

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Р. П. РЕПИНСКАЯ

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ В КООРДИНАТНОЙ СИСТЕМЕ

Конспект лекций

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени М. И. КАЛИНИНА

ЛЕНИНГРАД
1982

1

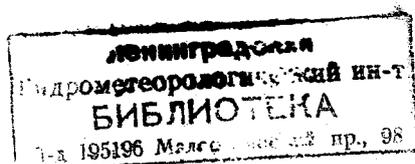
УДК 551.509.333.

*Одобрено Ученым советом
Ленинградского гидрометеорологического института*

В данной работе излагаются вопросы, связанные с преобразованием уравнений динамики атмосферы к переменным с различной вертикальной координатой, используемым в численных методах краткосрочного прогноза погоды. Рассматривается учет масштабного множителя картографической проекции в уравнениях.

Материал излагается в соответствии с действующей программой курса «Численные методы прогноза погоды» на основе лекций, читаемых для студентов-метеорологов.

Ответственный редактор профессор *Б. Д. Панин*



© Ленинградский гидрометеорологический институт (ЛГМИ), 1982 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Уравнения гидротермодинамики атмосферы являются теоретической основой численных методов прогноза погоды и представляют собой математическую форму редутивных законов, следующих из трех фундаментальных законов физики — законов сохранения количества движения, массы и энергии. Применительно к атмосфере, стилизуемой в виде сплошной среды, эти основные законы выражаются уравнениями Ньютона, уравнением неразрывности и термодинамическим уравнением энергии. При исследовании динамических процессов в реальной атмосфере привлекаются, кроме того, уравнение состояния газа, уравнение переноса влаги, законы излучения и поглощения, уравнение переноса радиации, а также уравнения теплопроводности и турбулентной диффузии. Названные уравнения позволяют построить замкнутую систему относительно таких переменных, как давление, плотность, температура, влажность воздуха и вектор скорости ветра.

Для численного интегрирования уравнений математической модели атмосферы в зависимости от масштаба изучаемых движений и в целях более наглядной интерпретации результатов решения оказывается удобным введение различных систем координат. Выбор такой системы координат, в которой уравнения имеют наиболее простой вид, является важным этапом решения задачи. Однако существенную роль играют также возможность постановки краевых условий по вертикали и удобство численной реализации системы уравнений.

Обычно пользуются системами координат, неизменно связанными с вращающейся Землей, поэтому в качестве скоростей движения воздуха в уравнениях динамики фигурируют скорости, взятые по отношению к наблюдателю, находящемуся на Земле.

Ниже рассматриваются уравнения гидротермодинамики идеальной атмосферы в различных системах координат, применяемых в практике краткосрочного численного прогнозирования как у нас в стране, так и за рубежом. Проводятся достаточно подробные выкладки, связанные с переходом от уравнений в локальной декартовой системе координат к уравнениям в системе с произвольной вертикальной координатой. На основании полученных обобщенных формул выводятся уравнения в изобарической, σ -системе и изэнтропической системах координат. Приводятся краткие

сведения о сферической системе координат, используемой при прогнозе для больших территорий и решении задач общей циркуляции атмосферы. Рассматриваются также вопросы учета в уравнениях масштабных множителей картографических проекций.

1. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

1.1. Локальная декартова система координат

Приведем без вывода основные уравнения гидротермодинамики атмосферы, описывающие процессы в основной ее толще.

Уравнение движения представляет собой математическую запись основного закона движения — второго начала Ньютона: «Произведение массы на ускорение равно равнодействующей всех действующих сил». В векторной форме это уравнение применительно к атмосфере, интерпретируемой как идеальная жидкость, записывается в виде

$$\frac{d\mathbf{C}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{C} + \mathbf{g}, \quad (1.1)$$

где \mathbf{C} — вектор скорости движения воздушной частицы относительно вращающейся Земли; $\frac{d\mathbf{C}}{dt}$ — вектор ускорения; $\nabla p = \text{grad } p$ — вектор поверхностных сил давления; ρ — плотность воздуха; $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения Земли, направленный параллельно оси Земли к северному полюсу; $K = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{C}$ — отклоняющая сила вращения Земли (инерционная сила); \mathbf{g} — сила тяжести (массовая сила), представляющая собой равнодействующую гравитационной силы притяжения Земли и центробежной силы.

Для целей численного расчета векторное уравнение (1.1) должно быть разложено на три скалярных уравнения, соответствующих составляющим по трем различным координатным направлениям. Поскольку уравнение (1.1) выполняется для любых координатных направлений, то можно выбрать их произвольно.

Заметим, что, переходя от векторного уравнения движения к скалярным величинам, необходимо учитывать различие свойств движения воздуха в горизонтальных и вертикальном направлениях, обусловленное тем, что значение отклоняющей силы во много раз меньше силы тяжести. Указанные особенности учитываются при использовании сферической системы координат с полюсами в полюсах Земли.

Во многих случаях при решении задач прикладного характера (например, при краткосрочном прогнозе погоды, анализе метеорологических процессов над сравнительно небольшими обла-

стями) удобнее пользоваться менее сложной, чем сферическая, прямоугольной локальной декартовой системой координат, неподвижно связанной с поверхностью Земли.

Произведем ориентацию названной координатной системы. Начало координат поместим в некоторую точку на земной поверхности, а ось z направим в зенит. Тогда перпендикулярная к местной вертикали плоскость будет касательной к поверхности земного шара. В этой плоскости и выбираются оси x и y , направление которых в принципе может быть произвольным. Понятно, что вблизи указанной поверхности составляющая силы тяжести, параллельная поверхности, исчезает, т. е. проекции g_x и g_y можно положить равными нулю, а нормальная к поверхности составляющая $g_z = -g$, где $g = 9,80665 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ — абсолютная величина g . Проекции силы Кориолиса на оси x, y, z , получаемые по правилам векторного анализа, равны соответственно:

$$K_x = 2(\omega_y w - \omega_z v), \quad K_y = 2(\omega_z u - \omega_x w), \quad K_z = 2(\omega_x v - \omega_y u),$$

где $u = c_x, v = c_y, w = c_z$ — проекции вектора скорости C .

Учитывая сказанное, запишем проекции векторного уравнения (1.1) на оси прямоугольной декартовой системы координат.

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega_z v - 2\omega_y w, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + 2\omega_x w - 2\omega_z u, \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2\omega_y u - 2\omega_x v - g. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ — проекции градиента давления.

Подчеркнем, что поскольку рассматриваемая координатная система является локальной, то, разумеется, при перемещении начала координат из одной точки на земной поверхности в другую направления ортов не остаются постоянными. В противном случае пренебрежение слагаемыми g_x и g_y совершенно недопустимо.

Для удобства применения декартовой системы координат в метеорологических задачах направим ось x по касательной к широтному кругу на восток, а ось y — по касательной к меридиану на север. Такую систему координат называют стандартной декартовой системой координат (ДСК). В этом случае проекции вектора ω на горизонтальные оси равны: $\omega_x = 0, \omega_y = \omega \cos \varphi$; вертикальная проекция $\omega_z = \omega \sin \varphi$, где $\omega = 7,292116 \cdot 10^{-5} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$ —

абсолютная величина угловой скорости вращения Земли, φ — географическая широта места. Очевидно, что стандартная ДСК также является ортогональной, но криволинейной, квазидекртовой. Поэтому вид уравнений, записанных в этой координатной системе, должен отличаться от их вида в прямоугольной ДСК. Действительно, проекции уравнения (1.1) на оси стандартной системы координат имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega v \sin \varphi - 2\omega w \cos \varphi - \frac{2u\omega}{a_0} - \frac{2uv \operatorname{tg} \varphi}{a_0}, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega u \sin \varphi - \frac{u^2 \operatorname{tg} \varphi}{a_0} + \frac{2v\omega}{a_0}, \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2\omega u \cos \varphi - g + \frac{u^2 + v^2}{a_0}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где a_0 — величина, очень близкая к среднему радиусу Земли.

Уравнения (1.3) являются приближенными. Совпадение их с точными уравнениями будет тем больше, чем меньше площадь прогностической области или, точнее, чем меньше разница между приращением дуги круга и длины соответствующего прямолинейного отрезка вдоль осей координат. Неточность уравнений (1.3) возрастает с приближением к полюсу. Соответствующую погрешность можно оценить, например, сопоставляя величины смешанных производных $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$ и $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$, которые совпадают лишь с точностью до членов типа $\frac{\operatorname{ctg} \theta}{a_0} \frac{\partial u}{\partial x}$, где θ — дополнение до широты. Заметим также, что использование стандартной ДСК затруднительно еще потому, что вычисление производных по переменной x с помощью конечных разностей надо проводить так, чтобы интервалы δx располагались на каждом круге широты по своему отрезку касательной.

Проведем оценку порядков слагаемых в уравнениях (1.3) применительно к движениям синоптического масштаба в умеренных широтах с целью сравнения их с уравнениями (1.2).

Вспоминая, что $a_0 = 6371 \cdot 10^3$ м, характерная горизонтальная скорость ветра для движений синоптического масштаба находится в пределах от 10 до 100 м·с⁻¹, характерная величина вертикальной скорости воздуха, связанной с крупномасштабными возмущениями, лежит в пределах $10^{-2} \div 10^{-1}$ м·с⁻¹, временной масштаб

погодообразующих процессов равен суткам, нетрудно найти второе приближение системы уравнений (1.3)

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + lv, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - lu, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g.\end{aligned}\tag{1.3'}$$

Здесь введено обозначение для параметра Кориолиса $l=2\omega \sin \varphi$.

Следует отметить, что слагаемые, опущенные в уравнениях (1.3'), как раз и возникают из-за пространственного изменения направлений координатных осей.

Выполняя аналогичные оценки порядков слагаемых в уравнениях (1.2), мы получим идентичную (1.3') систему уравнений. Однако приближения более высокого порядка для указанных исходных систем уравнений при больших горизонтальных скоростях могут и не совпадать.

Таким образом, если размеры прогностической области малы по сравнению с радиусом Земли, а ее границы не слишком близки к полюсам, то, пренебрегая в уравнениях (1.3) некоторыми относительно малыми поправочными слагаемыми, можно с достаточной точностью представить их в форме (1.2).

Запишем теперь остальные уравнения термодинамики атмосферы в стандартной ДСК.

Уравнение неразрывности, выражающее закон сохранения массы, в векторной форме имеет вид

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{C}) = 0,\tag{1.4}$$

где

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{C}) = u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)\tag{1.5}$$

— дивергенция количества движения единицы объема воздуха.

Учитывая выражение (1.5), перепишем уравнение (1.4) в форме

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0.\tag{1.6}$$

Здесь выражение в круглых скобках представляет собой дивергенцию вектора скорости и описывает лишь деформацию, связанную с изменениями объема частицы. Уравнение состояния идеаль-

ного газа (уравнение Клайперона—Менделеева) является эмпирическим и хорошо удовлетворяется, если среда не очень разрежена.

$$p = \rho RT. \quad (1.7)$$

Оно описывает не зависящую от координат и времени связь между давлением, плотностью и температурой T и выражает тот факт, что атмосферный воздух можно считать идеальным газом, применительно к реальному влажному воздуху

$$p = \rho RT (1 + 1,605 q),$$

где $R = 287,05$ Дж·кг⁻¹·к⁻¹ — удельная газовая постоянная сухого воздуха; q — удельная влажность, равная отношению массы водяного пара к массе влажного воздуха. Однако величина 0,605 q мала и ею обычно пренебрегают, применяя уравнение (1.7) и к влажному воздуху.

