

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

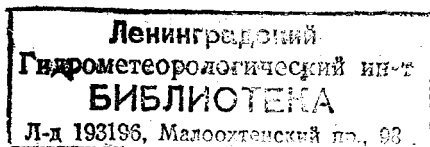
ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Р. П. РЕПИНСКАЯ

## ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ПОДСЕТОЧНОГО МАСШТАБА

Конспект лекций

Под редакцией д-ра техн. наук *Б. Д. ПАНИНА*



ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
имени М. И. КАЛИНИНА

ЛЕНИНГРАД  
1979

УДК 551. 509.333

*Одобрено Ученым советом  
Ленинградского гидрометеорологического института*

Рассматриваются вопросы прогноза влажности, конденсации водяного пара, схемы параметризации термической конвекции и горизонтального макротурбулентного обмена.

Конспект лекций предназначен для студентов-метеорологов гидрометеорологических институтов и географических факультетов государственных университетов.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В гидродинамическом (численном) прогнозе погоды атмосфера, представляющая собой квазисплошную среду, интерпретируется как система с конечным числом степеней свободы и дискретизируется либо путем перехода от дифференциальных уравнений к сеточным уравнениям, либо с помощью разложения решения по ортогональным базисным функциям (ряды Фурье, обобщенные сферические функции и др.). Используются, кроме того, лагранжевы уравнения для некоторого конечного множества воздушных частиц.

При переходе к сеточной области и от дифференциальных уравнений гидротермодинамики к их конечно-разностным аналогам число степеней свободы математической модели атмосферы определяется, во-первых, числом расчетных поверхностей по вертикали и, во-вторых, шагом сеточной области по горизонтальным координатам. В современных гидродинамических моделях атмосферы шаг сетки по горизонтали чаще всего принимается равным примерно 300 км, а число уровней по вертикали, как правило, не превышает 10. Понятно, что при этом сеточные уравнения гидротермодинамики атмосферы описывают лишь макромасштабную часть спектра метеорологических процессов и не описывают их мезо- и мелкомасштабных компонент. Например, при разложении поля геопотенциала в ряд Фурье все волны, длина которых меньше трех-четырёх шагов сетки, будут описываться неверно, а волны, длина которых равна двум шагам сетки, мы вообще не сможем описать. Неправильное описание волн искажает решение задачи и в конечном счете ведет к вычислительной неустойчивости.

С точки зрения реализации численных прогнозов атмосферные явления и процессы, которые не могут быть разрешены с помощью используемой конечно-разностной аппроксимации, то есть «просеиваются» сквозь сеточные ячейки, называются процессами подсеточного масштаба.

Поскольку в атмосфере имеет место взаимодействие между процессами различного масштаба, то необходимо при прогнозе синоптических процессов учитывать влияние мелко-

масштабных явлений. Однако описать в явном виде это влияние нельзя, так как мы не можем точно описать сами процессы подсеточного масштаба. Поэтому при построении прогностических уравнений и математических моделей атмосферы стремятся учесть влияние волн подсеточного масштаба суммарно, то есть учитывают их суммарный вклад на окончательный результат. Задача об описании влияния процессов подсеточного масштаба на макропроцессы путем выражения эффектов мелкомасштабных движений через функции (параметры), описывающие свойства макропроцессов, получила название параметризации. Так, например, оставляя в уравнениях гидротермодинамики атмосферы члены  $F_x$ ,  $F_y$  и  $\epsilon$ , можно учесть влияние сил турбулентной вязкости, лучистый, фазовый и турбулентный притоки тепла. Учет указанных эффектов имеет тем большую <sup>уваж</sup>активность, чем на большие сроки дается прогноз. При прогнозе на малые промежутки времени можно пользоваться адиабатическим приближением и не учитывать притоки тепла. Однако при прогнозе на несколько суток их учет необходим, поскольку притоки тепла, накапливаясь, могут привести к существенному изменению характера атмосферных возмущений и процессов различного масштаба.

В настоящее время задача о параметризации процессов подсеточного масштаба встала особенно остро в связи с возвратом к полным (нефильтрованным) уравнениям гидротермодинамики атмосферы и необходимостью увеличения заблаговременности прогнозов. Это требует, в первую очередь, включения в прогностические модели неадиабатических факторов. Все неадиабатические явления (процессы конденсации и испарения влаги, облакообразования, передачи энергии и др.) при принятой конечно-разностной аппроксимации относятся к процессам подсеточного масштаба и могут быть учтены только параметрически.

Ниже рассматриваются методы прогноза влажности и областей конденсации, параметризация конвекции и горизонтального макротурбулентного обмена. Материал излагается в соответствии с программой курса «Численные методы краткосрочного прогноза погоды» на основе лекций, читаемых для студентов-метеорологов.

## 1. ПРОГНОЗ ВЛАЖНОСТИ И ОБЛАСТЕЙ КОНДЕНСАЦИИ

1. Расчет полей влажности и осадков является важной частью гидродинамических прогностических моделей. Особое значение имеет прогноз облачности, существенно влияющей на потоки радиации, поскольку на границах облаков наиболее ярко проявляются эффекты поглощения, излучения и отражения. Таким образом, облачность играет роль регулятора притока тепла к атмосфере (нагрева и выхолаживания воздуха за счет радиации), а крупномасштабные процессы, приводящие к формированию и эволюции облачных систем, являются механизмом обратной связи между влагообменом и динамикой атмосферы.

Прогноз влажности, облачности и осадков может быть осуществлен на основе решения полной системы уравнений гидротермодинамики, включая уравнение переноса удельной влажности — основы для расчета влагообмена в атмосфере и уравнение, учитывающее лучистые, фазовые и турбулентные притоки тепла.

При прогнозе влажности в свободной атмосфере можно ограничиваться адиабатическим приближением, то есть рассматривать перенос влаги таким, что приток ее к движущейся частице отсутствует. В этом случае локальные изменения удельной влажности  $q$ , задаваемой либо в г/г, либо в г/кг, будут определяться только адвекцией

$$\frac{\partial q}{\partial t} = - \left( u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} \right). \quad (1.1)$$

Здесь  $q = 0,622 \frac{e}{p}$ , где  $e$  — парциальное давление пара;  $p$  — давление.

Уравнение (1.1) решается при следующих граничных условиях:

$$q = 0 \text{ при } \zeta = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \zeta} = 0 \text{ при } \zeta = 1. \quad (1.3)$$

Условия (1.2) и (1.3) означают соответственно, что влага не диффундирует в космическое пространство и нет переноса влаги в атмосферу от подстилающей поверхности при помощи механизма вертикальных движений.

Уравнение (1.1) справедливо лишь в том случае, когда температура точки росы  $T_d$  меньше температуры воздуха  $T$  и, следовательно, удельная влажность  $q$  меньше насыщающего значения  $Q$ . Если  $T = T_d$ ,  $q \geq Q$ , то уравнение переноса удельной влажности в свободной атмосфере следует использовать в виде

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + \omega \frac{\partial q}{\partial \zeta} = -r, \quad (1.4)$$

где  $r$  — количество влаги, сконденсировавшейся в единице объема воздуха в единицу времени, то есть мощность стока водяного пара. Величина  $r$  пропорциональна изменению удельной влажности насыщения в частице воздуха:  $r \sim \frac{dQ}{dt}$ .

При прогнозе влажности в пограничном слое атмосферы, в котором происходит испарение, вместо уравнения (1.4) используют уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + \omega \frac{\partial q}{\partial \zeta} = -r + \left(\frac{g}{RT}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(k \zeta^2 \frac{\partial q}{\partial \zeta}\right). \quad (1.5)$$

Здесь  $k$  — коэффициент турбулентности. Его значение принимают заданным.

Последний член в правой части уравнения (1.5) описывает изменение влажности за счет турбулентного перемешивания по вертикали.

