

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

А. С. ГАВРИЛОВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
МЕЗОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ
ПРОЦЕССОВ

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени М. И. КАЛИНИНА

ЛЕНИНГРАД
1988

УДК 551.509

Гаврилов А. С. Математическое моделирование мезометеорологических процессов. Учебное пособие. — Л., изд. ЛПИ, 1988, с. 96. (ЛГМИ).

В учебном пособии рассмотрены основные вопросы применения методов математического моделирования при теоретическом исследовании атмосферных процессов мезометеорологического диапазона масштабов. Основное внимание сосредоточено на физических аспектах вывода системы уравнений для описания мезометеорологических процессов, ее замыкания, параметризации различных физических процессов и численной реализации мезометеорологических моделей на ЭВМ.

Книга рассчитана на студентов и аспирантов метеорологических специальностей, а также на научных сотрудников и инженеров, работающих в области математического моделирования атмосферных процессов.

Илл. 10. Библ. 17.

Рецензенты: отдел динамической метеорологии ГГО им. А. И. Воейкова; Б. Г. Ваггер, д-р физ.-мат. наук (ЛИСИ).

© Ленинградский гидрометеорологический институт (ЛГМИ), 1988.

2

Ленинградский
Гидрометеорологический ин-т
БИБЛИОТЕКА
Л-д 195196 Малоохтинский пр., 98

1. ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование атмосферных процессов — бурно развивающаяся в настоящее время область теоретической метеорологии. По своей проблематике она занимает промежуточное положение между такими сложившимися направлениями как динамическая метеорология и численный прогноз погоды. Первое направление формулирует основные принципы физико-математического описания атмосферных процессов различных масштабов, реализуя их в виде постановок соответствующих математических задач с получением, по возможности, набора аналитических решений в той или иной степени упрощения. Основное внимание второго направления сосредоточено на изучении специфики создания и практического использования численных моделей прогноза погоды, подготовке исходной информации и интерпретации результатов такого прогноза.

Современный подход при создании математических моделей атмосферных процессов основывается на решении комплексной проблемы, включающей в себя три одинаково важные задачи: формулировку физико-математической модели, составление численного алгоритма и реализацию последнего на ЭВМ. Накопленный в последние десятилетия опыт создания математических моделей, основанных на интегрировании нелинейной системы уравнений гидротермодинамики атмосферы, убедительно показал, что без взаимной увязки этих трех задач трудно рассчитывать на успех в создании оптимальной математической модели, т. е. такой модели, которая дает наилучший в определенном смысле результат с минимальными затратами ресурсов ЭВМ. Последний критерий является уже технико-экономическим и не только предопределяет широту внедрения в народное хозяйство результатов исследований, но и во многом собственно возможность проведения этих исследований.

Для построения оптимальной в указанном выше смысле математической модели важно произвести правильную предварительную типизацию атмосферных процессов. Среди многочисленных возможных способов такой типизации для решения этой проблемы наилучшим образом подходит типизация атмосферных движений по их пространственно-временным масштабам. Известно, что атмосферные процессы — это суперпозиция колебаний в весьма широком диапазоне временных и пространственных масштабов. Уравнения гидротермодинамики атмосферы — основной базис, на котором строится любая математическая модель атмосферы — с теоретической точки зрения допустимо использовать для описания всего

спектра атмосферных движений, однако практически это оказывается невозможным, да и в этом нет особой необходимости. Для обоснования этого вывода рассмотрим энергетический спектр флуктуаций скорости ветра в приземном слое, изображенный на рис. 1

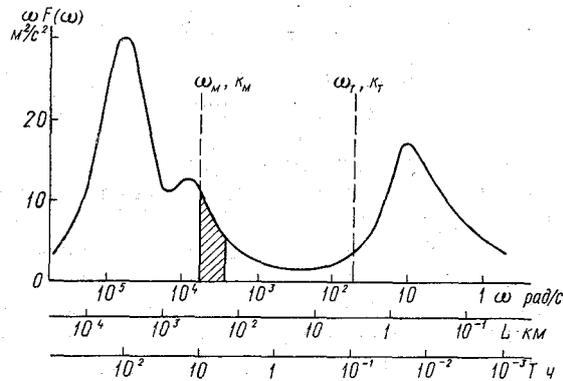


Рис. 1. Энергетический спектр флуктуаций скорости ветра в приземном слое атмосферы (по Ван дер Ховену, 1957 г.).

(аналогичные спектры других метеорологических величин имеют сходный вид). Энергетический спектр определяется в данном случае как косинус-преобразование Фурье от автоковариационной функции горизонтальной скорости $R_u(\tau) = \overline{u'(t)u'(t+\tau)}$:

$$F(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R_u(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (1.1)$$

где $\omega = 2\pi/T$ — круговая частота, а T — соответствующий период. Функцию $F(\omega)$ вследствие чрезвычайно широкого диапазона изменения ω в атмосфере удобно представлять в виде зависимости $\omega F(\omega)$ от $\ln \omega$, при этом очевидно

$$\int_0^{\infty} \omega F(\omega) d \ln \omega = \int_0^{\infty} F(\omega) d \omega = \sigma_u^2, \quad (1.2)$$

где σ_u^2 — дисперсия флуктуаций горизонтальной скорости. Из этого соотношения вытекает, что общая площадь, ограниченная кривой и осями координат на рис. 1, представляет собой суммарную «энергию» случайного процесса $u'(t)$, а площадь криволинейной трапеции с основанием $\Delta \ln \omega$ (на рисунке заштрихована) — вклад этого частотного диапазона в величину σ_u^2 . Такое представление делает удобным сравнение относительного вклада различных частотных диапазонов и, исходя из этого, проведение типизации.

Представим себе, что мы поставили перед собой задачу построения модели атмосферы, описывающей движения в диапазоне временных масштабов T от 10^{-2} с до 50 суток, что в переводе на пространственные масштабы L (с использованием так называемой гипотезы «замороженной» турбулентности Тейлора) соответствует приблизительно $L = 0,1 \text{ м} \div 4 \cdot 10^4 \text{ км}$, т. е. с учетом длины экватора охватывает все сколько-нибудь значимые в энергетическом смысле пространственные масштабы атмосферы. Для этой цели при численном решении задачи следует выбирать пространственную сетку с шагом $\Delta \leq 5$ см и временной шаг интегрирования системы уравнений гидротермодинамики $\Delta t \leq 0,5 \cdot 10^{-2}$ с. Число узлов вычислительной сетки составляет при этом $N \approx 10^{22}$. Не говоря уже о проблемах постановки краевых условий, даже элементарная обработка такого массива данных на ЭВМ будущих поколений (с быстродействием 10^{10} — 10^{12} операций в секунду) потребует десятков и сотен тысяч лет. В то же время для практики требуется концентрированная (сжатая) информация, направленная на решение того или иного конкретного вопроса. Такой информацией являются, как правило, простейшие статистические характеристики поля той или иной метеорологической величины: среднее ее значение или, реже, среднеквадратическое отклонение и другие параметры плотности распределения.

Все выше сказанное приводит к необходимости использования некоторого набора разнообразных моделей атмосферы, нацеленных на описание фиксированного диапазона спектра атмосферных движений. Оптимальный выбор совокупности таких моделей (комплекса моделей) требует оптимальной типизации спектра атмосферных движений. Обратимся вновь к рис. 1 и рассмотрим основные особенности поведения функции $\omega F(\omega)$ в различных частотных диапазонах. Прежде всего обращает на себя внимание существование трех экстремумов этой функции. Высокочастотный экстремум соответствует, как легко догадаться, трехмерным турбулентным возмущениям, имеющим линейные масштабы в десятки и сотни метров. Из эксперимента известно, что с ростом высоты над подстилающей поверхностью этот экстремум смещается в область более низких частот (средний размер турбулентных неоднородностей, как известно, растет с высотой). Низкочастотный экстремум наблюдается на частотах, соответствующих периодам $T = 5 \div 10$ суток, близких к так называемому естественному синоптическому периоду, определяющему типичное время существования возмущений синоптического масштаба. Для такого рода процессов характерна выраженная анизотропия горизонтальных и вертикальных масштабов («плоская» турбулентность). Промежуточный достаточно узкий пик в этом спектре соответствует частоте суточного хода, проявляется далеко не всегда и, как правило, не вносит заметного вклада в энергетику процесса.

Протяженный минимум спектра на рис. 1, отмеченный высокочастотной ω_T и низкочастотной ω_M границами, принадлежит к так

называемым мезомасштабам. Пространственные масштабы мезометеорологических неоднородностей составляют от 1—10 км до 100—500 км, причем границы здесь также как ω_T и ω_M , не могут быть определены точно и зависят от конкретных условий. Основной особенностью мезодиапазона является переходный характер происходящих здесь процессов: возмущения обладают в нем частично свойствами трехмерной турбулентности микродиапазона, а частично — свойствами квазидвумерных синоптических образований. Генерация энергии возмущений синоптического масштаба определяется, как известно, явлением бароклинной неустойчивости (в результате этого явления в зоне фронтов происходит, например, зарождение новых циклонических образований). В микродиапазоне основным фактором генерации энергии являются процессы гидродинамической и конвективной неустойчивости, приводящие к формированию трехмерных турбулентных возмущений. При этом в результате потери гидродинамической устойчивости крупномасштабным течением при его взаимодействии с подстилающей поверхностью наблюдается переход энергии непосредственно от макро- к микродиапазону, минуя мезодиапазон.

Какие же факторы определяют энергетику мезопроцессов? Это и бароклинная неустойчивость, способствующая возникновению таких образований как молодые циклоны (относящиеся к мезодиапазону вследствие малых своих начальных размеров), тропические циклоны (тайфуны), бризовая циркуляция. Это также конвективная неустойчивость, приводящая к формированию термиков, ячеистых облачных структур, гроз и сопутствующих им опасных явлений. Наконец, это орографические неоднородности подстилающей поверхности, формирующие целую группу специфических атмосферных явлений (подветренные волны, бора, горнодолинные ветры) и чисто адвективные процессы на мезомасштабах, формирующие такие явления, как туманы.

Особые свойства статистической структуры мезопроцессов и отсутствие здесь выраженного пространственно-временного масштаба делают весьма затруднительным построение каких-либо универсальных методов прогноза в этом диапазоне, основанных на статистическом подходе или даже на методах, аналогичных синоптическому, в котором свойства преемственности и типичности процессов являются определяющими. На практике такое положение приводит к тому, что для прогноза каждого из перечисленных выше мезоявлений используются свои специфические методы, привязанные, к тому же, к определенному региону.

Отмеченное выше обстоятельство выдвигает единственную перспективу построения универсального метода прогноза в мезометеорологическом диапазоне — это применение математических моделей, основанных на использовании уравнений гидротермодинамики атмосферы, соответствующим образом преобразованных с целью исключения колебаний синоптического и микротурбулентного диапазонов.

Основной задачей построения математических моделей мезо-процессов является создание на их основе новых методов прогноза погоды. Вследствие сравнительно небольших горизонтальных масштабов расчетной области мезомодели ($\approx 10^3$ км) прогноз на их основе имеет небольшую заблаговременность (сверхкраткосрочный прогноз), но зато позволяет получить высокое пространственное разрешение и достаточно точно рассчитать целый ряд характеристик, представляющих интерес для различных областей хозяйственной деятельности (специализированный прогноз). К числу последних относится, например, воспроизведение трехмерной структуры поля ветра и характеристик турбулентности в нижней тропосфере, необходимых для решения задач охраны атмосферы и авиационной метеорологии. Острая необходимость в совершенствовании методов прогноза загрязнения атмосферы промышленными выбросами в настоящее время является основным стимулом создания все более физически содержательных математических моделей мезо-процессов.

Основной трудностью, препятствующей практическому внедрению математических моделей мезо-процессов в народное хозяйство, является проблема получения полей метеозаэlements, необходимых в качестве начальных условий для интегрирования системы уравнений гидротермодинамики атмосферы. Существующая сеть метеостанций, которые даже в густонаселенных районах располагаются на расстоянии не менее 50—100 км друг от друга, не позволяет восстанавливать структуру метеополей с необходимой степенью детализации. Отметим, что решение такого рода задачи уже представляет значительный интерес для практики (примером здесь может служить проблема диагноза состояния атмосферы в районе аэропорта). Комплекс научных и технических задач для ее решения концентрируется в настоящее время в виде нового направления в прикладной метеорологии, получившего за рубежом название «Now casting» («прогноз сейчас»), основная цель которого состоит в разработке методов диагноза состояния атмосферы и его прогноза с минимальной заблаговременностью (≈ 3 ч), необходимой для распространения информации и ее усвоения пользователями.

Существует два пути решения проблемы диагноза метеорологических полей. Первый путь — сгущение сети метеостанций, учащение измерений и повышение их точности — является, по существу, экстенсивным и неприменимым как сейчас, так и в будущем чисто по экономическим причинам. Второе направление основывается на использовании в дополнение к прямым метеорологическим измерениям дистанционных методов зондирования атмосферы, которые, однако, являются лишь косвенными методами оценки состояния среды и не могут непосредственно использоваться в качестве начальных условий для той или иной математической модели. Основной метод решения проблемы диагноза состояния атмосферы в этом случае состоит в построении алгоритма простран-

ственно-временного (четырёхмерного) усвоения разнообразной доступной гидрометеорологической информации, как прямой, так и косвенной (данных метеорологических радиолокаторов, метеоспутников, лазерного и акустического зондирования). Подобная задача может быть поставлена как статистическая (с использованием предварительных сведений о статистической структуре метеополей), так и динамическая, с применением той или иной мезомодели в качестве пространственно-временного интерполянта. Последний способ оказывается более перспективным из-за отмеченных выше особенностей статистической структуры метеорологических полей в мезодиапазоне и реализуется в настоящее время с помощью аппарата сопряженных уравнений гидротермодинамики атмосферы, разработанного под руководством академика Г. И. Марчука.

Основоположниками советской школы теоретической мезометеорологии явились такие крупные ученые как И. А. Кибель и А. А. Дородницын. Значительный вклад в исследование этой проблемы внесли Л. Т. Матвеев, Л. Н. Гутман, Д. Л. Лайхтман, Г. И. Марчук. Вопросы математического моделирования нашли развитие в работах А. Е. Алояна, Б. В. Вагера, Н. Е. Вельтищева, В. В. Пененко и других исследователей.

Повсеместное внедрение вычислительной техники в различные отрасли народного хозяйства делает возможным в настоящее время широкое использование накопленного потенциала в области математического моделирования мезопроцессов в практике автоматизированного прогнозирования.

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МЕЗОМЕТЕОРОЛОГИИ

2.1. Исходные уравнения гидротермодинамики атмосферы

Запишем систему уравнений гидротермодинамики атмосферы на вращающейся Земле в системе декартовых координат x_i , направив ось $x_1 \equiv x$ для определенности на восток, ось $x_2 \equiv y$ — на север, а $x_3 \equiv z$ — вертикально вверх:

$$\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g \delta_{i3} - 2\rho \varepsilon_{i\alpha\beta} \omega_\alpha u_\beta + \rho \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\alpha^2}; \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} = \frac{L'}{c_p} \Phi + \varepsilon_R + \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_\alpha^2}; \quad (2.1.2)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial q}{\partial x_\alpha} = -\Phi + \kappa_q \frac{\partial^2 q}{\partial x_\alpha^2}; \quad (2.1.3)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (2.1.4)$$

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} \quad (2.1.5.)$$

$$p = \rho RT. \quad (2.1.6)$$

Первое уравнение — уравнение динамики атмосферы — является следствием закона сохранения количества движения, второе — уравнение переноса потенциальной температуры θ — следствие первого начала термодинамики, и уравнение (2.1.3), описывающее перенос массовой доли водяного пара q , так же как и уравнение неразрывности (2.1.4), являются следствиями закона сохранения массы. Здесь u_i — компоненты вектора скорости ветра вдоль соответствующих осей ($u_1 \equiv u$, $u_2 \equiv v$, $u_3 \equiv w$); p — давление; ρ — плотность воздуха, а c_p — его теплоемкость при постоянном давлении; g — ускорение свободного падения; ω_i — компоненты вектора угловой скорости вращения Земли; Φ — скорость образования жидкой фазы в атмосфере; ε_R — радиационный приток тепла; T — абсолютная температура воздуха; R — газовая постоянная воздуха; L' — удельная теплота парообразования; ν , χ , χ_q — коэффициенты молекулярного переноса количества движения, тепла и водяного пара; $p_0 = 1000$ гПа; δ_{ij} — символ Кронекера (единичный тензор):

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \neq j; \end{cases}$$

$\varepsilon_{i\alpha\beta}$ — единичный, полностью антисимметричный тензор третьего ранга (тензор Леви — Чивита), где индексы i , α , β образуют круговую перестановку (123, 231, 312 и т. д.).

Тензорная форма записи уравнений (2.1.1) — (2.1.4) принята из соображений удобства последующих преобразований и подразумевает проведение суммирования по какому-либо из повторяющихся индексов. Так, например, для адвективного члена в уравнении (2.1.1) справедливо

$$u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \equiv u_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_i}{\partial x_3}.$$

Остановимся также на форме записи члена в уравнении (2.1.1), описывающего силу Кориолиса, с помощью тензора Леви — Чивита. Применяя подробную запись, получим

$$-2 \varepsilon_{1\alpha\beta} \omega_\alpha u_\beta = -2 (\varepsilon_{123} \omega_2 u_3 - \varepsilon_{132} \omega_3 u_2) = -2 (\omega_2 u_3 - \omega_3 u_2),$$

$$-2 \varepsilon_{2\alpha\beta} \omega_\alpha u_\beta = -2 (\omega_3 u_1 - \omega_1 u_3),$$

$$-2 \varepsilon_{3\alpha\beta} \omega_\alpha u_\beta = -2 (\omega_1 u_2 - \omega_2 u_1),$$

где учтено свойство этого тензора, что при «правильной» круговой перестановке все его члены равны единице ($\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$),

а при перестановке произвольных двух индексов знак этой величины меняется на противоположный (свойство антисимметричности). Излишне говорить, что при совпадении каких-либо двух индексов значение $\varepsilon_{i\alpha\beta}$ равно нулю.

Система уравнений (2.1.1) — (2.1.6) — незамкнута, ее необходимо дополнить выражениями для скорости образования жидкой фазы Φ и для радиационного притока тепла ε_R . Кроме того, данная система уравнений описывает атмосферные процессы во всем спектре атмосферных движений и требует специальных преобразований для использования ее в мезометеорологическом интервале спектра атмосферных движений.

2.2. Общий подход к фильтрации уравнений

Преобразование системы уравнений гидротермодинамики атмосферы применительно к описанию мезопроцессов требует, как уже отмечалось, исключения из спектра расчетных величин высокочастотных (мелкомасштабных) флуктуаций микротурбулентного происхождения и низкочастотных возмущений синоптического масштаба. С позиции теории фильтрации случайных процессов первая из этих операций представляет собой процедуру сглаживания, а вторая — исключение тренда (суперпозиции колебаний с длинами волн или периодами, превосходящими размер исследуемой области или длину временного ряда).

Представим функции $f = u, \theta, q, p$ в виде суммы возмущений, относящихся к различным диапазонам спектра атмосферных движений: $f = \tilde{f} + \bar{f} + f'$, где первое слагаемое представляет собой колебания синоптического масштаба ($k < k_M$), второе — мезомасштабные ($k_M < k < k_T$) и третье — турбулентные флуктуации ($k > k_T$). Схематизация представления функции в различных диапазонах масштабов дана на рис. 2. Для дальнейшего будет полезно провести также и объединение двух соседних диапазонов: $\hat{f} = f - \bar{f} = \tilde{f} + f'$ (сумма возмущений микро-мезодиапазона) и $\check{f} = f - f' = \tilde{f} + \bar{f}$ (сумма возмущений макро-мезодиапазона).

Конкретная процедура преобразования поля $f(\vec{x}, t)$ к $\tilde{f}, \bar{f}, f'(\vec{x}, t)$ чаще всего строится путем использования оператора пространственно-временного сглаживания

$$\{f(\vec{x}, t)\} = \int G(\vec{x} - \vec{x}', t - t') f(\vec{x}', t') d\vec{x}' dt', \quad (2.2.1)$$

где интегрирование производится по всему объему течения и за некоторый достаточно большой промежуток времени (заведомо превышающий период наиболее низкочастотных из фильтруемых колебаний).

Какой фильтр $G(\vec{x}, t)$ не был бы выбран, во всех случаях основными его параметрами будут характерные пространственные $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ и временной T_c масштабы сглаживания. При этом важ-

ным является согласование этих значений с параметрами численной модели и, прежде всего, с дискретностью вычислительной сетки и масштабом расчетной области. В этом случае необходимо исходить из известного правила, согласно которому для описания в дискретной системе точек непрерывного случайного процесса с гармониками, имеющими минимальные период τ_m и длину волны l_m , требуется дискретность $\tau_m/2$ и $l_m/2$. Последний результат,

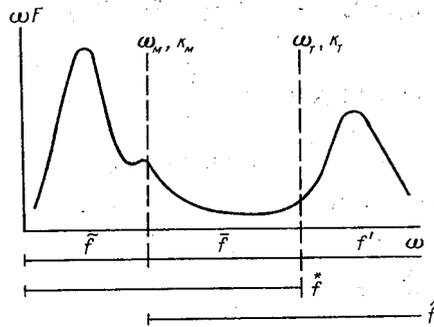


Рис. 2. К определению спектральных диапазонов колебаний метеорологических величин.

составляющий содержание известной теоремы теории случайных процессов (теорема Котельникова), относится лишь к дискретной системе точек бесконечной протяженности. Практически в математических моделях количество узлов вычислительной сетки весьма ограничено. Это приводит к тому, что для корректного описания гармоник требуется уже не две точки на период τ_m или длину волны l_m , а несколько больше ($\approx 4-8$).

Для установления вида фильтра $G(\vec{x}, t)$, позволившего бы в результате операции фильтрации выделить колебания макромасштабного диапазона \tilde{f} и колебания макро-мезомасштабного диапазона $\hat{f} = \tilde{f} + \bar{f}$, рассмотрим пример применения процедуры фильтрации к функции лишь одной пространственной координаты $f(x)$. Определим спектральный диапазон \tilde{f} в полосе волновых чисел $[0, k_M]$, а \hat{f} — в полосе $[0, k_T]$ и введем два фильтра G_M и G_T из соотношений:

$$\tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G_M(x - x') f(x') dx', \quad (2.2.2)$$

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G_T(x - x') f(x') dx'.$$

Применим к обеим частям первого из этих равенств оператор преобразования Фурье и используем известную теорему Бореля о свертке:

$$FT[\tilde{f}(x)] = FT \left[\int_{-\infty}^{\infty} G_M(x-x')f(x')dx' \right] = FT[G_M(x)] \cdot FT[f(x)],$$

$$\text{где } FT[f(x)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Из этого соотношения следует, что для удовлетворения указанного выше условия относительно спектрального состава $\tilde{f}(x)$ необходимо выбрать такой фильтр $G_M(x)$, чтобы его преобразование Фурье имело вид

$$FT[G_M(x)] = \begin{cases} 1, & k < k_M, \\ 0, & k \geq k_M, \end{cases}$$

откуда, в результате применения обратного преобразования Фурье, можно получить

$$G_M(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin k_M x}{x} \quad (2.2.3)$$

и, аналогично,

$$G_T(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin k_T x}{x}.$$

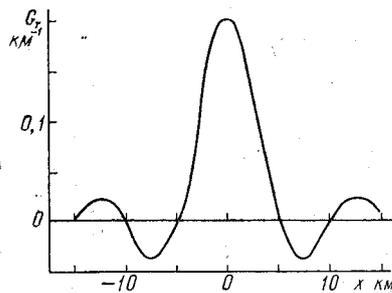


Рис. 3. Пример полосового фильтра нижних частот (формула (2.2.3)) для $k_M = 2\pi/L_M$ и масштаба сглаживания $L_M = 10$ км.

Общий вид такого рода фильтра (называемого часто полосовым фильтром нижних частот) представлен на рис. 3.

Определив \tilde{f} и \hat{f} из (2.2.2) теперь уже нетрудно рассчитать \bar{f} и f' с помощью соотношений:

$$\bar{f}(x) = \hat{f}(x) - \tilde{f}(x),$$

$$f'(x) = \tilde{f}(x) - \hat{f}(x),$$

описывающих процедуру исключения тренда.

Для последующих преобразований уравнений гидротермодинамики атмосферы важно выяснить основные свойства оператора пространственно-временного сглаживания (2.2.1) с фильтром (2.2.3). Рассмотрим для этой цели особенности применения фильтра $G_M(x)$ к функции $f(x)$, представляемой в виде суперпозиции двух гармоник с соответствующими амплитудами и фазами:

$$f = \tilde{f} + \hat{f},$$

$$\begin{aligned}\bar{f} &= a_1 \cos k_1 x + b_1 \sin k_1 x, \\ \tilde{f} &= a_2 \cos k_2 x + b_2 \sin k_2 x,\end{aligned}$$

где волновые числа $k_1 < k_M$ и $k_2 \geq k_M$. Вычисляя $\{f\}$ с учетом

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos k_i x \\ \sin k_i x \end{array} \right\} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos k_i x \\ \sin k_i x \end{pmatrix}, & k_i < k_M, \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos k_i x \\ \sin k_i x \end{pmatrix}, & k_i = k_M, \\ 0, & k_i > k_M, \end{cases}$$

получаем

$$\{f\} = a_1 \cos k_1 x + b_1 \sin k_1 x, \quad (2.2.4)$$

т. е. гармоники с $k_1 < k_M$ выделяются в результате фильтрации без каких-либо амплитудных или фазовых искажений. Применяя повторно оператор сглаживания к (2.2.4), нетрудно убедиться, что

$$\{\{f\}\} = \{\tilde{f}\} = \tilde{f}, \quad (2.2.5)$$

откуда также вытекает

$$\{\hat{f}\} = \{f - \{f\}\} = 0. \quad (2.2.6)$$

Исследуем далее вопрос о возможности внесения оператора сглаживания с фильтром $G(x)$ под знак производной по направлению x . Дифференцируя $\{f\}$ и используя интегрирование по частям с $G(x)$ 0 при $x \rightarrow \pm \infty$, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \{f\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \frac{\partial G(x-x')}{\partial x} dx' = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \frac{\partial G(\eta)}{\partial \eta} d\eta = \\ &= -f(x') G(x-x') \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial \eta} G(\eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x'} G(x-x') dx' = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \right\}.\end{aligned}$$

Значительно сложнее дело обстоит с преобразованием квадратичных величин. Можно показать, например, что

$$\{\{f\}\{f\}\} = \{f\}^2 + I(k)$$

$$\{\hat{f}\{f\}\} = \{f - \{f\}\{f\}\} = J(k), \quad (2.2.7)$$

где $I, J(k)$ — остаточные члены, равные нулю лишь в том случае, если $f(x)$ — постоянная величина. Отметим, что при использова-

ний осреднения по ансамблю реализаций (осреднения Рейнольдса) подобных проблем не возникает и всегда имеет место

$$\langle\langle f \rangle\rangle \langle f \rangle = \langle f \rangle^2, \quad \langle f' \langle f \rangle \rangle = 0,$$

где $f' = f - \langle f \rangle$, а угловые скобки обозначают осреднение по ансамблю.

Причина появления в (2.2.7) остаточных членов станет понятной, если учесть, что гармоники с периодами или длинами волн, близкими к временному T или пространственному Δ масштабам сглаживания, не описываются корректно в дискретной системе точек с шагами T и Δ , но и не сглаживаются в результате фильтрации.

Продemonстрируем те последствия, к которым может привести появление остаточных членов типа $I(k)$, $J(k)$ на примере фильтрации нелинейного уравнения адвекции несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_\alpha u_i}{\partial x_\alpha} = 0.$$

Подставив в это уравнение $u_i = \bar{u}_i + u'_i$, где $\bar{u}_i = \langle u_i \rangle$, а $u'_i = u_i - \bar{u}_i$, запишем

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{u}_i \bar{u}_\alpha + u'_i \bar{u}_\alpha + \bar{u}_i u'_\alpha + u'_i u'_\alpha) = 0.$$

Применяя к этому соотношению оператор фильтрации (2.2.1) с учетом его свойств (2.2.5), (2.2.6) и (2.2.7), можно в итоге получить уравнение для сглаженной компоненты скорости

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_\alpha}{\partial x_\alpha} = - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (R_{i\alpha} + I_{i\alpha}), \quad (2.2.8)$$

где $R_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle$ — напряжение трения за счет мелкомасштабных возмущений поля скорости, а $I_{ij} = \langle \bar{u}_i \bar{u}_j + u'_i \bar{u}_j + \bar{u}_i u'_j \rangle - \bar{u}_i \bar{u}_j$ — суммарный остаточный член.

В данном случае величина I_{ij} играет роль дополнительного напряжения, которое аналогично напряжению Рейнольдса R_{ij} обуславливает энергообмен между различными спектральными диапазонами и, прежде всего, направленный перенос энергии от крупномасштабных к мелкомасштабным флуктуациям поля скорости за счет нелинейного взаимодействия возмущений различных масштабов.

