Ж. Ван Мигем

ЭНЕРГЕТИКА АТМОСФЕРЫ

Перевод с английского
под редакцией
и с предисловием
Л. Т. МАТВЕЕВА

ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ ЛЕНИНГРАД 1977

УДК 551.51

Перевод с английского Ю. Л. Матвеева

В монографии последовательно излагаются основы и современное состояние одного из наиболее важных разделов динамики атмосферы — учения об источниках и преобразовании энергии атмосферных процессов. В первой части монографии приведен вывод уравнений баланса различных видов энергии в жидкой среде вообще и в земной атмосфере в частности. Вторая часть посвящена анализу и упрощению уравнений баланса энергии применительно к конкретным системам движения. При этом наибольшее внимание уделено энергетике крупномасштабных процессов общей циркуляции атмосферы.
Книга представляет интерес для широкого круга специалистов — метеорологов, океанологов, гидромехаников, разрабатывающих проблемы динамики атмосферы и гидросферы Земли, а также для студентов и аспирантов университетов и гидрометеорологических институтов.

$\text{В}\ \dfrac{20807\text{-}151}{069(02)\text{-}77}\,9\text{-}77$

Предисловие редактора

Проблема источников и преобразования энергии в земной атмосфере, особенно если понимать ее достаточно широко, относится к числу наиболее важных проблем наук о Земле. Становится все более очевидным, что только на основе глубокого изучения энергетики атмосферных процессов можно наметить пути решения проблемы прогноза погоды, в том числе долгосрочного прогноза.

Предлагаемая вниманию читателя монография известного зарубежного ученого, крупного специалиста по динамике атмосферы Ж. Ван Мигема принадлежит к числу наиболее фундаментальных изданий последних лет. В ней последовательно излагается проблема переноса и преобразования различных видов энергии в земной атмосфере.

Основное внимание в монографии уделено обоснованию и анализу тех систем уравнений, с помощью которых описываются процессы преобразования энергии в жидкой среде вообще и в атмосфере Земли в частности. Общие вопросы этой проблемы рассматриваются в первой части монографии. Вторая, наиболее значительная по объему часть монографии посвящена анализу и упрощению уравнений баланса энергии применительно к конкретным системам движения атмосферы. При этом наибольшее внимание уделено энергетике крупномасштабных процессов, составляющих сущность общей циркуляции атмосферы.

Поскольку Ж. Ван Мигем понимает энергетику атмосферы достаточно широко, он рассматривает также движения малого и среднего масштаба, которые наиболее существенны для приземного и пограничного слоев, а в случае развития конвекции и для свободной атмосферы.

Как указывает сам автор, в основе монографии лежит курс лекций, который он читал студентам университета, специализирующимся в области динамической метеорологии. Для систематического изучения одного из наиболее важных разделов динамики атмосферы — ее энергетики — и предназначается в первую очередь монография Ван Мигема. В этом смысле она выгодно отличается от некоторых монографий, которые перегружены многочисленными ссылками (нередко на работы третьестепенного характера), но лишены руководящей идеи и авторской оценки излагаемых вопросов.

Обобщению исследований по энергетике атмосферы уделялось внимание и в ряде работ, опубликованных до выхода в свет книги Ван Мигема. Однако это обобщение, как правило, сводилось к краткому изложению проблемы или же носило характер отступлений при рассмотрении основного вопроса.

Ближе других к монографии Ван Мигема стоит монография Э. Н. Лоренца «Природа и теория общей циркуляции атмосферы». Более того, книгу Ван Мигема можно рассматривать как математическую основу для изучения богатой по содержанию монографии Лоренца, при чтении которой встречает затруднения даже подготовленный читатель.

В последние годы выполнено значительное число исследований, в которых наряду с другими рассматривались и вопросы преобразования энергии. Это прежде всего численное моделирование общей циркуляции атмосферы, взаимодействия ее с океаном и формирования климата Земли, разрабатываемое в Советском Союзе и США. Большое внимание проблеме энергетики атмосферы уделяется в Программе исследований глобальных атмосферных процессов (ПИГАП) и в таких ее подпрограммах, как Комплексный энергетический (КЭНЭКС), Полярный (ПОЛЭКС) и Тропический (ТРОПЭКС) эксперименты. Проведение широких экспериментальных исследований поможет восполнить те пробелы в опытных данных, которые так необходимы для углубления теории общей циркуляции атмосферы, долгосрочных прогнозов погоды и колебаний климата.

Представляется, что монография Ван Мигема, в которой четко и последовательно обсуждены все основные вопросы сохранения и преобразования различных форм энергии в атмосфере, будет полезна не только для студентов и аспирантов, но и для исследователей, разрабатывающих наиболее актуальные проблемы физики и динамики атмосферы.

Л. Т. Матвеев

Предисловие к русскому изданию

В монографии «Энергетика атмосферы» я стремился подчеркнуть большое значение энергетических процессов, связанных с полями скорости и температуры атмосферных систем движения.

В предисловии к монографии на английском языке я выразил надежду, что данный обзор современных знаний об энергетике атмосферы будет полезен для студентов, активно изучающих динамическую метеорологию, и воодушевит многих из них на самостоятельные исследования в этой важной области атмосферных наук. В самом деле, мы нуждаемся в более глубоком понимании взаимосвязи динамики, термодинамики и энергетики процессов, происходящих в атмосфере.

Перевод монографии на русский язык расширяет сферу ее распространения и вселяет надежду на то, что значительно большее число молодых читателей приобщится к исследовательской работе в области атмосферной энергетики. По этой причине я очень признателен проф. Л. Т. Матвееву, который взял на себя нелегкую задачу представить советскому читателю перевод монографии на русский язык.

Ж. Ван Мигем

Май 1976 г.

Предисловие

В предлагаемой вниманию читателей монографии предпринята попытка изложить современные представления об энергетике атмосферных движений.

Первая часть монографии содержит теоретические основы учения о процессах перехода энергии в атмосфере. На основе общих физических принципов уравнения энергии получены здесь в форме уравнений баланса.

Во второй части монографии рассмотрена энергетика атмосферных процессов различных пространственных и временны́х масштабов. Насколько позволяет современное состояние наших знаний, я попытался дать представление о взаимодействии систем движения различного масштаба.

В основу монографии положен курс лекций по механике атмосферы, который читался на протяжении последних десяти лет в Брюссельском университете и на семинаре отделения аэрологии Королевского метеорологического института Бельгии. Чтобы избежать по возможности дублирования и пропусков, я переработал эти лекции, сохранив, однако, лекционный стиль и форму изложения.

Я надеюсь, что такого рода обзор энергетики атмосферных процессов будет полезен для хорошо успевающих студентов и побудит многих из них к самостоятельной исследовательской работе в этой фундаментальной области наук об атмосфере.

Большую помощь оказали мне профессора П. А. Шеппард, П. Дефризе и Ж. Ван Изакер. Их конструктивные предложения позволили существенно улучшить содержание книги. Приношу благодарность моим коллегам, которые были столь великодушны, что не пожалели времени и сил, чтобы прочесть первый вариант рукописи.

Я особенно благодарен всем авторам и издателям, которые разрешили мне процитировать их работы и воспроизвести иллюстрации. Особо следует указать, что некоторые из иллюстраций заимствованы из трудов Американского метеорологического общества (рис. 2а, 5, 9) и Чикагского университета (рис. 8).

Уккль

Сентябрь 1971 г.

ЧАСТЬ I

Основные уравнения энергии

1

Введение

Уравнения динамики и энергетики жидких систем можно привести к простому виду уравнения баланса. Этот вид позволяет наиболее прямо интерпретировать уравнения движения и соответствующие энергетические процессы на основе понятий потока и скоростей образования и превращения энергии (см. главу 2).

Рассмотрим физические величины, которые входят в классические уравнения движения и энергии (см. главу 3) некоторого объема τ атмосферного воздуха, а именно: плотность воздуха ρ, атмосферное давление p, абсолютную температуру воздуха T, тензор $\boldsymbol{P}$ вязких напряжений Навье-Стокса и скорость движения воздуха $\mathbf{v}$ по отношению к поверхности земли (скорость ветра). В действительности эти величины осреднены по пространственному и временно́му интервалам, которые несколько *больше*, чем средний путь пробега (10^{-5} см при нормальных условиях вблизи поверхности земли, 10^{-4} см на высоте 25 км, 10^{-2} см на высоте 50 км и 10 см на высоте 100 км) молекул воздуха (линейный размер 10^{-8} см) и среднее время между столкновениями молекул (10^{-10} с при нормальных условиях), но несколько *меньше*, чем линейные размеры и время существования наименьших из вихрей. Согласно Дридену [15], такие вихри имеют размер порядка 10^{-3} см и время существования порядка 10^{-3} с, однако по Хинце [30] при умеренных скоростях (<100 м$\cdot$с$^{-1}$) минимальные линейные размеры вихрей едва ли меньше 1 мм. На вихри такого размера преобладающее влияние оказывают молекулярные эффекты, поэтому движение в подобных вихрях не турбулентное, а вязкое. Кинетическая энергия еще более мелких вихрей столь мала, что ею можно пренебречь.

Другими словами, классические уравнения движения и энергии (см. главу 3) справедливы для масштабов, заключенных между молекулярным масштабом и размером наименьших вихрей. Средние значения не зависят от размера пространственно-временно́й области, использованной при их определении, при условии, что размеры области заключены между молекулярным масштабом и размером наименьших вихрей. Физические величины, осредненные по такой области, входят в уравнения энергии, приведенные в главе 3. Эти уравнения описывают движение ламинарного вязкого потока (гладкие и квазипараллельные линии тока); однако при осреднении физических величин по пространственному и временно́му интервалам, которые больше, чем линейный размер и время существования наименьших вихрей, уравнения движения такого вида уже несправедливы. При отсутствии верхнего предела для размеров и времени существования вихрей средние значения перестают быть независимыми от масштабов осреднения. При таких масштабах осреднения уравнения энергии, приведенные в главе 3, уже несправедливы и не могут прямо использоваться при изучении энергетики атмосферы (см. главу 4).

2

Уравнение баланса

Пусть в момент времени t в жидкости выделен объем τ, масса которого $M \equiv \int\limits_{\tau} \rho\, dt$. Обозначим через F произвольную величину или свойство (масса, кинетическая энергия, внутренняя энергия и т. п.), характеризующие рассматриваемый объем в целом. Если dm — масса элементарного объема $d\tau$ жидкости в момент времени t, то плотность ρ жидкости определяется с помощью соотношения $dm = \rho\, d\tau$, при этом ρ — функция времени и пространственных координат x^1, x^2, x^3 в системе координат, неподвижной относительно Земли. Аналогично, согласно определению, имеем: $dF = f\, dm = f\rho\, d\tau$, где dF — количество физической величины F, содержащееся в $d\tau$ в момент t, а f — удельное (локальное) значение величины F; f — функция t и эйлеровых переменных x^1, x^2, x^3. Непосредственно из определения следует интегральная форма величины F: $F = \int\limits_{\tau} f\rho\, d\tau$.

Ясно, что локальное изменение интегральной величины F за единицу времени

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\tau} f\rho\, d\tau = \int\limits_{\tau} \frac{\partial}{\partial t}(f\rho)\, d\tau$$

равно разности между скоростью образования величины F в объеме τ и скоростью оттока величины F через поверхность σ, ограничивающую объем τ. Таким образом, интегральная форма уравнения баланса (сохранения) величины F имеет вид

$$\int\limits_{\tau} \frac{\partial}{\partial t}(f\rho)\, d\tau = \int\limits_{\tau} \sum (F)\, d\tau - \oint\limits_{\sigma} C_{\mathrm{N}}(F)\, d\sigma, \tag{2.1}$$

где $C_{\mathrm{N}}(F)$ — составляющая потока $\mathbf{C}(F)$ величины F вдоль внешней нормали N к поверхности σ; $\sum (F)$ — скорость образования ($\sum > 0$) или уничтожения ($\sum < 0$) величины F в единичном объеме. Величины $\mathbf{C}$ и $\sum$ — функции эйлеровых переменных x^1, x^2, x^3 и времени t. Поле вектора $\mathbf{C}$ характеризует перенос F в рассматриваемом объеме жидкости, а поле скалярной величины $\sum(F)$ — пространственно-временнóе распределение источников и стоков величины F. Привлекая теорему Остроградского, уравнение (2.1) перепишем в виде [116, 117]

$$\int_\tau \left(\frac{\partial}{\partial t}(f\rho) + \operatorname{div} \mathbf{C}(F) - \sum (F) \right) d\tau = 0.$$

Поскольку это уравнение справедливо для любого объема τ, уравнению баланса можно придать также дифференциальную (локальную) форму

$$\frac{\partial}{\partial t}(f\rho) + \operatorname{div} \mathbf{C}(F) = \sum (F). \tag{2.2}$$

Уравнение баланса, подобное (2.2), можно установить также для векторной величины (количества движения, например; см. п. 3.1) или тензора. В последнем случае поток представляет собой тензор на один порядок выше, а скорость образования — тензор того же порядка, что и рассматриваемая физическая величина.

Согласно уравнению баланса (2.2), скорость локального изменения величины ρf в неподвижной точке пространства определяется конвергенцией $-\operatorname{div} \mathbf{C}(F)$ потока $\mathbf{C}(F)$ через поверхность единичного объема и скоростью $\sum(F)$ образования F в том же единичном объеме. Поток $\mathbf{C}(F)$ перераспределяет по объему τ величину F, образуемую со скоростью $\sum(F)$.

Во избежание недопонимания следует заметить, что если $\mathbf{A}$ — некоторый вектор и $\alpha \equiv \operatorname{div} \mathbf{A}$ — скаляр, то замена потока $\mathbf{C}$ на $\mathbf{C} + \mathbf{A}$ и интенсивности источника $\sum$ на $\sum + \alpha$ не изменяет уравнения баланса (2.2). Таким образом, нельзя однозначно определить $\mathbf{C}(F)$ и $\sum(F)$. Если же, однако, выбор $\mathbf{C}(F)$ произведен, то $\sum(F)$ определено однозначно. При выборе следует учитывать физический смысл F (см. главы 3 и 6).

В наиболее общем случае поток $\mathbf{C}(F)$ представляется в форме $\mathbf{C}(F) = \rho f \mathbf{v} + \mathbf{C}'(F)$, где $\rho f \mathbf{v}$ — конвективный поток и $\mathbf{C}'(F)$ — неконвективный поток величины F в жидкости. Вводя это выражение $\mathbf{C}(F)$ в уравнение (2.1), получаем

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_\tau f\rho \, d\tau = -\oint_\sigma \rho f v_{\mathrm{N}} \, d\sigma - \oint_\sigma C'_{\mathrm{N}}(F) \, d\sigma + \int_\tau \sum (F) \, d\tau. \tag{2.1'}$$

Здесь два первых члена в правой части представляют количество физической величины F, переносимое через поверхность σ объема τ воздушным потоком (конвективный процесс) и процессами неконвективного происхождения (радиационный перенос тепла; работа, совершаемая окружающей средой на границе механической системы, и др.). Много примеров уравнения баланса приводится в главах 3 и 6.

Интегральная физическая величина F консервативна в жидкой системе, если тождественно выполняется равенство

$$\sum (F) + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \tag{2.3}$$

где $\mathbf{A}$ — произвольный вектор. В самом деле, в этом случае количество ρf величины F в неподвижном единичном объеме изменяется только под влиянием втока и (или) оттока F через ограничивающую поверхность этого объема, причем поток через поверхность равен $\mathbf{C} + \mathbf{A}$. Следует заметить, что равенство $\sum (F) = 0$ есть достаточное, но не необходимое условие консервативности F (см. главу 18).

Классический пример уравнения баланса — хорошо известное уравнение неразрывности жидкости

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0. \tag{2.4}$$

В этом случае $f \equiv 1$, $F \equiv M = \int\limits_{\tau} \rho \, d\tau = \int\limits_{\tau} dm$, $\mathbf{C}(M) \equiv \rho \mathbf{v}$, $\sum (M) \equiv 0$ и

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \int\limits_{\tau} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau = -\oint\limits_{\sigma} \rho v_{\mathrm{N}} \, d\sigma.$$

Для того чтобы можно было установить интегральную и дифференциальную формы (2.1) и (2.2) уравнения баланса физической величины F, объем τ, занятый массой M, должен быть в момент времени t неподвижным по отношению к системе координат. Локальное изменение за единицу времени количества $dF = f\rho \, d\tau$ величины F, заключенного в элементарном объеме $d\tau$, в момент t выражается производной $(\partial/\partial t)(dF) = (\partial/\partial t)(f\rho) \, d\tau$; здесь $\partial/\partial t$ — оператор частного дифференцирования по времени t.

Теперь рассмотрим объем τ, движущийся вместе с массой M жидкости и ограниченный поверхностью σ. Индивидуальное изменение за единицу времени количества dF физической величины F, заключенного в элементарном объеме $d\tau$, который движется вместе с элементарной массой $dm = \rho \, d\tau$ жидкости, выражается производной $(d/dt)(dF) = (d/dt)(\rho f \, d\tau)$, где d/dt — оператор индивидуального дифференцирования по времени t. С учетом классического соотношения $(d/dt)(d\tau) = (\operatorname{div} \mathbf{v})\, d\tau$ уравнение неразрывности (2.4) можно записать в наиболее кратком виде

$$\frac{d}{dt}(\rho\, d\tau) = 0. \tag{2.4'}$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}(dF) = \frac{d}{dt}(\rho f\, d\tau) = \rho \frac{df}{dt}\, d\tau \tag{2.5}$$

или в развернутом виде

$$\frac{d}{dt}(dF) = \rho\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla f\right)d\tau = \left\{\frac{\partial}{\partial t}(\rho f) + \operatorname{div}(\rho f \mathbf{v})\right\}d\tau, \tag{2.5'}$$

где ∇ — классический оператор набла или дельта-оператор (в декартовой системе координат проекциями символического вектора ∇ служат $\partial/\partial x^1$, $\partial/\partial x^2$, $\partial/\partial x^3$). Индивидуальная скорость изменения $\rho\,(df/dt)$ величины F в единичном объеме складывается из локальной скорости изменения $\partial\,(f\rho)/\partial t$ величины F в том же объеме и переноса величины F со скоростью $\rho f \mathbf{v}$ через ограничивающую единичный объем поверхность, которая в момент t предполагается неподвижной, так что $\rho\,(df/dt)$ равно скорости образования F в единичном объеме при отсутствии неконвективных потоков.

Интегрируя (2.5) по объему τ, получаем

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_{\tau} \rho f\, d\tau = \int\limits_{\tau} \rho \frac{df}{dt}\, d\tau = \frac{\partial F}{\partial t} + \oint\limits_{\sigma} \rho f v_{\mathrm{N}}\, d\sigma. \tag{2.6}$$

В частности, имеем $dM/dt = \partial M/\partial t + \oint\limits_{\sigma} \rho v_{\mathrm{N}}\, d\sigma = 0$. При взятии локальной производной $\partial F/\partial t$ величина F — функция времени t в объеме τ, неподвижном в момент t по отношению к системе координат; при определении индивидуальной производной dF/dt величина F — функция времени в объеме τ, движущемся с жидкостью. Эти две производные равны между собой, если масса M составляет замкнутую систему ($v_{\mathrm{N}} = 0$ всюду на поверхности σ).

3

Энергетика ламинарного потока

Основными уравнениями при изучении энергетических процессов в атмосфере, рассматриваемой как жидкая система, служат уравнение первого начала термодинамики, выражающее сохранение полной энергии замкнутой жидкой системы [см. уравнение (3.13)], и уравнение механической энергии [см. уравнение (3.4) или уравнение (3.12)], получаемое из уравнений движения жидкости (в форме Эйлера).

3.1. Уравнение механической энергии

Используя введенные выше (см. главу 1) обозначения ρ, p, $\boldsymbol{P}$, $\mathbf{v}$, обозначая через $\boldsymbol{\Omega}$ угловую скорость вращения Земли и через ϕ геопотенциал (потенциальная энергия единичной массы воздуха), уравнение движения атмосферы в векторной форме можно записать в виде

$$\rho\mathbf{a} \equiv \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \rho\mathbf{v} = -\nabla p + \operatorname{div}\boldsymbol{P} - \rho\nabla\phi, \tag{3.1}$$

где $d/dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla$ — знак индивидуальной производной по времени. Атмосферные приливы исключены из рассмотрения, геопотенциал ϕ не зависит от времени. Преобразовав величину $\rho\,(d\mathbf{v}/dt)$ с учетом уравнения неразрывности (2.4), приведем уравнение (3.1) к виду уравнения баланса (2.2), а именно

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{v}) + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}\mathbf{v} + p\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{P}) = -2\boldsymbol{\Omega} \times \rho\mathbf{v} - \rho\nabla\phi, \tag{3.2}$$

где $\boldsymbol{\delta}$ — тензор Кронекера. Локальную форму (3.2) уравнения баланса количества движения $\mathbf{M} \equiv \int\limits_{\tau} \rho\mathbf{v}\, d\tau$ жидкости, заключенной в объеме τ, можно интерпретировать следующим образом. Местное приращение количества движения за единицу времени в единичном объеме вызвано конвергенцией потока $\rho\mathbf{v}\mathbf{v} + p\boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{P}$, втекающего через поверхность рассматриваемого единичного объема, и образованием количества движения в том же объеме со скоростью $-\rho\,\nabla\phi - 2\Omega \times \rho\mathbf{v}$; здесь $-\rho\,\nabla\phi$ и $-2\Omega \times \rho\mathbf{v}$ — соответственно сила тяжести и кориолисова сила, действующие на единичный объем. В данном случае имеем $f \equiv \mathbf{v}$, $F \equiv \mathbf{M}$, $\mathbf{C}(\mathbf{M}) \equiv \rho\mathbf{v}\mathbf{v} + p\delta - \boldsymbol{P}$ и $\sum(\mathbf{M}) \equiv -\rho\,\nabla\phi - 2\Omega \times \rho\mathbf{v}$; тензор $\rho\mathbf{v}\mathbf{v}$ определяет конвективный поток и тензор $p\delta - \boldsymbol{P}$ — неконвективный поток количества движения $\mathbf{M}$. Следует заметить, что поток $\mathbf{C}(\mathbf{M})$ включает не только количество движения, переносимое движущейся жидкостью (конвективный поток $\rho\mathbf{v}\mathbf{v}$), но также внутренние напряжения в жидкости (неконвективный поток $p\delta - \boldsymbol{P}$) и количество движения, производимое внешними силами (притяжение Земли) и инерционными силами (кориолисова и центробежная силы, порожденные вращением Земли).

В декартовой системе координат x^1, x^2, x^3 тензор напряжений $\boldsymbol{P}$ имеет компоненты $P_{ij} = P_{ji} = 2\mu\left(e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{kk}\right)$, где δ_{ij} — компоненты тензора Кронекера δ ($\delta_{ij} \equiv 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ij} \equiv 1$ при $i = j$), μ — коэффициент вязкости (порядка 10^{-4} г·см$^{-1}$·с$^{-1}$ в нижней атмосфере),

$$e_{ij} \equiv \frac{1}{2}\left(\partial v^i/\partial x^j + \partial v^j/\partial x^i\right)$$

есть компоненты симметричной части тензора сдвига $\nabla\mathbf{v}$; v^1, v^2, v^3 — проекции скорости $\mathbf{v}$; ∇ — знак вектора, проекции которого равны $\partial/\partial x^1$, $\partial/\partial x^2$, $\partial/\partial x^3$. Коэффициент кинематической вязкости $\eta \equiv \mu/\rho$ увеличивается с ростом среднего свободного пути молекул и средней скорости их движения. В атмосфере этот коэффициент имеет порядок 10^{-1} см^2·с$^{-1}$ вблизи уровня моря, 10^0 в слое 15—20 км, 10 в слое 30—40 км и 10^4 в слое 80—90 км.

Легко доказывается, что

$$\boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v} \equiv P_{ij}e_{ij} \equiv 4\mu\left\{(e_{23})^2 + (e_{31})^2 + (e_{12})^2\right\} + \\ + \frac{2}{3}\mu\left\{(e_{22} - e_{33})^2 + (e_{33} - e_{11})^2 + (e_{11} - e_{22})^2\right\} > 0. \quad (3.3)$$

В формуле (3.3) повторение индексов i и j обозначает суммирование по этому индексу.

Умножая скалярно уравнение (3.1) на скорость $\mathbf{v}$, получаем хорошо известное уравнение механической энергии

$$\rho\frac{d}{dt}(k + \phi) = \mathbf{v}\cdot(-\nabla p + \operatorname{div}\boldsymbol{P}), \quad (3.4)$$

где $k \equiv \frac{1}{2}\mathbf{v}^2$ — кинетическая энергия единичной массы воздуха. Из уравнения (3.4) следует, что скорость индивидуального увеличения механической энергии $K + \Phi \equiv \int\limits_{\tau} (k + \phi)\, \rho d\tau$ равна работе, совершаемой за единицу времени силой давления $-\nabla p$ и силой вязкости $\operatorname{div} \boldsymbol{P}$ (все величины отнесены к единичному объему).

3.2. Поток механической энергии

Путем добавления уравнения неразрывности (2.4) уравнению (3.4) можно придать вид уравнения баланса [см., например, уравнение (3.12)], но это уравнение может иметь различную математически эквивалентную форму [как следствие тождества (3.6), например, см. также конец п. 3.4]. Физические соображения позволяют, однако, выбрать ту или иную форму. Рассмотрим единичный объем воздуха. Работу, совершаемую за единицу времени окружающим воздухом на границе выделенного единичного объема, можно представить в хорошо известной дивергентной форме

$$-\operatorname{div}(p\mathbf{v} - \boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v}). \tag{3.5}$$

Эту работу можно, таким образом, интерпретировать как конвергенцию потока

$$p\mathbf{v} - \boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v}$$

механической энергии [117, 129].

Поверхностная работа (3.5) давления p и вязких напряжений $\boldsymbol{P}$ представляет собой приток механической энергии к рассматриваемому единичному объему из окружающей среды. Только часть механической энергии переходит в кинетическую энергию. Сравнивая тождество

$$-\operatorname{div}(p\mathbf{v} - \boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v}) \equiv -\mathbf{v}\cdot(\nabla p - \operatorname{div}\boldsymbol{P}) - (p \operatorname{div}\mathbf{v} - \boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v}) \tag{3.6}$$

с уравнением (3.4), легко устанавливаем, что такой частью служит выражение

$$-\mathbf{v}\cdot\nabla p + \mathbf{v}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{P},$$

т. е. работа, совершаемая за единицу времени градиентом давления $-\nabla p$ и силой вязкости $\operatorname{div} \boldsymbol{P}$. Оставшаяся часть

$$-p \operatorname{div}\mathbf{v} + \boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v} \tag{3.7}$$

представляет собой работу, затрачиваемую на расширение ($\operatorname{div}\mathbf{v} > 0$) или сжатие ($\operatorname{div}\mathbf{v} < 0$), а также деформацию (сдвиг скорости $\nabla\mathbf{v} \neq 0$) единичного объема воздуха.

3.3. Уравнение внутренней энергии

Оставшаяся часть (3.7) работы превращается в другие формы энергии. Согласно первому началу термодинамики, такой энергией является тепло или, более точно, внутренняя энергия воздуха. В самом деле, подставляя (3.6) в (3.4), получаем

$$\rho \frac{d}{dt}(k+\phi) + \operatorname{div}(p\mathbf{v} - \boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v}) = p \operatorname{div} \mathbf{v} - \boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v}. \qquad (3.8)$$

Левая часть этого уравнения представляет собой разность между скоростью индивидуального изменения в единичном объеме механической энергии

$$\rho \frac{d(k+\phi)}{dt}$$

и притоком (3.5) механической энергии к рассматриваемому единичному объему за единицу времени. На основе первого начала термодинамики эта разность должна быть равна количеству тепла ρQ, получаемому единичным объемом за единицу времени, за вычетом приращения внутренней энергии $\rho\,(de/dt)$; здесь, как и всюду, e — внутренняя энергия единичной массы. Следуя [114], можно записать

$$p \operatorname{div} \mathbf{v} - \boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v} = \rho Q - \rho\,(de/dt)$$

или

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho Q + \boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v} - p \operatorname{div} \mathbf{v}. \qquad (3.9)$$

Из этого уравнения следует, что выражение (3.7) представляет собой скорость, с которой механическая энергия $K+\Phi$ переходит во внутреннюю энергию $E \equiv \int\limits_{\tau} \rho e\, d\tau$.

Следует отметить существенную разницу между основными уравнениями энергии (3.4) и (3.9): скорость индивидуального изменения механической энергии $k+\phi$ зависит от скорости движения $\mathbf{v}$ и распределения в пространстве давления p и составляющих тензора вязких напряжений $\boldsymbol{P}$ [см. уравнение (3.4)]; в то же время скорость индивидуального изменения внутренней энергии e зависит от давления p, составляющих тензора $\boldsymbol{P}$ и распределения в пространстве скорости движения $\mathbf{v}$ (расширение или сжатие, $\operatorname{div} \mathbf{v} > 0$ или $\operatorname{div} \mathbf{v} < 0$, и деформация воздушного потока, рассматриваемого как сплошная среда [см. уравнение (3.9)]. Скорость притока тепла к единичному объему можно представить в виде

$$\rho Q = -\operatorname{div} \mathbf{W}, \qquad (3.10)$$

где $\mathbf{W}$ — поток тепла, обусловленный теплопроводностью и радиацией. Второй из этих двух процессов играет более важную роль; исключение составляет очень тонкий слой вблизи земной поверхности, в котором значение теплопроводности больше, чем радиации (см. главу 9).

3.4. Уравнения баланса энергии

Вставляя (3.10) в (3.9) и объединяя уравнение неразрывности (2.4) с уравнениями (3.8) и (3.9), получаем *уравнение баланса внутренней энергии* [117, 129]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \operatorname{div}(\rho e \mathbf{v} + \mathbf{W}) = -p \operatorname{div}\mathbf{v} + \boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v} \tag{3.11}$$

и *уравнение баланса механической энергии* [117, 129]

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(k+\phi) + \operatorname{div}\{\rho(k+\phi)\mathbf{v} + p\mathbf{v} - \boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v}\} = p \operatorname{div}\mathbf{v} - \boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v}. \tag{3.12}$$

Поскольку правые части уравнений (3.11) и (3.12) отличаются лишь по знаку, полная энергия $k+\phi+e$ единичной массы воздуха удовлетворяет уравнению баланса такого же типа, как и классическое уравнение неразрывности (2.4), а именно

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\rho(k+\phi+e)\} + \operatorname{div}\{\rho(k+\phi+e)\mathbf{v} + p\mathbf{v} - \boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{W}\} = 0. \tag{3.13}$$

Последнее уравнение показывает, что единственным процессом, под влиянием которого изменяется в неподвижном объеме полная энергия $K+\Phi+E$, служит вток или отток энергии через поверхность этого объема. Уравнение (3.13) выражает принцип сохранения полной энергии $K+\Phi+E$ в механически и термически изолированной системе.

Уравнения баланса (3.11) и (3.12) можно истолковать так.

1. Локальное изменение внутренней энергии за единицу времени в неподвижном единичном объеме обусловлено конвергенцией потока энергии

$$\mathbf{C}(E) \equiv \rho e \mathbf{v} + \mathbf{W},$$

втекающей через границу объема, и переходом механической энергии во внутреннюю со скоростью (3.7)

$$\sum(E) \equiv -p \operatorname{div}\mathbf{v} + \boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v}.$$

2. Локальное изменение механической энергии $(k+\phi)$ за единицу времени в неподвижном единичном объеме определяется конвергенцией потока энергии

$$\mathbf{C}(K+\Phi) \equiv \rho(k+\phi)\mathbf{v} + p\mathbf{v} - \boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v},$$

втекающей через границу объема, и переходом внутренней энергии в механическую со скоростью

$$\sum(K+\Phi) \equiv p \operatorname{div}\mathbf{v} - \boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v}.$$

Член $\boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v}$ всегда положителен. Интегрируя уравнения (3.11) и (3.12) по некоторому конечному объему τ, получаем:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\tau} \rho e\, d\tau = -\oint\limits_{\sigma} \rho e v_{\mathrm{N}}\, d\sigma - \oint\limits_{\sigma} W_{\mathrm{N}}\, d\sigma + \int\limits_{\tau} (-p \operatorname{div}\mathbf{v} + \boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v})\cdot d\tau \qquad (3.11')$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t}(K+\Phi) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\tau} \rho(k+\phi)\, d\tau = -\oint\limits_{\sigma} \rho(k+\phi) v_{\mathrm{N}}\, d\sigma - \oint\limits_{\sigma} \{p v_{\mathrm{N}} - (\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v})_{\mathrm{N}}\}\, d\sigma + \int\limits_{\tau} (p \operatorname{div}\mathbf{v} - \boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v})\, d\tau \qquad (3.12')$$

или с учетом (2.6)

$$\frac{dE}{dt} = -\oint\limits_{\sigma} W_{\mathrm{N}}\, d\sigma + \int\limits_{\tau} (-p \operatorname{div}\mathbf{v} + \boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v})\, d\tau$$

и

$$\frac{d}{dt}(K+\Phi) = -\oint\limits_{\sigma} \{p v_{\mathrm{N}} - (\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v})_{\mathrm{N}}\}\, d\sigma + \int\limits_{\tau} (p \operatorname{div}\mathbf{v} - \boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v})\, d\tau.$$

Здесь σ — поверхность объема τ; индекс N обозначает составляющую вектора вдоль внешней нормали к σ. Уравнения (3.11′) и (3.12′) можно интерпретировать так:

1) скорость локального изменения внутренней энергии E в неподвижном объеме τ определяется потоком внутренней энергии из окружающей среды внутрь объема через поверхность σ, потоком тепла через ту же поверхность и процессами, протекающими внутри выделенного объема τ;

2) скорость локального изменения механической энергии в неподвижном объеме τ определяется потоком механической энергии через поверхность σ из окружающей объем τ среды, работой, совершаемой той же средой на поверхности σ, и процессами, протекающими внутри объема τ.

Складывая уравнения (3.11′) и (3.12′), находим уравнение баланса полной энергии $K+\Phi+E$ в объеме τ [20]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(K+\Phi+E)=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\tau}\rho(k+\phi+e)\,d\tau=-\oint\limits_{\sigma}\rho(k+\phi+e)\times$$

$$\times v_{\mathrm{N}}\,d\sigma-\oint\limits_{\sigma}W_{\mathrm{N}}\,d\sigma-\oint\limits_{\sigma}\{pv_{\mathrm{N}}-(\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v})_{\mathrm{N}}\}\,d\sigma \qquad (3.13')$$

или с учетом (2.6)

$$\frac{d}{dt}(K+\Phi+E)=-\oint\limits_{\sigma}W_{\mathrm{N}}\,d\sigma-\oint\limits_{\sigma}\{pv_{\mathrm{N}}-(\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v})_{\mathrm{N}}\}\,d\sigma.$$

Изменение полной энергии в объеме τ складывается из: а) потока полной энергии через поверхность σ, поступающей в объем τ из окружающей среды; б) потока тепла через ту же поверхность σ; в) механической энергии, поступающей в объем τ под влиянием работы, совершаемой средой на поверхности σ.

Сравнивая уравнения баланса энергии (3.11′), (3.12′) и (3.13′), нетрудно установить, что энергетические процессы, происходящие внутри воздушной массы, представляют собой процессы перехода внутренней энергии E в механическую энергию $K+\Phi$ и наоборот.

Воздушная масса, ограниченная поверхностью σ, представляет замкнутую систему, если $v_{\mathrm{N}}=0$ в каждой точке σ в любой момент времени t. Однако и при выполнении этого условия масса взаимодействует со средой вследствие наличия молекулярной диффузии, выпадения осадков и турбулентности [20]. Влияние молекулярной диффузии пренебрежимо мало́ в атмосфере ниже примерно 100 км. Эффектом выпадения осадков также пренебрегаем, хотя некоторые соображения о роли фазовых переходов воды в атмосфере и будут приведены несколько позже (см. главу 7). Энергетика же турбулентного потока детально рассматривается в нескольких главах книги (см. главу 6 и часть II).

Возвратимся к тождеству (3.6). Рассматривая один лишь вязкий член, имеем тождество

$$-\mathbf{v}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{P}\equiv\boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v}+\operatorname{div}(-\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v}), \qquad (3.6')$$

где, согласно (3.3), (3.4), (3.8) и (3.9), произведение $-\mathbf{v}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{P}$ представляет количество механической энергии, уничтожаемой вязкостью в единичном объеме за единицу времени; слагаемое $\boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v}$ (>0) — количество механической энергии, переходящей под влиянием вязкости в тепло; и слагаемое $\operatorname{div}(-\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v})$ —

отток механической энергии из того же единичного объема за единицу времени. Тождество (3.6′) показывает, что уничтожаемая вязкостью механическая энергия, которая не успевает перейти в тепло, выносится наружу через границу объема, при этом поток энергии равен $-\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v}$. Следует заметить, что $-\mathbf{v}\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{P} > 0$, если конвергенция $\{\operatorname{div}(-\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v}) < 0\}$ потока энергии $-\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v}$ под влиянием вязкости не перекрывает скорости превращения $\{\boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v} > 0\}$ механической энергии в тепло. Такое особое состояние может наблюдаться только в некоторых местах жидкости.

