Р. А. БРАУН

Аналитические методы МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЛАНЕТАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Перевод с английского
Э. В. Попова

Под редакцией
Д. В. Чаликова

229912

Ленинградский
Гидрометеорологический ин-т
БИБЛИОТЕКА
Л-д 195196 Малоохтинский пр., 98

ЛЕНИНГРАД
ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ 1978

УДК 551.511.3+551.510.522

Книга содержит компактное изложение аналитических теорий планетарного пограничного слоя атмосферы. В последние годы в этой области начинают господствовать вычислительные методы, результаты которых часто утрачивают свойство наглядности. Не отрицая важности этого направления, нельзя не признать, что аналитические методы должны сохранять свое значение для того, чтобы сами вычислители представляли себе качественно объект своих исследований. Кроме того, она содержит полноценный материал для подготовки соответствующего лекционного курса.

Рассчитана на специалистов по пограничному слою и полезна для ознакомления с предметом студентам, аспирантам и специалистам в других областях геофизики.

Б $\frac{20807\text{-}121}{069(02)\text{-}78}$ 15-78

© R. A. Brown, 1974

© Перевод на русский язык. Гидрометеоиздат, 1978 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Геофизическая гидродинамика изучает процессы в окружающих нас воздухе и воде. Эта среда порождает и поддерживает бесчисленные формы жизни. К ним, между прочим, принадлежит и Homo sapiens, что оправдывает наш интерес к законам, управляющим движением жидкости или газа. Планетарным пограничным слоем называется слой, прилегающий к поверхности планеты и непосредственно испытывающий ее влияние. В атмосфере его толщина составляет несколько километров, а в океане — несколько десятков метров. Понятно, что эти области в наибольшей степени испытывают на себе активность Homo sapiens.

Деятельность человека в последнее время настолько усилилась, что теперь она оказалась в состоянии взаимосвязи с окружающей средой. Так, если распространение загрязняющих веществ ограничивается пограничным слоем, в обширных районах могут создаться условия, значительно затрудняющие жизнедеятельность человека. Для выяснения механизма загрязнения воздуха и борьбы с ним крайне желательно располагать мезомасштабной моделью пограничного слоя.

По мере расширения и усложнения человеческой деятельности все более необходимым становится и изучение естественных вариаций окружающей среды, которые уже теперь являются важным фактором планирования. Реалистические модели пограничных слоев требуются также для прогноза погоды и исследований по проблеме изменения климата. Потоки тепла, влаги и импульса влияют на всю атмосферу. Они оказываются, в частности, в тесной связи с режимом облачности и осадков. Добыча полезных ископаемых на берегах Северного Ледовитого океана пробудила интерес к исследованиям пакового льда, движение которого происходит под воздействием как атмосферы, так и океана. Из всего сказанного следует, что прогноз состояния планетарного пограничного слоя становится важной чисто практической задачей.

Анализ планетарного пограничного слоя в общем случае исключительно сложен. Описывающие его уравнения имеют восьмой порядок, они трехмерны, нелинейны, нестационарны и содержат решения, неустойчивые к малым возмущениям. Последнее свойство является причиной турбулентности, масштабы которой могут достигать масштабов самого пограничного слоя. Масштабы движений в пограничном слое изменяются от сантиметров до километров.

Аналитические методы применимы преимущественно к линейным уравнениям низкого порядка, например для анализа ламинарного потока. Они включают в себя методы алгебры, счислений или иных логических систем, опирающихся на символику, определяемую в терминах конкретной системы координат.

Может показаться, что роль аналитических методов в исследовании такой сложной проблемы невелика. И все же данные натурных наблюдений, число которых непрерывно растет, показывают, что для атмосферы и океана в целом, может быть, более свойственны простые решения. Представляется, что долгопериодные процессы можно считать, например, квазистационарными, т. е. предполагать, что они могут быть аппроксимированы прямоугольной волновой функцией. Показателями того, что ламинарное движение действительно существует, являются облачность в виде чередующихся правильных полос, наличие ряби на поверхности океана и пр. Простая параметризация течения в пограничном слое нужна прежде всего для прогноза погоды, исследований загрязнения атмосферы и других геофизических задач, в которых требуется информация о трении и потоках тепла и влаги на поверхности.

Замечено, что в той или иной степени пограничный слой всегда стратифицирован. Таким образом, в практических приложениях надо учитывать термические факторы. Не менее очевидным кажется, что процессы в планетарном пограничном слое нестационарны. Разумеется, не существует аналитических решений, которые учитывали бы все свойства наблюдаемых потоков.

Проблема пограничного слоя рассматривалась с трех независимых точек зрения: как задача о динамике нейтрально стратифицированного потока, задача термической конвекции и, наконец, как полная задача, решаемая численными методами. По первым двум темам литература очень обширна. Быстро растет и число исследований, относящихся к третьей категории. Успешное решение проблемы пограничного слоя в одинаковой степени требует развития всех трех направлений.

Настоящая книга относится скорее к первой категории. Исследования, основанные на аналитических методах, должны особое внимание уделять динамическому потоку с нейтральной стратификацией, как частному случаю более общей ситуации. Есть основания надеяться, что рассматриваемые ниже методы имеют дидактическую ценность, т. е. способствуют пониманию природы пограничного слоя. Аналитические решения, так же как вообще случай нейтральной стратификации, имеют большое значение для исследования более общей задачи, учитывающей неоднородность распределения плотности.

Книга написана с позиций геофизика и даже точней — метеоролога. Тем не менее многие результаты, приведенные в ней, получены в гидродинамике или аэродинамике. Например, логарифмический профиль скорости, фиксируемый ниже области проявления кориолисовых эффектов, прямо вытекает из пристеночного закона. Концепция пути смешения, аэродинамические методы определения коэффициента сопротивления и многие представления теории турбулентности заимствованы из классической гидродинамики. Тем не менее первоначальное развитие исследований пограничного слоя происходило под влиянием геофизических запросов. Начиная со статей Буссинеска (1877 г.) и кончая работами Прандтля (1930 г.) планетарный пограничный поток изучался как геофизическое явление. Так, анализ пограничного слоя в поле силы Кориолиса был дан Экманом в 1904 г. в связи с наблюдениями над дрейфом льда. Метеорологические приложения имелись в виду и во многих ранних работах Прандтля.

С усовершенствованием авиации разрыв между интенсивно развиваемой теорией плоскопараллельного потока и теорией геофизического пограничного слоя стал все возрастать. Это, конечно, объясняется громадным различием в масштабах, а также сложностями, сопровождающими учет силы Кориолиса и трехмерности.

Настоящая книга предназначена для геофизиков, изучающих современные гидродинамические методы анализа планетарного пограничного слоя. В пограничном слое как типичном объекте геофизической гидродинамики мы находим весьма сложное переплетение динамических и термических процессов. В связи с этим целесообразно вначале детально изложить основные определения и перечислить возможные подходы. Нередко получается так, что элементарные и фундаментальные понятия трудно отделить друг от друга, так что различие между ними улавливается по порядку изложения или семантике. В настоящее время мы являемся свидетелями того, что методы классической гидродинамики все более широко используются в геофизической гидродинамике. С другой стороны, гидродинамика способствовала зарождению новых математических методов.

Содержание книги занимает промежуточное положение между гидродинамикой и геофизикой. Остается только принести извинения геофизикам, которым покажется, что некоторые вопросы излагаются с излишней тщательностью или даже наивно. В этих случаях им целесообразно перенести внимание с конкретной физической проблемы на метод ее решения.

Законы сохранения массы, импульса и энергии имеют конечные масштабы применимости, однако для всех масштабов геофизической гидродинамики они достаточно точны, для того чтобы их можно было принять за аксиомы. Тем не менее очередное допущение — введение континуума — для каждой конкретной проблемы не может быть принято без тщательного обсуждения.

Для облегчения понимания основной материал дается во введении и первых трех главах. Более углубленное изложение содержится в последующих главах. В главах 11 и 12 обсуждаются термические эффекты и нестационарность.

Применение численных методов, разумеется, в принципе возможно на любом этапе исследования. Возможности решения полной задачи тем не менее сильно ограничены как уровнем численных методов, так и мощностью ЭВМ. В связи с этим численные методы применяются лишь для решения упрощенных уравнений в пределах некоторого интервала управляющих параметров.

Основное внимание в книге уделяется не численным методам, а способам вывода упрощенных уравнений.

Мы уже располагаем прекрасными книгами по микрометеорологии, численному анализу и классической гидродинамике. Настоящая книга, надо надеяться, дополняет их с минимальным перекрытием.

Р. А. Браун

27 ноября 1972 г.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Для того чтобы модель пограничного слоя имела практическую ценность, она должна удовлетворять определенным требованиям, которые для разных проблем различаются. Искомым результатом могут быть как вектор напряжения трения и поток тепла и количества движения у поверхности, так и структура всего потока в целом. В каждом случае возникает необходимость параметризации, которая дает возможность связать эти характеристики с крупномасштабным (обычно синоптического масштаба) потоком. Таким образом, модель должна содержать в себе параметры, которые могут быть непосредственно измерены либо надежно обобщены по мезомасштабным областям.

Главным свойством уравнений планетарного пограничного слоя является наличие членов, описывающих силу Кориолиса. Эти члены отражают тот факт, что для мезомасштабных и крупномасштабных движений система отсчета, связанная с Землей, не является инерционной. Наличие в уравнениях такой виртуальной силы дает возможность построить удобный масштаб для характерной толщины атмосферного или океанского пограничного слоя. Этот масштаб, зависящий от турбулентной вязкости, дает оценку глубины слоя, в котором проявляется действие трения, выраженную через фигурирующие в уравнениях коэффициенты. К сожалению, такая оценка может быть сделана лишь для конечной широты. Это ограничение и принимается для рассматриваемых ниже моделей. Благодаря быстрому росту силы Кориолиса с удалением от экватора, эти модели неприменимы лишь в узкой приэкваториальной зоне.

Впервые проблема пограничного слоя рассматривалась еще в начале нашего столетия Буссинеском [31], который выдвинул гипотезу, что турбулентный поток, так же как и ламинарный, подчиняется ньютоновскому закону вязкости. Представление об эффективной, или вихревой, вязкости лежит в основе почти всех аналитических работ по планетарному пограничному слою.

Важная роль сил вязкости в тонком пристеночном слое была замечена в 1904 г. Прандтлем. Одновременно Экман построил аналитическое решение для случая, когда сила вязкости балансируется силой Кориолиса. В течение последующих нескольких десятилетий работы, посвященные планетарному пограничному слою, почти не появлялись, что отчасти объяснялось отсутствием практической необходимости в них. Лишь немногие исследователи были готовы прилагать усилия к решению этой большой задачи. Кроме того, в то время явно ощущался недостаток как качественных, так и количественных экспериментальных данных. Огромные масштабы пограничного слоя исключали тогда возможность натурных измерений. Наконец, большая изменчивость параметров, которые удавалось все же измерить, чрезвычайно затрудняла их интерпретацию. В настоящее время расширение возможностей моделирования крупномасштабных геофизических процессов на ЭВМ большой мощности делает исследования по пограничному слою практически важными и стимулирует экспериментальные исследования.

Не удивительно, что основные усилия при анализе пограничного слоя ранее в основном сводились к воспроизведению его структуры на основе измерений, сделанных вблизи поверхности. Экспериментальных данных, относящихся к высотам, превосходящим нижние десять метров, было недостаточно. В связи с этим попытки смоделировать структуру пограничного слоя в целом оказались успешными лишь частично. Тем не менее они были первым шагом, необходимым для установления связей между довольно надежно измеренными параметрами приземного слоя и сравнительно просто организованным синоптическим потоком.

В настоящее время ситуация в области экспериментальных исследований заметно улучшилась. Появились возможности производить разнообразные и сложные измерения и разработаны эффективные системы машинной обработки и хранения данных. Тем не менее бóльшая доля этих данных все же относится к наиболее доступной области пограничного слоя — к нижним двадцати метрам — и значительно меньшая охватывает собственно экмановский слой. Последние поступают в основном с довольно редко расположенных пунктов радиозондирования атмосферы и с самолетов. Некоторые измерения, охватывающие нижнюю часть пограничного слоя, производятся с помощью метеорологических вышек и шаров-пилотов.

Обычно имеется в виду, что верхняя граница экмановского слоя располагается на высоте, где непосредственно прослеживается влияние подстилающей поверхности. Существует, однако, другое определение высоты ППС, применимое при наличии приподнятой инверсии — слоя весьма устойчивой термической стратификации. Ниже инверсии воздух обычно хорошо перемешан, так что в нем наблюдается либо нейтральная, либо неустойчивая стратификация. Этот слой формируется синоптическими процессами или возникает в ситуации, когда конвективное перемешивание доминирует над динамическим. Поэтому при анализе ситуаций с наличием инверсии требуется учет мезомасштабных процессов либо построение модели чисто конвективного пограничного слоя. Эти вопросы в книге не рассматриваются.

1.2. ОБЩИЙ ПОДХОД

Теоретический анализ планетарного пограничного слоя осложняется тем, что его структура описывается, вообще говоря, незамкнутой системой нелинейных уравнений не менее чем восьмого порядка, переменными граничными условиями, а также большой разрозненностью экспериментальных данных. Успешное построение теоретического решения для наиболее важных переменных, т. е. скорости, напряжения трения, потоков тепла, количества движения и термодинамических характеристик, возможно лишь при корректном упрощении задачи в целом. Поэтому вначале целесообразно обсудить те допущения, которые положены в основу исходных уравнений, описывающих структуру потока.

Прежде всего приводятся примитивные уравнения и даются общие соображения относительно принятых допущений и упрощений. Эти уравнения анализируются с помощью современных методов анализа, разработанных в теории пограничного слоя. Далее они подробно обсуждаются в связи с выводом уравнений, пригодных для построения каждой конкретной модели. Уравнения, применимые к описанию мезомасштабных процессов, рассматриваются наиболее детально.

Соображениям подобия, вытекающим из масштабного анализа уравнений Навье—Стокса для пограничного слоя, уделяется особое внимание. Эти соображения основаны на гипотезе, что для потока определенной глубины над поверхностью с заданной шероховатостью имеется ряд автомодельных решений. Склеивание решений дает соотношения, связывающие приповерхностные величины с параметрами свободного потока.

Разбирается модель вторичного течения, включающая анализ устойчивости решения для экмановского пограничного слоя. Анализ выполняется для нейтрально стратифицированного слоя, но сопровождается комментариями там, где это уместно, о влиянии эффектов стратификации.

Каждая рассматриваемая модель может быть обобщена с учетом стратификации и нестационарности, но это, разумеется, ведет к усложнениям. Изложение нередко будет носить качественный характер с указанием необходимых ссылок.

1.3. КОНЦЕПЦИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ И ЛЕЖАЩИЕ В ЕЕ ОСНОВЕ ДОПУЩЕНИЯ

Проблема состоит в описании движения жидкости вблизи границы. Предполагается, что детали поверхности имеют пренебрежимо малые размеры в сравнении с вертикальной протяженностью пограничного слоя. Интуиция и эксперимент подсказывают, что влияние таких деталей на некотором удалении от границы не должно ощущаться вследствие того, что в жидкости не могут поддерживаться напряжения сдвига на значительном расстоянии или с прошествием некоторого времени. Поэтому в первом приближении в решении для атмосферного или океанского пограничных слоев не учитываются эффекты горизонтальных границ, т. е. оно относится к случаю потока бесконечной горизонтальной напряженности. Это вполне применимо для потока достаточно большой глубины. Так, модель, описывающая циркуляцию атмосферы, вполне может быть пригодна для прогнозирования крупномасштабных (синоптических) процессов, даже если в ней не уделяется особого внимания эффектам пограничного слоя. Наиболее вероятно, что эти соображения в особенности справедливы для краткосрочного прогноза. Разумеется, в конечном итоге эффекты диссипации кинетической энергии в пограничном слое, а также притоки тепла оказывают решающее влияние на общую циркуляцию атмосферы. Поэтому в той или иной форме они должны учитываться. Масштаб времени для этих процессов составляет, вероятно, не менее двенадцати часов. В связи с этим синоптическая модель, в которой регулярно производится коррекция решения по эмпирическим данным (например, по данным о поле давления) с интервалом, меньшим, чем характерный синоптический масштаб времени, может учитывать эффекты пограничного слоя в сравнительно грубой форме.

Нельзя забывать, однако, что информация о пограничном слое нас часто интересует сама по себе. Так, для проблемы взаимодействия океана и атмосферы или расчета дрейфа океанического льда требуется информация о векторе силы на границе раздела между средами, получаемая из решения атмосферной задачи. Подробные сведения о структуре пограничного слоя нужны для проблемы загрязнения атмосферы. Для задачи пограничного слоя граничные условия состоят в том, что у поверхности принимается затухание скорости, а на внешней границе его задается внешний поток. В добавление к этому для того, чтобы оценить, как далеко распространяется в жидкости влияние пограничного слоя, нужна некоторая количественная мера того свойства жидкости, которое порождает силы трения при наличии сдвига скорости. Ситуация осложняется тем, что эта характеристика может зависеть не только от свойств жидкости, но и от характера подстилающей поверхности. Если же такая мера является только характеристикой жидкости, то можно считать, что универсальный закон — соотношение подобия — пригоден для любой поверхности. Справедливость гипотез подобия можно проверить тщательным исследованием способов масштабирования как теоретически, так и с привлечением экспериментальных данных. Для того чтобы для пограничного слоя применить классическую ламинарную теорию, приходится предполагать, что шероховатость поверхности выражается лишь в условии прилипания. Другими словами, подразумевается, что размеры элементов шероховатости значительно меньше, чем глубина жидкости. В аналогичном смысле считается пренебрежимо малым масштаб длины, определяемый молекулярной вязкостью жидкости. Это означает, что мы всегда будем иметь дело только с турбулентным пограничным слоем. Именно для такого слоя мы и будем разрабатывать методы параметризации.

Важное значение для проблемы геофизического пограничного слоя имеет масштабный анализ. Он особенно необходим, если при замыкании уравнений Навье—Стокса используется понятие турбулентной вязкости. При этом члены уравнений, описывающие напряжения, аппроксимируются на основе концепции ньютоновской вязкости. Если коэффициент турбулентности известен, число отыскиваемых переменных становится равным числу уравнений. Применение этого подхода к турбулентному движению требует некоторого расширения понятия континуума.

Основная трудность, возникающая при использовании эйлеровской формулировки законов сохранения, заключается в том, что она приводит к довольно сложным связям между полем напряжений и остальными переменными. Все известные способы представления поля напряжений дают аналитически неразрешимые задачи. Поэтому для упрощения уравнений вводится ряд дополнительных предположений. Тем не менее в итоге обычно получается достаточно сложная нелинейная система уравнений высокого порядка, решение которой может быть получено лишь с помощью численных методов.

Решение Экмана для пограничного слоя является одним из результатов целой серии упрощений исходных уравнений и вместе с тем исключительным примером точного решения уравнений динамики жидкости. Оно обсуждается в главе 2 и п. 3.5.

Теоретический анализ сильно усложняется, если одновременно с исследованием динамики учитывать процессы конвекции. Имея в виду главным образом все-таки динамические аспекты проблемы, мы предположим, что термические эффекты, несмотря на то что они всегда имеют место в планетарном пограничном слое, при формировании динамической структуры потока играют подчиненную роль.

1.4. МЕТОД АНАЛИЗА

Мы будем использовать ряд методов анализа, с которыми читатель должен быть знаком. Для изложения многих из них потребовалась бы отдельная книга, тем не менее мы их будем применять как аксиомы, ограничиваясь в каждом конкретном случае лишь кратким их обоснованием.

Часто получается так, что одна процедура интуитивно принимается в качестве предпосылки для последующей. Такое положение, видимо, неизбежно, когда в основу анализа кладутся прежде всего физические рассуждения и эксперимент. Переход к полностью формализованному изложению в таких случаях обычно сделать не удается. Анализ размерностей является лишь первым шагом на долгом пути, ведущем, скажем, к преобразованиям операционного исчисления. Тем не менее ряд чисто технических приемов в нашей работе получает некоторое развитие. Читателю, заинтересованному в более подробном освещении проблемы, мы рекомендуем прочитать книгу Бриджмена [33], давшему вполне доступное формализованное изложение анализа размерностей, и книгу Седова [10], где обсуждается применение теории подобия в динамике, а также работы Каплуна [68] и Ван Дайка [126], посвященные проблеме сингулярных возмущений.

Принципиальная сторона дела становится наиболее ясной на примерах, тем не менее нам представляется целесообразным дать краткое предварительное описание применяемых ниже подходов для того, чтобы облегчить читателю извлечь максимум информации из последующего изложения.

1.4.1. *Анализ размерностей*

Анализ размерностей, вероятно, представляет собой наиболее оригинальный и фундаментальный подход к решению физических задач. В основу исходного рассуждения здесь кладется следующее очевидное правило: две приравниваемые величины должны иметь одинаковое физическое содержание — нельзя, например, сравнивать между собой сами по себе яблоки и апельсины. Однако, исходя из более глубоких предпосылок, и здесь можно рассмотреть общую систему, состоящую из фундаментальных частиц — все фрукты состоят из атомов. Таким образом, основу анализа составляет избранная система фундаментальных единиц.

Анализ размерностей можно разделить на следующие этапы:

1) составление списка всех величин, влияющих на исследуемую переменную;

2) перечисление размерностей этих величин в выбранной системе фундаментальных единиц;

3) исследование ограничений на искомую функциональную зависимость, налагаемых требованием однородности размерностей.

Формальное правило анализа размерностей — П-теорема — утверждает, что в безразмерном виде переменную всегда можно выразить в виде функции других безразмерных независимых переменных. При этом минимальное число независимых безразмерных переменных равно числу исходных размерных параметров за вычетом количества фигурирующих в них фундаментальных единиц. Если количество исходных переменных равно количеству фундаментальных единиц, метод приводит к явной функциональной зависимости. В этом случае отношение зависимых переменных уже является константой. Обычно исходных переменных больше, чем фундаментальных единиц, и анализ размерности не дает возможности определить функциональную зависимость. Тем не менее уменьшение общего числа переменных очень полезно. Это эффективно используется в теории моделирования, применяемой в гидромеханике.

В принципе для анализа размерности требуется лишь понимание того, какие параметры являются существенными для рассматриваемого процесса. К такому пониманию можно прийти прежде всего интуитивно или на основании опыта. В последнее время в основу анализа размерностей чаще всего кладутся определяющие уравнения и добавляемые к ним граничные условия, которые как раз и выступают в роли результата предшествующих теоретических и экспериментальных исследований. Анализ размерности, примененный к уравнениям движения, дает весьма конструктивные рекомендации, заслуживающие специальной классификации.

1.4.2. *Динамическое подобие*

Информация о переменных задачи содержится в уравнениях и граничных условиях. Сюда же должны быть включены все размерные константы. Обработка этой информации на основе соображений размерности позволяет привести уравнения к более удобному виду.

Две величины находятся в отношении подобия, если они связаны между собой с помощью константы, не зависящей от координат и времени. Для динамического подобия двух процессов необходимо, чтобы они описывались уравнениями, которые могут быть приведены к одинаковому виду. Тогда решение одной из этих задач совпадает с решением другой при подходящем преобразовании переменных. Это чаще всего достигается путем растягивания одной из координат. Такие преобразования называются афинными. Если для переменных, входящих в уравнения для двух процессов, можно подобрать масштабы так, что безразмерные уравнения станут одинаковыми, между этими процессами существует динамическое подобие. Поскольку гидродинамические процессы описываются либо уравнениями Навье — Стокса, либо их частными вариантами, для существования подобия, вообще говоря, необходимо, чтобы совпадали все коэффициенты в безразмерных уравнениях. Если таких коэффициентов нет, безразмерные зависимости будут автомодельными. Любая зависимая переменная является тогда однозначной функцией независимых переменных. После приведения к безразмерному виду все возможные решения таких уравнений лягут на одну кривую. В этом случае преимущества применения масштабирования наиболее очевидны.

1.4.3. *Характерные величины*

Из предыдущих рассуждений следует, что применение анализа размерностей дает возможность перейти к минимальному числу взаимосвязанных переменных. Если используемые для приведения к безразмерному виду величины подобраны тщательно, дальнейшее уменьшение числа переменных уже невозможно. Масштабы обычно выбираются так, чтобы безразмерные переменные были по порядку величины близки к единице. Преимущество использования характерных величин состоит в том, что в уравнениях появляется минимальное число безразмерных переменных. Например, давление может само по себе фигурировать в виде граничных условий на поверхности p_0 и в свободном потоке p_1, однако характерным масштабом для членов, содержащих вертикальный градиент p, будет разность $\Delta p = p_1 - p_0$. Значение правильного выбора характерных величин иллюстрируется в главе 4.

Выбор характерных величин приобретает еще большее значение при дальнейшем анализе, связанном с нахождением предельных видов уравнений. Небрежность, проявленная при выводе безразмерных уравнений, может привести к ошибочным или тривиальным результатам. Такой случай рассмотрен, например, в главе 10.

1.4.4. *Асимптотические пределы*

В большинстве случаев выбор переменных, существенных для задачи, производился на основании опыта, без глубокого проникновения в физическую сущность явления. Нередко анализ основывался на простейшем комбинировании переменных, а в случае неудачи к ним добавлялись какие-либо другие. Даже в том случае, когда исследователь и подозревал, что та или иная характеристика существенна, он мог бы допустить, что в определенных обстоятельствах она может быть мала по сравнению с другими. С другой стороны, полные уравнения, описывающие процесс (например, уравнения Навье — Стокса), заключают в себе больше информации, чем это необходимо для конкретной задачи. Для оценки относительной важности членов полных уравнений можно воспользоваться формальным подходом, основанным на соображениях размерности и подобия. В настоящее время для конкретной реализации такого подхода имеются лишь некоторые общие рекомендации. При выборе характерных решений и введении соответствующих им безразмерных величин имеется достаточный произвол. Сама процедура обычно осуществляется в следующем порядке:

1. Для всех переменных подбираются характерные величины. Это относится ко всем переменным во всех членах урав-

нений. Подходящими масштабами могут быть, в частности, характерные градиенты или перепады. Допускается применение различных масштабов для разных осей, так что поля могут быть в результате по-разному растянуты в разных направлениях. В безразмерном виде все переменные должны быть по порядку величины близки к единице.

2. После приведения к безразмерному виду все члены уравнения делятся на коэффициент, стоящий перед наиболее важным для рассматриваемой задачи членом. Теперь безразмерные коэффициенты перед остальными членами будут выражать их относительную важность по сравнению с главным членом, т. е. их величина показывает, является ли соответствующий член доминирующим или пренебрежимо малым.

3. Если один из коэффициентов устремить к пределу (обычно к нулю или к бесконечности), уравнения могут принять при этом более простой вид и вместе с тем содержать основную физическую сущность проблемы.

4. Если при выводе приближенных уравнений опускается член наивысшего порядка, его решение в отдельных областях может не быть пределом решения исходного уравнения. Таким образом, предельное решение не обязательно верно для всей рассматриваемой области. В таких случаях его приходится находить по отдельности для разных участков — ситуация, часто имеющая место в гидромеханике. Приемы, позволяющие получать результат в таких ситуациях, найдены в теории сингулярных возмущений [68, 126].

229912

1.4.5. *Тензорное представление*

Тензорные обозначения совершенно необходимы для изложения материала в сжатом виде. Помимо экономии, использование их дает возможность получить результат, связанный в наиболее наглядной форме с исходными принципами. Тем не менее, после того как выведены окончательные уравнения и к ним применен анализ размерности и соображение подобия, более удобной становится компонентная форма уравнений. Пограничный слой обычно характеризуется бесконечной горизонтальной протяженностью и переменной толщиной. Возможные упрощения здесь наиболее очевидны при использовании компонентной формы, так как для разных направлений естественно принять разные масштабы. В связи с этим использование покомпонентного представления целесообразно. Именно в таком виде результат сопоставляется с экспериментальными данными. Исторически развитие происходило как раз в обратном порядке: соотношения выводились интуитивно в покомпонентном виде и лишь впоследствии были обобщены с использованием тензорных представлений. Сокращенное изложение тензорных обозначений и определений дано в приложении.

2 Заказ № 37
Ленинградский
Гидро... ...ий ин-т
БИБЛИОТЕКА

2. ОБСУЖДЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И МОДЕЛЕЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

2.1. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Предполагаем, что среда представляет собой континуум. В частности, это означает, что производные могут быть получены переходом к пределу, малому по сравнению со всеми характерными масштабами пограничного слоя, но и достаточно большому, чтобы исключить влияние хаотических движений, накладывающихся на средний поток. Это допущение является вполне строгим, если хаотические движения происходят на молекулярном уровне, но оно должно быть внимательно пересмотрено, если используется концепция турбулентной вязкости. После этой оговорки можно приступить к изложению законов сохранения. Мы имеем одно векторное и два скалярных уравнения для вектора скорости **V** и скалярных плотности и энергии, учитывающих массовые силы, источники тепла и тензор напряжений. Объемные силы просто выражаются через известные или неизвестные величины и их производные. Источники или стоки энергии также могут быть выражены через известные параметры, однако во многих рассматриваемых ниже ситуациях их можно и полностью исключить. У нас остается задача нахождения тензора напряжений. Отыскание связей, выражающих этот член через измеренные величины и основные переменные, является главной проблемой теории геофизического пограничного слоя. Ее часто называют проблемой замыкания.

Во многих областях весьма успешным было использование концепции идеальной жидкости. В ней напряжение включает только силы давления, а тензор напряжений представляет из себя диагональную матрицу, ненулевые элементы которой равны давлению. Для замыкания системы уравнений требуется еще уравнение состояния. Применение концепции идеальной жидкости оказалось настолько успешным, что отдельные неудачи гидродинамики стали называть парадоксами. Примером такого парадокса является предсказываемое теорией нулевое сопротивление для тела, погруженного в движущуюся жидкость. Этот ложный парадокс объясняется тем, что на самом деле на поверхности тела возникает тонкий пограничный слой, не предсказываемый теорией идеальной жидкости. Для объяснения

УРАВНЕНИЯ	ПРИБЛИЖЕНИЯ
$$\left\{\begin{aligned} &\dot{\rho} + \rho\nabla\cdot\mathbf{V} = 0\\ &\rho\dot{\mathbf{V}} = \rho\mathbf{F} + \nabla\underline{\underline{\sigma}}\\ &\rho\dot{E} = \dot{Q} - \underline{\underline{\sigma}}\cdot\nabla\mathbf{V}\end{aligned}\right\}$$	*ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ* Континуум
Уравнения Навье—Стокса	*ПРИБЛИЖЕНИЯ НАВЬЕ—СТОКСА*
$$\left\{\begin{aligned} &\dot{\rho} + \rho\nabla\cdot\mathbf{V} = 0\\ &\rho\dot{\mathbf{V}} + \rho 2\Omega\times\mathbf{V} + \rho\mathbf{g} =\\ &\quad = -\nabla p + \nabla(K_1\,\mathrm{def}\,\mathbf{V}) + \nabla(K_2\,\mathrm{div}\,\mathbf{V})\\ &\rho C_v\dot{T} = \nabla(K_h\nabla T) - p\nabla\cdot\mathbf{V} + Q_r + Q_p + \Phi\end{aligned}\right\}$$	Линейная вязкость Статичность Пропорциональность напряжения тензору деформации
где $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\tau}}$ $\underline{\underline{\tau}} = (K_1\,\mathrm{div}\,\mathbf{V} + K_2\,\mathrm{div}\,\mathbf{V})\,\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ $\Phi \equiv \underline{\underline{\tau}}\nabla\cdot\mathbf{V}$	
Упрощенные уравнения Навье—Стокса	*ПРИБЛИЖЕНИЯ ЗАМЫКАНИЯ* «Турбулентный контунуум» $K_1 = K = \mathrm{const}$ $K_2\,\mathrm{div}\,\mathbf{V} = 0$
$$\left\{\begin{aligned} &\dot{\rho} + \rho\nabla\cdot\mathbf{V} = 0\\ &\dot{\mathbf{V}} + 2\Omega\times\mathbf{V} + g\hat{k} = -\frac{\nabla p}{\rho} + K\nabla^2 V\\ &\dot{T} = K_h\nabla^2 T - \frac{RT}{C_v}\nabla\cdot\mathbf{V}\end{aligned}\right\}$$	
Уравнения пограничного слоя	*ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ* $W \ll V_h,\ z \ll x,\ y,\ \nabla p\ \mathrm{const}$ Приближение Буссинеска (малость флуктуации плотности) Нейтральная стратификация
$$\left\{\begin{aligned} &U_x + V_y = 0\\ &U_t + UU_x + VU_y - fV = -\frac{1}{\rho}p_x + KU_{zz}\\ &V_t + UV_x + VV_y + fU = -\frac{1}{\rho}p_y + KV_{zz}\end{aligned}\right\}$$ $-\rho g = p_z$	*СТАЦИОНАРНОСТЬ, ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ ОДНОРОДНОСТЬ* $\vec{V} \to \vec{V} - \vec{V}_g$
Уравнения Экмана	
$$\left\{\begin{aligned} &fV + KU_{zz} = 0\\ &fU - KV_{zz} = 0\end{aligned}\right\}$$	*СТАЦИОНАРНОСТЬ*
Модифицированные уравнения Экмана	
$$\left\{\begin{aligned} &fV + KU_{zz} = 0\\ &fU - KV_{zz} = A(z)\end{aligned}\right\}$$ Плюс уравнения теории неустойчивости и баланса энергии	

Рис. 2.1. Этапы развития теории экмановского пограничного слоя.

этого эффекта требуется привлечение более реалистической модели, в которой учитываются вязкие напряжения, порождающие поверхностное трение. При этом в соответствии с экспериментом предполагается, что напряжение пропорционально скорости деформации. В простейшем варианте (когда учитывается только первый член разложения Тейлора по градиенту скорости) получаем модель жидкости с линейной вязкостью. Коэффициент разложения называется коэффициентом вязкости. Он является мерой силы, действующей на частицу при наличии деформации (т. е. градиента скорости). Выведенные таким образом уравнения называются уравнениями Навье—Стокса (рис. 2.1).

Если к этой системе добавить уравнения для определения коэффициентов вязкости K_1 и K_2, получится система нелинейных уравнений восьмого порядка. Для решения этой системы пригодны лишь громоздкие численные методы, да и то после введения ряда упрощений. Относительно способов расчета K_s (включая и коэффициент температуропроводности $K_h = K/\rho c_v$) имеется много различных предположений (см. главу 8). Наиболее простое из них, основанное на аналогии с молекулярной вязкостью, состоит в том, чтобы считать K константой. В этом случае получается классическое решение, которое лежит в основе теоретического анализа планетарного пограничного слоя. На рис. 2.1 в схематическом виде перечислены основные допущения и полученные на их основе уравнения, приведенные к форме, допускающей замкнутое решение. Решение этих уравнений, известных под названием «уравнение Экмана», в целом для ППС дало неудовлетворительные результаты. При построении диаграммы имеется достаточный произвол. Подробнее этот вопрос обсуждается в п. 3.9. Модифицированные уравнения Экмана получаются, если к основным уравнениям добавить возмущения в виде вторичного потока конечной амплитуды (см. главу 10).

2.2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭКМАНОВСКОГО СЛОЯ

Уравнения пограничного слоя асимптотически получаются из общих уравнений в предположении, что толщина слоя мала.

Аналитическое решение этих уравнений возможно, если дополнительно принять условия стационарности и горизонтальной однородности. Последнее предположение позволяет опустить нелинейные члены. Такие уравнения были решены Экманом в 1905 г. Предположение, что сила Кориолиса уравновешивается силами вязкости, приводит к весьма красивому решению в виде экспоненциально затухающего спиралевидного профиля скорости, возрастающей от нулевой на поверхности до геострофической в свободной атмосфере (рис. 2.2). Решение полностью применимо также к придонному и приповерхностному слоям в океане. Собственно для атмосферы решение было найдено Аккербломом [13] и Тейлором [123].

К сожалению, хотя спиралевидный профиль скорости действительно часто наблюдается в планетарных пограничных слоях,

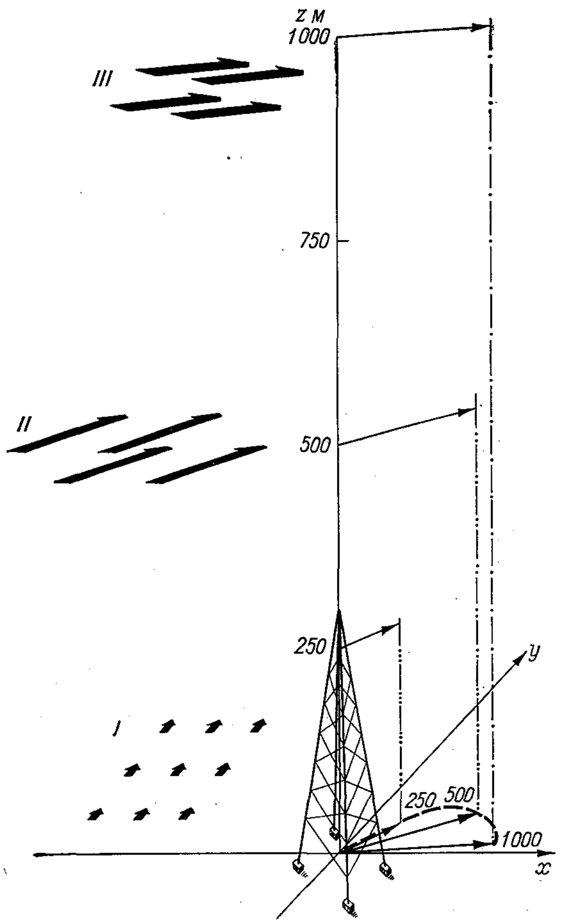


Рис. 2.2. Спираль и годограф Экмана.

I — приземный ветер, *II* — ветер в пограничном слое, *III* — геострофический ветер.

он довольно редко оказывается похож на аналитический экмановский профиль. Это обычно объясняется неудовлетворительностью гипотез замыкания. Дальнейшие исследования пограничного слоя в основном опирались на эмпирические данные.

Не так давно было найдено, что при некоторых условиях экмановское решение неустойчиво к малым возмущениям (глава 9). Это обстоятельство учитывается при построении модифицированного экмановского решения в главе 10.

2.3. МОДЕЛИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Модель пограничного слоя может быть получена в результате весьма различных предположений. Детальность описания пограничного слоя зависит от конкретной задачи. Мы, конечно, хотели бы располагать и полным решением, однако это вряд ли возможно. Ряд приближений позволяет получить весьма важные связи между параметрами без воспроизведения полной структуры пограничного слоя. Эти зависимости являются очень важным шагом в направлении к получению полного решения.

2.3.1. *Приземный слой*

Приземным слоем называется слой, где турбулентные потоки импульса, тепла и влаги не меняются с высотой. Эффекты нестационарности и влияния силы Кориолиса в этом слое очень малы.

