

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

---

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

И. Н. РУСИН

# ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДОЛГОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА ПОГОДЫ

Допущено министерством высшего и среднего специального образования СССР  
в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальности  
«Метеорология»

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
имени М. И. КАЛИНИНА

ЛЕНИНГРАД  
1984

Русин И. Н. Гидродинамические методы долгосрочного прогноза погоды. — Л., изд. ЛПИ, 1984. — с. 150 (ЛГМИ).

Рецензенты: отдел динамической метеорологии Главной Геофизической обсерватории имени А. И. Воейкова; П. П. Васильев, заведующий лабораторией прогнозов погоды на 5—10 дней Гидрометеорологического центра СССР, канд. физ.-мат. наук.

В учебном пособии рассмотрены методы применения математического моделирования для долгосрочного прогноза погоды. Главное внимание сосредоточено на физических идеях, лежащих в основе моделей, используемых для долгосрочных прогнозов, а также на анализе результатов прогностических расчетов. Обсуждаются вопросы предсказуемости атмосферных процессов, методика использования гидродинамических долгосрочных прогнозов в оперативной синоптической практике, дается понятие об анализе аномалии среднемесячной температуры с помощью сопряженных функций.

Книга предназначена для студентов-метеорологов и специалистов, работающих в области прогноза погоды.

Табл. 17. Илл. 44. Библ. 22.

Ленинградский  
Гидрометеорологический ин-т  
БИБЛИОТЕКА  
Л-д 193196, Малоохтенский пр., 98

## ВВЕДЕНИЕ

Численное моделирование, т. е. приближенное решение уравнений динамики, тепло- и влагопереноса в атмосфере с помощью ЭВМ уже более двадцати лет применяется как в практической деятельности по прогнозу погоды, так и научно-исследовательской работе при изучении физики атмосферы. За это время накоплено много сведений, которые вошли в систему профессиональных знаний специалиста-метеоролога.

В процессе обучения принято выделять три больших раздела численного моделирования. Один из них — математическое моделирование атмосферных процессов. При изучении этого курса происходит ознакомление с методикой создания модели атмосферы на базе уравнений гидротермодинамики, а также с особенностями численной реализации таких моделей на ЭВМ. Знание этого материала необходимо метеорологу, главным образом, для ясного представления о пределах применимости сведений, полученных с помощью ЭВМ, к реальной атмосфере.

Два другие раздела называются теорией климата и численным прогнозом погоды. Предметом изучения в теории климата является динамическое равновесие, возникающее в системе атмосфера-океан-континент-ледники под влиянием периодически меняющихся внешних факторов. Результаты численного моделирования служат в этом курсе для иллюстрации влияния различных планетарных и космических факторов на формирование климата. Основное внимание сосредоточивается на таких численных экспериментах, в которых влияние начального состояния атмосферы практически устранено. Таким образом, вопросы генезиса аномалий, важные для долгосрочного прогноза погоды, не входят в этот курс.

В курсе численного прогноза погоды изучаются существующие методы автоматического сбора, анализа и экстраполяции информации о начальном состоянии атмосферы в целях прогноза синоптического положения на сроки 24—72 часа. Основное внимание сосредоточено на изучении специфики моделей, используемых для таких прогнозов, точности прогнозов и их применении, т. е. на том, что необходимо для успешной работы инженера-синоптика, обслуживающего народное хозяйство краткосрочными прогнозами.

Достаточно подробное ознакомление с обширным материалом, входящим в перечисленные выше дисциплины, в настоящее время уже не удовлетворяет в полной мере потребности современных специалистов-метеорологов. Это связано с развитием и автомати-

зацией методов долгосрочного прогноза погоды. Как известно, к долгосрочным относятся прогнозы погоды на 3—10 суток, месяц, сезон и более. Современные методы долгосрочного прогноза существенно отличаются от методов краткосрочного прогноза как по объему и характеру исходной информации, так и по способам ее анализа.

Различается и характер применения гидродинамических расчетов в долгосрочных и краткосрочных прогнозах. В частности, физическая экстраполяция начальных полей с помощью решения уравнений гидродинамики атмосферы на ЭВМ дает при прогнозе на 2—3 суток практически окончательный вариант метеорологических полей, а задача синоптика — корректировать эти поля, учитывая особенности своего района. Если же физическая экстраполяция производится на больший срок, скажем, на 10 суток, то, как показали численные эксперименты, рассчитанные поля могут оказаться визуально даже не похожими на фактические будущие поля, но они содержат значительную информацию, полезную для принятия решения о долгосрочном прогнозе, и задача синоптика — выявить и применить эту информацию,

Таким образом, изучение гидродинамических методов, применяемых в долгосрочном прогнозе, оказывается важным для специалиста-метеоролога, во-первых, потому что результаты численного исследования влияния начального состояния на долгопериодное поведение модели помогает понять физические механизмы образования аномалий в атмосфере, во-вторых, потому что метеоролог получает физически обоснованное представление о той информации, которую следует привлекать для составления прогноза из различных источников, в том числе и из расчетов по моделям. Немаловажно и то, что современные методики разработки и использования долгосрочных прогнозов существенно отличаются от тех, которые применяются в краткосрочном численном прогнозе и должны быть известны специалистам-метеорологам, применяющим результаты реализации этой методики в качестве базы для прогнозов по своей территории. Изложение этих вопросов и составляет содержание настоящего учебного пособия.

Учебное пособие состоит из шести глав, которые по дидактическим задачам можно разделить на три части.

К первой части могут быть отнесены главы 1 и 2. С их помощью автор пытался сформулировать основные проблемы, возникающие при разработке методики долгосрочного прогноза на гидротермодинамической основе. Для этого в главе 1 рассмотрены те результаты, которые можно получить, формулируя задачу долгосрочного прогноза температуры атмосферы как чисто термодинамическую и считая, что взаимодействие между полем температуры и характеристиками динамики атмосферы сводится к макротурбулентному теплопереносу. Изучая этот материал, можно уяснить, в какой мере теплоперенос, источники и стоки тепла вносят вклад в формирование температурных аномалий.

В главе 2 внимание сосредоточено на изучении особенностей динамики планетарных волн в атмосфере. Здесь рассмотрен вопрос, имеется ли возможность прогноза эволюции планетарных волн поля геопотенциала, если пренебречь зависимостью циркуляции от температуры в атмосфере, а также вопрос о механизме взаимодействия «теплового поля» с «динамикой» атмосферы, с помощью которого малые температурные аномалии могут кардинально менять тип циркуляции в атмосфере. В этой главе использован спектральный метод описания атмосферы.

Результаты, излагаемые в первых двух главах, получены на базе подхода, который можно назвать схематизацией, моделированием атмосферы. В этом подходе исследователи заранее отказываются от формулировки задачи, описывающей во всей полноте процессы, происходящие в атмосфере. Они концентрируют свое внимание только на анализе отдельных черт в «поведении» атмосферы и широко используют для восполнения недостающей информации гипотезы, а также эмпирический материал и результаты, полученные по лабораторным моделям. Записав упрощенную систему уравнений, исследуют ее аналитически или численно. Простота описания позволяет весьма полно рассмотреть все особенности избранной модели, сравнить ее с реальной атмосферой, извлечь практически ценные выводы и наметить пути совершенствования.

Результаты, помещенные в главе 3, составляющей как бы вторую часть учебного пособия, получены на основе другого подхода, который будет далее называться «воспроизведением» состояния атмосферы. Термин «воспроизведение» в учебном пособии применяется в тех случаях, когда для анализа интересующих явлений исследователи использовали модель атмосферы, наиболее полную на данном уровне знаний и возможностей ее реализации на имеющейся у них ЭВМ. Для получения результатов расчеты по модели проводятся заданное число раз, как бы воспроизводя поведение реальной атмосферы в заранее заданных условиях, полностью контролируемых экспериментатором. Легко понять, что между этими двумя подходами нет четкой границы. В научно-исследовательской работе они обычно не конкурируют, а взаимно обогащают друг друга. Однако в учебных целях полезно первоначально изучить результаты применения в долгосрочном прогнозе «моделирования». Этот подход был исторически первым и позволяет вести читателя при рассмотрении проблематики гидродинамических долгосрочных прогнозов от простого к более сложному.

В главе 3 излагаются вопросы методики проведения численных экспериментов по долгосрочному прогнозу и некоторые их результаты, важные для метеорологов. В частности, рассмотрено влияние начального состояния системы на его долговременную эволюцию, «отклик» системы на аномалии температуры поверхности океана.

Главы 4, 5 и 6 могут быть условно объединены в третью часть учебного пособия, которая демонстрирует новейшие направления теоретических исследований в области долгосрочного прогноза.

Проблема предсказуемости состояния атмосферы и ее анализ с использованием разнообразных средств, в частности систем гидродинамического типа, нашли свое отражение в главе 4.

Автоматизированная система использования гидродинамических прогнозов для расчета аномалий элементов погоды на пентаду и декаду, созданная в Гидрометцентре СССР, кратко описана в главе 5.

В главе 6 излагается, пожалуй, наиболее сложный для восприятия современный метод диагностического анализа месячных температурных аномалий, разработанный в ГМЦ СССР на основе метода сопряженных операторов академика Г. И. Марчука, и затрагивается вопрос о прогнозе аномалий температуры с помощью сопряженных функций.

Автор выражает благодарность профессору В. И. Воробьеву, без поддержки и внимания которого это учебное пособие не было бы написано, своим рецензентам Б. Е. Шнеерову и П. П. Васильеву, взявшим на себя труд детального ознакомления с рукописью и высказавшим много полезных замечаний и советов, а также А. Г. Арешкиной, оказавшей автору неоценимую помощь в процессе подготовки рукописи к изданию.

## Глава I. ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПРИТОКА ТЕПЛА ДЛЯ ПРОГНОЗА АНОМАЛИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

### 1.1. Уравнения теплового баланса атмосферы и деятельного слоя подстилающей поверхности

В настоящее время как для исследовательских целей, так и для некоторых видов прогнозов широко используется упрощенный подход, который называется динамико-статистическим моделированием атмосферы. Основная суть этого подхода может быть лучше всего передана словами Х. Адема, одного из первых исследователей, активно внедрявших такие модели в практику долгосрочного прогноза. Он писал, что если распространить прогноз на большой срок, скажем, на месяц или сезон, то уравнение притока тепла приобретает самостоятельное значение, и можно попытаться сделать упрощения, строя в соответствии с этим динамическую часть задачи. Таким образом, мы получим уравнения, описывающие среднее распределение температуры и среднюю циркуляцию за месяц или сезон, а отклонения от среднего состояния будем трактовать как вихревую турбулентность, которая может быть включена в механизм переноса тепла благодаря использованию коэффициента турбулентной вязкости.

Этот подход, где основные трудности математического моделирования — описание связей поля температуры с циркуляцией атмосферы, — исследователи пытаются обойти, привлекая те или иные гипотезы для упрощенного описания адвекции тепла, известны уже более полувека. Нельзя сказать, что в этом направлении достигнут значительный прогресс. Тем не менее упрощенные модели, которые получаются таким путем, полезны для понимания роли основных источников и стоков тепла при формировании поля температуры.

Остановимся на основных физических предположениях, которые делаются при конструировании динамико-статистических моделей. Будем рассматривать усредненное по месячному интервалу состояние системы атмосфера-океан-континент. Месячное усреднение имеет ряд преимуществ. Во-первых, в течение месяца происходит смена значительного числа элементарных синоптических процессов, вследствие чего можно с большой надежностью описывать характеристики атмосферного теплопереноса статистически, привлекая теорию макротурбулентности. Во-вторых, месячный про-

междуток все еще достаточно мал, поэтому поле аномалий температуры поверхности океана можно считать неизменным. Это позволяет рассматривать модель атмосферы во взаимодействии только с деятельным слоем суши. В-третьих, величины месячных аномалий температуры достаточно малы по сравнению с нормами, что позволяет использовать линеаризацию нелинейных связей и получать для аномалий более простые эволюционные задачи, чем те, которые приходится решать в теории климата при определении самих норм.

Математической основой для построения динамико-статистических моделей являются уравнения теплового баланса.

Уравнения теплового баланса атмосферы и деятельного слоя получаются, как известно, из климатологии и динамической метеорологии, путем интегрирования уравнений притока тепла в каждом из слоев по вертикали в пределах всей толщины слоя. Подобная процедура часто используется при изучении комплекса метеорологических дисциплин, и поэтому приведем общий вид уравнений теплового баланса каждого из слоев:

$$H_a \frac{\partial T_a}{\partial t} + A = J_a + P + R, \quad (1.1.1)$$

$$H_s \frac{\partial T_s}{\partial t} = J_s - P - LE - B - M, \quad (1.1.2)$$

где  $T_a$  — средняя температура тропосферы;  $T_s$  — температура деятельного слоя;  $H_a$  — вертикальная протяженность атмосферы;  $H_s$  — толщина деятельного слоя подстилающей поверхности;  $A$  — средний по всей атмосфере горизонтальный теплоперенос;  $J_a$ ,  $J_s$  — радиационные балансы соответственно атмосферы и деятельного слоя;  $P$  — поток тепла при контактном турбулентном теплообмене на границе атмосферы и подстилающей поверхности;  $E$  — скорость испарения с подстилающей поверхности;  $L$  — скрытая теплота парообразования;  $B$  — поток тепла через нижнюю границу деятельного слоя;  $M$  — затраты тепла на таяние снега и внутрипочвенного льда;  $R$  — суммарный поток тепла, получаемого атмосферой при конденсации водяного пара за счет адиабатического изменения температуры при вертикальных движениях.

Если выразить все источники и стоки тепла, входящие в уравнения (1.1.1) и (1.1.2) через характеристики температурных полей атмосферы и подстилающей поверхности, то получится замкнутая задача, описывающая теплоперенос в атмосфере и пригодная как для описания процесса формирования климата, так и для расчета отклонений от него, интересующих нас в долгосрочном прогнозе. Однако проблема замыкания этой системы в общем случае не решена. Интересуясь задачей долгосрочного прогноза, будем считать, что все поля месячных норм метеоэлементов нам известны. Тогда, представляя все величины, входящие в уравнения (1.1.1) и (1.1.2)

как сумму месячных норм и аномалий, учитывая, что уравнения теплового баланса для норм, безусловно, выполняются и предполагая, что аномалии толщин слоев отсутствуют, получим уравнения теплового баланса для месячных аномалий температуры в виде

$$\bar{H}_a \frac{\partial T'_a}{\partial t} + A' = J'_a + P' + R', \quad (1.1.3)$$

$$\bar{H}_s \frac{\partial T'_s}{\partial t} = J'_s - P' - LE' - B' - M' \quad (1.1.4)$$

Штрих применяется для обозначения аномалий соответствующей величины, а черта сверху для обозначения месячной нормы. Этот же принцип обозначений примем и в дальнейшем.

Наиболее важной стадией разработки каждого конкретного метода расчета месячных аномалий на основе уравнений теплового баланса (1.1.3)—(1.1.4) является замыкание этой системы. На этой стадии величины  $A'$ ,  $J'_a$ ,  $J'_s$ ,  $P'$ ,  $R'$ ,  $E'$  должны быть выражены через аномалии температур  $T'_a$  и  $T'_s$ , их дифференциальные или интегральные характеристики. Задача осложняется тем, что средние за месяц значения потоков тепла являются результатом суммарного воздействия процессов синоптического масштаба и, кроме того, подвержены сильному воздействию горизонтальной неоднородности подстилающей поверхности. Вследствие этих причин прямые физические связи потоков и аномалий температур малы. Задача нахождения существующих между этими величинами косвенных связей называется задачей параметризации суммарного эффекта мелкомасштабных процессов на основе переменных, имеющих в рассматриваемой модели. Степень сложности этой задачи зависит от полноты описания в модели реальной атмосферы. В рассматриваемом двухслойном варианте степень сложности велика, так как основные переменные модели в явном виде не позволяют описать детально ни пограничного слоя атмосферы, ни конвективных или более долгопериодных синоптических процессов. Тем не менее на основании достижений современной климатологии удастся получить необходимые замыкающие зависимости.

Использование в расчетах модели для аномалий создает и еще одну удобную для исследователя возможность: если информация об аномалиях какого-либо источника отсутствует, то можно использовать в качестве временно заменяющей гипотезы предположение об отсутствии этой аномалии. Такое предположение не создает, по крайней мере, систематических ошибок. В нашем дальнейшем изложении результатов прогнозов месячных аномалий температуры, полученных при различных способах замыкания системы уравнений (1.1.3)—(1.1.4), учтем, что затраты тепла на таяние ни в одной из разбираемых моделей не учитывались, и будем предполагать, что  $M' = 0$ .

## 1.2. Прогноз аномалий средней месячной температуры по методу Е. Н. Блиновой

Первая попытка применения гидротермодинамического подхода в оперативной практике долгосрочного прогноза погоды была предпринята в СССР еще в 1951 году под руководством Е. Н. Блиновой. Прогностическую модель Е. Н. Блиновой можно получить из системы уравнений (1.1.3) — (1.1.4), если воспользоваться излагаемыми ниже способами параметризации источников и стоков тепла.

Во-первых, предположим, что наиболее существенными факторами, влияющими на формирование аномалий среднемесячной температуры, являются: аномалии теплопереноса в атмосфере, аномалии потока тепла между деятельным слоем подстилающей поверхности и атмосферой, аномалии эффективного излучения деятельного слоя. Это позволяет считать, что выполняется равенство

$$J'_a = R' = LE' = B' = 0. \quad (1.2.1)$$

Во-вторых, предположим, что среднемесячные аномалии температуры тропосферы не зависят от высоты и выполняется условие «склейки», т. е. равенства аномалий среднемесячных температур на границе атмосферы и деятельного слоя. Учтем, что «профиль» аномалий температуры в деятельном слое можно определить с помощью линейного уравнения теплопроводности, используя условие «склейки» аномалий температур. Зная профиль аномалий температуры и теплофизические параметры деятельного слоя, можно определить толщину деятельного слоя  $\bar{H}_s$  и постоянный множитель  $c$ , чтобы выполнялось равенство

$$\bar{H}_s \frac{\partial T'_s}{\partial t} = c \bar{H}_a \frac{\partial T'_a}{\partial t}. \quad (1.2.2)$$

В-третьих, считая, что аномалии радиационного баланса подстилающей поверхности определяются только аномалиями температуры деятельного слоя через их влияние на эффективное излучение, с учетом «склейки» аномалий температур получим

$$J'_s = -bT'_a. \quad (1.2.3)$$

Коэффициент пропорциональности  $b$  может быть установлен путем линеаризации известных в метеорологии формул эффективного излучения подстилающей поверхности относительно климатических норм температуры месяца, для которого составляется прогноз.

Соотношения (1.2.1) — (1.2.3) совместно с уравнением (1.1.4) позволяют исключить аномалии турбулентного потока тепла из уравнения (1.1.3), после чего оно примет вид

$$(1 + c) \bar{H}_a \frac{\partial T'_a}{\partial t} + A' + bT'_a = 0. \quad (1.2.4)$$

Величина  $A'$  представляет собой среднюю по толщине атмосферы аномалию адвекции тепла. Для ее определения сделаем вслед за Е. Н. Блиновой четвертое предположение. Допустим, что средний по вертикали теплоперенос в атмосфере может быть определен по скорости ветра на уровне 600 м ГПа и что характер связи адвекции тепла с циркуляцией, характеристиками горизонтальной макротурбулентности и температурным полем не меняется при осреднении адвекции по месячному интервалу. Тогда можно записать равенство:

$$A/\bar{H}_a = (\vec{U}, \nabla T_a) - K \nabla^2 T_a, \quad (1.2.5)$$

в котором первый член правой части описывает перенос температуры упорядоченным потоком, а второй — перенос температуры вследствие макротурбулентности. В этом равенстве  $\vec{U}$  — двумерный вектор среднемесячных значений скорости потока;  $\nabla T_a$  и  $\nabla^2 T_a$  обозначают соответственно двумерный градиент и лапласиан поля среднемесячной температуры;  $K$  — коэффициент горизонтального макротурбулентного обмена. Еще раз подчеркнем, что равенство (1.2.5) для описания горизонтальной адвекции, строго говоря, применимо для небольших интервалов времени и широко распространено в теории краткосрочного прогноза погоды.

Для определения аномалий горизонтального теплопереноса с помощью (1.2.5) коэффициент макротурбулентного обмена считается постоянным, а выражение, описывающее упорядоченный теплоперенос, подвергается дальнейшим упрощениям. Раскроем скалярное произведение  $(U, \nabla T_a)$  в сферической системе координат

$$(\vec{U}, \nabla T_a) = \frac{U}{a \sin \theta} \frac{\partial T_a}{\partial \lambda} + \frac{V}{a} \frac{\partial T_a}{\partial \theta}, \quad (1.2.6)$$

где  $U, V$  — составляющие вектора среднемесячной скорости упорядоченного переноса в атмосфере, направленные соответственно вдоль широтного круга и вдоль меридиана;  $a$  — средний радиус Земли;  $\theta$  — дополнение широты;  $\lambda$  — долгота.

Представим функции, входящие в (1.2.6) в виде суммы климатических норм, которые будем считать зональными, и нестационарных азональных аномалий

$$U = \bar{U}(\theta) + U'(\theta, \lambda, t), \quad (1.2.7)$$

$$V = \bar{V}(\theta) + V'(\theta, \lambda, t), \quad (1.2.8)$$

$$T_a = \bar{T}_a(\theta) + T'_a(\theta, \lambda, t). \quad (1.2.9)$$

Величины, имеющие черту, обозначают зональные средние, а величины, имеющие штрих, азональные отклонения. Будем счи-

тать, что между зональными средними и а зональными отклонениями имеется такое соотношение величин:

$$\bar{f} \gg f', \quad (1.2.10)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial s} \gg \frac{\partial f'}{\partial s}, \quad s = t, \lambda, \theta. \quad (1.2.11)$$

В соответствии с климатическими данными определим зависимости среднезональных величин от  $\theta$ :

$$\bar{U} = \alpha a \sin \theta, \quad (1.2.12)$$

$$\bar{V} = 0, \quad (1.2.13)$$

$$\bar{T}_a = T_0 + M \sin^2 \theta, \quad (1.2.14)$$

Здесь  $\alpha$  — угловая скорость вращения атмосферы как твердого тела вокруг земной оси (эта величина называется индексом циркуляции Е. Н. Блиновой);  $T_0$  — температура на полюсе;  $M$  — разность температур между экватором и полюсом.

Воспользовавшись этими соотношениями, можно преобразовать выражение (1.2.6)

$$\begin{aligned} (\vec{U}, \nabla T_a) = & \left( \alpha \frac{\partial T'_a}{\partial \lambda} + \frac{2M \cos \theta \sin \theta}{a} V' \right) + \\ & + \left( \frac{U'}{a \sin \theta} \frac{\partial T'_a}{\partial \lambda} + \frac{V'}{a} \frac{\partial T'_a}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

Линеаризуем это выражение, учитывая (1.2.10) — (1.2.11) и пренебрегая членами, сгруппированными во вторую скобку правой части (1.2.15), по сравнению с теми, которые сгруппированы в первую скобку.

Подставим теперь главную часть (1.2.15) в (1.2.5) и примем во внимание (1.2.9), после чего получим

$$A/\bar{H}_a = \left( \alpha \frac{\partial T'_a}{\partial \lambda} + \frac{2M \cos \theta \sin \theta}{a} V' - K \nabla^2 T'_a \right) - K \nabla^2 \bar{T}_a. \quad (1.2.16)$$

Последний член правой части этого равенства представляет собой климатическую норму горизонтального теплопереноса. В соответствии с этим можно считать выражение, стоящее в скобках в правой части равенства (1.2.16), определяющим аномалию среднемесячного горизонтального теплопереноса  $A'/\bar{H}_a$ . С учетом этого получим из (1.2.4) окончательное уравнение для определения аномалий среднемесячной температуры:

$$\begin{aligned} (1 + c) \frac{\partial T'_a}{\partial t} + \alpha \frac{\partial T'_a}{\partial \lambda} - K \nabla^2 T'_a + \\ + \frac{b}{H_a} T'_a = - \frac{2M \cos \theta \sin \theta}{a} V'. \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

Решение подобного прогностического уравнения (периодическое по  $\lambda$ , ограниченное у полюса и обращающееся в ноль на экваторе), Е. Н. Блинова находила для северного полушария в виде ряда по сферическим функциям. Этот метод решения подробнее рассматривается в главе 2.

Остановимся на физическом смысле прогностической задачи Е. Н. Блиновой, некоторых деталях и результатах ее оперативного применения. Физический смысл прогноза аномалий среднемесячной температуры с помощью уравнения (1.2.17) прост: аномалии исходного поля температуры (скажем, взятые за предыдущий месяц) могут сглаживаться вследствие макротурбулентного обмена и радиационного теплообмена, или переноситься с запада на восток со средней климатической скоростью зонального ветра на высоте 600 гПа поверхности. Генерирование аномалий происходит только за счет меридиональных вторжений: при  $V' > 0$  за счет северного потока возникают отрицательные аномалии, при  $V' < 0$  — положительные.

Техническая реализация метода Е. Н. Блиновой осуществлялась с 1958 года в течение многих лет в Гидрометеорологическом центре СССР. Исходными материалами для прогноза служили: а) климатические нормы значений индекса циркуляции Е. Н. Блиновой для месяца, на который рассчитывался прогноз; б) климатические нормы значений метеорологических и теплофизических параметров, необходимых для определения коэффициентов прогностического уравнения; в) поле геопотенциала 600 гПа поверхности, взятое за 40 дней до начала того месяца, на который рассчитывается прогноз (по этим данным определяются аномалии меридиональных скоростей  $V'$  с использованием геострофического соотношения).

Систематическое оценивание прогнозов велось с января 1961 года по 34 станциям ЕТС и Западной Сибири. Значения стандартных статистических оценок  $\rho$  для ряда лет приведены в табл. 1.1. Следует помнить, что эта оценка положительна, если знак аномалий спрогнозирован правильно более чем на 50% всех станций, и равна единице, если этот прогноз всюду удачен. Основной вывод, который может быть сделан по этим оценкам, — это недостаточная надежность прогноза, хотя в ряде случаев прогноз оказывался очень удачным.

Методика Е. Н. Блиновой не учитывает ряд факторов, определяющих прогнозируемую величину. Принятые во внимание факторы учтены со значительными упрощениями. Неудача ряда прогнозов могла быть вызвана именно этим. Всесторонние исследования методики прогноза показали, что влияние начального поля температурных аномалий практически не проявляется. Большое влияние на прогноз оказывает правильный выбор индекса циркуляции, однако значительные усилия, затраченные на улучшение описания этой величины, не привели к кардинальному повышению надежности прогноза. Дальнейшее развитие работ продолжалось

в направлении более полного учета взаимодействия термического поля и циркуляции атмосферы.

Таблица 1.1

Значения оправдываемости по знаку ( $\rho$ ) прогнозов аномалий среднемесячной температуры по методу Е. Н. Блиновой

Месяц	Год		
	1961 г.	1962 г.	1963 г.
Январь	-0,25	0,68	0,09
Февраль	0,94	0,47	0,70
Март	-0,76	0,00	0,74
Апрель	0,44	0,52	0,38
Май	0,38	-0,21	0,00
Июнь	0,27	-0,19	-0,25
Июль	0,16	0,24	0,19
Август	0,09	0,00	0,06
Сентябрь	0,39	0,17	-0,64
Октябрь	0,23	0,10	0,62
Ноябрь	0,06	0,19	0,18
Декабрь	0,00	0,44	0,24

### 1.3. Прогноз аномалий среднедекадной и среднемесячной температур по методу Г. И. Морского

Расширение числа учтенных факторов при разработке методики прогноза аномалий температур на основе уравнения теплового баланса было произведено Г. И. Морским. Для того, чтобы получить прогностическое уравнение этой методики, из системы (1.1.3)—(1.1.4) нужно сделать следующие предположения. Во-первых, допустим, что аномалии суммарного притока тепла к атмосфере в каждой точке пропорциональны аномалиям среднего балла облачности  $n'$ :

$$J_a + P' + R' \sim n'. \quad (1.3.1)$$

Такое предположение имеет смысл, так как все входящие в левую часть аномалии потоков тепла сильно реагируют на изменение облачности. Однако знак зависимости у них разный, например, турбулентный теплообмен с ростом облачности уменьшается, а тепловыделение за счет конденсации растет. Поэтому коэффициент пропорциональности в равенстве (1.3.1) был определен в методике Г. И. Морского на основании данных наблюдений.

Отметим, что выражение (1.3.1) позволяет определить аномалию средней за некоторый период температуры атмосферы независимо от температуры подстилающей поверхности, т. е. позволяет при прогнозе не рассматривать уравнение (1.1.4).

Второе предположение в рассматриваемом методе прогноза касается расчета аномалий теплопереноса в атмосфере. Так же, как и Е. Н. Блинова, Г. И. Морской использует предположение о неизменности формы связи теплопереноса в атмосфере с термическим полем и полем скорости при усреднении за декаду или месяц, которое приводит к выражению (1.2.5). Но он пренебрегает влиянием макротурбулентного обмена на аномалии теплопереноса и не пользуется линеаризацией упорядоченного теплопереноса.

Расчет аномалии средней адвекции в тропосфере производится по формуле:

$$A'/\bar{H}_a = (\vec{U}, \nabla T'_a) = \frac{1}{a^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \bar{H}}{\partial \lambda} \frac{\partial T'_a}{\partial \theta} - \frac{\partial \bar{H}}{\partial \theta} \frac{\partial T'_a}{\partial \lambda} \right). \quad (1.3.2)$$

Таким образом, предполагается, что аномалии адвекции тепла создаются за счет переноса аномалий средней температуры полем среднего ветра, который считается геострофическим и определяется по значениям геопотенциала  $AT_{500} - \bar{H}$ . Принципиально отличался метод Г. И. Морского от метода Е. Н. Блиновой способом расчета адвекции. Как видно из прогностического уравнения (1.2.17), в методике Е. Н. Блиновой учитывается непрерывное влияние изменений поля температуры на адвекцию тепла. Г. И. Морской определяет адвекцию тепла по исходным данным и предполагает, что она не изменяется в течение всего периода, на который ведется прогноз. Это позволяет организовать процедуру определения прогностических аномалий по очень простой схеме. Заменяя производную по времени в уравнении (1.1.3) конечной разностью, получим уравнение

$$T'_a = T'_{ai} + aA'_i + bn'_i, \quad (1.3.3)$$

где  $a, b$  — коэффициенты, а нижний индекс  $i$  означает, что величина, имеющая его, определяется по исходным данным.

Однако формула (1.3.3) не является окончательной. Следует помнить, что коэффициент пропорциональности в зависимости (1.3.1) отражает влияние преобладающего процесса из трех, входящих в левую часть. Но преобладающий процесс будет зависеть от пространственного масштаба: например, радиационные факторы наиболее сильно влияют на формирование разности температур экватор-полюс, а конденсация играет роль при рассмотрении процессов, происходящих в отдельных облачных массах. Кроме того, влияние исходной аномалии температур, как показала практика прогноза по методу Е. Н. Блиновой, может быть менее существенным, чем влияние каких-либо других факторов, не учтенных формулой (1.3.3), но зависящих от температуры. Принимая во

внимание эти соображения, Г. И. Морской предложил считать (1.3.3) не рабочей формулой, а только обоснованием линейной зависимости величины аномалии средней месячной температуры от аргументов, входящих в правую часть этой формулы. Саму же линейную зависимость он предложил искать в более общей форме

$$T'_a = \alpha_1 T'_{ai} + \alpha_2 A'_i + \alpha_3 n'_i + \alpha_4, \quad (1.3.4)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  — коэффициенты, которые следует получать по материалам наблюдений методом наименьших квадратов.

Для учета зависимости коэффициентов от пространственного масштаба явления Г. И. Морской использовал метод корреляции гармоник. Суть метода состоит в том, что поля аргументов прогностического соотношения (1.3.4) и поле прогнозируемой величины представляются в виде конечных сумм Фурье по сферическим гармоникам

$$T'_a = \sum_{m=0}^M \sum_{n=m}^N (A_1^{m,n} \cos m\lambda + B_1^{m,n} \sin m\lambda) P_n^m(\theta), \quad (1.3.5)$$

$$T'_{ai} = \sum_{m=0}^M \sum_{n=m}^N (A_2^{m,n} \cos m\lambda + B_2^{m,n} \sin m\lambda) P_n^m(\theta), \quad (1.3.6)$$

$$A'_i = \sum_{m=0}^M \sum_{n=m}^N (A_3^{m,n} \cos m\lambda + B_3^{m,n} \sin m\lambda) P_n^m(\theta), \quad (1.3.7)$$

$$n'_i = \sum_{m=0}^M \sum_{n=m}^N (A_4^{m,n} \cos m\lambda + B_4^{m,n} \sin m\lambda) P_n^m(\theta). \quad (1.3.8)$$

Величины  $A_j^{m,n}, B_j^{m,n}$  при  $j = 1, 2, 3, 4$  обозначают коэффициенты рядов Фурье, а  $M$  и  $N$  — предельные значения индексов  $m$  и  $n$  соответственно.

Линейность прогностического соотношения (1.3.4) позволяет утверждать, что между коэффициентами Фурье существует аналогичная зависимость:

$$A_1^{m,n} = \sum_{j=1}^3 \alpha_{A_j}^{m,n} A_{j+1}^{m,n} + \alpha_{A_4}^{m,n}, \quad (1.3.9)$$

$$B_1^{m,n} = \sum_{j=1}^3 \alpha_{B_j}^{m,n} B_{j+1}^{m,n} + \alpha_{B_4}^{m,n}, \quad (1.3.10)$$

Коэффициенты  $\alpha_{A_j}^{m,n}$  и  $\alpha_{B_j}^{m,n}$  при  $j = 1, 2, 3, 4$  можно найти, используя метеорологические архивы, предварительно получив по ним коэффициенты Фурье, а затем воспользовавшись методом наименьших квадратов. Значения этих коэффициентов будут различны для разных гармоник. Это означает, что при использовании для прогноза вместо формулы (1.3.4) формул (1.3.9) и (1.3.10) можно более точно учесть вклад процессов разного пространственного масштаба в формировании аномалии средней температуры.

Для практической реализации методики Г. И. Морского использовались следующие материалы: а) значения аномалий средней температуры за период, предшествующий периоду прогноза; б) значения геопотенциала 500 гПа поверхности, осредненные за период, предшествующий периоду прогноза; в) значения облачности, взятые по спутниковым наблюдениям, осредненные за период, предшествующий прогностическому. По полям геопотенциала и аномалий температуры определяется аномалия адвекции. Затем значения этой аномалии, а также значения облачности и исходного поля аномалий температуры разлагаются в ряды Фурье (1.3.6) — (1.3.8). После этого по найденным коэффициентам Фурье с помощью соотношений (1.3.9) и (1.3.10) рассчитываются прогностические коэффициенты Фурье для аномалий средней температуры, а затем производится восстановление поля этой аномалии по формуле (1.3.5). В расчетах используется  $M = 4$  и  $N = 10$ .

По методу Г. И. Морского не было организовано оперативных прогностических расчетов. Прогнозы давались в опытном порядке. Оценки их оправдываемости приведены в табл. 1.2. Прогнозы составлялись для аномалий среднедекадной и среднемесячной температуры с использованием различных вариантов расчета аномалий адвекции тепла. Как видно из табл. 1.2, оправдываемость этих прогнозов несколько выше оправдываемости прогнозов по методу Е. Н. Блиновой. Исследование этой методики показало, что влияние адвекции на прогноз существенно, поскольку замена в расчете адвекции по формуле (1.3.2) поля геопотенциала, осредненного по периоду прогноза, на поле геопотенциала, взятое для того же периода, но не по фактическим данным, а по полю норм, ощутимо снижало успешность прогноза. Однако Г. И. Морской отмечает, что на территории северного полушария имеются значительные районы, для которых учет адвекции в любом варианте снижает успешность прогноза и главное прогностическое значение приобретает учет облачности. Таким образом, можно заключить, что прогноз формирования аномалий среднемесячных температур требует не только учета теплопереноса в атмосфере, но и привлечения информации об аномалиях источников и стоков тепла.

Таблица 1.2

Значения оправдываемости по знаку ( $\rho$ ) прогнозов аномалий среднемесячной температуры по методу Г. И. Морского за 1966 год

Территория	Месяц					
	Июнь	Июль	Август	Сентябрь	Октябрь	Среднее
Европа	0,762	0,450	0,619	0,524	0,490	0,551
Азия	0,548	0,729	0,552	0,680	0,627	0,628
Тихий океан	-0,238	-0,103	0,524	0,000	-0,040	0,029
Атлантический океан	0,731	0,679	0,754	0,414	0,828	0,681
Америка	0,200	0,500	0,091	0,000	0,200	0,198
СССР	0,600	0,625	0,634	0,662	0,625	0,629

#### 1.4. Прогноз аномалий среднемесячной температуры по методу Х. Адема

Исследование возможностей модели, основанной на уравнениях теплового баланса с учетом наибольшего числа факторов, влияющих на термическое поле, произвел Х. Адем. Его систему прогнозистических уравнений можно получить из (1.1.3) — (1.1.4), дополнив ее нижеописанными замыкающими соотношениями. Расчет аномалий адвекции тепла в атмосфере производится на основе тех же предположений, что у Е. Н. Блиновой и Г. И. Морского, и аналитически выражается формулой (1.2.5). В качестве скорости упорядоченного теплопереноса в этой формуле берется климатическая норма геострофического ветра на поверхности 700 гПа, коэффициент макротурбулентного обмена полагается постоянным, а вместо температуры следует поставить  $T'_a$ . Таким образом, Х. Адем полагает, что аномалии адвекции тепла создаются путем переноса аномалий среднемесячной температуры «средним ветром» и макротурбулентностью.

Определение аномалий радиационного баланса атмосферы и деятельного слоя подстилающей поверхности производится Х. Адемом на основе линейных зависимостей

$$J'_a = a_1 T'_a + a_2 T'_s + a_3 n', \quad (1.4.1)$$

$$J'_s = b_1 T'_a + b_2 T'_s + b_3 n', \quad (1.4.2)$$

в которых коэффициенты  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2$  — постоянные, а  $b_3$  — функция от климатической нормы суммарной радиации месяца, для которого составляется прогноз, и от альбеда подстилающей поверхности, определяемого, главным образом, границей снега и льда в месяце, предшествующем тому, на который составляется прогноз.

Соотношения (1.4.1) и (1.4.2) получены Х. Адемом путем линеаризации выражений для потоков длинноволновой радиации атмосферы, упрощенных им предварительно, а также с привлечением известных климатологических формул для определения коротковолновой радиации, поглощенной атмосферой и деятельным слоем подстилающей поверхности.

Аномалии среднемесячного турбулентного потока тепла на границе деятельного слоя и атмосферы рассчитываются по формуле

$$P' = k_{sp} \bar{V}_s (T'_s - T'_a), \quad (1.4.3)$$

в которой  $k_{sp}$  — коэффициент теплопередачи, имеющий постоянные, но различные значения над океаном и континентом;  $\bar{V}_s$  — климатическая норма скорости ветра у поверхности земли для месяца, на который составляется прогноз.

Аномалии скорости испарения над океаном рассчитываются по формуле

$$E' = k_{se} \bar{V}_s (0,98 T'_s - \bar{f} T'_a), \quad (1.4.4)$$

где  $k_{se}$  — коэффициент диффузии водяного пара, постоянный по величине;  $\bar{f}$  — климатическая норма относительной влажности над океаном.

Формулы (1.4.3) и (1.4.4) являются линеаризацией известных из физики пограничного слоя атмосферы законов тепломассообмена, упрощенных предварительно с помощью предположения о постоянстве величин  $k_{sp}$ ,  $k_{se}$  и  $\bar{V}_s$  в течение периода, на который рассчитывается прогноз.

Определение аномалий испарения с поверхности континента производится Х. Адемом на основе распространенного в климатологии способа определения скорости испарения поверхности суши через испаряемость. Под испаряемостью понимается скорость испарения с того же участка суши, но при условии, что он полностью увлажнен. При полном увлажнении согласно исследованиям М. И. Будыко турбулентный теплообмен становится пренебрежимо малым по сравнению с испарением, а значит испаряемость может быть принята равной радиационному балансу подстилающей поверхности, правда, при температуре, соответствующей предельному увлажнению. Пренебрегая этим последним условием, Х. Адем получает для определения аномалий скорости испарения формулу

$$E' = dI'_s, \quad (1.4.5)$$

где  $d$  — коэффициент, определяемый с учетом степени увлажненности почвы в месяце, на который рассчитывается прогноз, и изменяющийся от точки к точке континента.

Определение аномалий притока тепла в атмосфере  $R'$ , вызванных совместным действием адиабатического изменения температуры при вертикальных движениях и тепловыделения при конденсации водяного пара, производится в методе Х. Адема при следующих предположениях. Во-первых, принято предположение, что аномалии среднемесячных скоростей вертикальных токов отсутствуют; тогда отсутствуют и аномалии теплообмена, вызванного адиабатическими изменениями температуры, а величина  $R'$  полностью определяется тепловыделением при конденсации. Во-вторых, среднемесячные значения тепловыделения при конденсации определяются как остаточный член уравнения баланса влаги в атмосфере

$$\frac{\partial M_q}{\partial t} + A_q = E - R, \quad (1.4.6)$$

где  $M_q$  — масса водяного пара в атмосфере;  $A_q$  — приток влаги за счет горизонтального переноса. Считая, как и при выводе уравнений (1.1.3) и (1.1.4), что это уравнение выполняется для климатических норм, входящих в него величин, получим выражение для расчета аномалии тепловыделения при конденсации

$$R' = E' - \frac{\partial M'_q}{\partial t} - A'_q, \quad (1.4.7)$$

в котором, как и раньше, величины со штрихом обозначают аномалии средних месячных значений. Задавая законы изменения температуры и влажности с высотой, можно выразить значения  $M'_q$  через  $T'_a$  и приземную относительную влажность, которая считается равной климатической норме. Тогда выполняется равенство

$$\frac{\partial M'_q}{\partial t} = c_1 \bar{H}_a \frac{\partial T'_a}{\partial t}, \quad (1.4.8)$$

в котором  $c_1$  — переменный коэффициент, зависящий от относительной влажности.

На основе анализа климатических данных Х. Адем определяет  $A'_q$  через аномалии упорядоченного теплопереноса равенством:

$$A'_q = c_2 \bar{H}_a (\vec{U}, \nabla T'_a), \quad (1.4.9)$$

в котором  $c_2$  также переменный коэффициент, зависящий от относительной влажности. Использование равенств (1.4.6) — (1.4.9) совместно с выражениями для аномалий испарения (1.4.4) и (1.4.5) позволяет вычислить  $R'$  в методе Х. Адема.