Важно отметить, что R_{ij} является физической характеристикой турбулентного течения, а I_{ij} — лишь следствие проведенных формальных преобразований по упрощению системы уравнений гидротермодинамики атмосферы. По этой причине проблема параметризации R_{ij} (аналогично другим турбулентным характеристикам) представляет собой, по-существу, проблему физики турбулентного потока (см. далее гл. 3), а методы параметризации I_{ij} и других оста-

точных членов входят составной частью в проблемы численной реализации мезометеорологических моделей (гл. 5). Существенно, однако, что и в последнем случае должны быть в той или иной мере учтены спектральные особенности метеорологических полей. В этом отношении две введенные нами границы спектральных интервалов заметно отличаются друг от друга. В окрестности низкочастотной границы имеет место довольно быстрое уменьшение спектральной плотности с ростом частоты ($F(\omega) \sim \omega^{-5/3}$), т. е. амплитуды возмущений мезодиапазона оказываются по сравнению с фоновыми значительно меньше (рис. 4, а). Между тем, амплитуды турбулентных флуктуаций, как это следует из формы спектральной плотности, пример которой представлен на рис. 1, оказываются сравнимыми или даже превосходят амплитуду мезовозмущений (рис. 4, б). Последнее обстоятельство позволяет во многих случаях параметризации микротурбулентного обмена ограничиваться приближениями, используемыми в теории стационарного и горизонтально-однородного атмосферного пограничного слоя.

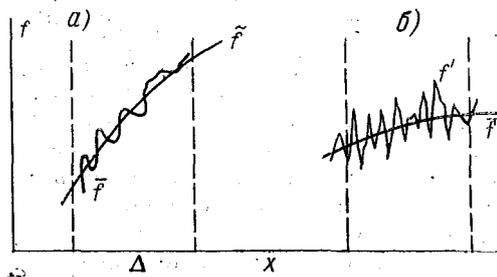


Рис. 4. Примеры флуктуаций на мезомасштабах \bar{f} на фоне эволюции макросиноптического поля \tilde{f} (а) и турбулентных флуктуаций f' на фоне мезометеорологических колебаний \bar{f} (б).

В заключение этого раздела окончательно сформулируем необходимые для дальнейшей процедуры фильтрации для выделения макровозмущений

$$\tilde{f} \equiv \{f\}_M = \int f(\vec{x}', t') G_M(\vec{x} - \vec{x}', t - t') d\vec{x}' dt'$$

и мезовозмущений

$$\bar{f} \equiv \{f\}_T - \{f\}_M = \int f(\vec{x}', t') [G_T(\vec{x} - \vec{x}', t - t') - G_M(\vec{x} - \vec{x}', t - t')] d\vec{x}' dt',$$

а также соотношение для выделения микротурбулентных флуктуаций

$$f'(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t) - \{f\}_T,$$

где фильтры G_M и G_T конструируются на основе суперпозиции одномерных представлений (2.2.3) по каждой из координат и вре-

мени. При этом параметры пространственно-временного сглаживания этих фильтров должны быть согласованы с характерными пространственно-временными масштабами исследуемых процессов и дискретностью принимаемой вычислительной сетки.

2.3. Преобразование уравнений для описания мезопроцессов

Основная проблема, которая возникает при получении уравнений гидротермодинамики атмосферы, описывающей процессы в том или ином спектральном диапазоне, состоит в нелинейности этих уравнений.

Известно, что обычным способом преодоления этих трудностей является использование метода линеаризации, при котором предполагается малость флуктуаций некоторой величины f по сравнению с ее средним значением ($|\hat{f}/\bar{f}| \ll 1$). В атмосферных процессах подобное приближение может применяться для абсолютной температуры, плотности или давления, мезовозмущения которых действительно малы по сравнению со средними их значениями, но совершенно неприменимо для возмущений в поле ветра или влажности, имеющих обычно тот же порядок величины, что и средние (фоновые) их значения.

Проведем линеаризацию уравнения неразрывности (2.1.4), учитывая $|\hat{\rho}/\bar{\rho}| \ll 1$:

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}(1 + \hat{\rho}/\bar{\rho})} \frac{d}{dt} \bar{\rho} \left(1 + \frac{\hat{\rho}}{\bar{\rho}}\right) \approx -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dt},$$

или

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = \sigma_t + u_\alpha \sigma_\alpha,$$

где $\sigma_t = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dt}$, $\sigma_\alpha = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x_\alpha}$ — параметры фонового потока.

Данное линеаризованное уравнение неразрывности после применения процедуры фильтрации, изложенной в предыдущем разделе, записывается для макро-, мезо- и микродиапазонов следующим образом:

$$\frac{\partial \tilde{u}_\alpha}{\partial x_\alpha} = \sigma_t + \sigma_\alpha \tilde{u}_\alpha, \quad \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\alpha} = \sigma_\alpha \bar{u}_\alpha, \quad \frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\alpha} = \sigma_\alpha u'_\alpha. \quad (2.3.1)$$

Величины $L_i = \sigma_i^{-1}$ определяют пространственные масштабы, на которых изменение плотности приближенно совпадает со средним ее значением. В реальной атмосфере конкретный физический смысл имеет лишь вертикальный масштаб L_3 , приближенно равный толщине квазиоднородной атмосферы (≈ 8 км), а $L_1, L_2 \rightarrow \infty$.

При этом различают две формы записи уравнения неразрывности: в виде так называемого уравнения несжимаемости

$$\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (2.3.2)$$

справедливого для мезопроцессов, имеющих вертикальные масштабы $L_z \ll L_3$ (приближение «мелкой конвекции») и в виде так называемого приближения «глубокой конвекции»

$$\frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\alpha} = \sigma_3 \bar{u}_3, \quad (2.3.3)$$

где $\sigma_3 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial z} \approx \frac{g + \gamma R}{RT} \approx 10^{-4} \text{ м}^{-1}$ ($\gamma \equiv -\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \approx 6 \text{ град/км}$)

Уравнение неразрывности в микрометеорологическом диапазоне во всех случаях может записываться в форме уравнения несжимаемости, поскольку масштабы турбулентных флуктуаций всегда значительно меньше L_3 :

$$\frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0. \quad (2.3.4)$$

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь процессов с вертикальными масштабами $L_z \ll L_3$, куда может быть включено подавляющее число мезоявлений.

Рассмотрим первоначально уравнение для переноса потенциальной температуры (2.1.2). Представим в нем θ и u_i в виде суммы макровозмущений ($\tilde{\theta}$, \tilde{u}_i) и возмущений в области мезо- и микромасштабов ($\hat{\theta}$, \hat{u}_i). Опуская для простоты малые члены, описывающие молекулярный перенос, запишем

$$\frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\theta} + \hat{\theta}) + (\tilde{u}_\alpha + \hat{u}_\alpha) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\tilde{\theta} + \hat{\theta}) = \frac{L'}{c_p} \Phi + \varepsilon_R. \quad (2.3.5)$$

Используя уравнение несжимаемости (2.3.2) и осредняя полученное уравнение по мезо- и микроинтервалу спектра, получим

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}_\alpha \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_\alpha} = \frac{L'}{c_p} \bar{\Phi} + \bar{\varepsilon}_R - \frac{\partial \bar{H}_\alpha}{\partial x_\alpha}. \quad (2.3.6)$$

Здесь учтено, что $\langle \hat{\theta} \rangle = \langle \hat{\theta} \rangle = 0$. Новый член, который появился в правой части этого уравнения, описывает, очевидно, диффузию $\bar{\theta}$ за счет мезо- и микротурбулентных возмущений ($\bar{H}_\alpha = \tilde{u}_i \bar{\theta} - \tilde{u}_i \bar{\theta}$ — поток температуры в направлении оси x_i). Вычитая (2.3.6) из

(2.3.5), представим уравнение для переноса мезо-микровозмущений $\hat{\theta}$ в поле температуры в следующей форме:

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial t} + (\tilde{u}_\alpha + \hat{u}_\alpha) \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_\alpha} = \frac{L'}{c_p} \hat{\Phi} + \tilde{\varepsilon}_R - \hat{u}_\alpha \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \tilde{H}_\alpha}{\partial x_\alpha}. \quad (2.3.7)$$

Следует обратить внимание на структуру адвективного члена в этом уравнении: скорость переноса представляет собой полную скорость, т. е. перенос $\hat{\theta}$ (так же как и любой другой субстанции) обусловлен как макродвижениями, так и мезодвижениями. Кроме того, в правой части (2.3.7) как следствие нелинейности исходного уравнения появилось два новых члена. Один из них $(-\hat{u}_\alpha \cdot \partial \hat{\theta} / \partial x_\alpha)$ описывает генерацию возмущений $\hat{\theta}$ за счет неоднородности макромасштабного поля температуры, т. е. фактически отражает процесс каскадного переноса возмущений от макромасштабов к мезо- и микромасштабам. Второй из вновь появившихся членов — дивергенция потока \tilde{H}_i также отражает обмен между двумя этими диапазонами: легко заметить, что при суммировании (2.3.6) и (2.3.7) этот член исчезает. Наконец, важно отметить, что полученное уравнение (2.3.7) согласовано в статистическом смысле, так как в результате осреднения обеих его частей по мезо-микродиапазону превращается в тождество. Иначе говоря, роль члена с \tilde{H}_i в правой части (2.3.7) состоит в согласовании полей $\tilde{\theta}$ и $\hat{\theta}$ таким образом, чтобы во всех случаях выполнялось необходимое требование $\tilde{\theta} = 0$, вытекающее из физического смысла этой величины как разности $\theta - \hat{\theta}$.

На заключительном этапе преобразования уравнения теплопроводности подставим $\hat{\theta} = \bar{\theta} + \theta'$ и $\hat{u}_i = \bar{u}_i + u'_i$ в соотношение (2.3.7), проведем его осреднение по микродиапазону и, используя (2.3.6), запишем

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + (\tilde{u}_\alpha + \bar{u}_\alpha) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_\alpha} = \frac{L'}{c_p} \bar{\Phi} + \tilde{\varepsilon}_R - \bar{u}_\alpha \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{H}_\alpha - \tilde{H}_\alpha), \quad (2.3.8)$$

где $\bar{H}_i = \overline{u'_i \bar{\theta}} - \bar{u}_i \bar{\theta} = \overline{H_i + \bar{u}_i \bar{\theta} + u'_i \bar{\theta} + \bar{u}_i \theta'} - \bar{u}_i \bar{\theta}$ — сумма мелкомасштабного турбулентного потока температуры $H_i = \overline{u'_i \theta'}$ и соответствующего остаточного члена.

Используя аналогию между уравнениями для переноса потенциальной температуры и массовой доли водяного пара, запишем без вывода уравнения для \tilde{q} и \bar{q} :

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} + \tilde{u}_\alpha \frac{\partial \tilde{q}}{\partial x_\alpha} = -\tilde{\Phi} - \frac{\partial \tilde{Q}_\alpha}{\partial x_\alpha}, \quad (2.3.9)$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + (\bar{u}_\alpha + \hat{u}_\alpha) \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_\alpha} = -\Phi - \bar{u}_\alpha \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{Q}_\alpha - \hat{Q}_\alpha), \quad (2.3.10)$$

где $\bar{Q}_i = \bar{q} \hat{u}_i - \hat{q} \bar{u}_i$, $\hat{Q}_i = \hat{u}_i \bar{q} - \bar{u}_i \hat{q}$.

Обратимся теперь к более сложной процедуре — преобразованию уравнений динамики (2.1.1). Представим все зависимые переменные второго уравнения в виде $u_i = \bar{u}_i + \hat{u}_i$, $p = \bar{p} + \hat{p}$ и запишем его в следующей форме:

$$\begin{aligned} \bar{p} \left(1 + \frac{\hat{p}}{\bar{p}} \right) \left[\frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}_i + \hat{u}_i) + (\bar{u}_\alpha + \hat{u}_\alpha) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\bar{u}_i + \hat{u}_i) \right] = \\ = \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{p} + \hat{p})_i - g (\bar{p} + \hat{p}) \delta_{i3} - \\ - 2\varepsilon_{i\alpha\beta} \bar{p} \left(1 + \frac{\hat{p}}{\bar{p}} \right) \omega_\alpha (\bar{u}_\beta + \hat{u}_\beta), \quad (2.3.11) \end{aligned}$$

где также для простоты опущены малые члены, описывающие действие сил молекулярной вязкости. Особенностью преобразования уравнений динамики является использование приближения $|\hat{p}/\bar{p}| \ll 1$, которое позволяет заменить ρ на $\bar{\rho}$ в левой части (2.3.11) и в члене правой части этого уравнения, описывающем действие силы Кориолиса. Последовательно используя это приближение, мы должны были бы пренебречь \hat{p} по сравнению с \bar{p} и в члене правой части, описывающем действие силы тяжести. В этом случае, однако, математическая модель уже не будет отражать такой важный физический процесс, как формирование поля скорости под воздействием флуктуаций силы плавучести. Это важное обстоятельство было впервые отмечено еще в 1903 г. известным французским гидромехаником Буссинеском и впоследствии предположение о возможности использования приближения $|\hat{p}/\bar{p}| \ll 1$ во всех членах уравнения динамики, кроме силы плавучести, получило название приближения Буссинеска.

Используя данное приближение, а также уравнение несжимаемости (2.3.2), осредняя уравнение (2.3.11) по мезо-микродиапазону и поделив все его члены на $\bar{\rho}$, получим

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_\alpha \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - g \delta_{i3} - 2\varepsilon_{i\alpha\beta} \omega_\alpha \bar{u}_\beta - \frac{\partial \bar{R}_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}, \quad (2.3.12)$$

где $\bar{R}_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j$ — тензор напряжений, обусловленный мезо- и микромасштабными флуктуациями поля скорости и имеющий смысл турбулентного потока количества движения. Вычитая далее это уравнение из (2.3.11) (также поделив его предварительно

на $\tilde{\rho}$), запишем уравнение для мезо-микромасштабных флуктуаций поля скорости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + (\tilde{u}_\alpha + \hat{u}_\alpha) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_\alpha} = & -\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} - \frac{g}{\tilde{\rho}} \hat{\rho} \delta_{i3} - 2\varepsilon_{i\alpha\beta} \omega_\alpha \hat{u}_\beta - \\ & - \hat{u}_\alpha \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \tilde{R}_{i\alpha}}{\partial x_\alpha}. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Роль двух последних членов в правой части этого уравнения аналогична роли подобных членов в уравнении (2.3.7), что касается члена $g/\tilde{\rho} \cdot \hat{\rho}$, описывающего действие силы плавучести, то, несмотря на принятое ранее предположение об относительной малости $\hat{\rho}/\tilde{\rho}$, вклад его во вновь полученное уравнение для \tilde{u}_3 уже не является малым, поскольку в результате произведенного преобразования понизился порядок всех членов исходного уравнения (2.1.1). Исключены, в частности, наиболее значимые члены в третьем уравнении движения ($i=3$): вертикальный барический градиент и ускорение свободного падения, предположение о взаимной компенсации которых приводит к известному уравнению статики. Это утверждение касается также и уравнений динамики для горизонтальных компонент скорости (u_1, u_2), где в процессе преобразований исключены такие наиболее значимые члены, как барический градиент и сила Кориолиса (взаимная компенсация которых приводит, как известно, к геострофическим соотношениям).

Дальнейшее преобразование уравнений динамики не имеет принципиальных отличий от преобразования уравнений для потенциальной температуры и массовой доли водяного пара, поэтому после осреднения уравнения (2.3.13) по микродиапазону запишем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + (\bar{u}_\alpha + \bar{u}_\alpha) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} = & -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{g}{\bar{\rho}} \bar{\rho} \delta_{i3} - 2\varepsilon_{i\alpha\beta} \omega_\alpha \bar{u}_\beta - \\ & - \bar{u}_\alpha \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (R_{i\alpha} - \bar{R}_{i\alpha}), \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

где $\bar{R}_{ij} = \overline{\tilde{u}_i \tilde{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j = R_{ij} + I_{ij}$ — сумма турбулентного напряжения Рейнольдса $R_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$ и остаточного члена $I_{ij} = \overline{u_i u'_j + u'_j u_i} + \overline{u'_i u'_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$. При окончательной записи этого уравнения полезно перейти от мезофлуктуаций плотности $\tilde{\rho}$ к флуктуациям температуры \tilde{T} , используя представление

$$\frac{\tilde{\rho}}{\bar{\rho}} = \frac{\tilde{T}}{\bar{T}} + \frac{\tilde{\rho}}{\bar{\rho}},$$

полученное из уравнения состояния (2.1.6) путем его первоначального логарифмического дифференцирования и замены дифференциалов на флуктуации \bar{p} , \bar{T} и $\bar{\rho}$. Заключительным предположением в преобразовании уравнений динамики является допущение

$$\left| \frac{\bar{p}}{\bar{p}} \right| \ll \left| \frac{\bar{T}}{\bar{T}} \right| \sim \left| \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}} \right|, \quad (2.3.15)$$

также предложенное в свое время Буссинеском. Некоторое обоснование в пользу (2.3.15) будет дано в следующем разделе, а здесь, полагая $\bar{\rho}/\bar{\rho} \approx -\bar{T}/\bar{T}$, перепишем уравнение в наиболее часто используемой форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + (\bar{u}_\alpha + \bar{u}_\alpha) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} = & -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \beta_i \bar{\theta} - 2\varepsilon_{i\alpha\beta} \omega_\alpha \bar{u}_\beta - \bar{u}_\alpha \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_\alpha} - \\ & - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (R_{i\alpha} - \bar{R}_{i\alpha}), \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

где $\beta_i = (0, 0, \beta)$, $\beta = \frac{g}{\bar{T}}$ — так называемый параметр плавучести

и $\bar{\theta} \approx \frac{\bar{\theta}}{\bar{T}} \bar{T} - \frac{\bar{\theta} R}{c_p} \frac{\bar{p}}{\bar{p}} \approx \bar{T}$, как это следует из (2.1.6) с использованием приближений $\bar{\theta}/\bar{T} \approx 1$ и $|\bar{p}/\bar{p}| \ll |\bar{T}/\bar{T}|$.

Система уравнений (2.3.2), (2.3.8), (2.3.10) и (2.3.16) является системой уравнений гидротермодинамики атмосферы для описания мезометеорологических процессов. При ее применении в конкретных моделях мезопроцессов она может быть несколько упрощена и, главное, должна быть дополнена необходимыми замыкающими соотношениями.

2.4. Упрощение системы уравнений мезометеорологии

Полученная в предыдущем параграфе система уравнений для описания мезометеорологических процессов хотя и удовлетворяет требованиям п. 2.1, остается все же весьма громоздкой. Для решения различных классов задач она может быть несколько видоизменена и упрощена. Одним из основных критериев выделения того или иного класса задач является, как известно, пространственно-временные масштабы процесса. Поэтому для оценки вклада отдельных членов системы уравнений мезометеорологии введем характерные горизонтальный L_x , вертикальный L_z и временной τ_0 его масштабы. Напомним, что обычно под этими величинами подразумевают масштабы, изменение некоторых функций на которых имеет тот же порядок величины, что и сами эти функ-

ции (например, $L_x \sim \psi / \frac{\partial \psi}{\partial x}$). Для мезометеорологических процессов можно с точностью до порядка величины полагать $L_x \approx 10^3 \div 10^5$ м, $L_z \approx 10^3$ м, $\tau_0 \approx 10^3 \div 10^4$ с.

Рассмотрим первоначально верхний предел указанных интервалов, соответствующий таким мезопроцессам, как бризы, горнодолинные ветры, обтекание орографических неоднородностей и т. д., иначе говоря все процессы, в которых горизонтальный масштаб значительно превышает вертикальный. Проведем анализ третьего уравнения движения, записав его в следующей форме:

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial t}}_{(1)} + (\bar{u}_\alpha + \bar{u}_\alpha) \underbrace{\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_\alpha}}_{(2)} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3}}_{(3)} + \beta \bar{\theta} + \underbrace{2\omega_3 \bar{u}_1}_{(4)} -$$

$$- \underbrace{\bar{u}_\alpha \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_\alpha}}_{(5)} - \underbrace{\frac{\partial \bar{R}_{3\alpha}}{\partial x_\alpha}}_{(6)} + \underbrace{\frac{\partial \bar{R}_{3\alpha}}{\partial x_\alpha}}_{(7)}, \quad (2.4.1)$$

$$\underbrace{\frac{\bar{w}_0}{\tau_0}}_{(5)} \quad \underbrace{\frac{\sigma_0^2}{L_x}}_{(6)} \quad \underbrace{\frac{\sigma_0^2}{L_z}}_{(7)} \quad \underbrace{\frac{L_z}{\tau_0^2}}_{(8)}$$

где внизу под скобками приведены выражения для масштабов соответствующих членов (два масштабных комплекса (6) и (7) соответствуют горизонтальным и вертикальной составляющим дивергенции). В этих выражениях присутствуют масштабы также и температуры ($\theta_0 \approx 1^\circ \text{C}$), вертикальной упорядоченной скорости макропроцессов $\bar{w}_0 (\approx 10^{-2} \text{ м/с})$ и средних значений энергии турбулентных флуктуаций скорости $\sigma_0^2 (\approx 1 \text{ м}^2/\text{с}^2)$. Поделив масштабные комплексы всех членов этого уравнения на масштаб инерционного члена в левой части, получим набор безразмерных параметров, характеризующих с точностью до порядка величины вклад того или иного слагаемого по сравнению с первым:

$$\frac{\beta \theta_0 \tau_0^2}{L_z} \approx \frac{p_0 \tau_0^2}{\rho L_z^2} \approx 10^4, \quad \frac{\omega \tau_0 L_x}{L_z} \approx 10^2,$$

$$\frac{\bar{w}_0 \tau_0}{L_z} \approx 10^{-1}, \quad \frac{\sigma_0^2 \tau_0^2}{L_x L_z} \approx 1, \quad \frac{\sigma_0^2 \tau_0}{L_z^2} \approx 10^2, \quad (2.4.2)$$

где p_0 — масштаб давления. Согласованность порядков членов с номерами (2) и (3) вытекает из того, что максимальный порядок остальных членов не превосходит 10^2 , и поэтому член (3),

описывающий влияние силы плавучести, не может компенсироваться никаким другим членом уравнения, кроме силы барического градиента (2).

Таким образом, для мезопроцессов, в которых горизонтальный масштаб значительно превосходит вертикальный, вместо третьего уравнения движения может с достаточной для практических целей точностью использоваться уравнение статики

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} + \beta \bar{\theta} = 0, \quad (2.4.3)$$

с успехом применяемое, как известно, и для описания крупномасштабных атмосферных процессов, где также справедливо указанное выше соотношение масштабов (только в этом случае принимается $L_z \approx 10^4$ м и $L_x \approx 10^6 \div 10^7$ м).

Рассмотрим теперь нижнюю границу масштабов мезопроцессов ($L_x \approx L_z \approx 10^3$ м; $\tau_0 \approx 10^3$ с), которой соответствуют такие мезоявления как грозы, смерчи, торнадо, ячейковая конвекция и т. д. Оценка, аналогичная (2.4.2), приводит в данном случае к следующим результатам:

$$\frac{\beta \theta_0 \tau_0^2}{L_z} \approx \frac{\rho_0 \tau_0^2}{\rho L_z^2} \approx 10, \quad \frac{\omega \tau_0 L_x}{L_z} \approx 10^{-1},$$

$$\frac{\tilde{\omega}_0 \tau_0}{L_z} \approx 10^{-2}, \quad \frac{\sigma_0^2 \tau_0^2}{L_z^2} \approx \frac{\sigma_0^2 \tau_0^2}{L_z L_x} \approx 1. \quad (2.4.4)$$

Из них следует, что соотношения между двумя последовательными группами членов в иерархии возросло на порядок. Хотя главными членами уравнения, по-прежнему, остаются (2) и (3), относительный вклад других членов составляет теперь уже не 1%, как в первом случае, а 10%. Это означает, что при использовании третьего уравнения движения для описания процессов указанного выше типа необходимо помимо членов, выражающих действие сил барического градиента и плавучести, учитывать также инерционные члены, вертикальный и горизонтальный турбулентный обмен и член согласования (8). Уравнение (2.4.1) допустимо при этом представить в следующем виде:

$$\frac{\partial \bar{u}_3}{\partial t} + (\bar{u}_\alpha + \bar{u}_\alpha) \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_3} + \beta \bar{\theta} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (R_{3\alpha} - \bar{R}_{3\alpha}). \quad (2.4.5)$$

Получив с помощью соотношений (2.4.2) и (2.4.4) оценку масштаба мезофлуктуаций давления p_0 , можно теперь оценить вклад члена \bar{p}/ρ в соотношении (2.3.15); для чего достаточно его сравнить с каким-либо из членов правой части. Подставляя получен-

ную из (2.4.2) величину $p_0 \approx \beta \bar{\rho} \theta_0 L_z$ в неравенство (2.3.15) и поделив его на \bar{T}/\tilde{T} , убедимся, что

$$\frac{\bar{p} \tilde{T}}{\bar{p} \bar{T}} \approx \frac{\beta \bar{\rho} \theta_0 L_z \tilde{T}}{\bar{\rho} R \bar{T} \theta_0} = \frac{\beta L_z}{R} \approx 10^{-1}.$$

Таким образом, выполнение уравнения статики оказывается достаточным условием использования приближения (2.3.15).

Очевидно, что чем точнее выполняется это уравнение, тем с большим основанием можно использовать и данное приближение.

Получение двух форм третьего уравнения движения является основным элементом упрощения общей системы уравнений мезо-процессов. Проводя аналогичные рассуждения для остальных уравнений динамики, не трудно убедиться, что сила Кориолиса оказывается значительной лишь на больших горизонтальных масштабах, т. е. для процессов первого класса, и компенсируется при этом, главным образом, силами барического градиента и турбулентного трения. Кроме того, из двух членов, составляющих силу Кориолиса в уравнениях для горизонтальных компонент скорости, те из них, которые содержат вертикальную скорость, могут быть опущены без какой-либо потери точности.

В соответствии с двумя основными классами мезо-процессов различают и два основных типа мезомоделей: гидростатические (квазистатические) и негидростатические. В первом из них третье уравнение движения используется в вырожденной форме уравнения квазистатики (2.4.3), а во втором — в упрощенной форме (2.4.5).

Укажем еще один важный в практическом отношении и хорошо разработанный теоретический класс мезометеорологических моделей, соответствующий предельному переходу $L_x/L_z \rightarrow \infty$ — это так называемые модели горизонтально-однородного атмосферного пограничного слоя (АПС).

2.5. Основная задача мезометеорологии

Основываясь на результатах предыдущего параграфа, запишем общую систему уравнений мезометеорологии в квазистатическом приближении, вернувшись к обычным обозначениям, принятым в теоретической метеорологии:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{v} \bar{u} - \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + F_{Tx} + \varphi_x; \quad (2.5.1)$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \bar{u} \bar{v} - \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + F_{Ty} + \varphi_y; \quad (2.5.2)$$

$$-\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \beta \bar{\theta} = 0; \quad (2.5.3)$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = \frac{L'}{c_p} \bar{\Phi} + \bar{\varepsilon}_R + F_H - \bar{u} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} - \bar{v} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} - \bar{w} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \varphi_H; \quad (2.5.4)$$

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = -\bar{\Phi} + F_Q - \bar{u} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} - \bar{v} \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} - \bar{w} \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} + \varphi_Q; \quad (2.5.5)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\bar{u} + \tilde{u}) \frac{\partial}{\partial x} + (\bar{v} + \tilde{v}) \frac{\partial}{\partial y} + (\bar{w} + \tilde{w}) \frac{\partial}{\partial z},$$

где $l=2\omega \sin \varphi$ — параметр Кориолиса; F_{Tx} , F_{Ty} — силы турбулентного трения (дивергенция от соответствующих тензоров напряжений), F_H и F_Q — турбулентные притоки тепла и водяного пара. Остальные члены в правых частях уравнений отражают влияние крупномасштабных полей горизонтальных компонент скорости \tilde{u} , \tilde{v} , температуры $\tilde{\theta}$ и массовой доли водяного пара \tilde{q} .

Члены согласования мезо- и макрополей φ_x , φ_y , φ_H , φ_Q могут быть исключены из данной системы уравнений путем использования соответствующих уравнений для макромасштабных полей, которые с учетом результатов п. 2.3 записываются в следующей форме:

$$\frac{D\tilde{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + l\tilde{v} - \varphi_x; \quad (2.5.6)$$

$$\frac{D\tilde{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} - l\tilde{u} - \varphi_y; \quad (2.5.7)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} = 0; \quad (2.5.8)$$

$$\frac{D\tilde{\theta}}{Dt} = \frac{L'}{c_p} \tilde{\Phi} + \varepsilon_k - \varphi_H; \quad (2.5.9)$$

$$\frac{D\tilde{q}}{Dt} = -\tilde{\Phi} - \varphi_Q; \quad (2.5.10)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Комбинируя (2.5.1), (2.5.2) с (2.5.6), (2.5.7), а (2.5.4) с (2.5.9) и исключая, таким образом, φ_x , φ_y , φ_H и φ_Q , можно получить следующую форму уравнений мезометеорологии:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}}{dt} = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + l\bar{v} - (\bar{u} + \tilde{u}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - (\bar{v} + \tilde{v}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \\ & - (\bar{w} + \tilde{w}) \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + F_{Tx}; \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - l \bar{u} - (\tilde{u} + \bar{u}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - (\bar{v} + \tilde{v}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} -$$

$$- (\tilde{w} + \bar{w}) \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + F_{TV}; \quad (2.5.12)$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = \frac{L'}{c_p} \Phi + \varepsilon_R - (\tilde{u} + \bar{u}) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} - (\bar{v} + \tilde{v}) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} -$$

$$- (\tilde{w} + \bar{w}) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + F_H; \quad (2.5.13)$$

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = -\Phi - (\tilde{u} + \bar{u}) \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} - (\bar{v} + \tilde{v}) \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} -$$

$$- (\tilde{w} + \bar{w}) \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + F_Q. \quad (2.5.14)$$

Система уравнений (2.5.1)–(2.5.5) и (2.5.11)–(2.5.14) вместе с уравнением квазистатики (2.5.3) представляют собой две эквивалентные формы записи уравнений мезометеорологии.