Уравнение притока тепла

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{\varepsilon}{c_p \rho}, \quad (1.8)$$

называемое также уравнением первого начала термодинамики, представляет собой математическую запись закона сохранения энергии применительно к тепловой энергии движущейся частицы воздуха, имеющей единичную массу. Согласно этому уравнению, изменения теплосодержания некоторого объема воздуха (изменения температуры) происходят под действием обмена тепловой энергией, между этим объемом и окружающим воздухом и перехода тепловой энергии в другие виды энергии и обратно. В уравнении (1.7) использованы общепринятые обозначения: $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ —

отношение теплоемкостей воздуха при постоянных давлениях ($c_p = 1006,438$ Дж·кг⁻¹·к⁻¹) и объеме ($c_v = 717,747$ Дж·кг⁻¹·к⁻¹);

ε и $\frac{\varepsilon}{\rho}$ — притоки тепла соответственно к единице объема и к единице

массы движущегося воздуха за единицу времени. В реальной атмосфере действуют лучистый ($\varepsilon_{\text{л}}$), фазовый ($\varepsilon_{\text{ф}}$) и турбулентный ($\varepsilon_{\text{т}}$) притоки тепла, а в идеальной атмосфере $\varepsilon = 0$.

В реальной атмосфере почти всегда имеют место различные примеси, важнейшей из которых является водяной пар, играющий особую роль в ее энергетическом балансе. Действительно, в среднем масса атмосферной влаги равна $1,24 \cdot 10^{16}$ кг, ее обновление происходит за $9,5 \div 11$ суток, т. е. $32 \div 39$ раз в год. Причем затраты тепла на испарение в течение года составляют около 30% солнечного тепла, поглощенного Землей, а равный затратам приток тепла при конденсации водяного пара примерно в 15 раз

превышает скорость генерации кинетической энергии. При отсутствии турбулентности изменение теплосодержания водяного пара в движущихся объемах воздуха происходит за счет конденсации (сублимации) и испарения. Этот процесс описывается с помощью уравнения переноса удельной влажности

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} = -r, \quad (1.9)$$

где r — количество воды, образовавшейся в единице объема воздуха за единицу времени, т. е. скорость конденсации или мощность стока водяного пара.

Если в третьем уравнении системы (1.3') сохранить индивидуальное ускорение частицы $\frac{dw}{dt}$, а в уравнениях (1.8) и (1.9) воспользоваться адиабатическим приближением, то уравнения (1.3'), (1.6), (1.7), (1.8) и (1.9) образуют замкнутую относительно искомым функций u, v, w, p, ρ, T и q систему в том случае, когда атмосфера, рассматривается как идеальная жидкость. При этом уравнения (1.3'), (1.6), (1.8) и (1.9) являются прогностическими, а уравнения состояния (1.7) диагностическим. Понятно, что введение новых искомым величин потребует включения в построенную систему соответствующих уравнений.

Обратим внимание на то, что приведенные уравнения являются нефильТРованными или полными, т. е. описывают атмосферные движения всех масштабов, в том числе не влияющие на погодообразующие процессы. К последним, в частности, относятся звуковые (акустические) волны. Их длина невелика — от нескольких сантиметров до сотен метров, скорость перемещения в атмосфере — около 300 м с^{-1} , амплитуда в поле давления составляет доли гектопаскаля. Разумеется, из решений уравнений целесообразно отфильтровать звуковые волны, являющиеся «метеорологическим шумом». Это достигается включением в систему прогностических уравнений уравнения статики

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (1.10)$$

Если проинтегрировать это уравнение по всей толще атмосферы, то окажется, что давление численно равно весу столба воздуха единичного поперечного сечения, который простирается от подстилающей поверхности до верхней границы атмосферы. Реальные атмосферные движения не удовлетворяют в точности уравнению статики. Однако, если в некоторый момент времени в каком-либо локальном районе возникло несоответствие соотношению (1.10), то происходит быстрая перестройка поля давления таким образом, что через короткое время (порядка минуты) оно вновь начинает удовлетворять уравнению статики. В этом заключается

гипотеза квазистатичности крупномасштабных атмосферных движений.

Отметим, что квазистатическое приближение одновременно исключает и свободную конвекцию — мезомасштабные движения, вызванные неоднородным нагреванием земной поверхности и обусловленные так называемой архимедовой силой, которая представляет собой разность сил тяжести, действующих на расположенные рядом теплую и холодную частицы воздуха. Для прогноза крупномасштабных процессов, ответственных за изменения погоды над сравнительно большими районами (с горизонтальными размерами порядка тысячи километров), квазистатическое приближение необходимо.

1.2. Полные уравнения динамики атмосферы с обобщенной вертикальной координатой

Полученная квазистатическая система полных уравнений в стандартной декартовой системе координат имеет следующие недостатки с точки зрения размещения расчетной сетки:

1) область интегрирования является неограниченной по отношению к вертикальной оси z , так как верхней границы для конечного z не существует. Иными словами, ДСК является полубесконечной по вертикальной координате. Следовательно, при интегрировании уравнений мы должны ставить граничные условия на бесконечности;

2) реальная подстилающая поверхность не совпадает с уровнем вертикальной координаты $z = \text{const}$. Это требует неравномерного размещения точек сетки вблизи нижней кинематической границы.

Чтобы устранить указанные недостатки, введем вместо z более удобную при численных расчетах, но пока неопределенную вертикальную координату η , обладающую следующими свойствами:

1) координата η однозначно связана с z и наоборот, т. е. η монотонно возрастает или убывает в зависимости от z ;

2) координата η является одной из зависимых переменных или функций.

Осуществляется такой переход от декартовой системы x, y, z, t к системе x_1, y_1, η, t_1 (индекс 1 является указателем η — системы координат), при котором z и η меняются местами как независимая и зависимая переменные. Ниже при рассмотрении конкретных систем координат каждый раз особо будет отмечаться направление соответствующих единичных векторов.

Заметим, что переход от z к другой вертикальной координате оправдан лишь для квазистатического случая.

Выведем формулы, с помощью которых можно будет проводить преобразования одной системы координат в другую.

Пусть f — произвольная зависимая переменная (метеорологический элемент). Учитывая, что в декартовой системе отсчета

$\eta = \eta(x, y, z, t)$, а в новой системе отсчета $z = z_1(x_1, y_1, \eta, t_1)$, рассмотрим численное тождество

$$f(x, y, z, t) = f_1(x_1, y_1, \eta, t_1)$$

или подробнее

$$f(x, y, z, t) = f_1[x_1(x), y_1(y), \eta(x, y, z, t), t_1(t)]. \quad (2.1)$$

Полагая, что моменты времени t_1 и t совпадают, т. е. $\frac{dt_1}{dt} = 1$, продифференцируем тождество (2.1) по переменным декартовой системы координат x, y, t . При этом учтем, что в общем случае направления ортов осей x и x_1 и y и y_1 не совпадают. Иными словами, несмотря на то, что в различных системах координат рассматривается значение элемента в одной и той же точке атмосферы (т. е. $f_1 = f$), $\frac{dx_1}{dx} \neq 1$ и $\frac{dy_1}{dy} \neq 1$.

Итак,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}, \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dy} + \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}. \end{aligned}$$

Обозначив любую из переменных x, y через s , заменим вторые два соотношения одним, эквивалентным им соотношением

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f_1}{\partial s_1} \frac{ds_1}{ds} + \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial s}. \quad (2.2)$$

Аналогично продифференцируем тождество (2.1) по переменной z :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z}. \quad (2.3)$$

Заметим, что в новой системе координат z переходит в число искомых функций и может быть найдена из известного соотношения

$$\Phi = gz + \text{const.}$$

Применим формулы (2.2) и (2.3) к геопотенциалу Φ . При этом будем полагать, что ускорение силы тяжести не зависит от горизонтальных координат, так как учет этой зависимости внес бы

в результат несущественные для практики поправки. Тогда получим соответственно:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial s_1} \frac{ds_1}{ds} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial s},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = g = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z}.$$

Кроме того, учтем, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}.$$

Из этих формул следует:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t_1} \cdot 1 / \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial s} = - \frac{\partial \Phi_1}{\partial s_1} \cdot \frac{ds_1}{ds} \cdot 1 / \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}, \quad s=x, y, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = g / \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}, \quad (2.6)$$

Подставим соотношение (2.5) в формулу (2.2), а соотношение (2.6) в формулу (2.3):

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f_1}{\partial s_1} \frac{ds_1}{ds} - \frac{1}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial s_1} \frac{ds_1}{ds} \frac{\partial f_1}{\partial \eta}, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{g}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}} \frac{\partial f_1}{\partial \eta}. \quad (2.8)$$

Получим выражение для индивидуальной производной:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} = & \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f_1}{\partial t_1} + u_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dx} + \\ & + v_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dy} + \frac{1}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}} \left(gw_1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t_1} - u_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dx} - \right. \\ & \left. - v_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dy} \right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \eta} = \frac{df_1}{dt_1}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где величина

$$\dot{\eta} = \frac{1}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}} \left(g\omega_1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t_1} - u_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dx} - v_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dy} \right) \quad (2.10)$$

представляет собой обобщенный аналог вертикальной скорости в новой η СК. Очевидно, что

$$\dot{\eta} = \frac{d\eta}{dt_1} \quad (2.11)$$

Преобразуем теперь уравнение динамики атмосферы из ДСК в η СК.

Уравнение состояния в силу тождества (2.1) в произвольной системе координат не отличается от его выражения в ДСК:

$$p_1 = \rho_1 RT_1. \quad (2.12)$$

Уравнение статики (1.10) согласно формулам (2.3) и (2.6) примет вид

$$\frac{\partial p_1}{\partial \eta} = -\rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}. \quad (2.13)$$

В уравнениях движения (1.3') производные $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$ и индивидуальные производные $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ преобразуем соответственно с помощью формул (2.7) и (2.9). В результате получим:

$$\frac{du_1}{dt_1} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dx} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dx} + lv_1, \quad (2.14)$$

$$\frac{dv_1}{dt_1} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dy} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dy} - lu_1. \quad (2.15)$$

Обратим внимание на то, что сила барического градиента выразилась в новой системе координат суммой двух членов.

В уравнении неразрывности (1.6) рассмотрим подробно преобразование слагаемого $\frac{\partial w}{\partial z}$. Поскольку $w = \frac{dz}{dt}$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{dz}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{dz_1}{dt_1} \right) \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{d\Phi_1}{dt_1} \right) \cdot \frac{1}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}} = \frac{1}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}} \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta \partial t_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dx} + u_1 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dx} \right) + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dy} + \right. \end{aligned}$$

$$+ v_1 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dy_1}{dy} \right) + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} + \dot{\eta} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \eta^2} \Big] = \frac{1}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}} \left[\frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dy} \right) \right]. \quad (2.16)$$

Подставляя в уравнение неразрывности (1.6) значение ρ из тождества (2.1), а производные $\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial w}{\partial z}$ на основании соотношений (2.9), (2.2) и (2.16), получим:

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dt_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dy} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} + \frac{1}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}} \frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (2.17)$$

Более компактно уравнение (2.17) запишется, если прологарифмировать уравнение статики (2.13), взять индивидуальную производную по времени и подставить результат

$$\frac{1}{\frac{\partial \rho_1}{\partial \eta}} \frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dt_1} + \frac{1}{\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}} \frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right)$$

в выражение (2.17). Тогда получим окончательный вид уравнения неразрывности:

$$\frac{1}{\frac{\partial \rho_1}{\partial \eta}} \frac{d}{dt_1} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dy} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta} = 0. \quad (2.18)$$

Уравнение притока тепла (1.8) при $\epsilon=0$ формально запишется в виде

$$\frac{dT_1}{dt_1} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \cdot \frac{T_1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dt_1} = \frac{\epsilon_1}{c_p \rho_1} = 0. \quad (2.19)$$

Таким образом, получена квазистатическая система полных уравнений термодинамики идеальной атмосферы в η СК.

