \quad (4.1.12)$$

Уравнение неразрывности (4.1.3) сохраняет свой вид.

Уравнение притока тепла (4.1.4) удобно записать в форме (при $\gamma_p = \gamma_a$)

$$\frac{d}{dz} \alpha_T k \frac{d\theta}{dz} + \frac{1}{\rho c_p} \frac{d\Phi}{dz} = 0, \quad (4.1.13)$$

где $\frac{1}{\rho c_p} \frac{d\Phi}{dz}$ — сумма радиационного и фазового притока тепла.

Этот член, в принципе, в первом приближении можно выразить через другие искомые величины θ и q , однако, это привело бы к значительному усложнению задачи. При интегрировании (4.1.13) получаем

$$\alpha_T k \frac{d\theta}{dz} = - \frac{P(z)}{\rho c_p}, \quad (4.1.13')$$

где $\frac{P(z)}{\rho c_p}$ — переменный по высоте кинематический турбулентный поток тепла, равный интегралу от суммы радиационного и фазового притока тепла.

Аналогично уравнение притока водяного пара (4.1.5), записанное в виде (при $\gamma_q = 0$),

$$\frac{d}{dz} \alpha_q k \frac{dq}{dz} + \frac{1}{\rho} \frac{dF}{dz} = 0, \quad (4.1.14)$$

где $\frac{1}{\rho} \frac{dF}{dz} = \frac{m}{\rho}$ — фазовый приток водяного пара, предполагает, что

$$\alpha_q k \frac{dq}{dz} = - \frac{E(z)}{\rho}, \quad (4.1.14')$$

где $\frac{E(z)}{\rho}$ — переменная по высоте кинематическая скорость испарения, равна интегралу от фазового притока водяного пара. Для замыкания системы используем (4.1.6), (4.1.7) при $\frac{db}{dt} = 0$,

(4.1.8) и (4.1.9).

Так как даже полученная выше система уравнений (4.1.10—4.1.11, 4.1.13', 4.1.14', 4.1.6—4.1.9) остается довольно сложной для решения (характеристики турбулентности связаны с вертикальными профилями метеорологических величин сложными нелинейными зависимостями), то целесообразно вначале рассмотреть случаи, когда ее удастся упростить и получить обозримые

аналитические решения. Это оказывается возможным при рассмотрении малых высот или при использовании некоторых априорных гипотез относительно профиля коэффициента турбулентности в пограничном слое. Начнем с рассмотрения малых высот.

4.2. Стационарный, горизонтально-однородный приземный слой атмосферы

Упрощение системы уравнений для малых z

Слой вблизи поверхности земли (толщиной около 10—100 м) часто называется **приземным слоем** (или подслоем). Здесь, как правило, наблюдаются максимальные градиенты метеорологических величин. Важной особенностью приземного слоя, в значительной мере оправдывающей выделение его в рамках пограничного слоя, является относительное постоянство по высоте турбулентных потоков.

Хотя процессы в этом слое тесно связаны с процессами во всем пограничном слое, часто для решения ряда важных задач достаточно установить внутренние связи между метеорологическими величинами и характеристиками турбулентности в одном только приземном слое.

Получим систему уравнений для приземного слоя. Проинтегрируем от z_0 (уровень шероховатости) до z уравнения (4.1.10—4.1.11):

$$k \left. \frac{du}{dz} \right|_z - k \left. \frac{du}{dz} \right|_{z_0} + \int_{z_0}^z 2\omega_z (v - G \sin \alpha) dz = 0, \quad (4.2.1)$$

$$k \left. \frac{dv}{dz} \right|_z - k \left. \frac{dv}{dz} \right|_{z_0} - \int_{z_0}^z 2\omega_z (u - G \cos \alpha) dz = 0,$$

где α — угол между геострофическим ветром и осью x . Можно показать, что у поверхности земли касательное напряжение направлено вдоль приземного ветра. Действительно, если в общем случае α' — угол между направлением приземного ветра и осью x , а α'' — угол между направлением касательного напряжения и осью x , то

$$\operatorname{tg} \alpha' = \left. \frac{v}{u} \right|_{z \rightarrow 0} = \left. \frac{dv/dz}{du/dz} \right|_{z \rightarrow 0}^*; \quad \operatorname{tg} \alpha'' = \left. \frac{\tau_y}{\tau_x} \right|_{z \rightarrow 0} = \left. \frac{dv/dz}{du/dz} \right|_{z \rightarrow 0}.$$

В таком случае, если ось x направить вдоль приземного ветра, то

$$k \left. \frac{dv}{dz} \right|_{z_0} = 0, \quad k \left. \frac{du}{dz} \right|_{z_0} = \frac{\tau}{\rho} = v_*^2. \quad (4.2.2)$$

* Над поверхностью воды $\operatorname{tg} \alpha' = \left. \frac{v}{u} \right|_{z \rightarrow 0} = \frac{v_0}{u_0}$, где u_0, v_0 — компоненты скорости поверхностного течения.

где v_* — имеет размерность скорости и называется динамической скоростью (или скоростью трения).

Используя (4.2.2) и переходя в правой части (4.2.1) к безразмерным переменным $\left(u_n = \frac{u}{G}, v_n = \frac{v}{G}, z_n = \frac{z}{h}, \text{ где } h \text{ — высота приземного слоя}\right)$, получим:

$$\frac{k \frac{du}{dz} \Big|_z}{v_*^2} = 1 - \frac{2\omega_z Gh}{v_*^2} (\bar{v}_n - \overline{\sin \alpha}) z_n,$$

$$\frac{k \frac{dv}{dz} \Big|_z}{v_*^2} = \frac{2\omega_z Gh}{v_*^2} (\bar{u}_n - \overline{\cos \alpha}) z_n,$$

где чертой обозначены средние по высоте величины. Так как безразмерные величины имеют порядок единицы и, кроме того $\overline{\cos \alpha} = 0(1)$, $\overline{\sin \alpha} \ll 1$ (по наблюдениям $\bar{\alpha} = 10-15^\circ$), то

$$\frac{k \frac{du}{dz} \Big|_z}{v_*^2} = 1 - \frac{2\omega_z Gh}{v_*^2} 0(1), \quad \frac{k \frac{dv}{dz} \Big|_z}{v_*^2} = \frac{2\omega_z Gh}{v_*^2} [0(1) - 0(1)].$$

Из первого уравнения можно оценить высоту приземного слоя h , которая должна удовлетворять условию

$$\frac{2\omega_z Gh}{v_*^2} \ll 1 \quad (4.2.3)$$

(при $2\omega_z = 10^{-4}$, $G = 10$ м/с, $v_*^2 = 10^{-1}$ м²/с², $h \ll 100$ м). Таким образом, в пределах приземного слоя $\frac{v}{u} \ll 1$, т. е. направление ветра практически не изменяется и для определения скорости ветра можно использовать уравнение

$$k \frac{du}{dz} = v_*^2 \quad (4.2.4)$$

(полагая, что ось x совпадает с направлением ветра), которое означает, что при $z \ll h$ можно не учитывать силу Кориолиса и движение воздуха рассматривать как одномерное.

Проинтегрируем теперь от z_0 до z уравнение притока тепла (4.1.13):

$$\alpha_T k \left. \frac{d\theta}{dz} \right|_z - \alpha_T k \left. \frac{d\theta}{dz} \right|_{z_0} = - \frac{\Phi(z) - \Phi(0)}{\rho c_p}.$$

Если обозначить через P_0 — турбулентный поток тепла в приземном слое (или у поверхности земли)

$$P_0 = - \rho c_p \alpha_T k \left. \frac{d\theta}{dz} \right|_{z_0} \quad (4.2.5)$$

и представить $\Phi(z) = \Phi(0) + \left. \frac{d\Phi}{dz} \right|_{z_0} \cdot z + \dots$, тогда

$$\frac{\alpha_T k \left. \frac{d\theta}{dz} \right|_z}{P_0 / \rho c_p} = -1 - \frac{1}{P_0} \left. \frac{d\Phi}{dz} \right|_{z_0} z.$$

Отсюда для малых z ($z \ll \left. \frac{P_0}{d\Phi/dz} \right|_{z_0}$) получаем

$$\alpha_T k \frac{d\theta}{dz} = - \frac{P_0}{\rho c_p}. \quad (4.2.6)$$

Уравнение (4.2.6) означает, что в пределах приземного слоя можно пренебречь радиационным и фазовым притоками тепла. Для морских условий лучистый приток тепла может играть важную роль в формировании распределения температуры даже в прилегающем к поверхности (приводном) слое.

По аналогии с (4.2.6) можно получить из (4.1.14) уравнение для определения массовой доли водяного пара:

$$\alpha_q k \frac{dq}{dz} = - \frac{E_0}{\rho}, \quad (4.2.7)$$

где E_0 — скорость испарения. Уравнение (4.2.7) означает, что в приземном слое можно пренебречь притоком влаги за счет фазовых переходов.

С учетом выражений (4.2.4) и (4.2.7) уравнения (4.1.6—4.1.9) можно записать в виде:

$$\frac{v_s^4}{k} + \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho c_p} - z \frac{b^2}{k} = 0; \quad (4.2.8)$$

$$k = l \sqrt{b}; \quad (4.2.9)$$

$$l = - \tilde{\kappa} \cdot \frac{\psi}{d\psi/dz}, \quad (4.2.10)$$

где

$$\psi = \frac{v_*^4}{k^2} + \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho c_p k}. \quad (4.2.11)$$

В (4.2.8) считается, что поскольку при $z=z_0$ турбулентный поток кинетической энергии турбулентности равен нулю, то для малых z диффузией можно пренебречь (о некоторых эффектах, связанных с влиянием диффузии, будет сказано в конце данного параграфа).

Полученная система уравнений (4.2.4, 4.2.6—4.2.11) позволяет определить все интересующие нас характеристики приземного слоя. Постоянные интегрирования должны быть определены из граничных условий:

$$\text{при } z = z_0 \quad u = 0, \quad \theta = \theta(0), \quad q = q(0), \quad k = k(0). \quad (4.2.12)$$

Параметры v_* , P_0 , E_0 предполагаются известными. Они могут быть также определены после интегрирования уравнений, если u , θ , q известны на какой-либо высоте, например, из градиентных наблюдений.

Прежде чем непосредственно решать выписанную систему уравнений, рассмотрим подход, основанный на использовании теории подобия и анализа размерностей.

Модель, основанная на теории подобия

Рассмотрим вначале только уравнения (4.2.4, 4.2.6, 4.2.7), в них содержится четыре неизвестные величины: u , θ , q , k и для замыкания системы необходимо получить дополнительное соотношение для определения k .

Анализ остальных уравнений полученной ранее замкнутой системы показывает, что искомая величина коэффициента турбулентности в приземном слое должна зависеть от следующих параметров: v_* , $\frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho c_p}$ и z (если считать влажность пассивной субстанцией), т. е.

$$k = f \left(v_*, \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho c_p}, z \right). \quad (4.2.13)$$

Используя для определения вида зависимости (4.2.13) π -теорему анализа размерности, получаем (см. приложение):

$$k = v_* z F_1 \left(\frac{\frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho c_p} z}{v_*^3} \right). \quad (4.2.14)$$

Если обозначить через L комбинацию, имеющую размерность длины:

$$L = - \frac{v_*^3}{\kappa \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho c_p}} \text{ — масштаб Монина—Обухова,} \quad (4.2.15)$$

получим выражение для коэффициента турбулентности в виде

$$k = v_* z F \left(\frac{z}{L} \right). \quad (4.2.16)$$

В (4.2.15) постоянная Кармана (κ) введена для удобства некоторых последующих выкладок, а знак выбран так, чтобы $L > 0$ при устойчивой стратификации.

Установим связь между $\frac{z}{L}$ и используемым обычно для описания влияния стратификации числом Ричардсона, которое характеризует отношение энергии турбулентности, возникающей за счет сил плавучести, к продукции энергии турбулентности за счет среднего движения. Воспользуемся следующим выражением для числа Ричардсона (через потоки):

$$Rf = - \frac{\frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho c_p}}{\tau \frac{du}{dz}}$$

или с учетом того, что

$$\tau = \rho v_*^2, \quad \frac{du}{dz} = \frac{v_*^2}{k} = \frac{v_*}{z F \left(\frac{z}{L} \right)},$$

получим

$$Rf = \frac{1}{\kappa} \frac{z}{L} F \left(\frac{z}{L} \right). \quad (4.2.17)$$

Из (4.2.17) видно, что $\frac{z}{L}$ однозначно связано с числом Ричардсона. Знак и численное значение введенного масштаба L характеризует состояние устойчивости ($L = \infty$ при безразличном равновесии, $L > 0$ при устойчивой и $L < 0$ при неустойчивой стратификации). Однако все характеристики приземного слоя зависят не от L , а от $\frac{z}{L}$ — это означает, что для малых высот все величины ведут себя так, как будто $L = \infty$, т. е. в области малых z практически не зависят от стратификации. Более глубокий анализ пока-

зывает, что это следствие преобладающей роли динамических факторов на режим турбулентного потока вблизи стенки.

Соотношение (4.2.16) позволяет замкнуть систему уравнений (4.2.4, 4.2.6, 4.2.7), если известен вид функции $F\left(\frac{z}{L}\right)$.

Рассмотрим некоторые частные случаи, при которых удается получить явный вид функции $F\left(\frac{z}{L}\right)$.

Безразличная стратификация

Так как при этом $P_0 = 0$, то $L = \infty$ и $\frac{z}{L} = 0$. Измерения в аэродинамических трубах и приземном слое показывают, что $F(0) = \kappa$ ($\kappa \approx 0,40$), в таком случае из (4.2.16) для $z \geq z_0$ получаем

$$k = \kappa v_* z. \quad (4.2.18)$$

Если подставить (4.2.18) в (4.2.4), (4.2.7) и проинтегрировать их при условии (4.2.12) от z_0 до z , получим при $\alpha_q = \text{const}$:

$$u = \frac{v_*}{\kappa} \ln z/z_0, \quad q - q(0) = -$$

$$- \frac{E_0}{\rho \alpha_q \kappa v_*} \ln z/z_0. \quad (4.2.19)$$

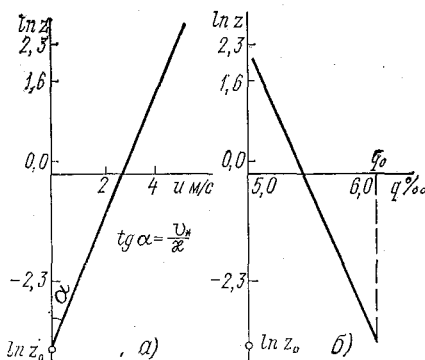


Рис. 17. Профили скорости ветра (а) и удельной влажности (б) при безразличной стратификации.

При наличии данных градиентных измерений можно исключить v_* и E_0 , тогда получим:

$$u = u_1 \frac{\ln z/z_0}{\ln z_1/z_0}, \quad q - q(0) = (q_2 - q_1) \frac{\ln z/z_0}{\ln z_2/z_1}. \quad (4.2.20)$$

Итак, в случае безразличной стратификации коэффициент турбулентности является линейной, а профили метеорологических величин — логарифмическими функциями высоты (рис. 17). Из (4.2.19) и (4.2.20) можно получить выражения турбулентных потоков τ и E_0 , пригодные для расчета соответствующих величин по градиентным наблюдениям.

Стратификация, близкая к безразличной

При этом турбулентный поток мал (а значит $\frac{z}{L} \ll 1$) и $F\left(\frac{z}{L}\right)$ целесообразно разложить в ряд Маклорена. Ограничиваясь первыми двумя членами ряда (так как $\frac{z^2}{L^2}$ уже величина второго порядка малости) и внося за знак скобки $F(0) = \kappa$, получим:

$$F\left(\frac{z}{L}\right) = \kappa \left(1 - \beta \frac{z}{L}\right), \quad \beta = \frac{F'(0)}{F(0)}$$

(по современным наблюдениям β изменяется в широких пределах: от 0,6 до 10 в зависимости от степени малости $\frac{z}{L}$; для расчетов можно брать $\beta \approx 2,0-4,0$).

В таком случае (4.2.16) примет вид

$$k = \kappa v_* z \left(1 - \beta \frac{z}{L}\right). \quad (4.2.21)$$

Из (4.2.21) видно, что при неустойчивой стратификации ($L < 0$) коэффициент турбулентности больше, чем при устойчивой ($L > 0$).

Выражения для профилей метеорологических величин получаются, если подставить (4.2.21) в (4.2.4, 4.2.6, 4.2.7), проинтегрировать их от z_0 до z (при $\alpha_T = \text{const}$, $\alpha_q = \text{const}$) и ограничиться главными членами:

$$u = \frac{v_*}{\kappa} \left(\ln \frac{z}{z_0} + \beta \frac{z}{L} \right), \quad (4.2.22)$$

$$\theta = \theta(0) + T_* \left(\ln \frac{z}{z_0} + \beta \frac{z}{L} \right),$$

$$q = q(0) + q_* \left(\ln \frac{z}{z_0} + \beta \frac{z}{L} \right),$$

где

$$T_* = -\frac{P_0}{\rho c_p \alpha_T \kappa v_*}, \quad q_* = -\frac{E_0}{\rho \alpha_q \kappa v_*} \quad (4.2.23)$$

(характерные масштабы температуры и удельной влажности в приземном слое).

Следовательно, при стратификации, близкой к безразличной, получаются линейно-квадратичные профили k и линейно-логарифмические профили u , θ и q . Очевидно, что при устойчивой стратификации градиенты метеорологических величин больше, чем при неустойчивой (рис. 18).

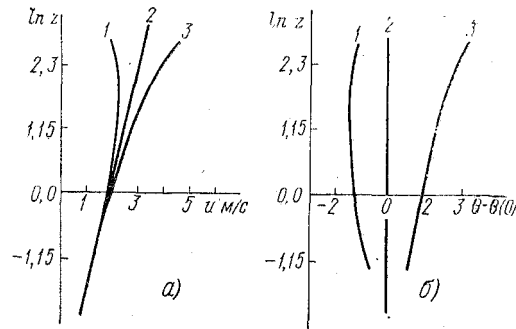


Рис. 18. Профили скорости ветра (а) и температуры (б) при стратификации, близкой к безразличной:
1 — $P_0 = 35$ Вт/м²; 2 — $P_0 = 0,0$ Вт/м²; 3 — $P_0 = -35$ Вт/м².

Свободная конвекция

В случае свободной конвекции $v_* \rightarrow 0$ и $L \rightarrow 0$ (так как турбулентность возникает только за счет плавучести). Поскольку k не может быть равным нулю или бесконечности, то v_* не должно входить в формулу (4.2.16). Этому условию отвечает следующее выражение для $F \left(\frac{z}{L} \right)$:

$$F \left(\frac{z}{L} \right) = A_1 \left(\frac{z}{L} \right)^{3/2} = A_2 \frac{z^{3/2}}{v_*},$$

при этом

$$k = A_2 \cdot z^{1/2}, \quad (4.2.24)$$

где

$$A_2 = A_1 \left(\kappa \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho c_p} \right)^{1/2}.$$

Профили θ и q определяются следующими соотношениями (при $\alpha_T = \text{const}$, $\alpha_q = \text{const}$):

$$\begin{aligned} \theta &= \theta(0) + B_1 (z^{-3/2} - z_0^{-3/2}), \\ q &= q(0) + B_2 (z^{-3/2} - z_0^{-3/2}), \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

где

$$B_1 = \frac{3 P_0}{A_2 \alpha_T \rho c_p}; \quad B_2 = \frac{3 E_0}{A_2 \alpha_q \rho}.$$

Итак, при свободной конвекции получаются степенные профили k , θ и q .

Предельно-устойчивое состояние (инверсия)

При предельно-устойчивой стратификации становится невозможным существование крупных вихрей (такие возмущения должны затрачивать очень много энергии на работу против сил плавучести) и турбулентность может существовать лишь в форме мелких вихрей. В таком случае турбулентный обмен между различными слоями воздуха затруднен, и турбулентность приобретает локальный характер, близость стенки перестает влиять на режим турбулентности, а значит коэффициент турбулентности не должен зависеть от z . Это означает, что в предельно-устойчивом стратифицированном (но все еще турбулентном) потоке $F\left(\frac{z}{L}\right) = D_1 L z^{-1}$, тогда

$$k = D_1 v_* L, \quad (4.2.26)$$

где D_1 — коэффициент пропорциональности.

Нетрудно показать, что при этом получаются линейные профили u , θ и q (при $\alpha_T = \text{const}$, $\alpha_q = \text{const}$):

$$u = \frac{v_*}{D_1 L} z, \quad \theta = \theta(0) - D_2 z, \quad q = q(0) - D_3 z, \quad (4.2.27)$$

где

$$D_2 = \frac{P_0}{D_1 \alpha_T \rho c_p v_* L}; \quad D_3 = \frac{E_0}{D_1 \alpha_q \rho v_* L}.$$

Наряду с приведенными выше формулами для профилей метеорологических величин при некоторых предельных условиях стратификации, имеются и интерполяционные формулы для промежуточных стратификаций, которые, правда, имеют более сложный вид.

На примере рассмотренного выше подхода хорошо видна эффективность использования теории подобия и анализа размерностей при решении задач с небольшим числом параметров.

Более строгий подход основан на использовании универсальных функций. Согласно теории подобия безразмерные градиенты u , θ и q должны быть в данном случае универсальными функциями одного безразмерного комплекса $\xi = \frac{z}{L}$, т. е. с учетом (4.2.23) (без α_T и α_q)

$$\frac{z}{v_*} \frac{\partial u}{\partial z} = \Phi_m(\xi), \quad \frac{z}{T_*} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \Phi_n(\xi), \quad \frac{z}{q_*} \frac{\partial q}{\partial z} = \Phi_q(\xi) \quad (*)$$

Наиболее тщательные определения этих функций дают (при $\kappa = 0,35$)

$$\begin{aligned} \Phi_m &= 1 + 4,7 \xi, \\ \Phi_h &= 0,74 + 4,7 \xi \end{aligned} \quad \text{при } \xi > 0;$$

$$\begin{aligned} \Phi_m &= (1 - 15 \xi)^{-\kappa} \\ \Phi_h &= 0,74 (1 - 9 \xi)^{-\kappa} \end{aligned} \quad \text{при } \xi < 0.$$

С учетом этих выражений можно, интегрируя (*), получить профили u и θ .

Обратим внимание также на то, что при выводе (4.2.16) массовая доля водяного пара считалась пассивной субстанцией. В действительности устойчивость стратификации зависит не только от градиента потенциальной температуры, но и градиента массовой доли водяного пара, т. е. в общем случае от градиента плотности. Поэтому коэффициент турбулентности нужно считать функцией

следующих параметров: v_* , $\frac{g}{\rho} \frac{F_\rho}{\rho}$, z , где $F_\rho = \rho \alpha_\rho k \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} + \gamma_\rho \right)$ — поток плотности, γ_ρ — равновесный градиент плотности и тогда $k = F_1 \left(v_*, \frac{g}{\rho} \frac{F_\rho}{\rho}, z \right)^*$

Используя л-теорему (см. приложение), получаем

$$k = v_* z F \left(\frac{z}{L} \right), \quad (4.2.16')$$

где

$$\tilde{L} = - \frac{v_*^3}{\kappa \frac{g}{\rho} \frac{F_\rho}{\rho}} \quad (4.2.15')$$

(знак минус поставлен, чтобы при устойчивой стратификации плотности, $F_\rho < 0$, было $\tilde{L} > 0$).

Из уравнения состояния для частицы влажного воздуха

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} + \frac{1}{T_B} \frac{dT_B}{dz}.$$

Если для малых высот пренебречь относительным изменением давления, то при $\frac{d\rho}{dz} = -\gamma_\rho$; $\frac{dT_B}{dz} = -\gamma_a$ получаем

$$\gamma_\rho = - \frac{\rho}{T_B} \gamma_a, \quad (4.2.28)$$

где T_B — виртуальная температура (практически $T_B = T$); γ_a — сухоадиабатический градиент. В таком случае поток плотности можно записать в виде

$$F_\rho = \rho \alpha_\rho k \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\rho}{T} \gamma_a \right). \quad (4.2.29)$$

Установим теперь связь между масштабами L и \tilde{L} , и оценим диапазон условий, для которых различие между ними может быть существенным. Используем для \tilde{L} (4.2.15') и для потока плотности (4.2.29), подставим для ρ выра-

* Если турбулентные потоки тепла и влаги в приземном слое не зависят от высоты, то в число параметров можно включить турбулентный поток плотности у поверхности земли.