Если теперь в соотношении (3.6) рассмотреть только те члены, которые содержат давление, то получим тождество

$$p\operatorname{div}\mathbf{v} - (-\mathbf{v}\cdot\nabla p) \equiv \operatorname{div} p\mathbf{v}, \tag{3.6″}$$

где $p\operatorname{div}\mathbf{v}$ ($\gtrless 0$) представляет собой количество внутренней энергии (тепла), переходящей в единичном объеме за единицу времени в механическую энергию; $-\mathbf{v}\cdot\nabla p$ — количество механической энергии, производимой в том же единичном объеме и за единицу времени силой давления $-\nabla p$, действующей на единичный объем; $\operatorname{div} p\mathbf{v}$ — отток механической энергии из единичного объема за единичный интервал времени. Тождество (3.6″) показывает, что количество внутренней энергии, превращающееся в единичном объеме за единицу времени в механическую энергию вследствие расширения воздуха, но не способствующее индивидуальному приращению механической энергии воздуха, переносится наружу из единичного объема через его границу; этот перенос представлен потоком энергии $p\mathbf{v}$.

С математической точки зрения в правых частях уравнений баланса (3.11) и (3.12) присутствует некоторая неопределенность. В самом деле, добавление произвольного члена к каждой из скоростей превращения $p\operatorname{div}\mathbf{v}$ и $\boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v}$ не изменяет правых частей этих уравнений. Поэтому определение скоростей превращения должно опираться на физические аргументы, иначе говоря, скорости превращения должны быть увязаны с хорошо определенными физическими процессами [41]. Физические процессы можно описать в общих чертах следующим образом.

1. Скорость $p\operatorname{div}\mathbf{v}$ ($\gtrless 0$) обратимого адиабатического превращения внутренней энергии в механическую представляет собой работу, совершаемую за единицу времени и в единичном объеме против давления p расширяющегося воздуха (давление p направлено внутрь объема, на который оно оказывает воздействие). Знак скорости превращения $p\operatorname{div}\mathbf{v}$ зависит от того, будет ли поток воздуха расширяться ($\operatorname{div}\mathbf{v} > 0$) или сжиматься ($\operatorname{div}\mathbf{v} < 0$).

2. Скорость $\boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v}$ [>0, см. формулу (3.3)] необратимого неадиабатического превращения механической энергии во внутреннюю представляет собой работу (за ту же единицу времени и в единичном объеме) вязких напряжений в движущемся воздухе при наличии сдвига скорости $\nabla\mathbf{v}$. В движущейся жидкости скорость превращения $\boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v}$ всегда положительна; это указывает на то, что потери механической энергии за счет трения всегда связаны с превращением механической энергии во внутреннюю (тепло) со скоростью $\boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v}$. Привлекая *уравнение баланса потенциальной энергии* [117, 129]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)+\operatorname{div}(\rho\phi\mathbf{v})=g\rho w, \tag{3.14}$$

полученное из очевидного тождества $\rho\,(d\phi/dt)\equiv g\rho w$, уравнение (3.11) можем преобразовать в *уравнение баланса так называемой полной потенциальной энергии* $e+\phi$ [50] (см. п. 14.1)

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\rho(\phi+e)\}+\operatorname{div}\{\rho(\phi+e)\,\mathbf{v}+\mathbf{W}\}=g\rho w-p\operatorname{div}\mathbf{v}+\boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v}, \tag{3.15}$$

а уравнение (3.12) — в *уравнение баланса кинетической энергии*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k)+\operatorname{div}(\rho k\mathbf{v}+p\mathbf{v}-\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v})=-g\rho w+p\operatorname{div}\mathbf{v}-\boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v}. \tag{3.16}$$

Здесь, как обычно, g — ускорение свободного падения; w — вертикальная составляющая скорости движения; $g\rho w$ — работа, совершаемая за единицу времени против силы тяжести единичным объемом воздуха, или индивидуальная скорость возрастания потенциальной энергии в единичном объеме воздуха [см. уравнение (3.14)].

Движение вверх или вниз преобразует потенциальную энергию в кинетическую энергию k или кинетическую энергию в потенциальную. Эти процессы являются обратимыми и адиабатическими. Из уравнений (3.14) и (3.16) следует, что кинетическая энергия является единственным непосредственным источником или стоком потенциальной энергии.

Энергетические уравнения (3.15) и (3.16) можно проинтерпретировать так же, как уравнения (3.11) и (3.12).

1. Кинетическая энергия ρk фиксированного единичного объема изменяется под влиянием конвергенции потока энергии

$$\mathbf{C}(K)\equiv\rho k\mathbf{v}+p\mathbf{v}-\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v}$$

через границу этого объема и образования энергии в этом объеме со скоростью

$$\sum (K) \equiv -g\rho w + p \operatorname{div} \mathbf{v} - \boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v}.$$

Таким образом, образование кинетической энергии складывается в действительности из двух процессов: а) превращения внутренней энергии e в кинетическую энергию k со скоростью $p \operatorname{div} \mathbf{v} - \boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v}$ и б) превращения потенциальной энергии ϕ в кинетическую энергию со скоростью $-g\rho w$.

2. Полная потенциальная энергия $\rho(\phi + e)$ фиксированного единичного объема изменяется под влиянием конвергенции потока энергии

$$\mathbf{C}(\Phi + E) \equiv \rho(\phi + e)\mathbf{v} + \mathbf{W}$$

через границу этого объема и образования энергии в этом объеме со скоростью

$$\sum (\Phi + E) \equiv g\rho w - p \operatorname{div} \mathbf{v} + \boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v}.$$

Выше было отмечено, что на основе уравнения энергии (3.4) можно получить различного вида уравнения баланса. В самом деле, подстановка тождества (3.6) в уравнения баланса (3.11) и (3.12) приводит эти уравнения к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \operatorname{div}(\rho e\mathbf{v} + \mathbf{W} + p\mathbf{v} - \boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{v}(\nabla p - \operatorname{div} \boldsymbol{P}), \qquad (3.11'')$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\rho(k + \phi)\} + \operatorname{div}\{\rho(k + \phi)\mathbf{v}\} = -\mathbf{v}(\nabla p - \operatorname{div} \boldsymbol{P}). \qquad (3.12'')$$

Система уравнений (3.11) и (3.12) эквивалентна системе уравнений (3.11″) и (3.12″). Ясно, что добавление некоторого вектора, дивергенция которого равна нулю, к вектору потока в левой части уравнения баланса не изменяет этого уравнения. В более общем случае добавление произвольного вектора к вектору потока не изменит уравнения баланса при условии добавления дивергенции этого произвольного вектора к правой части того же уравнения (см. главу 2). Принятие уравнений (3.11) и (3.12) и отказ от (3.11″) и (3.12″) или любых других эквивалентных систем уравнений баланса основаны на том факте, что передача механической энергии от окружающей среды к рассматриваемому единичному объему воздуха происходит вследствие конвергенции потока механической энергии $p\mathbf{v} - \boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v}$. Следовательно, этот поток энергии должен присутствовать в уравнении механической энергии и отсутствовать в уравнении баланса внутренней энергии.

Правые части уравнений (3.11)—(3.16) представляют собой скорость образования соответственно внутренней энергии (e), механической энергии ($k+\phi$), полной энергии ($k+\phi+e$), потенциальной энергии (ϕ), полной потенциальной энергии ($\phi+e$) и кинетической энергии (k). Члены $g\rho w$ ($\gtreqless 0$), $p \operatorname{div} \mathbf{v}$ ($\gtreqless 0$), $\boldsymbol{P} \cdot \nabla \mathbf{v}$ (>0) входят в каждую из скоростей по одному разу и повторяются дважды с противоположными знаками. Из этого обстоятельства и того факта, что каждый член описывает хорошо известный процесс, следует, что эти три члена можно рассматривать как скорости превращения трех видов энергии (e, k и ϕ) друг в друга [51, 52, 117, 119, 121, 122, 129], при этом скорость образования полной энергии $e+k+\phi$ равна нулю [см. уравнение (3.13)].

3.5. Выбор системы координат

В динамической метеорологии в качестве абсолютной системы координат принимается геоцентрическая система, начало координат которой совпадает с центром массы Земли и которая сориентирована таким образом, что видимые звезды неподвижны относительно нее. Относительная система координат движется по отношению к абсолютной; следовало бы специально [115] предположить, что это движение представляет собой вращение твердого тела с переменной угловой скоростью $\Omega \equiv \Omega(t)$ относительно оси a, неподвижно закрепленной в абсолютной системе координат. Для простоты в качестве абсолютной возьмем декартову систему координат XYZ, в качестве относительной — другую декартову систему координат xyz. Для того чтобы описать движение жидкости в этих двух координатных системах, обозначим через $\mathbf{V}$ абсолютную скорость элемента жидкости в произвольной точке A в любой момент времени t, а через $\mathbf{v}$ относительную скорость в той же точке и в тот же момент времени. Хорошо известно, что

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}. \qquad (3.17)$$

Здесь $\mathbf{R} = \overrightarrow{A'A}$; A' — ортогональная проекция A на ось вращения a; $\boldsymbol{\Omega} \equiv \boldsymbol{\Omega}(t)$ — переменная угловая скорость вращения системы координат xyz относительно системы координат XYZ.

Теперь введем дифференциальные операторы

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + V_X \frac{\partial}{\partial X} + V_Y \frac{\partial}{\partial Y} + V_Z \frac{\partial}{\partial Z},$$

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z},$$

где V_X, V_Y, V_Z — проекции скорости $\mathbf{V}$ в абсолютной системе координат; v_x, v_y, v_z — проекции скорости $\mathbf{v}$ в относительной системе координат. Эти дифференциальные операторы позволяют оценить скорость индивидуального изменения любой величины вдоль абсолютной и относительной траектории движения соответственно. Во избежание недоразумений следует подчеркнуть, что локальные производные по времени в правых частях операторов D/Dt и d/dt означают не одно и то же: локальная производная по времени $\partial/\partial t$ в первом операторе представляет собой частную производную по времени при закрепленных пространственных координатах X, Y, Z; во втором же операторе пространственные переменные x, y, z предполагаются закрепленными, когда берется частная производная по времени. Применительно к скалярной и векторной величинам имеем соответственно

$$\frac{D}{Dt}(\cdots) = \frac{d}{dt}(\cdots) \tag{3.18}$$

и

$$\frac{D}{Dt}(\cdots) = \frac{d}{dt}(\cdots) + \mathbf{\Omega} \times (\cdots). \tag{3.19}$$

Подстановка (3.17) в (3.19) дает соотношение

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \Omega^2\mathbf{R} + \mathbf{\Omega}' \times \mathbf{R} + 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}, \tag{3.20}$$

где $D\mathbf{V}/Dt$ — абсолютное ускорение жидкого элемента в точке A в момент времени t; $d\mathbf{v}/dt$ — соответствующее относительное ускорение; $\mathbf{\Omega}'$ — производная от $\mathbf{\Omega}$ по времени t.

Уравнение неразрывности в абсолютной и относительной системах координат имеет форму уравнения (2.4), а именно

$$\frac{D\rho_1}{Dt} + \rho_1 \operatorname{div} \mathbf{V} = 0 \text{ и } \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{3.21}$$

Имеем, очевидно,

$$\rho_1 (X, Y, Z, t) = \rho (x, y, z, t), \tag{3.22}$$

где ρ_1 — плотность жидкости, представленная как функция переменных X, Y, Z и t; ρ — та же самая плотность, выраженная как функция переменных x, y, z и t. Поскольку $\operatorname{div} (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{R}) \equiv 0$, то с учетом соотношений (3.17) и (3.18) можем заключить, что две формы уравнения неразрывности одинаковы.

В абсолютной системе координат XYZ уравнение движения в векторной форме имеет вид

$$\rho_1 \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla P + \operatorname{div} \boldsymbol{P} - \rho_1 \nabla \phi_{(a)}, \tag{3.23}$$

где $P \equiv P(X, Y, Z, t)$ — давление в точке $A(X, Y, Z)$ в момент времени t; $\boldsymbol{P}$ — тензор вязких напряжений в той же точке и в тот же момент времени; $\phi_{(a)} \equiv \phi_{(a)}(X, Y, Z)$ — потенциал внешних сил. Заменяя в последнем уравнении $D\mathbf{V}/Dt$ по соотношению (3.20), получаем уравнение движения в относительной системе координат

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \operatorname{div} \boldsymbol{P} - \rho \nabla \phi - \rho \boldsymbol{\Omega}' \times \mathbf{R} - 2\rho \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}, \tag{3.23'}$$

где

$$\phi \equiv \phi_{(a)} - \frac{1}{2} \Omega^2 \mathbf{R}^2, \tag{3.24}$$

$p = p(x, y, z, t)$ — давление в той же точке $A(x, y, z)$ и в тот же момент времени t.

Ясно, что

$$P(X, Y, Z, t) = p(x, y, z, t) \tag{3.25}$$

и

$$\nabla P = \nabla p. \tag{3.26}$$

Более того, можно отметить, что $\boldsymbol{P}$ представляет собой также один и тот же вектор в обеих системах координат, хотя тензор напряжений $\boldsymbol{P}$ имеет различные проекции в этих двух системах координат. Предположим теперь, что векторы $\boldsymbol{\Omega}$ и $\nabla \phi_{(a)}$ расположены в одной плоскости. В этом случае

$$(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) \cdot \nabla \phi_{(a)} = 0, \tag{3.27}$$

так что потенциал $\phi_{(a)}$, выраженный как функция координат x, y, z, не зависит явно от времени t. Потенциал ϕ также независим явно от времени, если, тем более, угловая скорость $\boldsymbol{\Omega}$ постоянная ($\boldsymbol{\Omega}' \equiv 0$). Именно такой случай справедлив в отношении Земли; в этом частном случае уравнение (3.23′) переходит в уравнение (3.1).

Умножая уравнение (3.23) на $\mathbf{V}$, а (3.23′) на $\mathbf{v}$, получаем уравнения механической энергии в системах координат XYZ и xyz соответственно:

$$\rho_1 \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2} \mathbf{V}^2 + \phi_{(a)}\right) = -\mathbf{V} \cdot \nabla P + \mathbf{V} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{P}, \tag{3.28}$$

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \phi\right) + \frac{1}{2} \rho \mathbf{R}^2 \frac{d\Omega^2}{dt} + \rho \boldsymbol{\Omega}' \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{v} \cdot \nabla p + \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{P}, \tag{3.28'}$$

при этом считается справедливым (3.27). Вычитая левые и правые части уравнений (3.28) и (3.28′) и принимая во внимание соотношения (3.17), (3.22) и (3.26), находим

$$\frac{1}{2}\rho\frac{d}{dt}(\mathbf{V}^2-\mathbf{v}^2)+\frac{1}{2}\rho\Omega^2\frac{d\mathrm{R}^2}{dt}-\rho\boldsymbol{\Omega}'\cdot(\mathbf{R}\times\mathbf{v})=$$
$$=(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R})\cdot(-\nabla p+\operatorname{div}\boldsymbol{P}). \tag{3.29}$$

Из уравнений движения (3.23) и (3.23′) и соответствующих механической энергии уравнений (3.28) и (3.28′) следует, что кинетическая энергия и потенциальная энергия единичной массы имеют разные выражения в системах координат XYZ и xyz: они равны $\mathbf{V}^2/2$ и $\phi_{(a)}$ в абсолютной и $\mathbf{v}^2/2$ и ϕ в относительной системе координат соответственно.

На основе первого начала термодинамики, записанного для единичного объема движущейся жидкости, получаем уравнение баланса энергии в системе координат XYZ:

$$\rho_1\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{2}\mathbf{V}^2+\phi_{(a)}+e_{(a)}\right)=\rho_1 Q+\operatorname{div}(-P\mathbf{V}+\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{V}). \tag{3.30}$$

Согласно этому уравнению, в абсолютном пространстве скорость индивидуального изменения полной энергии, заключенной в единичном объеме, равна притоку энергии к этому объему. Приток энергии к единичному объему складывается из притока тепла $\rho_1 Q$ (Q — приток тепла к единице массы, выраженный как функция переменных X, Y, Z и t) и работы $\operatorname{div}(-P\mathbf{V}+\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{V})$, совершаемой окружающей средой на границе того же единичного объема.

Привлекая соотношение (3.17) и учитывая равенства (3.25) и (3.26), а также тождества $\operatorname{div}(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R})\equiv 0$ и $\boldsymbol{P}\cdot\nabla(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R})\equiv 0$ (последнее тождество — следствие симметрии тензора $\boldsymbol{P}$), можем записать

$$\operatorname{div}(-P\mathbf{V}+\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{V})=\operatorname{div}(-p\mathbf{v}+\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v})+(-\nabla p+\operatorname{div}\boldsymbol{P})\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R}). \tag{3.31}$$

Сравнивая теперь (3.31) и (3.29), находим

$$\operatorname{div}(-P\mathbf{V}+\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{V})=\operatorname{div}(-p\mathbf{v}+\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v})+\frac{\rho}{2}\frac{d}{dt}(\mathbf{V}^2-\mathbf{v}^2)+$$
$$+\frac{\rho}{2}\Omega^2\frac{d\mathrm{R}^2}{dt}-\rho\boldsymbol{\Omega}'\cdot(\mathbf{R}\times\mathbf{v}). \tag{3.32}$$

Принимая во внимание (3.18), (3.22) и (3.32), уравнение (3.30) запишем в виде

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \phi + e_{(a)}\right) + \frac{\rho}{2} \mathbf{R}^2 \frac{d\Omega^2}{dt} + \rho \mathbf{\Omega}' \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{v}) =$$
$$= \rho Q + \operatorname{div}(-p\mathbf{v} + \boldsymbol{P} \cdot \mathbf{v}). \tag{3.33}$$

Главный вывод, вытекающий из первого начала термодинамики, состоит в том, что удельная внутренняя энергия $e_{(a)}$ зависит только от параметров состояния (давления, плотности, ...). Поскольку эти параметры — скалярные величины, то

$$\frac{De_{(a)}}{Dt} = \frac{de}{dt} \tag{3.34}$$

и

$$e_{(a)}(P, \rho_1, \ldots) = e(p, \rho, \ldots), \tag{3.35}$$

где слева и справа мы имеем одинаковые функции давления P или p, плотности ρ_1 или ρ, ...

Если приток тепла Q (к единичной массе за единицу времени) обусловлен неконвективным потоком тепла $\mathbf{W}$ (под влиянием радиации или/и теплопроводности), то

$$\rho_1 Q = -\operatorname{div} \mathbf{W} = \rho q, \tag{3.36}$$

где q — приток тепла к единичной массе, выраженный как функция переменных x, y, z и t; поток $\mathbf{W}$ одинаков в системах координат XYZ и xyz.

С учетом соотношений (3.34), (3.35) и (3.36) уравнение (3.33), выражающее первое начало термодинамики для движущейся жидкости, в системе координат xyz принимает следующий окончательный вид:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \phi + e\right) + \frac{1}{2} \mathbf{R}^2 \frac{d\Omega^2}{dt} + \rho \mathbf{\Omega}' \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{v}) =$$
$$= \rho q + \operatorname{div}(-p\mathbf{v} + \boldsymbol{P} \cdot \mathbf{v}). \tag{3.30$'$}$$

Уравнения механической энергии (3.28) и (3.28′), с одной стороны, и термодинамические уравнения (3.30) и (3.30′) — с другой, имеют один и тот же вид в абсолютной и относительной системах координат тогда, и только тогда, когда скорость вращения второй системы по отношению к первой постоянна. Если $\mathbf{\Omega}' \equiv 0$, то существование в системе координат XYZ потенциальной функции $\phi_{(a)}$, независимой от времени, предопределяет существование потенциальной функции ϕ в системе координат xyz, также независимой от времени. Этот благоприятный случай реализуется на Земле [см. уравнения (3.4) и (3.13)]. В этом случае $\mathbf{\Omega}$ — постоянная угловая скорость вращения Земли, $\phi_{(a)}$ — потенциал силы притяжения, ϕ — геопотенциал, $\mathbf{v}$ — скорость движения воздуха, p — атмосферное давление, ρ — плотность воздуха.

Вернемся к уравнениям энергии (3.30) и (3.30′). Исключая $(D/Dt)\,(\mathbf{V}^2/2+\phi_{(a)})$ из (3.28) и (3.30) и $(d/dt)\,(\mathbf{v}^2/2+\phi)$ из (3.28′) и (3.30′), получаем классические уравнения

$$\rho_1 Q = \rho_1 \frac{De_{(a)}}{Dt} + P\,\mathrm{div}\,\mathbf{V} - \boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{V}, \tag{3.37}$$

$$\rho q = \rho \frac{de}{dt} + p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - \boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v}. \tag{3.37′}$$

Эти уравнения имеют одинаковый вид даже и в том случае, когда вращение вокруг фиксированной оси a происходит с переменной скоростью $\mathbf{\Omega}$. Уравнение (3.37′) и (3.11) тождественны.

Уравнения энергии можно получить в произвольной движущейся системе обобщенных координат. Система координат может двигаться или как твердое тело, или как деформируемое тело [13, 120].

4

Турбулентное движение жидкости

4.1. Среднее и турбулентное движение

В метеорологии приходится иметь дело с широким спектром атмосферных движений: от движений микромасштаба (наименьший микромасштаб характеризует тепловое движение молекул) до движений макромасштаба (наибольший масштаб имеет зональный поток — его горизонтальный размер порядка 10^7 м). Однако движения, соответствующие левому концу спектра, т. е. вихри размером меньше 10^{-3} м, можно не рассматривать, поскольку их кинетическая энергия пренебрежимо мала (см. главу 1 и [30]). Вследствие того что в атмосфере одновременно существуют системы движения различного масштаба, уравнениям динамики и энергетики можно придать такой вид, при котором в них будут содержаться лишь средние значения физических величин; они только и представляют интерес.

Временно́е и (или) пространственное осреднение отфильтровывает те турбулентные движения, масштаб которых меньше пространственного и временно́го интервалов осреднения. Эти турбулентные движения представлены флуктуациями физических величин по отношению к соответствующим средним значениям. Однако разделение движения на *среднее* и *турбулентное* полностью зависит от выбора пространственно-временно́й области, для которой определены средние значения. Размер этой области фиксирует масштаб среднего движения. Все вихри большего размера вносят вклад в среднее движение, определенное средними значениями физических величин ρ, p, $\mathbf{v}$, ... Все вихри меньшего размера, исключенные в процессе осреднения, вносят вклад в турбулентное движение, определенное соответствующими флуктуациями тех же самых физических величин.

Для того чтобы получить репрезентативные средние значения и соответствующие флуктуации (см. главу 5) величин ρ, p, $\mathbf{v}$, ..., необходимо проявить осторожность при выборе размеров пространственно-временно́й области осреднения. Четкое разделение на среднее и турбулентное движение будет надежным тогда, и только тогда, когда пространственно-временна́я область осреднения включает очень большое число вихрей, размер которых меньше размера области осреднения, и очень малую часть вихрей, размер которых больше области осреднения. В то же самое время размеры пространственно-временнóй области осреднения не должны быть равны или почти равны размерам какого-либо одного вихря. При этих условиях мгновенное движение можно разделить на медленно изменяющееся среднее движение и быстро колеблющееся турбулентное движение (см. главу 3 в [49]).

Для того чтобы определить подходящим образом область осреднения, необходимо знать порядок величины флуктуаций скорости (или любой другой метеорологической величины — температуры, удельной влажности и т. д.). Энергетический спектр турбулентных вихрей — это серия кривых, изображающих зависимость квадрата амплитуды флуктуаций физической величины от периода и (или) линейных размеров вихрей для разных по порядку величины времен их существования. Другими словами, каждая из этих кривых описывает вклад флуктуаций различного периода или частоты в изменчивость рассматриваемых физических величин. Если такой величиной служит скорость ветра, то энергетический спектр описывает также распределение кинетической энергии по периодам или длинам волн.

Распределение метеорологических величин по периодам или длинам волн неоднородно — некоторые периоды и длины волн явно выделяются. Наличие хорошо выраженных максимумов (пиков) в энергетическом спектре, разделенных довольно плоскими и глубокими минимумами, указывает на избирательный характер влияния турбулентных движений на поля физических величин, в частности на поле скорости (см. рис. 2а и 2б).

Теперь мы в состоянии сформулировать требование к выбору пространственно-временнóй области осреднения, удовлетворяющей названным выше условиям: размер этой области необходимо выбрать так, чтобы он соответствовал наименьшему значению квадрата амплитуды в пределах плоского минимума спектра. Размер области, определенный по середине широкого временнóго или линейного интервала, в пределах которого амплитуда равна или почти равна нулю, был бы идеальным. Если область осреднения выбрана таким образом, то изменение в пространстве и во времени метеорологических величин, осредненных по области, будет малым. На практике, однако, выбор крупномасштабных систем движения зависит от существующей сети станций и частоты наблюдений, а определение мелкомасштабных систем движения связано с чувствительностью датчиков метеорологических приборов.

В теории турбулентности всегда допускается, что среднее движение и связанные с ним энергетические процессы можно описать путем введения средних значений физических величин в уравнения гидротермодинамики и установления корреляционных связей между флуктуациями этих величин. Как будет показано ниже, глобальное влияние турбулентных движений на среднее движение легко выявляется посредством корреляции между флуктуациями составляющих скорости движения (см. п. 6.1).

4.2. Атмосферная турбулентность

Наши знания о спектре вихрей в атмосфере далеки от удовлетворительного состояния. Одна из главных трудностей динамической метеорологии обусловлена недостатком точной и детальной количественной информации об энергетических спектрах флуктуаций метеорологических величин, порождаемых вихрями всех масштабов (см. рис. 2а и 2б). Необходима более полная информация о том, какова зависимость мелкомасштабных вихрей (см. п. 4.4) приземного слоя (первые несколько десятков метров атмосферы, см. п. 9.4) от орографии, термических и оптических свойств земной поверхности, от высоты над нею, времени суток и года и, последнее по месту, но ничуть не по значению, от погоды и климата. Измерения в приземном слое короткопериодных флуктуаций (от сотых долей секунды до нескольких сотен секунд) носят спорадический характер; выше этого слоя такие измерения проводятся вообще от случая к случаю. В действительности мелкомасштабный участок спектра атмосферных движений изучен лишь на нескольких изолированных станциях, где установлены на башнях в открытой местности малоинерционные анемометры и термометры. Значительно больше известно о влиянии плавучести на турбулентное движение и о зарождении вихрей под влиянием механической турбулентности (свою кинетическую энергию такие вихри берут от среднего движения с вертикальным сдвигом, см. главу 9) или термической турбулентности в условиях сильной неустойчивости (см. главу 10). Два турбулентных режима можно легко различить путем визуальных наблюдений за дымом, распространяющимся от непрерывного источника при статически неустойчивом состоянии: малые вихри, порожденные сдвигом ветра и получающие энергию от среднего движения, переносят дым небольшими порциями (см. главу 9), в то же время более крупные вихри, порожденные силами плавучести, проявляются в флуктуациях большей амплитуды; под их влиянием дымовая струя приобретает петлеобразный характер и возникает диффузия более крупного масштаба (см. главу 10). Эти петлеобразные движения ясно указывают на существование проникающей способности более крупных вихрей ([69] и главу 3 в [49]). Распределение кинетической энергии в микромасштабной области спектра существенно зависит от местных географических (морфология и физические свойства земной поверхности) и метеорологических условий. Мелкомасштабная турбулентная энергия заметно возрастает с увеличением скорости ветра и вертикального градиента температуры.

Анализ данных зондирования атмосферы позволяет установить некоторые закономерности крупномасштабных систем (см. п. 4.5), горизонтальный размер которых не меньше 1000 км. Синоптический опыт показывает, что погодные системы (вихри с периодами от полусуток до нескольких суток) порождают, как правило, наиболее крупные флуктуации скорости ветра в тропосфере, намного бóльшие тех, которые наблюдаются в мелкомасштабной области спектра. Крупные нерегулярные флуктуации с периодом около 1 сут маскируют регулярные суточные колебания атмосферы. Эти регулярные колебания представлены в энергетическом спектре (скорости ветра, например) очень узким максимумом, располагающимся между флуктуациями, которые принадлежат к более широкой, но менее четко выраженной области максимума спектра. Хорошо известно, что погода не имеет тенденции сохраняться от одного дня к другому, вследствие чего средние за сутки значения метеорологических величин, центрированные на полдень, могут заметно отличаться от таких же средних значений, центрированных на полночь. Регулярные годовые колебания, наоборот, представлены изолированным узким максимумом энергетического спектра, т. е. эти колебания не затушевываются неупорядоченными флуктуациями с периодами около 1 года. Таким образом, средние суточные значения нерепрезентативны, в то время как средние годовые значения обладают этим свойством. Синоптический опыт также показал, что погода, как правило, имеет тенденцию сохраняться от одного часа к другому, благодаря чему колебания часового периода имеют довольно малые амплитуды. Таким образом, средние за час значения репрезентативны. В самом деле, хорошо известно, что средние часовые значения, центрированные на h и $h+{}^1/_2$ (при $h=1, 2, \ldots, 24$ ч), практически не отличаются.

Следует, однако, подчеркнуть, что сведения о колебаниях с периодами больше нескольких суток (скажем, 5 сут) довольно скудны, а информация о колебаниях с бо́льшим периодом (год и более) еще неопределеннее. Климатологические данные указывают на то, что амплитуды колебаний с месячным и сезонным периодами значительно изменяются от года к году (для одного и того же месяца или сезона).

Наименее изучены явления промежуточного масштаба — с горизонтальным размером от 10 до 100 км, с периодом колебаний порядка нескольких часов (см. п. 4.6). Явления такого масштаба слишком малы, чтобы можно было изучать их посредством наблюдений на существующей сети станций, и слишком велики для того, чтобы исследовать их по данным локальных измерений на метеорологических мачтах.

В основу указанного выше выделения явлений крупного, промежуточного и малого масштабов положены преимущественно горизонтальные размеры систем движения. Подразделить явления по их вертикальным масштабам, кажется, невозможно. Движения крупного масштаба квазигоризонтальны (квазиплоские); мелкомасштабные турбулентные движения, наоборот, полностью трехразмерны [24].

Мелкомасштабные турбулентные движения — наиболее характерная черта пограничного слоя; над сушей они более интенсивны, чем над морем. В свободной атмосфере мелкомасштабные вихри встречаются реже, чем вблизи земной поверхности. Вихри промежуточного масштаба наблюдаются как в пограничном слое, так и в свободной атмосфере, где их относят к мелкомасштабным вихрям. Выше пограничного слоя интенсивного мелкомасштабного турбулентного движения не наблюдается; исключение составляют конвективные облака и области больших вертикальных сдвигов ветра (т. е. струйных течений), где мелкомасштабная турбулентность может быть очень сильно развита.

Энергетический спектр для широкого диапазона периодов (от 1 с до 5 лет; см. [143] и рис. 2а и 2б) получен путем объединения спектров, рассчитанных для отдельных областей. Хотя техника объединения и разработана [27], полученные результаты следует рассматривать (если даже они установлены с большой предосторожностью) как спорные, поскольку в долгопериодной области спектра используются различные данные [24] и, кроме того, различные участки спектра не перекрываются. На сглаженном энергетическом спектре рис. 2а и 2б узкие максимумы, обусловленные вынужденными колебаниями с периодами 1 сут и 1 год, опущены.

4.3. Турбулентная диффузия

Движение большого числа мелких частиц воздуха (вихрей) сопровождается турбулентной диффузией; иначе говоря, в процессе мелкомасштабного турбулентного перемешивания при отсутствии переноса массы наблюдается перенос таких свойств, как водяной пар, тепло и до некоторой степени количество движения, из областей с избытком этих свойств в области с недостатком тех же самых свойств. Турбулентная диффузия представляет собой процесс смешения вихрей, несущих избыточное количество некоторого свойства, с окружающей средой, где этого свойства меньше, чем в вихре, равно как и наоборот — смешение вихрей с недостатком некоторого свойства со средой, где в это время наблюдается избыток свойства. Таким образом, мелкомасштабная турбулентная диффузия стремится сгладить контрасты в полях метеорологических величин.

В нижнем слое толщиной в несколько сотен метров воздушный поток, как правило, турбулентный, за исключением случаев чрезвычайно слабого ветра и сильно устойчивой термической стратификации. Мелкомасштабная турбулентность наглядно проявляет себя в виде колебаний травы, кустарников и деревьев. Эти колебания порождаются беспорядочно движущимися частицами воздуха (вихрями), переносящими с большой скоростью различные свойства воздуха в атмосфере. Турбулентная диффузия играет важную роль, поскольку весь водяной пар и бóльшая часть тепла поступают в тропосферу от земной поверхности под влиянием турбулентности.

Любой турбулентный вихрь может распасться на более мелкие, и этот процесс может продолжаться в принципе до тех пор, пока вихрь не распадется на молекулы воздуха. Молекулу можно рассматривать как наименьший возможный вихрь, а беспорядочное (тепловое) движение молекул — как нижний предел турбулентного движения на мелкомасштабном конце спектра. Взаимодействие движущихся молекул порождает перенос вещества (молекулярная диффузия), тепла (молекулярная теплопроводность) и количества движения (молекулярная вязкость), в то время как смешение небольших движущихся вихрей с окружающей средой сопровождается переносом вещества (турбулентная диффузия), тепла (турбулентная теплопроводность) и количества движения (турбулентная вязкость). Однако следует подчеркнуть, что молекулярные диффузия, теплопроводность и вязкость — это свойства жидкости (физические свойства), в то время как турбулентные диффузия, теплопроводность и вязкость — это свойства движения (динамические свойства).

Концепция пути смешения, определяемого как расстояние, которое проходит вихрь от места зарождения до места, где он теряет свою индивидуальность (под влиянием смешения со средой), заимствована простейшей теорией турбулентности из кинетической теории газов, в которой вводится понятие среднего пути свободного пробега (таким образом непрерывный процесс смешения заменяется идеализированным разрывным процессом). Интенсивность мелкомасштабной турбулентной диффузии увеличивается с ростом пути смешения (равно как интенсивность молекулярной диффузии при увеличении пути свободного пробега). Путь смешения растет при увеличении расстояния от земной поверхности или при возрастании размеров вихрей. Он зависит также от статической устойчивости и до некоторой степени от природы диффундируемого свойства. Так, путь смешения в случае турбулентной диффузии водяного пара больше, чем в случае диффузии количества движения; это указывает на то, что турбулентный обмен водяным паром происходит более медленно, чем обмен количеством движения. С другой стороны, пульсации скорости зависят от пути смешения и вертикального сдвига средней скорости ветра (см. главу 9). По этим причинам мелкомасштабная турбулентность в атмосфере чрезвычайно изменчива во времени и пространстве.

В тех случаях, когда в выделенном объеме присутствует очень большое число мелких движущихся вихрей, наблюдается, как правило, тенденция к установлению статистической однородности и изотропности. Однородность означает, что турбулентное движение имеет одинаковую структуру во всех частях жидкости. В этом случае пространственная и временна́я корреляционные функции зависят только от расстояния между точками и временно́го интервала. В расслоенном по вертикали потоке (как, например, в пограничном слое) однородность сохраняется только в горизонтальном направлении. Однородная турбулентность называется изотропной в том случае, когда статистические свойства турбулентного движения не зависят от направления. Изотропность возможна при отсутствии градиента скорости или напряжений сдвига (т. е. потока импульса); однако под влиянием изотропной турбулентности все еще происходит перенос инертных свойств, таких, как водяной пар, примеси и др. В атмосфере только мельчайшие вихри (более точно, вихри, размер которых мал по сравнению с расстоянием до земной поверхности или до ближайшего инверсионного слоя) можно считать изотропными;

таким образом, смещение по горизонтали и вертикали по отношению к среднему потоку у таких вихрей почти одинаковое [69, 106].

Устойчивая стратификация плотности и наличие земной поверхности налагают ограничение на движение вихрей (вверх и вниз). С другой стороны, размеры вихрей заметно увеличиваются по мере удаления от земной поверхности, и, как следствие незначительной толщины земной атмосферы по сравнению с ее горизонтальной протяженностью, вихри большого размера, такие, как погодные системы, являются плоскими (вертикальный размер составляет около $^1/_{100}$ горизонтального размера). Наконец, следует заметить, что осредненный воздушный поток, как правило, обладает градиентом скорости (по вертикали, во всяком случае), что препятствует возникновению изотропной турбулентности в атмосфере, кроме случаев микромасштабных движений и очень слабого ветра в приземном слое. Анизотропность систем движения возрастает с увеличением масштаба. Многие факторы вносят вклад в анизотропность систем движения; это изменчивость статической устойчивости, уменьшение плотности воздуха с высотой, рост скорости ветра с высотой, шероховатость и расстояние от земной поверхности, изменчивость оптических свойств земной поверхности, которые находятся в тесной корреляционной связи с метеорологическими условиями (обратная связь).

4.4. Микромасштабная область турбулентности

В этой области период τ турбулентных колебаний изменяется от сотых долей секунды до нескольких минут.

Информация о микромасштабной области турбулентности получена лишь для приземного слоя (см. п. 9.4) — от нескольких десятков сантиметров до примерно 100 м над поверхностью земли — и для периодов, изменяющихся от 0,1 с до нескольких минут. Сведения о колебаниях более короткого периода можно получить лишь путем измерений в аэродинамических трубах.

На левом (короткопериодном) конце микромасштабной области линейный размер λ вихрей меньше, чем расстояние z до земной поверхности, так что безразмерная частота $f = (z/U\tau)$ здесь больше единицы (τ^{-1} — частота в фиксированной точке). В удовлетворительном согласии с наблюдениями находится соотношение $\lambda = U\tau$, где U — средняя горизонтальная скорость ветра (рис. 1). Перенос вихрей со средней скоростью ветра U способствует тому, что частота флуктуаций какой-либо метеорологической величины в фиксированной точке увеличивается пропорционально U. Безразмерная частота введена потому, что она не зависит от этого эффекта.