Пока вертикальная координата η не определена, система шести уравнений (2.12)–(2.15), (2.18) и (2.19) незамкнута, так как содержит 7 искомых функций: u_1 , v_1 , $\dot{\eta}$, Φ_1 , T_1 , ρ_1 , ρ_1 . Задавая некоторым образом координату η , легко получить замкнутую систему уравнений динамики атмосферы в выбранной системе координат. Так, нетрудно убедиться в том, что если положить $\eta=z$, то полученная система уравнений в произвольной системе координат примет вид исходной системы в ДСК.

Ниже рассматриваются системы координат, нашедшие применение в гидродинамическом прогнозировании.

1.3. Изобарическая система координат

В численных прогнозах широко используются решения уравнений гидротермодинамики атмосферы, записанных в так называемой изобарической системе координат (ИСК), в которой роль вертикальной координаты играет давление p , либо давление, отнесенное к стандартному давлению $P_0 = 1000$ гПа:

$$\zeta = \frac{p}{P_0} \quad (3.1)$$

Координатная ось ζ является нормалью к изобарической поверхности и направлена в сторону возрастания давления, т. е. сверху вниз. Оси x_1, y_1 располагаются не в горизонтальной плоскости $z = \text{const}$, а в плоскости изобарической поверхности $p = \text{const}$. Точнее, оси x_1, y_1 направлены по касательной к изобарической поверхности соответственно с запада на восток и с юга на север. Таким образом, x_1, y_1 — типичные эйлеровы координаты, характеризующие положение рассматриваемой точки на данной изобарической поверхности, а вертикальная координата ζ — лагранжева координата, поэтому ИСК можно назвать квазилагранжевой. Отметим также, что ИСК не ортогональна, но очень близка к ортогональной, так как угол между направлениями вертикального градиента давления и местной вертикали составляет обычно несколько десятитысячных долей радиана: $5 \cdot (10^{-5} \div 10^{-4})$ рад.

Получим уравнения динамики атмосферы в ИСК. Примем, что обобщенная вертикальная координата $\eta = \zeta$, и воспользуемся уравнениями в η СК, полученными выше. Выполняя преобразования, учтем, что в силу малого наклона изобарической поверхности относительно горизонтальной плоскости с большой точностью выполняются равенства $x = x_\zeta, y = y_\zeta$ и, следовательно, $\frac{dx_\zeta}{dx} = \frac{dy_\zeta}{dy} = 1$. Тогда, опуская всюду индекс 1, найдем окончательный вид уравнений в ИСК.

Уравнение состояния (2.12) принимает вид

$$P_0 \zeta = \rho RT \quad (3.2)$$

и связывает лишь две функции: ρ и T .

Уравнение статики (2.13) после замены ρ из (3.2) запишется следующим образом:

$$T = - \frac{\zeta}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \quad (3.3)$$

В уравнениях движения (2.14) и (2.15) при $p = \text{const}$ производные $\frac{\partial p}{\partial x}$ и $\frac{\partial p}{\partial y}$ равны нулю. Следовательно,

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + tv, \quad (3.4)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - tu. \quad (3.5)$$

Здесь индивидуальная производная по времени определяется формулой

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \dot{\omega} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad (3.6)$$

где

$$\dot{\omega} = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{P_0} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}} \left(g\omega - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - u \frac{\partial \Phi}{\partial x} - v \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \quad (3.7)$$

— аналог вертикальной скорости в ИСК или изобарическая вертикальная скорость. Размерность $\dot{\omega}$ обратна размерности времени, т. е. с^{-1} . Однако это очень маленькая величина, поэтому обычно используются сутки $^{-1}$. Часто при вычислении вертикальных скоростей переходят от ζ к давлению p и выражают $\dot{\omega} P_0$ в гПа/12 ч. Можно показать, что в формуле (3.7) слагаемое $g\omega$ значительно больше трех других членов, поэтому приближенно

$$\dot{\omega} = \frac{g\omega}{\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}}. \quad (3.8)$$

Поскольку величина $\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} < 0$, то, очевидно, знаки $\dot{\omega}$ и ω противоположны: при нисходящих вертикальных токах $\omega < 0$, $\dot{\omega} > 0$, а при восходящих — наоборот.

С учетом того, что $\frac{\partial p}{\partial \eta} = P_0 \frac{\partial p}{\partial \zeta} = \text{const}$, уравнение неразрывности запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \zeta} = 0. \quad (3.9)$$

В уравнении притока тепла (2.19), используя выражение (3.6), раскроем сначала индивидуальную производную от температуры

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \dot{\omega} \frac{\partial T}{\partial \zeta} - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{\varepsilon}{c_p \rho},$$

а затем объединим два последних слагаемых слева. Учитывая, что

$$-\frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} = -\frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{T}{\zeta} \frac{d\zeta}{dt} = -\frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{T}{\zeta} \dot{\omega};$$

$$\dot{\omega} \frac{\partial T}{\partial \zeta} = \dot{\omega} \frac{\partial T}{\partial \zeta} \frac{1}{\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}} = \dot{\omega} \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}}{g} = -\dot{\omega} \frac{\partial T}{\partial z} \frac{RT}{g\zeta};$$

$$\gamma_a = \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{g}{R}, \quad \gamma = -\frac{\partial T}{\partial z}$$

— сухоадиабатический и реальный вертикальные градиенты температуры, получим уравнение притока тепла в ИСК:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{RT}{g\zeta} \dot{\omega} (\gamma_a - \gamma) = \frac{\varepsilon}{c_p \rho}. \quad (3.10)$$

В случае использования в качестве независимой переменной потенциальной температуры Θ уравнение притока тепла запишется в виде

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \dot{\omega} \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = \frac{\Theta}{T} \frac{\varepsilon}{c_p \rho}. \quad (3.10')$$

Нередко в качестве вертикальной координаты используется давление p . Связь между производными по p и по ζ следующая:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial p} = \frac{1}{P_0} \frac{\partial f}{\partial \zeta};$$

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} = P_0 \frac{\partial f}{\partial p}. \quad (3.11)$$

С помощью этих соотношений легко перейти от уравнений термодинамики атмосферы в ИСК к уравнениям в P -системе координат.

Опираясь на формулу (3.7), рассмотрим постановку граничных условий по вертикали. На верхней границе атмосферы $p \rightarrow 0$ и, следовательно,

$$\dot{\omega}|_{\zeta=0} = 0. \quad (3.12)$$

Это условие означает, что атмосфера сохраняет свою массу. Вместе с тем оно допускает возможность поднятия и опускания ее верхней границы.

Перейдем к определению $\dot{\omega}$ при $\zeta=1$. Если положить, что подстилающая поверхность твердая, плоская и не пористая, т. е. отсутствует поток массы в почву и из нее, то в этом случае нормальная к твердой стенке компонента скорости в ДСК обращается в нуль. Пренебрежем также отличием наземного давления от стандартного, т. е. будем полагать, что уровни $z=0$ и $\zeta=1$ совпадают. Если, кроме того, в пограничном слое атмосферы положить ветер геострофическим, то из формулы (3.7) следует, что

$$\dot{\omega} \Big|_{\zeta=1} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} / \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}.$$

Подставляя в это соотношение $\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}$ из уравнения статики, окончательно получим:

$$\dot{\omega} \Big|_{\zeta=1} = \frac{1}{RT} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (3.13)$$

где $c = \sqrt{RT}$ — скорость распространения звука при изотермических условиях. В силу того, что характерное значение $\dot{\omega}$ в пограничном слое атмосферы составляет 10^{-2} — 10^{-1} 1/сутки и на 1—2 порядка меньше, чем в средней тропосфере, можно приближенно считать, что

$$\dot{\omega} \Big|_{\zeta=1} = 0. \quad (3.14)$$

Поскольку величина $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ ограничена, то запись нижнего граничного условия в форме (3.14) означает, что атмосфера стилизуется в виде несжимаемой среды, в которой невозможны упругие колебания, т. е. $c \rightarrow \infty$. С точки зрения физики, условие (3.13) является более корректным, так как косвенно учитывает сжимаемость атмосферных движений.

Остановимся теперь на основных преимуществах системы координат x_c, y_c, ζ, t (ИСК) по сравнению x, y, z, t (ДСК).

1. Уравнения динамики и уравнение неразрывности не содержат плотности, сильно меняющейся с высотой. Поэтому коэффициент пропорциональности между градиентом абсолютного геопотенциала и геострофическим ветром не зависит от высоты.

2. Большинство уравнений в ИСК имеет более простой вид, чем в ДСК, что облегчает их использование в вычислительных целях. В частности, уравнение неразрывности для общего случая движения (3.9) аналогично по форме уравнению неразрывности

в ДСК для частного случая несжимаемого движения ($\rho = \text{const}$), а уравнение притока тепла (3.10) имеет только одну производную по времени.

3. С целью упрощения решения полученной системы уравнений легче выполнить исключение некоторых искомым функций и свести адиабатическую систему шести уравнений (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.9) и (3.10) с шестью неизвестными ($u, v, \dot{\omega}, \Phi, T, \rho$) к замкнутой системе меньшего числа уравнений. Так, исключив из рассмотрения уравнение состояния, мы сразу получим замкнутую систему пяти уравнений с пятью искомыми функциями ($u, v, \dot{\omega}, \Phi, T$). Из этой системы нетрудно исключить температуры T путем подстановки уравнения статики (3.3) в уравнение притока тепла (3.10). Можно исключить также и изобарическую вертикальную скорость.

4. Безразмерная координата $0 \leq \zeta \leq 1$ удобна при постановке краевых условий по вертикали и численном интегрировании уравнений.

Указанные преимущества ИСК обеспечили ее широкое использование в практике численного прогнозирования. Необходимость перехода к таким координатам следует также из того, что в Службе погоды высотные карты погоды составляются не в виде карт давления на стандартных высотах $z = \text{const}$, а в виде карт барической топографии $p = \text{const}$.

1.4. σ -система координат

Рассмотренные системы координат x, y, z, t и $x_\zeta, y_\zeta, \zeta, t$ обладают тем принципиальным недостатком, что поверхность земли не совпадает ни с уровнем $z = \text{const}$, ни с изобарической поверхностью $\zeta = 1$. Это обстоятельство может вызвать затруднения при описании атмосферных движений непосредственно у подстилающей поверхности. В этом отношении определенным преимуществом обладает так называемая σ -система координат (σ СК), введенная впервые Н. А. Филипсом (США) в 1957 г. Роль вертикальной координаты здесь играет отношение давления p в рассматриваемой точке к давлению p_* на уровне подстилающей поверхности (земли или океана), являющемуся функцией горизонтальных координат и времени:

$$p_* = p_*(x, y, t). \quad (4.1)$$

Таким образом,

$$\sigma = \frac{p}{p_*}. \quad (4.2)$$

Диапазон изменений σ заключен между нулем на верхней границе атмосферы, где $z \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$, и единицей на орографическом

уровне, т. е. на нижней границе атмосферы. Таким образом, в σ СК земная поверхность совпадает с координатной поверхностью $\sigma=1$.

Опираясь на вид уравнений в обобщенной координатной системе x_1, y_1, η, t , отождествляя σ с η и полагая, что $x_\sigma = x_\zeta = x$, $y_\sigma = y_\zeta = y$, $t_\sigma = t_\zeta = t$, выведем уравнения в σ СК.