жение из уравнения состояния влажного воздуха (2.2.8). В таком случае, если пренебречь в пределах приземного слоя $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$, а градиенты температуры и влажности выразить через соответствующие потоки (считая $\alpha_T = \alpha_q = \alpha_p$), то

$$\frac{1}{\tilde{L}} = - \frac{g}{T} \frac{1}{v_*^3} \left(\frac{P_0}{\rho c_p} + 0,605 T \frac{E_0}{\rho} \right) z.$$

Переходя к потоку скрытого тепла ($L E_0$) и вынося за скобку $\frac{P_0}{\rho c_p}$, получим

$$\frac{1}{\tilde{L}} = - \frac{g}{T} z \frac{P_0 / c_p}{v_*^3} \left(1 + \frac{a}{Bo} \right)$$

или с учетом (4.2.15)

$$\tilde{L} = \frac{L}{1 + \frac{a}{Bo}}, \quad (4.2.30)$$

где

$$a = \frac{0,605 T c_p}{L} \approx 0,07.$$

$Bo = \frac{P_0}{L E_0}$ — отношение Боуэна, которое при условии подобия профилей температуры и влажности вплоть до самой подстилающей поверхности, можно записать в форме:

$$Bo = \frac{c_p}{L} \frac{t_z - t(0)}{q_z - q(0)}. \quad (4.2.31)$$

Для суши испарение обычно мало, а значит велико Bo и $\tilde{L} = L$. Для условий океана Bo изменяется от 0,1 вблизи экватора до 1,0 в умеренных широтах.

Таким образом, \tilde{L} может в два раза отличаться от L и нетрудно проследить влияние этого факта на профили метеорологических величин и коэффициента турбулентности. Так как для морских условий знаменатель в (4.2.31) обычно меньше нуля, то знак Bo определяется характером термической стратификации: при неустойчивой стратификации $Bo > 0$ и $\tilde{L} < L$, при устойчивой стратификации $Bo < 0$ и $\tilde{L} > L$.

Задача. Оценить максимальную относительную ошибку определения параметра шероховатости по значениям скорости ветра на $z_1 = 5$ м, $z_2 = 15$ м, считая, что $u_5 = 5$ м/с, $u_{15} - u_5 = 0,8$ м/с, а ошибка измерения скорости ветра $\pm 0,1$ м/с (стратификация безразличная). На основании (4.2.20)

$$\ln z_0 = \frac{u_2 \ln z_1 - u_1 \ln z_2}{u_2 - u_1}, \quad \text{или} \quad z_0 = z_1 \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{\frac{u_1}{u_2 - u_1}}.$$

Продифференцируем это выражение (считая, что уровни измерения определяются точно) и после простых преобразований получим

$$\frac{a z_0}{z_0^2} = \frac{u_2 du_1 - u_1 du_2}{(u_2 - u_1)^2} (\ln z_1 - \ln z_2)$$

Условием максимума ошибки в z_0 является $du_2 = -du_1$, т. е.

$$\left(\frac{dz_0}{z_0}\right)_{\max} = \pm \frac{(u_1 + u_2) du}{(u_2 - u_1)^2} (\ln z_1 - \ln z_2) = \pm 186\%.$$

Задача. Определить коэффициент турбулентности на высоте $z_1 = 5$ м, если $v_* = 0,30$ м/с, $P_0 = 0,05$ кал/(см²·мин), $\bar{T} = 290$ К, $\rho = 1,3$ кг/м³, $\beta = 4,0$.

Вспользуемся (4.2.21) и определим вначале коэффициент турбулентности при безразличной стратификации $k_0 = 0,6$ м²/с.

Вычислим теперь L согласно (4.2.15): $L = -75$ м. В таком случае из (4.2.21) $k = 0,76$ м²/с.

Нелинейная модель приземного слоя

Рассмотрим теперь всю систему уравнений (4.2.4, 4.2.6—4.2.11), так как она замкнута, то ее решение не должно содержать неопределенных множителей (β , A_i , B_i , D_i), и искомые величины должны выражаться через универсальные функции от параметров v_* , $\frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho c_p}$, $\frac{E_0}{\rho}$, z , описывающие режим приземного слоя при любых состояниях стратификации. Согласно рассмотренной теории подобия можно ожидать, что параметры задачи должны входить в виде безразмерного комплекса. Выразим все переменные величины $s = \{u, \theta, k, q, b, l, z\}$ через масштаб s_0 и безразмерную величину s_n . Поскольку в данном случае речь не идет об исследовании возможности упрощения уравнений, то нет строгой необходимости в требовании $s_n = O(1)$ и соответствующем выборе масштаба для s . Определим масштабы s_0 таким образом, чтобы в безразмерном виде система не содержала параметров v_* , P_0 и других, т. е. на основе следующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{k_0 u_0}{L_0} &= v_*^2, & \frac{k_0 \theta_0}{L_0} &= -\frac{P_0}{\rho c_p}, & \frac{k_0 q_0}{L_0} &= -\frac{E_0}{\rho}, \\ k_0 &= l_0 \sqrt{b_0}, & l_0 &= \alpha c^{1/2} L_0, & \frac{v_*^4}{k_0} &= c \frac{b_0^2}{k_0}, \\ \frac{v_*^4}{k_0} &= -\frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho c_p}. \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{u}{u_n} = \frac{v_*}{z}, & b_0 &= \frac{b}{b_n} = c^{-1/2} v_*^2, & \theta_0 &= \frac{\theta}{\theta_n} = T_* = -\frac{P_0}{\rho c_p \alpha v_*}, \\ q_0 &= \frac{q}{q_n} = q_* = -\frac{E_0}{\rho \alpha v_*}, & k_0 &= \frac{k}{k_n} = \alpha v_* L_0, \\ l_0 &= \frac{l}{l_n} = \alpha c^{1/2} L_0, & L_0 &= L = -\frac{v_*^3}{\alpha \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho c_p}}. \end{aligned} \quad (4.2.33)$$

С учетом (4.2.33) исходная система может быть записана в виде:

$$k_n \frac{d u_n}{d z_n} = 1, \quad \alpha_T k_n \frac{d \theta_n}{d z_n} = 1, \quad \alpha_q k_n \frac{d q_n}{d z_n} = 1,$$

$$\frac{1}{k_n} - 1 - \frac{b_n^2}{k_n} = 0, \quad k_n = l_n \sqrt{b_n}, \quad (4.2.34)$$

$$l_n = 2 \frac{k_n (1 - k_n)}{2 - k_n} \frac{d z_n}{d k_n}.$$

Если исключить из последних трех уравнений l_n и b_n , то

$$\frac{d k_n}{d z_n} = \frac{2 (1 - k_n)^{3/2}}{2 - k_n}. \quad (4.2.35)$$

Интегрируя это уравнение при условии $\lim_{z_n \rightarrow 0} k_n = 0$ (ранее было показано, что для малых z $k = \kappa v_* z$) и вводя вспомогательную функцию y ,

$$1 - k_n = y^4, \quad (4.2.36)$$

получаем

$$z_n = \frac{2}{y} - \frac{2}{3} y^3 - \frac{4}{3}. \quad (4.2.37)$$

Наряду с (4.2.36) другие характеристики турбулентности определяются как

$$b_n = y^2; \quad (4.2.38)$$

$$l_n = \frac{1 - y^4}{y}. \quad (4.2.39)$$

Если в уравнениях притока тепла и влаги перейти к приведенным значениям температуры и влажности:

$$\tilde{\theta} = \int \alpha_T d\theta, \quad \tilde{q} = \int \alpha_q dq, \quad (4.2.40)$$

то решения первых трех уравнений (4.2.34) будут совпадать друг с другом и иметь следующий вид:

$$u_n = \tilde{\theta}_n + c_2 = \tilde{q}_n + c_3 = \frac{2}{y} + 2 \operatorname{arctg} y + \ln \frac{|1 - y|}{1 + y} + c_1. \quad (4.2.41)$$

Произвольные постоянные c_i могут быть определены на основании граничных условий. Если воспользоваться известной из наблюдений зависимостью $\alpha_T = \alpha_T \left(\frac{z}{L} \right)$, то можно перейти от $\tilde{\theta}_n, \tilde{q}_n$ к θ_n и q_n (которые при условии $\alpha_T = \alpha_q$ будут совпадать). Таблицы

универсальных функций u_n, θ_n для разных z_n и y приводятся в [5]. На рис. 19 показана зависимость от z_n (для скорости ветра от $\lg z_n$) следующих безразмерных функций: $b_n, k_n, y, \Delta u_n = u_n(z_n) - u_n(0,5)$. Хорошо видно изменение кривизны профиля ветра

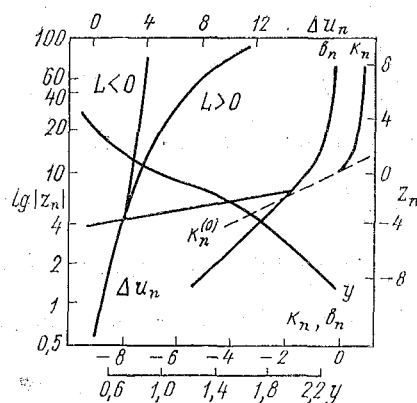


Рис. 19. Зависимость универсальных функций k_n, b_n, y от z_n и Δu_n от $\lg z_n$. Штриховая прямая соответствует $k_n^{(0)} = z_n$.

при устойчивой и неустойчивой стратификации. При малых z_n подтверждается полученная ранее линейная зависимость k_n от высоты. По виду кривых k_n и b_n можно качественно оценить влияние диффузии на режим приземного слоя. При устойчивой стратификации для $z_n > 2$ градиенты b_n малы, и притоком энергии турбулентности вероятно можно пренебречь; при неустойчивой стратификации такое пренебрежение может привести к заметным искажениям. Эти выводы подтверждаются результатами численного интегрирования системы (4.2.34) для случая, когда сохраняется диффузионный член.

Приведенное выше аналитическое решение системы позволяет получить как частный случай рассмотренные ранее профили метеорологических величин и коэффициента турбулентности при некоторых предельных условиях стратификации.

Если на основании (4.2.36—4.2.37) разложить k_n в ряд Маклорена вблизи точки $z_n = 0$ ($y = 1$), то после некоторых преобразований можно, например, получить:

$$k = z v_* z \left(1 - \frac{3}{8} \frac{z}{L} \right),$$

$$u = \frac{v_*}{z} \left(\ln \frac{z}{z_0} + \frac{3}{8} \frac{z}{L} \right) \text{ и т. д.}$$

Как видно полученные соотношения при стратификации, близкой к безразличной, занимают эффекты стратификации $\left(\beta = \frac{3}{8} \right)$.

В связи с этим позднее было предложено уточнение эффектов стратификации в (4.2.10), которое после использования ряда физических гипотез и асимптотических приближений можно записать в виде

$$l = -2 \times c^{\text{м}} \frac{\psi_1}{d\psi_1/dz}, \quad (4.2.10')$$

где $\psi_1 = \left(\frac{du}{dz} \right)^2 - m \frac{g}{\theta_0} \frac{k_T}{k} \frac{d\theta}{dz}$

С учетом (4.2.10') полученное выше решение системы уравнений примет вид:

$$k_n = 1 - y^4, \quad b_n = y^2,$$

$$u_n = \ln \left| \frac{1-y}{1+y} \right| + 2 \operatorname{arctg} y + \frac{n}{z} \left(\ln \frac{ny+1}{ny-1} - 2 \operatorname{arctg} ny \right) + c_1,$$

$$\theta_n = \int \frac{dz_n}{\alpha_T k_n} + c_2,$$

$$2z_n = \Phi(y) - \Phi(1) = -\frac{1}{3} y^3 + \frac{n^4 - 1}{n^3} \left(\ln \frac{ny+1}{ny-1} + 2 \operatorname{arctg} ny \right) - \Phi(1),$$

где $n^4 = \frac{m}{m-1}$.

Обработка экспериментальных данных показывает, что $n \approx 1,035$ ($m \approx 7,8$).

Для реализации полученных решений необходимо знать зависимость величин α_T и α_q от $\frac{z}{L}$. Определению этих величин посвящено большое количество работ, однако отсутствие надежных экспериментальных данных о комплексе метеорологических величин при установившихся условиях над однородной поверхностью затрудняет точное определение α_T и α_q . Через определенные экспериментально универсальные функции Φ_m и $\Phi_h = \Phi_q$ можно определить $\alpha_T = \Phi_m / \Phi_h$ и $\alpha_q = \Phi_m \Phi_q$. При $\frac{z}{L} = 0$ $\alpha_T = \alpha_q \approx 1,35$, тогда как, допустим, при устойчивой стратификации ($\frac{z}{L} > 0$)

$$\alpha_T = \alpha_q = \frac{1 + 4,7 \frac{z}{L}}{0,74 + 4,7 \frac{z}{L}}.$$

Расчет турбулентных потоков тепла, влаги и количества движения

Турбулентные потоки являются важной количественной характеристикой взаимодействия воздушного потока с подстилающей поверхностью. Непосредственное измерение потоков, которые согласно 2.6 могут быть записаны в виде:

$$\tau = -\rho \overline{u' w'}, \quad P_0 = -\rho c_p \overline{w' \theta'}, \quad E_0 = -\rho \overline{w' q'}, \quad (4.2.42)$$

сопряжено с рядом больших трудностей. В этих условиях особое значение имеют методы расчета потоков по стандартным или градиентным наблюдениям. В настоящее время таких методов существует довольно много. Здесь изложим только методику, основанную на использовании универсальных функций Φ_m , $\Phi_h = \Phi_q$ и решении нелинейной системы (4.2.34).

Если проинтегрировать выражения для безразмерных градиентов u , θ и q от z_0 ($u=0$, $\theta = \theta_0$, $q = q_0$) до z (u, θ, q), то для определения v_* , P_0 и E_0 получается система трансцендентных уравнений. При $\frac{z}{L} > 0$ она имеет, например, вид:

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{v_*}{z} \left(\ln \frac{z}{z_0} + 4,7 \frac{z}{L} \right), \\ \theta(z) &= \theta_0 + T_* \left(0,74 \ln \frac{z}{z_0} + 4,7 \frac{z}{L} \right), \\ q(z) &= q_0 + q_* \left(0,74 \ln \frac{z}{z_0} + 4,7 \frac{z}{L} \right) \end{aligned}$$

и позволяет при наличии градиентных измерений или, по крайней мере, стандартных гидрометеорологических измерений (θ_0 , q_0 , u_a , θ_a , q_a) определить турбулентные потоки: $\tau = \rho v_*^2$, P_0 и E_0 .

Для определения турбулентных потоков с учетом (4.2.33) можно записать:

$$\begin{aligned} \Delta u \cdot \Delta \theta &= - \frac{P_0}{\rho c_p x^2} \Delta u_n \Delta \theta_n, \quad \Delta u = \frac{v_*}{z} \Delta u_n, \\ \Delta u \cdot \Delta q &= - \frac{E_0}{\rho x^2} \Delta u_n \Delta q_n, \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} P_0 &= - \rho x^2 c_p \frac{\Delta u \Delta \theta}{\Delta u_n \Delta \theta_n}, \quad v_* = \frac{x \Delta u}{\Delta u_n}, \quad (4.2.43) \\ LE_0 &= - \rho L \cdot x^2 \frac{\Delta u \Delta q}{\Delta u_n \Delta q_n}. \end{aligned}$$

Так как (4.2.43) являются трансцендентными уравнениями относительно неизвестных величин, то для их нахождения целесообразно построить номограммы, позволяющие определить P_0 и v_* как функцию $\Delta \theta$ и Δu . Допустим, что $z_2 = z_4$ и $z_1 = z_3$; зададим для выбранных величин P_{0j} ряд величин v_{*i} ; найдем L_i , z_2/L_i , z_1/L_i , $(u_{n2})_i$, $(u_{n1})_i$, $(\theta_{n2})_i$, $(\theta_{n1})_i$; определим $(\Delta u_n)_i$ и $(\Delta \theta_n)_i$ и с помощью (4.2.43) перейдем к Δu_i и $\Delta \theta_i$. Построим теперь изолинии P_{0j} и v_{*i} в системе координат Δu , $\Delta \theta$. Изолинии P_0 можно одновременно рассматривать как изолинии LE_0 , если считать, что $\Delta \theta = \frac{L}{c_p} \Delta q$ (это следует из первого и третьего уравнения (4.2.43)).

Над водной поверхностью градиентные наблюдения выполняются редко и желательно уметь определять турбулентные потоки на основании стандартных гидрометеорологических наблюдений, которые включают в себя измерение температуры поверхности воды, а также скорости ветра, температуры и влажности воздуха на уровне судовых измерений $z = a$ (для современных судов этот

уровень находится в пределах от 6 до 30 м). Для морской поверхности, однако, z_0 уже не является внешним параметром, так как он связан с действием ветра, вызывающего развитие волн. В среднем выполняется следующая зависимость, которая может быть получена из анализа размерности:

$$z_0 = m \frac{v_*^2}{g}. \quad (4.2.44)$$

Здесь

$$m = f \left(\frac{Tg}{v_*^4 \rho}, \frac{xg}{v_*^2}, \frac{tg}{v_*}, \frac{\rho}{\rho} \right),$$

где T — поверхностное натяжение; x — разгон ветра; t — продолжительность действия ветра; ρ — плотность воды; коэффициент m находится в пределах 0,02—0,08.

Наблюдения показывают, что при $z = z_0$ температура воздуха стремится к температуре подстилающей поверхности, а q — к насыщающей величине при температуре поверхности. Скорость ветра при $z = z_0$ равна скорости поверхности течения, которая, однако, составляет всего 2—4% от скорости ветра на $z = a$.

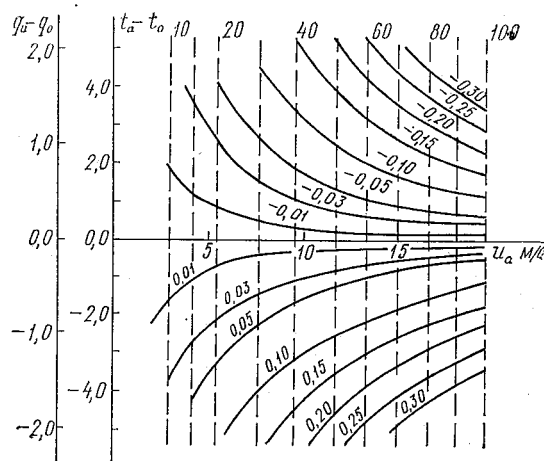


Рис. 20. Номограмма для расчета турбулентных потоков явного (P_0) и скрытого тепла (LE_0), а также динамической скорости по стандартным гидрометеорологическим наблюдениям ($z = 14$ м).

Таким образом, специфика расчета турбулентных потоков по стандартным наблюдениям над морем состоит в том, что нижний уровень ($z = z_0$) не фиксирован, а находится в процессе расчета на основании (4.2.44). В качестве примера на рис. 20 показана

номограмма для расчета v_* , P_0 и LE_0 по наблюдениям u_a , $\Delta\theta = \theta_a - \theta_0$ для $z = a = 14$ м.

4.3. Стационарный, горизонтально-однородный планетарный пограничный слой атмосферы

Модели с априорным профилем коэффициента турбулентности

Вернемся теперь к рассмотрению стационарного, горизонтально-однородного планетарного пограничного слоя атмосферы и запишем систему уравнений (4.1.10—4.1.14), (4.1.6—4.1.9) и граничных условий для простейшего случая априорного профиля k :

$$k = \bar{k} = \frac{1}{H} \int_0^H k(z) dz, \quad (4.3.1)$$

где H — высота планетарного пограничного слоя.
Согласно (4.1.10—4.1.11)

$$\bar{k} \frac{d^2 u}{dz^2} + 2 \omega_z (v - v_g) = 0; \quad (4.3.2)$$

$$\bar{k} \frac{d^2 v}{dz^2} - 2 \omega_z (u - u_g) = 0 \quad (4.3.3)$$

(напомним, что в данном случае геострофический ветер не изменяется с высотой). Уравнение неразрывности сохраняет свою форму (4.1.12).

Для определения θ и q используем выражения (4.1.13'), (4.1.14') и примем простой линейный закон изменения этих турбулентных потоков с высотой, который правильно учитывает их поведение на границах области интегрирования: у поверхности земли, при $z = 0$, $P(z) = P_0$, $E(z) = E_0$; на верхней границе ППС, при $z = H$, все турбулентные потоки должны стремиться к нулю, т. е. $P(H) = E(H) = 0$. В таком случае

$$\alpha_T \bar{k} \frac{d\theta}{dz} = - \frac{P_0}{\rho c_p} \left(1 - \frac{z}{H} \right); \quad (4.3.4)$$

$$\alpha_q \bar{k} \frac{dq}{dz} = - \frac{E_0}{\rho} \left(1 - \frac{z}{H} \right). \quad (4.3.5)$$

Очевидно, что использование уравнения притока тепла и водяного пара в форме (4.1.13) — (4.1.14) потребовало бы определения лучистых и фазовых притоков тепла и неоправданно усложнило

бы рассматриваемую модель ППС. Использование (4.3.4) и (4.3.5) по сути дела равнозначно параметризации притоков $\frac{1}{\rho c_p} \frac{d\Phi}{dz}$ и $\frac{1}{\rho} \frac{dF}{dz}$ в (4.1.13) и (4.1.14).

По аналогии с (4.1.6) будем считать, что средний в ППС коэффициент турбулентности \bar{k} должен зависеть от средней кинетической энергии турбулентности \bar{b} и интегрального линейного масштаба, которым является высота ППС, т. е. $\bar{k}=f(\bar{b}, H)$ или

$$\bar{k} = c_1 H \sqrt{\bar{b}}. \quad (4.3.6)$$

В таком случае и уравнение баланса кинетической энергии турбулентности (4.1.7) следует записать в интегральном виде. Используя для диссипации выражение

$$E_3 = \varepsilon = f_2(H, \bar{b}) = -c_2 \frac{\bar{b} \sqrt{\bar{b}}}{H}, \quad (4.3.7)$$

а также, предполагая, что практически вся энергия турбулентности сосредоточена в ППС, т. е.

$$\int_0^H \frac{d}{dz} \alpha_b \bar{k} \frac{db}{dz} dz = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} \bar{k} \int_0^H \left[\left(\frac{du}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 \right] dz - \alpha_T \int_0^H \bar{k} \frac{g}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a \right) dz - \\ - c_2 \bar{b} \sqrt{\bar{b}} = 0 \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

в дальнейшем будем считать $T_n = T$.

Теперь в выписанной системе уравнений: (4.3.2 — 4.3.6, 4.1.12, 4.3.8) содержится восемь неизвестных величин ($u, v, w, \theta, q, \bar{k}, \bar{b}, I$) и для ее замыкания необходимо сформулировать дополнительное соотношение, определяющее H . В качестве такого дополнительного условия может быть использовано одно из следующих предположений:

$$\frac{d}{dz} (u^2 + v^2)^{1/2} \Big|_{z=H} = 0, \quad (4.3.9)$$

т. е. вблизи верхней границы ППС перестает изменяться с высотой модуль скорости ветра;

$$(u^2 + v^2) \Big|_{z=H} = G^2, \quad (4.3.10)$$

т. е. при $z=H$ ветер стремится к геострофическому;

$$\frac{v}{u} \Big|_{z=H} = \frac{v_g}{u_g}, \quad (4.3.11)$$

т. е. при $z=H$ ветер впервые по направлению совпадает с геострофическим;

$$\frac{(u - u_g)^2 + (v - v_g)^2}{G^2} = \tilde{\varepsilon}, \quad (4.3.12)$$

т. е. при $z=H$ отклонение ветра от геострофического составляет заданную малую величину $\tilde{\varepsilon}$ (0,01; 0,05 или 0,10) от геострофического.

Обычно для определения H используется (4.3.9) или (4.3.11), и, с учетом их, теперь система уравнений является замкнутой. Необходимые для ее интегрирования граничные условия используем в следующем виде:

$$\text{при } z = 0 \quad u = v = w = 0; \quad (4.3.13)$$

$$\text{при } z = H \quad u \rightarrow u_g, \quad v \rightarrow v_g, \quad T = T_H, \quad q = q_H. \quad (4.3.14)$$

Используем следующий алгоритм решения полученной системы уравнений.

1. Из (4.3.2 — 4.3.5) выразим профили ветра, температуры и влажности через неизвестные пока величины \bar{k} и H .

2. Используем полученные решения и остальные уравнения (4.3.6, 4.3.8, 4.3.9 или 4.3.11) для определения \bar{k} , H , \bar{b} и ε .