Для полного замыкания прогностических уравнений Х. Адема осталось привести формулу, которую он использовал для определения аномалий облачности,

$$n' = c_4 R' / R. \quad (1.4.10)$$

Коэффициент  $c_4$  — постоянный, а нормировка значений аномалий тепловыделения при конденсации производится путем деления на климатическую норму этой величины в рассматриваемой точке (климатическая норма определяется по величине среднемесячных осадков). Нормировка предпринята для того, чтобы не получать физически нереальных значений аномалий балла облачности.

Приведем систему уравнений, описывающую изменения аномалий среднемесячных температур атмосферы и деятельного слоя в методе Х. Адема. После постановки всех приведенных в этом параграфе замыкающих соотношений в уравнения (1.1.3) и (1.1.4) указанная система примет вид

$$p_1 \frac{\partial T'_a}{\partial t} + p_2 (\vec{U}, \nabla T'_a) - K \nabla^2 T'_a + p_3 T'_a + p_4 T'_s = 0, \quad (1.4.11)$$

$$q_1 \frac{\partial T'_a}{\partial t} + q_2 (\vec{U}, \nabla T'_a) + q_3 T'_a + \frac{\bar{H}_s}{\bar{H}_a} \frac{\partial T'_s}{\partial t} + q_4 T'_s = f'. \quad (1.4.12)$$

В этих уравнениях коэффициенты  $p_1, p_2, p_3, p_4; q_1, q_2, q_3, q_4$  и  $f'$  являются переменными, зависящими от расположения континентов и океанов, начального положения границы снега и льда, ряда климатических норм, использованных в замыкающих соотношениях\*.

\* Подробнее с методом Х. Адема можно познакомиться в [18].

Практическая реализация метода Х. Адема включает следующие этапы: сбор исходной информации, предварительные расчеты с целью контроля («настройка модели»), проведение прогностических расчетов, оценка прогноза. Сбор исходной информации для модели Х. Адема является весьма трудоемким процессом. Напомним, что исходной информацией будут поля температуры атмосферы (уровень, характеризующий атмосферу в этом методе, расположен на 700 гПа поверхности), температуры поверхности океанов, а также положение границы снега и льда. Температура деятельного слоя континентов не входит в число начальных данных, так как Х. Адем пренебрегает теплоемкостью деятельного слоя, что позволяет определить температуру поверхности континента по температуре атмосферы. В комплект исходных данных входят также климатические нормы скорости ветра на уровне 700 гПа поверхности и ряда составляющих теплового баланса для месяца, на который осуществляется прогноз. Хотя вся эта информация в настоящее время имеется, тем не менее на ее сбор, обработку и контроль для каждого нового прогноза уходит много времени.

Контроль исходной информации и регулировка значительного числа коэффициентов, имеющихся в модели, производится путем предварительных расчетов. Модель оказывается сильно чувствительной к вариации коэффициентов и погрешностям климатических норм. Согласованность информации проверяется на климатической модели сезонного хода температуры, которая здесь не рассматривается.

Численная реализация прогноза производится методом сеток. Область, для которой разыскивается решение, изображена на рис. 1.1. Уравнения записаны для плоскости стереографической проекции. В качестве граничного использовано условие отсутствия аномалий температуры на границах. Численное интегрирование ведется с шагом 5 суток по времени. В средних широтах пространственный шаг около 800 км.

Оценка прогнозов производилась по совпадению знаков изменений аномалий за месяц у прогностического и фактического полей. Это осложняет сопоставление успешности прогнозов по методу Х. Адема с успешностью прогнозов по методам Е. Н. Блиновой и Г. И. Морского. Возможности модели можно наглядно оценить по двум прогнозам для территории Северной Америки, приведенным на рис. 1.2. Расположение этой территории в области прогноза показано на рис. 1.1. Хорошо видно, что в обоих случаях происходила существенная перестройка поля аномалий приземной температуры от исходного месяца к следующему, на который рассчитывался прогноз. В обоих случаях модель успешно «справилась» с определением знака будущей аномалии. Статистическая характеристика успешности прогнозов аномалий температуры поверхности океана приведена в табл. 1.3. Температура поверхности океана является в настоящее время основной величиной, прогнозируемой по методу Х. Адема. Для характеристики отличий прог-

нозов от чисто случайных в графе «контроль» табл. 1.3 приведены оценки «квазипрогнозов», которые составлялись путем изменения знака исходной аномалии в каждой точке на противоположный. Такой контрольный прогноз согласно Х. Адему оказывается несколько успешней инерционного для месячных интервалов. Из приведенных в таблице данных видно, что прогноз по методу Х. Адема имеет примерно такую же успешность, как и прогнозы, описанные ранее.

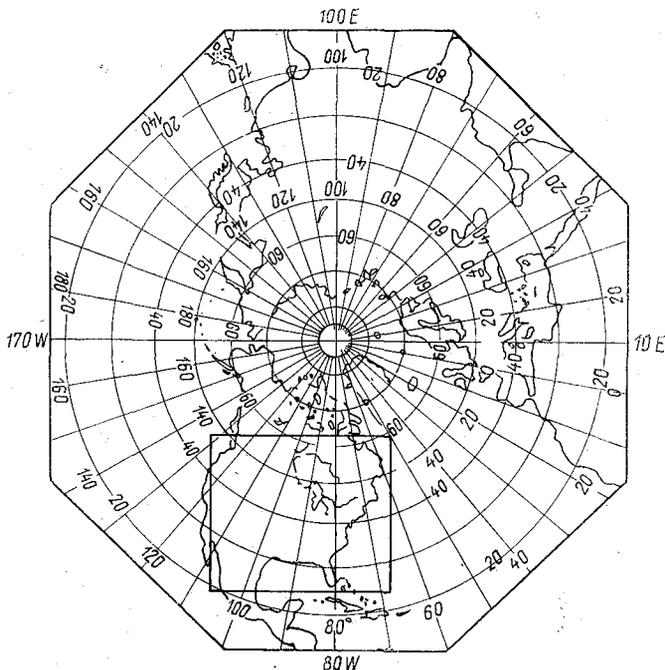


Рис. 1.1. Прогностическая область расчета аномалий среднемесячной температуры по модели Х. Адема и область, по которой произведены оценки прогнозов

Исследования чувствительности модели, проведенные Х. Адемом, показали слабую зависимость результатов прогнозов от начального поля аномалий температуры атмосферы. Это согласуется с выводами Е. Н. Блиновой. В то же время начальное распределение температуры поверхности океанов, а также положение границы снега и льда в исходном месяце оказывают решающее влияние на результаты. Влияние упорядоченного теплопереноса за счет среднемесячного ветра в атмосфере сказывается на прогнозируемом поле слабее, чем вариация коэффициента горизонтального макротурбулентного обмена в пределах 30% его величины. Замена климатических норм скорости ветра на фактические среднемесячные значения не приводит к заметному повышению успешности прогноза.

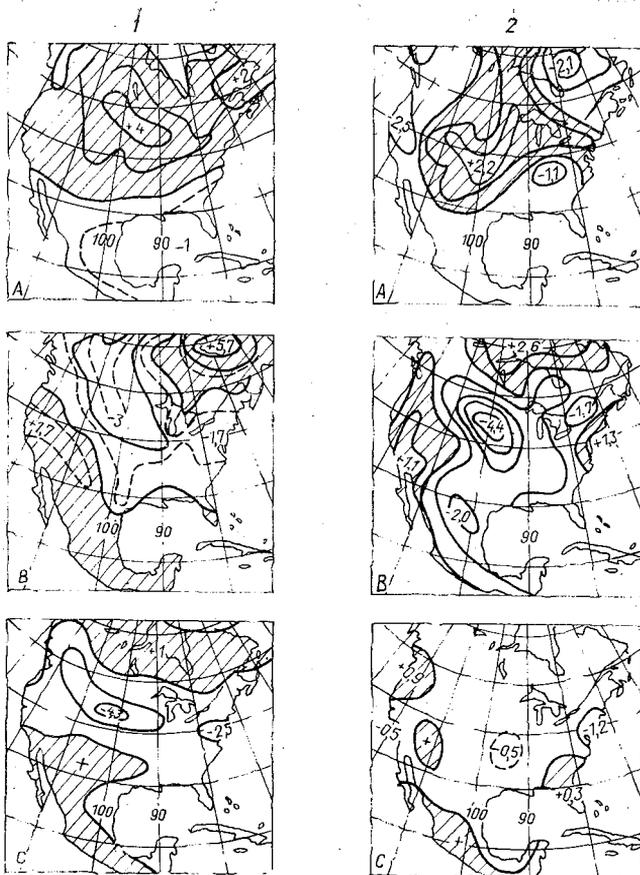


Рис. 1.2. Аномалии температуры:

- 1) наблюдавшиеся в марте (а), наблюдавшиеся в апреле (б), рассчитанные для апреля по модели Х. Адема (с);
- 2) наблюдавшиеся в июле (а), наблюдавшиеся в августе (б), рассчитанные для августа (с)

Таблица 1.3

Оценка по знаку успешности прогноза изменений аномалий среднемесячной температуры поверхности океанов по методу Х. Адема (метод) и путем инверсии знака исходной аномалии (контроль) для 73 прогнозов с декабря 1965 по декабрь 1970 гг. и с июня 1972 по май 1973 гг.

Сезон	Тихий океан		Атлантический океан	
	метод	контроль	метод	контроль
Зима	0,282	0,162	0,248	0,166
Весна	0,266	0,160	0,266	0,190
Лето	0,268	0,194	0,302	0,242
Осень	0,256	0,178	0,238	0,160
Год	0,268	0,174	0,264	0,190

Х. Адем обращает также внимание на то, что величина предсказываемых аномалий оказывается систематически заниженной по сравнению с фактической, т. е. в модели имеется тенденция к сглаживанию полей. Успешность прогнозов имеет сезонные изменения и зависит от географического положения точки, в которой она определяется. Х. Адем связывает это с недостатком формул, параметризующих источники и стоки тепла.

Заканчивая рассмотрение метода Х. Адема можно сделать некоторые выводы и об успешности «тепlobалансового» подхода к прогнозу аномалий среднемесячной температуры. Модели, основанные на этом подходе, позволяют получать прогнозы, имеющие заметную успешность. Однако неполнота учета всех необходимых факторов, в каждой отдельной модели приводит к тому, что нельзя сделать однозначный вывод об их полезности и пределах применимости. Как положительный фактор следует отметить, что эти модели дают возможность объективного количественного учета в прогнозе начальных полей температуры океана, облачности, границы снега и льда, степени увлажнения почвы. Однако описание влияния циркуляции атмосферы на термическое поле до сих пор сводится к учету только теплопереноса «среднемесячным» ветром. Это приводит к недооценке роли аномалий циркуляции в формировании термических аномалий по сравнению со сглаживающим эффектом макротурбулентного обмена. В «тепlobалансовых» моделях не учитывается влияние атмосферных вертикальных токов. Опыты прогнозов по методу Г. И. Морского показывают, что эффект аномалий вертикальных токов может проявляться, например, через начальное поле облачности и играть существенную роль в формировании аномалий. Модели этого типа описывают только перенос и размывание аномалий, имевшихся уже в начальный момент. Усиление аномалий, которое при определенных условиях имеет место в реальной атмосфере, существующие модели, основанные на уравнениях теплового баланса, не описывают.

## Глава 2. ИЗУЧЕНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ДЛИННЫХ ВОЛН С ПОМОЩЬЮ ПРОСТЕЙШИХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ

### 2.1. Представление метеорологических полей рядами Фурье

В предыдущей главе было показано, что при постановке задачи долгосрочного прогноза без учета взаимодействия термического поля с циркуляцией атмосферы прогноз аномалий температуры на месяц оказывается недостаточно надежным. В этой главе внимание будет сосредоточено на вопросах упрощенного прогноза циркуляции атмосферы без учета влияния температуры, а также на том, какую роль играет взаимовлияние термического

поля и циркуляции. Основные результаты по этим вопросам были получены на основе представления планетарных метеорологических полей рядами Фурье, т. е. в виде суперпозиции волн разной длины. Ниже будут приведены некоторые сведения о планетарных волнах, собранные путем гармонического анализа метеорологических полей, и описаны возможности прогноза этих волн с помощью простейших моделей динамики атмосферы.

Как известно, периодические дифференцируемые функции разлагаются в достаточно быстро сходящиеся ряды Фурье, т. е. любую функцию, заданную вдоль круга широт, можно представить в виде ряда

$$f(\lambda) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos m\lambda + b_m \sin m\lambda, \quad (2.1.1)$$

где коэффициенты Фурье, зависящие в таком представлении только от времени и полярного угла, определяются формулами:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda) \cos m\lambda d\lambda, \quad (2.1.2)$$

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda) \sin m\lambda d\lambda. \quad (2.1.3)$$

Параметр  $m$  называется волновым числом. Он определяется по формуле

$$m = \frac{2\pi}{L}, \quad (2.1.4)$$

где  $L$  — длина волны.

Дискретность наблюдения метеорологических полей приводит к тому, что интегралы (2.1.2), (2.1.3) могут быть вычислены только приближенно. Наиболее простым и точным такое вычисление бывает, когда пункты наблюдения расположены по широтному кругу равномерно. В этом случае коэффициенты Фурье оцениваются по формулам

$$a_m = \frac{2}{M} \sum_{i=0}^{M-1} f(\lambda_i) \cos m\lambda_i, \quad (2.1.5)$$

$$b_m = \frac{2}{M} \sum_{i=0}^{M-1} f(\lambda_i) \sin m\lambda_i, \quad (2.1.6)$$

где  $M$  — число равноотстоящих точек наблюдения (обычно используется четное  $M$ ). Если определенные таким образом коэффициенты Фурье использовать в разложении (2.1.1), то средняя квадратичная невязка при использовании  $M_1 < M_2$  членов ряда для

представления функции в пунктах наблюдения будет минимальной\*.

Для практики использования рядов Фурье при анализе метеорологических полей следует учесть два важных фактора. Во-первых, то, что между истинными значениями функции  $f_i$  и теми, которые могут быть получены путем суммирования ряда (2.1.1) с коэффициентами, найденными по формулам (2.1.5)—(2.1.6) для тех же точек, могут иметь место расхождения. Это естественно, так как минимизация производится не для каждой точки, а в среднем по всем точкам. Тем более это относится к использованию ряда (2.1.1) для оценки функции между узлами. Во-вторых,

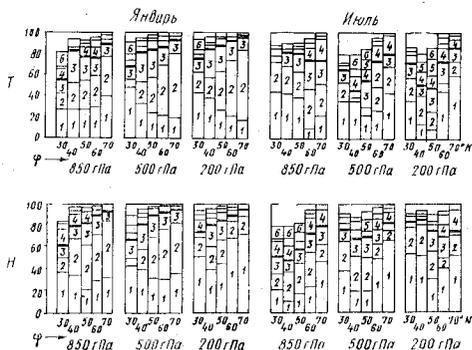


Рис. 2.1. Амплитуды разложений в ряд Фурье по долготе среднемесячных значений геопотенциала  $H$  и температуры  $T$  на различных высотах северного полушария за период 1967—1976 гг. (%)

результат суммирования ряда Фурье сильно чувствителен к погрешностям, с которыми вычисляются коэффициенты. Погрешности возникают из-за присутствия в наблюдаемых значениях функций мелкомасштабных компонент. Для того, чтобы уменьшить влияние этих погрешностей на ряд (2.1.1), восстановленный по коэффициентам (2.1.5), (2.1.6), следует суммировать только те члены ряда (2.1.1), у которых коэффициенты Фурье больше погрешности измерений функции  $f_i$ .

В настоящее время с помощью гармонического анализа изучены многие свойства метеорологических полей. Гармонический анализ позволяет произвести оценку вклада процессов с различным пространственным масштабом в формирование климата и погоды. На рис. 2.1 приведены результаты разложения в ряды Фурье среднемесячных значений геопотенциала и температуры на различных

\* Более подробные сведения о методике гармонического анализа можно найти в соответствующих разделах вычислительной математики.

высотах северного полушария. Можно убедиться, что горизонтальные неоднородности полей геопотенциала и температуры характеризуются большими пространственными масштабами. Волновые числа, характерные для января, имеют значения  $m=1-4$ , что соответствует волнам с длинами от  $180^\circ$  долготы до  $90^\circ$  долготы. Этот же спектральный состав сохраняется по всем высотам, хотя в высоких слоях атмосферы преобладают  $m=1-2$ . От зимы к лету вклад самых длинных волн в формирование полей ослабевает и возникает необходимость учитывать в разложении гармоник с номерами 5 и 6. Такой спектр основных атмосферных полей поясняет, почему известные классификации макросиноптических процессов опираются в основном на планетарные волны.

Интересно, что для таких характеристик атмосферы как адвекция вихря и вертикальная скорость, как показывает их разложение в ряд Фурье по долготе, пространственный масштаб значительно меньше. Волновые числа преобладающих гармоник имеют значения  $m=6-9$ . Это не удивительно, так как указанные величины формируются под воздействием дифференциальных характеристик основных метеорологических полей, а при дифференцировании, как это легко понять, взяв производную по долготе от ряда (2.1.1), вклад более высоких гармоник возрастает.

Спектральный состав реальных нестационарных метеорологических процессов несколько отличается от спектра климатических норм. В настоящее время выяснено, что различия в спектральном составе для процессов планетарных масштабов не велики. В табл. 2.1 представлены результаты сравнения спектров геопотенциала 500 гПа поверхности осредненного и «мгновенного».

Таблица 2.1

Амплитуды  $A_s$ , осредненных по 36 дням, и амплитуды  $A_p$  среднесуточных значений геопотенциала 500 гПа поверхности, наблюдавшегося с 1.1.1949 по 5.11.1949, и период длинных волн  $\tau$  в зависимости от волнового числа

$m$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau$ (сутки)	16	14	0	22	10	8	6	6
$A_s$ (м)	101	95	119	15	27	18	0	0
$A_p$ (м)	64	76	76	73	43	52	36	24

По этим данным можно убедиться, что мгновенное состояние атмосферы так же, как и климатическое, имеет значительную составляющую на планетарных масштабах. Однако и крупномасштабные процессы с  $m=5 \div 8$  дают значительный вклад в мгновенное состояние. Отсутствие этих процессов в спектре норм обусловлено их быстрым протеканием, за счет чего они в среднем имеют случайную фазу и исчезают при наложении друг на друга.

При изучении планетарных волн широко используется метод разложений метеорологических полей в двойные ряды Фурье. Поясним идею этого представления интересующей нас информации, продолжив изучение ряда (2.1.1). Указанный ряд, как это ясно из метода определения его коэффициентов, отражает изменение метеорологических полей по меридиану, поскольку имеет переменные коэффициенты  $a_m(\theta, t)$  и  $b_m(\theta, t)$ . Эти коэффициенты в свою очередь являются периодическими функциями полярного расстояния  $\theta$ . Их определяют для  $\theta \in [0, \pi]$  и, как правило, считают четными функциями этого аргумента. Поэтому их можно разложить в ряды Фурье

$$a_m(\theta, t) = \frac{1}{2} A_{0m} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \cos n\theta, \quad (2.1.7)$$

$$b_m(\theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm} \cos n\theta. \quad (2.1.8)$$

Коэффициенты  $A_{nm}$  и  $B_{nm}$  в этих разложениях зависят только от времени и могут быть найдены по формулам, аналогичным (2.1.5), (2.1.6)

$$A_{nm} = \frac{4}{N} \sum_{j=0}^{N-1} a_{mj} \cos n\theta_j, \quad (2.1.9)$$

$$B_{nm} = \frac{4}{N} \sum_{j=0}^{N-1} b_{mj} \cos n\theta_j. \quad (2.1.10)$$

Отметим, что применение разложений (2.1.7) и (2.1.8) приводит к представлению исходного метеорологического поля в виде двойного ряда Фурье:

$$f(\theta_j, \lambda_i, t) = \frac{1}{2} A_{00} + \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} (A_{nm} \cos m\lambda_i + B_{nm} \sin m\lambda_i) \cos n\theta_j. \quad (2.1.11)$$

Коэффициенты этого ряда могут зависеть только от времени. Однако представление (2.1.11) не является единственно возможным способом построения рядов Фурье на сфере. Действительно, рассматривая в промежутке  $\theta \in [0, \pi]$  в качестве независимой переменной  $x = \cos \theta$  ( $x \in [0, 1]$ ) и зная полную систему ортогональных функций от  $x$  в этой области аргумента, можно раскладывать коэффициенты  $a_m$  и  $b_m$  не в ряды (2.1.7) и (2.1.8), а в ряды

$$a_m(\theta, t) = \sum_{n=m}^{\infty} \alpha_{nm} P_n^m(\cos \theta), \quad (2.1.12)$$

$$b_m(\theta, t) = \sum_{n=m}^{\infty} \beta_{nm} P_n^m(\cos \theta), \quad (2.1.13)$$

где  $P_n^m(\cos \theta)$  — присоединенные функции Лежандра. Присоединенные функции Лежандра являются ортогональными, т. е. для них выполняются равенства:

$$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_{n'}^m(x) dx = 0, \quad (2.1.14)$$

при  $n \neq n'$ .

Поэтому коэффициенты Фурье определяются по формулам

$$\alpha_{nm} = \int_{-1}^1 a_m P_n^m dx, \quad (2.1.15)$$

$$\beta_{nm} = \int_{-1}^1 b_m P_n^m dx. \quad (2.1.16)$$

После получения этих коэффициентов для представления метеорологического поля  $f$  получается двойной ряд Фурье вида

$$f(\theta, \lambda, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (\alpha_{nm} \cos m\lambda + \beta_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta). \quad (2.1.17)$$

Покажем, что для решения задач гидродинамического прогноза погоды более удобным оказывается применение рядов (2.1.17). Для этого найдем форму решений уравнения Лапласа на сфере и отметим ряд их свойств.

Трехмерное уравнение Лапласа в сферических координатах, как известно, имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (2.1.18)$$

Здесь через  $f$  обозначено решение этого уравнения, а  $r$  — вертикальная координата. Будем искать частное решение этого уравнения методом разделения переменных. Для этого первоначально представим его в виде

$$f(\theta, \lambda, r) = u(r) y(\theta, \lambda). \quad (2.1.19)$$

После подстановки такого решения в (2.1.18) и деления его на  $f(\theta, \lambda, r)$  получим

$$\frac{1}{u} \frac{d}{dr} r^2 \frac{du}{dr} + \frac{1}{y \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial^2 y}{\partial \lambda^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (2.1.20)$$

Поскольку оба слагаемых зависят от разных координат, выполнение уравнения возможно, только если они одинаковы по модулю и противоположны по знаку, тогда

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{\partial u}{\partial r} = \mu u, \quad (2.1.21)$$

$$\nabla^2 y = -\mu y, \quad (2.1.22)$$

где  $\mu$  — постоянная величина и введено обозначение

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} \left( \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (2.1.23)$$

Анализ условий существования ограниченного решения уравнения (2.1.21) показывает, что оно существует только при условии

$$\mu = n(n+1), \quad (2.1.24)$$

где  $n$  — натуральное число. Предположим, что частное решение уравнения (2.1.22) имеет вид

$$y(\theta, \lambda) = P(\theta) \cdot Q(\lambda). \quad (2.1.25)$$

Вновь используя методику разделения переменных, получим из (2.1.22) уравнения

$$\frac{d^2 Q}{d\lambda^2} + m^2 Q = 0, \quad (2.1.26)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{dP}{d\theta} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0. \quad (2.1.27)$$

Легко заметить, что уравнение (2.1.26) имеет частные решения в виде тригонометрических функций

$$Q(\lambda) = \sin m\lambda, \quad (2.1.28)$$

или

$$Q(\lambda) = \cos m\lambda. \quad (2.1.29)$$

Уравнение (2.1.27) после введения новой переменной  $x = \cos \theta$  превращается в уравнение для присоединенных полиномов Лежандра. Обратим внимание, что частные решения уравнения (2.1.26), определяемые формулами (2.1.28) и (2.1.29) — периодичны по долготе. Присоединенные полиномы Лежандра являются функциями, ограниченными у полюсов. Таким образом, частные решения уравнения (2.1.22), определяемые формулой (2.1.25), имеют вид

$$y_{mn} = \begin{cases} P_n^m(\cos \theta) \cos m\lambda, \\ P_n^m(\cos \theta) \sin m\lambda. \end{cases} \quad (2.1.30)$$

Они ограничены у полюсов и периодичны по долготе, что является естественными условиями для функций, определяющих физические процессы на сферической поверхности. Обозначение  $P_n^m$ , принятое вместо  $P$ , подчеркивает важное значение параметров  $n$  и  $m$  при вычислении присоединенных полиномов Лежандра.

Частные решения (2.1.30), удовлетворяющие уравнению (2.1.22) в виде

$$\nabla^2 y_{mn} = -n(n+1)y_{mn}, \quad (2.1.31)$$

называются сферическими гармониками. Таким образом, разложение в двойной ряд (2.1.17) производится по частным решениям оператора Лапласа на сферической поверхности. Это важное преимущество ряда (2.1.17) перед рядом (2.1.11).

Отметим основные свойства сферических гармоник. Прежде всего следует указать, что они ортогональны, т. е. выполняется равенство

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi y_{mn} y_{m_1 n_1} \sin \theta d\theta d\lambda = 0 \quad (2.1.32)$$

при  $n \neq n_1$ .

Это свойство позволяет достичь значительного удобства при определении коэффициентов в рядах Фурье. В курсе математической физики доказывается, что такие ряды являются сходящимися.

Известно, что присоединенные функции Лежандра  $P_n^m(\theta)$  являются нечетными по параметру  $m$ , т. е.

$$P_n^m(\theta) = (-1)^m P_n^m(\theta). \quad (2.1.33)$$

Если не удовлетворяется условие  $n \geq |m|$ , то  $P_n^m(\theta) = 0$ . Для случая  $m = 0$ ,  $P_n^m(\theta)$  переходят в обычные полиномы Лежандра. Величина  $n - m$  определяет число корней  $P_n^m(\theta)$  между северным и южным полюсами. Кроме того, если при условии  $m > 0$  эта величина четная, то  $P_n^m(\theta)$  симметричен относительно экватора, а если она нечетная, то антисимметричен.

Существенные отличия  $P_n^m(\theta)$  от тригонометрических функций можно показать на примере дифференцирования и умножения. Известно, что при перемножении тригонометрических функций возникает сумма тригонометрических функций, хотя и с измененным значением аргумента. Полиномы  $P_n^m(\theta)$  не обладают этим свойством. Для них справедливо соотношение

$$\cos \theta P_n^m(\theta) = \frac{n-m+1}{2n+1} P_{n+1}^m(\theta) + \frac{n+m}{2n+1} P_{n-1}^m(\theta). \quad (2.1.34)$$

Аналогично при дифференцировании: если тригонометрические функции переходят друг в друга, то присоединенные полиномы удовлетворяют более сложному соотношению

$$\sin^2 \theta \frac{dP_n^m(\theta)}{d\theta} = -(n-m+1) P_{n+1}^m(\theta) + (n+1) \cos \theta P_n^m(\theta). \quad (2.1.35)$$

Ввиду большой громоздкости в записи свойств присоединенных функций важную роль в работе со сферическими гармониками приобретает компактность выкладок. Для этого переходят к использованию комплексных сферических гармоник. На основе формул Эйлера

$$\sin m\lambda = \frac{e^{im\lambda} - e^{-im\lambda}}{2i}, \quad (2.1.36)$$

$$\cos m\lambda = \frac{e^{im\lambda} + e^{-im\lambda}}{2} \quad (2.1.37)$$

можно преобразовать ряд (2.1.17) к комплексной форме, записав

$$\begin{aligned} f(\theta, \lambda) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} [(\alpha_{nm} - i\beta_{nm}) e^{im\lambda} + (\alpha_{nm} + i\beta_{nm}) e^{-im\lambda}] P_n^m(\theta) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \sigma_{nm} e^{im\lambda} P_n^m(\theta), \end{aligned} \quad (2.1.38)$$

где

$$\sigma_{nm} = \frac{1}{2} (\alpha_{nm} + i\beta_{nm}), \quad m < 0, \quad (2.1.39)$$

$$\sigma_{nm} = \frac{1}{2} (\alpha_{nm} - i\beta_{nm}), \quad m > 0. \quad (2.1.40)$$

Преобразование (2.1.38) несложно сделать, рассмотрев отдельно двойные ряды, которые сведены в квадратные скобки, и произведя в одном из них замену переменной  $m_1 = -m$ . Более подробно с комплексной формой сферических гармоник

$$y_{mn} = e^{im\lambda} P_n^m(\theta) \quad (2.1.41)$$

можно ознакомиться в курсах математической физики.

Для дальнейшего нам важно отметить, что сферические гармоники удовлетворяют соотношению (2.1.31). Однократное дифференцирование сферических гармоник приводит к формулам

$$\frac{\partial y_{mn}}{\partial \lambda} = im y_{mn}, \quad (2.1.42)$$

$$\begin{aligned} \sin \theta \frac{\partial y_{mn}}{\partial \theta} &= \frac{(n-m+1)n}{(2n+1)} y_{m, n+1} - \\ &- \frac{(n+1)(n+m)}{(2n+1)} y_{m, n-1}, \end{aligned} \quad (2.1.43)$$

которые легко выводятся из определения (2.1.41) и соотношений (2.1.34) и (2.1.35).

Перечисленные свойства сферических гармоник далее будут использованы.

В практических приложениях ряды (2.1.11) и (2.1.17) оказываются весьма близкими. Как показал Г. И. Морской, точность приближения метеорологических полей этими рядами при одинаковом числе членов практически одинакова. На рис. 2.2 изображены результаты представления одного и того же поля двумя этими способами, и можно убедиться в равноценности этих представлений. Коэффициенты двойного ряда Фурье (2.1.11) могут быть получены гораздо быстрее и точнее, чем коэффициенты ряда (2.1.17). Это связано с тем, что тригонометрические функции позволяют использовать методики быстрого преобразования Фурье, а для присоединенных полиномов это не удастся. Однако разложение по сферическим гармоникам оказывается более удобным для организации программ гидродинамического долгосрочного прогноза.

Изучение структуры метеорологических полей с помощью двойных рядов производится все еще весьма редко. Поэтому довольно мало известно о свойствах коэффициентов  $A_{nm}$ ,  $B_{nm}$  или  $\alpha_{nm}$ ,  $\beta_{nm}$ . Известно, что скорость сходимости двойных рядов может быть довольно высока, т. е. такие представления весьма экономичны. Так, согласно исследованиям Элиассена и Махенхауэра январское поле  $H_{500}$  в одном из частных случаев (16.01.1957) может быть охарактеризовано весьма малым числом сферических гармоник. В табл. 2.2. приведены в процентах по полной дисперсии вклады в дисперсию, которые дают частные суммы ряда (2.1.17), взятые по  $m$  до номера  $M$  и по  $n - m$  до номера  $J$ .

Таблица 2.2

Вклады в дисперсию частных сумм ряда (2.1.17) для представления поля  $H_{500}$  16.01.1957

$M \backslash J$	0	4	8	12	18
0	—	0,7	0,9	0,9	0,9
2	79,3	86,2	87,0	87,1	87,1
6	80,3	95,7	97,1	97,2	97,2
12	82,0	97,9	99,6	99,7	99,8
20	82,0	98,0	99,7	99,9	99,9

Анализ таблицы позволяет сделать вывод, что для описания этого поля достаточно было бы взять четыре гармоники по долготе и две по широте — всего 16 чисел. Аналогичный вывод делают Вридли и Вийн-Нильсен, которые показали при исследовании меридиональной структуры подвижных волн в атмосфере, что независимо от зонального волнового числа  $n$ , вдоль меридиана достаточно использовать от одной до четырех гармоник (60—70, 10—30, 5—10, 1—5% общей дисперсии соответственно).

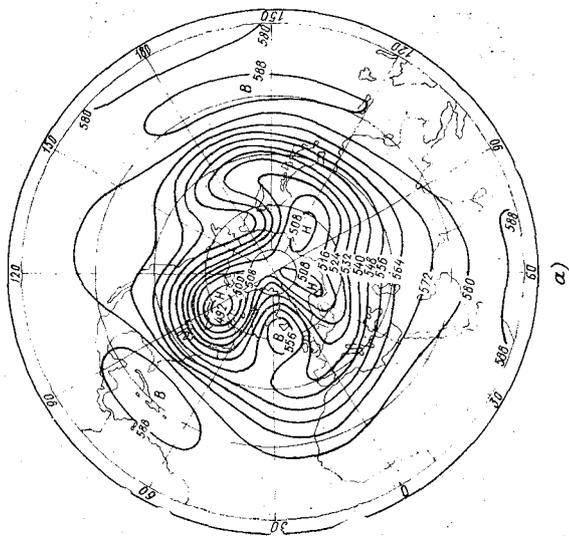
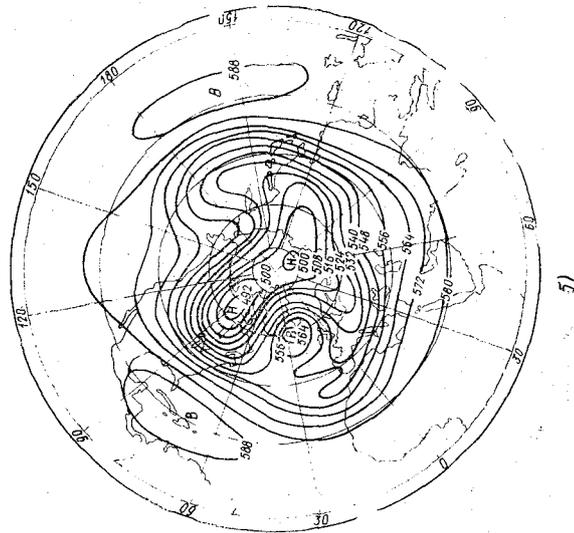


Рис. 2.2. Поле  $H_{500}$  за 27.12.1962 восстановленное:  
 а) с помощью двойных рядов Фурье ( $M = 4, N = 4$ ); б) с помощью двойных рядов по сферическим гармоникам ( $M = 4, N = 8$ )

## 2.2. Волны Россби

Россби установил, что в атмосфере должны существовать длинные и медленно движущиеся волновые возмущения, которые могут играть большую роль в формировании долгопериодных измерений погоды. Значительный вклад в исследование этих движений был внесен Е. Н. Блиновой. Она впервые применила для решения задач гидро-термодинамики атмосферы планетарного масштаба представление метеорологических полей рядами по сферическим функциям. Этот метод решения задач динамики атмосферы широко используется в настоящее время.

Запишем известное из курса краткосрочных численных прогнозов погоды уравнение вертикальной составляющей вихря для квазиздивергентного среднего уровня атмосферы в сферических координатах

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{U}{a \sin \theta} \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} + \frac{V}{a} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} - \frac{V}{a} \cdot 2\omega \sin \theta = \\ = \frac{1}{a^2 \sin \theta \rho T} \left( \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} - \frac{\partial p}{\partial \lambda} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

$$\Omega = \frac{1}{a \sin \theta} \left( \frac{\partial \sin \theta U}{\partial \theta} - \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right), \quad (2.2.2)$$

где  $a$  — средний радиус земного шара, а все остальные обозначения введены ранее.

Представим метеорологические характеристики, входящие в это уравнение, в виде трех составляющих

$$f(\theta, \lambda, t) = \bar{f}(\theta) + f'(\theta, \lambda) + f''(\theta, \lambda, t). \quad (2.2.3)$$

Этим мы отделяем среднезональную составляющую  $\bar{f}$  от стационарного отклонения функции  $f'(\theta, \lambda)$  от ее зонального значения, описывающего отклонения климата на данной широте под влиянием термической неоднородности континент-океан. Обе эти функции могут быть заданы по климатологическим данным. Аномалия  $f''(\theta, \lambda, t)$  является интересующим нас объектом прогноза. Е. Н. Блинова предположила, что между описываемыми величинами существуют отношения порядков величин и их производных вида

$$\bar{f} \gg f' \gg f'', \quad (2.2.4)$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \theta} \gg \frac{\partial f'}{\partial \theta} \gg \frac{\partial f''}{\partial \theta}, \quad (2.2.5)$$

$$\frac{\partial f'}{\partial s} \gg \frac{\partial f''}{\partial s}, \quad (2.2.6)$$

где  $s = \lambda, t$ .

Относительно этих неравенств нужно отметить, что если (2.2.4) выполняется в природе достаточно строго, то при дифференцировании вклад высокочастотных компонент возрастает пропорционально частоте или волновому числу, т. е. соотношения (2.2.5) и (2.2.6) в естественных условиях могут не выполняться.

Учитывая, что подробный вывод основного уравнения имеется в учебной литературе, ограничимся только схематическим изложением дальнейших преобразований уравнения (2.2.1). После представления всех функций в виде (2.2.3) и подстановки их в (2.2.1) последнее линеаризуется по обычной схеме, т. е. произведения функций представляются в виде

$$f\varphi = \bar{f}\bar{\varphi} + \bar{f}'\bar{\varphi}' + \bar{f}\bar{\varphi}'' + \bar{\varphi}'f' + \bar{\varphi}f'', \quad (2.2.7)$$

где произведения малых величин будут отброшены. Затем величины одного порядка малости в уравнении (2.2.1) группируются и суммы групп членов одного порядка полагаются равными нулю. При этом зональные части разложений (2.2.3) выбраны следующими:

$$\bar{U}(\theta) = \alpha a \sin \theta, \quad (2.2.8)$$

$$\bar{p}(\theta) = p_0 + \rho a^2 \alpha \omega \sin^2 \theta, \quad (2.2.9)$$

$$\bar{T}(\theta) = T_0 + M \sin^2 \theta, \quad (2.2.10)$$

$$\bar{V}(\theta) = 0. \quad (2.2.11)$$

Отметим, что основными из этих соотношений являются (2.2.8), (2.2.10), (2.2.11). Выражение (2.2.9) вытекает из (2.2.8) и гипотезы геострофичности зонального тока.

В результате всех этих упрощений уравнение (2.2.1) порождает два уравнения. Одно из них служит для описания климатических норм

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{U}}{a \sin \theta} \frac{\partial \Omega'}{\partial \lambda} - \frac{2(\alpha + \omega)}{a} \sin \theta V' = \\ & = \frac{1}{a^2 \sin \theta \bar{\rho} \bar{T}} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \frac{\partial T'}{\partial \lambda} - \frac{\partial p'}{\partial \lambda} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Другое уравнение служит для описания эволюции аномалий

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Omega''}{\partial t} + \frac{\bar{U}}{a \sin \theta} \frac{\partial \Omega''}{\partial \lambda} + \frac{V''}{a} \left( \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \theta} - 2\omega \sin \theta \right) = \\ & = \frac{1}{a^2 \sin \theta \bar{\rho} \bar{T}} \left( \frac{\partial \bar{p}}{\partial \theta} \frac{\partial T''}{\partial \lambda} - \frac{\partial p''}{\partial \lambda} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Решение уравнения (2.2.12), найденное Е. Н. Блиновой еще в 1943 году, описывает стационарную циркуляцию атмосферы под влиянием термической неоднородности. Оно относится к теории

климата и не будет нами рассматриваться. Нестационарное уравнение (2.2.13) Блинова предложила использовать для прогноза отклонений циркуляции от климатической нормы, предварительно допустив, что главным источником таких отклонений является адвекция вихря, а не термические аномалии. В свете этого предположения правая часть уравнения (2.2.13) считается равной нулю.

Интересно проанализировать отношение  $\bar{U}/a \sin \theta$ , которое будет играть важную роль в дальнейшем изложении. В соответствии с (2.2.8) оно оказывается постоянной величиной и равно  $\alpha$ . Физический смысл  $\alpha$  легко установить, если учесть, что произведение  $\omega a \sin \theta$  определяет линейную скорость вращения Земли на данной широте. Тогда предположение (2.2.8) имеет смысл гипотезы, что в среднем атмосфера вращается в том же направлении, что и земля, но с несколько отличной угловой скоростью, которая и равна  $\alpha$ . Эту величину принято называть индексом циркуляции Блиновой.

Решение уравнения (2.2.13) можно легко найти, если использовать предположение о бездивергентности течения. Тогда из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \theta} (V \sin \theta) = 0 \quad (2.2.14)$$

следует существование функции тока  $\psi$ , так что выполняются соотношения

$$V = - \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \quad (2.2.15)$$

$$U = \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; \quad (2.2.16)$$

$$\Omega = \frac{1}{a^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} \right) = \frac{1}{a^2} \nabla^2 \psi. \quad (2.2.17)$$

В силу линейности этих соотношений, они удовлетворяются и для  $\psi'$  и для  $\psi''$ . С их учетом уравнение (2.2.13) примет окончательный вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \nabla^2 \psi'' + 2(\alpha + \omega) \frac{\partial \psi''}{\partial \lambda} = 0. \quad (2.2.18)$$

С помощью этого уравнения можно изучить закономерности динамики крупномасштабных атмосферных движений. Будем искать решение уравнения (2.2.18) в виде суперпозиции бегущих сферических гармоник:

$$\psi''(\theta, \lambda, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \sigma_{nm} e^{i(m\lambda + \omega_m^n t)} P_n^m(\theta), \quad (2.2.19)$$

где  $\sigma_{nm}$  — амплитуда гармоники, а  $\omega_m^n$  — частота колебаний гармоники.

Подставим это общее решение в уравнение (2.2.18) и воспользуемся свойствами сферических гармоник  $y_{mn}$ . Окажется, что уравнение (2.1.18) будет справедливо для каждой гармоники, если выполнится формула \*

$$\omega_m^n = -m \left[ \alpha - \frac{2(\alpha + \omega)}{n(n+1)} \right]. \quad (2.2.20)$$

Это соотношение позволяет определить фазовую скорость движения гармоники  $C_m^n$ , исходя из известного физического равенства

$$C_m^n = \frac{\lambda}{\tau}, \quad (2.2.21)$$

где  $\lambda$  — длина волны, а  $\tau$  — период волны. Учитывая однозначную связь длины волны с волновым числом и периода с частотой, получим

$$C_m^n = \frac{\omega_m^n}{m} = -\alpha + \frac{2(\alpha + \omega)}{n(n+1)}. \quad (2.2.22)$$

Анализ выражения для фазовой скорости гармоники позволяет заметить, что среди крупномасштабных волн есть стационарные, для которых  $C_m^n$  обращается в нуль, движущиеся на восток и на запад. На запад движутся более крупномасштабные возмущения, для которых  $n$  мало, а на восток — вместе с зональным потоком более мелкомасштабные, для которых  $n$  растет.

Интересно сравнить фактические фазовые скорости гармоник, полученные из обработки результатов разложений в двойные ряды (2.1.17) реальных полей, и те, которые следуют из формулы (2.2.22). Такое сравнение проделали Элиассен и Махенхауэр. Их результаты приведены в табл. 2.3.