Вторая система уравнений мезометеорологии (2.5.11)–(2.5.14) может быть использована при автономном решении той или иной мезометеорологической задачи, а фоновые макрополя \bar{u} , \bar{v} , $\bar{\theta}$ и \bar{q} при этом тем или иным способом задаются. Источником информации об этих функциях могут быть данные обычного синоптического анализа или прогноза, данные объективного анализа или численного прогноза, полученные, например, по каналам связи. Именно последний подход, допускающий более гибкое использование информации о фоновых метеорологических полях, и получил в настоящее время наибольшее распространение.

В том случае, если нет оснований предполагать существование значительных горизонтальных градиентов и резкой временной изменчивости фоновых метеорологических величин, система (2.5.11)–(2.5.14) может быть еще более упрощена за счет пренебрежения производными по горизонтальным направлениям от \tilde{u} , \tilde{v} , $\tilde{\theta}$ и \tilde{q} . Критерием допустимости подобной операции служат неравенства:

$$\left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \right| \gg \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \right|, \quad \left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} \right| \gg \left| \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \right|, \quad (2.5.15)$$

где $f = \bar{u}, \bar{v}, \bar{\theta}, \bar{q}$. В хорошо выраженных на общем синоптическом фоне мезопроцессах, при отсутствии фронтальных разделов, можно полагать, что эти неравенства действительно имеют место. Однако во всех случаях практического использования этого приближения требуется, очевидно, специальный анализ.

В качестве наиболее простого способа задания фоновых полей горизонтальных компонент скорости ветра могут быть использованы геострофические соотношения:

$$\tilde{u} \equiv u_g = -\frac{1}{\tilde{\rho} l} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}, \quad \tilde{v} \equiv v_g = \frac{1}{\tilde{\rho} l} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}, \quad (2.5.16)$$

а для макрополей температуры и влажности — линейные приближения

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} &= \tilde{\theta}_H + \gamma_\theta (z - z_H), \\ \tilde{q} &= q_H + \gamma_q (z - z_H), \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

где $\tilde{\theta}_H$ и \tilde{q}_H — фоновые значения потенциальной температуры и массовой доли водяного пара на некотором уровне z_H в свободной атмосфере, а γ_θ и γ_q — соответствующие градиенты этих величин в той же области.

С использованием приближений (2.5.15) и с заданием фоновых полей в виде (2.5.16) и (2.5.17) система уравнений мезометеорологии примет следующую упрощенную форму:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + l\bar{v} + F_{Tx}; \quad (2.5.18)$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - l\bar{u} + F_{Ty}; \quad (2.5.19)$$

$$-\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \beta\bar{\theta} = 0; \quad (2.5.20)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0; \quad (2.5.21)$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = \frac{L'}{c_p} \Phi + \varepsilon_R - (\bar{w} + \hat{w}) \gamma_\theta + F_H; \quad (2.5.22)$$

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = -\Phi - (\bar{w} + \hat{w}) \gamma_q + F_Q, \quad (2.5.23)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u_g + \bar{u}) \frac{\partial}{\partial x} + (v_g + \bar{v}) \frac{\partial}{\partial y} + (\bar{w} + \hat{w}) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Сформулируем краевые условия для мезометеорологической задачи. В качестве граничных условий на верхней границе рас-

четной области z_H , располагаемой в свободной атмосфере, принимается условие затухания всех мезовозмущений:

$$\text{при } z=z_H \quad \bar{u}=\bar{v}=\bar{\theta}=\bar{q}=\bar{p}=0. \quad (2.5.24)$$

На подстилающей поверхности, точнее на некотором уровне шероховатости z_0 , потребуем выполнения условий прилипания и непротекания воздуха через поверхность:

$$\text{при } z=z_0 \quad \bar{u}+u_g=0, \quad \bar{v}+v_g=0, \quad \bar{w}=0. \quad (2.5.25)$$

Что касается нижних граничных условий для температуры и влажности, то здесь могут быть несколько вариантов. Наиболее простой случай, когда температура и влажность поверхности известны и заданы

$$\text{при } z=z_0 \quad \bar{\theta}(x, y, z_0, t)=\theta_0(x, y, t), \quad (2.5.26)$$

$$\bar{q}(x, y, z_0, t)=q_0(x, y, t).$$

Эти условия могут применяться, например, над водной поверхностью, температура которой определяется, допустим, космическими методами, а влажность на поверхности считается насыщающей при этой температуре. Более сложный способ задания нижних граничных условий — это использование уравнения теплового баланса подстилающей поверхности

$$\rho c_p H_0 + L'E_0 + B_0 = R_0, \quad (2.5.27)$$

где $\rho c_p H_0$, E_0 — турбулентные потоки тепла и водяного пара в приземном слое; B_0 — поток тепла в почву; R_0 — радиационный баланс подстилающей поверхности. Условие (2.5.27) должно быть дополнено соотношениями для расчета B_0 , R_0 , а также влажности (или ее градиента) в приземном слое. Корректное использование этого соотношения требует, вообще говоря, создания специальной дополнительной модели верхнего деятельного слоя почвы.

В качестве граничных условий на боковых границах расчетной области $[-X, X; -Y, Y]$ обычно принимаются условия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} = 0, \quad x = \pm X, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} = 0, \quad y = \pm Y. \end{aligned} \quad (2.5.28)$$

Наиболее сложная проблема в формулировке краевых условий — это задание начальных полей. Для этой цели необходима сеть наблюдательных пунктов с высоким пространственным разрешением. Реально такая сеть навряд ли когда-нибудь будет создана. По этой причине возникает необходимость построения специального вычислительного алгоритма, который в результате

усвоения всей доступной, в том числе и косвенной, информации, восстанавливал бы (инициализировал) диагностические поля \bar{u} , \bar{v} , $\bar{\theta}$ и \bar{q} таким образом, чтобы они, во-первых, не противоречили уравнениям гидротермодинамики атмосферы, во-вторых, удовлетворяли краевым условиям и, в-третьих, соответствовали бы тем прямым и косвенным данным наблюдений, которые имеются в наличии.

Проведенный анализ системы уравнений мезометеорологии и краевых условий позволяет следующим образом сформулировать основную задачу математического моделирования мезометеорологических процессов: это восстановление пространственной и временной структуры полей температуры, влажности и скорости ветра, а также статистических характеристик их турбулентных флуктуаций при известных свойствах подстилающей поверхности и заданных фоновых полях метеорологических величин.

3. МЕТОДЫ ЗАМЫКАНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕЗОМЕТЕОРОЛОГИИ

3.1. Проблема замыкания

Анализ полученной в предыдущей главе системы уравнений мезометеорологии показывает, что количество неизвестных превышает в ней количество уравнений, т. е. система является незамкнутой. Таким образом, возникает проблема дополнения этой системы некоторыми новыми соотношениями, связывающими, неизвестные члены уравнений с известными или вычисляемыми в ходе решения задачи величинами — так называемая проблема замыкания.

Всю совокупность неизвестных членов в уравнениях мезометеорологии можно разделить на две группы. Первая из них включает такие величины, как фазовый и радиационный приток тепла, которые присутствовали также и в исходной (не преобразованной) системе уравнений гидротермодинамики атмосферы. Задача расчета притока тепла по известным полям температуры, влажности и облачности является традиционной задачей теоретической метеорологии и в данном курсе рассматриваться не будет. Изложению специфики параметризации процессов фазовых переходов в мезометеорологических задачах будет посвящен п. 3.6. Несмотря на большую роль этих двух факторов, основной вклад в формирование мезометеорологических полей вносят, все же, процессы турбулентного переноса, описываемые членами в уравнениях мезометеорологии, входящими в более обширную вторую группу. Основная особенность этих членов состоит в том, что их проис-

хождение непосредственно связано с преобразованием исходной системы уравнений. Эта группа включает турбулентные притоки количества движения, тепла и водяного пара, определяемые в результате применения оператора дивергенции к тензору турбулентных напряжений Рейнольдса R_{ij} , векторам турбулентных потоков температуры H_i и массовой доли водяного пара Q_i .

Остановимся на некоторых свойствах этих величин, представляющих собой так называемые вторые одноточечные моменты турбулентных флуктуаций. К их числу следует прежде всего отнести свойство симметричности тензора напряжений Рейнольдса: $R_{ij} = R_{ji}$, вытекающее из его определения как $R_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$. Эта особенность R_{ij} позволяет рассматривать не все девять его компонент, а лишь шесть, которые не совпадают друг с другом. Последние, в свою очередь, могут быть разделены на две группы: нормальные напряжения (диагональные компоненты тензора R_{ij}) R_{11} , R_{22} и R_{33} , полусумма которых представляет собой среднюю кинетическую энергию турбулентных пульсаций $b^2 = \frac{1}{2} R_{\alpha\alpha}$, и тангенциальные напряжения (недиагональные компоненты R_{ij}) R_{12} , R_{23} и R_{13} . Вторым важнейшим свойством тензора напряжений Рейнольдса является свойство его неотрицательной определенности, заключающееся в выполнении неравенства

$$c_\alpha c_\beta R_{\alpha\beta} \geq 0, \quad (3.1.1)$$

где c_i — произвольные вещественные числа, а по повторяющимся индексам α и β производится суммирование. Это соотношение вытекает из очевидного неравенства

$$(\overline{c_\alpha u'_\alpha})^2 = c_\alpha c_\beta \overline{u'_\alpha u'_\beta} \geq 0,$$

и имеет важные следствия. Так, например, известное свойство коэффициента корреляции между i -й и j -й компонентами скорости $r_{ij} = R_{ij} / (R_{ii} R_{jj})^{1/2}$ состоит в том, что $|r_{ij}| \leq 1$ и является частным случаем неравенства (3.1.1).

При совместном анализе совокупности турбулентных характеристик R_{ij} , H_i и Q_i свойство неотрицательной определенности распространяется теперь уже на общую матрицу пятого порядка:

$$\Psi_{mn} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & H_1 & Q_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & H_2 & Q_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & H_3 & Q_3 \\ H_1 & H_2 & H_3 & \sigma_T^2 & R_{qT} \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & R_{Tq} & \sigma_q^2 \end{pmatrix}, \quad (3.1.2)$$

$$c_\alpha c_\beta \Psi_{\alpha\beta} \geq 0,$$

где $R_{qT} = R_{Tq} = \overline{\theta' q'}$ — ковариация температуры и влажности, а $\sigma_T^2 = \overline{\theta'^2}$ и $\sigma_q^2 = \overline{q'^2}$ — дисперсии флуктуаций этих величин.

Проблема формирования таких замыкающих соотношений для вычисления вторых моментов, чтобы неравенства (3.1.1), (3.1.2) безусловно удовлетворялись, получило в настоящее время название проблемы физической реализуемости. Отсутствие гарантии в их соблюдении может привести к тому, что в процессе численного моделирования возникнет ситуация, когда, скажем, такие величины, как дисперсия флуктуаций температуры или средняя кинетическая энергия турбулентности станут отрицательными, а какой-либо из коэффициентов корреляции превзойдет единицу.

Применяющиеся на практике методы замыкания могут быть условно разделены на элементарные, двухпараметрические и методы замыкания второго порядка. Как элементарные, так и двухпараметрические методы базируются на использовании так называемой градиентной гипотезы — предположения о линейной связи напряжений и потоков с соответствующими градиентами осредненных величин, где в качестве коэффициента пропорциональности выступает имеющий тензорную природу коэффициент турбулентного обмена (так называемая K -теория). В наиболее простом случае эта величина задается априори (элементарное замыкание), в другом — рассчитывается с использованием уравнения баланса турбулентной энергии и некоторых дополнительных гипотез для масштаба турбулентности l (двухпараметрический метод). В развитие этого подхода в настоящее время привлекаются также и дополнительные уравнения переноса для средней диссипации турбулентной энергии в тепло ϵ .

Принципиальным отличием методов замыкания второго порядка является отказ от градиентной гипотезы и использование уравнений переноса непосредственно для одноточечных моментов R_{ij} , H_i и Q_i . Каждый из этих методов обладает определенными преимуществами и недостатками, и их выбор при создании той или иной математической модели диктуется, главным образом, теми задачами, которые призвана решать модель.

В тех классах моделей, в которых не ставится задача расчета статистических характеристик турбулентности, а собственно турбулентный перенос не играет определяющей роли, можно с успехом ограничиться элементарными или двухпараметрическими методами замыкания. В том случае, если в моделируемом процессе роль турбулентного обмена достаточно велика, могут быть привлечены двухпараметрические методы или методы замыкания второго порядка, а для расчета также и статистических характеристик турбулентности необходимо использование методов замыкания второго или даже более высокого порядка.

3.2. Приближения K -теории

К числу наиболее простых и распространенных методов замыкания уравнений мезометеорологии относится представление турбулентных напряжений и потоков с использованием концепции коэффициентов турбулентного обмена (K -теория). Основу ее составляют, как известно, существующие аналогии между турбулентным и молекулярным переносом количества движения, тепла и водяного пара. В отличие от последнего, где коэффициенты переноса представляют собой скалярные величины, определяемые свойствами соответствующих газов и жидкостей, коэффициенты турбулентного обмена имеют тензорную природу, варьируют в широких пределах и зависят от особенностей протекания того или иного процесса.

В рамках данного приближения для векторов H_i и Q_i принимаются следующие соотношения:

$$H_i = K_{i\alpha}^{(T)} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_\alpha}, \quad Q_i = -K_{i\alpha}^{(q)} \frac{\partial \bar{q}}{\partial x_\alpha}, \quad (3.2.1)$$

где $K_{ij}^{(T)}$, $K_{ij}^{(q)}$ — тензоры коэффициентов турбулентного обмена для тепла и водяного пара. Что касается аналогичного представления тензора напряжений Рейнольдса в виде линейной функции от градиента $\partial \bar{u}_i / \partial x_j$, то важно отметить, что последний не является симметричным тензором, однако комбинация $\bar{\Phi}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$, называемая тензором деформаций, таким свойством обладает. При этом для недиагональных компонентов тензора R_{ij} допустимо представление:

$$R_{ij} = -K^{(u)} \bar{\Phi}_{ij}, \quad i \neq j, \quad (3.2.2)$$

где коэффициент турбулентного обмена является скалярной величиной, либо

$$R_{ij} = -K_{l\alpha\beta} \bar{\Phi}_{\alpha\beta}, \quad (3.2.3)$$

где коэффициент турбулентности представляет собой тензор уже четвертого ранга, обладающий свойством симметрии по парам индексов i, j и α, β .

Известно, что коэффициенты молекулярной вязкости и температуропроводности связаны со среднеквадратичной скоростью движения молекул u_m и длиной свободного пробега l_m с помощью соотношения $\nu \sim \chi \sim u_m l_m$. Применяя такое представление к турбулентному течению, можно вместо u_m использовать корень из средней кинетической энергии турбулентности $b = \left(\frac{1}{2} R_{\alpha\alpha} \right)^{1/2}$,

а вместо l_m — масштаб турбулентности l — величину размерности длины, характеризующую среднее расстояние, на которое способно переместиться то или иное турбулентное образование с сохранением своей индивидуальности.

Поскольку масштаб перемещения турбулентных вихрей может быть различен в разных направлениях вследствие анизотропии турбулентного потока, то целесообразно вместо скалярной величины l использовать тензор l_{ij} , характеризующий некоторый эллипсоид масштабов. При этом справедливо $K_{ij} \sim b l_{ij}$, а

$$R_{ij} = -b (l_{i\alpha} \bar{\Phi}_{\alpha j} + l_{j\alpha} \bar{\Phi}_{\alpha i}), \quad i \neq j,$$

откуда, в частности, следует, что тензор $K_{l\alpha\beta}^{(u)}$ может быть представлен в виде

$$K_{l\alpha\beta} = b (l_{i\alpha} B_{\beta j} + l_{j\alpha} B_{i\beta}), \quad (3.2.4)$$

где B_{ij} — некоторые безразмерные тензорные величины.

Хотя проведенные рассуждения полезны в том смысле, что они позволяют интерпретировать коэффициенты турбулентного обмена с помощью таких более ясных и наглядных характеристик как турбулентная энергия и масштаб, они не дают никакого рецепта для определения этих величин и, самое главное, не обосновывают собственно возможность использования такого приближения.

Для выяснения ограничений применимости K -теории проведем следующий простой анализ. Рассмотрим однородное по координатам x и y турбулентное течение и некоторый фиксированный уровень z_1 с известным на нем значением пассивной и консервативной субстанции \bar{f} . Допустим с этого уровня в область возрастания z на длину l перемещается турбулентное образование, значение переменной \bar{f} в котором совпадает со средним ее значением на исходном уровне: $\bar{f} = \bar{f}(z_1)$. Флуктуация величины f , которую будет создавать это турбулентное образование на уровне $z_1 + l$, может быть определено как $f' = \bar{f}(z) - \bar{f}(z_1 + l)$. Используя разложение функции $\bar{f}(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки z_1 и ограничиваясь первыми двумя его членами, можно получить

$$f' \approx -l \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} - \frac{l^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial z^2},$$

откуда по определению турбулентного потока

$$N_f \equiv \overline{f'w'} = -\overline{w' l \left(1 + \frac{l}{2} \frac{\partial^2 \bar{f} / \partial \bar{f}}{\partial z^2} \right) \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}}.$$

Вследствие предполагаемой пассивности субстанции f , коэффициент турбулентности не зависит от этой величины, а это возможно, как следует из вышеприведенной формулы, лишь в том случае, если

$$l \ll \frac{\partial \bar{f} / \partial \bar{f}}{\partial z^2}, \quad (3.2.5)$$

т. е. масштаб турбулентных образований остается малым по сравнению с характерным масштабом изменения градиента величины \bar{f} . Данное ограничение также имеет свою аналогию в теории молекулярного переноса: в том случае, когда длина свободного пробега молекул становится сравнимой с характерным масштабом изучаемой области пространства, гипотеза о сплошности среды уже неприменима и необходимо привлекать теорию переноса в разреженных газах.

Очень важно, что в атмосферных турбулентных течениях ограничение (3.2.5) оказывается справедливым лишь в очень редких случаях.

3.3. Уравнение баланса турбулентной энергии

Средняя кинетическая энергия турбулентных пульсаций $b^2 = \frac{1}{2} R_{\alpha\alpha}$ — полусумма диагональных компонентов тензора напряжений Рейнольдса — является одним из наиболее важных параметров турбулентного течения. Получим уравнение переноса для этой величины из более общего уравнения для тензора R_{ij} . Для вывода последнего запишем предварительно уравнение для турбулентных флуктуаций u'_i (с учетом молекулярного переноса), вычитая уравнение для мезовозмущений (2.3.14) из уравнения

динамики мезо-микродиапазона (2.3.13), и используем приближение (2.3.15):

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + u_\alpha^* \frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha} + u_\alpha \frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial \pi'}{\partial x_i} + \beta_i \theta' - 2\varepsilon_{i\alpha\beta} \omega_\alpha u_\beta' - u_\alpha^* \frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial R_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} + \nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_\alpha^2}, \quad (3.3.1)$$

где, как и ранее, $u_i^* = \tilde{u}_i + \bar{u}_i$, а для сокращения записи принято обозначение $\pi' = p'/\rho$. Записывая это уравнение последовательно для u_i' и u_j' , умножая первое на u_j' , а второе — на u_i' , складывая и усредняя по микродиапазону, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + u_\alpha^* \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \overline{u_\alpha u_i u_j'} = \\ & = - \underbrace{\left(u_i' \frac{\partial \pi'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \pi'}{\partial x_i} \right)}_I + \beta_i \underbrace{H_j + \beta_j H_i}_II - \\ & - \underbrace{\left(R_{i\alpha} \frac{\partial u_j^*}{\partial x_\alpha} + R_{j\alpha} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_\alpha} \right)}_III - 2\omega_\alpha \underbrace{(\varepsilon_{i\alpha\beta} R_{\beta j} + \varepsilon_{j\alpha\beta} R_{\beta i})}_IV + \nu \underbrace{\frac{\partial^2 R_{ij}}{\partial x_\alpha^2}}_V - 2\nu \underbrace{\frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_j'}{\partial x_\alpha}}_VI. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

При записи члена с молекулярной вязкостью здесь использовано тождество

$$u_j' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_\alpha^2} + u_i' \frac{\partial^2 u_j'}{\partial x_\alpha^2} = \frac{\partial^2 u_i' u_j'}{\partial x_\alpha^2} - 2 \frac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_j'}{\partial x_\alpha}.$$

Второй член в левой части уравнения (3.3.2) описывает, очевидно, адвекцию R_{ij} за счет макро- и мезокомпонент скорости потока, а третий — турбулентную диффузию этой величины. В правой части этого уравнения суммируются члены, определяющие генерацию тензора напряжений Рейнольдса за счет действия флуктуаций давления (первый член), силы плавучести (второй), градиента средней скорости (третий) и силы Кориолиса (четвертый). Пятый член в правой части определяет молекулярный перенос R_{ij} и при больших числах Рейнольдса турбулентного потока может быть, разумеется, опущен. Что касается последнего члена в этой

части уравнения, то и при больших числах Рейнольдса, т. е. при относительно малом влиянии на процессы переноса молекулярных сил, он в общем случае не является малой величиной, поскольку описывает эффект выравнивания мелкомасштабных флуктуаций силами вязкости, т. е. диссипацию.

К более детальному анализу чрезвычайно важного для решения проблем замыкания уравнению (3.3.2) мы вернемся в разделе 3.4, а здесь произведем суммирование всех членов этого уравнения по индексам $i=j$, и запишем в итоге искомое уравнение баланса турбулентной энергии:

$$\frac{\partial b^2}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial b^2}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial B_\alpha}{\partial x_\alpha} = \beta_s H_s - R_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha^*}{\partial x_\beta} - \epsilon, \quad (3.3.3)$$

где $B_i = \frac{1}{2} \overline{u_i' (u_i')^2} + \overline{u_i' \pi'} = B_i^{(u)} + B_i^{(p)}$ — турбулентный поток b^2 , обусловленный флуктуациями скорости ($B_i^{(u)}$) и давления ($B_i^{(p)}$). При выводе этого уравнения использовано уравнение несжимаемости в форме (2.3.4), позволившее записать

$$-u_\alpha' \frac{\partial \pi'}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial u_\alpha' \pi'}{\partial x_\alpha} + \pi' \frac{\partial u_\alpha'}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial u_\alpha' \pi'}{\partial x_\alpha}.$$

Флуктуации давления в несжимаемой жидкости имеют две очень важные функции: они, во-первых, приводят к перераспределению энергии турбулентных флуктуаций скорости между различными направлениями (о чем свидетельствует исчезновение при суммировании второго члена в правой части выписанного выше соотношения) и, во-вторых, вносят дополнительный вклад в турбулентную диффузию энергии b^2 . Величина $B_i^{(p)}$, как показывают непосредственные ее измерения, выполненные в приземном слое, оказывается сравнимой с $B_i^{(u)}$ лишь в условиях сильной конвекции, когда основным источником генерации флуктуаций давления являются флуктуации температуры. Во всех остальных случаях перенос энергии за счет пульсаций давления не играет особой роли и им, как правило, пренебрегают.

Основная роль членов, описывающих влияние силы Кориолиса в (3.3.2), также состоит в перераспределении энергии между различными компонентами флуктуаций скорости, поэтому при суммировании, как легко убедиться, они исчезают. Это является следствием того известного обстоятельства, что эта сила всегда направлена по нормали к вектору скорости и работы не совершает. Само собой разумеется, что на масштабах турбулентных флуктуа-

ций вклад членов с силой Кориолиса вообще весьма незначителен. Наконец появившийся в (3.3.3) член

$$\varepsilon = \nu \left(\frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha} \right)^2, \quad (3.3.4)$$

в котором суммирование производится по индексам α и β , является неотрицательно определенной величиной и описывает направленный процесс перехода энергии турбулентных флуктуаций скорости в среднюю кинетическую энергию молекул, т. е. диссипацию турбулентной энергии в тепло.

Проведем оценку различных членов уравнения баланса турбулентной энергии, используя в качестве вертикального масштаба процесса $L_z \approx 10^3$ м, горизонтального $L_x \approx 10^5$ м, масштаба времени $\tau \approx 10^4$ с, масштаба турбулентных флуктуаций скорости $\sigma_0 \approx 1$ м/с и среднего размера турбулентных флуктуаций $l_0 \approx 10^2$ м. Сравнивая все члены этого уравнения с членом, описывающим генерацию турбулентной энергии за счет вертикального градиента средней скорости потока, характерное значение которого составляет при этом $G_0 = \frac{\sigma_0^2 L_x}{\tau_0 L_z}$, можно получить:

$$\begin{aligned} O \left[\frac{db^2}{dt} \right] &\sim \frac{\sigma_0^2}{\tau_0 G_0} = \frac{L_z}{L_x} \approx 10^{-2}, \\ O \left[\frac{\partial B_1}{\partial x_1}, \frac{\partial B_2}{\partial x_2} \right] &\sim \frac{\sigma_0^3}{L_x G_0} = \frac{L_z \sigma_0 \tau_0}{L_x^2} \approx 10^{-8}, \\ O \left[\frac{\partial B_3}{\partial x_3} \right] &\sim \frac{\sigma_0^3}{L_z G_0} = \frac{\sigma_0 \tau_0}{L_x} \approx 10^{-1}, \\ O \left[R_{11} \frac{\partial u_1^*}{\partial x_1}, R_{12} \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2} \right] &\sim \frac{\sigma_0^2}{\tau_0 G_0} = \frac{L_z}{L_x} \approx 10^{-2}, \\ O \left[R_{13} \frac{\partial u_1^*}{\partial x_3} \right] &\approx 1, \\ O[\varepsilon] &\sim \frac{\sigma_0}{l_0 G_0} = \frac{\sigma_0 \tau_0 L_z}{L_x l_0} \approx 1, \\ O[\beta H_3] &\sim \frac{\beta H_3 L_z \tau_0}{\sigma_0^2 L_x} \approx 0 + 1. \end{aligned}$$

При этом относительный вклад работы силы плавучести варьирует в широких пределах в зависимости от стратификации атмосферы.

Из приведенных оценок следует, что основными членами в уравнении баланса турбулентной энергии являются генерация

и диссипация турбулентной энергии. Вертикальная турбулентная диффузия b^2 вносит вклад порядка 10% от этих членов, а горизонтальная диффузия, генерация энергии за счет горизонтальных градиентов средней скорости и горизонтальная адвекция b^2 — составляют не более 1% и могут без значительной потери точности опущены.

Проведенные оценки вклада различных членов уравнения баланса турбулентной энергии справедливы в целом для всего атмосферного пограничного слоя и могут быть, разумеется, уточнены для отдельных его областей. Так, например, в условиях проникающей конвекции на верхней границе АПС основным источником турбулентной энергии будет являться вертикальная диффузия, а ее основным «стоком» — работа, направленная на преодоление силы плавучести. При этом процесс имеет выраженный нестационарный характер и поэтому локальная производная от b^2 по t в уравнении (3.3.3) должна быть сохранена. Учитывая также и эту возможную ситуацию, упрощенное уравнение баланса турбулентной энергии запишем в следующей форме:

$$\frac{\partial b^2}{\partial t} + \frac{\partial B_3}{\partial z} = -R_{13} \frac{\partial u_1^*}{\partial z} - R_{23} \frac{\partial u_2^*}{\partial z} + \beta H_3 - \varepsilon. \quad (3.3.5)$$

Для практического использования этого уравнения требуется дополнительно задать способ вычисления вертикального потока турбулентной энергии B_3 и диссипации ε . Простейшим способом вычисления B_3 является использование градиентной гипотезы:

$$B_3 = -K^{(B)} \frac{\partial b^2}{\partial z}.$$

При этом, так же как и в других градиентных соотношениях раздела 3.2, величина коэффициента турбулентного обмена для переноса b^2 предполагается функцией только двух параметров: масштаба l и энергии b^2 , откуда уже из анализа размерностей вытекает зависимость $K^{(B)} = lb$. Если полагать и диссипацию функцией только этих двух величин, то справедливо соотношение $\varepsilon = cb^3/l$, предложенное впервые А. Н. Колмогоровым. С применением этих гипотез уравнение баланса турбулентной энергии приобретает традиционную форму, в которой оно используется в многочисленных приложениях уже в течение нескольких десятилетий:

$$\frac{\partial b^2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} K^{(B)} \frac{\partial b^2}{\partial z} + K^{(u)} \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 \right] - \beta K^{(T)} \frac{\partial \theta}{\partial z} - c \frac{b^3}{l}, \quad (3.3.6)$$

где $K^{(u)} = lb$, $K^{(T)} = \alpha_T lb$, $K^{(B)} = \alpha_B lb$. Уравнение (3.3.6) содержит ряд неизвестных c , α_T , α_B , определение которых требует, вообще

говоря, привлечение дополнительных гипотез. Самыми простыми из них являются предположения о том, что эти величины — универсальные константы (т. е. неизменные при любых типах процессов) *.