Самые мелкие вихри микромасштабной области относятся к *вязкой подобласти* ($f \gg 1$, $\lambda \ll z$), их линейный размер изменяется от 1 мм до нескольких сантиметров. При таких масштабах

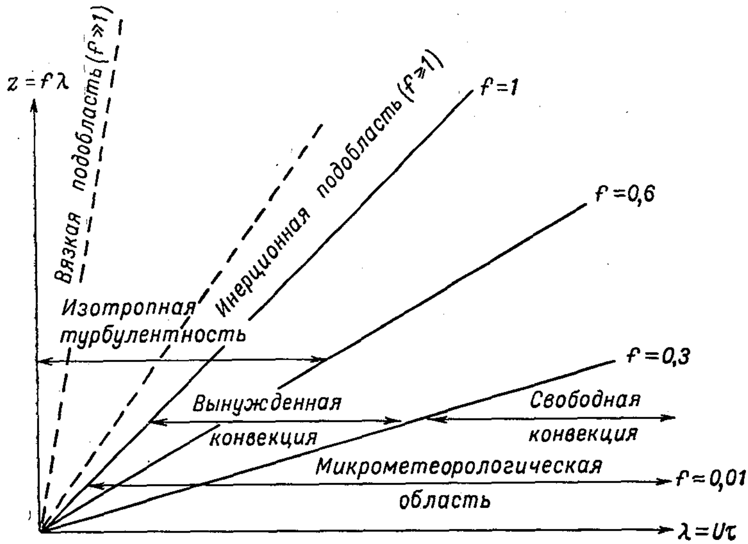

Рис. 1. Подобласти микромасштабной области турбулентности. Ордината — высота z над поверхностью земли, абсцисса — линейный размер λ вихрей.

градиенты турбулентной скорости достаточно велики для того, чтобы вязкость стала значительной [см. пп. 9.3 и 10.4 и член $\overline{\rho\Delta}$ в правой части уравнений (9.15) и (9.16), (10.20) и (10.21)]. Диссипация турбулентной кинетической энергии в тепло (отток энергии) происходит именно в этих вихрях; кинетическая энергия к ним поступает от вихрей большего размера, принадлежащих к *инерционной подобласти*. Линейный размер вихрей этой подобласти несколько меньше высоты z над земной поверхностью (1 см $\ll \lambda \leqslant z$); таким образом, безразмерная частота f чуть больше единицы ($f \geqslant 1$). Такие вихри получают кинетическую энергию от вихрей еще большего размера: последние в свою очередь извлекают энергию из потока с вертикальным сдвигом ветра (см. главу 9) и в то же самое время передают свою кинетическую энергию вихрям из вязкой подобласти. Этот перенос кинетической энергии происходит при отсутствии превращения значительного количества кинетической энергии в тепло (такое превращение, как отмечено выше, осуществляется в вихрях вязкой подобласти). В инерционной подобласти не наблюдается ни притока, ни оттока энергии; здесь кинетическая энергия лишь перераспределяется между вихрями этой же подобласти [69].

Вихри, принадлежащие к вязкой и инерционной подобласти, квазиизотропны. Согласно наблюдениям, граница квазиизотропности определяется значением $f \approx 0{,}6$; эта граница смещается в сторону более высокой частоты τ^{-1} (меньших вихрей) при сильно устойчивой стратификации. При $f > 0{,}6$ энергия вихрей почти равномерно распределяется между тремя составляющими скорости, а корреляция между ними практически отсутствует. Эти вихри вносят почти одинаковый вклад в кинетическую энергию турбулентного движения в вертикальном и в двух взаимно перпендикулярных горизонтальных направлениях; более того, они не способны переносить импульс, а также и тепло (поскольку отсутствует корреляция между температурой T и вертикальной скоростью w).

Энергия поступает в атмосферу через посредство вихрей, принадлежащих к долгопериодному участку микромасштабной области, точнее, к той подобласти, в которой турбулентность уже неизотропна, а статическая устойчивость играет определяющую роль. Этот низкочастотный (долгопериодный) участок микромасштабной области называют *микрометеорологической областью*, в которой период турбулентных пульсаций изменяется на высоте 100 м над поверхностью земли от 4 с до 5 мин ($0{,}01 < f < 1$). Вихри с локальным временем жизни, скажем, 30 с ($\sim 10^{-2}$ ч) на высотах не более 100 м, вероятно, имеют динамическое происхождение; другими словами, механическая турбулентность, кажется, преобладает при движениях с периодами менее 30 с [64, 65]. Для таких вихрей отношение кинетической энергии вертикального турбулентного движения к кинетической энергии среднего горизонтального движения со скоростью U постоянно и не зависит от притока солнечной радиации (т. е. условий устойчивости). На суше наблюдается четко выраженная корреляция между статической устойчивостью и притоком солнечной радиации: с увеличением притока (т. е. нагревания земной поверхности) вертикальный градиент температуры вблизи земли увеличивается, приводя к постепенному ослаблению статической устойчивости нижнего слоя тропосферы в дневное время (минимум устойчивости или даже неустойчивость наблюдается после полудня). Над морем суточные колебания температуры воздуха вблизи водной поверхности едва заметны. Суточные колебания температуры воздуха в верхней части нижнего (достаточно влажного) слоя тропосферы в основном контролируются радиацией, здесь воздух нагревается в течение дня и охлаждается ночью. По этой причине наибольшие значения вертикального градиента температуры вблизи поверхности моря наблюдаются в конце ночи или ранним утром.

На вихри с периодом колебаний больше 10^{-2} ч оказывает влияние плавучесть (определяющий фактор термической турбулентности), а отношение кинетической энергии вертикального турбулентного движения к кинетической энергии среднего движения (со скоростью U) на суше с увеличением притока солнечной радиации растет [64, 65]. Более того, при неустойчивом состоянии, когда особенно велик приток солнечной радиации, вертикальный размер вихрей становится больше их горизонтального размера [70]. В случае сильного притока солнечной радиации вихри высокие, а при слабом притоке они низкие и широкие. Период колебаний вихрей при максимуме кинетической энергии вертикального движения не превышает нескольких секунд; это локальное время существования вихрей и соответствующий размер вихрей увеличиваются при ослаблении статической устойчивости и увеличении высоты. Отношение коэффициента корреляции между вертикальной и горизонтальной составляющими скорости ветра к кинетической энергии вертикального движения растет при увеличении вертикального сдвига ветра и падает при уменьшении периода [64]; это указывает на то, что перенос импульса по вертикали ослабевает при уменьшении масштаба (тенденция в сторону изотропности). Не наблюдается резких различий между двумя турбулентными режимами: вынужденная конвекция (механическая турбулентность) постепенно трансформируется в свободную конвекцию (термическую турбулентность) примерно при $f \approx 0,3$ (см. рис. 1). В случае горизонтального движения, однако, переход осуществляется при бóльших значениях периода, чем в случае вертикального движения.

Наконец, следует заметить, что кинетическая энергия вертикального турбулентного движения резко падает при увеличении размера и времени существования вихрей, благодаря чему вихри микрометеорологической области вносят значительный вклад в общую турбулентную кинетическую энергию вертикального движения [11, 64, 65, 69]. Если на суше приток солнечной радиации незначителен ($\leqslant 0,2$ кал$\cdot$см$^{-2}\cdot$мин$^{-1}$), максимальное значение турбулентной кинетической энергии вертикального движения достигается при значении безразмерной частоты f, примерно равном 0,5 (см. рис. 1). Когда приток солнечной радиации на суше велик ($\geqslant 1$ кал$\cdot$см$^{-2}\cdot$мин$^{-1}$), этот максимум больше и достигается при меньшем значении безразмерной частоты ($0,1 < f < 0,2$). В случае горизонтального турбулентного движения, однако, кинетическая энергия вихрей микрометеорологической области составляет лишь малую часть общей турбулентной кинетической энергии горизонтального движения (табл. 1; см. рис. 2а и 2б).

ТАБЛИЦА 1

Микромасштабная область турбулентности
(10^{-5} ч $< \tau < 10^{-1}$ ч)

Изотропная турбулентность $f > 0,6$			
Вязкая подобласть $f \gg 1,\ \lambda \ll z$	Инерционная подобласть $f \geqslant 1,\ \lambda \leqslant z$	Вынужденная конвекция $1 > f \gtrsim 0,3$	Свободная конвекция $0,3 \gtrsim f > 0,01$
10^{-1} см $\leqslant \lambda \leqslant$ несколько см	1 см $\ll \lambda \leqslant z$	10^{-4} ч $< \tau < 10^{-2}$ ч	10^{-2} ч $< \tau < 10^{-1}$ ч
			Микрометеорологическая область 10^{-3} ч $< \tau < 10^{-1}$ ч

Отношение турбулентной кинетической энергии к кинетической энергии среднего движения несколько больше в континентальном воздухе, чем в морском.

4.5. Макромасштабная область турбулентности

Амплитуда вертикальной скорости w' турбулентного движения растет не только вследствие ослабления статической устойчивости и увеличения высоты над поверхностью земли, но также и в результате уменьшения размеров вихрей. Эффективное перемешивание — существенная черта лишь вихрей малого и среднего размера. Таким образом, вертикальная скорость малых вихрей, относящихся к микрометеорологической области, как правило, много больше вертикальной скорости вихрей, относящихся к *макрометеорологической области* (вихри с горизонтальными размерами от 10^6 до 10^7 м и временем существования от полусуток до нескольких дней). В то же время пульсации горизонтальной

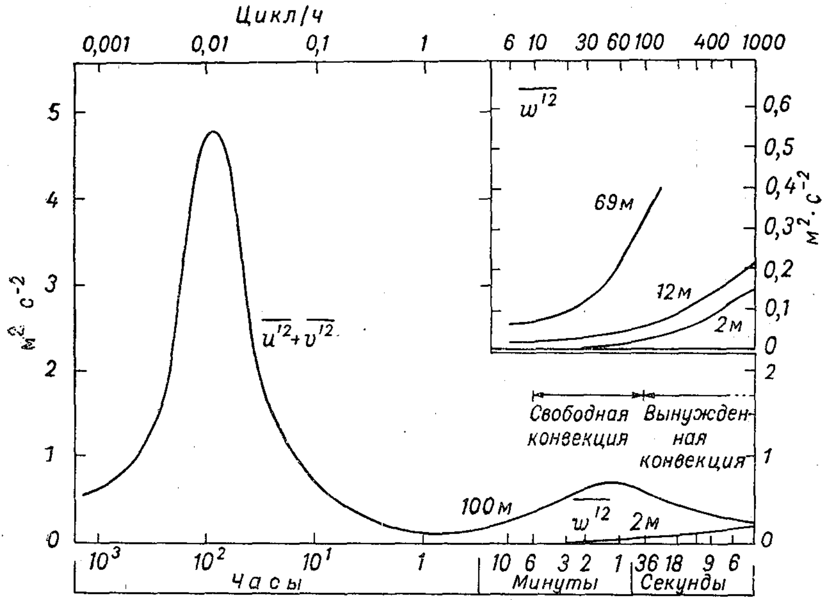

Рис. 2а. Сглаженный энергетический спектр горизонтальной скорости ветра на высоте около 100 м (по [27, 65, 110]) и вертикальной скорости на высоте 2, 12 и 69 м над поверхностью земли (по [11, 39]). Вынужденные суточные колебания атмосферы исключены. Ординаты $\overline{u'^2} + \overline{v'^2}$ и $\overline{w'^2}$ — изменчивость соответственно горизонтальной (u, v) и вертикальной (w) составляющих скорости ветра как функция периода τ или частоты τ^{-1} (логарифмический масштаб).

скорости, обусловленные крупномасштабными вихрями, много больше пульсаций этой скорости, вызванных движением мелкомасштабных вихрей [125] (рис. 2а и 2б).

Справедливо более общее положение: в системе, в которой частицы перемещаются со скоростью, существенно меньшей скорости звука (это означает, что эффект сжимаемости пренебрежимо мал), отношение (L/H) наибольшего горизонтального размера L к наибольшему вертикальному размеру H системы служит приемлемой оценкой отношения (U/W) соответствующих горизонтальной U и вертикальной W составляющих скорости.

Это заключение особенно справедливо в том случае, когда какая-либо масса воздуха, движущаяся по своей собственной траектории, может быть выделена из окружающей среды. Более того, такую массу в свою очередь можно разделить на более мелкие части с характерными для них свойствами. В качестве примера

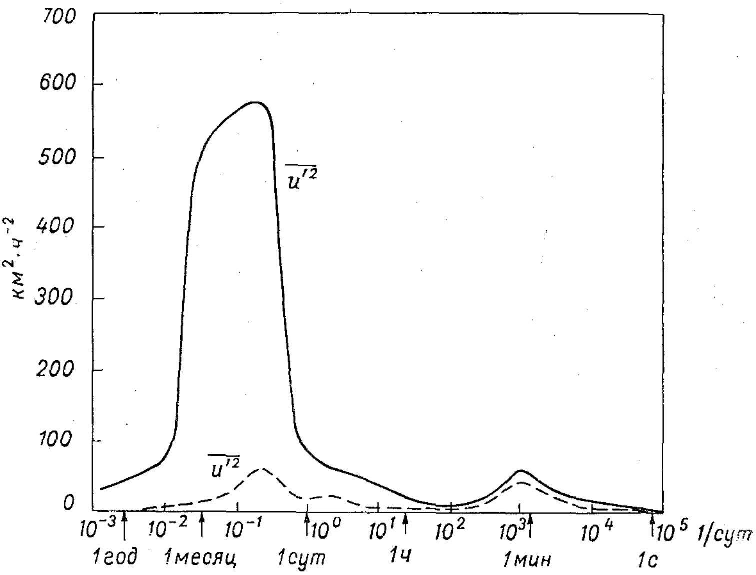

Рис. 26. Сглаженный средний энергетический спектр зональной скорости ветра в свободной атмосфере (в слое от 3 до 20 км, сплошная кривая) и вблизи земли (штриховая кривая). Вынужденные суточные и годовые колебания исключены. Ордината $\overline{u'^2}$ — изменчивость зональной скорости ветра как функция периода (сут) или частоты (1/сут), согласно [143].

можно указать на конвективные ячейки (вихри конвективного масштаба, относящиеся к термической турбулентности или режиму свободной конвекции), формирующиеся в тылу внетропических циклонов (вихри синоптического масштаба из макрометеорологической области спектра). Как правило, в атмосфере $W/U \ll H/L$; знак неравенства здесь обусловлен тем хорошо известным фактом, что дивергенция составляющих скорости по двум взаимно перпендикулярным горизонтальным направлениям, будучи одного порядка величины, всегда имеет противоположные знаки [7]. Кроме того, время существования (период) данного образования увеличивается с ростом его горизонтального размера, благодаря чему различные образования перемещаются со скоростью, медленно изменяющейся при переходе от одного масштаба к другому. Эта скорость в общем случае меньше скорости ветра, хотя порядок величины этих двух скоростей примерно один и тот же.

Как следствие уменьшения роли вертикального движения воздуха при увеличении горизонтального размера систем (вихрей), вертикальные движения в случае крупномасштабных систем вносят очень малый вклад в корреляционную связь между величинами, одна из которых — вертикальная скорость. Тесные корреляционные связи обусловливаются в основном движениями значительно меньшего масштаба. Системы движения, которые вносят наибольший вклад в корреляционные связи, имеют вертикальный размер, сравнимый с горизонтальным. К такому типу движений принадлежит хорошо организованная конвекция.

Крупномасштабные системы движения, как, например, длинные волны в западном потоке умеренных широт, в основном отвечают за корреляционную связь между горизонтальными составляющими скорости ветра или между одной из этих составляющих и какой-либо другой метеорологической величиной (см. главу 11). Таким образом, роль вклада систем движения в корреляционные связи между флуктуациями метеорологических величин существенно зависит от пространственно-временного масштаба систем. Такая избирательная роль систем движения имеет большое значение для механики атмосферных возмущений.

4.6. Мезомасштабная область турбулентности

В приземном слое, как уже было указано, наибольший вклад в полную кинетическую энергию вертикального движения вносит микрометеорологическая область (вихри с периодом пульсаций меньше 10^{-1} ч). Этот вклад существенно зависит от метеорологических условий, прежде всего от статической устойчивости. Однако для горизонтального турбулентного движения кинетическая энергия вихрей из этой области — лишь малая часть общей кинетической энергии; наибольший вклад в турбулентную кинетическую энергию горизонтального движения вносит макрометеорологическая область — вихри синоптического ($\sim 10^6$ м) и планетарного ($\sim 10^7$ м) масштаба и с периодами от 10 до 10^3 ч. Между этими двумя областями наблюдается в энергетическом спектре горизонтальной скорости ветра провал [24, 27, 34, 65, 110, 143], соответствующий *мезометеорологической области*, к которой принадлежат вихри с периодами, изменяющимися от значений несколько больше 10^{-1} ч до нескольких часов. Этот провал в энергетическом спектре горизонтальной скорости ветра (и других метеорологических величин, например температуры) представляет собой довольно глубокий и очень плоский минимум спектральной функции, так что мезомасштабные системы движения относятся к короткопериодному участку макрометеорологической области (пространственный масштаб порядка 10^2 км, временной масштаб — несколько часов). Минимальное значение спектральной функции горизонтальной скорости ветра на высоте 100 м над поверхностью земли (см. рис. 2а) составляет около 0,1 $м^2 \cdot с^{-2}$ и соответствует периоду пульсаций около 1 ч и размеру вихрей около 10 км. Слева и справа от этого очень плоского минимума отмечаются максимумы спектральной функции: один — со значением около 1 $м^2 \cdot с^{-2}$ при периоде 1 мин, другой — около 5 $м^2 \cdot с^{-2}$ при периоде 4 сут. Первый из этих максимумов отражает влияние конвекции и поэтому зависит от статической устойчивости. Второй максимум отмечается (при том же значении периода) и в спектре температуры [34]. Он обусловлен в основном движением погодных систем и поэтому сильно зависит от бароклинной неустойчивости.

Минимум и микромасштабный максимум спектральной функции зональной скорости ветра в свободной атмосфере (см. рис. 2б) имеют тот же порядок величины и приходятся на те же периоды (почти 1 ч для минимума, 1 или 2 мин для максимума), что и вблизи земной поверхности. В энергетическом спектре свободной атмосферы отмечается другой максимум — очень высокий и широкий, охватывающий большой интервал периодов, от нескольких дней до почти 2 месяцев. Обратим внимание на быстрый спад спектральной функции с обеих сторон от макромасштабного максимума (см. рис. 2б). Вблизи земли соответствующий максимум значительно слабее и приходится на более короткие периоды (от 3 до 5 сут). В крупномасштабной области общая изменчивость скорости ветра вблизи земли составляет лишь несколько процентов от изменчивости в свободной атмосфере [143].

Изменчивость горизонтальной скорости ветра для периодов больше 1 или 2 сут сильно зависит от высоты, достигая максимума вблизи тропопаузы. Энергия, отвечающая мелкомасштабному максимуму (см. рис. 2а и 2б), пренебрежимо мала по сравнению с энергией, заключенной в хорошо выраженном крупномасштабном максимуме спектральной плотности горизонтальной скорости ветра. Более того, мелкомасштабный максимум не всегда наблюдается в энергетическом спектре свободной атмосферы; этот максимум сглажен преобладающей в свободной атмосфере устойчивой стратификацией. Флуктуации в поле движения на короткопериодном участке крупномасштабной области, по всей вероятности, обусловлены внутренними гравитационными волнами, содержащими в свободной атмосфере энергии больше, чем вблизи земли [24, 143].

Все эти свойства энергетического спектра горизонтальной скорости ветра (см. рис. 2а и 2б) носят сугубо эмпирический характер. Чтобы приблизиться к более обоснованным заключениям, необходима более полная информация об энергетических спектрах горизонтальной и вертикальной составляющих скорости ветра и температуры воздуха на различных широтах и высотах в разное время года и для систем движения всех масштабов.

Во избежание недопонимания следует добавить, что как следствие нелинейности уравнений движения системы движения различного масштаба не могут просто накладываться одна на другую (не могут аддитивно складываться). Наблюдаются, как правило, нелинейные взаимодействия и обратные связи между системами движения различного масштаба. Эти связи вносят бóльшую часть трудностей, которые возникают и усиливают интерес к изучению атмосферных движений.

5

Средние значения и флуктуации

5.1. Пространственные и временны́е средние значения

Пусть X обозначает непрерывную по пространственным координатам x^1, x^2, x^3 и во времени t функцию, имеющую по этим переменным столько производных, сколько необходимо. Среднее значение функции X для данной области независимых переменных x^1, x^2, x^3, t или для некоторых из них обозначим через $\overline{X}$.

Операция осреднения удовлетворяет, по определению, следующим постулатам:

$$\overline{AX+BY}=A\overline{X}+B\overline{Y}, \tag{5.1}$$

$$\overline{\overline{X}Y}=\overline{X}\,\overline{Y}, \tag{5.2}$$

$$\overline{\frac{\partial X}{\partial s}}=\frac{\partial \overline{X}}{\partial s}, \tag{5.3}$$

где X и Y — функции независимых переменных x^1, x^2, x^3, t; A и B — постоянные, s — какая-либо из этих независимых переменных.

Флуктуация X' функции X в произвольной точке (x^1, x^2, x^3) и в любой момент времени t определяется следующим образом:

$$X=\overline{X}+X'. \tag{5.4}$$

Введя флуктуацию X', следует добавить четвертый постулат к упомянутым выше трем, а именно

$$\overline{A}=A \text{ или } A'=0. \tag{5.5}$$

Он выражает очевидный факт, что постоянная A не имеет флуктуаций.

Теперь перейдем к изучению свойств среднего значения $\overline{X}$ функции X. Во-первых, (5.1) выражает линейность операции осреднения, а (5.3) — тот факт, что среднее от производной равно производной от среднего. Для того чтобы выяснить значение соотношения (5.2), заменим в нем Y последовательно на постоянную A и среднее значение $\overline{Y}$. Тогда, приняв во внимание (5.1), (5.5) и (5.4), получим

$$\overline{\overline{X}} = \overline{X}, \quad \overline{X'} = 0, \tag{5.6}$$

$$\overline{\overline{X}\overline{Y}} = \overline{X}\overline{Y}, \tag{5.7}$$

при этом при установлении (5.7) учтено (5.6). Формула (5.6) выражает тот факт, что среднее значение флуктуации X' тождественно равно нулю или что среднее значение $\overline{\overline{X}}$ от среднего $\overline{X}$ тождественно равно среднему $\overline{X}$.

Возвращаясь вновь к (5.2) и подставляя теперь в левую часть вместо Y его выражение $\overline{Y} + Y'$, получаем

$$\overline{\overline{X}Y'} = 0. \tag{5.8}$$

Окончательно из (5.1), (5.7) и (5.8) следует очень полезная формула, а именно

$$\overline{XY} = \overline{X}\overline{Y} + \overline{X'Y'}; \tag{5.9}$$

величина $\overline{X'Y'}$ пропорциональна коэффициенту корреляции $\overline{X'Y'}/(\overline{X'^2}\cdot\overline{Y'^2})^{1/2}$ между функциями X и Y в пространственно-временнóй области x^1, x^2, x^3, t, используемой при определении среднего.

5.2. Средневзвешенные значения

Для жидкости с постоянной плотностью (однородной и несжимаемой) $\rho' = 0$, и, следовательно, $\overline{\rho'\mathbf{v}'} = 0$ и $\overline{\rho\mathbf{v}} = \overline{\rho}\overline{\mathbf{v}}$. В более общем случае, если корреляция между плотностью ρ и скоростью $\mathbf{v}$ близка к нулю ($\overline{\rho'\mathbf{v}'} \approx 0$), то также можно использовать обычные средние, определенные в п. 5.1 (см. главу 8). Если это условие не выполняется, необходимо ввести понятие средневзвешенного значения.

Средневзвешенное значение $\tilde{X}$ функции X определяется по соотношению

$$\tilde{X} = \overline{\rho X}/\overline{\rho}, \tag{5.10}$$

где ρ — плотность жидкости [28]. Соответствующая флуктуация X'' определяется по формуле

$$X = \tilde{X} + X''. \tag{5.11}$$

Теперь рассмотрим свойства средневзвешенного значения $\tilde{X}$. Если подставить $\overline{X}$ вместо X в соотношение (5.10), то с учетом (5.2) получим

$$\tilde{\overline{X}} = \overline{X}. \tag{5.12}$$

Осредняя теперь обе части равенства $\overline{\rho}\tilde{X} = \overline{\rho X}$ и принимая во внимание (5.6), (5.2) и (5.10), находим

$$\overline{\tilde{X}} = \tilde{X}. \tag{5.13}$$

Из (5.13) следует, что $\overline{\overline{\tilde{X}}Y} = \overline{\tilde{X}Y}$. Применяя теперь (5.2) и используя вновь (5.13), получаем

$$\overline{\tilde{X}Y} = \tilde{X}\overline{Y} = \overline{\tilde{X}Y} \tag{5.14}$$

и, следовательно,

$$\widetilde{X\tilde{Y}} = (\overline{\rho X\tilde{Y}}/\overline{\rho}) = \tilde{X}\tilde{Y}. \tag{5.15}$$

Подставляя $\tilde{X} + X''$ вместо X в (5.10), приходим с учетом (5.2), (5.1) и (5.13) к равенствам

$$\overline{\rho X''} = 0 \text{ или } \tilde{X}'' = 0. \tag{5.16}$$

Следующая подстановка $\overline{\rho} + \rho'$ вместо ρ в (5.16) с учетом (5.1) и (5.2) приводит к тождеству

$$\overline{\rho}\overline{X''} + \overline{\rho' X''} = 0. \tag{5.17}$$

Осредняя обе части тождества

$$\rho X = \rho\tilde{X} + \rho X'',$$

с учетом тождества (5.16) и соотношения (5.10) получаем равенство

$$\tilde{\tilde{X}} = \tilde{X}. \tag{5.18}$$

Возвратимся вновь к соотношениям (5.4) и (5.11). Находя средневзвешенные значения обеих частей (5.4) и обычные средние значения обеих частей (5.11), с учетом (5.12) и (5.13) получаем

$$\tilde{X} - \overline{X} = \tilde{X}' = -\overline{X''}. \tag{5.19}$$

Окончательно, объединяя (5.19) и (5.17), имеем

$$\tilde{X} - \overline{X} = \tilde{X}' = -\overline{X''} = \overline{\rho' X''}/\overline{\rho}. \tag{5.20}$$

Путем подстановки (5.19) в соотношения (5.4) и (5.11) легко получить

$$X'' = \overline{X''} + X' = X' - \tilde{X}' \text{ и } X' = \tilde{X}' + X'' = X'' - \overline{X''}, \tag{5.21}$$

откуда

$$\overline{\rho' X''} = \overline{\rho' X'}. \tag{5.22}$$

Подставляя (5.22) в (5.20), находим

$$\tilde{X} = \overline{X} + \overline{\rho' X''}/\overline{\rho} = \overline{X} + \overline{\rho' X'}/\overline{\rho}. \tag{5.23}$$

Средневзвешенное значение произвольного параметра X представляет сумму двух слагаемых: первое слагаемое не зависит от флуктуаций плотности ρ', второе зависит от корреляции между этими флуктуациями и флуктуациями X' или X'' рассматриваемого параметра.

В отсутствии корреляции между флуктуациями ρ и X флуктуации X' и X'' равны между собой. То же самое верно, когда $\rho = \overline{\rho}$ или $\rho' = 0$.

Далее, из (5.1), (5.14) и (5.16) следует

$$\overline{\rho XY} = \overline{\rho}\tilde{X}\tilde{Y} + \overline{\rho X'' Y''}, \tag{5.24}$$

$$\overline{\rho XYZ} = \overline{\rho}\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z} + \overline{\rho Y'' Z''}\,\tilde{X} + \overline{\rho Z'' X''}\,\tilde{Y} + \overline{\rho X'' Y''}\,\tilde{Z} + \overline{\rho X'' Y'' Z''}. \tag{5.24'}$$

Используя (5.21) вместе с (5.9), получаем

$$\overline{X'' Y''} = \overline{X''}\,\overline{Y''} + \overline{X' Y'}, \tag{5.25}$$

откуда

$$\overline{(X'')^2} \geqslant \overline{(X')^2} > 0.$$

Аналогично, используя (5.21) вместе с (5.24), имеем

$$\overline{\rho X' Y'} = \overline{\rho X'' Y''} + \overline{\rho}\,\overline{X''}\,\overline{Y''},$$

откуда

$$\overline{\rho (X')^2} \geqslant \overline{\rho (X'')^2} > 0. \tag{5.26}$$

Вновь возвращаясь к соотношениям, определяющим X' и X'', находим

$$(\rho X)' = \rho X - \overline{\rho}\tilde{X} = \overline{\rho} X'' + \rho' \tilde{X}. \tag{5.27}$$

Наконец, легко показать, что

$$\overline{\frac{\partial \tilde{X}}{\partial s}} = \frac{\partial \tilde{X}}{\partial s}, \tag{5.28}$$

$$\overline{X \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial s}} = \overline{X} \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial s}, \tag{5.29}$$

$$\overline{X \frac{\partial Y}{\partial s}} = \overline{X} \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial s} + \overline{X \frac{\partial Y''}{\partial s}}. \tag{5.30}$$

Формула (5.28) получается в результате подстановки в соотношение (5.3) вместо X величины $\tilde{X}$ с учетом (5.13); формула (5.29) может быть получена из соотношений (5.13), (5.28) и (5.2), а формула (5.30) — из (5.29) после подстановки $\tilde{Y} + Y''$ вместо Y в левую часть соотношения (5.30).

5.3. Осреднение по Рейнольдсу

Среднее значение величины $X(s)$ для интервала

$$\left(s - \frac{1}{2}\sigma,\ s + \frac{1}{2}\sigma;\ \sigma > 0\right)$$

введено Рейнольдсом [76] с помощью классической формулы

$$\overline{X}(s) = \frac{1}{\sigma} \int\limits_{-\sigma/2}^{\sigma/2} X(s + s')\, ds'. \tag{5.31}$$

В более общем случае среднее значение величины $X(x^1, x^2, x^3, t)$ для определенной области четырехмерного пространства (x^1, x^2, x^3, t) представляет собой многократный интеграл от X, поделенный на размер области.

Средние значения, введенные Рейнольдсом, удовлетворяют постулатам (5.1) и (5.3) и не удовлетворяют постулату (5.2), если только X не является постоянной величиной, линейной или периодической функцией переменных, по которым проводится интегрирование (в последнем случае интервал интегрирования должен быть кратным периоду). Если же, однако, среднее значение $\overline{X}$ изменяется в выбранной области почти линейно, то в первом приближении выполняется и постулат (5.2), и наиболее важное следствие (5.6), вытекающее из него. Следует обратить внимание на то, что если область интегрирования выбирается так, как описано в п. 4.1, то изменение $\overline{X}$ в этой области столь мало́, что, по крайней мере в первом приближении, постулат (5.2) оказывается справедливым. В некоторых случаях $\overline{X}$ не зависит от переменных интегрирования. Например, метеорологические величины, как правило, практически не зависят от времени при условии, что период осреднения достаточно велик (но, конечно, не слишком велик). Если осреднение проведено по кругу широты (зональные средние) или по всей горизонтальной поверхности (практически по сфере, концентрической с поверхностью земли), то средние значения не зависят от долготы λ в первом случае и от долготы λ и широты φ во втором. Средние значения, не зависящие от переменных интегрирования, удовлетворяют постулатам (5.1)—(5.3); такие средние наиболее часто используются в динамической метеорологии.

В теории турбулентности при изучении процессов, временной масштаб которых порядка суток, средние значения метеорологических величин (температуры, влажности, ветра), измеряемых в приземном слое, определяют для периодов осреднения, колеблющихся между 5 мин на высоте 1 м и 1 ч на высоте 100 м над поверхностью земли [69]. В мелкомасштабной области спектра атмосферных движений турбулентные флуктуации в неподвижной точке так быстротечны, что период осреднения можно взять очень коротким, вследствие чего временны́е средние можно считать не зависящими от времени.

При изучении общей циркуляции систематически используются средние зональные значения. Общепланетарную циркуляцию атмосферы можно рассматривать как круговой вихрь, ось которого совпадает с осью вращения Земли; введение средних зональных значений при изучении такой циркуляции следует признать совершенно естественным. Более того, в этих случаях рассматриваются контрасты метеорологических величин (например, температуры) на горизонтальных поверхностях. Поэтому необходимо ввести понятие о флуктуациях метеорологических величин по отношению к средним значениям их на горизонтальной поверхности.

Формулы

$$[X] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} X\,d\lambda, \quad \{X\} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} X\cos\varphi\,d\varphi,$$

$$\overline{(X)}_z = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{2\pi} X\,d\lambda \tag{5.32}$$

служат определением соответственно зонального, меридионального и горизонтального средних значений величины X, а формулы

$$X = [X] + X^{\mathrm{I}} = \{X\} + X^{\mathrm{II}} = \overline{(X)_z} + (X')_z \tag{5.33}$$

определяют отклонения (флуктуации) X^{I}, X^{II}, $(X')_z$ величины X от зонального, меридионального и горизонтального средних значений соответственно.

Справедливы следующие тождества:

$$\overline{(X)_z} = \{[X]\} = [\{X\}] = \overline{([X])_z} = \overline{[(X)_z]} = \overline{(\{X\})_z} = \overline{\{(X)_z\}} \tag{5.34}$$

и

$$[X^{\mathrm{I}}] = 0, \quad \{X^{\mathrm{II}}\} = 0, \quad \overline{(X')_z} = 0, \quad \overline{(X^{\mathrm{I}})_z} = 0, \quad \overline{(X^{\mathrm{II}})_z} = 0. \tag{5.35}$$

Выражения

$$[(X^{\mathrm{I}})^2], \quad \{(X^{\mathrm{II}})^2\}, \quad \overline{(((X')_z)^2)_z}$$

характеризуют изменчивость величины X вдоль круга широты, половины меридиана и в горизонтальной плоскости соответственно.

Прилагая оператор $[\ldots]$ к (5.33), находим

$$[X] = \overline{([X])_z} + ([X]')_z = \overline{[(X)_z]} + [(X')_z] = [\{X\}] + [X^{\mathrm{II}}],$$

откуда с учетом (5.34)

$$[(X')_z] = ([X'])_z = [X^{\mathrm{II}}]. \tag{5.36}$$

Приложение оператора $\{\ldots\}$ к (5.33) дает

$$\{(X')_z\} = (\{X\}')_z = \{X^{\mathrm{I}}\}. \tag{5.37}$$

Наконец, прилагая оператор $\{\ldots\}$ к $[X]$, получаем

$$[X] = \overline{(X)_z} + [X]^{\mathrm{II}}.$$

Вставляя это выражение в первую формулу (5,33), находим

$$X = \overline{(X)_z} + [X]^{\mathrm{II}} + X^{\mathrm{I}}. \tag{5.38}$$

Приложение оператора $[\ldots]$ к $\{X\}$ приводит к соотношению

$$X = \overline{(X)_z} + \{X\}^{\mathrm{I}} + X^{\mathrm{II}}. \tag{5.39}$$

С учетом третьей формулы (5.33) получаем

$$(X')_z = [X]^{\mathrm{II}} + X \;\; = \{X\}^{\mathrm{I}} + X^{\mathrm{II}}, \tag{5.40}$$

откуда [см. (5.35)]

$$[(X')_z] = [X]^{\mathrm{II}}, \quad \{(X')_z\} = \{X\}^{\mathrm{I}}.$$

Объединяя эти результаты с тем, что представлено в (5.36) и (5.37), находим

$$[(X')_z] = ([X]')_z = [X^{\mathrm{II}}] = [X]^{\mathrm{II}},$$
$$\{(X')_z\} = (\{X\}')_z = \{X^{\mathrm{I}}\} = \{X\}^{\mathrm{I}}. \tag{5.41}$$

Вводя теперь (5.41) в (5.40), получаем

$$(X')_z = [X]^{\mathrm{II}} + X^{\mathrm{I}} = [(X')_z] + X^{\mathrm{I}},$$
$$(X')_z = \{X\}^{\mathrm{I}} + X^{\mathrm{II}} = \{(X')_z\} + X^{\mathrm{II}} \tag{5.42}$$

и с учетом (5.33)

$$((X')_z)^{\mathrm{I}} = X^{\mathrm{I}}, \quad ((X')_z)^{\mathrm{II}} = X^{\mathrm{II}}. \tag{5.43}$$

Используя еще раз третье соотношение (5.33) применительно к X^{I} и X^{II}, с учетом (5.35) находим

$$X^{\mathrm{I}} = ((X^{\mathrm{I}})')_z \text{ и } X^{\mathrm{II}} = ((X^{\mathrm{II}})')_z, \tag{5.44}$$

откуда

$$X^{\mathrm{I}} = ((X^{\mathrm{I}})')_z = ((X')_z)^{\mathrm{I}},$$
$$X^{\mathrm{II}} = ((X^{\mathrm{II}})')_z = ((X')_z)^{\mathrm{II}}. \tag{5.45}$$

Наконец, возвращаясь к (5.42), и в частности к

$$(X')_z = [X]^{\mathrm{II}} + X^{\mathrm{I}},$$

и принимая во внимание (5.35) и (5.41), получаем

$$[((X')_z)^2] = ([X]^{\mathrm{II}})^2 + [(X^{\mathrm{I}})^2] = ([X^{\mathrm{II}}])^2 + [(X^{\mathrm{I}})^2]. \tag{5.46}$$

Таким образом, изменчивость X в горизонтальной плоскости равна

$$\overline{(((X')_z)^2)_z} = \overline{(([X]^{\mathrm{II}})^2)_z} + \overline{((X^{\mathrm{I}})^2)_z}. \tag{5.47}$$

Осреднение в горизонтальной плоскости можно выполнить в два этапа. Можно, как только что показано, сначала осреднить по кругу, широты, а затем — по меридиану, или наоборот.