Таблица 2.3

Фактические и рассчитанные скорости распространения волн Россби для периода с 1.12.1956 по 28.02.1957

$(m, n)$	Фактические, град/сутки	Рассчитанные без учета дивергенции, град/сутки	Рассчитанные с учетом дивергенции, град/сутки
(1, 2)	-70	-115	-69
(2, 3)	-40	-53	-39,8
(3, 4)	-20	-28	-23,3
(1, 4)	-20	-28	-23,3
(2, 5)	-12	-16	-14,1
(3, 6)	-8	-9	-8,2

\* Такие соотношения для частот и волновых чисел принято называть дисперсионными.

Таблица демонстрирует, что общие закономерности динамики длинных волн удачно описываются формулой Россби (2.2.22). Однако статистический анализ долгопериодных колебаний метеоэлементов выявил и ряд недостатков упрощенного описания динамики атмосферы уравнением (2.2.18). Формула Россби дает систематическую ошибку при описании планетарных волн с зональным волновым числом  $m = 1, 2, 3$ . Согласно этой формуле они должны смещаться на запад со значительными скоростями. В реальной атмосфере смещение планетарных волн гораздо медленнее и временами меняет направление: они как бы колеблются около положения равновесия, отклоняясь от него не более чем на четверть своей длины. В настоящее время выяснено, что для описания такого процесса следует учесть влияние вертикальных скоростей, вызванных орографией и термической неоднородностью континентов и океанов. Самый несложный учет их влияния, осуществленный Элиассеном и Махенхауэром с помощью эквивалентно-баротропной модели, известной из курса численных прогнозов погоды, привел к значительному улучшению определения скоростей планетарных волн, как это видно из табл. 2.3.

Другим принципиальным недостатком уравнения (2.2.18) является задание постоянного индекса циркуляции. За счет этого исключается взаимодействие гармоник и энергообмен между ними, амплитуды гармоник не изменяются. Если учесть зависимость индекса циркуляции от широты, то, как показал А. З. Чекирда, между гармониками возникает взаимодействие и энергообмен, который усиливается по мере роста зональной неоднородности и индекса  $\alpha$ . Взаимодействие гармоник порождает колебания их амплитуд, причем волны с малыми значениями  $m$  и большими значениями  $n$ , т. е. растянутые вдоль параллели, слабо взаимодействуют между собой и мало искажаются со временем, а волны с большими  $m$  и малыми  $n$ , т. е. растянутые вдоль меридиана, быстро разрушаются. Таким образом фазовые скорости волн зависят от  $m$ , чего нет в формуле Россби (2.2.22).

Взаимосвязь гармоник неизбежно должна в реальных условиях приводить к изменениям зональной циркуляции. Влияние изменения индекса циркуляции во времени на эволюцию гармоник, описываемую уравнением (2.2.18), было проанализировано С. А. Машковичем. Величина индекса циркуляции вычислялась с помощью уравнения для зональной скорости  $U$ , проинтегрированного по всему широтному кругу:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} = \frac{1}{2\pi a^3 \sin \theta} \int_0^{2\pi} \nabla^2 \psi'' \frac{\partial \psi''}{\partial \lambda} d\lambda. \quad (2.2.23)$$

Применение этого уравнения позволило учесть, что суммарное воздействие гармоник изменяет индекс циркуляции, а каждая отдельная гармоника испытывает влияние индекса циркуляции, со-

гласно уравнению (2.2.18). Расчеты показывают, что в такой модели возникают колебания индекса циркуляции с периодом 5—7 суток. Механизм этого явления можно описать, следуя С. А. Машковичу. Если в начальный момент оси барических образований прямолинейны и совпадают с меридианами, то индекс циркуляции некоторое время не изменяется. Благодаря его зависимости от широты, ложбины и гребни на разных широтах смещаются с различной скоростью, за счет чего происходит деформация возмущений и искривляются оси ложбин и гребней. Эти деформации осей приводят к уменьшению индекса циркуляции. Создаются благоприятные условия для передачи энергии от волновых возмущений к зональному движению. Так возникает колебательный процесс.

Изучение линеаризованного уравнения вихря сыграло большую роль в исследованиях по долгосрочным прогнозам. Однако результаты этих исследований показали, что в формировании крупномасштабных атмосферных процессов большую роль играет взаимодействие гармоник, для полного анализа которого следует отказаться от линеаризации и перейти к решению нелинейного уравнения (2.2.1).

### 2.3. Спектральные методы решения баротропного уравнения вихря

Естественным обобщением линеаризованного уравнения вихря, рассмотренного в предыдущем параграфе, является учет нелинейности уравнения (2.2.1). Привлечение нелинейных членов позволяет избавиться от необходимости задания индекса циркуляции. Однако при этом возникают и значительные математические трудности.

Основное уравнение, рассматриваемое в этом параграфе, представляет собой баротропное уравнение вихря, записанное с привлечением функции тока

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + (\psi, \nabla^2 \psi) + 2\omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0, \quad (2.3.1)$$

где введено обозначение якобиана в сферических координатах

$$(\psi, f) = \frac{1}{a^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial \lambda} - \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right). \quad (2.3.2)$$

Будем искать периодическое по  $\lambda$  решение этого уравнения, ограниченное у полюсов. Отметим, что этих условий достаточно для определения решения на всей схеме. Если мы хотим ограничиться решением на одном из полушарий, то необходимо определить характер решения в другом полушарии. Обычно считают, что

функция тока антисимметрична по отношению к экватору. Ищем решение поставленной задачи в виде ряда

$$\psi(\theta, \lambda, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N \psi_{mn}(t) e^{im\lambda} P_n^m(\theta), \quad (2.3.3)$$

причем для антисимметричности функции тока разность индексов должна быть нечетной. Для такого представления легко выписать линейные члены уравнения (2.3.1):

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = - \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N \frac{d\psi_{mn}}{dt} n(n+1) y_{mn}, \quad (2.3.4)$$

$$2\omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 2\omega \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N im \psi_{mn} y_{mn}, \quad (2.3.5)$$

где

$$y_{mn} = e^{im\lambda} P_n^m(\theta). \quad (2.3.6)$$

Представление нелинейного члена осуществляется гораздо сложнее. Для нахождения  $(\psi, \nabla^2 \psi)$  выпишем его выражения через ряды (2.3.3), заменив предварительно переменную  $\theta$  на  $x$ , с учетом соотношения  $x = \cos \theta$ :

$$\begin{aligned} (\psi, \nabla^2 \psi) &= \frac{1}{a^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \theta} \right) = \\ &= -\frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} \right) = -\frac{1}{a^2} \left[ \left( \sum_{m_1=-M}^M \sum_{n_1=|m_1|}^N \psi_{m_1 n_1} \frac{\partial y_{m_1 n_1}}{\partial x} \right) \times \right. \\ &\quad \times \left( - \sum_{m_2=-M}^M \sum_{n_2=|m_2|}^N im_2 n_2 (n_2 + 1) \psi_{m_2 n_2} y_{m_2 n_2} \right) - \\ &\quad - \left( \sum_{m_1=-M}^M \sum_{n_1=|m_1|}^N im_1 \psi_{m_1 n_1} y_{m_1 n_1} \right) \times \\ &\quad \left. \times \left( - \sum_{m_2=-M}^M \sum_{n_2=|m_2|}^N n_2 (n_2 + 1) \psi_{m_2 n_2} \frac{\partial y_{m_2 n_2}}{\partial x} \right) \right]. \quad (2.3.7) \end{aligned}$$

Выполнив умножение рядов по известным правилам, получим

$$(\psi, \nabla^2 \psi) = \frac{1}{a^2} \sum_{m_1=-M}^M \sum_{n_1=|m_1|}^N \sum_{m_2=-M}^M \sum_{n_2=|m_2|}^N i\psi_{m_1 n_1} \psi_{m_2 n_2} K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}, \quad (2.3.8)$$

где обозначено

$$K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2} = +n_2(n_2 + 1) \left( m_2 P_{n_2}^{m_2} \frac{dP_{n_1}^{m_1}}{dx} - m_1 P_{n_1}^{m_1} \frac{dP_{n_2}^{m_2}}{dx} \right) e^{i(m_1 + m_2)\lambda}. \quad (2.3.9)$$

Теперь для получения уравнений для амплитуд  $\psi_{mn}$  необходимо воспользоваться методом Галеркина \*, т. е. последовательно домножить уравнение (2.3.1), предварительно подставив в него выражения (2.3.4), (2.3.5) и (2.3.8), на каждую из сферических гармоник  $y_{mn}$  при  $m \in [-M, M]$ ,  $n \in [|m|, N]$  и производить интегрирование такого произведения по сфере (полусфере).

В силу ортогональности сферических гармоник линейные члены преобразуются легко. Если оставить нелинейные члены, не преобразуя их, то получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d\psi_{mn}}{dt} = \frac{i}{n(n+1)} \left[ 2\omega m \psi_{mn} - \frac{1}{a^2} \times \right. \\ \left. \times \sum_{m_1=-M}^M \sum_{n_1=|m_1|}^N \sum_{m_2=-M}^M \sum_{n_2=|m_2|}^N \psi_{m_1 n_1} \psi_{m_2 n_2} L_{n_1, n_2, n}^{m_1, m_2, m} \right], \quad (2.3.10)$$

$$L_{n_1, n_2, n}^{m_1, m_2, m} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2} y_{mn} dx d\lambda. \quad (2.3.11)$$

Выражения (2.3.10) и (2.3.11) позволяют понять основную трудность применения спектрального метода к нелинейным задачам. Она состоит в том, что для расчета простого по форме уравнения (2.3.10) необходимо хранить в памяти ЭВМ коэффициенты  $L_{n_1, n_2, n}^{m_1, m_2, m}$ , которые весьма трудно вычислить, что видно из (2.3.11). Предположим, что мы хотим ограничиться по  $m$  и по  $n$  всего четырьмя гармониками, т. е. решать задачу для самых крупномасштабных волн. Учитывая, что переменная  $L_{n_1, n_2, n}^{m_1, m_2, m}$  зависит от шести индексов, если каждый из них принимает четыре значения, сохранить их можно только в  $4^6 = 4096$  «словах» памяти ЭВМ. Если бы мы взяли по пять гармоник, потребовалось бы уже 15625 слов. Таким образом, без дополнительных сведений о структуре коэффициентов  $L_{n_1, n_2, n}^{m_1, m_2, m}$  нельзя реализовать даже простейшие случаи этой задачи.

Можно добиться некоторого уменьшения требуемого объема памяти ЭВМ, если учесть соотношения ортогональности, хотя бы только для тригонометрических функций. В самом деле, коэффициенты можно представить в форме повторного интеграла

$$L_{n_1, n_2, n}^{m_1, m_2, m} = n_2 (n_2 + 1) \int_0^{2\pi} e^{i(m_1 + m_2)\lambda} e^{im\lambda} d\lambda \times \\ \times \int_0^1 \left( m_2 P_{n_2}^{m_2} \frac{dP_{n_1}^{m_1}}{dx} - m_1 P_{n_1}^{m_1} \frac{dP_{n_2}^{m_2}}{dx} \right) P_n^m dx. \quad (2.3.12)$$

\* Метод Галеркина широко распространен для приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных. С ним можно ознакомиться, например в [21].

Учитывая ортогональность тригонометрических функций легко установить, что

$$L_{n_1, n_2, n}^{m_1, m_2, m} = 0 \quad \text{при } m \neq m_1 + m_2. \quad (2.3.13)$$

Ясно, что равенство (2.3.13) позволяет существенно сократить число коэффициентов  $L_{n_1, n_2, n}^{m_1, m_2, m}$ , подлежащих хранению. Поскольку второй интеграл, входящий в произведение (3.3.12), тоже в значительном числе случаев обратится в нуль, так как интегрируемое выражение представляется как сумма произведений  $P_n^m$  с разными индексами, то можно установить еще ряд комбинаций индексов  $n_1, n_2, n$ , когда не нужно запоминать  $L_{n_1, n_2, n}^{m_1, m_2, m}$ . Такие ограничения в совокупности с (2.3.13) называются правилами отбора. Если учесть все известные в настоящее время правила отбора, то можно сократить число запоминаемых коэффициентов с величины порядка  $N^6$  до  $N^5$ . Это существенная экономия, например, для пяти гармоник вместо 15625 слов необходимо хранить только 3125 слов. Метод решения задачи (2.3.10), (2.3.11) при учете всех правил отбора называется методом коэффициентов взаимодействия. Этот метод имеет широкое распространение ввиду большой точности получаемого решения. Он позволяет избежать многих трудностей, с которыми исследователь сталкивается. Применяя этот метод, например, не возникает нелинейной неустойчивости решения, вычислительной дисперсии волн и амплитудной ошибки приближенного дифференцирования. Для сеточных методов эти ошибки могут быть очень велики. Они более подробно рассмотрены в главе 3.

Использование спектрального подхода позволяет получить решение уравнения вихря, с сохранением ряда нелинейных интегральных характеристик (кинетической энергии, момента, квадрата вихря). Благодаря высокой точности приближенное решение спектральным методом коэффициентов взаимодействия использовано для прогноза  $H_{500}$  на срок до пяти суток в ГМЦ СССР. Модель, разработанная С. А. Машковичем и И. Л. Вейль, описывает движение атмосферы с помощью сферических гармоник с  $m \in [0, 10]$  и  $n - m \in [0, 10]$  и при этом запоминается всего 8323 коэффициента взаимодействия. Результаты расчетов по этой модели позволили уяснить многие закономерности эволюции динамики атмосферы. Однако прежде чем перейти к краткому обзору результатов нелинейной теории длинных волн, следует дать краткую характеристику других вариантов спектрального метода, что наиболее просто сделать для уравнения вихря.

Одним из первых было упрощение метода коэффициентов взаимодействия, предложенное А. Робером. Он более полно использовал возможности метода Галеркина и предложил искать решение уравнения вихря не в форме разложения по сферическим гармоникам (2.3.3), а в форме разложения по функциям

$$R_p^m = (\cos \theta)^p |\sin \theta|^{m-1} e^{im\lambda}. \quad (2.3.14)$$

Эти функции называют теперь функциями Ропера. Они имеют удобные формулы умножения, вследствие чего позволяют в явном виде выписать формулы для вычисления коэффициентов взаимодействия. Таким образом, отпадает необходимость хранить массив этих коэффициентов, хотя нужно их вычислять в зависимости от  $p$  и  $m$  каждый раз, когда они используются, что приводит к быстрому росту объема расчетов с ростом числа гармоник Ропера, применяемых в разложении.

Вторым видоизменением спектрального метода, нашедшим широкое распространение в настоящее время, является метод спектрально-сеточного преобразования. В его основе лежит учет того факта, что вместо полного перехода в нелинейном члене к спектральной форме, как это сделано в (2.3.10), можно, зная поле функции тока в форме (2.3.2), вычислить его лапласиан, применяя формулу (2.1.31), а затем вернуться к представлению якобиана  $(\psi, \nabla^2 \psi)$  в виде сеточной функции. Зная якобиан как функцию координат узлов сетки, можно, применяя численное интегрирование, найти его спектральное представление  $F_{mn}$ , например, в таком порядке:

$$F_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\psi, \nabla^2 \psi) e^{-im\lambda} d\lambda, \quad (2.3.15)$$

$$F_{mn} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F_m(x) P_n^m(x) dx. \quad (2.3.16)$$

Численное интегрирование с учетом спектральной структуры  $(\psi, \nabla^2 \psi)$  можно осуществить с высокой точностью.

Решение уравнения вихря с помощью спектрально-сеточного преобразования производится таким образом в два этапа:

1) зная на предыдущем шаге коэффициенты  $\psi_{mn}$ , вычисляются коэффициенты для производных и лапласиана функции тока, по которым определяется якобиан;

2) подставляя коэффициенты  $F_{m,n}$  вместо четырехкратного суммирования в уравнение (2.3.10), определяют  $\psi_{mn}$  на следующем временном слое.

Такая процедура оказывается экономичнее метода коэффициентов взаимодействия и, поскольку использует сетку, позволяет решать более сложные задачи, чем уравнение вихря, сохраняя главные преимущества спектрального метода — точное выполнение дифференцирования.

Остановимся теперь вкратце на результатах решения спектральным методом баротропного уравнения вихря и выясним вопрос, можно ли, привлекая нелинейные члены, получить лучшее описание динамики длинных волн, чем в линейном случае. Обратимся снова к исследованиям Элиассена и Махенхауэра, о которых упоминалось в предыдущем параграфе. Они попытались

уточнить описание временной эволюции полей  $H_{500}$  на основе уравнения вихря с учетом нелинейности, решая его спектральным методом и сравнивая поведение рассчитанных и фактических амплитуд сферических гармоник.

На рис. 2.3 представлены действительная и мнимая части приращения за сутки комплексной амплитуды  $\psi_{mn}$ , рассчитанные для различных сферических гармоник по уравнению (2.3.1) и по фактическим полям  $H_{500}$  для этих же гармоник. Они определены по формуле

$$\Delta\psi_{mn} = \Delta\alpha_{nm} \pm i\Delta\beta_{nm}. \quad (2.3.17)$$

Легко видеть, что прогноз планетарной волны  $(m, n) = (1, 2)$  осуществляется со значительной ошибкой, тогда как менее длинная волна  $(m, n) = (6, 9)$  рассчитывается гораздо лучше. Этот вывод подтверждается и на большом фактическом материале: самым грубым приближением баротропное уравнение вихря в нелинейном случае оказывается для планетарных волн с  $m = 1, 2, 3$ . Зональное течение ( $m=0$ ) также плохо воспроизводится с помощью уравнения вихря. Азональные отклонения с волновыми числами  $m=4$  и более описываются этим уравнением достаточно точно.

В настоящее время накоплен большой опыт прогнозов геопотенциала 500 гПа поверхности с помощью баротропной модели. На основе этого опыта можно заключить, что наиболее успешным является прогноз на 12 часов. С ростом заблаговременности успешность прогнозов падает, хотя в отдельных случаях прогноз крупномасштабных процессов оправдывается до пяти суток. Наиболее удачны прогнозы вблизи широты струйного течения, причем перемещение барических образований в ряде случаев баротропная модель описывает лучше, чем бароклинная.

Основные недостатки баротропной модели также выявлены в практической работе. Во-первых, это плохое описание эволюции планетарных волн. Как и в линейном случае, такие волны систе-

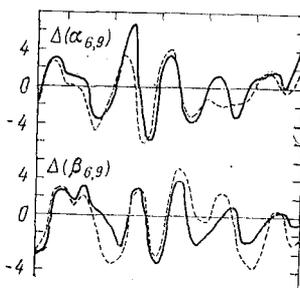
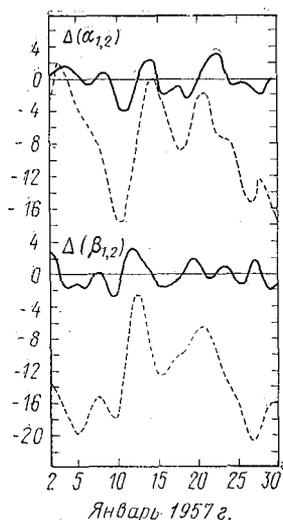


Рис. 2.3. Действительная  $\Delta\alpha_{nm}$  и мнимая  $\Delta\beta_{nm}$  части комплексной амплитуды разложения поля  $H_{500}$  в ряды по сферическим гармоникам для двух компонент разложения  $(m = 1, n = 2)$  и  $(m = 6, n = 9)$ . Сплошной линией показаны изменения коэффициентов разложения по времени для фактических полей, а пунктиром — рассчитанные по баротропному уравнению вихря

матически перемещаются на запад. Успешность баротропных прогнозов, как правило, падает в период резкой перестройки атмосферной циркуляции, которая связана с изменением направления движения планетарных волн. Вторым недостатком баротропной модели — это тенденция к вытягиванию вихрей вдоль широтных кругов. Эта тенденция проявляется и в линейном варианте, если учесть зависимость индекса циркуляции от широты. Таким образом, в баротропной модели происходит генерация струйных течений, но они имеют завышенные скорости и несколько смещены по положению сравнительно с реальными.

В связи с образованием струйных течений в баротропной модели необходимо остановиться на явлении, которое называется «отрицательная вязкость». Уже при анализе линеаризованного уравнения вихря (2.2.18) становится ясно, что скорость зонального потока определяет скорость каждой гармоники и взаимосвязь между ними. Это похоже на поддержание режима турбулентных пульсаций в пристеночном пограничном слое жидкости, где «сдвиг» скорости течения приводит к образованию турбулентности. Однако уже в рассмотренном С. А. Машковичем случае, когда зональная скорость зависит от суммарного воздействия азональных гармоник, возникали колебания индекса циркуляции, т. е. условия, когда суммарное воздействие гармоник усиливает зональный поток, передавая ему часть кинетической энергии. Так могло бы произойти в турбулентном пограничном слое, если бы за счет пульсаций скорости возникало упорядоченное движение и сдвиг скорости потока, т. е. турбулентная вязкость являлась бы источником энергии для основного потока. Такие условия невозможны, если коэффициент турбулентной вязкости строго положителен. Именно поэтому в тех случаях, когда осуществляется передача энергии от гармоник более мелкого масштаба к гармоникам более крупного масштаба, говорят об «отрицательной вязкости».

Отрицательная вязкость для атмосферы является вполне обычным явлением. Подтверждением этому служит информация об обмене кинетической энергией между отдельными гармониками, полученная по фактическим данным на уровне 500 гПа поверхности над северным полушарием и представленная в табл. 2.4. Из этой таблицы видно, что все гармоники «питают» зональное течение энергией и что имеет место передача энергии от гармоник с большими волновыми числами к гармоникам с меньшими волновыми числами.

Тот факт, что баротропное уравнение вихря (2.3.1) позволяет описать отрицательную вязкость, создал предпосылки для фундаментального изучения этого явления. Однако сопоставление энергообмена в атмосфере с энергообменом в баротропной модели показывает и еще одну слабость последней: в реальной атмосфере кинетическая энергия потока непрерывно генерируется в диапазоне волновых чисел от  $m=5$  до  $m=10$ , тогда как в баротропной модели кинетическая энергия только перераспределяется между

гармониками, сохраняя суммарное значение, равное кинетической энергии начального поля. Отсутствием источников энергии объясняется плохой прогноз перестроек планетарной циркуляции и барических новообразований в баротропной модели. Для изучения долгопериодных изменений циркуляции атмосферы следует обратиться к моделям, более полно описывающим взаимосвязи динамики с термическим режимом атмосферы и подстилающей поверхности.

Таблица 2.4

Характеристика обмена кинетической энергией (в  $10^{-6}$  вт/м<sup>2</sup> гПа) между гармониками разных масштабов по С. А. Машковичу

Волновое число $m$	Приток от других гармоник	Отток к зональной циркуляции	Баланс энергий
1	87	5	82
2	-53	26	-79
3	29	21	8
4	12	11	1
5	-3	14	-17
6	-37	21	-58
7	-39	22	-61
8	-35	15	-50
9	-14	12	-26
10	-11	8	-19
11	4	5	-1
12	5	4	1
13	12	2	10
14	17	2	15
15	26	1	25

#### 2.4. Взаимосвязь динамики и теплообмена в атмосфере

Результаты, приведенные в данной главе, позволяют сделать вывод об эффективности и точности спектрального метода решения баротропного уравнения вихря. С его помощью удалось показать, что наибольшую роль процессы взаимодействия термике и динамики атмосферы должны играть для движений самых больших (планетарных) горизонтальных масштабов. В этой связи интересно проследить, какие эффекты возникают при таком взаимодействии.

Проще всего это осуществить с помощью двухуровневой баролинейной адиабатической модели в линейном приближении. Первые результаты в этом направлении были получены Е. Н. Блиновой, Э. Лоренцем. Несколько позже М. Б. Галин довел эту модель до практической реализации в прогнозе на 3—10 суток. При вы-

воде этой модели будем исходить из уравнения вихря и уравнения теплопереноса в изобарической системе координат, в квазисоле-ноидальном, квазистатическом и адиабатическом приближениях:

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + (\psi, \nabla^2 \psi) + 2\omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = - \frac{2\omega \cos \theta g a^2}{p_0} \frac{\partial \bar{\rho} \omega}{\partial \xi}, \quad (2.4.1)$$

$$\xi^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial \xi} + \xi^2 \left( \psi, \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) = \frac{R^2 \bar{T} (\gamma_a - \gamma)}{2\omega \cos \theta p_0} \bar{\rho} \omega. \quad (2.4.2)$$

Здесь использованы введенные ранее обозначения, а также новые:  $\xi = p/p_0$  — вертикальная координата;  $\omega$  — вертикальная скорость;  $\bar{T}$ ,  $\bar{\rho}$  — средние для всей атмосферы климатические профили температуры и плотности;  $p_0$  — приземное давление, равное 1000 гПа.

Будем искать периодическое по  $\lambda$ , ограниченное у полюса решение  $\psi(\theta, \lambda, \xi, t)$  для северного полушария. В качестве условия на экваторе потребуем, чтобы воздухообмен между полушариями отсутствовал. Это влечет за собой требование, чтобы на экваторе выполнялось условие  $\psi = 0$ .

Перейдем в уравнениях (2.4.1), (2.4.2) к конечным разностям по вертикальной координате, введя двухуровневую модель. Для этого разобьем атмосферу на четыре слоя точками  $\xi_1 = 0,3$  (300 гПа),  $\xi_2 = 0,5$  (500 гПа),  $\xi_3 = 0,7$  (700 гПа). Запишем уравнение вихря на уровнях  $\xi_1$  и  $\xi_3$ . При этом производную от  $\psi$  по вертикали представим как

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)_2 = \frac{\psi_3 - \psi_1}{\xi_3 - \xi_1}. \quad (2.4.3)$$

Для вычисления производной  $\frac{\partial \bar{\rho} \omega}{\partial \xi}$  в уравнении (2.4.1) на уровнях  $\xi_1$  и  $\xi_3$  воспользуемся весьма употребительной аппроксимацией профиля величины  $\bar{\rho} \omega$  в виде

$$\bar{\rho} \omega = 4 (\bar{\rho} \omega)_2 \xi (1 - \xi). \quad (2.4.4)$$

Такая аппроксимация удовлетворяет краевым условиям, налагаемым обычно на вертикальную составляющую скорости у земли ( $\omega = 0$  при  $\xi = 1$ ) и вертикальную составляющую импульса на верхней границе атмосферы ( $\bar{\rho} \omega \rightarrow 0$  при  $\xi \rightarrow 0$ ). Используя (2.4.3) и (2.4.4), можно преобразовать уравнения (2.4.1) и (2.4.2) к виду

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi_1}{\partial t} + (\psi_1, \nabla^2 \psi_1) + 2\omega \frac{\partial \psi_1}{\partial \lambda} = - 1,6 \frac{2\omega \cos \theta g a^2}{p_0} (\bar{\rho} \omega)_2, \quad (2.4.5)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi_3}{\partial t} + (\psi_3, \nabla^2 \psi_3) + 2\omega \frac{\partial \psi_3}{\partial \lambda} = 1,6 \frac{2\omega \cos \theta g a^2}{p_0} (\bar{\rho} \omega)_2, \quad (2.4.6)$$

$$\frac{\partial (\psi_3 - \psi_1)}{\partial t} + (\psi_1, \psi_3) = 1,6 \frac{R^2 \bar{T} (\gamma_a - \gamma)}{2\omega \cos \theta p_0} (\bar{\rho} \omega)_2. \quad (2.4.7)$$

Отметим, что второй член левой части (2.4.7) получен при дополнительном условии

$$\psi_2 = \frac{\psi_1 + \psi_3}{2}. \quad (2.4.8)$$

Исключим вертикальную скорость из (2.4.5) и (2.4.6) с помощью (2.4.7) и получим простейшую нелинейную модель атмосферы, в которой возможно взаимодействие термического поля с циркуляцией

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \nabla^2 \psi_1 + \frac{1}{\Gamma} (\psi_3 - \psi_1) \right] + \left( \psi_1, \nabla^2 \psi_1 + \right. \\ \left. + \frac{1}{\Gamma} (\psi_3 - \psi_1) + 2\omega a^2 \cos \theta \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \nabla^2 \psi_3 - \frac{1}{\Gamma} (\psi_3 - \psi_1) \right] + \left( \psi_3, \nabla^2 \psi_3 - \right. \\ \left. - \frac{1}{\Gamma} (\psi_3 - \psi_1) + 2\omega a^2 \cos \theta \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

$$\Gamma = \frac{R^2 \bar{T}}{4\omega^2 a^2 g} \left( \frac{\gamma_a - \gamma}{\cos^2 \theta} \right). \quad (2.4.11)$$

Параметр стратификации атмосферы, задаваемый формулой (2.4.11), обычно считают постоянным и определяют по климатическим данным.

Выведенная выше модель атмосферы уже много лет интенсивно исследуется. С ее помощью получены результаты по теории нелинейных колебаний атмосферы и теории взаимодействия атмосферы и океана. Для целей нашего анализа нужно установить, чем отличается динамика бароклинной атмосферы от динамики баротропной и чем отличается теплоперенос в бароклинной атмосфере от теплопереноса без обратной связи между температурой и циркуляцией. Ответ на эти вопросы можно получить, еще более упростив модель.

Линеаризуем уравнения (2.4.9) и (2.4.10), считая  $\psi_1$  и  $\psi_3$  представимыми в виде

$$\psi_1 = -\alpha_1 a^2 \cos \theta + \psi'_1(\theta, \lambda, t), \quad (2.4.12)$$

$$\psi_3 = -\alpha_3 a^2 \cos \theta + \psi'_3(\theta, \lambda, t). \quad (2.4.13)$$

Здесь  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  — индексы циркуляции на соответствующих уровнях.

Принимая такую форму для решения системы, мы считаем, что атмосфера, главным образом, вращается относительно земной поверхности, имея на каждом уровне собственную угловую скорость. Считая величины  $\psi'_1$  и  $\psi'_3$  малыми по сравнению со средними зональными значениями, получим хорошо известным способом, кото-

рый был использован в 2.2 настоящей главы, линейный вариант двухуровневой бароклининой модели:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \left[ \nabla^2 \psi'_1 + \frac{1}{\Gamma} (\psi'_3 - \psi'_1) \right] + \left[ 2\omega + \frac{1}{\Gamma} (\alpha_1 - \alpha_3) \right] \frac{\partial \psi'_1}{\partial \lambda} = 0, \quad (2.4.14)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial \lambda}\right) \left[ \nabla^2 \psi'_3 - \frac{1}{\Gamma} (\psi'_3 - \psi'_1) \right] + \left[ 2\omega - \frac{1}{\Gamma} (\alpha_1 - \alpha_3) \right] \frac{\partial \psi'_3}{\partial \lambda} = 0. \quad (2.4.15)$$

При выводе этих уравнений дополнительно учтено, что  $\omega \gg \alpha_1$ ,  $\omega \gg \alpha_3$ .

Как и линеаризованное баротропное уравнение вихря, (2.2.18), система уравнений (2.4.14), (2.4.15) имеет решение в виде суперпозиции бегущих сферических гармоник:

$$\psi'_j = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=|m|}^{\infty} \psi_{jmn} e^{i(m\lambda + \sigma_m^n t)} P_n^m(\theta), \quad (2.4.16)$$

где  $j = 1, 2$ .

Подстановка каждой отдельной гармоники ряда (2.4.16) в уравнения (2.4.14), (2.4.15) и преобразования, аналогичные тем, которые выполнялись для получения равенства (2.2.20), приводят к следующему равенству:

$$\frac{\sigma_m^n}{m} = -\frac{\alpha_1 + \alpha_3}{2} + \frac{B(1+C)}{C(C+2)} \pm \frac{\sqrt{B^2 - C^2(4-C^2)V^2}}{C(C+2)}, \quad (2.4.17)$$

где

$$B = 2\omega\Gamma; \quad C = n(n+1)\Gamma; \quad V = 0,5(\alpha_1 - \alpha_3).$$

Таким образом, в бароклининой модели выражение для фазовой скорости (2.4.17) отличается от аналогичного выражения баротропной модели (2.2.22). Отметим, что при исследовании прогностических моделей, основанных на уравнении теплового баланса с фиксированной динамикой атмосферы, колебательный режим вообще не отмечался. Это позволяет увидеть различия между тремя типами моделей эволюции атмосферы. Так, при прогнозировании аномалий температуры на основании уравнения теплового баланса атмосферы с заданной и фиксированной циркуляцией возможно только монотонное стремление термического поля к стационарному состоянию. В баротропном варианте прогноза атмосферной циркуляции уже можно ожидать динамического равновесия, реализующегося в виде волн Россби. Это состояние устойчиво и зависит только от интенсивности зональной циркуляции.

Если учесть бароклинность атмосферы, то динамическое равновесие существенно меняется. Наиболее сильные изменения возникают из-за того, что в атмосфере существует возрастание скорости ветра с высотой. Согласно уравнению (2.4.17) при определенных значениях сдвига ветра, когда подкоренное выражение может стать отрицательным, может возникнуть неустойчивость динамического равновесия. Этот вид неустойчивости называют бароклинной неустойчивостью. Как показывают численные эксперименты, он является важным механизмом, благодаря которому реализуются резкие перестройки атмосферной циркуляции.

Можно сделать вывод, что взаимодействие температурного поля и циркуляции порождают в атмосфере собственный колебательный режим, который при определенных внешних условиях и в зависимости от исходного состояния атмосферы может терять устойчивость. Поскольку атмосфера находится под воздействием периодически меняющихся внешних источников тепла и, кроме того, интенсивность зональной циркуляции также периодически меняется, то создаются условия для возникновения в атмосфере резонансных явлений.

Интересным представляется тот факт, который отмечала уже в первых работах Е. Н. Блинова, что в реальной колебательной атмосферной системе температура-динамика действительно могут возникать резонансные явления, приводящие к резкому росту отдельных амплитуд колебаний и полной перестройке термобарических полей. В настоящее время найдено подтверждение этого предположения. В работах К. Танга и Р. Линдзена показано, что колебания скорости зонального потока приводят к тому, что крупномасштабные волны время от времени оказываются почти стационарными и могут усиливаться под влиянием суммарного эффекта орографических и температурных воздействий подстилающей поверхности. Они показали, что таким образом могут быть объяснены появления блокирующих зональный поток барических образований.

Рассмотренная выше двухуровневая бароклинная модель по своим свойствам гораздо ближе к реальной атмосфере, чем баротропная. Главным ее достоинством является возможность качественно правильного описания взаимных преобразований кинетической и потенциальной энергии. В этой модели разность температур экватор-полюс создает зональный поток с вертикальным сдвигом скорости. Этот поток имеет малую кинетическую энергию, но бароклинно неустойчив и азональные отклонения в нем растут. Растущие азональные отклонения черпают энергию из потенциальной, которая образуется за счет термической неоднородности подстилающей поверхности и под влиянием орографических вертикальных токов. В результате запас кинетической энергии азональных отклонений оказывается гораздо больше, чем у зонального потока, и благодаря механизму отрицательной вязкости эта кинетическая энергия передается к зональному потоку, усиливая его.

Такой энергетический цикл свойственен и реальной атмосфере, однако количественно скорости преобразований различных видов энергии в двухслойной бароклининой модели отличаются от реальных. По этой причине возникающие в двухслойной модели барические образования по времени и по интенсивности редко совпадают с теми, которые возникают в реальной атмосфере. Ошибки в прогнозе возникновения барических образований и некоторое снижение точности прогнозов перемещения их на уровне 500 гПа привели к тому, что двухуровневые бароклинные модели недолго использовались в практике оперативного прогноза. Им на смену пришли многоуровневые бароклинные модели, в которых вертикальное распределение температуры может изменяться со временем и в пространстве.

Исследование нелинейных взаимодействий в системе уравнений, описывающих динамику и теплообмен более подробно, будет описано в следующей главе при разборе результатов воспроизведения атмосферы путем численного моделирования на основе метода сеток. Относительно использования спектрального метода для решения общей задачи гидротермодинамики атмосферы сделаем только общие замечания.

В настоящее время в принципе решен ряд проблем, которые ранее делали спектральный подход неприменимым для практического численного прогноза. Существуют оперативные модели, построенные по методу спектрально-сеточных преобразований, численное интегрирование которых позволяет получать решение на срок до 5—10 суток. В СССР этот подход осуществлен в ГМЦ СССР в работах С. А. Машковича и И. Л. Вейль. В. А. Ефимовым разработан спектральный метод, обобщающий известные ранее, и на его основе построена уточненная модель для прогноза на средние сроки. Большое значение спектральный метод решения полной системы уравнений гидротермодинамики сохраняет в исследованиях по динамике крупномасштабных и долгопериодных процессов. В работах В. Ф. Должанского, М. В. Галина, Д. Н. Сонечкина детально исследован механизм нелинейных колебаний, возникающих в крупномасштабном взаимодействии динамики и теплопереноса. Г. П. Курбаткиным разработана спектральная модель долгопериодных атмосферных процессов, в которой методы решения обратных задач математической физики применены для определения вида климатических источников и стоков энергии, регулирующих эволюцию атмосферы. Принципиально новый шаг по пути применения спектрального метода сделан в работах М. И. Юдина, который сформулировал вариант спектрального метода, когда удаётся отфильтровать от медленных, важных в прогнозе движений, быстрые колебания, имеющие характер «шума». Большое значение имеют разработанные Ш. А. Мусаеляном вопросы нахождения асинхронных связей процессов с разным физическим содержанием и разным пространственным масштабом, где спектральный подход

к решению задач сочетается с большим фактическим материалом о статистических связях разных сферических гармоник.

Таким образом, спектральное представление метеорологических полей и его применение для решения задач динамики атмосферы позволили выявить значительное число закономерностей долгосрочных изменений погоды. Этот подход интенсивно развивается и как метод теоретических исследований, и как аппарат численного прогноза.

## Глава 3. МОДЕЛИ ОБЩЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ АТМОСФЕРЫ И ДОЛГОСРОЧНЫЙ ПРОГНОЗ ПОГОДЫ

### 3.1. Основные сведения о моделировании циркуляции атмосферы с помощью ЭВМ\*

Рассмотренные в предыдущих главах количественные методы долгосрочных прогнозов имели невысокую успешность и были весьма ненадежными по оправдываемости. Это объясняется значительными упрощениями, которые использованы в них для описания атмосферных процессов. В период зарождения практических методов численных прогнозов погоды было принято считать, что главным недостатком простейших методов является линеаризация уравнений динамики атмосферы. Основные погодообразующие факторы динамики атмосферы — циклоны и антициклоны — стационарны, а значит в атмосфере непрерывно происходит преобразование потенциальной энергии в кинетическую и перераспределение кинетической энергии между движениями с различными масштабами. Этого нельзя правильно смоделировать, используя линеаризованные уравнения движения. Долгопериодные процессы в атмосфере имеют, по определению А. С. Мони́на, характерное время существования больше, чем период диссипации всего начального закона кинетической энергии атмосферных движений (для атмосферы время диссипации кинетической энергии составляет примерно 5—7 суток). По мере накопления опыта краткосрочных численных прогнозов, выяснилось, что долгопериодные процессы весьма крупномасштабны и происходят под воздействием нагрева и охлаждения, связанных с распределением континентов и океанов, а также испытывают значительное влияние динамических эффектов, обусловленных орографией. Неточное описание источников и стоков тепла в атмосфере или трения ее о подстилающую поверхность приводят к ошибкам в прогнозе, не менее серьезным, чем ошибки, вызванные упрощенной трактовкой динамики атмосферы.

\* Для углубленного ознакомления с современным состоянием теории моделирования системы атмосфера-океан-континент с помощью ЭВМ можно рекомендовать работы [2, 5, 11, 12, 15, 18].

Наиболее полный и правильный учет указанных выше факторов в настоящее время осуществляется в моделях общей циркуляции атмосферы (МОЦ). По определению А. С. Мони́на МОЦ представляет собой совокупность уравнений динамики атмосферы, записанных в том или ином приближении, с соответствующими крайними условиями и с алгоритмами численного решения. Решение уравнений этой модели при тех или иных значениях внешних параметров называется численным экспериментом по воспроизведению атмосферных процессов. В настоящее время МОЦ используются в самых разных целях: для анализа систем контроля за состоянием атмосферы, для четырехмерного усвоения метеорологической информации, полученной с помощью различных средств наблюдений, для исследования естественных или антропогенных изменений климата, для оперативных краткосрочных прогнозов погоды и, наконец, для экспериментальных прогнозов погоды на средние сроки, до 10—16 суток. Именно этот аспект применения МОЦ в метеорологии рассматривается в данной главе.

Общей базой современных МОЦ является система полных уравнений. Под этим термином подразумевается система уравнений, состоящая из уравнения горизонтального движения

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + f\vec{k} \times \vec{V} + \nabla_{\sigma} \Phi + \alpha \nabla_{\sigma} \pi = \vec{F}, \quad (3.1.1)$$

уравнения гидростатического равновесия

$$\frac{1}{\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = -\alpha, \quad (3.1.2)$$

уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} + \nabla_{\sigma} \cdot (\pi \vec{V}) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \pi \dot{\sigma} = 0, \quad (3.1.3)$$

уравнения состояния

$$p\alpha = RT, \quad (3.1.4)$$

уравнения притока тепла

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{T} \frac{Q}{c_p} \quad (3.1.5)$$

и уравнения переноса влаги

$$\frac{dq}{dt} = E - C. \quad (3.1.6)$$

Система уравнений (3.1.1)—(3.1.6) записана в  $\sigma$ -системе координат\*. Основным отличием этой системы уравнений от более

\* С выводом системы полных уравнений и понятием о  $\sigma$ -системе координат можно ознакомиться, например, в [8].

общих систем уравнений, описывающих динамику атмосферы, является применение уравнения гидростатики. При записи системы введены обозначения:

$\vec{V}$  — вектор горизонтальной скорости;

$f$  — параметр Кориолиса;

$\vec{k}$  — вертикальный орт;

$\nabla_\sigma$  — двумерный оператор градиента;

$\sigma$  — вертикальная координата,  $\sigma = \frac{p - p_t}{p_s - p_t}$ ;

$p$  — давление;

$p_t$  — давление на уровне, принятом за верхнюю границу атмосферы;

$p_s$  — давление на уровне подстилающей поверхности;

$\alpha$  — удельный объем,  $\alpha = \frac{1}{\rho}$ ,  $\rho$  — плотность воздуха;

$\pi = p_s - p_t$ ;

$\vec{F}$  — двумерный вектор силы трения;

$R$  — газовая постоянная;

$T$  — температура;

$\theta$  — потенциальная температура;

$c_p$  — удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении;

$Q$  — приток тепла к единице массы;

$\Phi$  — геопотенциал;

$q$  — отношение смеси;

$C$  — скорость конденсации;

$E$  — скорость испарения.

Векторная форма записи уравнений движения принята вследствие того, что в современных МОЦ используются разные системы горизонтальных координат. Вертикальная координата  $\sigma$  используется для удобства введения в модели рельефа подстилающей поверхности.