3. Из уравнения неразрывности определим вертикальную скорость.

Распределение с высотой ветра, температуры и удельной влажности

Если уравнения движения (4.3.2, 4.3.3) записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dz^2} + 2a^2(v - v_g) &= 0, \\ \frac{d^2 v}{dz^2} - 2a^2(u - u_g) &= 0, \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

$$\text{где } a = \sqrt{\frac{\omega_z}{\bar{k}}},$$

то, умножая второе уравнение на $i = \sqrt{-1}$ и складывая с первым, получаем

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} - 2a^2 i \Phi = 0, \quad (4.3.16)$$

где

$$\Phi = u + iv - u_g - i v_g. \quad (4.3.17)$$

Решение (4.3.16) (с учетом соотношения $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$) имеет вид

$$\Phi = C_1 \cdot e^{a(1+i)z} + C_2 e^{-a(1+i)z}. \quad (4.3.18)$$

Для определения C_1 и C_2 нужно переписать граничные условия для Φ :

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 & \quad \Phi = -u_g - i v_g, \\ \text{при } z = H & \quad \Phi \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

Подставляя (4.3.19) в (4.3.18), получаем, что $C_1 = 0$, $C_2 = -u_g - i v_g$, и с учетом (4.3.17)

$$u + iv = (u_g + i v_g) (1 - e^{-(1+i)az}). \quad (4.3.20)$$

Если выразить $e^{-iaz} = \cos az - i \sin az$ и разделить в (4.3.20) действительные и мнимые части, то получаем:

$$\begin{aligned} u &= u_g - e^{-az} (u_g \cos az + v_g \sin az), \\ v &= v_g - e^{-az} (v_g \cos az - u_g \sin az). \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

Годограф ветра описываемый соотношениями (4.3.21), называется спиралью Экмана. Для частного случая, когда ось x совпадает с направлением геострофического ветра ($v_g = 0$, $u_g = G$), формулы (4.3.21) принимают вид:

$$u = G (1 - e^{-az} \cos az), \quad v = G e^{-az} \sin az. \quad (4.3.22)$$

На рис. 21 показан универсальный годограф ветра, построенный в системе координат $u_n = \frac{u}{G}$, $v_n = \frac{v}{G}$; точки на кривой соответствуют

разным значениям $z_n = az$. Вектор ветра на высоте z_{ni} равен вектору, имеющему начало в точке $u_n = v_n = 0$, а конец в точке с соответствующим значением z_n . Как следует из рис. 21, в пограничном слое имеет место правое вращение ветра с высотой. Из анализа (4.3.21) или (4.3.22) хорошо видно влияние турбулентности на вертикальный профиль ветра: сильная турбулентность (большие величины \bar{k}) вызывает медленное увеличение ветра, а слабая — быстрое. Так как $\omega_z = \omega \sin \varphi$, то увеличение широты соответствует эффекту уменьшения коэффициента турбулентности и наоборот. Угол между вектором геострофического ветра и вектором ветра на любой высоте определяется как

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{u} = \frac{e^{-az} \sin az}{1 - e^{-az} \cos az}. \quad (4.3.23)$$

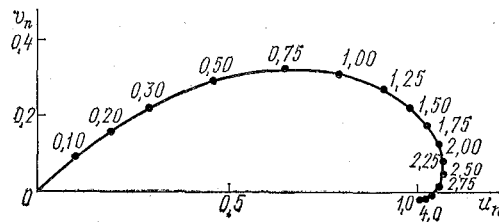


Рис. 21. Универсальная спираль Экмана в планетарном пограничном слое атмосферы.

При $z = 0$ в (4.3.23) получается неопределенность типа $\frac{0}{0}$, раскрыв которую (по правилу Лопиталя), находим $\alpha = 45^\circ$, т. е. ветер у земли отклоняется влево от геострофического на угол 45° . Полученное значение угла примерно в 1,5—2,0 раза больше наблюдаемого (для средних условий), что связано главным образом с предположением о постоянстве \bar{k} .

Определим теперь профили температуры и массовой доли водяного пара из (4.3.4—4.3.5) с учетом (4.3.14):

$$T_z = T_H + \gamma_a (H - z) + \frac{P_0}{\rho c_p \bar{k}} \frac{(H - z)^2}{2H}; \quad (4.3.24)$$

$$q_z = q_H + \frac{E_0}{f \bar{k}} \frac{(H - z)^2}{2H}. \quad (4.3.25)$$

На рис. 22 в качестве примера приведены профили температуры в пограничном слое атмосферы для безразличной ($P_0=0$), устойчивой ($P_0<0$) и неустойчивой ($P_0>0$) стратификации. При $P_0<0$ наблюдается характерное инверсионное распределение температуры, и можно из (4.3.24) оценить высоту инверсии, как уровень на котором $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$:

$$z_{\text{и}} = H \left(1 + \frac{\alpha_T \bar{k} \gamma_a \rho c_p}{P_0} \right). \quad (4.3.26)$$

Из (4.3.26) отчетливо видна зависимость $z_{\text{и}}$ от параметров задачи. При оценке возможности применимости полученных выражений следует помнить о сильной схематизации реальных процессов в рассматриваемой модели.

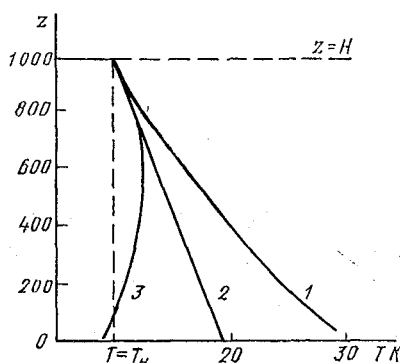


Рис. 22. Профиль температуры в планетарном пограничном слое атмосферы ($\bar{k}=5 \text{ м}^2/\text{с}$, $H=1000 \text{ м}$):
1 — $P_0=140 \text{ Вт}/\text{м}^2$; 2 — $P_0=0,0 \text{ Вт}/\text{м}^2$;
3 — $P_0=-140 \text{ Вт}/\text{м}^2$.

Определение характеристик турбулентности

Выразим первое слагаемое в (4.3.8) на основании (4.3.22). Ввиду того, что $\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 = 2 a^2 G^2 e^{-2az}$, то

$$\begin{aligned} \bar{k} \int_0^H \left[\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 \right] dz &= -G^2 ak (e^{-2aH} - 1) = G^2 ak = \\ &= G^2 \sqrt{\omega_z \bar{k}} \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

(так как $e^{-2aH} \ll 1$).

Для определения притока (оттока) энергии турбулентности за счет действия силы Архимеда используем (4.3.4), тогда

$$\begin{aligned} -\frac{g}{T} \alpha_T \bar{k} \int_0^H \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a \right) dz &= \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho c_p} \left(z - \frac{z^2}{2H} \right) \Big|_0^H = \\ &= \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho c_p} \frac{H}{2}. \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

С учетом (4.3.27—4.3.28) уравнение баланса энергии турбулентности (4.3.8) примет вид

$$G^2 \sqrt{\omega_z \bar{k}} + \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho c_p} \frac{H}{2} - c_2 \bar{b} \sqrt{\bar{b}} = 0. \quad (4.3.29)$$

Определим $\bar{b} \sqrt{\bar{b}}$ на основании (4.3.6) через \bar{k} :

$$\bar{b} \sqrt{\bar{b}} = \frac{\bar{k}^3}{c_1^3 H^3}. \quad (4.3.30)$$

После подстановки (4.3.30) уравнение (4.3.29) содержит две неизвестные величины: \bar{k} и H . Для нахождения высоты пограничного слоя используем два способа.

1. Определение H на основании (4.3.9). Если подставить в (4.3.9) выражение (4.3.22), то после некоторых преобразований получим

$$\frac{aG e^{-aH} (\cos aH + \sin aH - e^{-aH})}{(1 - 2e^{-aH} \cos aH + e^{-2aH})^{1/2}} = 0.$$

В полученном уравнении представляет интерес только один корень

$$\cos aH + \sin aH - e^{-aH} = 0,$$

откуда, заменяя $\cos aH$ на $\sin (90^\circ + aH)$, получаем

$$1,42 \cdot \sin (45^\circ + aH) = e^{-aH}.$$

Если решить это трансцендентное уравнение, допустим, графически, то окажется, что

$$aH = 2,3, \quad H = 2,3 \sqrt{\frac{\bar{k}}{\omega_z}}. \quad (4.3.31)$$

2. Определение H на основании (4.3.11). В выбранной системе координат это условие означает, что $v \Big|_{z=H} = 0$ или в соответствии с (4.3.22) необходимо, чтобы $\sin aH = 0$. Так как $aH = 0$ лишено физического смысла, то

$$aH = \pi, \quad H = \pi \sqrt{\frac{\bar{k}}{\omega_z}}. \quad (4.3.32)$$

Если подставить в (4.3.29) выражение (4.3.30) и (4.3.31) или (4.3.32), то

$$\bar{k} = m \frac{G^2}{\omega_z} \left[1 + \frac{g}{T} \frac{\delta}{2\omega_z G^2} \frac{P_0}{\rho c_p} \right], \quad (4.3.33)$$

где

$$m = \frac{(\delta)^3 c_1^3}{c_2}, \quad \delta = \{2, 3; \pi; \dots\}.$$

Полученная формула позволяет проследить отдельно влияние динамического и термического факторов на интенсивность турбулентного обмена. При нейтральной стратификации ($P_0=0$) $\bar{k} \sim G^2$, при неустойчивой ($P_0>0$) $\bar{k} \sim G(1+\Delta)$, при устойчивой ($P_0<0$) $\bar{k} \sim G^2(1-\Delta)$. Такая зависимость \bar{k} от стратификации согласуется с физическими представлениями.

Для определения m , c_1 и c_2 можно воспользоваться результатами наблюдений, которые показывают, что при нейтральной стратификации и скорости геострофического ветра 10 м/с для $\varphi = 50^\circ$, пограничный слой достигает высоты 1000 м, а $\sqrt{\bar{b}} = 0,5$ м/с.

Из сопоставления формул (4.3.33) и, допустим, (4.3.32) получаем

$$\frac{H^2 \omega_z}{\pi^2} = m \frac{G^2}{\omega_z} \quad \text{или} \quad m = \frac{H^2 \omega_z^2}{G^2 \pi^2} = 3,15 \cdot 10^{-6}. \quad (4.3.34)$$

Если приравнять величины \bar{k} из (4.3.6) и (4.3.33), то можно определить c_1 :

$$\frac{H^2 \omega_z}{\pi^2} = c_1 H \sqrt{\bar{b}} \quad \text{или} \quad c_1 = \frac{H \omega_z}{\pi^2 \sqrt{\bar{b}}} = 1,1 \cdot 10^{-2}. \quad (4.3.35)$$

Наконец, зная m и c_1 , можно найти c_2 :

$$c_2 \approx 14,2 \quad (4.3.36)$$

Имея теперь все постоянные, можно наряду с \bar{k} определить \bar{b} и среднюю скорость диссипации ε :

$$\bar{b} = \frac{\bar{k}^2}{c_1^2 H} = \frac{\pi c_1}{c_2} G^2 \left(1 + \frac{g}{T} \frac{\pi}{2 \omega_z G^2} \frac{P_0}{\rho c_p} \right); \quad (4.3.37)$$

$$\varepsilon = -c_2 \frac{\bar{b} \sqrt{\bar{b}}}{H} = -\frac{\omega_z}{\pi} G^2 \left(1 + \frac{g}{T} \frac{\pi}{2 \omega_z G^2} \frac{P_0}{\rho c_p} \right). \quad (4.3.38)$$

Обращает на себя внимание то, что формулы (4.3.33, 4.3.37, 4.3.38) справедливы только для

$$\frac{g}{T} \frac{\pi}{2 \omega_z G^2} \frac{P_0}{\rho c_p} > -1,0. \quad (4.3.39)$$

Указанное ограничение качественно правильно отражает возможность исчезновения турбулентности при сильно устойчивой стра-

тификации, однако в количественном отношении оно справедливо только в рамках рассмотренной модели.

На рис. 23 показана рассчитанная на основании (4.3.32) и (4.3.33) зависимость высоты пограничного слоя и среднего коэффициента турбулентности от геострофического ветра и турбулентного потока тепла у поверхности земли для $\varphi = 50^\circ$. Для $G = 15$ м/с коэффициент турбулентности изменяется примерно на $6 \text{ м}^2/\text{с}$ при изменении стратификации от безразличной к устойчивой ($P_0 = -140 \text{ Вт}/\text{м}^2$) или неустойчивой ($P_0 = 140 \text{ Вт}/\text{м}^2$). По сравнению с безразличной стратификацией высота пограничного слоя сильнее уменьшается при устойчивой стратификации, чем увеличивается при неустойчивой.

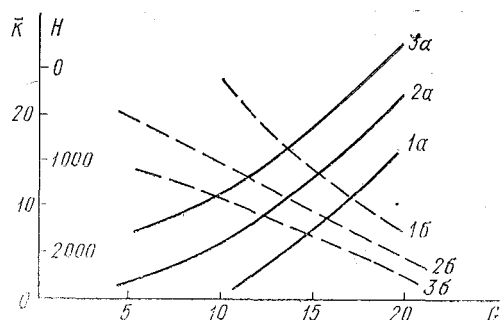


Рис. 23. Зависимость среднего коэффициента турбулентности (1) и высоты пограничного слоя H (2) от P_0 и G :
1 — $P_0 = -140 \text{ Вт}/\text{м}^2$; 2 — $P_0 = 0,0 \text{ Вт}/\text{м}^2$;
3 — $P_0 = 140 \text{ Вт}/\text{м}^2$.

Для оценки среднего в пограничном слое коэффициента турбулентности могут быть использованы также данные аэрологических наблюдений (лучше шаропилотные наблюдения).

Из (4.3.22) после простых преобразований, связанных с исключением трансцендентной зависимости от \bar{k} , получаем

$$\bar{k} = \frac{4 \omega_z}{\left\{ \frac{d}{dz} \ln [(u - G)^2 + v^2] \right\}^2}. \quad (4.3.40)$$

Знаменатель этого выражения обычно вычисляют графически в осях z и $\ln [(u - G)^2 + v^2]$.

С определением \bar{k} задача полностью решена, и теперь можно рассчитать профили метеорологических величин, если заданы G , ω_z , P_0 , E_0 , T_H и q_H .

Рассмотренная выше простая модель пограничного слоя, несмотря на целый ряд допущений, обладает и определенными достоинствами. Во-первых, она позволяет получить обозримые аналити-

ческие выражения для описания основных процессов в пограничном слое. Во-вторых, она может быть использована в численных прогнозах для приближенного учета влияния пограничного слоя, так как при этом важны не детали вертикальной структуры пограничного слоя, а интегральные эффекты, которые определяются довольно неплохо. Так как на верхней границе пограничного слоя все турбулентные потоки стремятся к нулю, то влияние ППС на свободную атмосферу сказывается через вертикальные скорости на $z=H$.

Вертикальная скорость на верхней границе ППС

Для определения динамической вертикальной скорости (она, обычно, на несколько порядков меньше горизонтальной скорости) используется уравнение неразрывности (4.3.12), из которого в общем случае, с учетом очевидного граничного условия $w|_{z=0} = 0$, получается:

$$w(z) = - \int_0^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = - \int_0^z D dz, \quad (4.3.41)$$

$$w(z) = -\bar{D}z, \quad (4.3.41')$$

где \bar{D} — среднее в слое значение плоской дивергенции.

Чтобы воспользоваться формулами (4.3.41, 4.3.41') нужно знать $c(x, y, z)$, если не в аналитической форме, то, по крайней мере, в дискретных точках пространства (аэрологические измерения на нескольких станциях). Если таких измерений нет, то для приближенной оценки $w(z)$ можно использовать наблюдения за полем ветра на одном уровне (чаще всего это могут быть наблюдения за приземным полем ветра), считая, что $\bar{D} = D$.

Для определения входящих в (4.3.41) компонент скорости используем уравнения движения в форме (4.3.2 — 4.3.3):

$$u = u_g + \frac{1}{2\omega_z \rho} \frac{\partial \tau_y}{\partial z}, \quad v = v_g - \frac{1}{2\omega_z \rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial z}, \quad (4.3.42)$$

где

$$\frac{\tau_x}{\rho} = k \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\tau_y}{\rho} = k \frac{\partial v}{\partial z}.$$

С учетом (4.3.42) для $z = H$ выражение (4.3.41) примет вид

$$w_H = - \int_0^H \left[\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} + \frac{1}{2\omega_z \rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \right) - \frac{1}{2\omega_z^2 \rho} \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial x} \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \frac{\partial \tau_x}{\partial y} \right) \right] dz. \quad (4.3.43)$$

В географической системе координат (ось x направлена с запада на восток, ось y — с юга на север):

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \beta_1 = \frac{\omega}{R} \cos \varphi \quad (4.3.44)$$

(так как $y = R\varphi$, $dy = R d\varphi$; R — радиус Земли; φ — широта)

Используя для $\vec{\tau}$ следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 \quad \vec{\tau} &= \vec{\tau}_0, \\ \text{при } z = H \quad \vec{\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.45)$$

и соотношения (3.1.2), можно переписать (4.3.43) в виде:

$$\omega_H = \frac{\beta_1}{\omega_z} \int_0^H v_g dz - \frac{\beta_1}{2\omega_z^2 \rho} \tau_{0x} + \frac{1}{2\omega_z \rho} \text{rot}_z \vec{\tau}_0 \quad (4.3.46)$$

или с учетом (4.3.42)

$$\omega_H = \frac{1}{2\omega_z \rho} \text{rot}_z \vec{\tau}_0 + \frac{\beta_1}{\omega_z} \int_0^H v dz, \quad (4.3.47)$$

где

$$\text{rot}_z \vec{\tau}_0 = \frac{\partial \tau_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{0x}}{\partial y}.$$

Из этих соотношений для ω_H видно, что учет β -эффекта особенно важен для низких широт (на экваторе $\beta_1 = 1,15 \cdot 10^{-11}$ 1/(м·с), на $\varphi = 60^\circ$ $\beta_1 = 0,58 \cdot 10^{-11}$ 1/(м·с)).

Для $v_g = 0$ (10 м/с), $\tau_0 = 0$ (10^{-1} н/м²), $H = 0$ (10^3 м), $L = 0$ (10^5 м) в (4.2.46) все три слагаемые имеют примерно одинаковый порядок в низких широтах: 0 (10^{-2} м/с), тогда как в средних широтах второе слагаемое примерно на порядок меньше двух других, имеющих 0 (10^{-3} м/с).

Таким образом, для квазиширотного переноса в свободной атмосфере и средних широт

$$\omega_H = \frac{1}{2\omega_z \rho} \text{rot}_z \vec{\tau}_0. \quad (4.3.48)$$

В более общем случае нужно применять (4.3.46). Для определения $\vec{\tau}_0$ можно теперь использовать полученное выше выражение для профиля ветра в ППС (4.3.20)*:

$$\frac{\tau_{0x} + i \tau_{0y}}{\rho h} = \frac{\partial}{\partial z} (u + iv) \Big|_{z=0} = (u_g + i v_g) (1 + i) a,$$

* Вопрос об определении $\vec{\tau}_0$ по наблюдениям приземного ветра рассмотрен в 4.2.

отсюда получаем:

$$\begin{aligned}\tau_{0x} &= \rho \bar{k} a (u_g - v_g) = \rho \sqrt{\omega_z \bar{k}} (u_g - v_g), \\ \tau_{0y} &= \rho \bar{k} a (u_g + v_g) = \rho \sqrt{\omega_z \bar{k}} (u_g + v_g).\end{aligned}\quad (4.3.49)$$

С учетом (4.3.49) и (4.3.32) можно записать (4.3.46) в виде

$$\begin{aligned}\omega_H &= \frac{1}{2\omega_z} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \sqrt{\omega_z \bar{k}} (u_g + v_g) - \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{\omega_z \bar{k}} (u_g - v_g) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \beta_1 v_g \pi \sqrt{\frac{\bar{k}}{\omega_z}} + \frac{\beta_1}{\omega_z} \sqrt{\omega_z \bar{k}} (u_g - v_g) \right\}.\end{aligned}\quad (4.3.50)$$

Наконец, используя для определения \bar{k} выражение (4.3.33) в случае нейтральной стратификации ($P_0 = 0$), получаем

$$\begin{aligned}\omega_H &= \frac{m^{1/2}}{2\omega_z} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} G (u_g + v_g) - \frac{\partial}{\partial y} G (u_g - v_g) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta_1}{\omega_z} G [v_g (\pi - 1) + u_g] \right\}.\end{aligned}\quad (4.3.51)$$

Для приближенных оценок ω_H , однако, обычно в (4.3.51) пренебрегают зависимостью G от координат и β -эффектом (изменением ω_z с высотой), и оно принимает вид

$$\omega_H = \frac{m^{1/2}}{2\omega_z} G (\text{rot}_z \vec{G} + \text{div}_1 \vec{G}),$$

или, так как $\text{div}_1 \vec{G} = 0$,

$$\omega_H = \frac{m^{1/2}}{2\omega_z} G \text{rot}_z \vec{G}.\quad (4.3.51')$$

Наконец, с учетом выражений для u_g и v_g

$$\omega_H = \frac{m^{1/2} G}{4\omega_z^2 \rho} \Delta p,\quad (4.3.51'')$$

где $\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$.

Обобщение модели с априорным профилем коэффициента турбулентности

При рассмотрении модели планетарного пограничного слоя атмосферы с $k = \text{const}$ отмечалось, что введение среднего в ППС значения k приводит к искажению профилей метеорологических характеристик. Существует целый ряд вариантов обобщения указанной модели с априорным заданием вида $k(z)$:

а) в форме «закона с изломом» (М. Е. Швец, М. И. Юдин)

$$\begin{aligned}k &= k_1 z && \text{при } z < h, \\ k &= k_1 h && \text{при } z \geq h;\end{aligned}$$

б) в форме степенного закона (М. Е. Берлянд)

$$\begin{aligned} k &= k_1 z^p && \text{при } z < h, \\ k &= k_1 h^p && \text{при } z \geq h; \end{aligned}$$

в) в форме скачкообразного изменения

$$\begin{aligned} k &= k_1 && \text{при } z \leq h, \\ k &= k_2 && \text{при } z > h \end{aligned}$$

и некоторые другие.

Так как решения при этом получаются довольно сложные, то ограничимся здесь только пояснением, как сказывается задание $k(z)$ в виде варианта в) на профиле ветра.

Если направить ось x вдоль вектора геострофического ветра ($v_g = 0, u_g = G$), то система (4.3.2 — 4.3.3) примет вид:

$$k_i \frac{d^2 u_i}{dz_i^2} + 2\omega_z v_i = 0, \quad k_i \frac{d^2 v_i}{dz_i^2} - 2\omega_z (u_i - G) = 0, \quad (4.3.52)$$

где $i = 1$ соответствует $z \leq h$, $i = 2$ $z > h$.