Один из методов, прямо основанных на статистической природе флуктуаций, называется корреляционным. В довольно тонком приповерхностном слое, где сила Кориолиса пренебрежимо мала, в уравнениях пропадают все параметры, и в случае плоскопараллельного потока могут быть эффективно использованы гипотезы подобия. Пересмотр уравнений Навье — Стокса сводится к тому, что в них пренебрегают молекулярной вязкостью и вводятся допущения пограничного слоя. Поле скорости можно разбить на средние и пульсационные компоненты, а напряжение трения представляется как средний поток импульса. Предполагается, что среднее движение стационарно. Задача состоит в нахождении эмпирических параметров, таких, как коэффициент аэродинамической шероховатости, связывающий турбулентные потоки и трение со скоростью ветра над различными поверхностями.

Экспериментальные исследования в приземном слое включают как непосредственное измерение трения на поверхности, так и детальное фиксирование поля скорости. Прямой метод измерения потоков основан на измерении поля скорости с помощью малоинерционных датчиков. Другой метод, называемый профильным (или градиентным), дает возможность определять потоки и силу трения по данным о средней скорости и температуре. Для этого метода необходимо знание нескольких эмпирически определяемых констант.

2.3.2. *Методы теории подобия*

В настоящей книге выбор характерных безразмерных параметров делается с помощью анализа размерности. Общие свойства теории подобия делают ее удобной для компактного представления эмпирических данных и получения эмпирических зависимостей с минимальным числом переменных. Пример такого использования теории подобия приведен в главе 5, где дано общее описание методов анализа приземного слоя. Теория подобия формулирует также рекомендации для учета термической стратификации в пограничном слое.

Сильное различие масштабов длины для экмановского и приземного слоев позволяет ввести для них различные параметры подобия, вывести предельные уравнения и получить внешнее и внутреннее решения, которые далее можно сращивать. Эта процедура описана в главе 4 для почти тривиального случая сращивания геострофического потока с экмановским решением. Такой же принцип используется в главах 6 и 7 для того, чтобы объединить решение для экмановского и приземного слоев. В связи с тем, что этот случай является также чрезвычайно простым примером применения техники сингулярных возмущений, мы не будем давать ее специальное изложение.

2.3.3. *К-теории*

Еще один подход заключается в том, что решение строится сразу для всего трехмерного пограничного слоя с учетом силы Кориолиса. Основная проблема здесь заключается в параметризации турбулентного трения, уравновешивающего силу Кориолиса. Коэффициент пропорциональности между напряжением и скоростью деформации часто обозначается буквой K, поэтому все теории такого рода можно объединить под названием K-теории.

Если все члены, описывающие средний перенос импульса, аппроксимируются с помощью коэффициента турбулентной вязкости, уравнения становятся аналогичными экмановскими уравнениями на рис. 2.1, за исключением того, что член, описывающий трение, принимает вид $(KU_z)_z$, где $K(z)$ предполагается переменным. Обсуждение нескольких вариантов распределения K имеется в главе 8.

2.3.4. *Численные модели*

Новые возможности в исследовании пограничного слоя открылись с появлением мощных ЭВМ, которые позволили осуществить прямое интегрирование полных нестационарных уравнений Навье — Стокса. Возможность этого метода ограничивается исключительно мощностью используемых ЭВМ. Однако очень широкий диапазон масштабов, существенных для проблемы планетарного пограничного слоя, делает эти ограничения решающими для нескольких последующих поколений ЭВМ. В связи с этим шаг конечно-разностной сетки приходится согласовывать с размерами области интегрирования. В этом случае подсеточные эффекты должны быть параметризованы. Кроме того, прямое моделирование обладает всеми свойствами «черного ящика»; его применение связано с очень большим расходом машинного времени, так как для того, чтобы разобраться в причинно-следственных связях модели, необходимо большое количество экспериментов с различными параметрами и детальное сравнение результатов. Численное интегрирование уравнений может, конечно, применяться на любой стадии анализа. При замыкании уравнений и формировании граничных условий допустимы как теоретические, так и полуэмпирические зависимости в любом сочетании. В численных моделях могут использоваться как простая двумерная параметризация вязкости в рамках экмановских уравнений, так и трехмерные модели с переменной сеткой и полные уравнения Навье — Стокса. Эти модели особенно интересны, если с их помощью можно проследить эффекты вариации параметров.

Некоторые результаты численного интегрирования уравнений Экмана даны в главе 8. Обсуждение численных моделей Эстока [54] и Дирдорфа [51] можно найти в [64].

2.3.5. *Модель вторичного потока*

В заключение мы снова возвращаемся к экмановскому решению в связи с анализом динамической неустойчивости. Оказывается, что устойчивость решения обеспечивается добавлением вторичного потока. Для анализа этой модели требуется численное исследование проблемы устойчивости экмановского решения и гипотез о равновесии возмущений конечной амплитуды.

В основе модели лежит предположение, что экмановское решение реально не наблюдается потому, что оно неустойчиво к малым возмущениям. Тем не менее по мере роста возмущений они могут модифицировать средний поток таким образом, что он становится устойчивым. Результирующий равновесный поток является суперпозицией среднего течения (модифицированная экмановская спираль) и конечного возмущения в виде вторичного потока (спиральная вращающаяся циркуляция). Характер циркуляции зависит от формы двумерных возмущений (длины волны, ориентации и амплитуды как функции высоты), энергетического баланса в равновесном состоянии и взаимодействия со средним потоком. На рис. 2.1 предполагается, что модифицированные уравнения Экмана для среднего потока получены при ослаблении требований к горизонтальной однородности. Вывод соответствующих уравнений дан в п. 10.3.

2.4. РЕЗЮМЕ

Аналитические исследования планетарного пограничного слоя в наибольшей степени продвинуты для условий нейтральной стратификации, стационарности и горизонтальной однородности. Для линеаризированных уравнений наибольшие упрощения дает последнее предположение. В анализе возмущений

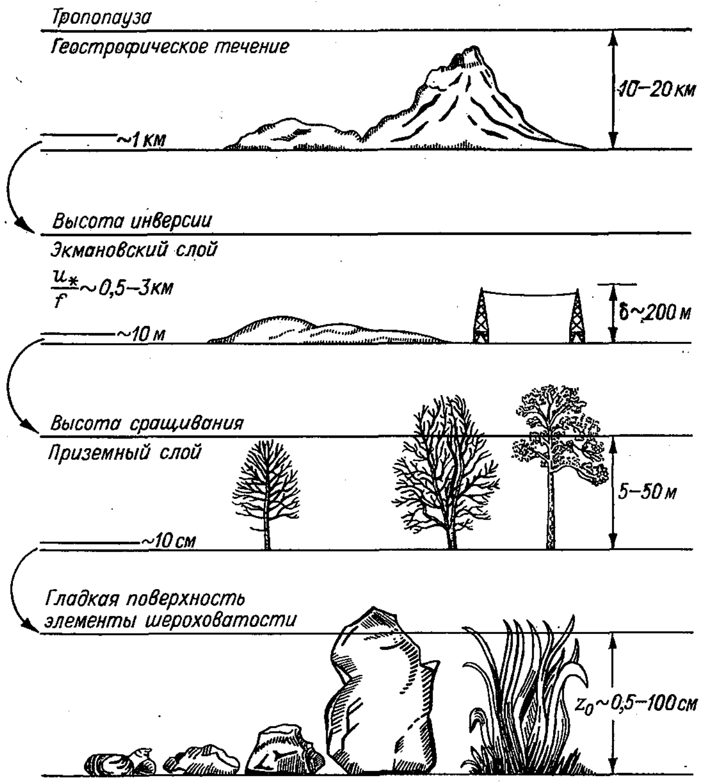


Рис. 2.3. Схематическое изображение масштабов атмосферного пограничного слоя.

для вторичного потока это предположение принимается в ослабленной форме. В настоящее время единственной реальной альтернативой этим предположениям является численное интегрирование нелинейной системы.

Причинами отклонений от стационарного состояния являются в основном синоптические возмущения и суточный цикл. Известно несколько попыток оценить вклад этих эффектов. Естественно, что учет нестационарности должен быть включен лишь в ту модель, которая хорошо описывает стационарное состояние.

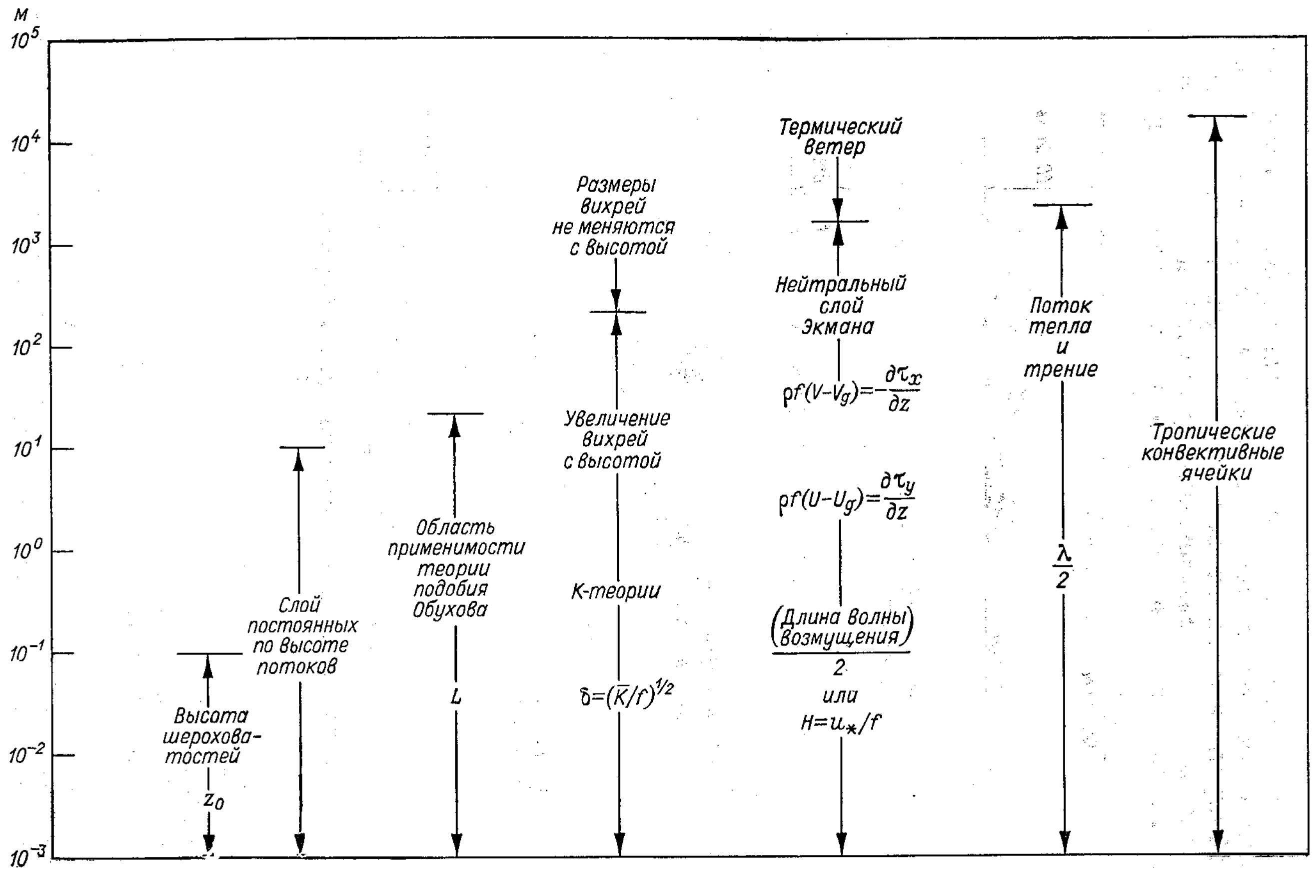


Рис. 2.4. Классификация подслоев и характерных масштабов пограничного слоя.

Полноценная модель должна также обязательно учитывать эффекты стратификации. Ценность модели для нейтральной стратификации определяется прежде всего тем, насколько легко ее можно расширить на случай стратифицированной жидкости. Нейтральный случай можно просто считать промежуточным состоянием между двумя различными режимами, не допускающими экстраполяции.

Любая модель чрезвычайно усложняется конвективными эффектами. Конвекция может создать пограничный слой и в том случае, когда среднее движение отсутствует. Конвекции посвящено очень много работ, однако единого мнения о том, как построить ее рабочую модель, не существует. Поскольку в большинстве случаев средний поток все же присутствует, конвективные эффекты будут рассматриваться как возможная модификация динамической модели.

Упомянутые выше области пограничного слоя показаны на рис. 2.3 и 2.4. Характерные масштабы будут обсуждаться в последующих главах.

3. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ

3.1. ВВЕДЕНИЕ

При общем анализе уравнений учет всех членов часто лишь затемняет суть дела. Например, в обсуждаемой ниже модели вторичного течения вектор полной скорости вблизи границы можно представить в виде суммы фонового потока, среднего отклонения от него, вторичного течения с нулевым средним значением и случайных турбулентных пульсаций. Поэтому преобразование уравнений удобнее начинать исходя из их первичной формы, в которой учитываются все члены, но в очень обобщенном виде. При этом, коль скоро речь идет о геофизических процессах, возможны кардинальные упрощения. Обычно принято давать лишь краткое изложение используемых допущений, достаточное для последовательности изложения. Так как все же существует опасность искать причины неудач в неверном использовании каких-либо фундаментальных гипотез, ряд допущений классической гидромеханики следует для геофизических приложений обосновывать более тщательно.

Начнем с первичной формы законов сохранения — уравнений Навье — Стокса:

$$\begin{aligned} \rho\dot{\mathbf{V}} &= \operatorname{div}\underline{\underline{\sigma}} - \mathbf{F} \text{ (импульс)},\\ \dot{\rho} + \nabla\cdot\mathbf{V} &= 0 \text{ (масса)},\\ \rho c_v\dot{T} - \nabla K_h\nabla T + p\nabla\mathbf{V} &= Q_r + Q_p + \Phi \text{ (энергия)},\\ p &= \rho RT \text{ (состояние)}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где приняты следующие обозначения:

$$\dot{v} \equiv \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}.$$

$\underline{\underline{\sigma}}$ — тензор напряжений (двойная черта снизу обозначает тензор второго порядка, жирные буквы соответствуют векторной величине), $\mathbf{F}$ — массовые силы, включая однородное поле силы тяжести $\mathbf{g}$ и силу Кориолиса, Q_r и Q_p — радиационные и фазовые притоки тепла, K_h — коэффициент теплопроводности, Φ — приток тепла за счет вязкой диссипации кинетической энергии,

c_v и c_p — теплоемкости при постоянном объеме и давлении, $R = c_p - c_v$ — газовая постоянная.

Для нейтрально стратифицированного потока использовать уравнение энергии нет необходимости. Даже при учете стратификации члены, стоящие в правой части этого уравнения, обычно опускаются. Здесь они лишь напоминают, что в отдельных случаях это допущение может быть причиной ошибок.

3.2. НАПРЯЖЕНИЯ

Правильное описание напряжений является одной из главных проблем, возникающих при решении системы уравнений (3.1). Произведение тензора напряжений на единичный вектор, направленный по нормали к поверхности, дает силу, действующую на единицу поверхности. Используя теорему Гаусса, получаем

$$\text{Сила} = \int\limits_{\text{площадь}} \mathbf{n}\underline{\underline{\sigma}}\, dA = \int\limits_{\text{площадь}} \underline{\underline{\sigma}}\, dA = \int\limits_{\text{объем}} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}\, dV.$$

Сила, действующая на частицу, равна

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \int\limits_{\Delta A} \mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\sigma}}\, dA = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \int\limits_{\Delta V} \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}}\, dV = \operatorname{div} \sigma.$$

Предположим, что основные характеристики кинематического и термодинамического состояния планетарного пограничного слоя могут быть определены на масштабах достаточно малых, чтобы их можно было считать пренебрежимо малыми по сравнению с масштабами всего течения в целом. Основываясь на наблюдениях, примем ряд предположений, в совокупности определяющих ньютоновскую жидкость.

1. Статическое напряжение в жидкости создается только силой давления.
2. Напряжение непосредственно не зависит от потока тепла и полностью определяется локальным кинематическим и термодинамическим состоянием.
3. Избранных направлений не существует.
4. Напряжения пропорциональны градиенту скорости.

Последнее допущение, основанное на экспериментальных данных, утверждает, что напряжение может быть представлено в виде разложения в ряд Тейлора по градиенту скорости:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \mathbf{B} \operatorname{grad} \mathbf{V}.$$

Используя перечисленные допущения, это выражение можно записать следующим образом [24]:

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{\mathbf{I}}} + K_1 \operatorname{div} \mathbf{V}\underline{\underline{\mathbf{I}}} + K_2 (\operatorname{grad} \mathbf{V} + \operatorname{grad}^* \mathbf{V}) - p\underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}},$$

где $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ — единичный тензор, а * обозначает сопряженный оператор. K_1 и K_2 — скалярные коэффициенты, которые могут зависеть от локального состояния жидкости. Сила напряжений тогда может быть записана в виде

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} = \operatorname{grad}(K_1 \operatorname{div} \mathbf{V}) + \operatorname{div}\{K_2 (\operatorname{grad} \mathbf{V} + \operatorname{grad}^* \mathbf{V})\}.$$

Пользуясь рядом векторных тождеств, последнее выражение представим так:

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} = K_1 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + K_2 \{\nabla^2 \mathbf{V} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V})\} +$$
$$+ \nabla K_1 (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \nabla \cdot K_2 (\nabla \mathbf{V} + \nabla^* \mathbf{V}).$$

Имея в виду, что мы будем пользоваться понятием турбулентной вязкости, допустим, что K может меняться вдоль вертикальной координаты z (и только вдоль нее):

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} = K_1 \nabla^2 \mathbf{V} + K_2 \nabla^2 \mathbf{V} + K_2 \nabla \wedge \nabla \wedge \mathbf{V} +$$
$$+ \frac{dK_1}{dz} \nabla \cdot \mathbf{V} + \frac{dK_2}{dz} (\nabla \mathbf{V} + \nabla^* \mathbf{V}).$$

Это выражение все еще очень сложно. К счастью, мы еще имеем возможность предположить, что жидкость несжимаема, т. е. $\nabla \mathbf{V} = 0$, что уже дает приемлемую форму

$$\operatorname{div} \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} = K_2 \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{dK_2}{dz} (w_x + u_z,\ w_y + v_z,\ 2w_z). \qquad (3.2)$$

Константа K_2 может быть коэффициентом либо молекулярной вязкости ν в случае ламинарного потока, либо вихревой вязкости в турбулентном течении. Концепция турбулентной вязкости вводится по аналогии с молекулярной.

3.3. СИЛА КОРИОЛИСА

Рассмотрим, как вычисляется ускорение в законе Ньютона $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Это выражение записано в инерциальной системе отсчета. Между тем в геофизических задачах чаще всего используется система координат, связанная с вращающейся Землей и испытывающая, таким образом, ускорение. В такой системе отсчета уравнения движения должны включать дополнительную фиктивную силу. Силы можно выразить через соответствующие им ускорения, отнесенные к единице массы, если ускорения измеряются в неподвижной системе координат (рис. 3.1). Производная от вектора в такой абсолютной системе связана

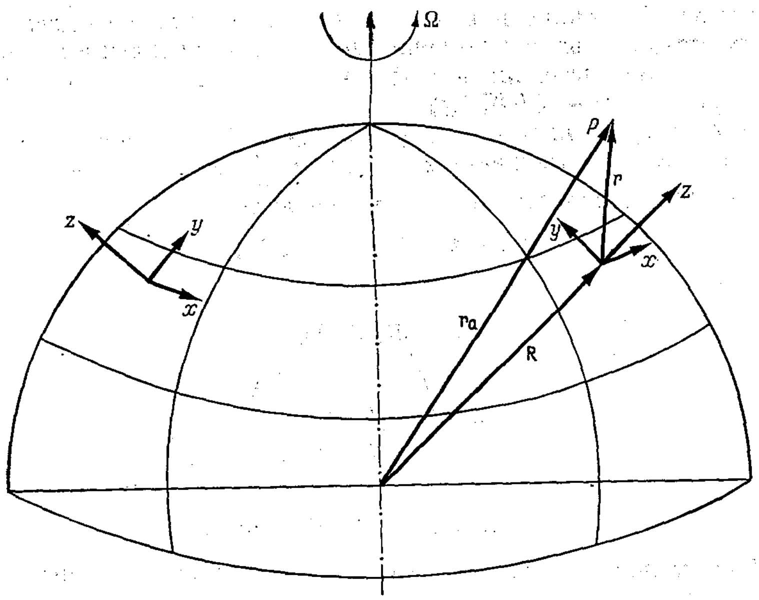


Рис. 3.1. Положение точки во вращающейся системе координат $\mathbf{r}$ *и фиксированной* $\mathbf{r}_a$. *Для наглядности* $\mathbf{r}$ *сильно преувеличено.*

с производной во вращающейся системе координат соотношением

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_a = \left(\frac{d}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \wedge\right),$$

где $\boldsymbol{\Omega} = (0,\ \Omega\cos\varphi,\ \Omega\sin\varphi)$, Ω — угловая скорость вращения Земли, φ — широта. Таким образом,

$$\mathbf{V}_a = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_a = \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r} = \mathbf{V} + \mathbf{V}_e,$$

где $\mathbf{V}$ — относительная скорость, $\mathbf{V}_e$ — скорость, вызванная вращением Земли, $\mathbf{V}_a$ — абсолютная скорость в неподвижной системе координат.

Точно так же

$$\left(\frac{d\mathbf{V}_a}{dt}\right)_a = \left(\frac{d}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \wedge\right)(\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) =$$
$$= \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{V}}{dt},$$
$$\left(\frac{d\mathbf{V}_a}{dt}\right)_a = \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{V} + \frac{d\mathbf{V}}{dt}.$$

Здесь в левой части стоит абсолютное ускорение, а в правой — сумма центростремительного, кориолисова и относительного

Представим теперь член, включающий градиент давления, в виде разложения в ряд

$$\frac{1}{(\bar{\rho}+\rho)}\cdot\frac{\partial(\bar{P}+p)}{\partial x_i}=\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial(\bar{P}+p)}{\partial x_i}\left\{1-\frac{\rho}{\bar{\rho}}+\left(\frac{\rho}{\bar{\rho}}\right)^2+\ldots\right\}\simeq$$

$$\simeq\frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\partial(\bar{P}+p)}{\partial x_i}-\frac{\rho}{\bar{\rho}}\left\{\frac{1}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\partial(\bar{P}+p)}{\partial x_i}\right\} \tag{3.7}$$

и подставим это в первое из уравнений (3.5). Получим

$$\frac{\partial(\bar{V}_i+v_i)}{\partial t}+(\bar{V}_j+v_j)\frac{\partial(\bar{V}_i+v_i)}{\partial x_j}+\varepsilon_{ijk}n_j(\bar{V}_k+v_k)+$$

$$+g\delta_{i3}+\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial(\bar{P}+p)}{\partial x_i}-\frac{\rho}{\bar{\rho}^2}\frac{\partial(\bar{P}+p)}{\partial x_i}-\nu\frac{\partial^2(\bar{V}_i+v_i)}{\partial x_j\partial x_j}=0. \tag{3.8}$$

Для анализа этого уравнения нужно выбрать характерные масштабы для средних и пульсационных переменных.

Рассмотрим уравнения (3.6), (3.7) и (3.8) в случае нейтральной стратификации, осредненные по времени при условии, что результат осреднения не зависит от момента отсчета (стационарный случай). Замечая, что операции суммирования, дифференцирования и интегрирования перестановочны с операцией осреднения, т. е.

$$\bar{a}+\bar{b}=\overline{a+b},$$

$$\frac{\partial\bar{a}}{\partial x}=\overline{\frac{\partial a}{\partial x}},\quad\frac{\partial\bar{a}}{\partial t}=\overline{\frac{\partial a}{\partial t}},$$

$$\int\bar{a}\,dx=\overline{\int a\,dx},$$

приходим к осредненным уравнениям:

$$\bar{V}_j\frac{\partial\bar{V}_i}{\partial x_j}+\overline{v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{P}}{\partial x_i}-\nu\frac{\partial^2\bar{V}_i}{\partial x_j\partial x_j}+\varepsilon_{ijk}n_j\bar{V}_k+g\delta_{i3}=0,$$

$$\frac{\partial\bar{\rho}\bar{V}_i}{\partial x_i}+\frac{\partial\overline{\rho v_j}}{\partial x_j}=0. \tag{3.9}$$

Уравнения для возмущений получаются вычитанием осредненных уравнений из уравнений для мгновенных величин:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\overline{v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}}+v_j\frac{\partial\bar{V}_i}{\partial x_j}+\bar{V}_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}-$$

$$-\nu\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_j}+\varepsilon_{ijk}n_jv_k=0,$$

$$\frac{\partial\rho v_j}{\partial x_j}=-\frac{\partial\overline{\rho v_j}}{\partial x_j}+\frac{\partial\bar{\rho}v_j}{\partial x_j}+\frac{\partial\rho V_j}{\partial x_j}=0. \tag{3.10}$$

Линеаризированные уравнения для возмущений получаются из уравнений (3.6), если в них пренебречь членами, содержащими произведения отклонений.

3.5. МАСШТАБИРОВАНИЕ И ПРИБЛИЖЕНИЕ БУССИНЕСКА

Рассмотрим линеаризированные (т. е. не содержащие произведений пульсаций) уравнения сохранения массы для случая, когда $W \ll U$, V для возмущений плотности,

$$\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{\bar{\rho}}\left(U\frac{\partial\rho}{\partial x}+V\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}\right)+\nabla\cdot\mathbf{v}=0.$$

Воздух, разумеется, является сжимаемой жидкостью, поэтому к вычислению градиентов плотности следует подходить с осторожностью. Для периодов больше чем одна секунда выполняется условие

$$\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\rho}{\partial t}\ll\nabla\cdot\mathbf{v},$$

особенно точное в стационарном случае.

Для пограничного слоя справедливы также неравенства

$$w\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}\gg\left\{V\frac{\partial\rho}{\partial y},\quad U\frac{\partial\rho}{\partial x}\right\}.$$

Физически это означает, что относительное изменение плотности частички воздуха, перемещающейся с потоком, пренебрежимо мало по сравнению с изменением ее с высотой. Это справедливо, если движение происходит в тонком горизонтальном слое, каковым и является пограничный слой.

Поскольку высота пограничного слоя значительно меньше масштаба высоты для всей атмосферы $H_0=\rho g/P_0\approx 12$ км (высота однородной атмосферы), приведение к безразмерному виду дает неравенство

$$\left[\frac{\Delta\rho_{0v}}{\rho_0}\right]\frac{w}{\bar{\rho}}\cdot\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}\ll\nabla\cdot\mathbf{v},$$

где первый множитель, представляющий из себя отношение перепада плотности в пограничном слое к самой плотности, довольно мал. Из этого следует, что поле скорости можно считать бездивергентным

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=0. \tag{3.11}$$

В самом пограничном слое вариации плотности очень малы. Они обусловлены главным образом не изменениями давления, а термическими эффектами. На это впервые указал в 1903 г. Буссинеск. Хотя это допущение для пограничного слоя выполняется с высокой точностью, строгое обоснование его достаточно сложно. Детальное исследование этого вопроса выполнялось в [34, 42, 114]. Конечный результат сводится к тому, что воздух можно считать несжимаемым, хотя его плотность может изменяться в зависимости от температуры. Эту зависимость надо учитывать лишь в членах, содержащих в качестве множителя ускорение силы тяжести.

Браун [34] рассматривал приближение Буссинеска как второе приближение, получающееся при устремлении к нулю отношения возмущений давления к характерному давлению. Этот результат следует из анализа уравнений для возмущений. Если уравнения приводить к безразмерному виду с использованием по отдельности специальных масштабов для средних значений и пульсаций $(\overline{\mathbf{V}}, \rho_0, H, \Delta P_0, \Delta T_0, P_0', \rho_0', H', T_0', \mathbf{v})$, в безразмерном виде в них будут еще дополнительно входить отношения масштабов для возмущений и для средних значений. Учет этих дополнительных параметров является чрезвычайно трудной задачей. Тем не менее главный результат может быть проиллюстрирован на примере линеаризированного уравнения состояния и осредненных по горизонтали уравнений движения, из которых вычтены уравнения для средних скоростей:

$$u_t+\overline{U}u_x+\overline{V}u_y+w\overline{U}_z+\frac{Dp_x}{\bar{\rho}}=0,$$

$$v_t+\overline{U}v_x+\overline{V}v_y+w\overline{V}_z+\frac{Dp_y}{\bar{\rho}}=0,$$

$$w_t+\overline{U}w_x+\overline{V}w_y+g'\frac{\rho}{\bar{\rho}}+\frac{Dp_z}{\bar{\rho}}=0,$$

$$T_t+\overline{U}T_x+\overline{V}T_y+w\left(\overline{T}_z+\frac{g''}{c_p}\right)=0,$$

$$\frac{\Delta P_{0v}}{P_0}\frac{w}{\bar{\rho}}\bar{\rho}_z+\frac{\Delta P_{0h}}{P_0}(u\bar{\rho}_x+v\bar{\rho}_y)+u_x+v_y+w_z=0,$$

$$\left(\frac{P_0'}{P_0}\right)\frac{p}{P}=\frac{\rho}{\bar{\rho}}+\frac{T}{\overline{T}}, \tag{3.12}$$

где $D=P_0/\Delta P_{0h}$, $g'=gH/V_0^2$, $g''=gH/J\Delta T_0$, а J — механический эквивалент тепла. В этих уравнениях опущены члены, в которых коэффициенты малы для любых возмущений.

Условия $\Delta P_{0h}/\Delta P_{0v}\ll 1$ и $\Delta P_{0v}/P_0\ll 1$ дают возможность принять уравнение сохранение массы в виде $\operatorname{div}\mathbf{u}=0$. При $P_0'/P_0\to 0$ пульсации плотности и температуры в уравнении состояния взаимно балансируются. Стремление $g'\rho/\bar{\rho}$ к нулю не сказывается непосредственно на члене, описывающем эффекты плавучести. В силу того что ΔP_{0h} имеет порядок P_0', член с градиентом давления остается порядка единицы.

Приближение Буссинеска получается, когда отношения $\Delta P_{\theta v}/P_0$ и P'_0/P_0 становятся одновременно малы. При этом уравнения (3.5) преобразуются к следующему виду:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t}+V_j\frac{\partial V_i}{\partial x_j}+\varepsilon_{ijk}n_jV_k+g\left(1+\frac{\rho}{\bar{\rho}}\right)\delta_{i3}+$$

$$+\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial P}{\partial x_i}-\nu\frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j\partial x_j}=0, \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i}=0, \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+V_j\frac{\partial T}{\partial x_j}-\frac{\partial^2 T}{\partial x_j\partial x_j}=0, \tag{3.15}$$

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}}=-\frac{T}{\bar{T}}. \tag{3.16}$$

Теперь можно оценить температурный эффект, включаемый в уравнения движения с помощью члена, описывающего силу плавучести $g\,(T/\bar{T})\,\delta_{i3}$.

Движущийся по вертикали объем воздуха будет испытывать адиабатическое расширение или сжатие с одновременным изменением температуры. Возникающая при этом сила плавучести зависит от разности температуры в объеме и окружающем воздухе, т. е. от того, насколько отличается средний градиент температуры от сухоадиабатического. Градиент потенциальной температуры определяется следующим образом:

$$\frac{\partial\theta}{\partial z}\equiv\frac{\partial\bar{T}}{\partial z}+\frac{g}{c_p}. \tag{3.17}$$

Если градиент средней температуры равен адиабатическому (или градиент потенциальной температуры равен нулю), температура в перемещающемся объеме остается равной внешней температуре и возмущения отсутствуют. При этом уравнение переноса тепла отщепляется от уравнения движения. В этом случае мы имеем слой нейтральной плавучести. Значительная часть последующих результатов будет относиться именно к такой ситуации.

Пользуясь уравнением неразрывности, получим

$$\frac{\partial(v_iv_j)}{\partial x_j}=v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+v_i\frac{\partial v_j}{\partial x_j}=v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

и перепишем уравнение (3.9) так:

$$\bar{V}_j\frac{\partial\bar{V}_i}{\partial x}+\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{P}}{\partial x_i}+\varepsilon_{ijk}n_j\bar{V}_k=\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu\frac{\partial\bar{V}_i}{\partial x_j}-\overline{v_iv_j}\right]. \tag{3.18}$$

Средний перенос импульса здесь описывается членами, подобными компонентам тензора напряжений. Они называются напряжениями Рейнольдса.

Аналитическое исследование уравнений (3.18) осложняется наличием новых переменных $\overline{v_i v_j}$. Система в принципе может быть замкнута введением каких-либо дополнительных гипотез. Сами по себе эти члены в пограничном слое могут быть измерены. Точность таких измерений составляет обычно 10—20%.

3.6. КОЭФФИЦИЕНТ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ

Обычно для измерений применяются датчики с размерами много меньшими, чем характерные масштабы турбулентных вихрей. Следовательно, для получения средней величины требуются довольно длительные интервалы времени. Для выделения крупномасштабной составляющей и подавления высокочастотного шума требуется тщательная фильтрация.

Представляется разумным предположить, что по аналогии с молекулярной кинетической теорией, положенной в основу вычисления напряжений в ламинарном потоке, турбулентные напряжения можно задавать в виде

$$\overline{v_i v_j} = K \frac{\partial V_i}{\partial x_i}, \tag{3.19}$$

где K — турбулентная (или вихревая) вязкость. Такая аналогия применяется довольно успешно, в особенности при решении уравнений Экмана. Тем не менее различие между размерами турбулентных возмущений и масштабами пограничного слоя недостаточно велико для существования надежно выделяемых средних величин. Проблема состоит в том, что кинетическая теория молекулярного обмена не вполне применима к турбулентному перемешиванию. Во многих случаях перемещающийся вихрь не только теряет индивидуальность, но даже существует весьма непродолжительное время. Именно это обстоятельство затрудняет построение подходящей во всех отношениях модели турбулентного обмена импульсом. Обсуждаемая ниже (п. 5.4) концепция пути смешения имеет ограниченный успех. С практической же точки зрения использование турбулентной вязкости в некоторых моделях дает качественно правильные результаты.

3.7. ВЕРХНИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Верхняя граница пограничного слоя определяется как высота, на которой сила трения становится пренебрежимо малой. На этой высоте достигается геострофический баланс (или, если учитывать инерционные члены, появляющиеся из-за кривизны линий тока, градиентный баланс). Именно на этой высоте требуются данные наблюдений. Поскольку геострофическое равновесие обеспечивает верхнее граничное условие, природа такого движения представляет для нас интерес.

Если в дополнение к принятым ранее допущениям предположить горизонтальную однородность, уравнения (3.9) обращаются в следующие:

$$u_t+(\overline{uw})_z=-\frac{P_x}{\bar\rho}+fV,$$
$$v_t+(\overline{vw})_z=-\frac{P_y}{\bar\rho}-fU,$$
$$w_t=-\frac{P_z}{\bar\rho}-g,$$
$$\bar\rho w_z=0, \tag{3.20}$$

где черта сверху означает осреднение по горизонтали.

Так как на границе $w=0$, из уравнения неразрывности следует, что $w=0$ во всем пограничном слое, что приводит к гидростатическому соотношению.

В стационарном случае уравнения (3.20) сводятся к формулам:

$$\frac{P_z}{\bar\rho}=-g,$$
$$\frac{P_x}{\bar\rho}=fV,$$
$$\frac{P_y}{\bar\rho}=-fU. \tag{3.21}$$

Эти уравнения относятся к внешнему потоку, в котором горизонтальная скорость значительно превышает вертикальную и изменяется в горизонтальном направлении гораздо в меньшей степени, чем в вертикальном. Влияние температурных вариаций плотности в свободном потоке в среднем мало, так что эффектами конвекции и влиянием сил плавучести в нем вполне можно пренебречь. Поскольку геострофический ветер обеспечивает верхнее граничное условие, он должен быть включен в модель пограничного слоя. Количество движения свободного потока создает вынуждающую силу, некоторая доля которой (величина ее зависит от состояния жидкости и свойств поверхности) переносится вниз. При геострофическом балансе компоненты скорости определяются непосредственно по данным о градиентах давления. Если пространственное разрешение невелико (порядка 1000 км), порождаемые кривизной линий тока центробежные силы пренебрежимо малы, однако в случае значительной кривизны изобар и сильного ветра желательно вводить соответствующую поправку.

Наши выводы проиллюстрируем оценками характерных значений отдельных членов в уравнении движения, принимая масштаб длины $L=10^6$ м, скорости $V=15$ м/с, времени $T=10^5$ с, параметр Кориолиса $f_{45°}=10^{-4}$ с:

$$\underset{0{,}15\times10^{-3}\ \text{м/с}^2}{\mathbf{V}_t} + \underset{0{,}22\times10^{-3}\ \text{м/с}^2}{\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{V}} + \underset{1{,}5\times10^{-3}\ \text{м/с}^2}{f(\mathbf{k}\wedge\mathbf{V})} + \underset{1{,}5\times10^{-3}\ \text{м/с}^2}{\nabla P/\rho} = 0.$$

Для первых двух членов оценки являются максимальными, поэтому для синоптических процессов существенны лишь два последних члена (геострофический баланс).

Несмотря на то что эти оценки подтверждают реальность геострофического баланса, существуют области с крупномасштабной дивергенцией поля скорости, создаваемой кривизной изобар и нестационарностью. В этих областях рассчитанная скорость ветра должна корректироваться с учетом этих, вообще говоря, довольно малых поправок.

При наличии существенных горизонтальных градиентов температуры поля атмосферного давления на поверхности и на уровне геострофического ветра могут заметно различаться. Этот эффект также должен быть учтен в расчетах.

3.8. ТЕРМИЧЕСКИЙ ВЕТЕР

Известно, что горизонтальные градиенты давления, а следовательно, и геострофический ветер могут изменяться с высотой.

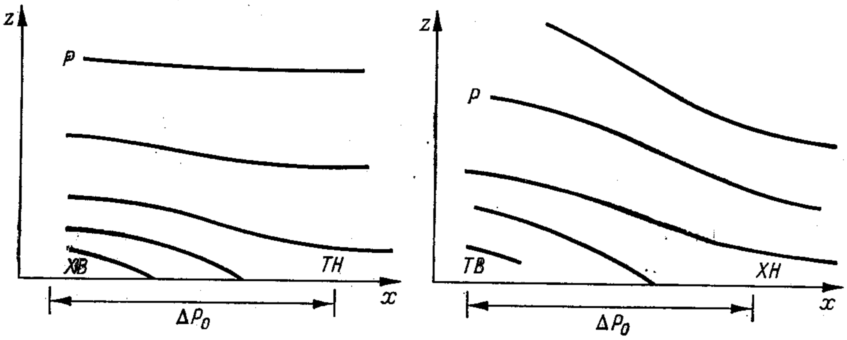


Рис. 3.2. Два примера разреза поля давления при одном и том же горизонтальном его распределении у поверхности.

ХВ — холод, высокое P; ТН — тепло, низкое P; ТВ — тепло, высокое P, ХН — холод, низкое P.