Учитывая формулу (4.2), запишем уравнение состояния в форме

$$\sigma p_* = \rho RT. \quad (4.3)$$

Уравнение статики примет вид

$$T = - \frac{\sigma}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}. \quad (4.4)$$

Исходя из уравнений движения (2.14) и (2.15) и учитывая соотношение (4.2) и то, что согласно уравнению состояния (4.3),

$$\rho = \frac{\sigma P_0}{RT},$$

получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = - \frac{RT}{p_*} \frac{\partial p_*}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} = - \frac{RT}{p_*} \frac{\partial p_*}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - lv. \quad (4.6)$$

Здесь

$$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt} \quad (4.7)$$

— аналог вертикальной скорости в σ СК. С аналогом вертикальной скорости в ИСК $\dot{\omega}$ он связан следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{P_0} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{P_0} \frac{d}{dt} (\sigma p_*) = \frac{p_*}{P_0} \frac{d\sigma}{dt} + \\ &+ \frac{\sigma}{P_0} \frac{dp_*}{dt} = \dot{\sigma} \frac{p_*}{P_0} + \frac{\sigma}{P_0} \frac{dp_*}{dt}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Отсюда вытекают граничные условия для $\dot{\sigma}$. Поскольку на верхней границе атмосферы, где $p=0$, выполняется условие $\dot{\omega}=0$, то

$$\dot{\sigma} \Big|_{\sigma=0} = \frac{d\sigma}{dt} \Big|_{\sigma=0} = 0. \quad (4.9)$$

Если исходить из условия отсутствия, потока массы через подстилающую поверхность, то очевидно, при любой функции рельефа $h = h(x, y)$

$$\dot{\sigma} \Big|_{\sigma=1} = 0. \quad (4.10)$$

Уравнение притока тепла в σ СК записывается следующим образом:

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T}{\sigma p_*} \frac{dp_* \sigma}{dt} = \frac{\varepsilon}{c_p \rho} = 0$$

или

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T}{p_*} \frac{dp_*}{dt} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T}{\sigma} \dot{\sigma} = \frac{\varepsilon}{c_p \rho} = 0. \quad (4.11)$$

Замечая, что

$$\Theta = T \left(\frac{1000}{p} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}, \quad (4.12)$$

найдем

$$T = \Theta \left(\frac{p}{1000} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} = \Theta \left(\frac{p_* \sigma}{1000} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}. \quad (4.12')$$

С учетом соотношения (4.12') уравнение (4.11) можно записать в форме

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + u \frac{\partial \Theta}{\partial x} + v \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \dot{\sigma} \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} = \frac{\Theta}{T} \frac{\varepsilon}{c_p \rho} = 0. \quad (4.13)$$

Займемся теперь преобразованием уравнения неразрывности (2.18). Перепишем его в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(u_1 \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_1 \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\dot{\eta} \frac{\partial p_1}{\partial \eta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Так как $\dot{\eta} = \dot{\sigma}$ и по определению P_* не зависит от σ , то

$$\frac{\partial p_1}{\partial \eta} = \frac{\partial p_1}{\partial \sigma} = \frac{\partial \sigma p_*}{\partial \sigma} = p_* \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} + \sigma \frac{\partial p_*}{\partial \sigma} = p_*.$$

Используя это соотношение и опуская индекс 1, преобразуем уравнение (4.14):

$$\frac{\partial p_*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (up_*) + \frac{\partial}{\partial y} (vp_*) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\dot{\sigma} p_*) = 0$$

или

$$\frac{\partial p_*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (up_*) + \frac{\partial}{\partial y} (vp_*) + p_* \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} \quad (4.15)$$

— окончательный вид уравнения неразрывности.

Интегрируя (4.15) по всей толще атмосферы от $\sigma=0$ до $\sigma=1$ и учитывая краевые условия (4.9) и (4.10) для функции $\dot{\sigma}$, получим уравнение тенденции приземного давления

$$\frac{\partial p_*}{\partial t} = - \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x} (up_*) + \frac{\partial}{\partial y} (vp_*) \right] d\sigma'. \quad (4.16)$$

Система семи уравнений (4.3), (4.4), (4.5), (4.6), (4.12), (4.13) и (4.16) содержит 7 искомых функций ($u, v, \dot{\sigma}, \Phi, T, \Theta, p_*$) и является замкнутой. Расчет аналога вертикальной скорости $\dot{\sigma}$ как по исходным, так и по прогностическим данным выполняется с помощью следующего диагностического соотношения:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \frac{\sigma}{p_*} \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x} (up_*) + \frac{\partial}{\partial y} (vp_*) \right] d\sigma' - \\ &- \frac{1}{p_*} \int_0^{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x} (up_*) + \frac{\partial}{\partial y} (vp_*) \right] d\sigma'. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Формула (4.17) может быть легко получена, если в результат интегрирования уравнения неразрывности (4.15) по σ от 0 до некоторого σ

$$\sigma \frac{\partial p_*}{\partial t} + \int_0^{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x} (up_*) + \frac{\partial}{\partial y} (vp_*) \right] d\sigma' + \sigma p_* = 0$$

подставить значение $\frac{\partial p_*}{\partial t}$ из уравнения (4.16).

Начальные данные для потенциальной температуры Θ вычисляются по формуле (4.12) по данным наблюдений за температурой T . Прогностические значения функций Θ, u, v, p_* определяются (на один шаг вперед по времени) из прогностических

уравнений (4.13), (4.5), (4.6) и (4.16). После этого из диагностических уравнений (4.12'), (4.17) и (4.4) находятся соответственно функции T , σ и Φ . Если для прогноза температуры T пользоваться уравнением (4.11), то надобность в соотношениях (4.12) и (4.12') пропадает.

Заметим, что для определения прогностического геопотенциала Φ любой поверхности $\sigma = \text{const}$ выполняется интегрирование уравнения статики (4.4) по σ от некоторого $\sigma = \text{const}$ до $\sigma = 1$:

$$\int_{\sigma}^1 \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} d\sigma = -R \int_{\sigma}^1 \frac{T}{\sigma} d\sigma \quad (4.18)$$

или

$$\Phi|_{\sigma=1} - \Phi|_{\sigma} = -R \int_{\sigma}^1 \frac{T}{\sigma} d\sigma. \quad (4.18')$$

Поскольку на уровне подстилающей поверхности $\Phi = gh$, где h — высота рельефа над уровнем моря, то

$$\Phi|_{\sigma} = gh + R \int_{\sigma}^1 \frac{T}{\sigma} d\sigma. \quad (4.19)$$

Рассмотрим некоторые обобщения σ -системы координат.

В национальном метеорологическом центре (НМЦ) США используется прогностическая модель Ф. Г. Шумана и Дж. Б. Ховермейла, в которой

$$\sigma = \frac{p - p_v}{p_n - p_v}, \quad (4.20)$$

где p_n — давление на квазигоризонтальной нижней поверхности некоторого слоя атмосферы; p_v — давление на его верхней поверхности.

При использовании такой координатной системы x, y, σ, t появляется возможность разбивать атмосферу на слои в зависимости от содержания в них массы воздуха и с целью учета особенностей слоев, обладающих какими-либо специфическими свойствами. К числу таких слоев можно отнести, например, планетарный пограничный слой (где значительно действие сил турбулентной вязкости), тропосферу (с более или менее постоянным вертикальным градиентом температуры), стратосферу (с ее изотермией) и другие. Кроме того, такая система координат позволяет учитывать форму рельефа не только подстилающей поверхности, но и верхнего уровня модели или любого слоя.

В упомянутой модели НМЦ США атмосфера разбивается на четыре основных слоя: планетарный пограничный слой, тропосферу, стратосферу и слой постоянной потенциальной температуры. С помощью координатных плоскостей $\sigma = \text{const}$ тропосфера делится еще на три, а стратосфера — на два слоя. Таким образом, всего рассматривается восемь поверхностей, включая поверхность земли (p_*), верхнюю границу планетарного пограничного слоя, тропопаузу и фиктивную верхнюю границу атмосферы с нулевым давлением.

Полагая, что в формуле (4.20) $p_b = p_T$ (p_T — постоянное давление, соответствующее верхнему уровню модели), $p_H = p_*$ (p_* — фактическое давление на подстилающей поверхности), запишем без вывода окончательный вид уравнений в модифицированной системе координат Филлипса:

уравнения динамики

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\sigma RT}{\sigma p_* + p_T} \frac{\partial p_*}{\partial x} + lv,$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\sigma RT}{\sigma p_* + p_T} \frac{\partial p_*}{\partial y} - lu;$$

уравнение статики

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\frac{RT p_*}{\sigma p_* + p_T};$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial p_*}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u p_*) + \frac{\partial}{\partial y} (v p_*) + p_* \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0,$$

где

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{p_*} \left(\frac{dp}{dt} - \sigma \frac{dp_*}{dt} \right);$$

уравнение притока тепла

$$\frac{dT}{dt} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T}{\sigma p_* + p_T} \frac{dp}{dt} = \frac{\epsilon}{c_{p0}}.$$

В модели по полным уравнениям, разработанной в Гидрометцентре СССР, атмосфера делится на тропосферу (включающую пограничный слой) и стратосферу. Границей областей является поверхность тропопаузы. Вертикальная координата в каждой из областей определяется независимо по формуле (4.20) и меняется в пределах $0 \leq \sigma \leq 1$.

В обеих областях деление по координате σ равномерное: в тропосфере выделено четыре слоя, в стратосфере — два. Следовательно, в указанной модели с учетом уровня подстилающей поверхности ($\sigma_1=1$) всего вводится в рассмотрение шесть координатных поверхностей $\sigma = \text{const}$.

Отметим, что квазилагранжеву σ -систему координат Филлипса и ее модификации целесообразно использовать в условиях сложной орографии, где значение p_* существенно отличается от стандартного давления $P_0 = 1000$ гПа и поэтому подстилающая поверхность далеко не совпадает с координатной поверхностью $\zeta=1$.

1.5. Изэнтропическая система координат

За вертикальную координату в изэнтропической системе координат принята потенциальная температура Θ , (см. формулу (4.12)), т. е. температура воздуха, приведенная по сухоадиабатическому закону к стандартному давлению, или, иначе говоря, такая температура, которую принял бы воздух, если адиабатически повысить (понизить) его давление до $P_0=1000$ гПа.

Изэнтропическая система координат (Θ СК) также относится к квазилагранжевым системам: Θ — лагранжева координата, а x_Θ и y_Θ — аналоги горизонтальных координат x и y , лежащие в плоскости, касательной к изэнтропической поверхности $\Theta = \text{const}$. Поскольку наклон этих поверхностей мал, принимается, что $x_\Theta \cong x$, $y_\Theta \cong y$, а $\Theta = \Theta(x, y, z, t)$. Названная система связана с изэнтропическим анализом, т. е. с анализом карт топографии изэнтропических поверхностей $\Theta = \text{const}$, и в этом отношении она аналогична ИСК, связанной с анализом карт барической топографии.

Получим основные уравнения динамики атмосферы в изэнтропической системе координат.

Прологарифмируем и продифференцируем по времени формулу потенциальной температуры (4.12). Получим:

$$\frac{T}{\Theta} \frac{d\Theta}{dt} = \frac{dT}{dt} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T}{p} \frac{dp}{dt}. \quad (5.1)$$

Согласно уравнению притока тепла (1.8), правая часть соотношения (5.1) равна $\frac{\epsilon}{c_p \rho}$. Следовательно,

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\Theta}{T} \frac{\epsilon}{c_p \rho} \quad (5.2)$$

— уравнение притока тепла, выраженное через потенциальную температуру, где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \dot{\Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta}$, $\dot{\Theta}$ — аналог вертикальной скорости в изэнтропической системе координат.