В качестве граничных условий по вертикали используются, как правило, при  $\sigma=0$  (верхняя граница) или  $\sigma=1$  (нижняя граница) условия

$$\frac{d\tau}{dt} = 0. \quad (3.1.7)$$

Кроме того, считается, что силы трения и турбулентные потоки импульса, тепла и влаги исчезают на верхней границе, а на нижней границе определяются на основе законов сопротивления и тепло-массообмена\*.

\* Формулы, выражающие эти законы, и входящие в них параметры приводятся в описаниях каждой конкретной МОЦ (см., например, [5]).

В долгопериодных процессах атмосфера выступает как единая система, все части которой активно взаимодействуют друг с другом. Эволюция какой-нибудь части атмосферы определяется не только ее собственным состоянием, но и состоянием всех остальных частей атмосферы. Иными словами, модели общей циркуляции атмосферы должны быть глобальными. Вследствие глобальности можно сформулировать естественные краевые условия для уравнений модели по горизонтальным координатам: условия периодичности всех характеристик атмосферы, связанные с близкой к шарообразной форме Земли.

Однако необходимость решать задачу динамики атмосферы на сфере вносит дополнительные сложности в процедуру конечно-разностной аппроксимации уравнений для их решения с помощью ЭВМ. Дело в том, что наиболее естественная для сферы система координат (полярная сферическая система с координатами долготы  $\lambda$  и полярное расстояние или дополнение широты  $\theta$ ) имеет особые точки у полюсов, где сходятся меридианы. Вектор скорости на полюсах определяется однозначно, а его проекции нет. Если в этой системе координат выбрать сетку точек с постоянными шагами по  $\lambda$  и  $\theta$ , то по мере приближения к полюсам, расстояние между узлами уменьшается, что приводит к необходимости использовать при численном интегрировании для выполнения условия устойчивости решений весьма малые шаги по времени. Эти трудности в настоящее время успешно преодолены\*.

Для численных экспериментов по долгосрочному прогнозу с помощью МОЦ требуются начальные условия, представляющие собой трехмерные распределения метеорологических характеристик в атмосфере Земли. Эти начальные условия основываются на данных наблюдений, относящихся к определенному моменту времени. Данные должны равномерно покрывать всю область решения и иметь одинаковую точность. В настоящее время сеть наземных наблюдений и тем более аэрологического зондирования все еще крайне неравномерна. Кроме того, результаты измерений могут содержать значительные ошибки. Это относится, например, к наблюдениям за ветром, влажностью, облачностью. В результате сбор полного комплекта начальных данных для работы МОЦ до сих пор не осуществляется регулярно, а имеющиеся комплекты данных содержат погрешности. В случае если поля давления и скорости окажутся вследствие погрешностей наблюдений не согласованными в начальный момент, в ходе численного интегрирования уравнений МОЦ могут возникнуть колебания с большой амплитудой. Причина этих колебаний — гравитационные волны, возникшие из-за начальной рассогласованности данных. Эти колебания со временем затухают в МОЦ, но пока они имеют место, точность

---

\* Более детально со спецификой задач, связанных с построением однородных сеток на сфере, и приемов, выработанных для их решения, можно ознакомиться, например, по [21].

прогноза по модели невелика. Для того чтобы повысить точность, применяются специальные процедуры согласования данных, используемых в качестве начальных условий для прогностиче-

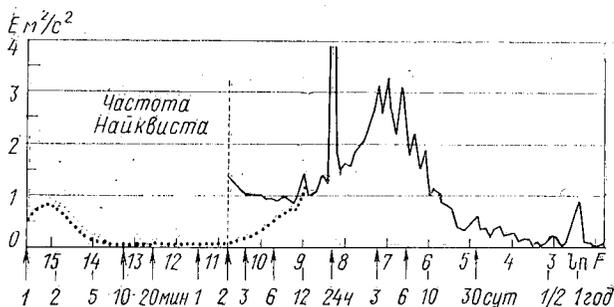


Рис. 3.1. Спектр кинетической энергии атмосферы по времени, полученный по результатам измерений

ской модели. Такая процедура называется инициализацией данных.

Глобальный характер МОЦ порождает и проблему технической реализации МОЦ. Атмосферные процессы весьма многомасштабны и нелинейны. На рис. 3.1 и 3.2 приведены временной и пространственный спектры кинетической энергии в пограничном слое, на основе которых можно судить о диапазоне масштабов тех процессов, которые необходимо учитывать в МОЦ. Временной спектр показывает, что значительную информацию несут атмосферные процессы в широком диапазоне временных масштабов от 10 минут до 3—6 суток. Диапазон пространственных масштабов также весьма широк: от планетарных до синоптических волн, связанных с возникновением атмосферных вихрей. Описание такого диапазона процессов требует весьма быстродействующих ЭВМ. Пусть МОЦ имеет 10 уровней по вертикали, точки широтно-долготной сетки располагаются через 3 градуса, в каждой точке определяется 5 переменных (две составляющие скорости ветра, геопотенциал,

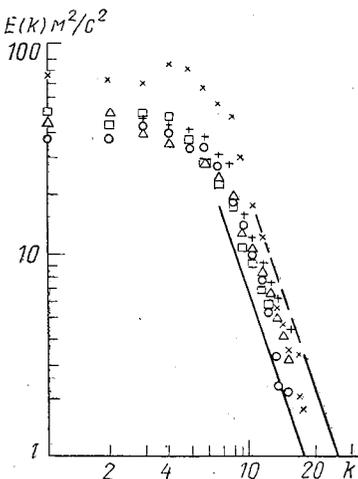


Рис. 3.2. Спектр кинетической энергии атмосферы по долготе, полученный по результатам наблюдений

температура, влажность), расчет ведется с шагом по времени 10 минут. Сложность модели определяется количеством операций, которое необходимо для расчета каждой из пяти переменных модели на один шаг. В современных моделях уровень сложности таков, что затрачивается от 200 до 1000 операций на одну переменную на один шаг, поэтому в качестве оценки примем 500 операций. Для проведения одного эксперимента по прогнозу на месяц нам потребуется по этой модели за один шаг по времени произвести  $500 \times 5$  операций в  $10 \times 120 \times 60$  точках сетки. Таких шагов потребуется 4320. А это значит, что для проведения одного эксперимента за сутки реального времени мы должны иметь ЭВМ с производительностью  $10^6$  операций в секунду. На рис. 3.3 приведены данные об эволюции американских ЭВМ, из которых видно, что для реализации такой МОЦ только недавно появились ЭВМ, подходящие по быстройдействию.

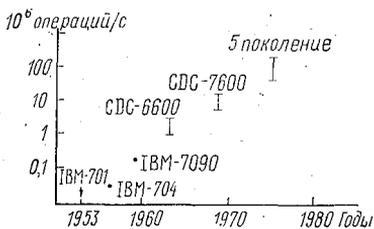


Рис. 3.3. Изменение быстродействия ЭВМ США с момента их возникновения

временные МОЦ имеют до 30 уровней по вертикали, описывают атмосферу над всей поверхностью Земли с шагом  $2,5^\circ$  и даже  $1,25^\circ$ . При этом достигнуто уже в известной степени близкое к оптимальному представление атмосферы сетью точек по горизонтали: переход от шага  $2,5$  к шагу  $1,25^\circ$  согласно исследованиям Вильямсона уже не приводит к существенным изменениям результатов, полученных с помощью МОЦ. Однако возможности ЭВМ все еще сильно тормозят применение МОЦ для долгосрочных прогнозов. Например, расчет на одни сутки глобальной по модели Национального центра атмосферных исследований США (шестиуровневый вариант с шагом  $2,5^\circ$  по  $\lambda$  и по  $\theta$ ) продолжается два часа.

Ограничения на «реализуемость» МОЦ на современных ЭВМ приводят к тому, что современные модели не совершенны и имеют систематические погрешности в воспроизведении атмосферных процессов. Два основных источника этих ошибок (во-первых, неполнота описания источников и стоков энергии, а во-вторых, погрешности численной реализации МОЦ) более подробно рассмотрены в следующих параграфах.

### 3.2. Описание источников и стоков энергии в моделях общей циркуляции и оценка их точности \*

Общая база современных МОЦ, представленная системой уравнений (3.1.1) — (3.1.6), при разработке каждой конкретной модели вид функциональных зависимостей, когда определяется вид функциональных зависимостей источников и стоков энергии, входящих в эту систему через  $\vec{F}$ ,  $Q$ ,  $C$ ,  $E$  от основных метеорологических характеристик  $\vec{V}$ ,  $\pi$ ,  $T$ ,  $\rho$ ,  $q$ . Различные возможности подхода к выбору замыкающих соотношений возникают, во-первых, из-за недостатка наших знаний о физике многих процессов, происходящих в атмосфере. Неполнота знаний проявляется, например, в том, что мы не можем до сих пор осуществлять надежное прогнозирование облачности, осадков, многих оптических характеристик атмосферы. Все это создает предпосылки для существования разных методов расчета одних и тех же величин.

Вторым источником неопределенности при решении задачи замыкания базовой системы уравнений являются упомянутые ранее трудности реализации МОЦ и ЭВМ. Действительно, при расчете радиационных потоков или при оценке параметров конвекции по аэрологической диаграмме метеорологи пользуются весьма точным представлением вертикальной структуры атмосферы. Например, при расчете параметров конвекции на ЭВМ в целях краткосрочного прогноза рекомендуется разбивать тропосферу на слои с шагом не более 50 гПа. В лучших современных МОЦ уровни в тропосфере отстоят друг от друга на 100 или 200 гПа. С другой стороны, важное для распространения тепла и импульса в свободной атмосфере явление образования кучевых облаков имеет пространственные размеры примерно 10 км, тогда как горизонтальный шаг в существующих МОЦ примерно 200 км. Это значит, что существуют физические процессы, которые могут представляться в модели с ошибкой потому, что они не связаны явно со сравнительно крупномасштабными процессами, описываемыми грубыми сетками современных МОЦ.

Проблема замыкания базовой системы уравнений состоит в том, чтобы определить необходимые источники и стоки через переменные, рассчитываемые на конкретной сетке, принятой для МОЦ. Такая постановка задачи замыкания базовой системы носит название проблемы параметризации источников и стоков энергии. Решение этой проблемы в различных МОЦ осуществляется по-разному. Поэтому необходимо не только понять смысл той или иной параметризационной связи, но и оценить ее погрешность и влияние этой погрешности на МОЦ.

---

\* Перед изучением этого параграфа читателю рекомендуется ознакомиться со способами описания источников и стоков энергии в нескольких МОЦ. Например, МОЦ ГГО по [5] и МОЦ Минца—Аракавы по [2].

Как известно, параметризации подлежат величины различной физической природы: составляющие радиационного баланса атмосферы и подстилающей поверхности, потоки тепла, влаги и импульса, возникающие в пограничном слое у подстилающей поверхности, турбулентные потоки в свободной атмосфере, возникающие главным образом в конвективных ячейках воздуха, крупномасштабный квазигоризонтальный обмен теплом, влагой и импульсом в свободной атмосфере, крупномасштабная конденсация водяного пара, приводящая к образованию облаков и выпадению осадков.

Вопрос об определении составляющих радиационного баланса в настоящее время относится к наиболее изученным. Обычно для проведения расчетов отдельно изучают условия, характерные для полностью безоблачного неба и для сплошной облачности, после чего для фактического частично покрытого облаками неба строят интерполяционные формулы, весовые коэффициенты в которых зависят от балла облаков.

В обоих предельных случаях отдельно рассматривают компоненты радиационного баланса, связанные с распространением коротковолновой солнечной радиации и длинноволновым тепловым излучением поверхности Земли и атмосферы. Расчет притока тепла на конкретном уровне в атмосфере производят путем нахождения алгебраической суммы нисходящего потока соответствующей радиации и восходящего потока радиации. В настоящее время наиболее хорошо изучены методы расчета нисходящего потока коротковолновой радиации в условиях безоблачного неба и потоков длинноволновой радиации в различных условиях облачности.

Для расчета потока коротковолновой радиации весь диапазон длин волн, в котором она сосредоточена, обычно разделяют на две части. В одном диапазоне длин волн (примерно 0,29—0,7 мкм) радиация считается полностью поглощенной слоем атмосферного озона. В результате в расчетах берется вместо истинной так называемая «подозонная» солнечная постоянная. Второй диапазон длин волн солнечной радиации содержит видимый и инфракрасный участок спектра. В видимом участке учитывают, как правило, только рассеяние солнечной радиации, происходящее на молекулах воздуха и на частицах аэрозоля. К сожалению, параметры атмосферного аэрозоля изучены еще не достаточно, и ошибки определения потока солнечной радиации частично связаны с этим. Инфракрасная часть солнечного излучения поглощается в атмосфере в основном водяным паром и углекислым газом. Учет этого поглощения осуществляется с помощью функции поглощения, которая представляет собой долю солнечной радиации поглощаемой в атмосфере, в зависимости от общей концентрации поглотителей в вертикальном столбе атмосферы.

Погрешности расчета коротковолновой радиации в условиях сплошной облачности связаны, во-первых, с большой сложностью расчета рассеяния света в облаках, а во-вторых, с недостаточной изученностью оптических характеристик облаков, которые зависят

от формы, высоты, мощности облачности и географической широты.

Определение величин потоков длинноволнового излучения атмосферы, как правило, производится с помощью функции поглощения. Функция поглощения имеет смысл той доли излучения черного тела при температуре исследуемого слоя атмосферы, которая поглощается атмосферным воздухом. Основные поглотители инфракрасного излучения атмосферы (озон, водяной пар и углекислый газ) не поглощают излучение в диапазоне длин волн от 8 до 12 мкм, образуя спектральное окно прозрачности. Такая схематизация поглощения длинноволновой радиации в атмосфере изображена на рис. 3.4 и, конечно, очень груба, но дает возможность понять смысл функции поглощения. В этом случае она будет равна отношению заштрихованной площади под кривой излучения Планка к площади под всей кривой. Из сказанного ясно, что функция поглощения зависит от спектра поглощения радиации атмосферными газами, а также от температуры и количества поглощающих газов в вертикальном столбе атмосферы единичного сечения между рассматриваемыми уровнями (эта величина называется оптической толщиной).

Проверка схем расчета радиационных потоков, принятых в различных МОЦ, может быть проведена благодаря наличию экспериментальных данных, собранных в специализированных экспериментах. Эти данные содержат как измеренные величины потоков радиации, так и необходимые для оценок значения температуры, влажности и концентрации различных примесей. Для безоблачных условий относительная погрешность расчета радиационных потоков менее 10%, а приток тепла, получающегося как разность потоков — около 20%. Для условий частичной облачности точность методов значительно ниже, а главное, сильно зависит от характеристик облачности.

Определение характеристик турбулентных потоков тепла, влаги и импульса в пограничном слое так же, как и оценка радиацион-

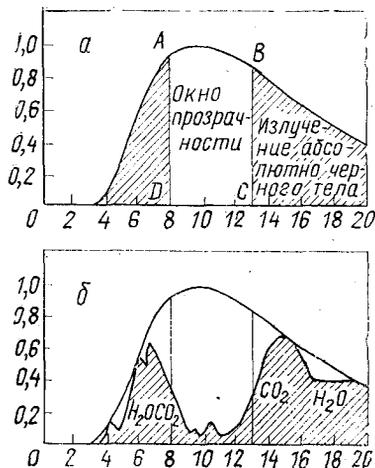


Рис. 3.4. Схематизация поглощения инфракрасной радиации атмосферными газами с помощью упрощенной концентрации «окна прозрачности» (а), реальный спектр поглощения (в).

По оси абсцисс — длина волны в мкм, по оси ординат — отношение потока энергии, поглощаемой атмосферой на уровне моря при температуре 300 К, к потоку энергии, излучаемой абсолютно черным телом при этой температуре

ного баланса, представляет собой вопрос, достаточно подробно изученный. Выработано несколько подходов к расчетам этих величин в одной точке по значениям метеорологических характеристик подстилающей поверхности и свободной атмосферы выше пограничного слоя. Два из этих подходов наиболее популярны. Первый основан на введении коэффициента турбулентности, который зависит от интенсивности турбулентного перемешивания и вычисляется из уравнения баланса энергии турбулентности. Второй подход основан на использовании соображений теории подобия. Выделяются комплексы безразмерных критериев интенсивности турбулентного обмена, характеризующие устойчивость стратификации пограничного слоя и степень ветрового воздействия, а затем определяются безразмерные коэффициенты, тепло-массообмена и сопротивления. С помощью этих коэффициентов потоки вычисляются по формулам типа закона Дальтона. На основе таких формул можно выписать уравнение теплового баланса подстилающей поверхности, из которого можно определить ее температуру. Как показывают сравнения методик, основанных на этих подходах, погрешности расчета турбулентных потоков довольно велики и составляют 30—40%, при сравнении величин рассчитанных и измеряемых в одной и той же точке.

Дополнительным источником погрешностей, который пока еще практически не исследован, является использование описанных выше формул, для расчета в МОЦ с шагом сетки в несколько сотен километров. Из экспериментов известно, как сильно зависят турбулентные потоки в пограничном слое от рельефа местности, типа почвы и ее растительного покрова. При больших шагах сетки внутри сеточной ячейки фактически существуют значительные неоднородности подстилающей поверхности, меняется устойчивость пограничного слоя, а с ней и турбулентные потоки. Величина ошибки, связанной с пренебрежением этим эффектом, по-видимому, может быть значительной.

Определение количества осадков и связанного с их выпадением тепловыделения производится в МОЦ аналогично тому, как это выполняется при расчете краткосрочного прогноза осадков. А именно, если в узле сетки расчет удельной влажности без конденсации приводит к возникновению пересыщения, то весь избыток пара считается осадками, а воздух в точке считается достигшим состояния насыщения при температуре, которая определяется с учетом потенциально возможного тепловыделения при фазовом переходе. Эта процедура описывает только конденсацию, связанную с перемещением воздушных масс. Дополнительные эффекты, возникающие за счет мезомасштабной конвекции и приводящие к образованию ансамблей кучевых облаков, с которыми в отдельных районах Земли связаны самые значительные осадки, учитываются в МОЦ очень приближенно. Обычно принимают во внимание только один из эффектов мезомасштабной конвекции: она ликвидирует неустойчивую стратификацию слоев атмосферы,

которая в них образуется под действием радиационных или динамических факторов. При этом критерием необходимости учета мезомасштабной конвекции считается рассчитанный вертикальный градиент температуры. Если по расчетам ожидается сухо- или влажнонеустойчивость, то градиент температуры приравняется к какому-либо наперед заданному критическому значению, а избыточная энергия перераспределяется в воздушном столбе в соответствии с условиями равновесия.

Отметим характерные погрешности принятых методик и попытаемся оценить их точность. Избираемые в МОЦ методы параметризации фазовых переходов в динамической метеорологии относятся не к описанию крупномасштабных, а к описанию процессов синоптического масштаба. Обычно в пределах характерных размеров сеточной ячейки МОЦ, скажем  $300 \times 300$  км, совместно состояние насыщения практически не достигается, облачность имеет значительные разрывы и по вертикали не заполняет всего объема тропосферы над каждой точкой территории. Это означает, что следует учитывать статистическую неоднородность в сеточной ячейке процесса конденсации. В настоящее время этот эффект не нашел вполне адекватного описания в МОЦ. С другой стороны, при использовании принятых способов расчета фазовых переходов для локальной оценки осадков в краткосрочном прогнозе погоды не достигнута высокая точность прогноза. Оценка успешности краткосрочных прогнозов осадков, составленных с помощью аэрологической диаграммы (это гораздо точнее и по используемой информации и по вертикальному разрешению, и по полноте учета факторов осадкообразования) показывает, что в радиусе 100 км от пункта коэффициент корреляции между рассчитанными и фактическими осадками сильно колеблется от 0,4—0,8, в зависимости от сложности местных условий осадкообразования. Таким образом, параметризация фазовых переходов производится в МОЦ с точностью, локально очень низкой. При этом можно надеяться на удовлетворительное описание только статистических характеристик осадков.

Вопрос о расчете балла облачности в МОЦ также нельзя отнести к решенным удовлетворительно. Как правило, балл облаков определяется как линейная функция от относительной влажности в узле сетки. В некоторых моделях дополнительно учитывается влияние температуры или удельной влажности воздуха, что необходимо вследствие неуниверсальности связи балла облачности и относительной влажности. Поскольку и в краткосрочном прогнозе определение будущей облачности является одним из самых слабых мест, то можно думать, что и в МОЦ определение балла облаков производится только без искажений климатических характеристик.

Важным при разработке МОЦ является выбор способа параметризации горизонтального макротурбулентного обмена. Этот эффект необходим для правильного описания передачи кинетиче-

ской энергии по спектру масштабов атмосферных движений. Метод сеток при численной реализации МОЦ, как будет показано в следующем параграфе, искажает движения различных пространственных масштабов по-разному: чем короче длина волны и чем ближе она к предельно представимым на сетке волнам, длиной  $2\Delta$ ,  $3\Delta$  и  $4\Delta$ , где  $\Delta$  — шаг сетки, тем больше погрешность расчета этих волн в МОЦ. В результате нелинейных взаимодействий ошибки в расчете коротких волн могут передаваться длинным волнам, полностью искажая решение. Задачей параметризации макротурбулентного обмена является подавить короткие, плохо описываемые на сетке волны, но при этом не нарушить, по возможности, процесс переноса энергии по спектру в диапазоне длинных волн. Обычно для описания макрообмена используется градиентная гипотеза, известная из курса динамической метеорологии, а коэффициент макротурбулентности определяется по характеристикам поля скорости с помощью методов теории трехмерной или двумерной турбулентности. Погрешности этой схемы параметризации можно установить, сравнив реальный спектр кинетической энергии с рассчитанным в рассматриваемой модели, а также ориентируясь на скорости трансформации различных видов энергии друг в друга. Опираясь на эти материалы, можно отметить, что погрешности в такой параметризации, безусловно, имеются, но их трудно выделить на фоне значительных ошибок параметризаций других физических процессов. Логичная строгость подхода к этой параметризации, присущая современным МОЦ, позволяет надеяться на то, что на современном уровне этот вопрос решен удовлетворительно.

Как указано выше, ошибки расчета отдельных источников и стоков энергии колеблются от 10 до 100%. Возникает вопрос, полезно ли вообще включать в МОЦ источник или сток, который, как осадки, может быть рассчитан с локальной погрешностью 100%. На этот вопрос ответили эксперименты по формированию климата. С их помощью выяснено, что, отбросив какой-либо из физических процессов, происходящих в атмосфере, только потому, что он изучен плохо, мы не сможем получить того динамического равновесия, которое близко к климату Земли. Климатические характеристики генерируются под влиянием всех видов нагревания атмосферы и трения ее о подстилающую поверхность. Пренебрежение неточно параметризуемыми факторами влечет систематические ошибки МОЦ.

Исследование чувствительности МОЦ к формам параметризационных связей производилось лишь для тех процессов, для расчета которых имеются различные методы. Основным результатом этих экспериментов можно считать тот факт, что как состояние климатического равновесия, так и ход отдельных процессов, оказываются чувствительными к выбору той или иной параметризационной схемы. Степень чувствительности различна в различных МОЦ, однако в силу нелинейности модели реакция на изменение одного фактора имеется у всех характеристик моделей. Таким об-

разом, несовершенство метода параметризации источников и стоков энергии является важной причиной погрешностей МОЦ и приводит к тому, что эксперименты по воспроизведению атмосферной циркуляции пока еще производятся на моделях, не вполне адекватных реальной атмосфере.

### 3.3. Погрешности численной реализации моделей общей циркуляции атмосферы

Проведение расчетов по моделям общей циркуляции атмосферы возможно только с помощью приближенных методов, реализуемых на ЭВМ. При этом необходимо перейти от дифференциальных уравнений к алгебраическим, вследствие чего численная реализация МОЦ на ЭВМ порождает еще один тип погрешностей воспроизведения атмосферной циркуляции — погрешности дискретизации системы уравнений.

В современных МОЦ используются два метода дискретизации: метод сеток и спектральный метод. В спектральном методе используется тот факт, что на сферической поверхности любую функцию можно разложить в ряд по сферическим функциям. Учитывая возможность точного дифференцирования такого ряда, можно понять основное достоинство спектрального метода дискретизации: при его применении ошибки возникают в основном за счет усечения рядов Фурье, представляющих искомые функции.

Наибольшее распространение при создании МОЦ имеет метод сеток. Идея этого метода проста: область, в которой ищется решение задачи, разбивается на ячейки с помощью сетки точек, после чего дифференциальные уравнения аппроксимируются конечно-разностными.

Ошибка аппроксимации может быть как угодно малой, если расстояние между узлами сетки — шаг сетки  $\Delta$  — будет бесконечно уменьшаться. При этом шаг по времени  $\tau$  должен уменьшаться вместе с шагом по пространству и в зависимости от скорости потока, так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{V\tau}{\Delta} \leq 1, \quad (3.3.1)$$

которое называется условием устойчивости Куранта—Фридрихса—Лёви. Условие устойчивости гарантирует, что ошибки аппроксимации не нарастают со временем и степень приближения решения к точному можно оценить, зная ошибку аппроксимации и ошибку начальных условий.

Условие (3.3.1) является только необходимым условием устойчивости для систем нелинейных дифференциальных уравнений и не гарантирует отсутствия так называемой «нелинейной» неустойчивости, о которой мы скажем позже. Кроме того, и это самое главное, практические ограничения, связанные с возможностями ЭВМ,

не позволяют нам сделать погрешность аппроксимации пренебрежимо малой. Рассмотрим, какой шаг сетки необходим для устранения основного источника погрешностей — аппроксимации производной. Оценим погрешность нахождения первой производной на основе формулы центральных разностей

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta}, \quad (3.3.2)$$

согласно которой оценка производной  $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i$  в узле сетки с индексом  $i$ , получается по значениям функции в узлах, соседних с рассматриваемым. Применим эту формулу к оценке производной от функции

$$f(x) = A \sin \frac{2\pi}{L} x, \quad (3.3.3)$$

описывающей синусоидальную волну с длиной  $L$ . Эта функция на сетке с шагом  $\Delta$  вместе с ее производной имеет вид

$$f_i = A \sin \frac{2\pi\Delta}{L} i, \quad (3.3.4)$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{2\pi}{L} A \cos \frac{2\pi\Delta}{L} i. \quad (3.3.5)$$

Подставим теперь сеточную функцию (3.3.4) в аппроксимационную формулу (3.3.2) и проведем преобразования, тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_a &= \frac{A}{2\Delta} \left[ \sin \frac{2\pi\Delta}{L} (i+1) - \sin \frac{2\pi\Delta}{L} (i-1) \right] = \\ &= \frac{A}{\Delta} \sin \frac{2\pi\Delta}{L} \cos \frac{2\pi\Delta}{L} = \frac{\sin \frac{2\pi\Delta}{L}}{\frac{2\pi\Delta}{L}} \frac{2\pi}{L} A \cos \frac{2\pi\Delta}{L} i. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Сравнивая выражения для точной (3.3.5) и приближенной (3.3.6) производных, легко убедиться, что последняя всегда меньше, чем первая. Степень уменьшения определяется величиной множителя перехода от формуле

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_a / \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = \frac{\sin k\Delta}{k\Delta}, \quad k = \frac{2\pi}{L}. \quad (3.3.7)$$

Как видно из этого соотношения, множитель перехода зависит от длины волны. Эта зависимость приведена на рис. 3.5. Рисунок

показывает, какая большая ошибка возникает при дифференцировании волн с длинами  $2\Delta$ — $6\Delta$ . Уменьшение амплитуды на 10%, т. е. до  $0,9 A$  происходит только для достаточно длинных волн, начиная с  $L = 8\Delta$ . Таким образом, имея МОЦ с шагом около 300 км, мы можем с приемлемой точностью рассматривать движения с характерным масштабом, большим 2400 км. Движения меньшего масштаба при численном дифференцировании искажаются, особенно самые короткие волны, которые служат таким источником «шумов» для МОЦ.

Амплитудная ошибка, о которой мы говорили выше, приводит к другим погрешностям метода сеток. Во-первых, возникают ошибки прогноза фазы волн. Рассмотрим, как на сетке преобразуется выражение

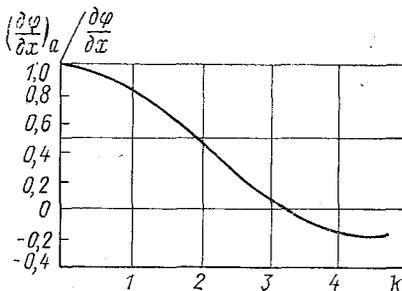


Рис. 3.5. Амплитудная ошибка, возникающая при численном дифференцировании синусоиды по центрально-разностной схеме в зависимости от волнового числа  $k$

$$\left(f + \frac{\partial f}{\partial x}\right)_i = A \sqrt{1 + k^2} \sin(k\Delta i + \varphi), \quad (3.3.8)$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi = k. \quad (3.3.9)$$

Если в этом выражении заменить точное значение производной на приближенное, то фаза волны исказится и будет определяться равенством

$$\operatorname{tg} \varphi_a = \frac{\sin k\Delta}{k\Delta} \cdot k. \quad (3.3.10)$$

Во-вторых, применение аппроксимационных формул для дифференцирования по времени приводит в определенных случаях к образованию фиктивных, колеблющихся во времени решений, так называемых вычислительных мод. В этом случае на истинное решение системы может налагаться колебание, как показано на рис. 3.6, которое является непрерывно генерируемым систематическим шумом в МОЦ.

В-третьих, зависимость амплитудной ошибки от длины волны порождает фиктивную дисперсию волн, из которых складываются реальные поля. Для примера рассмотрим одномерное уравнение адвекции

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.3.11)$$

где  $u(t, x)$  — решение, представляющее собой, скажем, концентрацию вещества, переносимого с потоком с постоянной ско-

ростью —  $C$ . Если искать частное решение этого уравнения в виде одной гармоникой с волновым числом  $k$  и частотой  $\omega$ :

$$u = \text{Re} [Ae^{i(kx - \omega t)}], \quad (3.3.12)$$

где  $i$  — мнимая единица, а  $\text{Re}[f]$  — обозначение действительной части комплексной переменной  $f$ , то путем подстановки (3.3.12) в (3.3.11) можно определить фазовую скорость распространения этой гармоникой из дисперсионного соотношения

$$kC - \omega = 0. \quad (3.3.13)$$

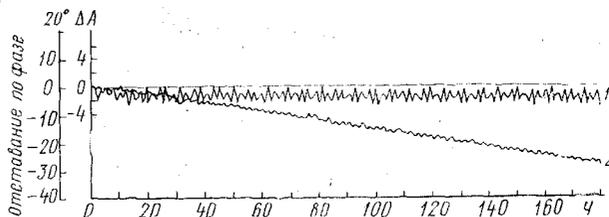


Рис. 3.6. Пример численных решений при наличии фиктивных колебаний, называемых вычислительной модой. Изменение во времени ошибки конечно-разностного решения по амплитуде  $\Delta A$  (1) и по фазе (2) при реализации на ЭВМ уравнения (3.3.11) с помощью центрально-разностной аппроксимации производных по времени и по координате

Фазовая скорость гармоникой, которая равна  $\omega/k$ , постоянна для любой гармоникой, удовлетворяющей уравнению (3.3.11). Это значит, что если начальное условие для (3.3.11) представляет собой совокупность гармоникой, образующую в сумме прямоугольный импульс, то этот импульс будет без искажений перемещаться по потоку. Аппроксимируем уравнение (3.3.11) дифференциально-разностным

$$\frac{du_j}{dt} + \frac{C}{2\Delta} (u_{j+1} - u_{j-1}) = 0, \quad (3.3.14)$$

в котором узел сетки имеет индекс  $j$ . Отыскивая решение этого уравнения в форме

$$u_j(t) = \text{Re} [Ae^{i(kj\Delta - \omega t)}], \quad (3.3.15)$$

путем подстановки в исходное получим дисперсионное соотношение

$$kC \left( \frac{\sin k\Delta}{k\Delta} \right) - \omega = 0. \quad (3.3.16)$$

Из этого соотношения видно, что вследствие замены производной на конечно-разностное соотношение, фазовая скорость коле-

бания стала зависеть от длины его волны, поскольку волновое число связано с длиной волны соотношением

$$k = \frac{2\pi}{L}. \quad (3.3.17)$$

Но тогда форма решения в процессе расчета будет изменяться, так как скорости распространения отдельных гармоник различны. На рис. 3.7 приведен пример того, как может исказиться точное решение за счет вычислительной дисперсии.

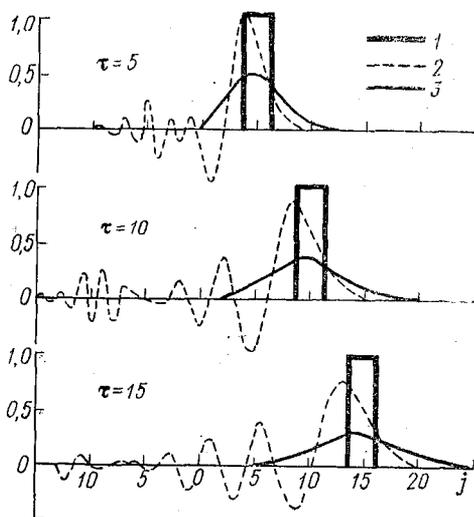


Рис. 3.7. Аналитическое решение уравнения (3.3.11) — 1; численное решение с центрально-разностным представлением пространственно производной — 2; то же с одно-сторонним представлением производной — 3

Вычислительная дисперсия порождает еще один, четвертый, вид ошибок применения метода сеток для описания атмосферных процессов. Он связан с неточным описанием процесса взаимодействия различных типов волновых движений. Наиболее важным метеорологическим следствием является погрешность численного воспроизведения процесса адаптации поля скорости ветра и поля давления, приводящего к установлению квазигеострофического баланса. Напомним, что система уравнений МОЦ допускает существование нескольких различных типов движений. Вследствие использования квазистатического приближения в современных МОЦ учитывают лишь два типа движения: квазигеострофическое движение и гравитационные волны. Гравитационные волны возбуждаются в атмосфере постоянно в результате различных, как пра-

вило, мезомасштабных возмущений. Их основная функция состоит в осуществлении взаимного приспособления полей скорости ветра и давления. Теоретические исследования показали, что процесс такого взаимного приспособления сопровождается дисперсией, а значит накоплением энергии на волнах определенного интервала длин. В результате устанавливается квазигеострофическое равновесие.

Применение метода сеток для решения уравнений динамики атмосферы создает фиктивную вычислительную дисперсию, которая в сочетании с естественной дисперсией создает искаженную картину крупномасштабного квазигеострофического баланса. В результате равновесное состояние может установиться на движениях с масштабом и периодом иными, чем в реальной атмосфере. Это приведет к искажениям спектра кинетической энергии в модели и, как следствие, к погрешностям в воспроизведении климатического равновесия.

Пятым источником погрешностей метода сеток является конечно-разностное описание крупномасштабного и квазибездивергентного движения атмосферы. В этом процессе главную роль играют нелинейные эффекты, описываемые адвективными членами уравнений динамики. Как показал Аракава, при бездивергентном движении, которое описывается баротропным уравнением вихря, имеют место законы сохранения двух нелинейных интегральных характеристик потока: средней по области кинетической энергии  $\bar{K}$  и среднего по области квадрата вихря скорости  $\bar{\Omega}^2$ . Эти величины рассчитываются по скорости потока формулами

$$\bar{K} = \frac{1}{2} (\overline{U^2 + V^2}), \quad (3.3.18)$$

$$\bar{\Omega}^2 = \overline{\left( \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2}, \quad (3.3.19)$$

где операция осреднения по области  $S$  определена как интеграл

$$\bar{f} = \frac{1}{S} \int_S f ds. \quad (3.3.20)$$

Если теперь найти характерный масштаб движения по формуле

$$L = \sqrt{\frac{\bar{K}}{\bar{\Omega}^2}} \quad (3.3.21)$$

и учесть, что для бездивергентного плоского течения в замкнутой области  $\bar{\Omega}^2$  и  $\bar{K}$  — инварианты, то можно убедиться, что  $L$  также является инвариантом потока, а значит и средний масштаб движений в этом потоке остается неизменным. Это важнейшее следствие хорошо наблюдается на любой синоптической карте:

действительно, средний размер барических образований примерно один и тот же, вихри быстро достигают определенного диаметра, а затем размываются, сохраняя в среднем близкие характерные масштабы. Условия сохранения среднего волнового числа атмосферных движений при использовании метода сеток может нарушаться.

Приведем простую механическую аналогию этого явления, предложенную Чарни. Если изображенная на рис. 3.8 система должна все время находиться в состоянии равновесия, но при этом

«грузы», подвешенные на правом полубесконечном плече «весов», могут менять положение, то, очевидно, что очень многие положения этой системы «грузов» запрещены условием сохранения равновесия. В частности система потеряет устойчивость, если все «грузы» будут перемещены вправо. Применяя метод сеток невозможно описать правильно мелкомасштабные процессы, ответственные за

диссипацию кинетической энергии крупномасштабных движений. Таким образом, хотя за счет нелинейных взаимодействий энергия непрерывно передается от движений с большим масштабом к движению с меньшим масштабом, на некотором предельно малом масштабе в сеточных моделях энергия не может быть передана дальше, а значит будет накапливаться. Накопление энергии на самых коротких волнах, представимых на данной сетке, порождает в вычислительной схеме неустойчивость, подобную той, которая может возникнуть в механической системе, приведенной на рис. 3.8, если все «грузы» начнут смещаться вправо. Такая неустойчивость называется нелинейной неустойчивостью, так как она генерируется за счет взаимодействия волн, представимых на сетках\*.

Перечисленные виды погрешностей метода сеток, как показывает теоретический анализ, не могут быть полностью устранены, а могут быть только ослаблены путем выбора специальных видов сеток и методов аппроксимации производных. Главным средством уменьшить эти погрешности является уменьшение шагов по пространственным координатам. Однако возможности современной вычислительной техники не позволяют выбрать такие шаги по пространству, которые обеспечивали бы достаточно точное описание

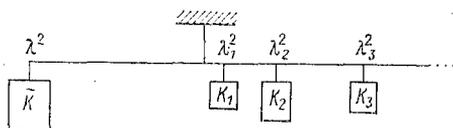


Рис. 3.8. Механическая аналогия возможного обмена энергией между гармониками ( $K_i$  — энергия гармоники с длиной волны  $\lambda_i$ ) в условиях сохранения средней длины волны и среднего запаса энергии системы. Грузы, находящиеся на правом плече весов, могут перемещаться, но не должно нарушаться равновесие весов

\* Более подробно с возникновением нелинейной неустойчивости и методами ее подавления можно ознакомиться в [10, 21].

методом сеток всех метеорологических значимых процессов. По этой причине наличие ошибок аппроксимации уравнений динамики атмосферы следует всегда принимать во внимание, анализируя результаты моделирования.

### 3.4. Точность воспроизведения климата с помощью моделей общей циркуляции атмосферы

Опираясь на факты, рассмотренные в предыдущих параграфах этой главы, можно заключить, что неопределенности при постановке начальных условий, весьма неполное описание источников и стоков энергии при параметризации, наконец, погрешности метода сеток — все это приводит к систематическим ошибкам определения характеристик атмосферы по результатам моделирования. Конечно, нельзя в полной мере оценить, какие ошибки вносит каждый из конкретных источников. На основании исследований точности краткосрочных прогнозов геопотенциала приняты следующие оценки ошибок, вносимых различными факторами в расчеты по МОЦ (в процентах от суммарной ошибки):

- за счет аппроксимации горизонтальных производных — 38;
- ошибки, связанные с вертикальным разрешением — 9;
- ошибки, связанные со схемой интегрирования по времени — 1;
- ошибки прогноза за счет неточности задания начального состояния — 18;
- ошибки за счет неточности параметризации физических процессов — 34.

В нелинейных системах невозможно отличить в конечном результате расчетов проявление природных закономерностей от действия ошибок до проведения расчетов. Поэтому необходимым элементом численного моделирования атмосферы на основе МОЦ является сравнение состояния климатического равновесия, генерированного моделью, с реальным климатом. Такие эксперименты проводятся со всеми моделями, создаваемыми для изучения атмосферы. Ниже приведены характеристики тех МОЦ, которые будут упоминаться в связи с анализом результатов численных экспериментов.

Для индексации моделей использованы сокращения, которые вместе с основными характеристиками этих моделей помещены в табл. 3.1. Таблица охватывает далеко не все из имеющихся МОЦ. В ней приведены только те, на которые имеются ссылки в этой и следующих главах.

В большинстве моделей используются сходные по идеям методы параметризации основных источников и стоков энергии, хотя, конечно, детали параметризаций значительно различаются. Во всех моделях имеются характеристики состояния системы атмосфера-континент-океан, задаваемые извне, что, безусловно, ограничивает возможности их применения в климатических исследованиях.

Различия моделей в первую очередь касаются тех модификаций метода сеток, которые в каждой из них применяются. Различаются также системы координат. В моделях НМЦ, ЛГГ, ГГО используется запись уравнений на стереографической проекции северного полушария, что отражено в табл. 3.1. обозначениями  $x$ ,  $y$ . В этом случае шаг по горизонтале является переменным: большим у полюсов и меньшим у экватора. В табл. 3.1 приведены значения шагов в средних широтах. В остальных моделях используются сферические координаты, хотя и с различными сетками. Так в модели НЦАИ использована сетка с постоянным шагом по широте и переменным шагом по долготе. Для этой модели приведены средние значения шага по широтному кругу. Число уровней, описывающее вертикальную структуру атмосферы, также различно.

Процедура интегрирования МОЦ для получения климатической картины обычно производится по одной и той же методике. Отправляясь от некоторого стандартного состояния, проводят интегрирование, пока в модели не установится динамическое равновесие, которое, как правило, идентифицируется по прекращению закономерного роста кинетической энергии тропосферы и переходу ее в колебательный режим. Как показывает опыт, переходный период длится около 40 модельных суток для тропосферы. Стратосфера оказывается более инерционной. Время установления динамического равновесия в ней 60—100 суток. После того, как равновесный режим наступил, численное интегрирование продолжается еще на месяц или на два. Результаты расчетов усредняют по месячному промежутку и считают модельным климатом.

Первоначально исходным состоянием для экспериментов по климату выбиралось состояние покоя изотермической атмосферы, находящейся в гидростатическом равновесии. По мере накопления опыта выяснилось, что климатический режим формируется под влиянием источников и стоков и больше зависит от внешних параметров модели, чем от начальных условий. Поэтому в настоящее время эксперименты по климату ведутся от реальных полей для начала моделируемого месяца.

Как показывает анализ климатического состояния генерируемого МОЦ, практически всем им свойственны одни и те же погрешности воспроизведения статистических характеристик атмосферы. При изложении их будем в основном опираться на наиболее подробно описанные в отечественной литературе опыты с моделью ГГО.