На рис. 3.2 представлены изолинии давления (для наглядности градиенты сильно увеличены) для двух ситуаций с ярко выраженной бароклинностью. Как видно, при одинаковом поле поверхностного давления его распределение на некоторой высоте может быть совершенно различным. Уравнения для чисто термических вариаций геострофического ветра могут быть получены непосредственно из соотношения геострофического баланса путем его дифференцирования с учетом уравнения статики:

$$(U_g)_z = \frac{U_g}{T} T_z - \frac{g}{fT} T_y,$$

$$(V_g)_z = \frac{V_g}{T} T_z + \frac{g}{fT} T_x. \tag{3.22}$$

В первых частях этих уравнений первые члены значительно меньше, чем вторые. При небольшой протяженности по вертикали (например, для экмановского слоя) горизонтальный градиент температуры можно считать неизменным по высоте, поэтому геострофический поток изменяется по линейному закону. В случае больших температурных градиентов верхней границей пограничного слоя считается высота, где ветер начинает возрастать линейно. Бароклинные изменения скорости по вертикали нужно учитывать при решении уравнений для самого пограничного слоя.

3.9. УРАВНЕНИЯ ЭКМАНОВСКОГО СЛОЯ

Решение для пограничного слоя получается, если в уравнениях движения сохранить члены, описывающие перенос импульса по вертикали. Аналитическое решение такой задачи становится возможным, если предположить, что скорость может быть представлена в виде суммы средней и пульсационной (с нулевым средним значением) составляющих. Рассмотрим стационарный вариант уравнений (3.20):

$$(\overline{uw})_z = -\frac{p_x}{\rho} + fV = f(V - V_g),$$

$$(\overline{vw})_z = -\frac{p_y}{\rho} - fU = -f(U - U_g),$$

$$g = -\frac{p_z}{\rho}, \tag{3.23}$$

где U_g и V_g введены вместо членов, содержащих градиенты давления. Гидростатический баланс выполняется во всем пограничном слое. Используя аналогию с обычной вязкостью, введем коэффициент турбулентности K:

$$\overline{uw} \equiv KU_z \equiv \tau^x, \quad \overline{vw} \equiv KV_z \equiv \tau^y, \tag{3.24}$$

$$(\tau^x)_z = (KU_z)_z = f(V - V_g),$$

$$(\tau^y)_z = (KV_z)_z = -f(U - U_g). \tag{3.25}$$

Если для определения коэффициента K не используются какие-либо дополнительные теоретические схемы или экспериментальные данные, обычно предполагается, что он является просто константой. Тогда (3.25) в точности совпадают с уравнениями Экмана. Такой переход к уравнениям Экмана несколько отличается от прямого постулирования турбулентной вязкости, предполагавшегося при обсуждении рис. 2.1. При этом не возникает новых требований к определению континуума, так как предполагается, что средняя производная может быть определена без существенных изменений локального значения переноса импульса $\overline{uw}$. Это означает, что существует единственное горизонтально осредненное значение $\overline{uw}$ на масштабах, достаточно малых для того, чтобы можно было определить вертикальную производную от U. Поскольку рассматривается случай бесконечной горизонтальной протяженности, вертикальные размеры вихрей, порождающих поток импульса, должны быть много меньше, чем масштаб длины, на котором имеет место характерное изменение средних значений. Тем не менее оказывается, что, если размеры элементов турбулентности достигают даже нескольких десятков метров, профиль производной от средней скорости все еще остается сравнительно плавным. Если в уравнениях, используемых для определения K, вертикальные градиенты скорости обращаются в ноль, в профиле средней скорости могут появиться особенности, что часто ограничивает применимость таких подходов.

3.10. РЕЗЮМЕ

Первичной задачей анализа планетарного пограничного слоя является вывод уравнений для средних и пульсационных величин. Классическая теория возмущений является традиционным приближением теории устойчивости, используемым также для линеаризации уравнений в случае возмущений конечной амплитуды. Поскольку диапазон масштабов в геофизическом пограничном слое очень велик, одни и те же составляющие в различных задачах могут считаться либо средними величинами, либо возмущениями.

Анализ нелинейных членов сводится, по существу, к их оценке, осреднению и построению схемы параметризации в уравнениях для крупномасштабных компонент (в которых нелинейные члены уже опускаются). В конечном итоге линейность достигается скорее в результате неопределенности. Этот фактор присутствует во всех используемых нами уравнениях и законах сохранения. Любая фигурирующая в этих уравнениях постоянная является эмпирической средней, полученной на основе статистического представления мелкомасштабных движений (исключение представляет разве что скорость света). Некоторые из этих констант, очевидно, определяются более надежно, чем другие.

Таким образом, в геофизике каждый раз приходится выбирать подходящий масштаб для каждой конкретной задачи. Процессы, происходящие на меньших масштабах, параметризуются. В идеальном случае этот подход порождает иерархию задач, оканчивающуюся моделью общей циркуляции атмосферы. К сожалению, однако, даже для пограничного слоя удовлетворительные решения еще в настоящее время не найдены. Ответы на некоторые из поставленных вопросов могут быть даны с помощью численного решения полных нелинейных уравнений. Это будет возможно, когда мощность электронных машин возрастет настолько, что область интегрирования будет большой, а пространственный шаг — достаточно малым для надежной параметризации подсеточных эффектов (не менее надежной, чем, скажем, параметризация молекулярной вязкости).

Другой классический подход заключается в прямом измерении необходимых констант (величина которых может зависеть от рассматриваемых масштабов). Если обнаруженные связи оказываются устойчивыми, их именуют часто законами. На практике этот метод имеет ряд ограничений, создаваемых большими масштабами геофизических явлений.

В качестве альтернативы можно, используя интуицию и различные аналогии, привести уравнения, выведенные в этой главе, к форме, допускающей аналогичное решение. Применимость сделанных предположений может быть проверена измерением характеристик потока, предсказываемых моделью. Именно такой подход и разрабатывается в последующих главах.

4. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ГЕОСТРОФИЧЕСКОГО ЭКМАНОВСКОГО СЛОЯ

4.1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных задач теории пограничного слоя является установление связи между приземными трением и синоптическими параметрами, главным из которых является вектор геострофического ветра. Горизонтальный градиент давления в среднем сравнительно мало изменяется с высотой, поэтому геострофический ветер достаточно надежно определяется по полю приземного давления (см. главу 3). Для того чтобы в явной форме установить связь между геострофическим течением и потоком в пограничном слое (в частности, в приземном слое), представляется полезным вновь рассмотреть решение для всего интервала $0 \leqslant z \leqslant \infty$.

Поскольку в нашей задаче отсутствует априорный вертикальный масштаб, мы выбираем произвольный масштаб длины L, с помощью которого строится единственный безразмерный параметр $E = K/fL^2$. Если L выбрать большим, скажем, равным вертикальному масштабу всей атмосферы $p/\rho q \approx 20$ км, тогда при $E \to 0$ в пределе получаются геострофические соотношения. При $L = (K/f)^{\frac{1}{2}} \approx 200$ м $E \simeq 1$, что приводит к уравнениям Экмана. Эти уравнения обладают свойством автомодельности по δ. Наконец, при очень малых L, скажем $L \sim z_0$ (z_0 — параметр шероховатости поверхности), получаем уравнение приземного слоя атмосферы.

В такой ситуации, когда при разных значениях свободного параметра имеют место различные решения, целесообразно разделение полного решения на внешнее, внутреннее (и промежуточное). Полное решение для планетарного пограничного слоя является не слишком ярким примером этого, очень эффективного математического приема, поскольку в данном случае внешнее (геострофическое) и внутреннее (приземное) решения представляют собой лишь сингулярные возмущения промежуточных уравнений Экмана, имеющие более высокий порядок. Здесь вырожденные решения и условия их сращивания тривиальны. Тем не менее прием, состоящий в отыскании найденных независимо решений и их последующем склеивании, может быть положен в основу многих теоретических исследований проблем пограничного слоя.

4.2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГЕОСТРОФИЧЕСКОГО ЭКМАНОВСКОГО СЛОЯ

Рассмотрим уравнения (3.23), заменив в них U_g и V_g соответствующими градиентами давления:

$$(1/\rho)\hat{P}_x - f\hat{V} - K\hat{U}_{zz} - K_z\hat{U}_z = 0,$$

$$(1/\rho)\hat{P}_y + f\hat{U} - K\hat{V}_{zz} - K_z\hat{V}_z = 0,$$

$$\hat{P}_z/\rho = -g. \tag{4.1}$$

Приведем (4.1) к безразмерному виду, используя произвольный масштаб длины L, среднего коэффициента турбулентности $\overline{K}$, скорости V_0, плотности ρ_0, перепада давления ΔP_0 (поскольку в уравнения входит только градиент P). В дальнейшем все переменные, кроме специально оговариваемых, будут считаться безразмерными. Размерные величины обозначаются значком $\wedge$. Получим

$$(1/\rho)\,\mathrm{Ro}\,DP_x - V - EKU_{zz} - EK_zU_z = 0,$$

$$(1/\rho)\,\mathrm{Ro}\,DP_y + U - EKV_{zz} - EK_zV_z = 0, \tag{4.2}$$

где

$$D = \Delta P_0/\rho_0 V_0^2,\ \mathrm{Ro} = V_0/fL,\ \mathrm{Re} = V_0 L/\overline{K},\ E = \mathrm{Ro}/\mathrm{Re} = \overline{K}/fL^2.$$

Параметр D здесь фигурирует лишь при членах, содержащих давление, поэтому его можно исключить введением $P' = \mathrm{Ro}\,DP$ и опуская в дальнейшем штрихи. Это, кстати, отражает тот факт, что градиент давления может быть принят в качестве свободного параметра. В синоптическом масштабе произведение $\mathrm{Ro}\,D$ для атмосферы и океана имеют порядок 1, исключая окрестность особой точки на экваторе.

Уравнения (4.2) могут быть объединены в одно

$$V_{zzzz} + 2JV_{zzz} + (J^2 + 2J_z)\,V_{zz} + (J_{zz} + JJ_z)\,V_z + V = 0, \tag{4.3}$$

где

$$J \equiv K_z/K, \quad L = \sqrt{K/f} \ \text{и} \ P = P(y).$$

Это уравнение может быть решено численными методами, если определена функция $K(z)$. Для некоторых $K(z)$ возможно точное решение.

4.3. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ГЕОСТРОФИЧЕСКОГО ЭКМАНОВСКОГО СЛОЯ

Рассмотрим теперь непрерывное решение над бесконечной плоскостью для случая $K=\mathrm{const}$. После преобразования членов, содержащих давление, имеем:

$$V+EU_{zz}-P_x/\rho=0,$$
$$U-EV_{zz}+P_y/\rho=0,$$
$$g_0+P_z/\rho=0, \tag{4.4}$$

где граничные условия будут $V(\infty)=\sin\alpha$, $U(\infty)=\cos\alpha$, $V(0)=0$, $U(0)=U_h$ (U_h — произвольная скорость на нижней границе). При $E\to 0$ из (4.4) получаются геострофические уравнения, соответствующие предельному случаю невязкой жидкости. Эта предельная форма уравнений применима к области, достаточно удаленной от поверхности, где эффекты вязкости пренебрежимо малы ($K\to 0$, $\mathrm{Re}\to\infty$):

$$V-P_x/\rho=0,$$
$$U+P_y/\rho=0,$$
$$-P_z/\rho=g_0, \tag{4.5}$$

где

$$g_0=\frac{L}{V_0^2}g.$$

«Решение» уравнений $V_a=P_x/\rho$, $U=-P_y/\rho$ удовлетворяет внешним граничным условиям, если

$$V(\infty)=P_x(\infty)/\rho(\infty)=\sin\alpha,$$
$$U(\infty)=-P_y(\infty)/\rho(\infty)=\cos\alpha.$$

Нижние граничные условия $V(0)=0$ и $U(0)=U_h$ выполняются лишь при соответствующем выборе $P(x, y, 0)$. Для случая геострофического баланса возможно удовлетворение лишь одного граничного условия. Таким образом, если решение удовлетворяет верхнему граничному условию, оно в общем случае не удовлетворяет нижнему (можно удовлетворить нижним граничным условиям, но этот случай неприменим к внешнему решению). Эти трудности согласования граничных условий естественны, поскольку в результате предельного перехода мы понижаем порядок уравнений на 4, вследствие чего решение не подходит для всей области.

Это затруднение можно обойти добавлением внутреннего решения, удовлетворяющего внутренним граничным условиям. При этом внешнее решение сохраняется. Таким образом, $U=U_i+U_a$,

$V=V_i+V_a$. Подставляя в (4.4) и используя граничные условия, получаем:

$$
\begin{aligned}
&V_i+E(U_i)_{zz}=0,\\
&U_i-E(V_i)_{zz}=0
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

с граничными условиями:

$$
U_i(0)=U(0)-U_a(0)=\frac{P_y(x,\ y,\ 0)}{\rho(x,\ y,\ 0)}+U_h\equiv\frac{(P_0)_y}{\rho_0}+U_h,
$$

$$
V_i(0)=V(0)-V_a(0)=\frac{P_x(x,\ y,0)}{\rho(x,\ y,\ 0)}=\frac{(P_0)_x}{\rho_0},
$$

$$
U_i(\infty)=V_i(\infty)=0.
$$

Положим в (4.6) $\zeta=E^{-\frac{1}{2}}z$, тогда:

$$
\begin{aligned}
&V_i+(U_i)_{\zeta\zeta}=0,\\
&U_i+(V_i)_{\zeta\zeta}=0,\\
&U_i(0)=-\frac{(P_0)_y}{\rho_0}+U_h,\\
&V_i(0)=-\frac{(P_0)_x}{\rho_0},\\
&U_i(\infty)=V_i(\infty)=0.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Решение (4.7) имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&U_i(\zeta)=\exp(-\zeta)(C_1\cos\zeta-C_2\sin\zeta)+\exp(\zeta)(C_3\cos\zeta-C_4\sin\zeta),\\
&V_i(\zeta)=\exp(-\zeta)(C_1\sin\zeta+C_2\cos\zeta)+\exp(\zeta)(C_3\sin\zeta+C_4\cos\zeta).
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

Используем граничные условия:

$$
\begin{aligned}
&C_3=C_4=0,\quad C_1=\{(P_0)_y/\rho_0\}+U_h,\quad C_2=-(P_0)_x/\rho_0,\\
&U_i(\zeta)=\exp(-\zeta)/\rho_0\left[\{(P_0)_y+U_h\}\cos\zeta+(P_0)_x\sin\zeta\right],\\
&V_i(\zeta)=\exp(-\zeta)/\rho_0\left[\{(P_0)_y+U_h\}\sin\zeta-(P_0)_x\cos\zeta\right].
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

В результате получаем полное безразмерное решение, применимое во всей области $0\leqslant z\leqslant\infty$:

$$
\begin{aligned}
&U(z)=U_i+U_a=\frac{-P_y}{\rho_0}+\\
&+\frac{\exp(-z)\left[\{(P_0)_y+\rho_0U_h\}\cos z+(P_0)_x\sin z\right]}{\rho_0},\\
&V(z)=V_i+V_a=\frac{P_x}{\rho_0}+\\
&+\frac{\exp(-z)\left[\{(P_0)_y+\rho_0U_h\}\sin z-(P_0)_x\cos z\right]}{\rho_0},
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

где в качестве масштаба длины выбрано

$$L \equiv \delta \equiv (2K/f)^{\frac{1}{2}},$$

а масштабом скорости является $V_0 = G$ (геострофическая скорость).

Заметим, что для получения внутреннего решения z-координата растягивается делением на δ — естественный масштабирующий множитель во внутренней области.

Решение (4.10) удовлетворяет граничным условиям:

$$U(\infty) = -\frac{P_y(x, y, \infty)}{\rho(x, y, \infty)} = \cos\alpha = U_g,$$

$$V(\infty) = \frac{P_x(x, y, \infty)}{\rho(x, y, \infty)} = \sin\alpha = V_g,$$

$$U(0) = -\frac{P_y(x, y, 0)}{\rho(x, y, 0)} + \frac{(P_0)_y}{\rho_0} + U_h = U_h,$$

$$V(0) = \frac{P_x(x, y, 0)}{\rho(x, y, 0)} - \frac{(P_0)_x}{\rho_0} = 0.$$

Выбор этих граничных условий подразумевает введение системы координат с осью x, параллельной вектору скорости у поверхности U_h. При этом α является углом между геострофическим и приземным ветром, отсчитываемым в направлении по часовой стрелке.

Приведенное решение выражается через заданное поле градиентов давления. Для аналитического представления необходимо задать вид этого поля. Простейшим и не лишенным реалистичности распределением может быть случай постоянного градиента давления. В данном случае градиент давления на верхней границе определяет геострофический поток

$$U_g = -P_y/\rho_0 = \cos\alpha, \quad V_g = P_x/\rho_0 = -\sin\alpha. \tag{4.11}$$

Решение для экмановского слоя имеет вид

$$U(z) = \cos\alpha - \exp(-z)\,\{\cos(\alpha + z) - U_h\cos z\} -$$

$$- V(z) = \sin\alpha - \exp(-z)\,\{\sin(\alpha + z) - U_h \sin z\}. \tag{4.12}$$

Представим его также в размерном виде

$$\widehat{U} = G\left[\cos\alpha - \exp\left(\frac{-\widehat{z}}{\delta}\right)\left\{\cos\left(\alpha + \frac{\widehat{z}}{\delta}\right) - \frac{U_h}{G}\cos\frac{\widehat{z}}{\delta}\right\}\right] \tag{4.13}$$

(аналогичное выражение для $\widehat{V}$-компоненты опускаем).

4.4. РЕЗЮМЕ

Решение для пограничного слоя получено в виде суммы спирали Экмана и геострофического потока. Компоненты термиче-

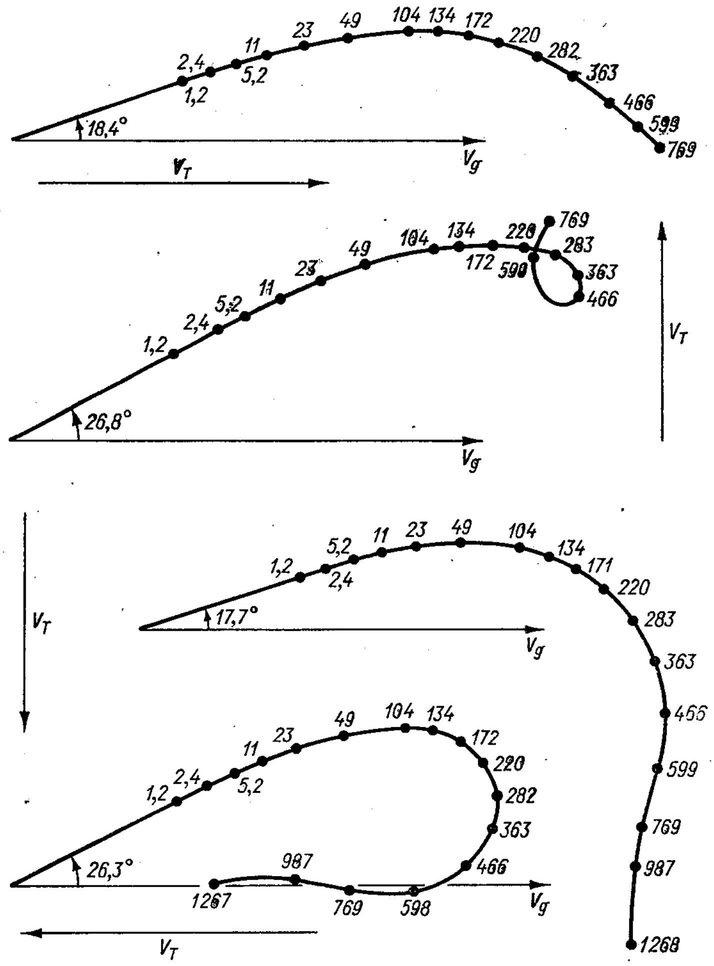


Рис. 4.1. Годографы скорости в экмановском пограничном слое при наличии термического ветра (V_T), $V_g=V_{g_0}+Cz$ [28].

Цифры — высота в метрах.

ского ветра могут существенно искажать спираль. Действие сильного термического ветра на спираль Экмана иллюстрируется на рис. 4.1.

Тип искажения зависит от ориентации горизонтального градиента температуры (см. уравнение (3.22)). Реальное распределение ветра может быть суперпозицией экмановской спирали и сложного потока синоптического масштаба, включающего градиентный или изаллобарический ветер. Обычно эти компоненты невелики, поэтому по данным о температуре и давлении их обнаружить трудно. Потому, принимая геострофический ветер в качестве верхнего граничного условия, мы практически не утрачиваем общности результатов.

5. ПРИЗЕМНЫЙ СЛОЙ

5.1. ВВЕДЕНИЕ

Необходимость анализа приземного слоя вызывается главным образом недостатком наблюдений, подтверждающих существование спирали Экмана. Предсказываемый теорией угол α между геострофическим ветром и приземным трением $\tau_0 = K\partial U(0)/\partial z$ составляет 45°. Наблюдения показывают, что в среднем он скорее ближе к 30°, но может значительно варьироваться. Если скорость на нижней границе не обращается в нуль, а принимает некоторое постоянное значение, угол α и напряжение трения соответственно уменьшаются. Для того чтобы установить конкретное значение $U(0) = U_h$, необходимо рассмотреть приземный слой.

Другой путь согласования внешнего решения с наблюдениями заключается в анализе проблемы устойчивости и возникновения вторичного течения, рассмотренных в последующих главах.

В геофизических пограничных слоях основная масса наблюдений относится к нижней их части. Предполагается всегда, что движение стационарно и градиент давления не меняется с высотой. Наблюдения показывают, что изменения силы трения и скорости с высотой намного превосходят горизонтальные вариации. Действительно, в случае бесконечной в горизонтальном направлении поверхности мы вообще не располагаем каким-либо характерным горизонтальным масштабом. Член, описывающий кориолисову силу, масштабируется множителем $1/\mathrm{Ro} = fL/V_0$. Можно ожидать, что при большом горизонтальном протяжении сила Кориолиса может быть существенна. На практике, однако, отношение горизонтальных вариаций к вертикальным настолько мало, что кориолисовыми эффектами можно полностью пренебрегать.

Рассмотрим установившееся движение, при котором сумма всех сил равна нулю. Единственной горизонтальной силой является градиент трения. Следовательно, в таком слое сила трения не меняется по высоте. Так как сила трения эквивалентна потоку импульса, этот слой называется слоем постоянного потока. Как показано в [65], это свойство хорошо подтверждается наблюдениями.

Согласно экспериментам Ньютона для параллельных потоков, градиент скорости пропорционален силе трения, деленной на турбулентную вязкость, которая сама по себе может изменяться в вертикальном направлении. Если турбулентная вязкость растет пропорционально высоте, интегрирование дает логарифмический закон распределения. Этот результат хорошо согласуется с наблюдениями в нижней части пограничного слоя.

5.2. УРАВНЕНИЯ ПРИЗЕМНОГО СЛОЯ

Рассмотренные выше допущения могут быть формализованы. Исходя из полного уравнения

$$\dot{\hat{\mathbf{U}}}+2\boldsymbol{\Omega}\wedge\hat{\mathbf{U}}-(1/\rho)\,\nabla\cdot\hat{\boldsymbol{\tau}}+\nabla\hat{p}/\rho=0$$

и предполагая, что движение стационарно и все характеристики, кроме τ, не изменяются с высотой, получаем:

$$f\left(\hat{V}-V_g\right)+\frac{d}{d\hat{z}}\left(\hat{\tau}^x/\rho\right)=0,$$

$$f\left(\hat{U}-U_g\right)-\frac{d}{d\hat{z}}\left(\hat{\tau}^y/\rho\right)=0,$$

$$\hat{\mathbf{V}}(0)=0,$$

$$\hat{\tau}(0)\equiv\hat{\tau}_0, \tag{5.1}$$

где $(1/\rho f)\,\nabla_H P=(-U_g,\ V_g)$.

Приводя к безразмерному виду с помощью произвольных масштабов V_0, H и τ_0 и ориентируя ось x в направлении силы трения, получаем

$$V-V_g+E'\frac{d}{dz}(\tau)=0, \tag{5.2}$$

где E' — одна из модификаций числа Экмана $E'=\tau_0/(\rho f V_0 H)$. Для $H\to 0$ (или $f\to 0$) $E'\to\infty$ и уравнение (5.2) дает

$$d\tau/dz=0$$

при граничном условии $\tau(0)=1$ (или $\hat{\tau}\equiv\hat{\tau}_0$).

Слой постоянного потока существует в области, где E' велико. Исходя из концепции турбулентной вязкости, τ можно трактовать как скорость переноса импульса вихревой вязкостью,

$$\bar{\tau}/\rho=-\overline{\hat{u}\hat{w}}=K\hat{U}_{\hat{z}}. \tag{5.3}$$

Таким образом, уравнение для $\hat{U}$ в слое постоянного трения принимает вид

$$\frac{d}{d\hat{z}}\left(\hat{\tau}/\rho\right)=\frac{d}{d\hat{z}}\left(K\frac{d\hat{U}}{d\hat{z}}\right)=K\frac{d^2\hat{U}}{d\hat{z}^2}+\frac{dK}{d\hat{z}}\cdot\frac{d\hat{U}}{d\hat{z}}=0. \tag{5.4}$$

5.3. РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ АНАЛИЗА РАЗМЕРНОСТИ

Прежде всего решение может быть получено из уравнения (5.3):

$$K\,d\hat{U}/d\hat{z}=\hat{\tau}_0/\rho_0,\quad \hat{U}(0)=0,\quad \frac{d\hat{U}(0)}{d\hat{z}}=\frac{\tau_0}{\rho_0 K_0}. \tag{5.5}$$

Введя масштабы скорости и длины:

$$v_0=(\tau_0/\rho)^{\frac{1}{2}}\equiv u_* \tag{5.6}$$

и

$$H=\left(\rho_0 K_0^2/\tau_0\right)^{\frac{1}{2}}\equiv z_0 \tag{5.7}$$

получим безразмерное уравнение

$$dU/dz=\tau_0 z_0/u_* K_0=u_* z_0/K_0. \tag{5.8}$$

Если ввести $K_0=ku_*z_0z$, где k — произвольная константа (называемая постоянной Кармана), уравнение уже не будет содержать безразмерные параметры и допускает автомодельное решение

$$U=\frac{1}{k}\ln z,\ \text{или}\ \frac{\hat{U}}{u_*}=\frac{1}{k}\ln\frac{\hat{z}}{z_0}.$$

Для того чтобы удовлетворить нижнему граничному условию $U(0)=0$, положим

$$\frac{K}{ku_*z_0}=z+1, \tag{5.9}$$

откуда следует

$$U=\frac{1}{k}\ln(z+1)\ \text{или}\ \frac{\hat{U}}{u_*}=\frac{1}{k}\ln\left(\frac{\hat{z}+z_0}{z_0}\right). \tag{5.10}$$

Константы k и z_0 должны определяться экспериментально. Из приведенных выше формул следует, между прочим, что $K_0(0)=ku_*z_0$. Физическое объяснение конечности K_0 не вполне ясно. Тем не менее анализ предсказывает линейный рост K с высотой, что согласуется с концепцией пути смешения.

Уравнение для приземного слоя может быть получено из (5.2) подстановкой в него (5.3), что дает в итоге уравнение (4.2). Переходя в последнем к пределу при $E\to\infty$, что соответствует случаю очень сильной вязкости или малым значениям H, получаем

$$\frac{d^2U}{dz^2}+\frac{1}{K}\cdot\frac{dK}{dz}\cdot\frac{dU}{dz}=0,$$

$$U(0)=0. \tag{5.11}$$

Проблема заключается в формулировке второго граничного условия для этого уравнения. Предел $U(\infty)$ здесь не подходит, так как при выводе (5.11) предполагается, что вертикальный масштаб имеет по крайней мере конечную величину. Если выбрать $H=z_0$, $V_0=u_*$ и $K=K_0$ в качестве второго условия, получим

$$\frac{dU}{dz}=\frac{u_* z_0}{K_0}\equiv \mathrm{Re}_0.$$

С выпадением членов, соответствующих силе Кориолиса, уравнения для компонент скорости становятся независимыми. Рассмотрим системы координат с осью x, параллельной компоненте $U(z)=\mathbf{U}$. Тогда (5.11) может быть дано в общем виде

$$\frac{d^2U}{dz^2}+P(z)\frac{dU}{dz}=0.$$

Для произвольной функции $P(z)$ решение не существует, но для некоторых частных случаев оно может быть построено. В частности, если $K=K_0 z$,

$$\frac{d^2U}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dU}{dz}=0. \qquad (5.12)$$

Решение этого уравнения дает

$$U=\ln z+C_1.$$

Заметим, что оно не удовлетворяет нижнему граничному условию $U(0)=0$. Это является следствием того, что $K(0)=0$ и сила трения на поверхности обращаются в нуль. Для получения решения, удовлетворяющего нижнему граничному условию, положим

$$K=K_0(z+1),$$

что дает

$$U=B\ln(z+1)+C_1.$$

С учетом граничных условий полное решение может быть представлено в виде

$$U=\mathrm{Re}_0\ln(z+1).$$

В соответствии с уравнением (5.10) $\mathrm{Re}_0=1/k$.

5.4. ПУТЬ СМЕШЕНИЯ

Для пояснения связи коэффициента турбулентного перемешивания с физическими свойствами потока можно воспользоваться теорией пути смешения, устанавливающей аналогию между молекулярным и турбулентным обменом. По сравнению с молекулярным механизм турбулентного обмена очень сложен, однако оба эти механизма проявляются как следствие статических законов. Если обмен происходит на сравнительно небольшом расстоянии l, приращение импульса может быть описано путем разложения поля скорости в ряд Тейлора:

$$U(z)=U(z+l)+l\,dU/dz,$$

$$U(z)=U(z-l)+l\,dU/dz,$$

или

$$U(z)=\frac{U(z-l)+U(z+l)}{2}+\frac{l+l}{2}\,dU/dz,$$

$$U(z)=\overline{U}(z)+l\,dU/dz=\overline{U}+U'.$$

В случае изотропной турбулентности на масштабах порядка размеров вихрей $u\approx w$, поэтому рейнольдсово напряжение может быть вычислено следующим образом:

$$\tau/\rho=\overline{uw}\approx l^2(dU/dz)^2=K\,(dU/dz) \tag{5.13}$$

и

$$K=l^2\,dU/dz. \tag{5.14}$$

Создается впечатление, что наши выкладки не дали никакого результата, так как вместо одной неизвестной величины — K, мы ввели другую — l. Тем не менее, если существуют какие-либо универсальные зависимости для параметра l, полученные соотношения могут дать достаточно важный результат. Предположим, что

$$l=k(\hat{z}+z_0)/z_0,$$

тогда решение будет совпадать с полученными выше (5.11) и (5.12). Заметим, что, дифференцируя выражение $u_*=l dU/dz$, можно получить:

$$\frac{dl}{dz}\frac{dU}{dz}+l\frac{d^2U}{dz^2}=0,$$

или

$$l=-\frac{dl}{dz}\frac{dU/dz}{d^2U/dz^2}. \tag{5.15}$$

Мы получили формулу Кармана для масштаба длины. Таким образом, величина $dl/dz=-k/z_0$ является мерой изменения масштаба длины с высотой.

Величина k (которая также может быть названа l_0 — путем перемешивания у поверхности) согласно данным ряда экспериментов равна 0,4. Она носит название постоянной Кармана. Недавние измерения в атмосфере [41] дали величину $k=0{,}35$, что вызывает некоторые сомнения в ее универсальности.

5.5. МЕТОДЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПРИЗЕМНОГО СЛОЯ

5.5.1. *Аэродинамический метод*

В том случае, когда целью анализа пограничного слоя является расчет вектора трения у поверхности, представляется целесообразным применение интегрального метода. Этот метод, эффективно используемый в аэродинамике, так и называется — аэродинамический метод. В применении к геофизическим задачам аэродинамический метод вследствие очень больших различий масштабов значительно модифицируется. При обтекании потоком модели, крыла или фюзеляжа самолета в аэродинамической трубе толщина пограничного слоя обычно очень мала, и скорость свободного потока надежно определяется на основе теории невязкого потенциального потока. Испытываемое моделью лобовое сопротивление измеряется либо непосредственно, либо локально динамометрическим методом с помощью подвижных плат. Естественно пытаться связать силу трения со скоростью свободного потока. С помощью анализа размерности нетрудно установить, что безразмерное напряжение трения является просто константой

$$\frac{\tau}{\rho \widehat{U}^2} \equiv C_D. \tag{5.16}$$

На основании динамического подобия по числу Рейнольдса можно утверждать, что C_D будет иметь одно и то же течение при одинаковых Re.

Применяя этот метод к геофизическому течению, мы сталкиваемся с рядом проблем. Во-первых, непосредственное измерение трения на поверхности в геофизическом пограничном слое осуществить довольно трудно. Некоторые эксперименты такого рода были проведены на травянистом поле [32], но чисто практические ограничения размеров плат затрудняют получение надежных средних значений. Этот метод может быть использован над сравнительно гладкими поверхностями, вблизи которых турбулентный перенос замещается молекулярным. Такие поверхности называются аэродинамически гладкими [118].

Проблема измерения сопротивления может также решаться путем прямых измерений компонент вихревого потока импульса. Поскольку в приземном слое потоки приблизительно постоянны по высоте, член $\overline{uw}$ может быть измерен, например, акустическим анемометром. Поверхностное трение непосредственно связано с членом, описывающим перенос импульса.

Все это касается лишь точечных измерений в планетарном пограничном слое. При мезомасштабном моделировании необходимо осреднение по очень большому числу пунктов на площади в несколько сотен квадратных километров. Для случая океана, имеющего сравнительно однородную поверхность, требование к числу пунктов измерений может быть значительно снижено. Здесь, однако, возникают трудности другого рода, нейтрализующие указанное преимущество. Наиболее эффективно рассмотренный метод может быть проверен над арктическими льдами [21].

Остается еще трудная задача определения скорости свободного потока. Выше мы обсуждали проблему определения вектора геострофического ветра. Однако вместо этой величины на практике чаще всего используется скорость ветра на некоторой произвольной высоте, скажем, на верхней границе приземного слоя. Подобие по числу Рейнольдса позволяет использовать данные, полученные в аэродинамической трубе, однако влияние силы Кориолиса и сильные различия величин турбулентной вязкости практически исключают такую возможность.

Тем не менее существует довольно много оценок C_D. Некоторые из них приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ C_D

Поверхность	C_D	Ссылка	Год
Лед, покрытый снегом	0,0014	[125]	1964
Шероховатый лед	0,0026	[21]	1971
Вода	0,0006—0,0018	[111]	1972

Аэродинамические методы подробно описаны в [97]. Общее обсуждение этой проблемы см. в работе [50].

Заметим, что наряду с проблемой определения потока импульса многие исследователи занимались измерениями потоков тепла, влаги и некоторых загрязняющих примесей. Любой из этих потоков может быть представлен в виде произведения соответствующего коэффициента диффузии и локального градиента или интегрального коэффициента обмена, помноженного на перепад субстанции,

$$F = -K_s \nabla S = -h_s (S - S_0).$$

В частности, много внимания уделяется потокам тепла и скрытого тепла:

$$F_h = c_p C_H U (\theta_0 - \theta),$$
$$F_e = L C_E U (q_0 - q),$$

где C_H и C_E — коэффициенты, аналогичные C_D, L — теплота парообразования, q — влажность. Коэффициенты C_H и C_E должны определяться экспериментально.

5.5.2. *Профильный метод*

Данные о профиле скорости в приземном слое могут быть использованы для проверки применимости соображений подобия и логарифмического закона, а также для определения величин k, z_0 и силы трения. Для этого значения скорости наносятся на график, по одной оси которого отложена высота в логарифмической шкале (рис. 5.1).

Логарифмический слой соответствует интервалу, где данные хорошо аппроксимируются прямой линией. Экстраполирование этой зависимости до оси абсцисс дает параметр шероховатости. Верхняя граница логарифмического слоя редко бывает выражена четко. Если имеется целый набор таких графиков для дан-

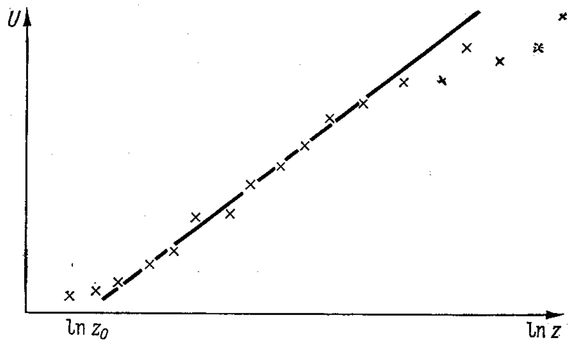


Рис. 5.1. Пример распределения скорости ветра в приземном слое.

ного пункта, уравнение (5.10) указывает, что при одинаковых значениях u_* линии будут совпадать. Наклон этих линий позволяет определить величину k. Типичные значения z_0, найденные профильным методом, приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ z_0

Поверхность	z_0
Вода	0,01 см
Гладкий снег	0,1 см
Трава	1,0 см
Прерии	40 см
Лес	1 м
Холмы, город	1—5 м

5.5.3. *Применение профильного метода при наличии стратификации*

Главной задачей микрометеорологии является определение потоков по данным о средних профилях. За последние двадцать пять лет в этом направлении было предпринято немало усилий. Хотя попытки получить теоретическое решение не увенчались успехом, оказалось возможным получить полуэмпирические соотношения на основе теории подобия. Полное описание этой проблемы дано в [41], где используются наблюдения, проведенные в Канзасе Отделом пограничного слоя Кембриджской научно-исследовательской лаборатории военно-воздушных сил.

Учет плавучести в уравнениях при анализе размерности дает дополнительный параметр. Представляется, что характерный масштаб длины должен быть связан с высотой потенциального равновесия частиц, всплывающих от поверхностного источника тепла. Если на некоторой высоте наблюдается положительный градиент потенциальной температуры (например, инверсия обычной температуры), этот слой создает препятствие для всплывающих частиц и формирует верхнюю границу области гидростатического равновесия. Так как частицы всплывают или опускаются в зависимости от того, какую они имеют потенциальную температуру, можно ожидать, что искомый масштаб длины пропорционален некоторой комбинации параметров, включающих температуру, ускорение силы тяжести и градиент потенциальной температуры. Из уравнений (3.9)—(3.13) видно, что за счет членов, описывающих эффекты плавучести, добавляются параметры g'/T и T_z+g''/c_p, а за счет граничных условий — T_0 или ΔT_0.

Один безразмерный параметр вполне очевиден:

$$\frac{(g/T_0)\,(\Delta T_0/H)}{(V_0/H)^2}.$$

Этот параметр называется интегральным числом Ричардсона. Ясно, что существуют и другие безразмерные параметры, так как мы еще располагаем градиентами скорости и температуры. В отношении того, какой из них является более подходящим, существуют различные точки зрения (см. [24, 97, 9, 34]), однако вопрос этот еще не ясен. Можно получить характерный масштаб длины, физический смысл которого более сложен. Тем не менее этот масштаб вслед за Обуховым [9] очень эффективно применялся при анализе приземного слоя. Этот масштаб длины определяется как высота, на которой продукция энергии силами плавучести сравнима с продукцией за счет сдвига скорости.