Из уравнения (5.2) следует, что в случае отсутствия притока тепла $\frac{d\Theta}{dt} = 0$, т. е. потенциальная температура является консервативной характеристикой движущихся воздушных частиц. Введем функцию Экснера

$$\pi = c_p \left(\frac{p}{P_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (5.3)$$

и используем ее с целью преобразования уравнения (5.2). Замечая, что

$$\Theta = \frac{c_p}{\pi} T, \quad (5.4)$$

перепишем уравнение притока тепла (5.2) иначе:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\varepsilon}{\pi \rho}. \quad (5.5)$$

Введем, кроме того, функцию Монгюмери

$$M = \frac{\kappa}{\kappa-1} RT + gz, \quad (5.6)$$

где z — высота изэнтропической поверхности $\Theta = \text{const}$. Нетрудно видеть, что соотношение (5.6) можно записать также в виде

$$M = \pi \Theta + gz, \quad (5.6')$$

На основе соотношения (2.13) при $\eta = \Theta$ уравнение статики в Θ СК имеет следующий вид:

$$\frac{\partial p}{\partial \Theta} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta}. \quad (5.7)$$

Получим еще одну форму уравнения статики. С этой целью вновь прологарифмируем выражение (4.12) и локально продифференцируем результат по переменной Θ . Получим:

$$\frac{1}{\Theta} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \Theta} - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial \Theta}.$$

Используя функцию Монгюмери (5.7), будем иметь:

$$\frac{1}{\Theta} = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \Theta} + \frac{\kappa-1}{\kappa} \cdot \frac{1}{RT} \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta}.$$

Подставляя сюда значение Θ из (4.12), перепишем данное соотношение следующим образом:

$$\frac{R\kappa}{\kappa-1} \left(\frac{p}{P_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \frac{R\kappa}{\kappa-1} \frac{\partial T}{\partial \Theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta}. \quad (5.8)$$

Поскольку

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v}, \quad \frac{\kappa}{\kappa-1} = \frac{c_p}{c_p - c_v} = \frac{c_p}{R},$$

то (5.8) преобразуется к виду:

$$c_p \left(\frac{p}{P_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \frac{\partial}{\partial \Theta} (c_p T + \Phi) = \frac{\partial}{\partial \Theta} (c_p T + gz).$$

Получается более удобная форма уравнения статики в Θ -системе координат:

$$\pi = \frac{\partial M}{\partial \Theta}. \quad (5.9)$$

Уравнение неразрывности с учетом (2.18) запишем в виде

$$\frac{1}{\frac{\partial p}{\partial \Theta}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial p}{\partial \Theta} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\Theta}}{\partial \Theta} = 0$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial \Theta} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial p}{\partial \Theta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial p}{\partial \Theta} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\dot{\Theta} \frac{\partial p}{\partial \Theta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

В уравнениях движения (2.14) и (2.15) необходимо преобразовать слагаемые $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ и $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$. С этой целью прологарифмируем выражение для Θ (4.12) и локально продифференцируем результат по x и по y при условии, что указанные оси направлены вдоль изэнтропической поверхности $\Theta = \text{const}$. В этом случае $\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0$. Следовательно, окончательно получим:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ 0 &= \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}c_p \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\c_p \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.\end{aligned}\quad (5.11)$$

Учитывая соотношения (5.11), запишем уравнения динамики в виде:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -c_p \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv = -\frac{\partial}{\partial x} (c_p T + gz) + lv, \\ \frac{dv}{dt} &= -c_p \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - lu = -\frac{\partial}{\partial y} (c_p T + gz) - lu\end{aligned}$$

или

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial M}{\partial x} + lv, \quad (5.12)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial M}{\partial y} - lu. \quad (5.13)$$

Изэнтропическая система координат удобна при рассмотрении адиабатических процессов, когда $\frac{d\Theta}{dt} = 0$, что дает возможность исключить вертикальную скорость. В самом деле, если $f = f(x, y, \Theta, t)$, то при адиабатическом процессе

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial \Theta} \frac{d\Theta}{dt} = \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y}.\end{aligned}\quad (5.14)$$

Используя формулу (5.14), можно легко получить уравнения термодинамики для частного случая адиабатических движений, в которых будут отсутствовать слагаемые с вертикальной скоростью $\dot{\Theta}$. В этом заключается определенное преимущество изэнтропической системы координат перед ИСК. Однако ей свойственны и существенные недостатки: значительно труднее сформулировать граничные условия по Θ , чем по ζ или по z ; потенциальная температура непосредственно не измеряется, т. е. является расчетной величиной. По этим причинам Θ СК, несмотря на успешные попытки численного прогноза в данной координатной системе, используется в прогностической практике сравнительно редко.

1.6 Сферическая система координат

До сих пор мы обсуждали ортогональные и квазиортогональные системы координат, удобные для исследования атмосферных процессов синоптического масштаба и решения задачи прогноза над областями, имеющими ограниченные размеры. При изучении глобальных атмосферных процессов и для решения задачи их прогноза в ряде случаев целесообразно использовать уравнения динамики в сферической системе координат (ССК).

Воспользуемся сферическими координатами (рис. 1) r , θ и λ : r — расстояние от центра Земли до некоторой точки B (рассматриваемой частицы воздуха); λ — долгота места, положительная к востоку, или азимутальный угол; $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ — полярный угол или дополнение широты φ .

Из рис. 1 видно, что зависимость между прямоугольными координатами x , y , z (оси x и y находятся в плоскости экватора, а ось z проходит через полюсы) и сферическими координатами описывается формулами:

$$x = r \sin \theta \cos \lambda, \quad y = r \sin \theta \sin \lambda, \quad z = r \cos \theta. \quad (6.1)$$

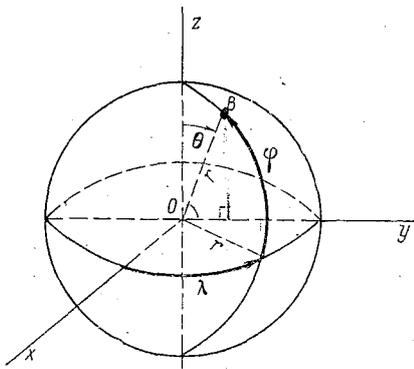


Рис. 1. Сферическая система координат

Обозначим:

$$v_{\theta} = r \frac{d\theta}{dt} \text{ — составляющая линейной скорости по меридиану (положительная к югу);}$$

$$v_{\lambda} = r \sin \theta \frac{d\lambda}{dt} \text{ — составляющая линейной скорости по параллели (положительная к востоку);}$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} \text{ — радиальная составляющая линейной скорости (положительная вверх).}$$

Напомним, что на частицу воздуха единичной массы на несферической Земле действуют следующие силы (рис. 2):
радиальная составляющая центробежной силы

$$C_r = r \cos \varphi \omega_0^2 \cos \varphi;$$

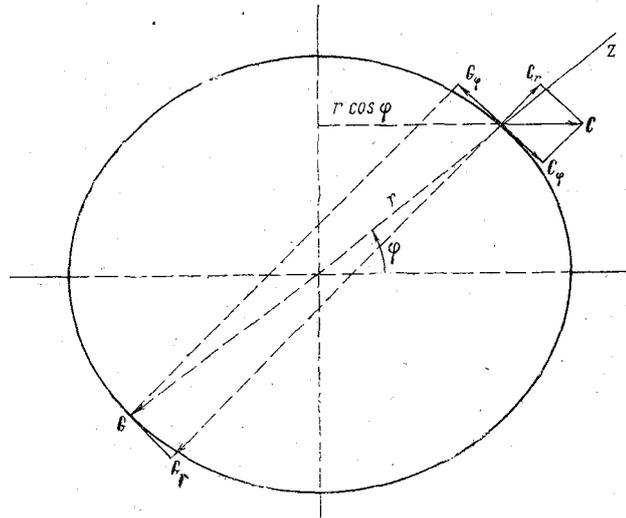


Рис. 2. Распределение сил, действующих на частицу на несферической Земле

радиальная составляющая силы земного тяготения

$$G_r = -g + r \cos \varphi \omega_0^2 \cos \varphi;$$

составляющая центробежной силы, направленная по касательной к меридиану

$$C_\varphi = r \cos \varphi \omega_0^2 \sin \varphi$$

и уравновешиваемая силой

$$G_\varphi = -r \cos \varphi \omega_0^2 \sin \varphi.$$

Учитывая сказанное, запишем окончательный вид уравнений движения, уравнения неразрывности и уравнения притока тепла в сферической системе координат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{v_r}{r} \frac{\partial r v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} - \frac{v_\lambda^2}{r} \operatorname{ctg} \theta = \\ = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + 2 \omega_0 \cos \theta v_\lambda; \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + \frac{v_r}{r} \frac{\partial v_\lambda}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{v_\theta v_\lambda}{r} \operatorname{ctg} \theta = \\ = - \frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} - 2 \omega_0 \cos \theta v_\theta + 2 \omega_0 \sin \theta v_r; \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \lambda} + \frac{v_\theta^2 + v_\lambda^2}{r} = \\ = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g - 2 \omega_0 \sin \theta v_\lambda; \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + \rho \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 v_r}{\partial r} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} \right) = 0; \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} - \frac{\gamma_a}{\rho g} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_r \frac{\partial p}{\partial r} + \right. \\ \left. + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right) = \frac{\varepsilon}{c_p \rho}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Отметим, что при непосредственном использовании ССК возникает ряд дополнительных трудностей математического характера, связанных, во-первых, с тем, что регулярная широтно-долготная сеточная область обладает слишком зависимым от широты шагом и притом различным в направлении круга широт и меридиана (это объясняется сходимостью меридианов к полюсам и уменьшением длины широтного круга при увеличении широты), во-вторых, с представлением производных в конечноразностной форме в окрестности полюса и др. Поэтому сферическая система координат используется, главным образом, в полусферных и глобальных прогностических моделях и при решении задач общей циркуляции атмосферы и теории климата.

II. УЧЕТ МАСШТАБНЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ В УРАВНЕНИЯХ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ

2.1. Некоторые сведения о картографических проекциях

1. Для наглядного представления и анализа фактических и прогностических полей метеорологических элементов использу-

ются обычные географические карты. Однако следует помнить, что при построении картографических проекций сферическая поверхность земного эллипсоида (геоида) конформно* переносится на плоскость с определенными искажениями. При рассмотрении атмосферных процессов над сравнительно большими территориями, протяженностью более 3000 км по меридиану, либо когда границы области исследования близки к полюсам, эти искажения необходимо учитывать, иными словами, нельзя отождествлять плоскость карты с координатной плоскостью x, y, x_p, y_p либо x_0, y_0 и др. Следствием указанных искажений является несовпадение положения точек в квазидекартовых системах координат на карте, чаще всего используемых в задачах краткосрочного прогноза, с их действительным местоположением в природе. Дело заключается в том, что декартовы координаты x, y в природе являются криволинейными и имеют метрику, зависящую от широты места. Поэтому уравнения динамики атмосферы, записанные в таких координатах, отличаются от уравнений, записанных в обычных декартовых координатах. Идентификация уравнений осуществляется путем преобразования уравнений в сферических координатах к уравнениям в декартовых прямоугольных и прямолинейных координатах с учетом особенностей (масштабных множителей) картографических проекций. Это позволяет использовать регулярные сеточные области на картах, поскольку учет масштабного множителя карты приводит к тому, что одинаковые шаги на разных широтах на карте соответствуют действительным различным расстояниям на местности. Формулы для расчета масштабных множителей получаются как раз в процессе перехода от сферической системы координат к декартовой.