Для определения констант c , α_T и α_B необходимо привлекать данные экспериментальных измерений основных характеристик турбулентного потока. При теоретическом моделировании атмосферного пограничного слоя положение облегчается тем, что здесь существуют некоторые предельные режимы течения, когда основные особенности поведения всех характеристик, входящих в уравнение баланса турбулентной энергии, известны. Таким предельным режимом является турбулентное течение в условиях горизонтально-однородного и стационарного приземного слоя при нейтральной стратификации ($\partial\theta/\partial z \approx 0$), когда в соответствии с выводами теории подобия Момина — Обухова, справедливо:

$$l \sim z, \quad \frac{\overline{\partial u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z}, \quad \frac{\overline{\partial v}}{\partial z} \approx 0, \quad b^2 = u_*^2 b_{n0}^2. \quad (3.3.7)$$

где ось $x \equiv x_1$ направлена по приземному ветру, а $\kappa = 0,4$ — константа Кармана. В этом случае уравнение (3.3.6) приобретает форму соотношения

$$c \approx -\frac{l}{b^3} R_{13} \frac{\overline{\partial u}}{\partial z} \approx \frac{l}{\kappa z} \frac{u_*^3}{b^3}. \quad (3.3.8)$$

Полученные в последние годы уточненные экспериментальные данные о поведении энергии турбулентности в логарифмическом приземном слое, показывают, что $b_{n0} \approx 2,3$. Выбирая в этом случае асимптотику для l при $z \rightarrow 0$ в виде $l = \kappa z$, можно получить $c \approx 0,08$ (при выборе вместо κ другой константы значение c будет, разумеется, иным).

Для определения масштаба l (или связанной с ним и энергией b^2 величины ϵ) в настоящее время в практических приложениях используется чрезвычайно широкий спектр гипотез, подробная классификация которых выходит за рамки данного курса. Отметим лишь, что их условно можно разделить на три большие группы.

Первая группа включает априорное задание соотношений для определения l с ориентацией, преимущественно, на геометрию течения. Среди подобных соотношений для атмосферного пограничного слоя можно выделить часто применяемую формулу Блекедара

$$l = \frac{\kappa z}{1 + \frac{\kappa z}{l_\infty}}, \quad (3.3.9)$$

* На самом деле подобное предположение является весьма ограничительным и не подтверждается имеющимися данными измерений как в лабораторных, так и в атмосферных турбулентных течениях. На практике это приводит к необходимости замены этих констант некоторыми функциями, таких, например, параметров течения, как число Рейнольдса Re (для течений с малыми значениями Re) или число Ричардсона Ri (в стратифицированных течениях), для определения которых необходимо привлекать те или иные экспериментальные зависимости. Тот факт, что такая проблема возникает, свидетельствует о принципиальных трудностях теории. Их преодоление требует, однако, существенного усложнения методов описания турбулентных течений и поэтому во многих моделях, где роль турбулентности оказывается второстепенной, с отмеченными недостатками приходится мириться.

которая при $z \rightarrow 0$ имеет асимптотику $l = \kappa z$, а при $z \rightarrow \infty$ масштаб стремится к некоторой величине l_∞ . Последняя либо полагается постоянной, либо связывается с какими-нибудь интегральными характеристиками турбулентного течения. Важно, что экспериментальные данные качественно неплохо подтверждают поведение l , задаваемое с помощью формулы (3.3.9). На рис. 5 приводятся примеры экспериментально определенных зависимостей масштабов от высоты в конвективном атмосферном пограничном слое. Последние в данном случае определялись по частоте максимума спектральных плотностей вертикальной компоненты скорости ветра (а) и температуры (б) (см. пример мелкомасштабной части спектральной плотности, приведенной на рис. 1).

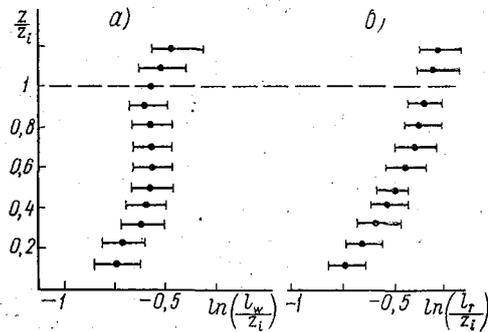


Рис. 5. Примеры распределения с высотой масштабов турбулентности, определенных по спектрам турбулентных флуктуаций вертикальной скорости (а) и температуры (б) в конвективном пограничном слое высотой z_i . Горизонтальные отрезки — среднеквадратические отклонения (по Друлхету и др., 1983 г.).

Вторая группа гипотез для l включает соотношения, связывающие эту величину с некоторыми локальными характеристиками турбулентного течения. К их числу относится, например, известная гипотеза Кармана

$$l = -\kappa \frac{\overline{\frac{\partial u}{\partial z}}}{\overline{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}} \quad (3.3.10)$$

или ее обобщения, задаваемые в форме

$$l = -\kappa \psi / \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (3.3.11)$$

где $\psi = \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 - \beta \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$ — группа генерационных членов в уравнении баланса турбулентной энергии; деленная на коэффициент турбулентности. Полезным свойством последней гипотезы по сравнению с (3.3.10) является то, что она обеспечивает получение правильной асимптотики для l не только в нейтрально стратифицированном приземном слое, но также и при конвективных условиях. Основным недостатком является; однако, невозможность расчета ϵ ее помощью масштаба турбулентности в условиях линейных профилей скорости ветра и температуры (характерных, в частности, для устойчивой стратификации).

Третья группа гипотез связана с использованием дифференциальных уравнений переноса для величин l, ϵ или произвольной степенной комбинации $l^m b^n$. Достоинством этого подхода является то, что, в отличие от гипотез второй группы, связь между искомыми характеристиками и параметрами турбулентного течения не ограничивается локальной. Вывод уравнений для l, ϵ или $l^m b^n$ основан на предварительном получении из исходных уравнений гидродинамики уравнений для пространственных корреляционных функций поля скорости (Ротта, 1951 г.). Однако число необходимых для замыкания подобного уравнения полуэмпирических гипотез оказывается столь значительным, что в данном случае следует говорить не о выводе этого уравнения в строго математическом смысле этого понятия, а лишь постулировании некоторого гипотетического уравнения, целесообразность использования которого должна обосновываться сравнением результатов расчетов с экспериментальными данными.

Наибольшее распространение в практических моделях турбулентных течений получило в последние годы использование полученного сходным образом уравнения для переноса диссипации, которое в принятых нами обозначениях может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = c_{e1} \frac{\epsilon}{b^2} K \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)^2 \right] - \alpha_T \beta K \frac{\epsilon}{b^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} + \\ + \alpha_\epsilon \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial \epsilon}{\partial z} - c_{e2} \frac{\epsilon^2}{b^2}, \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

где $K = cb^4/\epsilon$. Численные значения констант в этом уравнении определялись Ханьяличем и Лаундером (1972 г.) путем сравнения результатов расчетов с данными лабораторного эксперимента, и составляют $c_{e2} = 2,0$ и $\alpha_\epsilon = 0,55 \text{ с}^2/\kappa^2$, $c_{e1} = 1,45$. Проверка применимости данного уравнения к описанию структуры атмосферного пограничного слоя осуществлялась Вагером и Надежиной (1979 г.) и дала положительные результаты.

Было бы, однако, ошибочным считать, что подход, основанный на использовании дифференциальных уравнений типа (3.3.12), решает проблему замыкания в моделях турбулентных течений. Так же как и гипотезы для масштаба турбулентности первой и второй групп, он ориентирован на использование при описании лишь определенных классов турбулентных течений, и всякое расширение границ его применения нуждается в тщательном экспериментальном обосновании. Об этом свидетельствует, в частности, то обстоятельство, что для достижения лучшего совпадения теоретических расчетов с экспериментом многим авторам пришлось заменить входящие туда константы некоторыми функциями параметров течения. Заранее могут быть определены также и типы течений, в которых одновременное использование уравнений (3.3.6) и (3.3.12) оказывается просто невозможным (например, в случае однородной и стационарной турбулентности, когда величины b^2 и ϵ^2 не зависят ни от времени, ни от координаты, полученные для них из этих соотношений алгебраические уравнения оказываются несовместными).

Рассмотренные здесь модели турбулентных течений, основанные на использовании приближений K -теории, уравнения баланса турбулентной энергии и одной из форм гипотезы для масштаба или диссипации относятся к широкому классу двухпараметрических моделей турбулентности, в которых структура турбулентного потока описывается только двумя параметрами. Возникающие при использовании этого подхода проблемы во многом могут быть решены путем отказа от приближений K -теории и применения вместо градиентных соотношений дифференциальных уравнений переноса для вторых одноточечных моментов турбулентных пульсаций.

3.4. Методы замыкания второго порядка

В моделях второго порядка замыкания полностью или частично отказываются от использования приближений K -теории и ориентируются на применение уравнений переноса для тензора напряжений Рейнольдса R_{ij} , векторов турбулентных потоков температуры H_i и массовой доли водяного пара Q_i . Уравнение для R_{ij} (3.3.2) уже получено нами в предыдущем параграфе. Перепишем его здесь в упрощенной форме, опуская члены, описывающие генерацию R_{ij} за счет действия силы Кориолиса (существенные лишь на больших масштабах) и члены, характеризующие диффузионно-молекулярный перенос этой величины (существенные лишь на микромасштабах):

$$\frac{dR_{ij}}{dt} + \frac{\partial \Gamma_{\alpha ij}}{\partial x_\alpha} = \lambda_{ij} - R_{ia} \frac{\partial u_j^*}{\partial x_\alpha} - R_{ja} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_\alpha} + \beta_i H_j + \beta_j H_i - D_{ij}, \quad (3.4.1)$$

где $\Gamma_{aij} = \overline{u'_a u'_i u'_j}$ — третий момент, описывающий турбулентную диффузию R_{ij} в направлении оси x_a , а

$$\lambda_{ij} = - \left(u'_i \frac{\partial \pi'}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \pi'}{\partial x_i} \right) = - \left(\frac{\partial u'_i \pi'}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j \pi'}{\partial x_i} \right) + \pi' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) = \lambda_{ij}^{(1)} + \lambda_{ij}^{(2)}, \quad (3.4.2)$$

— симметричный тензор второго ранга, определяющий взаимодействие поля скорости и поля давления в турбулентном потоке и представляемый в виде суммы $\lambda_{ij}^{(1)}$ (диффузия R_{ij} за счет флуктуаций давления) и $\lambda_{ij}^{(2)}$ (интенсивность перераспределения энергии турбулентности между различными направлениями). Основным свойством последнего помимо симметричности является то, что сумма его диагональных членов вследствие уравнения несжимаемости равна нулю: $\lambda_{aa}^{(2)} = 0$. Наконец тензор

$$D_{ij} = 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_a} \frac{\partial u'_j}{\partial x_a} \quad (3.4.3)$$

описывает диссипацию R_{ij} .

При выводе уравнений для H_i или Q_i предварительно записываются уравнения переноса флуктуаций θ' (q'), получаемые путем вычитания уравнений для мезовозмущений соответствующих величин из уравнений переноса температуры или влажности в мезомикродиапазоне (2.3.7):

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + u'_a \frac{\partial \theta'}{\partial x_a} + \frac{\partial}{\partial x_a} (u'_a \theta' - H_a) = - u'_a \frac{\partial \theta^*}{\partial x_a} + \chi \frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_a^2}; \quad (3.4.4)$$

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + u'_a \frac{\partial q'}{\partial x_a} + \frac{\partial}{\partial x_a} (u'_a q' - Q_a) = - u'_a \frac{\partial q^*}{\partial x_a} + \chi_q \frac{\partial^2 q'}{\partial x_a^2}. \quad (3.4.5)$$

Умножая полученные уравнения на u'_i , а уравнение для u'_i (3.3.1) на θ' или q' , складывая их и осредняя по микродиапазону, в итоге получим:

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} + u'_a \frac{\partial H_i}{\partial x_a} + \frac{\partial \Gamma_{ai\Gamma}}{\partial x_a} = - R_{ia} \frac{\partial \theta^*}{\partial x_a} - H_a \frac{\partial u'_i}{\partial x_a} - \overline{\theta' \frac{\partial \pi'}{\partial x_i}} + \beta \sigma \tau - D_{i\Gamma}; \quad (3.4.6)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial t} + u'_a \frac{\partial Q_i}{\partial x_a} + \frac{\partial \Gamma_{aiq}}{\partial x_a} = - R_{ia} \frac{\partial q^*}{\partial x_a} - q' \frac{\partial \pi'}{\partial x_i} - Q_a \frac{\partial u'_i}{\partial x_a} - D_{iq} + \beta R_{q\Gamma}, \quad (3.4.7)$$

где $\sigma_T^2 = \overline{\theta'^2}$ — дисперсия турбулентных флуктуаций температуры; $R_{qT} = \overline{q'\theta'}$ — ковариация температуры и влажности, уравнения для которых без особых затруднений могут быть получены из (2.4.4) и (2.4.5):

$$\frac{\partial \sigma_T^2}{\partial t} + u_\alpha^* \frac{\partial \sigma_T^2}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \Gamma_{\alpha TT}}{\partial x_\alpha} = -2H_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} - D_{TT}, \quad (3.4.8)$$

$$\frac{\partial R_{qT}}{\partial t} + u_\alpha^* \frac{\partial R_{qT}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \Gamma_{\alpha qq}}{\partial x_\alpha} = -H_\alpha \frac{\partial q}{\partial x_\alpha} - Q_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} - D_{qT}; \quad (3.4.9)$$

$$\frac{\partial \sigma_q^2}{\partial t} + u_\alpha^* \frac{\partial \sigma_q^2}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \Gamma_{\alpha qq}}{\partial x_\alpha} = -2Q_\alpha \frac{\partial q}{\partial x_\alpha} - D_{qq}. \quad (3.4.10)$$

Члены, описывающие молекулярно-диффузионный перенос вторых моментов и вклад силы Кориолиса в их генерацию в этих уравнениях, опущены по тем же причинам, что и в уравнении для R_{ij} . Третьи моменты:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha i T} &= \overline{u'_\alpha \theta' u'_i}, \quad \Gamma_{\alpha i q} = \overline{u'_\alpha q' u'_i}, \\ \Gamma_{\alpha T T} &= \overline{u'_\alpha \theta'^2}, \quad \Gamma_{\alpha q q} = \overline{u'_\alpha q'^2}, \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

определяют здесь турбулентный перенос соответствующих вторых моментов, а диссипативные члены:

$$\begin{aligned} D_{iT} &= (\nu + \kappa) \frac{\partial u'_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \theta'}{\partial x_\alpha}, \quad D_{TT} = 2\kappa \left(\frac{\partial \theta'}{\partial x_\alpha} \right)^2, \\ D_{iq} &= (\nu + \chi_q) \frac{\partial u'_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial q'}{\partial x_\alpha}, \quad D_{qq} = 2\chi_q \left(\frac{\partial q'}{\partial x_\alpha} \right)^2, \\ D_{qT} &= (\chi + \chi_q) \frac{\partial \theta'}{\partial x_\alpha} \frac{\partial q'}{\partial x_\alpha}, \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

характеризуют интенсивность уменьшения вторых моментов за счет молекулярной вязкости, температуропроводности и диффузии.

Общая система уравнений для одноточечных моментов, необходимая для замыкания исходной системы уравнений мезометеорологии, насчитывает, таким образом, шесть уравнений для независимых компонент тензора R_{ij} , по три уравнения для потоков H_i , Q_i и три дополнительных уравнения переноса σ_T^2 , σ_q^2 и R_{qT} , т. е. всего 15 уравнений. Особенность полученной системы уравнений состоит в том, что она, в свою очередь, также является незамкнутой, поскольку содержит такие неизвестные функции, как третьи моменты, диссипативные члены и члены, характеризующие

взаимодействие полей скорости и давления (члены с пульсациями давления).

Третьи моменты, описывающие турбулентную диффузию вторых моментов, входят под оператор дивергенции в соответствующих уравнениях совместно с компонентами тензора $\lambda_{ij}^{(1)}$. По этой причине, аналогично тому, как это было сделано при анализе уравнения баланса турбулентной энергии, может быть введен суммарный поток напряжений, обусловленный как пульсациями скорости, так и пульсациями давления:

$$B_{aij} = \Gamma_{aij} + \delta_{ia} \overline{\pi' u_j'} + \delta_{ja} \overline{\pi' u_i'}. \quad (3.4.13)$$

Использование для аппроксимации этого потока приближений K -теории оказывается значительно более сложным (если вообще возможно), чем подобная аппроксимация вторых моментов. Трудность здесь состоит прежде всего в том, что необходимость сохранения основного свойства подобных статистических характеристик — симметричности по произвольным парам индексов — приводит в данном случае к весьма громоздким выражениям. В этой ситуации оказывается проще опираться непосредственно на уравнения для третьих моментов, которые могут быть получены из (3.3.1), (3.4.4), (3.4.5) тем же способом, что и уравнения для вторых моментов (см. далее п. 3.5).

Диссипативные члены характеризуют скорость разрушения турбулентных образований за счет действия молекулярных эффектов (вязкости, температуропроводности и диффузии). Основой для анализа и параметризации диссипативных членов является предложенная А. Н. Колмогоровым теория локально-изотропной турбулентности. Эта теория исходит из того, что в каскадном процессе передачи энергии от крупных турбулентных вихрей к более мелким, влияние анизотропного среднего течения ослабевает и при достаточно больших локальных числах Рейнольдса статистический режим мелкомасштабных флуктуаций скорости, температуры и влажности можно считать изотропным. Напомним, что изотропной называют среду, в том случае, если ее свойства (в данном случае статистические характеристики турбулентности) не меняются при произвольном вращении, зеркальном отражении и параллельном переносе некоторой системы координат. Свойство изотропности на малых масштабах означает, например, что для приращения вектора скорости в направлении вектора \vec{r} : $\delta \vec{u}' = \vec{u}'(\vec{x} + \vec{r}) - \vec{u}'(\vec{x})$ при $|\vec{r}| \ll L_0$, где L_0 — линейный масштаб, определяемый геометрией течения (масштаб наиболее крупных турбулентных образований в потоке), взаимный ковариационный тензор может быть представлен в виде

$$\overline{\delta u_i' \delta u_j'} = A \delta_{ij}, \quad (3.4.14)$$

где δ_{ij} — единичный тензор. Таким же свойством будут обладать и пространственные производные от флуктуаций скорости:

$$D_{ij} = 2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} \sim \frac{2\nu}{|\vec{r}|^2} \overline{\delta u_i \delta u_j} \Big|_{|\vec{r}| \rightarrow 0} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}. \quad (3.4.15)$$

Числовой коэффициент $2/3$ выбран здесь с учетом того, что по определению диссипации $\varepsilon = \frac{1}{2} D_{aa}$.

Другим следствием локальной изотропии является равенство нулю ковариации приращения скорости δu_i с произвольной скалярной характеристикой a' . Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть величину $\overline{a' \delta u_i}$ в двух системах координат, отличие между которыми состоит в том, что одна из осей первой системы является зеркальным отражением аналогичной оси второй. В этом случае согласно определению изотропии $\overline{a' \delta u_i} = -\overline{a' \delta u_i}$, откуда следует равенство этой статистической характеристики нулю. Возвращаясь к аппроксимации диссипативных членов D_{TT} и D_{qq} , можно на основе вышесказанного прийти к выводу, что все компоненты этих величин в условиях локальной изотропии также обращаются в нуль.

Для параметризации отличных от нуля D_{TT} , D_{qq} и D_{qT} в настоящее время наиболее часто используют гипотезу, связывающую эти функции со средней диссипацией ε и средней кинетической энергией турбулентных пульсаций b^2 , а также σ_T^2 , σ_q^2 или R_{qT} . Из анализа размерностей при этом следует:

$$D_{TT} = 2c_T \frac{\varepsilon}{b^2} \sigma_T^2, \quad D_{qq} = 2c_q \frac{\varepsilon}{b^2} \sigma_q^2, \quad (3.4.16)$$

$$D_{qT} = 2c_{qT} \frac{\varepsilon}{b^2} R_{qT},$$

где c_T , c_q , c_{qT} — эмпирические константы.

В силу идентичности механизмов турбулентного переноса температуры и влажности обычно предполагают $c_{qT} = c_q = c_T$, а для определения последней можно как и в п. 3.3 рассмотреть предельный режим турбулентного течения при $z \rightarrow 0$, когда диссипативные и генерационные члены в уравнении (3.4.8) с достаточной высокой точностью компенсируют друг друга. С учетом асимптотик логарифмического приземного слоя

$$l = \kappa z, \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = -\frac{H_3 \varphi_{T0}}{\kappa u_* z}, \quad \varepsilon = \frac{u_*^3}{\kappa z},$$

$$b^2 = b_n^2 u_*^2, \quad \sigma_T^2 = \left(\frac{H_3}{u_*}\right)^2 \sigma_{Tn}^2. \quad (3.4.17)$$

из соотношений (3.4.8) и (3.4.17) при этом вытекает, что

$$c_T = - \frac{b^2}{\varepsilon \sigma_T^2} H_3 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \frac{b_n^2 \varphi_{T0}}{\sigma_{Tn}^2} \approx 1,6, \quad (3.4.18)$$

где $b_n \approx 2,3$, $\sigma_{Tn} \approx 1,8$, $\varphi_{T0} \approx 1$ — известные из эксперимента безразмерные значения турбулентной энергии, дисперсии флуктуаций температуры и градиента средней температуры.

Члены с пульсациями давления. Аппроксимация членов с пульсациями давления в уравнениях для вторых моментов представляет собой наиболее серьезную проблему, поскольку обладая сложной структурой в большинстве случаев они имеют тот же порядок величины, что и главные члены уравнений.

Давление в несжимаемой жидкости определяется полем скорости и внешними массовыми силами. Для получения соотношений, связывающих пульсации давления с этими характеристиками течения, применим оператор дивергенции к обеим частям уравнения динамики для флуктуаций скорости (3.3.1) и, пренебрегая членами с вязкостью и силой Кориолиса, получим уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial^2 \pi'}{\partial x_\alpha^2} = M'(\vec{x}, t) = M'_1(\vec{x}, t) + M'_2(\vec{x}, t) + M'_3(\vec{x}, t), \quad (3.4.19)$$

где

$$\begin{aligned} M'_1 &= - \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (u'_\alpha u'_\beta - R_{\alpha\beta}), \\ M'_2 &= - 2 \frac{\partial u'_\alpha}{\partial x_\beta} \frac{\partial u'_\beta}{\partial x_\alpha}, \\ M'_3 &= \beta \frac{\partial \theta'}{\partial x_\beta}. \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

Решение этого уравнения в общем виде может быть записано следующим образом:

$$\pi'(\vec{x}, t) = - \frac{1}{4\pi} \int M'(\vec{\eta}, t) \frac{d\vec{\eta}}{|\vec{x} - \vec{\eta}|} + N'_S(\vec{x}, t), \quad (3.4.21)$$

где интеграл берется по всему объему, занимаемому жидкостью или газом, а $N'_S(\vec{x}, t)$ — некоторая гармоническая (т. е. удовлетворяющая уравнению Лапласа) функция, определяемая из условия на границе области.

В соответствии с тем, что правая часть уравнения (3.4.19) расщепляется на три несколько различных по физическому смыслу члена, то из (3.4.21) следует, что поле флуктуаций давления мо-

жет быть представлено в виде суперпозиции четырех полей, каждое из которых формируется за счет определенного механизма:

$$\pi'(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^4 \pi_i'(\vec{x}, t),$$

где π_1' генерируется турбулентными флуктуациями скорости в результате их взаимодействия друг с другом, π_2' формируется в результате взаимодействия флуктуаций скорости с градиентом средней скорости, π_3' — за счет взаимодействия \vec{u}' с флуктуациями температуры, а π_4' — флуктуации давления, связанные с наличием твердой поверхности.

Каждый из этих механизмов формирования поля флуктуаций давления может быть интерпретирован на основе весьма упрощенных представлений о динамике турбулентного потока как совокупности хаотически движущихся турбулентных образований (вихрей или так называемых «молей»). Первый из них описывает в этом случае возникновение пульсаций давления в результате случайных столкновений вихрей. При этом осуществляется перераспределение энергии турбулентности по степеням свободы их движения, аналогично тому, как это происходит при хаотическом движении молекул газа. В результате действия этого механизма первоначально анизотропный турбулентный поток, будучи предоставлен самому себе, по истечении некоторого времени приходит в изотропное состояние, когда $R_{ij} = \frac{2}{3} b^2 \delta_{ij}$. Второй и третий механизмы описывают возникновение пульсаций давления в результате деформации турбулентных вихрей за счет сдвига средней скорости и действия силы плавучести. В первом случае деформация связана с тем, что отдельные части турбулентного образования имеют различную полную скорость своего движения, а во втором — с возникновением в этих отдельных частях различных ускорений, обуславливаемых силой плавучести. В результате подобной деформации вихрь разрушается с образованием совокупности более мелких турбулентных образований. Более строгий анализ показывает, что этот процесс сопровождается возрастанием общей завихренности потока и является главным механизмом в формировании каскадного переноса энергии по спектру. Наконец последний из указанных механизмов можно интерпретировать как столкновение турбулентных вихрей с твердой подстилающей поверхностью, в результате которого происходит его разрушение с перераспределением энергии на вновь образовавшиеся мелкие вихри.

Таким образом, члены с пульсациями давления, которые необходимо параметризовать, можно представить в виде совокупности четырех слагаемых, определяющих тот или иной механизм формирования флуктуаций давления:

$$\begin{aligned} \lambda_{ij}^{(2)} &= \sum_{l=1}^4 \psi_{ij}^{(l)}, \\ \overline{f' \frac{\partial \pi'}{\partial x_i}} &= \sum_{l=1}^4 \chi_i^{(l)}, \end{aligned} \quad (3.4.22)$$

где $f' = q', \theta'$.

Поскольку члены $\psi_{ij}^{(l)}$ и $\chi_i^{(l)}$ описывают «изотропизацию» турбулентного потока, одними из наиболее простых гипотез для их

выражения через рассчитываемые вторые моменты могут служить следующие:

$$\begin{aligned}\psi_{ij}^{(1)} &= -c_R \frac{\varepsilon}{b^2} \left(R_{ij} - \frac{2}{3} b^2 \delta_{ij} \right), \\ \chi_i^{(1)} &= -c_f \frac{\varepsilon}{b^2} \overline{u' f'},\end{aligned}\tag{3.4.23}$$

где c_R , c_f — новые эмпирические константы. Первая из этих гипотез, предложенная И. Ротга, сохраняет основные тензорные свойства параметризуемого члена и удовлетворяет условию $\psi_{\alpha\alpha}^{(1)} = 0$.

Параметризация второго и третьего слагаемых в формулах (3.4.22) встречает наибольшие трудности. В настоящее время используются две сходные формы представления этих членов, предложенные несколько лет назад Дж. Ламли и Б. Лаундером. Согласно последней из этих гипотез, имеющей также и некоторое теоретическое обоснование, справедливо следующее представление:

$$\begin{aligned}\psi_{ij}^{(2)} &= -\frac{3}{5} \left(P_{ij} - \frac{1}{3} P_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \right), \\ \psi_{ij}^{(3)} &= -\frac{3}{10} \left(G_{ij} - \frac{1}{3} G_{\alpha\alpha} \delta_{ij} \right),\end{aligned}\tag{3.4.24}$$

где

$$\begin{aligned}P_{ij} &= -R_{i\alpha} \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_\alpha} - R_{j\alpha} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_\alpha}, \\ G_{ij} &= \beta_i H_j + \beta_j H_i\end{aligned}$$

— генерационные члены в уравнении для тензора напряжений Рейнольдса (3.3.2). В соответствии с выводами Дж. Ламли для $\chi_i^{(2)}$ и $\chi_j^{(3)}$ справедливо:

$$\begin{aligned}\chi_i^{(2)} &= \frac{4}{5} H_\alpha \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{5} H_\alpha \frac{\partial \dot{u}_\alpha}{\partial x_i}, \\ \chi_i^{(3)} &= -\frac{1}{3} \beta \sigma_T^2.\end{aligned}\tag{3.4.25}$$

Члены $\psi_{ij}^{(4)}$ и $\chi_i^{(4)}$ существенны, очевидно, лишь вблизи подстилающей поверхности и при моделировании турбулентного потока за пределами приземного слоя ими пренебрегают. В первом случае (для аппроксимации $\psi_{ij}^{(4)}$) часто используют соотношение, пред-

ложенное А. С. Мониним для турбулентного потока над поверхностью, ориентированной по нормали к оси x_3 :

$$\psi_{ij}^{(4)} = c_M \frac{\varepsilon}{b^2} R_{33} \left(\delta_{i3} \delta_{j3} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \right). \quad (3.4.26)$$

Все константы, используемые в гипотезах замыкания системы уравнений для вторых моментов, можно условно разделить на три группы:

- определяемые с помощью той или иной приближенной теории;
- путем непосредственных измерений параметризуемых членов;
- подобранные косвенным образом в результате сравнения расчетов с экспериментальными данными.

Числовые константы в формулах для $\psi_{ij}^{(2)}$, $\psi_{ij}^{(3)}$, $\chi_i^{(2)}$, $\chi_i^{(3)}$ получены в результате использования приближений квазиизотропной турбулентности и, вообще говоря, не нуждаются для своего определения в каких-либо экспериментах.

Во вторую группу в данном варианте модели входит лишь константа c_R , экспериментальное определение которой производилось различными исследователями путем непосредственного измерения ковариаций пульсаций давления с флуктуацией тензора деформаций поля скорости (вдали от стенок, при отсутствии градиента средней скорости и флуктуаций температуры, т. е. когда все слагаемые в формуле (3.4.22), кроме $\psi_{ij}^{(1)}$, равны нулю). Согласно имеющимся в настоящее время данным эта величина составляет в среднем около 1,8 с относительной погрешностью порядка 20%. Последняя обусловлена не ошибками измерений, а приближенным характером самой гипотезы Ротта.