Уравнение эволюции кинетической энергии турбулентности может быть получено из уравнения (3.10) скалярным умножением на u_i и суммированием

$$\frac{\partial\,(u^2+v^2+w^2)/2}{\partial t}=\frac{g}{T}\,\overline{wT}-\overline{uw}\,\frac{\partial U}{\partial z}-$$

$$-\frac{\overline{\partial w\,[p+(u^2+v^2+w^2)/2]}}{\partial z}-\Phi, \qquad (5.17)$$

где система координат ориентирована по вектору скорости $U=(U,\,0,\,0)$ в приземном слое, а Φ описывает вязкую диссипацию. Первый член в правой части описывает работу, производимую силами плавучести. Этот член положителен при неустойчивой стратификации (при потоке тепла, направленном вверх) и отрицателен — при устойчивой. Второй член соответствует продукции за счет сдвига скорости, т. е. скорости перехода энергии среднего течения в пульсационную энергию. Третий член представляет собой комбинацию дивергенции энергии турбулентности и работы, выполняемой пульсациями давления. Этот член не генерирует и не гасит турбулентность. Интеграл от этого члена по всему пограничному слою обращается в нуль. Поскольку здесь рассматривается приземный слой, сила Кориолиса опускается. В уравнениях для всего слоя она может учитываться. Так как сила Кориолиса направлена по нормали к скорости, она способствует лишь перераспределению энергии между компонентами.

Исходя из уравнения (5.17) отношение генерации энергии силами плавучести к сдвиговой генерации равно

$$\mathrm{Ri}_f = -\frac{g}{T}\frac{\overline{wT}}{\overline{uw}\,(dU/dz)}. \tag{5.18}$$

Эта величина называется динамическим (потоковым) числом Ричардсона. Если в (5.18) подставить следующие соотношения, справедливые для приземного слоя:

$$u_*^2 = \overline{uw}$$

и

$$\frac{dU}{dz} = \frac{u_*}{k(z+z_0)},$$

получим

$$\zeta \equiv -\frac{g}{T}\frac{\overline{wT}\,k(z+z_0)}{u_*^3}. \tag{5.19}$$

Это выражение определяет безразмерную высоту для приземного слоя. Параметром с размерностью длины здесь является масштаб Обухова

$$L = -\frac{\overline{T}}{g}\frac{u_*^3}{\overline{wT}k}. \tag{5.20}$$

Этот масштаб длины очень удобен, так как в него входят только постоянные по высоте параметры.

Теория подобия предсказывает, что после приведения градиентов скорости и температуры к безразмерному виду эмпирические данные должны концентрироваться вокруг одной кривой, соответствующей функции аргумента ζ. Таким образом,

$$\varphi_m = \frac{k\hat{z}}{u_*}\frac{d\hat{U}}{d\hat{z}} = f_1(\zeta),$$

$$\varphi_h = \frac{\hat{z}}{\theta_*}\frac{d\hat{\theta}}{d\hat{z}} = f_2(\zeta), \tag{5.21}$$

где

$$\theta_* = \frac{\overline{wT}}{u_*}.$$

Данные, полученные в [41], аппроксимируются следующими выражениями:

$$\varphi_m=(1-15\zeta)^{-1/4} \text{ для } \zeta<0.$$
$$\varphi_m=1+4{,}7\zeta \qquad \text{для } \zeta>0. \qquad (5.22)$$

и

$$\varphi_h=0{,}74(1-9\zeta)^{-1/2} \text{ для } \zeta<0,$$
$$\varphi_h=0{,}74+4{,}7\zeta \qquad \text{для } \zeta>0. \qquad (5.23)$$

При $\zeta=0$, $\varphi_m=1$, что дает чисто логарифмический профиль.

Уравнения (5.22) и (5.23) интегрировались Польсоном [96], получившим следующие аналитические выражения для скорости ветра и температуры:

$$\frac{\hat{u}}{u_*}=\frac{1}{k}\left(\ln\frac{\hat{z}}{z_0}-\Psi_1\right) \text{ для } \zeta<0, \qquad (5.24)$$

где

$$\Psi_1=2\ln\left\{\frac{1}{2}(1+x)\right\}+\ln\left\{\frac{1}{2}(1+x^2)\right\}-2\,\mathrm{tg}^{-1}x+\pi/2,$$
$$x=(1-15\zeta)^{1/4}=\varphi^{-1};$$
$$\frac{\hat{u}}{u_*}=\frac{1}{k}\left(\ln\frac{\hat{z}}{z_0}+4{,}7\zeta\right) \text{ для } \zeta>0; \qquad (5.25)$$
$$\frac{\hat{\theta}-\hat{\theta}_0}{\theta_*}=0{,}74\left(\ln\frac{\hat{z}}{z_0}-\Psi_2\right) \text{ для } \zeta<0, \qquad (5.26)$$

где

$$\Psi_2=\ln\left\{\frac{1}{2}(1+y)\right\}$$

и

$$y=(1-9\zeta)^{1/2}=0{,}74\varphi_h^{-1};$$
$$\frac{\hat{\theta}-\theta_0}{\theta_*}=0{,}74\ln\frac{\hat{z}}{z_0}+4{,}7\zeta \text{ для } \zeta>0, \qquad (5.27)$$

а θ_0 — температура, полученная экстраполяцией до уровня $z=0$. Она не обязательно совпадает с температурой поверхности.

5.6. РЕЗЮМЕ

Из уравнений следует, что в неадиабатическом случае профили зависят от двух параметров с размерностью длины: z_0 и L. Две ситуации будут подобны, если для них отношения z_0/L совпадают [40].

Уравнения (5.25), (5.26), (5.27) могут использоваться для расчета потоков по данным о профилях. Величины u_*, θ_*, L

могут быть найдены аппроксимацией профилей $\overline{U}$ и $\overline{\theta}$ методом наименьших квадратов. В результате по формулам $F_n = -c_p \rho u_* \theta_*$ и $\tau = \rho u_*^2$ рассчитываются поток тепла и напряжение трения.

Ясно, что изложенный выше метод анализа приземного слоя в значительной степени носит эмпирический характер. Этот метод является хорошей основой для интерпретации данных, полученных над однородной поверхностью, такой, как поверхность океана. Из-за небольшой вертикальной протяженности приземного слоя требования к точности используемых приборов оказываются довольно большими. Представляется, что точность определения всех параметров довольно сильно зависит от стратификации, структуры поверхности и однородности поля турбулентности. В работе [83] использован численный метод, изложенный в [64] для исследования влияния стратификации. Даже если параметризация приземного слоя в целом достаточно хороша, часто оказывается необходимым учитывать поверхностное трение, создаваемое отдельными крупными элементами [20]. За исключением океанов, приложение выводов локальной теории приземного слоя к большим областям весьма ограничено.

6. СРАЩИВАНИЕ ЭКМАНОВСКОГО ГЕОСТРОФИЧЕСКОГО СЛОЯ С ПРИЗЕМНЫМ

6.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Ниже будет показано, что идея склеивания развивалась в разных направлениях, начиная с работы Тейлора, в которой в экмановском решении использовалось нижнее граничное условие. В модели [2] проводилось склеивание решения, выраженного в функциях Бесселя с логарифмическим профилем в приземном слое. Юдин и Швец [11] к этой модели присоединили еще экмановское решение. Логарифмически линейный профиль, используемый в атмосферных задачах, был заимствован из классической гидродинамики. Он был установлен Людвигом и Тиллманом [86] в результате экспериментального определения измерения профилей при различных градиентах давления.

Естественным шагом в нашем дальнейшем изложении будет склеивание решений, полученных в главах 4 и 5. Склеивание может быть сделано приравниванием скорости и ее производной на некоторой высоте. Априорных свидетельств того, что это может быть сделано успешно, разумеется, дать нельзя. В действительности, этот прием дает хорошие результаты. Формальный метод сращивания решений заимствован из теории сингулярных возмущений.

6.2. УСЛОВИЯ СРАЩИВАНИЯ

Если в качестве внешнего рассматривается геострофический экмановский слой, а внутреннего — приземный, необходимо, чтобы существовала область, в которой оба решения перекрываются. Эти два решения зависят от существенно различных масштабов длины, δ и z_0. Мы уже видели, что решением уравнения (4.1) для больших значений масштаба длины является геострофическое соотношение. Если вертикальная координата растянута с помощью масштаба δ, члены высшего порядка сохраняются в пределе при $E \to \infty$. В этом случае надо считать, что найдено полное решение. Оно удовлетворяло бы исходным уравнениям во всей области $0 \leqslant z \leqslant \infty$, если бы не то обстоятельство, что интересующая нас область (к тому же наиболее экспериментально изученная) глубоко погружена в экмановский слой. Если вертикальная координата растянута на один или несколько порядков вследствие применения z_0 в качестве масштаба длины, мы получаем решение уравнений приземного слоя. Это решение является сингулярным возмущением и поэтому не может удовлетворить всем граничным условиям. Оно выбрано так, чтобы удовлетворить условию $U(0)=0$, и становится сингулярным при $z/z_0 \to \infty$. Это свойство внутреннего решения исключает возможность сращивания асимптотических разложений в обычном виде. Тем не менее, поскольку имеются два независимых решения (одно из них трехмерное с постоянной вязкостью, а другое — двумерное с вязкостью, возрастающей по линейному закону), удовлетворяющие нижним граничным условиям, существует возможность склеивания асимптотических разложений при переходе к пределу, принадлежащему внутренней области. В частности, мы можем склеивать разложение по координате ($z \to 0$) с разложением по параметру ($1/E \to 0$). Можно также ограничить внешнее решение некоторой конечной высотой h, на которой $U=U(h)=U_h$ и $V=0$, и попытаться склеить асимптотическую форму этого решения для $z/\delta \to h/\delta \simeq 0$ с решением для приземного слоя, полученным из предельного вида уравнений ($z_i/\delta \to 0$).

Имея в виду решение для приземного слоя, внешнее решение строится так, чтобы оно удовлетворяло произвольному нижнему граничному условию, $U(0)=U_h$ при $z/\delta \to 0$. Вторым условием сращивания будет непрерывность напряжения, или U'. Объединение обоих решений даст нам возможность установить связь между крипномасштабным внешним решением, зависящим от $\mathbf{V}_g$ и δ, и решением для приземного слоя, зависящим от u_* и z_0.

Внешнее решение в размерной форме имеет вид (обозначаем $|\mathbf{V}_g| \equiv G$):

$$\frac{\hat{U}(z)}{G} = \cos\alpha - \exp\left(-\frac{\hat{z}}{\delta}\right)\left\{\cos\left(\alpha + \frac{\hat{z}}{\delta}\right) - \frac{U_h}{G}\cos\frac{\hat{z}}{\delta}\right\} -$$

$$-\frac{\hat{V}(z)}{G} = \sin\alpha - \exp\left(-\frac{\hat{z}}{\delta}\right)\left\{\sin\left(\alpha + \frac{\hat{z}}{\delta}\right) - \frac{U_h}{G}\sin\frac{\hat{z}}{\delta}\right\}, \tag{6.1}$$

а производные от него:

$$\frac{\hat{U}'(z)}{G} = \frac{\exp(-\hat{z}/\delta)}{\delta}\left\{\cos\left(\alpha + \frac{\hat{z}}{\delta}\right) - \frac{U_h}{G}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\cos\hat{z}}{\cos\delta} + \sin\frac{\hat{z}}{\delta}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{\hat{z}}{\delta}\right)\right\} - \frac{\hat{V}'(z)}{G} =$$

$$= \frac{\exp(-\hat{z}/\delta)}{\delta}\left\{\sin\left(\alpha + \frac{\hat{z}}{\delta}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\hat{z}}{\delta}\right) +\right.$$

$$\left.+\frac{U_h}{G}\left(\cos\frac{\hat{z}}{\delta} - \sin\frac{\hat{z}}{\delta}\right)\right\}. \tag{6.2}$$

Нижним граничным условием будет непрерывность скорости $U=U_h$ и напряжения kU_h' и условие параллельности потоку в приземном слое, т. е.

$$U'(0)=A_1U(0), \quad V'(0)=A_2V(0), \tag{6.3}$$

где A_1, A_2 — произвольные константы. Второе равенство (6.3) дает

$$U_h=(\cos\alpha-\sin\alpha)\,G=U_g+V_g. \tag{6.4}$$

Внешнее решение может быть записано в виде (для его обозначения используется индекс a):

$$U_a(\hat{z}/\delta)/G=\cos\alpha-\exp(-\hat{z}/\delta)(\cos\hat{z}/\delta-\sin\hat{z}/\delta)\sin\alpha,$$

$$-V_a(\hat{z}/\delta)/G=\sin\alpha-\exp(-\hat{z}/\delta)(\cos\hat{z}/\delta+\sin\hat{z}/\delta)\sin\alpha. \tag{6.5}$$

Если сделать преобразование в систему координат, связанную с геострофическим ветром, решение (6.5) будет аналогично решению Тейлора [123]. В такой же системе координат решение для внутреннего приземного слоя имеет вид (обозначаем его индексом b)

$$U_b\left(\frac{z}{z_b}\right)=\ln\left(\frac{z}{z_b}+1\right), \quad V_b=0. \tag{6.6}$$

Здесь z_b — произвольный масштаб длины для приземного слоя. В качестве такового может быть выбран и z_0, хотя неопределенность, которая здесь имеется, позволяет избрать и любой другой масштаб.

Разложение U_a при малых значениях $z/\delta\equiv\zeta$ дает

$$\begin{aligned}\frac{U_a(\zeta)}{G}&=\cos\alpha-\sin\alpha(\cos\zeta-\sin\zeta)(1-\zeta+\zeta^2/2+\ldots)=\\&=\cos\alpha-\sin\alpha(1-2\zeta+\zeta^2-\ldots)=\\&=\cos\alpha-\sin\alpha+2\sin\alpha(\zeta-\zeta^2/2+\ldots)=\\&=\cos\alpha-\sin\alpha+2\sin\alpha\ln(\zeta+1)+O(\zeta^3).\end{aligned} \tag{6.7}$$

Точно так же

$$\begin{aligned}V_a(\zeta)&=\sin\alpha-\sin\alpha(\cos\zeta+\sin\zeta)(1-\zeta+\zeta^2/2-\ldots)=\\&=\sin\alpha-\sin\alpha(1-\zeta^2+\ldots)=0+O(\zeta^2).\end{aligned} \tag{6.8}$$

Для нас желательно, чтобы в некоторой области, где решения перекрываются, выполнялось условие

$$\lim_{\frac{z}{\delta}\to 0}\hat{U}_a(\hat{z}/\delta)=\hat{U}_b(\hat{z}/z_0).$$

6.2.1. *Склеивание решений*

Внутреннее решение уже имеет форму, пригодную для склеивания с асимптотическим видом внешнего решения:

$$\frac{\hat{U}_a}{G} \simeq (\cos\alpha - \sin\alpha) + 2\sin\alpha \ln\left(\frac{\hat{z}}{\delta} + 1\right),$$

$$\frac{\hat{U}_b}{G} = \left(\frac{\hat{u}_i}{u_*}\right)\left(\frac{u_*}{G}\right) = \frac{u_*}{Gk} \ln\left(\frac{\hat{z}}{z_b} + 1\right). \tag{6.9}$$

Полагая, что эти два выражения равны на некотором уровне $z = h$, имеем:

$$\cos\alpha - \sin\alpha + 2\sin\alpha \ln\left(\frac{h}{\delta} + 1\right) = \frac{u_*}{Gk} \ln\left(\frac{h}{z_b} + 1\right),$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha + 2\sin\alpha \ln\left(\frac{h}{\delta} + 1\right) = \frac{u_*}{Gk} \ln\left(\frac{h}{z_b} + 1\right)$$

для малых h/δ.

Это дает выражение для высоты склейки

$$\frac{h}{z_b} = \exp\left\{\frac{Gk}{u_*}(\cos\alpha - \sin\alpha)\right\} - 1. \tag{6.10}$$

Для любых значений u_*/G, δ, α и z_b полное решение, справедливое также и для приземного слоя, имеет вид:

$$\hat{U}(z) = G \begin{cases} \cos\alpha - \exp(-\hat{z}/\delta)\,[\cos(\alpha + \hat{z}/\delta) - \\ -(\cos\alpha - \sin\alpha)\cos\hat{z}/\delta] & \text{при } \hat{z} > h, \\ u_*/kG \ln(\hat{z}/z_b + 1) & \text{при } \hat{z} \leqslant h, \end{cases}$$

$$\hat{V}(z) = -G \begin{cases} \sin\alpha - \exp(-\hat{z}/\delta)\,[\sin(\alpha + \hat{z}/\delta) - \\ -(\cos\alpha - \sin\alpha)\sin\hat{z}/\delta] & \text{при } \hat{z} > h, \\ 0 & \text{при } \hat{z} \leqslant h. \end{cases} \tag{6.11}$$

Очень сильная чувствительность h/z_b к изменению k, u_*/G исключает какую-либо возможность практического определения этого отношения по экспериментальным данным.

Склеивание производных дает

$$\frac{Gk}{u_*}\sin\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{1 + \delta/h}{1 + z_b/h} \simeq \frac{\delta/h}{2} \equiv B. \tag{6.12}$$

Это соотношение будет и дальше фигурировать в решениях. Из измерений u_*/G и α следует, что $B \approx 5$. Это соответствует, как и ожидалось, что $\delta/h \approx 10$. Известно, что B может сильно меняться со стратификацией.

6.2.2. *Сращивание решений*

Следуя обычной процедуре сращивания решений [126], выразим внешнее решение во внутренних переменных и перейдем к соответствующему внутреннему пределу. Этот предел определяется из уравнений при $E\to\infty$. Внутренней переменной является $\xi=z/z_b$, и поэтому $E=\xi/\zeta=\delta/z_b$. Таким образом, при фиксированной ξ и $E\to\infty$ получаем

$$U_a=\cos\alpha-\sin\alpha+2\sin\alpha\left[\xi/E-\frac{1}{2}(\xi/E)^2+\ldots\right]-V_a=$$
$$=\sin\alpha-\sin\alpha\,[1-(\xi/E)^2+\ldots]. \tag{6.13}$$

Точно так же найдем внутреннее решение, записанное в терминах внешней переменной:

$$U_b=\frac{1}{k}\left[E\zeta/1+E\zeta+\frac{1}{2}(E\zeta/1+E\zeta)^2+\ldots\right],$$
$$V_b=0, \tag{6.14}$$

где E фиксировано, а $\zeta\to 0$.

Если мы просто приравняем члены нулевого порядка в (6.13) и (6.14), получится

$$\cos\alpha-\sin\alpha\equiv U_h=0,$$

что дает $\alpha=45°$. Решение нулевого порядка есть просто спираль Экмана, продолженная до самой поверхности.

Однако, если мы применяем метод асимптотического сращивания, член n-го порядка внешнего разложения может быть положен равным m-му ($m=n+1$) члену внутреннего разложения (вследствие того, что они по-разному масштабированы). Для $n=0$, $m=1$

$$\frac{Gk}{u_*}(\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{E\zeta}{1+E\zeta}=\frac{1}{1+h/z_b}. \tag{6.15}$$

Для $n=1$, $m=2$

$$\frac{Gk}{u_*}\sin\alpha=\frac{E}{4}\frac{h/z_b}{(1+h/z_b)^2}\equiv B, \tag{6.16}$$

где $E=\delta/z_b$ и h/z_b могут меняться в зависимости от стратификации и шероховатости. Очевидно, что $V_a\simeq 0$ вплоть до второго порядка в слое сращивания.

При $z_b=z_0\sim 10^{-3}$ м, E равно 10^5 и внутреннее решение оказывается применимым лишь к очень тонкому слою порядка $O(10z_0)$. В этом случае $E\sim 10$, $\zeta\sim 0{,}1$ и $B\sim 1$. Ниже этой высоты главным становится решение для приземного слоя с переменным K. Внешнее решение, неприменимое вблизи поверхности (вследствие предположения, что K является константой) сращивается с внутренним вблизи верхней границы приземного слоя. Требования гладкости сращивания определяют связь между граничными условиями, в которых фигурируют две характерные скорости — u_* и G. Необычной особенностью планетарного пограничного слоя является множественность профилей

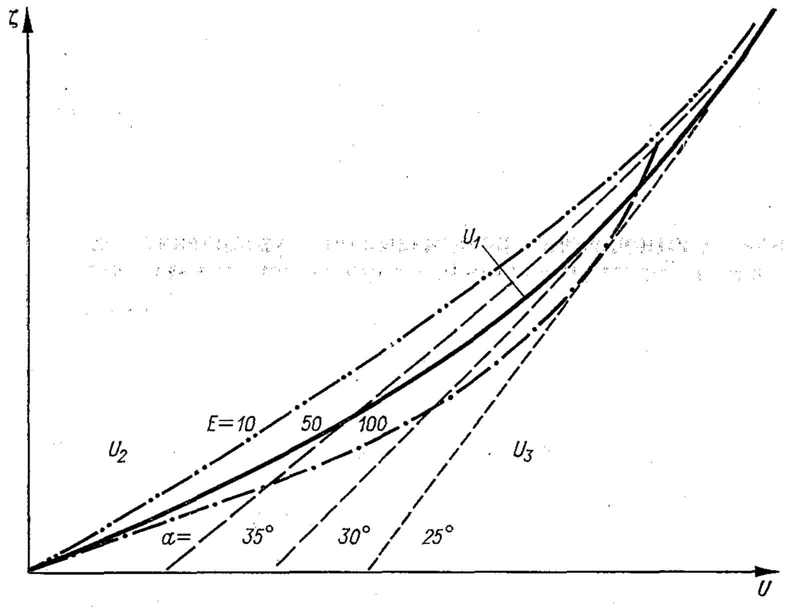


Рис. 6.1. Схематический вид профиля скорости U_1, полученного в результате гладкого сращивания внутреннего (логарифмического) профиля U_2 и внешнего (экмановского) U_3.

скорости, полученных из трехмерного внешнего решения, с которыми надо сращивать двумерный логарифмический профиль. Эти профили меняются в зависимости от угла α, который является функцией высоты сращивания или параметра E. Пример такого составного профиля дан на рис. 6.1.

6.3. ЗАКОНЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Нашей задачей является получение выражения для расчета поверхностного трения по каким-либо легко определяемым параметрам. Мы вывели два не очень сильно различающихся соотношения с помощью простой склейки и сращивания. Из склеенного решения при $\alpha = 45°$ приземный слой исчезает, геострофическое экмановское решение простирается до поверхности. В этом случае напряжение зависит только от f, G и δ. Величина напряжения, составляющая 2—3 дин/см^2 для типичных условий, представляется вполне реальной, однако угол 45° между геострофическим ветром и приземным трением — явление нечастое. Для того чтобы использовать подобные соотношения для расчета трения, необходимо экмановское решение подвергнуть некоторой модификации. Один из методов, позволяющий подправить рассчитываемый угол и саму величину трения, основан на учете вторичного течения в экмановском слое, динамического или конвективного происхождения (см. главу 10). Этот метод, в котором также рассматриваются двухслойные решения, дает связь между внешними и внутренними граничными условиями. Эта связь включает отношение характерных масштабов для двух областей и безразмерную высоту сращивания h/δ.

Если сращивать скорости с учетом первых порядков, получим

$$\frac{Gk}{u_*}\left[\sin\alpha + C_1(\cos\alpha - \sin\alpha)\right] = C_2, \tag{6.17}$$

где приняты следующие обозначения:

$$C_1 = \frac{Ez_b}{2h} = \frac{\delta}{2h},$$

$$C_2 = \frac{E}{2} = \frac{\delta}{2z_b}. \tag{6.18}$$

Затем, что для $z_b = z_0$ число E очень велико. Тем не менее, как указывалось выше, при рассмотрении z_b, исходящем из обычного логарифмического решения для приземного слоя, маленькие значения z_0 связываются с K_0 — остаточным значением турбулентной вязкости на поверхности. Это значение z_b может быть на несколько порядков меньше, чем характерная высота приземного слоя. Более подходящим характерным K является его значение на верхней границе приземного слоя, где K оказывается равным константе K_E, использованной во внешнем решении.

Такая оценка дает

$$z_b = \left[\frac{K_E}{u_*}\right] = \frac{\delta^2}{2u_*/f} \simeq 10 \text{ м}.$$

Для стратифицированной жидкости естественно положить $z_b \simeq \simeq |L| \sim 10$—100 м (масштаб Обухова). Для характерных значений δ/h и δ/z_b получим, что $C_1 \simeq 0{,}5$—5, $C_2 \simeq 10$—100 м.

На практике отношения, входящие в (6.18), не могут быть измерены. Эти константы скорее удобнее определять по данным об u_*/G и α. Так как от этих констант зависит наклон и положение точки пересечения семейства кривых с малой кривизной на плоскости $(u_*/G, \alpha)$, подходящими для этих целей могут оказаться любые данные, обладающие трендом. К сожалению, данных по атмосфере немного и они обладают большим разбросом. Тем не менее предварительный анализ данных Кларка

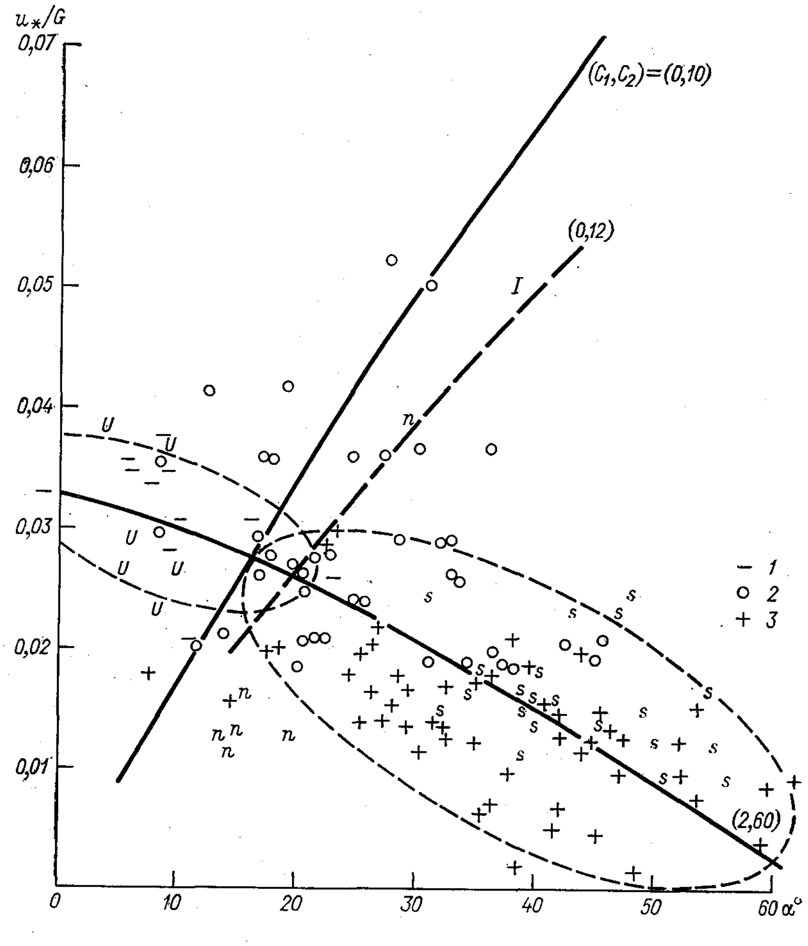


Рис. 6.2. Зависимость между геострофическим коэффициентом u_*/G *и углом между приземным и геострофическим ветрами* $\alpha°$ *по данным экспериментов* WANGARA *и* AIDJEX.

Wangara: *1* — неустойчивая стратификация, *2* — нейтральная стратификация, *3* — устойчивая стратификация; Aidjex: *U* — неустойчивая стратификация, *n* — нейтральная стратификация, *s* — устойчивая стратификация. *I* — нейтральная стратификация по [27]. Эллипсы, характеризующие ошибку, охватывают 90% точек отдельно для устойчивой и неустойчивой стратификации. Ошибки α составляют 5—10°. Стратификация изменяется от слабой до весьма сильной. У кривых приведены значения коэффициентов C_1 и C_2 [формулы (6.17)].

и неопубликованных измерений над арктическим паковым льдом некоторые ориентировочные значения C_1 и C_2 все же дает. При этом оказывается, что трение изменяется в зависимости от стратификации и параметра шероховатости.

При нейтральной стратификации имеется большой разброс точек, исключая данные [27]. На рис. 6.2 при изменении шероховатости точки имеют тенденцию смещаться вверх и вправо, в сторону более низких значений $E=\delta/z_i$ (т. е. больших z_i). Применение постоянного значения $C_1=\delta/h$ дает удивительно хорошие результаты и в случае наличия стратификации. По-видимому, толщины обоих слоев проявляют тенденцию роста или уменьшения одновременно. Эффекты стратификации (если она не слишком сильная) имеют доминирующее значение для поддержания постоянства δ/h. Тем не менее при стратификации, близкой к нейтральной, даже небольшие изменения шероховатости заметно сказываются на величине C_1. Оба используемых набора данных отражают систематическое изменение шероховатости в течение периода наблюдений.

Хотя большой разброс на графиках препятствует количественным оценкам, обнаруженные тенденции находятся за пределами ошибок. Можно ожидать, что C_1 и C_2 меняются в зависимости от стратификации, однако эту закономерность установить трудно. Для надежного установления связи между α и стратификацией требуются гораздо более точные данные, позволяющие надежно рассчитывать параметр стратификации.

6.4. РЕЗЮМЕ

Несмотря на то что изложенная выше попытка параметризации мезомасштабного пограничного слоя не увенчалась успехом, можно утверждать, что мы несколько продвинулись вперед и получили некоторые результаты, полезные для дальнейшего. Концепция двухслойного пограничного слоя позволила включить в модель планетарного пограничного слоя приземный слой. Поскольку в этом решении предполагается линейный рост вязкости у поверхности, оно достаточно хорошо предсказывает известный из экспериментов профиль скорости вблизи поверхности.

Критическим параметром, выделяющим два предельных решения уравнений Навье—Стокса, является отношение E масштабов длины для внешнего и внутреннего слоев. Трехмерное внешнее решение, представляющее собой бесконечное семейство кривых, сращивается с двумерным решением для внутреннего пограничного слоя. Вид профиля зависит от E — высоты, на которой производится сращивание, или от угла поворота ветра во внешнем решении. Основная трудность в приложении результатов здесь возникает из-за того, что физический смысл параметра E не вполне ясен, а при выборе масштабов имеет место неоднозначность. Все масштабы могут быть связаны с турбулентной вязкостью, но ни один не может быть надежно определен для атмосферы или океана. Кларк и Хесс [45] из анализа данных нашли, что вместо высоты инверсии или масштаба длины Монина—Обухова предпочтительнее использовать масштаб u_*/f.

Недостатком рассмотренного метода является то обстоятельство, что используемая во внешнем решении спираль Экмана в чистом виде не существует. Вторичные эффекты, которые обсуждаются в главе 10, могут быть несущественны из-за неточности определения констант. При наличии вторичных потоков представляется возможным склеивать результаты численных решений со стационарной спиралью Экмана. В то же время общие методы теории подобия, рассматриваемые в следующей главе, позволяют получить результат, не прибегая к явному решению.

7. ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ ДЛЯ ПЛАНЕТАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

7.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Большинство методов анализа планетарного пограничного слоя в той или иной форме опирается на концепцию турбулентной вязкости. Именно из-за этого допущения каждый метод подвергался сомнению, хотя в некоторых теориях концепции турбулентной вязкости отводится меньшая роль, чем в других. Эта идея, однако, принесла успех Экману, когда он в 1905 г. ввел в уравнения, представляющие из себя баланс силы трения и силы Кориолиса, коэффициент вязкости. Его модель дала объяснение отклонению силы трения от силы ветра, обнаруженному по дрейфу арктического льда. Идея о переменном коэффициенте вязкости уже рассматривалась в его первой работе. Экман нашел, что при использовании вязкости, пропорциональной градиенту скорости, годограф изменяется незначительно.

Когда встает необходимость количественного описания структуры пограничного слоя или расчета поверхностного трения, оказывается, что ни одна из моделей не подходит во всех отношениях для самых общих оценок. Так, экмановская спираль, полученная с постоянным K, предсказывает разумные значения поверхностного трения $KU_z(0)$. Тем не менее предсказываемый теорией угол α, равный 45°, почти никогда не наблюдается. В спирали Тейлора, учитывающей существование приземного слоя через нижние граничные условия, угол меняется пропорционально некоторому параметру, зависящему от характеристик приземного слоя. Следовательно, в окончательных уравнениях, кроме внешних параметров V_g и K, должны учитываться h (или $U(h)$) и шероховатость поверхности z_0. Ввиду того что вся концепция турбулентной вязкости весьма спорна, представляется полезным изучение возможности получения решения без использования этого способа замыкания. Поскольку система уравнений все же не замкнута и вследствие этого имеется некоторая неопределенность в граничных условиях, наш анализ будет опираться на методы теории размерности и подобия. Естественно, что в данном случае вместо явных граничных условий, используемых для замкнутой системы уравнений, нам придется вводить в рассмотрение ряда неизвестных констант.

7.2. АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТИ И ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОДОБИЕ

Для применения принципов динамического подобия необходимо по возможности понизить порядок уравнений для того, чтобы выделить минимальное число существенных переменных.

Несмотря на то что мы отказываемся от использования каких-либо конкретных связей между напряжением и деформацией (градиентом скорости), предположим, что между ними существует определенная (пусть неизвестная) зависимость, учитывающая, что вертикальные градиенты намного меньше горизонтальных. Тогда для условий стационарности и горизонтальной однородности уравнения принимают вид

$$f\left(\widehat{V}-V_g\right)+(\widehat{\tau}/\rho)_{\widehat{z}}=-f\left(\widehat{U}-U_g\right)+(\widehat{\tau}/\rho)_{\widehat{z}}=0. \qquad (7.1)$$

Предполагая, что на верхней границе, где силы трения пренебрежимо малы, задано V_g, имеем два уравнения для пяти неизвестных, что, разумеется, полностью исключает единственность решения. Тем не менее уравнения содержат информацию (например, о том, что ρ может фигурировать только в комбинации с τ), так что они не могут рассматриваться по отдельности. Поскольку порядок уравнений неизвестен, мы ничего не можем сказать о количестве и типе граничных условий.

Приводя к безразмерному виду с помощью произвольных масштабов H, V_0 и $\overset{*}{\tau_0}$, где $\tau/\rho=\tau^*$, получаем

$$(U-U_g)-E\tau_z^*=0, \qquad E=\frac{\tau_0^*}{HV_0f}. \qquad (7.2)$$

Поскольку уравнения движения сходны, рассмотрим только одно из них. Заметим, что при переходе к разным пределам по E, уравнения описывают различные режимы.

Характерный масштаб	Предел	Предельные уравнения
Шероховатость поверхности	∞	$\tau_z^*=0$
Масштаб высоты атмосферы	0	$U=U_g$
Масштаб Экмана	1	$\widetilde{U}-U_g-\tau_z^*=0$

В области больших τ_0^* или маленьких H (или V_0, или f) имеем

$$\tau^*=\text{const}\equiv u_*^2\equiv\overset{*}{\tau_0}.$$

Это соответствует приземному слою, в котором велико u_*/H и трение постоянно по высоте.

Анализ размерности на основе параметров $G=(U_g^2+V_g^2)^{\frac{1}{2}}$, f и u_* дает два масштаба длины (G/f или $\sqrt{\tau_0^*}/f$) и скорости (G и $\sqrt{\tau_0^*}$)[1]. Величина G/f слишком велика для того, чтобы служить масштабом для пограничного слоя. Поэтому в качестве масштаба выбираем $H=\sqrt{\tau_0^*}/f=u_*/f$. В результате получаем

$$(U-U_g)-(u_*/V_0)\,\tau_z^*=0, \tag{7.3}$$

при $u_*/V_0=\begin{cases} >1 \text{ — приземный слой, } V_0\to 0; \\ <1 \text{ — геострофический ветер } V_0\to G; \\ =1 \text{ — промежуточный (экмановский) слой } V_0\simeq u_*. \end{cases}$

Выбирая в качестве масштаба скорости в промежуточном слое u_*, получаем уравнения, не содержащие параметров, что доказывает автомодельность. Из (7.3) следует, что при данном выборе H решение для приземного слоя получить не удается. Поскольку мы знаем, что для приземного слоя характерны малые величины H, необходимо в качестве масштаба здесь выбрать параметр шероховатости z_b.

Поскольку при $H=z_b$ число E велико, в уравнении для этого слоя $(\tau_z^*=0)$ отсутствует G, откуда следует, что единственным масштабом скорости остается u_*.

Мы имеем теперь два уравнения с двумя неизвестными, поэтому можно выписать общий вид решения уравнения (7.1) в областях, характеризуемых различными масштабами длины z_b и u_*/f,

$$U/u_*=f_1(z/z_b), \quad V/u_*=f_2(z/z_b) \text{ — внутренний слой,} \tag{7.4}$$

$$U/u_*=F_1(zf/u_*), \quad V/u_*=F_2(zf/u_*) \text{ — верхний слой.} \tag{7.5}$$

Верхнее решение не годится вблизи поверхности, где отношение масштабов скоростей $V_0/u_*\to 0$. Эта ситуация аналогична случаю, разобранному в п. 6, в котором экмановское решение с постоянным K непригодно вблизи поверхности и

$$\delta/H_0=(\sqrt{2K/f})/H_0\to 0.$$

[1] Корень квадратный из произведения этих величин также является возможным масштабом. Этот, впрочем, неестественный выбор масштабов не приводит к качественным изменениям.

Пока выполняется только единственное граничное условие $V=V_g$ при $z\to\infty$. Требование постоянства напряжения трения вблизи поверхности не налагает никаких условий на скорость вблизи поверхности. Тем не менее это может помочь сформулировать граничное условие для верхнего решения.

Поскольку условие склеивания порождает граничные условия, которым должно удовлетворять каждое внешнее решение, необходимость сращивания диктует вид решения в области склеивания (там, где они должны совпадать).