Если на каждом шаге по времени использовать прогноз геопотенциала  $H$  и вертикальной компоненты вектора скорости  $\omega$ , то с помощью уравнения (1.4) можно осуществлять прогноз удельной влажности  $q$  выше пограничного слоя также шагами по времени:

$$q|_{t_0+\delta t} = q|_{t_0} - \left[ r + \left( u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} \right) + \omega \frac{\partial q}{\partial \zeta} \right]_{t_0} \delta t. \quad (1.6)$$

Вместо  $u$  и  $v$  на каждом шаге по времени можно использовать их геострофические значения. Тогда формула (1.6) примет вид

$$q|_{t_0+\delta t} = q|_{t_0} - \left[ r + \frac{g}{e} (H, q) + \omega \frac{\partial q}{\partial \zeta} \right]_{t_0} \delta t, \quad (1.6')$$

где слагаемое  $\frac{g}{e} (H, q)$  описывает адвекцию удельной влаж-

ности геострофическим ветром. Если на каждом временном шаге по уравнению статики

$$T = -\frac{g\zeta}{R} \frac{\partial H}{\partial \zeta} \quad (1.7)$$

рассчитывать температуру воздуха, то можно вычислять и удельную влажность насыщения

$$Q = \frac{0,622E(T)}{p}, \quad (1.8)$$

где  $E(T)$  — насыщающая упругость водяного пара, рассчитываемая по формуле Магнуса

$$E(T) = 6,108 \cdot 10^{\frac{a(T-273)}{b+T-273}}$$

Коэффициенты  $a$  и  $b$  над водой равны соответственно 7,63 и 24,19, а над поверхностью льда 9,5 и 265,5.

По величине  $Q$  можно оценить  $r$  и далее решать уравнения (1.4) и (1.5) с граничными условиями

$$q|_{\zeta=1} = Qs \quad (0 \leq s \leq 1). \quad (1.9)$$

Здесь  $s$  характеризует степень насыщения воздуха и является функцией координат. У водной поверхности  $s = 1$ , в остальных случаях  $0 \leq s < 1$ .

Считая  $k$  постоянным, запишем конечно-разностный аналог уравнения (1.5) в виде

$$\frac{q|_{t_0+\delta t} - q|_{t_0}}{\delta t} = \left[ -r - \left( u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} \right) - \omega \frac{\partial q}{\partial \zeta} \right]_{t_0} + \left( \frac{g}{RT} \right)^2 k \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} (q|_{t_0+\delta t}), \quad (1.10)$$

или

$$\alpha \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} q|_{t_0+\delta t} - q|_{t_0+\delta t} = \left[ \frac{g}{l} (H, q) + \omega \frac{\partial q}{\partial \zeta} - r \right]_{t_0} \delta t - q|_{t_0}, \quad (1.10')$$

где

$$\alpha = \left( \frac{g}{RT} \right)^2 k \delta t.$$

Уравнение (1.10) решается относительно будущего значения удельной влажности  $q|_{t_0+\delta t}$  при граничном условии (1.9), которое с учетом (1.8) записывается относительно искомой функции следующим образом:

$$q|_{t_0+\delta t} = \frac{0,622 \cdot s}{p_0} E(T|_{t_0+\delta t}) / s_{\neq} / \quad (1.11)$$

где  $p_0$  — стандартное давление у подстилающей поверхности.

Таким образом, будущее значение удельной влажности на любом уровне  $\zeta$  может быть вычислено по формуле (1.10') при условии, что известны значения  $H$ ,  $\omega$  и  $r$  в начальный момент времени  $t_0$  и прогностическое значение  $T|_{t_0 + \delta t}$  на изобарической поверхности  $\zeta = 1$ .

Поскольку значения  $r \neq 0$  в свободной атмосфере могут наблюдаться только в облаках, то для расчета  $r$  необходимо прогнозировать зоны конденсации путем оценки разности  $(q - Q)$  во всех узлах расчетной сетки точек. Если  $q \geq Q$ , имеет место облачность, а при  $q < Q$  облачность отсутствует или рассеивается, если она наблюдалась в предыдущий момент времени  $t_0 - \delta t$ .

Для прогноза облачности можно воспользоваться демаркационными графиками, построенными в системе координат  $\omega$  и  $d = Q - q$ , с помощью которых предсказываются осадки либо указывается количество облачности в баллах (10, 7—10, 4—6 и менее 4 баллов). При сильных восходящих движениях (больших отрицательных значениях  $\omega$ ) и малых дефицитах удельной влажности имеют место наиболее благоприятные условия для конденсации влаги.

В тех узлах сеточной области, где  $q \geq Q$ , количество влаги, сконденсировавшейся (испарившейся) в единице объема воздуха за один шаг по времени  $\delta t$ , определяется по формуле

$$r|_{t_0} = \frac{Q|_{t_0} - Q|_{t_0 - \delta t}}{\delta t}. \quad (1.12)$$

Полученное значение  $r$  подставляется в сеточное уравнение (1.10), которое решается затем относительно искомой функции  $q|_{t_0 + \delta t}$ .

2. Уравнения (1.1), (1.4) и (1.5) неудобны в том смысле, что удельная влажность  $q$  непосредственно не измеряется, а вычисляется по соотношению

$$q = 0,622 \frac{E(\tau)}{p}. \quad (1.13)$$

Здесь  $\tau = T_d - 273$ ;  $E(\tau)$  — упругость насыщения, вычисляемая по формуле Магнуса, записанной для температуры точки росы:

$$E(\tau) = E(0) \cdot e^{\frac{a\tau}{b+\tau}} = 6,108 e^{\frac{a\tau}{b+\tau}}. \quad (1.14)$$

Найдем такое уравнение, которое позволяло бы сразу прогнозировать условия насыщения. Для этой цели пролога-



рифмируем и продифференцируем по времени соотношение (1.13), тогда получим

$$\frac{1}{q} \frac{dq}{dt} = \frac{1}{E} \frac{dE}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} - \frac{1}{p} \frac{dp}{dt}, \quad (1.15)$$

где

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{\omega}{\zeta}.$$

Избавимся от индивидуальной производной  $\frac{dE}{d\tau}$ . Поскольку

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{d\tau} = \frac{a(\tau + b) - a\tau}{(b + \tau)^2} \approx \frac{a}{b}, \quad (1.16)$$

то уравнение (1.15) с учетом уравнения (1.14) переписется в виде

$$\frac{1}{q} \frac{dq}{dt} = -\frac{r}{q} = \frac{a}{b} \frac{d\tau}{dt} - \frac{\omega}{\zeta}. \quad (1.17)$$

Откуда изменения температуры точки росы в частице равны

$$\frac{d\tau}{dt} = \left( -\frac{r}{q} + \frac{\omega}{\zeta} \right) \frac{b}{a}. \quad (1.18)$$

В адиабатическом случае

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{b}{a} \frac{\omega}{\zeta}, \quad (1.19)$$

или

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + u \frac{\partial \tau}{\partial x} + v \frac{\partial \tau}{\partial y} + \omega \frac{\partial \tau}{\partial \zeta} - \frac{b}{a} \frac{\omega}{\zeta} = 0. \quad (1.19')$$

Рассмотрим вертикальный градиент температуры точки росы

$$\frac{\partial \tau}{\partial \zeta} = p_0 \frac{\partial \tau}{\partial p}. \quad (1.20)$$

Используем уравнение статики в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g,$$

тогда

$$\frac{\partial \tau}{\partial \zeta} = -\frac{p_0}{\rho g} \frac{\partial \tau}{\partial z}$$

или с учетом уравнения состояния

$$\frac{\partial \tau}{\partial \zeta} = -\frac{p_0}{p} \frac{RT}{g} \frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{RT}{g\zeta} \gamma_\tau, \quad (1.21)$$

где

$$\gamma_\tau = -\frac{\partial \tau}{\partial z}.$$

С учетом выражения (1.21) уравнение (1.19) принимает вид

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + u \frac{\partial \tau}{\partial x} + v \frac{\partial \tau}{\partial y} + \omega \frac{RT}{g\zeta} \gamma_\tau - \frac{b}{a} \frac{\omega}{\zeta} = 0,$$

или

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + u \frac{\partial \tau}{\partial x} + v \frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{RT}{g\zeta} \omega \left( \frac{b}{a} \frac{g}{RT} - \gamma_\tau \right) = 0. \quad (1.22)$$

Обозначим адиабатический градиент температуры точки росы через

$$\gamma_{\tau_a} = \frac{b}{a} \frac{g}{RT},$$

тогда

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + u \frac{\partial \tau}{\partial x} + v \frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{RT}{g\zeta} \omega (\gamma_{\tau_a} - \gamma_\tau) = 0, \quad (1.23)$$

Это уравнение позволяет непосредственно прогнозировать условия насыщения.