Значительное количество констант входит в третью группу. Сюда относятся уже полученные ранее константы диссипации c , c_q , c_T и c_{qT} . Строго говоря, они также могли быть определены путем измерения диссипативных функций ε , D_{qq} , D_{TT} и D_{qT} , однако этому препятствует неопределенность понятия масштаба турбулентности l , который, при этом также должен быть измерен. Что касается c_f' (c_T' , c_q') и c_M , то для их определения также рассматривается предельный случай логарифмического приземного слоя, когда процесс турбулентного обмена можно считать стационарным и вклад диффузионных членов в левых частях уравнений (3.4.8)—(3.4.10) пренебрежимо мал по сравнению с основными членами правой части. Получаемая в этом случае система линейных алгебраических уравнений связывает искомые константы с константами двух первых групп и безразмерными величинами R_{ii}/u_*^2 , H_1/H_3 , а также уже использованными ранее σ_{Tn}^2 , b_n и φ_{T0} .

3.5. Уравнения для третьих моментов

Использование уравнений для третьих моментов $\Gamma_{ijk} = \overline{u_i' u_j' u_k'}$, $\Gamma_{ijf} = \overline{u_i' u_j' f'}$, $\Gamma_{ij\varphi} = \overline{u_i' u_j' \varphi'}$ ($i, j, k=1, 2, 3$; φ или $f=\theta, q$) — наиболее естественный путь параметризации диффузионных членов в уравнениях для вторых моментов. Он приводит, однако, к заметному усложнению общей задачи, поскольку число дифференциальных уравнений при этом существенно возрастает. Тем не менее, с расширением возможностей вычислительной техники, этот подход находит все более широкое применение на практике, в том числе и при создании трехмерных мезометеорологических моделей.

Получим уравнения переноса для третьих моментов, опираясь на уравнения для флуктуаций компонент скорости ветра u_i' (3.3.1) и температуры θ' (3.4.4) (вывод уравнений для третьих моментов с флуктуациями влажности проводится

аналогично). Используя тождество $\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ijk} = \overline{u'_i u'_j \frac{\partial u'_k}{\partial t}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial u'_j}{\partial t}} + \overline{u'_j u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial t}}$

и подставляя сюда выражения для локальных производных по времени из (3.3.1) с учетом уравнения несжимаемости в форме (2.3.4), можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{ijk}}{\partial t} + u'_\alpha \frac{\partial \Gamma_{ijk}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G_{aijk}}{\partial x_\alpha} = \Pi_{ijk} + D_{ijk} + \beta_i \Gamma_{jkr} + \beta_j \Gamma_{jkr} + \beta_k \Gamma_{ijr} - \\ - \Gamma_{lka} \frac{\partial u'_j}{\partial x_\alpha} - \Gamma_{jka} \frac{\partial u'_i}{\partial x_\alpha} - \Gamma_{ija} \frac{\partial u'_k}{\partial x_\alpha} + R_{ik} \frac{\partial R_{ja}}{\partial x_\alpha} + R_{jk} \frac{\partial R_{ia}}{\partial x_\alpha} + \\ + R_{ij} \frac{\partial R_{ka}}{\partial x_\alpha}, \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

где $G_{aijk} = \overline{u'_i u'_j u'_\alpha u'_k}$, $\Pi_{ijk} = - \left(\overline{u'_j u'_k \frac{\partial \pi'}{\partial x_i}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial \pi'}{\partial x_j}} + \overline{u'_i u'_j \frac{\partial \pi'}{\partial x_k}} \right)$,

$$D_{ijk} = \nu \left(\overline{u'_j u'_k \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_\alpha^2}} + \overline{u'_i u'_k \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x_\alpha^2}} + \overline{u'_i u'_j \frac{\partial^2 u'_k}{\partial x_\alpha^2}} \right) -$$

соответственно четвертые моменты (описывающие турбулентный перенос третьих), члены, характеризующие взаимодействие турбулентных флуктуаций скорости с пульсациями давления, и диссипативные члены. Остальные слагаемые в правой части (3.5.1) представляют собой генерацию Γ_{ijk} за счет действия сил плавучести, градиентов средней скорости потока и турбулентных напряжений.

Сходный вид имеют получаемые аналогичным образом уравнения для остальных третьих моментов, включающих температурные флуктуации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{ijT}}{\partial t} + u'_\alpha \frac{\partial \Gamma_{ijT}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G_{aijT}}{\partial x_\alpha} = \Pi_{ijT} + D_{ijT} + \beta_i \Gamma_{jTT} + \beta_j \Gamma_{iTT} - \Gamma_{aiT} \frac{\partial u'_j}{\partial x_\alpha} - \\ - \Gamma_{ajT} \frac{\partial u'_i}{\partial x_\alpha} - \Gamma_{aij} \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} + H_i \frac{\partial R_{ja}}{\partial x_\alpha} + H_j \frac{\partial R_{ia}}{\partial x_\alpha} + R_{ij} \frac{\partial H_\alpha}{\partial x_\alpha}, \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{iTT}}{\partial t} + u'_\alpha \frac{\partial \Gamma_{iTT}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G_{aiTT}}{\partial x_\alpha} = \Pi_{iTT} + D_{iTT} + \beta_i \Gamma_{TTT} - \\ - \Gamma_{aTT} \frac{\partial u'_i}{\partial x_\alpha} - 2\Gamma_{aiT} \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} + \sigma_T^2 \frac{\partial R_{ia}}{\partial x_\alpha} + 2H_i \frac{\partial H_\alpha}{\partial x_\alpha}, \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{TTT}}{\partial t} + u'_\alpha \frac{\partial \Gamma_{TTT}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G_{aTTT}}{\partial x_\alpha} = D_T - 3\Gamma_{aTT} \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} + 3\sigma_T^2 \frac{\partial H_\alpha}{\partial x_\alpha}, \quad (3.5.4)$$

где $G_{aijT} = \overline{u'_\alpha u'_i u'_j \theta'}$, $G_{aiTT} = \overline{u'_\alpha u'_i \theta'^2}$, $G_{aTTT} = \overline{u'_\alpha \theta'^3}$, а Π_{ijT} , Π_{iTT} , D_{ijT} , D_{iTT} и D_T имеют тот же смысл, что и в уравнении для Γ_{ijk} .

Основные принципы замыкания вновь полученной системы уравнений для третьих моментов остаются, в целом, такими же, что и при замыкании уравнений для вторых моментов. При этом используется предположение о незначительном отличии взаимной плотности распределения турбулентных флуктуаций от гауссовой (при точном выполнении этого условия все третьи моменты

обращаются в нуль), что даёт основание для использования приближенных соотношений:

$$\begin{aligned} G_{ijkl} &= R_{ij} R_{kl} + R_{ik} R_{jl} + R_{il} R_{jk}, \quad G_{iTTT} = 3H_i \sigma_T^2, \\ G_{ijkT} &= R_{ij} H_k + R_{ik} H_j + R_{jk} H_i, \quad G_{ijTT} = R_{ij} \sigma_T^2 + 2H_i H_j, \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

составляющих различные варианты так называемой «гипотезы Миллионщикова».

Члены с пульсациями давления и диссипативные члены способствуют уменьшению абсолютных значений третьих моментов: первые в результате изотропизирующего влияния флуктуаций давления, а вторые — за счет воздействия молекулярной вязкости и теплопроводности. Это приводит к выводу о возможности использования с целью их аппроксимации наиболее простых гипотез «релаксационного типа»:

$$\begin{aligned} \Pi_{ijk} + D_{ijk} &\approx -a_1 \frac{\varepsilon}{b^2} \Gamma_{ijk}, \quad \Pi_{ijT} + D_{ijT} \approx -a_2 \frac{\varepsilon}{b^2} \Gamma_{ijT}, \\ \Pi_{iTT} + D_{iTT} &\approx -a_3 \frac{\varepsilon}{b^2} \Gamma_{iTT}, \quad D_T \approx -a_4 \frac{\varepsilon}{b^2} \Gamma_{TTT}, \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

где значения $\tau \sim b^2/\varepsilon$ определяют, как и в уравнениях для вторых моментов, характерное время разрушения корреляционных связей в турбулентном потоке за счет указанных эффектов. Для определения констант a_i в данном случае привлекаются либо более глубокие теоретические соображения, либо результаты достаточно тонких экспериментов.

С учетом замыкающих соотношений общая система уравнений для третьих моментов записывается в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{ijk}}{\partial t} + \bar{u}_a \frac{\partial \Gamma_{ijk}}{\partial x_a} &= -a_1 \frac{\varepsilon}{b^2} \Gamma_{ijk} + \beta_i \Gamma_{jkT} + \beta_j \Gamma_{ikT} + \beta_k \Gamma_{ijT} - R_{ia} \frac{\partial R_{jk}}{\partial x_a} - \\ &- R_{ja} \frac{\partial R_{ik}}{\partial x_a} - R_{ka} \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_a} - \Gamma_{ika} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_a} - \Gamma_{jka} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_a} - \Gamma_{ija} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_a}; \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{ijT}}{\partial t} + \bar{u}_a \frac{\partial \Gamma_{ijT}}{\partial x_a} &= -a_2 \frac{\varepsilon}{b^2} \Gamma_{ijT} + \beta_i \Gamma_{iTT} + \beta_j \Gamma_{jTT} - R_{ia} \frac{\partial H_j}{\partial x_a} - R_{ja} \frac{\partial H_i}{\partial x_a} - \\ &- H_a \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_a} - \Gamma_{aIT} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_a} - \Gamma_{aJT} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_a} - \Gamma_{aIT} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_a}; \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{iTT}}{\partial t} + \bar{u}_a \frac{\partial \Gamma_{iTT}}{\partial x_a} &= -a_3 \frac{\varepsilon}{b^2} \Gamma_{iTT} + \beta_i \Gamma_{TTT} - R_{ia} \frac{\partial \sigma_T^2}{\partial x_a} - 2H_a \frac{\partial H_i}{\partial x_a} - \\ &- \Gamma_{aTT} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_a} - 2\Gamma_{aIT} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_a}; \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{TTT}}{\partial t} + \bar{u}_a \frac{\partial \Gamma_{TTT}}{\partial x_a} = -a_4 \frac{\varepsilon}{b^2} \Gamma_{TTT} - 3H_a \frac{\partial \sigma_T^2}{\partial x_a} - 3\Gamma_{aTT} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_a}. \quad (3.5.10)$$

Полная система уравнений для третьих моментов с учетом влажности требует дополнительного включения еще двенадцати уравнений для независимых компонентов Γ_{ijq} , Γ_{iqq} , Γ_{qqq} , Γ_{qTT} и Γ_{Tqq} , вид которых аналогичен (3.5.8) — (3.5.10). Теоретический или численный анализ общей системы уравнений для первых, вторых и третьих моментов оказывается из-за ее сложности

чрезвычайно затруднительным. Следует отметить, однако, что применительно к описанию мезометеорологических процессов с выраженной анизотропией горизонтальных (L_x) и вертикальных (L_z) масштабов, она может быть значительно упрощена путем исключения членов, имеющих порядок L_z/L_x (подобно тому, как это было сделано при исследовании уравнения баланса турбулентной энергии в (3.3.3)). При этом значительно сокращается как число переменных, так и общий порядок системы дифференциальных уравнений.

Основным следствием включения уравнений для третьих моментов в общую систему уравнений гидротермодинамики турбулентного потока является то, что при этом она приобретает качественно новые свойства. Продемонстрируем это на примере описания вертикального турбулентного переноса энергии флуктуаций вертикальной скорости $\sigma^2 = \overline{w'^2}$ (составляющей часть турбулентной энергии b^2). Запишем (3.4.1) для $\sigma^2 \equiv R_{33}$, а (3.5.7) — для $\Gamma \equiv \Gamma_{333} = \overline{w'^3}$ в приближении горизонтально-однородного атмосферного пограничного слоя, формирующегося в поле упорядоченных вертикальных токов $\widetilde{W} = u_3$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^2}{\partial t} + \widetilde{W} \frac{\partial \sigma^2}{\partial z} + \frac{\partial \Gamma}{\partial z} &= F_1, \\ \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \widetilde{W} \frac{\partial \Gamma}{\partial z} + 3\sigma^2 \frac{\partial \sigma^2}{\partial z} &= F_2, \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

где F_1, F_2 — некоторые функции, не содержащие производных от σ^2 и Γ , вид которых зависит от способа замыкания системы уравнений вторых и третьих моментов. Анализ системы (3.5.11) приводит к выводу, что она является квазилинейной гиперболической*, в то время как использование градиентной гипотезы для аппроксимации вертикального турбулентного потока σ^2 ($\Gamma = -K_0 \partial \sigma^2 / \partial z$) приводит к уравнению параболического типа:

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial t} + \widetilde{W} \frac{\partial \sigma^2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} K_0 \frac{\partial \sigma^2}{\partial z} + F_1. \quad (3.5.12)$$

Если ввести новые зависимые переменные $R_{1,2} = \Gamma \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma^3$ (для чего следует домножить первое из уравнений (3.5.11) на $\pm \sqrt{3}$ и сложить со вторым), то для $\sigma \neq 0$ можно получить следующую систему уравнений, эквивалентную исходной:

$$\frac{\partial R_{1,2}}{\partial t} + (\widetilde{W} \pm \sqrt{3} \sigma) \frac{\partial R_{1,2}}{\partial z} = \left(\frac{dR_{1,2}}{dt} \right)_{1,2} = G_{1,2},$$

где $G_{1,2}$ — некоторые новые функции, также не содержащие производных от искомых величин. Комбинации $R_{1,2}$ являются для исходной системы (3.5.11)

* Система уравнений, записанная для вектора-столбца зависимых переменных Φ_i в виде

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + A_{ia} \frac{\partial \Phi_a}{\partial z} = \Phi_i,$$

где Φ_i — вектор-функция правых частей системы, не содержащая производных от Φ_i , относится к гиперболическому типу, если собственные числа матрицы A_{ij} вещественны, а ее левые собственные вектора образуют некоторый базис (Рождественский, Яненко [14]).

так называемыми инвариантами Римана, поскольку в частном случае $C_{1,2} = 0$, они остаются неизменными вдоль траекторий

$$\frac{dz_{1,2}}{dt} = \tilde{W} \pm \sqrt{3} \sigma,$$

описывающих поле характеристик системы (3.5.11). Одной из важных ее особенностей по сравнению с (3.5.12) является возможность интерпретировать верхнюю границу атмосферного пограничного слоя как одну из характеристик системы квазилинейных гиперболических уравнений, разделяющую турбулентный пограничный слой и квазиламинарную свободную атмосферу.

Более детальный анализ показывает, что в классе одномерных задач общая система уравнений первых, вторых и третьих моментов также является квазилинейной гиперболической. Это обстоятельство позволяет использовать для ее анализа и численной реализации богатейший опыт, накопленный к настоящему времени в такой области гидромеханики, как газовая динамика.

3.6. Методы моделирования облачности

Существуют два основных метода моделирования фазовых переходов и облачности в мезометеорологических задачах. Первый, который можно назвать явным, основан на описании тонких явлений, сопровождающих фазовые переходы в атмосфере, на микрофизическом уровне. Второй, неявный, связан, по существу, с параметризацией этих явлений.

Первый метод, подробное обсуждение которого не входит в нашу задачу, используется преимущественно при моделировании индивидуальных облачных образований и преследует главным образом исследовательские цели, хотя и оказывается весьма полезным при решении многих практических вопросов (например, при активных воздействиях на облака). Вследствие примерного равенства вертикального и горизонтальных масштабов облака при этом необходимо отказаться от квазистатического приближения и использовать уравнение движения для вертикальной скорости в полном или упрощенном виде.

Рациональным способом описания фазовых переходов в мезометеорологических моделях со значительными горизонтальными масштабами ($L_x \approx 10^5 \div 10^6$ м) является использование предположения о полном увлечении облачных капель воздушным потоком, которое при построении модели позволяет опираться на уравнения для так называемых облачных инвариантов: эквивалентной

температуры $\Pi = \theta + \frac{L'}{c_p} q$ и удельного влагосодержания $S = q + \delta$,

где δ — удельная водность. С известным приближением гипотеза о полном увлечении капель турбулентным потоком оказывается справедливой для капель, имеющих радиусы до нескольких десятков микрон. Дисперсный состав капель такого диапазона характерен для большинства форм облачности, в которых не наблюдается осадков (как слоистых, так и кучевых). Однако и в тех облаках, где капли или кристаллы льда крупнее, их гравитационное оседание (осадки) может быть учтено достаточно про-

сто путем введения средневзвешенной (по массе) скорости их падения W_g , так что вертикальный (направленный вниз) поток водности может быть в этом случае вычислен как $Q_g = W_g \delta$. Уравнение для удельной водности можно с учетом данного обстоятельства записать в виде

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + u_a \frac{\partial \delta}{\partial x_a} = \Phi + \frac{\partial Q_g}{\partial x_3}, \quad (3.6.1)$$

где, как и ранее, Φ — скорость образования жидкой фазы. Уравнение (3.6.1) дополняет исходную систему уравнений гидротермодинамики атмосферы (2.1.1)–(2.1.5) для условий облачной атмосферы. Комбинируя (3.6.1) с уравнениями для переноса потенциальной температуры (2.1.2), массовой доли водяного пара (2.1.3) и опуская в последних члены, описывающие молекулярный обмен, запишем исходные уравнения для переноса Π и S :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial t} + u_a \frac{\partial \Pi}{\partial x_a} &= \varepsilon_R, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + u_a \frac{\partial S}{\partial x_a} &= \frac{\partial Q_g}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

Проведя, далее, преобразования, аналогичные сделанным в п. 2.3, с целью выделения возмущений Π и S мезометеорологических масштабов, получим в итоге уравнения для $\bar{\Pi}$ и \bar{S} :

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} + u_a \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x_a} = \varepsilon_R - u_a \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial x_a} - \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial t} - \frac{\partial \bar{E}_a^{(\Pi)}}{\partial x_a}, \quad (3.6.3)$$

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} + u_a \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_a} = -u_a \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_a} - \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_a} (\bar{E}_a^{(S)} - Q_g), \quad (3.6.4)$$

где

$$\bar{E}_i^{(f)} = \overline{\hat{u}_i \hat{f}} - \bar{u}_i \bar{f} = E_i^{(f)} + \overline{\bar{u}_i \bar{f}} + \overline{u_i' \bar{f}} + \overline{\bar{u}_i f'} - \bar{u}_i \bar{f},$$

которые для облачной атмосферы следует использовать вместо уравнений для мезометеорологических возмущений температуры и влажности. Макроскопические (фоновые) поля $\bar{\Pi}, \bar{S}(\vec{x}, t)$ считаются известными и могут быть заданы с помощью той или иной региональной или глобальной модели. Запись уравнений для облачных инвариантов в отклонениях полезна также и в том отношении, что дает возможность использовать однородные граничные условия на верхней и боковых границах расчетной области (способ постановки нижних граничных условий будет обсуждаться

в п. 4.4). Что касается параметризации турбулентных потоков $E_i^{(n)} = \overline{\Pi' u_i}$ и $E_i^{(s)} = \overline{S' u_i}$, то она может быть произведена одним из тех способов, которые анализировались в предыдущих параграфах.

Серьезную проблему представляет восстановление полей температуры, влажности и водности по рассчитанным с помощью уравнений (3.6.3) — (3.6.4) значениям $\overline{\Pi}$, $\overline{S}(\vec{x}, t)$. Исключив из рассмотрения неизвестную величину Φ путем введения облачных инвариантов, мы теперь должны дополнить систему уравнений для $\overline{\Pi}$ и \overline{S} еще одним соотношением, связывающим эти величины.

Наиболее просто возникшая проблема может быть разрешена для случая сплошной (десятибалльной) облачности — слоистой, слоисто-кучевой и т. д. Примем дополнительное предположение, что в пределах облачного слоя влажность воздуха является насыщающей $q^* = q_m(T^*)$, а за его пределами водность δ^* равна нулю. Учитывая, что на границах облаков, заданных координатами $\{X', Y', Z'\}$, справедливы оба эти условия можно записать:

$$\bar{\theta}^* + \frac{L'}{c_p} q_m(T^*) = \overline{\Pi}^*(X', Y', Z', t),$$

$$q_m(T^*) = \overline{S}^*(X', Y', Z', t),$$

$$\bar{\theta}^* = T^* \left(\frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p} \approx T^* + \gamma_a Z',$$

где $p_0 = 1000$ гПа. Исключая из этих соотношений $\bar{\theta}^*$ и q_m , получим уравнение поверхности в трехмерном пространстве, ограничивающей облачный слой,

$$\begin{aligned} T_m[\overline{S}^*(X', Y', Z', t)] + \gamma_a Z' + \frac{L'}{c_p} \overline{S}^*(X', Y', Z', t) = \\ = \overline{\Pi}^*(X', Y', Z', t), \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

где $T_m(S)$ — температура точки росы для $q=S$ (функция, обратная функции $q_m(T)$).

Если ввести «индикаторную» переменную

$$I_0 = \overline{\Pi}^* - \gamma_a z - \frac{L'}{c_p} \overline{S}^* - T_m(\overline{S}^*), \quad (3.6.6)$$

то при $I_0 < 0$ в данной точке пространства будет наблюдаться облако, а при $I_0 > 0$ — такового будет отсутствовать. В первом случае для определения $\bar{\theta}$, \bar{q} и $\bar{\delta}$ решается система трансцендентных уравнений:

$$\bar{\theta} + \frac{L'}{c_p} (q_m(T) - \bar{q}) = \overline{\Pi},$$

$$\begin{aligned}
 q_m(\bar{T}) + \bar{\delta} - \bar{q} &= \bar{S}, \\
 \bar{q} &= q_m(\bar{T}) - \bar{q}, \\
 \bar{T} &= \bar{\theta} + \bar{\theta} - \gamma_a z,
 \end{aligned}
 \tag{3.6.7}$$

а во втором (при $I_0 > 0$) —

$$\begin{aligned}
 \bar{q} &= \bar{S} + \bar{\delta}, \\
 \bar{\theta} &= \bar{\Pi} - \frac{L'}{c_p} (\bar{S} + \bar{\delta}).
 \end{aligned}
 \tag{3.6.8}$$

При этом вне облака гравитационный поток облачных капель Q_g в уравнении (3.6.4) полагается равным нулю, а в облаке рассчитывается с помощью соотношения

$$Q_g = W_g [\bar{S} - q_m(\bar{T})],
 \tag{3.6.9}$$

где для вычисления средней скорости оседания облачных капель может использоваться следующая эмпирическая формула:

$$W_g = W_\infty \left[1 - \frac{64}{(2 + \alpha_g R_m)^6} \right],$$

при $W_\infty = 10$ м/с; $\alpha_g = 1,2 \cdot 10^{-3}$ мкм⁻¹ и модальном радиусе капель R_m , который выбирается в зависимости от типа облаков и условий их образования.

Значительно сложнее обстоит дело в том случае, если облачность не является сплошной. Даже при ее значительном количестве (7—9 баллов), сглаженные по ячейкам вычислительной сетки инварианты $\bar{\Pi}$ и \bar{S} не достигнут таких значений, чтобы функция I_0 показала бы наличие облаков. Для идентификации при этом облачности необходима дополнительная информация о ее статистической структуре или, как минимум, о ее балле $n(\vec{x}, t)$. Наиболее простой путь получения таких данных — это использование эмпирических закономерностей, связывающих основные параметры структуры с температурой и влажностью воздуха. Более последовательным здесь является привлечение вероятностного подхода — так называемых моделей «облачных ансамблей».

Продemonстрируем возможность применения вероятностного подхода на примере описания полей облачности кучевых форм (Cu hum, Cu med, Cu cong), верхняя граница которых в большинстве случаев не превосходит 2,5—3 км. Вследствие многих особенностей своего формирования облака такого вида могут рассматриваться как результат проявления особого режима атмосферной турбулентности при наличии фазовых переходов. Характерные горизонтальные и вертикальные масштабы кучевых облаков вполне согласуются с масштабами наиболее энергетически значимых турбулентных возмущений в поле температуры, влажности и скорости ветра, определенными из энергетических спектров флуктуаций этих величин. В то же время размеры облачных капель в облаках этих форм достаточно малы, чтобы здесь можно было использовать гипотезу

об их полном увлечении турбулентным потоком (модальные радиусы у облаков Cu hum составляют 10—20 мкм, а у Cu cong — около 20—30 мкм (Шметер, 1972 г.).

Если в результате решения некоторой статистической задачи удастся определить взаимную плотность распределения турбулентных флуктуаций Π' и S' — $P(\Pi', S' | \vec{x}, t)$, то вероятность образования облака в данной точке пространства $P_n(\vec{x}, t)$ и балл облачности $n(\vec{x}, t)$ могут быть рассчитаны следующим образом:

$$P_n(\vec{x}, t) = \int_{I_0 < 0} P(\Pi', S' | \vec{x}, t) d\Pi' dS', \quad n(\vec{x}, t) = 10 P_n,$$

где интеграл вычисляется по части плоскости $\{\Pi, S\}$, ограниченной кривой $I_0(\Pi + \Pi', S + S') = 0$. На рис. 6 схематически представлены поля изолиний $P(\Pi', S')$ при полном отсутствии облаков (а), для облачности $n \approx 5$ баллов (б) и десятибалльной облачности (в).

В рамках мезометеорологической задачи определить плотность распределения $P(\Pi', S' | \vec{x}, t)$ в настоящее время оказывается возможным лишь приближенно, исходя из некоторого модельного ее представления. Предполагая, что приемлемой аппроксимацией такой функции может служить двумерное гауссово распределение

$$P_G(\Pi', S') = [2\pi \sigma_\Pi \sigma_S (1 - \rho_{\Pi S}^2)^{-1/2}]^{-1} \times$$

$$\times \exp \left\{ \frac{1}{2(1 - \rho_{\Pi S}^2)^{1/2}} \left[\left(\frac{\Pi'}{\sigma_\Pi} \right)^2 - 2 \frac{\rho_{\Pi S}}{\sigma_\Pi \sigma_S} \Pi' S' + \left(\frac{S'}{\sigma_S} \right)^2 \right] \right\},$$

где $\sigma_\Pi^2 = \overline{\Pi'^2}$; $\sigma_S^2 = \overline{S'^2}$ и $\rho_{\Pi S} = \overline{\Pi' S'} / \sigma_\Pi \sigma_S$ — коэффициент корреляции турбулентных флуктуаций Π' и S' , допустимо ограничиться рассмотрением лишь трех параметров этого распределения. Общая техника вывода уравнений переноса для такого рода вторых моментов была изложена в п. 3.4. Для этой цели требуется предварительно получить уравнения для турбулентных флуктуаций Π' и S' , которые в данном случае аналогичны уравнениям для θ' и S' , а затем последовательно их умножая на Π' и S' и осредняя по микродиапазону, можно записать:

$$\frac{\partial \sigma_\Pi^2}{\partial t} + u_\alpha^* \frac{\partial \sigma_\Pi^2}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \Gamma_{\alpha \Pi \Pi}}{\partial x_\alpha} = -2E_\alpha^{(\Pi)} \frac{\partial \Pi}{\partial x_\alpha} - c_T \frac{\varepsilon}{b^2} \sigma_\Pi^2; \quad (3.6.10)$$

$$\frac{\partial \sigma_S^2}{\partial t} + u_\alpha^* \frac{\partial \sigma_S^2}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \Gamma_{\alpha S S}}{\partial x_\alpha} = -2E_\alpha^{(S)} \frac{\partial S}{\partial x_\alpha} - c_T \frac{\varepsilon}{b^2} \sigma_S^2; \quad (3.6.11)$$

$$\frac{\partial R_{\Pi S}}{\partial t} + u_\alpha^* \frac{\partial R_{\Pi S}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \Gamma_{\alpha \Pi S}}{\partial x_\alpha} = -E_\alpha^{(\Pi)} \frac{\partial S}{\partial x_\alpha} - E_\alpha^{(S)} \frac{\partial \Pi}{\partial x_\alpha} - c_T \frac{\varepsilon}{b^2} R_{\Pi S}. \quad (3.6.12)$$

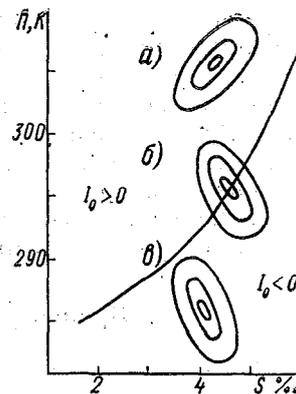


Рис. 6. Схематическое представление фазовой диаграммы для определения балла кучевой облачности. Сплошная линия соответствует $I_0 = 0$.

Для замыкания этой системы уравнений, так же как и уравнений переноса для \bar{P} и \bar{S} , в общем случае должна быть привлечена полная система уравнений для вторых моментов, сформулированная в п. 3.4, в которой все статистические характеристики с θ' и q' заменяются на аналогичные с \bar{P} и \bar{S}' .

4. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АТМОСФЕРЫ С ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Подстилающая поверхность из-за разнообразия своих свойств является основным источником формирования мезометеорологических возмущений в поле скорости ветра, температуры и влажности. По этой причине важность достаточно точного описания в любой мезометеорологической модели тех или иных особенностей взаимодействия атмосферы с подстилающей поверхностью очевидна. Чрезвычайная сложность процессов, происходящих в приповерхностном слое воздуха, делает в большинстве случаев невозможным их явное описание в модели и приводит, таким образом, к необходимости параметризации. При этом выделяют два основных направления: параметризация процессов переноса в приповерхностном слое атмосферы и процессов, связанных с обтеканием воздушным потоком орографических неоднородностей.

4.1. Приповерхностный слой атмосферы

Главной особенностью приповерхностного (приземного или приводного) слоя атмосферы является существование в этой области значительных градиентов скорости ветра, температуры и влажности, которые в случае явного описания процессов переноса в этом слое приводят к необходимости сгущения вычислительной сетки в вертикальном направлении. Такой подход оказывается вполне допустимым при рассмотрении одномерных моделей атмосферного пограничного слоя, но для трехмерных мезометеорологических моделей оказывается слишком расточительным в отношении использования ресурсов ЭВМ. Многие важные свойства приповерхностного слоя позволяют, однако, заметно упростить его описание, а значит при наличии тех же ресурсов уделить больше внимания моделированию других явлений.

Основным инструментом решения задачи параметризации приповерхностного слоя в настоящее время является теория подобия Монина — Обухова, в основе которой лежит допущение, что структура стационарного приповерхностного слоя над горизонтально-однородной подстилающей поверхностью может быть описана ограниченным числом параметров, в число которых входят: высота z , параметр плавучести $\beta = g/\bar{T}$, турбулентные потоки температуры $H = H_3 = \overline{\theta' \omega'}$ и массовой доли водяного пара $Q = Q_3 = \overline{q' \omega'}$ в вертикальном направлении, а также динамическая ско-

рость $u_* = [R_{13}^2 + R_{23}^2]^{1/2}$. Применяя известную теорему теории подобия для зависимости от этих параметров градиентов модуля средней скорости ветра \bar{V} , средних значений потенциальной температуры $\bar{\theta}$ и массовой доли водяного пара \bar{q} , можно получить:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z} \varphi_u(\zeta),$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = -\frac{H}{\kappa u_* z} \varphi_T(\zeta), \quad \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = -\frac{Q}{\kappa u_* z} \varphi_q(\zeta), \quad (4.1.1)$$

где $\zeta = z/L$ — параметр устойчивости, $L = -\frac{u_*^3}{\beta H \kappa}$ — масштаб длины в теории подобия Монина — Обухова.

Выбор параметров, определяющих структуру приповерхностного слоя, основан на анализе уравнений динамики, переноса тепла и водяного пара, которые в условиях стационарного и горизонтально-однородного приповерхностного слоя атмосферы могут быть с известным приближением записаны в форме постоянства турбулентных потоков с высотой

$$\overline{V'w'} = u_*^2, \quad \overline{w'\theta'} = H, \quad \overline{w'q'} = Q. \quad (4.1.2)$$

Присутствие параметра β связано с тем, что он входит в выражение для силы плавучести в уравнении для флуктуаций вертикальной скорости, а тем самым и во все моментные уравнения, получаемые с использованием уравнения для w' . Следует заметить, что в случае использования градиентной гипотезы равенства (4.1.2) могут быть переписаны в виде

$$-K_u \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} = u_*^2,$$

$$-K_T \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = H, \quad -K_q \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} = Q, \quad (4.1.3)$$

причем сравнивая (4.1.3) с (4.1.1) можно убедиться, что коэффициенты вертикального турбулентного обмена в этих выражениях связаны с универсальными функциями (4.1.1) с помощью следующих соотношений:

$$K_u = \kappa u_* z / \varphi_u(\zeta),$$

$$K_T = \kappa u_* z / \varphi_T(\zeta), \quad K_q = \kappa u_* z / \varphi_q(\zeta). \quad (4.1.4)$$

За более чем тридцатилетний период своего существования теория подобия Монина — Обухова прошла всестороннюю экспериментальную проверку, убедительно продемонстрировавшую

действительно универсальный характер функций φ_u , φ_T , $\varphi_q(\zeta)$. На рис. 7 приведены экспериментальные данные для этих зависимостей, полученные в период международного эксперимента ITSE-76. Из анализа этих данных можно сделать вывод, что в пределах точности измерений функции $\varphi_T(\zeta)$ и $\varphi_q(\zeta)$ совпадают друг с другом. Этого нельзя сказать о поведении $\varphi_u(\zeta)$ и $\varphi_T(\zeta)$: при неустойчивой стратификации ($\zeta < 0$) первая из этих функций убывает с ростом $|\zeta|$ медленнее, так что их отношение $\alpha_T = \varphi_u / \varphi_T$, представляющее собой отношение коэффициентов турбулентности для переноса тепла и количества движения, возрастает от единицы при нейтральной стратификации до приблизительно 2,5—3 при свободной конвекции.

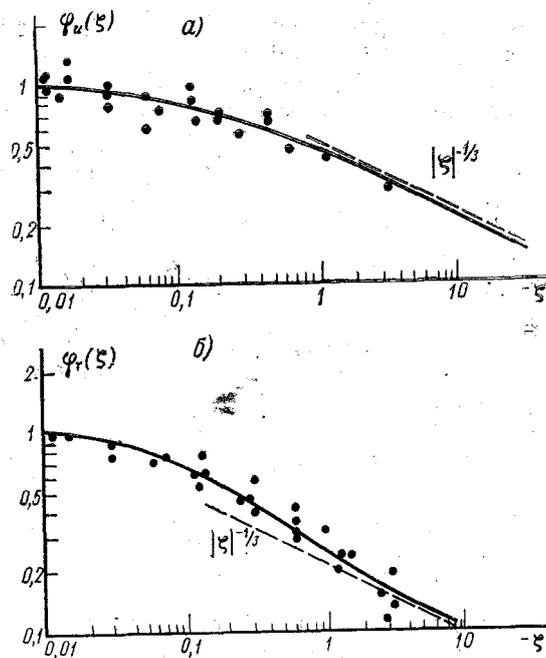


Рис. 7. Универсальные функции теории подобия Монина — Обухова для приземного слоя по измерениям в международном эксперименте ITSE-76 (по Дайеру и Брэдли, 1982 г.). Сплошные линии — расчеты по формулам (4.1.5).

Существуют предельные случаи, когда поведение универсальных функций φ_u , φ_T и φ_q может быть установлено из самых общих соображений. При свободной конвекции, когда $\zeta \rightarrow -\infty$ и процессы переноса определяются турбулентностью чисто термиче-

ского происхождения, параметр u_* должен выпадать из числа определяющих. Из анализа размерностей при этом следует, что коэффициенты турбулентного переноса K_u , K_T и K_q будут иметь в этом случае асимптотику $\sim (\beta H)^{1/3} Z^{1/3}$, откуда с учетом соотношений (4.1.4) вытекает $\varphi_u \sim \varphi_T \sim \varphi_q \sim |\zeta|^{-1/3}$ (проведены на рис. 7 пунктиром). При устойчивой стратификации ($\zeta > 0$), когда турбулентность ослаблена в результате действия силы плавучести, обмен энергией между различными слоями воздуха крайне незначителен и турбулентность приобретает локальный характер. В этом случае из числа определяющих параметров может быть исключена высота z , следствием чего является существование при $\zeta \rightarrow \infty$ линейных асимптотик $\varphi_u \sim \varphi_T \sim \varphi_q \sim \zeta$.

Особенности поведения универсальных функций теории подобия Мони́на — Обухова в приповерхностном слое можно объяснить в настоящее время лишь привлекая модели второго или более высокого порядка замыкания. Разнообразие форм, используемых в этих моделях гипотез, породило множество моделей этого типа, с той или иной степенью точности воспроизводящих известные из эксперимента функции φ_u , φ_T и $\varphi_q(\zeta)$. Важно подчеркнуть, что существующая теория приповерхностного слоя не носит законченного характера, поскольку при формулировке гипотез замыкания (см. п. 3.4) возникает необходимость в подборе констант с использованием эмпирической информации. В то же время функции φ_u , φ_T и $\varphi_q(\zeta)$ известны надежно в настоящее время лишь в сравнительно узком диапазоне изменения параметра устойчивости ($-1,5 < \zeta < 0,5$). По этим причинам необходимые для параметризации приповерхностного слоя аналитические аппроксимации этих функций целесообразно строить таким образом, чтобы максимально учесть как их поведение в том диапазоне ζ , где они надежно определены, так и выводы той или иной теоретической модели, позволяющей экстраполировать зависимости φ_u , φ_T и $\varphi_q(\zeta)$ за пределы этого диапазона. Это достигается путем получения универсальных функций из теоретической модели, проверенной и уточненной таким образом, чтобы она наилучшим образом описывала поведение этих функций (а также целого ряда других, не используемых в данном случае универсальных зависимостей) в том диапазоне ζ , в котором они надежно известны. Одними из полученных подобным образом аналитических аппроксимаций универсальных функций являются следующие:

$$\varphi_u(\zeta) = \begin{cases} (1 - 8\zeta)^{-1/3}, & \zeta \leq 0; \\ 1 + 5\zeta, & \zeta \geq 0; \end{cases} \quad (4.1.5)$$

$$\varphi_T(\zeta) = \varphi_q(\zeta) = \begin{cases} 0,7(1 - 35\zeta)^{-1/3} + \frac{0,3}{1 + 8\zeta^2}, & \zeta \leq 0; \\ 1 + 6\zeta, & \zeta \geq 0. \end{cases}$$

Равенство функций $\varphi_T(\zeta)$ и $\varphi_q(\zeta)$, т. е. подобие профилей температуры и влажности, вытекает из исходной системы уравнений для вторых моментов и является следствием однотипности процессов турбулентного переноса скалярных характеристик.

До сих пор речь в этом параграфе шла о стационарном приповерхностном слое атмосферы над горизонтально-однородной подстилающей поверхностью. Между тем, для мезометеорологии наибольший интерес как раз представляет рассмотрение нестационарных и горизонтально-неоднородных процессов. Возникает закономерный вопрос: в какой мере сформулированные здесь результаты могут быть распространены на этот более общий и практически важный случай? Для ответа на него следует оценить точность, с которой оказываются при этом справедливыми соотношения (4.1.2).

Для упрощения последующих рассуждений направим ось декартовой системы координат по приземному ветру. В этом случае вблизи подстилающей поверхности $\bar{V} = \bar{u}$, $R_{23} = 0$ и $R_{13}^0 = -u_*^2$. Интегрируя записанные в этой системе координат уравнение для \bar{u} компоненты скорости (2.5.18), а также уравнения для $\bar{\theta}$ (2.5.22) и \bar{q} (2.5.23) от уровня шероховатости z_0 до некоторой высоты h , представим их в следующей форме:

$$\star \quad \eta_u = \frac{R_{13}(h) - R_{13}^0}{u_*^2} = -\frac{1}{u_*^2} \int_{z_0}^h \left(\frac{d\bar{u}}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \tau v + \frac{\partial R_{11}}{\partial x} + \frac{\partial R_{12}}{\partial y} \right) dz; \quad (4.1.6)$$

$$\star \quad \eta_T = \frac{H_3(h) - H_3^0}{H_3^0} = -\frac{1}{H_3^0} \int_{z_0}^h \left[\frac{d\bar{\theta}}{dt} - \frac{L'}{c_p} \Phi - \varepsilon_R + (\bar{w} + \bar{w}') \gamma_\theta + \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} \right] dz; \quad (4.1.7)$$

$$\star \quad \eta_q = \frac{Q_3(h) - Q_3^0}{Q_3^0} = -\frac{1}{Q_3^0} \int_{z_0}^h \left[\frac{d\bar{q}}{dt} + \Phi + (\bar{w} + \bar{w}') \gamma_q + \frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} \right] dz, \quad (4.1.8)$$

где η_u , η_T и η_q — величины, характеризующие относительное изменение соответствующих турбулентных потоков в приповерхностном слое толщиной h .

Специально проведенные исследования показали, что вклад радиационного притока тепла в подинтегральное выражение (4.1.7) наиболее существен лишь при условиях, близких к нейтральной стратификации, когда $H \rightarrow 0$. В этом случае, однако, условие постоянства турбулентного потока тепла в приповерхностном слое нарушается также и за счет других факторов (адвекции, нестационарности, горизонтального турбулентного обмена). Между тем данное обстоятельство несколько не препятствует использованию выводов теории Мони́на — Обухова для параметризации приповерхностного слоя, поскольку общий перепад температуры в слое оказывается при этом незначительным и находящимся в пределах точности современных измерений. Возможности использования выводов теории подобия приповерхностного слоя при наличии фазовых переходов будут исследованы в п. 4.4, а пока будем полагать $\Phi = 0$.

Вследствие ограниченности всех членов в подинтегральных выражениях (4.1.6) — (4.1.7) всегда может быть выбрана такая высота приповерхностного слоя h , чтобы относительное изменение турбулентных потоков количества движения, температуры и массовой доли водяного пара не превосходило в его пределах некоторой наперед заданной величины. Для определения такой высоты используем оценки отдельных членов уравнений мезометеорологии, полученные с помощью масштабного анализа аналогично тому, как это было сделано в п. 2.4. Полагаем

$$\begin{aligned}
 O \left[\frac{d\bar{u}}{dt} \right] &\sim \frac{U_0^2}{L_x}, \quad O [l\bar{v}] \sim lU_0, \\
 O \left[\frac{\partial R_{1i}}{\partial x_i} \right] &\sim \frac{u_*^2}{L_x}, \quad O \left[\frac{d\bar{\theta}}{dt} \right] \sim \frac{\theta_0 U_0}{L_x}, \\
 O \left[\frac{\partial H_i}{\partial x_i} \right] &\sim \frac{H}{L_x}, \quad O \left[\frac{d\bar{q}}{dt} \right] \sim \frac{q_0 U_0}{L_x}, \\
 O \left[\frac{\partial Q_i}{\partial x_i} \right] &\sim \frac{Q}{L_x},
 \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

где $L_x \approx 10^3 \div 10^5$ м — характерный горизонтальный масштаб процесса, а U_0 , θ_0 и q_0 — характерные масштабы мезовозмущений в поле скорости ветра, температуры и влажности.

Подставляя (4.1.9) в (4.1.6) — (4.1.8) и пренебрегая малыми членами, описывающими горизонтальный турбулентный обмен, можно получить:

$$\eta_u \sim \frac{h\eta}{L_x C_u}, \quad \eta_T \sim \frac{h\eta}{L_x C_\theta}, \quad \eta_q \sim \frac{h\eta}{L_x C_q}, \quad \neq$$

где $C_u = u_*^2 / U_0^2$, $C_\theta = H / (U_0 \theta_0)$ и $C_q = Q / (U_0 q_0)$. Если принять в качестве масштабов U_0 , θ_0 и q_0 характерные перепады скорости

ветра, температуры и влажности в приповерхностном слое, то величины C_u , C_θ и C_q будут иметь смысл так называемых коэффициентов сопротивления, тепла и влагообмена в приповерхностном слое, характерное значение которых составляет $C_u \approx C_\theta \approx C_q = C \approx 10^{-3}$. Отсюда несложно сделать оценку высоты приповерхностного слоя h_η , в котором с относительной погрешностью η выполняются приближения теории подобия Монина — Обухова

$$h_\eta = C \cdot \eta \cdot L_x. \quad (4.1.10)$$

Полагая здесь $\eta = 0,2$ и принимая $L_x = 10^5$ м, можно получить $h_{0,2} = 20$ м.

Существенно, однако, что пропорциональность h_η характерному горизонтальному масштабу мезометеорологических неоднородностей приводит к заметно меньшим значениям этих величин (0,2—2 м) на нижней границе масштабов мезопроцессов, т. е. при $L_x = 10^3 \div 10^4$ м, соответствующих таким мезометеорологическим явлениям как ячейковая конвекция, бризы, грозы и т. д. При моделировании такого рода процессов использование приближений теории подобия Монина — Обухова для параметризации приповерхностного слоя становится уже в большинстве случаев недопустимым.

Второй особенностью, которую необходимо учитывать при выборе высоты приповерхностного слоя, является зависимость коэффициентов C_u , C_θ и C_q от состояния устойчивости этого слоя. Связь этих величин с параметром устойчивости ζ и уровнем шероховатости подстилающей поверхности z_0 будет установлена в следующем параграфе.

4.2. Параметризация приземного слоя 10-100 м

Для параметризации приземного слоя атмосферы целесообразно нижний расчетный уровень мезометеорологической модели z_1 поместить в слое постоянных потоков, т. е. принять $z_1 \leq h_\eta$. Это дает возможность с помощью изложенных в предыдущем разделе выводов теории подобия Монина — Обухова корректно сформулировать нижние граничные условия для дифференциальных уравнений переноса горизонтальных компонент скорости ветра, температуры и влажности, в чем, собственно, и состоит задача параметризации. Для этой цели проинтегрируем выражения (4.1.1) в слое от z_0 до z_1 и с учетом $\bar{V}(z_0) = 0$, запишем:

$$\bar{V}_1 = \frac{u_*}{\kappa} \Delta U_n(\zeta_1, \zeta_0),$$

$$\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_s = - \frac{H}{\kappa u_*} \Delta \theta_n(\zeta_1, \zeta_0), \quad (4.2.1)$$

$$\bar{q}_1 - \bar{q}_s = - \frac{Q}{\kappa u_*} \Delta Q_n(\zeta_1, \zeta_0),$$

где приняты обозначения: $\bar{V}_1 = \bar{V}(z_1)$, $\bar{\theta}_1 = \bar{\theta}(z_1)$, $\bar{\theta}_s = \bar{\theta}(z_0)$,
 $\bar{q}_1 = \bar{q}(z_1)$, $\bar{q}_s = \bar{q}(z_0)$, $\zeta_1 = z_1/L$, $\zeta_0 = z_0/L$, $\Delta U_n(\zeta_1, \zeta_0) = \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \zeta^{-1} \varphi_u(\zeta) d\zeta$,

$$\Delta Q_n(\zeta_1, \zeta_0) = \Delta \theta_n(\zeta_1, \zeta_0) = \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \zeta^{-1} \varphi_T(\zeta) d\zeta.$$

Исключая последовательно из соотношений (4.1.1) и (4.2.1) величины u_* , H и Q , для уровня z_1 можно записать следующие граничные условия третьего рода:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \Big|_{z=z_1} &= A_u \bar{V}_1, \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \Big|_{z=z_1} &= A_T (\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_s), \quad \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = A_q (\bar{q}_1 - \bar{q}), \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

где

$$\begin{aligned} A_u(\zeta_1, \zeta_0) &= \frac{\varphi_u(\zeta_1)}{z_1 \Delta U_n(\zeta_1, \zeta_0)}, \\ A_T(\zeta_1, \zeta_0) = A_q(\zeta_1, \zeta_0) &= \frac{\varphi_T(\zeta_1)}{z_1 \Delta \theta_n(\zeta_1, \zeta_0)}. \end{aligned}$$

Перейдем теперь от модуля скорости \bar{V} в приземном слое к ее компонентам:

$$\bar{u} = \bar{V} \cos \alpha, \quad \bar{v} = \bar{V} \sin \alpha,$$

где угол α определяет направление приземного ветра в принятой системе декартовых координат. Пренебрегая поворотом ветра в тонком приземном слое атмосферы, умножая последовательно первое из соотношений (4.2.2) на $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$, можно в итоге записать данное граничное условие для компонентов скорости \bar{u} и \bar{v} :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = A_u \bar{u}_1, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \Big|_{z=z_1} = A_u \bar{v}_1. \quad (4.2.3)$$

Граничные условия (4.2.2), (4.2.3) в рамках принятых приближений эквивалентны условиям (2.5.25), (2.5.26) первой краевой задачи, в которой температура и влажность подстилающей поверхности считаются известными. Расчет безразмерных функций ΔU_n , $\Delta \theta_n(\zeta_1, \zeta_0)$ производится при этом по заданным соотношениями (4.1.5) универсальным функциям φ_u , $\varphi_T(\zeta)$, причем ин-

интегралы (4.2.1) могут быть в этом случае выражены в элементарных функциях:

$$\begin{aligned} \Delta U_n(\zeta_1, \zeta_0) &= U_n(\zeta_1) - U_n(\zeta_0), \\ \Delta \theta_n(\zeta_1, \zeta_0) &= \theta_n(\zeta_1) - \theta_n(\zeta_0), \\ U_n(\zeta) &= \begin{cases} \ln \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}, & \zeta \leq 0; \\ \ln \zeta + 5\zeta, & \zeta \geq 0; \end{cases} \\ \theta_n(\zeta) &= \begin{cases} 0,7 \left[\ln \frac{y-1}{\sqrt{y^2+y+1}} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2y+1}{\sqrt{3}} \right] + \\ + 0,3 \ln \frac{|\zeta|}{\sqrt{1+8\zeta^2}}, & \zeta \leq 0; \\ \ln \zeta + 6\zeta, & \zeta \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

где $x = (1 - 8\zeta)^{1/2}$, $y = (1 - 36\zeta)^{1/2}$.

Расчет необходимых здесь параметров ζ_1 и ζ_0 осуществляется с помощью следующих соотношений, образующих вместе с выписанными выше, замкнутую систему трансцендентных уравнений:

$$\begin{aligned} L &= - \frac{u_*^2}{\beta H \kappa}, \quad u_* = \frac{\kappa \bar{V}_1}{\Delta U_n(\zeta_1, \zeta_0)}, \\ H &= - \frac{\kappa u_* (\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_s)}{\Delta \theta_n(\zeta_1, \zeta_0)}, \\ \zeta_1 &= \frac{z_1}{L}, \quad \zeta_0 = \frac{z_0}{L}, \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

где значения $\bar{V}_1 = [\bar{u}_1^2 + \bar{v}_1^2]^{1/2}$ и $\bar{\theta}_1$ берутся с первого расчетного уровня модели.

В том случае, если температура и влажность на уровне шероховатости неизвестны, приходится привлекать уравнение теплового баланса подстилающей поверхности (2.5.27), а также целый ряд дополнительных уравнений, описывающих перенос тепла и влаги в деятельном слое почвы, и соотношений для расчета радиационного баланса поверхности. Все это позволяет в итоге рассчитать турбулентные потоки H , Q и заменить граничные условия третьего рода для температуры и влажности (4.2.2) на аналогичные условия второго рода, записав для этой цели последние два из соотношений (4.1.1) на уровне $z = z_1$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right|_{z=z_1} &= - \frac{H}{\kappa u_* z_1} \varphi(\zeta_1), \\ \left. \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} \right|_{z=z_1} &= - \frac{Q}{\kappa u_* z_1} \varphi_T(\zeta_1). \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Граничные условия для компонент скорости ветра (4.2.3) остаются при этом такими же, как и в первой краевой задаче, а система уравнений (4.2.5) несколько упрощается:

$$L = -\frac{u_*^3}{\beta H x}, \quad u_* = \frac{x \bar{V}_1}{\Delta U_n(\xi_1, \xi_0)},$$

$$\xi_1 = \frac{z_1}{L}, \quad \xi_0 = \frac{z_0}{L}. \quad (4.2.7)$$

Эффективность использования излагаемого в данном параграфе метода параметризации приземного слоя во многом определяется толщиной слоя постоянных токов h_η . Для оценки последней с помощью соотношения (4.1.10) требуется рассчитать коэффициенты сопротивления, тепло- и влагообмена в приземном слое, которые с учетом (4.2.1) могут быть представлены в следующем виде:

$$C_u = \left[\frac{x}{\Delta U_n(\xi_1, \xi_0)} \right]^2, \quad C_T = C_q = \frac{x^2}{\Delta U_n(\xi_1, \xi_0) \Delta \theta_n(\xi_1, \xi_0)}. \quad (4.2.8)$$

Максимально допустимые при различных условиях устойчивости высоты расположения нижнего расчетного уровня модели h_η , соответствующие фиксированной погрешности $\eta = 20\%$, могут быть определены из рис. 8, на котором представлены зависимости h_η/L_x от параметра $\zeta_A = z_A/L$ при $z_A = 10$ м и уровня шероховатости подстилающей поверхности z_0 , рассчитанные с помощью соотношений (4.1.10), (4.2.8). Поскольку характеристика устойчивости приземного слоя и параметр шероховатости в реальных условиях могут меняться в широких пределах как во времени, так и в пространстве, столь сильная зависимость h_η от этих параметров создает определенные трудности при выборе уровня z_1 .

Наиболее простым, но не всегда оптимальным, является выбор такой высоты h_η , чтобы во всех случаях использования той или иной модели, условие постоянства потоков в приземном слое выполнялось с заданной точностью. При не слишком значительной горизонтальной неоднородности ($L_x \geq 10^5$ м) в качестве такой высоты может быть принято значение $h_\eta = 20$ м. Однако с увеличением пестроты подстилающей поверхности и, особенно, над достаточно гладкими поверхностями (например, над водной) эту величину пришлось бы уменьшить до 1—2 м. Распространение столь малого значения h_η на всю остальную расчетную область делает подобное решение задачи параметризации приземного слоя совершенно не эффективным. Более последовательным, хотя и несколько громоздким, является учет зависимости h_η от горизонтальных координат и времени (как функции параметра устойчивости, шероховатости подстилающей поверхности и опре-

деленного одним из возможных способов масштаба L_x) путем введения новой вертикальной координаты $\xi = z - h_{\eta}$, что приводит к появлению ряда дополнительных членов в уравнениях переноса мезометеорологических переменных.

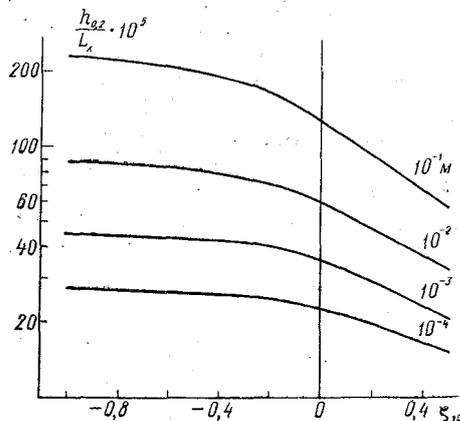


Рис. 8. Нормированные на характерный горизонтальный масштаб мезонеоднородностей L_x значения высоты приповерхностного слоя $h_{0,2}$, в котором относительное изменение турбулентных потоков не превосходит 20 %, в зависимости от параметра устойчивости ζ_{10} и уровня шероховатости подстилающей поверхности z_0 .

4.3. Особенности параметризации приводного слоя

Общий подход к параметризации приводного слоя в общих чертах не отличается от изложенного в предыдущем параграфе. Особенности его структуры связаны главным образом с тремя основными факторами: наличием ветровых волн, существованием режима гладко-вязкого обтекания при слабом ветре с формированием на поверхности тонкой холодной пленки воды («скин-слоя») и влиянием на режим турбулентности стратификации влажности.

Первая особенность связана с подвижностью водной поверхности и зависимостью ее формы от скорости ветра. В нашу задачу не входит рассмотрение всех эффектов, возникающих при взаимодействии ветрового потока с поверхностными волнами, отметим, лишь, что вследствие малой крутизны наиболее значительных по амплитуде волн ($\approx 0,1$), обтекание их воздушным потоком с известным приближением может рассматриваться как безотрывное (потенциальное). Это, в свою очередь, приводит к формированию

достаточно однородных по горизонтали осредненных профилей скорости ветра, температуры и влажности. Об этом наглядно свидетельствует рис. 9, на котором приведены полученные экспериментально профили скорости ветра на наветренном и подветренном склонах волн в зависимости от высоты над водной поверхностью, нормированной на среднюю высоту ветровых волн. Таким образом, аналогично поверхности суши, здесь также может быть введен уровень шероховатости подстилающей поверхности z_{0u} , имеющий смысл высоты, на которой логарифмически проэкстраполированная из вышележащих слоев скорость ветра обращается в нуль. В качестве физических неоднородностей, определяющих шероховатость водной поверхности, в данном случае выступают сравнительно малые по амплитуде, но обладающие значительной крутизной коротковолновые ее возмущения.

Другая особенность в обтекании водной поверхности проявляется, наоборот, при отсутствии ветровых волн (но, возможно, при наличии волн зыби), в режиме так называемого гладко-вязкого обтекания. Известно, что любая реально наблюдаемая в природе твердая поверхность имеет элементы шероховатости заметно превосходящие глубину так называемого вязкого подслоя $\delta \sim \nu/u_*$, где ν — кинематическая вязкость воздуха, так что число Рейнольдса шероховатости $Re = u_* \delta / \nu \gg 1$ (такие поверхности относятся к классу динамически вполне шероховатых). Водная поверхность, между тем, при слабом ветре может рассматриваться как зеркально гладкая, причем ее взаимодействие с атмосферным воздухом в данном случае уже не может быть описано без учета молекулярных эффектов.

По этим причинам уровень шероховатости водной поверхности z_{0u} должен рассматриваться как функция по меньшей мере трех параметров: динамической скорости u_* , кинематической вязкости воздуха ν и ускорения свободного падения g (введение последнего отражает гравитационную природу ветровых волн). Отсюда с использованием пи-теоремы теории подобия можно получить

$$z_{0u} = \frac{u_*^2}{g} f_0 \left(\frac{\nu g}{u_*^3} \right).$$

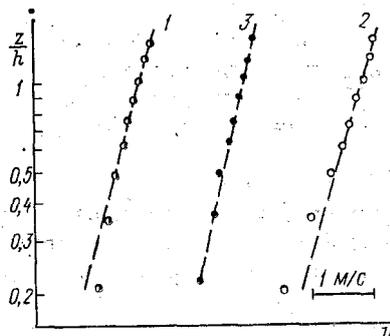


Рис. 9. Профили средней скорости на наветренном (1) и подветренном (2) склонах ветровых волн на поверхности океана; 3 — средний профиль (по [17]).