В рассматриваемом случае мы вообще не располагает явным асимптотическим разложением. Тем не менее мы можем осуществить гладкое сращивание решений, если потребовать, чтобы скорость и ее производная оказались такими, чтобы их можно было срастить в некоторой области вблизи поверхности. Предполагая, что это можно сделать, получаем:

$$\frac{U_g}{u_*}[E_0]+F[\zeta]=f[\xi] \tag{7.6}$$

и

$$F'[\zeta[=E_0 f'[\xi], \tag{7.7}$$

где

$$\zeta=\frac{z}{u_*/f},\quad \xi=z/z_b,\quad E_0=\frac{u_*}{fz_b}.$$

Здесь производная рассчитана для фиксированного E_0. Исходя из метода асимптотического разложения по различным параметрам, примененным в п. 6, где для внешнего решения (записанного во внутренних координатах) был сделан переход к внутреннему пределу (при $1/E_0\to 0$, $\xi=\mathrm{const}$), дифференцируем (7.6) по параметру E_0. Получаем

$$\frac{d\,(U_g/u_*)}{dE_0}-\frac{\xi}{E_0^2}F'\left(\frac{\xi}{E_0}\right)=0. \tag{7.8}$$

Это уравнение описывает вариации внешнего решения при изменении параметра E_0. Этот параметр, являющийся отношением характерных масштабов длины, непосредственно связан с отношением U_g/u_*. Из (7.7) и (7.8) получаем

$$(E_0/\xi)\,d\,(U_g/u_*)/dE_0=f'(\xi), \tag{7.9}$$

что может быть переписано так:

$$E_0 d\,(U_g/u_*)\,/\,dE_0=\xi f'(\xi)=1/k, \tag{7.10}$$

где k — константа, так как левая часть равенства является функцией только E_0, а правая — только ξ. Интегрирование

(7.10) и использование соответствующего уравнения для U дает:

$$\widehat{U}/u_* = (\ln \widehat{z}/z_b)/k, \quad \widehat{U}(0) = 0,$$
$$\widehat{V}/u_* = 0, \quad \widehat{V}(0) = 0 \tag{7.11}$$

и

$$U_g/u_* = (\ln u_*/fz_b - A)/k,$$
$$V_g/u_* = -B/k, \tag{7.12}$$

где A, B и k — произвольные константы интегрирования.

Уравнения (7.11) дают решение в сращенном слое, когда z/z_b очень велико, а $z/(u_*/f)$ мало, откуда следует, что $E_0 = u_*/fz_b$ велико. Величину A можно определить, располагая одновременно измеренными значениями E_0, $U_g = G\cos\alpha$ и u_*. Уравнения (7.12) можно переписать так:

$$\ln\frac{u_*}{G} = A - \ln\frac{G}{fz_b} + \frac{kG}{u_*}(1 - \sin^2\alpha)^{1/2}. \tag{7.13}$$

Это соотношение дает неявную функцию $u_*(G, z_b, \alpha, A, k)$, соответствующую уравнению (6.18), в котором параметрами приземного слоя являются не z_b и A, а h/z и δ/z_b.

Уравнение (7.13) получено ранее способом, отличным от нашего. Оно может быть выведено в результате простого сращивания внешнего экмановского решения с внутренним логарифмическим. Зилитинкевич и др. [4] указывают, что это уравнение было получено Казанским и Мониным [6]. Ими дается сводка значений A и B, следующих из разных теорий. Блэкадар и Теннекес [30] провели дальнейшую формализацию сращивания внешнего и внутреннего решений. Они ссылаются на работы [59, 46], где уравнение (7.13) получено также из соображений подобия. Сводка значений A и B из этих работ дана в табл. 7.1. Приведенные выше результаты Чанади [47] обобщил на случай стратифицированного слоя, увеличив число определяемых эмпирических констант.

Таблица 7.1

ВЕЛИЧИНЫ A И B В ФОРМУЛАХ (7.12)

Источник	B	A
Блинова и Кибель [2] [1]	1,57	2,99
Монин и Обухов [6] [1]	1,5	5,0
Блэкадар [27] [1]	6,7	1,8
Леттау [80] [1]	4,6	0,9
Бобылева и др. (см. [4]) [1]	2,0	2,2
Блэкадар и Теннекес [30]	4,5	0
	5,0	2,0
Гилл [59]	4,7	1,7
Дирдорф [51]	3,2	0,7

[1] Из табл. 2 (Зилитинкевич и др. [4]).

Разброс полученных значений констант объясняется тем, что в разных работах принимались различные предположения о профиле коэффициента турбулентности. Цифры, приведенные Дирдорфом, получены с помощью численного моделирования.

При определении приведенных выше констант имеет место некоторая неопределенность. В частности, это происходит потому, что результат может зависеть от способа сращивания (или склеивания). Эти константы вычисляются как малые разности больших величин, поэтому они очень чувствительны

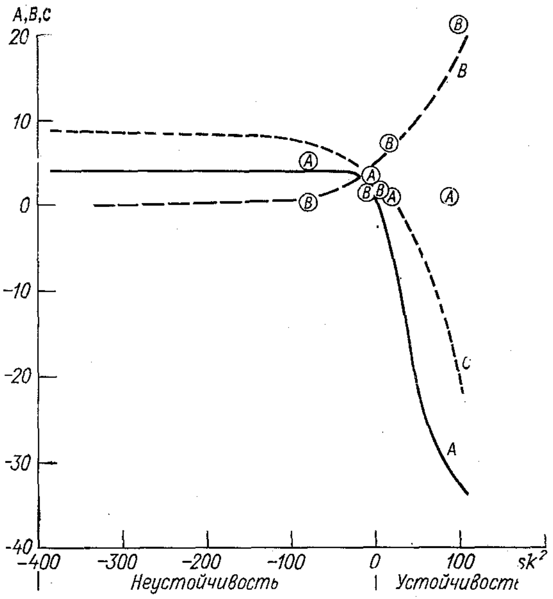


Рис. 7.1. Вид функций теории подобия A, B, C по [44]. В кружках отдельные значения из [4].

к небольшим вариациям профиля, используемого для их определения. Значение геострофического коэффициента трения, напротив, довольно мало чувствительно к константам. Уравнения (6.18) или (7.13) могут быть использованы для расчета u_*/G как функции вектора геострофического ветра, направления ветра у поверхности и эмпирических констант.

Анализ наш ограничивается случаем нейтральной стратификации. Учет стратификации по меньшей мере приведет к увеличению числа эмпирических констант. Определение констант A и B на основе экспериментальных данных было сделано Кларком [44]. В его анализе учитывался параметр стратификации s, а также уравнение переноса тепла:

$$\partial\theta/\partial z = F_1(z, s),$$

$$\partial u/\partial z = F_2(z, s), \qquad (7.14)$$

где $s = -gH_0/(\rho_0 c_p \theta_0 f u_*^2)$, H_0 — турбулентный поток тепла, θ — потенциальная температура, $\theta_0(z) \equiv \theta(0)$. Это приводит к

$$U_g/u_* = \{\ln [u_*/fz_0] - A(s)\}/k,$$
$$V_g/u_* = -B(s)/k,$$
$$\theta/\theta_0 = \{\ln [u_*/fz_0] - C(s)\}/k. \qquad (7.15)$$

Анализ Кларка показал, что функции A, B, C очень сильно изменяются в условиях, близких к нейтральным (рис. 7.1).

Одним из обстоятельств, значительно затруднявшим анализ Кларка, было то, что ветер, реально наблюдаемый на верхней границе пограничного слоя, сильно отличался от рассчитанного геострофического ветра. Эта несогласованность объясняется суточным ходом, бароклинностью и нестационарностью.

7.4. РЕЗЮМЕ

Итак, мы предположили, что существуют два решения, характеризуемые двумя различными масштабами длины z_b и u_*/f, что привело нас к различным уравнениям. Единственный критерий подобия $E_0 = u_*/fH$ фигурирует как коэффициент при члене, описывающем трение в полном уравнении, в котором все члены после масштабирования имеют порядок единицы. Роль трения определяется выбором масштаба H.

Подходящие масштабы могут быть выбраны с помощью анализа размерности и принципов динамического подобия, примененных к соответствующим уравнениям. Случай $E_0 \sim 1$ соответствует случаю, когда сила Кориолиса балансируется силой вязкости. Хотя для этого случая удается найти решение, для которого удовлетворяются нижние граничные условия, оно плохо описывает профиль ветра вблизи поверхности. Эта область хорошо описывается уравнениями, полученными предельным переходом при $1/E_0 \to 0$. Общий вид каждого решения может быть определен выбором характерных масштабов длины и скорости.

Мы предположили, что различные решения плавно переходят одно в другое при сращивании скоростей и первых производных. Никаких гарантий, что это сращивание возможно, заранее дать нельзя. Тем не менее в случае планетарного пограничного слоя область сращивания приходится на участок логарифмического профиля. Наблюдения показывают, что логарифмическое распределение часто встречается во всем приземном слое. Условия сращивания дают дополнительное граничное условие для внешнего решения. Это условие предполагает конечность скорости и ее градиента на высоте, достаточно малой по сравнению с масштабом длины внешнего слоя, для того чтобы ее можно было считать нулем. Это не приводит к существенным изменениям внешнего решения. Тем не менее, внешнее решение может изменяться с изменением параметра, отражающего вариации граничных условий. Эта свобода выбора внешнего решения для сращивания с внутренним является следствием трехмерности внешнего слоя. Сращивание определяет связь между V_g и τ_0, зависящую от нескольких констант: z_b, k, A и α. В случае постоянной турбулентной вязкости обычное экмановское решение удовлетворяет граничным условиям для переменной и ее второй производной на верхней и нижней границах (4.3). При склеивании экмановского слоя с приземным верхнее граничное условие остается тем же самым, а на нижней границе приземного слоя задается скорость и ее первая производная. Нижним граничным условием является $U(0)=0$, что приводит к определению $z_b=z_0$. Независимого условия для $U''(0)$ в случае плоскопараллельного потока предложить нельзя. Действительно, второе граничное условие $U'(0)=\tau_0/K_0$ включает лишь первичные переменные. Появление в решении произвольных констант как раз являются следствием неопределенности двухслойных решений. Эти константы должны определяться экспериментально.

В теории подобия граничные условия явно не используются, хотя характерные масштабы G и u_* заимствованы из предполагаемых граничных условий. Подчеркнем, что G является характерным масштабом для внешнего поля скорости. Если ввести дефект скорости $U-U_g$, масштабом для этой величины будет являться u_*.

В теории подобия понятие турбулентной вязкости не используется. Вследствие этого остается единственный масштаб длины u_*/f. Это означает, что турбулентные движения в данном случае предполагаются просто составляющими поля скорости. Имеется в виду, что турбулентные члены учитываются как слагаемые, описывающие нелинейный перенос импульса в уравнении (3.16). Турбулентная вязкость может быть исследована в результате решения этих уравнений, в которых явно учитывается неустойчивость и шероховатость. При таком подходе моделируется сама турбулентность. Масштаб длины K/f, используемый в экмановском геострофическом решении, полученном в главе 6, непосредственно связан с u_*/f. Это является одним из результатов, полученных с помощью процедуры сращивания с использованием аналитических выражений для внешнего и внутреннего решений. Соображения подобия имеют весьма общий характер. В качестве внешнего решения, кроме экмановского, можно использовать еще целый ряд решений.

8. ТЕОРИИ, ОСНОВАННЫЕ НА КОНЦЕПЦИИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ

8.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Величина $K = u_*^2/U_z = \varkappa u_* (z+z_0)$, определенная из уравнения (5.11), показывает, что K линейно растет с высотой в слое с постоянным потоком импульса. Встает вопрос: какое же значение K принять в качестве константы для верхнего пограничного слоя.

Если предположение, что K постоянно, считать недостатком экмановского решения, для лучшего согласования с измерениями можно пытаться решать уравнение (3.23) с использованием некоторой функции $K(z)$. После решения, полученного Экманом еще в начале столетия, поиски подходящей функции $K(z)$ были продолжены. По мере накопления данных наблюдений оказалось возможным сформулировать такие гипотезы о распределении $K(z)$, которые позволили лучше согласовать теоретические и наблюдаемые годографы ветра. Имея в виду, что K является функцией вертикальной координаты, уравнение (3.23) удобно использовать в виде:

$$(KU')' - f(V - V_g) = 0,$$
$$(KV')' + f(U - U_g) = 0, \qquad (8.1)$$

здесь и далее в этой главе штрихом обозначается оператор d/dz.

Из наблюдений следует, что выше планетарного пограничного слоя турбулентная вязкость не уменьшается до нуля (см., например, [99]). Вследствие этого предпринимался ряд попыток использования функции $K(z)$, линейно возрастающей вблизи поверхности и принимающей конечное малое значение на верхней границе пограничного слоя.

Специальный выбор вида функции $K(z)$, например $K_1 z^n$, допускает получение решения в элементарных функциях. Такие модели носят весьма произвольный характер и допустимы лишь потому, что спиральный годограф не так уже чувствителен к выбору функции $K(z)$. Напротив, функция $K(z)$ очень чувствительна к вариациям профиля скорости. Можно также ожидать, что $K(z)$ сильно реагирует на изменение стратификации.

6 Заказ № 37

Не исключено, что распределение $K(z)$, полученное эмпирически на основе весьма скудных данных, может иметь лишь качественное значение.

Хорошо известным примером ветровой спирали является лейпцигский профиль ветра, хотя в настоящее время имеются и лучшие данные. Эффекты стратификации отражены в данных, полученных в О'Нилле и опубликованных Леттау и Дэвидсоном [82]. Еще более полную картину дают результаты измерений в Австралии. Тем не менее многие вопросы до сих пор остаются неизученными. Это оставляет простор для теоретических спекуляций и делает необходимым специальное редактирование данных. Теоретические приближения иллюстрируются на примере нескольких произвольных примеров. Модель Россби особенно интересна как первая попытка полного исследования, тесно связанного с результатами, изложенными в главах 6 и 7.

8.2. МОДЕЛЬ РОССБИ

В работе Россби [105] использовалась теория пути смешения, обобщенная на случай трехмерного потока. Для записи возмущений профиля скорости будем использовать комплексную переменную

$$q \equiv u + iv = |q| \exp(i\alpha), \tag{8.2}$$

где α — угол между U и U_g. Подобно тому, как это делалось в п. 5.4 для двумерного потока, сделаем разложение в ряд:

$$q = q(z-l) + q'(z-l)\,l + \frac{q''(z-l)}{2}\,l^2 + \ldots,$$

$$q = q(z+l) + q'(z+l)\,l + \frac{q''(z+l)}{2}\,l_2 + \ldots,$$

$$q = \frac{q(z-l)+q(z+l)}{2} + \frac{q'(z-l)+q'(z+l)}{2}\,l + \frac{q''(z-l)+q''(z+l)}{4}\,l^2 + \ldots,$$

$$q = \bar{q} + \frac{\bar{q}'l}{2} + \frac{\bar{q}''l^2}{4} + \ldots$$

Последнее уравнение перепишем в виде

$$q - \bar{q} = \frac{q'l}{2} + \frac{q''l^2}{4} + \ldots \tag{8.3}$$

В динамически подобных потоках функции $q(z)$ идентичны, масштабы вихрей совпадают и, следовательно, возмущение должно быть постоянным

$$\frac{q'l}{2} + \frac{q''l^2}{4} = \mathrm{const},$$

откуда следует

$$\frac{q''l}{q'}=\text{const}.$$

Используя представление (8.2), получаем:

$$\frac{|q|''}{|q|'}l=-k_R,$$

$$\alpha''-\alpha'=\text{const}. \tag{8.4}$$

Воспользуемся следующим обобщением двумерных уравнений из главы 5:

$$\tilde{\tau}=\tau^x+i\tau^y,$$

$$\tilde{\tau}/\rho=l^2(\bar{q}')^2,$$

$$(1/\rho)\left(d\tilde{\tau}/dz\right)-if(q-U_g)=0,$$

$$\tilde{\tau}/\rho=K|q|'. \tag{8.5}$$

Эта система уравнений может быть решена относительно $K(z)$ и $l(z)$ интегрированием от верхней границы приземного слоя до высоты, на которой K и l обращаются в нуль, принимаемой в качестве верхней границы пограничного слоя. Из решения следует, что l и K убывают по закону:

$$l=C_1\zeta,$$

$$K=C_2\zeta^2,$$

где $\zeta=(H-z)/(H-h)$, а константы C_1 и C_2 являются функциями k_R и $q(h)$. Эти константы должны определяться эмпирически. Сравнивая решения с данными Тейлора [123], Россби нашел, что $k_R=0{,}065$.

Выражения для l и k в приземном слое

$$l=k(z+z_0),$$

$$K=ku_*(z+z_0),$$

$$|q|=U=\frac{u_*}{k}\ln\left(\frac{z+z_0}{z_0}\right)$$

склеиваются с соответствующими формулами в экмановском слое, что дает

$$H-h=\sqrt{2}\,\frac{k}{k_R}(h+z_0), \tag{8.6}$$

$$\text{Ro}_S=\frac{G}{fz_0}=\frac{2\sqrt{2}}{9}\frac{k}{k_R^3}\frac{1}{\sin\alpha_0}\exp\left[\frac{2k}{3k_R}\left(\text{ctg}\,\alpha_0-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]. \tag{8.7}$$

Предполагается, что отношение h/H является константой. Ее изменение в зависимости от значений k и k_R показано в табл. 8.1.

Таблица 8.1

h/H	k	k_R
0,103	0,4	0,065
0,108	0,38	0,065
0,116	0,35	0,065
0,110	0,4	0,07

Приведенное решение аналогично (6.10), но получено с помощью обобщения гипотез пути смешения на случай экманов-

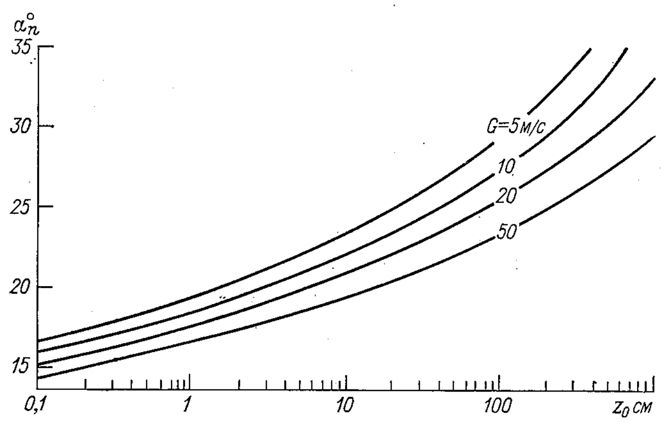


Рис. 8.1. Зависимость угла α° от шероховатости z_0 и по уравнению (8.7) для $\varphi=45°$, $k=0{,}4$, $k_R=0{,}065$.

ского слоя. Оно связывает между собой геострофический ветер, силу Кориолиса, шероховатость поверхности и угол поворота ветра. Характерно, что угол α_0 относительно мало чувствителен к параметру Кориолиса (изменяется на 2° при изменении широты от 20 до 90°) и скорости геострофического ветра (изменяется на 4° при изменении G от 5 до 50 м/с). Зависимость α° от z_0 тем не менее вполне ощутима (рис. 8.1).

Полученное решение можно модифицировать с учетом того, что K не обращается в нуль на верхней границе. Россби и Монтгомери [106] использовали для случая слабого ветра следующую формулу:

$$K=\begin{cases} ku_*(z+z_0), & z<h, \\ K(h)=K_h, & z\geqslant h \end{cases} \tag{8.8}$$

и тем же методом, какой был применен выше, получили следующее соотношение, связывающее Ro_S, α_0, k, k_R, f и z_0:

$$\frac{2^{1/4}k}{N^{1/4}}(\mathrm{Ro}_S \sin\alpha_0)^{1/2}(\mathrm{ctg}\,\alpha_0 - 1) =$$

$$= \frac{3}{2}\ln N - \ln(\mathrm{Ro}_S \sin\alpha_0) - \ln(\sqrt{2}k^2), \qquad (8.9)$$

где

$$N = \frac{k_R}{fz_0^2}.$$

Полученное соотношение предсказывает увеличение α_0 с усилением ветра. Экспериментальные данные показывают, что угол уменьшается с ростом ветра при $G < 10$ м/с и медленно растет при $G > 10$ м/с. Имеющиеся данные допускают лишь качественное сопоставление.

8.3. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ

Преобразуем уравнение (8.1) так, чтобы иметь возможность найти распределение $K(z)$ по скорости ветра. Это может быть сделано умножением уравнений движения для U и V соответственно на V и U и вычитанием одного из другого. Предполагается, что оси ориентированы по U_g.

Интегрируя по z и деля результат на $(UV' - VU')$, получаем

$$K = \frac{f\int\limits_0^z (U^2 + V^2 - UU_g)\,dz}{UV' - VU'}. \qquad (8.10)$$

Для расчетов по (8.10) Леттау [80] использовал так называемый лейпцигский профиль ветра — измеренную ветровую спираль при почти нейтральных условиях (рис. 8.2). Распределение коэффициента турбулентности показано на рис. 8.3. Лейпцигский профиль был получен с помощью теодолитных наблюдений за двадцатью восемью шарами-пилотами в течение пятичасового периода. Ближайшие измерения вертикального градиента температуры производились на расстоянии почти в 100 миль.

Известен и ряд других расчетов распределения K по уравнению (8.10). В среднем максимальные величины K превосходили в два с половиной раза значения, рассчитанные по лейпцигскому профилю. Максимум K наблюдается на высотах начиная с 200—500 м.

Для определения профиля K требуются профили ветра, определенные за максимально длительный период, в течение которого не происходит заметного изменения стратификации. Последние результаты, которые обсуждаются в главах 5 и 11, показывают, что для надежного определения K требуется информация более подробная, чем та, которая положена в основу лейпцигского профиля.

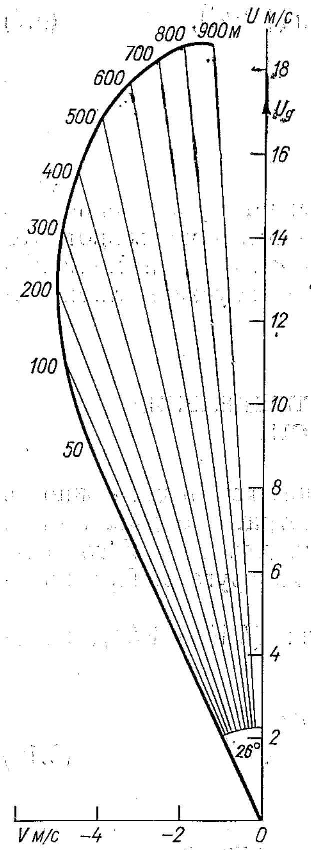


Рис. 8.2. Лейпцигский профиль ветра (по [90]).

Надежные и полные наблюдения в планетарном пограничном слое были проведены в Австралии [44]. Эти данные классифицировались по параметру стратификации. Универсальные профили были получены для четырех групп, соответствующих различным условиям стратификации, с применением в качестве масштаба скорости u_* и высоты u_*/f. Скорость трения была получена по наблюдениям скорости на высотах 0,5 и 0,75 м по формулам $u_*=0{,}087U_{0,5}$ и $u_*=0{,}08U_{0,75}$. Компоненты U и V измерялись шаропилотным методом с помощью двух теодолитов. Всего было измерено свыше 150 профилей. Распределение K рассчитывалось по уравнению (8.1), а l — по формуле $l=KdV/dz$. Распределение U, V, l и K для всех четырех групп показано на рис. 8.4—8.7. Заметим, что система координат была ориентирована по приземному ветру. Расчеты геострофического ветра по полю приземного давления оказались безуспешными из-за влияния бароклинности, суточного хода и нестационарности V_g. Группы I и II различались между собой по высоте инверсии. В группу II были включены случаи невысокой конвекции ($z_i<0{,}3$). Средние характеристики для каждой группы приведены в табл. 8.2.

Таблица 8.2

СРЕДНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ КАЖДОГО КЛАССА

Группа	u_*/f м	u_* м/с	$\hat{z}$ при $z=0{,}3$ м	z_0 см	Стратификация
I	3333,0	0,28	1000,0	0,5	Неустойчивая
II	4000,0	0,33	1200,0	0,5	Неустойчивая
III	5000,0	0,42	1400,0	0,5	Нейтральная
IV	1333,0	0,12	400,0	2,0	Устойчивая

Экмановский поворот ветра наблюдался во всех случаях. Исключая случаи нейтральной стратификации при адвекции теплого воздуха, на профиле U наблюдался максимум, а на профиле V — минимум. Распределение ветра при нейтральной стратификации оказалось очень близким к лейпцигскому профилю ветра. В случае неустойчивой стратификации толщина конвективного пограничного слоя (определяемая по высоте инверсии) может быть значительно больше толщины стационарного экмановского слоя, определяемой по повороту ветра.

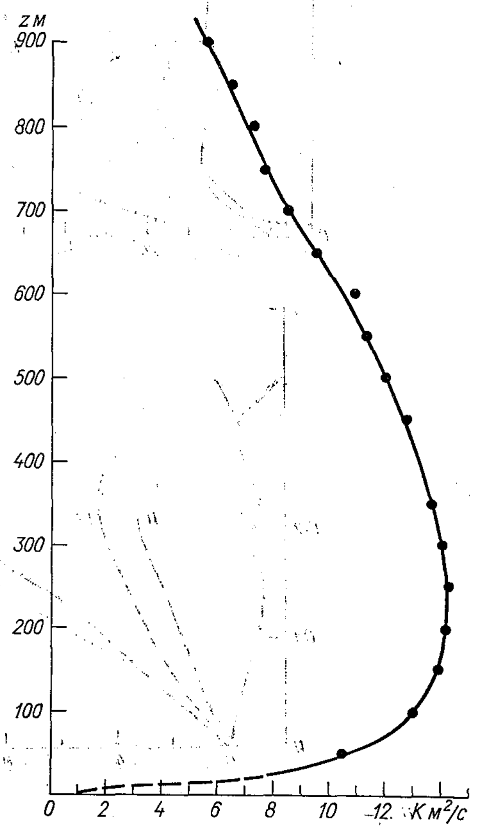
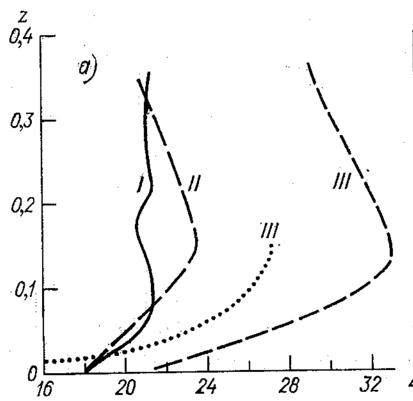
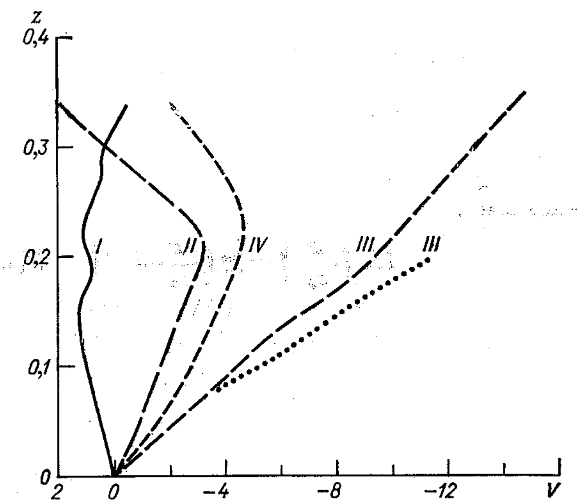


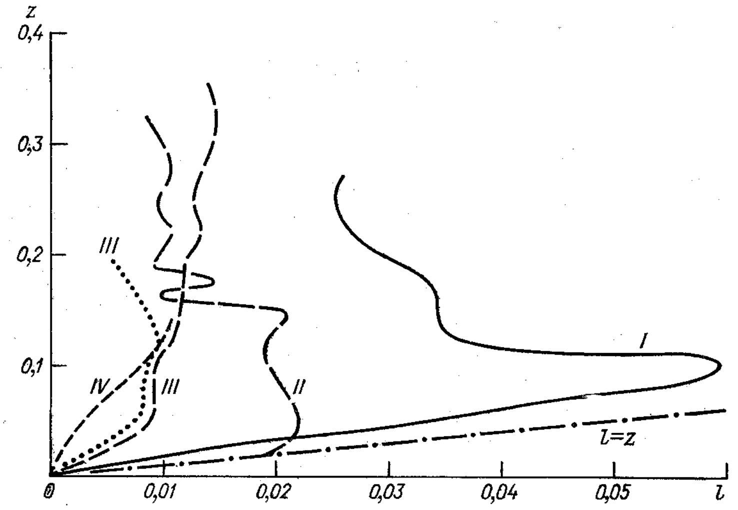
Рис. 8.3. Профиль коэффициента турбулентной вязкости, рассчитанный по лейпцигскому профилю ветра.

В случае глубокой конвекции наблюдается гораздо более сильный рост l и K, чем при мелкой конвекции. По сравнению с нейтральной стратификацией эти характеристики значительно возрастают в нижней половине конвективного слоя, но существенно уменьшаются в верхней. Для группы I максимальное значение K, равное 32,6 м^2/с, наблюдалось на высоте 250 м, а для группы III — 16,8 м^2/с на высоте 200 м. Это означает, что в нейтральном случае имеет место хорошо перемешанный слой, тогда как при наличии конвекции величины K в верхней и нижней частях сильно различаются.

Для случаев нейтральной и устойчивой стратификации в верхней части наблюдаются заметные величины l и K. Это означает, что весь пограничный слой не охвачен наблюдениями. Отличия распределения K и l от аналогичных данных, полученных по лейпцигскому профилю на высотах, превышающих 900 м, могут объясняться ошибками измерений, имеющими место и в том и в другом случае. Таким образом, остаточные значения


z
0,4
0,3
0,2
0,1
0
16
20
24
28
32
а)
I
II
III
III
б)
IV
40
60
80


z
0,4
0,3
0,2
0,1
0
2
0
−4
−8
−12
V
I
II
IV
III
III


z
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,01
0,02
0,03
0,04
0,05
l
III
IV
III
II
I
l=z

◀ *Рис. 8.4. Вертикальные пофили $U(z)$ для разных условий стратификации (см. табл. 8.2 из [44]). Точечная линия соответствует лейпцигскому профилю. z — высота в долях u_*/f.*

а — группа I—III, *б* — группа IV.

◀ *Рис. 8.5. То же, что на рис. 8.4, но для $V(z)$.*

◀ *Рис. 8.6. То же, что на рис. 8.4, но для $l(z)$.*

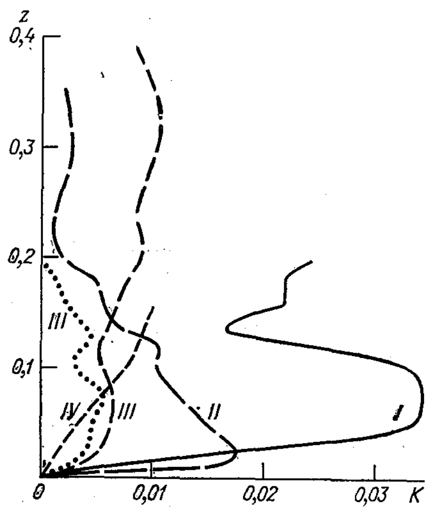


Рис. 8.7. То же, что на рис. 8.4, но для $K(z)$. ▶

K и l вряд ли можно считать надежно определенными. Тем не менее случаи II и III указывают, что на этих высотах l составляет, по-видимому, 25—40 м.

8.4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ $K(z)$

Выражение, описывающее распределение K и l, можно получить непосредственно по данным наблюдений. Эти формулы далее можно использовать в численных моделях пограничного слоя. Ввиду того что распределение скорости не так уж чувствительно к виду функции $K(z)$, можно пытаться аппроксимировать ее каким-либо аналитическим выражением. Поскольку уравнения пограничного слоя довольно сложны, имеет смысл ограничиться случаем сравнительно простых выражений.

Самым простым вариантом является распространение линейной зависимости $K=K_1z$, подтверждаемой наблюдениями в приземном слое, на весь пограничный слой. Хотя это допущение явно не годится для верхней части пограничного слоя, затухание градиентов скорости происходит достаточно быстро для того, чтобы роль вязких членов с высотой уменьшалась.

Такое распределение K удобно потому, что преобразование уравнений к комплексному виду приводит к хорошо изученному уравнению Бесселя. С введением новой переменной

$$Q\equiv U-U_g+i(V-V_g) \tag{8.11}$$

уравнение (8.1) преобразуется к виду

$$\frac{d}{dz}K\frac{dQ}{dz}-ifQ=0. \tag{8.12}$$

Еще одна подстановка

$$\eta \equiv 2\sqrt{f/K_0}z^{1/2}$$

дает

$$\eta^2 \frac{d^2Q}{d\eta^2} + \eta \frac{dQ}{d\eta} - i\eta^2 Q = 0. \tag{8.13}$$

Это уравнение Бесселя нулевого порядка. Блинова и Кибель [2] использовали табличное решение этого уравнения при граничных условиях $q=0$ при $z=z_0$ и $q=U_g$ при $z \to \infty$ для расчета профилей скорости и α_0. Профиль скорости оказался вполне реалистическим вблизи поверхности, что является следствием выбора профиля $K=K_1 z$. С другой стороны, профиль ветра почти выходит на константу уже на высоте в несколько сот метров. Угол α_0 получается много меньше, чем наблюдаемый.

Более реалистическое распределение K использовалось позднее Юдиным и Швецом [11]. Для улучшения решения в верхней части пограничного слоя в работе [11] предполагалось, что выше приземного слоя K принимает постоянное значение K_h. Таким образом, в результате для приземного слоя получается решение в функциях Бесселя, а для более высоких уровней — экмановское решение

$$q = (q_h - U_g) e^{-(1+i)(z-h)/\delta} + U_g, \tag{8.14}$$

где $q_h = q(h)$.

При $z \to z_0$ используются обычные формулы:

$$u_*^2 = K|q|',$$

$$|q| = \frac{u_*}{k} \ln \frac{z}{z_0}.$$

В данном решении модель Россби усовершенствуется введением силы Кориолиса и трехмерности потока в пограничном слое. Если использовать далее процедуру сращивания, можно получить соотношения, связывающие внешние параметры U_g, f, z_0 с внутренними — z_1, h, u_*. Эти результаты представлены в табл. 8.3.

Мнение о том, что K должен зависеть от сдвига ветра, высказал сам Экман [53]. Соответствующее решение с использованием следующей формулы для пути смешения:

$$K = l^2 \left\{ \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 \right\}^{1/2} \tag{8.15}$$

было рассмотрено Прандтлем [98].

Численное решение уравнения (8.1) было получено Блэкадаром [27], который использовал формулу для пути смешения

$$l = \frac{kz}{1 + kz/\lambda}. \tag{8.16}$$

Таблица 8.3

КОМПОНЕНТЫ СКОРОСТИ ВЕТРА U, V И МОДУЛЯ C ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ U_g м/с, K_h м²/с при $z_0=0{,}1$ м (см. [11])

z м	U	V	C	α	z м	U	V	C	α
$U_g=3{,}88$; $K_h=0{,}077$					$U_g=2{,}0$; $K_h=42{,}3$				
1,28	0,58	0,47	0,75	39° 0′	10	8,86	3,17	9,41	19°40′
10	1,50	0,96	1,78	32 40	21,8	10,35	3,68	10,98	19 35
21,8	2,45	1,23	2.74	26 40	50	11,99	4,16	12,69	19 10
50	3,42	0,84	3,52	14 0	100	13,32	4,49	14,06	18 40
100	4,12	0,04	4,12	0 40	131	13,83	4,59	14,58	18 25
					200	14,85	4,75	15,60	17 45
					300	16,19	4,80	16,89	16 30
					500	18,50	4,58	19,06	13 50
					1000	22,32	2,94	22,50	7 30
					1500	23,97	1,46	24,0	3 30
$U_g=5{,}75$; $K_h=3{,}44$					$U_g=6{,}62$; $K_h=20{,}9$				
10	2,59	1,16	2,83	24° 0′	10	3,63	0,93	3,75	14°20′
21,8	3,05	1,33	3,33	23 30	21,8	4,26	1,06	4,40	14 0
33,1	3,28	1,40	3,56	23 10	50	4,95	1,18	5,09	13 20
50	3,68	1,48	3,79	22 0	100	5,90	1,33	6,05	12 40
100	4,24	1,56	4,51	20 10	163,5	6,13	1,29	6,26	12 0
200	5,35	1,37	5,42	14 20	200	6,34	1,30	6,50	11 20
300	5,97	0,96	6,05	9 10	300	6,90	0,00	6,90	0
500	6,08	0,25	6,13	2 20					
$U_g=12{,}8$; $K_h=3{,}82$					$U_g=10{,}52$; $K_h=1{,}77$				
10	4,65	2,59	5,32	29°10′	11,9	1,82	1,47	2,34	39° 0′
21,8	5,16	2,85	5,90	28 50	20	2,31	1,80	2,93	37 55
50	6,35	3,32	7,17	27 40	40	3,46	2,44	4,13	35 10
100	8,23	3,74	9,04	24 25	100	6,62	3,36	7,42	27 10
200	9,65	3,57	10,25	20 20	200	9,90	2,30	10,16	15 10
300	12,28	2,71	12,57	12 30	500	10,52	0,04	10,52	0 20
500	14,25	0,87	13,27	3 45					

Эта формула дает линейную зависимость для l в приземном слое и почти константу на больших высотах. В (8.16) λ — некоторая (неизвестная) функция внешних параметров. Блэкадар выбрал λ так, чтобы угол α_0 был равен 32° (величина, полученная по измерениям в Брукхейвене [26]). Предполагается, что λ не может зависеть от z_0. Исходя из соображений подобия и экспериментальных данных для λ была выбрана зависимость $\lambda = 0{,}00027\ G/f$. Два примера профилей K, рассчитанные по уравнениям (8.15) и (8.16), приведены на рис. 8.8. Фоллер [56] нашел, что средние значения K для этих профилей составляют 2,5 и 4,5 м²/с. Несколько иное «оптимальное» значение ($K = 20$ м²/с) получено в [3].

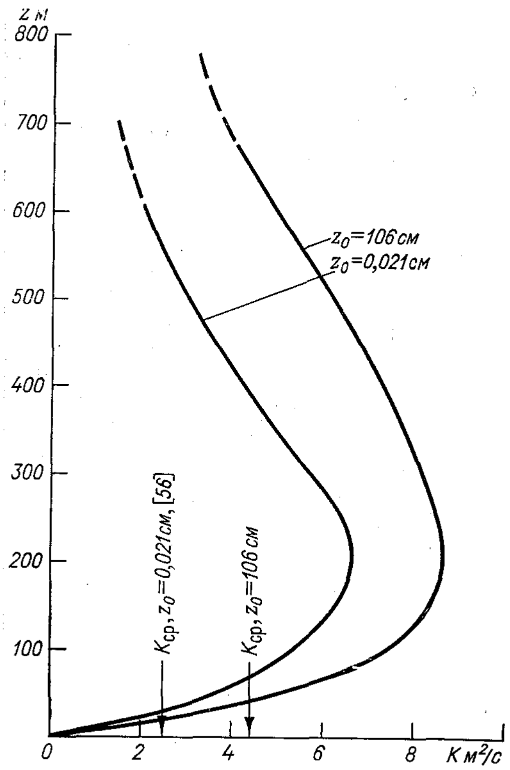


Рис. 8.8. Вертикальное распределение $K(z)$, рассчитанное по профилям ветра (по [27], скорректировано).

Численное решение Блэкадара также дает связь между u_*/G или α и $\log G/fz_0$ (рис. 8.9). Эти кривые, основанные на эмпирических функциях $K(z)$ или $l(z)$ и соображениях подобия, аналогичны теоретическим результатам главы 6; разница лишь в том, что там масштаб длины G/f заменен высотой приземного слоя h.

Несколько иная зависимость использовалась Леттау [80]:

$$l = \frac{kz}{1 + (z/z_m)^{5/4}}, \tag{8.17}$$

где $z_m = f_1(u_*/f)$ — высота, где достигается максимум l. Для $u_*/G = \text{const}$ это выражение отличается от (8.16) показателем степени в знаменателе, приводящим к различиям лишь при больших z.