Поскольку разность  $(\gamma_{\tau_a} - \gamma_\tau)$  зависит от абсолютной температуры воздуха  $T$ , привлечем уравнение притока тепла в адиабатическом приближении

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{RT}{g\zeta} \omega (\gamma_a - \gamma) = 0 \quad (1.24)$$

и вычтем из него уравнение (1.23). Результирующее уравнение запишем для дефицита точки росы  $\Delta = T - T_a$ :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} + u \frac{\partial \Delta}{\partial x} + v \frac{\partial \Delta}{\partial y} - \frac{RT}{g\zeta} \omega (\gamma_{\Delta_a} - \gamma_\Delta) = 0. \quad (1.25)$$

По сравнению с уравнением (1.23) уравнение (1.25) позволяет более точно прогнозировать характеристики влажности.

В общем случае, когда имеет место обмен теплом и влагой между частицей воздуха и окружающей средой, уравнение притока тепла должно, очевидно, использоваться в виде

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T}{\zeta} \omega = \frac{Lr}{c_p}, \quad (1.26)$$

где  $L$  — скрытая теплота конденсации;  $\kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$ .

Для определения количества влаги  $r$ , сконденсировавшейся в единице объема воздуха, из уравнения (1.26) вычтем уравнение (1.18) при условии, что  $q = Q$  и  $T = \tau$ , тогда получим

$$r = - \frac{\left( \frac{\kappa - 1}{\kappa} T - \frac{b}{a} \right) \frac{\omega}{\zeta}}{\frac{L}{c_p} + \frac{b}{aQ}}. \quad (1.27)$$

Все члены в правой части (1.27) могут быть определены. Конденсация влаги ( $r > 0$ ) имеет место при восходящих движениях ( $\omega < 0$ ), поскольку в числителе выражения (1.27) слагаемое  $\frac{\kappa - 1}{\kappa} T$  положительно и больше  $\frac{b}{a}$ . Соотношение (1.27) справедливо также и в случае, если  $\omega > 0$ , а  $r = 0$ . Если влага испаряется ( $\omega > 0$ ,  $r < 0$ ), то необходимо использовать уравнение для водности.

Вычислив количество сконденсировавшейся влаги, можно прогнозировать температуру точки росы  $\tau$  по уравнению (1.18) с учетом конденсации. В этом случае прогноз влажности обеспечивает и учет фазовых переходов воды.

Для прогноза облачности в этом случае также используются демаркационные графики, построенные в системе координат  $\omega$  и  $\Delta$ .

## II. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ТЕРМИЧЕСКОЙ КОНВЕКЦИИ

1. Вопрос об учете конвективных процессов в численных моделях является наименее разработанным. Параметризация этих процессов выполняется весьма приближенно, без учета ряда факторов, приводящих к формированию мезомасштабных конвективных движений и перестройке полей температуры и влажности.

Так, в 1974 г. Аракава и Шуберт предложили гидродинамико-статистическую модель ансамбля кучевых облаков над океаном в тропиках, позволяющую определить притоки тепла и влаги в атмосфере за счет конвекции в терминах макромасштабных движений. Однако эта модель еще недостаточно разработана и несовершенна и не позволяет определить кучевую облачность в баллах.

Янаи, Эсбенсен и Чжан-хва Чу в 1973 г. разработали методику определения вертикального потока массы, водности, количества сконденсировавшейся и испарившейся влаги и других параметров через характеристики крупномасштабных движений. Однако сделанные при этом некоторые упрощения оказываются физически недостаточно обоснованными и приводят к противоречиям.

2. Изложим методику параметризации термической конвекции, разработанную сотрудниками отдела динамической метеорологии Главной геофизической обсерватории М. Е. Швецом и Б. Е. Шнееровым\*.

Авторами рассматриваемой методики осуществлено более реалистичное моделирование кучевой облачности благодаря включению в систему исходных уравнений двух уравнений переноса облачных и дождевых капель. Схема учета микрофизики ансамбля кучевой облачности по Швецу—Шнеерову представлена на рис. 1.

---

\* Швец М. Е., Шнееров Б. Е. О расчете основных характеристик ансамбля кучевых облаков в тропиках. — «Труды ГГО», 1976, вып. 367, с. 15—24.

Следуя авторам модели, введем в рассмотрение статическую энергию  $s$ , «влажную» статическую энергию  $h$  и статическую энергию насыщения  $h^*$ :

$$s \equiv c_p T + gz; \quad (2.1)$$

$$h \equiv c_p T + gz + Lq; \quad (2.2)$$

$$h^* \equiv c_p T + gz + Lq^*, \quad (2.3)$$

где  $T$  — температура;  $z$  — высота;  $L$  — скрытая теплота конденсации;  $q$  — удельная влажность;  $q^*$  — максимальная удельная влажность;  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении;  $g$  — ускорение силы тяжести.

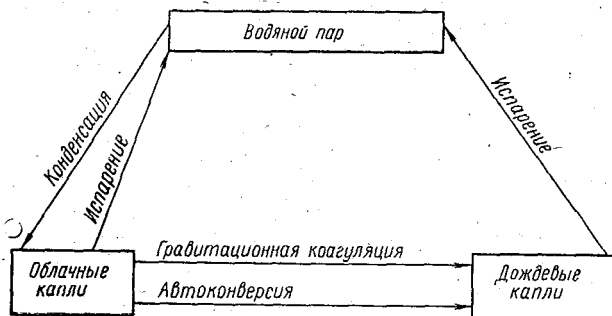


Рис. 1. Схема гидрологического цикла в модели ансамбля кучевой облачности

Выпишем уравнения неразрывности, притока тепла и влаги для величин, осредненных по горизонтальной единичной площадке, пересекающей систему кучевых облаков:

$$\nabla \bar{W} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p} = 0; \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \nabla \bar{s} \bar{W} + \frac{\partial \bar{s} \bar{\omega}}{\partial p} = \bar{Q}_R + L(\bar{c} - \bar{e}); \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \nabla \bar{q} \bar{W} + \frac{\partial \bar{q} \bar{\omega}}{\partial p} = \bar{e} - \bar{c}. \quad (2.6)$$

Здесь  $\bar{W}$  — вектор горизонтальной скорости;  $\bar{\omega}$  — аналог вертикальной скорости в изобарической системе координат;  $p$  — давление воздуха;  $\bar{Q}_R$  — радиационный приток тепла;  $\bar{c}$  — количество влаги, сконденсировавшейся в единицу времени в единице массы воздуха;  $\bar{e}$  — количество испарившейся влаги;  $\nabla$  — плоский оператор градиента.