Синоптический анализ карт январских среднемесячных значений приземного давления показывает, что существуют значительные расхождения, выражающиеся в смещении положений рассчитанных барических центров по сравнению с фактическими, а также в некотором сглаживании алеутского и исландского минимумов. Температура полярной атмосферы в моделях оказывается ниже фактической, особенно в стратосфере. В связи с этим обостряется зональный градиент температуры, а вместе с ним завь-



шается интенсивность струйного течения и искажается поле давления в околополярной зоне. Приполярная область оказывается также несколько суше в модели, чем в реальных условиях. Все эти особенности рассчитанной циркуляции связаны с неточной передачей в МОЦ роли средней меридиальной циркуляции и макромасштабных вихрей в переносе импульса, тепла и влаги от экватора к полюсу. Модели имеют тенденцию к завышению роли упорядоченного переноса по сравнению с вихревым. Как указал Миякода, в моделях кинетическая энергия вихрей меньше, чем в реальной атмосфере. Причем при попытках воздействовать на этот процесс параметрически, уменьшая коэффициенты, описывающие макротурбулентность, улучшаются характеристики энергетики вихрей, но локальная структура полей метеоэлементов ухудшается — в них появляется множество мелкомасштабных волн.

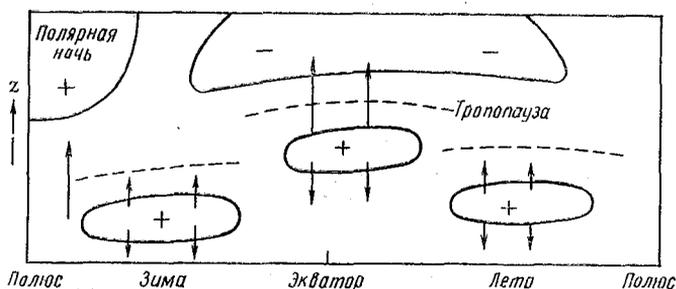


Рис. 3.9. Схема распределения зон генерации кинетической энергии (+) и зон стока ее (-) в атмосфере

Кинетическая энергия, как показали расчеты по моделям, генерируется в средней тропосфере под влиянием бароклинной неустойчивости. Другим источником пополнения кинетической энергии является преобразование потенциальной энергии в кинетическую, благодаря нисходящим токам.

Источники кинетической энергии атмосферы находятся в положительных областях, изображенных на рис. 3.9. Легко понять, что у экватора их интенсивность регулируется процессом конденсации, влияющим на циркуляцию в ячейке Гадлея. В стратосфере высоких широт нисходящие токи имеют значение для генерации кинетической энергии полярной ночью. В умеренных широтах источниками кинетической энергии являются антициклонические образования. Понятно, что для расчета поля вертикальных скоростей в атмосфере нужны модели с хорошим описанием «вертикальной структуры» и кучевой конвекции. Это означает, что устранение ошибок в описании преобразований энергии связано с увеличением количества слоев по вертикали.

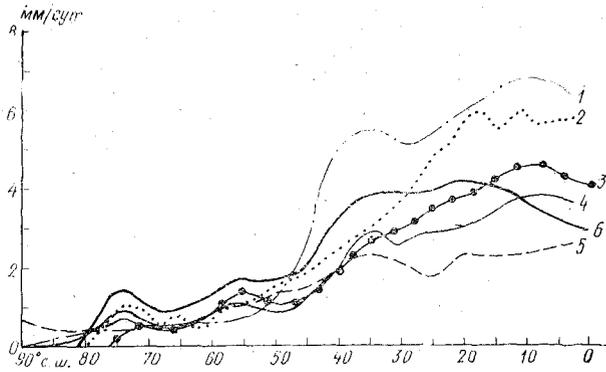


Рис. 3.10. Широтное распределение испарения, рассчитанного с помощью различных МОЦ:  
 1 — по модели корпорации РАНД (США); 2 — по модели метеорологической службы Англии; 3 — по модели ГГО; 4 — по модели ЛГГ; 5 — по модели ГИКИ; 6 — фактические значения испарения

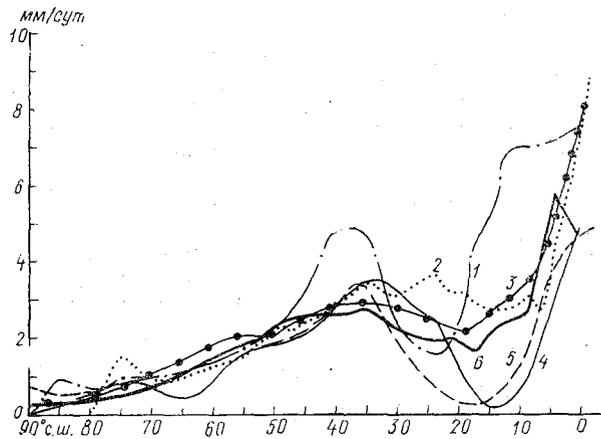


Рис. 3.11. Широтное распределение осадков.  
 Обозначения те же, что и на рис. 3.10

При анализе планетарных волн было обнаружено, что в настоящее время, несмотря на сложность МОЦ, можно считать удачно воспроизведенными только среднезональные климатические характеристики. Анализ, проделанный по моделям ГИКИ и НЦАИ, показал, что фаза и амплитуда планетарных волн с длинами  $360^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $120^\circ$ , несущих важнейшую информацию о перестройках атмосферных процессов, определяются весьма неточно, несмотря на введение рельефа и учет всех видов источников и истоков энергии. Существует мнение, что и эти ошибки могут быть устранены только за счет дальнейшего улучшения горизонтального и вертикального разрешения в МОЦ.

Характеристики влагооборота в атмосфере моделируются с большими ошибками даже и в среднем по широтному кругу. На рис. 3.10 и 3.11 легко видеть, что ни испарение, ни осадки, полученные в результате численного моделирования, нельзя считать удовлетворительными, хотя не исключено, что и фактические величины известны еще с малой точностью. Среди других характеристик влагооборота, вычисляемых со значительной ошибкой, находится и облачность, что сказывается наиболее существенно на радиационных характеристиках МОЦ.

Таким образом, современный уровень развития МОЦ таков, что основные черты климата Земли воспроизведены, найдены объяснения многим особенностям статистических характеристик атмосферы, но точность воспроизведения атмосферы все еще недостаточна, чтобы безоговорочно переносить количественные выводы, полученные на моделях, в практику долгосрочного прогнозирования погоды.

### **3.5. Методы оценки результатов численных экспериментов по гидродинамическому долгосрочному прогнозу**

Использование МОЦ для экспериментов по долгосрочному прогнозу с большой остротой поставило проблему анализа результатов численных экспериментов. Обычно метеорологи-прогнозисты при подготовке долгосрочного прогноза производят кропотливый анализ истории развития процесса, подбирают процессы-аналоги, рассматривают их ход, анализируют особенности климата и случаи неоправдавшихся прогнозов. Для результатов численных экспериментов такой тщательный анализ не выполним вследствие огромного объема информации, генерируемой ЭВМ в ходе каждого единичного эксперимента.

При разработке методик анализа результатов численных экспериментов на основе МОЦ используют три способа получения оценок. Во-первых, всегда производится частичный синоптический анализ рассчитываемых синоптических полей; во-вторых, вычисляются стандартные статистические критерии успешности прогноза; в-третьих, производится оценка расчетных энергетических характеристик и сравнение их с фактическими. Важной особенностью методик анализа результатов расчетов по МОЦ являются

раздельные оценки характеристик полей с различными пространственными масштабами. Разделение пространственных масштабов производится путем разложения полей в ряды Фурье по долготе. Далее коэффициенты ряда Фурье при различных гармониках группируются, чтобы выделить четыре диапазона пространственных масштабов: во-первых, зональные средние характеристики; во-вторых, планетарные волны, к которым относится 1, 2 и 3 гармоники, т. е. волны с длинами  $360^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $120^\circ$  по долготе; в-третьих, крупномасштабные процессы, включающие в себя гармоники с номерами

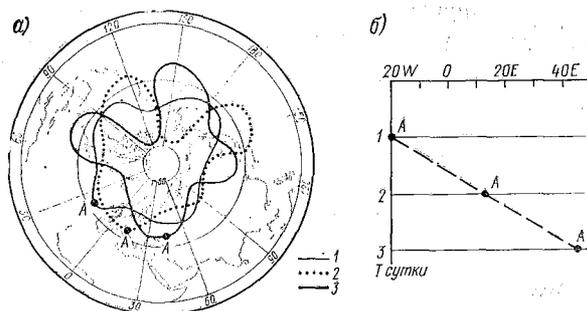


Рис. 3.12. Перемещение гребня «А» на фактической карте (1 — положение гребня в первые сутки, 2 — положение гребня во вторые сутки, 3 — положение гребня в третьи сутки) и изображение этого перемещения с помощью диаграммы Ховмёллера.

Карта приведена на рисунке (а), диаграмма — на рисунке (б)

от 4 до 9, т. е. волны с длинами от  $90^\circ$  до  $40^\circ$ ; наконец, в-четвертых, процессы синоптического масштаба, к которым относятся гармоники с нормами от 10 до 20, т. е. волны с длинами от  $36^\circ$  до  $18^\circ$  по долготе. Анализ более мелкомасштабных процессов обычно не производится, так как их роль в общей циркуляции атмосферы незначительна, а описываются они на применяемых в МОЦ сетках недостаточно точно.

Синоптический анализ метеорологических карт включает оценки барического положения, определяющего погоду в анализируемой области, и анализ атмосферных фронтов. Основным недостатком синоптического анализа является сложность прослеживания временной эволюции долгопериодных процессов, так как при этом приходится иметь дело с комплектом синоптических карт. Для удобства представления развития метеорологических процессов во времени при анализе результатов численного моделирования широко применяются диаграммы Ховмёллера. Методика их построения может быть разобрана с помощью примера, приведенного на рис. 3.12. Здесь рассмотрен способ сжатия информации о планетарной волне длиной  $120^\circ$ . Ясно, что нет необходимости

описывать графически все точки этой волны, а достаточно использовать для определения ее фазы только положение одной точки. Обычно рассматривают только положение гребня или ложбины (в примере, приведенном на рис. 3.12, выбран гребень). В случае когда барический рельеф является полигармоническим и имеет несколько локальных максимумов и минимумов, обычно строят временные диаграммы положения всех локальных максимумов или минимумов. Диаграммы Ховмёллера позволяют на одном рисунке изобразить эволюцию главных особенностей барического рельефа, что удобно для синоптика, а с другой стороны, они могут без затруднения быть построены с помощью ЭВМ, если известно представление метеорологического поля в виде ряда Фурье. Они дают важную информацию об успешности прогноза фазы атмосферных волн.

Расчет статистических характеристик успешности прогноза позволяет получить наиболее компактное представление о сходстве рассчитанных и фактических метеорологических полей. Метеорологическое поле может быть представлено в виде вектора. Это представление лежит в основе применения методов математической статистики для анализа атмосферных процессов. Оно осуществляется в два этапа: во-первых, выбирается система точек на метеорологической карте; а во-вторых, выбирается порядок обхода всех этих точек, что сводится к их нумерации в определенной последовательности. После того как сетка выбрана и на ней установлен порядок точек, можно считать, что любая функция, заданная на этой системе точек, образует  $n$ -мерный вектор

$$\vec{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_N\} \quad (3.5.1)$$

с компонентами  $f_i$ , где индекс  $i$  определяет точку сетки, в которой всего  $n$  точек.

После того как введена такая векторная интерпретация, можно рассматривать все возможные вектора  $\vec{F}$  как элементы  $n$ -мерного евклидова пространства и соответственно применять к ним методы функционального анализа. При этом важно всегда использовать для сравнения одну и ту же систему точек и введенный на ней порядок нумерации. Кроме того, можно сравнивать между собой только вектора, образованные из метеозлементов одной и той же природы. Не лишне напомнить, что в настоящее время существует единая сеть точек для оценки результатов прогнозов по СССР, приведенная на рис. 3.13. При анализе результатов численного моделирования сетка точек совпадает с используемой для расчетов.

Рассмотрим два  $n$ -мерных вектора

$$\vec{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad (3.5.2)$$

$$\vec{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}, \quad (3.5.3)$$

образованных, скажем, из рассчитанных  $\vec{X}$  и наблюдаемых  $\vec{Y}$  значений температуры в одних и тех же точках.

Близость этих векторов можно оценить, найдя длину вектора, являющегося их разностью, по формуле

$$|\vec{X} - \vec{Y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \quad (3.5.4)$$

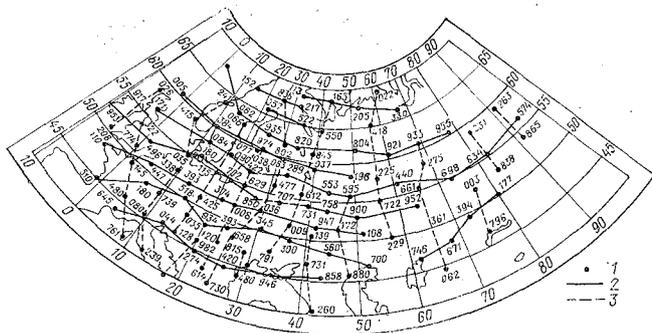


Рис. 3.13. Единая сеть пунктов, принятая в СССР для оценки прогнозов синоптического положения:

1 — индекс станции; 2 — горизонтальные ряды; 3 — вертикальные ряды

а также определив угол между этими векторами с помощью формулы

$$\cos(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{(\vec{X}, \vec{Y})}{|\vec{X}| \cdot |\vec{Y}|}. \quad (3.5.5)$$

Скалярное произведение, стоящее в числителе правой части (3.5.5), как известно, определяется равенством

$$(\vec{X}, \vec{Y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (3.5.6)$$

а длина вектора

$$|\vec{X}| = \sqrt{(\vec{X}, \vec{X})}. \quad (3.5.7)$$

Особенно наглядную интерпретацию приобретают эти формулы в трехмерном случае.

Теперь рассмотрим вектора  $\vec{X}$  и  $\vec{Y}$ , как выборки, состоящие из  $n$  значений двух случайных величин. Среднее квадратическое от-

клонение разности этих случайных величин и коэффициент корреляции между ними определяются по формулам

$$\sigma_{xy} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}, \quad (3.5.8)$$

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sigma_x \sigma_y}, \quad (3.5.9)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (3.5.10)$$

Формулы (3.5.8)—(3.5.10) точны только для случайных величин с нулевым математическим ожиданием, но в данном случае важно, что рассматриваемые статистические характеристики совпадают с векторными характеристиками (3.5.4)—(3.5.7). Это позволяет дать полезную интерпретацию стандартно вычисляемым статистическим характеристикам.

Среднюю квадратическую разность двух полей можно интерпретировать как длину  $n$ -мерного вектора разности, а коэффициент корреляции как косинус угла между сравниваемыми векторами. Длина вектора разности и косинуса угла дают разную информацию о близости векторов. Это значит, что  $\sigma_{xy}$  и  $r_{xy}$  не являются взаимозаменяемыми, но дают дополняющие друг друга характеристики близости метеорологических полей: среднее квадратическое отклонение больше реагирует на величину погрешностей, а коэффициент корреляции указывает, насколько сильно в среднем смещено одно поле по отношению к другому.

Важными критериями качества модели являются кинетическая и доступная потенциальная энергия рассчитанных полей, скорости преобразования одной из этих форм энергии в другую. Понятие кинетической энергии является одним из фундаментальных понятий механики. Понятие доступной потенциальной энергии является специфическим понятием динамической метеорологии, где анализируются подробно его смысл и методы расчета. Здесь уместно лишь напомнить, что доступная потенциальная энергия характеризует ту часть полного запаса потенциальной энергии, которая может быть в принципе преобразована в кинетическую энергию атмосферных движений. Оба перечисленных вида энергии рассчитываются для всей горизонтальной области моделирования (полусферы или сферы), причем охватывается вся вертикальная толща моделируемой атмосферы. Для большей детализации разделяют вклады в суммарный запас энергии от энергии, заключенной в зональных величинах, и от энергии, заключенной в азональных отклонениях полей.

Приведем выражения, позволяющие рассчитать эти энергетические характеристики. Введем несколько независимых видов усреднения. Во-первых, усреднение по времени от момента  $t_1$  до  $t_2$

$$\bar{f} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f dt. \quad (3.5.17)$$

Отклонение величины  $f$  от  $\bar{f}$  обозначим

$$f' = f - \bar{f}. \quad (3.5.18)$$

Зональное осреднение будем обозначать

$$[f] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\lambda, \quad (3.5.19)$$

а отклонение от него

$$f^* = f - [f]. \quad (3.5.20)$$

Среднее по широте или ее дополнению обозначим

$$\tilde{f} = \int_0^{\pi/2} f \sin \theta d\theta, \quad (3.5.21)$$

отклонение от этого среднего

$$f'' = f - \tilde{f}. \quad (3.5.22)$$

Значение функции  $f$  в каждой точке и в каждый момент может быть представлено следующим образом:

$$f(\theta, \lambda, t) = [\bar{f}] + f^* + [f'] + f'^*, \quad (3.5.23)$$

где величины  $[f]$  описывают среднее зональное состояние и его нестационарную составляющую, а величины, содержащие оператор  $f^*$ , описывают азональные, вихревые составляющие, которые так же, как и зональные, разделены на стационарные и нестационарные вклады. Таким образом, путем последовательного применения операций усреднения можно выделить вклады зональных или вихревых процессов.

Используя введенные обозначения, приведем формулы для различных компонент энергетических характеристик. Вывод этих формул приводится в курсе теории климата или в курсе математического моделирования атмосферных процессов на основании определений этих величин. Если обозначить через  $A_z$  — зональную часть доступной потенциальной энергии,  $A_E$  — вихревую часть до-

ступной потенциальной энергии,  $K_Z$  — зональную часть кинетической энергии,  $K_E$  — вихревую часть кинетической энергии, то расчет этих величин можно произвести по формулам

$$A_Z = \frac{1}{2} \int \gamma ([\bar{T}]'')^2 dm, \quad (3.5.24)$$

$$A_E = \frac{1}{2} \int \gamma [T^{*2}] dm, \quad (3.5.25)$$

$$K_Z = \frac{1}{2} \int ([\bar{U}]^2 + [\bar{V}]^2) dm, \quad (3.5.26)$$

$$K_E = \frac{1}{2} \int [U^{*2} + V^{*2}] dm + \frac{1}{2} \int [\bar{U}^{*2} + \bar{V}^{*2}] dm, \quad (3.5.27)$$

$$\gamma = \frac{R}{p \left( x \frac{\widetilde{[I]}}{p} - \frac{\partial [\widetilde{T}]}{\partial p} \right)}, \quad (3.5.28)$$

причем интегрирование ведется по всей массе атмосферы, элемент которой  $dm$  определяется формулой

$$dm = a^2 \sin \theta d\theta d\lambda dp/g, \quad (3.5.9)$$

$a$  — радиус Земли.

Наряду с различными составляющими энергетических характеристик рассчитывают и скорости превращения энергии. Как правило, ограничиваются расчетом  $C_A$  и  $C_K$ , которые обозначают соответственно скорость превращения доступной потенциальной энергии в кинетическую и скорость превращения кинетической энергии в доступную потенциальную.

С помощью рассчитанных энергетических характеристик по результатам численных экспериментов с МОЦ строят диаграммы энергетического цикла, которые сравнивают с аналогичными диаграммами, полученными по результатам наблюдений. На рис. 3.14 приведен пример построения диаграммы энергии для июля по модели ГГО сравнительно с реальным энергетическим циклом, оцененным Оортгом и Пейксотом. Оценки энергетического цикла позволяют выяснить правильность физических процессов,

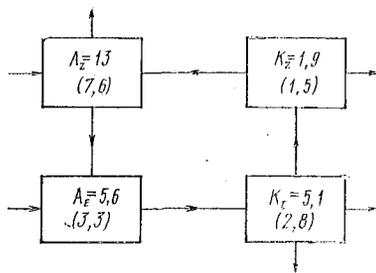


Рис. 3.14. Средние по северному полушарию значения доступной потенциальной энергии (вихревой  $A_E$  и зональной  $A_Z$ ) и кинетической энергии ( $K_E$ ,  $K_Z$ ) в  $10^5$  Дж/м<sup>2</sup>, рассчитанные по фактическим данным в июле. В скобках — рассчитанные по модели ГГО

воспроизводимых моделью, и выделить главные источники ошибок МОЦ.

Более детально можно исследовать переход энергии между пространственными гармониками различных масштабов, имея рассчитанные по результатам моделирования коэффициенты Фурье. Эта информация оказывается полезной не только для контроля МОЦ, но и для анализа процессов, происходящих в реальной атмосфере.

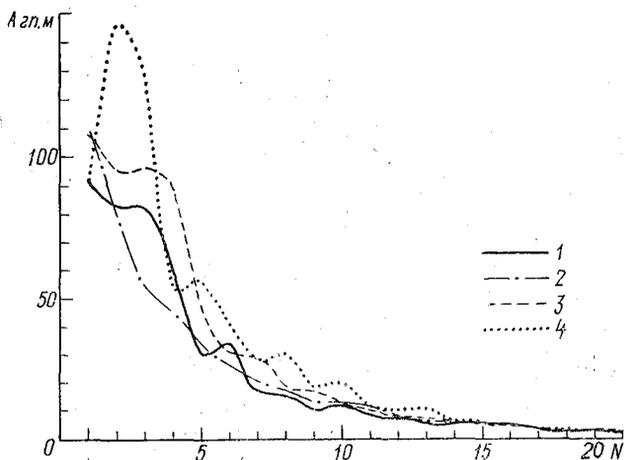


Рис. 3.15. Амплитуды волн геопотенциала  $H_{500}$ , осредненные по широтному поясу  $40-60^\circ$  с. ш. за период 5.03.65—11.03.65

Обозначения: 1 — модуль КУЛА; 2 — модель ЛГГ с шагом 640 км (ЛГГ24); 3 — модель ЛГГ с шагом 320 км (ЛГГ48); 4 — фактические данные

На рис. 3.15 приведены спектры геопотенциала 500 гПа поверхности, полученные по нескольким МОЦ для одного и того же периода в широтном поясе от  $40'$  до  $60'$  северной широты. Путем сравнения этих спектров можно определить качество моделирования процессов разного пространственного масштаба, что имеет большое значение для совершенствования МОЦ.

### 3.6. Применение моделей общей циркуляции атмосферы для прогноза погоды на средние сроки

Уже более двадцати лет производится численное прогнозирование метеорологических полей на сроки до трех суток путем решения уравнений динамики атмосферы на ЭВМ, исходя из факти-

ческих значений метеоэлементов в начальный момент. Цель таких расчетов состоит в том, чтобы как можно точнее и детальнее смоделировать состояние атмосферы на момент прогноза. Однако практика показывает, что несмотря на использование все более детализированных моделей, успешность прогнозов неизбежно падает с увеличением их заблаговременности. Поэтому вполне логично попытаться оценить временные пределы применимости такого подхода. Для этого требуется произвести значительное число среднесрочных прогнозов по МОЦ, поскольку опыт численных краткосрочных прогнозов показывает, что ошибка численного моделирования зависит от исходной метеорологической ситуации. Ограничимся рассмотрением серии из трех десятисуточных прогнозов по трем различным моделям (ЛГГ24, ЛГГ48, КУЛА) для одного и того же начального поля, взятого 5 марта 1965 года за 12 часов. Модели ЛГГ24 и ЛГГ48 отличались только горизонтальным разрешением, которое у второго варианта было вдвое больше (320 км) чем у первого (640 км). Горизонтальное разрешение моделей ЛГГ24 и КУЛА было близким ( $4^\circ$  широты и  $5^\circ$  долготы). Некоторые данные для этих моделей приведены в 3.3 настоящей главы.

Синоптический анализ результатов расчетов по трем моделям показал, что в пределах трех суток они дают хорошее совпадение между собой и с ходом атмосферных процессов. Качество прогноза на более длительный срок резко ухудшается. Рис. 3.16 и 3.17 демонстрируют, как теряется сходство рассчитанных полей на пять и десять суток в разных моделях между собой и с реальной ситуацией. Любопытно, что положение ложбин и гребней на 500 гПа поверхности, спустя десять суток после начала прогноза, по расчету ЛГГ48 можно было бы признать неплохим. Но поскольку прогноз на пять суток по этой модели, как и по другим, неточно описывает реальные условия, то прогноз на десять суток нельзя признать чем-то большим, чем случайное совпадение.

Если рассматривать отдельно процессы, относящиеся к различным волновым диапазонам, то оказывается, что расчеты по МОЦ даже на срок до десяти суток имеют прогностическое значение. На рис. 3.18, 3.19 приведены диаграммы Ховмёллера, характеризующие прогноз положения ложбин и гребней волн с различным диапазоном длин. Обращает на себя внимание тот факт, что расчет фаз планетарных волн на уровне 500 гПа оказался на весь срок прогноза правильным. На уровне 1000 гПа поверхности прогноз фаз планетарных волн менее удачен.

Крупномасштабные движения (волновые числа 4—9) предсказываются хуже и близки по фазе к реальным только до пяти-шести суток. Прогнозы фаз синоптических движений (волновые числа 10—20) сравнительно удачны только до трех суток. В целом анализ диаграмм Ховмёллера показал, что, несмотря на визуальное различие полей, тенденции развития планетарных волн могут быть выявлены на основе расчетов.

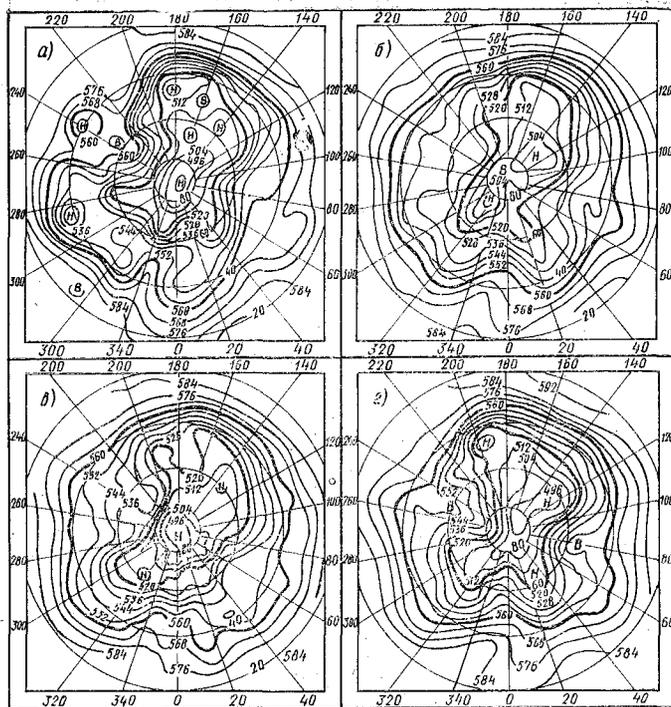


Рис. 3.16. Карты  $H_{500}$  за 00 ч 6.03.65.

Обозначения: а — фактические; б — прогноз по модели КУЛА; в — прогноз по модели ЛГГ24; г — прогноз по модели ЛГГ48

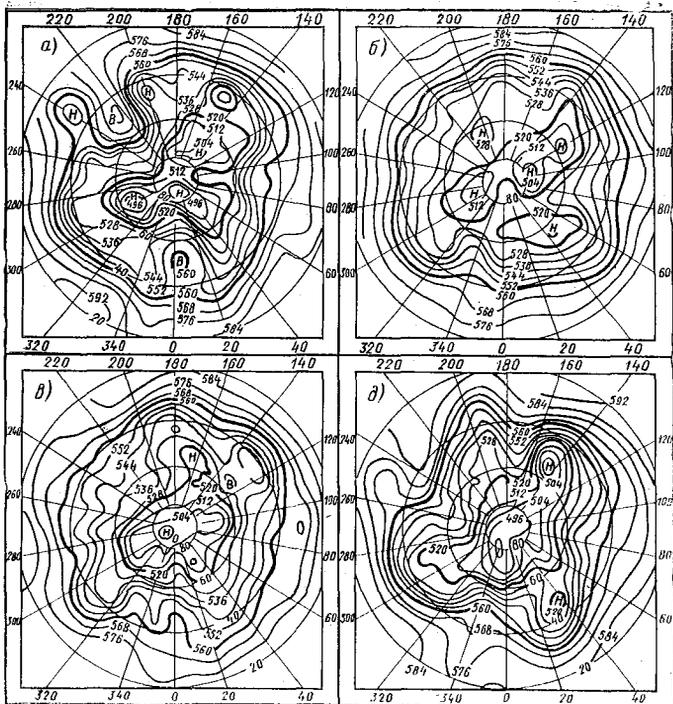


Рис. 3.17. Карты  $H_{500}$  за 00 ч 11.03.65.  
 Обозначения те же, что и на рис. 3.16

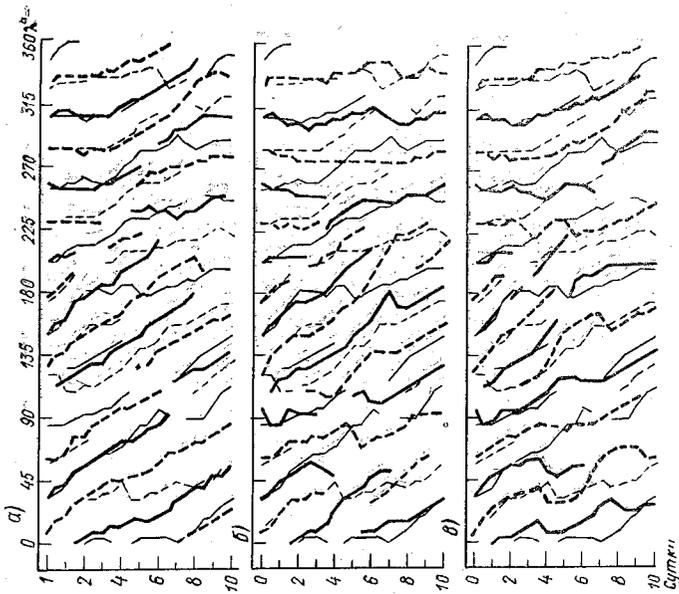


Рис. 3.19. Диаграммы Ховмёлера для: тех же условий, что и на рис. 3.18, но для волновых чисел 4—9

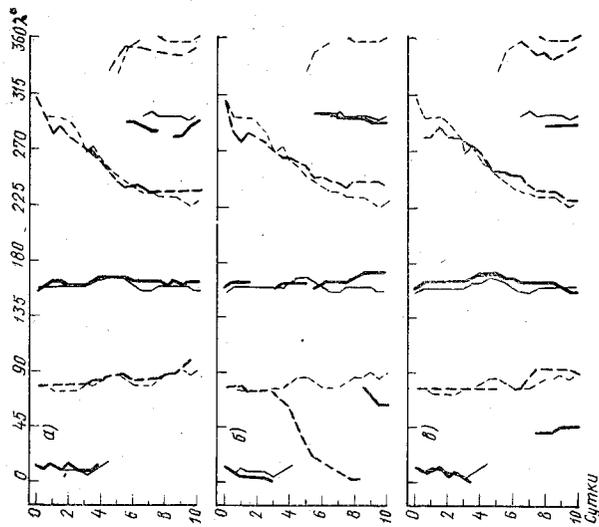


Рис. 3.18. Диаграммы Ховмёлера для ложбин (сплошные линии) и гребней (пунктир) на уровне 500 гПа для  $50^\circ$  с. ш. и волновых чисел 1—3. Тонкие сплошные линии — фактические данные. Обозначения: а — модель КУЛА; б — модель ЛГГ24; в — модель ЛГГ48

Стандартные статистические показатели успешности, рассчитанные для различных масштабов движений, позволяют получить дополнительную информацию о характере ошибок при среднесрочном прогнозе по МОЦ. На рис. 3.20 представлено изменение средней квадратичной ошибки прогноза планетарных составляющих

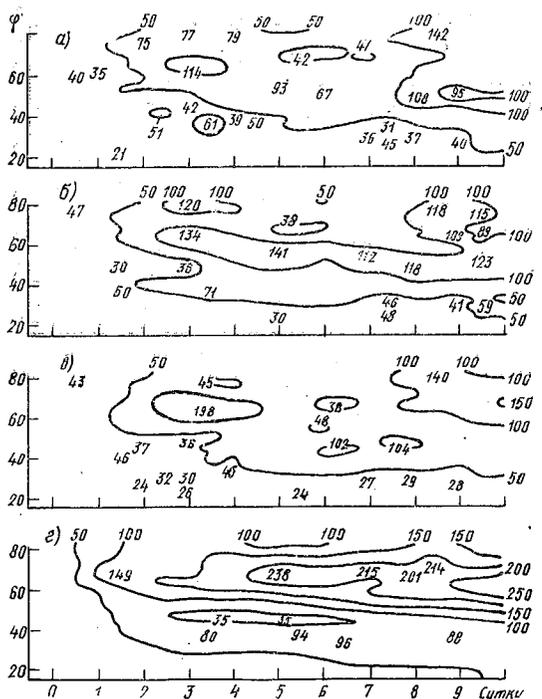


Рис. 3.20. Средняя квадратическая ошибка прогноза геопотенциала (гп. м), осредненная по давлению от 1000 до 200 гПа для волновых чисел 1—3.

Обозначения: а — модель КУЛА; б — модель ЛГГ24; в — модель ЛГГ48; з — инерционный прогноз

полей геопотенциала, осредненных по всей толще тропосферы. Анализ кривых, представленных на рисунке, показывает, что прогнозы по моделям лучше инерционных именно за счет оправданности в течение десяти суток прогноза планетарных волн. Коэффициент корреляции прогностических и фактических полей для синоптических и крупномасштабных движений обращается в нуль примерно к четырем-пяти суткам, а среднее квадратическое отклонение к этому времени почти стабилизируется. Можно сделать вы-

вод, что движения этих масштабов с помощью рассматриваемых моделей на такой срок предсказаны быть не могут.

Среднезональные характеристики спрогнозированы плохо. Оценки успешности их прогноза близки к статическим характеристикам инерционных прогнозов. Как показали исследования, этот факт связан с систематическими ошибками использованных моделей при описании верхней тропосферы. Рост средних квадратических ошибок в интервале планетарных волн происходит с верхних уровней и распространяется на нижние, причем по широте имеется две зоны наибольших ошибок на широтах примерно 40 и 60°. Это означает, что плохо моделируется положение и интенсивность полярного и субтропического фронта. Анализ вертикального распределения коэффициента корреляции для планетарных волн приводит к заключению, что наиболее быстрое падение корреляции рассчитанных и фактических карт имеет место на самых низких уровнях и только к семи-восьми суткам распространяется вверх. В соответствии с интерпретацией статистических характеристик, описанной ранее, можно сделать вывод, что на верхних уровнях быстрее образуется ошибка в расчете амплитуды, и на нижних уровнях — ошибка расчета фазы планетарных волн.

На рис. 3.21 и 3.22 приведены значения интегральной кинетической и доступной потенциальной энергий. Отчетливо видно, что запас этих видов энергии во всех моделях на всех длинах волн преуменьшен. Основная недооценка кинетической энергии приходится на уровень полярного струйного течения, который является в атмосфере зоной концентрации энергии и располагается вблизи 300 гПа поверхности. Ослаблены в моделях и вертикальные контрасты доступной потенциальной энергии. Изменения запаса кинетической энергии во времени прогнозируются точнее, чем изменение запаса доступной потенциальной энергии: наблюдается фиктивный рост зональной потенциальной энергии и уменьшение запаса энергии в диапазоне планетарных волн. Дополнительную информацию при рассмотрении точности расчета дают скорости преобразований кинетической и доступной потенциальной энергии из зональной формы в вихревую. Эти характеристики в моделях воспроизводятся очень плохо. Направления преобразований энергии были предсказаны правильно только на 1—2 суток. Скорости перехода энергий в моделях занижены по сравнению с реальной атмосферой. В диапазоне планетарных и крупномасштабных волн правильным является только знак перехода зональной доступной потенциальной энергии в вихревую. Знак преобразования зональной кинетической энергии в вихревую был правильным для планетарных волн только в течение 4 суток. Таким образом, эксперимент показал, что энергетика МОЦ еще далека от реальной, по-видимому, в силу грубого описания вертикальной структуры атмосферы. Это, безусловно, указывает на необходимость дальнейшего усовершенствования моделей.

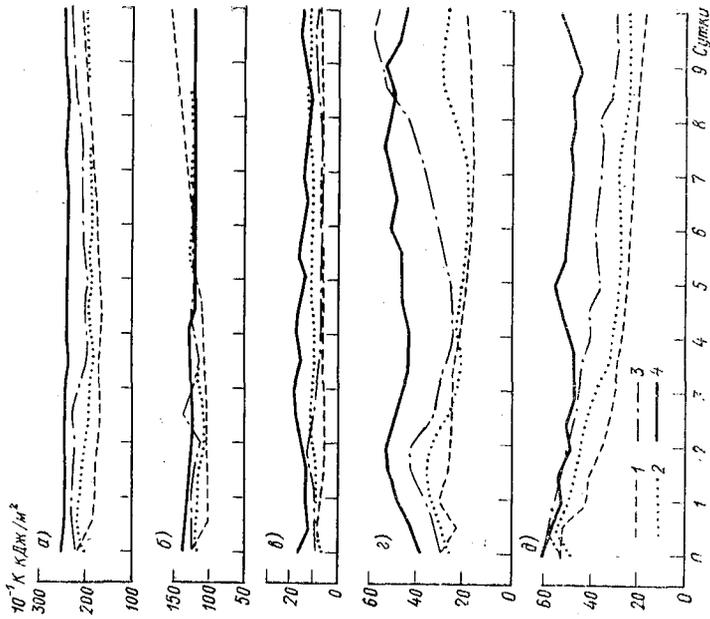


Рис. 3.21. Интегральная кинетическая энергия в широтном поясе от 20 до 80° с. ш. и по давлению от 1000 до 200 гПа. Обозначения: а — для всех волновых чисел; б — для зонального осреднения; в — для волновых чисел 10—20; г — для волновых чисел 4—9; д — для волновых чисел 1—3. 1 — модель КУЛ1А; 2 — модель ЛГГ24; 3 — модель ЛГГ48; 4 — фактические

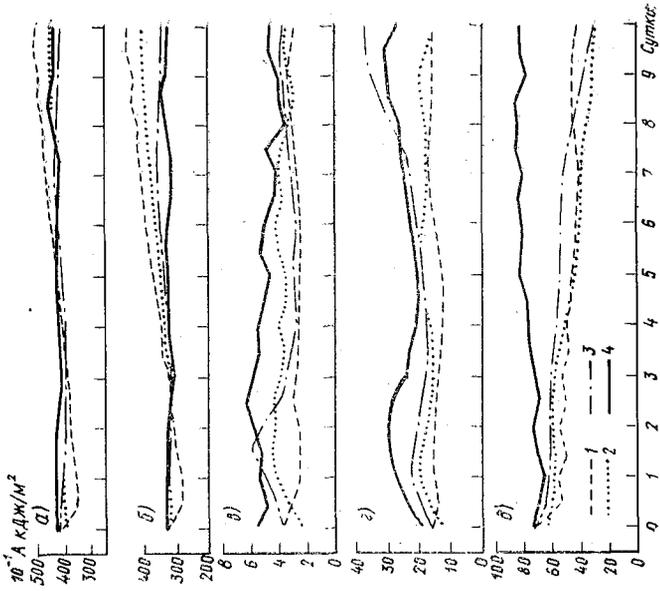


Рис. 3.22. Доступная потенциальная энергия. Осреднение и обозначения на рис. 3.21

Результаты экспериментов, описанных выше, позволяют заключить, что формальное распространение методики численного краткосрочного прогноза за пределы 3—5 суток не эффективно, так как рассчитываемые карты метеорологических полей не обладают необходимой достоверностью. Тем не менее эксперименты по среднесрочным прогнозам с помощью МОЦ выявили возможность прогноза с помощью ЭМВ фаз планетарных волн на срок более десяти суток. Это очень важно для практики составления долгосрочных прогнозов, так как именно планетарные волны являются основными факторами, формирующими макросиноптические процессы, предсказание которых составляет наибольшую трудность для синоптика.

Проблема прогноза планетарных волн в последние годы была многократно исследована с помощью МОЦ разных научных коллективов. При этом выяснилось, что в настоящее время всем прогнозистическим моделям, используемым как в долгосрочном, так и в краткосрочном прогнозе, присущи систематические ошибки. Характеристика этих ошибок дана ниже по докладу Л. Бенгтссона и А. Симмонса, представленному на заседании рабочей группы по численным экспериментам ВМО.

На рис. 3.23 показаны распределения средних за три месяца ошибок прогнозов геопотенциала поверхности 1000 и 500 гПа, полученные в Европейском центре прогнозов на средние сроки. Наличие средних за такой длительный период ошибок свидетельствует о том, что они не определяются погрешностями исходной информации, а зависят от модели, по которой дается прогноз. Картина ошибок на высоте 500 гПа поверхности похожа на распределение ошибок у земли. Из этого следует, что процессы, порождающие эти ошибки, охватывают всю толщу атмосферы. Поле ошибок достаточно крупномасштабно. Это свидетельствует о том, что они происходят из-за погрешностей в описании планетарных волн. Значения геопотенциала систематически занижены над континентами и завышены над океанами, что свидетельствует о присущей модели тенденции сглаживать главные особенности планетарного поля геопотенциала. Детальный анализ показал, что эти ошибки накапливаются в модели, поскольку конечная стадия прогнозов на десять суток характеризуется развитием глубоких крупномасштабных циклонов у восточных границ океанов северного полушария. Это в свою очередь происходит за счет неточного прогноза бароклинных волн небольшого масштаба: в модели они оказываются слишком сильно развитыми и смещаются в основном на восток. При усреднении это приводит к сдвигу в восточном направлении Исландского и Алеутского минимумов.