Известно много других аналитических и численных решений с переменным по высоте коэффициентом K. Различия между всеми этими моделями меньше, чем разброс эмпирических данных, с которыми приходится проводить сравнение. Некоторые из этих моделей перечислены в табл. 8.4.

Таблица 8.4

СВОДКА МОДЕЛЕЙ *К*-ТЕОРИИ

Год	Автор	K	Примечание
1902	Экман	const	Трехмерная спираль для океана
1905	Экман	$\lvert d\mathbf{V}/dz \rvert$	Равноугольная спираль
1908	Акерблом	const	Турбулентная вязкость для атмосферы
1915	Тэйлор	const	$V(0) \geqslant 0$
1930	Прандтль	$l^2 \lvert d\mathbf{V}/dz \rvert$	Теория пути смешения
	Карман	$l = -kU'/U''$	k — постоянная Кармана
1930	Такая	z^2, e^{az}	
1933	Колер	z^n	Уравнение Бесселя
1935	Россби	$C_1(z + z_0)$, $z \leqslant h$	Первые двухслойные модели
	Россби и Монтгомери	$C_2\left(1 - \frac{z}{H}\right)^2$, $h \leqslant z \leqslant H$ или K_1, $z \geqslant h$	
1936	Блинова и Кибель	$K_1 z$	Уравнение Бесселя
1940	Кибель	$ku_* z$	
1940	Юдин и Швец	$K_1 z$, $z \leqslant h$ $K_1 h$, $z \geqslant h$	
1950	Леттау	Эмпирический	По лейпцигскому профилю ветра
1957	Ариэль	K_1, $z \leqslant h$ K_2, $z > h$	
1962	Блэкадар	$\left(\frac{k \lvert d\mathbf{V}/dz \rvert}{1 + kz/\lambda}\right)^2$	Численное решение с эмпирическими постоянными
1973	Шир	kze^{-4z}	Численное интегрирование уравнений второго порядка

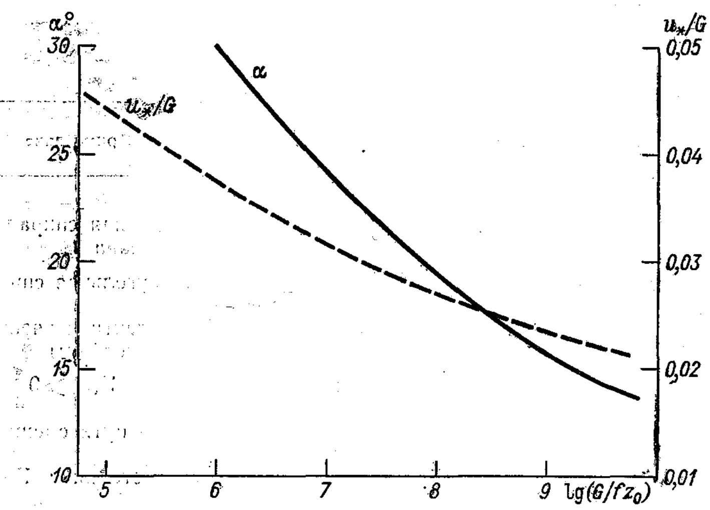


Рис. 8.9. Рассчитанные по формулам из [27] *зависимости* u_*/G *и* α *от* G/fz_0.

8.5. РЕЗЮМЕ

Все K-теории обнаруживают, что структура разных областей пограничного слоя может быть различной. Эти теории неплохо воспроизводят структуру нижней части пограничного слоя вплоть до верхней границы приземного слоя. Различия между логарифмическим профилем для приземного слоя, принятым Россби, и решением в бесселевых функциях Юдина и Швеца, вероятно, слишком малы для того, чтобы считать, что они отражают природу пограничного слоя.

Множество предложенных ранее теоретических распределений в общем не противоречат известным эмпирическим данным (см. [4]). Представляется, что для хорошего определения профиля скорости требуется значительно больше, чем просто профиль $K(z)$.

Добавим, что имеется много свидетельств того, что при наличии горизонтальной неоднородности или при нестационарности пограничный слой имеет совсем иные свойства. Профиль ветра может быть крайне изменчив во времени и пространстве. В частности, в верхней части экмановского слоя может, например, возникать так называемое струйное течение низких уровней. При появлении вторичной циркуляции конвективного или динамического происхождения возникают крупномасштабные упорядоченные вихри, к которым концепция вихревой вязкости неприменима (см. главу 10).

Суточный ход и обусловленные им изменения стратификации очень усложняют дело. Даже если концепция вихревой вязкости применима, но сам коэффициент очень чувствителен к изменению стратификации или параметра шероховатости, практическая ценность результатов будет не слишком велика. Не исключено, что очень большой разброс эмпирических значений $K(z)$ вызван малыми различиями в стратификации.

9. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЭКМАНОВСКОГО ТЕЧЕНИЯ

9.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Наблюдения показывают, что в потоке воздуха довольно часто наблюдается вторичная волновая структура. Эти отклонения от среднего течения обязаны своим происхождением гидродинамической неустойчивости. Исключая случай вязкой неустойчивости, порождающей мелкомасштабную турбулентность, большая часть неустойчивых возмущений стабилизируется на некотором определенном конечном уровне. При этом приток энергии от среднего потока к возмущениям либо равен нулю, либо в точности балансируется вторичной диссипацией. Наиболее широко распространенное объяснение этих повсеместно встречающихся периодических движений основано на наблюдениях за подъемом горячего воздуха. Возможно тем не менее другое объяснение (менее подтвержденное наблюдениями), основанное на том, что в невязкой или в почти невязкой жидкости не может поддерживаться локальный экстремум завихренности. Предполагается, что в этом случае возникает неустойчивость Кельвина—Гельмгольца, при которой генерируются волны, стремящиеся уничтожить максимум завихренности. Аналогично в геострофическом потоке, в котором сила Кориолиса действует под углом к потоку (в экмановском слое — под углом 45°), внутреннее трение не может поддерживать поворот ветра выше минимума скорости. Течение становится неустойчивым и начинает вращаться, пока не совпадет по направлению со средним потоком. При этом обычно возникают двумерные профили скорости с точкой перегиба, где имеет место экстремум завихренности.

При постоянном K уравнение (3.23) может быть решено аналитически:

$$U_{\mathrm{E}}=U_g+\exp(-z/\delta)(V_g\sin z/\delta-U_g\cos z/\delta),$$
$$V_{\mathrm{E}}=V_g-\exp(-z/\delta)(U_g\sin z/\delta+V_g\cos z/\delta),$$
$$\delta=(2K/f)^{1/2}. \tag{9.1}$$

Рассуждения, приводящие в конце концов к этому решению, становятся весьма спорными, если окончательный результат не подтверждается данными наблюдений. В этом случае именно так дело и обстоит, так как спираль Экмана в планетарном пограничном слое почти никогда не наблюдается. Поэтому основное внимание при исследовании планетарного пограничного слоя было уделено полуэмпирическим методам, в первую очередь применительно к приземному слою.

Тем не менее небезынтересно опять обратиться к решению Экмана для того, чтобы проверить, устойчиво ли решение уравнений, представляющих собой баланс сил Кориолиса и вязкости. Экспериментальные данные показывают, что в потоке со сдвигом преобладают двумерные возмущения. Однако, хотя экмановский слой не является параллельным потоком, при анализе устойчивости предполагается, что направление не меняется с высотой. Результирующие уравнения вполне идентичны классическим уравнениям для плоскопараллельного потока, в которых параметром является продольная компонента. Продольная компонента непосредственно присутствует в анализе только в том случае, когда рассматривается влияние силы Кориолиса. Последняя влияет на неустойчивую моду в окрестности кривой нейтральной устойчивости и вследствие этого может изменять минимальное критическое число Рейнольдса и начальный рост моды [84, 55]. Тем не менее в типичных условиях влияние силы Кориолиса и вязкости на устойчивость пренебрежимо мало [23, 37].

Неустойчивую моду в точке перегиба описывают невязкие уравнения второго порядка, однако при исследовании неустойчивых мод желательно вязкость сохранить. Неустойчивые моды могут испытывать влияние как вязких членов, так и граничных условий необходимых для уравнений, учитывающих вязкость (см., например, [38]).

9.2. ФИЗИЧЕСКИЙ МЕХАНИЗМ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ТОЧКЕ ПЕРЕГИБА

В простейшей трактовке существуют два главных механизма перехода энергии от среднего потока. Один из них — гравитационная неустойчивость, связанная с наличием минимума потенциальной энергии. Примерами является бароклинная неустойчивость или конвективная неустойчивость, приводящая к конвекции Рэлея—Бенара. Эта неустойчивость демонстрируется на примере подогреваемой снизу жидкости и весьма просто объясняется для атмосферы методом частиц, т. е. рассмотрением устойчивости смещенной частицы в зависимости от вертикального градиента температуры в окружающем воздухе. Источник энергии другого типа возникает в течении со сдвигом скорости. Примерами являются баротропная неустойчивость и волны Кельвина—Гельмгольца, проявляющиеся в атмосфере как чечевицеобразные облака на верхней границе слоя со сдвигом скорости. Математическое описание этого вида неустойчивости также может быть основано на рассмотрении минимума обычной потенциальной энергии. Наличие точки перегиба как критерий неустойчивости был введен Рэлеем и Толлмином.

Физическое объяснение этого источника энергии менее наглядно, однако его можно также пытаться дать с помощью метода частиц, если представить себе, что жидкость заполнена вращающимися нитями (скажем, похожими на макароны). Рассмотрим перемещение такой нити, предполагая, что силы, действующие на нее, зависят от распределения сдвига скорости.

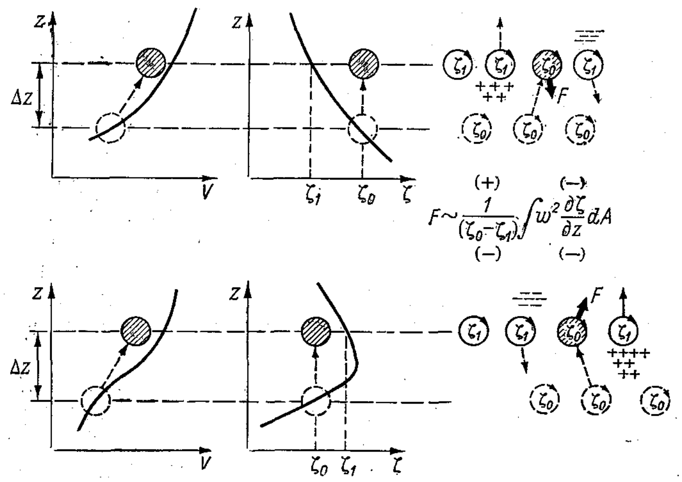


Рис. 9.1. Схема, поясняющая взаимодействие вихревой нити с полем скорости и завихренности. Формула дает результирующую силу, действующую на частицу ζ_0, двигающуюся со скоростью w при наличии возмущений в поле завихренности (по [85]).

При этом окажется, что в точке, где профиль скорости имеет перегиб, порождается динамическая неустойчивость. Для анализа сил, действующих на частицу, удобно рассмотреть ее в двух положениях, как это показано на рис. 9.1. Формула на этом рисунке, дающая выражение для результирующей силы, получена Линем [85]. Перемещающаяся нить ζ_0 меняет поле завихренности на новом уровне. Это приводит к тому, что недостаток или избыток завихренности распространяется в прилегающие слои. Вначале сила, действующая на частицу, равна нулю, но при возмущении поля скорости порождается неуравновешенная вертикальная компонента. В случае монотонного профиля завихренности при малом смещении частицы эта сила стремится вернуть ее в первоначальное состояние. В точке перегиба профиля скорости эта сила равна нулю, и частица продолжает двигаться под влиянием начального импульса. Легко заметить, что такое объяснение пригодно лишь для самой точки перегиба, так как вне ее вихрь сразу попадает в область действия стабилизирующих сил. Поэтому данное объяснение пригодно лишь для случая возмущений бесконечно малой амплитуды. Одновременно предполагается, что возмущения не достигают конечной величины.

Для того чтобы дать физическое объяснение крупномасштабных устойчивых возмущений в геофизическом пограничном слое, необходимо привлечь иной механизм. Одним из таких механизмов может быть трехмерное взаимодействие верхних и нижних уровней, приводящее к интенсификации волн Россби. Рисунок 9.1 показывает, что частица конечной величины будет испытывать действие силы, направленной от точки перегиба, до тех пор, пока она не достигнет уровня первоначальной завихренности, но уже по другую сторону от точки перегиба.

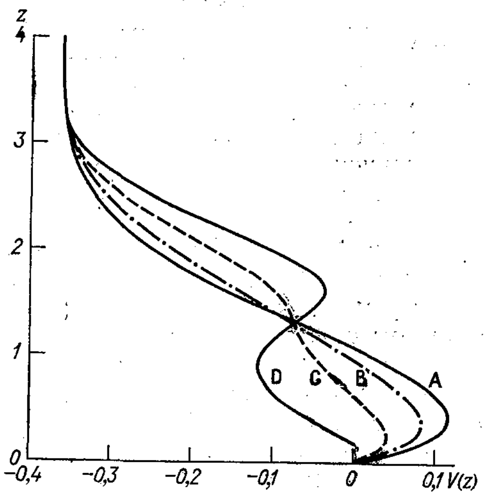


Рис. 9.2. Поперечные составляющие экмановского профиля скорости (**A**), *рассчитанные с учетом переноса импульса конечными возмущениями. Возмущение с волновым числом 0,5 отклонено на $\varepsilon=20°$ влево от геострофического ветра V_g. Длина волны и высота нормированы экмановским масштабом. Амплитуды возмущений составляют 2%* (*случай* **B**), *5%* (**C**) *и 10%* (**D**). $\mathrm{Re}=900$, $\varepsilon=20°$, $\alpha=0{,}50$.

Еще один механизм может быть обеспечен нелинейным переносом импульса. Если перемещающаяся частица переносит свой импульс, то вокруг начальной точки возникают две симметричные точки перегиба, что сопровождается нелинейным механизмом роста возмущения. На рис. 9.2. показано искажение экмановских профилей, рассчитанное методом, изложенным ниже, для различных амплитуд возмущений. Предполагается, что при этой деформации работа напряжений Рейнольдса передает энергию от среднего потока к возмущению.

9.3. ВЫВОД И ПРИВЕДЕНИЕ К БЕЗРАЗМЕРНОМУ ВИДУ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Трудность проблемы состоит в том, что мы имеет слишком много независимых переменных. Устойчивость должна исследоваться в зависимости от чисел Рейнольдса Re, Рэлея Ra, Россби Ro, Прандтля Pr, интегрального или локального числа Ричардсона Ri или Ri_l, ориентации потока ε, параметра шероховатости δ и волнового числа α. Число параметров можно уменьшить или воспользоваться автомодельностью экмановского профиля по δ и следующими соотношениями: $Ro=Re/2$ и $Ra=Re^2PrRi$. К тому же масштабный анализ безразмерных уравнений указывает на то, что зависимость от Re и Pr должна быть слабая. Это подтверждается последующими результатами, которые также указывают, что локальное число Ричардсона Ri_l имеет ряд преимуществ перед интегральным. Поскольку остается еще зависимость от Re (слабая), Ri, ε и α, при графическом представлении приходится фиксировать какой-то параметр или на каком-либо характерном геофизическом значении, или на предельной величине (так, например, мода в точке перегиба сравнительно слабо зависит от Re при $Re>500$).

Дадим вывод полных уравнений теории устойчивости с учетом стратификации, вращения и вязкости, обращая особое внимание на приведение уравнений к безразмерному виду. Окончательная система уравнений восьмого порядка оказывается слишком громоздкой для решения практических задач. Поэтому целесообразно исследовать различные предельные случаи. В частности, оказывается, что случай отсутствия вязкости и вращения качественно верно описывает динамическую неустойчивость, хотя добавление вязкости необходимо с математической точки зрения.

Во всех случаях приходится прибегать к численному решению уравнений теории устойчивости, которое сводится к исследованию собственных функций в пределах изменения каждого свободного параметра. Хотя полученные результаты имеют определенный интерес, численный анализ выпадает за рамки этой книги. Однако способы вывода и упрощения уравнений устойчивости типичны для анализа пограничного слоя.

Для случая экмановского слоя можно исследовать профили для всех возможных двумерных возмущений с углом ориентации до 180° (еще больший поворот дает симметричную ситуацию). На рис. 9.3 показано, как изменяется профиль скорости в зависимости от ориентации возмущения. Угол ε определяется как угол между осью x (нормальной к плоскости, в которой находится возмущение) и вектором геострофического ветра, отсчитываемым против часовой стрелки.

Рассмотрим уравнения Навье—Стокса (с учетом вращения) с постоянными коэффициентами вязкости и теплообмена K_m и K_h:

$$\dot{\mathbf{V}}+2\boldsymbol{\Omega}\wedge\mathbf{V}+\nabla p/\rho+\mathbf{g}-K_m\nabla^2\mathbf{V}=0,$$
$$\dot{\rho}+\rho\nabla\cdot\mathbf{V}=0,$$
$$\dot{T}+(p/\rho c_p)\nabla\cdot\mathbf{V}-K_h\nabla^2 T=0,$$
$$p=\rho RT. \qquad (9.2)$$

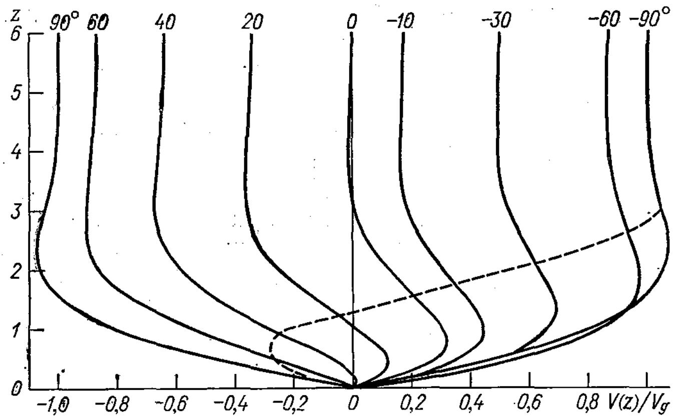


Рис. 9.3. Поперечные составляющие экмановского профиля скорости при различных углах ориентации ε.

Пунктирная линия — высота точки перегиба.

В буссинесковском приближении безразмерные уравнения для возмущения имеют вид:

$$\chi u_t + V u_y - \psi_y \bar{U}_z - \frac{1}{\mathrm{Ro}} \psi_z - \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 u = 0,$$

$$\chi \psi_{zt} + V \psi_{zy} - \psi_y V_z + \frac{1}{\mathrm{Ro}} u - \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \psi_z + D p_y = 0,$$

$$\chi \psi_{yt} + V \psi_{yy} - g_0 (T/\bar{T}) - \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \psi_y - D p_z = 0,$$

$$\chi T_t + V T_y - \psi_i \theta_z - \frac{1}{\mathrm{Re\,Pr}} \nabla^2 T = 0, \qquad (9.3)$$

где

$$v = \psi_z, \quad w = -\psi_y,$$

ψ — функция тока, $\chi = L/Gt$, $\mathrm{Ro} = G/fL$, $\mathrm{Re} = GL/K_m$, $D = P_0/\rho_0 G^2$, $\mathrm{Pr} = K_m/K_h$, $g_0 = gL/G^2$, $\theta_z = (\bar{T}_z + g/c_p)(L/\Delta T_0)$. Черта сверху над V опускается; t, L, G — произвольные масштабы длины.

Так как масштабы длины или времени не входят в эту систему, они составлены из параметров, входящих в уравнения и граничные условия. Такими параметрами являются, например, $f[1/t]$ и $G[L/t]$, $K[L^2/t]$. Параметр D фигурирует в уравнениях только при члене с давлением, поэтому его можно исключить либо переопределением давления, либо перекрестным дифференцированием и вычитанием одного уравнения из другого. Ускорение силы тяжести входит только в член, учитывающий плавучесть, поэтому он пропадает при отсутствии стратификации. В этом случае остаются три возможных масштаба длины и времени. Они перечислены в табл. 9.1. Если речь идет об оценке членов уравнения, в качестве масштабов можно принять любые из них. Выбор имеет принципиальное значение лишь при переходе к пределу по одному из параметров. В этом случае при неверном выборе масштаба в предельном случае можно получить как тривиальные, так и противоречивые результаты. Это соображение становится очевидным для представленной системы, так как при любом выборе масштабов уравнения будут содержать единственный безразмерный параметр $\xi = (2Kf)^{1/2}/G = 1/\mathrm{Ro} = 2/\mathrm{Re}$. Заметим, что выбор характерного времени определяет лишь коэффициент при инерционном члене. Если не рассматривается предельный случай, этот коэффициент впоследствии появляется как множитель, определяющий скорость эволюции.

Таблица 9.1

Длина		Время	
Параметр	Величина	Параметр	Величина
K/G	0,1 м	K/G^2	10^{-2} с
$(K/f)^{1/2}$	100 м	$(K/f)^{1/2}/G$	10 с
G/f	10^5 м	$1/f$	10^4 с

Если в качестве масштабов выбраны $t=1/f$ и $L=G/f$ и совершен предельный переход $\xi\to 0$ (отсутствие вязкости), мы приходим к уравнениям, описывающим геострофический или инерционный поток. Если в качестве масштаба длины выбирается K/G, коэффициент ξ^2 появляется лишь при кориолисовых членах, так что при $\xi\to 0$ получается уравнение, не учитывающее вращение. При $\xi\to\infty$ следуют тривиальные соотношения.

При выборе экмановского масштаба длины $(K/f)^{1/2}$ в стационарном случае получаются экмановские уравнения. Для того чтобы сохранить нестационарность, в качестве масштаба времени надо выбрать L/G. Получим:

$$u_t+Vu_y-\psi_y U_z-\frac{1}{2}\xi\nabla^2 u-\xi\psi_z=0,$$

$$\psi_{zt}+V\psi_{zy}-\psi_y V_z-\frac{1}{2}\xi\nabla^2\psi_z+\xi u+Dp_y=0,$$

$$\psi_{yt}+V\psi_{yy}-\frac{1}{2}\xi\nabla^2\psi_y+g_0 T/\overline{T}-Dp_z=0,$$

$$T_t+VT_y-\theta_z\psi_y-\frac{\xi}{2\mathrm{Pr}}\nabla^2 T=0. \qquad (9.4)$$

Имеем четыре уравнения восьмого порядка для неизвестных u, ψ, p и T. Предполагается, что возмущение первого порядка имеет вид

$$\begin{Bmatrix}\psi\\ u\\ T\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\varphi\\ \mu\\ \tau\end{Bmatrix}\exp\left[i\alpha(y-ct)\right];$$

где α — волновое число, c — комплексная переменная, в которой вещественная часть есть волновая скорость, а мнимая — декремент роста или затухания. Исключая перекрестным дифференцированием давление, получаем:

$$
\begin{gathered}
\{(V-c)\varphi''-[V''+\alpha^2(V-c)]\varphi-(\varphi''''-2\alpha^2\varphi''+\alpha^4\varphi)/(i\alpha\xi)\}+ \\
+(2/i\alpha\xi)\mu'+(g_0/\overline{T})\tau=0, \\
(V-c)\mu-U'\varphi-(\mu''-\alpha^2\mu)/(i\alpha\xi)-(2/i\alpha\xi)\varphi'=0, \\
(V-c)\tau-S\overline{T}\varphi-(\tau''-\alpha^2\tau)/(i\alpha\xi\,\mathrm{Pr})=0,
\end{gathered}
\tag{9.5}
$$

где $S\equiv\theta_z/\overline{T}$.

Система теперь включает уравнения для функции тока, u-компоненты (связанные с системой через кориолисов член) и уравнение переноса тепла (связанное с системой через член, описывающий эффекты плавучести). Исключив τ, получаем:

$$
\begin{gathered}
\left\{\left[(D^2-\alpha^2)-\frac{2i\alpha P}{\xi}(V-c)\right]\left[(D^2-\alpha^2)^2-\frac{2i\alpha}{\xi}(V-c)(D^2-\alpha^2)+\right.\right. \\
\left.\left.+\frac{2i\alpha}{\xi}V''\right]-\alpha^2\,\mathrm{Ra}\right\}\varphi+\left\{\left[(D^2-\alpha^2)-\frac{2i\alpha P}{\xi}(V-c)\right]\left(i\xi\overline{T}D\right)\right\}\mu=0, \\
\left[(D^2-\alpha^2)-\frac{2i\alpha}{\xi}(V-c)\right]\mu-\left(D-\frac{i\alpha U'}{\xi}\right)\varphi=0.
\end{gathered}
\tag{9.6}
$$

$$
\mathrm{Ra}\equiv-\frac{4\,\mathrm{Pr}\,\mathrm{Ri}}{\xi^2}=\frac{g\left(\overline{T}_z+g/c_p\right)\delta^4}{\overline{T}K_hK_m},
$$

$$
\mathrm{Ri}=\frac{g}{\overline{T}}\frac{\left(\overline{T}_z+g/c_p\right)}{(G/\delta)^2},
$$

$$
\xi=\frac{\sqrt{2Kf}}{G}=\frac{\delta f}{G}=\frac{1}{\mathrm{Ro}}=\frac{2}{\mathrm{Re}},
$$

где D — оператор $\partial/\partial z$.

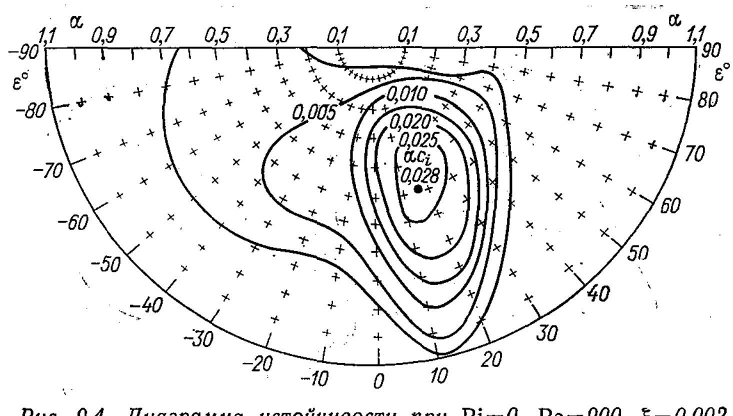


Рис. 9.4. Диаграмма устойчивости при Ri=*0,* Re=*900,* ξ=*0,002,* Ra=*0.*

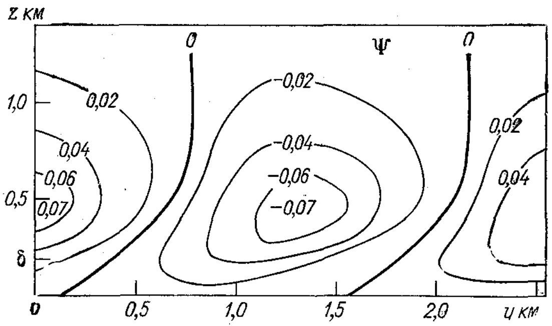


Рис. 9.5. Функция тока для вторичного течения при $G=10$ м/с и $\delta=215{,}5$ м, $\mathrm{Re}=1275$, $\varepsilon=20°$ $\alpha=0{,}5$.

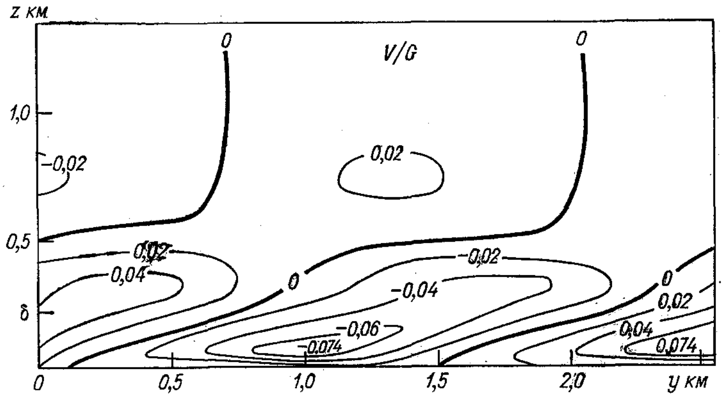


Рис. 9.6. То же, что на рис. 9.5, но для поперечных составляющих вторичного потока.

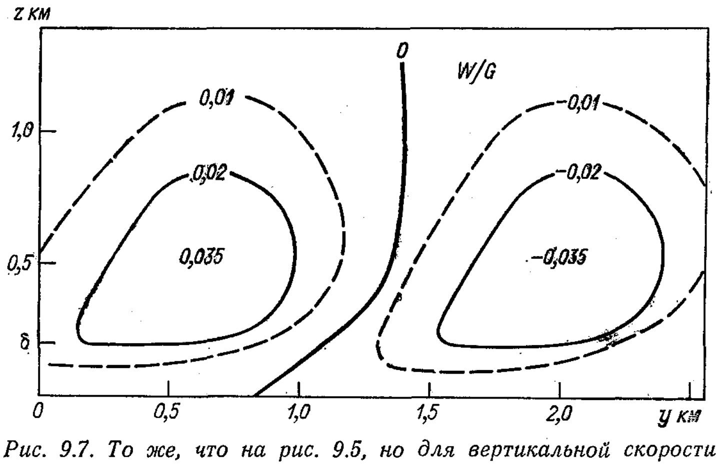


Рис. 9.7. То же, что на рис. 9.5, но для вертикальной скорости во вторичном потоке.

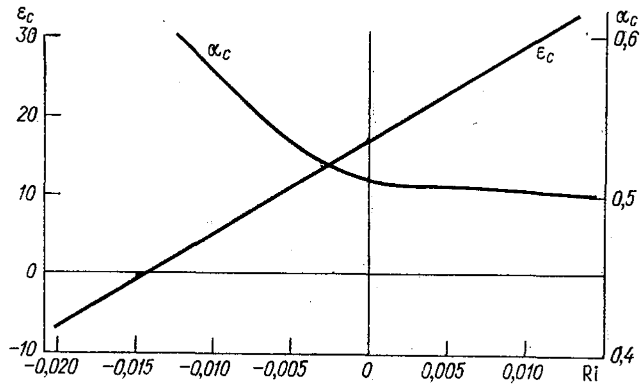


Рис. 9.8. Изменение угла ориентации вторичного потока ε_c и волнового числа α_c, в зависимости от Ri.

Свести систему к одному уравнению для φ затруднительно. Можно получить одно уравнение восьмого порядка для τ. Применение разложения в ряд очень громоздко, так как вероятность ошибки велика. Это обстоятельство, а также то, что такого рода вычисления связаны с большими затратами машинного времени, привели к тому, что решение свелось к исследованию ряда частных проблем. Такой подход основан на предположении, что полную задачу устойчивости можно исследовать с помощью различных частных случаев. Такими, например, являются системы уравнений шестого порядка, полученные пренебрежением кориолисовых и вязких членов или шестого порядка без кориолисовых сил. Численное решение системы уравнений восьмого порядка, полученное в [55], показывают, что для $\mathrm{Re}<500$ весьма существенны кориолисовы эффекты и вязкость. Система шестого порядка с экмановским профилем скорости в пренебрежении лишь эффектами стратификации решена Лилли [84]. Пренебрегая кориолисовыми силами и эффектами стратификации, мы получаем хорошо изученное уравнение четвертого порядка, известное под названием уравнения Орра—Зоммерфельда. В данном случае в качестве параметра оно содержит экмановский профиль скорости

$$(V-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi)-V''\varphi=\frac{1}{i\alpha\,\mathrm{Re}}(\varphi''''-2\alpha^2\varphi''+\alpha^4\varphi). \qquad (9.7)$$

Заметим, что формальными предельными переходами в уравнении (9.6) для случая нейтральной стратификации являются $\mathrm{Ra}\to 0$ и $\xi\to 0$. Последний предел получается при устремлении к нулю либо параметра Кориолиса, либо вязкости. Это является следствием того, что силы Кориолиса и трения по порядку величины равны друг другу.

Для геофизического пограничного слоя характерным значением является $\xi \leqslant 0{,}002$. Наличие точки перегиба характерно скорее для случая невязкой жидкости. При $\xi \to 0$ получаем уравнение

$$\varphi'' - \left(\alpha^2 + \frac{V''}{V-c}\right)\varphi = 0. \tag{9.8}$$

Исследование этого уравнения и введение точки перегиба как критерия неустойчивости было сделано Рэлеем в 1880 г. Достаточность этого критерия была показана Толлмином в 1929 г. Предельный переход по ξ, понижающий уравнения до второго порядка с соответствующим изменением граничных условий, называется сингулярным возмущением. Уравнение становится также сингулярным в точке $V = c_r$. Этой проблеме посвящено немало работ (см. [126]). В частности, установлено, что там, где $V = c_r$ (критический слой), становятся существенны эффекты вязкости. Вместе с тем решение уравнения для сингулярного возмущения не подходит для всего интервала независимых переменных, так как для разных ситуаций масштабы длины или скорости могут оказаться различными.

Это отступление необходимо для того, чтобы дать разумное объяснение восстановлению в уравнениях силы вязкости без учета силы Кориолиса. Обоснованность такого рассуждения подтвердили численные эксперименты по устойчивости [36] для различных предельных уравнений при $\xi < 0{,}002$.

Пример неустойчивых мод дан на рис. 9.4. Длина растущей волны связана с максимальной скоростью роста αc_i. Поскольку экмановские профили скорости зависят от ориентации, скорость роста рассматривается в зависимости от ε. Для $\xi \leqslant 0{,}002$ максимальная скорость имеет место при $\varepsilon = 18°$, $\alpha = 0{,}5$. Вертикальная структура возмущений показана на рис. 9.5, 9.6 и 9.7.

Изменение α и ε для критической скорости роста в зависимости от стратификации дано на рис. 9.8.

9.4. РЕЗЮМЕ

Для практической параметризации геофизической проблемы устойчивости предполагается, что существует реалистическое с физической точки зрения решение предельных уравнений. Эти уравнения могут быть получены при выборе подходящих масштабов и тщательном контроле поведения существенных переменных. В этом случае мы имеем сингулярное возмущение полной системы с понижением порядка уравнений и, следовательно, числа граничных условий. В связи с этим к интерпретации получаемых результатов надо подходить с известной долей осторожности.

Имея в виду, что для условий атмосферы $\xi=(2Kf)^{1/2}/V_g\approx 10^{-3}$, для уравнения (9.8) был рассмотрен предельный случай при $\xi\to 0$, в котором параметрами являются волновое число, его вторые производные и число Ричардсона. Это приближение оказывается вполне пригодным для параметризации проблемы устойчивости с учетом стратификации. Это позволяет понизить чувствительность конвективной неустойчивости к выбору масштабирующего параметра δ, которая представляется физически малообъяснимой из-за того, что параметру δ трудно приписать четкий физический смысл. Тем не менее в случае $\delta=0$ уравнения второго порядка, а также вязкие уравнения четвертого и шестого порядка показывают, что устойчивость зависит как от средней скорости, так и от второй ее производной, для вычисления которой требуются довольно детальные сведения о среднем профиле. Вместе с тем качественное подобие результатов для самых различных профилей скорости указывает на то, что эта зависимость оказывается довольно слабой. Численные решения указанных предельных уравнений показывают, что скорость роста для любой моды при уменьшении ξ почти не меняется.

К сожалению, предельный переход $\xi\to 0$, приводящий к понижению порядка уравнений с восьмого до второго, для интервала, представляющего интерес, дает сингулярное уравнение. Из решения такого уравнения следуют физически реалистичные результаты только в том случае, если они являются асимптотическим пределом решения несингулярного уравнения более высокого порядка. Сингулярность может быть исключена введением вязких членов. Это связано с тем, что вязкость играет важную роль не только вблизи границы, но и в окрестности критического слоя, где $V=c$.

Уравнение четвертого порядка для нейтральной стратификации для любого набора параметров имеет одно неустойчивое собственное число, очевидным образом связанное с точкой перегиба. Фазовая скорость, соответствующая этому собственному значению, близка к средней скорости в точке перегиба. Расслоенность собственных мод, заметная на рис. 9.4, объясняется тем, что аналитический экмановский профиль имеет бесконечное число точек перегиба. Профили на рис. 9.3 показывают, что при $\varepsilon=90°$ точка перегиба находится на высоте $z=0$, при уменьшении угла она смещается вверх и при $\varepsilon=-90°$ достигает высоты $z=\pi$. Более высоко расположенные точки перегиба соответствуют очень малой скорости роста мод. Такие тонкие детали совершенно невозможно обнаружить по наблюдениям, поэтому верхние точки перегиба из рассмотрения исключаются.

Действие неустойчивой стратификации на параметры, характеризующие максимально возможную скорость роста ε_c и α_c, проявляется в том, что волны становятся короче, а угол ориентации уменьшается. Влияние устойчивой стратификации само по себе несущественно по сравнению с теми эффектами, которые сопровождают ослабление турбулентности и уменьшение коэффициента вязкости. Численные эксперименты Брауна [36] показали, что при $\mathrm{Ri}_l=0{,}25$ скорость роста амплитуды неустойчивых мод равна нулю.

Приведенный выше анализ, разумеется, применим лишь к случаям сверхкритических чисел Рейнольдса ($\mathrm{Re}>50$), когда существенны эффекты стратификации. В этом случае необходима какая-либо параметризация мелкомасштабной турбулентности. Это можно сделать лишь довольно грубо. Использование постоянного значения K является первой аппроксимацией, которая дает результаты, мало чувствительные к изменению формы профиля. Поскольку неустойчивость проявляется во вращении вектора ветра, точный вид экмановской спирали вряд ли можно считать установленным. Понятно, что пригодность какой-либо модели к реальной атмосфере определяется ее малой чувствительностью к параметрам, которые измеряются сравнительно неточно. Приведенные результаты показывают, что в качественном отношении неустойчивость может быть характерна для широкого диапазона параметров.

10. МОДЕЛЬ ВТОРИЧНОГО ПОТОКА

10.1. ВВЕДЕНИЕ

Повышение значения проблемы параметризации мезо- и крупномасштабного пограничного слоя, а также накопление данных, свидетельствующих о том, что стационарный вторичный поток в пограничном слое реально существует, послужили причинами развития теории этого явления. Когда вторичный поток мал по сравнению со средним, он может исследоваться как возмущение последнего. Тем не менее члены, описывающие перенос импульса, могут быть сравнимы по величине с ускорением среднего потока. Это отражает тот факт, что вторичный поток может существенно изменять среднее течение. Если эти члены ввести в уравнение для среднего движения, можно получить модифицированное решение. Решение такого рода было получено для случая конвекции (проблема Рэлея) [89], для течения Пуазейля (между коаксиальными цилиндрами), для самого общего случая [115] и для экмановского пограничного слоя [35].

Описание рассматриваемой ниже модели распадается на три части: 1) анализ устойчивости, отыскание формы наиболее быстро растущих возмущений; 2) описание равновесного баланса энергии для исследования вопроса о реальности устойчивого состояния при наличии возмущений конечной амплитуды; 3) отыскание модифицированного решения для среднего потока с учетом вторичного течения.