Представим уравнения (2.5) и (2.6) в виде:

$$\bar{Q}_1 \equiv \frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \overline{\nabla s W} + \frac{\partial \bar{s} \bar{\omega}}{\partial p} = \bar{Q}_R + L(\bar{c} - \bar{e}) - \frac{\partial}{\partial p} (\bar{s}' \bar{\omega}'); \quad (2.7)$$

$$\bar{Q}_2 \equiv L \left( \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \overline{\nabla q W} + \frac{\partial \bar{q} \bar{\omega}}{\partial p} \right) = L(\bar{c} - \bar{e}) + L \frac{\partial}{\partial p} (\bar{q}' \bar{\omega}'), \quad (2.8)$$

где штрихами обозначены отклонения гидрометеорологических элементов от указанных выше средних, обусловленные мезомасштабной конвекцией.

Поток энергии, характеризующий интенсивность мезомасштабной конвекции, обозначим через  $\overline{h' \omega'}$ . Из уравнений (2.7) и (2.8) получим, что

$$-\frac{\partial}{\partial p} (\overline{h' \omega'}) = \bar{Q}_1 - \bar{Q}_2 - \bar{Q}_R. \quad (2.9)$$

Проинтегрируем соотношение (2.9) по давлению  $p$  от нижней границы облаков  $p_T$  и получим выражение для потока энергии через осредненные характеристики крупномасштабных движений:

$$F = \frac{1}{g} \int_{p_T}^p (\bar{Q}_1 - \bar{Q}_2 - \bar{Q}_R) dp = -\frac{1}{g} \overline{h' \omega'}. \quad (2.10)$$

Определим потоки влаги и энергии, обусловленные конвекцией. Введем следующие обозначения:  $\sigma_i$  — площадь сечения  $i$ -го облака координатной плоскостью;  $s_i$  и  $\omega_i$  — средние по этому сечению значения статической энергии и изобарической вертикальной скорости;  $M_i = -\int_{\sigma_i} \omega_i d\sigma = \sigma_i \omega_i$  — вертикальный поток массы воздуха через сечение  $\sigma_i$ .

Аналогичные величины в окружающем воздухе будем обозначать через  $\bar{s}$  и  $\bar{\omega}$ . Далее, выполнив суммирование по всему ансамблю облаков, получим:

$$\bar{s} = \sum_i s_i \sigma_i + \bar{s} (1 - \sigma) = \bar{s} - \sum_i (s_i - \bar{s}) \sigma_i,$$

$$\bar{s} \bar{\omega} = (1 - \sigma) \bar{s} \bar{\omega} + \sum_i \sigma_i s_i \omega_i,$$

где

$$\sigma = \sum_i \sigma_i.$$

Поскольку

$$\overline{s'w'} = \overline{s\omega} - \overline{\tilde{s}\tilde{\omega}}, \quad (2.11)$$

то, подставляя полученные соотношения в выражение (2.11) и учитывая, что  $|\tilde{\omega}| \ll \omega_i$ , а  $\sigma_i^2 \ll 1$ , получим:

$$-\overline{s'w'} = \sum_i M_i (s_i - \tilde{s});$$

$$-\overline{q'w'} = \sum_i M_i (q_i - \tilde{q});$$

$$-\overline{h'w'} = \sum_i M_i (h_i - \tilde{h}).$$

С учетом этих соотношений уравнения (2.7) и (2.8) можно представить в виде:

$$L \sum_i (c_i - e_i) + \frac{\partial}{\partial p} \sum_i M_i (s_i - \tilde{s}) = \overline{Q}_1 - \overline{Q}_R; \quad (2.12)$$

$$L \sum_i (c_i - e_i) - L \frac{\partial}{\partial p} \sum_i M (q_i - \tilde{q}) = \overline{Q}_2. \quad (2.13)$$

Запишем уравнения баланса массы, тепла, удельной влаги и водности для отдельного  $i$ -го облака. При этом будем полагать, что удельная концентрация жидкой влаги будет равна сумме удельных концентраций облачных ( $q_{ki}$ ) и дождевых ( $q_{pi}$ ) капель. Среднее по горизонтальному сечению облака значение дивергенции потока статической энергии  $sW$ , равное сумме втекания  $\varepsilon_i$  и вытекания  $\delta_i$ , можно представить в виде:

$$\int_{\sigma_i} \operatorname{div} (sW) d\sigma = \oint_l V_n s dl = \oint_l V s \cos(\widehat{nV}) dl = \varepsilon_i + \delta_i,$$

где  $l$  — контур, ограничивающий площадь сечения  $\sigma_i$ ;  $V_n$  — нормальная составляющая вектора скорости к контуру;  $V$  — модуль вектора скорости;

$$\varepsilon_i = \int_l V s \cos(\widehat{nV}) dl;$$

$$\delta_i = \int_l V s \cos(\widehat{nV}) dl.$$

Отметим, что в каждом из двух последних интегралов  $\cos(\widehat{nV})$  не меняет своего знака. По теореме о среднем

можно получить, что втекание равно  $\varepsilon_i s$ , а вытекание  $\delta_i s_i$ . Тогда приходим к следующей системе уравнений:

$$\varepsilon_i - \delta_i + \frac{\partial M_i}{\partial p} = 0; \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_i \tilde{s} - \delta_i s_i + \frac{\partial}{\partial p} (M_i s_i) + L c_i = 0; \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_i \tilde{q} - \delta_i q_i + \frac{\partial}{\partial p} (M_i q_i) - c_i = 0; \quad (2.16)$$

$$- \delta_i q_{ki} + \frac{\partial}{\partial p} (M_i q_{ki}) + c_i - \Phi_i = 0; \quad (2.17)$$

$$- \delta_i q_{li} + \frac{\partial}{\partial p} (M_i q_{li}) + \Phi_i - r_i = 0, \quad (2.18)$$

в которой  $r_i$  — сток дождевых капель за счет гравитационного падения;  $\Phi_i$  — приток дождевых капель за счет укрупнения последних.

Согласно работам Арнасона, Брауна и Чу, Лина и Орвиля, Симпсона и Виггера и других, генерация дождевых капель определяется двумя процессами: автоконверсией  $\Phi$  и гравитационной коагуляцией  $r$ :

$$\Phi = \frac{33 \cdot 10^3 \rho^2 q_k^3}{10^{-6} + \rho q_k} + 2,2 q_k q_d^{0,875} \quad (c^{-1}); \quad (2.19)$$

$$r = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\rho V_d q_d) = g \frac{\partial}{\partial p} V_d \rho q_d. \quad (2.20)$$

Здесь

$$V_d = 2,86 \cdot 10^3 (\rho q_d)^{0,125} \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}} \left( \frac{cm}{c} \right) - \quad (2.21)$$

средняя взвешенная скорость падения дождевых капель;  $\rho$  — плотность воздуха.

Система из восьми уравнений (2.10), (2.12) — (2.18) содержит девять неизвестных величин ( $q_i$ ,  $h_i$ ,  $s_i$ ,  $c_i$ ,  $M_i$ ,  $\delta_i$ ,  $\varepsilon_i$ ,  $q_{ki}$ ,  $q_{li}$ ) и является незамкнутой.

Чтобы замкнуть систему, воспользуемся соотношением

$$q_i = q^*(T_i, p_i),$$

записанным для внутренней части облака, где имеет место насыщение.