Проведенные исследования показали, что эти систематические ошибки являются основным видом ошибок численного прогноза. Выяснилось, что аналогичные ошибки возникают и в других прогнозистических моделях. Интересно, что ошибки возросли, когда го-

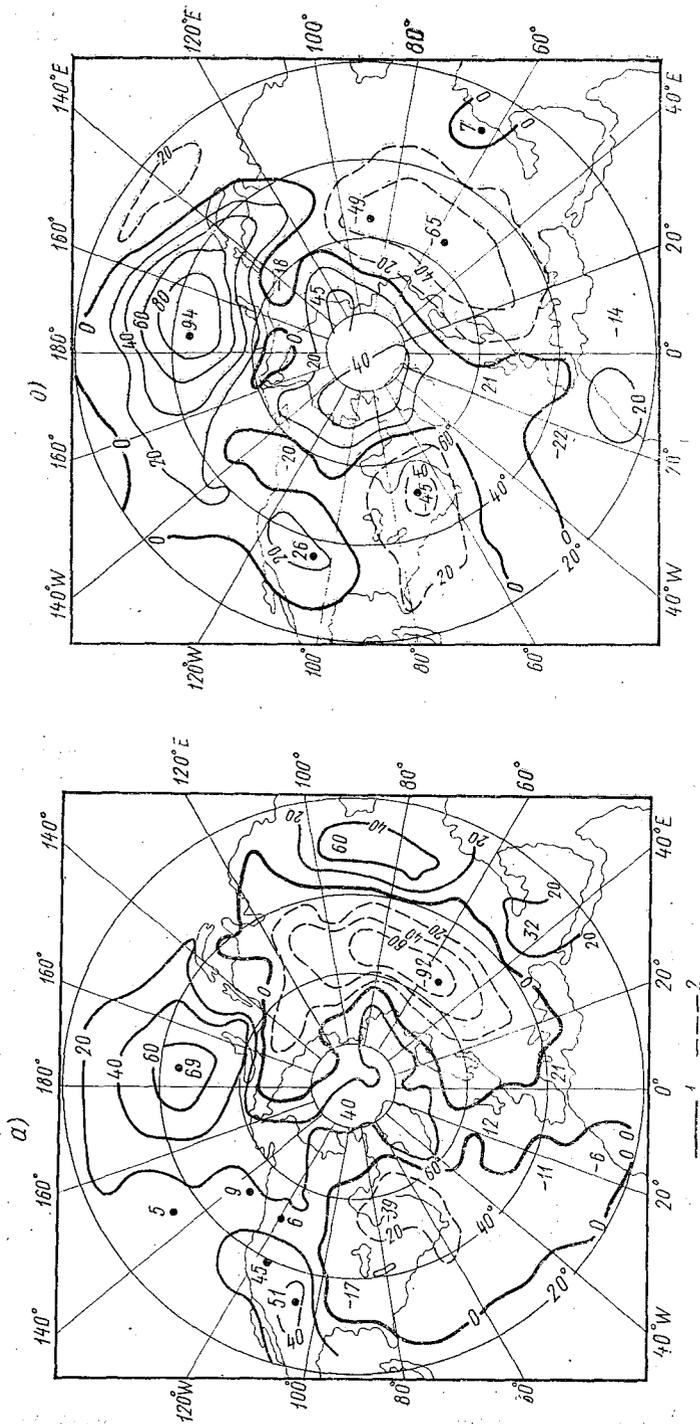


Рис. 3.23. Среднее значение ошибки прогноза геопотенциала (в гп. м) за период 1.01.79—31.03.79. Заблаговременность прогноза 72 часа.  
 Обозначения: а — прогноз  $H_{1000}$ , б — прогноз  $H_{500}$ . Прогнозы рассчитаны в Европейском центре прогнозов погоды на средние сроки

ризонные шаги моделей стали меньше, что должно было улучшить описание процессов более мелкого масштаба. Модели, построенные на основе спектрального метода, так же, как и модели, построенные на основе метода сеток, с увеличением количества гармоник, привлекаемых для описания метеорологических полей, имеют аналогичные ошибки при описании планетарных волн. Устранение этих ошибок позволит, по оценкам специалистов, увеличить заблаговременность численных прогнозов, по крайней мере, на сутки.

### 3.7. Прогноз среднемесячных характеристик атмосферы с помощью моделей общей циркуляции

Численные эксперименты с МОЦ показали, что существует предел предсказуемости развития синоптических процессов. Но вопрос об использовании МОЦ в целях долгосрочного прогноза можно поставить иначе и попытаться выяснить, как зависят усредненные по месячному интервалу значения метеоэлементов от начальных полей. Поскольку в результате усреднения выделяются долгопериодные, а значит более крупномасштабные составляющие атмосферных процессов, то при таком подходе можно надеяться на получение полезной прогностической информации.

Рассмотрим результаты трех случаев прогнозов средних значений для январей 1973, 1974, 1975 годов, рассчитанных по модели ГИКИ. Методика проведения экспериментов состояла в расчете месячной эволюции МОЦ ГИКИ от начальных условий, взятых в 00 часов 1 января соответствующего года. Результаты этих трех расчетов были усреднены по месячному интервалу, после чего их сравнивали с фактическими среднемесячными характеристиками и климатической нормой января. Для сравнения также была вычислена климатическая норма января для трех рассматриваемых лет. При проведении этих экспериментов выяснились два вопроса: во-первых, имеется ли чувствительность среднемесячных величин к изменениям начального поля первого дня; во-вторых, совпадает ли «отклик» модели с фактическими изменениями январских значений за конкретные годы. Выбранные годы существенно различались по средним январским картам метеорологических полей.

В табл. 3.2 приведены значения всех проанализированных видов энергии и скоростей перехода между ними. Соответствие между рассчитанными и фактическими характеристиками для описания климата можно считать вполне удовлетворительным. Однако межгодовая изменчивость описывается хуже. Модель имеет тенденцию преувеличивать вариации  $A_z$ ,  $A_e$  и  $K_e$  и преуменьшать  $K_z$ . Знак аномалий форм энергий также спрогнозирован не точно.

Таблица 3.2

Рассчитанные ( $P$ ) и фактические ( $\Phi$ ) значения различных видов энергии за январь. Единицы энергии:  $10^5$  Дж/м<sup>2</sup>, единицы трансформации энергии Вт/м<sup>2</sup>. Северное полушарие

Виды энергии и их трансформация	1973 г.		1974 г.		1975 г.		Среднее за 1973—1975 гг.		Среднее за 1959—1963 гг. ( $\Phi$ )
	$P$	$\Phi$	$P$	$\Phi$	$P$	$\Phi$	$P$	$\Phi$	
$A_z$	61,4	55,5	58,1	54,5	67,5	55,9	62,3	55,3	55,8
$A_e$	9,0	8,0	8,2	8,8	6,8	7,2	8,0	8,0	10,5
$K_z$	9,9	9,4	9,5	8,7	10,7	7,8	10,0	8,6	8,0
$K_e$	6,4	6,9	6,5	7,6	4,7	6,7	5,8	7,1	9,3
$A_z \rightarrow K_z$	-1,3	5,2	-1,1	6,1	-1,1	0,4	-1,2	3,9	-0,1
$A_z \rightarrow A_e$	3,1	2,2	1,3	3,0	2,3	2,6	2,2	2,6	2,8
$A_e \rightarrow K_e$	2,5	4,0	2,3	4,4	2,5	0,8	2,4	3,1	3,4
$K_e \leftarrow K_z$	0,5	0,3	0,1	0,3	0,5	0,3	0,4	0,3	0,3

Обратимся теперь к анализу статистических оценок успешности прогноза среднемесячных карт высоты 500 гПа поверхности и приземного давления. Оценка эта проведена не только для всей области расчета, но и для ряда подобластей: тропический пояс, ( $22^\circ N - 22^\circ S$ ), тихоокеанское побережье США ( $30 - 54^\circ N$ ,  $75 - 180^\circ W$ ), Северная Америка ( $30 - 70^\circ N$ ,  $75 - 130^\circ W$ ), США, ( $30 - 54^\circ N$ ,  $75 - 130^\circ W$ ), Европа ( $34 - 86^\circ N$ ,  $10^\circ W - 40^\circ E$ ).

В табл. 3.3 приведены средние квадратические ошибки прогноза по модели и для сравнения даны ошибки климатологического ( $K$ ) и инерционного ( $I$ ) прогнозов. Климатологическим прогнозом считается норма января по тем же данным, что и приведенные в табл. 3.3. Инерционным прогнозом считались карты за 1 января, взятые в качестве среднемесячных. Прогноз считается пригодным для использования, если он лучше как инерционного, так и климатического. Проведенные оценки ошибок прогноза показали, что из 21 случая оценки приземного давления успешных 9 (42%), из 18 оценок высоты 500 гПа поверхности успешных 16 (82%), из 9 оценок температуры на 850 гПа поверхности успешных 6 (67%). Таким образом, прогноз среднемесячной высоты 500 гПа поверхности может быть полезным для синоптика.

Средняя квадратическая ошибка рассчитанных ( $P$ ) значений средней за январь  $H_{500}$ , а также климатических ( $K$ ) и инерционных прогнозов ( $I$ ) этой величины

Регион	1973 г.			1974 г.			1975 г.		
	$P$	$K$	$I$	$P$	$K$	$I$	$P$	$K$	$I$
Вся Земля	73	97	89	78	88	93	64	68	56
Северное полушарие	72	94	119	80	108	116	63	82	73
Тропическая зона	36	90	35	15	25	29	19	34	23
Восточная часть Тихого океана	85	118	175	68	103	114	84	123	90
Северная Америка	37	132	146	84	89	197	48	130	107
Европа	40	80	169	98	252	121	113	38	92

Обратимся к оценкам среднезональных характеристик. На рис. 3.24 приведены рассчитанные, наблюдавшиеся и климатические профили зонального ветра, осредненного по всей атмосфере (в модели — до 65 гПа). Видно, что, несмотря на общее сходство, модель не воспроизводит наблюдавшегося зонального потока, который имел ослабленный, сдвинутый к полюсу и относительно широкий максимум. Наблюдавшийся западный поток существенно убывал от 1973 к 1975 году, а у рассчитанного потока максимум усилился в 1975 году. К аналогичным выводам приходят экспериментаторы при анализе вертикального профиля ветра и зонально-осредненной высоты 500 гПа поверхности. Таким образом, наблюдавшиеся аномалии зональной структуры метеоэлементов не зависели от начальных условий.

На рис. 3.25—3.27 представлены результаты прогнозов среднемесячных значений высоты 500 гПа поверхности. Сравнение этих карт с фактическими позволяет обнаружить некоторый фазовый сдвиг длинных волн, рассчитанных на ЭВМ, но общее сходство карт признано удовлетворительным. Серьезными дефектами прогноза являются, например, смещение гребня, фактически находящегося над Аляской к востоку в 1973 году, недооценка усиления западного переноса в 1974 году. Лучшим является прогноз января 1975 года.

Гораздо хуже моделируется приземное давление. По результатам авторских оценок модель ГИКИ имеет тенденцию занижать интенсивность Алеутского и Исландского минимумов и завышать интенсивность антициклонических центров в Тихом океане. Хотя в целом приземное давление по северному полушарию предсказывается плохо, выявлена некоторая успешность в прогнозе межгодовых изменений интенсивности Исландского минимума.

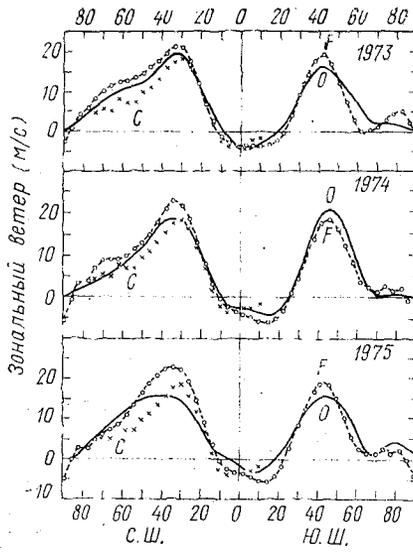


Рис. 3.24. Рассчитанные по модели ГИКИ (F), фактические (O), климатические (C) профили среднемесячной зональной составляющей скорости ветра в январе для трех лет

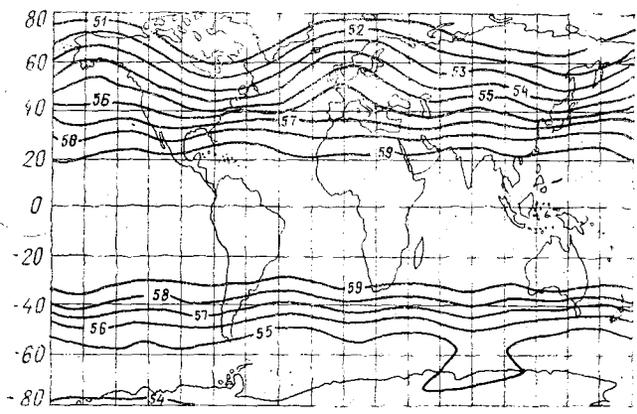


Рис. 3.25. Карта среднемесячных значений  $H_{500}$ , рассчитанная по модели ГИКИ по начальным условиям для января 1973 г.

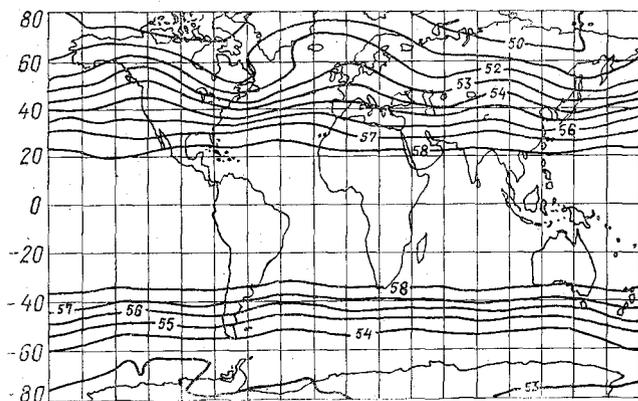


Рис. 3.26. Карта среднемесячных значений  $H_{500}$ , рассчитанная по модели ГИКИ для января 1974 г.

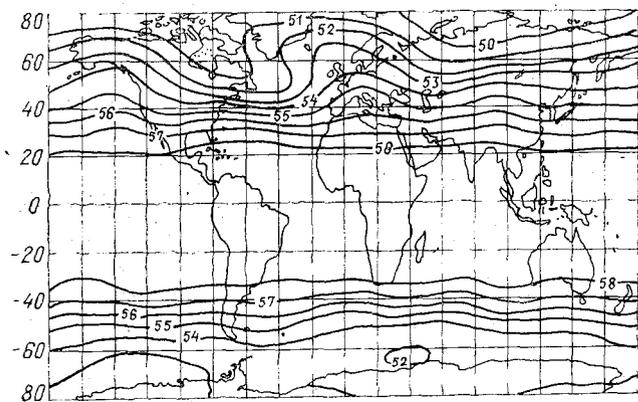


Рис. 3.27. Карта среднемесячных значений  $H_{500}$ , рассчитанная по модели ГИКИ для января 1975 г.

Резюмируя результаты этих экспериментов, можно отметить, что современные модели общей циркуляции атмосферы не дают адекватного представления о фактических изменениях среднемесячных величин и не позволяют сделать выводы о причинах этих изменений. Однако при анализе средних многолетних метеорологических полей от месяца к месяцу, как показали исследования Манабе и Хана, проведенные с помощью модели ЛГГ, положение улучшается. Результаты расчетов средних квадратичных отклонений полей температуры и давления вполне удовлетворительно согласуются с климатическими картами. Это значит, что межгодовая изменчивость метеорологических полей по величине воспроизводится верно. Тот факт, что модели не позволяют найти зависимость среднемесячных значений от начальных полей, может быть объяснен с учетом тенденций МОЦ генерировать колебания с более короткими периодами, чем свойственны реальной атмосфере, и тем самым несколько занижать инерционность атмосферных процессов. Таким образом, важный для долгосрочного прогноза вклад долгопериодных процессов в изменчивость метеорологических полей пока еще воспроизводится неточно.

### **3.8. Реакция моделей общей циркуляции атмосферы на аномалии температуры поверхности океана**

Важным элементом исследования применимости МОЦ для долгосрочного прогноза погоды является оценка реакции модели на заданную аномалию температуры поверхности океана. Уже в конце прошлого века были высказаны гипотезы о влиянии температуры поверхности океана на долгопериодные изменения состояния атмосферы, однако статистические связи характеристик атмосферы и океана оказались неустойчивыми. Исследования теплового взаимодействия атмосферы и океана широко развернуты в настоящее время, но однозначно судить о существовании прогностически значимых связей пока еще нельзя. Этому препятствуют: недостаток материалов наблюдений, которые все еще носят локальный характер, огромная сложность системы атмосфера-океан, сложность анализа моделей. Поэтому большое значение в настоящее время придается исследованиям реакции на аномалии температуры воды у различных МОЦ.

Идеально было бы использовать для этой цели модели с двухсторонними связями, в которых не только атмосфера менялась бы под влиянием температуры воды, но и последняя реагировала бы на атмосферные возмущения. Только в этом случае можно было бы понять, почему аномалии температуры воды оказываются хотя и небольшими по величине (в основном 1—2°С), но такими обширными и «долгоживущими». Однако таких моделей, в которых одновременно работали бы и атмосфера, и океан, еще очень мало и они

требуют слишком больших затрат времени на ЭВМ, чтобы можно было изучить так же полно, как модели общей циркуляции атмосферы, применительно к воспроизведению реальных изменений системы от суток к суткам. Поэтому исследование связи атмосферы с океаном производится пока на МОЦ с односторонним взаимодействием, в которых температура поверхности воды задается.

Можно ожидать, что атмосфера будет «приспосабливаться» к изменению температуры поверхности океана. Этот процесс в настоящее время исследован достаточно полно с помощью различных моделей. Отметим некоторые его особенности, выявленные на модели ГГО. Методика моделирования состояла в том, что рассчитанный на модели климат января был модифицирован путем введения в северной части Атлантического океана положительной аномалии от 1 до 3°, которая считалась неизменной в течение месяца. Возникшие различия были подробно изучены.

Изменения, вызванные введением аномалии температуры повлекли за собой в первую очередь усиление турбулентного потока тепла в атмосферу и испарения с океана, причем эти изменения произошли не только над аномалией, но и на большей части северного полушария. Их можно объяснить существованием в северном полушарии ряда зон активного термического взаимодействия между атмосферой и подстилающей поверхностью. Эти зоны возникают за счет положительной обратной связи между аномалией температуры и неустойчивостью стратификации пограничного слоя атмосферы. При неустойчивой стратификации с увеличением температуры подстилающей поверхности резко усиливаются потоки тепла в атмосферу, а в зонах с устойчивой стратификацией теплообмен практически не изменяется. Эксперимент показал, что над районом введения аномалии при увеличении потока тепла в атмосфере формируется циклонический вихрь, который ведет к охлаждению слоев атмосферы, а значит усилению неустойчивости и дальнейшему росту потока тепла. Интенсификация циклонической деятельности приводит к росту потока тепла и усилению меридиональной циркуляции над северным полушарием. Последняя усиливает деятельность «очагов» теплового взаимодействия и приводит к дополнительному притоку тепла в атмосферу в других активных зонах северного полушария.

В табл. 3.4 показано, что наибольшее воздействие аномалия температуры воды, внесенная в Атлантике, оказывает на планетарную волну с номером 2, которая резко возрастает по амплитуде. Кроме того, растет бароклинная неустойчивость, связанная с крупномасштабными волнами с номерами 5 и 6. Амплитуды этих волн возрастают почти на 80% их величины в эталонном эксперименте. Это показывает, что аномалия температуры поверхности океана может возбуждать меридиональные формы циркуляции в атмосфере.

Таблица 3.4

Зависимость квадрата амплитуды  $H_{500}$  от волнового числа для зоны 50—60° с. ш. по экспериментам с моделью ГГО

Вид эксперимента	Волновое число									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Без аномалии температуры океана	37,5	50,6	21,0	18,6	14,7	11,0	9,0	4,5	2,4	5,3
С аномалией температуры океана	19,8	88,9	11,3	18,0	25,7	20,4	9,7	5,0	3,7	6,4

В соответствии с изменениями циркуляционного режима изменился температурный режим и режим осадков. Увеличение выноса тепла и влаги из Атлантики повысило температуру и увеличило осадки в Западной Европе и над ЕТС. Но одновременно понизилась температура и уменьшились осадки над Северо-Западом СССР и Скандинавией, что связано с усилением горизонтального переноса воздушных масс с внутренних континентов, которое возникло при усилении меридиональности процессов. Количественные изменения этих характеристик приведены в табл. 3.5.

Таблица 3.5

Средние разности температуры воздуха (°С) на четырех уровнях и интенсивности осадков ( $J$ ), см/сут, полученные по данным экспериментов с моделью ГГО для трех регионов в среднем за месяц

Изменения величин	Северо-Запад СССР и Скандинавия	Западная Европа	Центральные и южные районы ЕТС
$T_{150}$ (°С)	-0,4	-0,2	-0,1
$T_{500}$ (°С)	-2,4	1,2	0,4
$T_{850}$ (°С)	-2,0	4,9	1,4
$T_{1000}$ (°С)	-2,9	5,2	1,6
$J$ (см/сут)	-0,08	0,13	0,03

Интересен тот факт, что аналогичные эксперименты, проведенные с моделью НЦАИ по оценке реакции модели на аномалию, внесенную в Тихом океане, привели к близким по физическому смыслу выводам, но к значительно менее интенсивным количественным изменениям. Над положительной аномалией также формиро-

вались циклонические вихри и усиливался теплообмен, но величина отклонений была гораздо меньше. К аналогичному выводу можно прийти и по анализу экспериментов с моделью ГИКИ, описанных в предыдущем параграфе. Авторы этих экспериментов, кроме попытки объяснить различие в среднемесячных значениях трех январей за счет различия в начальных условиях, попытались выяснить, не приводит ли учет реальной аномалии температуры поверхности воды к уточнению прогноза. Оказалось, что учет реального поля температуры воды не привел к систематическому улучшению прогноза среднемесячных характеристик. Более того, реакция модели ГИКИ на различие между климатическим и реальным полями температуры поверхности воды для января оказалась вообще очень слабой. Таким образом, изучение вопроса о воздействии температуры океана на МОЦ требует корректного анализа статистической значимости результатов.

Поясним суть дела. Если процесс численного интегрирования МОЦ прервать в определенный момент и в рассчитанное поле температуры поверхности океана ввести аномалию, то, безусловно, расчет с аномалией будет отличаться от расчета без нее. Но если аномалию не вводить, а «возмутить» начальное поле или просто считать началом эксперимента другой момент, то средние значения в таких экспериментах также будут отличаться от эталонного. Поэтому требуется оценить, действительно ли изменения состояния модели вызваны введением аномалий. Если учесть, что природные аномалии температуры поверхности океана весьма невелики, то ясно, как трудна поставленная задача.

Рассмотрим методику анализа статистической значимости результатов расчета реакции модели на аномалии температуры поверхности воды, разработанную для модели НЦАИ. Анализ «отклика» атмосферы проводился для температуры воздуха на высоте 1,5 км, поскольку этот уровень наиболее близок в модели к океану и можно ждать здесь наиболее ярко выраженную реакцию. По результатам пяти расчетов январей по модели, которые запомнились ЭВМ, были найдены оценки статистических характеристик: средней температуры на избранной высоте и ее среднеквадратического отклонения. После нахождения модельных оценок статистических характеристик были проведены четыре эксперимента с изменением температуры воды. Первый, контрольный, с климатической нормой температуры воды, второй, с заданными реальными по величине (до  $+4^{\circ}\text{C}$ ) аномалиями температуры в северной части Тихого океана, в третьем эксперименте аномалии были увеличены в три раза, т. е. стали нереально большими, в четвертом эксперименте в тех же областях были введены случайные отклонения температуры от нормы со значением  $\pm 1^{\circ}\text{C}$ . Результаты расчетов разностей каждого из полученных полей и поля контрольного эксперимента приведены на рис. 3.28. Как видно, «отклик» атмосферы наиболее силен на нереально большую аномалию, а «отклик» на реальную и случайную аномалии примерно одинаков.

Для оценки статистической значимости результата была применена методика анализа различий между средними значениями. Выдвигается «нулевая» гипотеза, что внесение аномалий не приводит к статистически значимому «отклику» в температуре на

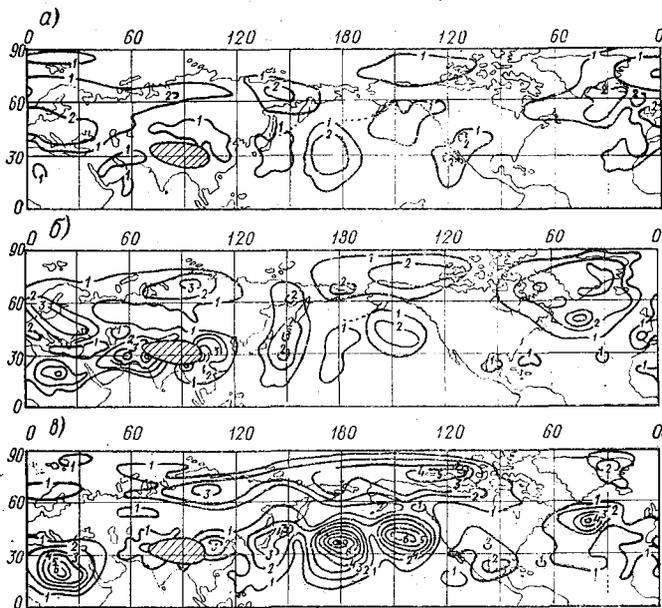


Рис. 3.28. Осредненные за 30 суток значения  $\gamma$  для температуры воздуха на высоте 1,5 км между «случайным» и контрольными экспериментами (а), между «аномальным» и контрольными экспериментами (б), между «сверханомальным» и контрольными экспериментами (в). Эксперименты по изучению «отклика» МОЦ на аномалию температуры поверхности воды проведены по модели НЦАИ.

уровне 1,5 км, а значит и в целом в модели. Для проверки этой гипотезы введем случайную величину

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_{(\bar{x}-\bar{y})}}, \quad (3.8.1)$$

в которой  $(\bar{x} - \bar{y})$  — разность между среднемесячными значениями в какой-либо точке, полученными в экспериментах с аномалиями ( $\bar{x}$ ) и без аномалий ( $\bar{y}$ ). Эта величина должна, если она действительно случайна, иметь нулевое математическое ожидание и подчиняться распределению Стьюдента. Поскольку  $(\bar{x} - \bar{y})$  оцени-

валяется по одной реализации, а  $\sigma_{(\bar{x}-\bar{y})}$  по пяти, то распределение Стьюдента должно иметь четыре стенки свободы, а значит по таблице этого распределения можно оценить вероятность каждого конкретного значения. Методика оценки значимости отклика такова:

а) по картам разностей  $\bar{x}-\bar{y}$ , путем деления этих разностей в каждой точке на среднее квадратическое отклонение  $\sigma_{(\bar{x}-\bar{y})}$ , строят карту величины  $r$ , определяемой по формуле

$$r = \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sigma_{(\bar{x}-\bar{y})}}; \quad (3.8.2)$$

б) поскольку и  $\bar{x}$ , и  $\bar{y}$  оцениваются по одной реализации, то выполняется зависимость

$$r = t \sqrt{2}, \quad (3.8.3)$$

поэтому с помощью карты величины  $r$  и таблицы распределения Стьюдента можно определить вероятность данного  $r$  при условии выполнимости «нулевой» гипотезы;

в) оценивая уровень значимости нулевой гипотезы по табл. 3.6, можно по значениям  $r$  определить, является ли в данной точке «отклик» таким же, как при случайном процессе, или для случайного процесса он маловероятен, а значит является истинной реакцией модели на аномалию.

В соответствии с табл. 3.6, чтобы «отклик» был не случаен, в девяти случаях из десяти, необходимо, чтобы  $r$  было больше 3. На основе рис. 3.29, показывающего величины  $r$  для рассматриваемого эксперимента, можно сделать вывод, что зоны значимого отклика хорошо выражены только в случае сверхбольших аномалий. При реальных величинах аномалий зоны «отклика» не очень хорошо отличимы от чисто случайных. Однако они имеются и сосредоточены примерно в тех же зонах, что и в экспериментах с моделью ГГО.

Таблица 3.6

Уровень значимости нулевой гипотезы, %

$r = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_{(\bar{x}-\bar{y})}} \sqrt{2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Уровень значимости	51,69	22,86	10,02	4,69	2,38	1,31	0,77	0,47	0,31

К сожалению, в настоящее время еще не накоплено достаточного материала для достоверного ответа на вопрос, как передается в атмосферу воздействие аномалий температуры поверхности воды.

Результаты немногочисленных расчетов по МОЦ пока еще не могут быть использованы для прогностических оценок, и, скорее, подтверждают известные синоптические факты, чем дают новые сведения. Но, несомненно, дальнейшее развитие численного моделирования приведет к решению этого важнейшего вопроса.

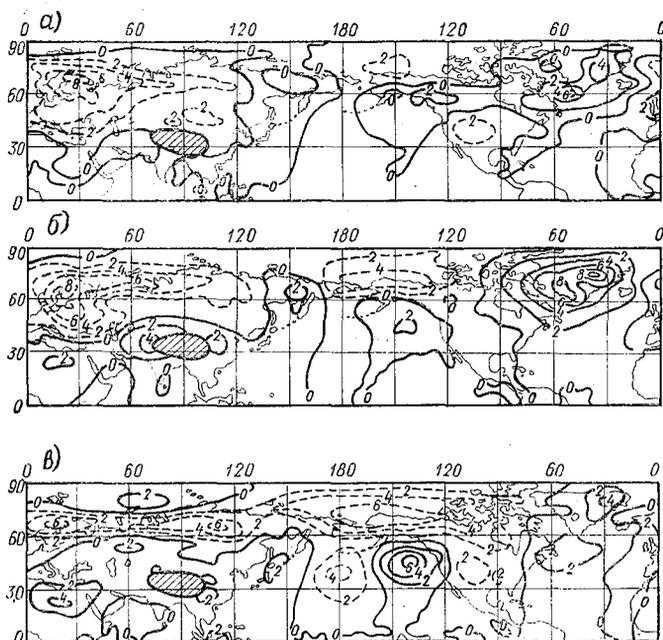


Рис. 3.29. Критерий для оценки значимости «отклика» модели НЦАИ на аномалию, внесенную в значение температуры поверхности океана.

Обозначения (а, б, в) раскрыты на рис. 3.28

## Глава 4. ПРЕДСКАЗУЕМОСТЬ АТМОСФЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ

### 4.1. Понятие о пределе предсказуемости атмосферных процессов

В предыдущей главе было показано, что при численном прогнозе атмосферных процессов на срок 10—15 суток, начиная с некоторого момента, наблюдается потеря сходства между рассчитанными и фактическими полями. В сложившейся синоптической практике методы детального расчета атмосферных процессов ис-

пользуются для составления краткосрочных прогнозов, а при разработке долгосрочных прогнозов разной заблаговременности оценивают только усредненные по площади и по периоду аномалии состояния атмосферы. Изучение вопроса о том, начиная с какого момента детализированный расчет синоптического положения становится бесполезным и в какой форме следует давать численный прогноз после этого момента, является очень важным для обслуживания народного хозяйства.

При решении этого вопроса требуется сформулировать критерий качества прогноза. Для выбора такого критерия нам нужно иметь меру сходства двух состояний атмосферы, а также определить метод прогноза, который будет наиболее простым, но все же реально описывающим климатические особенности атмосферы. В качестве такого «квазипрогноза» мы можем выбрать метод случайной выборки из архива состояний атмосферы в некотором месяце. Естественной мерой близости состояния к климатической норме является среднеквадратическое отклонение. Если в качестве характеристики состояния атмосферы использовать, например, какое-либо поле  $f(\theta, \lambda)$ , имеющее климатическую норму  $\bar{f}$  и среднеквадратическое отклонение  $\sigma$ , то сходство двух случайно выбранных из архива экземпляров этого поля  $f_1$  и  $f_2$  можно охарактеризовать их среднеквадратической разностью  $d$ :

$$d = \sqrt{(f_1 - f_2)^2}. \quad (4.1.1)$$

В силу случайности выбора  $f_1$  и  $f_2$ , а значит их некоррелированности  $d = \sigma\sqrt{2}$ . Действительно, пусть

$$f_1 = \bar{f} + \xi_1, \quad (4.1.2)$$

$$f_2 = \bar{f} + \xi_2, \quad (4.1.3)$$

где  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — случайные отклонения от нормы  $\bar{f}$ , имеющие среднеквадратическое значение  $\sigma$ . Тогда

$$d = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2} = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 - 2\xi_1\xi_2}. \quad (4.1.4)$$

Если  $f_1$  и  $f_2$  выбраны не случайно, а, например, поле  $f_2$  является результатом прогноза из начального состояния  $f_1$  по какой-либо модели, то произведение  $\xi_1\xi_2$  уже не будет равно нулю, а значит величина  $d$  в этом случае будет меньше, чем  $\sigma\sqrt{2}$ . Согласно этим рассуждениям отношение величины  $d_p$ , полученной по формуле (4.1.1) для спрогнозированного и начального полей, к величине  $d$ , полученной для двух случайных некоррелированных полей, следует признать критерием предсказуемости. Срок, в течение которого выполняется неравенство

$$d_p < d, \quad (4.1.5)$$

называется пределом предсказуемости, поскольку после достижения этого срока результат прогноза по модели также далек от исходного поля, как и любое другое поле, взятое наугад из метеорологического архива, по которому получены климатические характеристики. Задача определения предела предсказуемости в такой форме сформулирована А. С. Мониным.

Если предел предсказуемости существует, то после этого срока состояние атмосферы уже не зависит от исходного. Поэтому вопросы о причинах наличия предела предсказуемости и о его величине являются для метеорологии принципиальными. Не менее важно изучать зависимость предела предсказуемости от модели, по которой производится прогноз. В предыдущей главе были указаны источники неопределенности методов численного прогноза погоды (неполнота исходных данных, недостаточная точность описания существующими моделями реальной атмосферы, приближенный характер методов численной реализации моделей на ЭВМ). Поэтому возникает вопрос: не может ли предел предсказуемости неограниченно возрастать по мере уточнения моделей, используемых для описания атмосферы.

Принципиально наличие предела предсказуемости неизбежно. В самом деле, при выводе уравнений динамики атмосферы используется предположение о непрерывном существовании «жидкой частицы». Но в атмосфере происходит постоянное перемешивание, поэтому время существования «жидкой частицы» ограничено процессами диффузии. Предсказуемость должна быть полностью потеряна, когда перемешиваются все «жидкие частицы», которые можно выделить в начальный момент. Поскольку коэффициент диффузии для «жидких частиц» атмосферы может быть оценен очень приближенно, то и оценку периода предсказуемости, полученную на основе этих соображений Дж. Робинсоном и равную для пространственных масштабов 1000 км примерно пяти суткам, также следует считать только ориентировочной. Но сам факт, что одна из основных концепций численного прогноза — использование уравнений гидромеханики — ставит ограничения на период предсказуемости, указывает на принципиальную важность этого понятия.

В настоящее время получены важные результаты и в области исследования скорости роста начальных ошибок при использовании моделей численного прогноза. Е. А. Новикову удалось показать, что даже для простейшей баротропной модели атмосферы, описываемой уравнением вихря, если в начальное поле функции тока внести случайную ошибку, то примерно через две недели ошибка точного решения этого уравнения будет такой же, как и у случайного прогноза. В. И. Татарский, используя уравнения динамики атмосферы, получил уравнение для функции распределения вероятностей ошибки прогноза и обнаружил, что случайная ошибка трансформируется в систематическую.

Таким образом, при изучении проблемы предсказуемости получены результаты, подтверждающие наличие предела предсказуемости, и сделаны оценки его величины для простейших случаев. Следующим шагом в этом направлении является исследование причин потери предсказуемости, оценки ее предела для атмосферы и моделей и определение стратегии прогноза на сроки, превышающие предел предсказуемости.

#### 4.2. Предсказуемость малокомпонентных динамических систем

Основным объектом исследования будут системы обыкновенных дифференциальных уравнений типа

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (4.2.1)$$
$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Системы уравнений такого вида называются автономными динамическими системами. Термин «динамическая система» проще всего интерпретировать в трехмерном случае ( $n = 3$ ), если придавать переменным  $x_i$  смысл пространственных координат материальной точки. Свойством автономности динамическая система обладает, если, как в случае (4.2.1), функции  $F_i(x)$  не зависят явно от времени.

Примером динамических систем являются рассмотренные в главе 2 системы обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающие при решении уравнений гидродинамики атмосферы с использованием рядов Фурье по сферическим функциям, например, система (2.3.10). Такие динамические системы имеют некоторые дополнительные свойства. Во-первых, функции  $F_i$  имеют для них специфический вид многочленов второй системы относительно переменных  $x_i$ . Принято говорить, что такие системы являются квадратично нелинейными. Во-вторых, для динамических систем, полученных из уравнений гидродинамики, выполняются законы сохранения энергии, а в некоторых случаях и еще дополнительных положительно определенных функционалов. При наличии этих дополнительных свойств системы типа (4.2.1) принято называть системами гидродинамического типа.

В настоящее время динамические системы и особенно системы гидродинамического типа интенсивно изучаются в нашей стране и за рубежом. Обнаружены важные свойства систем гидродинамического типа, позволяющие глубже проникнуть в проблему турбулентности. Большой вклад в изучение этой интереснейшей проблемы внесли советские специалисты по физике атмосферы под руководством А. М. Обухова. Не углубляясь в подробности этой новой ветви теоретической метеорологии, остановимся на примерах, которые позволят уяснить, только ли из-за ошибок начальной

информации и погрешностей моделей возникают пределы предсказуемости.

Сначала рассмотрим вопрос о влиянии неточности начальной информации на поведение линейной динамической системы. Рассмотрим свободные гармонические колебания материальной точки без трения, описываемые динамической системой

$$\frac{dx}{dt} = \alpha y, \quad (4.2.2)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha(x - x_0) \quad (4.2.3)$$

где  $\alpha$  и  $x_0$  — постоянные,  $\alpha > 0$ .

Решение этой системы можно представить в форме

$$x = x_0 + A \sin(\alpha t + \varphi), \quad (4.2.4)$$

где  $A$  — амплитуда колебаний и  $\varphi$  — фаза определяются по начальным условиям. Предположим, что начальные условия и коэффициенты известны с ошибкой, тогда вместо (4.2.4) мы получим

$$x' = x'_0 + A' \sin(\alpha t + \varphi), \quad (4.2.5)$$

где величины со штрихом обозначают неточно измеренные параметры.

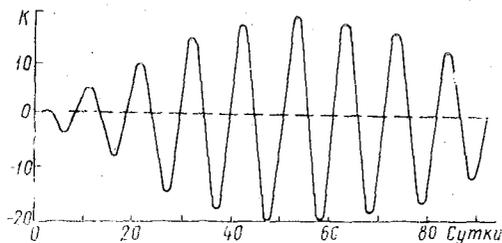


Рис. 4.1. Изменение со временем ошибки прогноза по модели, описываемой уравнением (4.2.4)

Предположим, что ошибки в определении фазы нет. Вычитая (4.2.4) из (4.2.5), можно получить уравнение эволюции ошибки решения. Для примера на рис. 4.1 изображен график изменения ошибки  $(x' - x)$  во времени, полученный при следующих параметрах  $x'_0 - x_0 = -0,5$ ,  $A = 11$ ,  $A' = 10$ ,  $\varphi = 0$ , истинный период колебаний  $\tau = 10$  суткам, а по нему можно получить частоту  $\alpha = 2\pi/\tau$ ,  $\tau' = 11$  суткам.

Из рассмотрения этого графика видно, что величина ошибки изменяется периодически, принимая даже и нулевые значения. Заранее определить моменты исчезновения ошибки нельзя, так как они

зависят от величины начальной ошибки. Начиная с некоторого момента, ошибка решения превышает амплитуду самого точного решения, а значит процесс становится совершенно непредсказуемым.

Аналогичный анализ эволюции ошибок можно произвести и для значительно более сложных линейных динамических систем с переменными параметрами. Главное отличительное свойство линейных систем заключается в том, что при уменьшении ошибок начальных данных и уточнении параметров моделей можно добиться предсказуемости результата на большой срок.

Иначе обстоит дело в случае нелинейных динамических систем, когда может возникать конечная ошибка в прогнозе состояния системы даже при бесконечно малой начальной ошибке. В качестве примера рассмотрим простую одномерную нелинейную динамическую систему вида

$$\frac{dx}{dt} = -(x-a)(x-b)(x-c), \quad (4.2.6)$$

$$a < b < c.$$

Исследование этой динамической системы можно произвести с помощью так называемого «фазового портрета» системы. Напомним, что в теоретической механике фазовым пространством называется множество значений, которые могут принимать обобщенные

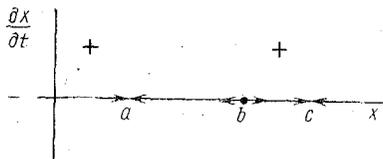


Рис. 4.2. Фазовый портрет однокомпонентной динамической системы (4.2.6)

координаты динамической системы, если точки, являющиеся элементами этого множества, образуют евклидово пространство. Например, для динамической системы (4.2.6) фазовым пространством является ось абсцисс, для двухкомпонентной системы (4.2.2) — (4.2.3) фазовым пространством будет плоскость, для трехкомпонентной системы —

трехмерное пространство, а для  $n$ -мерной системы —  $n$ -мерное евклидово пространство.

«Фазовым портретом» динамической системы является система особых точек, линий, плоскостей или гиперплоскостей, которые в фазовом пространстве образуют стационарные состояния динамических систем. В частности, фазовый портрет линейной системы (4.2.2) — (4.2.3) состоит из одной точки на плоскости  $(x, y)$  с координатами  $(x_0, 0)$ , так как именно эта точка является стационарным состоянием системы, поскольку для нее производные от координат равны нулю.

Фазовый портрет динамической системы (4.2.6) изображен на рис. 4.2. Он состоит из трех точек, расположенных в порядке возрастания их координат. Эти точки являются согласно виду правой

части системы (4.2.6) ее стационарными состояниями, или положениями ее равновесия. Если проанализировать знаки правой части (4.2.6) в четырех различных интервалах, на которые разбито фазовое пространство этой системы положениями равновесия, то легко видеть, что выполняются неравенства

$$\frac{dx}{dt} < 0, \text{ при } x \in ]a, b[ \cup ]c, \infty[, \quad (4.2.7)$$

$$\frac{dx}{dt} > 0, \text{ при } x \in ]-\infty, a[ \cup ]b, c[. \quad (4.2.8)$$

В соответствии с этими неравенствами, если начальная координата состояния системы удовлетворяет условию

$$x_0 \in ]-\infty, b[, \quad (4.2.9)$$

то изменение состояния системы происходит так, что она стремится к состоянию равновесия  $x = a$ , а если

$$x_0 \in ]b, \infty[, \quad (4.2.10)$$

то система будет стремиться к состоянию равновесия  $x = c$ .

Отсюда следует, что состояние равновесия  $x = b$  никогда не может быть достигнуто системой, так как даже при очень близких к нему начальных условиях система будет стремиться к другим состояниям равновесия. Состояния равновесия  $x = a$  и  $x = c$  будут таким образом устойчивыми, а состояние  $x = b$  — неустойчивым.