10.2. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Прежде чем перейти к собственно модели пограничного слоя, необходимо, пожалуй, указать на некоторые невыясненные моменты. Используемые ниже достаточно произвольные допущения сочетаются с приблизительным подходом, поэтому единственным критерием реалистичности модели может быть согласование с экспериментальными данными.

Мы уже указывали выше, что понятие турбулентной вязкости для атмосферы вводится по аналогии с молекулярной. В теории устойчивости, применяемой для определения формы вторичного потока, используется заданный профиль средней скорости. Поперечная составляющая экмановского решения уже сама по себе является неустойчивой, что проявляется уже на ранней стадии развития из состояния покоя. С учетом термических эффектов проблема чрезвычайно усложняется, так как устойчивость очень сильно зависит от стратификации. В случае конвекции необходимо рассматривать взаимодействие двух механизмов неустойчивости — динамической и термической. Как показано в предыдущей главе, численное интегрирование уравнений теории устойчивости показывает, что неустойчивость при довольно широком интервале, включающем нейтральный случай, носит преимущественно динамический характер. Внутри всего этого интервала поведение неустойчивой моды примерно одинаково.

В случае планетарного пограничного слоя возникает еще одно существенное затруднение. До сих пор сам факт вращения системы координат выражался лишь в появлении дополнительной силы — кориолисовой. Если этот член учесть в анализе устойчивости, возникает возможность обмена энергией между продольной и поперечной компонентами. Это чрезвычайно затрудняет анализ, в особенности для случая устойчивой стратификации, когда различные моды подавляются с разной скоростью и возникает возможность генерации резонансных волн (см. [70]).

Вследствие того что уравнения линейной модели однородны амплитуда возмущения не определена. Для того чтобы ее вычислить, необходимо рассмотреть уравнения баланса энергии. До сих пор предполагалось, что возмущения изменяют поток таким образом, что на их рост энергия в целом не тратится (т. е. энергия расходуется только на диссипацию). Если такое равновесие возможно при условии, что вторичный поток достаточно велик, для того чтобы его можно было считать существенным, и в то же время мал, чтобы он трактовался как возмущение, модель может принести успех.

Поскольку профиль скорости сам изменяется под воздействием возмущений, можно ожидать, что это в свою очередь повлияет на возмущение. Это вызывает необходимость привлечения трудоемкой итерационной процедуры. Тем не менее уже известно, что форма возмущений (т. е. длина наиболее быстро растущей волны) относительно нечувствительна к изменениям средней скорости, причем к тому моменту, когда эти изменения станут заметны, амплитуда начального возмущения возрастет очень сильно.

Конечный профиль будет все еще содержать точки перегиба, свидетельствующие о том, что он остается неустойчивым к малым возмущениям. Тем не менее, поскольку энергетический критерий указывает на то, что профиль является устойчивым, точки перегиба могут быть выражены слабо, а возмущения могут быстро размываться.

Вслед за этим кратким вступлением перейдем к изложению теории вторичного потока.

10.3. УРАВНЕНИЯ ВТОРИЧНОГО ПОТОКА

10.3.1. *Уравнения*

Приводя уравнение (9.1) к безразмерному виду, используя масштабы G и δ и выбирая систему координат, ориентированную по возмущению, получим:

$$U(z) = \cos\varepsilon - e^{-z}\cos(z+\varepsilon),$$
$$V(z) = -\sin\varepsilon + e^{-z}\sin(z+\varepsilon), \tag{10.1}$$

где ε — угол между геострофическим ветром и возмущением. Форма профиля $V(z)$ показана на рис. 9.3. Если этот профиль учесть в уравнении (9.7) (или в любой модификации этого уравнения) в результате можно найти форму возмущения. В случае нейтральной стратификации наибольшая скорость роста имеет место при $\varepsilon=0$ (так же, как для случаев небольших по абсолютной величине отрицательных Ri). Вертикальный профиль представляет собой волну, с максимумом вблизи $z=\delta$ и затухающую выше этого уровня.

10.3.2. *Баланс энергии*

Уравнение баланса энергии строится для того, чтобы оценить, как много энергии затрачивается на ее рост, и отыскать условия равновесия. Мы будем использовать уравнение энергии для экмановского слоя, осредненное по длине волны вторичного потока,

$$\frac{\partial E_2}{\partial t} = \int_0^H \int_0^\lambda \{-(uw U_z + vw V_z) + w T_g/\overline{T} - (vp_y + wp_z)/\rho\}\, dy\, dz. \tag{10.2}$$

В левой части уравнения стоит скорость эволюции средней энергии вторичного потока. Первый член справа есть обмен энергией между возмущением и средним потоком, второй — работа, затрачиваемая на преодоление вторичным потоком сил плавучести, а последний — скорость перераспределения энергии в пограничном слое. Последний член при интегрировании по всему слою обращается в нуль. В уравнении (10.2) диссипацией пренебрегается. Это упрощение подтверждается масштабным анализом (таким же, как в 9.3), из которого следует, что эффектами вязкости можно пренебречь. Физически этот результат следует из того, что существует большое различие в масштабах вторичного потока и турбулентных вихрей. Разумеется, при необходимости в уравнении 10.2 можно учесть и диссипацию.

В случае нейтральной стратификации условие энергетического равновесия $\partial E_2/\partial t=0$ дает

$$\int_0^H \overline{vw} V_z\, dz = 0 \tag{10.3}$$

(черта сверху означает осреднение по y). Это условие ограничивает амплитуду возмущения.

Любопытно, что энергия переносится от среднего потока к возмущению в нижней части пограничного слоя, а в обратном направлении — в верхней. Это следует из сравнения модифицированного профиля с исходной спиралью Экмана.

10.3.3. *Модифицированные уравнения для среднего потока*

Из решения уравнений (9.7) и (10.3) следует, что распределение амплитуды возмущения определяет и величину вторичного потока. Полный перенос импульса от среднего течения к вторичному и обратно объясняется тем, что в уравнении появляется дополнительный член:

$$2V+U_{zz}=0,$$
$$2U-V_{zz}-A\,\mathrm{Re}; \qquad (10.4)$$

где A — вклад, даваемый членом $\overline{wv_z}$ (единственный не нулевой момент, обязанный своим происхождением вторичному потоку).

Среднее течение удобно представить как сумму экмановской составляющей и среднего отклонения $V=V_E+\bar{v}$. Уравнения для отклонения следуют из (10.4):

$$\bar{v}(z)=C_1\,\mathrm{ch}\,z\sin z+C_2\,\mathrm{sh}\,z\cos z-$$
$$-2\,\mathrm{Re}\int_0^z \mathrm{ch}(z-\xi)\cos(z-\xi)\,A(\xi)\,d\xi,$$
$$\bar{u}(z)=C_1\,\mathrm{sh}\,z\cos z-C_2\,\mathrm{ch}\,z\sin z+$$
$$+2\,\mathrm{Re}\int_0^z \mathrm{sh}(z-\xi)\sin(z-\xi)\,A(\xi)\,d\xi, \qquad (10.5)$$

где

$$C_1=\mathrm{Re}\int_0^{z_{\max}}\left(S\,\mathrm{ch}\,\bar{\xi}\cos\bar{\xi}-T_1\,\mathrm{sh}\,\bar{\xi}\sin\bar{\xi}\right)A(\xi)\,d\xi,$$
$$C_2=\mathrm{Re}\int_0^{z_{\max}}\left(T_1\,\mathrm{ch}\,\bar{\xi}\cos\bar{\xi}+S\,\mathrm{sh}\,\bar{\xi}\sin\bar{\xi}\right)A(\xi)\,d\xi,$$
$$T_1=\mathrm{sh}\,z_{\max}\sin z_{\max}/D,\quad S=\mathrm{ch}\,z_{\max}\sin z_{\max}/D,$$
$$\bar{\xi}\equiv z_{\max}-\xi,\quad D=\mathrm{sh}^2 z_{\max}+\sin^2 z_{\max}.$$

Величина v зависит от амплитуды вынуждающей функции A, определяемой из (10.3). Вид функции A (т. е. ее вертикальное распределение и длина волны) определяется неустойчивой модой. Таким образом, модифицированный профиль скорости зависит от ε (рис. 10.1). Из анализа устойчивости с учетом стратификации следует, что средний профиль испытывает сильные искажения в виде агеострофической струи вблизи верхней границы пограничного слоя при нейтральной и устойчивой стратификациях. При неустойчивости пограничный слой представ-

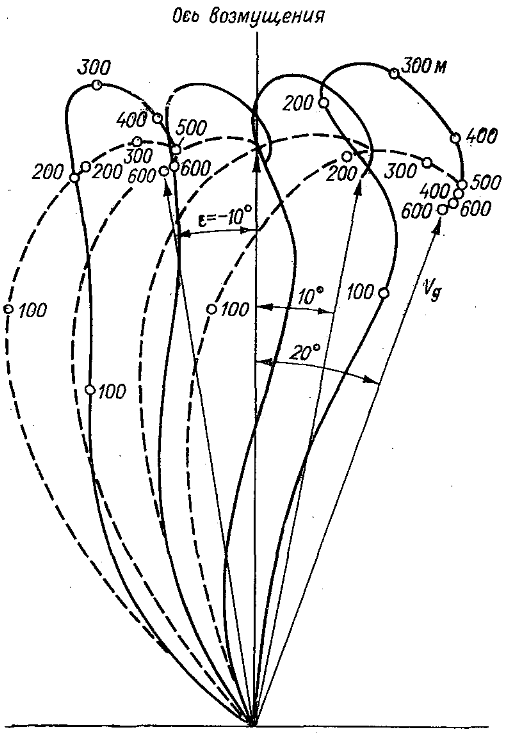


Рис. 10.1. *Годографы средней скорости с учетом вторичного потока.* $V_g=10$ *м/с*, $\Theta=45°$, $\delta=110$ *м.*

Пунктирные линии — профили Экмана, сплошные — модифицированные профили.

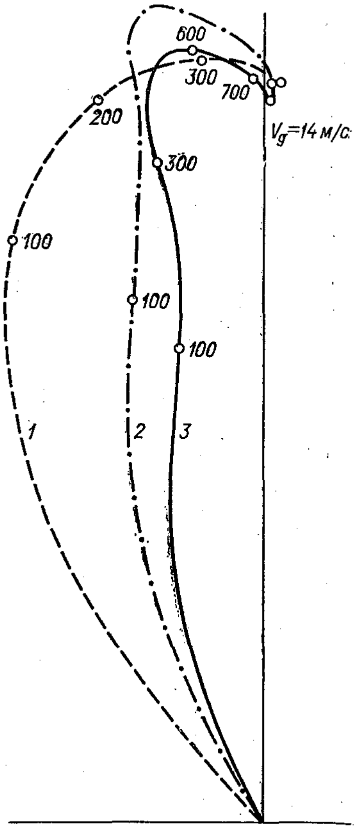


Рис. 10.2. *Годограф среднего ветра, измеренный в Джексонвилле 4 апреля 1968 г.* Re$=3000$, $\Theta=30°$, $\delta=110$ *м*, $\alpha=0{,}5$.

1 — профиль Экмана, 2 — теория ($\varepsilon=0$), 3 — наблюдаемый профиль (термический ветер исключен).

ляет собой почти плоскопараллельный поток. Рассчитанный с учетом искажений годограф для конкретных условий, показанных на фото 2, дан на рис. 10.2. Наблюдаемый угол ε был близок к нулю.

Хорошо различимые на фото 1 «облачные улицы» являются превосходным примером явления, которое хорошо знакомо специалистам, имеющим дело со спутниковыми фотографиями. Такие облачные структуры встречаются довольно часто, поэтому они могут использоваться как индикатор направления ветра (дующего параллельно полосам). Этот вопрос изучался в [71].

Фото 2 свидетельствует, что облачные полосы, параллельные среднему ветру, встречаются также на краях струйного течения. На фотографии можно также обнаружить признаки того, что «облачные улицы» встречаются вблизи поверхности. Очень хорошо различимые отдельные ячейки показывают, что в формировании общей картины важную роль играет конвективная неустойчивость. На поверхности хорошо также различимы песчаные дюны. Наиболее ясно они заметны на фото 3. Имеются данные о том, что существует корреляция между длиной волны и ориентацией дюн по отношению к преобладающему ветру, что является одним из интересных свидетельств вторичного потока [61].

10.4. РЕШЕНИЕ ДЛЯ ВТОРИЧНОГО ПОТОКА

10.4.1. *Метод решения*

Теперь мы располагаем уравнениями, достаточными для того, чтобы воспроизвести полную картину течений в пограничном слое; экмановский профиль скорости известен из уравнений (4.12), распределение $A(z)$ — из (9.7), величина равновесного вторичного потока — из (10.3), средний поток — из (10.5) и, наконец, распределение скорости во вторичном потоке можно определить с помощью функции тока.

Процедура численной реализации модели состоит из следующих этапов:

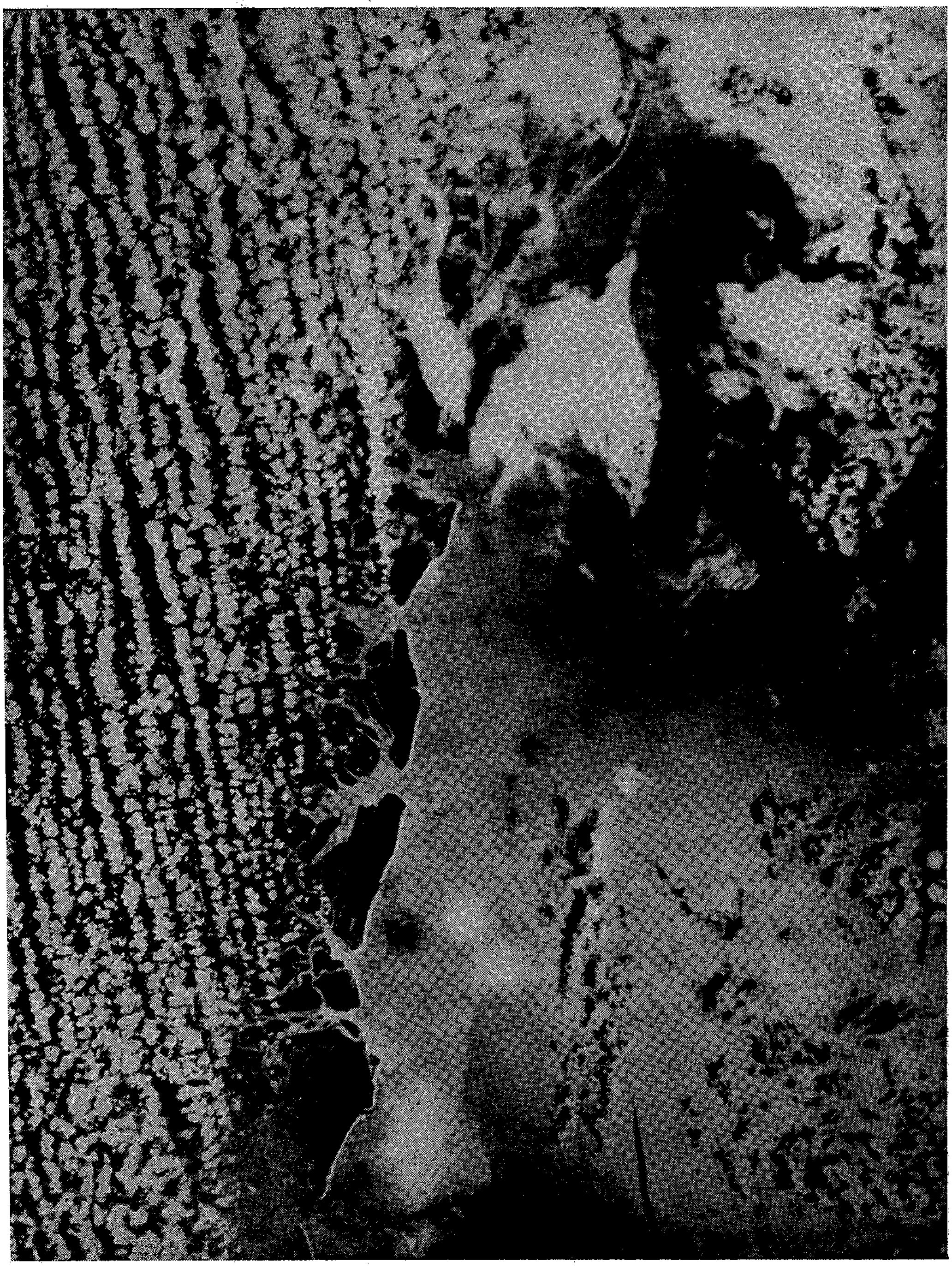
1. Расчет компонент экмановского слоя по синоптическим данным с учетом среднего параметра δ. Этот параметр представляет собой экмановскую глубину трения или масштабы длины в показателе экспоненты для поперечной компоненты. Он пропорционален K — эффективному коэффициенту турбулентной вязкости.

2. Нахождение собственных значений и собственных функций уравнения Орра—Зоммерфельда (с учетом стратификации).

3. Решение системы уравнений для равновесного среднего потока и вторичного потока.

Каждый из этих этапов можно существенно усовершенствовать или изменить. Например, чисто конвективная неустойчивость при наличии сдвига порождает продольные вращательные движения, аналогичные по форме структурам, возникающим

Фото 1. Вид побережья Джорджия с высоты 125 миль ▶ (фотография с «Аполлона»).



при динамической неустойчивости. При этом может изменяться функция A и, возможно, α. В уравнении баланса можно ввести диссипацию и таким образом уменьшить энергию, передаваемую вторичному течению. Наконец, можно учесть в среднем потоке наличие термического ветра. Модель, обсуждавшаяся выше, является простейшим вариантом, тем не менее она может быть основой дальнейших шагов в этом направлении.

10.4.2. *Результаты*

Основным результатом, полученным в настоящей главе, является аналитическое решение для планетарного пограничного слоя. Для различных условий стратификации и различных углах ε (величина вторичного потока) составляет от 6 до 12% от G. Критическое волновое число равно 0,5. Оно не зависит

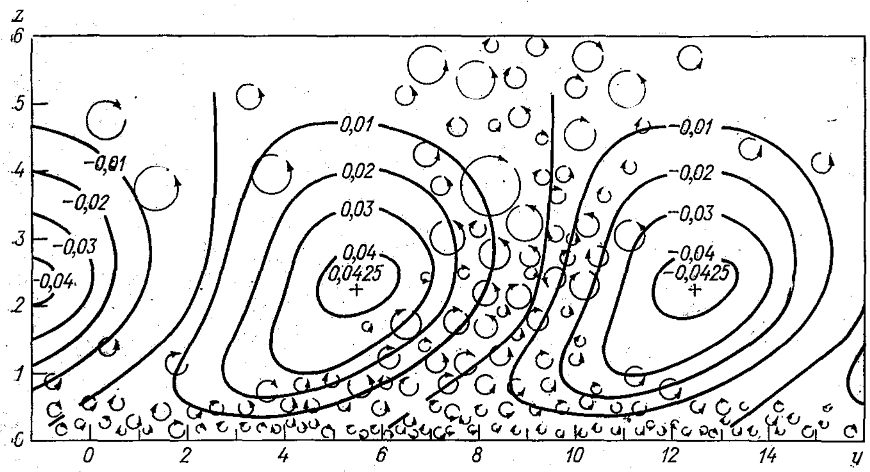
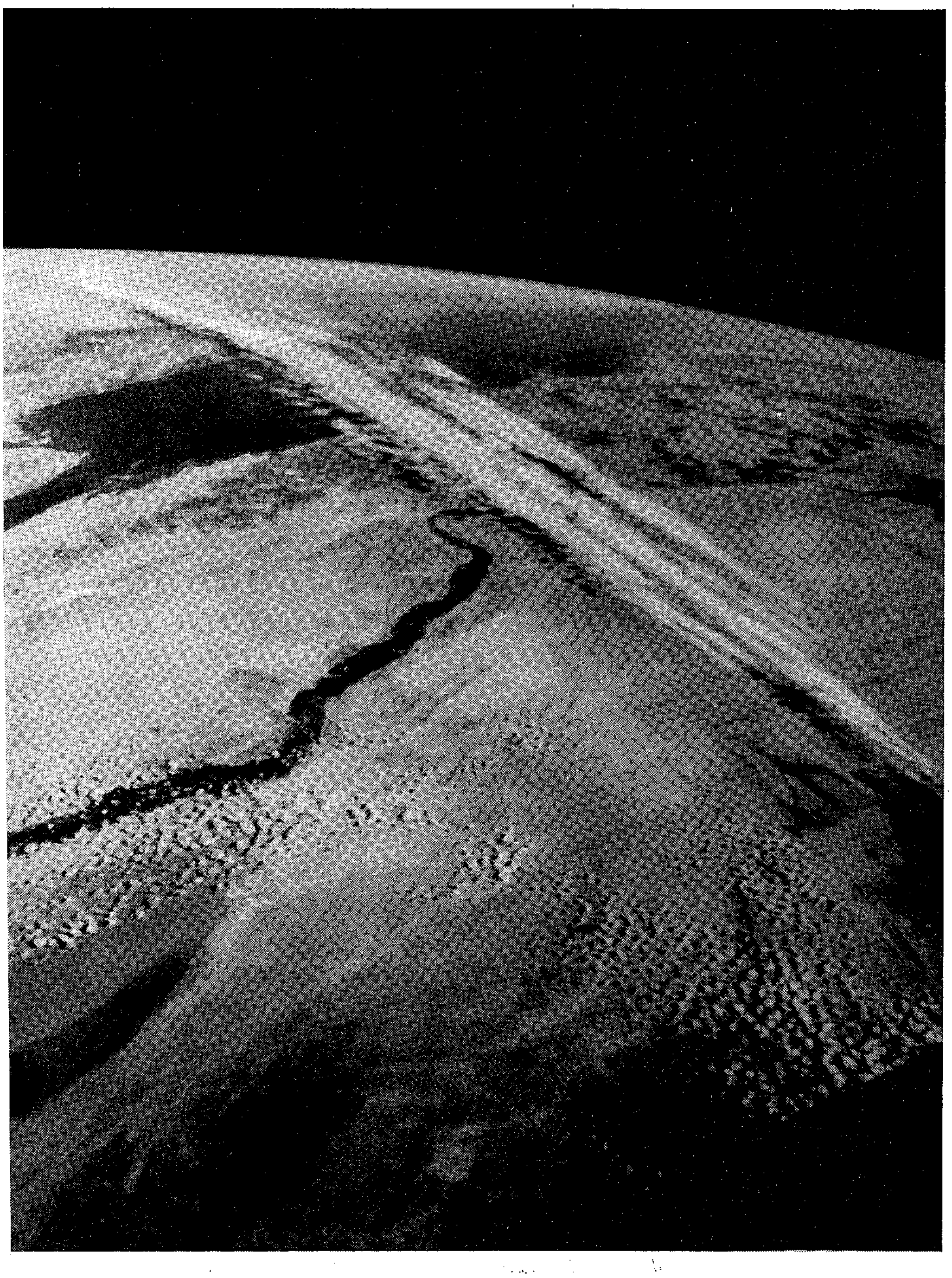


Рис. 10.3. Функция тока для вторичного течения ψ в разрезе. В схематической форме изображено влияние вторичного течения на турбулентность. z и y даны в долях δ. $Re=900$, $\varepsilon=15°$, $\alpha=0{,}5$, $Ri=0$.

от Re и медленно изменяется в зависимости от Ri. Для типичных значений δ это волновое число соответствует длине волны от 1,4 до 3 км. Для океана характерная длина волны составляет 10—40 м. Таким образом, можно предположить существование почти кругового вращательного движения под углом 18° влево от направления геострофического ветра для нейтральной или 0° для умеренно неустойчивой стратификации. Полный поток представляет собой композицию среднего течения и замкнутых ячеек (рис. 10.3 и 10.4). На рис. 10.3 показано поперечное

Фото 2. Струйное течение над Египтом, Саудовской Аравией, Иорданией, долиной Нила и Красным морем (фотография с «Джемини-XI»). ▶



сечение по нормали к возмущению. Сдвиг фазы по вертикали соответствует среднему поперечному сдвигу.

На рисунке предпринята попытка в схематической форме проиллюстрировать способность вторичной циркуляции переносить пассивные субстанции, например турбулентные вихри. На рис. 10.4 изображены вторичные циркуляционные ячейки, накладывающиеся на средний поток.

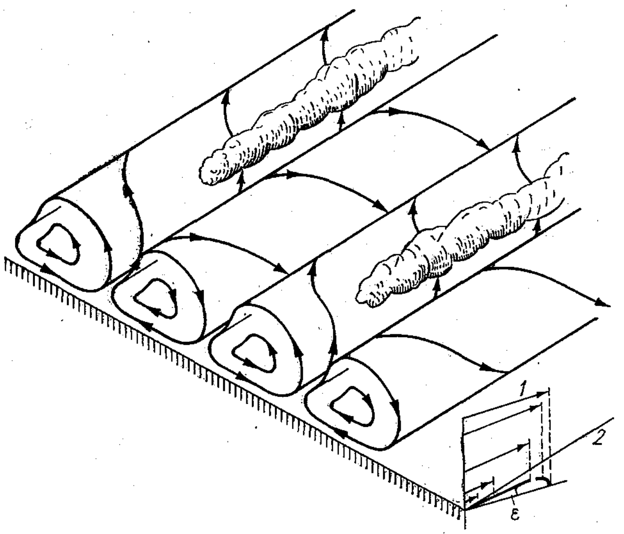


Рис. 10.4. Типичное поле вторичного потока в планетарном пограничном слое (модифицированный экмановский слой).

1 — геострофический ветер, 2 — ось возмущения.

10.5. РЕЗЮМЕ

Решение, обсуждавшееся в этой главе, наводит на ряд соображений. Мы установили, что возмущения в виде вторичной циркуляции можно предсказать по наличию точки перегиба на профиле поперечной компоненты при нейтральной стратификации. Тем не менее форма развивающегося возмущения оказывается в качественном отношении такой же и тогда, когда стратификация заметно отличается от нейтральной. Представляется, что при включении существенно различных источников энергии, например от конвективных движений и даже от вязких мод, нельзя обнаружить существенных качественных различий в ха-

Фото 3. Песчаные дюны (фотография с «Джемини-IV»). ▶

11. ТЕРМИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ

11.1. ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ

До сих пор стратификация учитывалась в моделях лишь в той степени, в какой это удобно для того, чтобы не затруднять понимание нейтральной модели. Так обстояло, например, дело, когда мы касались вопросов интерпретации профильных измерений, когда измерялись одновременно сила трения и распределение температуры. Разумеется, мы нуждаемся в обобщении необходимых соотношений с учетом какого-либо пара метра, характеризующего стратификацию. Этот параметр долж включать отношение скорости притока или расхода эне гии, связанной с эффектами плавучести к другим составляющ энергетического бюджета турбулентных движений. Приме подходящего параметра является число Рэлея, выражак соотношение между силами плавучести и силами вязкости

$$\mathrm{Ra}=\frac{g}{\theta}\,\frac{\theta h^4}{KK_h}.$$

Здесь K_h — коэффициент температуропроводности, опр мый так:

$$\overline{wT}\approx -K_h\theta_z.$$

При наличии сдвига возникает приток энергии ности динамического происхождения, относительный рого характеризуется числом Рейнольдса $\mathrm{Re}=Gh/K$ параметром, характеризующим относительный вкл и продукции, является число Ричардсона

$$\mathrm{Ri}=\frac{\mathrm{Ra}}{\mathrm{Pr}\,\mathrm{Re}^2}=\frac{g\theta_z}{\theta V_z^2}.$$

Обычно принимается, что турбулентное чи является константой. Тем не менее известн чительно отличаться от единицы, особе стратификации.

Существование нескольких вариант кации постоянно является камнем пре схемы параметризации. Вообще говоря, для случая бесконечно протяженного потока над ровной поверхностью мы не располагаем каким-либо априорным масштабом длины. При использовании концепции турбулентной вязкости, масштаб длины имеет вид $\delta=(K/f)^{\frac{1}{2}}$. Если в качестве граничного условия задается трение, масштаб длины может быть выбран в виде u_*/f. Для случая чистой конвекции возможность построить масштаб длины утрачивается, что создает неопределенность при отыскании длины волны неустойчивой моды. Кроме того, неопределенность масштаба длины затрудняет конструирование интегральных чисел Ra и Ri. Интегральные параметры такого рода включают разность граничных значений (верхних и нижних), характеризующую средний градиент скорости или температуры. Так как масштаб длины отсутствует, мы располагаем лишь локальными значениями V_z, θ_z и Ri, которые изменяются с высотой.

Кларк [44], используя данные австралийского эксперимента для всех случаев неустойчивой стратификации, определил высоту инверсии. Инверсия определяется главным образом как слой, в котором резко изменяется режим конвекции. В большинстве случаев высота инверсии оказывается много большей, чем экмановский масштаб для пограничного слоя. Кларк нашел, что при использовании экмановского масштаба вместо высоты инверсии разброс данных получается много меньше.

Это, по всей вероятности, поддерживает гипотезу, что динамические процессы и в случае неустойчивости обычно преобладают.

11.2. КОНВЕКЦИЯ

Исследования конвективного режима начались с экспериментов Бенара в 1901 г. Теоретическое исследование этого вопроса было начато Рэлеем [103], который ввел понятие критического числа (числа Рэлея), при котором возникает неустойчивость. Посредством числа Рэлея длина волны конвективно неустойчивой моды связана с характерной глубиной жидкости. Огура [92] нашел, что критическая длина волны (т. е. длина волны наиболее быстро растущей моды) чрезвычайно чувствительна к боковым граничным и начальным условиям. В [76] показано, кроме того, что между модами существует зависящий от времени сдвиг.

Дальнейшее исследование этой проблемы применительно к геофизическим явлениям сильно тормозится отсутствием подходящих эмпирических данных.

Не ограничиваясь наблюдением ячеек, Бенар также изучал появление полос при наличии среднего движения. Анализ устойчивости такого движения очень сложен (см. [58]). Для применения теории к геофизическому явлению необходим одновременный учет сдвига скорости, вращения, термической неустойчивости и ее взаимодействия с динамической неустойчивостью.

Данные наблюдений со спутников показывают, что мезомасштабная конвекция проявляется как в виде шестиугольных ячеек, так и в виде полос, иногда существующих одновременно. Это согласуется с лабораторными и аналитическими исследованиями, показывающими, что в потоке со сдвигом существует тенденция к подавлению возмущений в плоскости сдвига. Конвекция при этом происходит в виде цилиндрических валов в плоскости, перпендикулярной среднему течению. Если поток существенно трехмерен (как экмановский слой), проблема сильно усложняется. Поскольку проблема конвекции в целом еще очень далека от разрешения, мы вынуждены при аналитических исследованиях иметь дело лишь с ситуациями, когда конвекция по сравнению с чисто динамическими процессами носит подчиненный характер.

11.3. УЧЕТ КОНВЕКЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

11.3.1. *Стратифицированный экмановский слой*

При наличии умеренных вертикальных и горизонтальных градиентов температуры решение для экмановского пограничного слоя остается неизменным. Эффекты бароклинности неявно присутствуют в членах, описывающих давление. Они описывают термический ветер, который может быть наложен на экмановскую или тейлоровскую спираль. Вертикальный градиент температуры благодаря приближению Буссинеска и предполагаемой однородности по горизонтали может быть учтен независимо.

Распространение K-теорий на случай стратифицированного потока требует введения зависимости коэффициента турбулентности от Ri. Вертикальное распределение K будет существенно зависеть от эффектов плавучести, а также от механизма ее генерации и диссипации. Эти механизмы могут быть включены в формулу для K главы 8 [29]. Такой подход дает некоторое продвижение вперед, но и одновременно свидетельствует в пользу того, что применение K, предложенного для нейтральной стратификации, в общем случае также допустимо. Однако в исследовании неустойчивости при сверхкритических числах Ri и построении равновесного решения, включающего вторичный поток, учет стратификации становится важным.

Поведение неустойчивой моды находится в сильной зависимости от числа Ричардсона. Угол между осью возмущения и геострофическим ветром может изменяться от значений, превышающих 45° при устойчивости, почти до 0° при неустойчивости. Если в граничных условиях не задаются потоки, форма возмущений в пределах реальных изменений геофизических параметров существенно не меняется. При анализе устойчивости приходится иметь дело с системой уравнений шестого порядка (вместо четвертого), а число Ri_l в окрестности точки перегиба фигурирует как параметр. Поток устойчив при любой скорости, если $Ri_l > 0{,}25$. Расчеты, проведенные в [70], показывают, что при очень устойчивой стратификации вторичная циркуляция может испытывать резонансное усиление. Взаимодействие между гра-

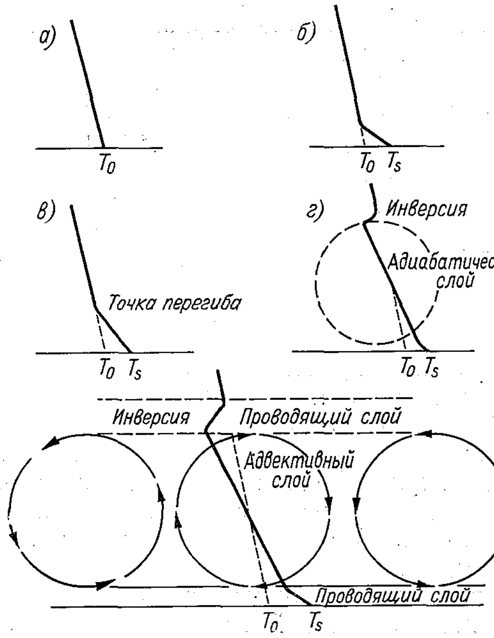


Рис. 11.1. Гипотетическая схема, поясняющая эволюцию поля температуры и вторичной циркуляции в течение суточного цикла.

а — устойчивое состояние, *б* — поверхностное нагревание, *в* — динамическая или конвективная неустойчивость, *г* — вторичный поток.

витационными волнами и неустойчивостью все еще нуждается в тщательном анализе.

Равновесный профиль температуры можно исследовать, если проследить его эволюцию, начиная с устойчивого состояния, как это схематически изображено на рис. 11.1, где дано несколько состояний в течение дня. Следующая часть цикла соответствует переходу от неустойчивой к устойчивой ситуации. К вечеру направление потока тепла изменяется, и поверхность начинает охлаждаться. Охлаждение становится особенно заметно ночью, когда наиболее интенсивно происходит радиационное выхолаживание. Таким образом, в первую очередь устойчивая стратификация появляется в приземном слое. При интенсивной вторичной циркуляции перемешивание может способствовать равномерному охлаждению всего слоя, так что вся нижняя часть экмановского слоя становится устойчиво стратифицированной. При этом продукция энергии турбулентности и ее интенсивность понижаются. При $\mathrm{Ri}_l > 0{,}25$ турбулентность может исчезнуть совсем, в результате чего жидкость становится невязкой (по сравнению с турбулентной). В этом случае более подходящим оказывается условие скольжения. На верхней границе ламинарного подслоя, формирующегося в приземном слое, возникают большие градиенты скорости, ведущие к понижению Ri_l и возникновению динамической неустойчивости. Исходя из уравнения баланса между силами инерции и плавучести

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{g}{\theta}\frac{d\theta}{dz}z,$$

можно ввести так называемую частоту Брента—Вяйсяля

$$N = \left(\frac{g}{\theta}\frac{d\theta}{dz}\right)^{1/2},$$

характеризующую частоту наиболее неустойчивых мод. Для их появления требуется наличие возмущений конечной амплитуды. Слой, охваченный волнами, может расширяться со скоростью, равной вертикальной волновой компоненте, и давать вклад в измеренный поток импульса. В целом при сильно устойчивой стратификации правомерность использования концепции турбулентной вязкости становится сомнительной. Это очень затрудняет теоретический подход.

Благодаря способности вторичного потока переносить тепло, в качестве граничных условий можно задавать потоки тепла. Возможно также исследование нагрева всего слоя в целом. Определение коэффициентов теплообмена у границ и последующее усиление вторичной циркуляции довольно сильно усложняют исследование. Тем не менее именно этим эффектом объясняется усиление переноса тепла и вторичной циркуляции, описанное в [78]. Необходимая модификация существующих теоретических моделей довольно проста, но требует знания ряда коэффициентов, которые по экспериментальным данным определяются не очень надежно.

11.3.2. *Теория подобия для стратифицированного слоя*

Если потенциальные температура, плотность и давление существенно изменяются в пограничном слое с высотой, анализ, данный в главе 7, должен быть дополнен рассмотрением эффектов стратификации. При этом оказывается, что внешнее решение можно оставить в том же виде, в каком оно было принято для нейтральной стратификации. Параметр τ/ρ может изменяться с высотой не только благодаря изменению собственно τ, но также и вследствие изменения ρ. Кроме того, появляется новая переменная $\rho c_p \overline{wT}$, связанная с градиентом потенциальной температуры соотношением

$$\overline{wT} = -K_h \theta_z.$$

Задача оказывается замкнутой, если дано распределение $\rho(z)$ или $\theta(z)$. Градиент давления изменяется с высотой следующим образом:

$$P_z(z) = -\rho(z) g.$$

Уравнение переноса тепла тривиально для случая горизонтальной однородности и стационарности. Теория стратифицированного пограничного слоя при наличии вертикального потока тепла формулируется в терминах чисто динамического подхода с добавлением некоторых новых параметров.

В работе [9] рассмотрен подслой, в котором эффекты стратификации относительно малы, и структура турбулентности определяется поверхностным трением. Масштабом длины для этого слоя является выражение

$$L = \frac{\rho c_p \bar{\theta} u_*^3}{k g K_h \theta_z}.$$

Это выражение, введенное из соображений размерности в [8], дает еще один масштаб длины для решения в приземном слое, который может быть использован в дальнейшем анализе вместо z_0. В общем случае параметр z_0 должен также учитываться в уравнении для исключения логарифмической особенности при $z \to 0$. Для приведения уравнений приземного слоя к безразмерному виду имеется, таким образом, несколько возможностей. Анализ данных, предпринятый с целью выбора подходящего масштаба, был сделан в [44], где найдено, что константы A, B и C изменяются с изменением u_*/fL (см. главу 7). Возможно, что модификация внешнего и внутреннего решений, полученных в главе 6, может быть сделана, если считать, что δ/z_b является функцией какого-либо параметра стратификации.

В работе [52] предложена общая схема параметризации пограничного слоя для задач численного моделирования общей циркуляции атмосферы. Для установления высоты стратифицированного пограничного слоя используется интегральное число Ричардсона, масштаб длины Монина—Обухова и параметр шероховатости. Эта высота далее используется для расчета турбулентных потоков.

Главные затруднения при анализе стратифицированного пограничного слоя создают большое количество внешних параметров и недостаток экспериментальных данных.

12. НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ

12.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Отклонение от стационарности могут быть вызваны разными причинами. Эти отклонения неизбежно порождают также и горизонтальную неоднородность. В этом случае мы имеем нелинейные уравнения с дополнительной независимой переменной (времени), для решения которых требуются начальные условия, которые, как правило, трудно получить. В общем случае нестационарная задача слишком сложна для теоретических исследований, поэтому главный вопрос, стоящий перед нами, заключается в том, насколько приближает нас к реальности стационарное решение. Все же исследование некоторых типов нестационарности необходимо хотя бы для того, чтобы определить пределы применимости стационарной и горизонтально однородной модели.