Разложив функцию  $q^*$  в ряд Тейлора, получим

$$q_i = \tilde{q}^* + \left( \frac{\partial \tilde{q}^*}{\partial t} \right)_p (T_i - \tilde{T}) = \tilde{q}^* + \frac{1}{c_p} \left( \frac{\partial \tilde{q}^*}{\partial T} \right)_p (s_i - \tilde{s}).$$

Поскольку  $h_i = s_i + Lq_i$ ,  $\tilde{h}^* = \tilde{s} + L\tilde{q}^*$ , то авторы рассматриваемой модели приходят к уравнениям, полученным Аракава (1971 г.):

$$s_i - \tilde{s} = \frac{1}{1+\gamma} (h_i - \tilde{h}^*); \quad (2.22)$$

$$L(q_i - \tilde{q}^*) = \frac{\gamma}{1+\gamma} (h_i - \tilde{h}^*), \quad (2.23)$$

где

$$\gamma = \frac{L}{c_p} \left( \frac{\partial q^*}{\partial T} \right)_p.$$

Обозначив

$$M_c = \sum_i M_i; \quad \varepsilon = \sum_i \varepsilon_i; \quad \delta = \sum_i \delta_i; \quad c = \sum_i c_i; \quad e = \sum_i e_i,$$

введем в рассмотрение средние взвешенные по всему ансамблю облаков значения:

$$\overline{h_c} = \frac{\sum_i M_i h_i}{M_c};$$

$$\overline{s_c} = \frac{\sum_i M_i s_i}{M_c};$$

$$\overline{q_c} = \frac{\sum_i M_i q_i}{M_c};$$

$$\overline{q_{к}} = \frac{\sum_i M_i q_{кi}}{M_c};$$

$$\overline{q_{д}} = \frac{\sum_i M_i q_{ди}}{M_c}.$$

Если учесть предположения Аракава и Шуберта о наличии в облаках тонкого слоя вытекания воздуха, где  $h_i \approx \tilde{h}^*$ , то, что, согласно соотношениям (2.22) и (2.23),  $s_i = \tilde{s}^*$ ,

$q_i = \tilde{q}^*$ , и слоя втекания, где  $q_{ki} + q_{di} = q_k + q_d$ , то система уравнений (2.14)–(2.18) примет вид:

$$\varepsilon - \delta + \frac{\partial M_c}{\partial p} = 0; \quad (2.24)$$

$$(\varepsilon - \delta) \tilde{s} + \frac{\partial}{\partial p} (M_c \overline{s_c}) + L_c = 0; \quad (2.25)$$

$$\varepsilon \tilde{q} - \delta \tilde{q}^* + \frac{\partial}{\partial p} (M_c \overline{q_c}) - c = 0; \quad (2.26)$$

$$-\delta q_k + \frac{\partial}{\partial p} (M_c \overline{q_k}) + c - \Phi = 0; \quad (2.27)$$

$$-\delta q_d + \frac{\partial}{\partial p} (M_c \overline{q_d}) + \Phi - r = 0; \quad (2.28)$$

$$e = \delta (\overline{q_k} + \overline{q_d}). \quad (2.29)$$

Уравнение (2.29) описывает полное испарение капель, выносящихся из облака. На основании уравнений (2.24)–(2.26) соотношения (2.12) и (2.13) преобразуются к виду:

$$-M_c \frac{\partial \tilde{s}}{\partial p} = \overline{Q}_1 - \overline{Q}_R + Le,$$

$$LM_c \frac{\partial \tilde{q}}{\partial p} - L\delta (\tilde{q}^* - \tilde{q}) - Le = \overline{Q}_2.$$

Исключив из этих соотношений величину  $Le$ , а из соотношений (2.25) и (2.26) величину  $c$ , получим:

$$\delta (\tilde{h}^* - \tilde{h}) - M_c \frac{\partial \tilde{h}}{\partial p} = \overline{Q}_1 - \overline{Q}_2 - \overline{Q}_R; \quad (2.30)$$

$$\varepsilon (\tilde{h}^* - \tilde{h}) = M_c \frac{\partial \overline{h_c}}{\partial p} + \frac{\partial M_c}{\partial p} (\overline{h_c} - \tilde{h}^*). \quad (2.31)$$

Откуда

$$\overline{Q}_1 - \overline{Q}_2 - \overline{Q}_R = \frac{\partial}{\partial p} [M_c (\overline{h_c} - \tilde{h})].$$

Интегрирование этого уравнения по вертикали с учетом (2.10) дает формулу, полученную Янаи и другими,

$$Fg = M_c (\overline{h_c} - \tilde{h}). \quad (2.32)$$

Выпишем теперь полученную систему уравнений:

$$-M_c \frac{\partial \tilde{s}}{\partial p} = \bar{Q}_1 - \bar{Q}_R + L\delta(\bar{q}_k + \bar{q}_d); \quad (2.33)$$

$$\delta(\tilde{h}^* - \tilde{h}) = M_c \frac{\partial \tilde{h}}{\partial p} + \bar{Q}_1 - \bar{Q}_2 - \bar{Q}_R; \quad (2.34)$$

$$\dot{\epsilon} = \delta - \frac{\partial M_c}{\partial p}; \quad (2.35)$$

$$\bar{h}_c = \tilde{h} + \frac{Fg}{M_c}; \quad (2.36)$$

$$\bar{s}_c = \tilde{s} + \frac{1}{1+\gamma}(\bar{h}_c - \tilde{h}^*); \quad (2.37)$$

$$q_c = \tilde{q} + \frac{\gamma}{L(1+\gamma)}(\bar{h}_c - \tilde{h}^*); \quad (2.38)$$

$$c = \frac{\partial}{\partial p}(M_c \bar{q}_c) - \frac{\partial M_c}{\partial p} \tilde{q} - \delta(\tilde{q}^* - \tilde{q}); \quad (2.39)$$

$$M_c \frac{\partial \bar{q}_d}{\partial p} - g \frac{\partial}{\partial p}(V_{\lambda} \bar{q}_d) + \Phi = 0; \quad (2.40)$$

$$M_c \frac{\partial \bar{q}_k}{\partial p} + c - \Phi = 0, \quad (2.41)$$

где интенсивность осадков  $P_T = (\rho V_d q_d)_{p=p_T}$ .

При решении этой системы уравнений методом итераций в первом приближении принимают, что

$$\delta(\bar{q}_k + \bar{q}_d) = 0.$$

Поскольку соотношения (2.40) и (2.41) являются дифференциальными уравнениями, то для их решения необходимо сформулировать граничные условия. В качестве граничных условий можно задать  $q_k = 0$  вблизи нижней границы облаков и  $q_d = 0$  при  $c = 0$ .

Если пренебречь теплом испарения капель, то, очевидно, рассматриваемая задача несколько упрощается поскольку исчезает необходимость интегрировать указанные дифференциальные уравнения.

3. В случае возникновения «влажной» конвекции, которая, как известно, начинает развиваться, если облачный эле-

мент обладает плавучестью, то есть, если температура облака больше, чем температура окружающего воздуха  $T$ , в рассматриваемой модели предполагается, что балл облачности  $\sigma$  мал по сравнению с единицей. При этом потоки влаги и энергии, обусловленные мезомасштабной конвекцией, будут иметь вид:

$$\overline{s'w'} = M_c (1 - \sigma) (s_c - \tilde{s}),$$

$$\overline{q'w'} = M_c (1 - \sigma) (q_c - \tilde{q}).$$

Сложив уравнения (2.12) и (2.13), получим

$$\overline{M} \frac{\partial}{\partial p} [c_p T + gz + Lq] + \frac{\partial}{\partial p} M_c [c_p (T_c - T) + L(q_c - q)] = 0,$$

или

$$c_p \left( \frac{\partial T_c}{\partial z} + L \frac{\partial q_c}{\partial z} \right) = A [c_p (T - T_c) + L(q - q_c)], \quad (2.42)$$

где

$$A = \frac{1}{M} \frac{\partial}{\partial z} (1 - \sigma).$$

Введем парциальное давление пара

$$e_c(T_c) = \frac{q_c p}{\varepsilon},$$

откуда

$$\frac{\partial q_c}{\partial z} = \frac{\varepsilon}{p} \frac{de_c}{dT} \frac{dT_c}{dz} + \frac{e_c}{p} \frac{g}{RT}.$$

Подставляя полученное соотношение в (2.42)

$$\begin{aligned} \left( c_p + L \frac{\varepsilon}{p} \frac{de_c}{dT} \right) \frac{dT_c}{dz} + L \frac{e_c}{p} \frac{g}{RT_c} + g &= \\ &= A [c_p (\tilde{T} - T_c) + L(\tilde{q} - q_c)] \end{aligned} \quad (2.43)$$