Пусть имеем какую-либо картографическую проекцию. Введем обычные прямоугольные декартовы координаты x_k, y_k в плоскости карты. Тогда между элементарными приращениями этих координат $\delta x_k, \delta y_k$ и соответствующими приращениями в природе $\delta s_1, \delta s_2$ можно записать соотношения

$$\delta s_1 = H_1 \delta x_k, \quad \delta s_2 = H_2 \delta y_k,$$

где величины H_1 и H_2 представляют собой отношения размеров в природе и на карте и называются параметрами Ламэ. Для карт

* Во всех случаях, когда картографическая проекция используется для рассмотрения векторов или выполнения векторных операций целесообразно пользоваться конформной (равноугольной) проекцией. Это полностью относится к задачам динамической метеорологии и численного прогноза. Основными свойствами конформной проекции являются следующие: угол между малыми отрезками прямых, пересекающихся в любой точке на земной поверхности, равен углу между изображениями этих отрезков на карте; масштаб карты в каждом пункте не зависит от направления, т. е. любая бесконечно малая фигура в природе изображается подобной фигурой на карте.

конформных проекций, очевидно, $H_1 = H_2 = H$ и, следовательно,

$$\delta s_1 = \frac{1}{M} \delta x_k, \quad \delta s_2 = \frac{1}{M} \delta y_k, \quad (1.1)$$

где $M = \frac{1}{H}$ — масштаб карты в данном пункте. В каждой точке масштаб M не зависит от направления.

Наряду с M введем в рассмотрение масштаб карты на некоторой главной широте, принимаемый за общий (главный) масштаб M_0 , и так называемый масштабный множитель

$$m = \frac{M}{M_0}. \quad (1.2)$$

Вводя m в формулы (1.1), получим соотношения между элементарными приращениями в натуре и на картографической проекции:

$$\delta s_1 = \frac{1}{mM_0} \delta x_k, \quad \delta s_2 = \frac{1}{mM_0} \delta y_k$$

или окончательно:

$$\delta s_1 = \frac{1}{m} \delta x_1, \quad \delta s_2 = \frac{1}{m} \delta y_1, \quad (1.3)$$

где

$$\delta x_1 = \frac{\delta x_k}{M_0}, \quad \delta y_1 = \frac{\delta y_k}{M_0}.$$

На основании формулы (1.3) можно производить преобразование простейших векторных операторов и уравнений динамики атмосферы к прямоугольной декартовой системе координат на карте.

2. Картографические проекции различаются способами отображения (построения) сферической земной поверхности. Здесь мы ограничимся рассмотрением лишь равноугольной конической проекции, включая два предельных частных случая ее — стереографическую и цилиндрическую прямую (меркаторскую) проекции. Названные проекции наиболее широко используются в СССР для составления карт погоды.

Конические проекции получаются в результате проектирования меридианов и параллелей геоида на поверхность касательного (рис. 3, а) или секущего (рис. 3, б) конуса и последующего развертывания конуса по некоторой образующей в плоскость, на которой параллели изображены в виде незамкнутых концентрических окружностей, радиусы которых зависят от широты, а меридианы — в виде полупрямых, исходящих из полюса (рис. 4). При-

чем углы между такими меридианами пропорциональны разностям долгот в натуре:

$$\lambda_K = \alpha \lambda, \quad (1.4)$$

где α — показатель конической проекции, характеризующий конкретную коническую проекцию в зависимости от выбранного угла разворота при вершине.

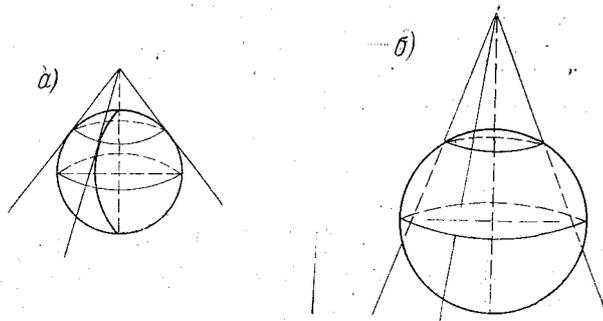


Рис. 3. Касательный (а) и секущий (б) конусы

Если ввести на плоскости проекции карты полярные координаты θ, ψ , то радиусы окружностей

$$r_K = r_K(\theta), \quad (1.5)$$

где θ — дополнение широты.

Масштаб по долготе (вдоль круга широты) M_λ есть отношение дуговых отрезков одной и той же параллели на карте и в натуре, т. е.

$$M_\lambda = \frac{\delta x_K}{\delta s_1} \quad (1.6)$$

или, после подстановки (1.4) и (1.5),

$$M_\lambda = \frac{r_K \delta \lambda_K}{a \delta \lambda} = \frac{r_K \delta \lambda_K}{a \sin \theta \delta \lambda} = \frac{r_K \alpha \delta \lambda}{a \sin \theta \delta \lambda} = \frac{\alpha r_K}{a \sin \theta}. \quad (1.7)$$

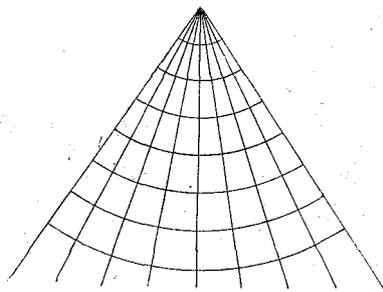


Рис. 4. Коническая проекция

Масштаб по широте (вдоль меридиана) аналогично представляет собой отношение дуговых отрезков одного и того же меридиана на карте и в натуре:

$$M_\theta = \frac{\delta y_K}{\delta s_2} = \frac{\delta r_K}{a \sin(\delta \theta)} = \frac{\delta r_K}{a \delta \theta}. \quad (1.8)$$

Поскольку для конформной проекции $M_\lambda = M_0$,
то

$$\frac{\alpha r_K}{\sin \theta} = \frac{\delta r_K}{\delta \theta}$$

или, производя разделение переменных, можно записать

$$\frac{dr_K}{r_K} = \alpha \frac{d\theta}{\sin \theta}. \quad (1.9)$$

Решение уравнения (1.9) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \ln r_K &= \alpha \int \frac{d\theta}{\sin \theta} = \alpha \int \frac{d\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}} \\ &= \alpha \int \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \frac{d\theta}{\sin \frac{\theta}{2} / \cos \frac{\theta}{2}} = \alpha \int \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta}{2}} \frac{d\theta}{2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} = \\ &= \alpha \ln \left(\frac{\theta}{2} \right) + \ln C. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Отсюда, потенцируя, получим зависимость r_K от широты:

$$r_K = C \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)^\alpha. \quad (1.11)$$

Для выяснения смысла постоянной интегрирования C предположим, что $\theta = \frac{\pi}{2}$. Тогда из (1.11) следует, что

$$r_K \Big|_{\theta = \frac{\pi}{2}} = C = r_{\text{экватора}}. \quad (1.12)$$

Учитывая (1.12), например, в (1.6) будем иметь:

$$M_\lambda = M_0 = M = \frac{\alpha r_{\text{ЭКВ}}}{a \sin \theta} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)^\alpha. \quad (1.13)$$

Переходя к масштабному множителю m , задаваемому формулой (1.2), и с учетом того, что главный масштаб

$$M_0 = \frac{\alpha r_{\text{ЭКВ}}}{a \sin \theta_0} \left(\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} \right)^\alpha, \quad (1.14)$$

получим

$$m = \frac{\sin \theta_0}{\sin \theta} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2}} \right)^\alpha. \quad (1.15)$$

В качестве главной широты θ_0 для конической проекции выберем такую, для которой $M = M_{\min}$.

Для этого преобразуем формулу (1.13):

$$M = \frac{\alpha r_{\text{ЭКВ}}}{a \sin \left(2 \frac{\theta}{2} \right)} \frac{\sin \left(\frac{\theta}{2} \right)^\alpha}{\cos \left(\frac{\theta}{2} \right)^\alpha} = \frac{\alpha r_{\text{ЭКВ}}}{2a} \frac{\left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{\alpha-1}}{\left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{\alpha+1}}. \quad (1.16)$$

Применим к выражению (1.16) условие минимума:

$$\frac{dM}{d\theta} = \frac{\alpha r_{\text{ЭКВ}}}{2a} \left[\frac{\frac{\alpha-1}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{\alpha-2} \cdot \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{\alpha+1} \cdot \cos \frac{\theta}{2}}{\left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{2(\alpha+1)}} + \frac{\frac{\alpha+1}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{\alpha-1} \cdot \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^\alpha \cdot \sin \frac{\theta}{2}}{\left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{2(\alpha+1)}} \right] = 0.$$

Отсюда имеем

$$(\alpha - 1) \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^2 + (\alpha + 1) \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^2 = 0$$

или

$$\alpha = \cos \theta_m. \quad (1.17)$$

Таким образом, масштаб картографической проекции минимален на той широте θ_m , где выполняется условие (1.17). Полагая, что $\theta_0 = \theta_m$ и подставляя (1.17) в формулу (1.15), получим:

$$m = \frac{\sin \theta_m}{\sin \theta} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta_m}{2}} \right)^{\cos \theta_m}. \quad (1.18)$$

Формула (1.18) определяет целое семейство конических проекций, различающихся лишь выбором широты θ_m , на которой в соответствии с условием (1.17) масштаб карты $M = M_m$ оказывает-

ся минимальным. Выбор широты θ_m определяет и значение показателя α для соответствующей конической проекции.

3. Рассмотрим упомянутые выше предельные частные случаи конических проекций.

А. Пусть главная широта $\theta_m = \frac{\pi}{2}$. Тогда согласно формуле (1.17) $\alpha = 0$. В этом случае мы будем иметь меркаторскую проекцию, когда проектирование меридианов и параллелей земного шара производится на боковую поверхность внутренне касательного к нему по экватору цилиндра, который может быть также и секущим, и последующего развертывания цилиндра по одной из образующих в плоскость. Меридианы изображаются в этой проекции параллельными прямыми линиями, отстоящими друг от друга на расстояниях, равных выпрямленным дугам экватора Земли между проектируемыми меридианами. Эти расстояния определяются по формуле $l_1 = a\lambda$, где a — радиус геоида, уменьшенный в главном масштабе, а λ — разность долгот (в частях радиуса) проектируемых меридианов.

Параллели изображаются прямыми, перпендикулярными меридианам прямыми. Расстояние каждой параллели от экватора равняется выпрямленной дуге меридиана земного шара до параллели данной широты φ (выраженной в частях радиуса) и определяется по формуле $l_2 = a\varphi$. При проектировании меридианов и параллелей через одинаковое число градусов на проекции получается сеть равных квадратов (рис. 5).