Решая эту систему аналогично случаю с $k = \text{const}$ при следующих граничных условиях (на границе $z = h$ принимается условие непрерывности скорости и потоков количества движения):

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0 & \quad u_1 = v_1 = 0, \\ \text{при } z \rightarrow \infty & \quad u_2 = u_g = G, \quad v_2 = v_g = 0, \\ \text{при } z = h & \quad u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \end{aligned} \quad (4.3.53)$$

$$\rho_1 k_1 \frac{du_1}{dz} = \rho_2 k_2 \frac{du_2}{dz}, \quad \rho_1 k_1 \frac{dv_1}{dz} = \rho_2 k_2 \frac{dv_2}{dz},$$

и считая, что $\rho_1 = \rho_2$, получим:

$$\begin{aligned} u_1 + i v_1 &= \frac{s-1}{2} c \cdot e^{a_1 (1+i)(z-h)} - \frac{s+1}{2} c \cdot e^{-a_1 (1+i)(z-h)}, \\ u_2 + i v_2 &= -c \cdot e^{-a_2 (1+i)(z-h)} + G, \end{aligned}$$

где

$$s = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}; \quad c = \frac{G}{s \operatorname{sh} [a_1 (1+i)h] + \operatorname{ch} [a_1 (1+i)h]}.$$

Если разделить действительные и мнимые члены, то:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{G}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ \frac{s-1}{2} e^{a_1 (z-h)} [\alpha \cos a_1 (z-h) + \beta \sin a_1 (z-h)] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{s+1}{2} e^{-a_1 (z-h)} [\alpha \cos a_1 (z-h) - \beta \sin a_1 (z-h)] \right\} + G, \\ v_1 &= \frac{G}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ \frac{s-1}{2} e^{a_1 (z-h)} [\alpha \sin a_1 (z-h) - \beta \cos a_1 (z-h)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{s+1}{2} e^{-a_1 (z-h)} [\alpha \sin a_1 (z-h) + \beta \cos a_1 (z-h)] \right\}, \quad (4.3.54) \end{aligned}$$

$$u_2 = -\frac{\bar{G}}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\alpha_2(z-h)} [\alpha \cos \alpha_2(z-h) - \beta \sin \alpha_2(z-h)] + \bar{G},$$

$$v_2 = \frac{G}{\alpha^2 + \beta^2} e^{-\alpha_2(z-h)} [\alpha \sin \alpha_2(z-h) + \beta \cos \alpha_2(z-h)].$$

где

$$\alpha = \cos \alpha_1 h (s \operatorname{sh} \alpha_1 h + \operatorname{ch} \alpha_1 h);$$

$$\beta = \sin \alpha_1 h (s \operatorname{ch} \alpha_1 h + \operatorname{sh} \alpha_1 h).$$

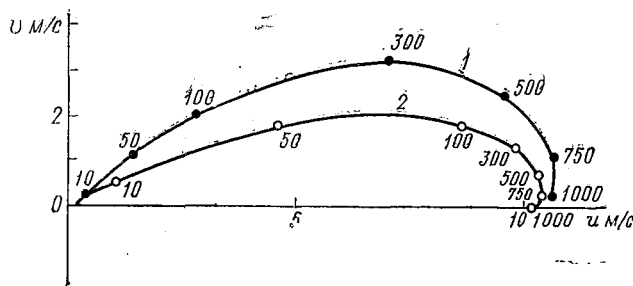


Рис. 24. Влияние профиля коэффициента турбулентности на годограф ветра в пограничном слое атмосферы ($G=10$ м/с, $\varphi=60^\circ$):

1 — $\bar{k}=8,2$ м²/с; 2 — $k_1=1$ м²/с при $z \leq 100$ м, $k_2=9$ м²/с при $z > 100$ м.

На рис. 24 для сравнения приведены годографы ветра, рассчитанные по модели с $k = \text{const}$ и по модели со ступенчатым изменением k . За счет уменьшения k у поверхности земли по сравнению с первой моделью уменьшается угол поворота ветра и увеличивается скорость ветра, что подтверждает сделанный ранее вывод о возможном влиянии \bar{k} на профиль ветра.

Нелинейная модель планетарного пограничного слоя

Общим недостатком всех рассмотренных выше моделей ППС является задание априорного профиля $k(z)$. При этом, конечно, нарушается взаимосвязь между профилем k и профилями метеорологических величин, что и вызывает искажение последних. Для описания тонкой структуры ППС следует искать решение нелинейной системы уравнений (4.1.10—4.1.14, 4.1.6—4.1.9). Запишем эту систему в потоках количества движения и тепла (позже будет показано, что это позволит упростить граничные условия). Если продифференцировать (4.1.10—4.1.11) по z и ввести обозначение.

$$\eta = k \frac{du}{dz}, \quad \sigma = k \frac{dv}{dz}. \quad (4.3.55)$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \eta}{dz^2} + 2 \omega_z \frac{\sigma}{k} &= 0, \\ \frac{d^2 \sigma}{dz^2} - 2 \omega_z \frac{\eta}{k} &= 0. \end{aligned} \quad (4.3.56)$$

Уравнение баланса энергии турбулентности (4.1.7) с учетом (4.1.6), (4.1.13) и (4.3.55) примет вид

$$\frac{\eta^2 + \sigma^2}{k} + \frac{g}{T} \frac{P}{\rho c_p} - c \frac{b^2}{k} + \alpha_b \frac{d}{dz} k \frac{db}{dz} = 0. \quad (4.3.57)$$

На основании (4.1.6), (4.1.8) и (4.1.9) получаем:

$$\begin{aligned} k &= l \sqrt{b}, \quad l = -\tilde{\kappa} \frac{\psi}{d\psi/dz}, \\ \psi &= \frac{\eta^2 + \sigma^2}{k^2} + \frac{g}{T} \frac{P}{\rho c_p k}. \end{aligned} \quad (4.3.58)$$

Наконец, получим выражения, определяющие характер изменения турбулентных потоков тепла и влаги с высотой. Воспользуемся асимптотическими формулами для градиента потенциальной температуры и массовой доли водяного пара в пограничном слое атмосферы, правильно учитывающими асимптотику градиентов вблизи поверхности земли и на верхней границе пограничного слоя:

$$\frac{d\theta}{dz} = - \frac{P_0}{\rho c_p \alpha_T v_* z} + (\gamma_a - \gamma_p) \left(\frac{z}{H} \right)^m; \quad (4.3.59)$$

$$\frac{dq}{dz} = - \frac{E_0}{\rho \alpha_q v_* z} - \beta_0 q. \quad (4.3.60)$$

Действительно, при $z \rightarrow 0$ основным является первый член и тогда, как следует из теории приземного слоя (см. 4.2) и наблюдений (при $\frac{z}{L} \ll 1$),

$$\frac{d\theta}{dz} = - \frac{P_0}{\rho c_p \alpha_T v_* z}, \quad \frac{dq}{dz} = - \frac{E_0}{\rho \alpha_q v_* z}.$$

При $z \rightarrow H$ первый член становится малым, и градиенты стремятся к величинам $\frac{d\theta}{dz} = \gamma_a - \gamma_p$, где $\gamma_p = 0,6$ К/100 м — градиент температуры в свободной атмосфере; $\frac{dq}{dz} = -\beta_0 q$, где β_0 — коэффициент с размерностью L^{-1} , определяемый из наблюдений.

С учетом (4.3.59) и (4.3.60) уравнения (4.1.13') и (4.1.14') можно записать в виде:

$$P(z) = k \left[\frac{P_0}{v_* z} - \alpha_{T\rho} c_p (\gamma_a - \gamma_p) \left(\frac{z}{H} \right)^m \right]; \quad (4.3.61)$$

$$E(z) = k \left[\frac{E_0}{v_* z} + \alpha_q \rho \beta_0 q \right]. \quad (4.3.62)$$

Для определения H можно использовать условие

$$\left. \frac{(\eta^2 + \sigma^2)^{1/2}}{v_*^2} \right|_{z=H} = \varepsilon_1, \quad (4.3.63)$$

где ε_1 — малая величина, которая означает, что на верхней границе пограничного слоя касательное напряжение составляет малую долю от касательного напряжения вблизи поверхности земли.

Система уравнений (4.3.56 — 4.3.58, 4.3.61 — 4.3.63) является замкнутой и позволяет определить величины η , σ , H , k , b , i , P и E . В дальнейшем, проинтегрировав (4.3.55), (4.3.61) и (4.3.62), можно найти u , v , θ и q .

Запишем граничные условия задачи для случая, когда ось x совпадает с направлением приземного ветра или $\vec{\tau}_0$

$$z \rightarrow 0 \quad \gamma_1 = v_*^2, \quad \sigma = 0, \quad b \rightarrow c^{-1/2} v_*^2, \quad k \rightarrow 0; \quad (4.3.64)$$

$$z \rightarrow \infty \quad \eta \rightarrow 0, \quad \sigma \rightarrow 0, \quad b \rightarrow 0. \quad (4.3.65)$$

Об условиях (4.3.64) речь уже шла в параграфе, посвященном теории приземного слоя,* а условия (4.3.65) непосредственно следуют из определения пограничного слоя.

Так как турбулентные потоки вблизи поверхности остаются почти постоянными по высоте, то решение задачи в потоках позволило вместо граничного условия на $z = z_0 > 0$ использовать условие при $z \rightarrow 0$, при этом один параметр — z_0 оказывается не существенным до момента перехода от потоков к профилям скорости.

Выписанная выше система уравнений является нелинейной и может быть решена только численно. Вместе с тем, в ней и в граничных условиях содержится довольно много параметров, от которых будет зависеть решение. Чтобы уменьшить число параметров целесообразно свести задачу к безразмерному виду. Применяя ранее изложенную процедуру «обезразмеривания» уравнений

* Граничное условие для b получается из анализа уравнения баланса энергии турбулентности при $z \rightarrow 0$, в этой области можно пренебречь диффузией и рассматривать только одну компоненту скорости.

(см. 4.2), получим следующую систему алгебраических уравнений для определения масштабов:

$$\frac{\eta_0}{L_1^2} = 2\omega_z \frac{\sigma_0}{k_0}, \quad \frac{\sigma_0}{L_1^2} = 2\omega_z \frac{\eta_0}{k_0}, \quad k_0 = l_0 \sqrt{b_0}, \quad l_0 = \kappa c^{\frac{1}{2}} L_1,$$

$$P_0' = k_0 \frac{P_0}{\kappa v_* L_1}, \quad \eta_0 = k_0 \frac{u_0}{L_1}, \quad \eta_0 = v_*^2, \quad \sigma_0 = k_0 \frac{v_0}{L_1}, \quad (4.3.66)$$

$$E_0' = k_0 \frac{E_0}{\kappa v_* L_1}, \quad b_0 = c^{-\frac{1}{2}} v_*^2.$$

Исключая из первых двух уравнений L_1 , можно показать, что $\eta_0 = \sigma_0$ (при условии $k \neq \infty$). В таком случае после некоторых преобразований получаем:

$$\eta_0 = \sigma_0 = v_*^2, \quad b_0 = c^{-\frac{1}{2}} v_*^2, \quad L_1 = \frac{\kappa v_*}{2\omega_z}, \quad P_0' = P_0,$$

$$E_0' = E_0, \quad l_0 = \kappa c^{\frac{1}{2}} L_1, \quad k_0 = \kappa v_* L_1, \quad u_0 = v_0 = \frac{v_*}{\kappa}. \quad (4.3.67)$$

Используя (4.3.67), перепишем исходную систему в безразмерном виде:

$$\frac{d^2 \eta_n}{dz_n^2} + \frac{\sigma_n}{k_n} = 0; \quad (4.3.68)$$

$$\frac{d^2 \sigma_n}{dz_n^2} - \frac{\eta_n}{k_n} = 0; \quad (4.3.69)$$

$$\frac{\eta_n^2 + \sigma_n^2}{k_n} - \frac{L_1}{L} P_n + \frac{b_n^2}{k_n} + \beta \frac{d}{dz_n} k_n \frac{db_n}{dz_n} = 0; \quad (4.3.70)$$

$$k_n = l_n \sqrt{b_n}; \quad (4.3.71)$$

$$l_n = -2 \frac{\frac{\eta_n^2 + \sigma_n^2}{k_n^2} - \frac{L_1}{L} \frac{P_n}{k_n}}{\frac{d}{dz_n} \left[\frac{\eta_n^2 + \sigma_n^2}{k_n} - \frac{L_1}{L} \frac{P_n}{k_n} \right]}; \quad (4.3.72)$$

$$P_n = \alpha_T k_n \frac{d\theta_n}{dz_n} = k_n \left[\frac{1}{z_n} + \left(\frac{L}{L_1} \right) \frac{g}{T} \frac{\kappa^4 (\gamma_a - \gamma_p)}{(2\omega_z)^2} \left(\frac{z_n}{H_n} \right)^m \right]; \quad (4.3.73)$$

$$E_n = \alpha_q k_n \frac{dq_n}{dz_n} = k_n \left[\frac{1}{z_n} - \beta_0 L_1 q_n \right]; \quad (4.3.74)$$

$$\eta_n^2 \left(H_n, \frac{L}{L_1} \right) + \sigma_n^2 \left(H_n, \frac{L}{L_1} \right) = \varepsilon_2. \quad (4.3.75)$$

Здесь L — масштаб Монина — Обухова (4.2.15);

$$\beta = \frac{\alpha_b x^2}{c^{1/2}}, \quad \theta_0 = - \frac{P_0}{\rho c_p \alpha_T v_*}, \quad q_0 = - \frac{E_0}{\rho \alpha_q v_*}$$

(это получается из уравнений (4.3.59) и (4.3.60)). Обозначим $\frac{L_1}{L}$ через μ_0 :

$$\mu_0 = - x^2 \frac{g}{T} \frac{P_0 / \rho c_p}{2 \omega_z v_*^2}. \quad (4.3.76)$$

Граничные условия запишутся в виде:

$$\text{при } z_n \rightarrow 0 \quad \eta_n = 1, \quad \sigma_n = 0, \quad b_n \rightarrow 0, \quad k_n \rightarrow 0; \quad (4.3.77)$$

$$\text{при } z_n \rightarrow \infty \quad \eta_n = \sigma_n = b_n \rightarrow 0. \quad (4.3.78)$$

В системе (4.3.68 — 4.3.75) фактически содержатся следующие параметры:

$$\mu_0, \quad \Gamma = \frac{g}{T} \frac{x^4 (\gamma_a - \gamma_p)}{(2 \omega_z)^2}, \quad m, \quad \beta_0, \quad L_1 \text{ и } \varepsilon_2.$$

Так как уравнение (4.3.74) не требуется для решения других уравнений, то вопрос о входящих в него параметрах возникает только при определении турбулентного потока влаги или профиля q . Параметр ε_2 необходим для определения высоты пограничного слоя. Для узкого диапазона широт при $\gamma_p \approx 0,6^\circ/100$ м величина Γ может рассматриваться const (около 400) при определении только динамических характеристик (при расчете профиля температуры этот параметр нужно определять более точно, учитывая возможные изменения величины γ_p). Показатель степени следует выбирать из эмпирических данных или численных экспериментов.

Следует иметь в виду, что профиль градиента потенциальной температуры (4.3.59) довольно сильно зависит от выбора m . На рис. 25 показан профиль $\frac{d\theta}{dz}$ для разных значений m , построенный при условиях, характерных для тропической части океана: $H = 1000$ м, $v_* = 0,3$ м/с, $\frac{P_0}{\rho c_p} = 10^{-2} (\text{м} \cdot \text{К}) / \text{с}$ ($P_0 \approx 30$ кал/(см² × сутки)), $\gamma_a - \gamma_p = 0,4 \cdot 10^{-2}$ К/м. Видно, что для малых m большая часть ППС имеет устойчивую стратификацию, тогда как с ростом m можно получить распределение температуры, характерное для конвективного ППС. Обработка данных зондирования на экваторе в экспедиции ТРОПЭКС-74 дала при отсутствии инверсии над ППС $m \approx 1,5 - 2,5$.

Таким образом, по крайней мере в первом приближении, можно считать, что рассматриваемая система (4.3.68 — 4.3.73, 4.3.75) уравнений содержит один параметр $\frac{L_1}{L} = \mu_0$.

Численное решение задачи (при $m = 0$; $\alpha_b = 0,73$; $\alpha_T = 1,0$; $c = 0,046$; $\kappa = 0,4$; $\beta = 0,54$) выполнялось итерациями по k_n , в качестве начального значения принимались $k_n = z_n$. По известному k_i из (4.3.68) и (4.3.69) находились величины η_i и σ_i , из (4.3.70) — b_i , из (4.3.72) — l_i , затем из (4.3.71) определялось k_{i+1} , и повторялся весь цикл до тех пор, пока $\max |k_{i+1} - k_i|$ не становился достаточно малой величиной.

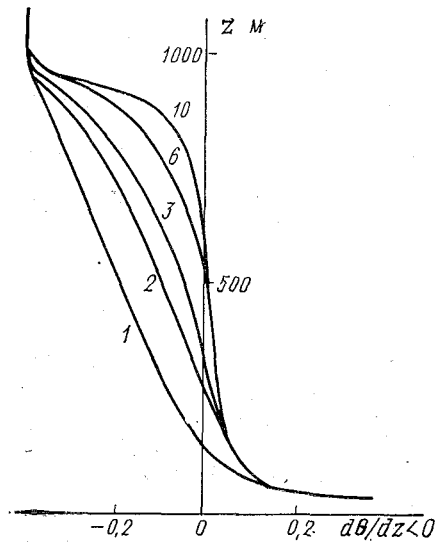


Рис. 25. Профиль градиента потенциальной температуры при различных значениях m (цифры у кривых); $\frac{d\theta}{dz}$ в $K/100$ м.

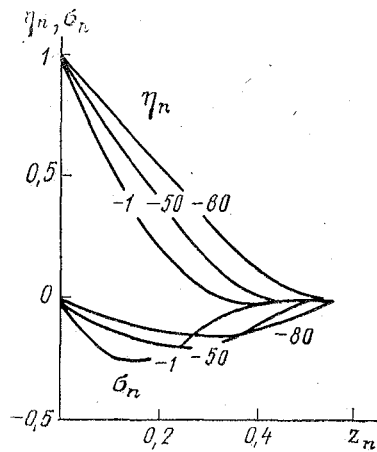


Рис. 26. Зависимость безразмерных касательных напряжений (σ_n , η_n) от μ_0 и z_n .

В качестве примера на рис. 26, 27, показана зависимость η_n , σ_n , k_n , b_n от z_n и μ_0 . С ростом неустойчивой стратификации поток количества движения менее резко уменьшается с высотой и увеличивается высота пограничного слоя, увеличивается также как величина максимума коэффициента турбулентности, так и высота, на которой он расположен. Интересные особенности прослеживаются в вертикальном распределении b_n : в нижних слоях наблюдается рост b_n , связанный с вкладом термического фактора, а затем убывание до нуля на верхней границе пограничного слоя.

Если определить высоту пограничного слоя из условия, допустим при $\varepsilon_2 = 0,05$, то можно найти зависимость H_n от μ_0 (рис. 28).

После того как определены потоки, можно рассчитать компоненты скорости ветра, температуру и влажность по формулам:

$$u_n = \int_{z_{0n}}^{z_n} \frac{\eta_n}{k_n} dz_n = \frac{\kappa G}{v_*} \cos \delta + \frac{d\sigma_n}{dz_n} = \frac{\kappa}{v_*} u, \quad (4.3.79)$$

$$v_n = \int_{z_{0n}}^{z_n} \frac{\sigma_n}{k_n} dz_n = \frac{\kappa G}{v_*} \sin \delta - \frac{d\eta_n}{dz_n} = \frac{\kappa}{v_*} v;$$

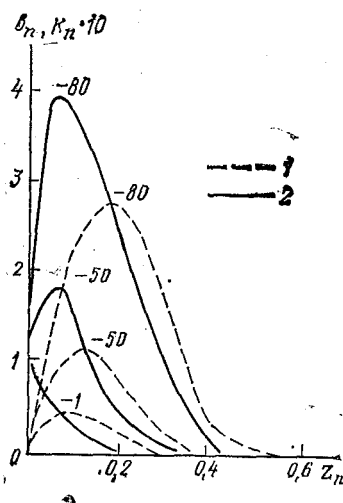


Рис. 27. Профили коэффициента турбулентности (1) и кинетической энергии турбулентности (2) для разных значений μ_0 (цифры у кривых).

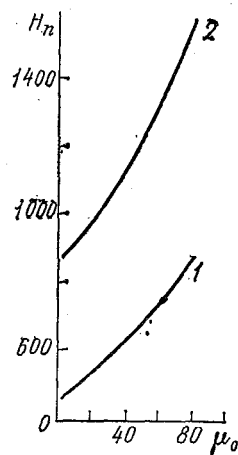


Рис. 28. Зависимость высоты пограничного слоя H_n от μ_0 (при $2\omega_z = 1,26 \cdot 10^{-4}$, $z_0 = 5 \cdot 10^{-2}$ м):
1 — $G = 10$ м/с;
2 — $G = 20$ м/с.

$$\Theta_n - \Theta_n(z_{0n}) = \int_{z_{0n}}^{z_n} \frac{P_n}{\alpha_r k_n} dz_n \quad (4.3.80)$$

$$q_n - q_n(z_{0n}) = \int_{z_{0n}}^{z_n} \frac{\bar{E}_n}{\alpha_q k_n} dz_n,$$

где δ — угол между приземным ветром и изобарой.

Следует обратить внимание на то, что шероховатость теперь будет фигурировать как существенный параметр:

$$z_{0n} = \frac{2 \omega_z z_0}{\kappa v_*^2} = \frac{1}{\kappa^2 \text{Ro} \chi}, \quad (4.3.81)$$

где $\text{Ro} = \frac{G}{2 \omega_z z_0}$ — число Россби; $\chi = \frac{v_*}{\kappa G}$ — геострофический коэффициент трения.

На рис. 29 построена зависимость η'_n и σ'_n от $\lg z_n$, которая согласно (4.3.79), характеризует вертикальный профиль ветра. Отчетливо выделяется логарифмическая область, где основная компонента скорости u_n изображается прямой линией (с ростом неустойчивости эта область распространяется до больших высот). Другая компонента скорости в нижнем слое почти не изменяется с высотой.

При расчете универсальных функций использовался параметр $\mu_0 = \frac{L_1}{L}$, однако при решении прикладных задач обычно известны внешние параметры: G , z_0 , P_0 , $2\omega_z$ и необходимо указать способ перехода от внешних параметров к масштабам и параметрам, принятым в расчетах.

Из (4.3.79) следует, что

$$\left. \frac{d\sigma_n}{dz_n} \right|_{z_n=z_{0n}} = -\frac{\kappa G}{v_*} \cos \delta, \quad \left. \frac{d\eta_n}{dz_n} \right|_{z_n=z_{0n}} = \frac{\kappa G}{v_*} \sin \delta,$$

отсюда

$$\chi = \frac{v_*}{\kappa G} = \left[\left(\left. \frac{d\eta_n}{dz_n} \right|_{z_n=z_{0n}} \right)^2 + \left(\left. \frac{d\sigma_n}{dz_n} \right|_{z_n=z_{0n}} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.3.83)$$

$$\text{tg } \delta = - \left. \frac{d\eta_n/dz_n}{d\sigma_n/dz_n} \right|_{z_n=z_{0n}}.$$

С учетом (4.3.83) получаем трансцендентное уравнение

$$\frac{L_1}{L} = - \frac{P_0 g}{2 \omega_z \rho c_p T_0 G^2} \left(\frac{\kappa G}{v_*} \right)^2 = - \frac{P_0 g}{2 \omega_z \rho c_p T_0 G^2} \times \left[\left(\left. \frac{d\eta_n}{dz_n} \right|_{z_n=z_{0n}} \right)^2 + \left(\left. \frac{d\sigma_n}{dz_n} \right|_{z_n=z_{0n}} \right)^2 \right] = - \frac{P_0 g}{2 \omega_z \rho c_p T_0 G^2} \frac{1}{\chi^2 \left(\frac{L_1}{L}, z_{0n} \right)}, \quad (4.3.84)$$

которое связывает μ_0 с внешними параметрами:

$$M = \frac{P_n g}{2\omega_z \rho c_p T_0 G^2},$$

$$Ro = \frac{G}{2\omega_z z_0} \left(\text{так как } z_{0n} = \frac{1}{\kappa^2 \chi Ro} \right). \quad (4.3.85)$$

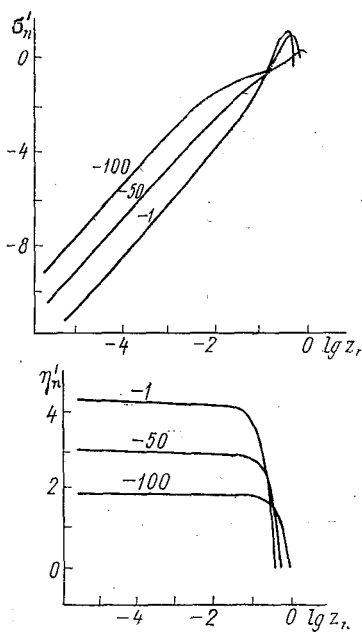


Рис. 29. Отклонение компонент скорости ветра от геострофической скорости в зависимости от $\lg z_n$ и μ_0 (цифры у кривых).

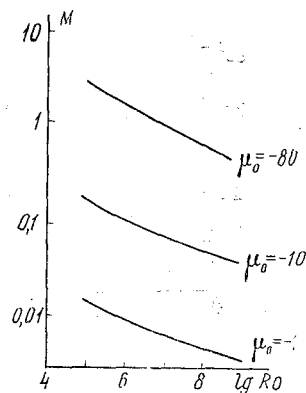


Рис. 30. Номограмма для определения параметра μ_0 по данным о Ro и M .

Результаты решения уравнения (4.3.84) приводятся на рис. 30, с помощью которого по данным синоптической карты можно вычислить характеристики пограничного слоя атмосферы. Необходимый для определения M турбулентный поток тепла определяется или из уравнения теплового баланса, если использовать связь между облачностью и радиационным балансом, а также отношение Боуэна, или по наблюдениям в приземном слое (см. 4.2).