и положив  $A=0$ , получим

$$\gamma_{\text{ва}} = - \frac{dT_c}{dz} = \frac{g \left( 1 + \frac{L \varepsilon e_c}{p R T_c} \right)}{c_p \left( 1 + \frac{L \varepsilon}{c_p p} \frac{de_c}{dT} \right)}.$$

Если принять, что у основания облаков  $\tilde{T} = T_c$ ,  $\tilde{q} = q_c$ , то на расстоянии  $\Delta z$ :

$$\tilde{T} = T_c = \left[ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} - \frac{\partial T_c}{\partial z} \right] \Delta z; \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \tilde{q} - q_c &= \tilde{q} - \tilde{q}^* + \frac{\epsilon}{p} \frac{de_c}{dT} (\tilde{T} - T_c) = \\ &= q - q^* + \frac{\epsilon}{p} \frac{de_c}{dT} \left[ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} - \frac{\partial T_c}{\partial z} \right] \Delta z. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Используя соотношения (2.44) и (2.45), получим

$$\frac{\partial T_c}{\partial z} + \gamma_{\text{ва}} = \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \gamma_{\text{ва}} \right) \frac{A \Delta z}{1 + A \Delta z} + \frac{LA}{1 + A \Delta z} \frac{\tilde{q} - \tilde{q}^*}{\alpha}, \quad (2.46)$$

где

$$\alpha = c_p + \frac{L\epsilon}{p} \frac{de_c}{dT}.$$

С учетом формулы Клаузиуса—Клайперона

$$\alpha = c_p + \frac{L^2 \epsilon q^*}{RT}.$$

Условия возникновения «влажной конвекции»  $T_c - T > 0$  выполняются, если  $\frac{\partial T_c}{\partial z} > \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z}$ , тогда, как следует из уравнения (2.46),

$$\frac{\frac{\partial T_c}{\partial z} + \gamma_{\text{ва}}}{\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \gamma_{\text{ва}}} = \frac{A \Delta z}{1 + A \Delta z} + \frac{LA}{1 + A \Delta z} \cdot \frac{\tilde{q} - \tilde{q}^*}{\alpha \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \gamma_{\text{ва}} \right)} > 1,$$

или

$$A \Delta z + \frac{LA(\tilde{q} - \tilde{q}^*)}{\alpha \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \gamma_{\text{ва}} \right)} > 1.$$

Считая расстояние  $\Delta z$  малым и пренебрегая величиной  $A \Delta z$ , получим

$$-\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} > \gamma_{\text{ва}} + \frac{LA}{\alpha} (\tilde{q}^* - \tilde{q}). \quad (2.47)$$

Таким образом, критический градиент температуры

$$\gamma_{кр} = \gamma_a (1 - \sigma) + \sigma \left[ \gamma_{ва} + \frac{LA}{\alpha} (\tilde{q}^* - \tilde{q}) \right], \quad (2.48)$$

или, если  $A=0$ ,

$$\gamma_{кр} = \gamma_a (1 - \sigma) + \sigma \gamma_{ва}. \quad (2.48')$$

Из формулы (2.48) следует, что  $\gamma_{кр}$  существенно зависит от балла облачности  $\sigma$  и величины  $A$ , характеризующей интенсивность втекания воздуха в облака.

Балл облачности  $\sigma$  можно определить по соотношению

$$\sigma = \begin{cases} \frac{f - f_{кр}}{1 - \gamma_{кр}} & \text{при } f \geq f_{кр}, \\ 0, & \text{если } f < f_{кр}, \end{cases}$$

где  $f$  — относительная влажность.

В этом случае  $\gamma_{кр}$  определяется по формуле

$$\gamma_{кр} = \gamma_a \left( \frac{1 - f}{1 - f_{кр}} \right) + \gamma_{ва} \left( \frac{f - f_{кр}}{1 - f_{кр}} \right), \quad (2.49)$$

выведенной впервые Бушби, но иным путем.

Рассмотренная методика параметризации «влажной» термической конвекции по Швецу—Шнеерову обладает определенным преимуществом перед схемой «конвективного приспособления», разработанной в 1965 г. Манабе и др. Суть этой схемы заключается в том, что конвекция, возникающая в атмосфере при неустойчивой стратификации, приводит к такому перераспределению влажности и температуры, которое соответствует безразличному равновесию. Причем в процессе «конвективного приспособления» должен оставаться неизменным ряд интегральных характеристик, связанных с «сухой» или «влажной» статической энергией. Недостатком этой схемы и ее многочисленных модификаций является то, что условие возникновения «влажной» термической конвекции справедливо лишь в том случае, если вовлечение воздуха в облако незначительно. При интенсивной конвекции это условие не выполняется.

Расчеты, проведенные Б. Е. Шнееровым, показали, что описанная методика параметризации термической конвекции действительно приводит к более реалистическим результатам. При этом по синоптической информации определяются такие осредненные характеристики ансамбля кучевой облачности,

как температура, влажность и концентрация влаги, а также вертикальный поток массы. Для иллюстрации сказанного на рис. 2 и 3, взятых из работы М. Е. Швеца и Б. Е. Шнеерова, показано распределение следующих осредненных по ансамблю кучевой облачности характеристик: температуры  $\bar{T}_c - \bar{T}$ , концентрации дождевых ( $q_d$ ), облачных ( $q_k$ ) капель и их суммы.

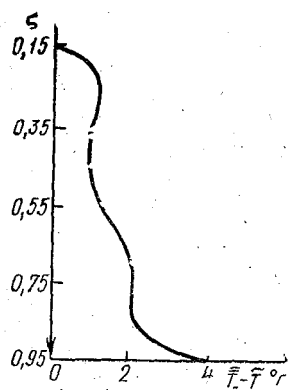


Рис. 2. Распределение температуры, осредненной по ансамблю кучевых облаков

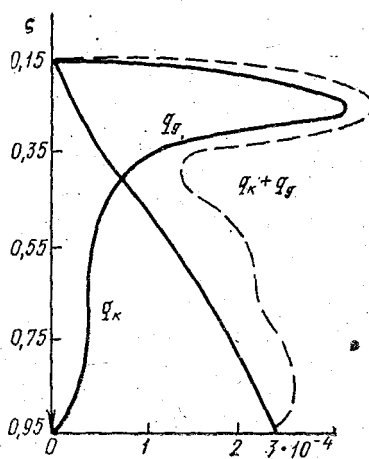


Рис. 3. Осредненные по ансамблю кучевых облаков распределения по высоте концентрации облачных и дождевых капель ( $q_k$ ,  $q_d$ ) и их суммы

### III. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО МАКРОТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА

1. Атмосферные движения представляют собой суперпозицию взаимодействующих друг с другом колебаний различного масштаба. При прогнозе процессов синоптического масштаба с помощью численных моделей атмосферы мы не рассматриваем высокочастотную часть спектра, то есть мелко-масштабные процессы. Влияние процессов подсеточного масштаба на синоптические движения аналогично влиянию отдельных молекул на движение жидкости. Такое влияние осуществляется путем турбулентного обмена и имеет характер сглаживания.

Если при интегрировании прогностических уравнений не учитывать турбулентную вязкость (горизонтальную диффузию), то будущие поля могут получаться слишком «пестрыми», а то и вообще задача будет иметь расходящееся решение. Чтобы учесть процессы горизонтального макротурбулентного обмена, в уравнения движения и в уравнение притока тепла следует вводить члены:

$$F_x = k_0 \nabla^2 u,$$

$$F_y = k_0 \nabla^2 v,$$

$$F_T = k_0 \nabla^2 T \quad \text{или} \quad F_\theta = k_0 \nabla^2 \theta,$$

где

$$\theta = T \left( \frac{1000}{p} \right)^{\frac{AR}{c_p}} \quad \text{— потенциальная температура;}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{— двумерный оператор Лапласа;}$$

$k_0$  — коэффициент турбулентной вязкости.