В более общем случае, когда средние значения и флуктуации различных величин вводятся по отношению к нескольким независимым переменным (например, при изучении атмосферных процессов переноса), очень полезна система обозначений, введенная Лоренцом [42]. Для обозначения среднего значения и отклонений от него вводятся три индекса: индекс 1 обозначает среднее значение по отношению к определенной переменной, на которую указывает положение индекса; индекс 2 обозначает отклонение от среднего, индекс 0 — отсутствие осреднения. Так, если осреднение производится по двум независимым переменным, то для метеорологической величины X имеем:

$$X_{00} \equiv X, \quad X_{10} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\lambda, \varphi, z, t)\, d\lambda \equiv [X],$$

$$X_{01} \equiv \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} X(\lambda, \varphi, z, t+\theta)\, d\theta \equiv \overline{X},$$

$$X_{11} \equiv \overline{[X]} \equiv [\overline{X}] = \frac{1}{2\pi\tau} \int_0^{2\pi} d\lambda \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} X(\lambda, \varphi, z, t+\theta)\, d\theta \equiv [X],$$

$$X_{20} = X - X_{10} \equiv X^{\mathrm{I}}, \quad X_{02} = X - X_{01} \equiv X',$$

$$X_{12} = X_{10} - X_{11} = [X]' \equiv [X'],$$

$$X_{21} = X_{01} - X_{11} \equiv (\overline{X})^{\mathrm{I}} \equiv \overline{X^{\mathrm{I}}},$$

$$X_{22} \equiv X_{02} - X_{12} \equiv X_{20} - X_{21} \equiv (X')^{\mathrm{I}} \equiv (X^{\mathrm{I}})',$$

где X' — отклонение X от среднего по времени значения $\overline{X}$; X^{I} — отклонение X от среднего зонального значения $[X]$. Следует заметить, что среднее зональное значение $[X]$ не зависит от долготы λ, а среднее по времени значение $\overline{X}$, как правило, медленно изменяется во времени. Четыре оператора $[\,]$, $^{-}$, $^{\mathrm{I}}$ и $'$ обладают свойством коммутативности.

Полагая $i, j = 0, 1, 2$, легко покажем, что

$$X_{i0} = X_{i1} + X_{i2}, \quad X_{0i} = X_{1i} + X_{2i}, \quad X_{ij} = (X_{i0})_{0j} = (X_{0j})_{i0},$$

$$X = X_{00} \equiv \sum_{i,\, j=1}^{2} X_{ij} = X_{11} + X_{12} + X_{21} + X_{22},$$

$$(X_{2i})_{10} \equiv 0, \quad (X_{i2})_{01} \equiv 0,$$

$$(X_{1i} Y_{2j})_{10} \equiv 0, \quad (X_{i1} Y_{j2})_{01} \equiv 0,$$

и

$$[XY] = (XY)_{11} = X_{11}Y_{11} + (X_{12}Y_{12})_{01} + (X_{21}Y_{21})_{10} + \\ + (X_{22}Y_{22})_{11} \qquad (5.48)$$

или

$$(XY)_{11} = X_{11}Y_{11} + (X_{12}Y_{12})_{01} + (X_{20}Y_{20})_{11}, \\ = X_{11}Y_{11} + (X_{21}Y_{21})_{10} + (X_{02}Y_{02})_{11}.$$

Если X — некоторая метеорологическая величина ($X \equiv c_{pa}T$, $X \equiv u, \ldots$, где c_{pa} — удельная теплоемкость сухого воздуха при постоянном давлении, T — абсолютная температура и u — зональная составляющая скорости ветра), а $Y \equiv v$ — меридиональная составляющая скорости ветра, то формула (5.48) определяет средний меридиональный поток величины X через круг широты в течение промежутка времени τ. Когда для расчета различных членов (5.48) используются данные зондирования атмосферы, то мелкомасштабные пульсации уже отфильтрованы, так что остается только вклад крупномасштабных вихрей. Первый член в правой части (5.48) представляет вклад средней меридиональной циркуляции в поток, второй — вклад пульсаций меридиональной циркуляции, третий — вклад квазистационарных горизонтальных возмущений и четвертый — вклад подвижных крупномасштабных горизонтальных вихрей в тот же поток.

Анализ данных наблюдений показал, что среди всех систем движения наибольшее влияние на перенос оказывают подвижные и квазистационарные горизонтальные возмущения.

5.4. Выбор оператора осреднения

В пространственно-временно́й области определенного масштаба среднее распределение массы можно охарактеризовать с помощью среднего значения $\bar{\rho}$ плотности воздуха ρ, а среднее движение — при помощи средневзвешенного значения $\tilde{\mathbf{v}}$ скорости движения $\mathbf{v}$. Четыре аргумента говорят в пользу такого выбора [55, 129].

1. Средняя плотность $\bar{\rho}$ и средневзвешенная скорость $\tilde{\mathbf{v}}$ удовлетворяют уравнению неразрывности

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div}\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}} = 0 \tag{5.49}$$

среднего движения. Это уравнение получено путем осреднения уравнения (2.4).

2. Среднее значение кинетической энергии, согласно (5.24), можно представить в виде суммы кинетической энергии среднего движения и среднего значения кинетической энергии турбулентного движения:

$$\frac{1}{2}\overline{\rho\mathbf{v}^2} = \frac{1}{2}\bar{\rho}(\tilde{\mathbf{v}})^2 + \frac{1}{2}\overline{\rho(\mathbf{v}'')^2}. \tag{5.50}$$

3. Мгновенный турбулентный поток массы равен $\rho\mathbf{v}''$. Среднее же значение потока массы равно нулю, поскольку $\overline{\rho\mathbf{v}''} = 0$.

Однако турбулентный поток некоторого свойства не обращается в нуль, т. е.

$$\overline{\rho f \mathbf{v}''} = \overline{\rho f'' \mathbf{v}''} \neq 0. \tag{5.51}$$

Более точно, если σ — поверхность, движущаяся со средней скоростью $\tilde{\mathbf{v}}$, то мгновенный турбулентный поток массы через σ отличен от нуля:

$$\int_\sigma \rho v''_{\mathrm{N}}\, d\sigma \neq 0.$$

Здесь v''_{N} — составляющая $\mathbf{v}''$ вдоль нормали к σ, совпадающей с направлением средней скорости. В то же время средний турбулентный поток массы через σ равен нулю:

$$\int_\sigma \overline{\rho v''_{\mathrm{N}}}\, d\sigma = 0,$$

поскольку $\overline{\rho \mathbf{v}''} = 0$. Интегралы

$$\int_\sigma \rho f v''_{\mathrm{N}}\, d\sigma \neq 0$$

и

$$\int_\sigma \overline{\rho f v''_{\mathrm{N}}}\, d\sigma = \int_\sigma \overline{\rho f'' v''_{\mathrm{N}}}\, d\sigma \neq 0$$

представляют соответственно мгновенный и средний турбулентные потоки свойства f через поверхность σ.

4. Термодинамическая функция состояния f (например, удельная энтальпия h смеси, состоящей из n компонентов) известна с точностью до аддитивной постоянной. Турбулентный поток $\overline{\rho h \mathbf{v}''}$ тепла, однако, от этой постоянной не зависит [55], что обусловлено отсутствием потока массы ($\overline{\rho \mathbf{v}''} = 0$). В самом деле, энтальпия H смеси, состоящей из n компонентов, имеет вид

$$H = \sum_{i=1}^{n} m_i h_i = mh, \tag{5.52}$$

где h_i — удельная энтальпия и m_i — масса компонента i; h — удельная энтальпия смеси и $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$. Согласно закону Гиббса, h и h_i — однородные функции нулевого порядка в отношении переменных $m_1, m_2, \ldots, m_n$; отсюда $h_i = \partial H / \partial m_i$. Любая другая функция $H_* = H + K$, где K — постоянная системы (K — функция m), может также рассматриваться как энтальпия смеси. Аналогично имеем

$$H_* = \sum_{i=1}^{n} m_i h_{*i} = m h_*, \tag{5.52'}$$

при этом $h_{*i} = \partial H_* / \partial m_i$.

Из закона Гиббса следует, что $K = H_* - H$ должна быть однородной функцией первого порядка в отношении m, отсюда $K = mk$, где k — величина, не зависящая от массы смеси. Поэтому

$$h_{*i} - h_i = k = h_* - h \quad \text{и} \quad h_* - h_{*i} = h - h_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5.53}$$

Вставляя $h_* = h + k$ в $\overline{\rho h_* \mathbf{v}''}$, получаем

$$\overline{\rho h_* \mathbf{v}''} = \overline{\rho h \mathbf{v}''}, \tag{5.54}$$

поскольку $\overline{\rho \mathbf{v}''} = 0$.

В заключение остановимся еще раз на выборе среднего значения $\tilde{\mathbf{v}}$. В п. 5.2 было показано, что $\tilde{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}}'$; при этом $\overline{\rho}\tilde{\mathbf{v}}' = \overline{\rho' \mathbf{v}'} = \overline{\rho' \mathbf{v}''}$. Отсюда средний турбулентный поток воздуха через поверхность σ, движущуюся со скоростью $\overline{\mathbf{v}}$, равен $\int\limits_{\sigma} \overline{\rho' v''_{\mathrm{N}}}\, d\sigma$.

Следует, однако, подчеркнуть, что скорость $\overline{\mathbf{v}}$ не определяет движения жидкости по той причине, что она не удовлетворяет уравнению неразрывности. Отметим тождество $\overline{\mathbf{v}''} + \tilde{\mathbf{v}}' \equiv 0$. Если $\overline{\mathbf{v}} = 0$ (такое условие часто принимается в теории мелкомасштабной турбулентности, по крайней мере в отношении вертикальной скорости w в пограничном слое), то среднее движение определяется $\tilde{\mathbf{v}}' = \overline{\rho' \mathbf{v}''}/\overline{\rho}$. В самом деле, согласно (5.49) и (5.20),

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div} \overline{\rho' \mathbf{v}''} = 0, \tag{5.55}$$

если $\overline{\mathbf{v}} = 0$. В этом частном случае среднее взвешенное движение состоит только из турбулентного движения: $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}'$. В общем случае ($\overline{\mathbf{v}} \neq 0$) осредненная скорость $\tilde{\mathbf{v}}'$ представляет вклад турбулентного движения в среднее взвешенное движение $\tilde{\mathbf{v}}$:

$$\tilde{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}} + \overline{\rho' \mathbf{v}'}/\overline{\rho} = \overline{\mathbf{v}} + \overline{\rho' \mathbf{v}''}/\overline{\rho} = \overline{\mathbf{v}} + \tilde{\mathbf{v}}'.$$

Эта формула показывает, что конвективный перенос массы $\overline{\rho \mathbf{v}}$ можно разделить на две части: на не зависящую от плотности и флуктуаций скорости и на зависящую от корреляции между этими двумя величинами. Вклад турбулентных движений в средний конвективный перенос массы определяется векторами $\overline{\rho'\mathbf{v}'}$ или $\overline{\rho'\mathbf{v}''}$ [12, 32, 89, 90]. Если же, однако, турбулентное движение настолько хаотичное, что корреляция между полями массы и скорости отсутствует ($\overline{\rho'\mathbf{v}''} = 0$), то среднее движение полностью независимо от турбулентного движения. В этом частном случае $\overline{\rho'\mathbf{v}''} = 0$ или $\overline{\rho'\mathbf{v}'} = 0$ и $\tilde{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}$. Во многих случаях $\overline{\rho'\mathbf{v}''} = \overline{\rho'\mathbf{v}'} \neq \neq 0$ и отсюда, как правило, $\overline{\rho\mathbf{v}} \neq 0$. Если $\overline{\mathbf{v}} = 0$, то

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' = \tilde{\mathbf{v}}' + \mathbf{v}'' = \mathbf{v}'' + \overline{\rho'\mathbf{v}''}/\overline{\rho}.$$

Проиллюстрируем это соотношение двумя типичными примерами. Если путь смешения турбулентных вихрей так мал, что можно не считаться с влиянием силы тяжести на них, то $\overline{\rho'w'} = \overline{\rho'w''} = = \overline{\rho'w} > 0$ при условии, что стратификация средней плотности удовлетворяет (как в атмосфере) неравенству $(-1/\overline{\rho})\ (\partial\overline{\rho}/\partial z) > > 0$, где z — вертикальная координата, направленная вверх. В самом деле, в этом случае более легкие вихри ($\rho' < 0$) приходят сверху ($w < 0$), а более тяжелые ($\rho' > 0$) — снизу ($w > 0$), так что под влиянием корреляции между плотностью и вертикальной скоростью возникает конвективный поток массы, направленный вверх [см. п. 9.2, формула (9.6)]. Если же, с другой стороны, путь смешения вихрей становится настолько значительным, что пренебрегать эффектом плавучести нельзя, то $\overline{\rho'w''} = \overline{\rho'w} < 0$, поскольку более легкие вихри ($\rho' < 0$) имеют тенденцию подниматься ($w > 0$), а более тяжелые ($\rho' > 0$) — опускаться. В этом случае средний конвективный поток массы направлен вниз [см. п. 10.1, формула (10.4)].

6

Энергетика турбулентного потока

Следуя методу, впервые примененному Рейнольдсом (1895 г.) [76] для изучения однородной и несжимаемой жидкости, можно установить два уравнения, аналогичные уравнению (3.4): одно — для кинетической энергии $k_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{v}})^2$ среднего движения, другое — для среднего значения турбулентной кинетической энергии $k_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}'')^2$, а также уравнение, аналогичное (3.9), для средней внутренней энергии $\tilde{e}$ [3, 4, 5, 10, 20, 23, 41, 51, 52, 116, 117, 119, 121, 122, 129].

6.1. Уравнение баланса кинетической энергии среднего движения

Уравнение для k_{m} можно получить из уравнений среднего движения Эйлера посредством умножения векторной формы этих уравнений на среднюю скорость движения. Для того чтобы получить уравнение Эйлера в векторной форме для среднего движения $\bar{\rho}$, $\tilde{\mathbf{v}}$, $\bar{p}$, $\overline{\boldsymbol{P}}$, необходимо осреднить обе части уравнения (3.2); в результате получаем уравнение среднего движения в форме баланса

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}) + \operatorname{div}(\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}\tilde{\mathbf{v}} + \overline{\rho\mathbf{v}''\mathbf{v}''} + \bar{p}\boldsymbol{\delta} - \overline{\boldsymbol{P}}) = -2\boldsymbol{\Omega}\times\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}} - \bar{\rho}\nabla\tilde{\phi}. \tag{6.1}$$

Объединяя (6.1) с уравнением неразрывности (5.49) для среднего движения ($\bar{\rho}$, $\tilde{\mathbf{v}}$, $\bar{p}$, $\overline{\boldsymbol{P}}$), получаем уравнение среднего движения в форме Эйлера

$$\overline{\rho\mathbf{a}} = \bar{\rho}\tilde{\mathbf{a}} \equiv \bar{\rho}\left(\frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}}\right) + \operatorname{div}\overline{\rho\mathbf{v}''\mathbf{v}''} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}} =$$

$$= -\nabla\bar{p} + \operatorname{div}\overline{\boldsymbol{P}} - \bar{\rho}\nabla\tilde{\phi}. \tag{6.2}$$

Легко видеть, что, для того чтобы получить векторное уравнение среднего движения, необходимо подставить средние значения $\bar{\rho}$, $\tilde{\mathbf{v}}$, $\bar{p}$ и $\overline{\boldsymbol{P}} - \overline{\rho\mathbf{v}''\mathbf{v}''}$ соответственно вместо ρ, $\mathbf{v}$, p и $\boldsymbol{P}$ в векторное уравнение (3.2) ламинарного движения. Таким образом, уравнения мгновенного движения (3.1) или (3.2) и уравнения среднего движения (6.2) или (6.1) имеют одинаковый вид при условии, что мгновенные величины заменены средними, а тензор напряжения $-\overline{\rho\mathbf{v}''\mathbf{v}''}$ Рейнольдса добавлен к осредненному тензору напряжения $\overline{\boldsymbol{P}}$ Навье—Стокса.

Теперь, скалярно умножая векторное уравнение (6.2) на $\tilde{\mathbf{v}}$ и привлекая уравнение неразрывности (5.49), получаем *уравнение баланса кинетической энергии среднего движения*, аналогичное (3.16):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k_{\mathrm{m}}) + \operatorname{div}(\bar{\rho}k_{\mathrm{m}}\tilde{\mathbf{v}} + \bar{p}\tilde{\mathbf{v}} - \overline{\boldsymbol{P}}\cdot\tilde{\mathbf{v}} + \overline{\rho\mathbf{v}''(\mathbf{v}''\cdot\tilde{\mathbf{v}})}) =$$

$$= -g\bar{\rho}\tilde{w} + \bar{p}\operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}} - \overline{\boldsymbol{P}}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}} + \overline{\rho\mathbf{v}''\cdot(\mathbf{v}''}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}}), \qquad (6.3)$$

где $k_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{v}})^2$ — удельная кинетическая энергия среднего движения. Следует заметить, что $\phi = \tilde{\phi}$ и $g = \tilde{g}$, поскольку изменение g с высотой и широтой незначительно (пренебрежимо мало́). Уравнение баланса (6.3) можно интерпретировать таким же образом, как и уравнение (3.16). Однако в турбулентной жидкости, кроме потока энергии $-\overline{\boldsymbol{P}}\cdot\tilde{\mathbf{v}}$, обусловленного вязкостью, существует поток энергии $\overline{\rho\mathbf{v}''(\mathbf{v}''}\cdot\tilde{\mathbf{v}})$, обусловленный турбулентностью, и аналогично, кроме диссипации энергии среднего движения под влиянием вязкости со скоростью $\overline{\boldsymbol{P}}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}}$ (>0), наблюдается диссипация этой же энергии под влиянием турбулентности со скоростью $-\overline{\rho\mathbf{v}''\cdot(\mathbf{v}''}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}})$ ($\gtreqless 0$). Другими словами, $\operatorname{div}\{\overline{\boldsymbol{P}}\cdot\tilde{\mathbf{v}} - \overline{\rho\mathbf{v}''(\mathbf{v}''}\cdot\tilde{\mathbf{v}})\}$ представляет собой скорость, с которой полное напряжение $\overline{\boldsymbol{P}} - \overline{\rho\mathbf{v}''\mathbf{v}''}$ совершает работу в единичном объеме осредненной движущейся системы, а $(\overline{\boldsymbol{P}} - \overline{\rho\mathbf{v}''\mathbf{v}''})\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}}$ является полной скоростью превращения в том же единичном объеме кинетической энергии среднего движения в другие формы энергии.

Не представляет труда написать уравнение энергии среднего движения, аналогичное уравнению (3.4) для мгновенного движения.

6.2. Уравнение баланса средней кинетической энергии турбулентных пульсаций

Вычитая левую и правую части уравнения (6.2) из соответствующих частей уравнения (3.1), получаем

$$(\rho\mathbf{a})' = \rho\mathbf{a} - \overline{\rho}\tilde{\mathbf{a}} = \rho\mathbf{a}'' + \rho'\tilde{\mathbf{a}} = \rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}''}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}}\cdot\nabla\mathbf{v}'' + \mathbf{v}''\cdot\nabla\mathbf{v}\right) +$$
$$+ 2\Omega\times\rho\mathbf{v}'' - \operatorname{div}\overline{\rho\mathbf{v}''\mathbf{v}''} + \rho'\left(\frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}} + 2\Omega\times\tilde{\mathbf{v}}\right) =$$
$$= -\nabla p' + \operatorname{div}\boldsymbol{P}' - \rho'\nabla\phi, \tag{6.4}$$

откуда следует с учетом (6.2) уравнение турбулентного движения

$$\rho\mathbf{a}'' = (\rho\mathbf{a})' - \rho'\tilde{\mathbf{a}} = \rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}''}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}'' + \mathbf{v}''\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}}\right) +$$
$$+ 2\Omega\times\rho\mathbf{v}'' - (\rho/\overline{\rho})\operatorname{div}\overline{\rho\mathbf{v}''\mathbf{v}''} = -\nabla p' + \operatorname{div}\boldsymbol{P}' - \rho'(\tilde{\mathbf{a}} + \nabla\phi). \tag{6.5}$$

Вычитая уравнение неразрывности (5.49) среднего движения из уравнения неразрывности (2.4) мгновенного движения, получаем уравнение неразрывности турбулентного движения

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v})' = 0 \text{ или } \frac{\partial\rho'}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho'\tilde{\mathbf{v}} + \rho\mathbf{v}'') = 0. \tag{6.6}$$

Умножая скалярно уравнение (6.5) на $\mathbf{v}''$, находим уравнение механической энергии турбулентного движения

$$\rho\mathbf{a}''\cdot\mathbf{v}'' = \rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}(\mathbf{v}'')^2\right\} + \mathbf{v}\cdot\nabla\left\{\frac{1}{2}(\mathbf{v}'')^2\right\}\right] +$$
$$+ \rho\mathbf{v}''\cdot(\mathbf{v}''\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}}) - (\rho\mathbf{v}''/\overline{\rho})\operatorname{div}\overline{\rho\mathbf{v}''\mathbf{v}''} =$$
$$= -\mathbf{v}''\cdot\nabla p' + \mathbf{v}''\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{P}' - \rho'\mathbf{v}''(\tilde{\mathbf{a}} + \nabla\phi). \tag{6.7}$$

Объединяя уравнение неразрывности (2.4) с уравнением (6.7) и осредняя таким образом найденное уравнение, получаем уравнение средней кинетической энергии турбулентных пульсаций в следующем окончательном виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho k_e}) + \operatorname{div}\overline{\rho k_e\mathbf{v}} = \overline{\rho\mathbf{a}''\cdot\mathbf{v}''} - \overline{\rho\mathbf{v}''\cdot(\mathbf{v}''\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}})}, \tag{6.8}$$

где величина

$$\overline{\rho\mathbf{a}''\cdot\mathbf{v}''} = \overline{\rho\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}''} = \overline{\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v}''} = -\overline{\mathbf{v}''\cdot\nabla p'} +$$
$$+ \overline{\mathbf{v}''\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{P}'} - \overline{g\rho'w''} - \tilde{\mathbf{a}}\cdot\overline{\rho'\mathbf{v}''} = -\overline{\mathbf{v}''\cdot\nabla p} + \overline{\mathbf{v}''\cdot\operatorname{div}\boldsymbol{P}} \tag{6.9}$$

определяет работу, производимую за единицу времени результирующей всех сил (исключая силу Рейнольдса $-\operatorname{div}\overline{\rho\mathbf{v}''\mathbf{v}''}$), действующих на единичный объем, или работу, производимую в единицу времени турбулентными вихрями против инерционной силы $-\rho\mathbf{a}$, действующей на тот же единичный объем.

Член $-\overline{\rho\mathbf{v}''\cdot(\mathbf{v}''\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}})}$ в правых частях уравнений (6.3) и (6.8) имеет противоположные знаки; поэтому при сложении этих уравнений этот член пропадает. Складывая левые и правые части уравнений (6.3) и (6.8), приходим к уравнению баланса средней кинетической энергии реального движения

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k_{\mathrm{m}}+\overline{\rho k_{\mathrm{e}}})+\operatorname{div}\{\bar{\rho}k_{\mathrm{m}}\tilde{\mathbf{v}}+\overline{\rho k_{\mathrm{e}}\mathbf{v}}+\bar{p}\tilde{\mathbf{v}}-\overline{\boldsymbol{P}}\cdot\tilde{\mathbf{v}}+$$

$$+\overline{\rho\mathbf{v}''(\mathbf{v}''\cdot\tilde{\mathbf{v}})}\}=-g\bar{\rho}\tilde{w}+\bar{p}\operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}}-\overline{\boldsymbol{P}}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}}+\overline{\rho\mathbf{a}''\cdot\mathbf{v}''}. \qquad (6.10)$$

Это уравнение можно также получить путем осреднения уравнения (3.16). Таким образом, член $-\overline{\rho\mathbf{v}''\cdot(\mathbf{v}''\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}})}$ не изменяет кинетической энергии реального движения; его можно интерпретировать как скорость перехода кинетической энергии среднего движения в кинетическую энергию турбулентных пульсаций. Следует подчеркнуть, что этот переход энергии является исключительно кинематическим процессом, зависящим только от выбора операции осреднения и турбулентных движений, тогда как скорость превращения $\overline{\boldsymbol{P}}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}}$ (>0) кинетической энергии среднего движения в тепло зависит только от среднего движения.

Известно, что в случае мелкомасштабной турбулентности

$$-\overline{\rho\mathbf{v}''\cdot(\mathbf{v}''\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}})}>0,$$

так что мелкомасштабная турбулентность всегда преобразует кинетическую энергию среднего движения в кинетическую энергию турбулентных пульсаций (диссипативный эффект мелкомасштабной турбулентности). Крупномасштабная турбулентность, однако, может превращать кинетическую энергию турбулентности в энергию среднего движения, если при этом в крупномасштабных вихрях потенциальная энергия преобразуется в вихревую кинетическую энергию (см. главу 11). Существование в атмосфере двух принципиально различных режимов турбулентного движения следует признать установленным фактом. Обычно допускается, что не наблюдается ни притока, ни оттока энергии в мелкомасштабной области спектра; турбулентные движения здесь сохраняются за счет передачи энергии от более крупных вихрей к более мелким; кинетическая энергия самых мелких вихрей превращается в беспорядочное молекулярное движение, т. е. превращается в тепло под влиянием молекулярной вязкости (см. п. 4.4). На другом конце спектра крупномасштабная турбулентность сохраняется под влиянием превращения потенциальной и внутренней энергии в кинетическую энергию крупномасштабных вихрей (см. главу 11), и в то же время кинетическая энергия вихрей непрерывно передается вверх по спектру, при этом кинетическая энергия самых больших вихрей трансформируется в энергию среднего движения. Таким образом, отток энергии происходит в тех частях спектра, где кинетическая энергия диссипирует под влиянием молекулярных и турбулентных процессов (см. главу 9), а приток энергии происходит в тех частях, где потенциальная и внутренняя энергия превращаются в кинетическую энергию. Одновременно кинетическая энергия передается от одной части спектра движения к другой [20].

Когда работа (6.9), совершаемая вихрями против силы инерции $-\rho\mathbf{a}$ положительна, вихри освобождают за единицу времени количество энергии, равное $\overline{\rho\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}''} = \overline{\rho\mathbf{a}''\cdot\mathbf{v}''} > 0$; в этом случае вихревое движение со временем усиливается и становится более неустойчивым. Когда же, напротив, работа (6.9) отрицательна, вихревое движение становится со временем более устойчивым. Таким образом, мелкомасштабное турбулентное движение будет продолжать развиваться во всех случаях, когда $\overline{\rho\mathbf{a}''\cdot\mathbf{v}''} > 0$; если же $\overline{\rho\mathbf{a}''\cdot\mathbf{v}''} < 0$, то в тех случаях, когда

$$|\overline{\rho\mathbf{a}''\cdot\mathbf{v}''}| < -\overline{\rho\mathbf{v}''\cdot(\mathbf{v}''\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}})}\ (>0),$$

это неравенство обобщает критерий развития мелкомасштабной турбулентности, установленный Ричардсоном (см. главу 9).

Вставляя теперь выражение (6.9) для величины $\overline{\rho\mathbf{a}''\mathbf{v}''}$ в правую часть уравнения (6.8) и принимая во внимание неравенство $\overline{\boldsymbol{P}'\cdot\nabla\mathbf{v}''} > 0$, получаем *уравнение баланса средней турбулентной кинетической энергии*

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{(\rho k_e)} + \operatorname{div}(\overline{\rho k_e\mathbf{v}} - \overline{\boldsymbol{P}'\cdot\mathbf{v}''}) = -\overline{\mathbf{v}''\cdot\nabla p'} -$$
$$-\overline{g\rho'w''} - \overline{\boldsymbol{P}'\cdot\nabla\mathbf{v}''} - \overline{\rho\mathbf{v}''\cdot(\mathbf{v}''\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}})} - \overline{\rho\mathbf{a}}\cdot\tilde{\mathbf{v}}'. \qquad (6.11)$$

Изменение средней кинетической энергии ρk_e вихревого движения в фиксированном единичном объеме за единицу времени происходит под влиянием конвергенции потока энергии через поверхность объема

$$\overline{\rho k_e\mathbf{v}} - \overline{\mathbf{v}''\cdot\boldsymbol{P}'}$$

и вследствие образования энергии внутри того же единичного объема со скоростью

$$-\overline{\mathbf{v}''\cdot\nabla p'}-\overline{g\rho' w''}-\overline{\boldsymbol{P}'\cdot\nabla\mathbf{v}''}-\overline{\rho\mathbf{v}''\cdot(\mathbf{v}''\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}})}-\overline{\rho\mathbf{a}}\cdot\tilde{\mathbf{v}}'.$$

Заметим, что поток энергии $\overline{\rho k_e \mathbf{v}}$ является суммой конвективного потока $\overline{\rho k_e}\tilde{\mathbf{v}}$ и турбулентного потока $\overline{\rho k_e \mathbf{v}''}$ кинетической энергии вихревого движения, так что $-\operatorname{div}\left(\frac{1}{2}\overline{\rho\,(\mathbf{v}'')^2\,\mathbf{v}''}\right)$ представляет собой среднюю скорость уменьшения вихревой кинетической энергии единичного объема за счет турбулентной диффузии. С другой стороны, $\operatorname{div}\overline{\mathbf{v}''\cdot\boldsymbol{P}'}$ является средней скоростью увеличения вихревой кинетической энергии за счет работы, совершаемой вязким напряжением $\boldsymbol{P}'$ на границе единичного объема.

Наконец, подставляя второе из двух выражений (6.9) для величины $\overline{\rho\mathbf{a}''\cdot\mathbf{v}''}$ в правую часть (6.8), получаем другую форму уравнения баланса средней турбулентной кинетической энергии, а именно

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho k_e})+\operatorname{div}(\overline{\rho k_e\mathbf{v}}-\overline{\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v}''})=-\overline{\mathbf{v}''\cdot\nabla p}-\overline{\boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v}''}-$$
$$-\overline{\rho\mathbf{v}''\cdot(\mathbf{v}''\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}})}, \tag{6.12}$$

Составляющие тензора вязких напряжений $\boldsymbol{P}$ существенно зависят от градиента скорости $\nabla\mathbf{v}$; их влияние на поток заметно только в том случае, когда эти градиенты велики, как, например, в случае очень малых размеров вихревых движений (см. п. 4.4). В процессе осреднения градиенты скорости сглаживаются, так что $|\overline{\boldsymbol{P}}|\ll|\overline{\rho\mathbf{v}''\mathbf{v}''}|$. Исключение составляет слой в непосредственной близости к поверхности земли, где вертикальные градиенты скорости чрезвычайно велики и не поддаются сглаживанию в процессе временно́го или горизонтального осреднения (см. главу 9). Следовательно, допустимо следующее упрощение:

$$\overline{\boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v}}=\overline{\boldsymbol{P}}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}}+\overline{\boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v}''}\approx\overline{\boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v}''}=\overline{\boldsymbol{P}}\cdot\nabla\overline{\mathbf{v}''}+\overline{\boldsymbol{P}'\cdot\nabla\mathbf{v}''}\approx$$
$$\approx\overline{\boldsymbol{P}'\cdot\nabla\mathbf{v}''}\;(>0).$$

Второе упрощение справедливо только в случае приближения Буссинеска (см. главу 8), и в частности для атмосферы, в которой все члены, содержащие $\overline{\boldsymbol{P}}$, могут быть опущены.

6.3. Уравнение баланса средней внутренней энергии

Применив оператор осреднения к (3.4) и вспомнив, что турбулентный поток энтальпии (теплосодержания) $h \equiv e + (p/\rho)$, равный

$$\overline{\rho h \mathbf{v}''} = \overline{\rho h'' \tilde{\mathbf{v}}''} = \overline{(\rho e + p)\,\mathbf{v}''} = \overline{\rho e'' \mathbf{v}''} + \overline{p \mathbf{v}''}, \tag{6.13}$$

включает потоки явного и скрытого тепла (см. главу 7), получаем уравнение баланса средней внутренней энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\tilde{e}) + \operatorname{div}(\bar{\rho}\tilde{e}\,\tilde{\mathbf{v}} + \overline{\mathbf{W}} + \overline{\rho h'' \mathbf{v}''}) =$$

$$= -\bar{p}\operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}} + \overline{\boldsymbol{P}}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}} + \overline{\mathbf{v}''\cdot\nabla p} + \overline{\boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v}''} \tag{6.14}$$

или после подстановки (6.9) в (6.14)

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{(\rho e)} + \operatorname{div}(\bar{\rho}\bar{e}\tilde{\mathbf{v}} + \overline{\mathbf{W}} + \overline{\rho h'' \mathbf{v}''} - \overline{\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v}''}) =$$

$$= -\bar{p}\operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}} + \overline{\boldsymbol{P}}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}} - \overline{\rho \mathbf{a}''\cdot\mathbf{v}''}, \tag{6.15}$$

где $\overline{\rho \mathbf{a}''\cdot\mathbf{v}''}$ — скорость превращения внутренней энергии в вихревую кинетическую энергию, а div $(\overline{\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v}''})$ — работа, совершаемая за единицу времени силами вязкости на границе рассматриваемого единичного объема жидкости. Следует заметить, что $-\operatorname{div}(\overline{\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v}''}) \equiv \operatorname{div}(-\overline{\boldsymbol{P}'\cdot\mathbf{v}''}) + \operatorname{div}(\overline{\boldsymbol{P}}\cdot\overline{\tilde{\mathbf{v}}'})$, где $-\overline{\boldsymbol{P}'\cdot\mathbf{v}''}$ — неконвективный поток вихревой кинетической энергии [см. уравнение (6.11)] и $\bar{\rho}\overline{\tilde{\mathbf{v}}'} = \overline{\rho'\mathbf{v}''}$ — величина, пропорциональная составляющей вихревого потока тепла [см. главу 7, уравнение (6.18)].

Вводя среднюю скорость нагревания единичного объема

$$\bar{\rho} Q_m = -\operatorname{div}(\overline{\rho h'' \mathbf{v}''} + \overline{\mathbf{W}} - \overline{\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v}''}), \tag{6.16}$$

уравнение баланса (6.15) можем переписать в виде

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial\tilde{e}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}}\cdot\nabla\tilde{e}\right) + \bar{p}\operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}} = \bar{\rho}Q_m + \overline{\boldsymbol{P}}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}} - \overline{\rho \mathbf{a}''\cdot\mathbf{v}''}; \tag{6.17}$$

это уравнение обобщает классическое уравнение (3.9) первого начала термодинамики для ламинарного вязкого потока.

Наконец, подставляя в (6.15) первое из двух выражений (6.9) для величины $\overline{\rho \mathbf{a}''\cdot\mathbf{v}''}$, получаем *уравнение баланса средней внутренней энергии*

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{(\rho e)} + \operatorname{div}(\overline{\rho e}\tilde{\mathbf{v}} + \overline{\rho h \mathbf{v}''} + \overline{\mathbf{W}} + \overline{\boldsymbol{P}}\cdot\overline{\tilde{\mathbf{v}}'}) =$$

$$= -\bar{p}\operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}} + \overline{\boldsymbol{P}}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}} + \overline{\mathbf{v}''\cdot\nabla p'} + g\overline{\rho' w''} + \overline{\boldsymbol{P}'\cdot\nabla\mathbf{v}''} + \overline{\rho\mathbf{a}}\cdot\overline{\tilde{\mathbf{v}}'}. \tag{6.18}$$

Изменение средней внутренней энергии $\overline{\rho e}$ неподвижного единичного объема за единицу времени происходит под влиянием конвергенции потока энергии через поверхность этого объема

$$\overline{\rho e}\tilde{\mathbf{v}} + \overline{\rho h \mathbf{v}''} + \overline{\mathbf{W}} + \overline{\boldsymbol{P}\cdot\tilde{\mathbf{v}}'}$$

и вследствие образования энергии внутри того же объема со скоростью

$$(-\bar{p}\operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}} + \overline{\boldsymbol{P}}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}}) + (\overline{\mathbf{v}''\cdot\nabla p'} + \overline{\boldsymbol{P}'\cdot\nabla\mathbf{v}''}) +$$
$$+ g\overline{\rho' w''} + \overline{\rho\mathbf{a}}\cdot\tilde{\mathbf{v}}'.$$

6.4. Уравнение баланса полной энергии

Складывая уравнения (6.3), (6.11) и (6.18) или (6.3), (6.12) и (6.14), или (6.3), (6.8) и (6.15), получаем уравнение баланса средней полной энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\bar{\rho}(k_\mathrm{m} + \tilde{k}_\mathrm{e} + \tilde{\phi} + \tilde{e})\} + \operatorname{div}\{\bar{\rho}(k_\mathrm{m} + \tilde{k}_\mathrm{e} + \tilde{\phi} + \tilde{h})\tilde{\mathbf{v}} +$$
$$+ (\overline{\rho k_\mathrm{e}\mathbf{v}''} - \overline{\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v}''}) - (\overline{\boldsymbol{P}} - \overline{\rho\mathbf{v}''\mathbf{v}''})\cdot\tilde{\mathbf{v}} + \overline{\mathbf{W}} + \overline{\rho h''\mathbf{v}''}\} = 0. \quad (6.19)$$

При этом применен оператор осреднения к уравнению (3.14), использована гипотеза $\tilde{\phi} \approx \phi$ (см. п. 6.1), т. е. уравнение баланса средней потенциальной энергии записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho\phi}) + \operatorname{div}(\overline{\rho\phi}\tilde{\mathbf{v}}) = g\bar{\rho}\tilde{w}. \quad (6.20)$$

Уравнение баланса (6.19) показывает, что средняя полная энергия не образуется и не уничтожается в любом неподвижном объеме. Средняя полная энергия в неподвижном объеме изменяется только под влиянием конвергенции потока энергии. Этот поток может быть разделен: на конвективный поток $\bar{\rho}(k_\mathrm{m} + \tilde{k}_\mathrm{e} + \tilde{\phi} + \tilde{h})\tilde{\mathbf{v}}$, обусловленный средним переносом массы $\overline{\rho\mathbf{v}} = \bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}$; на поток вихревой энергии $\overline{\rho k_\mathrm{e}\mathbf{v}''} - \overline{\boldsymbol{P}\cdot\mathbf{v}''}$ как следствие турбулентной диффузии; на поток $-(\overline{\boldsymbol{P}} - \overline{\rho\mathbf{v}''\mathbf{v}''})\cdot\tilde{\mathbf{v}}$, обусловленный работой вязких и турбулентных напряжений масштаба среднего движения, а также на поток явного и скрытого тепла и поток лучистой энергии $\overline{\mathbf{W}} + \overline{\rho h''\mathbf{v}''}$.