Параметр шероховатости выбирается в зависимости от типа подстилающей поверхности по эмпирическим данным или определяется для водной поверхности по (4.2.44).

Приведенные на рис. 31 результаты сравнения расчета с наблюдениями показывают, что такие важные характеристики пограничного слоя как геострофический коэффициент трения и угол полного поворота ветра в пограничном слое атмосферы хорошо согласуются с наблюдениями (опытные данные располагаются вблизи соответствующей средним условиям изолинии $\mu_0 = -1,0$).

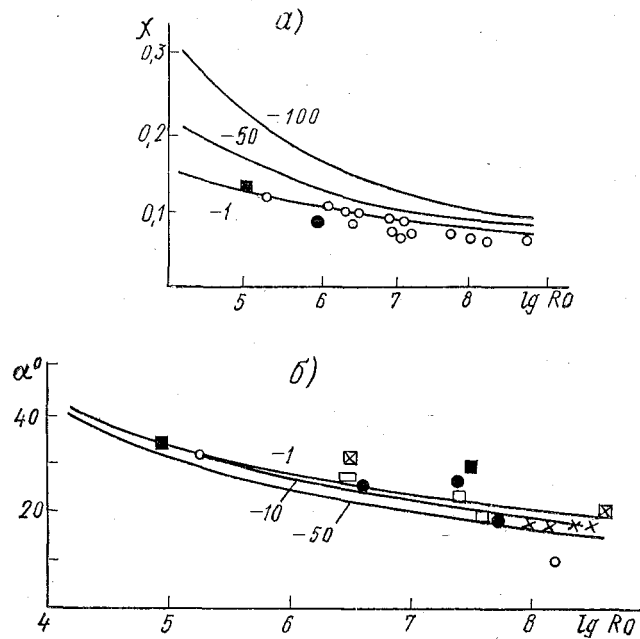


Рис. 31. Зависимость геострофического коэффициента трения γ (а) и угла полного поворота ветра в пограничном слое α (б) от R_0 и μ_0 . Различные значки указывают экспериментальные данные (см. [2]).

Особенности динамических процессов в пограничном слое над морем связаны с подвижностью поверхности. Ее шероховатость, скорость и направление движения воды не только зависят от скорости ветра, но и в свою очередь влияют на нее. Наличие таких обратных связей заставляют рассматривать движение пограничных слоев атмосферы и океана как движение сильно взаимодействующей системы, обе части которой «связываются» турбулентным обменом. В настоящее время изложение этих вопросов выходит за рамки задач данного курса, так как затрагивает вопросы взаимодействия атмосферы и океана.

4.4. Стационарный, горизонтально-неоднородный планетарный пограничный слой атмосферы

Модель с $k = \bar{k} = \text{const}$

Рассмотрим в качестве первого приближения влияние только бароклинности планетарного пограничного слоя, связанной с за-

висимостью горизонтального градиента давления от горизонтального градиента температуры. По сути дела задача при этом сводится к учету термического ветра в уравнениях движения.

Допустим, что в пограничном слое атмосферы известны средние горизонтальные градиенты температуры $\Gamma_x = \frac{\partial T}{\partial x}$, $\Gamma_y = \frac{\partial T}{\partial y}$ и

$$\frac{g}{2\omega_z T_0} \frac{\partial T}{\partial y} = m = \text{const}, \quad \frac{g}{2\omega_z T_0} \frac{\partial T}{\partial x} = n = \text{const}. \quad (4.4.1)$$

В таком случае компоненты геострофического ветра можно представить как:

$$v_g = v_{g0} + \Delta v_T, \quad u_g = u_{g0} + \Delta u_T, \quad (4.4.2)$$

где u_{g0} , v_{g0} — компоненты геострофического ветра у поверхности земли; Δu_T , Δv_T — компоненты термического ветра.

Для случая $\bar{k} = \text{const}$ и когда ось x направлена по наземному геострофическому ветру уравнения (4.3.2—4.3.3) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \bar{k} \frac{d^2 u}{dz^2} + 2\omega_z v &= 2\omega_z n z, \\ \bar{k} \frac{d^2 v}{dz^2} - 2\omega_z (u - G_0) &= 2\omega_z m z. \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Решая эту систему аналогично (4.3.2—4.3.3), получим:

$$\begin{aligned} u &= G_0 (1 - e^{-az} \cos az) - mz, \\ v &= G_0 e^{-az} \sin az + nz. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

На рис. 32 построены годографы ветра для разных величин горизонтального градиента температуры. Как и следовало ожидать, на основании формул (4.4.4) при $\Gamma_x = \Gamma_y = \pm 1\text{K}/100\text{ км}$ (характерных величинах горизонтального градиента температуры) влияние термического ветра на годограф незначительно до высот порядка 100 м. Выше этого уровня при росте температуры вдоль направления геострофического ветра ($\Gamma_x > 0$) увеличивается перпендикулярная к геострофическому ветру компонента скорости, а при падении температуры ($\Gamma_x < 0$) — уменьшается.

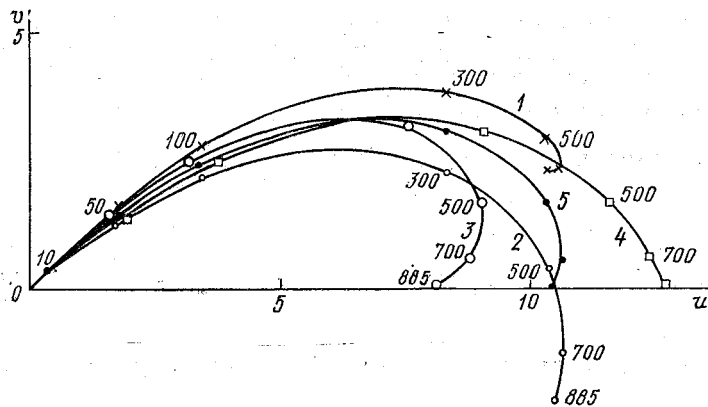


Рис. 32. Влияние горизонтального градиента температуры на годографы ветра в пограничном слое атмосферы

($G_0 = 10$ м/с, $k = 5,0$ м²/с, $\varphi = 6^\circ$):

1) $\frac{\partial T}{\partial x} = 1 \cdot 10^{-5}$ К/м; $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$; 2) $\frac{\partial T}{\partial x} = -1 \cdot 10^{-5}$ К/м;

$\frac{\partial T}{\partial y} = 0$, 3) $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial y} = 1 \cdot 10^{-5}$ К/м; 4) $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial y} =$

$= -1 \cdot 10^{-5}$ К/м; 5) $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0$.

Контрольные вопросы

1. Какой слой атмосферы называют пограничным слоем? Каковы основные особенности формирования метеорологических полей в нем?

2. Какой слой атмосферы называют приземным слоем? Каковы основные его особенности?

3. Откуда следует возможность считать, что для стационарного, горизонтально-однородного приземного слоя

$$k = f \left(v_*, \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho c_p}, z \right) ?$$

4. Какой физический смысл имеет параметр $\frac{z}{L}$? Как он связан с числом Ричардсона?

5. Какие профили метеорологических величин и коэффициента турбулентности получают при безразличной и близкой к безразличной стратификации, а также при свободной конвекции и сильной инверсии?

6. Как влияет вертикальное распределение массовой доли водяного пара на устойчивость? Где оно сказывается сильнее в низких или умеренных широтах?

7. Как на основании стандартных гидрометеорологических наблюдений рассчитать турбулентные потоки тепла, влаги и количества движения?
8. Что облегчает использование уравнения баланса энергии турбулентности в интегральной форме?
9. Каким образом можно параметризовать эффекты лучистого притока тепла в ППС?
10. Какие условия обычно используются для определения высоты ППС?
11. Какой поворот ветра существует в ППС и как годограф ветра зависит от широты и коэффициента турбулентности?
12. Как средний в пограничном слое коэффициент турбулентности зависит от скорости геострофического ветра, широты места и турбулентного потока тепла у земли?
13. Как влияет ППС на свободную атмосферу? От каких параметров зависит вертикальная скорость на верхней границе ППС?
14. Какие имеются модели ППС с априорным профилем коэффициента турбулентности? К чему приводит предположение $k = \bar{k} = \text{const}$?
15. Почему удобно записывать уравнения для ППС в потоках?
16. Какие асимптотические выражения используются для градиента потенциальной температуры и удельной влажности в ППС?
17. Как влияет средний в ППС горизонтальный градиент температуры на годограф ветра?

5. ТРАНСФОРМАЦИЯ ВОЗДУШНОГО ПОТОКА ЗА СЧЕТ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ. БРИЗЫ И МУССОНЫ

5.1. Качественная характеристика процесса трансформации

Теория трансформации является важным разделом динамической метеорологии в связи с ее приложением к синоптической метеорологии и ряду других прикладных проблем. Воздушная масса, сформировавшаяся над одной подстилающей поверхностью, при переходе на другую поверхность меняет свои свойства. Например, зимой холодный и сухой воздух с континента, попадая на море, начинает нагреваться и становится более влажным. На каком-то достаточно большом расстоянии от берега воздушная масса полностью теряет свои первоначальные свойства и становится морской воздушной массой. В процессе трансформации могут образовываться и рассеиваться облака и туманы. Слой воздуха, характеристики которого изменяются под влиянием новой подстилающей поверхности, называется внутренним пограничным слоем

(рис. 33). Предметом и задачей теории трансформации является изучение изменения свойств воздушного потока под влиянием изменяющихся свойств подстилающей поверхности. Из физических соображений очевидно, что нельзя, в общем случае, рассматривать изменение одного свойства воздушного потока без учета изменения других свойств: например, если над поверхностью с однородной шероховатостью, но неоднородной температурой будет трансформироваться поле температуры воздуха, то вследствие изменения характеристик устойчивости воздушного потока произойдет и изменение поля скорости ветра, характеристик турбулентности, влажности и т. д.; тогда как только при изменении шероховатости подстилающей поверхности помимо скорости ветра, за счет изменения характеристик турбулентности будет трансформироваться поле температуры, влажности и т. д. С учетом этого сложного взаимодействия между изменением различных свойств воздушного потока, строго говоря решение задачи нужно искать на основании замкнутой системы уравнений для планетарного пограничного слоя атмосферы (4.1.1—4.1.9).

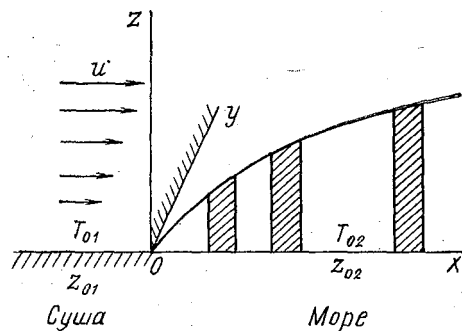


Рис. 33. Качественная картина трансформации воздушного потока при переходе с суши на море.

Если считать известными градиенты давления, радиационный и фазовый притоки тепла, а также фазовый приток влаги, то для определения девяти неизвестных ($u, v, w, \theta, q, k, b, l, \psi$) имеется девять уравнений и система замкнута. Решение задачи в такой общей постановке сопряжено со значительными трудностями, поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением некоторых простых задач, позволяющих получить аналитическое решение.

5.2. Общая постановка задачи для малых высот

Будем в дальнейшем исследовать только стационарную трансформацию, под которой понимается такой процесс, когда в фиксированной точке (при $x > 0$) свойства воздушного потока достигли

стационарного значения $\left(\frac{\partial s}{\partial t} = 0\right)$. Предположим, что начало координат находится на границе раздела между двумя поверхностями, ось y направлена вдоль границы раздела $\left(\frac{\partial s}{\partial y} = 0\right)$; а ось x направлена вдоль ветра (см. рис. 33).

Как и раньше (см. гл. 4), наибольшее упрощение задачи может быть достигнуто при рассмотрении малых высот, где обычно есть основание пренебречь фазовыми $\left(L \frac{m}{\rho} = 0, \frac{m}{\rho} = 0\right)$ и лучистым $\left(\frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial R}{\partial z} = 0\right)$ притоками, а также поворотом ветра с высотой.

С учетом всех сделанных выше предположений и допущений система (4.1.1 — 4.1.9) может быть записана в виде:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial u}{\partial z}; \quad (5.2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (5.2.2)$$

$$u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} a_T k \frac{\partial \theta}{\partial z}; \quad (5.2.3)$$

$$u \frac{\partial q}{\partial x} + w \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} a_q k \frac{\partial q}{\partial z}; \quad (5.2.4)$$

$$u \frac{\partial b}{\partial x} + w \frac{\partial b}{\partial z} = k \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 - \frac{g}{T} a_T k \frac{\partial \theta}{\partial z} - c \frac{b^2}{k}; \quad (5.2.5)$$

$$k = l \sqrt{b}; \quad (5.2.6)$$

$$l = -\tilde{\chi} \frac{\psi}{d\psi/dz}; \quad (5.2.7)$$

$$\psi = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 - \frac{g}{T} a_T \frac{\partial \theta}{\partial z}. \quad (5.2.8)$$

В системе (5.2.1) — (5.2.8) содержится восемь неизвестных величин ($u, w, \theta, q, k, b, l, \psi$) и она в принципе является замкнутой. Для нахождения искомых величин могут быть использованы следующие граничные условия (см. 4.2):

при $x = 0, \quad u = u_1(z, z_{01}, v_{*1}, L_1), \quad \theta = \theta_1(z, z_{01}, \theta_{01}, v_{*1}, L_1),$

$$z \gg z_{01} \quad q = q_1(z, z_{01}, q_{01}, v_{*1}, E_{01}, L_1), \quad b = b_1(v_{*1}); \quad (5.2.9)$$

$$\text{при } x > 0, \quad u = w = 0, \quad b = c^{-1/2} v_{*2}^2(x), \quad \theta = \theta_{02}(x), \\ z = z_{02} \quad q = q_{02}(x), \quad k = \kappa z_{02} v_{*2}(x); \quad (5.2.10)$$

$$\text{при } x > 0, \quad u(h, x) = u_1(h, z_{01}, v_{*1}, L_1), \quad \theta(h, x) = \theta_1(h, z_{01}, T_{01}, v_{*1}, L_1), \\ z = h \quad q(h, x) = q_1(h, z_{01}, q_{01}, v_{*1}, E_{01}, L_1), \quad (5.2.11)$$

где $i = 1$ соответствует $x \leq 0$, а $i = 2$, $x > 0$; h — высота внутреннего пограничного слоя. Предполагается, что при $x \leq 0$ профили u_1 , θ_1 , q_1 , b_1 известны на основании моделей приземного слоя (см. 4.2). Таким образом, если считать заданными параметрами: z_{01} , v_{*1} , L_1 , T_{01} , q_{01} , E_{01} , z_{02} и известными функциями $\theta_{02}(x)$, $q_{02}(x)$, то, решая (5.2.1) — (5.2.8) при граничных условиях (5.2.9) — (5.2.11), можно определить все искомые величины через заданные и две дополнительные неизвестные характеристики $v_{*2}(x)$ и h . Согласно определению турбулентных потоков при $x > 0$, $z = z_{02}$

$$k \frac{\partial u}{\partial z} = v_{*2}^2(x), \quad \alpha_T k \frac{\partial \theta}{\partial z} = - \frac{P_{02}(x)}{\rho c_p}, \quad \alpha_q k \frac{\partial q}{\partial z} = - \frac{E_{02}(x)}{\rho}. \quad (5.2.12)$$

Для определения h можно использовать одно из условий непрерывности турбулентных потоков при $x > 0$, $z = h$

$$k \frac{\partial u}{\partial z} = v_{*1}^2, \quad \alpha_T k \frac{\partial \theta}{\partial z} = - \frac{P_{01}}{\rho c_p}, \quad \alpha_q k \frac{\partial q}{\partial z} = - \frac{E_{01}}{\rho}. \quad (5.2.13)$$

Поскольку даже решение системы (5.2.1 — 5.2.13) связано с большими трудностями, рассмотрим в дальнейшем возможные варианты ее упрощения.

В первую очередь, отдавая себе отчет о необходимости совместного рассмотрения трансформации всех метеорологических полей и характеристик турбулентности, будем все же считать, что при изменении теплофизических свойств подстилающей поверхности трансформация динамических характеристик потока носит вторичный характер, тогда как при изменении динамических характеристик вторичной является трансформация полей температуры и влажности.

Исходя из этого, рассмотрим отдельно задачи о трансформации поля температуры и влажности за счет изменения теплофизических свойств поверхности и трансформации поля скорости ветра за счет изменения шероховатости подстилающей поверхности.

5.3. Трансформация поля температуры и влажности за счет изменения теплофизических свойств подстилающей поверхности

Модель с $k(x, z) = \bar{k} = \text{const}$, $u(x, z) = \bar{u} = \text{const}$

Рассмотрим вначале простейшую задачу: при $x = 0$ изменяется скачком только температура или влажность подстилающей поверх-

ности ($\phi = \{\theta, q\}$) от $\phi_{01} = \phi_1$ при $x \leq 0$ до $\phi = \phi_0 = \text{const}$ при $x > 0$; динамические характеристики не трансформируются и остаются заданными постоянными \bar{k} и \bar{u} ; при $x \leq 0$ $\phi(z) = \phi_1$.

Для указанных приближений система (5.2.1—5.2.8) сведется к одному уравнению (так как $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, то $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ и при $w \Big|_{z=0} = 0$, $w = 0$)

$$\bar{u} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \alpha \bar{k} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \quad (5.3.1)$$

которое должно решаться при следующих граничных условиях:

$$\text{при } x = 0, \quad \phi = \phi_1; \quad (5.3.2)$$

$$\begin{aligned} z \geq 0 \\ \text{при } x > 0, \quad \phi = \phi_0; \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

$$\begin{aligned} z = 0 \\ \text{при } x > 0, \quad \phi = \phi_1; \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Для заданных постоянных \bar{k} , \bar{u} , ϕ_1 в (5.3.2) — (5.3.3) не имеет смысла вводить дополнительные параметры z_{01} и z_{02} , а (5.2.11) целесообразно записать в асимптотической форме (5.3.4), считая что на высотах больших высоты внутреннего пограничного слоя (h) при $x > 0$ сохраняется $\phi = \phi_1$.

Граничное условие (5.3.3) в действительности следовало бы заменить уравнением баланса свойств ϕ на подстилающей поверхности, так как в процессе трансформации меняется не только ϕ в воздушной массе, но и ϕ_0 . Если предположить, что в начальный момент (перед приходом воздушной массы на область $x > 0$) подстилающая поверхность имела свойство $\phi_0^0 = \text{const}$, то в дальнейшем за счет обмена свойством между воздушной массой и поверхностью (различного на разных расстояниях от $x = 0$) установится $\phi_0 = \phi_0(x)$. Однако, пока недостаточно надежно определяется температура поверхности* θ_0 и соответствующая ей q_0 (для морских условий насыщающая массовая доля водяного пара). С этой точки зрения нельзя считать ϕ_0 известной величиной и при $z=0$ нужно задавать условия теплового (для температуры) и водного (для влажности) баланса:

$$R = P_0 + L E_0 + B, \quad O = E_0, \quad (5.3.3')$$

компоненты которых (R — радиационный баланс, B — теплообмен с нижележащими слоями, O — осадки, E_0 — скорость испарения) зависят от x . Однако использование (5.3.3') заметно усложняет решение задачи, к тому же, если

* Из-за больших градиентов температуры в самом верхнем слое почвы температуру поверхности суши стандартными приборами измерить практически невозможно. В море за поверхностную температуру обычно принимают температуру, измеренную в слое от 0,5 до 1,5 м глубиной. При слабом ветре она может почти на 1°K отличаться от температуры поверхности.

воздушная масса поступает на водную поверхность, есть основания считать $\vartheta_0^0 = \vartheta_0 = \text{const}$ (независимым от x). Это упрощение связано с тем, что удельная теплоемкость воды почти в четыре раза больше удельной теплоемкости воздуха (т. е. большим изменениям температуры воздуха будут соответствовать сравнительно слабые изменения температуры воды и q_0), и с тем, что в море существует интенсивный турбулентный теплообмен поверхности с нижележащими довольно однородными слоями воды, за счет которого также поддерживается $\vartheta_0 = \text{const}$.

Сведем уравнение в частных производных (5.3.1) к обыкновенному дифференциальному уравнению, для чего введем новую переменную

$$\xi = \frac{z^2}{x}. \quad (5.3.5)$$

Перепишем частные производные по x и z через полные производные по ξ :

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{d\vartheta}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = -\frac{z^2}{x^2} \frac{d\vartheta}{d\xi}, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \frac{d\vartheta}{d\xi} \frac{d\xi}{dz} = \frac{2z}{x} \frac{d\vartheta}{d\xi},$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{2z}{x} \frac{d\vartheta}{d\xi} \right) = \frac{2}{x} \frac{d\vartheta}{d\xi} + \frac{4z^2}{x^2} \frac{d^2 \vartheta}{d\xi^2}$$

и подставим полученные выражения в (5.3.1), которое после некоторых преобразований примет вид

$$\frac{d^2 \vartheta}{d\xi^2} + \left(\frac{\bar{u}}{4\alpha k} + \frac{1}{2\xi} \right) \frac{d\vartheta}{d\xi} = 0. \quad (5.3.6)$$

Для новой переменной ξ граничные условия (5.3.2) — (5.3.4) переписутся как:

$$\vartheta(\xi) \Big|_{\xi=0} = \vartheta_0; \quad (5.3.7)$$

$$\vartheta(\xi) \Big|_{\xi=\infty} = \vartheta_1. \quad (5.3.8)$$

Проинтегрируем (5.3.6):

$$\frac{d\vartheta}{d\xi} = c \cdot e^{-\frac{\bar{u}\xi}{4\alpha k}} \frac{1}{\sqrt{\xi}}.$$

Полученное выражение проинтегрируем от 0 до ξ и используем (5.3.7):

$$\vartheta(\xi) - \vartheta_0 = c \int_0^\xi e^{-\frac{\bar{u}\xi_1}{4\alpha k}} \frac{d\xi_1}{\sqrt{\xi_1}}. \quad (5.3.9)$$

Введем новую переменную $\sigma^2 = \frac{\bar{u} \xi_1}{4\alpha \bar{k}}$,

тогда

$$d\xi_1 = \frac{8\alpha \bar{k}}{u} \sigma d\sigma, \quad \frac{1}{\sqrt{\xi_1}} = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\bar{u}}{4\alpha \bar{k}}},$$

при $\xi_1 = 0$ $\sigma = 0$,

при $\xi_1 = \xi$ $\sigma = \sqrt{\frac{\bar{u} \xi}{4\alpha \bar{k}}}$,

и (5.3.9) примет вид

$$\vartheta(\xi) = \vartheta_0 + c_1 \int_0^{\sqrt{\frac{\bar{u} \xi}{4\alpha \bar{k}}}} e^{-\sigma^2} d\sigma, \quad (5.3.10)$$

где $c_1 = 2c \sqrt{\frac{4\alpha \bar{k}}{\bar{u}}}$.

Входящий в (5.3.10) интеграл вероятности затабулирован и известно, что

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma^2} d\sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (5.3.11)$$

Используем (5.3.11) и (5.3.8) для определения c_1 :

$$\vartheta_1 - \vartheta_0 = c_1 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{или} \quad c_1 = \frac{2(\vartheta_1 - \vartheta_0)}{\sqrt{\pi}}.$$

В таком случае окончательное выражение для определения ϑ в любой точке над новой подстилающей поверхностью примет вид:

$$\vartheta(z, x) = \vartheta_0 + \frac{2(\vartheta_1 - \vartheta_0)}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{\bar{u} z^2}{4\alpha \bar{k} x}}} e^{-\sigma^2} d\sigma. \quad (5.3.12)$$

Из физических соображений ясно, что заметное влияние подстилающей поверхности распространяется не до бесконечности, а до какой-то конечной высоты — высоты внутреннего пограничного слоя, которую можно определить как уровень, где с заданной точностью $\vartheta(h, x)$ равно ϑ_1 . Если задавать определенное малое различие между $\vartheta(h, x)$ и ϑ_1 в виде

$$\frac{\vartheta(h, x) - \vartheta_1}{\vartheta_1 - \vartheta_0} = \varepsilon,$$

и обозначить соответствующий ему верхний предел интеграла через

$$N = \frac{h}{2} \sqrt{\frac{\bar{u}}{\alpha \bar{k} x}}, \text{ или } h = 2N \sqrt{\frac{\alpha \bar{k} x}{\bar{u}}}, \quad (5.3.13)$$

то из (5.3.12) имеем

$$1 + \varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^N e^{-\sigma^2} d\sigma,$$

отсюда пользуясь таблицами интеграла вероятности можно определить величину N , а затем из (5.3.13) найти h . При $\varepsilon = 0,01$ $N = 1,8$ и если $\bar{u} = 10$ м/с, $\alpha = 1,0$, $\bar{k} = 2$ м²/с, то на расстоянии 1 км от границы раздела $h \approx 50$ м, а на расстоянии 10 км — 160 м.