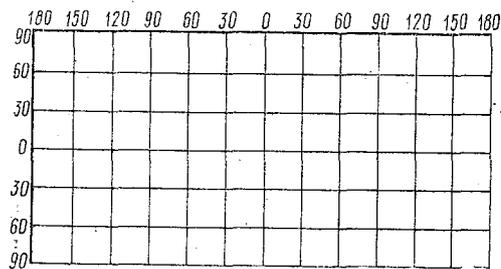


Рис. 5. Цилиндрическая равноугольная (меркаторская) проекция

Из самого способа построения проекций следует, что по меридианам масштабный множитель $m = 1$, а по параллелям (поскольку $\sin \theta_0 = 1$, $\alpha = 0$)

$$m = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\cos \varphi}. \quad (1.19)$$

Причем m быстро возрастает по мере удаления от экватора к полюсам и уменьшения значения $\cos \varphi$. Таким образом, масштабный множитель для карт цилиндрической проекции меняется от единицы (на экваторе) до бесконечности (у полюсов). Вследствие этого меркаторские проекции удобны только для изображения тропической зоны. Для таких карт, принятых в нашей стране, $m = 1$ задается на $\varphi_0 = 22,5^\circ$.

Б. Пусть $\theta_m = 0$.

Раскрывая неопределенность в формуле (1.18), будем иметь:

$$m = \frac{2}{1 + \cos \theta} \quad (1.20)$$

В этом случае получается стереографическая полярная проекция, соответствующая раствору конуса в плоскость, касательную к земному шару в области полюса. Стереографичность проекции означает, что проектирование точек земного эллипсоида на плоскость карты осуществляется с помощью лучей, выходящих из некоторой точки, расположенной на поверхности эллипсоида и называемой точкой зрения. Понятно, что, например, для изображения северного полушария касательная (или секущая) плоскость выбирается в этом полушарии, а проектирование производится из южного полюса, и наоборот.

Согласно формуле (1.20) масштабы на стереографической проекции будут изменяться от единицы (в центре) до двух (на краях). В целях более равномерного распределения искажений выгоднее иногда проектирование не на касательную, а на секущую плоскость.

Стереографические проекции принадлежат к числу равноугольных проекций. В этих проекциях углы, взятые в натуре, изображаются на карте без искажений, т. е. бесконечно малый кружок, взятый на шаре, изображается кружком. В центре проекции площадь этого кружка будет равна площади соответствующего кружка на шаре, а на краях проекции площадь кружка будет вчетверо больше. Помимо этого стереографическая проекция обладает другим, присущим только ей, исключительным свойством. В этих проекциях не только бесконечно малый кружок шара, но и любой круг также изображается кругом. Таким образом, все параллели $\varphi = \text{const}$ на стереографической проекции изображаются концентрическими окружностями с общим центром в точке, являющейся проекцией полюса. Расстояние между параллелями увеличивается по мере удаления от центра карты к краям. Меридианы $\lambda = \text{const}$ изображаются радиусами этих окружностей. Причем, поскольку $\alpha = 1$ (условие азимутальности), $\lambda_k = \lambda$, углы между меридианами в натуре и на проекции совпадают.

В Службе погоды в СССР применяют полярную стереографическую проекцию, где за «главную» широту выбрана $\varphi = 60^\circ$, а не та широта φ_m , на которой масштаб карты минимален. Получим

Если $\varphi_1 = \varphi_0 = 60^\circ$, то из (1.24) имеем

$$k = a (1 + \sin 60^\circ) = 1,8660 a. \quad (1.27)$$

Зная значение k , из (1.23) найдем:

$$\rho = k \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = 1,8660 a \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \quad (1.28)$$

Подставляя (1.28) в (1.26), вновь получим формулу (1.21), из которой следует, что для определения масштабного множителя m в любой точке достаточно знать широту места φ этой точки.

Построим теперь на стереографической проекции карты декартову систему координат x, y , поместив ее начало в точке, соответствующей географическим координатам φ_0, λ_0 , а ось y направим на север параллельно проекции на плоскость меридиана λ_1 . Тогда связь между декартовыми и сферическими координатами будет иметь вид?

$$x = x_n + k \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \sin(\lambda - \lambda_1) = x_n + k \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \sin(\lambda - \lambda_1),$$

$$y = y_n - k \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \cos(\lambda - \lambda_1) = y_n - k \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \cos(\lambda - \lambda_1), \quad (1.29)$$

где x_n, y_n — координаты полюса, определяемые с помощью соотношений (1.27) при $x = y = 0, \lambda = \lambda_0, \varphi = \varphi_0$ ($\varphi > 0$) для северных широт, $\varphi < 0$ для южных широт).

Из соотношения (1.23) можно получить

$$\sin \varphi = \frac{1 - \left(\frac{\rho}{k}\right)^2}{1 + \left(\frac{\rho}{k}\right)^2}, \quad (1.30)$$

где $\rho = \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}$ — расстояние между изображением полюса (x_n, y_n) и изображением переменной относительно принятого начала декартовой системы координат точки (x, y) .

Стереографической проекцией целесообразно пользоваться при прогнозе на полушарии. Для ограниченных территорий более удобна коническая проекция, так как можно пренебречь зависимостью масштабного множителя от широты. Для глобальных прогнозов неудобна ни одна из проекций. Выход заключается в том, что пользуются либо сферической системой координат, либо совокупностью проекций: в экваториальной области — меркатор-

ской, а в умеренных и высоких широтах сопрягают соответствующие стереографические проекции.

В. В других частных случаях конической проекции $(0 < \theta_m < \frac{\pi}{2})$ главный масштаб выбирается на широтах 30° , 45° или 60° . Этим трем случаям соответствуют дополнение широты $\theta_m = 60^\circ$, 45° , 30° . Подставляя эти значения в (1.18), можно получить рабочие формулы для расчета зависимости масштабного множителя $m = m(\varphi)$ и построения соответствующих графиков.

2.2. Уравнения динамики атмосферы в прямоугольных координатах на карте равноугольной проекции

1. Для того, чтобы преобразовать уравнения динамики атмосферы к прямоугольным декартовым координатам на равноугольной картографической проекции, выведем сначала соответствующие формулы преобразования для простейших операций векторного анализа, опираясь на соотношения (1.3), связывающие элементарные приращения в натуре и на карте. Поскольку масштаб вдоль вертикальной координаты не меняется, то все преобразования будут проводиться для двумерного случая.

Направив ось x на восток по касательной к широтному кругу, а ось y на север по касательной к меридиану, определим значение производных на местности и на картографической проекции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta x} = m \lim_{\delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} = m \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{\delta f}{\delta y} = m \lim_{\delta y_1 \rightarrow 0} \frac{\delta f_1}{\delta y_1} = m \frac{\partial f_1}{\partial y_1}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где m — масштабный множитель, величина которого фиксирована для дополнения широты θ ; индекс 1 указывает, что значение метеорологического элемента f берется на местности, в точке соприкосновения секущей или касательной поверхности, а не на карте.

Вектор плоского градиента $\text{grad } f$ имеет в декартовой системе координат проекции $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$. Следовательно, опираясь на формулы (2.1), мы можем утверждать, что истинный градиент функции, заданной в натуре

$$\text{grad } f = I \frac{\partial f}{\partial x} + J \frac{\partial f}{\partial y} + k \frac{\partial f}{\partial z},$$

может быть выражен градиентом в проекции карты:

$$\begin{aligned}(\operatorname{grad} f)_{s_1} &= \frac{\partial f}{\partial s_1} = m \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \\(\operatorname{grad} f)_{s_2} &= \frac{\partial f}{\partial s_2} = m \frac{\partial f_1}{\partial y_1}.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Выясним, как нужно изменить дивергенцию в зависимости от изменения координат.

Формулу для преобразования оператора дивергенции

$$\operatorname{div} \mathbf{C} = \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z}$$

где c_x, c_y, c_z — составляющие вектора скорости \mathbf{C} по осям x, y, z можно легко получить, рассматривая $\operatorname{div} \mathbf{C}$ в произвольной точке A , находящейся в области (V) , как предел отношения потока P вектора \mathbf{C} через замкнутую поверхность (σ) , ограничивающую область (V) , к объему области при условии, что поверхность безгранично стягивается к данной точке, т. е.

$$\operatorname{div} \mathbf{C} = \lim_{(V) \rightarrow A} \frac{\iint_{\sigma} P n^{\circ} d\sigma}{V}.\quad (2.3)$$

При этом предполагается, что вектор скоростей поля \mathbf{C} и его частные производные определены и непрерывны во всей области (V) , ограниченной поверхностью (σ) .

В формуле (2.3) n° — орт нормали n , под которым понимается вектор, одинаково направленный с нормалью и имеющий модуль, равный единице.

Плоскую (двумерную) дивергенцию будем рассматривать соответственно как предел отношения потока P вектора \mathbf{C} через элементарный контур L площади δs , ограниченной этим контуром, при условии, что δs стремится к нулю:

$$\operatorname{div} \mathbf{C} = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{P}{\delta s}.\quad (2.3')$$

На рис. 7 показано, что контур L , ограничивающий элемент площади $ABCD$, образован элементарными отрезками δx_1 и δy_1 , представляющими собой приращения координат x_1, y_1 (с учетом искажений). Поток вектора \mathbf{C} через любой отрезок контура равен произведению его нормальной составляющей (на внешнюю нормаль) на длину отрезка. Так, например, поток вектора \mathbf{C} через грань AB в натуре равен

$$P_{AB} = - (c_x \delta y)_{x_1},$$

поскольку направление нормали к грани AB противоположно положительному направлению составляющей c_x . На карте с учетом соотношений (2.1).

$$P_{AB} = - \left(c_{x_1} \frac{1}{m} \right)_{x_1} \cdot \delta y_1. \quad (2.4)$$

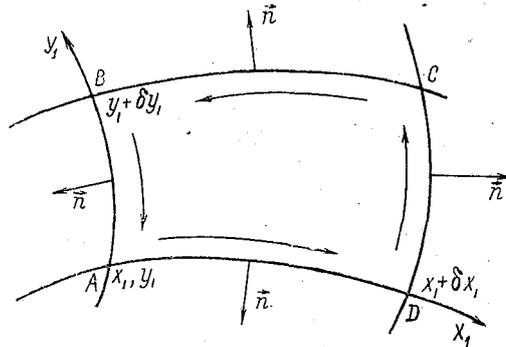


Рис. 7. Элементарная площадка δs_1 , ограниченная контуром L , отрезки которого $AB = DC = \delta y_1$, $AD = BC = \delta x_1$

Соответственно потоки через другие грани будут равны:

$$P_{DC} = (c_x \delta y)_{x_1 + \delta x_1} = \left(\frac{c_{x_1}}{m} \right)_{x_1 + \delta x_1} \cdot \delta y_1$$

или, после разложения правой части этого равенства в ряд Тейлора,

$$P_{DC} = \left[\left(\frac{c_{x_1}}{m} \right)_{x_1} + \delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{c_{x_1}}{m} \right) \right] \delta y_1, \quad (2.5)$$

$$P_{AD} = - (c_y \delta x)_{y_1} = - \left(\frac{c_{y_1}}{m} \right)_{y_1} \delta x_1, \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} P_{BC} &= (c_y \delta x)_{y_1 + \delta y_1} = \left(\frac{c_{y_1}}{m} \right)_{y_1 + \delta y_1} \cdot \delta x_1 = \\ &= \left[\left(\frac{c_{y_1}}{m} \right)_{y_1} + \delta y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{c_{y_1}}{m} \right) \right] \delta x_1. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Общий поток через весь контур L равен алгебраической сумме частичных потоков:

$$\begin{aligned} P &= P_{AB} + P_{DC} + P_{AD} + P_{BC} = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{c_{x_1}}{m} \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{c_{y_1}}{m} \right) \right] \delta x_1 \delta y_1, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где запись c_{x_1} и c_{y_1} — означает, что компоненты вектора скорости \mathbf{C} берутся на местности.