6.5. Скорости перехода энергии

Выбор (6.11) в качестве формы уравнения баланса средней кинетической энергии вихревого движения основан на том факте, что вязкость всегда диссипирует кинетическую энергию турбулентного движения ($\overline{\mathbf{P}'\cdot\nabla\mathbf{v}''} > 0$), а в основе выбора (6.18) в качестве уравнения баланса средней внутренней энергии лежит тот факт, что турбулентный поток теплосодержания $\overline{\rho h\mathbf{v}''}$ представляет потоки явного и скрытого тепла.

Правые части уравнений баланса (6.3), (6.11) и (6.18), кроме скоростей перехода $g\bar{\rho}\tilde{w}$, $\bar{p}$ div $\tilde{\mathbf{v}}$ и $\overline{\mathbf{P}}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}}$ (>0), рассмотренных в главе 3, также включают скорости превращения $\overline{g\rho'w''}$, $\overline{\mathbf{v}''\cdot\nabla p'}$ и $\overline{P'\cdot\nabla\mathbf{v}''}$ (>0). В отличие от первых трех скоростей перехода энергии, последние зависят не от средних значений, а от корреляции между пульсациями физических величин, которые входят в первые три скорости перехода. Однако скорость кинематического обмена $\overline{\rho\mathbf{v}''\cdot(\mathbf{v}''}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}})$ между кинетической энергией среднего движения и кинетической энергией вихревого движения зависит как от корреляции между пульсациями составляющих скоростей, так и от сдвига средней скорости $\nabla\tilde{\mathbf{v}}$. Эта четвертая скорость перехода, равно как и три предыдущие, связана с хорошо изученными механическими процессами [41].

Скорость перехода энергии $\overline{\mathbf{v}''\cdot\nabla p'}$ ($\gtreqless 0$) — это среднее значение работы, совершаемой вихрями против градиента $-\nabla p'$ пульсаций давления p', а скорость перехода энергии $\overline{\mathbf{P}'\cdot\nabla\mathbf{v}''}$ (>0) — это среднее значение работы (также отнесенной к единице времени и объема), совершаемой пульсациями вязких напряжений над вихрями со сдвигом скорости ($\nabla\mathbf{v}'' \neq 0$). Последняя работа всегда положительна, поскольку $\overline{\mathbf{P}'\cdot\nabla\mathbf{v}''}$ представляет собой скорость диссипации турбулентной кинетической энергии в тепло под влиянием молекулярной вязкости. В случае мелкомасштабной турбулентности скорость превращения $\overline{\mathbf{P}'\cdot\nabla\mathbf{v}''}$ имеет тот же порядок величины, что и скорость преобразования $-\overline{\rho\mathbf{v}''\cdot(\mathbf{v}''}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}})$ кинетической энергии среднего движения в кинетическую энергию турбулентности (см. главу 9).

Наконец, рассмотрим скорость превращения $g\overline{\rho'w''} = g\overline{\rho'w}$. Очевидно, что величина $-g\rho'w = -g\rho'\tilde{w} - g\rho'w''$ представляет мгновенную работу силы тяжести $-g\rho'$ за единицу времени, действующей на единичный объем (эффект плавучести). В зависимости от знака ($\rho'w > 0$ или $\rho'w < 0$) работа эта вызывает рост или убывание потенциальной энергии и соответствующее убывание или рост кинетической энергии. Из уравнений (6.7)—(6.9) следует, что часть этой работы, а именно $-g\rho' w''$, представляет собой мгновенную скорость генерирования кинетической энергии турбулентного движения; соответственно при масштабах среднего движения величина $-g\overline{\rho' w} = -g\overline{\rho' w''}$ является скоростью генерирования средней турбулентной кинетической энергии [см. уравнение баланса (6.11)]. В п. 5.4 мы уже видели, что $\overline{\rho' w''}/\overline{\rho}$ представляет вклад турбулентного движения в средневзвешенное значение вертикальной скорости; следовательно, величину $-g\overline{\rho' w''}$ можно рассматривать как скорость, с которой потенциальная энергия единичного объема превращается в кинетическую энергию вихрей. С другой стороны, вихри можно рассматривать как термодинамические системы, совершающие работу в гравитационном поле (см. п. 9.2). Как следствие этой работы механическая энергия превращается во внутреннюю энергию (тепло), или наоборот [см. уравнения баланса (6.11) и (6.18)].

Как мы уже отмечали (см. конец п. 5.4), возможны два различных случая.

1. В случае мелкомасштабной турбулентности величина $g\overline{\rho' w} = g\overline{\rho' w''}$ положительна, когда $(-1/\overline{\rho})\,(\partial\overline{\rho}/\partial z) > 0$. В этом случае $g\overline{\rho' w''}$ представляет скорость превращения в единичном объеме средней турбулентной кинетической энергии в среднюю внутреннюю энергию. Таким образом, мелкомасштабные вихри превращают турбулентную кинетическую энергию в тепло.

2. В случае более крупных вихрей под влиянием эффекта плавучести пульсация плотности ρ' определяет знак смещения вихря по вертикали. В этом случае величина $-g\overline{\rho' w} = -g\overline{\rho' w''}$ положительна и представляет собой скорость превращения средней внутренней энергии в среднюю турбулентную кинетическую энергию. Пульсации плотности рассматриваемых здесь масштабов в атмосфере имеют термическое происхождение: тяжелые и легкие вихри совпадают, как правило, с холодными и теплыми вихрями соответственно. Ясно, что поднимающиеся в гравитационном поле теплые вихри и опускающиеся холодные вихри должны преобразовывать тепловую энергию в кинетическую энергию турбулентного движения, скорость этого преобразования энергии равна $-g\overline{\rho' w''}$ (>0).

7

Турбулентный поток явного и скрытого тепла

Турбулентный поток $\mathbf{W}_e$ явного и скрытого тепла — это турбулентный поток удельной энтальпии (теплосодержания) воздуха (6.13):

$$\mathbf{W}_e = \overline{\rho h \mathbf{v}''}, \tag{7.1}$$

где

$$h = \tau_a h_a + \tau_v h_v + \tau_w h_w, \tag{7.2}$$

h_a, h_v, h_w — удельные энтальпии сухого воздуха, водяного пара и жидкой воды соответственно, а τ_a, τ_v, τ_w — соответствующие отношения смеси. Легко видеть, что

$$(1 - \varepsilon_v)\,\tau_v = (1 - \varepsilon)\,\varepsilon_v, \tag{7.3}$$

где $\varepsilon_v = \tau_v/(\tau_a + \tau_v)$ — удельная влажность и $\varepsilon = 1 - \tau_a = \tau_v + \tau_w$. Подставляя (7.3) в (7.2) и привлекая классическое соотношение $L_v = h_v - h_w$ для удельной теплоты парообразования, получаем для h следующее выражение:

$$h = \tau_a h_a + \{\tau_a/(1 - \varepsilon_v)\}\,\varepsilon_v L_v + (1 - \tau_a)\,h_w, \tag{7.2$'$}$$

где

$$\tau_a h_a + (1 - \tau_a)\,h_w \approx h_a$$

и

$$\{\tau_a/(1 - \varepsilon_v)\}\,\varepsilon_v L_v \approx \varepsilon_v L_v$$

есть скрытое теплосодержание. Из (7.2′) сразу же следует, что

$$h'' = (1 - \varepsilon)\,h_a'' + \varepsilon h_w'' + (1 - \varepsilon)\,(\varepsilon_v L_v/(1 - \varepsilon_v))'', \tag{7.4}$$

при этом принято во внимание, что пульсации ε'' величины ε столь малы, что ими можно пренебречь.

В атмосфере с приемлемым приближением можно пренебречь величинами ε и ε_v по сравнению с единицей, а также считать постоянными удельные теплоемкости c_{pa}, c_{pv} и c_w сухого воздуха, водяного пара и жидкой воды; отсюда вытекают приближенные соотношения:

$$h \approx c_p T + \varepsilon_v L_v + \text{const}, \tag{7.2'а}$$

$$h'' \approx c_p T'' + (\varepsilon_v L_v)'', \tag{7.4а}$$

где T'' — отклонение (пульсация) абсолютной температуры T от ее средневзвешенного значения $\tilde{T} \equiv \overline{\rho T}/\overline{\rho}$; $c_p = c_{pa} + \varepsilon c_w \approx \approx c_{pa}$. Более того, отклонения ε_v'' и L_v'' величин ε_v и L_v от их средневзвешенных значений $\tilde{\varepsilon}_v$ и $\tilde{L}_v$ таковы, что

$$(L_v''/\tilde{L}_v) \ll (\varepsilon_v''/\tilde{\varepsilon}_v).$$

Таким образом, справедлива приближенная формула

$$h'' \approx c_{pa} T'' + L_v \varepsilon_v'', \tag{7.4б}$$

в которой L_v можно считать постоянным. Из формул (7.2'а) и (7.4б) следует, что удельное теплосодержание (энтальпия) влажного воздуха представляет собой сумму двух величин: удельной энтальпии сухого воздуха (предполагая, что $c_p \approx c_{pa}$) при температуре влажного воздуха и количества тепла, выделяющегося при конденсации содержащегося во влажном воздухе водяного пара.

Подстановка (7.4б) в (7.1) приводит к выражению для потока тепла, *возникающего благодаря корреляции между пульсациями* h'' и $\mathbf{v}''$ энтальпии h и скорости $\mathbf{v}$ воздуха [117, 121, 129]:

$$\mathbf{W}_e = \overline{\rho h \mathbf{v}''} = \overline{\rho h'' \mathbf{v}''} \approx c_{pa} \overline{\rho T'' \mathbf{v}''} + L_v \overline{\rho \varepsilon_v'' \mathbf{v}''}, \tag{7.5}$$

где первая величина представляет собой поток явного тепла, а вторая — поток скрытого тепла.

Теперь получим различные выражения для турбулентного потока явного тепла

$$\mathbf{W}_s = c_{pa} \overline{\rho T \mathbf{v}''} = c_{pa} \overline{\rho T'' \mathbf{v}''}, \tag{7.6}$$

используя уравнение состояния воздуха и определение потенциальной температуры Θ.

Когда вертикальное распределение водяного пара оказывает значительное влияние на статическую устойчивость распределения массы в атмосфере, а именно когда наблюдаются значительные градиенты содержания водяного пара в атмосфере (например, в тропиках, а летом также в умеренных широтах), то не только пульсации температуры воздуха T, но также пульсации удельной влажности ε_v будут вызывать пульсации плотности ρ', которые воздействуют на турбулентные движения микрометеорологического масштаба [35]. В этом случае следует привлечь уравнение состояния влажного воздуха

$$p = R_a (1 + r\varepsilon_v) \rho T. \tag{7.7}$$

Коэффициент r равен $(R_v/R_a) - 1 \approx 0{,}6$; $R_a = 287{,}05$ Дж$\cdot$кг$^{-1}\cdot$К$^{-1}$ и $R_v = 461{,}51$ Дж$\cdot$кг$^{-1}\cdot$К$^{-1}$ — удельные газовые постоянные сухого воздуха и водяного пара. После подстановки в прологарифмированную формулу потенциальной температуры $\Theta = T\,(p_{00}/p)^k$, где $p_{00} = 1000$ мбар и $k \equiv R_a/c_{pa} \equiv 2/7$, вместо p, ρ, T и Θ соответственно $\bar{p} + p'$, $\bar{\rho} + \rho'$, $\tilde{T} + T''$ и $\tilde{\Theta} + \Theta''$ последовательно получаем:

$$\tilde{\Theta} = \tilde{T}\,(p_{00}/\bar{p})^k,$$

$$(\rho\Theta''/\tilde{\Theta}) = (\rho T''/\tilde{T}) - k\,(\bar{\rho} p'/\bar{p}) \tag{7.8}$$

и

$$\bar{p} = R_a \bar{\rho} \tilde{T} + (r/(r+1))\,\bar{p}_v \approx R_a \bar{\rho} \tilde{T},$$

$$\rho' = (\bar{\rho} p'/\bar{p}) - (\rho T''/\tilde{T}) - r\rho\varepsilon_v'', \tag{7.9}$$

при этом принято во внимание, что отношения $p'/\bar{p}$, $\rho'/\bar{\rho}$, $T''/\tilde{T}$, $\Theta''/\tilde{\Theta}$ очень малы по сравнению с единицей и что каждая из величин $\overline{p'}$, $\overline{\rho'}$, $\overline{\rho T''}$ и $\overline{\rho \Theta''}$ тождественно равна нулю.

Приближенное выражение для $\bar{p}$ следует из хорошо известного факта, что давление водяного пара $p_v = R_v \varepsilon_v \rho T$ очень мало по сравнению с атмосферным давлением p. При получении второй формулы (7.9) величиной $r\varepsilon_v$, имеющей порядок 10^{-2}—10^{-3}, пренебрегли по сравнению с единицей.

Исключая последовательно T'' и p' из (7.8) и (7.9), получаем два новых выражения для $\rho\Theta''/\tilde{\Theta}$:

$$(\rho\Theta''/\tilde{\Theta}) = (1-k)(\bar{\rho} p'/\bar{p}) - \rho' - r\rho\varepsilon_v'' =$$

$$= (1-k)(\rho T''/\tilde{T}) - k\rho' - kr\rho\varepsilon_v''. \tag{7.8$'$}$$

Умножая теперь три выражения $\rho\Theta''/\tilde{\Theta}$ на $c_{pa}\tilde{T}\mathbf{v}''$ и принимая во внимание (7.9), получаем следующие формулы:

$$\mathbf{W}_s = (c_{pa}\tilde{T}/\tilde{\Theta})\,\overline{\rho\Theta''\mathbf{v}''} + \overline{p'\mathbf{v}''} =$$

$$= -c_{pa}\tilde{T}\overline{\rho'\mathbf{v}''} + \frac{1}{k}\overline{p'\mathbf{v}''} - r'\mathbf{W}_L =$$

$$= \{c_{pa}\tilde{T}/(1-k)\,\tilde{\Theta}\}\,\overline{\rho\Theta''\mathbf{v}''} + \{k/(1-k)\} \times$$

$$\times (c_{pa}\tilde{T}\overline{\rho'\mathbf{v}''} + r'\mathbf{W}_L), \tag{7.10}$$

$$(c_{pa}\tilde{T}/\tilde{\Theta})\,\overline{\rho\Theta''\mathbf{v}''} = \{(1-k)/k\}\,\overline{p'\mathbf{v}''} - c_{pa}\tilde{T}\overline{\rho'\mathbf{v}''} - r'\mathbf{W}_L, \tag{7.11}$$

где

$$\mathbf{W}_L = L_v \overline{\rho\varepsilon_v''\mathbf{v}''} \tag{7.12}$$

есть турбулентный поток скрытого тепла и $r' = r\ (c_{pa}\tilde{T}/L_v) < 10^{-1}$.

Объединяя (7.5), (7.6) и первое из трех выражений (7.10), находим следующее приближенное выражение для турбулентного потока тепла $\mathbf{W}_e$:

$$\mathbf{W}_e \approx c_{pa}\,(\tilde{T}/\tilde{\Theta})\,\overline{\rho\Theta''\mathbf{v}''} + L_v\overline{\rho\varepsilon_v''\mathbf{v}''} + \overline{p'\mathbf{v}''}. \tag{7.13}$$

Эта формула показывает, что турбулентный поток тепла возникает под влиянием корреляции между пульсациями Θ'', ε_v'' и p' потенциальной температуры Θ, удельной влажности ε_v и давления p, с одной стороны, и вихревой скоростью $\mathbf{v}''$ — с другой. Следует заметить, что сумма двух первых членов в (7.13)

$$\mathbf{W}_e^* \approx c_{pa}\,(\tilde{T}/\tilde{\Theta})\,\overline{\rho\Theta''\mathbf{v}''} + L_v\overline{\rho\varepsilon_v''\mathbf{v}''}, \tag{7.14}$$

в которой $\mathbf{v}''$ может быть заменено на $\mathbf{v}$, представляет обычное выражение для турбулентного потока тепла. Часто предполагают, что Θ и ε_v — консервативные характеристики турбулентного движения, благодаря чему можно положить $\Theta'' = -\mathbf{r}_\Theta\cdot\nabla\tilde{\Theta}$ и $\varepsilon_v'' = -\mathbf{r}_{\varepsilon_v}\cdot\nabla\tilde{\varepsilon}_v$, где $\mathbf{r}_\Theta$ и $\mathbf{r}_{\varepsilon_v}$ обозначают пути смешения свойств Θ и ε_v; отсюда

$$\mathbf{W}_e^* \equiv -c_{pa}\overline{\rho\mathbf{v}\mathbf{r}_\Theta}\cdot(\tilde{T}/\tilde{\Theta})\,\nabla\tilde{\Theta} - L_v\overline{\rho\mathbf{v}\mathbf{r}_{\varepsilon_v}}\cdot\nabla\tilde{\varepsilon}_v, \tag{7.14a}$$

где $\overline{\rho\mathbf{v}\mathbf{r}_\Theta}$ и $\overline{\rho\mathbf{v}\mathbf{r}_{\varepsilon_v}}$ — тензоры турбулентного обмена для потенциальной температуры Θ и удельной влажности ε_v соответственно.

Формула (7.14a) основана на следующих предположениях: на исходном уровне свойства вихрей и окружающей среды совпадают; подъем и опускание вихрей происходит адиабатически; содержание водяного пара в движущихся вихрях постоянно (консервативно). Все эти условия могут не выполняться. Действительно, могут выпасть осадки, а дождь — испариться в атмосфере; различные тепловые эффекты могут сопровождать движение вихрей; если даже такие эффекты отсутствуют, то вихри на начальном уровне могут иметь свойства, отличные от свойств окружающей среды на том же уровне. В этом последнем случае проявят себя гравитационные эффекты (плавучесть более теплых вихрей), если вихри не слишком малы (свободная конвекция, см. главу 10).

Какая из составляющих (горизонтальная или вертикальная) турбулентного потока тепла преобладает, зависит от размеров вихрей. В случае мелкомасштабной турбулентности из (7.14a) следует

$$\mathbf{W}_{ez}^* = F_H + L_v F_W, \tag{7.15}$$

где

$$F_H = -\bar{\rho} c_{pa} K_H (\tilde{T}/\tilde{\Theta}) \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial z} = -\bar{\rho} K_H \frac{\partial}{\partial z}(c_{pa}\tilde{T} + gz)$$

представляет собой вертикальный турбулентный поток явного тепла и

$$F_W = -\bar{\rho} K_W \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_v}{\partial z} \tag{7.16}$$

— вертикальный турбулентный поток водяного пара.

Формулы

$$K_H \equiv \widetilde{w\zeta_\Theta}, \quad K_W \equiv \widetilde{w\zeta_{\varepsilon_v}} \text{ при } \zeta \equiv r_z$$

определяют коэффициенты турбулентной теплопроводности K_H и турбулентной диффузии K_W. В приземном слое F_H и F_W могут быть измерены согласно их определениям: $F_H \equiv c_{pa}\overline{\rho T'' w''}$ и $F_W \equiv \overline{\rho \varepsilon_v'' w''}$, так что предположения, принятые при выводе (7.14а), могут не приниматься здесь во внимание. Мы можем затем рассматривать уравнения (7.15) и (7.16) как уравнения, определяющие коэффициенты турбулентности K_H и K_W.

Подставляя (7.13) в уравнение баланса (6.18) средней внутренней энергии $\tilde{e}$, получаем другой вид этого уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho e}) + \operatorname{div}(\overline{\rho e}\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{W}_e^* + \overline{\mathbf{W}}) = -\bar{p}\operatorname{div}\tilde{\mathbf{v}} + \\ + \overline{\boldsymbol{P}}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}} - \overline{p'\operatorname{div}\mathbf{v}''} + g\overline{\rho' w''} + \overline{\boldsymbol{P}'\cdot\nabla\mathbf{v}''}, \tag{7.17}$$

в котором члены с $\tilde{\mathbf{v}}'$ отсутствуют (см. главу 8). Соответствующее уравнение баланса средней турбулентной кинетической энергии принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho k_e}) + \operatorname{div}(\overline{\rho k_e \mathbf{v}} + \overline{p'\mathbf{v}''} - \overline{\mathbf{v}''\boldsymbol{P}'}) = \\ = +\overline{p'\operatorname{div}\mathbf{v}''} - g\overline{\rho' w''} - \overline{\boldsymbol{P}'\cdot\nabla\mathbf{v}''} - \overline{\rho\mathbf{v}''\cdot(\mathbf{v}''}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}}). \tag{7.18}$$

В правой части уравнений энергии (7.17) и (7.18) скорость преобразования $-\overline{p'\operatorname{div}\mathbf{v}''}$ кинетической энергии вихрей во внутреннюю энергию представляет работу (отнесенную к единице времени и объема), совершаемую окружающей средой над вихрями, как следствие существования пульсаций давления p' и расширения или сжатия вихрей ($\operatorname{div}\mathbf{v}'' \neq 0$).

Если для определения турбулентного потока тепла принимается $\mathbf{W}_e^*$ вместо $\mathbf{W}_e$, то для средней внутренней энергии и средней турбулентной энергии следует брать уравнения баланса (7.17) и (7.18) вместо уравнений (6.18) и (6.11).

ЧАСТЬ II

Энергетика движущихся атмосферных систем

8

Приближение Буссинеска

Когда изменение плотности ρ и других физических параметров жидкости происходит главным образом под влиянием колебаний температуры, то уравнения движения, неразрывности и переноса различных видов энергии могут быть упрощены, если колебания температуры не слишком велики — порядка нескольких градусов (не более 10° С) — и если коэффициент объемного расширения $-\rho'/\rho T''$ очень мал — порядка 10^{-3} $°C^{-1}$ или меньше. Для таких жидкостей, впервые исследованных Буссинеском и с тех пор интенсивно изучаемых, относительное отклонение $(\rho'/\rho) \approx (\rho'/\bar{\rho})$ плотности ρ можно не учитывать во всех членах уравнений движения, неразрывности и баланса энергии, кроме тех членов, которые выражают влияние гравитационного поля $-\nabla\phi$ на пульсации плотности ρ'.

Приближение Буссинеска применимо к большинству атмосферных систем движения. В математической форме оно может быть сформулировано в следующем виде. Предполагая, что

$$(|\rho'|/\bar{\rho}) \ll 1 \quad \{(|\rho'|/\bar{\rho}) \lesssim 10^{-2}\}, \tag{8.1}$$

имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\text{а) } \rho X \approx \bar{\rho} X, \text{ если } (|\rho'|/\bar{\rho}) \ll (|X''|/|\tilde{X}|), \\ &\text{или} \\ &\text{б) } \rho X \approx \rho \tilde{X}, \text{ если } (|\rho'|/\bar{\rho}) \gg (|X''|/|\tilde{X}|), \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

где $|X|$ представляет собой абсолютную величину X. Приближение а) следует использовать во всех случаях, кроме тех, когда

X является одной из составляющих внешней силы $\mathbf{F}_e$ (отнесенной к единице массы); в последнем случае следует использовать приближение б). Вследствие выполнения (8.1) и (8.2) справедливы следующие приближенные соотношения:

$$1)\ \rho \approx \bar{\rho},\ \rho' \approx 0,$$

кроме произведения $\rho\nabla\phi$;

$$2)\ \rho\mathbf{v} \approx \bar{\rho}\mathbf{v},\ \tilde{\mathbf{v}} \approx \bar{\mathbf{v}},\ \mathbf{v}'' \approx \mathbf{v}',\ \bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}' = \overline{\rho'\mathbf{v}'} = \overline{\rho'\mathbf{v}''} = -\bar{\rho}\overline{\mathbf{v}''} \approx 0, \tag{8.3}$$

кроме скалярного произведения $\bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}'\cdot\nabla\phi$;

$$3)\ \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} \approx \bar{\rho}\frac{d\mathbf{v}}{dt},\ \ \rho\mathbf{a} \approx \bar{\rho}\mathbf{a},\ (\rho\mathbf{a})' \approx \bar{\rho}\mathbf{a}'' \approx \bar{\rho}\mathbf{a}';$$

$$4)\ \rho\mathbf{F}_e \approx \rho\tilde{\mathbf{F}}_e.$$

С учетом (6.5)

$$\bar{\rho}\mathbf{a}' \approx \bar{\rho}\left(\frac{\partial\mathbf{v}'}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}' + \mathbf{v}'\cdot\nabla\bar{\mathbf{v}}\right) + 2\boldsymbol{\Omega}\times\bar{\rho}\mathbf{v}' -$$
$$- \operatorname{div}\overline{\rho\mathbf{v}'\mathbf{v}'} = -\nabla p' + \operatorname{div}\boldsymbol{P}' - \rho'\nabla\phi. \tag{8.4}$$

Внешней силой, действующей на атмосферу, служит сила тяжести $\mathbf{F}_e \equiv -\nabla\phi$. Мы уже упоминали, что $\tilde{\phi}$ равно или очень близко к ϕ, так что на самом деле никакого приближенного выражения для ρX не используется, если X — одна из составляющих $\nabla\phi$ (см. п. 6.1).

В согласии с приведенными выше определениями в жидкости со свойствами Буссинеска:

1) ρ может быть заменено на $\bar{\rho}$ в уравнении мгновенного движения (3.2) и в соответствующем уравнении неразрывности (2.4), кроме последнего члена $-\rho\nabla\phi$ в правой части уравнения (3.2); такое же приближение допустимо в уравнении баланса (3.16) кинетической энергии мгновенного движения, кроме скалярного произведения $-\rho\mathbf{v}\cdot\nabla\phi = -g\rho w$;

2) ρ может быть заменено на $\bar{\rho}$, $\tilde{\mathbf{v}}$ — на $\bar{\mathbf{v}}$ и $\mathbf{v}''$ — на $\mathbf{v}'$ в уравнении среднего движения (6.1), в котором полагаем $\tilde{\phi} \approx \phi$, и в соответствующем уравнении неразрывности (5.49);

3) ρ может быть заменено на $\bar{\rho}$, $\tilde{\mathbf{v}}$ — на $\bar{\mathbf{v}}$ и $\mathbf{v}''$ — на $\mathbf{v}'$, и, за исключением члена $-\rho'\nabla\phi$, ρ' можно положить равным нулю во всех других членах уравнения турбулентного движения (6.5) и соответствующего уравнения неразрывности (6.6);

4) ρ может быть заменено на $\bar{\rho}$, $\tilde{\mathbf{v}}$ — на $\bar{\mathbf{v}}$, $\mathbf{v}''$ — на $\mathbf{v}'$, и, за исключением слагаемого $\overline{\rho\tilde{\mathbf{v}}'\cdot\nabla\phi} = g\overline{\rho' w'} = g\overline{\rho' w''}$, ρ' можно положить равным нулю в уравнении баланса средней кинетической турбулентной энергии (6.11) и средней внутренней энергии (6.18). Таким образом, в жидкости со свойствами Буссинеска мы пренебрегаем пульсациями плотности во всех инерционных членах, а сохраняем лишь пульсации силы плавучести, действующей на жидкость.

В приближении Буссинеска основные уравнения (2.4), (3.1), (3.4) и (3.9) соответственно принимают следующий вид:

$$(2.4) \to \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{\rho}\mathbf{v} = 0, \tag{8.5}$$

$$(3.1) \to \bar{\rho}\frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \bar{\rho}\mathbf{v} = -\nabla p + \operatorname{div} \boldsymbol{P} - \rho\,\nabla\phi, \tag{8.6}$$

$$(3.4) \to \bar{\rho}\frac{dk}{dt} + \mathbf{v}\cdot(\nabla p - \operatorname{div} \boldsymbol{P}) + g\rho w = 0, \tag{8.7}$$

$$(3.9) \to \bar{\rho}\frac{de}{dt} = \bar{\rho}Q + \boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v} - p\operatorname{div}\mathbf{v}. \tag{8.8}$$

Преобразовав уравнения так же, как в п. п. 6.1—6.4, в случае жидкости со свойствами Буссинеска получаем уравнения баланса различных форм энергии:

$$(6.3) \to \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}k_{\mathrm{m}}) + \operatorname{div}\{\bar{\rho}k_{\mathrm{m}}\bar{\mathbf{v}} + \bar{p}\bar{\mathbf{v}} - \bar{\boldsymbol{P}}\cdot\bar{\mathbf{v}} + \bar{\rho}\overline{\mathbf{v}'(\mathbf{v}'\cdot\bar{\mathbf{v}})}\} =$$

$$= -g\bar{\rho}\bar{w} + \bar{p}\operatorname{div}\bar{\mathbf{v}} - \bar{\boldsymbol{P}}\cdot\nabla\bar{\mathbf{v}} + \bar{\rho}\overline{\mathbf{v}'\cdot(\mathbf{v}'\cdot\nabla\bar{\mathbf{v}})}, \tag{8.9}$$

$$(6.11) \to \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\bar{k}_{\mathrm{e}}) + \operatorname{div}(\bar{\rho}\overline{k_{\mathrm{e}}\mathbf{v}} - \overline{\mathbf{v}'\cdot\boldsymbol{P}'}) =$$

$$= -g\overline{\rho' w'} - \overline{\mathbf{v}'\cdot\nabla p'} - \overline{\boldsymbol{P}'\cdot\nabla\mathbf{v}'} - \bar{\rho}\overline{\mathbf{v}'\cdot(\mathbf{v}'\cdot\nabla\bar{\mathbf{v}})}, \tag{8.10}$$

$$(6.18) \to \frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\bar{e}) + \operatorname{div}(\bar{\rho}\bar{e}\bar{\mathbf{v}} + \bar{\rho}\overline{h'\mathbf{v}'} + \bar{\mathbf{W}}) =$$

$$= g\overline{\rho' w'} + \overline{\mathbf{v}'\cdot\nabla p'} + \overline{\boldsymbol{P}'\cdot\nabla\mathbf{v}'} - \bar{p}\operatorname{div}\bar{\mathbf{v}} + \bar{\boldsymbol{P}}\cdot\nabla\bar{\mathbf{v}}, \tag{8.11}$$

где $k_{\mathrm{m}} \approx \bar{\mathbf{v}}^2/2$ и $k_{\mathrm{e}} \approx \mathbf{v}'^2/2$. Что касается векторного уравнения среднего движения (6.2), то оно приводится к видv

$$(6.2) \to \bar{\rho}\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}}\cdot\nabla\bar{\mathbf{v}}\right) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \bar{\rho}\bar{\mathbf{v}} =$$

$$= -\nabla\bar{p} + \operatorname{div}(\bar{\boldsymbol{P}} - \bar{\rho}\overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'}) - \bar{\rho}\,\nabla\phi, \tag{8.12}$$

а векторное уравнение турбулентного движения (6.5) переходит в (8.4).

Аналогично уравнения баланса (7.17) и (7.18) принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\bar{e}) + \operatorname{div}(\bar{\rho}\bar{e}\bar{\mathbf{v}} + c_{\mathrm{pa}}(\bar{T}/\bar{\Theta})\,\bar{\rho}\overline{\Theta'\mathbf{v}'} + L_{\mathrm{v}}\bar{\rho}\overline{\varepsilon_{\mathrm{v}}'\mathbf{v}'} + \bar{\mathbf{W}}) =$$

$$= -\bar{p}\operatorname{div}\bar{\mathbf{v}} + \bar{\boldsymbol{P}}\cdot\nabla\bar{\mathbf{v}} - \overline{p'\operatorname{div}\mathbf{v}'} + \overline{g\rho'w'} + \overline{\boldsymbol{P}'\cdot\nabla\mathbf{v}'}, \qquad (8.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\bar{k}_{\mathrm{e}}) + \operatorname{div}(\bar{\rho}\overline{k_{\mathrm{e}}\mathbf{v}} + \overline{p'\mathbf{v}'} - \overline{\boldsymbol{P}'\cdot\mathbf{v}'}) =$$

$$= \overline{p'\operatorname{div}\mathbf{v}'} - \overline{g\rho'w'} - \overline{\boldsymbol{P}'\cdot\nabla\mathbf{v}'} - \bar{\rho}\overline{\mathbf{v}'\cdot(\mathbf{v}'\cdot\nabla\bar{\mathbf{v}})}. \qquad (8.14)$$

Выражение для турбулентного потока тепла в приближении Буссинеска принимает вид

$$\mathbf{W}_{\mathrm{e}} \approx c_{\mathrm{pa}}(\bar{T}/\bar{\Theta})\,\bar{\rho}\overline{\Theta'\mathbf{v}'} + L_{\mathrm{v}}\bar{\rho}\overline{\varepsilon_{\mathrm{v}}'\mathbf{v}'} + \overline{p'\mathbf{v}'}, \qquad (8.15)$$

где два первых члена представляют в том же приближении обычные турбулентные потоки явного и скрытого тепла [см. формулу (7.14)]. Если пренебречь в уравнении (8.4) членами, содержащими произведения пульсаций скорости, то в приближении Буссинеска получим линеаризированное уравнение возмущений (см. главу 16)

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial\mathbf{v}'}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}}\cdot\nabla\mathbf{v}' + \mathbf{v}'\cdot\nabla\bar{\mathbf{v}}\right) + 2\boldsymbol{\Omega}\times\bar{\rho}\mathbf{v}' = -\nabla p' + \operatorname{div}\boldsymbol{P}' - \rho'\nabla\phi. \qquad (8.4a)$$

Для того чтобы получить более общее линеаризированное уравнение возмущений

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial\mathbf{v}''}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}}\cdot\nabla\mathbf{v}'' + \mathbf{v}''\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}}\right) + 2\boldsymbol{\Omega}\times\bar{\rho}\mathbf{v}'' +$$

$$+ \rho'\left(\frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\tilde{\mathbf{v}}\right) = -\nabla p' + \operatorname{div}\boldsymbol{P}' - \rho'\nabla\phi, \qquad (8.16)$$

необходимо вернуться к уравнению (6.4) турбулентного движения, исключив в нем члены второго порядка по отношению к ρ', p' и $\mathbf{v}''$. Здесь $\mathbf{v}''$ может быть заменено на $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{v}$ — на $\bar{\mathbf{v}}$. Используя (6.6), соответствующее уравнение неразрывности приведем к виду

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho'\bar{\mathbf{v}} + \bar{\rho}\mathbf{v}') = 0.$$

В большинстве случаев осредненный поток $\bar{\rho}$, $\bar{p}$, $\tilde{\mathbf{v}}$ таков, что $\partial\tilde{\mathbf{v}}/\partial t + \tilde{\mathbf{v}}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}} \approx 0$ (см. главу 16).

9

Энергетика вынужденной конвекции

9.1. Вынужденная конвекция

Вынужденная конвекция особенно проявляется в тех частях атмосферы, где наблюдаются большие градиенты скорости ветра, а именно в струйных течениях, где сдвиги ветра по горизонтали и вертикали достигают очень больших значений, и в пограничном слое высотой около 1000—1500 м над поверхностью земли, в котором трение играет преобладающую роль (п.п. 9.4 и 9.5) и где вертикальный сдвиг средней скорости ветра особенно велик. Наши знания о мелкомасштабной турбулентности в струйных течениях все еще остаются очень ограниченными. Основное внимание мы сосредоточим на пограничном слое в силу его особой важности для динамики и энергетики общей циркуляции тропосферы и нижней стратосферы. Действительно, основной сток кинетической энергии среднего движения происходит именно в этом слое [см. уравнение (9.18а)].

Данные наблюдений показывают, что в атмосфере для явлений масштаба вынужденной конвекции турбулентные пульсации ρ', p' и T'' плотности ρ, давления p и температуры T по отношению к соответствующим средним значениям $\bar{\rho}$, $\bar{p}$ и $\tilde{T}$ (см. главу 4) имеют следующий порядок величины [5]:

$$\left.\begin{aligned} (|\rho'|/\bar{\rho}) \sim (|T''|/\tilde{T}) \sim 10^{-4} \div 10^{-3}, \\ (|p'|/\bar{p}) \sim 10^{-5}. \end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

Порядок величины времени существования (период) вихрей меняется в случае вынужденной конвекции от десятых долей секунды до нескольких десятков секунд. Следовательно, временной интервал осреднения должен быть равен по крайней мере нескольким минутам.

Из порядка величин (9.1) следует, что приближение Буссинеска (см. главу 8) в пограничном слое выполняется; более того, для рассматриваемых здесь масштабов относительными пульсациями давления $p'/\bar{p}$ можно пренебречь по сравнению с относительными пульсациями плотности $\rho'/\bar{\rho}$ и температуры $T'/\bar{T}$.

Отсюда
$$(-\rho'/\bar{\rho}) \approx (T'/\bar{T}) \approx (\Theta'/\bar{\Theta}), \tag{9.2}$$
что является следствием уравнения состояния сухого воздуха и определения потенциальной температуры Θ [см. формулы (7.8) и (7.9)]. В соотношениях (9.1) и (9.2) $\bar{\rho}$, $\bar{p}$, $\bar{T}$ и $\bar{\Theta}$ могут быть заменены на ρ, p, T и Θ соответственно.