В соответствии с законом Ричардсона—Обухова,

$$k_0 \sim \varepsilon^{\frac{1}{3}} L^{\frac{4}{3}},$$

где  $L$  — масштаб движения (масштаб осреднения) или шаг сетки, а под  $\varepsilon$  понимается диссипация кинетической энергии, средняя для всей атмосферы.



Заметим, что влияние указанных членов на решение эквивалентно сглаживанию. Они могут записываться в уравнениях по разному. Так, в моделях Дж. Смагоринского члены  $F_x$ ,  $F_y$  и  $F_\theta$  фигурируют в следующем виде:

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x} (k_s A) + \frac{\partial}{\partial y} (k_s B),$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial x} (k_s B) - \frac{\partial}{\partial y} (k_s A),$$

$$F_\theta = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_s \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_s \frac{\partial \theta}{\partial y} \right),$$

где величины  $A$  и  $B$  линейно зависят от горизонтальных компонент вектора ветра и представляют собой составляющие чистой деформации:

$$A = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$B = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},$$

а  $k_s$  пропорционально полной деформации  $M = (A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}$ .

В отличие от плоской дивергенции  $D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$  величины  $A$  и  $B$  не являются инвариантными, то есть при повороте системы координат на  $90^\circ$   $A$  не переходит в  $B$  и наоборот, а дивергенция переходит в дивергенцию. Иначе говоря, с физической точки зрения величины  $A$  и  $B$  лишены кинематического истолкования, не связанного с выбором осей координат. Если положить  $k_s = \text{const}$ , тогда, очевидно,

$$F_x = k_s \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = k_s \nabla^2 u,$$

$$F_y = k_s \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = k_s \nabla^2 v,$$

$$F_\theta = k_s \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) = k_s \nabla^2 \theta.$$

Однако используемое Смагоринским значение  $k_s$  не является константой и приводит к тому, что атмосферные возмущения более мелкого масштаба сглаживаются сильнее.

2. При использовании адиабатических численных моделей атмосферы, учитывающих горизонтальный макротурбулентный обмен, сначала для всей прогностической области рассчитывается значение первого энергетического инварианта

$$I = \iiint_{(V)} E_k dv,$$

где  $E_k$  — кинетическая энергия единицы массы, а затем выполняется интегрирование уравнений прогноза при заданном значении коэффициента турбулентности. Например, если характерный горизонтальный масштаб атмосферных движений равен 1000 км, то  $k_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ . Если на первом или втором шагах интегрирования уравнений по времени кинетическая энергия системы возрастает или уменьшается, то нужно варьировать значение  $k_0$ , соответственно уменьшая либо увеличивая его.

3. В моделях, построенных на основе полных уравнений гидротермодинамики атмосферы, применяется также так называемая процедура сглаживания или фильтрации. Она заключается в том, что на определенных шагах по времени (или на каждом шаге) прогностические поля подвергаются разложению по ортогональным базисным функциям (например, выполняется гармонический анализ вдоль кругов широт) и приравниваются нулю амплитуды волн, масштаб которых равен двум шагам сетки и меньше. Таким образом выфильтровываются возмущения, которые заведомо не могут быть описаны (разрешены) в рамках принятой конечно-разностной аппроксимации дифференциальных уравнений численной модели атмосферы. Затем выполняется интегрирование уравнений без учета выборочных возмущений. Следовательно, в этом случае параметризация горизонтальной диффузии заключается в том, чтобы не допускать возмущений, длина волн которых меньше шага сетки.

4. В некоторых моделях атмосферы учет горизонтального макротурбулентного обмена производится как бы в неявном виде. В этом случае члены, описывающие вязкость, не учитываются в дифференциальных уравнениях прогноза, но применяются специальные методы решения уравнений, основанные на введении так называемой «счетной вязкости», в какой-то мере компенсирующей неучет названных членов.

Рассмотрим это на примере решения методом расщепления простейшего одномерного уравнения переноса некоторой метеорологической субстанции вдоль траектории:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (3.1)$$

Иначе это уравнение можно записать в виде  $\psi_t + u\psi_x = 0$ .

Узлы регулярной сетки на рассматриваемом отрезке вдоль оси  $x$  будем снабжать индексом  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , а дискретные моменты времени будем обозначать через  $t_j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, m$ ). Тогда шаг по времени  $\delta t = t_{j+1} - t_j$ , а шаг по пространственной координате  $\delta x = x_{i+1} - x_i$ .

Разобьем временной шаг на два интервала:

$$t_j \leq t \leq t_{j+\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad t_{j+\frac{1}{2}} \leq t \leq t_{j+1}.$$

На первом полушаге по времени линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (3.1) в частных производных аппроксимируем сеточным уравнением первого порядка точности по переменным  $t$  и  $x$  с односторонне направленными разностями и неявной записью члена  $\psi_x$ :

$$\psi_i^{j+\frac{1}{2}} = \psi_i^j - u_i^j \frac{\delta t}{2\delta x} (\psi_i^{j+\frac{1}{2}} - \psi_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}) \quad \text{при } \alpha_i \geq 0, \quad (3.2)$$

$$\psi_i^{j+\frac{1}{2}} = \psi_i^j - u_i^j \frac{\delta t}{2\delta x} (\psi_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - \psi_i^{j+\frac{1}{2}}) \quad \text{при } \alpha_i < 0, \quad (3.3)$$

где

$$\alpha_i = u_i^j \frac{\delta t}{2\delta x}. \quad (3.4)$$

Для удобства пользования сеточные уравнения (3.2) и (3.3) запишем в виде одного уравнения, объединяющего случаи  $u_i^j \geq 0$  и  $u_i^j < 0$ .

В соответствии с определением модуля некоторого числа, можно записать  $\alpha_i = |\alpha_i|$ , если  $\alpha_i \geq 0$ . С учетом этого уравнения (3.2) и (3.3) примут вид:

$$\psi_i^{j+\frac{1}{2}} = \psi_i^j - |\alpha_i| (\psi_i^{j+\frac{1}{2}} - \psi_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}) \quad \text{при } \alpha_i \geq 0 \quad (3.5)$$

$$\psi_i^{j+\frac{1}{2}} = \psi_i^j + |\alpha_i| (\psi_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - \psi_i^{j+\frac{1}{2}}) \quad \text{при } \alpha_i < 0 \quad (3.6)$$

Сложив уравнения (3.5) и (3.6), получим

$$2\psi_i^{j+\frac{1}{2}}(1 + |\alpha_i|) - |\alpha_i| \psi_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} - |\alpha_i| \psi_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} = 2\psi_i^j. \quad (3.7)$$

К левой части уравнения (3.7) прибавим и вычтем слагаемые  $\alpha_i \psi_{i+1}^{j+\frac{1}{2}}$  и  $\alpha_i \psi_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}$  и, вводя обозначения

$$\left. \begin{aligned} f_i &= 2\psi_i^j, \\ a_i &= |\alpha_i| + \alpha_i, \\ b_i &= |\alpha_i| + 1, \\ c_i &= |\alpha_i| - \alpha_i, \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

перепишем его в следующем виде:

$$\alpha_i \psi_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} - 2b_i \psi_i^{j+\frac{1}{2}} + c_i \psi_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} + \alpha_i \psi_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - \alpha_i \psi_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} = -f_i. \quad (3.9)$$

Покажем, что

$$\alpha_i \psi_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - \alpha_i \psi_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} \equiv 0. \quad (3.10)$$

Для этого к левой части (3.10) прибавим и вычтем слагаемое  $\alpha_i \psi_i^{j+\frac{1}{2}}$  и представим ее в виде

$$\alpha_i \left[ (\psi_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - \psi_i^{j+\frac{1}{2}}) + (\psi_i^{j+\frac{1}{2}} - \psi_{i-1}^{j+\frac{1}{2}}) \right].$$

Далее учтем, что на основании (3.5) и (3.6)

$$\psi_i^{j+\frac{1}{2}} - \psi_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} = -\frac{\psi_i^{j+\frac{1}{2}} - \psi_i^j}{|\alpha_i|},$$

$$\psi_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - \psi_i^{j+\frac{1}{2}} = \frac{\psi_i^{j+\frac{1}{2}} - \psi_i^j}{|\alpha_i|}.$$

Теперь легко видеть, что тождество (3.10) действительно имеет место.