Некоторые отклонения от стационарности и однородности могут быть учтены в модели без существенных изменений общего подхода. Так, учет бароклинности несколько изменяет решение, но оно не связано с нарушением предположения о горизонтальной однородности. В рамках стационарного состояния исследуется случай горизонтальной неоднородности, вызванной существованием вторичного потока. Различие в свойствах подстилающей поверхности (например, различие суши и моря) можно пытаться учитывать с помощью скачкообразного изменения вязкости и (или) стратификации.

Наиболее существенные отклонения от стационарного состояния могут быть вызваны суточным ходом радиационных потоков и колебаниями, связанными с прохождением барических систем.

12.2. СУТОЧНЫЙ ЦИКЛ

Временной масштаб всех обсуждаемых выше явлений в пограничном слое значительно меньше суток. Тем не менее одним из параметров, представляющих для нас интерес, является напряжение трения за период, значительно превышающий сутки. Для учета суточного хода может быть применена модель, описывающая два различных состояния пограничного слоя в течение дня и ночи. Простейший способ состоит в том, чтобы для этих периодов применять решение, полученное для нейтрального случая, но с различными коэффициентами турбулентности. Несмотря на заметный тренд, который имеется во всех экспериментальных данных, вероятно, все же возможно построить по ним периодическую функцию $K(z, t)$. При этом наиболее существенными будут изменения решения в верхней части пограничного слоя. Действительно, если не учитывать существование вторичного потока, экмановская спираль может вырождаться, как только коэффициент турбулентной вязкости обращается в нуль. Устойчивая стратификация ночью ведет к вырождению турбулентности и изоляции поверхности от свободного потока. Наличие вторичной циркуляции несколько видоизменяет этот механизм, обеспечивая распространение мелкомасштабной турбулентности из областей с большим сдвигом скорости. Поскольку при устойчивой стратификации такие области обычно существуют, хорошо перемешанный слой появляется даже при весьма высокой устойчивости.

Уравнение для нейтрально стратифицированного экмановского слоя, но с зависящим от времени коэффициентом турбулентной вязкости, решались в [39]. Если $K(z, t)$ является строго периодической, в некоторых случаях можно получить аналитическое решение. В [39] также получено численное решение для эмпирической функции $K(z, t)$. Время релаксации суточных колебаний составляет около двух с половиной суток. Учет суточных колебаний давления позволяет достичь еще лучшего согласования с эмпирическими данными. Исследование влияния суточного хода давления производилось также в [43]. Численное решение обнаружило инерционные колебания, амплитуда и фаза которых изменяется с высотой.

В высоких широтах (например, в Арктике) суточные колебания намного продолжительнее, чем колебания, обусловленные динамикой ледового покрова. Поэтому они могут учитываться параметрически. Для того чтобы учесть долгопериодные вариации, можно использовать зависящий от времени коэффициент вязкости (см., например, [54]).

12.3. СИНОПТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Верхние граничные условия, например характеристики геострофического течения, испытывают пространственную изменчивость на синоптических масштабах порядка 1000 км. Поскольку барические системы сдвигаются (преимущественно с запада на восток), это порождает временные вариации, которые максимальны в средних широтах. Геострофические течения в океане, надо полагать, в какой-то степени отражают эволюцию синоптической ситуации.

Несмотря на то что синоптическая ситуация решающим образом определяет характер течения в пограничном слое, анализ ее выходит за рамки нашей проблемы. Мы остановимся лишь

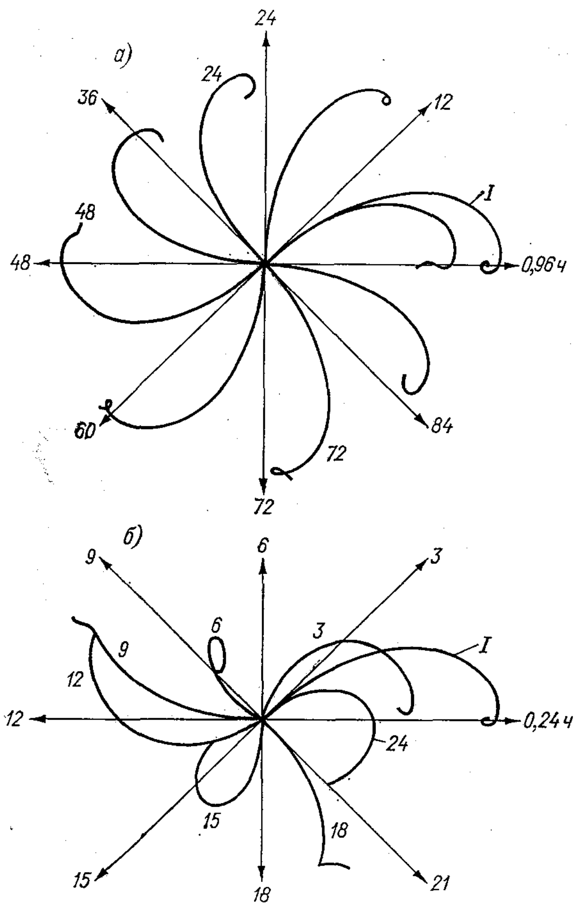


Рис. 12.1а. Теоретические годографы ветра для случая вращающегося градиента давления.

а — четырехсуточный период вращения, *б* — односуточный период (по [43]). *I* — стационарная спираль Экмана.

на вопросе о том, как реагирует пограничный слой на изменение верхних граничных условий.

Экман [53] уже в своей первой статье о пограничном слое обсуждал помимо всего прочего и вопрос о времени выхода решения для пограничного слоя на стационарный режим. Его оценки показали, что время развития спирального профиля скорости сопоставимо с периодом инерционных колебаний.

Синоптические вариации могут быть учтены в уравнениях, например, в виде зависимости от времени градиента давления. Результаты подобных расчетов приведены в [95]. Аналитическое

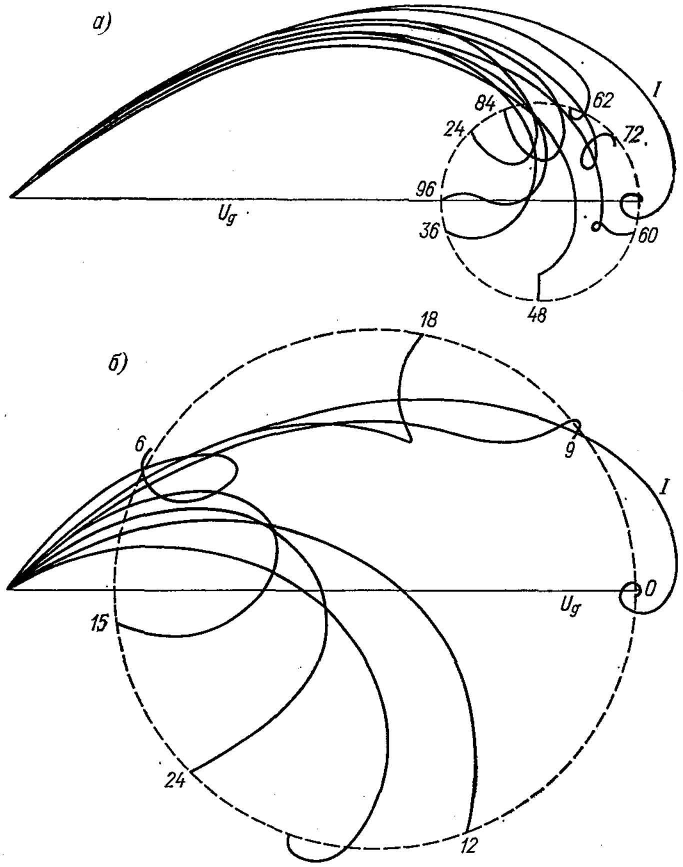


*Рис. 12.1б. Те же годографы, что на рис. 12.1*а, *в системе координат, вращающейся вместе с градиентом давления (по [43]).*
Условные обозначения см. рис. 12.1а.

решение такой задачи имеется в [43]. Эти решения показывают, что инерционные колебания в пограничном слое затухают сравнительно медленно. Реакция пограничного слоя определяется величиной коэффициента вязкости и начальным состоянием. Изменение годографа скорости по [43] дано на рис. 12.1а, б. Вместе с эволюцией ветра происходит также изменение геострофического коэффициента трения. В частности, это вызывается колебаниями градиента скорости (и, следовательно, τ_0) вблизи поверхности. Еще одной причиной колебаний может быть нарушение геострофического баланса при переменном поле давления.

12.4. ИНЕРЦИОННОЕ И АДВЕКТИВНОЕ УСКОРЕНИЯ

Применимость предположения о горизонтальной однородности над поверхностью с переменной шероховатостью было рассмотрено в [19]. Оказалось, что уже при умеренных градиентах поверхностного трения вариации в верхней части пограничного слоя могут быть заметны. Выводы [19] базировались на соображениях подобия, включающих граничные условия, которые могут быть получены осреднением по области, содержащей мезомасштабные неоднородности.

Расчеты показывают, что неоднородность, вызываемая инерционными или адвективными ускорениями, при быстром изменении внешних условий может порождать сильные отклонения от экмановского профиля. Так, например, при $U_x \sim 10$ см/с·км и $U \sim 10$ м/с член UU_x может достигать такой же величины, что и член fU (10^{-3} м/с^2).

Пристли [100] установил, что при определенных условиях существует ярко выраженный суточный ход трения и указал на необходимость учета ускорений при моделировании течений синоптического масштаба.

12.5. РЕЗЮМЕ

Очевидно, что для получения аналитического решения приходится пренебрегать членами, зависящими от времени. Немногочисленные аналитические исследования показывают, что время установления экмановского пограничного слоя составляет по порядку величины одни сутки. Оценки такого рода зависят от величины турбулентной вязкости и не учитывают влияния вторичной циркуляции динамического или конвективного происхождения. Вторичная циркуляция создает более энергичное перемешивание и понижает время релаксации. Исходя из некоторых теоретических представлений и эмпирических данных, автор [35] подсчитал, что период обращения в ячейке вторичной циркуляции диаметром 2 км в пограничном слое составляет около получаса. Существование облачных структур, известных под названием «облачные улицы», в течение многих часов свидетельствует о том, что ситуация скорее близка к установившейся.

При анализе пограничного слоя необходимо ясно представить, о каких масштабах времени идет речь. Во второй половине дня или ночью допустимо предположение о стационарности.

При анализе очень продолжительных периодов можно рассматривать среднесуточное состояние, но в этом случае важное значение приобретают синоптические колебания. При анализе климата эти колебания можно также исключить осреднением. Для некоторых специфических проблем могут оказаться важными члены, вызванные нестационарностью и неоднородностью. Представляется, что в этом случае необходимо прибегнуть к численным методам.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Для описания трехмерного потока используется трехкомпонентный вектор скорости, составляющие которого определены в конкретной ортогональной системе координат. Каждая из компонент может изменяться в пространстве со скоростью, зависящей от направления. Для полного описания поля градиентов в данной точке требуется уже девять величин

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=A_{ij}=\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{Bmatrix} \qquad (А.1)$$

С помощью индексов матрица в (А.1) выражается в более компактной форме. Исключение составляет ситуация, когда индексы совпадают, тогда член представляет собой сумму. Например,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

или

$$B_iA_{ij}=B_1A_{1j}+B_2A_{2j}+B_3A_{3j}.$$

Матрица в (А.1) называется тензором. Для того чтобы, например, представить напряжения в данной точке, мы используем тензор второго ранга, имеющий три компоненты для каждой из трех ортогональных осей.

Оператор, после действия которого на вектор получается новый вектор, также может быть записан в виде тензора второго ранга. Этот оператор должен быть линеен, т. е.

$$(C_1u_i+C_2v_i)\,A_{ij}=C_1u_iA_{ij}+C_2v_iA_{ij},$$

и однороден:

$$u_iA_{ij}=v_j,$$

$$\mathbf{u}=0\Rightarrow\mathbf{v}=0.$$

Часто используется символическая форма тензора

$$\mathbf{A}=A_{ij},$$

так что

$$\mathbf{uA}=\mathbf{v}.$$

Далее используются следующие обозначения:

единичный тензор $\mathbf{I}$ $\mathbf{uI}=\mathbf{u}$,

транспонированный тензор $\mathbf{A}^*$ $A^*_{ij}=A_{ji}$,

симметрический $\mathbf{A}=\mathbf{A}^*$,

кососимметрический $\mathbf{A}=-\mathbf{A}^*$.

Любой тензор может быть представлен в виде суммы симметрического и кососимметрического

$$\mathbf{A}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^*)+\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^*). \tag{A.2}$$

Оператор, который может быть представлен кососимметрическим тензором, имеет альтернативное представление, так как он содержит только три независимые компоненты

$$\mathbf{A}=-\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\mathbf{uA}=\mathbf{A}\wedge\mathbf{u} \text{ для любого } \mathbf{u}.$$

Это может быть записано так:

$$(u_1,\ u_2,\ u_3)\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}=(a_2u_3-a_3u_2,\ a_3u_1-a_1u_3,\ a_1u_2-a_2u_1). \tag{A.3}$$

Тензор третьего ранга может быть использован для записи кориолисова члена $\varepsilon=\varepsilon_{ijk}$, где

ε_{ijk}	i	j	k	ε_{ijk}	i	j	k
1	1	2	3	−1	1	3	2
1	2	3	1	−1	2	1	3
1	3	1	2	−1	3	2	1

и $\varepsilon_{ijk}=0$, если любые два индекса совпадают.

Таким образом,

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}=\varepsilon_{ijk}a_jb_k.$$

В гидродинамике мы имеем дело с континуумом точек, поэтому мы можем говорить о скалярных, векторных и тензорных получим:

$$\int_0^h UV_x dz - \left| U \int_0^z U_x dz - \int_0^z UU_x dz \right|_0^h + \int_0^h fV dz = [\tau^x]_0^h,$$

$$\int_0^h UV_x dz - \left| V \int_0^z U_x dz - \int_0^z VU_x \, dz \right|_0^h + \int_0^h f(G-U)\, dz = [\tau^y]_0^h.$$

(Б.3)

При $z=0$ $U=0$, $\tau^x=\tau_0^x$, $\tau^y=\tau_0^y$.

При $z=h$ $U=G$, $\tau^x=\tau^y=0$.

Таким образом, имеем:

$$\int_0^h dz\,\{[U(U-G)]_x + fV\} = -\tau_0^x,$$

$$\int_0^h dz\,\{(UV)_x + f(G-U)\} = -\tau_0^y. \qquad \text{(Б.4)}$$

Эти уравнения связывают напряжение трения с полем скорости. Для удобства можно применить комплексные обозначения

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{q}{G}\right) dz, \quad \delta_2 = \int_0^\infty \frac{U}{G}\left(1 - \frac{q}{G}\right) dz, \qquad \text{(Б.5)}$$

так что (Б.4) примет вид

$$\tau_0 = G^2 \delta_{2x} - ifG\delta_1. \qquad \text{(Б.6)}$$

Если известны профили скорости на двух станциях, расположенных на одной линии тока, то по δ_1, δ_{2x} и G можно определить τ_0. Если поток горизонтально однороден, $\delta_{2x}=0$ и напряжение трения оказывается весьма просто связанным с величиной δ_1 в данной точке. Если поток нестационарен, для данного пункта должен быть определен интеграл от инерционного члена.

Трудности, связанные с детальным изменением скорости, приводят к тому, что данный метод в метеорологии применяется нечасто. Тем не менее он может быть использован для океанского пограничного слоя.

Если направления геострофического потока определить нельзя, приходится использовать уравнения (Б.1) в более общем виде:

$$UU_x + UU_y + WU_z - fV - P_x/\rho = (\tau^x)_z,$$
$$UV_x + VV_y + WV_z - fU - P_y/\rho = (\tau^y)_z,$$
$$UW_x + VW_y + WW_z - P_z/\rho = (\tau^z)_z,$$
$$U_x + V_y + W_z = 0, \qquad \text{(Б.7)}$$

из чего получается:

$$\int_0^h dz\{[U(U-U_g)]_x+[V(U-U_g)]_y+f(V-V_g)\}=-\tau_0^x,$$

$$\int_0^h dz\{[U(V-V_g)]_x+[V(V-V_g)]_y+f(U-U_g)\}=-\tau_0^y, \quad \text{(Б.8)}$$

или в комплексной форме:

$$\int_0^h dz\{[U(q-Q)]_x+[V(q-Q)]_y-if(q-Q)\}=\tau_0,$$

$$\int_0^h dz[Uq'+Vq'-ifq']=\tau_0, \quad \text{(Б.9)}$$

где $Q=U_g+iV_g$; $q'=q-Q$.

Для напряжения трения получаем

$$\tau_0=U_gQ\theta_{1x}+V_gQ\theta_{2y}-ifQ\theta_3, \quad \text{(Б.10)}$$

где

$$U_gQ\theta_1=\int_0^\infty Uq'\,dz,$$

$$V_gQ\theta_2=\int_0^\infty Vq'\,dz,$$

$$Q\theta_3=\int_0^\infty q'\,dz.$$

Уравнение (Б.10) можно применить для расчета среднего напряжения трения для любых двух станций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ариель Н. З. О влиянии профиля коэффициента турбулентности на ветер в пограничном слое. *Труды ГГО*, 1957, вып. 69, с. 57—64.
2. Блинова Е. Н., Кибель И. А. Приложение теории турбулентности к вопросу о распределении ветра с высотой.— В кн.: *Динамическая метеорология*. Ч. 2. Л.—М., Гидрометеоиздат, 1937, с. 28—36.
3. Душкин П. К., Ломоносов Е. Г. Об уточнении решения задачи суточного прогноза барического поля в бароклинной атмосфере.— В кн.: *Труды Всесоюзн. научн. метеор. совещания*. Т. 2. Л., Гидрометеоиздат, 1963.
4. Зилитинкевич С. С., Лайхтман Д. Л., Монин А. С. Динамика пограничного слоя атмосферы. *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана*, 1967, т. 3, № 3, с. 297—333.
5. Карелин И. Д., Тимохов Л. А. Экспериментальное определение силы ветра, действующей на ледяной покров. Труды ААНИИ, 1971, т. 303, с. 155—165.
6. Казанский А. Б., Монин А. С. О турбулентном режиме выше приземного слоя воздуха. *Изв. АН СССР, сер. геофиз.*, 1960, № 4, с. 165—168.
7. Матвеев Л. Т. *Основы общей метеорологии. Физика атмосферы*. Л., Гидрометеоиздат, 1965. 876 с.
8. Монин А. С., Обухов А. М. Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы. *Труды Геофиз. ин-та АН СССР*, 1954, № 24 (151), с. 163—187.
9. Обухов А. М. Турбулентность в температурно-неоднородной атмосфере. *Труды Ин-та теорет. геофизики АН СССР*, 1946, 1, с. 95—115.
10. Седов Л. И. *Методы подобия и размерности в механике*. М., «Наука», 1965.
11. Юдин М. И., Швец М. Е. Стационарная модель распределения ветра с высотой в турбулентной атмосфере. *Труды ГГО*, 1940, вып. 31, с. 42—52.
12. Aagaard, K. Wind driven transports in the Greenland and Norwegian seas. *Deep Sea Research.*, 1970, **17**, 281—291.
13. Akerblom, F. A. Recherches sur les courants les plus bas de l'atmosphere audessus de Paris. *Nova Acta Reg. Soc. sc Upsalennisas*, ser. 4, 2, 1908, 2, No. 2.
14. Angell, J. K. Helical circulations in the planetary boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, 1971, 28, 135—138.
15. Angell, J. K. A comparison of circulations in transverse and longitudinal planes in an unstable planetary boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, 1972, 29, 1252—1261.
16. Angell, J. K. & Pack, D. H. Helical circulations in the planetary boundary layer. *Physics of Fluids* (Supplement), 1965, 5226—5229.

17. Angell, J. K., Pack, D. H. & Dickson, C. R. A lagrangian study of helical circulation in the planetary boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, 1968, **25**, 707—717.

18. Angell, J. K., Pack, D. H., Machta, L., Dickson, C. R. & Hoecker, W. H. Three-dimensional air trajectories determined from flights in the planetary boundary layer of the Los Angeles basin. *J. Appl. Met.*, 1972, **11**, 451—471.

19. Arya, S. P. S. The critical condition for the maintenance of turbulence in stratified flows. *QJRMS*, 1972, **98**, 269—273.

20. Arya, S. P. S. Contribution of form drag on pressure ridges to the air stress on Arctic ice. *J. Geophys. Res.*, 1973, **78**, No. 30, 7092—7099.

21. Banke, E. & Smith, S. Wind stress over ice and over water in the Beaufort Sea. *J. Geophys. Res.*, 1971, **76**, No. 30, 7368—7374.

22. Banke, E. G. & Smith, S. D. Wind stress on arctic ice. *J. Geophys. Res.*, 1973, 87, No. 33, 7871—7883.

23. Barcilon, V. Stability of non-divergent Ekman layers. *Tellus*, 1965, **17**, No. 1, 53—68.

24. Batchelor, G. K. The condition for dynamical similarity of motions of an inviscid perfect gas atmosphere. *QJRMS*, 1953, **79**, 224.

25. Batchelor, G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*, 615 pp. Cambridge University Press, 1967 (Дж. К. Бэтчеллор. Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973).

26. Bernstein, A. The effect of a horizontal temperature gradient on the surface wind. Master's Thesis, Pennsylvania State University, 1959.

27. Blackadar, A. K. The vertical distribution of wind and turbulent exchange in a neutral atmosphere. *J. Geophys. Res.*, 1962, **67**, 3095—3102.

28. Blackadar, A. K. *et al.* Final report: Flux of heat and momentum in the planetary boundary layer of the atmosphere. *AFCRL-65-531*, Pennsylvania State University Department of Meteorology, 31 July 1965.

29. Blackadar, A. K. & Ching, J. Wind distribution in a steady-state PBL of the atmosphere. *ARCRL-65-531 Penn. State Rpt.* 23—48., 1965.

30. Blackadar, A. K. & Tennekes, H. Asymptotic similarity in neutral barotropic PBL. *J. Atmos. Sci.*, 1968, **23**, 1015—1022.

31. Boussinesq, J. *Theorie analytique de chaleur*, Vol. **2**. Gauthier-Villars, Paris, 1903.

32. Bradley, E. F. A micrometeorological study of velocity profiles and surface drag in the region modified by a change of roughness. *QJRMS*, 1968, **94**, 361—379.

33. Bridgeman, P. W. *Dimensional Analysis*, Yale University Press, New Haven, 113 pp, 1931. (П. В. Бриджмен. Анализ размерностей. Л.-М., Гос. изд. техн.-теорет. лит., 1934).

34. Brown, R. A. A secondary flow model for the planetary boundary layer. *University of Washington Scientific Report, Atmos, Sciences*, 1970a.

35. Brown, R. A. A secondary flow model for the PBL. *J. Atmos. Sci.*, 1970б, **27**, 742—757.

36. Brown, R. A. The inflection point instability problem for stratified rotating boundary layers. *J. Atmos. Sci.*, 1972a, **29**, No. 5, 850—859.

37. Brown, R. A. On the physical mechanism of the inflection point instability. *J. Atmos. Sci.*, 1972б, **29**, 984—986.

38. Brown, R. A. & Lee, F. A shooting method application to the stability problem for stratified rotating boundary layers. *J. Comp. Phy.*, 1972, **10**, No. 2, 107—122.

39. Buajitti, K. & Blackadar, A. K. Theoretical studies of diurnal wind variations in the PBL. *QJRMS*, 1957, **83**, 486—500.

40. B u s i n g e r, J. On the structure of the atmospheric surface layer *J. Meteor.*, 1955, **12**, 553—561.

41. B u s i n g e r, J., W y n g a a r d, J. C., I z u m i, Y. & B r a d l e y, E. Flux profile relationships in the atmospheric surface layer. *J. Atmos. Sci.*, **1971**, 28, 1021—1025.

42. C a l d e r, K. L. In clarification of the equations of shallow-layer thermal convection for a compressible fluid based on the Boussinesq approximation. *QJRMS*, 1967, **93**, 88.

43. C h i n g, J. C. & B u s i n g e r, J. A. The response of the PBL to time varying pressure gradient force. *J. Atmos. Sci.*, 1968, **25**, 1021—1025.

44. C l a r k e, R. H. Observational studies of the atmospheric boundary layer. *QJRMS*, 1970, **96**, 91—114.

45. C l a r k e, R. H. & H e s s, G. D. On the appropriate scaling for velocity and temperature in the PBL. *J. Atmos. Sci.*, 1973, **30**, 1346—1353.

46. C s a n a d y, G. T. On the resistance law of a turbulent Ekman layer. *J. Atmos. Sci.*, 1967, **24**, 467—471.

47. C s a n a d y, G. T. Geostrophic drag, heat and mass transfer coefficient for the diabatic Ekman layer. *J. Atmos. Sci.*, 1972, **29**, 488—496.

48. D a b b e r d t, W. F. Wind and turbulence structure in the boundary layer over the Antarctic Plateau. Ph. D. Thesis, Univ. Wisconsin, 1969.

49. D e a c o n, E. L. Aerodynamic roughness of the sea. *J. Geophys. Res.*, 1962, **67**, 8.

50. D e a r d o r f f, J. Dependence of air—sea transfer coefficients on bulk stability. *J. Geophys. Res.*, 1968, 73, No. 8, 2549—2557.

51. D e a r d o r f f, J. W. A three-dimensional numerical investigation of the idealized PBL. *Geophys. Fluid Dyn.*, 1970, **1**, 377—410.

52. D e a r d o r f f, J. W. Parametrization of the planetary boundary layer for use in general circulation models. *Monthly Weather Review*, Feb. **1972**, **100** (2), 93—106.

53. E k m a n, V. W. On the influence of the earth's rotation on ocean currents. *Arkiv. Math. Astros, Fyjik*, 1905, **2**, 11.

54. E s t o q u e, M. A. A numerical model of the atmosphere boundary layer. *J. Geophys. Res.*, 1963, **68**, 1103—1113.

55. E t l i n g, D. The stability of Ekman boundary layer flow as influenced by temperature stratification. *Beitrage & Physik der Atmos.*, **1971**, **44**, 168.

56. F a l l e r, A. J. Large eddies in the atmospheric boundary layer and their possible role in the formation of cloud rows. *J. Atmos. Sci.*, 1965, **22**, 176—184.

57. F a l l e r, A. K. & K a y l o r, R. A numerical study of the instability of the laminar Ekman boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, 1966, **23**, 466—480.

58. G a g e, K. C. & R e i d, W. H. The stability of thermally stratified plane Poiseuille flow. *JFM*, 1968, **33**, 21—32.

59. G i l l, A. E. *The Turbulent Ekman Layer*. Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, 1967.

60. G r e e n s p a n, H. P. The Theory of Rotating Fluids. Cambridge University Press, 1970 (Х. Гринспен. Теория вращающихся жидкостей, Л., Гидрометеоиздат, 1975).

61. H a n n a, S. R. Characteristics of winds and turbulence in the planetary boundary layer. *ESSA Tech. Memo ERLTM-ARL-8*, 61 pp, 1969a.

62. H a n n a, S. R. The formation of longitudinal sand dunes by large helical eddies in the atmosphere. *J. Appl. Met.*, 1969б, 8 (6), 874.

63. H a r d y, K. R. & O t t e r s t e n, H. Radar investigations of convective patterns in the atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, 1969, **26**, 666—672.

64. Haugen, D. A. Ed. *Workshop on Micrometeorology*. American Meteorological Society, Boston, Mass., 1973.

65. Haugen, D. A., Kaimal, J. C. & Bradley, E. F. An experimental study of Reynolds stress and heat flux in the atmospheric surface layer. *QJRMS*, 1971, **97**, 168—180.

66. Heisenberg, W. Fur statistischen theorie der turbulenz. *Z. Phys.*, 1948, **124**, 628—657.

67. Jeffereys, H. *Cartesian Tensors*. Cambridge University Press, 1931.

68. Kaplun, S. *Fluid mechanics and singular perturbations, a Collection of Papers*, New York, Academic Press, 1967.

69. Kármán, Th. von. Mechanishe Ähnlichheit und Turbulenz. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.*, 1930, **1** (8).

70. Kaylor, R. & Faller, A. Instability of the stratified Ekman boundary layer and the generation of internal waves. *J. Atmos. Sci.*, 1972, **28**, 497—509.

71. Keuttner, J. Cloud bands in the earth's atmosphere. *Tellus*, 1971, **23**, No. 4—5, 404—426.

72. Kohler, H. Meteorologische turbulenzuntersuchungen. *I. Kungle. Svenska Veterskepsakad Hondel*, Tredje Ser. **13**, 1933, No. 1.

73. Konrad, T. G. The alignment of clear air convective cells. In *Proc. International Conf. Cloud Physics, Toronto*, 1968, 539—543.

74. Konrad, T. G. The dynamics of the convection process in clear air as seen by radar. *J. Atmos. Sci.*, 1970, **27**, 1138—1147.

75. Kraus, E. B. *Atmosphere—Ocean Interaction*. Clarendon Press, Oxford, 275 pp., 1972 (Е. Б. Краус. Взаимодействие атмосферы и океана. Л., Гидрометеоиздат, 1976).

76. Krishnamurti, R. On the transition to turbulent convection. Pts 1 & 2. *JFM*, 1970, **42**, 295—307, 309—320.

77. Krishnamurti, R. Some further studies on the transition to turbulent convection. *JFM*, 1973, **60**, No. 2, 285—303.

78. Lemone, M. The structure and dynamics of the horizontal roll vortices in the planetary boundary layer. Ph. D. thesis, Univ. Wash., 130 pp., 1972, and *J. Atmos. Sci.*, 1973, **30**, 1077—1091.

79. Lenschow, D. H. Airplane measurements of planetary boundary layer structure. *J. Appl. Met.*, 1970, **9**, 874—884.

80. Lettau, H. H. Theoretical wind spirals in the boundary layer of a barotropic atmosphere. *Beithr. Phys. Atmos.*, 1962, No. 35, 195—212.

81. Lettau, H. H. & Dabberdt, W. F. Variangular wind spirals. *Boundaray-Layer Met.*, 1970, **1**, 64—79.

82. Lettau, H. H. & Davidson, B. *Exploring the Atmosphere's First Mile*, Vol. 1, 578 pp. Pergamon, 1957.

83. Lewellen, W. S. & Teske, M. Prediction of the Monin—Obukhov similarity functions for an invariant model of turbulence. *J. Atmos. Sci.*, 1973, **30**, 1340—1345.

84. Lilly, D. K. On the stability of Ekman boundary flow. *J. Atmos. Sci.*, 1966, 23, 481—494.

85. Lin, C. C. *Theory of Hydrodynamic Stability*. Cambridge University Press, 155 pp., 1945 (Цзя-цзяю Линь. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958).

86. Ludwieg, H. & Tillman, W. Untersuchungen uber die Wandschubspannung in turbulenten reibungsschichten. *Ing. Arch.*, 1949, **17**, 288—299.

87. Lumley, J. L. & Panofsky, H. A. The structure of atmospheric turbulence. Monograph and texts in *Phys. & Astronomy*, v. XII. Interscience,

239 pp., 1964. (Дж. Л. Ламли, Г. А. Пановский. Структура атмосферной турбулентности. М., «Мир», 1966).

88. Mahrt, L. J. & Schwerdtfeger, W. Ekman spirals for exponential thermal wind. *Boundary-Layer Met.*, 1970, **1**, 137—145.

89. Malkus, J. S. & Veronis, G. Finite amplitude cellular convection. *JFM*, 1958, **4**, 225.

90. Milner, P. Über die Reibung in einer speziellen Luftmasse in den untersten Schichten der Atmosphäre. *Beitr. Physik d. frein Atmos.*, 1932, **19**, 151—158.

91. O'Brien, J. A note on the vertical structure of the eddy exchange coefficient in the planetary boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, 1970, **27**, 1213—1215.

92. Ogura, Y. A numerical study of wave number selection in finite amplitude Rayleigh convections. *J. Atmos. Sci.*, 1971, **28**, No. 5, 709—717.

93. Ottersten, H. Atmospheric structure and backscattering. *Radio Science*, 1969, **4**, 1187: 1251—2155.

94. Pandolfo, J. P. A numerical model of the atmospheric—ocean PBL. *Proc. WMO/IOGG Symp. on Num. Weather Pred.*, Japan Met. Agency, Tokyo, 1969.

95. Pandolfo, J. P. & Brown, P. Inertial oscillations in an Ekman layer containing a horizontal discontinuity surface. *J. Marine Res.*, 1967, **25**, 10—28.

96. Paulson, C. A. The mathematical representation of wind speed and temperature profiles in the unstable atmospheric surface layer. *J. Appl. Met.*, 1970, **9**, 857—861.

97. Plate, E. J. *Aerodynamic Characteristics of Atmospheric Boundary Layer.* AEC Crit. Rev. TID 25465, 190 pp., 1971.

98. Prandtl, L. Meteorologische airwendernger der stromuingslehre. *Beitr. Phys. frei Atm.*, 1932, **19**, 188—202.

99. Priestley, C. H. B. Convection from a large horizontal surface. *Australian J. Phys.*, 1954, **6**, 279—290.

100. Priestley, C. H. B. Handover in scale of the fluxes of momentum, heat, etc., in the atmospheric boundary layer. *Physics of Fluids,* Suppl. 1967, **10**, 538—546.

101. Rayleigh, Lord. *Phil. Mag.*, ser. 5, 2, 430. (*Scientific Papers*, 1, 286). 1876.

102. Rayleigh, Lord. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A**, **175**, 1. (*Scientific Papers* 2, 3, 4 and 6), 1880—1883.

103. Rayleigh, Lord. On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the underside. *Phil. Mag.*, Series 6, Vol. 32, 1916 (Also, see Saltzman, ed., *Theory of Thermal Convection*, Dover, 462 pp.).

104. Riordan, A. J. Atmospheric stability at Plateau Station. *Antarctic Journal*, 1972, **7** (5), 169—170.

105. Rossby, C. G. Generalization of the theory of mixing length with application to ocean and atmospheric turbulence. *MIT Meteor. Pap.*, 1932, **1**, No. 4.

106. Rossby, C. G. & Montgomery, R. B. The layers of functional influence in wind and ocean currents. *MIT Papers III*, 101 pp., 1935.

107. Schlichting, H. *Boundary Layer Theory*. McGraw—Hill, 535 pp., 1955 (Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. М., Изд-во иностр. лит., 1956).

108. Schuetz, J. & Fritz, S. Cloud streets over the Caribbean Sea. *Mo. Wea. Rev.*, 1961, **89** (10), 375—382.

109. Seifert, W. J. & Langleben, M. P. Air drag coefficients and roughness length of a cover of sea ice. *J. Geophys. Res.*, 1972, 77, 15.

110. Sheih, C. M. A theoretical study of the diurnal wind variation in the planetary boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, 1971, **29**, 995—998.

111. Sheppard, P. A., Tribble, D. C. & Garratt, J. R. Studies of turbulence in the surface layer over water. Part I. *QJRMS*, 1972, **98**, 627—641.

112. Shir, C. C. A preliminary numerical study of atmospheric turbulent flow in the idealized PBL. *J. Atmos. Sci.*, 1973, **30**, 1327—1339.

113. Smith, S. D., Banke, R. & Johannessen, I. Wind stress and turbulence over ice in the Gulf of St Lawrence. *J. Geophys. Res.*, 1970, **75**, No. 15.

114. Spiegel, E. & Veronis, G. On the Boussinesq approximation for a compressible fluid. *Astrophys. J.*, 1960, **131**, 442.

115. Stuart, J. T. On the non-linear mechanics of hydrodynamic stability. *JFM*, 1958, **4**, No. 1.

116. Stuart, J. T. *On the non-linear wave disturbance in stable and unstable parallel flows*, Part I. JFM, 1960, **9**.

117. Sutton, O. G. Atmospheric turbulence and diffusion. In *Compendium of Meteorology*, ed. Malone, T. F. American Meteorology Society.

118. Sutton, O. B. *Micrometeorology*. McGraw-Hill, 333 pp., 1953 (Сеттон О. Г. Микрометеорология. Л., Гидрометеоиздат, 1958).

119. Suzuki, Y. Wind and water drag of an ice flow. Phys. of Snow & Ice. *Proc. Int. Conference Low Temperature Sci.*, 1965, **1**, Pt. 1, 661.

120. Swinbank, W. C. The exponential wind profile. *QJRMS*, 1964, **90**, 119—135.

121. Swinbank, W. C. & Dyer, A. Micrometeorological experiments 1962—1964. *Tech. Paper No. 17 CSIRO, Div. Met. Physics, Melbourne, Australia*, 1968.

122. Synge, J. & Griffith, B. A. *Principles of Mechanics*. McGraw-Hill Inc., 1959.

123. Taylor, G. I. The eddy motion in the atmosphere. *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 1915, **215** (Scientific papers 2, *I*).

124. Townsend, A. A. *The Structure of Turbulent Shear Flow*. Cambridge University Press, 315 pp., 1956 (А. А. Таунсенд. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М., Изд-во иностр. лит., 1959).

125. Untersteiner, N. & Badgley, F. I. The roughness parameters of sea ice. *J. Geophys. Res.*, 1965, **70**, 4573—4577.

126. Van Dyke, M. Perturbation methods in fluid mechanics. *Appl. Math. & Mech. Series*, Vol. 8. Academic Press Inc., New York, 1964.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Р. А. Браун

Аналитические методы моделирования планетарного пограничного слоя

Редактор О. Э. Александрова. Художник С. Э. Шиблер
Художественный редактор Б. А. Денисовский. Технический редактор В. И. Семенова
Корректоры: В. И. Гинцбург, И. А. Крайнева

ИБ № 353

Сдано в набор 19.01.78. Подписано в печать 22.05.78. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бум. тип. № 1. Лит. гарн. Печать высокая. Печ. л. 9,5. Уч.-изд. л. 8,82. Тираж 1300 экз. Индекс МЛ-273. Заказ 37. Цена 1 р. 60 к.

Гидрометеоиздат. 199053. Ленинград, 2-я линия, 23.

Ленинградская типография № 8 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 190000, Ленинград, Прачечный пер., 6.

Книга вышла в свет

Бютнер Э. К. **«Динамика приповерхностного слоя воздуха».** Л. Гидрометеоиздат. 1978 г. 1 р. 70 к.

Книга посвящена процессам, происходящим в естественных условиях при взаимодействии развитого турбулентного течения с подстилающей поверхностью. Для описания этого взаимодействия используется простая модель, в которой влияние крупных неоднородностей включено в уравнения динамики приповерхностного слоя воздуха, а микроструктура поверхности отражена в граничных условиях. Гипотезы, на основании которых строятся уравнения, связаны с результатами анализа экспериментальных исследований структуры пристеночного слоя в лабораторных условиях.

Книга рассчитана на метеорологов, гидродинамиков, геофизиков.

Адрес специализированного магазина Гидрометеоиздата: Ленинград, 197101, Большой пр., 57, магазин № 15.

ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