В (5.3.13) прямая зависимость h от \sqrt{x} и обратная от $\sqrt{\bar{u}}$ связаны с продолжительностью взаимодействия движущегося воздуха с новой подстилающей поверхностью. Зависимость от \bar{k} объясняется тем, что чем больше интенсивность турбулентного перемешивания, тем до больших высот распространяется влияние подстилающей поверхности.

Используем (5.3.12) для определения турбулентного потока тепла и затрат тепла на испарение. Ограничимся для примера выводом формулы для расчета скорости испарения или затрат тепла на испарение:

$$LE_0 = -L \rho \alpha_q \bar{k} \left. \frac{\partial q}{\partial z} \right|_{z=0}.$$

Определим производную из (5.3.12), подставив вместо ϕ значение q и используя правило дифференцирования интеграла, пределы которого зависят от параметра:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x, \alpha) dx = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} dx + f(b, \alpha) \frac{\partial b}{\partial \alpha} - f(a, \alpha) \frac{\partial a}{\partial \alpha}.$$

В нашем случае

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial q}{\partial z} \right|_{z=0} &= \sqrt{\frac{\bar{u}}{4\alpha_q \bar{k} x}} \frac{2(q_1 - q_0)}{\sqrt{\pi}}, \\ LE_0 &= -\rho L \alpha_q \bar{k} \frac{2(q_1 - q_0)}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\bar{u}}{4\alpha_q \bar{k} x}} = \\ &= (q_0 - q_1) \rho \sqrt{\frac{\bar{k} \bar{u} \alpha_q}{\pi x}} L. \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

Увеличение скорости испарения при росте скорости ветра объясняется ускорением замены увлажненного воздуха новыми порциями сухого (при $q_0 > q_1$), тогда как обратная зависимость от \sqrt{x} связана с тем, что по мере удаления от границы раздела воздух постепенно адаптируется к свойствам подстилающей поверхности (в данном случае увеличивается его влагосодержание) и скорость испарения уменьшается. Из последнего факта не следует, однако, что в центре океана (при $x \rightarrow \infty$) испарение равно нулю, так как в действительности важную роль играют нерассмотренные здесь процессы конденсации, образования облаков, выпадения осадков и горизонтальная неоднородность, которая наблюдается даже в центральной части океана.

Влиянием x объясняется зависимость скорости испарения от направления ветра и формы испаряющего бассейна. Например, при прямоугольной форме бассейна скорость испарения со всего бассейна для ветра, дующего вдоль меньшей стороны (E_1) будет больше, чем для ветра, дующего вдоль большей стороны (E_2), так как во втором случае воздух проходит большее расстояние над водой и успевает сильнее увлажниться.

Получим выражение для определения испарения с полосы шириной Δy и длиной L_x , расположенной вдоль оси x . Если обозначить испарение с элементарной площадки $dx \cdot dy$ через $dE_0 = E_0 dx dy$, то

$$E_{0L_x} = 2\rho(q_0 - q_1) \sqrt{\frac{\bar{u} \bar{k} \alpha_q}{\pi}} \Delta y \cdot \sqrt{L_x}. \quad (5.3.15)$$

По аналогии с (5.3.14) и (5.3.15) можно получить выражения для турбулентного потока тепла и потери тепла с полосы шириной Δy и длиной L_x .

$$P_0 = \rho c_p (\theta_0 - \theta_1) \sqrt{\frac{\bar{k} \bar{u} \alpha_T}{\pi x}}; \quad (5.3.16)$$

$$P_{0L_x} = 2\rho c_p (\theta_0 - \theta_1) \sqrt{\frac{\bar{u} \bar{k} \alpha_T}{\pi}} \Delta y \sqrt{L_x}. \quad (5.3.17)$$

Рассмотренное выше решение задачи о трансформации было получено для $\bar{k} = \text{const}$ и $\bar{u} = \text{const}$. Приведенные оценки высоты внутреннего пограничного слоя показывают, что для расстояний в несколько километров влияние подстилающей поверхности сказывается, в основном, в пределах приземного слоя. Поскольку именно в приземном слое скорость ветра и коэффициент турбулентности заметно меняются с высотой (см. 4.2), то желательно учесть этот факт. Существуют разные подходы к учету этого факта, один из них основан на предположении, что согласно рассмотренным ранее моделям приземного слоя, по крайней мере при определенных условиях, профили u и k могут быть выражены степенными функциями высоты:

$$u = u_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^n, \quad k = k_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^m, \quad (5.3.18)$$

где u_1, k_1 — величины u и k при $z = z_1$; n и m — коэффициенты, зависящие от стратификации.

Если считать, что динамические характеристики трансформируются очень слабо и (5.3.18) применимо для $x < 0$ и $x > 0$, решение системы (5.2.1 — 5.2.8) сведется к решению уравнения

$$a^2 z^n \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = a \frac{\partial}{\partial z} z^m \frac{\partial \vartheta}{\partial z}, \quad (5.3.19)$$

где
$$a^2 = \frac{u_1 z_1^{m-n}}{k_1}$$

при граничных условиях (5.3.2 — 5.3.4) /

Уравнение (5.3.19) путем введения новой переменной (см. приложение)

$$\xi = \frac{x}{a^2 z^{n+2-m}}$$

можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению и сохраняя, в основном, рассмотренную ранее процедуру решения, получить его в виде

$$\vartheta(x, z) = \vartheta_0 + \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_0^{\beta/\xi} e^{-\beta/\xi_1} \left(\frac{\beta}{\xi_1}\right)^{\alpha-2} d\varphi, \quad (5.3.20)$$

где $\alpha = \frac{n+3-2m}{n+2-m}$; $\beta = \frac{1}{(n+2-m)^2}$; $\psi = \beta/\xi$;

$\Gamma(\alpha - 1)$ — гамма-функция.

На основании (5.3.20) можно, как и раньше, определить турбулентные потоки и суммарную тепло- и влагоотдачу, допустим с прямоугольного бассейна. Приведем в качестве примера соответствующие формулы только для испарения:

$$E_0 = -\rho k \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{z=0} = A x^{\frac{m-1}{n+2-m}},$$

$$E_{0Lx} = \Delta y \int_0^L E_0 dx = A \Delta y \frac{n+2-m}{n+1} L x^{\frac{n+1}{n+2-m}}, \quad (5.3.21)$$

где

$$A = -\rho \frac{q_1 - q_0}{\Gamma(\alpha - 1)} k_1 \frac{n+1}{n+2-m} u_1 \frac{1-m}{n+2-m} \beta^{-\frac{n+m}{(n+2-m)^2}} z_1^{-\frac{n+m}{n+2-m}}.$$

Полученные выражения (5.3.20 — 5.3.21) несомненно являются более точными, чем (5.3.12, 5.3.14, 5.3.15), и наряду с ними могут быть использованы для решения некоторых практических задач. Следует, однако, иметь в виду недостатки решений (5.3.20 — 5.3.21): в них отсутствует важный параметр z_0 ; степенная аппроксимация u и k в виде (5.3.18) не является универсальной для различной стратификации (например, при нейтральной стратификации $m=1$, а логарифмический характер профиля ветра не согласуется с (5.3.18)); не учитывается характер изменения с высотой ϑ при $x < 0$; предполагается, что динамические характеристики не трансформируются.

Конечно, отказ от этих допущений и ограничений в полном виде связан с решением системы (5.2.1 — 5.2.8) при граничных условиях (5.2.9 — 5.2.11), которое может быть получено только численно.

Приложение теории трансформации для решения прикладных задач

Рассмотренные выше модели трансформации поля температуры и влажности в принципе могут быть использованы при составлении синоптического прогноза погоды, так как они позволяют с разной степенью приближения оценивать изменение температуры и влажности воздушной массы за счет неоднородности подстилающей поверхности. С учетом относительной простоты синоптических правил, определяющих скорость и направление перемещения воздушной массы, полученные соотношения также при этом целесообразно максимально параметризовать, сохранив явную зависимость только от главных влияющих факторов. Примеры такого учета влияния трансформации приводятся в курсе синоптической метеорологии.

Полученные в данном параграфе аналитические соотношения, определяющие $T(x, z)$ и $q(x, z)$, могут быть использованы для «прогноза» образования тумана. Так как для образования тумана необходимо достижение относительной влажности 100 % или $e = E$ (т. е. упругость водяного пара достигает упругости насыщения при данной температуре воздуха), то условия образования тумана и его пространственные границы определяются как

$$q(x, z) = q_{\max} [T(x, z)]. \quad (5.3.48)$$

Такие условия часто могут возникать при натекании теплого сухого воздуха на холодную поверхность моря (при этом с ростом x увеличивается $q(x, z)$ и убывает $q_{\max}(x, z)$) или при натекании очень теплого влажного воздуха на очень холодную поверхность суши (при этом убывает $q(x, z)$ и $q_{\max}(x, z)$, однако убывание $q_{\max}(x, z)$ может происходить быстрее).

Полученные выше соотношения, определяющие изменение по x турбулентного потока водяного пара (скорости испарения), могут быть использованы для расчета норм орошения, т. е. определения объема воды, который необходимо подавать на орошаемое поле для создания оптимальных условий развития разных растений в разные вегетационные периоды.

Для океанолога эти же соотношения в сочетании с соответствующими выражениями для турбулентного потока тепла важны для оценки изменения теплосодержания моря в прибрежных районах и в полыньях при расчете сроков образования льда.

5.4. Трансформация динамических характеристик воздушного потока при изменении шероховатости подстилающей поверхности

Ограничимся рассмотрением случая нейтральной стратификации и не очень больших расстояний от границы раздела, при которых можно считать, это внутренний пограничный слой не выходит за рамки приземного слоя. Будем считать, что при $x < 0$ расположена поверхность с $z_0 = z_{01}$, а при $x > 0$ — поверхность с

$z_0 = z_{02}$. Для указанных условий система (5.2.1) — (5.2.13) примет вид:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial u}{\partial z}; \quad (5.4.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (5.4.2)$$

$$u \frac{\partial b}{\partial x} + w \frac{\partial b}{\partial z} = k \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - c \frac{b^2}{k}; \quad (5.4.3)$$

$$k = -\kappa c^{1/2} \sqrt{b} \frac{\partial u / \partial z}{\partial^2 u / \partial z^2}; \quad (5.4.4) *$$

$$\text{при } x = 0, \quad u = \frac{v_{*1}}{x} \ln \frac{z}{z_{01}}, \quad b = c^{-1/2} v_{*1}^2; \quad (5.4.5)$$

$$\begin{aligned} & z \geq z_{01} \\ \text{при } x > 0, \quad u = w = 0, \quad k = \kappa z_{02} v_{*2}(x); \quad (5.4.6) \\ & z = z_{02} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{при } x > 0, \quad u = \frac{v_{*1}}{x} \ln \frac{h}{z_{01}}; \quad (5.4.7) \\ & z = h \end{aligned}$$

$$k \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{\substack{z=h \\ x>0}} = v_{*1}^2. \quad (5.4.8)$$

Введем безразмерные величины: $u_n = \frac{u}{u_*}$, $w_n = \frac{w}{w_*}$,

$$k_n = \frac{k}{k_*}, \quad x_n = \frac{x}{x_*}, \quad z_n = \frac{z}{H}, \quad b_n = \frac{b}{b_*}.$$

Для определения масштабов используем соотношения, получающиеся из исходной системы уравнений и граничных условий, дополненные выражением для w_* , полученным из физических соображений: $w_* = \kappa(v_{*1} - v_{*2})$, где v_{*2} — характерная величина $v_{*2}(x)$ на больших x . Действительно, можно ожидать, что масштаб для вертикальной скорости должен быть связан с дивергенцией воздушного потока и, следовательно, с разностью динамических скоростей над исходной и подстилающей поверхностью.

* Выражение (5.4.4) получается из (5.2.6) — (5.2.8).

С учетом указанных выше соотношений получаем следующие выражения для масштабов:

$$u_* = \frac{v_{*1}}{\chi}, \quad H = z_{01}, \quad b_* = c^{-1/2} v_{*1}^2, \quad k_* = \chi v_{*1} z_{01},$$

$$w_* = \chi(v_{*1} - v_{*2}), \quad x_* = \frac{z_{01}}{\chi^2} \frac{v_{*1}}{v_{*1} - v_{*2}}. \quad (5.4.9)$$

В таком случае систему уравнений и граничных условий можно записать через безразмерные величины в виде:

$$\alpha \left(u_n \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + w_n \frac{\partial u_n}{\partial z_n} \right) = \frac{\partial}{\partial z_n} k_n \frac{\partial u_n}{\partial z_n}; \quad (5.4.10)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_n} + \frac{\partial w_n}{\partial z_n} = 0; \quad (5.4.11)$$

$$\frac{\chi^2}{c^{1/2}} \alpha \left(u_n \frac{\partial b_n}{\partial x_n} + w_n \frac{\partial b_n}{\partial z_n} \right) = k_n \left(\frac{\partial u_n}{\partial z_n} \right)^2 - \frac{b_n^2}{k_n}; \quad (5.4.12)$$

$$k_n = -\sqrt{b_n} \frac{\partial u_n / \partial z_n}{\partial^2 u_n / \partial z_n^2}; \quad (5.4.13)$$

при $x_n = 0, \quad u_n = \ln z_n, \quad b_n = 1;$
 $z_n \geq 1$ (5.4.14)

при $z_n = m, \quad u_n = w_n = 0, \quad k_n = mp, \quad k_n \frac{\partial u_n}{\partial z_n} = p^2;$
 $x_n > 0$ (5.4.15)

при $z_n = h_n, \quad u_n = \ln h_n;$
 $x_n > 0$ (5.4.16)

$$k_n \frac{\partial u_n}{\partial z_n} = 1, \quad (5.4.17)$$

где

$$m = \frac{z_{02}}{z_{01}}; \quad p = \frac{v_{*2}(x)}{v_{*1}}; \quad \alpha = \frac{v_{*1} - v_{*2}}{v_{*1}};$$

$$a = \frac{\chi^2}{c^{1/2}}. \quad (5.4.18)$$

Если считать α при определенных условиях (при небольшом изменении параметра шероховатости) малым параметром, тогда можно искать решение задачи в виде разложения в ряд по α , ограничиваясь членами, содержащими α в первой степени:

$$u_n = u_{n0} + \alpha u_{n1}, \quad w_n = w_{n0} + \alpha w_{n1}, \quad (5.4.19)$$

$$k_n = k_{n0} + \alpha k_{n1}, \quad b_n = b_{n0} + \alpha b_{n1}.$$

Подставим (5.4.19) в систему (5.4.10)–(5.4.16), упростим ее (отбрасывая члены, содержащие $\alpha^2, \alpha^3, \dots$, раскладывая $\sqrt{b_n}$ в биномиальный ряд и т. д.) и разделим на системы, содержащие α в нулевой и первой степени, которые можно решать отдельно. Из решения системы для $\alpha^0=1$ можно получить:

$$b_{n0} = p^2, \quad k_{n0} = p z_n, \quad u_{n0} = p \ln \frac{z_n}{m},$$

$$w_{n0} = -\frac{dp}{dx_n} \left(z_n \ln \frac{z_n}{m} - z_n + m \right), \quad p = \frac{\ln h_n}{\ln \frac{h_n}{m}}. \quad (5.4.20)$$

Полученное решение системы для нулевого приближения характеризует строение квазиоднородного приземного слоя над новой подстилающей поверхностью. Действительно, записывая (5.4.20) в размерном виде, например:

$$u_0 = \frac{v_{*2}(x)}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0}, \quad k_0 = \kappa v_{*2}(x) z$$

получаем, что зависимость от x учитывается только параметрически через $v_{*2}(x)$, т. е. для каждого значения x считаются справедливыми соотношения горизонтально-однородного приземного слоя.

Подставляя теперь (5.4.20) в систему для $\alpha^1=\alpha$, можно получить решение для k_{n1}, u_{n1}, b_{n1} , учитывающие влияния горизонтальной и вертикальной адвекции:

$$k_{n1} = z_n F(z_n) \frac{dp}{dx_n} - z_n^2 \frac{\partial u_{n1}}{\partial x_n},$$

$$b_{n1} = p \frac{dp}{dx_n} \left[F(z_n) - \alpha z_n \ln \frac{z_n}{m} \right], \quad (5.4.21)$$

$$u_{n1} = \frac{1}{4} \frac{dp}{dx_n} \left\{ z_n \Phi_1(z_n) - m \Phi_2(z_n) - \frac{h_n z_n - m}{z_n h_n - m} \times \right.$$

$$\left. \times [h_n \Phi_1(h_n) - m \Phi_2(h_n)] \right\},$$

где

$$F(z_n) = z_n \ln^2 \frac{z_n}{m} - (3z_n + m) \ln \frac{z_n}{m} + 4(z_n - m);$$

$$\Phi_1(z_n) = \ln^2 \frac{z_n}{m} - (6 - \alpha) \ln \frac{z_n}{m} + \left(12 - \frac{3}{2} \alpha \right); \quad (5.4.22)$$

$$\Phi_2(z_n) = \ln^2 \frac{z_n}{m} + 6 \ln \frac{z_n}{m} + \left(12 - \frac{3}{2} \alpha \right);$$

$$\Phi_1(h_n) = \Phi_1(z_n) \Big|_{z_n=h_n}, \quad \Phi_2(h_n) = \Phi_2(z_n) \Big|_{z_n=h_n}.$$

Для определения $h_n(x_n)$ теперь можно использовать (5.4.17), которое с учетом (5.4.19) — (5.4.22) при введении новой переменной

$$\tilde{x}_n = \frac{x}{z_{01}}, \text{ для которой } x_n = \alpha \tilde{x}_n x^2,$$

примет вид:

$$\tilde{x}_n = \int_m^{h_n} \frac{d h_n}{R(h_n)}. \quad (5.4.23)$$

Здесь

$$R(h_n) = x^2 h_n \frac{\ln^2 \frac{h_n}{m} + \ln \frac{h_n}{m} \ln h_n}{\ln h_n \cdot F(h_n)}, \text{ где } F(h_n) = F(z_n) \Big|_{z_n=h_n}.$$

Таким образом, для определения $h_n(\tilde{x}_n)$ нужно рассчитать интеграл для разных m и h_n .

После того как получена зависимость h_n от m и \tilde{x}_n можно рассчитать искомые величины s_0 и s_1 и затем воспользоваться (5.4.19), чтобы найти сперва безразмерные, а потом с учетом (5.4.9) и размерные величины $s = \{u, k, b, w\}$.

Найдем теперь связь α с параметром $m = \frac{z_{02}}{z_{01}}$, чтобы оценить, до каких величин m можно использовать приближенные формулы (5.4.19):

$$\alpha = 1 - \frac{v_{*2}}{v_{*1}} = - \frac{\ln m}{\ln \frac{h_n}{m}},$$

если при $z = h$

$$\frac{v_{*1}}{x} \ln \frac{h}{z_{01}} \approx \frac{v_{*2}}{x} \ln \frac{h}{z_{02}}, \text{ то}$$

$$m \approx h_n^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}. \quad (5.4.24)$$

На рис. 34 показана зависимость h_n от \tilde{x}_n для разных величин m от 0,1 до 10,0. При малых \tilde{x}_n ($\tilde{x}_n = 5 \cdot 10^2$) наклон поверхности раздела составляет 1/11 для $m = 0,1$ и 1/5 для $m = 10,0$. Для боль-

ших \tilde{x}_n ($\tilde{x}_n = 3 \cdot 10^4$) наклон уменьшается до $1/24$ при $m=0,1$ и $1/13$ при $m=10,0$. На рис. 35 показана зависимость $\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{v_{*2}^2(x)}{v_{*1}^2}$ от \tilde{x}_n , ее можно использовать для определения α , соответствующих, например, $m=10,0$ и $m=0,1$. Если принять для $m=10,0$ предельное отношение $\frac{v_{*2}}{v_{*1}} = 1,25$, а для $m=0,1$ $\frac{v_{*2}}{v_{*1}} = 0,85$, тогда в первом случае $\alpha = -0,25$, а во втором $0,15$. Итак, полученные приближенные формулы могут быть использованы при различии шероховатостей подстилающих поверхностей более чем в 10 раз.

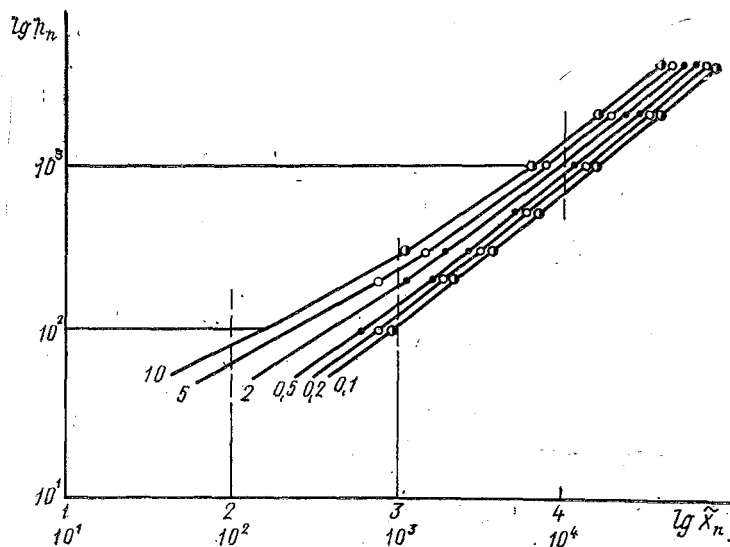


Рис. 34. Зависимость безразмерной высоты h_n от \tilde{x}_n для разных значений m .

На рис. 36 показано изменение скорости ветра как функции высоты для разных величин \tilde{x}_n . Пунктирная линия соответствует логарифмическому профилю ветра над исходной поверхностью. Для $v_{*1} = 30$ см/с, $\kappa = 0,4$, $z_{01} = 2,0$ см при переходе с менее шероховатой поверхности на более шероховатую поверхность ($m=10,0$, $z_{02} = 20$ см) при $z = 0,5$ м скорость ветра на расстоянии 1 км уменьшается на 1,5 м/с, тогда как в обратном случае, при переходе с более шероховатой на менее шероховатую поверхность ($m=0,1$, $z_{02} = 0,2$ см), скорость ветра при $z = 0,5$ м увеличивается на 0,7 м/с. Нулевое приближение отличается от первого приближения решения не более чем на 10 %.

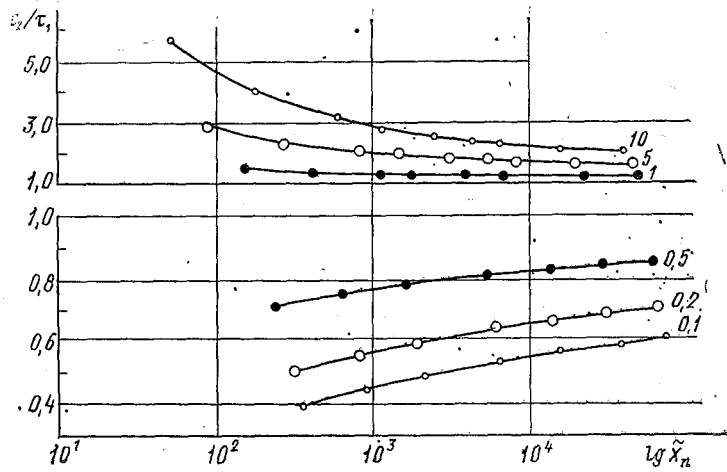


Рис. 35. Зависимость отношения касательных напряжений от \tilde{x}_n для разных значений m .