Именно наличие неустойчивого состояния равновесия делает поведение простой детерминированной системы (4.2.6) в некоторых случаях принципиально непредсказуемым. Действительно, пусть в начальный момент система (4.2.6) находится вблизи неустойчивого состояния равновесия  $x = b$ . За счет случайных погрешностей наблюдения мы вместо  $x_0 = b$  можем получить  $x'_0 = b + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — погрешность. Так как эта погрешность случайна, то нельзя сказать, в каком в действительности промежутке находится наше начальное состояние: в промежутке  $]a, b[$  или в промежутке  $]b, c[$ . Не зная ответа на этот вопрос, мы можем ошибиться в прогнозе окончательного состояния, выбрав не тот равновесный режим. Ясно, что эти рассуждения справедливы не для всех начальных состояний системы, а только для тех, которые близки к состоянию неустойчивого равновесия. Это означает, что предсказуемость нелинейных систем зависит не только от начальных ошибок или ошибок в определении параметров системы, но и от самого начального состояния системы: при различных начальных состояниях система может иметь различный период предсказуемости. Рассмотрим на конкретном примере, как проявляется неустойчи-

вость детерминированных нелинейных систем. Исследуем двухкомпонентную систему вида.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} xy - (1 + \beta)x, \quad (4.2.11)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2} x^2 - (1 + \beta)y + \beta\eta. \quad (4.2.12)$$

Эта система является следствием разложения в ряд Фурье решения нелинейного уравнения адвекции вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -u + \beta(v - u), \quad (4.2.13)$$

в котором  $u$  — скорость течения, а  $\beta, v$  — постоянные величины. Первый член в правой части (4.2.13) моделирует диссипацию импульса, а второй член представляет собой некоторую вынуждающую силу. Область определения решения — промежуток  $[0, \pi]$ .

Переход от (4.2.13) к (4.2.11) — (4.2.12) может быть сделан аналогично тому, как это делалось в главе 2, если искать периодическое решение в виде ряда Фурье и ограничиться двумя первыми компонентами. Квадратичные члены в правых частях (4.2.11) являются следствием наличия в левой части (4.2.13) нелинейного адвективного члена. Фазовым пространством для этой динамической системы является плоскость  $(x, y)$ . Стационарные состояния можно найти из (4.2.11) — (4.2.12), считая, что левые части этих уравнений равны нулю. Оказывается, что при выполнении соотношения

$$\eta > \frac{2(1 + \beta)^2}{\beta}, \quad (4.2.14)$$

система имеет три стационарных точки

$$\left(0, \frac{\beta\eta}{1 + \beta}\right), \left(\pm \sqrt{2\beta\eta - 4(1 + \beta)^2}, 2(1 + \beta)\right).$$

Для определения устойчивости каждого из этих состояний линеаризуем исследуемую систему относительно некоторой стационарной точки с координатами  $(x_s, y_s)$ . Тогда получим для малых отклонений  $x'$  и  $y'$  от стационарного состояния

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{1}{2} y_s x' + \frac{1}{2} x_s y' - (1 + \beta)x', \quad (4.2.15)$$

$$\frac{dy'}{dt} = -x_s x' - (1 + \beta)y', \quad (4.2.16)$$

Будем искать решения этой системы в форме:

$$x' = x_0' e^{\nu t}, \quad (4.2.17)$$

$$y' = y_0' e^{\nu t}. \quad (4.2.18)$$

Если вещественная часть параметра  $\nu$  положительна, то решение неустойчиво, так как его амплитуда будет неограниченно расти. Подставляя (4.2.17) и (4.2.18) в левые части (4.2.15) и (4.2.16), получим систему однородных алгебраических уравнений относительно  $x'$  и  $y'$ . Для того чтобы решение этой системы было отлично от нуля, должен обращаться в нуль ее определитель. Из этого условия найдем, что

$$\nu_{\pm} = \frac{1}{4} y_s - (1 + \beta) \pm \frac{1}{4} \sqrt{y_s^2 - 8x_s^2}. \quad (4.2.19)$$

Пусть  $\eta = 10$ , а  $\beta = 2$ . Тогда для первого состояния равновесия  $(0, \frac{20}{3})$   $\nu_+ > 0$ , а значит это состояние равновесия является неустойчивым. Два других состояния равновесия не имеют положительных вещественных  $\nu$  и являются устойчивыми. На рис. 4.3

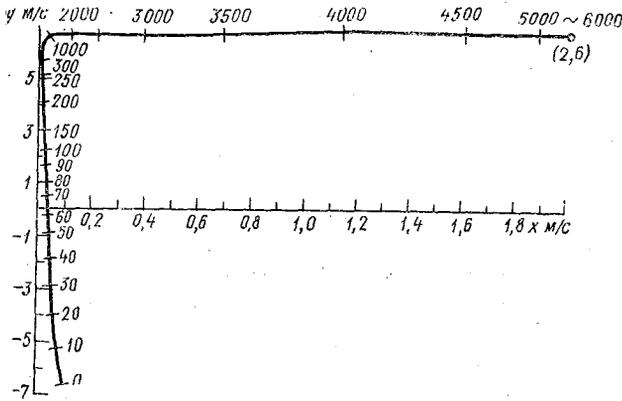


Рис. 4.3. Траектория  $(x, y)$  системы, описываемой уравнениями (4.2.11)–(4.2.12), от начального состояния  $(0, 1; -6,57)$  через состояние, близкое к неустойчивому равновесию  $(0; 6,67)$ , к устойчивому равновесию  $(2; 6)$ . Значение параметров  $\eta = 10$ ,  $\beta = 2$

изображена траектория в фазовой плоскости, по которой система переходит из начального положения в устойчивое состояние. Можно видеть, что достаточно длительное время система приближается к неустойчивому равновесию. Это объясняется диссипативностью системы, которая стремится ликвидировать неоднородности решения и тем самым перевести систему в стационарный режим, самый

близкий к начальному состоянию. Но в окрестности стационарного состояния роль вязкости уменьшается и тогда проявляется влияние нелинейных членов, которые «перебрасывают» систему в устойчивое состояние. Таким образом, можно убедиться, что реализация потенциальной неустойчивости нелинейной системы, которая, как указано выше, приводит к потере предсказуемости поведения системы, связана с различным соотношением вынуждающих сил в различные моменты эволюции системы.

Наиболее известным примером малокомпонентной нелинейной системы, имеющей принципиально непредсказуемое поведение, является трехкомпонентная система, впервые детально изученная Э. Лоренцем. Она получена для описания конвективно неустойчивой жидкости в плоскости  $(x, z)$

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + (\psi, \nabla^2 \psi) = \nu \nabla^4 \psi + g\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (4.2.20)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\psi, \theta) = \kappa \nabla^2 \theta + \frac{\Delta T}{H} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (4.2.21)$$

где  $\psi$  — функция тока;  $\theta$  — отклонение температуры от равновесной;  $\alpha$  — коэффициент теплового расширения;  $\nu$  и  $\kappa$  — соответственно коэффициенты вязкости и температуропроводности;  $H$  — толщина слоя жидкости;  $\Delta T$  — перепад температуры между нижней и верхней границами.

Разложив  $\psi$ ,  $\theta$  в двойные ряды Фурье, подставив эти разложения в (4.2.20) и (4.2.21) и оставив в разложении только первые три компоненты, Лоренц получил систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y, \quad (4.2.22)$$

$$\frac{dy}{dt} = -xz + rx - y, \quad (4.2.23)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz, \quad (4.2.24)$$

в которой коэффициенты  $\sigma$ ,  $r$  и  $b$  зависят от физических параметров жидкости  $\nu$ ,  $\kappa$ , а также от числа Рэлея  $Ra = g\alpha H^3 \Delta T \kappa^{-1} \nu^{-1}$ , характеризующего интенсивность конвекции. Величины  $x$ ,  $y$  и  $z$  представляют собой линейные комбинации амплитуд разложения решения в двойные ряды Фурье.

Исследование Э. Лоренца позволило обнаружить у этой вполне детерминистической системы весьма странное «поведение». При определенном наборе внешних параметров ( $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ ,  $r = 28$ ) эта система имеет три равновесных состояния с координатами  $(0, 0, 0)$  и  $(\pm 6\sqrt{2}, \pm 6\sqrt{2}, 27)$ . Состояние покоя оказывается точкой

неустойчивого равновесия: в движении, начатом от состояния, недалекого от покоя  $(0, 1, 0)$ , быстро возникают все три компоненты, которые растут, вызывая нерегулярные колебания, показанные на рис. 4.4. Если начальные точки траекторий даже близки друг к другу, то все-таки через определенный промежуток времени решения полностью теряют сходство. Этот процесс изображен в виде второй кривой на рис. 4.4. Вторая кривая проведена, начиная от того момента, когда она становится отчетливо отличима от первой. Таким образом, эта динамическая система обладает такой же ограниченной предсказуемостью, как и предыдущая.

Наиболее интересной чертой этой динамической системы является ее реакция на начальные ошибки. И в одномерном, и в двумерном случаях, рассмотренных выше, можно было заранее указать множество начальных значений, которые приводят после эволюции к какому-то определенному равновесному состоянию. Например, в одномерном случае эти области определяются соотношениями (4.2.9) — (4.2.10). Для трехкомпонентной системы рассматриваемого типа нельзя указать промежутки начальных значений, такие, что, начинаясь в какой-либо из них, целое семейство траекторий останется близким между собой в течение неопределенно долгого времени. Это означает, что даже в принципе мы не можем указать, к какому состоянию равновесия будет стремиться система в каждом конкретном случае начальных условий, а значит, поведение динамических систем может быть в принципе непредсказуемым.

Рассмотренные выше примеры иллюстрируют важную особенность нелинейных динамических систем: их поведение непредсказуемо не только в силу неопределенности начальных данных или неточности информации о параметрах, но и в силу внутренней неустойчивости, присущей этим системам. Представляется очевидным, что гораздо более сложные и многокомпонентные системы, такие как модели, воспроизводящие общую циркуляцию атмосферы, или тем более сама атмосфера, несомненно, непредсказуемы

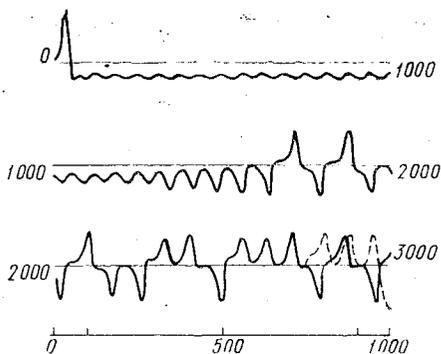


Рис. 4.4. Численное решение системы уравнений (4.2.22) — (4.2.24) для  $y$  как функции шага по времени.

Верхняя кривая — первая 1000 шагов, средняя — вторая 1000 шагов, нижняя — третья 1000 шагов. Ниже кривых расположена масштабная ось. Пунктирная кривая — решение тех же уравнений для незначительно отличающихся начальных условий, нанесенное с того момента, когда оно существенно отличается от показанного сплошной кривой

на неограниченный срок. Именно конкретный период их предсказуемости должен быть основой для оценки срока, на который возможен прогноз погоды в конкретных пунктах, по методике, принятой в краткосрочном прогнозе.

### 4.3. Современные оценки предела предсказуемости атмосферных процессов

При определении предела предсказуемости индивидуальных атмосферных процессов можно использовать два подхода: динамический и эмпирический. В первом — объектом исследования является математическая модель атмосферы, точнее — ее конечно-разностный аналог, реализуемый на ЭВМ. Во втором исследуется архив метеорологических характеристик, полученных в результате наблюдений, т. е. объектом исследования является сама атмосфера. Целью исследований в обоих случаях является определение времени, за которое начальные ошибки вырастут до ошибок «случайного» прогноза.

Рассмотрим возможность определения предела предсказуемости по реальным метеорологическим данным. Эта задача была впервые изучена Э. Лоренцем на основе анализа данных о барической топографии северного полушария. Методика его исследований заключалась в анализе архива за период 1963—1968 гг. высот изобарических поверхностей 200, 500 и 850 гПа. Анализ состоял в подборе по всему архиву близких состояний, определению начальной ошибки и прослеживанию, как ошибка увеличивается во времени путем сравнения изменений полей, первоначально признанных близкими. Близость аналогов оценивалась по среднему квадрату разностей полей в 1003 точках.

Основной трудностью при проведении исследования оказалась недостаточность архива: в нем не было состояний, которые были бы «ближе» друг к другу, чем на 0,68σ. Вследствие этого не удалось рассмотреть, как в атмосфере растет малая начальная ошибка, но удалось определить время удвоения имевшихся ошибок; оно равно 8 суткам. С помощью дополнительных гипотез Лоренц оценил время удвоения малых начальных ошибок примерно в 2,5 суток. Согласно этому исследованию получение информации о предсказуемости по данным наблюдений возможно при наличии архива не менее чем за 140 лет. Только при этих условиях в архиве с известной достоверностью можно было бы ожидать наличие состояний, различия между которыми не превышали бы тех, которые возникают за счет ошибок наблюдений.

Более перспективным для оценки предела предсказуемости оказывается динамический подход, в котором можно располагать достаточно полной информацией относительно роста малых начальных ошибок. В настоящее время оценки пределов предсказуемости получены по многим моделям общей циркуляции атмо-

сферы. Проиллюстрируем методику получения таких оценок и основные результаты на примере модели ЛГГ.

Первоначально от фактических начальных данных был проведен расчет по модели на месяц. Затем в исходное поле температуры были введены на всех уровнях и во всех узлах сетки случайные ошибки  $\pm 0,5^\circ\text{C}$  и был произведен новый расчет на месяц. Эти эксперименты проведены на двух сетках с шагом 320 и 640 км. Результаты сравнивались по различным показателям, в том числе и по среднеквадратическому отклонению. По поведению этой величины можно было выделить три стадии в ходе эксперимента. На первой стадии, которая длится примерно сутки, происходит падение ошибки от 0,5 до  $0,2^\circ\text{C}$  за счет процесса адаптации поля скорости к возмущениям в поле температуры. Этот процесс при малых начальных возмущениях и одинаковом крупномасштабном фоне приводит к некоторому сглаживанию внесенных неоднородностей, что и уменьшает среднеквадратическое отклонение полей. После того, как процесс согласования начальных полей закончится, наступает вторая стадия эволюции решений, когда расхождение между полями растет почти экспоненциально, причем среднеквадратическое отклонение решений удваивается примерно за пять суток. Эта стадия похожа на процесс нарастания начальной ошибки в линейной неустойчивой системе. Стадия неустойчивости длилась примерно 21 день, после чего среднеквадратическое отклонение, достигнув уровня погрешности инерционного прогноза, вошло в режим нелинейных колебаний. Это означает, что вступили в силу процессы, ограничивающие действие источников неустойчивости модели.

Визуальное сравнение карт, полученных по результатам обоих экспериментов, показало, что в конце третьей недели произошла полная потеря «сходства» метеорологических полей, которое в целом сохранялось в течение двух недель. Таким образом удалось оценить предел предсказуемости, который оказался равным примерно трем неделям.

Важно отметить, что поскольку эксперимент был проведен от фактических начальных данных, была возможность определить и тот период, в течение которого смоделированная «погода» была похожа на реальную. Этот период оказался меньше предела предсказуемости, так как в обеих сериях численных экспериментов расхождение с естественным процессом произошло значительно ранее 14 суток.

Полезно иметь в виду, что в экспериментах по определению предела предсказуемости рост ошибок происходил так же, как и в численных экспериментах по среднесрочному прогнозу, описанных в главе 3: ошибка роста от нижних уровней к верхним; предел предсказуемости движений с большими волновыми числами — меньше. Наибольший предел предсказуемости имели планетарные волны с волновыми числами 1—3, поскольку они формируются под влиянием стационарных или медленно меняющихся

факторов — рельефа и термического режима подстилающей поверхности.

В настоящее время по результатам нескольких численных экспериментов с различными моделями общей циркуляции можно

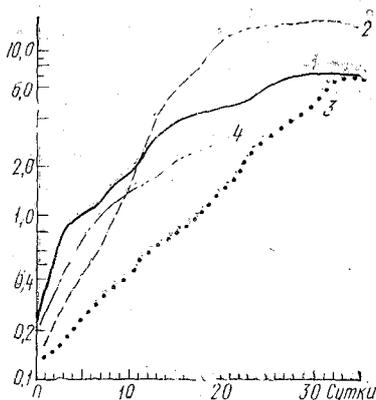


Рис. 4.5. Рост со временем средней квадратичной ошибки зональной компоненты скорости ветра в модели НЦАИ — 1; рост среднев квадратичной ошибки скорости ветра на уровне 400 гПа для модели КУЛА с шагом 800 км — 2; то же для модели КУЛА с шагом 400 км — 3 (в м/с); рост проинтегрированной по вертикали среднев квадратичной ошибки температуры (в градусах) для прогноза по модели ЛГГ — 4

оценить предел предсказуемости в среднем. На рис. 4.5 показано, как растут среднев квадратичные ошибки в различных экспериментах по предсказуемости. Предел предсказуемости этих моделей примерно две недели. Дальнейшие эксперименты показали, что с уменьшением шага моделей по горизонтальным координатам увеличиваются скорости преобразования различных форм энергии друг в друга и предел предсказуемости моделей уменьшается.

Причины потери предсказуемости в моделях общей циркуляции пока еще в полной мере объяснить не удается. Эксперименты показывают, что не только точность исходной информации, но и географическая локализация и горизонтальная структура особенностей исходной метеорологических полей влияют на скорость роста ошибок. Безусловно, сказывается описанная в преды-

дущем параграфе внутренняя неустойчивость равновесных состояний нелинейных гидродинамических систем. Наконец, неполнота и неточность способов параметризации источников и стоков энергии также влияют на предел предсказуемости.

#### 4.4. Возможности прогноза за пределами предсказуемости

Существование предела предсказуемости ставит перед специалистами по долгосрочным прогнозам погоды новые сложные задачи. Невозможность прогноза индивидуальных синоптических процессов на срок более двух недель означает необходимость отыскать обобщенные характеристики ансамблей индивидуальных процессов, которые могут быть спрогнозированы на срок, превышающий предел предсказуемости. Собственно, современные методы долгосрочного прогноза и не направлены на прогноз конкретных погодных условий. Определяются знаки аномалии термического поля и поля осадков, осредненные за длительный период и по

значительным площадям, отыскиваются возможности прогноза перестроек форм атмосферной циркуляции. Таким образом, синоптическая практика не противоречит выводам об ограниченности срока предсказуемости. Задачей теоретических исследований в этом направлении является: во-первых, выявление для заданной заблаговременности прогноза наилучшим образом прогнозируемых характеристик; а во-вторых, нахождение способов их прогноза. В большинстве случаев синоптики строят методы долгосрочного прогноза, основываясь только на доступном им материале, и не могут оценить пределы точности прогноза по созданной ими методике. Субъективный выбор той или иной характеристики состояния атмосферы в качестве прогнозируемой может наложить существенные ограничения на оправдываемость ее прогноза.

В качестве примера рассмотрим вопрос о возможной точности прогноза осредненных за месяц аномалий приземного давления, проанализированный Ю. В. Николаевым. Обратимся к рис. 4.6, на котором изображены спектры двух случайных процессов. На верхней части рисунка изображен спектр собственно моделируемого ряда. Этот ряд был получен путем преобразования «белого шума» в случайный процесс, имеющий такие же статистические характеристики, как и у ряда приземных среднесуточных аномалий давления в некотором пункте. На нижнем рисунке приведен спектр того же ряда, но после его предварительного усреднения по времени за месяц по формуле

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{T} \int_{t - \frac{T}{2}}^{t + \frac{T}{2}} x(t) dt, \quad (4.4.1)$$

где  $x(t)$  — неусредненный случайный процесс.

Сравнение верхнего и нижнего рисунков ясно показывает, что скользящее усреднение по месячному интервалу систематически и очень сильно искажает спектр случайного процесса. А именно,

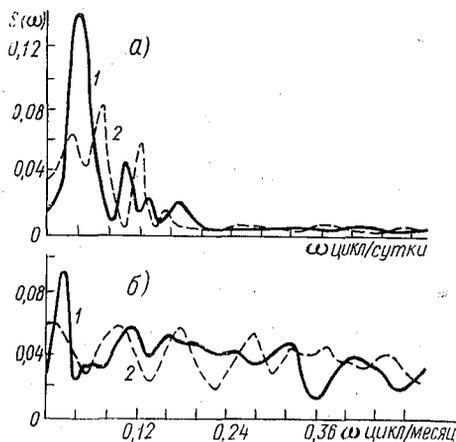


Рис. 4.6. Спектр ряда, имитирующего среднесуточные значения приземного давления (а); спектр этого же ряда после усреднения его по месячному интервалу (б). Данные для Ленинграда — 1; данные для Лондона — 2

колебания, с периодами меньше месяца, преобладавшие в исходном ряду, не устраняются полностью усреднением за месяц. В результате среднемесячные величины тоже начинают меняться, т. е. возникает фиктивная изменчивость среднемесячных величин за счет неполной фильтрации короткопериодных колебаний. Поэтому если бы мы стали анализировать ряд среднемесячных значений, то пришли бы к выводу, что существуют какие-то колебания, с периодами гораздо большими, чем месяц. На самом же деле, эти колебания являются результатом обработки наблюдений, порождаются короткопериодными процессами и принципиально не могут быть предсказаны. В спектрах характеристик атмосферы преобладают колебания с периодами 4—7 суток. Это значит, что в ряду среднемесячных месячных аномалий давления, как указал Ю. В. Николаев, следует ждать появления фиктивных колебаний с периодами от 2 до 5 месяцев.

Поскольку существует предел предсказуемости атмосферных процессов, упомянутые короткопериодные процессы непредсказуемы, а значит порожденные ими фиктивные колебания месячных аномалий следует рассматривать как «шум». Это приводит к выводу, что оправдываемость прогноза месячных аномалий ограничена, так как потенциально предсказуемы только истинные долгопериодные колебания, а не «шум».

Оценим возможную оправдываемость прогноза месячных аномалий температуры. Для этого следует иметь данные о дисперсии прогнозируемой величины  $\sigma^2$  и вкладе потенциально предсказуемой части в эту дисперсию  $\sigma_{пр}^2$ . Эти величины можно определить, зная нормированную спектральную плотность осредненных за месяц случайных величин  $S(\omega)$  и «пороговую» частоту  $\omega_{п}$ , определяющую границу распространения «шумов» по спектру. Тогда на основании теории случайных процессов имеем

$$\frac{\sigma_{пр}^2}{\sigma^2} = \int_0^{\omega_{п}} S(\omega) d\omega, \quad (4.4.2)$$

Согласно оценкам Ю. В. Николаева,  $\omega_{п}$  соответствует периоду 3,5 месяца, а  $\sigma_{пр}^2/\sigma^2$  для среднемесячной аномалии давления в северном полушарии составляет в среднем 0,65.

Представим среднемесячные значения прогнозируемого элемента  $x(t)$  в виде

$$x = \eta + \xi, \quad (4.4.3)$$

где  $\eta$  — предсказуемая часть значения;  $\xi$  — «шум». Будем считать, что прогноз  $\eta$  дается без ошибок, а  $\xi$  — случайная величина, имеющая нормальное распределение. Оправдываемость прогноза  $P$  можно представить как

$$P = \text{вероятность } \{ |x - \eta| \leq \Delta \}, \quad (4.4.4)$$

где  $\Delta$  — допустимая ошибка прогноза. Ее можно определить как некоторую долю  $\lambda$  среднеквадратического отклонения  $\sigma_x$  величины  $x$ :

$$\Delta = \lambda \sigma_x. \quad (4.4.5)$$

Учитывая (4.4.3), можно переписать формулу (4.4.4) в виде

$$P = \text{вероятность} \left\{ \frac{|\xi|}{\sigma_\xi} \leq \lambda \beta \right\}, \quad (4.4.6)$$

где

$$\beta = \frac{\sigma_x}{\sigma_\xi}. \quad (4.4.7)$$

Величину  $\beta$  можно оценить, используя полученное по смоделированному ряду Ю. В. Николаевым значение отношения  $\sigma_{\text{пр}}^2/\sigma^2$ . Приняв, что  $\sigma_\xi = \sigma^2 - \sigma_{\text{пр}}^2$ , а  $\sigma = \sigma_x$ , получим  $\beta = 1,7$ . Значение  $\lambda$ , характеризующее допустимую погрешность прогноза, примем, следуя Ю. В. Николаеву, равным 0,7. Оправдываемость прогноза, определенную формулой (4.4.4), можно рассчитать, учитывая, что случайная величина  $|\xi|/\sigma_\xi$  имеет нормальное распределение с нулевым средним и единичной дисперсией и поэтому может быть получена по таблицам интеграла вероятности на основе определения:

$$P = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\lambda\beta} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (4.4.8)$$

Для выбранных значений  $\lambda$  и  $\beta$  оправдываемость прогноза получается равной 76%. Таким образом, месячные аномалии давления над северным полушарием могут быть предсказаны даже по модели, идеально передающей эволюцию  $\eta$ , только с оправдываемостью 76%, поскольку существенный вклад в формирование месячной аномалии вносится короткопериодными «шумами»  $\xi$ .

Рассмотренный выше пример демонстрирует связь выбора прогнозируемой характеристики с предельной оправдываемостью ее прогноза.

В настоящее время при разработке синоптических прогнозов используют различные эмпирические предиканты, определение которых ведется в основном с помощью статистической экстраполяции «предикторов». В теории случайных процессов показано, что существуют статистические характеристики, наилучшим образом прогнозируемые с помощью такой экстраполяции. Эти характеристики называются каноническими функционалами. Задача их нахождения трудна, хотя для ряда случайных процессов, близких к метеорологическим, уже решена\*. Поиск канонических функцио-

\* Пример нахождения канонических функционалов для прогноза изменений климата можно найти в работе М. И. Фортус, помещенной в [20].

налов может способствовать нахождению наилучших предикантов и является одним из наиболее естественных методов прогноза на период, превышающий предел предсказуемости.

Кроме чисто статистических прогнозов на большие сроки, в настоящее время изучаются и другие подходы к решению рассматриваемой задачи. Большой интерес представляет в этой связи разработанный Г. И. Марчуком метод нахождения функции влияния для прогноза осредненных по пространству и времени значений метеоэлементов. Основы этого подхода рассматриваются в главе 6.

Другим подходом к решению задач долгосрочного прогноза является построение уравнений для статистических характеристик атмосферных процессов, аналогичных уравнениям Фридмана—Келлера в теории турбулентности. Этот подход развит в нашей стране в трудах Е. Н. Блиновой, А. С. Мониной.

Возможен и третий подход к изучению задачи о долгосрочном прогнозе — теоретическое исследование весьма медленной согласованной эволюции деятельного слоя океана и атмосферы. Как показал А. С. Монин, возможен процесс адаптации атмосферы к состоянию деятельного слоя океана, которое характеризуется наличием хорошо выраженных и долгоживущих аномалий температуры поверхности воды.

Таким образом, проблема прогнозов на периоды, превышающие предел предсказуемости индивидуальных синоптических процессов, представляет собой важную и перспективную задачу теоретической метеорологии, позволяет с новых позиций посмотреть на синоптические методы долгосрочных прогнозов и уяснить себе существо их отличий от методов краткосрочного прогноза.

## **Глава 5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ В ОПЕРАТИВНОМ ПРОГНОЗЕ НА СРЕДНИЕ СРОКИ**

### **5.1. Постановка задачи об использовании гидродинамических расчетов в оперативной практике.**

#### **Представление метеорологических полей с помощью естественных ортогональных функций**

Несмотря на большие успехи, достигнутые в области гидродинамических прогнозов, рассчитанные на сроки более трех суток карты все еще не имеют необходимой оправдываемости. Синоптики используют эти карты в оперативной практике, как правило, в качестве вспомогательного материала для оценки скорости и направления перемещения воздушных масс с учетом их трансформации. При составлении прогноза погоды на средние сроки они в значи-

тельной мере полагаются на свой опыт. Поэтому возникла необходимость создания объективной системы интерпретации результатов гидродинамических расчетов с целью получения прогнозов элементов погоды, необходимых для обслуживания народного хозяйства, в расширенном объеме и более высокого качества.

Такая задача была решена в нашей стране в 1973 году, когда был внедрен гидродинамико-синоптико-статистический (ГСС) метод прогноза средней пятидневной и среднедекадной температуры воздуха и суммы осадков на пятидневку по ЕТС, Казахстану, Западной Сибири, Средней Азии. Внедрение этого метода стало крупным шагом вперед в практике прогноза на средние сроки и повысило его успешность по среднедекадной температуре до 83% (при оправдываемости инерционного прогноза 70%). Основные положения этого метода и некоторые перспективы развития такого подхода к интерпретации результатов гидродинамических расчетов для их использования в практике будут изложены в 5.2 этой главы. Ниже рассмотрен аппарат разложения метеорологических полей в ряды по естественным ортогональным функциям (е. о. ф.), который необходим для понимания ГСС метода. Этот аппарат был в нашей стране разработан и внедрен в практику благодаря основополагающим работам А. Н. Обухова, Н. А. Багрова, М. И. Юдина. При изложении этого материала удобнее всего следовать работам Н. А. Багрова.

Пусть на  $n$  метеостанциях синхронно в течение  $m$  сроков измеряется значение метеоэлемента. Каждое из отдельных наблюдений обозначим  $F_{mn}$ . Совокупность всех наблюдений можно представить прямоугольной матрицей

$$\left( \begin{array}{cccccc} F_{11} & F_{12} & F_{13} & \dots & F_{1n} \\ F_{21} & F_{22} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{m1} & F_{m2} & F_{m3} & \dots & F_{mn} \end{array} \right) \quad (5.1.1)$$

Поставим задачу найти разложение любого индивидуального поля метеоэлементов, представляющего вектор-строку в (5.1.1), по некоторым базисным  $n$ -мерным векторам  $\overset{\leftarrow}{X}_h$  ( $h$  — номер базисного вектора, т. е.  $h = 1, 2, \dots$ ). Коэффициенты такого разложения будут меняться от одного поля к другому, т. е. будут зависеть от момента времени и обозначаться через  $T_{hm}$ . Таким образом, требуется найти разложение вида

$$F_{mn} = \sum_h T_{hm} X_{hn}, \quad (5.1.2)$$

где суммирование ведется по всем значениям индекса  $h$ , а индексы  $n$ ,  $m$  указывают на пространственно-временную принадлежность соответствующего члена в (5.1.2). Обычно в таких разложениях

базисные векторы  $\vec{X}_h$  считаются известными\*, но специфика данной задачи как раз и состоит в том, что они разыскиваются одновременно с коэффициентами  $T_{hm}$  по наблюдениям, записанным в (5.1.1).

Технически это осуществляется с помощью метода наименьших квадратов. В основу определения полагается требование обратить в минимум сумму квадратов ошибок представления метеозаписей  $F_{mn}$  с помощью равенства (5.1.2), т. е. минимизируется функция  $\Delta$ :

$$\Delta = \sum_m \sum_n (F_{mn} - \sum_h T_{hm} X_{hn})^2 \quad (5.1.3)$$

по аргументам  $T_{hm}$  и  $X_{hn}$ . Производные минимизируемой функции по всем аргументам приравниваются к нулю, что дает с учетом взаимной ортогональности базисных векторов две системы уравнений:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial T_{hm}} = -2 \sum_n F_{mn} X_{hn} + 2T_{hm} \sum_n X_{hn}^2 = 0, \quad (5.1.4)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial X_{hn}} = -2 \sum_m F_{mn} T_{hm} + 2X_{hn} \sum_m T_{hm}^2 = 0. \quad (5.1.5)$$

Первая из этих систем позволяет определить  $T_{hm}$  по формуле

$$T_{hm} = \frac{\sum_n F_{mn} X_{hn}}{\sum_n X_{hn}^2}. \quad (5.1.6)$$

Если подставить равенства (5.1.6) в (5.1.5), то придем к системе уравнений вида

$$\sum_k A_{kn} X_{kn} = \lambda_h X_{hn}, \quad (5.1.7)$$

где

$$A_{kn} = \sum_m F_{mn} F_{mk}, \quad (5.1.8)$$

$$\lambda_h = \sum_m T_{hm}^2 \sum_n X_{hn}^2. \quad (5.1.9)$$

При проведении несложных преобразований, ведущих от (5.1.5) к (5.1.7), индекс  $n$  встречается двойко: как фиксированный индекс и как индекс, по которому производится суммирование. Для исключения двусмысленностей этот индекс в случае суммирования по нему заменен индексом  $k$ .

---

\* Для сравнения следует вспомнить представление метеорологических полей рядами Фурье.

Легко видеть, что система уравнений (5.1.7) определяет  $\lambda_h$  и  $\vec{X}_h$  как собственные числа и собственные векторы матрицы  $A$ , состоящей из элементов  $A_{hn}$ . Согласно определению (5.1.8) эта матрица является симметричной, а значит все ее собственные числа вещественны. Но согласно определению (5.1.9) все  $\lambda_h$  — положительны или равны нулю, отсюда следует, что матрица  $A$  является неотрицательной. Для матриц, относительно которых известно, что они положительны или неотрицательны, в настоящее время разработано несколько эффективных алгоритмов нахождения их собственных чисел и собственных векторов.

Таким образом, зная матрицу (5.1.1) и получив из нее с помощью умножения матрицу  $A$  по (5.1.8), можно, применяя вычислительные методы линейной алгебры, найти все собственные числа матрицы  $\lambda_h$  и для каждого из них получить собственный вектор. Зная собственные числа  $\lambda_h$  и собственные вектора  $\vec{X}_h$ , можно на основе определения (5.1.6) найти и временные коэффициенты разложения  $T_{hm}$ . Таким образом, поставленная задача о представлении заданной последовательности метеорологических полей в форме (5.1.2) оказывается принципиально решенной.

Выясним физический смысл представления (5.1.2). Определение (5.1.8) совпадает с известным из математической статистики определением корреляционной матрицы для случайных векторов  $\vec{F}_m$ . Разложение совокупности полей по собственным элементам корреляционной матрицы есть разложение метеорологического поля по наиболее вероятным некоррелированным между собой характерным ситуациям. Причем чаще встречаются те ситуации, которые имеют большие собственные числа.

Следует обратить внимание на ряд важных свойств описываемых разложений. Собственные вектора симметричных матриц образуют ортогональную систему, т. е. имеют место формулы

$$\sum_n X_{hn} X_{gn} = 0 \quad \text{при } h \neq g. \quad (5.1.10)$$

Учитывая равенство (5.1.6), можно на основе этого равенства и равенства (5.1.2) доказать, что временные коэффициенты также ортогональны:

$$\sum_m T_{hm} T_{gm} = 0 \quad \text{при } h \neq g. \quad (5.1.11)$$

Собственные векторы определяются с точностью до постоянного множителя. Выбор этого множителя удобно производить так, чтобы «длина» каждого собственного вектора была равна единице:

$$\sum_n X_{hn}^2 = 1. \quad (5.1.12)$$

С помощью этого равенства легко доказать, что в каждый момент  $t$  метеорологическое поле  $\vec{F}_m$  точно раскладывается в сумму

(5.1.2), если число собственных векторов  $h$  равно числу станций, на которых производятся измерения  $n$ . Для этого достаточно подставить в правую часть (5.1.2) вместо  $T_{hm}$  его выражения из (5.1.6) с учетом (5.1.12), получив в результате тождество. Привлекая для оценки вектора  $\vec{F}_m$  меньшее число собственных векторов, получим формулу погрешности в виде

$$\Delta_{nm} = \sum_n \left( F_{mn} - \sum_h^H T_{hm} X_{hn} \right)^2, \quad (5.1.13)$$

где  $H \leq n$  обозначает количество собственных векторов  $\vec{X}_h$ , использованное для оценки вектора  $\vec{F}_m$ . Ясно, что при  $H = n$  погрешность обращается в нуль.

Возведя в квадрат и учтя ортогональность собственных векторов, из (5.1.13) можно получить соотношение

$$\Delta_{Hm} = \sum_n F_{mn}^2 - \sum_h^H T_{hm}^2 \cdot \sum_n X_{hn}^2, \quad (5.1.14)$$

а затем оценку погрешности разложения (5.1.2) по всем  $m$  векторам  $\vec{F}_m$ .

Для этого просуммируем (5.1.14) по всем  $m$  и учтем (5.1.9), после чего получим

$$\Delta_H = \sum_m \Delta_{Hm} = \sum_m \sum_n F_{mn}^2 - \sum_h^H \lambda_h. \quad (5.1.15)$$

Именно это выражение используется для оценки точности разложения. С его помощью и на основе того, что при использовании всех собственных векторов ( $H=n$ ) погрешность равна нулю, получим относительную меру точности разложения по  $H$  векторам:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_h^H \lambda_h}{\sum_h \lambda_h}. \quad (5.1.16)$$

Все собственные числа  $\lambda_h$  положительны, поэтому, привлекая последовательно один, два, три и так далее до  $H=n$  векторов, получается все меньшая погрешность, т. е. возрастает точность разложения.

Поскольку  $n$  собственных векторов матрицы  $A$  образуют полную ортогональную систему, то по этой совокупности векторов можно разложить любой  $n$ -мерный вектор, даже не входящий в исходную совокупность собственных векторов корреляционной матрицы. Собственные вектора корреляционной матрицы полей  $F_{mn}$  принято называть естественными ортогональными функциями (е. о. ф.).

Прежде чем перейти к рассмотрению свойств е. о. ф., применяемых в долгосрочном прогнозе, проиллюстрируем методику их построения на простом примере. Пусть дано пять полей ( $m=5$ ), каждое из которых представлено тремя точками ( $n=3$ ). Поле  $F_{mn}$  приведено в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Модельное поле  $F_{mn}$  для разложения по е. о. ф.

$m \backslash n$	1	2	3	4	5
1	2	1	0	1	2
2	-1	0	1	1	-2
3	-1	-1	-1	-2	0

Вычислим элементы корреляционной матрицы  $A_{kn}$  по формуле (5.1.8). В данном случае размерность матрицы  $\{3 \times 3\}$ , она симметрична и имеет элементы

$$A \begin{pmatrix} 10 & -5 & -5 \\ -5 & 7 & -2 \\ -5 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad (5.1.17)$$

Собственные числа этой матрицы найдем из характеристического уравнения, которое получается путем приравнивания к нулю определителя матрицы

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 10-\lambda & -5 & -5 \\ -5 & 7-\lambda & -2 \\ -5 & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (5.1.18)$$

Корни получающегося уравнения расположим в порядке убывания

$$\lambda_1 = 15, \quad \lambda_2 = 9, \quad \lambda_3 = 0. \quad (5.1.19)$$

Для каждого собственного числа получим собственный вектор. Например, для  $\lambda_1 = 15$  собственный вектор найдется из системы уравнений

$$A\vec{X}_1 = \lambda_1 \vec{X}_1 \quad (5.1.20)$$

или

$$\left. \begin{aligned} -5x_{11} - 5x_{12} - 5x_{13} &= 0, \\ -5x_{11} - 8x_{12} - 2x_{13} &= 0, \\ -5x_{11} - 2x_{12} - 8x_{13} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.1.21)$$

Понятно, что для такой системы все компоненты  $x_{11}$ ,  $x_{12}$ ,  $x_{13}$  не могут быть определены. Зададим дополнительное требование нормировки (5.1.12). Тогда

$$x_{11} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad x_{12} = x_{13} = -\frac{\sqrt{6}}{6}. \quad (5.1.22)$$

Далее по формуле (5.1.6) определим  $T_{1m}$ :

$$\begin{aligned} T_{11} &= \sqrt{6}, \quad T_{12} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad T_{13} = 0, \\ T_{14} &= \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad T_{15} = \sqrt{6}. \end{aligned} \quad (5.1.23)$$

Аналогичным образом найдем для  $\lambda_2 = 9$  второй собственный вектор

$$x_{21} = 0, \quad x_{22} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_{23} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (5.1.24)$$

$$\begin{aligned} T_{21} &= 0, \quad T_{22} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad T_{23} = \sqrt{2}, \\ T_{24} &= \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad T_{25} = -\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

В данном случае для третьего собственного числа  $\lambda_3 = 0$  можно считать собственный вектор тождественно равным нулю.

Проверим, может ли любое число из табл. 5.1 быть представлено в форме (5.1.2) на основе полученной системы векторов. Например, для  $m = 2$ ,  $n = 1$  получим

$$\begin{aligned} F_{21} &= T_{12}x_{11} + T_{22}x_{21} + T_{32}x_{31} = \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1. \end{aligned} \quad (5.1.26)$$

Оценим качество разложения в том случае, когда используется только первый собственный вектор, тогда согласно (5.1.16)

$$R^2 = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} = 1 - \frac{15}{24} = 0,375. \quad (5.1.27)$$

Теперь, когда разъяснен смысл и техника разложений последовательностей двумерных метеорологических полей по е. о. ф., обратимся к выводам, которые получены при изучении этих разложений. Остановимся только на свойствах е. о. ф. разложений полей аномалии приземного давления, геопотенциала и температуры. Прежде всего следует отметить большое сжатие исходной информации при использовании представления ее в виде разложений по е. о. ф. Так, информация, содержащаяся в значениях температуры

зимой на 78 станциях северного полушария\*, на 80% может быть представлена 10 коэффициентами разложений по е. о. ф. Летом представление 10 коэффициентами ухудшается и они описывают примерно 70% информации. Это показывает количественно, как возрастает от зимы к лету роль более мелкомасштабных процессов в формировании аномалий метеорологических полей.

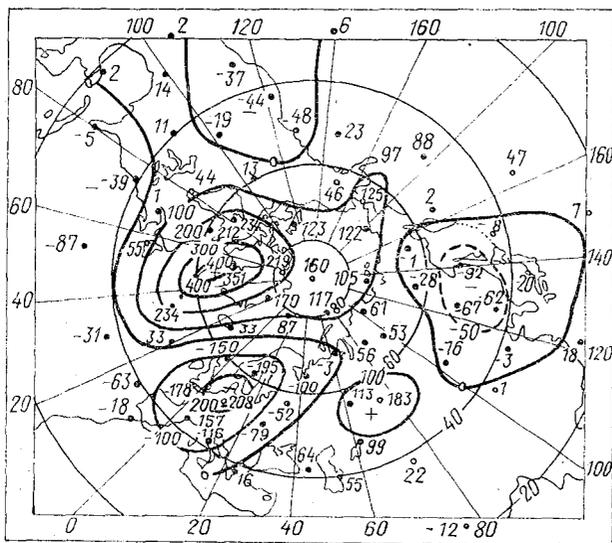


Рис. 5.1. Первая естественная ортогональная функция поля  $H_{500}$  зимой

Как указано выше, е. о. ф. отображают наиболее вероятные комбинации представляемого метеорологического поля, причем, чем меньше номер е. о. ф., тем более вероятным является поле. На рис. 5.1 изображается первая е. о. ф.  $H_{500}$  в зимний период. Видно, что поле этой е. о. ф. представляет систему из нескольких волн, средняя длина волны 3—3,5 тыс. км. Как указал М. И. Юдин, эти волны представляют собой наиболее вероятный результат воздействия на атмосферу термически неоднородной подстилающей поверхности. Е. о. ф. позволяют выделить наиболее значимые пространственные связи и определить районы, «управляющие» крупномасштабными аномалиями, дифференцировав их по статистической значимости.