Пульсация $\mathbf{v}'$ скорости воздуха $\mathbf{v}$ составляет бо́льшую долю средней скорости $\bar{\mathbf{v}}$, чем соответствующие пульсации ρ' и T' плотности воздуха ρ и абсолютной температуры T от их средних значений $\bar{\rho}$ и $\bar{T}$. Порядок величины абсолютного значения $|\mathbf{v}'|$ пульсации скорости $\mathbf{v}'$ таков, что
$$(|\mathbf{v}'|/|\bar{\mathbf{v}}|) \sim 10^{-1} \div 10^{0}. \tag{9.1'}$$
Следует, однако, заметить, что вертикальная компонента $\bar{w}$ средней скорости столь мала, что ею можно пренебречь ($\bar{w} \approx 0$, заметим, что $\bar{w} \neq \overline{|w|}$), так что $w \approx w'$; исключение составляют склоны гор и сильно нагретые или охлажденные области земли.

Мы уже видели в главе 6, что сила трения, отнесенная к единице объема, имеет следующую векторную форму:
$$\mathbf{F}_i \equiv \operatorname{div}(\bar{\boldsymbol{P}} - \overline{\rho\mathbf{v}''\mathbf{v}''}) \approx \operatorname{div}(\bar{\boldsymbol{P}} - \bar{\rho}\overline{\mathbf{v}'\mathbf{v}'}).$$
Пограничный слой — это сравнительно тонкий слой атмосферы; вертикальный градиент турбулентных напряжений в нем существенно больше горизонтального градиента. Пренебрегая по той же причине производными по горизонтали от скорости ветра в составляющих осредненного тензора Навье—Стокса и предполагая, что среднее движение горизонтальное, внутреннюю силу $\mathbf{F}_i$ сведем к ее горизонтальной составляющей [20]:
$$\mathbf{F}_i \approx \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_h}{\partial z} - \bar{\rho}\overline{\mathbf{v}'_h w'}\right) \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_h}{\partial z},$$
где вектор
$$\boldsymbol{\tau}_h \equiv \mu \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_h}{\partial z} - \bar{\rho}\overline{\mathbf{v}'_h w'} \tag{9.3}$$
представляет собой горизонтальную составляющую напряжения трения, действующего со стороны вышележащих слоев на слой, расположенный ниже рассматриваемой горизонтальной поверхности. Напряжение $\boldsymbol{\tau}_h$ складывается из напряжения Навье—

Стокса μ $(\partial\overline{\mathbf{v}}_h/\partial z)$ (молекулярная вязкость) и напряжения Рейнольдса $-\overline{\rho \mathbf{v}_h w'}$, обусловленного мелкомасштабным турбулентным обменом количества движения (турбулентная вязкость).

В более общем смысле можно сказать, что в рассматриваемом нами случае пространственные изменения метеорологических величин, определяющих среднее движение, в любом горизонтальном направлении пренебрежимо малы (отсутствует адвекция), так что результирующий турбулентный поток в основном вертикальный. Над плоской макроскопически однородной земной поверхностью (плоская равнина, поверхность воды) следует ожидать однородных метеорологических условий в горизонтальной плоскости.

Горизонтальная адвекция влаги, тепла и количества движения в слое между поверхностью земли и данным уровнем пренебрежимо мала, если отношение высоты этого уровня к горизонтальному масштабу (по которому оценивается адвекция) значительно меньше 10^{-1}. Это утверждение, в частности, справедливо в отношении плотности ρ; более того, в этом случае можно пренебречь не только горизонтальным градиентом $\overline{\rho}$, но также местным изменением во времени; получаем таким образом следующие приближенные уравнения:

$$\operatorname{div}\overline{\mathbf{v}}_h + \frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial}{\partial z}(\overline{\rho}\overline{w}) = 0 \text{ и } \operatorname{div}\mathbf{v}'_h + \frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial}{\partial z}(\overline{\rho}w') = 0, \qquad (9.4)$$

где индекс «h» обозначает горизонтальную составляющую вектора. Уравнения (9.4) заменяют уравнения неразрывности (5.49) и (6.6). При получении (9.4) принято во внимание приближение Буссинеска (см. главу 8).

В предположении, что среднее движение горизонтальное $(\overline{v}^3 \equiv \overline{w} = 0)$, уравнение неразрывности сводится к виду $\operatorname{div}\overline{\mathbf{v}}_h = 0$. Более того, справедливы соотношения

$$\left|\frac{w'}{\overline{\rho}}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial z}\right| \sim 10^{-4} Z^{-1}|w'| \quad \text{с}^{-1} \text{ и } \left|\frac{\partial w'}{\partial z}\right| \sim Z^{-1}|w'|\,\text{с}^{-1},$$

где Z — среднее расстояние по вертикали между точками, в которых вертикальная скорость принимает экстремальные значения, т. е. вертикальный размер вихрей в случае вынужденной конвекции. Согласно оценкам [5], Z меньше 100 м ($Z \lesssim 10^2$ м), так что уравнение неразрывности турбулентного движения принимает простую форму

$$\operatorname{div}\mathbf{v}' \approx 0. \qquad (9.4а)$$

Таким образом, турбулентное движение можно рассматривать здесь как несжимаемое. Это утверждение просто означает, что в случае вынужденной конвекции смещение частиц жидкости по вертикали не настолько велико, чтобы они могли оказаться в слое с существенно другой плотностью. Уравнение (9.4а) широко используется при изучении энергетических процессов рассматриваемых здесь масштабов (см. п. 9.2).

В заключение подчеркнем, что мелкомасштабное движение влияет главным образом на вертикальное распределение метеорологических величин.

9.2. Скорости перехода энергии

Обозначим через ρ_i' лагранжеву флуктуацию плотности, соответствующую эйлеровой флуктуации ρ', а через ζ вертикальное смещение вихря, или путь смешения. Имеем

$$\rho' = -\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}\zeta + \rho_i', \tag{9.5}$$

где с учетом (9.4а) $|\rho_i'| \ll |-(\partial\bar{\rho}/\partial z)\,\zeta|$. Таким образом, справедливо приближенное соотношение

$$\rho' \approx -\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}\,\zeta. \tag{9.5a}$$

Распределение средней плотности в поле силы тяжести устойчивое $[(-\partial\bar{\rho}/\partial z) > 0]$, благодаря чему турбулентные вихри, приходящие на данный уровень снизу ($w > 0$, $\zeta > 0$), вызывают положительные флуктуации плотности ($\rho' > 0$), а приходящие сверху ($w < 0$, $\zeta < 0$) — отрицательные флуктуации ($\rho' < 0$); отсюда [ср. с (10.4)]

$$\overline{\rho' w} \equiv \overline{\rho' w'} > 0. \tag{9.6}$$

В более общем случае с учетом соотношения (9.2) и того факта, что корреляция вертикального пути смешения ζ и вертикальной скорости w положительна, мы, как правило, имеем:

$$\left.\begin{array}{l} \zeta > 0,\ w > 0,\ \rho' > 0,\ T' < 0,\ \Theta' < 0 \\ \text{или} \\ \zeta < 0,\ w < 0,\ \rho' < 0,\ T' > 0,\ \Theta' > 0. \end{array}\right\} \tag{9.7}$$

На основе этих неравенств, соотношения (9.2) и формулы (7.6), если в ней использовать приближение Буссинеска, можно легко получить выражение и оценить знак турбулентного потока явного тепла, в котором сохраняется только вертикальная составляющая $(W_S)_z \equiv F_H$, а именно

$$F_H \approx c_{pa}\bar{\rho}\overline{T'w'} = (c_{pa}/R_a)\,\overline{pw'\,((p'/\bar{p}) - (\rho'/\bar{\rho}))} \approx -c_{pa}\bar{T}\overline{\rho'w'} = -c_{pa}\bar{T}\overline{\rho'w} < 0. \tag{9.8}$$

Таким образом, в случае преобладания вынужденной конвекции вертикальный турбулентный поток явного тепла — преимущественно следствие положительной корреляции между плотностью и вертикальной скоростью.

Предполагая вслед за Шмидтом [85, 86], что $\Theta_l' = \Theta' + (\partial\bar{\Theta}/\partial z)\,\zeta = 0$ и $\partial\bar{\Theta}/\partial z > 0$, т. е. считая турбулентное движение адиабатическим (лагранжева флуктуация потенциальной температуры $\Theta_l' = 0$), а распределение средней температуры устойчивым, находим

$$F_H \approx \frac{c_{pa}\bar{T}}{\Theta}\,\bar{\rho}\overline{\Theta'w} = -\frac{c_{pa}\bar{T}}{\bar{\Theta}}\,\bar{\rho}K_H\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial z} = -c_{pa}\bar{\rho}K_H\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial z} + \frac{g}{c_{pa}}\right) = -\bar{\rho}K_H\frac{\partial}{\partial z}(c_{pa}\bar{T} + gz) < 0. \tag{9.8'}$$

Эти предположения приводят, таким образом, к нисходящему турбулентному потоку явного тепла. Здесь $K_H \equiv \overline{\zeta w}$ (>0) — коэффициент турбулентной температуропроводности по вертикали (ρK_H — коэффициент турбулентного теплообмена по вертикали). Порядок величины K_H колеблется между 10^3 и 10^5 см$^2\cdot$с$^{-1}$.

Выражение для скорости перехода турбулентной кинетической энергии во внутреннюю энергию устанавливаем на основании (9.8). С учетом (9.6) находим

$$g\overline{\rho'w'} = -\frac{g}{c_{pa}\bar{T}}F_H = \bar{\rho}K_H\frac{g}{\Theta}\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial z} > 0. \tag{9.9}$$

Это неравенство указывает на то, что эффект силы тяжести сводится к тому, чтобы при устойчивом распределении плотности и температуры ограничивать развитие турбулентности. Скорость перехода (9.9) представляет собой работу (отнесенную к единице объема), которую совершают вихри *против* силы плавучести $-g\rho' \approx (g\bar{\rho}/\bar{\Theta})\,\Theta' = -g\,(\rho/\bar{\Theta})\,(\partial\bar{\Theta}/\partial z)\,\zeta$. Эта работа отрицательна при устойчивом распределении температуры $[(\partial\bar{\Theta}/\partial z) > 0]$ и положительна при неустойчивом $[\partial\bar{\Theta}/\partial z) < 0]$. В первом случае турбулентная кинетическая энергия трансформируется во внутреннюю энергию (тепло), во втором — наоборот. Таким образом, вихри должны рассматриваться как термодинамические системы, совершающие работу в поле силы тяжести. Подчеркнем, что при преобладании вынужденной конвекции в приземном слое (слое толщиной в несколько десятков метров над плоской поверхностью земли, см. п. 9.4) стратификация этого слоя, вообще говоря, устойчивая (первый случай). Если же под влиянием нагревания земной поверхности стратификация становится неустойчивой (второй случай), то начинает развиваться свободная конвекция, которая усиливается с высотой при условии отсутствия инверсий температуры в нижней тропосфере. В этом случае свободная конвекция преобладает над вынужденной (см. главу 10). В самом деле, если $(\partial\overline{\Theta}/\partial z) < 0$ (а такие условия наблюдаются в приземном слое примерно в половине всех случаев), то вертикальные размеры вихрей становятся столь значительными, что необходимо принимать во внимание сжимаемость, а это значит, что приближенные соотношения (9.4a) и (9.5a) теряют силу. Более того, в последнем случае не сохраняется связь между знаками вертикальной скорости w и флуктуаций Θ' и T', указанная в (9.7).

Следует подчеркнуть, что при получении выражения для скорости перехода $g\overline{\rho' w'}$ нельзя использовать приближенное соотношение (9.5a). Хотя в случае вынужденной конвекции эффекты сжимаемости в атмосфере пренебрежимо малы, атмосфера тем не менее сжимаема, а это значит, что в $g\overline{\rho' w'}$ нужно вместо ρ' подставлять $-\overline{\rho}\Theta'/\overline{\Theta}$ и затем вместо Θ' — выражение $-(\partial\overline{\Theta}/\partial z)\ \zeta$. Если в $g\overline{\rho' w'}$ флуктуацию ρ' заменить непосредственно по (9.5a), то получим выражение $\overline{\rho} K_{\text{н}} (-g/\overline{\rho}) (\partial\overline{\rho}/\partial z)$, которое примерно в 10 раз больше, чем (9.9). В самом деле, хорошо известно, что параметр статической устойчивости $-(g/\overline{\rho}) (\partial\overline{\rho}/\partial z) \sim 10^{-3}$ с$^{-2}$ несжимаемой атмосферы в среднем в 10 раз больше параметра статической устойчивости $(g/\overline{\Theta}) (\partial\overline{\Theta}/\partial z) \sim 10^{-4}$ с$^{-2}$ сжимаемой атмосферы. Знак неравенства $(\partial\overline{\Theta}/\partial z) > 0$ или <0 зависит в атмосфере от неравенств

$$0 < -\frac{1}{\overline{p}}\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}\frac{c_{\text{va}}}{c_{\text{pa}}} < -\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial z} \quad \text{или} \quad 0 < -\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial z} < -\frac{1}{\overline{p}}\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}\frac{c_{\text{va}}}{c_{\text{pa}}}.$$

В этих неравенствах величина $\{(-1/\overline{p}) (\partial\overline{p}/\partial z)\}^{-1}$ представляет собой масштаб высоты $R\tilde{T}/g$.

Приближенные соотношения (9.2) теряют силу, если в атмосфере наблюдаются значительные вертикальные градиенты содержания водяного пара. В этом случае флуктуации плотности зависят не только от флуктуаций температуры, но также и от флуктуаций удельной влажности (см. главу 7). Поскольку, согласно (9.2), флуктуациями давления можно пренебречь, то с учетом приближения Буссинеска формулы (7.8) и (7.9) дают

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} \approx -\frac{T'}{\bar{T}} - r\varepsilon_v' \text{ и } \frac{T'}{\bar{T}} \approx \frac{\Theta'}{\bar{\Theta}}. \tag{9.10}$$

На основе этих соотношений легко получаем

$$g\overline{\rho' w'} = -\frac{g}{\bar{T}}\bar{\rho}\,\overline{T'w'} - gr\bar{\rho}\,\overline{\varepsilon_v' w'} = -g\left(\frac{F_H}{c_{pa}\bar{T}} + rF_W\right) =$$

$$= \frac{-g}{c_{pa}\bar{T}}(F_H + r'L_v F_W), \tag{9.9'}$$

где $r' \equiv (rc_{pa}\bar{T}/L_v) \lesssim 10^{-1}$ [35].

В зависимости от того, $\overline{\rho' w'} > 0$ или <0, стратификация в поле силы тяжести устойчивая (турбулентная кинетическая энергия уменьшается) или неустойчивая (турбулентная кинетическая энергия увеличивается).

Из (9.4а) следует

$$\overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla p'} \approx \operatorname{div} \overline{p' \mathbf{v}'},$$

так что это скалярное произведение не играет более роли скорости перехода; другими словами, средняя турбулентная кинетическая энергия и внутренняя энергия консервативны по отношению к процессу, описываемому членом $\overline{\mathbf{v}' \cdot \nabla p'}$ (см. п. 6.5).

На основании того же уравнения (9.4а) можно записать

$$\overline{\boldsymbol{P}' \cdot \nabla \mathbf{v}'} \equiv 2\mu\overline{e_{ij}' e_{ij}'} = \bar{\rho}\Delta > 0, \tag{9.11}$$

где $e_{ij}' \equiv \frac{1}{2}(\partial v'^i/\partial x^j + \partial v'^j/\partial x^i)$ — декартовы компоненты симметричного тензора сдвига; v^1 и v^2 — горизонтальные и v^3 — вертикальная составляющие скорости движения.

Следуя Прандтлю [67, 68], предположим, что $\mathbf{v}_h' = -(\partial\bar{\mathbf{v}}_h/\partial z)\zeta$, или, другими словами, допустим, что вихри, смещающиеся по вертикали на расстояние ζ, сохраняют на уровне $z + \zeta$ то количество движения, каким они обладали на исходном уровне z [$\mathbf{v}_h' = \bar{\mathbf{v}}_h(z) - \bar{\mathbf{v}}_h(z+\zeta)$]. При этом предположении горизонтальная составляющая напряжения Рейнольдса

$$-\bar{\rho}\,\overline{\mathbf{v}_h' w'} = -\bar{\rho}\,\overline{\mathbf{v}_h w'}$$

записывается в виде

$$\tau_h = -\bar{\rho}\,\overline{v_h' w'} = \bar{\rho} K_M \frac{\partial \bar{v}_h}{\partial z}, \tag{9.12}$$

где $K_M = \overline{\zeta w}$ — коэффициент турбулентности ($\bar{\rho} K_M$ — коэффициент турбулентного обмена количеством движения по вертикали). Порядок величины K_M, во всяком случае, не меньше 10^3 см$^2 \cdot$с$^{-1}$.

Хотя коэффициенты K_H и K_M записаны в виде одинаковых выражений, их числовые значения различны, поскольку вихри могут участвовать в переносе тепла более активно, чем в переносе количества движения (равно как и наоборот). Оба коэффициента, однако, имеют один и тот же порядок величины, хотя K_H, вообще говоря, несколько больше K_M.

Поскольку сдвиги ветра $\partial \bar{v}_h/\partial x$ и $\partial \bar{v}_h/\partial y$ по горизонтальным координатам x и y по крайней мере на два порядка величины меньше вертикального сдвига $\partial \bar{v}_h/\partial z$, то введенная выше скорость перехода энергии может быть представлена в следующем виде:

$$-\bar{\rho}\,\overline{\mathbf{v}' \cdot (\mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}})} \approx -\bar{\rho}\,\overline{\mathbf{v}_h' \cdot (\mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}_h)} \approx -\bar{\rho}\,\overline{\mathbf{v}_h' w'} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_h}{\partial z} = \boldsymbol{\tau}_h \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_h}{\partial z}.$$

С учетом (9.12) последнее выражение принимает вид

$$-\bar{\rho}\,\overline{\mathbf{v}_h' \cdot (\mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}_h)} \approx \bar{\rho} K_M \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_h}{\partial z}\right)^2 > 0. \tag{9.13}$$

Согласно Тейлору [108], скорости преобразования энергии (9.11) и (9.13) имеют одинаковый порядок величины.

Аналогичным образом можно показать, что

$$\boldsymbol{P} \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}} \approx \bar{\rho} \eta \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_h}{\partial z}\right)^2 > 0. \tag{9.14}$$

Здесь коэффициент кинематической вязкости $\eta = (\mu/\bar{\rho})$ по меньшей мере в 10^4 раз меньше, чем коэффициент турбулентности K_M. Из этих оценок следует, что всюду в пограничном слое напряжение Рейнольдса $\rho K_M\,(\partial \bar{v}_h/\partial z)$ и скорость перехода $\bar{\rho} K_M\,(\partial \bar{v}_h/\partial z)^2$ кинетической энергии среднего движения в турбулентную кинетическую энергию во много раз больше напряжения Навье—Стокса $\bar{\rho}\eta\,(\partial \bar{v}_h/\partial z)$ и скорости перехода $\bar{\rho}\eta\,(\partial \bar{v}_h/\partial z)^2$ кинетической энергии среднего движения во внутреннюю энергию (тепло). Имеется, однако, исключение из этого правила, а именно когда земная поверхность в каком-то месте аэродинамически гладкая (спокойная водная поверхность). В таком случае средняя горизонтальная скорость ветра увеличивается от нуля на поверхности земли до некоторого конечного значения на верхней границе очень тонкого слоя, называемого вязким подслоем (толщина которого над гладкой поверхностью, во всяком случае, не превосходит нескольких миллиметров, см. п. 9.4); в результате в этом слое возникают очень большие вертикальные градиенты скорости. С другой стороны, благодаря кинематическому условию ($\zeta \to 0$ при $z \to 0$) напряжение Рейнольдса вблизи поверхности земли значительно уменьшается, так что в этом тонком вязком подслое напряжение τ_h уменьшается до $\bar{\rho}\eta$ $(\partial\bar{\mathbf{v}}_h/\partial z)$, в то время как всюду выше вязкого подслоя τ_h равно $\bar{\rho}K_M$ $(\partial\bar{\mathbf{v}}_h/\partial z)$. Направление средней скорости ветра в вязком подслое совпадает с направлением горизонтального напряжения. Добавим, что в этом тонком подслое не только молекулярная вязкость, но также молекулярная теплопроводность и диффузия превышают соответствующие турбулентные величины, поскольку в пределах этого слоя наблюдаются большие вертикальные градиенты не только скорости ветра, но также температуры и удельной влажности (см. п. 9.4). Над перегретой почвой скачок температуры в очень тонком слое может достигать больших значений (20—30° C).

В заключение во избежание недоразумений укажем здесь, что земная поверхность, как правило, аэродинамически не гладкая, а шероховатая, благодаря чему движение воздуха полностью турбулентное. Таким образом, поток количества движения в атмосфере не зависит от молекулярной вязкости (см. [92] и п. 9.4).

9.3. Уравнения баланса энергии

Предполагая, что поток турбулентной кинетической энергии $-\overline{\mathbf{v}'P'}$ под влиянием молекулярной диффузии мал по сравнению с турбулентным потоком $\overline{\rho k_e \mathbf{v}'}$ (см. ниже), обусловленным турбулентной диффузией (это предположение представляется вполне обоснованным), пренебрегая влажностью воздуха и объединяя полученные выше результаты, уравнение баланса средней турбулентной кинетической энергии (8.10) запишем в следующем виде, указанном Кальдером [5]:

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial \bar{k}_e}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}}_h \cdot \nabla_h \bar{k}_e\right) + \operatorname{div}\overline{\left(\bar{\rho}\frac{(\mathbf{v}')^2}{2} + p'\right)\mathbf{v}'} =$$

$$= \bar{\rho}K_M\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_h}{\partial z}\right)^2 - \bar{\rho}K_H\frac{g}{\Theta}\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial z} - \bar{\rho}\Delta, \qquad (9.15)$$

а уравнение баланса средней внутренней энергии — в виде

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}}_h \cdot \nabla_h \bar{e}\right) + \operatorname{div}(\overline{\mathbf{W}} + \mathbf{W}_e) =$$

$$= \bar{\rho}\eta\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_h}{\partial z}\right)^2 + \bar{\rho}K_H \frac{g}{\bar{\Theta}} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z} + \bar{\rho}\Delta, \qquad (9.16)$$

где $\mathbf{W}_e$ — поток тепла $(c_{pa}\bar{T}/\bar{\Theta})\,\bar{\rho}\,\overline{\Theta'\mathbf{v}'}$ [см. формулу (8.15)]; $K_M\,(\partial\bar{\mathbf{v}}_h/\partial z)^2$ (>0) — скорость перехода кинетической энергии среднего движения в энергию турбулентного движения (эффект сдвига); $K_H\,(g/\bar{\Theta})\,(\partial\bar{\Theta}/\partial z)$ (>0, если статическое состояние устойчивое) — скорость превращения кинетической энергии в тепло под влиянием турбулентности; Δ (>0) — скорость превращения кинетической энергии в тепло под влиянием молекулярных процессов (молекулярной вязкости). В случае вынужденной конвекции турбулентное движение получает кинетическую энергию от среднего движения, а теряет ее при установившемся режиме с такой же скоростью в результате превращения турбулентной кинетической энергии в тепло под влиянием молекулярной и турбулентной диффузии.

Диссипативный член $\bar{\rho}\Delta$ [>0, см. формулу (9.11)] в правых частях уравнений баланса (9.15) и (9.16) достигает наибольших значений в микромасштабной области турбулентности, в вязкой подобласти, где наиболее активна вязкая диссипация (см. п. 4.4).

В уравнении баланса (9.15) эффектом плавучести можно пренебречь по сравнению с эффектом сдвига, если

$$\bar{\rho}K_M\left(\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_h}{\partial z}\right)^2 \gg \bar{\rho}K_H\left(\frac{g}{\bar{\Theta}}\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z}\right) > 0$$

или (в более общем случае) когда

$$\boldsymbol{\tau}_h \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}_h}{\partial z} \gg g\overline{\rho' w'} > 0. \qquad (9.17)$$

С учетом соотношений (9.12) и (9.9) критерий (9.17) состояния, близкого к равновесному, принимает вид

$$(\tau_h)^2 \gg \frac{g\bar{\rho}K_M}{c_{pa}\bar{T}}\,|F_H|. \qquad (9.17a)$$

Если неравенства (9.17) или (9.17а) выполняются, то эффект сдвига ветра столь значителен, что плавучесть не оказывает сколько-нибудь существенного влияния на механизм передачи количества движения. Это режим полностью вынужденной конвекции.

Если необходимо принять во внимание влажность, то надо заменить $\mathbf{W}_e$ на $\mathbf{W}_e^* = c_{pa}(\overline{T}/\overline{\Theta})\,\overline{\rho}\,\overline{\Theta'\mathbf{v}'} + L_v\overline{\rho}\,\overline{\varepsilon_v'\mathbf{v}'}$ [см. формулу (8.15)] и $\overline{\rho}K_H(g/\overline{\Theta})(\partial\overline{\Theta}/\partial z)$ на $\overline{\rho}K_H(g/\overline{\Theta})(\partial\overline{\Theta}/\partial z) + rg\overline{\rho}K_W \times$ $\times (\partial\overline{\varepsilon}_v/\partial z)$ в уравнениях баланса (9.15) и (9.16), а также $|F_H|/c_{pa}\overline{T}$ на $|(F_H/c_{pa}\overline{T}) + rF_W|$ в неравенстве (9.17а).

С учетом (9.4а) отброшенный член $\overline{\mathbf{v}'\cdot\boldsymbol{P}'}$ можно представить в виде

$$\operatorname{div}\overline{\boldsymbol{P}'\cdot\mathbf{v}'} \equiv \mu(\partial/\partial x^i)\left\{(\partial/\partial x^j)\left(\frac{1}{2}\overline{v'^k v'^k}\delta_{ij} + \overline{v'^i v'^j}\right)\right\},$$

где символ δ_{ij} представляет декартовы компоненты тензора Кронекера $\boldsymbol{\delta}$ ($\delta_{ij} \equiv 0$, если $i \neq j$; $\delta_{ij} \equiv 1$, если $i = j$). Следовательно, упрощающее предположение означает, что изменение в пространстве величины в скобках можно считать малым или что можно пренебречь неоднородностью пространственного распределения средних величин [5].

Критерий развития турбулентности введен в 1920 г. Ричардсоном [77]. Из уравнения баланса (9.15) следует, что турбулентная кинетическая энергия возрастает, когда

$$\overline{\rho}K_M\left(\frac{\partial\overline{\mathbf{v}}_h}{\partial z}\right)^2 > \overline{\rho}K_H\frac{g}{\overline{\Theta}}\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z} + \overline{\rho}\Delta.$$

Если же можно пренебречь диссипацией турбулентной энергии в тепло под влиянием молекулярного обмена, то критерий возрастания турбулентной энергии принимает вид

$$\mathrm{Ri_F} \equiv (K_H/K_M)\,\mathrm{Ri} < 1,$$

где

$$\mathrm{Ri} \equiv \frac{g}{\overline{\Theta}}\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z}\Big/\left(\frac{\partial\overline{\mathbf{v}}_h}{\partial z}\right)^2$$

есть обычное (классическое) число Ричардсона [77]; $\mathrm{Ri_F}$ — потоковое число Ричардсона [69].

В приземном слое (толщиной в несколько десятков метров над поверхностью земли) число Ричардсона наиболее часто заключено в интервале —1; +0,2.

Критерий развития турбулентности $\mathrm{Ri_F} < 1$ выражает тот факт, что турбулентная кинетическая энергия увеличивается [со скоростью $\overline{\rho}K_M(\partial\overline{\mathbf{v}}_h/\partial z)^2$] под влиянием напряжений быстрее, чем расходуется [со скоростью $\bar{\rho}K_{\text{H}}(g/\bar{\Theta})(\partial\bar{\Theta}/\partial z)$] на работу, совершаемую вихрями против силы тяжести. Этот критерий показывает, что усилению турбулентного движения способствует увеличение вертикальных сдвигов скорости ветра и ослабление статической устойчивости. При равновесном состоянии ($\partial\bar{\Theta}/\partial z = 0$) эффект плавучести отсутствует. В этом особом случае под влиянием турбулентности кинетическая энергия не переходит в тепло (равно как и наоборот). Согласно (9.15), при безразличном равновесии осуществляется переход кинетической энергии от среднего движения к турбулентному и диссипация турбулентной энергии среднего движения в тепло вследствие молекулярных процессов. Эффект плавучести играет определенную роль в случае свободной конвекции (она рассматривается в следующей главе).

Следует в заключение заметить, что производными по горизонтальным координатам в уравнениях баланса (9.15) и (9.16), как и членом $\eta\,(\partial\bar{\mathbf{v}}_{\text{h}}/\partial z)^2$ по сравнению с Δ, можно пренебречь; более того, в (9.15) можно целиком опустить дивергентный член. Таким образом, упрощенная система уравнений энергии имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{\rho}\,\frac{\partial \bar{k}_{\text{m}}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\boldsymbol{\tau}_{\text{h}}\cdot\bar{\mathbf{v}}_{\text{h}}\right)\approx-\bar{\rho}K_{\text{M}}\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{v}}_{\text{h}}}{\partial z}\right)^2,\\
&\bar{\rho}\,\frac{\partial \bar{k}_{\text{e}}}{\partial t}\approx\bar{\rho}K_{\text{M}}\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{v}}_{\text{h}}}{\partial z}\right)^2-\bar{\rho}K_{\text{H}}\,\frac{g}{\bar{\Theta}}\,\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial z}-\bar{\rho}\Delta,\\
&\bar{\rho}\,\frac{\partial \bar{e}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{W}_z+F_{\text{H}}\right)\approx\bar{\rho}K_{\text{H}}\,\frac{g}{\bar{\Theta}}\,\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial z}+\bar{\rho}\Delta,
\end{aligned}\right\}\qquad(9.18)$$

где $\overline{W}_z$ — радиационный поток тепла.

Приближенное уравнение баланса кинетической энергии среднего движения получено из (8.9) путем таких же упрощений, какие были введены в уравнения (8.10) и (8.11) при получении уравнений баланса для $\bar{k}_{\text{e}}$ и $\bar{e}$.

Интегрируя первое из уравнений (9.18) по всему слою трения τ (см. п. 9.4) и предполагая, что выше этого слоя $\boldsymbol{\tau}_{\text{h}}\approx 0$, находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\tau}\bar{\rho}\bar{k}_{\text{m}}\,d\tau\approx-\oint\limits_{\sigma}(\boldsymbol{\tau}_{\text{h}}\cdot\bar{\mathbf{v}}_{\text{h}})_0\,d\sigma-\int\limits_{\tau}\bar{\rho}K_{\text{M}}\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{v}}_{\text{h}}}{\partial z}\right)^2 d\tau,\qquad(9.18\text{a})$$

где σ — поверхность земли и $(\boldsymbol{\tau}_{\text{h}}\cdot\bar{\mathbf{v}}_{\text{h}})_0$ — значение скалярного произведения $\boldsymbol{\tau}_{\text{h}}\cdot\bar{\mathbf{v}}_{\text{h}}$ на земной поверхности (которое совпадает со значением этой величины на верхней границе приземного слоя, см. п. п. 9.4 и 9.5).

Поскольку всюду $(\boldsymbol{\tau}_h \cdot \overline{\mathbf{v}}_h)_0 > 0$, то можно сказать, что правая часть (9.18а) представляет скорость диссипации кинетической энергии среднего движения под влиянием поверхностного трения и турбулентного обмена.

9.4. Приземный слой

В *пограничном слое* мелкомасштабные вихри переносят по вертикали значительное количество различных субстанций (водяной пар, пыль и др.), а также тепла и импульса. Линейные размеры этих вихрей или меньше, или сравнимы с высотой z над поверхностью земли. Верхняя граница слоя изменяется со временем. Она обычно совпадает с верхней границей кучевых облаков хорошей погоды. Высота последних изменяется, но, как правило, не превышает высоты изобарической поверхности 750 мбар.

Выше пограничного слоя обычно располагается слой с устойчивой стратификацией, который препятствует проникновению турбулентных вихрей из пограничного слоя в свободную атмосферу, исключая случай влажнонеустойчивой стратификации. В пограничном слое скорость ветра, как правило, отличается от той, которая наблюдалась бы при отсутствии силы трения. Однако нельзя отождествлять (как это нередко утверждается) скорость ветра при отсутствии сил трения с приземным геострофическим ветром. Последнее определение слоя трения излишне ограничено. *Слой трения* (см. п. 9.5) не обязательно совпадает со всем пограничным слоем.

В нижней части пограничного слоя расположен *приземный слой*, в котором вертикальные турбулентные потоки F_{M}, F_{H} и F_{W} почти постоянны с высотой и, следовательно, соответствующие средние величины заметно не изменяются во времени. Приземный слой распространяется от земной поверхности до высоты в несколько десятков метров, при этом его толщина увеличивается при возрастании шероховатости земной поверхности. Ниже приземного слоя расположен *слой взаимодействия*, содержащий элементы шероховатости земной поверхности. Очень скудны сведения о процессах, происходящих в этом тонком слое в непосредственной близости к земной поверхности. Тем не менее процессы эти очень важны, поскольку они формируют потоки импульса, тепла и водяного пара. Если поверхность гладкая, то перенос тепла и водяного пара в слое взаимодействия осуществляется путем молекулярной теплопроводности и молекулярной диффузии. Турбулентный поток импульса, однако, над аэродинамически шероховатой поверхностью не зависит от молекулярной вязкости. В этом случае поток импульса на поверхности выступает как сила сопротивления, порождаемая силой давления, которая действует на элементы шероховатости.

Согласно некоторым данным, пограничный слой примерно в 50% случаев стратифицирован сухонеустойчиво ($\partial\overline{\Theta}/\partial z < 0$) и менее чем в 10% случаев — сухоустойчиво ($\partial\overline{\Theta}/\partial z > 0$). При сухоустойчивом состоянии турбулентные потоки в пограничном слое сильно ослаблены (см. ниже). В оставшихся случаях пограничный слой стратифицирован влажноустойчиво или влажнонеустойчиво, поскольку в этих случаях воздух вблизи земли находится в насыщенном состоянии. При влажнонеустойчивом состоянии (вероятность таких случаев меньше 10%) влажные конвективные элементы проникают через устойчивый слой над пограничным слоем в свободную атмосферу, порождая конвективные облака, распространяющиеся до очень больших высот и сопровождающиеся сильными ливнями [9].

Рассмотрим прежде всего вертикальный турбулентный поток F_M количества движения (импульса) в приземном слое.

В развитом турбулентном потоке над макроскопически однородной земной поверхностью (море или плоская равнина), при однородных по горизонтали условиях, средняя горизонтальная скорость $\overline{\mathbf{v}}_h$ сильно изменяется с высотой, в то время как горизонтальное напряжение Рейнольдса $\boldsymbol{\tau}_h$ (9.12) очень мало изменяется (на несколько процентов от поверхностного значения) в пределах нескольких десятков метров. Можно, таким образом, с хорошим приближением предположить, что в этом интервале высот напряжение Рейнольдса $\boldsymbol{\tau}_h$ равно поверхностному напряжению $(\boldsymbol{\tau}_h)_0$:

$$\boldsymbol{\tau}_h = \overline{\rho} K_M \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}_h}{\partial z} = (\boldsymbol{\tau}_h)_0 = \mathrm{const},$$

т. е. рассматривать состояние как установившееся. Ясно, что в таком тонком слое плотность воздуха $\overline{\rho}$ можно считать постоянной во времени и пространстве. Более того, если на турбулентное движение не влияет сила плавучести [см. критерии (9.17) или (9.17а) полностью вынужденной конвекции], то, следуя Прандтлю [67, 68], разумно предположить:

1) числовые значения скалярных величин $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$ и $\overline{\zeta^2}\,(\partial\overline{\mathbf{v}}_h/\partial z)^2$ примерно равны между собой;

2) корреляционная связь флуктуаций $\mathbf{v}'_h$ и w' такова, что на основании (9.12) можно получить

$$\boldsymbol{\tau}_h = \overline{\rho}\,\overline{\zeta^2} \left|\frac{\partial \overline{\mathbf{v}}_h}{\partial z}\right| \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}_h}{\partial z} = (\boldsymbol{\tau}_h)_0;$$

средний путь смешения $(\overline{\zeta^2})^{1/2}$ растет линейно с высотой z над поверхностью земли:

$$(\overline{\zeta^2})^{\frac{1}{2}} = kz.$$

Здесь $k = 0{,}41$ — универсальная постоянная Кармана.

Направляя ось x вдоль вектора $(\boldsymbol{\tau}_h)_0$, можем записать

$$(-F_M/\bar{\rho}) \equiv \{|\boldsymbol{\tau}_h|_0/\bar{\rho}\} \equiv -\overline{uw'} = u_*^2 = K_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} =$$

$$= k^2 z^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)^2 = \text{const} > 0,$$

где $\bar{u} + u'$, v', w' — составляющие мгновенной скорости; F_M — вертикальный турбулентный поток импульса; u_* — скорость трения. Последняя обычно на один порядок величины меньше средней скорости ветра $\bar{u}_a$ на уровне анемометра (как правило, отношение $\bar{u}_a/u_*$ заключено между 10 и 20). Из предыдущих соотношений следует [40, 106]:

$$\bar{u} = (u_*/k)\ln(z/z_0) \text{ и } K_M = ku_*z \text{ при } z \gg z_0, \qquad (9.19)$$

где z_0 — постоянная интегрирования, называемая параметром шероховатости (он зависит от высоты неровностей земной поверхности). Логарифмический профиль ветра нельзя продолжить до самой поверхности земли, поскольку он искажается элементами шероховатости (например, растительностью). Пространство ниже вершин элементов шероховатости неполностью занято воздухом; поэтому в слое взаимодействия понятия средней скорости ветра и среднего напряжения теряют свой простой физический смысл [35]. На некотором расстоянии от очень шероховатой поверхности (большие и острые неровности, порождающие вихри) понятие средней скорости восстанавливается, однако здесь средняя скорость отлична от нуля. Еще выше средняя скорость $\bar{u}$ увеличивается с высотой в согласии с логарифмическим законом (9.19) при том условии, что на режим движения не оказывает влияния плавучесть. Логарифмический закон справедлив для полностью развитого турбулентного потока; он не описывает распределения скорости в ближайших к гладкой поверхности нескольких миллиметрах.