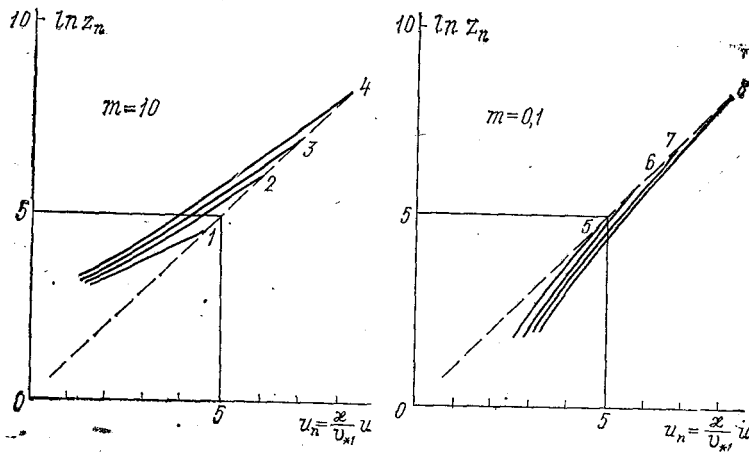


Рис. 36. Изменение с высотой z_n безразмерной скорости ветра $u_n = \frac{z}{v_{*1}} u$ и для разных значений \tilde{x}_n и m .

Значения \tilde{x}_n : 1— $1,78 \cdot 10^2$; 2— $2,49 \cdot 10^3$; 3— $6,63 \cdot 10^3$; 4— $4,12 \cdot 10^4$;
5— $8,63 \cdot 10^2$; 6— $6,73 \cdot 10^3$; 7— $1,48 \cdot 10^4$; 8— $7,53 \cdot 10^4$.

Вертикальное распределение кинетической энергии турбулентности заметно зависит от \tilde{x}_n . При $m=10$ b_n растет с высотой, а потом уменьшается до 1,0, тогда как при $m=0,1$ слабое изменение b_n с высотой сменяется резким ростом до 1,0. Высота слоя со слабым изменением b_n увеличивается с ростом \tilde{x}_n . При $m=10$ первое приближение отличается от нулевого на 30 %, тогда как при $m=0,1$ различие достигает 100 %.

Коэффициент турбулентности линейно увеличивается с высотой до некоторого уровня, выше которого начинается переход к профилю над исходной поверхностью ($k_n = z_n$). Различие нулевого и первого приближений достигает 50 — 100 %.

Рассмотренная выше модель может быть использована через определение $v_{*2}(x)$ для расчета динамических характеристик верхнего слоя моря в прибрежных районах, а также через определение $h(x)$ для выбора репрезентативных уровней градиентных наблюдений за скоростью ветра вблизи береговой черты (над сушей или морем).

5.5. Бризы и муссоны

Бризы и муссоны относятся к числу ветров, возникающих под влиянием неоднородности подстилающей поверхности. Как бризовая, так и муссонная циркуляции связаны с различиями температуры поверхности суши и моря, однако бризовая циркуляция возникает вследствие суточного изменения этих различий и имеет суточную периодичность, тогда как муссонная циркуляция является отражением сезонных изменений и имеет годовую периодичность. Этим определяется различие пространственных масштабов бризов и муссонов: если бризы имеют характерные масштабы порядка сотни метров по вертикали и десятков километров по горизонтали, то муссоны — порядка нескольких километров по вертикали и сотен километров по горизонтали.

Нестационарность и существенная горизонтальная неоднородность этих процессов затрудняют упрощение описывающей их системы уравнений, что, как правило, приводит к необходимости ее численного решения. Аналитические модели бризовой циркуляции весьма ограничены в отношении диапазона их применимости. Пример такого аналитического описания бризов содержится в [1], однако при этом необходимые математические преобразования занимают слишком много места и времени по сравнению с конечным физическим результатом. Строгое описание муссонной циркуляции вообще, скорее всего, можно получить только в рамках моделей общей циркуляции атмосферы с учетом ее взаимодействия с океаном.

Имея в виду эти обстоятельства, ограничимся здесь объяснением механизма образования бризов и муссонов на основании теорем о циркуляции, рассмотренных ранее в курсе «Гидромеханика».

Циркуляцией скорости по замкнутому контуру l называется следующая кинематическая характеристика:

$$\Gamma = \oint_{(l)} (\vec{v} \cdot \vec{dl}) = \oint_{(l)} v_l dl, \quad (5.5.1)$$

где v_l — проекция скорости на направление контура. $\Gamma > 0$, если направление интегрирования совпадает с ориентацией контура, которая считается положительной, когда внешняя нормаль при обходе контура направлена вправо. С учетом этого циркуляция скорости считается положительной, если v_l направлена против часовой стрелки (в северном полушарии это соответствует циклонической, а в южном — антициклонической циркуляции).

Если рассматриваемый контур l расположен под некоторым углом к плоскости движения, то можно доказать, что циркуляция по такому контуру равна циркуляции по проекции этого контура на плоскость движения:

$$\oint_{(l)} (\vec{v} \cdot \vec{dl}) = \oint_{(l')} (\vec{v} \cdot \vec{dl}'), \quad (5.5.2)$$

где l' — проекция контура на плоскость движения.

Согласно теореме Томпсона ускорение циркуляции равно циркуляции ускорения:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{(l)} \frac{dv_l}{dt} \delta l = \oint_{(l)} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{\delta l} \quad (5.5.3)$$

(под ускорением циркуляции понимается отнесенное к единице времени приращение циркуляции скорости по жидкому контуру, т. е. контуру, состоящему из одних и тех же частиц).

Согласно теореме Гельмгольца циркуляция сохраняется только для идеальной, баротропной жидкости при действии массовых сил, имеющих потенциал. Таким образом, изменение циркуляции или ускорение циркуляции может быть связано с действием трех главных причин:

- 1) с бароклинностью жидкости;
- 2) с влиянием вязкости (в основном турбулентной) или, другими словами, действием силы турбулентного трения;
- 3) с действием массовых сил, не имеющих потенциала, то есть силы Кориолиса.

Рассмотрим теперь последовательно влияние указанных эффектов на ускорение циркуляции.

1. Влияние бароклинности описывается теоремой Бьеркнеса, которая получается из (5.5.3) для абсолютного движения идеальной жидкости и массовых сил, имеющих потенциал (U), т. е. когда

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\text{grad } \bar{U} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p, \\ \left(\frac{d\Gamma}{dt}\right)_0 &= - \oint_{(l)} a dp \left(a = \frac{1}{\rho} \right). \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

Перепишем (5.5.4) применительно к атмосфере, для чего, исключив с помощью уравнения состояния плотность, перейдем к изобаро-изотермическим солениодам, связанным с пересечением изобар и изотерм (именно это обычно трактуется как бароклинность атмосферы):

$$\left(\frac{d\Gamma}{dt}\right)_s = -R \oint_{(i)} T d \ln p. \quad (5.5.5)$$

Рассмотрим контур $ABCD A$ (рис. 37), образованный двумя изобарами p и $p+\delta p$ и двумя изотермами T и $T+\delta T$. В таком случае согласно (5.5.5)

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Gamma}{dt}\right)_s &= -R \oint_{ABCD A} T d \ln p = -R \left[\int_{AB} T d \ln p + \int_{BC} T d \ln p + \right. \\ &+ \int_{CD} T d \ln p + \left. \int_{DA} T d \ln p \right] = -R \left[(T + \delta T) \int_{AB} d \ln p + \right. \\ &+ \left. T \int_{CD} d \ln p \right] = -R \left[(T + \delta T) \ln \frac{p}{p+\delta p} + T \ln \frac{p+\delta p}{p} \right] = \\ &= R \delta T \ln \frac{p + \delta p}{p}. \end{aligned} \quad (5.5.6)$$

При $\delta p \ll p$

$$\left(\frac{d\Gamma}{dt}\right)_s \approx R \delta T \frac{\delta p}{p}. \quad (5.5.7)$$

Таким образом, положительное ускорение циркуляции за счет бароклинности возникает, когда направление обхода контура совпадает с кратчайшим поворотом от градиента давления к градиенту температуры.

2. Влияние сил вязкости или сил трения можно приближенно оценить, если, по аналогии с силой трения твердых тел, считать, что

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -n \vec{v}.$$

В таком случае, предполагая, что в (5.5.3), $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{тр}}$, получаем

$$\left(\frac{d\Gamma}{dt}\right)_v = -n\Gamma. \quad (5.5.8)$$

Следовательно, под влиянием сил вязкости (в рамках принятого описания $\vec{F}_{\text{тр}}$) возникает ускорение циркуляции, направленное противоположно самой циркуляции и пропорциональное ее абсолютной величине.

3. Влияние силы Кориолиса можно оценить, если в (5.5.3) подставить вместо ускорения $\frac{d\vec{v}}{dt}$ выражение для силы Кориолиса $\vec{F}_K = -2(\vec{\omega} \times \vec{v})$, т. е.

$$\left(\frac{d\Gamma}{dt}\right)_K = -2 \oint_{(l)} (\vec{\omega} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l}. \quad (5.5.9)$$

Пользуясь правилом циклической перестановки сомножителей в скалярно-векторном произведении, запишем (5.5.9) (с учетом $\vec{\omega} = \text{const}$) в виде

$$\left(\frac{d\Gamma}{dt}\right)_K = -2\vec{\omega} \cdot \oint_{(l)} (\vec{v} \times d\vec{l}).$$

По определению смешанное скалярно-векторное произведение равно объему параллелепипеда с ребрами $\vec{\omega}$, \vec{v} , $d\vec{l}$. Так как $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения Земли и перпендикулярен плоскости экватора, то этот объем можно представить как произведение $\vec{\omega}$ на проекцию площади, составленной из векторов \vec{v} и $d\vec{l}$, на плоскость экватора, равную $(\vec{v}' \times d\vec{l}')$, т. е.

$$\left(\frac{d\Gamma}{dt}\right)_K = -2\vec{\omega} \cdot \oint_{(l')} (\vec{v}' \times d\vec{l}') \quad (5.5.10)$$

(штрихами обозначены проекции векторов на плоскость экватора).

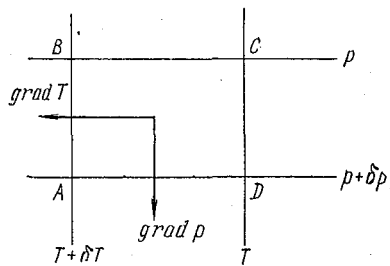


Рис. 37. Изобаро-изотермический соленоид.

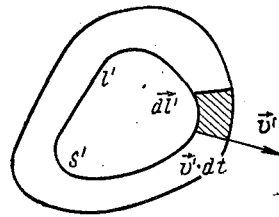


Рис. 38. Графическое пояснение смысла $(\vec{v}' \times d\vec{l}')$

Как видно из рис. 38, интеграл в (5.5.10) численно равен приращению проекции площади, ограниченной контуром l' , на плоскость экватора за единицу времени, т. е. $\left|\frac{dS'}{dt}\right|$. Этот вектор совпа-

дает по направлению с $\vec{\omega}$, если с его конца поворот от \vec{v}' к \vec{dl}' виден как происходящий против часовой стрелки, т. е. совпадает с ориентацией контура. В таком случае по определению скалярного произведения

$$\left(\frac{d\Gamma}{dt}\right)_k = -2\omega \frac{dS'}{dt}, \quad (5.5.11)$$

т. е. уменьшение проекции площади контура на плоскость экватора должно приводить к положительному ускорению циркуляции или к увеличению циркуляции, направленной против часовой стрелки (напомним, что в северном полушарии это соответствует усилению циркуляции циклонического характера).

Используем теперь полученные соотношения для объяснения образования бризовой и муссонной циркуляции.

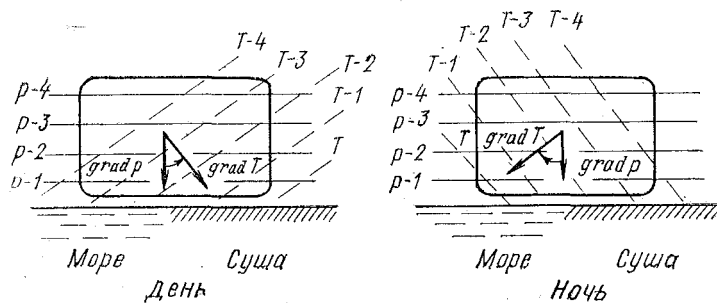


Рис. 39. Качественное объяснение образования бризов.

С учетом малых горизонтальных масштабов бризовой циркуляции [$L = 0(10^4 \text{ м})$] можно пренебречь влиянием силы Кориолиса и считать, что основное влияние оказывают только бароклинность и сила трения. Рассмотрим вначале влияние бароклинности, т. е. используем соотношение (5.5.7), понимая под δT различие характерных температур воды и суши, а под δp разность давлений у поверхности земли и на верхней границе слоя, охваченного бризовой циркуляцией. Согласно ранее приведенным оценкам $\delta p \ll p$ и можно использовать (5.5.7). Качественное объяснение образования дневного и ночного бриза дается на рис. 39. После восхода солнца суша нагревается больше, чем водная поверхность, и в результате возникает наклон изотермических поверхностей (над сушей они приподняты). Поскольку соответствующий наклон изобар значительно меньше $\left(\frac{dp}{dz} = -\frac{pg}{RT}\right)$, то за счет пересечения изобар и изотерм образуются изобаро-изотермические соленоиды. При этом возникает $\left(\frac{d\Gamma}{dt}\right)_6 > 0$, а при условии $\Gamma|_{t=0} = 0$ (где $t = 0$

соответствует приблизительно моменту равенства температур суши и воды) — и сама циркуляция по направлению кратчайшего поворота от $\text{grad } p$ к $\text{grad } T$, т. е. движение от воды к суши вниз (бриз) и от суши к воде наверху (антибриз). Очевидно, что ночью (море теплее суши) картина циркуляции будет обратной. Влияние сил вязкости может быть существенно либо при больших коэффициентах трения n , либо при расчете на большой промежуток времени. Действительно, если обозначить через A ускорение циркуляции за счет бароклинности, то при наличии сил вязкости

$$\frac{d\Gamma}{dt} = A - n\Gamma.$$

Решая это уравнение при условии $\Gamma \Big|_{t=0} = 0$, получим

$$\Gamma = \frac{A}{n} (1 - e^{-nt}). \quad (5.5.12)$$

Отсюда видно, что при больших nt циркуляция перестает зависеть от времени и стремится к некоторой постоянной величине $\frac{A}{n}$, соответствующей равновесию между влиянием бароклинности и вязкости. При малых nt

$$\Gamma = At. \quad (5.5.13)$$

В бризовой циркуляции рассмотренный эффект выражается в том, что максимальная скорость циркуляции наблюдается не в конце дневного времени, а перед полуднем, когда за счет сильной турбулентности (конвекции) увеличивается сила трения.

Количественная оценка скорости бризовой циркуляции на основании (5.5.12) или (5.5.13) возможна только для средней скорости, т. е. в предположении, что $\Gamma = \bar{v}_l l$, где l — длина рассматриваемого контура. Согласно рис. 39 и приведенным в начале параграфа оценкам характерных горизонтального и вертикального масштабов бризовой циркуляции, l практически равна удвоенному горизонтальному масштабу, который приближенно может быть определен как расстояние между точками с характерными для суши и воды значениями температуры воздуха. При описании дневного бриза это расстояние может рассматриваться как удаление от береговой черты до точки, в которой температура воздуха уже целиком определяется температурой суши, т. е. характерным расстоянием трансформации поля температуры воздушного потока. Специфика определения l и анализ влияния силы вязкости рассмотрены на примере конкретной задачи в конце параграфа.

Муссонная циркуляция связана с неоднородностью нагревания материков и океанов. По аналогии с бризами нетрудно показать, что летом, когда море холоднее суши, муссон будет направлен с

океана на материк, а зимой — в обратном направлении. При анализе муссонной циркуляции необходим учет влияния не только сил вязкости (5.5.8), но и силы Кориолиса (5.5.11).

Действительно, если в поясе широт между φ_1 и φ_2 расположен материк, а южнее океан, то летом за счет различий в нагревании должно возникнуть движение воздуха с океана на материк (с юга на север) — рис. 40.

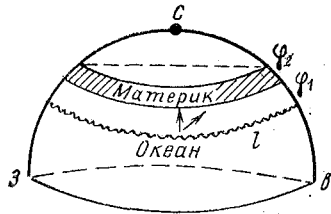


Рис. 40. Качественное объяснение образования муссонов.

Если теперь представить контур, охватывающий, допустим, по широтному кругу земной шар (l), то этот контур будет смещаться с юга на север и его проекция на плоскость экватора будет уменьшаться, т. е. $dS'/dt < 0$, значит, $d\Gamma/dt > 0$ и возникнет циркуляция против часовой стрелки (если смотреть с северного полюса). Таким

образом, за счет действия силы Кориолиса в муссонной циркуляции появится составляющая, направленная с запада на восток.

Задача. Определить среднюю скорость бризовой циркуляции в слое между $p_1 = 1020$ гПа и $p_2 = 980$ гПа через 6 ч после ее возникновения без учета и с учетом силы трения. Средняя температура воздуха над водой меньше температуры воздуха над сушей на 6° . Температура воздуха над сушей угадывается на расстоянии 50 км от берега. Коэффициент трения воздуха о поверхность суши принять равным $4.4 \cdot 10^{-4}$ 1/с.

Согласно (5.5.7) и (5.5.13) без учета силы трения (при $l \approx 10^5$ м)

$$\Gamma = \bar{v}l = R \delta T \frac{\delta p}{p} t = At, \quad \bar{v} = \frac{R \delta T \delta p t}{lp} = 15 \text{ м/с.}$$

Согласно (5.5.12) с учетом силы трения (при $nt = 9,5$)

$$\Gamma = \bar{v}l = \frac{A}{n} (1 - e^{-nt}), \quad \bar{v} = \frac{A}{ln} (1 - e^{-nt}) \approx \frac{A}{ln} = 1,6 \text{ м/с.}$$

Контрольные вопросы

1. Как можно качественно объяснить, почему при изменении шероховатости поверхности должно трансформироваться поле температуры?

2. Можно ли пользоваться решением задачи о трансформации поля температуры и влажности при $\bar{k} = \text{const}$ для больших расстояний от границы раздела?

3. Как объяснить зависимость высоты внутреннего пограничного слоя от скорости ветра ($\bar{u} = \text{const}$) и коэффициента турбулентности ($\bar{k} = \text{const}$)?

4. Почему количество испарившейся воды зависит от формы испарителя?

5. Как использовать решение задачи о трансформации поля температуры и влажности для «прогноза» тумана?

6. В чем состоит механизм трансформации поля ветра при изменении шероховатости?

7. Какие факторы определяют возникновение бризовой и муссонной циркуляции?

8. Как объяснить образование наклона изотермических и изобарических поверхностей на границе суша — вода в дневное время?

9. Исходя из каких соображений можно оценить размеры контура при использовании теоремы об ускорении циркуляции за счет бароклинности для описания бризов?

6. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ЧИСЛЕННОГО (ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО) ПРОГНОЗА ПОГОДЫ

6.1. Понятие краткосрочного и долгосрочного прогноза

Прогнозом погоды называется определение будущего состояния атмосферы по заданному начальному состоянию с учетом внешних воздействий, приводящих к изменению или перераспределению энергии. Методы прогноза погоды можно разделить на синоптический и численный (гидродинамический). При синоптическом прогнозе с учетом, в основном, полуэмпирических правил производится пространственно-временная экстраполяция элементов крупномасштабной структуры атмосферы (воздушные массы, фронты и барические системы), а затем прогноз самих метеорологических величин (ветер, температура, влажность и т. д.). Численный прогноз погоды основан на решении системы уравнений гидротермодинамики атмосферы при заданных начальных и граничных условиях [2].

В настоящее время численный прогноз погоды достиг заметных успехов, однако в оперативной практике он используется в сочетании с синоптическим методом: при составлении прогноза погоды по территории, трассе или отдельным пунктам прогнозист опирается на гидродинамический прогноз полей давления и некоторых других метеорологических величин, используя в дальнейшем синоптические правила и полуэмпирические соотношения.

Из определения понятия численного прогноза погоды ясно, что его точность зависит от точности задания начальных и граничных условий, а также физической полноты используемых дифференциальных уравнений гидротермодинамики атмосферы и метода их решения. Несмотря на существенное расширение сети аэрометеорологических станций, количество и точность информации, получаемой по некоторым районам земного шара (особенно по океанам), пока вызывают большие трудности при формулировании начальных и граничных условий. Сложным вопросом также является вы-

бор оптимальной физической полноты прогностических уравнений, доступных для решения с помощью современных ЭВМ и методов вычислительной математики. Эту проблему пытаются разрешить как на основе сочетания гидродинамического прогноза и статистических методов прогноза, так путем параметризации некоторых процессов подсеточного масштаба.

Гидродинамический прогноз, в известной мере условно, может быть разделен на краткосрочный и долгосрочный. Под первым понимается прогноз на время $t \ll \tau$, где τ — характерное время изменения суммарной кинетической энергии синоптических процессов (около недели). С учетом этого в краткосрочных прогнозах можно пользоваться адиабатическим приближением (не учитывать притоки тепла). Долгосрочные прогнозы определяются условием $t \gg \tau$ и требуют обязательного учета неадиабатических факторов. В дальнейшем речь пойдет только о краткосрочных прогнозах в свободной атмосфере.

6.2. Общая постановка задачи численного прогноза погоды на короткий срок

Прогностическая система координат
(изобарическая, обобщенная изобарическая, σ -система)

С учетом сделанных допущений (адиабатичность процессов и отсутствие турбулентности) прогностическая система состоит из уравнений (2.8.1, 2.8.2, 2.6.7, 2.6.14, 2.8.4, 2.9.1), в которых искомыми величинами являются u, v, ω, ρ, T и p , а независимыми переменными x, y, z, t (геометрическая система координат). По ряду причин, однако, удобно использовать в качестве независимых переменных x_p, y_p, p, t_p (изобарическая система координат) и считать известными $u, v, \frac{dp}{dt}, T, H$ (высота изобарической поверхности).

Целесообразность перехода к такой системе связана с возможностью упрощения уравнения неразрывности, заменой полубесконечной по вертикальной координате области интегрирования на конечную и заданием исходной информации на изобарических поверхностях.

Более общим случаем является введение независимых переменных: $x_\zeta, y_\zeta, t_\zeta, \zeta = \frac{p-a}{s-a}$ (обобщенная изобарическая система), где $a = \text{const}$, $s = s(x, y, t)$ — известная функция координат и времени; искомыми величинами при этом являются $u, v, \frac{d\zeta}{dt}, T, z = H(t_\zeta, x_\zeta, y_\zeta, \zeta)$. Наконец, иногда для удобства численного интегрирования вводится так называемая σ -система ($\sigma = p/p_F$) — в ней область интегрирования является $0 < \sigma < 1$. Эта система является частным случаем обобщенной изобарической системы при $s = p_F(t, x, y)$, $a = 0$, $\zeta = \sigma = p/p_F$.

*Численный прогноз по примитивным исходным уравнениям
в изобарической системе координат*

Если воспользоваться процедурой перехода от геометрической к изобарической системе координат (в [2] она поясняется для случая обобщенной изобарической системы), то прогностическая система уравнений запишется в виде (опуская индекс ζ);

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} \right) + lv - \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad (6.2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \tau \frac{\partial v}{\partial p} \right) - lu - \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad (6.2.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \tau \frac{\partial T}{\partial p} \right) + \tau \frac{RT}{c_p p}; \quad (6.2.3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = - \frac{RT}{p}; \quad (6.2.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0, \quad (6.2.5)$$

где $\tau \equiv dp/dt$; плотность исключена с помощью уравнения состояния, а высота изобарической поверхности определяется ее геопотенциалом, т. е. $\Phi = gH$

Граничные условия. На верхней границе используем условие сохранения массы атмосферы:

$$\rho w \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0,$$

которое в изобарической системе координат имеет вид

$$\tau \Big|_{p=0} = \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) = -g \rho w \Big|_{z=\infty} = 0 \quad (6.2.6)$$

так как

$$\rho \Big|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \left| \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \right|_{z=\infty}.$$

На нижней границе области интегрирования, за которую примем верхнюю границу планетарного пограничного слоя (считая ее параллельной рельефу) — $F(x, y)$, используем условие обтекания:

$$\left| w = u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{z=0},$$

которое в изобарической системе координат примет вид

$$\tau \Big|_{p=p_F} = \rho \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial (\Phi - \tilde{\Phi})}{\partial x} + v \frac{\partial (\Phi - \tilde{\Phi})}{\partial y} \right] \Big|_{p=p_F}, \quad (6.2.7)$$

где $\Phi = gH$, $\tilde{\Phi} = gF$.