Подставляя (2.8 в (2.3') и учитывая, что $\delta s = \delta x \delta y = \delta s_1 = \frac{\delta x_1 \delta y_1}{m}$, получим формулу для преобразования плоской дивергенции

$$\operatorname{div} \mathbf{C} = m^2 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{c_{x_1}}{m} \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{c_{y_1}}{m} \right) \right]. \quad (2.9)$$

Эта формула сложнее обычной формулы плоской дивергенции. Действительно, раскрывая (2.9), получим:

$$\operatorname{div} \mathbf{C} = m \left(\frac{\partial c_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial c_{y_1}}{\partial y_1} \right) - \left(c_{x_1} \frac{\partial m}{\partial x_1} + c_{y_1} \frac{\partial m}{\partial y_1} \right),$$

т. е. появляется не только масштабный множитель m , но и дополнительное слагаемое, описывающее горизонтальную адвекцию масштабного множителя

$$A_m = - \left(c_{x_1} \frac{\partial m}{\partial x_1} + c_{y_1} \frac{\partial m}{\partial y_1} \right).$$

Завихренность поля вектора скорости \mathbf{C} (вихрь, ротация поля) равна

$$\operatorname{rot} \mathbf{C} = \begin{vmatrix} I & J & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = I \left(\frac{\partial c_z}{\partial y} - \frac{\partial c_y}{\partial z} \right) + J \left(\frac{\partial c_x}{\partial z} - \frac{\partial c_z}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y} \right).$$

Будем рассматривать лишь завихренность вдоль вертикальной оси, интерпретируя ее как предел отношения циркуляции Γ по замкнутому контуру L элементарной площадки к ее площади δs при условии, что δs стремится к нулю.

$$\Omega_z = \lim_{\delta s \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{\delta s}. \quad (2.10)$$

Поскольку циркуляция вектора скорости представляет собой количественную характеристику среднего переноса жидкости вдоль замкнутого контура L , т. е.

$$\Gamma = \oint_L c_L dL,$$

где c_L — скорость жидкости, а dL — векторный элемент контура L , и рассматривая, например, циркуляцию жидкости против часовой стрелки, когда $\Gamma > 0$, получим (рис. 7):

$$\begin{aligned} \Gamma_{ABCD} &= (c_x \delta x)_{x_1, y_1} + c_y \delta y_{x_1 + \delta x_1, y_1} - \\ &- (c_y \delta y)_{x_1, y_1} - (c_x \delta x)_{x_1, y_1 + \delta y_1} = \left(\frac{c_{x_1}}{m} \right)_{x_1, y_1} \delta x_1 + \\ &+ \left(\frac{c_{y_1}}{m} \right)_{x_1, y_1} \delta y_1 + \delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{c_{y_1}}{m} \delta y_1 \right) - \left(\frac{c_{y_1}}{m} \right)_{x_1, y_1} \delta y_1 - \\ &- \left(\frac{c_{x_1}}{m} \right)_{x_1, y_1} \delta x_1 - \delta y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{c_{x_1}}{m} \delta x_1 \right) = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{c_{y_1}}{m} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{c_{x_1}}{m} \right) \right] \delta x_1 \delta y_1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Учитывая это значение циркуляции, по формуле (2.10) получим

$$\Omega_z = m^2 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{c_{y_1}}{m} \right) - \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{c_{x_1}}{m} \right) \right]. \quad (2.12)$$

Выполняя аналогичные преобразования, придем к следующим выражениям для плоского оператора Лапласа и адвективной производной:

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \text{div} (\text{grad} f) = m^2 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1} \right) \right] = \\ &= m^2 \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y_1^2} \right); \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} A_f &= u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (uf) + \frac{\partial}{\partial y} (vf) - f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \\ &= \text{div} (f \mathbf{C}) - f \text{div} \mathbf{C} = m^2 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_1 f_1}{m} \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{v_1 f_1}{m} \right) \right] - \\ &- f_1 m^2 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_1}{m} \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{v_1}{m} \right) \right] = m^2 \left(\frac{u_1}{m} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{v_1}{m} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \right) = \\ &= m \left(u_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

2. Перейдем теперь к преобразованию уравнений динамики атмосферы в изобарической системе координат x_ζ , y_ζ , ζ в натуре (см. уравнения (3.2)–(3.5), (3.2)–(3.10) в разделе 1) к названной системе x_1 , y_1 , ζ на карте конформной проекции.

Уравнение состояния (3.2) и уравнение статики (3.3) не выражают зависимостей от горизонтальных координат, поэтому они не

изменяются при переходе к другим координатам, т. е. при учете масштабного множителя картографической проекции.

В уравнении неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \zeta} = 0$$

от системы координат зависят лишь слагаемые, описывающие плоскую дивергенцию. С учетом полученной выше формулы (2.9) перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\begin{aligned} m^2 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_1}{m} \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{v_1}{m} \right) \right] + \frac{\partial \dot{\omega}_1}{\partial \zeta} = \\ = m \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right) - \left(u_1 \frac{\partial m}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial m}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial \dot{\omega}_1}{\partial \zeta} = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В уравнении притока тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{RT}{g\zeta} (\gamma_a - \gamma) \dot{\omega} = 0$$

для преобразования адвективной производной воспользуемся формулой (3.4), тогда получим

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} + m \left(u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial T_1}{\partial y_1} \right) - \frac{RT_1}{g\zeta} (\gamma_a - \gamma)_1 \dot{\omega}_1 = 0. \quad (2.16)$$

В уравнениях движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \dot{\omega} \frac{\partial u}{\partial \zeta} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \dot{\omega} \frac{\partial v}{\partial \zeta} = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} - lu$$

производные $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ запишем на основании формул (2.1),

а адвективные производные от компонент скорости A_u и A_v сначала приведем к так называемой форме Лэмба—Громеко

$$\begin{aligned} A_u = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} - v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 + v^2}{2} \right) - v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial E}{\partial x} - v \Omega_z, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} A_v = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} + u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \\ = \frac{\partial E}{\partial y} + u \Omega_z, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где E — кинетическая энергия горизонтального движения инварианта по отношению к ортогональному преобразованию координат, т. е.

$$E = \frac{u^2 + v^2}{2} = \frac{u_1^2 + v_1^2}{2}.$$

Запишем соотношения (2.17) и (2.18) с учетом масштабного множителя карты:

$$\begin{aligned} A_u &= m \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{u_1^2 + v_1^2}{2} \right) - v_1 m^2 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{v_1}{m} \right) - \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{u_1}{m} \right) \right] = \\ &= m \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \right) + v_1 \left(v_1 \frac{\partial m}{\partial x_1} - u_1 \frac{\partial m}{\partial y_1} \right), \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$A_v = m \left(u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right) - u_1 \left(v_1 \frac{\partial m}{\partial x_1} - u_1 \frac{\partial m}{\partial y_1} \right). \quad (2.20)$$

Окончательно уравнения движения будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + m \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \right) + \omega_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} &= -m \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + l v_1 - \\ &- v_1 \left(v_1 \frac{\partial m}{\partial x_1} - u_1 \frac{\partial m}{\partial y_1} \right), \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + m \left(u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right) + \omega_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} &= -m \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} - l u_1 + \\ &+ u_1 \left(v_1 \frac{\partial m}{\partial x_1} - u_1 \frac{\partial m}{\partial y_1} \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Исходя из уравнений динамики атмосферы в декартовой системе координат, соответственно получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} + m \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \right) + \omega_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} &= -\frac{m}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \\ &+ l v_1 - v_1 \left(v_1 \frac{\partial m}{\partial x_1} - u_1 \frac{\partial m}{\partial y_1} \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + m \left(u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \right) + \omega_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} &= -\frac{m}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial y_1} - l u_1 + \\ &+ u_1 \left(v_1 \frac{\partial m}{\partial x_1} - u_1 \frac{\partial m}{\partial y_1} \right), \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + m \left(\frac{\partial \rho_1 u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial y_1} \right) - \rho_1 \left(u_1 \frac{\partial m}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial m}{\partial y_1} \right) + \omega_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial z} = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} + m \left(u_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y_1} \right) + \omega_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} = \frac{\theta_1}{T_1} \frac{\varepsilon_1}{c_p \rho_1} \quad (2.26)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial t} + m \left(u_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial T_1}{\partial y_1} \right) + \omega_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T_1}{p_1} \left[\frac{\partial p_1}{\partial t} + \right. \\ \left. + m \left(u_1 \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial p_1}{\partial y_1} \right) + \omega_1 \frac{\partial p_1}{\partial z} \right] = \frac{\varepsilon_1}{c_p \rho_1} \quad (2.27) \end{aligned}$$

Таким образом, переход к координатам x_1, y_1 на карте приводит к двум эффектам:

- 1) при всех членах, содержащих производные по горизонтальным координатам, появляется множителем параметр m — масштабный множитель проекции карты;
- 2) в уравнении неразрывности и в уравнениях движения появляются новые слагаемые, содержащие производные от масштабного множителя. Эти дополнительные слагаемые сравнительно малы. При анализе атмосферных процессов над небольшими территориями можно полагать, что $m=1$. Однако полученные нами уравнения позволяют производить анализ и прогноз атмосферных процессов над большими областями и избежать трудностей, связанных с использованием сферической системы координат. Так, при рассмотрении планетарных движений, как отмечалось выше, можно пользоваться совокупностью различных картографических проекций для разных широт и учитывать соответствующие масштабы увеличения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белов П. Н. Численные методы прогноза погоды. — Л.: Гидрометеоздат, 1975. — 392 с.
2. Борисенков Е. П., Гуров В. П., Титов С. И. Динамика атмосферы и численные методы прогноза погоды. Л., ЛВИКА им. Можайского, 1967. — 486 с.
3. Гандин Л. С. Дубов А. С. Численные методы краткосрочного прогноза погоды. — Л.: Гидрометеоздат, 1968. — 427 с.
- Граур А. В. Математическая картография. Изд-во МГУ, 1956. — 372 с.
5. Лаптев Г. Ф. Элементы векторного исчисления. М.: Наука, 1975. — 336 с.
6. Лекции по численным методам краткосрочного прогноза погоды. Региональный уч. семинар ВМО. Москва, 17/XI—14/II 1965 г. — Л.: Гидрометеоздат, 1969. — 734 с.
7. Панин Б. Д., Титов С. И. Численный анализ и прогноз полей метеорологических элементов. Л., ЛКВИА им. Можайского, 1969. — 393 с.
8. Юдин М. И. Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды. — Л.: Гидрометеоздат, 1963. — 404 с.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
I. Уравнения динамики атмосферы в различных системах координат	
1.1. Локальная декартова система координат	4
1.2. Полные уравнения динамики атмосферы с обобщенной вертикальной координатой	10
1.3. Изобарическая система координат	15
1.4. σ -система координат	19
1.5. Изэнтропическая система координат	25
1.6. Сферическая система координат	29
II. Учет масштабных множителей картографических проекций в уравнениях динамики атмосферы	
2.1. Некоторые сведения о картографических проекциях	31
2.2. Уравнения динамики атмосферы в прямоугольных координатах на карте равноугольной проекции	41
Литература	48

Раиса Петровна Репинская
УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ
В КООРДИНАТНОЙ СИСТЕМЕ

Конспект лекций

Редактор *Т. В. Иващенко*

Корректор *Л. В. Ломакина*

Сдано в набор 16.11.81. Подписано в печать 9.04.82. М-32965.
Формат 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 2. Лит. гарн. Печать высокая.
Печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 3. Тираж 500 экз. Темплан 1982 г.
Поз. 96. Зак. 318. Цена 10 к.

Издание ЛПИ им. М. И. Калинина, 195251, Ленинград, Политехническая, 29.
Типография ВОК ВМФ