Если земная поверхность аэродинамически шероховатая (большие и крутые неровности, или, более точно, если $u_*z_0/\eta > 5$), то параметр шероховатости z_0, по определению, не зависит от вязкости воздуха; z_0 равно примерно 1/10 высоты растительности. В случае взволнованной морской поверхности параметр шероховатости z_0 зависит от силы взаимодействия между воздушным и водным потоками.

В приземном слое $F_М < 0$, т. е. поток количества движения направлен от атмосферы к земной поверхности. Это заключение подтверждается существованием силы, с которой действует воздушный поток на различные объекты земной поверхности, а также тем, что в океанах наблюдаются поверхностные течения и волны [92, 106].

Если движение в пограничном слое полностью турбулентное, начиная от самой земной поверхности, то вязкий подслой (см. ниже и [92]), как он трактовался в конце п. 9.2, более не существует, а это значит, что приемлемо допущение $\eta = 0$. Однако коэффициент турбулентности $K_М$ на земной поверхности не может обратиться в нуль; его конечное значение при $z = 0$, как мы уже отмечали, определяется работой силы давления, действующей на элементы шероховатости. Поэтому коэффициент $K_М$ должен быть несколько больше, чем величина ku_*z вблизи шероховатой поверхности, т. е. при очень малых значениях z [92]. Следует вновь подчеркнуть, что если вблизи шероховатой поверхности коэффициентом кинематической вязкости η можно пренебречь, то этого нельзя допустить в отношении коэффициентов молекулярной теплопроводности и диффузии.

Многочисленные измерения, выполненные над покрытой короткой растительностью (высота растительности не превышала нескольких сантиметров) и, тем более, над лишенной растительности землей, показали, что логарифмический профиль ветра (9.19) характерен для реальных условий. Однако в случае высокой растительности (густая трава, зерновые злаки, кусты, деревья) вместо (9.19) следует писать

$$\bar{u} = \frac{u_*}{k} \ln \frac{z-d}{z_0} \quad \text{при } z \gg d + z_0. \tag{9.19'}$$

В этом случае элементы шероховатости имеют примерно такую же высоту, как и уровень d, выше которого наблюдается интенсивное перемешивание воздуха (рис. 3). При $\bar{u}_a \approx 5$ м·с$^{-1}$ в случае поверхности, покрытой короткой травой (1—3 см), характерные значения параметров в (9.19') таковы: $u_* = 33$ см·с$^{-1}$, $z_0 = 0{,}5$ см, $d = 0$; в случае поверхности, покрытой высокой травой (60—70 см), эти параметры принимают следующие значения: $u_* = 50$ см·с$^{-1}$, $z_0 = 3$ см, $d = 30$ см [106].

Когда земная поверхность аэродинамически гладкая (маленькие и довольно плоские неровности, например спокойная водная поверхность), уравнение

$$|\tau_h| = \bar{\rho} u_*^2 = \bar{\rho} K_M (\partial \bar{u}/\partial z) = |\tau_h|_0 = \text{const}$$

нужно заменить соотношением

$$|\tau_h| = \bar{\rho} u_*^2 = \bar{\rho} \eta (\partial \bar{u}/\partial z) = \text{const}$$

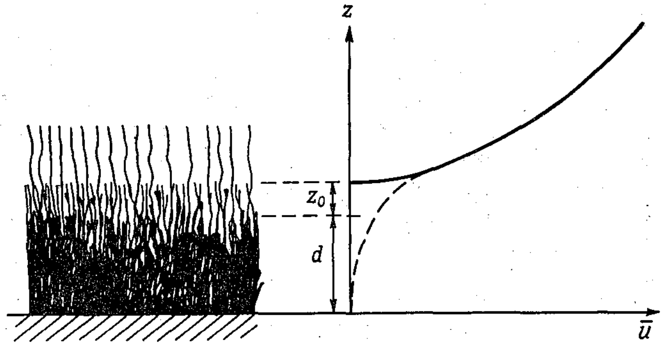

Рис. 3. Профиль средней скорости ветра $\bar{u}$ над поверхностью, покрытой растительностью. Выше уровня $d + z_0$ при безразличном состоянии (потенциальная температура Θ практически не зависит от высоты) преобладает логарифмический профиль $\bar{u}$. Скорость ветра измеряется только выше растительного покрова.

в вязком подслое; отсюда немедленно следует линейный профиль скорости ветра

$$\bar{u} = \bar{u}_0 + \frac{u_*^2}{\eta} z \text{ для } 0 \ll z < \delta,$$

где δ — толщина вязкого подслоя и $\bar{u}_0$ — скорость движения гладкой поверхности ($\bar{u}_0 \neq 0$ в случае моря и $\bar{u}_0 = 0$ в случае суши). На расстоянии $z = \delta = (\eta/u_*) \sqrt{\text{Re}^*}$ от поверхности ($z = 0$), где число Рейнольдса $\text{Re} = (\bar{u} - \bar{u}_0)(z/\eta)$ достигает своего критического значения Re^*, вязкий поток становится турбулентным. Значение $\sqrt{\text{Re}^*}$ должно быть определено экспериментально; было установлено, что $\sqrt{\text{Re}^*} = 11{,}6$ [59, 60]. Следовательно, на верхней границе вязкого подслоя $\bar{u} - \bar{u}_0 = 11{,}6 u_*$ ($z = \delta$). На расстояниях, значительно превышающих δ, применим логарифмический профиль ветра; таким образом, находим [59, 60]

$$\bar{u} - \bar{u}_0 = (\bar{u} - \bar{u}_0)_{z=\delta} + (u_*/k) \ln (z/\delta) = (u_*/k) \{4{,}756 + \ln (z/\delta)\}$$

для $z > 30\delta$. Толщина δ вязкого подслоя уменьшается с ростом u_* от $\delta = 1{,}7$ мм при $u_* = 10$ см$\cdot$с$^{-1}$ до $\delta = 0{,}34$ мм при $u_* = 50$ см$\cdot$с$^{-1}$ в предположении, что $\eta = 0{,}15$ см$^2\cdot$с$^{-1}$.

При $z < 30\delta$ экспериментальный профиль ветра отличается от логарифмического; он переходит в линейный профиль на расстоянии $z = 0{,}7\delta$ от земной поверхности. В интервале высот $0{,}7\delta \leqslant z < 30\delta$ можно найти теоретический профиль ветра, согласующийся с экспериментальным, если учесть в этом интервале молекулярную вязкость [112]. Однако невозможно полностью освободиться от вязкого подслоя, который всегда возникает, когда поверхность земли аэродинамически гладкая.

Следует отметить, что когда элементы шероховатости полностью находятся в вязком подслое толщиной δ, то поверхность будет аэродинамически гладкой ($z_0 < \delta$). В противном случае ($z_0 > \delta$) поверхность будет аэродинамически шероховатой. В последнем случае на поверхности земли непрерывный вязкий подслой не существует. Бо́льшая часть поверхности земли может рассматриваться как аэродинамически шероховатая.

Как уже отмечалось, турбулентное перемешивание не может распространяться до самой поверхности земли, где исчезают вертикальные скорости. Если в слое взаимодействия поток ламинарный (существует вязкий подслой), то значение $(F_\text{M})_0$ вертикального потока импульса на поверхности земли находится с помощью классической формулы

$$(F_\text{M})_0 = -\bar{\rho}\eta\, (\partial\bar{u}/\partial z)_{z\to 0},$$

где η — коэффициент кинематической вязкости. Однако в большинстве случаев поверхность земли аэродинамически шероховатая, так что F_M не зависит от молекулярной вязкости и определяется силой сопротивления на поверхности земли (см. выше). Но в любом случае перенос тепла и водяного пара по вертикали осуществляется вблизи поверхности земли молекулярными процессами (диффузия и теплопроводность как следствие столкновения молекул). Формулы для вертикальных потоков тепла и водяного пара на поверхности земли записываются в классическом виде

$$(F_\text{H})_0 = -c_{pa}\bar{\rho}k_\text{H}\, (\partial\bar{T}/\partial z)_{z\to 0} \quad \text{и} \quad (F_\text{W})_0 = -\bar{\rho}k_\text{W}\, (\partial\bar{\varepsilon}_\text{V}/\partial z)_{z\to 0}$$

при условии, что производные $\partial\overline{T}/\partial z$ и $\partial\overline{\varepsilon}_v/\partial z$ взяты как средние по слою взаимодействия. В этих формулах k_H и k_W — коэффициенты молекулярной диффузии водяного пара ($k_W = 0{,}25$ см$^2\cdot$с$^{-1}$) и молекулярной температуропроводности ($k_H = 0{,}20$ см$^2\cdot$с$^{-1}$) [92].

Выше вязкого подслоя (когда он существует), а в более общем случае выше слоя взаимодействия интенсивность турбулентного перемешивания в слое толщиной в несколько сантиметров очень быстро растет, а вертикальные градиенты средней скорости ветра, температуры и удельной влажности соответственно очень быстро убывают с высотой, так что количество водяного пара, тепла и импульса, переносимое, например, через уровень 1 м, почти равно тем потокам этих величин, которые формируются на поверхности земли либо под влиянием молекулярных процессов переноса (для тепла и водяного пара), либо под влиянием силы сопротивления (для импульса).

Кроме масштаба скорости u_*, полезно ввести масштабы температуры T_* и удельной влажности ε_v^*:

$$T_* = -F_H/c_{pa}\overline{\rho}u_* \quad \text{и} \quad \varepsilon_v^* = -F_W/\overline{\rho}u_*.$$

Масштабы u_*, T_* и ε_v^* в приземном слое постоянны с высотой; их значения в этом слое совпадают по порядку величины с флуктуациями скорости ветра, температуры и удельной влажности.

Вводя эти масштабы в формулы

$$F_M = -\overline{\rho}K_M\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}, \quad F_H = -\overline{\rho}K_H\frac{c_{pa}\overline{T}}{\overline{\Theta}}\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z}, \quad F_W = -\overline{\rho}K_W\frac{\partial\overline{\varepsilon}_v}{\partial z}$$

и предполагая, что в приземном слое $(\overline{T}/\overline{\Theta}) \approx 1$, получаем для градиентов средних значений $\overline{u}$, $\overline{\Theta}$ и $\overline{\varepsilon}_v$ следующие выражения:

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial z} = \frac{u_*^2}{K_M}, \quad \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z} = \frac{u_*T_*}{K_H}, \quad \frac{\partial\overline{\varepsilon}_v}{\partial z} = \frac{u_*\varepsilon_v^*}{K_W},$$

из которых вытекает, что вертикальные профили $\overline{u}$, $\overline{\Theta}$ и $\overline{\varepsilon}_v$ логарифмические, если $K_H = K_W = K_M = ku_*z$ при $z \gg z_0$.

Вставляя теперь $|\tau_h| = \overline{\rho}u_*^2$ и $K_M = ku_*z$ в критерий (9.17) равновесного состояния, устанавливаем, что в слое постоянного вертикального потока импульса критерий принимает очень простую форму, а именно $z \ll |L|$, при этом

$$L = \frac{\overline{\rho}u_*^3}{kg\overline{\rho'w'}} = \frac{-\overline{\rho}u_*^3}{kg\,(F_H/c_{pa}\overline{T})} = \frac{u_*^2}{kg\,(T_*/\overline{T})} = \frac{z}{\mathrm{Ri}_F} \gtreqless 0.$$

Здесь L — масштаб высоты (параметр устойчивости) Монина — Обухова [54]; F_H — вертикальный поток явного тепла; $\mathrm{Ri_F}$ — потоковое число Ричардсона. Логарифмический профиль ветра справедлив в слое полностью вынужденной конвекции ($z_0 \ll z \ll \ll |L|$). Абсолютное значение L в слое постоянного потока меняется от нескольких метров при слабом ветре ($u_* \approx 10 \div 20$ см·с$^{-1}$) и больших потоках тепла (0,3—0,5 кал·см$^{-2}$·мин$^{-1}$) до нескольких

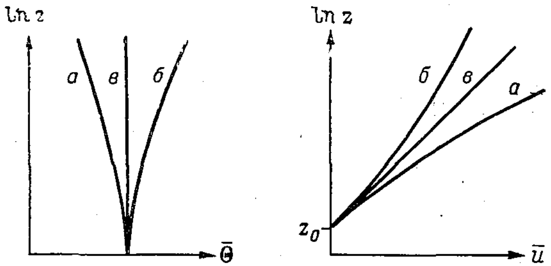

Рис. 4. Вертикальные профили средних скоростей ветра $\overline{u}$ и потенциальной температуры $\overline{\Theta}$ при неустойчивом состоянии (безоблачный день), когда поток радиации направлен вниз, а турбулентный поток тепла — вверх (*а*); при инверсионных условиях (безоблачная ночь), когда поток радиации направлен вверх, а турбулентный поток — вниз (*б*); при безразличном состоянии (плотная сплошная облачность), когда потоки радиации и тепла близки к нулю (*в*).

декаметров при сильном ветре ($u_* \gtrsim 30$ см·с$^{-1}$). Если влажностью не пренебрегать, то при определении L вместо (9.9) нужно использовать (9.9′).

Статическая устойчивость приземного слоя зависит от знака масштаба L, а именно состояние устойчивое при $L > 0$ и неустойчивое при $L < 0$.

Очень большие значения $|L|$ ($|L| \to \infty$) соответствуют состоянию, близкому к равновесному распределению массы (почти безразличное гидростатическое равновесие, $\partial\overline{\Theta}/\partial z \approx 0$, рис. 4, кривые *в*, и рис. 5 *в*) в гравитационном поле (большие значения u_* и малые значения T_*). Такие условия преобладают в приземном слое при очень сильном ветре, низкой сплошной облачности на суше или при равенстве температур поверхности моря и воздуха. Летом равновесное состояние наблюдается утром и вечером в слое высотой в несколько метров над землей. В непосредственной близости к земной поверхности всегда преобладает почти равновесное состояние.

Атмосфера, однако, в общем случае термически стратифицирована ($\partial\overline{\Theta}/\partial z \neq 0$). При устойчивом состоянии ($\partial\overline{\Theta}/\partial z > 0$, $L > 0$, рис. 4, кривые *б*, и рис. 5 *б*) турбулентное движение представляет собой полностью вынужденную конвекцию, если отношение z/L достаточно мало́ по сравнению с единицей. Турбулентность ослабевает при возрастании отношения z/L и будет сохраняться только при наличии достаточно больших вертикальных сдвигов ветра $\partial\overline{u}/\partial z$. Уменьшение интенсивности турбулентности

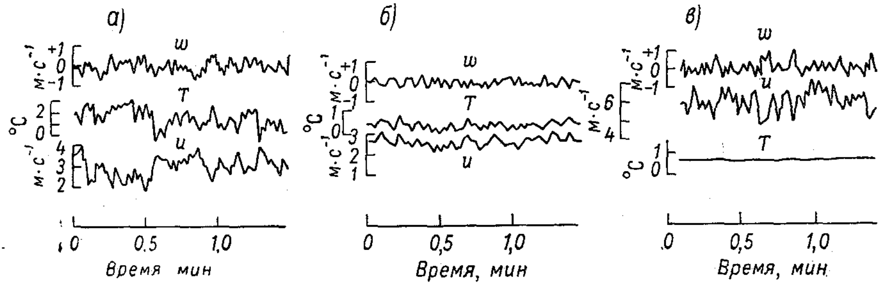

Рис. 5. Турбулентные флуктуации продольной u и вертикальной w составляющих скорости ветра и температуры воздуха T на высоте около 2 м при неустойчивом состоянии (*а*), инверсионных условиях (*б*) и безразличном равновесии (*в*). Коэффициент корреляции между u и w отрицателен, знак же коэффициентов корреляции между w и T и между u и T существенно зависит от направления потока явного тепла F_H (по Уэббу [144]).

происходит, например, при радиационном выхолаживании в ясную ночь или при натекании теплого воздуха на холодную поверхность моря или суши. При очень больших значениях z/L (>0) турбулентные вихри встречают при своем движении очень сильное сопротивление, благодаря чему средние профили контролируются при этих условиях физическими процессами, отличными от турбулентных, такими, как гравитационные волны и радиационные процессы. Обычно принято считать, что критерием отсутствия турбулентности служит неравенство $0{,}25 \leqslant \mathrm{Ri}$ (очень большие значения $\partial\overline{\Theta}/\partial z$ в ясные ночи с их сильными температурными инверсиями и слабыми ветрами).

Неустойчивое состояние ($\partial\overline{\Theta}/\partial z < 0$, $L < 0$, рис. 4, кривые *а*, и рис. 5 *а*) наступает тогда, когда солнечная радиация нагревает землю в ясный день или когда происходит натекание холодного воздуха на теплую поверхность моря или суши. В теплые дни число Ричардсона Ri может легко достичь значения —1 на высоте в несколько метров над поверхностью суши. Вынужденная конвекция наблюдается тогда, когда $z/|L| \ll 1$; однако с увеличением высоты $z\ (<|L|)$ турбулентность постепенно усиливается, возрастает роль плавучести, способствующей усилению свободной конвекции (см. главу 10), которая в свою очередь приводит к значительному увеличению $z/|L|\ (>1)$.

Если в нижнем слое атмосферы содержится достаточное количество водяного пара, то устойчивое состояние будет благоприятно для образования тумана, а неустойчивое состояние — для образования кучевых облаков. В обоих случаях нужно принимать во внимание тепло конденсации.

В слое толщиной в несколько дециметров (но не больше 1 м), где турбулентное перемешивание контролируется шероховатостью поверхности земли, можно считать, что $K_W = K_H = K_M$, каково бы ни было состояние устойчивости в этом слое. Но на более значительных высотах, где становится ощутимой роль плавучести, это предположение неприемлемо. Силы плавучести не одинаково действуют на турбулентный перенос водяного пара, тепла и импульса ($K_W \approx K_H > K_M$); более того, это действие при больших значениях $z/|L|$ совершенно различно при устойчивом ($L > 0$) и неустойчивом ($L < 0$) состоянии (см. выше).

Не только увеличение высоты z над поверхностью земли оказывает все большее и большее влияние на механизм переноса импульса, тепла и водяного пара, но также и уменьшение масштаба $|L|$ (уменьшение вертикального сдвига ветра $\partial\bar{u}/\partial z$ и увеличение потока тепла $|F_H|$).

В слое, расположенном вблизи поверхности земли, потоки F_M, F_H и F_W импульса, явного тепла и водяного пара можно измерить ($F_M = \bar{\rho}\overline{uw'}$, $F_H = c_{pa}\bar{\rho}\overline{Tw'}$, $F_W = \bar{\rho}\overline{\varepsilon_v w'}$), так что классические формулы

$$F_M = -\bar{\rho}K_M \frac{\partial\bar{u}}{\partial z}, \quad F_H = -\bar{\rho}K_H \frac{\partial}{\partial z}(c_{pa}\bar{T} + gz),$$
$$F_W = -\bar{\rho}K_W \frac{\partial\bar{\varepsilon}_v}{\partial z} \qquad (9.20)$$

можно использовать для определения K-коэффициентов. Из наблюдений известно, что слой постоянного (по высоте) потока F_M совпадает со слоем постоянного потока F_W, а также и потока F_H при одном условии: отсутствует радиационный приток тепла в этом слое. Значение K-коэффициентов изменяется от 10^2 см$^2\cdot$с$^{-1}$ ночью (сильная инверсия температуры) до 10^5 см$^2\cdot$с$^{-1}$ около полудня (сильно нагретая поверхность земли). Классические формулы (9.20) имеют единственное преимущество, состоящее в том, что турбулентные потоки F_M, F_H и F_W являются функциями только параметров среднего потока.

В слое постоянного потока три K-коэффициента равны ku_*z тогда, и только тогда, когда значение $|L|$ велико (почти безразличное состояние) и когда, кроме того, $z_0 \ll z \ll |L|$ (полностью вынужденная конвекция). Если эффектами плавучести уже нельзя пренебречь в слое постоянного потока, то на основе теории подобия можно установить, что K-коэффициенты имеют следующий вид [54, 92, 95]:

$$K_M = ku_*z/\Phi_M(z/L),\quad K_H = ku_*z/\Phi_H(z/L),\quad K_W = ku_*z/\Phi_W(z/L)$$

в предположении, что

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{kz}\Phi_M,\quad \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z} = \frac{T_*}{kz}\Phi_H,\quad \frac{\partial \bar{\varepsilon}_v}{\partial z} = \frac{\varepsilon_*}{kz}\Phi_W,$$

где Φ_M, Φ_H, Φ_W — функции Монина—Обухова соответственно для импульса, тепла и водяного пара. Вид этих функций устанавливается экспериментальным путем. Здесь следует отметить, что если z стремится к нулю, то K-коэффициенты стремятся к ku_*z, так что $\Phi_M(0) = \Phi_H(0) = \Phi_W(0) = 1$. Более того, вполне вероятно, что Φ_H и Φ_W — одинаковые функции. Для таких вертикальных профилей среднего ветра и потенциальной температуры число Ричардсона принимает простой вид: $\mathrm{Ri} = (\Phi_H/\Phi_M^2)(z/L)$.

Используя американские (О'Нэйл, 1953 г.) и австралийские (Керанг, 1962—1964 гг., и Хэй, 1964—1965 гг.) данные, Уэбб [145] показал, что при устойчивом состоянии ($L > 0$, $z/L \leqslant 1$)

$$\Phi_M = \Phi_H = \Phi_W = 1 + 5{,}2\,(z/L).$$

Число Ричардсона в этом случае, $\mathrm{Ri} = (z/L)(1 + 5{,}2\,(z/L))^{-1}$, достигает предельного критического значения (около 0,2) при сильно устойчивом состоянии.

На основе измерений F_M, F_H, F_W и соответствующих вертикальных профилей Дайер и Хикс [18] установили, что с точностью до нескольких процентов при неустойчивом состоянии ($-1{,}0 \leqslant z/L < -0{,}01$)

$$\Phi_M = \{1 - 16\,(z/L)\}^{-1/4} \text{ и } \Phi_H = \Phi_W = \Phi_M^2.$$

В этом случае число Ричардсона имеет простой вид ($\mathrm{Ri} = z/L$) в области неустойчивости, характерной для первых нескольких метров приземного слоя.

Таким образом, K-коэффициенты принимают бо́льшие значения при неустойчивом ($L < 0$), чем при устойчивом ($L > 0$)

состоянии, так что при заданных значениях потоков вертикальные градиенты средних величин ($\bar{u}$, $\bar{\Theta}$, $\bar{\varepsilon}_v$) при неустойчивом состоянии меньше, чем при устойчивом. Другими словами, при гидростатической устойчивости ($L > 0$) переносится тепла и импульса вниз, а водяного пара вверх меньше, чем в случае почти безразличного равновесия ($L \to +\infty$). При гидростатической неустойчивости ($L < 0$), напротив, большее, чем при почти безразличном равновесии ($L \to -\infty$), количество водяного пара и тепла переносится вверх, а импульса — вниз.

Показательная зависимость K-коэффициентов от z/L была установлена Суинбенком [107].

В слое постоянного потока средний ветер $\bar{\mathbf{v}}_h$ ($\bar{u}$, 0, 0) дует в направлении вектора напряжения $\boldsymbol{\tau}_h$, и в случае безразличного равновесия модуль напряжения пропорционален квадрату средней скорости ветра $\bar{u} = |\bar{\mathbf{v}}_h|$. В самом деле, из формулы (9.19) можно легко получить выражение для модуля напряжения $\tau_0 = |(\boldsymbol{\tau}_h)_0|$ на поверхности земли ($z = 0$):

$$\tau_0 = \bar{\rho} u_*^2 = |(\boldsymbol{\tau}_h)_0| = \bar{\rho}\, |\overline{\mathbf{v}_h' w'}|_0 = c_M \bar{\rho}\, (\bar{u}_a)^2 = |F_M|_0, \tag{9.21}$$

где $c_M = (u_*/\bar{u}_a)^2 = k^2 \{\ln (z_0/z_a)\}^2$ — безразмерный коэффициент сопротивления и $\bar{u}_a$ — средняя скорость ветра на высоте $z = z_a$ над ровной местностью, иначе говоря, ветер, который в синоптической метеорологии называется приземным ветром. На суше коэффициент c_M изменяется от $1 \cdot 10^{-3}$ до $1{,}5 \cdot 10^{-2}$ (в зависимости от вида поверхности), а на море — от $1 \cdot 10^{-3}$ при слабом ветре (~ 3 м·с$^{-1}$) до $3 \cdot 10^{-3}$ при сильном ветре (~ 20 м·с$^{-1}$). Формула (9.21) допускает обобщение, поскольку из наблюдений известно, что при любом состоянии вертикальный профиль ветра приближается к логарифмическому вблизи поверхности земли. Но когда начинают влиять силы плавучести (малые значения $|L|$), логарифмический профиль ветра (9.19) должен быть видоизменен. При заданной шероховатости земной поверхности коэффициент сопротивления будет несколько больше или меньше значения c_M, определенного выше, в зависимости от того, будет ли состояние неустойчивым или устойчивым [93]. Здесь следует заметить [см. уравнение (9.18а)], что коэффициент сопротивления играет огромную роль при изучении общей циркуляции атмосферы, поскольку этот коэффициент [см. (9.18а)] определяет диссипацию кинетической энергии атмосферы за счет поверхностного трения. Следует также добавить, что кинетическая энергия атмосферы передается океану (генерируя здесь поверхностные течения и волны, см. п. 12.3).

Формула (9.21) позволяет рассчитать поверхностное значение горизонтального напряжения τ_h, или, что то же самое, значение $(F_M)_0$ вертикального потока импульса при $z = 0$, на основе данных о свойствах поверхности и атмосферы. Предпринимались попытки выразить подобным же образом вертикальные потоки F_H и F_W тепла и водяного пара. Предложены следующие формулы:

$$(F_H)_0 = c_H \bar{\rho} \bar{u}_a (T_0 - T_a), \quad (F_W)_0 = c_W \bar{\rho} \bar{u}_a (\varepsilon_{v0} - \varepsilon_{va}), \qquad (9.21')$$

где индекс 0 обозначает земную поверхность, а индекс «а» — уровень, на котором производятся измерения; c_H и c_W — безразмерные коэффициенты тепло- и влагоотдачи. (Они определяются с помощью косвенных методов.) Коэффициенты c_H и c_W имеют тот же порядок величины, что и c_M, однако необходимы дополнительные исследования по установлению связей этих коэффициентов с другими параметрами [93].

9.5. Слой трения

Гипотеза $\tau_h = \text{const}$ выше приземного слоя уже неприемлема. В самом деле, выше этого слоя горизонтальные составляющие напряжения Рейнольдса изменяются с высотой, так что горизонтальная сила трения $\partial\tau_h/\partial z$ достигает ощутимых значений. Как правило, в слое трения (толщиной около 1 км), располагающемся выше слоя постоянного потока, выполняется неравенство $(\partial|\tau_h|/\partial z) < 0$. Скорость агеострофического ветра, обусловленная трением, существенно зависит от $\partial\tau_h/\partial z$.

Во избежание недоразумений в отношении определения слоя трения напомним, что в основе определения лежит предположение: турбулентное напряжение выше слоя трения пренебрежимо мало́ ($\tau_h \approx 0$). Высота слоя трения существенно зависит от этого предположения. В классической теории спирали Экмана [20, 40, 106] атмосфера делится на два слоя: внизу располагается баротропный пограничный слой, в котором трение (турбулентная вязкость) играет важную роль (слой трения: $\tau_h \neq 0$ и $\partial|\tau_h|/\partial z < 0$); выше этого слоя находится свободная бароклинная атмосфера ($\tau_h \approx 0$), где ветер изменяется с высотой только под влиянием горизонтального градиента температуры.

Баротропность слоя трения предполагает, что горизонтальный градиент температуры здесь равен нулю, иначе говоря, вертикальный сдвиг ветра обусловлен исключительно силой трения, а геострофический ветер постоянен во всем слое. Однако горизонтальный градиент температуры отличен от нуля и ниже верхней границы слоя трения ($\sim$1000 м). Когда изменение геострофического ветра с высотой оказывается сравнимым с изменением ветра, обусловленным трением, иначе говоря, когда нельзя не учитывать бароклинные эффекты в слое трения, то отделить свободную атмосферу от пограничного слоя, где трение играет определяющую роль, не всегда возможно. Если, например, геострофический ветер растет с высотой, то турбулентное напряжение уже не будет убывать с высотой, как это следует из классической теории спирали Экмана. При определенных условиях уровень, где $\tau_h \approx 0$, будет отсутствовать; в этих случаях так называемый слой трения распространяется на всю тропосферу [96, 97].

Теперь направим горизонтальные оси x и y с запада на восток и с юга на север соответственно и рассмотрим зональную циркуляцию. Как правило, при западном переносе выполняются во всей тропосфере следующие неравенства:

$$\bar{u} > 0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} > 0, \quad F_M(\bar{u}) = -\bar{\rho} K_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \\ = -\tau_x = \bar{\rho}\overline{u'w'} < 0, \quad \frac{\partial F_M(\bar{u})}{\partial z} > 0. \tag{9.22}$$

Таким образом, вертикальный поток зонального импульса $F_M(\bar{u})$ направлен вниз ($\tau_x > 0$) и убывает с высотой в большинстве случаев очень медленно, так что поток зонального импульса остается почти равным своему приземному значению вплоть до значительных высот (в пределах тропосферы). Положение верхней границы слоя трения в западном потоке будет определяться изменением вертикального коэффициента турбулентного обмена K_M по высоте. Если K_M достигает нулевого значения на определенном уровне, то этот уровень и будет служить верхней границей слоя трения (рис. 6). Если же, напротив, коэффициент K_M принимает конечное положительное значение в верхней части пограничного слоя, то хорошо выраженный слой трения в западном потоке отсутствует. Конечные значения K_M вблизи 1000-метрового уровня обусловлены конвективными турбулентными движениями или турбулентностью неприземного происхождения.

В зоне пассатных ветров в нижней части пограничного слоя на уровнях, расположенных ниже уровня максимального восточного ветра ($\partial\bar{u}/\partial z = 0$), имеем:

$$\bar{u} < 0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} < 0, \quad F_M(\bar{u}) = -\bar{\rho} K_M \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\tau_x = \\ = \bar{\rho}\overline{u'w'} > 0, \quad \frac{\partial F_M(\bar{u})}{\partial z} < 0. \tag{9.22'}$$

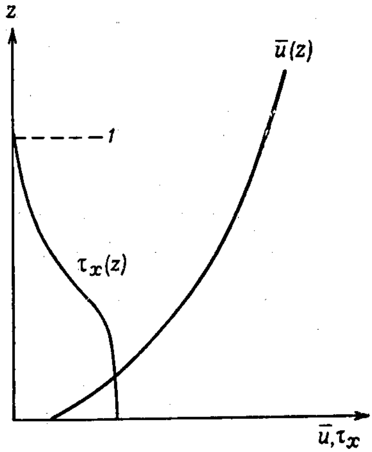

Рис. 6. Вертикальный профиль зональной составляющей τ_x турбулентного напряжения в том случае, когда слой трения хорошо выражен в западном потоке $\bar{u}(z)$ (по Шеппарду).

1 — верхняя граница слоя трения, где $K_M(z) = 0$.

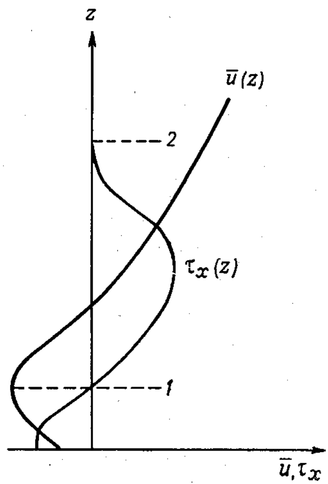

Рис. 7. Вертикальные профили зональных составляющих скорости ветра $\bar{u}$ и турбулентного напряжения τ_x в области пассатных ветров (по Шеппарду).

1 — уровень максимума скорости восточного ветра $[\bar{u}(z) < 0,\ \partial\bar{u}(z)/\partial z = 0]$; 2 — уровень пассатной инверсии и верхняя граница слоя трения $[K_M(z) = 0]$.

На этих уровнях вертикальный поток $F_M(u)$ зонального (западного) импульса направлен вверх (или, что то же самое, поток восточного импульса направлен вниз) и изменяется с высотой от поверхности земли до уровня максимального восточного ветра, где зональная составляющая напряжения τ_x обращается в нуль. Выше уровня, на котором $\partial\bar{u}/\partial z > 0$, поток $F_M(\bar{u})$ направлен вниз ($\tau_x > 0$) и возрастает с высотой, по крайней мере на некотором расстоянии выше уровня максимального восточного ветра. Выше уровня, на котором направленный вниз поток $F_M(\bar{u})$ достигает максимума, этот поток, безусловно, убывает и достигает нулевого значения на уровне пассатной инверсии, где K_M и τ_x обращаются в нуль. В этом случае всегда существует хорошо выраженный слой трения (рис. 7).

Структура слоя трения зависит от бароклинности пограничного слоя, изменения с высотой коэффициента турбулентного обмена K_M и приземной скорости геострофического ветра.

Следует заметить, что в западном потоке на нижних уровнях (выше слоя постоянного потока) наблюдается дивергенция вертикального потока зонального импульса, тогда как на нижних уровнях (также выше приземного слоя) восточного потока наблюдается конвергенция. Иначе говоря, поля дивергенции и конвергенции вертикальных потоков западной составляющей импульса таковы, что западная составляющая импульса генерируется в восточном потоке и разрушается в западном. Однако существует противоположный эффект, а именно генерация западной составляющей импульса в западном потоке и разрушение его в восточном под влиянием меридионального переноса в направлении полюса и экватора соответственно в западном и восточном потоках [92].

После этих общих замечаний рассмотрим более детально энергетику слоя трения. С приемлемой точностью в случаях крупномасштабных динамических систем уравнение движения в слое трения можно записать в виде

$$f\mathbf{k}\times\bar{\rho}\,(\tilde{\mathbf{v}}_h - \tilde{\mathbf{v}}_g) = \frac{\partial\boldsymbol{\tau}_h}{\partial z}, \tag{9.23}$$

а уравнение неразрывности — в виде $\operatorname{div}(\bar{\rho}\,\tilde{\mathbf{v}}) = 0$, где $\mathbf{k}$ — единичный, направленный по вертикали вверх вектор; f — кориолисов параметр ($f = 2\Omega\sin\varphi$); $\boldsymbol{\tau}_h \equiv -\overline{\rho\mathbf{v}_h''w''}$ — горизонтальное напряжение, определенное соотношением (9.12). Как обычно, $\tilde{\mathbf{v}}_g = (1/\bar{\rho}f)\,\mathbf{k}\times\nabla_h\bar{p}$ — геострофический ветер; здесь ∇_h — дельта-оператор в горизонтальной плоскости и p — давление. Уравнение (9.23) описывает установившееся горизонтальное движение без ускорения. В п. 9.2 было показано, что $\boldsymbol{\tau}_h \cdot (\partial \tilde{\mathbf{v}}_h / \partial z)$ — скорость передачи кинетической энергии среднего движения $\bar{\rho}$, $\tilde{\mathbf{v}}_h$, $\bar{p}$ мелкомасштабному турбулентному движению [20].

Интегрируя уравнение (9.23) по высоте от 0 до H (H — верхняя граница слоя трения, где, по определению, $\boldsymbol{\tau}_h = 0$), получаем

$$\int_0^H \bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}_h\, dz = \int_0^H \bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}_g\, dz + f^{-1}\mathbf{k} \times (\boldsymbol{\tau}_h)_0 \tag{9.24}$$

или

$$(\boldsymbol{\tau}_h)_0 = -f \int_0^H \mathbf{k} \times \bar{\rho}\,(\tilde{\mathbf{v}}_h - \tilde{\mathbf{v}}_g)\, dz, \tag{9.24'}$$

откуда следует, что поверхностное напряжение $(\boldsymbol{\tau}_h)_0$ (горизонтальная сила, с которой действует атмосфера на поверхность земли) определяет полный агеострофический поток массы в пределах слоя трения. Из наблюдений хорошо известно, что приземный ветер $(\tilde{\mathbf{v}}_h)_0$ (ветер на уровне флюгера) и, следовательно, поверхностное напряжение $(\boldsymbol{\tau}_h)_0$ отклоняются влево от $\tilde{\mathbf{v}}_g$, образуя с ним небольшой угол. Таким образом, поток массы в слое трения имеет перпендикулярную к изобаре составляющую в направлении более низкого давления, т. е. под влиянием трения происходит перенос массы из областей с высоким давлением (антициклоны) в области с низким давлением (циклоны). Следовательно, трение способствует уменьшению разностей давления на поверхности земли. Под влиянием трения в нижней атмосфере наблюдается горизонтальная дивергенция количества движения ($\operatorname{div} \bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}_h > 0$, $\{\partial (\bar{\rho}\tilde{w})/\partial z\} < 0$) в антициклонах и конвергенция ($\operatorname{div} \bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}_h < 0$, $\{\partial (\bar{\rho}\tilde{w})/\partial z\} > 0$) в циклонах.