Начальные условия должны быть заданы для u , v , T , $\Phi_F = \Phi \Big|_{p=p_F}$:

$$\begin{aligned} u \Big|_{t=0} &= u^0(x, y, p), & v \Big|_{t=0} &= v^0(x, y, p), \\ T \Big|_{t=0} &= T^0(x, y, p), & \Phi_F \Big|_{t=0} &= \Phi^0(x, y, p) \Big|_{p=p_F}. \end{aligned} \quad (6.2.8)$$

Условия на горизонтальных границах сводятся к требованию периодичности всех функций по широте и долготе, если областью интегрирования является вся атмосфера. При прогнозе на короткий срок для небольшого района можно считать, что характерный размер области интегрирования определяется условием $v_0 \Delta t$ (v_0 — скорость ветра, Δt — период прогноза).

Процедуру численного решения задачи можно условно разделить на следующие этапы:

- 1) выражение производных через конечные разности;
- 2) выбор горизонтальной и вертикальной сетки;
- 3) интерполяция в узлы сетки u^0 , v^0 , T^0 ;
- 4) вычисление начального поля τ с помощью (6.2.5), (6.2.6);
- 5) определение начального поля Φ с помощью (6.2.4).

По сути дела на этапах 4 и 5 восстанавливаются поля, не содержащиеся в исходной информации, и теперь можно решать собственно прогностические уравнения (6.2.1 — 6.2.3), которые целесообразно записать в виде

$$\varphi(t_0 + \Delta t, x, y, p) = \varphi(t_0, x, y, p) + D_\varphi(t_0, x, y, p) \Delta t, \quad (6.2.9)$$

где D_φ — разностный оператор, аппроксимирующий правые части уравнения; $\varphi = \{u, v, T\}$;

6) на основании (6.2.9) по начальным полям u^0 , v^0 , Φ^0 , τ^0 находятся $\varphi(t_0 + \Delta t, x, y, p)$;

7) уравнение (6.2.7) используется для расчета

$$p_F(t_0 + \Delta t, x, y) = p_F(t_0, x, y) + D_{p_F}(t_0, x, y).$$

Все расчеты выполняются для всей области интегрирования. Затем процедура повторяется шагами по времени в моменты $t_0 + (1+i)\Delta t$ ($i=1, 2, 3, \dots, n$) на весь интервал прогноза $(n+1)\Delta t$,

*Численный прогноз в квазигеострофическом приближении
для баротропной и бароклинной атмосферы*

Так как ветер в свободной атмосфере близок к геострофическому, то в уравнениях (6.2.1) и (6.2.2) ускорения (или оператор D_φ в (6.2.9)), определяются как малые разности больших и близких друг другу величин. Согласно (6.2.9) это может приводить к большим ошибкам в прогнозе компонент скорости с учетом погрешностей в определении начальных полей (о чем речь шла ранее). Помимо этого при определении u и v могут влиять чисто вычислительные ошибки, связанные с округлением результатов расчета от шага к шагу (их накопление при большом количестве шагов).

Хотя в настоящее время развиты методы объективного анализа начальных данных, целесообразно учесть условие квазигеострофичности ветра и записать систему прогностических уравнений в виде, менее чувствительном к ошибкам в исходных данных. Этому условию отвечает уравнение вихря, которое можно получить путем дифференцирования (6.2.2) по x и вычитания из него уравнения (6.2.1), продифференцированного по y ($\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ называется относительным вихрем, вернее его проекцией на ось z). В таком случае прогностическая система (с точностью до малых членов) при $l = l_0 + \beta y$ примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \Omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \Omega_z}{\partial y} + \beta v = \frac{\partial (\Omega_z + l)}{\partial t} + u \frac{\partial (\Omega_z + l)}{\partial x} + \\ + v \frac{\partial (\Omega_z + l)}{\partial y} = l_0 \frac{\partial \tau}{\partial p}; \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

$$\Omega_z = \frac{\Delta \Phi}{l_0}; \quad (6.2.11)$$

$$u = -\frac{1}{l_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v = \frac{1}{l_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad (6.2.12)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p}; \quad (6.2.13)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \tau \frac{\partial T}{\partial p} = \tau \frac{RT}{c_p p} \quad (6.2.14)$$

(уравнение неразрывности автоматически выполняется с учетом (6.2.12)); $\Omega_z + l = \Omega_a$ — абсолютный вихрь.

Система (6.2.10) — (6.2.14) содержит пять уравнений для определения пяти неизвестных величин (u, v, Ω_z, Φ, T), т. е. является

замкнутой. Из нее можно доказать важное свойство атмосферных процессов — сохранение потенциального вихря

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\Omega_z + l - \frac{l_0 R}{c^2} \frac{\partial T p}{\partial p} \right) = 0, \quad (6.2.15)$$

т. е. что потенциальный вихрь

$$M = \Omega_z + l - \frac{l_0 R}{c^2} \frac{\partial T p}{\partial p} \quad (6.2.16)$$

является консервативным свойством, перемещающимся со скоростью геострофического ветра $\left(c^2 = R T \frac{\gamma_a - \gamma}{g R} \approx 8 \cdot 10^3 \text{ м}^2/\text{с}^2 \right)$, т. е. квадрат скорости звука, умноженный на отношение вертикального градиента потенциальной температуры к автоконвективному градиенту).

Из (6.2.15) с учетом (6.2.11) и (6.2.13) после простых преобразований получается уравнение, широко используемое в настоящее время для численных прогнозов

$$\Delta \frac{\partial \Phi}{\partial t} = l_0 A_\Omega - \frac{l_0^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial p} p \left(p \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + R A_T \right), \quad (6.2.17)$$

где A_Ω — адвекция вихря и A_T — адвекция температуры определяются как:

$$A_\Omega = \frac{1}{l_0} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Phi}{\partial y} \right) - \frac{\beta}{l_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad (6.2.18)$$

$$A_T = - \frac{R T_0}{l_0 p} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right). \quad (6.2.19)$$

Если из (6.2.17) определить Φ , то затем по (6.2.12) находятся u и v , из (6.2.13) — температура, а из (6.2.14) определяется τ .

Граничные условия вытекают из тех же физических предположений, что и в случае примитивной системы уравнений.

В случае баротропной атмосферы $\left(T = T(p) = \frac{p}{R \rho(p)} \right)$ в изобарической системе координат (так как T зависит только от p)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (6.2.20)$$

Тогда из (6.2.14) следует, что

$$\tau \left(\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{R T}{c_p p} \right) = 0 \text{ или } \tau = 0, \quad (6.2.21)$$

потому что

$$\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{RT}{c_p p} \neq 0,$$

и (6.2.17) вырождается к виду

$$\Delta \frac{\partial \Phi}{\partial t} = I_0 A_2; \quad (6.2.22)$$

так как согласно (6.2.13) и (6.2.14),

$$\tau = \frac{Rp}{c^2} \left(\frac{\partial T}{\partial t} - A_T \right) = -\frac{p}{c^2} \left(p \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + RA_T \right). \quad (6.2.23)$$

Решение (6.2.22) для $\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ имеет вид

$$\dot{\Phi}(r) \Big|_{r=0} = -\frac{I_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R A_2(r', \vartheta') \ln \frac{R}{r'} dS \quad (6.2.24)$$

$$(dS = r' dr' d\vartheta'),$$

где R — радиус области интегрирования, на границах которой $\dot{\Phi}$ имеет разные знаки и в среднем $\dot{\Phi} \rightarrow 0$; r — переменный радиус, а $r=0$ соответствует точке, для которой составляется прогноз; ϑ — полярный угол; $\frac{1}{2\pi} \ln \frac{R}{r}$ — функция влияния.

Для бароклиной атмосферы нужно использовать эллиптическое уравнение (6.2.17) в виде

$$\frac{\partial}{\partial p} p^2 \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial p} + \frac{c^2}{I_0} \Delta \Phi = \frac{c^2}{I_0} A_2 - R \frac{\partial}{\partial p} p A_T. \quad (6.2.25)$$

Граничные условия для (6.2.25) можно получить из (6.2.23): при $p \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$ (согласно (6.2.6) и $p A_T \Big|_{p \rightarrow 0} \rightarrow 0$, поэтому

$$p^2 \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial p} \Big|_{p=0} = 0; \quad (6.2.26)$$

при $p=p_0$ (на нижней границе) из (6.2.7) с учетом (6.2.23) для условия геострофичности $\left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \right)$ и параллельности зем-

ной поверхности плоскости xoy $\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} = 0 \right)$ получается

$$\left[p \frac{\partial \dot{\Phi}}{\partial p} + \frac{\gamma_a - \gamma}{g/R} \dot{\Phi} + RA_T \right] \Big|_{p=p_0} = 0. \quad (6.2.27)$$

Граничные условия по горизонтальным координатам имеют, как и раньше, вид

$$\bar{\Phi} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (6.2.28)$$

Основные трудности решения связаны с решением (6.2.25), которое может быть получено методом интегральных преобразований.

Численный прогноз для квазисоленоидального приближения

Рассмотренное выше квазигеострофическое приближение плохо применимо для низких широт ($\varphi \rightarrow 0$) и в важных ситуациях резкого изменения в режиме погоды. В этих случаях наряду с уравнением вихря (6.2.10) целесообразно использовать так называемое уравнение баланса, которое получается, если (6.2.2) продифференцировать по y , а (6.2.1) — по x и сложить их:

$$l\Omega_z = \Delta\Phi + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \beta u. \quad (6.2.29)$$

Уравнения (6.2.13) и (6.2.14) сохраняются, и, кроме того, при откате от условия геострофичности должно быть сохранено уравнение неразрывности (6.2.5), где считается $\frac{\partial \tau}{\partial p} = 0$, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (6.2.30)$$

Согласно (6.2.30) компоненты скорости и вихрь можно выразить через функцию тока:

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u = - \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad (6.2.31)$$

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \Delta\psi \quad (6.2.32)$$

и соответствующим образом переписать теперь прогностическую систему (6.2.10, 6.2.29, 6.2.13, 6.2.14 и 6.2.30) в виде:

$$\Delta \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} = l \frac{\partial \tau}{\partial p} - \beta \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (6.2.33)$$

$$2 \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] + \beta \frac{\partial \psi}{\partial y} + l \Delta \psi = \Delta \Phi; \quad (6.2.34)$$

$$T = - \frac{p}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial p}; \quad (6.2.35)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{c^2}{Rp} \tau, \quad (6.2.36)$$

позволяющем определить ψ , τ , T , Φ и затем по (6.2.31) рассчитать u и v .

Такая модель называется квазисоленоидальной (или бездивергентной). Система (6.2.33—6.2.36) сравнительно легко решается для среднего уровня $\left(\frac{\partial \tau}{\partial p} = 0\right)$, когда она расщепляется: из (6.2.33) находится ψ (процедура решения аналогична геострофическому приближению для баротропной атмосферы), затем из (6.2.34) определяется Φ и т. д.

Контрольные вопросы

1. Что ограничивает возможности численного прогноза погоды?
2. Что служит критерием для разделения на краткосрочные и долгосрочные прогнозы?
3. Какие существуют прогностические системы координат?
4. Что такое примитивная система уравнений? В чем основная идея прогноза по ним?
5. Что такое квазигеострофическое приближение в численном прогнозе? Особенности прогноза для баротропной и бароклинной атмосферы?
6. К чему сводится квазисоленоидальное приближение в численном прогнозе?

ПРИЛОЖЕНИЕ

Теория подобия и анализ размерности

1. При описании некоторых физических процессов на определенном этапе исследований порой бывает трудно сформулировать строгое уравнение, являющееся следствием основных законов физики. Помимо этого, иногда описываемый процесс или физическая характеристика требует решения сложной замкнутой системы уравнений. Используя в первом случае понимание физики процесса и его подобие с другими более изученными процессами (такой подход использовался в курсе при описании турбулентного перемешивания с учетом его формального подобия молекулярному перемешиванию) или основываясь на качественном анализе системы уравнений, позволяющем выявить основные влияющие факторы (такой подход использовался при описании коэффициента турбулентности в приземном слое), можно для искомой физической характеристики сформулировать зависимость вида

$$a = f(b, c, d, \dots). \quad (\text{п. 1})$$

В качестве примера напомним ранее полученные зависимости:

$$k = f_1(l, b), \text{ Diss} = f_2(l, b), k = f_3 \left(u_* , \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho c_p}, z \right).$$

2. Для того чтобы раскрыть неявную зависимость (п. 1), используется аппарат анализа размерности. Сформулируем его основные положения.

а) Все физические величины имеют размерность, т. е. выражаются через основные единицы измерений (основные размерности), к которым обычно относят: единицу массы M , единицу длины L , единицу времени T . Иногда при описании термодинамических процессов целесообразно добавить к ним единицу теплоты Q и единицу температуры θ .

б) Символическая запись, показывающая каким образом размерность физической величины выражается через основные размерности, называется формулой размерности:

$$[l] = L, [u] = LT^{-1}, [b] = L^2 T^{-2},$$

$$[Diss] = L^2 T^{-3}, [\rho] = ML^{-3}, [k] = L^2 T^{-1} \quad \text{и т. д.}$$

в) В любой совокупности физических величин, входящих в (п. 1), существуют величины с независимой размерностью, т. е. размерность других величин может быть выражена через их размерность. Число величин с независимой размерностью определяется однозначно и равно рангу матрицы размерностей (т. е. числу линейнонезависимых строк в матрице размерностей)

	a	b	c	d
L				
T				
M				
Q				
θ				

(в каждом квадрате стоит соответствующий показатель степени при основной размерности). Выбор величин с независимой размерностью неоднозначен, однако это не влияет на конечный результат, что будет показано ниже на конкретном примере.

г) Основной теоремой анализа размерности является π -теорема: если какой-либо закон связывает между собой n физических величин, из которых m имеют независимую размерность, то этот закон можно представить в виде $(n - m)$ безразмерных комплексов, связывающих физические величины.

Итак, для заданного n (допустим в случае (п. 1) $n = 4$) возможны следующие варианты записи соотношения (п.1), основанные на π -теореме, в зависимости от величины m :

i) $m = 3$ $(b, c, d),$

$$\frac{a}{b^\alpha c^\beta d^\gamma} = \text{const}; \quad (\text{п. 2})$$

ii) $m = 2$ (b, c) или (b, d) или т. д.,

$$\frac{a}{b^{\alpha_1} c^{\beta_1}} = f\left(\frac{d}{b^{\alpha_2} c^{\beta_2}}\right),$$

$$\frac{a}{b^{\alpha_1} d^{\beta_1}} = f\left(\frac{c}{b^{\alpha_2} d^{\beta_2}}\right) \quad \text{и т. д.} : \quad (\text{п. 3})$$

iii) $m = 1$ (b) или (c) или т. д.,

$$\frac{a}{b^{\alpha_1}} = f\left(\frac{c}{b^{\alpha_2}}, \frac{d}{b^{\alpha_3}}\right) \quad \text{и т. д.} \quad (\text{п. 4})$$

Показатели степени $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \dots$ подбираются так, чтобы обеспечить условие безразмерности записанных комплексов. Другими словами, они должны быть такими, чтобы основные размерности сократились в числителе и знаменателе. С учетом этого, для их определения используется решение системы алгебраических уравнений, приравнивающих показатели степени при основных единицах в числителе и знаменателе (см. ниже конкретный пример).

д) Из анализа (п. 2 — п. 4) видно, что конкретность (конструктивность) получаемой на основании π -теоремы связи зависит от величины m , которая, очевидно, тем больше, чем больше выбрано основных единиц. Следует, однако, иметь в виду, что в ряде случаев введение дополнительных основных единиц (Q, θ или дифференциальных единиц длины: L_x, L_y, L_z) оказывается неэффективным, так как формально, увеличивая m , оно приводит к появлению размерных постоянных, увеличивая одновременно и n , т. е. $(n - m)$ остается неизменным. Например, при описании термодинамических процессов, связанных с использованием 1-го начала термодинамики (переход механической энергии в тепловую), появляются c_p , или c_v .

Примеры применения анализа размерности

1. $\text{Diss} = \varepsilon = f(l, b).$

Составляем матрицу размерности

	ε	l	b
L	2	1	2
T	-3	0	-2

так как ранг матрицы равен двум, то только две величины имеют независимую размерность ($m = 2$). Этими величинами могут быть l и b , или ε и l или ε и b . Рассмотрим вначале первый вариант (l и b).

В данном случае $n = 3$, а $m = 2$, то $n - m = 1$, и согласно π -теореме искомая зависимость должна иметь вид (п. 2), т. е.

$$\frac{\varepsilon}{l^\alpha b^\beta} = \text{const.}$$

Составляем систему уравнений для определения α и β :

$$\begin{array}{l|l} L & 2 = \alpha + 2\beta, \\ T & -3 = -2\beta \end{array}$$

отсюда $\beta = 3/2$, $\alpha = -1$, тогда получаем (2.7.33)

$$\varepsilon = c_2 \frac{b \sqrt{b}}{l}.$$

Проверим независимость результата от выбора набора величин с независимой размерностью, для чего рассмотрим, допустим, второй вариант (ε и l).

В этом случае (п. 2) примет вид

$$\frac{b}{l^{\alpha_1} \varepsilon^{\beta_1}} = \text{const},$$

и

$$\begin{array}{l|l} L & 2 = \alpha_1 + 2\beta_1, \\ T & -2 = -3\beta_1, \end{array}$$

отсюда $\beta_1 = 2/3$, $\alpha_1 = 2/3$, тогда

$$b = \text{const} (l\varepsilon)^{3/2},$$

выражая в явном виде ε , получаем (2.7.33)

$$\varepsilon = (\text{const})^{-3/2} \frac{b^{3/2}}{l} = c_2 \frac{b \sqrt{b}}{l}.$$

Из этого примера видно, что искомую величину нежелательно включать в число величин, имеющих независимую размерность: результат от этого не изменяется, но искомая величина может оказываться в дробной степени (а в более общем случае может входить под знак неизвестной функции).

$$2. k = f \left(v_*, \frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho c_p}, z \right).$$

Составляем матрицу размерности

	k	v_*	z	$\frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho c_p}$
L	2	1	1	2
T	-1	-1	0	-3

Ранг этой матрицы $r = 2$, будем рассматривать в качестве величин с независимой размерностью, допустим, v_* и z . Так как в данном случае теперь $n = 4$, $m = 2$, то, согласно (п. 3),

$$\frac{k}{v_*^{\alpha_1} z^{\beta_1}} = f \left(\frac{g/T \cdot P_0 / \rho c_p}{v_*^{\alpha_2} z^{\beta_2}} \right).$$

Для определения α_1 , β_1 , α_2 , и β_2 можно составить две системы уравнений:

$$\begin{array}{l|l} L & 2 = \alpha_1 + \beta_1, \\ T & -1 = -\alpha_1 + 0, \end{array}$$

отсюда $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 1$;

$$\begin{array}{l|l} L & 2 = \alpha_2 + \beta_2, \\ T & -3 = -\alpha_2 + 0, \end{array}$$

поэтому $\alpha_2 = 3$, $\beta_2 = -1$.

С учетом этого искомое выражение примет вид (4.2.14)

$$k = v_* z F_1 \left(\frac{\frac{g}{T} \frac{P_0}{\rho c_p} z}{v_*^3} \right).$$

3. Вывод выражения для новой переменной ξ в задаче трансформации поля температуры и влажности.

Если в (5.3.19) перейти к безразмерной переменной

$$\vartheta_n = \frac{\vartheta - \vartheta_1}{\vartheta_0 - \vartheta_1},$$

для которой граничные условия (5.3.2—5.3.4) запишутся в виде:

$$\vartheta_n \Big|_{\substack{x=0, \\ z>0}} = 0, \quad \vartheta_n \Big|_{\substack{x>0, \\ z=0}} = 1, \quad \vartheta_n \Big|_{\substack{x>0, \\ z \rightarrow \infty}} = 0,$$

то очевидно, что решение уравнения при этих граничных условиях можно представить как

$$\vartheta - \vartheta_1 = (\vartheta_0 - \vartheta_1) f(x, z, a^2).$$

Введем дифференциальные масштабы длины L_x и L_z , тогда с учетом $a^2 = \frac{u_1 z_1^{m-n}}{k_1}$

$$[a^2] = L_x L_z^{m-n-2}$$

(так как $[x] = L_x$, $[z] = L_z$, $[u_1] = L_x T^{-1}$, $[k_1] = L_z^2 T^{-1}$).

Матрица размерности будет иметь вид

	x	z	a^2
L_x	1	0	1
L_z	0	1	$m-n-2$
	k_0	k_1	k_2

В таком случае:

$$r = 2 \quad (z, a^2)$$

и

$$0 = k_0 + k_2, \quad k_2 = -k_0;$$

$$0 = k_1 + k_2(m-n-2), \quad k_1 = k_0(m-n-2)$$

k_0	k_1	k_2	π
-1	$-(m-n-2)$	1	$\pi_1 = \frac{x}{a^2 z^{n+2-m}}$

Таким образом, получаем

$$\vartheta - \vartheta_1 = (\vartheta_0 - \vartheta_1) f \left(\frac{x}{a^2 z^{n+2-m}} \right)$$

или (5.3.20)

$$\xi = \frac{x}{a^2 z^{n+2-m}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мельникова И. И., Радикович В. М. Динамическая метеорология (учебное пособие для океанологов). — Л., изд. ЛГМИ, 1974. — 170 с.
2. Динамическая метеорология (теоретическая метеорология). — Л.: Гидрометеоздат, 1976. — 607 с.
3. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1 (гл. I, § 1; гл. II, § 3; гл. III, § 6; гл. IV, § 7 и 8). — М.: Наука, 1965. — 639 с.
4. Монин А. С. Прогноз погоды как задача физики (гл. I, II). — М.: Наука, 1969. — 184 с.
5. Задачник по динамической метеорологии. Под редакцией Д. В. Чаликова. — Л.: Гидрометеоздат, 1984. — 165 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение	4
1.1. Предмет и задачи динамической метеорологии	4
1.2. Связь процессов в атмосфере и гидросфере	5
2. Основы динамики атмосферы	6
2.1. Общие принципы	6
2.2. Основные уравнения динамики и термодинамики атмосферы	11
2.3. Силы, действующие в атмосфере	19
2.4. Пригоки тепла и водяного пара	25
2.5. Основы статики и термодинамики атмосферы	27
2.6. Осреднение уравнений	35
2.7. Описание атмосферной турбулентности	41
2.8. Замкнутая система уравнений	51
2.9. Упрощение уравнений. Классификация атмосферных движений	53
3. Основы динамики свободной атмосферы	58
3.1. Движение без трения. Геострофический и градиентный ветер	58
3.2. Изменение геострофического ветра с высотой. Термический ветер	63
3.3. Геострофическая адвекция	68
4. Планетарный пограничный и приземный слои атмосферы	70
4.1. Общая формулировка задачи о строении планетарного пограничного слоя атмосферы	70
4.2. Стационарный, горизонтально-однородный приземный слой атмосферы	75
4.3. Стационарный, горизонтально-однородный планетарный пограничный слой атмосферы	92
4.4. Стационарный, горизонтально-неоднородный планетарный пограничный слой атмосферы	114
5. Трансформация воздушного потока за счет неоднородности подстилающей поверхности. Бризы и муссоны	117
5.1. Качественная характеристика процесса трансформации	117
5.2. Общая постановка задачи для малых высот	118
5.3. Трансформация поля температуры и влажности за счет изменения теплофизических свойств подстилающей поверхности	120
5.4. Трансформация динамических характеристик воздушного потока при изменении шероховатости подстилающей поверхности	127
5.5. Бризы и муссоны	134
6. Основные принципы численного (гидродинамического) прогноза погоды	141
6.1. Понятие краткосрочного и долгосрочного прогноза	141
6.2. Общая постановка задачи численного прогноза погоды на короткий срок	142
Приложение	149
Литература	155

ВИТАЛИИ МИХАЙЛОВИЧ РАДИКЕВИЧ
ДИНАМИЧЕСКАЯ МЕТЕОРОЛОГИЯ ДЛЯ ОКЕАНОЛОГОВ

Учебное пособие

Редактор *З. Б. Ваксенбург*

Корректор *С. В. Баранова*

Обложка художника *Р. П. Костылева*

Сдано в набор 1.11.84.	Подписано в печать 1.07.85.		
М-22440.	Формат 60×90 ¹ / ₁₆ .	Бумага тип. № 2.	Лит. гарн.
Печать высокая.	Печ. л. 9,8.	Уч.-изд. л. 10.	
Тираж 500 экз.	Темплан 1985 г.,	поз. 1818.	Зак. 261.
Цена 60 коп.	ЛПИ им. М. И. Калинина, 195251, Ленинград, Политехническая ул., 29.		

Типография ВСОК ВМФ.