\* Сеть этих станций изображена точками на рис. 5.1.

Поскольку система е. о. ф. для данного вида полей может быть получена раз и навсегда, то коэффициенты разложения по е. о. ф. могут служить для количественной типизации атмосферных процессов. Анализ разложений по е. о. ф. поля давления в первом естественном синоптическом районе, проведенный В. В. Мешерской и Н. И. Яковлевой по коэффициентам при двух первых е. о. ф., показал, что к синоптическим процессам типа  $W$  по классификации Вангенгейма—Гирса можно относить те, у которых два эти коэффициента положительны. Если оба коэффициента отрицательны, то процесс относится к форме  $C$ . При различных знаках коэффициентов можно выделить не только форму  $E$ , при которой первый коэффициент положителен, а второй отрицателен, но и еще один класс с обратным распределением знаков. Таким образом, использование коэффициентов разложения по е. о. ф. позволяет дать количественные критерии характеристикам макропроцессов, найденным синоптически. С этим связана также и значительная корреляция, существующая между коэффициентами разложений и различными индексами циркуляции. Известно, что индексы А. Л. Каца коррелируют с первыми четырьмя коэффициентами разложений по е. о. ф. с коэффициентом корреляции 0,7—0,8. Такой вывод используется в прогнозах аномалии, где коэффициенты разложений по е. о. ф. служат предикторами, как обобщенные индексы циркуляции в избранных районах.

Изучение временной изменчивости коэффициентов разложений по е. о. ф. привело к новым выводам о ритмической структуре атмосферных процессов. Выяснилось, что «долгой памятью» обладают первые и наиболее крупномасштабные коэффициенты при е. о. ф. Исследование е. о. ф. времени, т. е. тех векторов, которые обозначены через  $T_h$ , произведенное Р. П. Репинской, позволило выявить основные периоды колебаний крупномасштабных атмосферных процессов. На рис. 5.2 приведены графики е. о. ф. времени, полученные для поля приземного давления и относящиеся к вектору  $\vec{T}_1$ . Можно убедиться, что крупномасштабные процессы содержат изменения с различными периодами от более чем четырехмесячного, до примерно семидневного. Этот вывод подтверждается и исследованиями спектральной структуры индексов атмосферной циркуляции. В табл. 5.2 приведены периоды колебаний индексов атмосферной циркуляции, обнаруженные Н. И. Зверевым.

Таблица 5.2

Периоды движений, обнаруженные в атмосфере по индексу Е. Н. Блиновой

Уровень	Периоды в днях									
	6	12	14	18	—	24	31	36	86	152
500 гПа	6	12	14	18	—	24	31	36	86	152
Земля	8	11	14	18	20	25	30	36	84	132

Таким образом, применение разложений по е. о. ф. в сочетании с другими методами исследований материалов наблюдений позволяет не только обнаруживать физические закономерности, но и придавать им количественную форму, что необходимо для успешного применения этих выводов в гидродинамических и статистических методах долгосрочного прогноза.

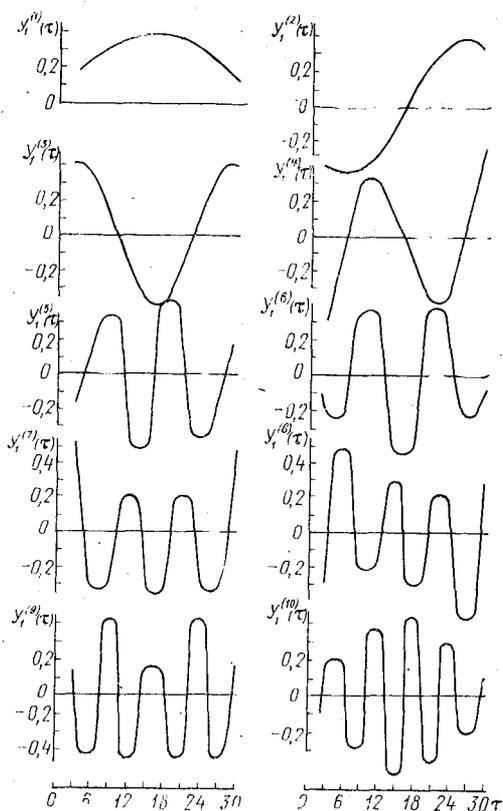


Рис. 5.2. Естественные ортогональные функции времени  $Y_q^{(k)}(\tau)$ , описывающие колебание вклада первой е. о. ф. в приземное поле давления в декабре для северного полушария

## 5.2. Гидродинамико-синоптико-статистический метод прогноза средних пятидневных температур

Для того чтобы усвоить сущность метода ГСС, удобнее всего проследить историю и логику его создания. Как известно, А. Л. Кац создал типизацию макросиноптических процессов и показал, что внутри каждого типа возможен для заранее определен-

ного района достаточно хороший прогноз декадных и пентадных аномалий температуры по уравнению множественной корреляции вида

$$\Delta t_n = \Delta t_{кл n} + aJ_{Mn} + bJ'_{Эn} + c\Delta t_{исх n}, \quad (5.2.1)$$

где  $\Delta t_n$  — декадная (пентадная) аномалия температуры в заданном районе;  $\Delta t_{кл n}$  — аномалия температуры, свойственная данному типу макросиноптических процессов,  $\Delta t_{исх n}$  — аномалия температуры в декаде (пентаде), предшествующей той, на которую осуществляется прогноз,  $J_{Mn}$  и  $J'_{Эn}$  — ожидаемые аномалии индексов Каца;  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — коэффициенты множественной корреляции, которые выбираются с учетом ожидаемого типа макросиноптических процессов.

Основное уточнение простой регрессионной формулы (5.2.1) связано с увеличением информации о предикторах, определяющих будущее поле. Поскольку индексы являются лишь суммарной характеристикой циркуляции, для детализации описания вместо них А. Л. Кац начал использовать коэффициенты разложения полей геопотенциала по естественным ортогональным функциям. Если функция  $F_{tn}$  описывает поле геопотенциала, заданное в  $n$  точках и содержащее  $t$  наблюдений, то форма разложения этого поля по е. о. ф. имеет вид

$$F_{tn} = \sum_k T_{kt} x_{kn}. \quad (5.2.2)$$

где  $T_{ht}$  — коэффициент разложения;  $x_{kn}$  — е. о. ф. разложения. Именно  $T_{ht}$  определяют вероятность ситуации, описываемой в пространстве вектором  $\vec{X}_h$ .

На первом этапе внедрения более детального описания полей в прогностическое уравнение, учитывая тот факт, что нестационарность метеорологических процессов описывается коэффициентами разложения, вместо индексов Каца и исходных аномалий температур стали вводить разложения полей  $\Delta t_{исх n}$  и геопотенциала  $H_{500} - H_{исх n}$  в точках прогноза:

$$\Delta t_{исх tn} = \sum_k T_{1kt} x_{1kn}, \quad (5.2.3)$$

$$H_{исх tn} = \sum_k T_{2kt} x_{2kn}, \quad (5.2.4)$$

Количество членов разложения  $k$  обычно невелико (около десяти).

На основе матрицы коэффициентов этих разложений вида

$$T_{iht} = \left\{ \begin{array}{cccc} T_{11}, & T_{12}, & T_{13}, & \dots & T_{1k} \\ T_{21}, & T_{22}, & T_{23}, & \dots & T_{2k} \end{array} \right\}, \quad (5.2.5)$$

где  $i = 1, 2$ , можно осуществить дополнительное сжатие информации, разложив уже эти коэффициенты по е. о. ф.:

$$T_{ikt} = \sum_p T_{pk}^{\Xi} x_{pt}^{\Xi}. \quad (5.2.6)$$

Именно коэффициенты  $T_{pk}^z$  и служат обобщенными предикторами для прогноза, который теперь рассчитывается по формуле

$$\Delta t_n = \Delta t_{кл n} + \sum_p a_{pn} T_{pn}^z. \quad (5.2.7)$$

Таким образом, модифицированная регрессионная формула еще не учитывает наличие гидродинамического прогноза, который в настоящее время делается на 3—5 суток. Использование этих прогнозов может дать улучшение прогноза крупномасштабных составляющих полей. Их можно учесть, обобщив процедуру получения предикторов и введя в рассмотрение кроме разложений (5.2.3) и (5.2.4) еще и разложение прогностического поля геопотенциала на 3—5 суток:

$$H_{in}^{3(5)} = \sum_k T_{kt}^3 x_{kn}^{3(5)}. \quad (5.2.8)$$

На основании исследований А. Л. Каца можно считать, что прогностическое поле в центральный день декады или пентады дает информацию о среднем поле геопотенциала за всю декаду или пентаду, причем коэффициенты корреляции между средними полями и полями за центральный день весьма высоки.

Таким образом, если вместо матрицы (5.2.5) использовать теперь

$$T_{iht} = \begin{Bmatrix} T_{11}, T_{12}, T_{13}, \dots, T_{1k} \\ T_{21}, T_{22}, T_{23}, \dots, T_{2k} \\ T_{31}, T_{32}, T_{33}, \dots, T_{3k} \end{Bmatrix}, \quad (5.2.9)$$

где  $i = 1, 2, 3$ , то после разложения ее по е. о. ф. получают коэффициенты  $T_{pn}^z$ , учитывающие уже не только историю процесса, но и прогноз.

Коэффициенты в прогностических зависимостях (5.2.1) или (5.2.7), согласно А. Л. Кацу, не могут быть жестко зафиксированными, они обязательно зависят от типа будущей макросиноптической ситуации. Определение типа будущей циркуляции производится синоптиком, который по прогностическим полям геопотенциала и с учетом собственного опыта решает вопрос о том, какая будет синоптическая обстановка в период, на который делается прогноз.

В настоящее время эта процедура широко применяется в СССР. Она используется в Москве, Ташкенте, Новосибирске, Владивостоке. Однако и она уже не удовлетворяет практическим требованиям, так как не позволяет получать более детализированный прогноз, например, по дням внутри декады или пентады, температуры или других элементов погоды. Для дальнейшего развития методики в гидрометцентре СССР ведутся исследования в направлении создания автоматизированной технологии обработки метеоинформации. Она получила название «линии среднерочных прогнозов». Схема такой линии, работающая в настоя-

щее время в опытном порядке, приведена на рис. 5.3. Методика себя хорошо зарекомендовала. Прогнозы имеют успешность, приведенную в табл. 5.3. Интересно, что такие оценки успешности были достигнуты только после внедрения в практику методики учета гидродинамических долгосрочных прогнозов, описанной выше. Метод ГСС в настоящее время, хотя и не является

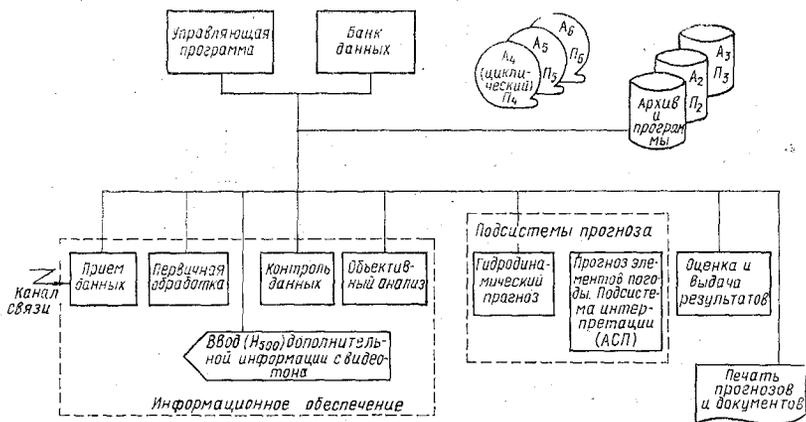


Рис. 5.3. Схема экспериментальной автоматизированной линии средних прогнозов, разработанной в Гидрометцентре СССР

окончательно доработанным, но уже дал ощутимый вклад в практику, а главное указал перспективу возможного использования той информации, которая может быть получена из современных МОЦ для повышения успешности долгосрочного прогноза.

Таблица 5.3

Оправдываемость прогнозов средней пятидневной температуры с помощью гидродинамико-синоптико-статистического метода

Способ прогноза	Методический прогноз				Инерционный прогноз			
	максимальная		минимальная		максимальная		минимальная	
Прогнозируемая температура								
Оценка	$\rho$	$\epsilon$	$\rho$	$\epsilon$	$\rho$	$\epsilon$	$\rho$	$\epsilon$
Лето	0,37	0,83	0,40	0,87	0,26	1,19	0,31	1,14
Осень	0,50	0,79	0,43	0,84	0,30	1,10	0,31	1,08
Зима	0,32	0,94	0,45	0,81	0,33	1,23	0,48	0,99
Весна	0,45	0,82	0,41	0,86	0,26	1,14	0,27	1,14
Год	0,41	0,85	0,42	0,85	0,28	1,16	0,34	1,09

## Глава 6. АНАЛИЗ АНОМАЛИЙ СРЕДНЕМЕСЯЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ С ПОМОЩЬЮ СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЙ

### 6.1. Пример решения задачи с помощью сопряженных функций

При разработке долгосрочных прогнозов синоптики часто используют методы, основанные на предположении о существовании зон или отдельных пунктов, состояние термического поля или циркуляционный режим которых оказывают влияние на формирование аномалий в районах, для которых составляется прогноз. Этот подход базируется на кропотливом субъективном анализе метеорологических архивов и нуждается в теоретическом обосновании. Разработка такого обоснования потребовала создания нового математического аппарата для анализа эволюционных задач математической физики. Основные положения теории этого нового подхода были сформулированы Г. И. Марчуком. В этой главе излагается методика и некоторые результаты диагностического анализа районов, влияющих на формирование аномалий среднемесячной температуры воздуха над территорией СССР, полученные в Гидрометцентре СССР на основе работ Г. И. Марчука.

Рассмотрим принцип исследования эволюционных задач, предложенный Г. И. Марчуком, на простом примере. Будем решать одномерную задачу теплопереноса, описываемую уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (6.1.1)$$

с периодическими краевыми условиями

$$T(t, x) = T(t, x + 2\pi) \quad (6.1.2)$$

и начальным условием

$$T(0, x) = T_0(x). \quad (6.1.3)$$

Отметим, что скорость потока жидкости  $u$ , коэффициент ее горизонтального перемешивания  $k$  могут быть различными непрерывными периодическими функциями координаты. Единственным ограничением служит требование  $k > 0$ , вытекающее из условий корректности этой задачи при  $t > 0$ .

Можно записать уравнение (6.1.1) в другой форме, если ввести оператор  $A$ , определенный равенством

$$A = u \frac{\partial ( )}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial ( )}{\partial x}. \quad (6.1.4)$$

Результат «действия» оператора  $A$  на функцию  $\varphi(t, x)$  представляет собой новую функцию и имеет вид

$$A\varphi = u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (6.1.5)$$

С помощью оператора  $A$  можно записать уравнение (6.1.1) в более компактной форме:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + AT = 0. \quad (6.1.6)$$

Все функции, которые могут «подходить» для решения интересующей нас задачи, не должны иметь в области их определения особых точек. Это означает, что для любой пары таких функций  $\varphi(t, x)$ ,  $\psi(t, x)$  существует интеграл

$$(\varphi, \psi) = \int_0^{2\pi} \varphi(t, x) \psi(t, x) dx. \quad (6.1.7)$$

Этот интеграл можно считать скалярным произведением функций  $\varphi$  и  $\psi$ . С его помощью удастся получать сопряженные операторы. Для нахождения операторов, сопряженных к данным на множестве интересующих нас функций, служит тождество Лагранжа, которое для оператора  $A$  имеет вид

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A^*\psi). \quad (6.1.8)$$

Найдем с помощью тождества (6.1.8) и определения скалярного произведения (6.1.7) оператор  $A^*$ , сопряженный с оператором  $A$ . Скалярное произведение  $(A\varphi, \psi)$  вычислим по формуле

$$(A\varphi, \psi) = \int_0^{2\pi} \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \psi dx. \quad (6.1.9)$$

В силу линейности определенного интеграла и с помощью формулы дифференцирования произведения можно преобразовать первое слагаемое, входящее в скалярное произведение, к виду

$$\int_0^{2\pi} u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \psi dx = \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial u \varphi \psi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial u \psi}{\partial x} \right) dx, \quad (6.1.10)$$

а второе слагаемое — к виду

$$\int_0^{2\pi} \psi \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial}{\partial x} \psi k \frac{\partial \varphi}{\partial x} - k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx. \quad (6.1.11)$$

За счет периодичности интересующих нас функций при интегрировании исчезнут первые слагаемые подынтегральных выраже-

ний в правых частях равенств (6.1.10) и (6.1.11). Но тогда аналогично равенству (6.1.11) можно записать

$$\int_0^{2\pi} \varphi \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \psi}{\partial x} dx = - \int_0^{2\pi} k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} dx, \quad (6.1.12)$$

а это означает, что

$$\int_0^{2\pi} \psi \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = \int_0^{2\pi} \varphi \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \psi}{\partial x} dx. \quad (6.1.13)$$

Теперь можно представить скалярное произведение  $(A\varphi, \psi)$  не только в форме (6.1.9), но с помощью равенств (6.1.10) и (6.1.13) и условия периодичности также и в форме

$$(A\varphi, \psi) = \int_0^{2\pi} \varphi \left( - \frac{\partial u \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx. \quad (6.1.14)$$

Однако в соответствии с определением скалярного произведения (6.1.7) и с учетом тождества Лагранжа (6.1.8) можно второй сомножитель в подынтегральном выражении (6.1.14) записать как  $A^*\psi$ , если определить оператор  $A^*$  по формуле

$$A^* = - \frac{\partial u(\ )}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial(\ )}{\partial x}. \quad (6.1.15)$$

Этот оператор и является сопряженным к оператору  $A$ , введенному равенством (6.1.5).

Запишем дополнительно к уравнению (6.1.6) аналогичное уравнение с сопряженным оператором

$$- \frac{\partial T^*}{\partial t} + A^* T^* = 0. \quad (6.1.16)$$

Здесь через  $T^*$  обозначено периодическое решение этого операторного уравнения. Домножая уравнение (6.1.6) на  $T^*$ , а уравнение (6.1.16) на  $T$ , интегрируя эти уравнения по  $x$  от 0 до  $2\pi$ , получим

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t}, T^* \right) + (AT, T^*) = 0, \quad (6.1.17)$$

$$- \left( T, \frac{\partial T^*}{\partial t} \right) + (T, A^* T^*) = 0. \quad (6.1.18)$$

Вычитая из первого уравнения второе с учетом тождества Лагранжа и формулы дифференцирования произведения, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (T, T^*) = 0$$

Интегрируя это равенство по времени от начального момента  $t = 0$  до момента, для которого дается прогноз  $t = \tau$ , приходим к равенству

$$\int_0^{2\pi} T(\tau, x) T^*(\tau, x) dx = \int_0^{2\pi} T(0, x) T^*(0, x) dx. \quad (6.1.19)$$

Для того чтобы использовать полезные свойства этого равенства, необходимо вернуться к сопряженному уравнению (6.1.16) и записать его в виде

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} + \frac{\partial \mu T^*}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial T^*}{\partial x} = 0 \quad (6.1.20)$$

и изучить его решение  $T^*$ .

Поскольку коэффициент температуропроводности  $k$  существенно положителен, то уравнение (6.1.20) можно решать только по времени назад. Обоснование этого факта можно найти в курсах математической физики, а качественно его легко понять. Действительно, уравнение теплопроводности, типа (6.1.1) описывает «размывание» исходного точечного источника тепла путем теплопроводности. Этот процесс необратим термодинамически и поэтому решение такой задачи по времени назад эквивалентно физически нереальному процессу «стягивания» размытого теплового пятна в точечный источник. Таким образом, чтобы иметь дело только с корректно поставленной задачей, необходимо в уравнении (6.1.20) сделать замену временной переменной на противоположно направленную. Это эквивалентно постановке задачи Коши для уравнения (6.1.20) в момент  $t = \tau$  и решению ее отрицательными шагами по времени. Учтя такой характер решения сопряженного уравнения, сформулируем для него такое начальное условие в момент  $t = \tau$ :

$$T^*(x, \tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [a, b] \\ 0 & \text{при } x \in [0, a [ \cup ] b, 2\pi]. \end{cases} \quad (6.1.21)$$

Далее можно решить сопряженную задачу и получить в результате функцию  $T^*(t, x)$  во все моменты времени от  $t = \tau$  до  $t = 0$ . Эту функцию мы назовем сопряженной функцией. Учитывая условие (6.1.21), преобразуем (6.1.19) к виду

$$\int_a^b T(\tau, x) dx = \int_0^{2\pi} T(0, x) T^*(0, x) dx. \quad (6.1.21)$$

Интеграл, стоящий в левой части этого равенства, можно с точностью до постоянного множителя интерпретировать как среднюю температуру на отрезке  $[a, b]$ :

$$\bar{T} = \frac{1}{b-a} \int_a^b T(\tau, x) dx. \quad (6.1.22)$$

Таким образом, зная решение сопряженной задачи Коши с начальным условием вида (6.1.21), можно получить функцию влияния начального поля температуры  $T(0, x)$  на среднюю температуру в некоторой области в момент прогноза  $T$ . Этой функцией влияния будет сопряженная функция  $T(0, x)$ . Именно возможность ее получения и является целью построения сопряженного оператора. В самом деле, если  $u$  и  $k$  в уравнении (6.1.11) являются известными функциями времени и пространственной координаты, то мы можем раз и навсегда определить функцию влияния начальных условий на результат прогноза, если нам известен сопряженный оператор.

## 6.2. Применение сопряженных функций в анализе и прогнозе аномалий среднемесячной температуры

Методика диагностического анализа месячных аномалий  $OT_{1000}^{500}$ , разработанная в Гидрометцентре СССР, основана на уравнении теплового баланса атмосферы, которое в сферической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{a \sin \theta} \left( \frac{\partial UT}{\partial \lambda} + \frac{\partial VT \sin \theta}{\partial \theta} \right) - \frac{K}{a^2} \nabla^2 T + cT = f(\theta, \lambda, t). \quad (6.2.1)$$

Смысл отдельных членов этого уравнения был разобран в главе 1, поэтому здесь ограничимся указанием, что через  $T(\theta, \lambda, t)$  обозначена среднемесячная температура на «среднем уровне» атмосферы, который будем считать расположенным на высоте 500 гПа поверхности. Напомним также, что член, пропорциональный температуре в левой части уравнения, главным образом, описывает излучение атмосферы, а в правой части функция  $f(\theta, \lambda, t)$  описывает источники и стоки энергии, не зависящие от температуры атмосферы непосредственно.

Ограничимся рассмотрением процессов, происходящих над северным полушарием, где уровень освещенности информацией значительно выше, чем над южным. Для задач такого масштаба естественными краевыми условиями являются: во-первых, условие периодичности по долготе

$$T(\theta, \lambda, t) = T(\theta, \lambda + 2\pi, t); \quad (6.2.2)$$

во-вторых, условие отсутствия потока тепла через экватор

$$\left( VT - \frac{K}{a^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta = \frac{\pi}{2}} = 0; \quad (6.2.3)$$

в-третьих, условие, не позволяющее в сферической системе координат образовываться особой точке у решения вблизи полюса, которое имеет вид

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \sin \theta \left( VT - \frac{K}{a} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right\} = 0. \quad (6.2.4)$$

Последнее часто называют условием ограниченности решения у полюса сферической системы координат. Поле скорости в атмосфере вблизи среднего уровня должно удовлетворять уравнению неразрывности в форме

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{\partial V \sin \theta}{\partial \theta} = 0. \quad (6.2.5)$$

Нас будет интересовать вопрос, какие районы северного полушария при фактическом поле ветра для избранного месяца определяют среднюю аномалию температуры в СССР, т. е. конкретно в широтно-долготном поясе  $47,5^\circ \leq \varphi \leq 67,5^\circ$  с. ш. и  $11,25^\circ \leq \lambda \leq 78,75^\circ$  в. д.

Для определения функции влияния необходимо ввести в рассмотрение сопряженную систему уравнений и краевых условий. Введем скалярное произведение функций в виде

$$(\varphi, \psi) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \psi a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\lambda. \quad (6.2.6)$$

Запишем уравнение (6.2.1) в операторной форме, введя оператор  $\Lambda$  по формуле

$$\Lambda = \frac{1}{a \sin \theta} \left( \frac{\partial U(\cdot)}{\partial \lambda} + \frac{\partial V \sin \theta(\cdot)}{\partial \theta} \right) - \frac{K}{a^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \lambda^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} \right) + c(\cdot), \quad (6.2.7)$$

для чего потребовалось раскрыть символ оператора Лапласа. Уравнение (6.2.1) приобретает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \Lambda T = f. \quad (6.2.8)$$

Теперь с помощью тождества Лагранжа можно найти сопряженный оператор  $\Lambda^*$ . Для этого выпишем скалярное произведение

$$(\Lambda \varphi, \psi) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Lambda \varphi \psi a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\lambda \quad (6.2.9)$$

и будем преобразовывать отдельные слагаемые подынтегрального выражения с помощью формул дифференцирования произведения и краевых условий задачи. При выполнении уравнения неразрывности (6.2.5) справедливо тождество

$$\psi \left( \frac{\partial U \varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial V \varphi \sin \theta}{\partial \theta} \right) = \left( \frac{\partial U \varphi \psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial V \varphi \psi \sin \theta}{\partial \theta} \right) - \varphi \left( \frac{\partial U \psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial V \psi \sin \theta}{\partial \theta} \right). \quad (6.2.10)$$

С другой стороны на основе тождеств

$$\psi \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \psi \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \sin^2 \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right), \quad (6.2.11)$$

$$\varphi \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \sin^2 \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \quad (6.2.12)$$

с помощью вычитания второго равенства из первого получается новое тождество

$$\psi \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = \varphi \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \left( \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right). \quad (6.2.13)$$

Теперь можно преобразовать скалярное произведение (6.2.9) к виду

$$\begin{aligned} (\Lambda \varphi, \psi) = & \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \left[ \frac{1}{a \sin \theta} \left( -\frac{\partial U \psi}{\partial \lambda} - \frac{\partial V \psi \sin \theta}{\partial \theta} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{K}{a^2} \nabla^2 \psi + c \psi \right] a^2 \sin \theta \, d\theta \, d\lambda + \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( a U \varphi \psi - \frac{K}{\sin \theta} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \right. \\ & \left. + \frac{K}{\sin \theta} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) d\theta \, d\lambda + \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \left( a V \varphi \psi - K \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \right. \\ & \left. + K \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) d\theta \, d\lambda. \quad (6.2.14) \end{aligned}$$

Если считать все функции, входящие в эти равенства, периодическими по  $\lambda$ , то второй интеграл в правой части равенства (6.2.14) обращается в нуль. Выполняя интегрирование по  $\theta$  в третьем слагаемом правой части и учитывая условия (6.2.3) и (6.2.4), это слагаемое можно представить в виде

$$\int_0^{2\pi} \left( K \sin \theta, \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} d\lambda. \quad (6.2.15)$$

Понятно, что эта величина будет обращаться в нуль, если выбрать крайние условия для функции  $\psi$  в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad (6.2.16)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (6.2.17)$$

Для функций  $\psi$ , удовлетворяющих этим ограничениям, равенство (6.2.14) можно рассматривать как тождество Лагранжа и определить сопряженный с  $\Lambda$  оператор  $\Lambda^*$  по формуле

$$\Lambda^* = - \frac{1}{a \sin \theta} \left( \frac{\partial U(\cdot)}{\partial \lambda} + \frac{\partial V \sin \theta(\cdot)}{\partial \theta} \right) - K \nabla^2(\cdot) + c(\cdot). \quad (6.2.18)$$

Когда известен сопряженный оператор, можно выписать уравнение, определяющее сопряженную функцию  $T^*(\theta, \lambda, t)$ , аналогично тому, как это делалось в предыдущем параграфе. Сопряженная задача имеет вид

$$-\frac{\partial T^*}{\partial t} - \frac{1}{a \sin \theta} \left( \frac{\partial U T^*}{\partial \lambda} + \frac{\partial V T^* \sin \theta}{\partial \theta} \right) - \frac{K}{a^2} \nabla^2 T^* + c T^* = 0 \quad (6.2.19)$$

или в операторной форме

$$-\frac{\partial T^*}{\partial t} + \Lambda^* T^* = 0. \quad (6.2.20)$$

Эта задача решается относительно функции  $T^*$ , которая должна быть периодической по  $\lambda$  и удовлетворять условиям (6.2.16) и (6.2.17). Корректное решение задачи может быть получено только при «движении во времени назад» от момента  $t=\tau$ , для которого делается прогноз, до момента  $t=0$ , который является исходным для прогноза.

Для лучшего понимания процесса формулировки начальных условий для функции  $T^*$  проделаем построения, аналогичные тем,

которые были предприняты для вывода равенства (6.1.20). Для этого домножим уравнение (6.2.7) на  $T^*$ , а уравнение (6.2.20) на  $T$ , проинтегрируем их по области определения задачи. (Этим мы найдем скалярное произведение соответствующих функций). Тогда

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}, T^*\right) + (\Lambda T, T^*) = (f, T^*), \quad (6.2.21)$$

$$-\left(T, \frac{\partial T^*}{\partial t}\right) + (T, \Lambda^* T^*) = 0. \quad (6.2.22)$$

Вычитая второе уравнение из первого с учетом тождества Лагранжа и интегрируя результат по времени, получим

$$(T, T^*) \Big|_{t=\tau} = (T, T^*) \Big|_{t=0} + \int_0^\tau (f, T^*) dt. \quad (6.2.23)$$

В предыдущем параграфе было показано, что такие равенства используются для определения средней по области аномалии. Средняя по интересующему нас сферическому прямоугольнику температура определяется равенством

$$\bar{T} = \frac{1}{G} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} T(\theta, \lambda, t) a^2 \sin \theta d\theta d\lambda. \quad (6.2.24)$$

где величина

$$G = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} a^2 \sin \theta d\theta d\lambda \quad (6.2.25)$$

представляет собой площадь поверхности рассматриваемого прямоугольника. Для получения с помощью равенства (6.2.23) средней температуры достаточно считать, что  $T^* = 1$  в интересующем нас сферическом прямоугольнике, а вне его — нулю. Это и является начальным условием для решения сопряженной задачи (6.2.19). Если получить по заданному полю скоростей временной ход  $T^*(\theta, \lambda, t)$  и, в конечном счете, функцию  $T^*(\theta, \lambda, 0)$ , то тем самым будет определен «вес», с которым начальные данные из разных участков полушария будут влиять на прогностическую температуру в заданной области. Это следует из формулы (6.2.23). Если раскрыть в ней символы скалярного произведения и учесть предыдущие рассуждения, то получим

$$\begin{aligned} \bar{T} = & \int_0^\tau \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} T^*(\theta, \lambda, 0) T(\theta, \lambda, 0) a^2 \sin \theta d\theta d\lambda + \\ & + \int_0^\tau \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^*(\theta, \lambda, t) T^*(\theta, \lambda, t) a^2 \sin \theta d\theta d\lambda dt. \end{aligned} \quad (6.2.26)$$

Поскольку, как показывает практика, основные изменения средней температуры атмосферы за месяц происходят за счет циркуляции, то большой интерес представляет изучение вклада первого слагаемого формулы (6.2.26) в среднюю температуру рассматриваемого района. На рис. 6.1 представлена функция влияния  $T_1^*(\theta, \lambda, 0)$  и  $T_2^*(\theta, \lambda, 0)$  для двух районов СССР (Европа и Сибирь), рассчитанные по данным о циркуляции за октябрь—ноябрь 1975 года. Значения функции на рисунке приведены в относительных единицах:

$$T^*(\theta, \lambda, 0) / \sqrt{(T^*(\theta, \lambda, 0), T^*(\theta, \lambda, 0))}.$$



Рис. 6.1. Нормированные значения функции влияния начального поля температуры на образование аномалий среднемесячной температуры: (а) в Европейской части СССР; (б) — в Сибири

Рис. 6.1 показывает, что для Европейского региона осенью имеют наибольшее значение начальные аномалии на юго-западе Европы и Северной Африке, а также в районе Гренландии. Для Сибири распределение влияющих участков иное. Наибольший вклад вносят здесь аномалии, возникающие в Арктике и Северной Европе. С помощью табл. 6.1 удается выяснить, какую роль играет в формировании аномалий температуры различие между реальными и климатическими циркуляциями.

Таблица 6.1

Диагноз аномалий  $OT_{1000}^{500}$ . Август 1980 год

Вид данных о циркуляции	Вклад		Аномалия, °С		Абсолютная погрешность $\Delta T$ °С
	$f(\theta, \lambda, t)$	$T(\theta, \lambda, 0)$	рассчитанная	фактическая	
Реальные	1,0	-2,9	-1,9	1,7	0,2
Климатические	1,0	-2,9	-1,9	1,7	0,2

Из табл. 6.1 видно, что замена реальных данных о циркуляции на климатические практически не отразилась на результатах прогноза. Конечно, этот факт объясняется и очень большой величиной района. Как показали численные эксперименты, при уменьшении района влияние использованного вида данных о циркуляции все же выявляется. Вклад источников и стоков тепла существенно превышает как роль отклонений циркуляции от климатической, так и роль начального распределения аномалии. Безусловно, эти результаты будут еще дополнены в последующих исследованиях, но уже сейчас ясно, что создана новая, перспективная методика диагностического анализа долгосрочных атмосферных процессов.

Как показали исследования Ш. А. Мусаеляна, В. П. Садокова и Д. Б. Штейнбока, возможно применение метода сопряженных функций и в прогностических целях. Основанием этому служит отмеченная выше сравнительно слабая зависимость осредненных по большому району аномалий температуры от аномалий циркуляции атмосферы. Это позволяет для каждого периода прогноза рассчитать сопряженные функции заранее по климатическим данным о циркуляции. Главная роль в формировании крупномасштабных аномалий в этом случае отводится источникам и стокам тепла. Традиционные параметризации, применяемые для описания источников и стоков в уравнении теплового баланса, не позволяют существенно улучшить качество прогнозов аномалий температуры. В работах Ш. А. Мусаеляна было выдвинуто положение о том, что влияние аномалий притоков тепла в системе атмосфера-океан-континент проявляется в поле температуры не сразу, а с некоторым запаздыванием. Это означает, что существуют асинхронные связи, которые до сих пор не учитывались при параметризации источников и стоков тепла в моделях, используемых в долгосрочном прогнозе. Например, одной из важнейших асинхронных связей является связь между аномалиями облачного покрова над океанами в теплый период и аномалиями температуры на континентах в последующий холодный период.

Методика учета указанных асинхронных связей разрабатывается в Гидрометцентре СССР. Это позволит создать модель прогноза осредненных по площади аномалий температуры на базе уравнения теплового баланса атмосферы, решаемого с помощью сопряженных функций. Предварительные эксперименты показали, что в ряде случаев такой подход позволяет получить хорошие результаты с большой заблаговременностью.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Вопросы предсказания погоды. Перевод с английского. Под редакцией Багрова Н. А. и Морского Г. И. — Л.: Гидрометеиздат, 1958. — 430 с.
2. Гейтс В. А., Баттен Е. С., Кейт А. Б., Нельсон А. Б. Двухуровневая модель общей циркуляции атмосферы Минца—Аракавы. — Л.: Гидрометеиздат, 1978. — 238 с.
3. Динамика атмосферных движений планетарного масштаба и гидродинамический прогноз погоды. Труды Гидрометеорологического центра СССР, вып. 86. — Л.: Гидрометеиздат, 1973. — 83 с.
4. Динамика крупномасштабных процессов атмосферы и океана. Труды Гидрометеорологического центра СССР, вып. 248. — Л.: Гидрометеиздат, 1982. — 124 с.
5. Динамика глобальных атмосферных процессов и прогноз погоды. Труды Главной Геофизической обсерватории им. А. И. Воейкова, вып. 410. — Л.: Гидрометеиздат, 1980. — 140 с.
6. Динамика крупномасштабных атмосферных процессов. Труды международного симпозиума 1965 г. Под редакцией Монина А. С. — М.: Наука, 1966. — 450 с.
7. Динамико-стохастический подход к анализу и прогнозу погоды. Труды Гидрометеорологического центра СССР, вып. 243. — Л.: Гидрометеиздат, 1982. — 128 с.
8. Лекции по численным методам краткосрочного прогноза погоды. — Л.: Гидрометеиздат, 1969. — 734 с.
9. Марчук Г. И. Численные методы решения задач динамики атмосферы и океана. — Л.: Гидрометеиздат, 1974. — 303 с.
10. Мезингер Ф., Аракава А. Численные методы, используемые в атмосферных моделях. — Л.: Гидрометеиздат, 1979. — 136 с.
11. Модели общей циркуляции атмосферы. Перевод с английского. Под редакцией Машковича С. А. — Л.: Гидрометеиздат, 1981. — 351 с.
12. Монин А. С. Введение в теорию климата. — Л.: Гидрометеиздат, 1982. — 246 с.
13. Мусаелян Ш. А. О природе некоторых сверхдлительных атмосферных процессов. — Л.: Гидрометеиздат, 1978. — 142 с.
14. Николаев Ю. В. Роль крупномасштабного взаимодействия океана и атмосферы в формировании аномалий погоды. — Л.: Гидрометеиздат, 1981. — 51 с.
15. Прогноз погоды на средние сроки. Труды Гидрометеорологического центра СССР, вып. 251. — Л.: Гидрометеиздат, 1982. — 84 с.
16. Пятьдесят лет Центру гидрометеорологических прогнозов. — Л.: Гидрометеиздат, 1979 — 183 с.
17. Старр В. П. Физика явлений с отрицательной вязкостью. — М.: Мир, 1971. — 260 с.
18. Теория климата. Перевод с английского. Под редакцией Гандина Л. С., Дубова А. С., Швеца Е. Е. — Л.: Гидрометеиздат, 1967. — 377 с.

19. Теоретические основы прогноза на средние сроки. Перевод с английского Под редакцией Гандина Л. С. — Л.: Гидрометеоздат, 1970. — 138 с.
  20. Физика атмосферы и проблемы климата: Под редакцией Голицына Г. С., Яглома А. М. — М.: Наука, 1980. — 261 с.
  21. Численные методы, используемые в атмосферных моделях. Перевод с английского. Под редакцией Садокова В. П. — Л.: Гидрометеоздат, 1982. — 360 с.
  22. Численные методы решения задач динамики атмосферы и океана. Перевод с английского и редакция Дмитриевой-Арраго Л. П., Руховца Л. В., Шнейерова Б. Е. — Л.: Гидрометеоздат, 1968. — 367 с.
-

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение . . . . .	3
<b>Глава 1. Применение уравнения притока тепла для прогноза аномалий температуры . . . . .</b>	<b>7</b>
1.1. Уравнения теплового баланса атмосферы и деятельного слоя подстилающей поверхности . . . . .	7
1.2. Прогноз аномалий средней месячной температуры по методу Е. Н. Блиновой . . . . .	10
1.3. Прогноз аномалий среднедекадной и среднемесячной температур по методу Г. И. Морского . . . . .	14
1.4. Прогноз аномалий среднемесячной температуры по методу Х. Адема . . . . .	18
<b>Глава 2. Изучение эволюции длинных волн с помощью простейших моделей динамики атмосферы . . . . .</b>	<b>24</b>
2.1. Представление метеорологических полей рядами Фурье . . . . .	24
2.2. Волны Россби . . . . .	35
2.3. Спектральные методы решения баротропного уравнения вихря . . . . .	40
2.4. Взаимосвязь динамики и теплообмена в атмосфере . . . . .	47
<b>Глава 3. Модели общей циркуляции атмосферы и долгосрочный прогноз погоды . . . . .</b>	<b>53</b>
3.1. Основные сведения о моделировании циркуляции атмосферы с помощью ЭВМ . . . . .	53
3.2. Описание источников и стоков энергии в моделях общей циркуляции атмосферы и оценка их точности . . . . .	59
3.3. Погрешности численной реализации моделей общей циркуляции атмосферы . . . . .	65
3.4. Точность воспроизведения климата с помощью моделей общей циркуляции атмосферы . . . . .	72
3.5. Методы оценки результатов численных экспериментов по гидродинамическому долгосрочному прогнозу . . . . .	77
3.6. Применение моделей общей циркуляции атмосферы для прогноза погоды на средние сроки . . . . .	84
3.7. Прогноз среднемесячных характеристик атмосферы с помощью моделей общей циркуляции . . . . .	93
3.8. Реакция моделей общей циркуляции атмосферы на аномалии температуры поверхности океана . . . . .	99
<b>Глава 4. Предсказуемость атмосферных процессов . . . . .</b>	<b>105</b>
4.1. Понятие о пределе предсказуемости атмосферных процессов . . . . .	105
4.2. Предсказуемость малокомпонентных динамических систем . . . . .	108

	Стр.
4.3. Современные оценки предела предсказуемости атмосферных процессов . . . . .	116
4.4. Возможности прогноза за пределами предсказуемости . . . . .	118
<b>Глава 5. Использование гидродинамических расчетов в оперативном прогнозе на средние сроки . . . . .</b>	<b>122</b>
5.1. Постановка задачи об использовании гидродинамических расчетов в оперативной практике. Представление метеорологических полей с помощью естественных ортогональных функций . . . . .	122
5.2. Гидродинамико-синоптико-статистический метод прогноза средних пятидневных температур . . . . .	131
<b>Глава 6. Анализ аномалий среднемесячной температуры с помощью сопряженных функций . . . . .</b>	<b>135</b>
6.1. Пример решения задачи с помощью сопряженных функций . . . . .	135
6.2. Применение сопряженных функций в анализе и прогнозе аномалий среднемесячной температуры . . . . .	139
<b>Л и т е р а т у р а . . . . .</b>	<b>146</b>

*ИГОРЬ НИКОЛАЕВИЧ РУСИН*

**ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ  
ДОЛГОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА ПОГОДЫ**

Учебное пособие

Редактор *Т. В. Иващенко*

Корректор *Л. В. Ломакина*

Обложка художника *Н. И. Кулагина*

---

Сдано в набор 27.10.83.	Подписано в печать 18.09.84.	М-16597.
Формат 60×90 <sup>1</sup> / <sub>16</sub> .	Бумага тип. № 2.	Лит. гарн. Печать высокая.
Печ. л. 9,4.	Уч.-изд. л. 9,6.	Тираж 600 экз. Зак. 341.
Темплан 1984 г., поз. 146.		Цена 55 коп.

ЛПИ им. М. И. Калинина. 195251. Ленинград, Политехническая ул., 29

---

Типография ВСОК ВМФ