Разложение функции $f_0(x)$ в ряд Маклорена при небольшом значении аргумента в окрестности точки $x=0$ (соответствующей режиму развитого волнения) и ограничение линейным приближением приводит к следующей простой формуле, справедливой как в режиме гладко-вязкого обтекания, так и интенсивного волнения:

$$z_{0u} \approx m_0 \frac{u_*^2}{g} + m_1 \frac{v}{u_*}. \quad (4.3.1)$$

Экспериментальные данные, полученные в лабораторных и в натуральных условиях, позволили установить значения констант: $m_0 \approx 0,02$ (постоянная Чарнока) и $m_1 \approx 0,11$ (постоянная Никурадзе).

Для режима гладко-вязкого обтекания водной поверхности характерно наличие на ней тонкой (порядка нескольких сот микронов) холодной пленки с температурой $T_s = T_w - \delta T$, где T_w — температура воды на глубине в несколько сантиметров. Причина появления этой пленки связана, главным образом, с существованием обычно весьма интенсивного испарения с водной поверхности. Значение δT по имеющимся оценкам варьирует в пределах от 0,1 до 0,6°С и особенно велико в тропических и субтропических районах океанов, где эта величина может составлять до двух третей общего перепада температуры вода — воздух в приводном слое. Именно поэтому учет этого так называемого «скин-эффекта» важен для правильной оценки параметра устойчивости приводного слоя и, тем самым, для корректной параметризации приводного слоя в мезометеорологических моделях.

Для расчета температуры скин-слоя T_s по внешним параметрам будем основываться на использовании уравнения теплового баланса водной поверхности

$$B_s = \rho c_p H + L' \rho Q + F, \quad (4.3.2)$$

где H , Q — турбулентные потоки температуры и массовой доли водяного пара в приводном слое, определяемые с помощью методики, изложенной в предыдущем параграфе по данным о температуре, влажности и скорости ветра на первом расчетном уровне модели и значениям T_s и $q_s = q_m(T_s)$ (насыщающей влажности, соответствующей температуре T_s). Радиационный баланс водной поверхности F формируется здесь преимущественно за счет длинноволновой радиации (вследствие прозрачности воды по отношению к коротковолновой) и может быть рассчитан с помощью одного из известных методов. Для вычисления молекулярного потока тепла B_s в скин-слое воспользуемся следующим модельным представлением профиля температуры в поверхностной пленке воды:

$$T(z) = T_s + \delta T [1 - \exp(-z/\delta_w)], \quad (4.3.3)$$

где $\delta_w \approx \gamma v_w / u_* w$ — характерное значение глубины, на которой начинает действовать турбулентный механизм переноса тепла (ве-

личина, аналогичная упомянутой выше глубине вязкого подслоя в воздухе δ). Здесь ν_w — кинематическая вязкость воды, а u_{*w} — динамическая скорость в воде — определяется из условий склейки турбулентных напряжений по обе стороны от поверхности раздела

$$\rho_w u_{*w}^2 = \rho u_*^2, \quad (4.3.4)$$

откуда $u_{*w} = (\rho/\rho_w)^{1/2} u_*$. Константа γ может быть определена с помощью данных одновременных измерений величин δ_w и u_* (Г. И. Панин, 1985 г.) и оценивается в настоящее время как $\gamma \approx 3,8$ с относительной погрешностью около 20%. Исходя из (4.3.3), величина B_s определяется следующим образом:

$$B_s = -C_w \chi_w \rho_w \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = C_w \chi_w \rho_w \frac{\delta T}{\delta_w}, \quad (4.3.5)$$

где χ_w , ρ_w , C_w — температуропроводность, плотность и удельная теплоемкость воды соответственно. Подставляя (4.3.5) в (4.3.2) и учитывая (4.3.4), в итоге для температуры скин-слоя получим следующее выражение:

$$T_s = T_w - \gamma \frac{\nu_w (\rho c_p H + L' \rho Q + F)}{\chi_w C_w (\rho_w \rho)^{1/2} u_*}. \quad (4.3.6)$$

Из него, в частности, следует, что при наличии положительного эффективного излучения F , температура поверхностной пленки будет оставаться ниже температуры T_w во всех случаях, пока число Боуэна $Bo = c_p H / L' Q > -1$.

Определенную с помощью соотношения (4.3.6) температуру T_s и соответствующую ей насыщающую массовую долю водяного пара $q_s = q_m(T_s)$ для включения в атмосферные модели необходимо отнести к некоторым уровням в воздухе z_{0T} и z_{0q} , вводимым аналогично уровню шероховатости z_{0u} . Смысл этих величин состоит в том, что логарифмически проэкстраполированные из выше лежащих слоев до этих уровней профили температуры и влажности дают величины, совпадающие с поверхностными значениями T_s и q_s . Ряд исследователей предлагает считать определенные таким образом уровни z_{0T} и z_{0q} функциями числа Рейнольдса шероховатости $Re = z_{0u} u_* / \nu$ и полагать

$$z_{0T} = z_{0u} f_T(Re), \quad z_{0q} = z_{0u} f_q(Re),$$

определяя при этом функции f_T , $f_q(Re)$ из эксперимента.

Наконец, последней особенностью параметризации приводного слоя является наличие здесь значительных градиентов влажности, приводящих к заметным ее флуктуациям, по своему влиянию на пульсации плотности воздуха сравнимые с действием флуктуаций температуры. В этом случае, как известно, флуктуации потенции

альной температуры, определяющие величину силы плавучести $\beta \theta'$ в уравнении для пульсаций вертикальной скорости (3.3.1), должны быть заменены на флуктуации виртуальной температуры $\theta'_v = 1 + 0,61 \bar{T} q'$. Это в свою очередь, приводит к тому, что вместо $H = \overline{\omega' \theta'}$ в списке основных параметров, определяющих структуру приповерхностного слоя согласно теории подобия Монина — Обухова, войдет аналогичный поток виртуальной температуры

$$H_v = \overline{\omega' \theta'_v} = H \left(1 + \frac{C_I}{Bo} \right),$$

где $C_I = 0,61 \frac{c_p \bar{T}}{L} \approx 0,07$ — безразмерный коэффициент, а $Bo = \frac{c_p H}{L' Q}$ — число Боуэна. При этом масштаб длины L во всех соотношениях теории подобия, приведенных в п. 4.1, должен быть заменен на так называемый модифицированный:

$$\tilde{L} = - \frac{u_*^3}{\beta H_v x} = L \left(1 + \frac{C_I}{Bo} \right)^{-1}.$$

4.4. Орография и шероховатость

Влияние неровностей земной поверхности на динамические свойства турбулентного потока чрезвычайно многообразно и может быть учтено в мезометеорологических моделях лишь с очень большой степенью приближения. Наиболее общей характеристикой неровностей поверхности является, очевидно, функция $\delta(x, y)$, описывающая зависимость их высоты от координат, а основными параметрами — те или иные статистические характеристики этой функции. Поскольку даже мелкомасштабные неоднородности (растительность, городская застройка и т. д.) оказывают определенное воздействие на динамику атмосферы, эта функция должна быть, вообще говоря, задана с очень высокой степенью детализации. Пространственное разрешение модели по горизонтали (характеризуемое шагами расчетной сетки Δ_y и Δ_x) оказывается, между тем, весьма ограниченным, что требует соответствующей фильтрации $\delta(x, y)$ с целью выделения мезо- и микромасштабных неоднородностей:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}(x, y) &= \int G_T(x - x', y - y') \delta(x', y') dx' dy', \\ \delta'(x, y) &= \delta(x, y) - \bar{\delta}(x, y), \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

где используется фильтр $G_T(x, y)$, аналогичный применяемому при сглаживании метеополей (п. 2.2) и имеющий параметры, согласованные с шагами расчетной сетки.

Сглаженную функцию $\delta(x, y)$ будем использовать в модели явно и рассматривать как характеристику орографии, а статистические характеристики флуктуационного поля $\delta'(x, y)$ — как параметры шероховатости. Различие между орографией и шероховатостью является, таким образом, весьма условным и зависит от горизонтального разрешения модели.

Для включения в модель характеристик орографии целесообразно ввести новую вертикальную координату $z' = z - \delta(x, y)$. Переходя от системы координат $\{x, y, z, t\}$ к $\{x', y', z', t'\}$, где $x' \equiv x$, $y' \equiv y$, $t' \equiv t$, с учетом соотношений:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x'} - \frac{\partial f}{\partial z'} \delta_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial z'} \delta_y,$$

$$\delta_x = \frac{\partial \delta}{\partial x}, \quad \delta_y = \frac{\partial \delta}{\partial y},$$

где f — произвольная зависимая переменная, можно записать систему уравнений динамики (2.5.18), (2.5.19) и переноса потенциальной температуры (2.5.22) в следующем виде:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \beta \bar{\theta} \delta_x + \bar{w} + F_{Tx}, \quad (4.4.2)$$

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \beta \bar{\theta} \delta_y - \bar{u} + F_{Ty}, \quad (4.4.3)$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = \frac{L'}{c_p} \bar{\Phi} + \bar{\epsilon}_R - (\bar{w} + \bar{w}_s) \gamma_0 + F_H, \quad (4.4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + (\bar{u} + \bar{u}) \frac{\partial}{\partial x} + (\bar{v} + \bar{v}) \frac{\partial}{\partial y} + (\bar{w} + \bar{w}_s) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Здесь $\bar{w}_s = \bar{w} - \delta_x(\bar{u} + \bar{u}) - \delta_y(\bar{v} + \bar{v})$ — вертикальная скорость в новой системе координат (штрихи для удобства опущены). Появление дополнительных членов в правых частях (4.4.2), (4.4.3) обусловлено преобразованием горизонтальных градиентов давления по выписанным выше формулам с учетом уравнения статики (2.5.20). Основными параметрами, характеризующими орографию, являются, таким образом, компоненты вектора горизонтального градиента функции $\delta(x, y)$ (тангенсы углов наклона местности к горизонту) δ_x и δ_y .

Параметризация шероховатости оказывается значительно более сложным делом, чем описание орографии. В качестве основного параметра шероховатости будем рассматривать среднеквадратическую высоту неровностей $h_s = [\delta'^2]^{1/2}$. Подавляющее боль-

шинство поверхностей, встречаемых в природе (за исключением водной при слабом ветре), может быть отнесено к так называемым динамически вполне шероховатым, у которых величина h_s значительно превосходит характерную толщину вязкого подслоя ν/u_* (ν — кинематическая вязкость воздуха, u_* — динамическая скорость). Наиболее простым образом параметризуются поверхности с $h_s \ll h$, где h — высота приземного слоя атмосферы. В этом случае справедливы асимптотики логарифмического приземного слоя и можно ввести параметр шероховатости z_0 — некоторый условный уровень, на котором среднюю скорость ветра допустимо принять равной нулю. В том случае, если параметр h_s сравним или превосходит высоту приземного слоя, необходима специальная параметризация последнего, предусматривающая введение целой группы новых параметров. Важнейшую роль в этом случае помимо h_s играет так называемый параметр (или функция) пористости, характеризующий относительную долю пространства в слое шероховатости, свободную от препятствий, а также те или иные характеристики формы препятствий. Многообразие параметров, отражающих влияние шероховатости на динамику турбулентного потока, приводит к необходимости разработки специальных моделей, описывающих турбулентный перенос в пористых средах, включаемых в мезометеорологические модели в виде специальных блоков.

4.5. Параметризация приповерхностного слоя при наличии фазовых переходов

При наличии фазовых переходов вместо уравнений переноса для потенциальной температуры $\bar{\theta}$ и массовой доли водяного пара \bar{q} , как отмечалось в п. 3.6, выводятся уравнения для облачных инвариантов — эквивалентной температуры $\bar{\Pi} = \bar{\theta} + \frac{L'}{c_p} \bar{q}$ и удельного влагосодержания $\bar{S} = \bar{q} + \bar{b}$. В этой ситуации изменяются и способы параметризации приповерхностного слоя, причем это оказывается возможным лишь при некотором обобщении теории подобия Мони́на — Обухова.

Из анализа уравнений для $\bar{\Pi}$ (3.6.3) и \bar{S} (3.6.4) вытекает, что в горизонтально-однородном и стационарном приповерхностном слое они, подобно уравнениям для $\bar{\theta}$ и \bar{q} при отсутствии фазовых переходов, могут быть записаны в форме условий постоянства вертикальных турбулентных потоков с высотой:

$$\overline{\Pi'w'} = E_{\Pi}, \quad \overline{S'w'} - Q_g = E_S - Q_g = E_s, \quad (4.5.1)$$

где E_s — суммарный поток водной фазы с учетом гравитационного оседания. В горизонтально-неоднородных и нестационарных

Условийх следует, очевидно, ввести некоторую допустимую высоту приповерхностного слоя h_η , в пределах которой равенства (4.5.1) выполняются с относительной погрешностью η , и определять эту высоту аналогично тому, как это было сделано в п. 4.2.

При отсутствии облачности или тумана в приповерхностном слое, т. е. когда $\delta = Q_g = 0$, облачные инварианты $\bar{\Pi}$ и \bar{S} будут, очевидно, удовлетворять универсальным соотношениям теории подобия Мони́на — Обухова:

$$\begin{aligned} -\frac{\kappa u_* z}{E_\Pi} \cdot \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z} &= \varphi_T(\zeta), \\ -\frac{\kappa u_* z}{E_S} \cdot \frac{\partial \bar{S}}{\partial z} &= \varphi_T(\zeta), \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

причем $E_\Pi = H + \frac{L'}{c_p} Q$ и $E_S = Q$, где H и Q — турбулентные потоки потенциальной температуры и массовой доли водяного пара (здесь и далее используется предположение о подобии профилей температуры и влажности в приповерхностном слое, т. е. равенство $\varphi_T(\zeta) = \varphi_q(\zeta)$).

При наличии облачности или тумана в приповерхностном слое для представления турбулентных потоков E_Π и E_S воспользуемся градиентной гипотезой:

$$E_\Pi = -K_\Pi \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z}, \quad E_S = -K_S \frac{\partial \bar{S}}{\partial z}, \quad (4.5.3)$$

где K_Π и K_S — коэффициенты турбулентного обмена для величин $\bar{\Pi}$ и \bar{S} , которые приближенно могут быть приняты равными аналогичным коэффициентам переноса для тепла и водяного пара

$$K_\Pi \approx K_S \approx \frac{\kappa u_* z}{\varphi_T(\zeta)}. \quad (4.5.4)$$

Подставляя определенное таким образом значение K_Π в первое из равенств (4.5.3), можно убедиться, что и при наличии фазовых переходов безразмерный градиент эквивалентной температуры в приповерхностном слое будет подчиняться универсальным зависимостям теории подобия Мони́на — Обухова — первое из соотношений (4.5.2) остается справедливым и в этом случае. Иначе говоря, как при отсутствии, так и при наличии фазовых переходов, для эквивалентной температуры могут использоваться те же формы записи краевых условий, что и для температуры и влажности при отсутствии фазовых переходов:

$$\left. \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z} \right|_{z=z_1} = A_\Pi (\bar{\Pi}_1 - \bar{\Pi}_S) = 0, \quad \left. \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial z} \right|_{z=z_1} = -E_\Pi \frac{\varphi_T(\zeta_1)}{\kappa u_* z}, \quad (4.5.5)$$

где

$$A_{\Pi} \approx A_T = \frac{\varphi_T(\zeta_1)}{\zeta_1 \Delta \theta_{\Pi}(\zeta_1, \zeta_0)}, \quad \Delta \theta_n(\zeta_1, \zeta_0) = \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{\varphi_T(\zeta)}{\zeta} d\zeta.$$

Несколько сложнее обстоит дело с заданием граничных условий для удельного влагосодержания \bar{S} . Основываясь на (4.5.1) с учетом представления E_S из (4.5.3), (4.5.4) и выражения для гравитационного потока облачных капель $Q_g = W_g \bar{\delta}$, можно записать следующее соотношение:

$$-K_s \frac{d\bar{S}}{dz} - W_g [\bar{S} - q_m(T^*)] = E_S, \quad (4.5.6)$$

справедливое для облачных условий, когда индикаторная функция $I_0 = \bar{\Pi} - \gamma_a z - \frac{L'}{c_p} \bar{S} - T_m(\bar{S}) < 0$. При отсутствии облачности, т. е. при водности $\delta = 0$, и $I_0 > 0$, будет, как уже отмечалось, выполняться второе из соотношений (4.5.2).

Интегрируя дифференциальное уравнение (4.5.6) для определения $\bar{S}(z)$ с учетом граничного условия $\bar{S}(z_0) = \bar{S}_0$, получим

$$\bar{S}(z) = \exp[-W_n \Delta \theta_n(\zeta_1, \zeta_0)] \times \\ \times \left[\bar{S}_0 - E_* \int_{\zeta_0}^{\zeta} \eta^{-1} \varphi_T(\eta) \exp[W_n \Delta \theta_n(\eta, \zeta_0)] d\eta \right], \quad (4.5.7)$$

где $\zeta = z/L$, $\zeta_0 = z_0/L$, $E_* = \frac{E_S - W_g q_m}{\kappa u_*}$, $W_n = \frac{W_g}{\kappa u_*}$ — безразмерный параметр, характеризующий гравитационное оседание облачных частиц. Записывая это выражение для первого расчетного уровня модели $z = z_1$ и исключая из (4.5.6) и полученного соотношения (4.5.7) неизвестную величину E_* , можно в итоге записать следующую форму граничного условия для \bar{S} при облачности или тумане:

$$\left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial z} + A_S \bar{S} \right) \Big|_{z=z_1} = \frac{\bar{S}_0}{\psi}, \quad I_0 < 0, \quad (4.5.8)$$

$$A_S = \frac{W_n \varphi_T(\zeta_1)}{z_1} - \psi^{-1} \exp[W_n \Delta \theta_n(\zeta_1, \zeta_0)],$$

$$\psi = \left\{ \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \exp[W_n \Delta \theta_n(\eta, \zeta_0)] \frac{\varphi_T(\eta)}{\eta} d\eta \right\} \frac{z_1}{\varphi_T(\zeta_1)}.$$

Соответственно при отсутствии фазовых переходов в приповерхностном слое из (4.5.2) аналогично (4.5.5) можно получить

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial z} - A_T (\bar{S} - \bar{S}_s) = 0, I_0 > 0. \quad (4.5.9)$$

5. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МЕЗОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

5.1. Уточнение постановки задачи

Для построения алгоритма численного интегрирования системы уравнений мезометеорологии конкретизируем постановку задачи исходя, в основном, из записи уравнений в форме (2.5.18) — (2.5.23), пренебрегая для простоты лучистыми притоками тепла и не учитывая фазовые переходы (обобщение алгоритма на случай учета этих факторов особых проблем не вызывает).

Параметризацию вертикальных турбулентных потоков количества движения, тепла и водяного пара будем осуществлять с использованием наиболее простого варианта градиентной гипотезы:

$$\begin{aligned} R_{13} &= -K_z^{(u)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad R_{23} = -K_z^{(v)} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}, \\ H_3 &= -K_z^{(T)} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}, \quad Q_3 = -K_z^{(q)} \frac{\partial \bar{q}}{\partial z}, \end{aligned} \quad (5.1.1)$$

где $K_z^{(u)}$, $K_z^{(v)}$ и $K_z^{(q)}$ — коэффициенты турбулентного переноса соответствующих субстанций в вертикальном направлении, для определения которых необходимо привлекать уравнение баланса турбулентной энергии и какой-либо из вариантов замыкания в рамках двухпараметрического метода, изложенного в п. 3.3.

Что касается параметризации членов в уравнениях мезометеорологии, описывающих горизонтальный турбулентный обмен, то необходимо учитывать, что турбулентные притоки, обусловленные горизонтальным переносом, оказываются значительно меньше аналогичных притоков, связанных с существованием вертикального переноса (5.1.1). Причиной этого является то обстоятельство, что при одном и том же порядке величин горизонтальных и вертикальных микротурбулентных потоков горизонтальные масштабы мезопроцессов значительно превышают вертикальные $L_x \gg L_z$. Поэтому здесь на первое место выступает не столько проблема описания турбулентного обмена, сколько необходимость параметризации остаточных членов, появившихся в уравнениях гидротермодинамики атмосферы в результате их фильтрации (см. п. 2.2), и предотвращения нелинейной неустойчивости, возникающей, как

известно, вследствие нелинейного характера исходной системы уравнений.

Проиллюстрируем явление нелинейной неустойчивости на примере одномерного уравнения адвекции:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0. \quad (5.1.2)$$

Если использовать вычислительную сетку с шагом Δ , то максимальное волновое число возмущений, описываемых в таком дискретном представлении, оказывается равным $k_m = \pi/\Delta$. Представим искомую функцию в виде ряда Фурье на отрезке $[0, L]$ ($L = m\Delta$ — размер области интегрирования):

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^m A_j(t) \cos k_j x,$$

где $k_j = \frac{k_m j}{m} = \frac{\pi j}{L}$, а $A_j(t)$ — амплитуда. Нелинейный член в (5.1.2) будет содержать произведения гармоник с различными волновыми числами. Учитывая

$$\cos k_i x \cdot \cos k_j x = \frac{1}{2} [\cos (k_i - k_j) x + \cos (k_i + k_j) x],$$

нетрудно убедиться, что если даже в начальный момент волновые числа всех возмущений не превышали k_m , то очень скоро в результате нелинейного их взаимодействия появятся волны с $k > k_m$.

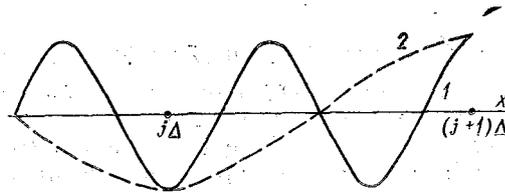


Рис. 10. К объяснению эффекта ложного представления: волна с длиной $\frac{3}{4}\Delta$ ошибочно принимается за возмущение с длиной волны 2Δ на разностной сетке с шагом Δ .

Поскольку такие возмущения не описываются в данной системе дискретных точек, то будет иметь место так называемый эффект ложного представления (рис. 10), который заключается в том, что отличить в данном случае гармонику с волновым числом $k > k_m$ от гармоники с $k_* = 2k_m - k$ уже не удастся:

$$\begin{aligned} \sin kx &= \sin [2k_m - (2k_m - k)]x = \sin 2\pi j \cos (2k_m - k)x - \\ &- \cos 2\pi j \sin (2k_m - k)x = -\sin (2k_m - k)x = -\sin k_* x, \end{aligned}$$

где учтено $x=j\Delta$ и $k_m=\pi/\Delta$. Иначе говоря, при таком процессе возникают «паразитарные» волны с волновыми числами $k < k_m$, которые не только искажают энергетический спектр той или иной метеорологической переменной, но и приводят в большинстве случаев к резкому возрастанию амплитуды колебаний искомым функций — так называемому «взрыву» решения. Это явление и называется нелинейной неустойчивостью.

Проведем теперь фильтрацию уравнения (5.1.2), используя процедуру, описанную в п. 2.2, и устраняя тем самым из рассмотрения все волновые возмущения с $k > k_m$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{u\} + \frac{\partial}{\partial x} \{u^2\} = 0. \quad (5.1.3)$$

Аналогично тому, как это было сделано в п. 2.2, перепишем (5.1.3) с остаточным членом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{u\} + \frac{\partial}{\partial x} \{u^2\} = -\frac{\partial I_u}{\partial x}, \quad (5.1.4)$$

где $I_u = \{u^2\} - \{u\}^2$. Уравнение (5.1.4), хотя и является точным следствием (5.1.3), в отличие от него теперь уже может содержать возмущения с волновыми числами $k > k_m$, поскольку здесь появился квадрат величин сглаженной скорости, который с учетом свойства (2.2.7) записывается как

$$\{u^2\} = \left\{ \sum_{j=2}^m A_j \cos k_j x \right\}^2 = \left(\sum_{j=2}^m A_j \cos k_j x \right)^2.$$

Суть дела состоит, однако, в том, что при этом весь набор гармоник с $k > k_m$ компенсируется остаточным членом I_u в правой части уравнения (5.1.4). Это приводит к выводу, что для предотвращения возникновения нелинейной неустойчивости в отфильтрованных уравнениях мезометеорологии необходимо соответствующим образом параметризовать остаточный член.

Этого можно добиться путем введения эффективного коэффициента горизонтальной турбулентной вязкости из соотношения

$$I_{ij} = \{u_i u_j\} - \{u_i\} \{u_j\} = -K \bar{\Phi}_{ij},$$

где $i, j=1, 2$; $\bar{\Phi}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$ — тензор деформации, а K — коэффициент турбулентности, который в данном случае можно рассматривать как функцию от волнового числа k_m (где происходит, как можно показать, основное накопление энергии неустойчивости) и характерного значения амплитуды флуктуаций скорости V_m в окрестности k_m : $K \sim V_m/k_m \sim V_m \Delta$. Поскольку восстановить спектр скорости и определить таким образом V_m в рамках данного подхода невозможно, то обычно используют

представление этой величины через норму тензора напряжений $\overline{\Phi_{ij}}$ и масштаба Δ :

$$V_m \sim \Delta (\overline{\Phi_{\alpha\beta}} \overline{\Phi_{\alpha\beta}})^{1/2},$$

откуда следует

$$K = \alpha_K \Delta^2 (\overline{\Phi_{11}^2} + \overline{\Phi_{22}^2} + 2\overline{\Phi_{12}^2})^{1/2}, \quad (5.1.5)$$

где α_K — эмпирический коэффициент, зависящий, вообще говоря, от формы спектра в окрестности волнового числа k_m и определяемый в ходе численных экспериментов.

Несколько иное положение с параметризацией остаточных членов, включающих флуктуации вертикальной скорости. Энергетический спектр этой величины, как следует из анализа экспериментальных данных, в отличие от аналогичных спектров горизонтальных компонент скорости очень быстро спадает с увеличением масштабов турбулентных возмущений. Причиной этого является определяющее воздействие подстилающей поверхности, препятствующей возникновению интенсивных вертикальных токов с горизонтальными масштабами, значительно превышающими толщину атмосферного пограничного слоя. В условиях развитого микротурбулентного обмена микротурбулентные потоки $\overline{u'_3 u'_i}$, $\overline{u'_3 \theta'}$ и $\overline{u'_3 q'}$ значительно превышают соответствующие остаточные члены и учет последних оказывается, таким образом, необязательным. Могут, однако, существовать ситуации (например, в условиях сильной устойчивости), когда турбулентность ослаблена и вклад остаточных членов оказывается заметным. Поэтому в общем случае к коэффициентам турбулентного обмена $K_z^{(u)}$, $K_z^{(T)}$ и $K_z^{(q)}$ целесообразно вводить добавку, вычисляемую, по аналогии с (5.1.5), через модуль вертикального градиента средней скорости и соответствующий шаг расчетной сетки:

$$K' = \alpha'_K \Delta_z^2 \left| \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right|,$$

где α'_K — некоторый новый параметр численной схемы, оптимальное значение которого должно быть найдено в процессе численных экспериментов.

С учетом высказанных выше замечаний запишем общую систему уравнений мезометеорологии в следующем виде:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + lw + \frac{\partial}{\partial z} K_z^{(u)} \frac{\partial u}{\partial z} + K \nabla_L^2 u; \quad (5.1.6)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - lu + \frac{\partial}{\partial z} K_z^{(u)} \frac{\partial v}{\partial z} + K \nabla_L^2 v; \quad (5.1.7)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \beta \theta = 0; \quad (5.1.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (5.1.9)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -(\tilde{w} + w) \gamma_\theta + \frac{\partial}{\partial z} K_z^{(T)} \frac{\partial \theta}{\partial z} + K \nabla_L^2 \theta; \quad (5.1.10)$$

$$\frac{dq}{dt} = -(\tilde{w} + w) \gamma_q + \frac{\partial}{\partial z} K_z^{(q)} \frac{\partial q}{\partial z} + K \nabla_L^2 q; \quad (5.1.11)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\tilde{u} + u) \frac{\partial}{\partial x} + (\tilde{v} + v) \frac{\partial}{\partial y} + (\tilde{w} + w) \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\nabla_L^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

где для простоты опущена черта — признак отнесения переменной к мезометеорологическому диапазону, а $\beta = g/T$. Фоновое (синоптическое) поле определяется компонентами скорости ветра \tilde{u} , \tilde{v} и \tilde{w} , а также градиентами потенциальной температуры γ_θ и массовой доли водяного пара γ_q в свободной атмосфере. Граничные условия задаются в одной из форм, указанных в п. 2.5, а для вычисления коэффициентов вертикального турбулентного обмена K_z привлекается двухпараметрический метод, основанный на использовании уравнения баланса турбулентной энергии и некоторых дополнительных замыкающих соотношений.

5.2. Применение метода расщепления

Одним из основных элементов реализации любой сложной задачи на ЭВМ является ее предварительное сведение к некоторому набору более простых. Это в одинаковой мере справедливо как при составлении алгоритмов решения, так и непосредственно в их программировании с использованием того или иного алгоритмического языка.