Таким образом, искомым сеточным уравнением, объединяющим указанные два случая, является уравнение

$$\alpha_i \psi_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} - 2b_i \psi_i^{j+\frac{1}{2}} + c_i \psi_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} = -f_i, \quad (3.11)$$

переходящее при  $\alpha_i \geq 0$  в уравнение (3.2), а при  $\alpha_i < 0$  — в уравнение (3.3).

Итак, сеточное уравнение (3.7) формально можно заменить сеточным уравнением (3.11), представляющим собой систему линейных алгебраических уравнений и имеющим трехточечную форму записи по переменной  $x$ . Следовательно, производная  $\psi_x$  имеет здесь второй порядок точности аппроксимации. При заданных значениях искомой функции на концах отрезка  $\psi(0)$  и  $\psi(x_n)$  эта система решается методом прогонки (факторизации). Можно показать, что решение будет устойчивым, если  $a_i + c_i \leq 2b_i$ . В данном случае это условие выполняется, так как  $a_i + c_i = 2|\alpha_i|$ .

Покажем, что сеточное уравнение (3.11) на самом деле аппроксимирует дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial \psi^{j+\frac{1}{2}}}{\partial t} + u \frac{\partial \psi^{j+\frac{1}{2}}}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \psi^{j+\frac{1}{2}}}{\partial x^2}, \quad (3.12)$$

где множитель

$$\mu = |u| \frac{\delta x}{2} + u^2 \frac{\delta t}{4} \quad (3.13)$$

является коэффициентом «счетной (фиктивной, искусственной) вязкости»; верхний индекс  $j + \frac{1}{2}$  у производных означает, с одной стороны, что в разностном аналоге  $\frac{\partial \psi}{\partial t}$  фигурирует значение функции в момент времени  $j + \frac{1}{2}$ , а с другой стороны, свидетельствует о неявной записи первой и второй производных по переменной  $x$ .

В соответствии с методом анализа разностных схем, разработанным А. М. Жуковым, разложим решение уравнения (3.1) в форме (3.11) в ряд Тейлора в окрестности точки  $x = x_i$ ,  $t = t_j$ . Запишем ряды Тейлора для функций, фигурирующих в решении (3.11):

$$\psi_i^{j+\frac{1}{2}} = \psi_i^j + \frac{\delta t}{2} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\delta t}{2} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \dots; \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \psi_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} &= \psi_i^j + \frac{\delta t}{2} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\delta t}{2} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \delta x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \\ &+ \frac{\delta t}{2} \delta x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} + \frac{\delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \dots; \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \psi_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} &= \psi_i^j + \frac{\delta t}{2} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\delta t}{2} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \delta x \frac{\partial \psi}{\partial x} - \\ &- \frac{\delta t}{2} \delta x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} + \frac{\delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Подставляя ряды (3.14)–(3.16) в решение (3.11) и учитывая в них слагаемые, содержащие члены второго порядка малости  $\delta t^2$ ,  $\delta x^2$  и  $\delta t \cdot \delta x$ , получим уравнение

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} = |u| \frac{\delta x}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\delta t}{4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - u \frac{\delta t}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t}. \quad (3.17)$$

При этом мы предполагаем, что отброшенные члены в уравнении (3.17) имеют более высокий порядок малости.

Если в исходном уравнении переноса (3.1) положить  $u = \text{const}$ , то из него следует:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -u \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = -u \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right); \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = -u \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (3.19)$$

Преобразуем слагаемые, фигурирующие в правой части уравнения (3.17), с учетом полученных соотношений:

$$-u \frac{\delta t}{4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = u \frac{\delta t}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = -u^2 \frac{\delta t}{4} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (3.20)$$

$$-u \frac{\delta t}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} = u^2 \frac{\delta t}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (3.21)$$

Используя эти формулы, запишем (3.17) в виде

$$\frac{\partial \psi^{j+\frac{1}{2}}}{\partial t} + u \frac{\partial \psi^{j+\frac{1}{2}}}{\partial x} = \left( |u| \frac{\delta x}{2} + u^2 \frac{\delta t}{4} \right) \frac{\partial^2 \psi^{j+\frac{1}{2}}}{\partial x^2}. \quad (3.22)$$

Таким образом, доказано, что сеточное уравнение (3.11) является конечно-разностным аналогом уравнения (3.12). Следовательно, решение уравнения (3.1) в форме (3.7) является диссипативным, поскольку приводит к появлению «счетной вязкости».

Из соотношения (3.13) видно, что величина коэффициента  $\mu$  может быть очень большой. В таких случаях, очевидно, происходит существенное сглаживание прогностических полей метеорологического элемента  $\psi$ . Если эффект «счетной вязкости» не желателен, то на интервале времени  $t_{i+\frac{1}{2}} \leq t \leq t_{i+1}$  коррекция полученного решения производится с помощью какой-либо недиссипативной схемы. Такой схемой является, например, явная трехточечная по переменной  $t$  схема симметричных разностей (схема Кранка—Николсона)

$$\psi_i^{j+1} = \psi_i^j - a_i \left( \psi_{i+1}^{j+\frac{1}{2}} - \psi_{i-1}^{j+\frac{1}{2}} \right), \quad (3.22)$$

обеспечивающая второй порядок точности аппроксимации производных по  $\delta t$  и  $\delta x$ . Это означает, что в дифференциальном уравнении

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (3.23)$$

коэффициент «счетной вязкости»  $\mu = 0$ , а члены, имеющие порядок  $\delta t^2$ ,  $\delta x^2$  и  $\delta t \cdot \delta x$ , отброшены. В этом нетрудно убе-

даться, если разложить решение уравнения (3.1) в форме (3.22) в ряд Тейлора в окрестности точки  $x = x_i$ ,  $t = t_j$  и отбросить слагаемые третьего и более высоких порядков.

Заметим, что комбинация решений (3.11) и (3.22) обеспечивает второй порядок точности аппроксимации производных по времени и пространственной переменной и является счетно устойчивой.

Таким образом, используя сеточную аппроксимацию дифференциальных уравнений в форме (3.11), можно получить сглаженные прогностические поля, несмотря на отсутствие в исходных уравнениях слагаемых, учитывающих горизонтальную диффузию. При этом в решении уравнений можно найти члены, которые математически учитывают вязкость.

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Предисловие . . . . .	3
I. Прогноз влажности и областей конденсации . . . . .	5
II. Параметризация термической конвекции . . . . .	12
III. Параметризация процессов горизонтального макротурбулентного обмена . . . . .	24

*РАИСА ПЕТРОВНА РЕПИНСКАЯ*

Параметризация процессов подсеточного масштаба

Конспект лекций

Редактор *З. Б. Ваксенбург*

Корректоры: *Т. Л. Кувшинская, Л. В. Ломакина*

---

М-13164. Сдано в набор 15/1 1979 г. Подп. к печ. 27/VIII 1979 г. Зак. 183.  
Формат бумаги 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага тип. № 2. Тираж 700.  
Объем 2 п. л. Уч.-изд. л. 2. Цена 10 коп.  
Темплан 1979 г., поз. 1280.

---

Издание ЛПИ им. М. И. Калинина. 195251, Ленинград, Политехническая, 29.  
Типография 6 ВОК ВМФ.