В данном случае нас будет интересовать представление в виде совокупности более простых операторов сложного дифференциального оператора A , характеризующего систему уравнений мезометеорологии

$$\frac{\partial f}{\partial t} + Af = 0, \quad (5.2.1)$$

где $f = u, v, w, p, \theta, q$ — вектор-функция всех зависимых переменных системы (5.1.6) — (5.1.11). Одним из основных и хорошо раз-

работанных методов интегрирования подобных систем уравнений на ЭВМ со сведением сложной исходной задачи к ряду простых является метод расщепления. Смысл расщепления состоит в том, что дифференциальный оператор A представляется в виде суммы нескольких (в простейшем случае двух) более простых дифференциальных операторов, например:

$$A = A_1 + A_2.$$

При этом необходимо, чтобы как оператор A , так и A_1 , A_2 удовлетворяли свойствам неотрицательной определенности*.

Расщепление исходного оператора A может осуществляться как по физическим процессам, так и координатам (покомпонентное расщепление). Если ввести обозначение $f^{n+\alpha} = \frac{1}{2}(f^n + f^{n+2\alpha})$, где f^n и $f^{n+2\alpha}$ — значения вектора f на двух последовательных дробных временных шагах n и $n+2\alpha$, то, применяя расщепление оператора A на два, с использованием конечно-разностного представления типа известной схемы Кранка — Никольсона, можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{f^{n+\alpha} - f^n}{\tau} &= -A_1 f^{n+\alpha}, \\ \frac{f^{n+1} - f^{n+\alpha}}{\tau} &= -A_2 f^{n+\alpha}. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Суммирование этих двух выражений приводит к следующей аппроксимации дифференциального уравнения (5.2.1):

$$\frac{1}{\tau} (f^{n+1} - f^n) = -A_1 f^{n+\alpha} - A_2 f^{n+\alpha}.$$

Проведем предварительно расщепление системы уравнений (5.1.6) — (5.1.11) по физическим процессам, разделив их на этапы переноса (диффузии) и согласования. На этапе переноса и диффузии в диапазоне $t^n < t < t^{n+\alpha}$ будем интегрировать следующую систему уравнений:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} K_z^{(u)} \frac{\partial u}{\partial z} + K \nabla_L^2 u,$$

* Некоторый линейный оператор A называется неотрицательноопределенным (положительно полуопределенным) $A \geq 0$, если скалярное произведение $(f, Af) \geq 0$, где f — произвольная функция, а под скалярным произведением f и φ в некоторой области $\Omega \in [0 < x < a, 0 < y < b]$ понимают

$$(f, \varphi) = \int_0^a \int_0^b f(x, y) \varphi(x, y) dx dy.$$

Более подробно теоретические основы метода расщепления применительно к атмосферным моделям излагаются в монографиях Г. И. Марчука [7].

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} K_z^{(u)} \frac{\partial v}{\partial z} + K_{\nabla_L}^2 v, \quad (5.2.3)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} K_z^{(\theta)} \frac{\partial \theta}{\partial z} + K_{\nabla_L}^2 \theta,$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} K_z^{(q)} \frac{\partial q}{\partial z} + K_{\nabla_L}^2 q,$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\tilde{u} + u) \frac{\partial}{\partial x} + (\tilde{v} + v) \frac{\partial}{\partial y} + (\tilde{w} + w) \frac{\partial}{\partial z};$$

$$\nabla_L^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

В качестве граничных условий на первом этапе используем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad x = \pm X;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial y} = 0, \quad y = \pm Y;$$

$$u = v = \theta = q = 0, \quad z = z_H; \quad (5.2.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - A_u u = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} - A_v v = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} - A_\theta (\theta - \theta_s) = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial z} - A_q (q - q_s), \quad z = z_1;$$

причем способ определения коэффициентов A_u , A_θ и A_q указан в гл. 4. В качестве начальных условий здесь служат значения всех зависимых переменных на n -м временном слое.

Этап согласования предусматривает интегрирование на отрезке временной оси $t^{n+\frac{1}{2}} < t < t^{n+1}$ системы уравнений следующего вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - lv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + lu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \beta \theta = 0, \quad (5.2.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\tilde{w} + w) \gamma_{\theta} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial t} + (\tilde{w} + w) \gamma_q = 0.$$

Начальными условиями для решения этой системы служат значения u , v , θ и q , получаемые при интегрировании системы (5.2.3) на момент $t^{n+\frac{1}{2}}$, а в качестве граничных дополнительно к (5.2.4) используются:

$$\begin{aligned} \text{при } z=z_0 \quad w=0, \\ \text{при } z=z_H \quad w=0. \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Отметим, что в дополнение к естественному граничному условию $w=0$ при $z=z_0$ на мезометеорологические флуктуации вертикальной скорости накладывается еще одно ограничение, связанное с затуханием всех возмущений такого типа в свободной атмосфере ($w=0$ при $z=z_H$). Между тем, в исходной системе уравнений содержится только первая производная от w по вертикальной координате, поэтому постановка такого условия, на первый взгляд, представляется излишней. Необходимо учитывать, однако, что избыток условий для w компенсируется недостатком граничных условий для мезофлуктуаций давления p , так что общее количество граничных условий соответствует порядку системы.

5.3. Этап переноса и диффузии. Покомпонентное расщепление

Все уравнения мезометеорологии на первом этапе интегрирования — этапе переноса и диффузии (система (5.2.3)) имеют сходную форму и могут быть записаны для $f=u, v, \theta, q$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} K_z^{(f)} \frac{\partial f}{\partial z} + \\ + K \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Это уравнение с использованием уравнения несжимаемости может быть также представлено в так называемой дивергентной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial u f}{\partial x} + \frac{\partial v f}{\partial y} + \frac{\partial w f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} K_z^{(f)} \frac{\partial f}{\partial z} + \\ + K \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Дальнейшее сведение задачи к совокупности более простых целесообразно производить путем покомпонентного расщепления (расщепления по геометрическим переменным).

Рассмотрим предварительно особенности расщепления оператора адвекции для переноса некоторой субстанции f в области $\Omega \in [0 < x < a, 0 < y < b]$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad (5.3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (5.3.4)$$

или, в дивергентной форме,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial uf}{\partial x} + \frac{\partial vf}{\partial y} = 0, \quad (5.3.5)$$

где $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$. В качестве граничных условий задачи (5.3.3) примем равенство нулю функции f на внешнем контуре S_Ω области Ω :

$$\begin{aligned} f(a, y, t) = f(0, y, t) = 0, \\ f(x, b, t) = f(x, 0, t) = 0. \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

Запишем (5.3.3) в операторной форме

$$\frac{\partial f}{\partial t} + Af = 0, \quad (5.3.7)$$

где $A = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$. Определим скалярное произведение двух функций f, φ в области Ω следующим образом:

$$(f, \varphi) = \int_0^a \int_0^b f(x, y, t) \varphi(x, y, t) dx dy.$$

Покажем теперь, что оператор A обладает свойством $(f, Af) = 0$. Действительно

$$\begin{aligned} (f, Af) &= \int_0^a \int_0^b f \left(u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial}{\partial x} u f^2 + \frac{\partial}{\partial y} v f^2 \right) dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^b u f^2 \Big|_0^a dy + \frac{1}{2} \int_0^a v f^2 \Big|_0^b dx = 0, \end{aligned}$$

где учтены условия (5.3.5) и использовано уравнение несжимаемости (5.3.4). Таким образом, оператор A в области Ω является неотрицательно определенным и может быть подвергнут расщеплению.

Если исходить из формальных соображений, то можно при расщеплении оператора A положить:

$$A_1 = u \frac{\partial}{\partial x}, \quad A_2 = v \frac{\partial}{\partial y}. \quad (5.3.8)$$

Нетрудно убедиться, однако, что ни один из этих двух операторов уже не будет обладать свойством неотрицательной определенности:

$$(f, A_1 f) = \int_0^a \int_0^b fu \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = - \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b f^2 \frac{\partial u}{\partial x} dx dy,$$

$$(f, A_2 f) = \int_0^a \int_0^b fv \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = - \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b f^2 \frac{\partial v}{\partial y} dx dy,$$

хотя их сумма по-прежнему такому свойству удовлетворяет вследствие выполнения уравнения несжимаемости. Можно показать, что аналогичное разбиение оператора адвекции в дивергентной форме (5.3.5) также не приводит к положительному результату. Для преодоления указанных трудностей выберем операторы A_1 и A_2 в следующем виде:

$$A_1 f = u \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{f}{2} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad A_2 f = v \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{f}{2} \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (5.3.9)$$

так что с учетом уравнения несжимаемости

$$(A_1 + A_2)f = u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{f}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = Af.$$

Теперь уже каждый из операторов A_1 и A_2 будут удовлетворять условию $(f, A_i f) = 0$. Например,

$$(f, A_1 f) = \int_0^a \int_0^b f \left(u \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{f}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy = \frac{3}{4} \int_0^b f^2 u \Big|_0^a dy - \\ - \int_0^a \int_0^b \left(f \frac{\partial fu}{\partial x} + \frac{1}{2} u \frac{\partial f^2}{\partial x} \right) dx dy = \int_0^a \int_0^b \frac{\partial f^2 u}{\partial x} dx dy = 0,$$

где использовано интегрирование по частям с учетом граничных условий для f на внешнем контуре области S_Ω . Таким же образом доказывается аналогичное свойство оператора A_2 .

Проведенные рассуждения хотя и могут показаться несколько формальными, содержат один очень важный физический аспект. Если рассмотреть средний по всей области Ω квадрат величины f

$$\overline{f^2}(t) = \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b f^2(x, y, t) dx dy,$$

который для $f=u, v$ имеет смысл средней кинетической энергии на единицу массы по соответствующим направлениям, то из условия $(f, Af) = 0$ с учетом (5.3.7) сразу же вытекает

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{f^2} = -\frac{1}{ab} (f, Af) = 0,$$

т. е. процесс переноса f в данном случае имеет так называемый квадратичный инвариант. Тот факт, что операторы A_1 и A_2 сохраняют при расщеплении свойство $(f, A_i f) = 0$ ($i=1, 2$), свидетельствует о сохранении «энергии процесса» на каждом дробном шаге в схеме расщепления. Отсутствие подобного полезного свойства привело бы к заметному снижению точности при использовании метода расщепления из-за появления фиктивных источников или стоков энергий.

Продемонстрируем это на примере конечно-разностной аппроксимации расщепленных уравнений переноса по времени с использованием схемы типа Кранка-Никольсона, имеющей второй порядок аппроксимации по времени (ошибка аппроксимации пропорциональна квадрату шага по времени τ^2). Используем для A_1 и A_2 представления (5.3.9) и с учетом (5.2.2) запишем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (f^{n+\frac{1}{2}} - f^n) &= -A_1 f^{n+\frac{1}{2}}, \\ \frac{1}{\tau} (f^{n+1} - f^{n+\frac{1}{2}}) &= -A_2 f^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Умножая первое из этих равенств на $f^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (f^{n+\frac{1}{2}} + f^n)$, а второе — на $f^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (f^{n+1} + f^{n+\frac{1}{2}})$, можно получить

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau} [(f^{n+\frac{1}{2}})^2 - (f^n)^2] &= -f^{n+\frac{1}{2}} A_1 f^{n+\frac{1}{2}}, \\ \frac{1}{2\tau} [(f^{n+1})^2 - (f^{n+\frac{1}{2}})^2] &= -f^{n+\frac{1}{2}} A_2 f^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Просуммируем эти выражения друг с другом и по всем точкам конечно-разностной сетки в области Ω ($i=1, \dots, M_\Omega$):

$$\frac{1}{\tau} \left[\sum_{i=1}^{M_\Omega} (f_i^{n+1})^2 - \sum_{i=1}^{M_\Omega} (f_i^n)^2 \right] = -\frac{\Delta_x \Delta_y}{2} \sum_{i=1}^{M_\Omega} \times \\ \times \left(f_i^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial u^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x} + f_i^{n+\frac{1}{2}} \frac{\partial v^{n+\frac{1}{2}}}{\partial y} \right).$$

Подставляя в эти соотношения приближенные выражения:

$$\varphi_i^{n+\frac{1}{2}} = \varphi_i^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{4} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \varphi_i^{n+\frac{1}{2}} = \varphi_i^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{4} \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

где $\varphi=f, u, v$, можно убедиться, что, даже при условии точного выполнения уравнения несжимаемости на шаге $n+1/2$, общее накопление энергии будет пропорционально не τ^2 , как это можно было ожидать при использовании схемы второго порядка точности по времени, а τ . Это означает, в свою очередь, что при не соблюдении на каждом дробном шаге свойства операторов $(f, A_i f) = 0$ численная схема теряет качество в результате понижения порядка аппроксимации по времени со второго до первого.

Рассмотрим теперь конечно-разностную аппроксимацию операторов A_1 и A_2 по пространственным переменным, которая бы позволила использовать столь важные свойства этих операторов. Для этой цели запишем дифференциальные операторы A_i в следующей эквивалентной форме:

$$A_1 f = \frac{1}{2} u \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u f}{\partial x}, \\ A_2 f = \frac{1}{2} v \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial v f}{\partial y}, \quad (5.3.11)$$

и для сеточной области $\Omega_i \in [0 < x_i < a, 0 < y_i < b]$, где $x_i = i\Delta$, $y_i = j\Delta$ ($i=1, \dots, I; j=1, \dots, J$), примем для конечно-разностных аналогов операторов A_i :

$$(\lambda_1 f)_{ij} = \frac{1}{2} u_{ij} \frac{f_{i+1j} - f_{i-1j}}{2\Delta} + \frac{1}{2} \frac{f_{i+1j} u_{i+1j} - f_{i-1j} u_{i-1j}}{2\Delta}, \\ (\lambda_2 f)_{ij} = \frac{1}{2} u_{ij} \frac{f_{ij+1} - f_{ij-1}}{2\Delta} + \frac{1}{2} \frac{f_{ij+1} v_{ij+1} - f_{ij-1} v_{ij-1}}{2\Delta}. \quad (5.3.12)$$

Вводя компоненты скорости с полуцелым индексом

$$u_{i \pm \frac{1}{2} j} = \frac{1}{2} (u_{i+1j} + u_{ij}), \quad v_{ij \pm \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (v_{ij+1} + v_{ij}),$$

выражения (5.3.12) можно переписать в следующей форме:

$$(\lambda_1 f)_{ij} = \frac{1}{2\Delta} (u_{i+\frac{1}{2}} f_{i+1} - u_{i-\frac{1}{2}} f_{i-1}),$$

$$(\lambda_2 f)_{ij} = \frac{1}{2\Delta} (v_{i+\frac{1}{2}} f_{j+1} - v_{i-\frac{1}{2}} f_{j-1}).$$

Нетрудно убедиться, что такая запись конечно-разностных аналогов операторов переноса обеспечивает второй порядок аппроксимации по пространственным переменным и гарантирует сохранение квадратичного инварианта.

$$Y(t) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (f_{ij})^2,$$

при интегрировании уравнения (5.3.3) с граничными условиями:

$$f_{1j} = f_{Ij} = f_{i1} = f_{iJ} = 0,$$

и использовании схемы расщепления (5.3.10).

Перейдем теперь к рассмотрению свойств суммарного оператора переноса и диффузии:

$$S_1 f = A_1 f - \frac{\partial}{\partial x} K \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$S_2 f = A_2 f - \frac{\partial}{\partial y} K \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Можно показать, что при $K \geq 0$ и выполнении условий (5.3.6) каждый из этих операторов будет неотрицательно определенным, например

$$\begin{aligned} (f, S_1 f) &= (f, A_1 f) - \int_0^a \int_0^b f \frac{\partial}{\partial x} K \frac{\partial f}{\partial x} dx dy = \int_0^b f K \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_0^a dy + \\ &+ \int_0^a \int_0^b K \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 dx dy \geq 0. \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

Отсюда следует, что оператор диффузии без особых затруднений может быть включен в общую схему расщепления. Отметим, что условие $K \geq 0$ в данном случае определяет принадлежность уравнения (5.3.1) к параболическому типу. При $K < 0$ данное уравнение с начальным условием $f = f^0(x, y)$ при $t = 0$ приводит к некорректной (по Адамару) задаче, решение которой неустойчиво по отношению к малым возмущениям в начальных данных. Физический смысл соотношения (5.3.14) очевиден: неотрицательная опреде-

ленность суммарного оператора S_i при однородных граничных условиях (5.3.6) означает монотонное во времени убывание (невозрастание) суммарной энергии процесса за счет диссипативных факторов.

Проведенные выше рассуждения о способах расщепления операторов двумерной адвекции и диффузии полностью могут быть распространены и на трехмерный случай. Окончательное покомпонентное расщепление уравнения (5.3.1) производится при этом следующим образом:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{ijk} = -(\tilde{\lambda}_1 f)_{ijk} - (\tilde{\lambda}_2 f)_{ijk} - (\tilde{\lambda}_3 f)_{ijk},$$

где k — номер узловой точки по вертикали ($z_k = \Delta_z k$) и

$$\begin{aligned} (\tilde{\lambda}_1 f)_{ijk} &= \frac{1}{2\Delta} (u_{i+\frac{1}{2}jk} f_{i+1jk} - u_{i-\frac{1}{2}jk} f_{i-1jk}) - \\ &\quad - \frac{1}{\Delta^2} K_{ijk} (f_{i+1jk} - 2f_{ijk} + f_{i-1jk}), \\ (\tilde{\lambda}_2 f)_{ijk} &= \frac{1}{2\Delta} (v_{ij+\frac{1}{2}k} f_{ij+1k} - v_{ij-\frac{1}{2}k} f_{ij-1k}) - \\ &\quad - \frac{1}{\Delta^2} K_{ijk} (f_{ij+1k} - 2f_{ijk} + f_{ij-1k}), \\ (\tilde{\lambda}_3 f)_{ijk} &= \frac{1}{2\Delta_z} (w_{ijk+\frac{1}{2}} f_{ijk+1} - w_{ijk-\frac{1}{2}} f_{ijk-1}) - \\ &\quad - \frac{1}{\Delta_z^2} [\tilde{K}_{ijk+\frac{1}{2}} (f_{ijk+1} - f_{ijk}) - \tilde{K}_{ijk-\frac{1}{2}} (f_{ijk} - f_{ijk-1})]. \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

В теории метода расщепления доказывается, что для сохранения второго порядка аппроксимации по времени при использовании этого метода помимо свойств неотрицательной определенности исходного и расщепленных операторов, необходимо потребовать также, чтобы последние были бы попарно коммутативны. Поскольку в общем случае такое условие не всегда справедливо, используют так называемое циклическое расщепление, когда на двух последующих шагах (или полушагах) по времени меняется порядок использования покомпонентно расщепленных конечно-разностных операторов $\tilde{\lambda}_l$. Общая схема расщепления для уравнения (5.3.1) приобретает в этом случае следующий вид:

$$\frac{2}{\tau} \left(f_{ijk}^{n+\frac{l}{6}} - f_{ijk}^{n+\frac{l-1}{6}} \right) = \left(\tilde{\lambda}_l \frac{f_{ijk}^{n+\frac{l}{6}} + f_{ijk}^{n+\frac{l-1}{6}}}{2} \right)_{ijk}, \quad l=1, 2, 3;$$

$$\frac{2}{\tau} \left(f_{ijk}^{n+\frac{l}{6}} - f_{ijk}^{n+\frac{l-1}{6}} \right) = \left(\tilde{\lambda}_l \frac{f_{ijk}^{n+\frac{l}{6}} + f_{ijk}^{n+\frac{l-1}{6}}}{2} \right), \quad l=4, 5, 6, \quad (5.3.16)$$

где l — порядковый номер использования операторов $\tilde{\lambda}_l$, заданных соотношениями (5.3.15). Конкретное решение разностных уравнений (5.3.16) на каждом дробном шаге по времени осуществляется при этом с помощью известного метода прогонки.

5.4. Интегрирование уравнений мезометеорологии на этапе согласования

Основная алгоритмическая задача, решаемая на этапе согласования — это адаптация полей ветра, давления и температуры. При этом система уравнений (5.2.5) интегрируется в диапазоне $t^{n+\frac{1}{2}} < t < t^n$, где в качестве начальных условий для u , v , θ и q при $t = t^{n+\frac{1}{2}}$ используются результаты интегрирования системы уравнений переноса и диффузии (5.2.3).

Важнейшим элементом преобразования уравнений (5.2.5) на этапе согласования является вывод уравнения Пуассона для мезофлуктуаций давления. Для упрощения записи введем обозначение $\pi = p/\rho$ и, пренебрегая зависимостью фоновых значений плотности ρ от координат, перепишем (5.2.5) в следующей форме:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = lv - \frac{\partial \pi}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -lu - \frac{\partial \pi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial z} = \beta \theta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$w = -\frac{1}{\gamma_\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \tilde{w},$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (\tilde{w} + w) \gamma_q = 0,$$

где предполагается $\gamma_\theta \neq 0$. Конечно-разностная аппроксимация этой системы может быть представлена в виде:

$$u^{n+1} = u^{n+\frac{1}{2}} + \tau lv^{n+1} - \tau \frac{\partial \pi^{n+1}}{\partial x}, \quad (5.4.1)$$

$$\dot{v}^{n+1} = v^{n+1/2} - \tau l u^{n+1} - \tau \frac{\partial \pi^{n+1}}{\partial y}, \quad (5.4.2)$$

$$\theta^{n+1} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \pi^{n+1}}{\partial z}, \quad (5.4.3)$$

$$\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial v^{n+1}}{\partial y} + \frac{\partial w^{n+1}}{\partial z} = 0, \quad (5.4.4)$$

$$w^{n+1} = -\frac{1}{\gamma_0 \tau} (\theta^{n+1} - \theta^{n+1/2}) - \tilde{w}, \quad (5.4.5)$$

$$q^{n+1} = q^{n+1/2} - \tau (\tilde{w} + w^{n+1}) \gamma_q, \quad (5.4.6)$$

где для удобства сохранена дифференциальная (вместо конечно-разностной) форма записи производных по пространственным переменным.

Решая (5.4.1) и (5.4.2) как систему двух линейных уравнений относительно u^{n+1} и v^{n+1} , находим

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= \frac{1}{1 + l^2 \tau^2} \left[u^{n+1/2} + l \tau v^{n+1/2} - \tau \frac{\partial \pi^{n+1}}{\partial x} - l \tau^2 \frac{\partial \pi^{n+1}}{\partial y} \right], \\ v^{n+1} &= \frac{1}{1 + l^2 \tau^2} \left[v^{n+1/2} - l \tau u^{n+1/2} - \tau \frac{\partial \pi^{n+1}}{\partial y} - l \tau^2 \frac{\partial \pi^{n+1}}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

а с учетом (5.4.3) и (5.4.5) имеем

$$w^{n+1} = -\frac{1}{\beta \gamma_0 \tau} \frac{\partial \pi^{n+1}}{\partial z} + \frac{1}{\gamma_0 \tau} \theta^{n+1/2} - \tilde{w}. \quad (5.4.8)$$

Подставляя вычисленные таким образом значения составляющих скорости на $n+1$ шаге по времени в уравнение несжимаемости (5.4.4), в итоге приходим к уравнению Пуассона для π^{n+1} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \pi^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \pi^{n+1}}{\partial y^2} + \frac{1 + l^2 \tau^2}{\beta \gamma_0 \tau} \frac{\partial^2 \pi^{n+1}}{\partial z^2} &= \frac{1}{\tau} \left[\frac{\partial u^{n+1/2}}{\partial x} + \frac{\partial v^{n+1/2}}{\partial y} + \right. \\ &\left. + l \tau \left(\frac{\partial v^{n+1/2}}{\partial x} - \frac{\partial u^{n+1/2}}{\partial y} \right) \right] + \frac{1 + l^2 \tau^2}{\beta \tau^2} \frac{\partial \theta^{n+1/2}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

Сформулируем граничные условия для решения уравнения (5.4.9). Исходя из условия затухания мезовозмущений θ^{n+1} на верхней границе расчетной области, (5.2.6) с учетом (5.4.3) можно записать:

$$\frac{\partial \pi^{n+1}}{\partial z} \Big|_{z=z_H} = 0, \quad (5.4.10)$$

а из условия «непротекания» воздуха через поверхность $\psi=0$ при $z=z_0$ и соотношения (5.4.8) имеем:

$$\left(\frac{\partial \pi^{n+1}}{\partial z} - \beta \theta^{n+1}\right)_{z=z_0} = 0. \quad (5.4.11)$$

На внешнем контуре расчетной области граничные условия для π формулируются в виде, аналогичном (5.2.4),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi^{n+1}}{\partial x} &= 0, \quad x = \pm X, \\ \frac{\partial \pi^{n+1}}{\partial y} &= 0, \quad y = \pm Y, \end{aligned} \quad (5.4.12)$$

согласованные с (5.4.1) и (5.4.2) при условии затухания возмущений скорости на границе.

Численное интегрирование уравнения Пуассона (5.4.9) с крайними условиями (5.4.10), (5.4.11) может производиться с помощью какого-либо из имеющихся методов (как прямых так и итерационных), на обсуждении которых мы уже не останавливаемся. После восстановления поля мезофлуктуаций π^{n+1} , с помощью соотношений (5.4.1)–(5.4.3), (5.4.5), (5.4.6) производится расчет всех остальных искомым функций на этапе согласования: u^{n+1} , v^{n+1} , θ^{n+1} и q^{n+1} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Атмосферная турбулентность и моделирование распространения примесей. Ред. Ф. Т. М. Ньистадт и Х. Ван Доп. Перевод с английского под редакцией А. М. Яглома. — Л.: Гидрометеиздат, 1985. — 351 с.
2. Вагер Б. Г., Надежина Е. Д. Пограничный слой атмосферы в условиях горизонтальной неоднородности. — Л.: Гидрометеиздат, 1979. — 135 с.
3. Гаврилов А. С., Пономарева С. М. Структура турбулентности в приземном слое атмосферы. — Обзорная информация ВНИИГМИ-МЦД, сер. метеорология, вып. 1, Обнинск, 1984. — 55 с.
4. Гутман Л. Н. Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов. — Л.: Гидрометеиздат, 1969. — 295 с.
5. Зилитинкевич С. С. Динамика пограничного слоя атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1981. — 310 с.
6. Лайхтман Д. Л. Физика пограничного слоя атмосферы. — Л.: Гидрометеиздат, 1970. — 340 с.
7. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. — М.: Наука, 1982. — 319 с.
8. Матвеев Л. Т. Динамика облаков. — Л.: Гидрометеиздат, 1981. — 310 с.
9. Методы расчета турбулентных течений. Ред. В. Колльман. Перевод с английского под редакцией А. Д. Хонькина. — М.: Мир, 1984. — 464 с.
10. Мезингер Ф., Аракава А. Численные методы, используемые в атмосферных моделях. — Л.: Гидрометеиздат, 1979. — 135 с.

11. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1. — М.: Наука, 1965. — 639 с.
12. Панин Г. И. Тепло- и массообмен между водоемом и атмосферой в естественных условиях. — М.: Наука, 1985. — 204 с.
13. Пененко В. В., Алоян А. Е. Модели и методы для задач охраны окружающей среды. — Новосибирск: Наука, СО, 1985. — 253 с.
14. Рождественский В. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1968. — 592 с.
15. Турбулентность. Принципы и применения. Ред. У. Фрост и Т. Моулден. Перевод с английского. — М.: Мир, 1980. — 535 с.
16. Шметер С. М. Физика конвективных облаков. — Л.: Гидрометеониздат, 1972. — 230 с.
17. Процессы переноса вблизи поверхности раздела океан — атмосфера / Р. С. Бортковский, Э. К. Бютнер, С. П. Малевский-Малевич, Ю. Л. Преображенский. — Л.: Гидрометеониздат, 1974. — 239 с.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
1. ВВЕДЕНИЕ	3
2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МЕЗОМЕТЕОРОЛОГИИ	8
2.1. Исходные уравнения гидротермодинамики атмосферы	8
2.2. Общий подход к фильтрации уравнений	10
2.3. Преобразование уравнений для описания мезопроцессов	16
2.4. Упрощение системы уравнений мезометеорологии	21
2.5. Основная задача мезометеорологии	24
3. МЕТОДЫ ЗАМКНАНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МЕЗОМЕТЕОРОЛОГИИ	29
3.1. Проблема замыкания	29
3.2. Приближения <i>K</i> -теории	31
3.3. Уравнение баланса турбулентной энергии	33
3.4. Методы замыкания второго порядка	41
3.5. Уравнения для третьих моментов	49
3.6. Методы моделирования облачности	53
4. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АТМОСФЕРЫ С ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ	58
4.1. Приповерхностный слой атмосферы	58
4.2. Параметризация приземного слоя	64
4.3. Особенности параметризации приземного слоя	68
4.4. Орография и шероховатость	72
4.5. Параметризация приповерхностного слоя при наличии фазовых переходов	74
5. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МЕЗОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ	77
5.1. Уточнение постановки задачи	77
5.2. Применение метода расщепления	81
5.3. Этап переноса и диффузии. Покомпонентное расщепление	84
5.4. Интегрирование уравнений мезометеорологии на этапе согласования	91
ЛИТЕРАТУРА	93

ГАВРИЛОВ АЛЕКСАНДР СЕРГЕЕВИЧ
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
МЕЗОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *З. Б. Ваксенбург*

Корректор *Л. В. Ломакина*

Сдано в набор 27.01.88. М-27133. Подписано в печать 27.05.88.
Формат 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 2. Лит. гарн. Печать высокая. Печ. л. 6,0.
Уч.-изд. л. 7,0. Тираж 600 экз. Темплан 1988 г., поз. 262. Зак. 489. Цена 30 коп.
ЛПИ им. М. И. Калинина, 195251, Ленинград, Политехническая ул., 29.

Типография ВСОК ВМФ