Выполнив операцию вихря над уравнением (9.23) и пренебрегая изменением кориолисова параметра f с широтой, получаем уравнение вихря

$$f \operatorname{div} \bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}_h = \frac{\partial}{\partial z} (\operatorname{curl}_z \boldsymbol{\tau}_h), \tag{9.25}$$

после интегрирования которого по высоте от 0 до H с учетом уравнения неразрывности $\operatorname{div} \bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}} = 0$ находим

$$\operatorname{curl}_z (\boldsymbol{\tau}_h)_0 = -f \operatorname{div} \left(\int_0^H \bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}_h\, dz \right) = f\,(\bar{\rho}\tilde{w})_H. \tag{9.26}$$

Индекс H обозначает, что значение величины в круглых скобках должно быть взято на высоте $z = H$.

В верхней части слоя трения в областях высокого давления под влиянием трения возникает нисходящее движение ($w_H < 0$), а в областях низкого давления — восходящее движение ($w_H > 0$). Пространственное распределение вертикальных движений таково, что вертикальный поток энергии $\overline{p\tilde{w}}$ направлен вниз в антициклонах и вверх в циклонах. Как следствие этого эффекта диссипация энергии в пограничном слое действует также на вышележащую свободную атмосферу. Следует заметить, что перенос массы в слое трения из областей высокого давления в области низкого давления должен быть скомпенсирован в свободной атмосфере переносом массы (такого же порядка величины) в противоположном направлении — от низкого давления к высокому, что сопровождается уменьшением кинетической энергии в свободной атмосфере [20, 40, 106].

Обусловленные трением вертикальные движения (9.26) в верхней части пограничного слоя являются самым непосредственным следствием воздействия мелкомасштабных движений на крупномасштабные динамические системы [95]. Однако на вертикальные движения крупномасштабных систем оказывают влияние и другие процессы (кроме трения).

В заключение, умножая скалярно уравнение (9.23) на $\tilde{\mathbf{v}}_h$, получаем уравнение энергии

$$\tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_h}{\partial z} = f\bar{\rho}\mathbf{k} \cdot (\tilde{\mathbf{v}}_h \times \tilde{\mathbf{v}}_g). \tag{9.27}$$

Предполагая, что движение в слое трения баротропное ($\tilde{\mathbf{v}}_g = \text{const}$ в слое высотой H), проинтегрируем уравнение (9.27) по высоте от 0 до H. С учетом соотношения (9.24) и того, что $\boldsymbol{\tau}_h = 0$ при $z = H$ и $\tilde{\mathbf{v}}_h = 0$ при $z = 0$, получаем

$$-\int_0^H \tilde{\mathbf{v}}_h \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_h}{\partial z} dz = \int_0^H \boldsymbol{\tau}_h \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}_h}{\partial z} dz = f\mathbf{k} \cdot \left(\tilde{\mathbf{v}}_g \times \int_0^H \bar{\rho}\tilde{\mathbf{v}}_h \, dz \right) = \tilde{\mathbf{v}}_g \cdot (\boldsymbol{\tau}_h)_0, \tag{9.28}$$

где $\tilde{\mathbf{v}}_g \cdot (\boldsymbol{\tau}_h)_0 = -\int_0^H \nabla_h \bar{p} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_h dz$ — работа, совершаемая за единицу времени горизонтальным градиентом давления во всем слое трения; $\int_0^H \boldsymbol{\tau}_h \cdot (\partial \tilde{\mathbf{v}}_h / \partial z) \, dz$ — механическая энергия, переходящая в слое трения за единицу времени от среднего движения к турбулентному (турбулентная вязкость). Таким образом, кинетическая энергия, производимая горизонтальным градиентом давления, немедленно преобразуется в кинетическую энергию мелкомасштабного турбулентного движения.

Эта передача кинетической энергии среднего движения мелкомасштабным турбулентным движениям является единственным источником турбулентной кинетической энергии, когда слой трения баротропный ($\tilde{\mathbf{v}}_g = \mathrm{const}$ в слое трения). Если, кроме того, турбулентная кинетическая энергия не изменяется во времени, генерируемая турбулентная кинетическая энергия должна быть равна энергии, преобразуемой во внутреннюю (тепло). В этом случае скалярное произведение $\tilde{\mathbf{v}}_g \cdot (\boldsymbol{\tau}_h)_0$ представляет собой также скорость диссипации (посредством молекулярной вязкости) турбулентной кинетической энергии в тепло; следовательно, $\tilde{\mathbf{v}}_g \cdot (\boldsymbol{\tau}_h)_0$ должно быть положительно. Это случай безразличного гидростатического равновесия слоя трения (отсутствия силы плавучести в слое трения). При наличии этих сил превращение турбулентной кинетической энергии во внутреннюю или наоборот зависит от того, будет ли слой трения стратифицирован устойчиво или неустойчиво. Когда слой трения устойчив, силы плавучести преобразуют турбулентную кинетическую энергию в тепло, так что работа, совершаемая градиентом давления, должна быть больше, чем диссипация. Если же слой трения статически неустойчив, турбулентное движение принимает конвективный характер (см. следующую главу); в этом случае силы плавучести превращают внутреннюю энергию в турбулентную кинетическую энергию, так что работа $(\boldsymbol{\tau}_h)_0 \cdot \tilde{\mathbf{v}}_g$, совершаемая градиентом давления, меньше, чем диссипация.

10

Энергетика свободной конвекции

10.1. Свободная конвекция

Масштаб турбулентных пульсаций в случае свободной конвекции, как правило, больше, чем в случае вынужденной конвекции. Тем не менее остается в силе приближение Буссинеска. Пульсационная скорость при свободной конвекции значительно больше, чем при вынужденной: например, в первом случае порядок величины отношения $|w'|/|\overline{w}|$ составляет 10^3—10^4. Так же как и в случае вынужденной конвекции, при изучении свободной конвекции можно пренебречь горизонтальными градиентами метеорологических величин среднего движения. Однако пульсацию давления p' в дальнейшем нельзя исключать из рассмотрения; тогда на основе уравнения состояния идеального газа и определения потенциальной температуры получаем

$$\left.\begin{aligned} (\rho'/\overline{\rho}) \approx (p'/\overline{p}) - (T'/\overline{T}) \approx -(\Theta'/\overline{\Theta}) + (c_{va}/c_{pa})(p'/\overline{p}), \\ T' \approx (\overline{T}/\widetilde{\Theta})\,\Theta' + (1/c_{pa})(p'/\overline{\rho}), \end{aligned}\right\} \qquad (10.1)$$

при этом принято во внимание приближение Буссинеска и равенство $\overline{p} = R_a\overline{\rho}\widetilde{T} \cong R_a\overline{\rho}\overline{T}$. Горизонтальная черта в этой главе, как и в предыдущей, обозначает осреднение. Однако в случае свободной конвекции время жизни вихрей изменяется от десятков до сотен секунд. Следовательно, интервал осреднения должен быть равен по крайней мере 10 мин (интервал осреднения, принятый в синоптической метеорологии).

При наличии больших вертикальных градиентов удельной влажности первая из формул (10.1) должна быть заменена на формулу

$$(\rho'/\overline{\rho}) = (p'/\overline{p}) - (T'/\overline{T}) - r\varepsilon_v' \qquad (10.1')$$

[см. формулы (7.8) и (7.9)].

Что касается уравнения неразрывности турбулентного движения, то в дальнейшем мы будем использовать не упрощенную форму (9.4а), а форму (9.4) или

$$\operatorname{div} \mathbf{v}' = -\frac{w'}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}, \tag{10.2}$$

так что в формуле (9.5) мы можем в дальнейшем не пренебрегать вторым членом в правой части, который здесь обычно превосходит первый член. В этом случае, как правило, теплые вихри ($T' > 0$, $\rho' < 0$) поднимаются ($\rho_i' < 0$), а холодные ($T' < 0$, $\rho' > 0$) — опускаются ($\rho_i' > 0$). Таким образом, имеем

$$\left.\begin{aligned} &\zeta > 0,\ w > 0,\ \rho_i' < 0,\ \rho' < 0,\ T' > 0,\ \Theta' > 0 \\ \text{или}\quad &\\ &\zeta < 0,\ w < 0,\ \rho_i' > 0,\ \rho' > 0,\ T' < 0,\ \Theta' < 0. \end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

Следует отметить основное различие между соотношениями (9.7) и (10.3): первые имеют место, когда эффект сдвига перекрывает эффект плавучести, вторые — в противоположном случае.

Из (10.3) сразу же следует [ср. с (9.6)]

$$\overline{\rho' w} = \overline{\rho' w'} < 0. \tag{10.4}$$

Умножая обе части (9.5) на w и осредняя после умножения, получаем

$$\overline{\rho' w} = -(\partial \bar{\rho}/\partial z)\,\overline{\zeta w} + \overline{\rho_i' w}.$$

Первый член правой части в этом соотношении всегда положителен (поскольку производная $\partial \bar{\rho}/\partial z$, как правило, меньше нуля), тогда как второй член всегда отрицателен. Будет ли первый член перекрыт вторым или наоборот, зависит от того, каков путь смешения: мал (вынужденная конвекция) или велик (свободная конвекция).

Поскольку потенциальная температура Θ является инвариантом сухоадиабатических процессов, целесообразно выразить пульсацию плотности ρ' через индивидуальную пульсацию потенциальной температуры

$$\Theta_i' = \Theta' + \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial z} \zeta \tag{10.5}$$

и пульсацию давления p'. Этого можно достигнуть либо подстановкой выражения

$$\frac{\rho_i'}{\bar{\rho}} = -\frac{\Theta_i'}{\Theta} + \frac{c_{va}}{c_{pa}} \frac{p_i'}{\bar{p}} \tag{10.6}$$

в соотношение (9.5), принимая при этом во внимание определение потенциальной температуры Θ и индивидуальной пульсации давления p', $p'_i = p' + (\partial\bar{p}/\partial z)\zeta$, а также классическое соотношение

$$\frac{1}{\bar{\Theta}}\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z} + \frac{c_{va}}{c_{pa}}\frac{1}{\bar{p}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}, \qquad (10.7)$$

либо подстановкой выражения (10.5) во вторую формулу первой строки (10.1). В приводимых здесь соотношениях ρ'_i, Θ'_i, p'_i представляют собой лагранжевы (или индивидуальные) пульсации (отклонения) метеорологических величин, связанные этими соотношениями с эйлеровыми (или локальными) пульсациями ρ', Θ', p' соответственно, а ζ обозначает путь смешения рассматриваемого вихря. Выполняя вышеупомянутую подстановку, получаем

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\frac{\Theta'}{\bar{\Theta}} + \frac{c_{va}}{c_{pa}}\frac{p'}{\bar{p}} = -\frac{\Theta'_i}{\bar{\Theta}} + \frac{1}{\bar{\Theta}}\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial z}\zeta + \frac{c_{va}}{c_{pa}}\frac{p'}{\bar{p}}. \qquad (10.8)$$

Для того чтобы выразить пульсацию температуры T' через индивидуальную пульсацию потенциальной температуры Θ'_i и пульсацию давления p', можно либо подставить (10.8) в первую формулу (10.1), либо подставить (10.5) во вторую из этих формул; в результате получаем

$$T' = \frac{\bar{T}}{\bar{\Theta}}\left(\Theta'_i - \frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial z}\zeta\right) + \frac{1}{c_{pa}}\frac{p'}{\bar{\rho}}. \qquad (10.9)$$

10.2. Вертикальный турбулентный поток тепла

Когда распределение масс в гравитационном поле становится статически неустойчивым, то, как правило, длиннопериодные пульсации вертикальной скорости w связаны с пульсациями температуры большой амплитуды, благодаря чему вихри более крупного размера создают сильный вертикальный поток тепла.

Из соотношений (10.5) и (10.9) следует формула для вертикального турбулентного потока явного тепла:

$$(W_S)_z \equiv F_H = c_{pa}\bar{\rho}\,\overline{T'w'} = c_{pa}\bar{\rho}\,\overline{T'w} = c_{pa}\frac{\bar{T}}{\bar{\Theta}}\bar{\rho}\,\overline{\Theta' w} + \overline{p'w'} = -c_{pa}\bar{T}\bar{\rho}\frac{K_H}{\bar{\Theta}}\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial z} + c_{pa}\bar{T}\bar{\rho}\frac{\overline{\Theta'_i w}}{\bar{\Theta}} + \overline{p'w'}, \qquad (10.10)$$

где, как обычно, $K_H = \overline{\zeta w} > 0$ — вертикальный коэффициент турбулентности для тепла (вертикальный коэффициент турбулентной температуропроводности). Что касается вертикального турбулентного потока $(W_L)_z$ скрытого тепла, то вывод формулы для него аналогичен получению формулы для вертикального турбулентного потока $(W_S)_z$ явного тепла, а именно

$$(W_L)_z = L_v \bar{\rho} \overline{\varepsilon_v' w'} = L_v F_W = -L_v \bar{\rho} K_W \frac{\partial \bar{\varepsilon}_v}{\partial z} + L_v \bar{\rho} \overline{\varepsilon_{vi}' w}, \quad (10.11)$$

где L_v — удельная теплота парообразования; F_W — вертикальный турбулентный поток водяного пара; $K_W = \overline{\zeta w}$ — вертикальный коэффициент турбулентности для водяного пара; $\varepsilon_{vi}' = \varepsilon_v' + (\partial \bar{\varepsilon}_v / \partial z) \zeta$ — индивидуальная пульсация удельной влажности ε_v.

Поскольку $\bar{\varepsilon}_v$ обычно уменьшается с увеличением высоты, то первый член в правой части (10.11) представляет восходящий поток тепла, тогда как второй член — нисходящий, поскольку корреляция между количеством $-\varepsilon_{vi}'$ сконденсировавшегося водяного пара в единице массы (на пути смешения ζ) и вертикальной скоростью w положительна. Количество тепла q, которое поступает к единице массы воздуха в конце процесса смешения, согласно первому началу термодинамики для насыщенного воздуха можно представить в следующем упрощенном виде:

$$q = c_{pa} \bar{T} \frac{\Theta_i'}{\bar{\Theta}} + L_v \varepsilon_{vi}'. \quad (10.12)$$

В результате подстановки выражения (10.12) в формулы (10.10) и (10.11) получаем формулу для полного вертикального турбулентного потока явного и скрытого тепла $(W_e)_z = (W_S)_z + (W_L)_z$:

$$(W_e)_z = -c_{pa} \bar{T} \bar{\rho} \frac{K_H}{\bar{\Theta}} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z} - L_v \bar{\rho} K_W \frac{\partial \bar{\varepsilon}_v}{\partial z} + \bar{\rho} \overline{q w} + \overline{p' w'}. \quad (10.13)$$

Считая, что движение частиц воздуха от уровня z до уровня $z + \zeta$ происходит адиабатически, и предполагая, что потенциальная температура частиц на уровне z, где произошел отрыв от общего потока, равна среднему значению $\bar{\Theta}(z)$ потенциальной температуры на этом уровне, пульсацию Θ' потенциальной температуры на уровне $z + \zeta$ может записать в виде

$$\Theta' = \bar{\Theta}(z) - \bar{\Theta}(z + \zeta) \approx -(\partial \bar{\Theta} / \partial z) \zeta.$$

В этом случае турбулентное движение порождает вертикальный турбулентный поток тепла $c_{pa} \bar{T} \bar{\rho} \overline{\Theta' w} / \bar{\Theta}$, который представлен первым членом в правой части формулы (10.13). Этот поток тепла, впервые указанный Шмидтом (1921 г.) [85], получен в предположении адиабатичности турбулентных движений при отсутствии мелкомасштабных горизонтальных контрастов температуры на исходном уровне ($\zeta = 0$). Турбулентный поток явного тепла (по Шмидту) направлен вверх, когда распределение массы (или температуры) в гравитационном поле неустойчивое ($\partial\overline{\Theta}/\partial z < 0$), и направлен вниз, когда распределение устойчивое ($\partial\overline{\Theta}/\partial z > 0$). Кроме того, если содержание водяного пара $\overline{\varepsilon_v}(z)$ вдоль пути смешения $z \to z + \zeta$ сохраняется, то второй член в правой части формулы (10.13) представляет турбулентный поток скрытого тепла. Ясно, что третий член в правой части (10.13) представляет собой вклад неадиабатических эффектов ($q \neq 0$) в вертикальный турбулентный поток тепла. Турбулентный поток тепла $\overline{\rho}\overline{q}\overline{w}$, обусловленный этими эффектами, всегда направлен вверх, поскольку частицы более теплого воздуха ($q > 0$) будут иметь тенденцию подниматься ($w > 0$), а более холодные частицы ($q < 0$) — опускаться ($w < 0$). Более точно, если воздух перегрет ($q > 0$), то восходящее движение будет усиливаться, а нисходящее — ослабевать; в противном случае, т. е. если воздух охлажден ($q < 0$), восходящее движение будет ослабевать, а нисходящее — усиливаться. Наконец, четвертый член в правой части (10.13) выражает турбулентный поток тепла, обусловленный временно́й корреляцией между пульсациями давления p' и вертикальной скоростью w (см. главу 7). Если желательно исключить этот член, то нужно воспользоваться уравнениями баланса (7.17) и (7.18).

Возвращаясь к турбулентному потоку явного тепла (10.10), предположим, что эффект нагревания и охлаждения наблюдается лишь на исходном уровне процесса смешения, а турбулентное движение частиц между уровнями z и $z + \zeta$ происходит адиабатически. В этом случае температурный контраст T_0' между частицей и средой на исходном уровне определится выражением $T_0' = (\overline{T}(z)/\overline{\Theta}(z))\,\Theta_0'(z)$, где $\Theta_0'(z)$ — отклонение потенциальной температуры на уровне z, обусловленное нагреванием или охлаждением. Затем частицы воздуха покидают уровень z с потенциальной температурой $\overline{\Theta}(z) + \Theta_0'(z)$ и на уровне $z + \zeta$ вызывают отклонение потенциальной температуры

$$\Theta' = \overline{\Theta}(z) + \Theta_0'(z) - \overline{\Theta}(z+\zeta) = \Theta_0'(z) - \frac{\partial\overline{\Theta}(z)}{\partial z}\zeta,$$

влекущее за собой вертикальный турбулентный поток тепла

$$-c_{pa}\overline{T}\overline{\rho}\,\frac{K_H}{\overline{\Theta}}\,\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z} + c_{pa}\overline{\rho}\,\overline{T_0'w}, \qquad (10.14)$$

где член $c_{pa}\overline{\rho T_0' w}$ представляет собой восходящий турбулентный поток явного тепла, который можно назвать термоконвективным турбулентным потоком. Этот поток порожден температурными контрастами на исходном уровне, само же движение частиц происходит адиабатически. Когда это движение неадиабатическое, третий член должен быть добавлен в (10.14), а именно

$$c_{pa}\overline{T}\overline{\rho}\,\frac{\overline{\Theta_*' w}}{\overline{\Theta}} > 0. \tag{10.14a}$$

Этот восходящий турбулентный поток тепла обусловлен неадиабатическими эффектами Θ_*' в процессе турбулентного движения. В этом более общем случае

$$c_{pa}\overline{T}\,\frac{\Theta_i'}{\overline{\Theta}} \equiv c_{pa}\overline{T}\,\frac{\Theta_0'+\Theta_*'}{\overline{\Theta}} = q - L_v\varepsilon_{vi}', \tag{10.15}$$

где $-\varepsilon_{vi}'$ — количество водяного пара, которое сконденсировалось в единичной массе воздуха в конце пути смешения ζ.

Можно предположить, что

$$\Theta_0' = \overline{\Theta}\,\frac{q}{c_{pa}\overline{T}} = \frac{\overline{\Theta}}{\overline{T}}\,T_0' \text{ и } \Theta_*' = \frac{\overline{\Theta}}{c_{pa}\overline{T}}\,(-L_v\varepsilon_{vi}'). \tag{10.15a}$$

В этом частном случае вихри обмениваются с единичной массой воздуха теплом q на исходном уровне ($\zeta = 0$), тогда как количество тепла $-L_v\varepsilon_{vi}'$, высвобождающееся в единичной массе воздуха в процессе конденсации водяного пара, поступает к вихрю на всем пути смешения.

Соответствующий вертикальный поток явного тепла (10.10) может быть записан в следующем виде:

$$(W_S)_z = -c_{pa}\overline{T}\overline{\rho}\,\frac{K_H}{\overline{\Theta}}\,\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z} + c_{pa}\overline{\rho}\,\overline{T_0' w} - L_v\overline{\rho}\,\overline{\varepsilon_{vi}' w} + \overline{p' w'}. \tag{10.16}$$

Сложив правые и левые части формул (10.11) и (10.16), мы вновь получим (10.13), если примем во внимание первое соотношение (10.15a). Приведенные выше формулы дают качественное описание физических факторов, вносящих вклад в турбулентные потоки явного и скрытого тепла [22, 31, 73, 75, 85, 89, 117]. Однако с помощью этих формул нельзя дать количественную оценку тех же факторов.

Динамическая теория свободной конвекции все еще находится в зачаточном состоянии. Количественное аналитическое описание механизмов передачи энергии, связанных с турбулентным режимом свободной конвекции, во многом зависит от принятой модели конвекции.

Пристли [69, 71, 72], Дайер [17] и Уэбб [144] ввели понятие уровней, на которых характер пульсаций температуры существенно изменяется. На этих уровнях турбулентное движение одного вида переходит в турбулентное движение другого вида. Мы уже упоминали в п. 9.4, что, согласно Пристли, режим вынужденной конвекции распространяется от поверхности земли до уровня $z \approx (2 \div 3) \cdot 10^{-2} |L|$, когда распределение масс в гравитационном поле неустойчивое ($L < 0$ или $\partial\overline{\Theta}/\partial z < 0$). В ясный день L принимает значения от —10 до —20 м. В этом случае, как показано в п. 9.4, поток явного тепла $F_{\text{Н}}$ записывается в виде [см. (9.20)]

$$F_{\text{Н}} = \frac{c_{pa}\overline{T}}{\overline{\Theta}} \overline{\rho} k u_* \left| \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z} \right| z \text{ при } z_0 \ll z \ll 3 \cdot 10^{-2} |L|. \tag{10.17}$$

В этом нижнем слое пульсации w и T распределены, очевидно, случайно, однако наблюдается четко выраженная положительная корреляция между w и T.

На более высоких уровнях нельзя пренебрегать эффектами плавучести, поэтому формула (10.17) должна быть заменена следующей:

$$F_{\text{Н}} = 0{,}95 \overline{\rho} c_{pa} \left(\frac{g}{\overline{T}} \right)^{1/2} \left| \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z} \right|^{3/2} z^2 \text{ при } 3 \cdot 10^{-2} |L| < z < (0{,}5 \div 1) |L|, \tag{10.17$'$}$$

основанной главным образом на соображениях теории размерности, а также на предположении об установившемся состоянии. В этом переходном слое на кривых записи температуры и вертикальной скорости в дополнение к тем случайным пульсациям, которые наблюдаются в нижнем слое, появляются хорошо выраженные положительные всплески («взрывы» плавучести), которые к тому же увеличиваются с высотой.

На еще более высоких уровнях вместо (10.17′) следует пользоваться формулой

$$F_{\text{Н}} = 2{,}3 \frac{z}{|L|} \overline{\rho} c_{pa} \left(\frac{g}{\overline{T}} \right)^{1/2} \left| \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z} \right|^{3/2} z^2 \text{ при } |L| < z < (5 \div 10) |L|. \tag{10.17$''$}$$

На высотах $z > |L|$ наблюдается следующее существенное изменение в структуре поля температуры: периоды пульсаций (вверх направленных «взрывов») систематически чередуются с периодами отсутствия пульсаций. Такое чередование указывает на режим турбулентного движения в форме ячеек свободной конвекции. Периоды пульсаций ($T' \neq 0$) соответствуют подъему сравнительно небольших объемов воздуха (струй), которые несут вверх пульсации температуры, зародившиеся на поверхности

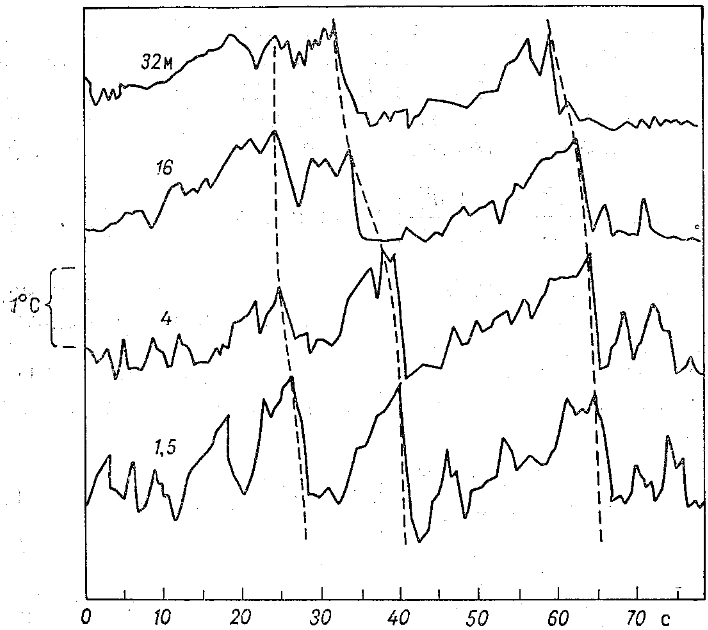

Рис. 8. Мгновенные флуктуации температуры на высоте 1,5; 4, 16 и 32 м (по Пристли [69]).

земли и вблизи нее; периоды же отсутствия пульсаций ($T' \approx 0$) соответствуют нисходящему движению воздуха, которое также носит турбулентный характер ($v' \neq 0$), однако внутри нисходящего потока абсолютная величина производной $|(\partial\overline{\Theta}/\partial z)|$ так мала, что и при наличии турбулентности не могут возникнуть пульсации температуры. Одну и ту же струю поднимающегося воздуха можно последовательно обнаружить по пульсациям температуры на различных уровнях (рис. 8). Восходящие струи зарождаются вблизи земной поверхности, перемещаются по горизонтали в данном слое со скоростью ветра на нижнем уровне, и с высотой их сечение уменьшается, так что на уровне $z = (5 \div$

$\div 10)|L|$ они полностью разрушаются. На этих высотах существует слой ослабленных пульсаций температуры (так называемый спокойный слой), свидетельствующий о нарушении связи потока тепла на этих уровнях с его приземными значениями [71]. Выше перенос тепла осуществляется посредством движений конвективных масштабов, наименьший среди которых имеет циркуляция,

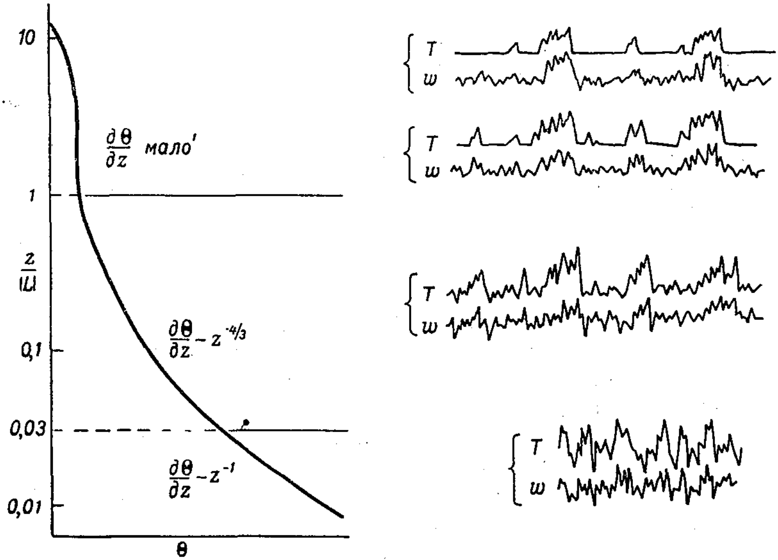

Рис. 9. Неустойчивое состояние. Вертикальный профиль средней потенциальной температуры и флуктуации температуры T и вертикальной скорости w. Время записи около 5 мин (по Уэббу [144]).

сопровождающаяся образованием кучевых облаков хорошей погоды. К сожалению, наши знания о движениях масштаба кучевых облаков все еще настолько недостаточны, что не позволяют исследовать механизм переноса тепла от пограничного слоя к свободной тропосфере.

Когда скорость ветра мала ($\bar{u} \ll 1$ м$\cdot$с$^{-1}$), а поток тепла велик (F_H равно примерно 0,4 кал$\cdot$см$^{-2}\cdot$мин$^{-1}$), масштаб L отрицателен и очень мал по абсолютной величине (порядка нескольких сантиметров); в этом случае свободная конвекция возникает в непосредственной близости к земной поверхности [92].

Из формул (10.17') и (10.17'') следует, что поток F_H изменяется с высотой. Однако в слоях с постоянным по высоте потоком с помощью этих формул легко устанавливаются соотношения (рис. 9):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z} \infty z^{-1}, \quad K_H = ku_* z \text{ при } z_0 \ll z < 3\cdot 10^{-2}|L|, \\ \dfrac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z} \infty z^{-4/3}, \quad K_H = 0{,}95^{2/3}\dfrac{\overline{\Theta}}{\overline{T}}\left(\dfrac{g}{\overline{T}}\dfrac{F_H}{\overline{\rho}c_{pa}}\right)^{1/3} z^{4/3} \text{ при } 3\cdot 10^{-2}|L| < z < |L|, \\ \dfrac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z} \infty z^{-2}, \quad K_H = \left(\dfrac{2{,}3}{|L|}\right)^{2/3}\dfrac{\overline{\Theta}}{\overline{T}}\left(\dfrac{g}{\overline{T}}\dfrac{F_H}{\overline{\rho}c_{pa}}\right)^{1/3} z^2 \text{ при } z > |L|. \end{cases}$$

Показатель степени $-4/3$ характеризует переходный режим от вынужденной к свободной конвекции, в то время как показатель -2 характеризует режим квазисвободной конвекции. В выражения для K_H в этих последних случаях скорость трения u_* не входит.

Коэффициенты турбулентности для тепла K_H (коэффициент турбулентной температуропроводности) и для водяного пара K_W (коэффициент турбулентной диффузии), по всей вероятности, имеют одинаковые выражения и один и тот же порядок величины ($K_H \approx K_W \approx 3\cdot 10^5$ см$^2\cdot$с$^{-1}$ при $z = 50$ м и $F_H = 0{,}3$ кал$\times$ $\times$(см$^{-2}\cdot$мин$^{-1}$) [92].

Дайером и Хиксом [18] (см. также п. 9.4) были опубликованы убедительные экспериментальные данные, свидетельствующие о существовании непрерывного турбулентного режима при $z/|L| \leqslant 1$ в условиях неустойчивого состояния ($L \lessdot 0$; $-1{,}0 \leqslant \mathrm{Ri} \lessdot -0{,}01$). В этом диапазоне Ri имеем:

$$\left.\begin{aligned} F_M &= -\overline{\rho}ku_* z(1 - 16z/L)^{1/4}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}, \\ F_H &= -\overline{\rho}c_{pa}ku_* z(1 - 16z/L)^{1/2}\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z}, \\ F_W &= -\overline{\rho}ku_* z(1 - 16z/L)^{1/2}\frac{\partial\overline{e}_v}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.17а)$$

Формулы (10.17а) заменяют при $z/|L| < 1$, $L < 0$ формулы (10.17) и (10.17′) в случае режима вынужденной конвекции и переходного режима квазисвободной конвекции.

Можно с уверенностью сказать, что подходящие аналитические выражения для турбулентных вертикальных потоков F_M, F_H, F_W при больших значениях $z/|L|$ ($z > |L|$), когда $L < 0$, все еще не найдены.

10.3. Скорости преобразования энергии

Исключая $\rho T''/\tilde{T}$ по соотношению, помещенному между формулами (7.8) и (7.9), вводя приближение Буссинеска и определение (10.5) величины Θ_i', получаем обобщение формулы (10.8), а именно

$$\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = -\frac{\Theta_i'}{\bar{\Theta}} + \frac{1}{\bar{\Theta}} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z} \zeta + \frac{c_{va}}{c_{pa}} \frac{p'}{\bar{p}} - r\varepsilon_v'. \qquad (10.8')$$

Из (10.8′) сразу же следует выражение для скорости превращения турбулентной кинетической энергии во внутреннюю энергию:

$$\overline{g\rho' w} = g\overline{\rho' w'} = \bar{\rho} K_H \frac{g}{\bar{\Theta}} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial z} - g\bar{\rho} \frac{\overline{\Theta' w}}{\bar{\Theta}} +$$

$$+ g \frac{c_{va}}{c_{pa}} \frac{\bar{\rho}}{\bar{p}} \overline{p' w'} - gr\overline{\rho \varepsilon_v' w'}. \qquad (10.18)$$

Сравнивая (10.18) с (10.10) и (10.11), находим

$$g\overline{\rho' w'} = -g \left(\frac{F_H}{c_{pa}\bar{T}} + rF_W \right) + \frac{g}{R_a \bar{T}} \overline{p' w'}.$$

Для скоростей превращения энергии $(\overline{\mathbf{P}' \cdot \nabla \mathbf{v}'})$ и $-\overline{\rho \mathbf{v}' \cdot (\mathbf{v}' \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}})}$ справедливы выражения (9.11) и (9.13); для суммы же скоростей превращения энергии $-g\overline{\rho' w'}$ и $\overline{p' \operatorname{div} \mathbf{v}'}$ с учетом соотношения (10.2) получаем

$$\sum (\bar{K}_e) \equiv \overline{p' \operatorname{div} \mathbf{v}'} - g\overline{\rho' w'} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \overline{p' w'} - g\overline{\rho' w'}, \qquad (10.19)$$

где $\sum (\bar{K}_e)$ обозначает скорость превращения осредненной внутренней энергии $\bar{E}$ в осредненную турбулентную кинетическую энергию $\bar{K}_e$ рассматриваемой системы [см. уравнения (8.13) и (8.14)]. Подставляя (10.8′) в (10.19) и принимая во внимание квазистатическое условие $(\partial \bar{p}/\partial z) + g\bar{\rho} \approx 0$, классическое соотношение (10.7), определяющее относительную скорость изменения осредненной потенциальной температуры вдоль вертикали z, и, наконец, выражение (10.5) для лагранжевой пульсации Θ_i', получаем

$$\sum(\overline{K}_e) = \frac{1}{\overline{\Theta}} \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z} \overline{p'w'} + \frac{g}{\overline{\Theta}} \overline{\rho}\, \overline{\Theta'w'} + rg\overline{\rho}\, \overline{\varepsilon_v' w'} =$$

$$= \frac{1}{\overline{\Theta}} \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z} \overline{p'w'} + \frac{g}{\overline{\Theta}} \overline{\rho}\, \overline{\Theta'w} - \overline{\rho} K_H \frac{g}{\overline{\Theta}} \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z} + rg\overline{\rho}\, \overline{\varepsilon_v' w'} \qquad (10.19')$$

или приближенно

$$\sum(\overline{K}_e) \approx \frac{g}{\overline{\Theta}} \overline{\rho}\, \overline{\Theta'w'} + rg\overline{\rho}\, \overline{\varepsilon_v' w'} > 0, \qquad (10.19'\text{a})$$

где оба члена в правой части положительны. Приближение (10.19'а) оправдано тем, что в атмосфере, как правило,

$$10 \cdot \left| \frac{1}{\overline{\Theta}} \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z} \right| \approx - \frac{1}{\overline{\rho}} \frac{\partial\overline{\rho}}{\partial z}.$$

Возвращаясь вновь к точной формуле (10.19') и подставляя в нее последовательно индивидуальные пульсации Θ_i' и p_i' согласно их определениям, окончательно получаем

$$\sum(\overline{K}_e) = g \frac{\overline{\rho}}{\overline{\Theta}} \overline{\Theta_i' w} + \frac{1}{\overline{\Theta}} \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z} \overline{p_i' w} + rg\overline{\rho}\, \overline{\varepsilon_v' w'}. \qquad (10.19'')$$

Формула (10.19″) устанавливает влияние статической устойчивости ($\partial\overline{\Theta}/\partial z > 0$), неадиабатических эффектов ($\Theta_i' \neq 0$) и вертикального турбулентного потока водяного пара на возникновение турбулентной кинетической энергии. Эти влияния становятся еще более очевидны после подстановки выражения (10.12) и приближенного соотношения

$$\overline{p_i' w} \approx - g\overline{\rho}\, \overline{\zeta w} = - g\overline{\rho} K_H < 0$$

в уравнение (10.19″). Имеем

$$\sum(\overline{K}_e) \approx - \overline{\rho} K_H \frac{g}{\overline{\Theta}} \frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z} + \frac{g\overline{\rho}}{c_{pa}\overline{T}} (\overline{qw} - L_v \overline{\varepsilon_{vi}' w}) + rg\overline{\rho}\, \overline{\varepsilon_v' w}.$$

Неадиабатические эффекты турбулентных движений (мелкомасштабное нагревание, $q > 0$) и конденсация водяного пара ($\varepsilon_{vi}' < < 0$) в поднимающихся вихрях ($w > 0$), мелкомасштабное охлаждение ($q < 0$) и испарение ($\varepsilon_{vi}' > 0$) в опускающихся вихрях ($w < 0$), а также вертикальный турбулентный поток водяного пара ($F_W = \rho\, \overline{\varepsilon_v' w} > 0$) производят турбулентную кинетическую энергию, тогда как статическая устойчивость ($\partial\overline{\Theta}/\partial z > 0$) уничтожает этот вид энергии.

10.4. Уравнения баланса энергии

Собирая вместе вышеприведенные результаты с учетом гидростатического приближения, уравнение баланса (8.10) для осредненной турбулентной кинетической энергии запишем в виде

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial\bar{k}_e}{\partial t}+\bar{\mathbf{v}}_h\cdot\nabla_h\bar{k}_e\right)+\operatorname{div}\left(\bar{\rho}\,\overline{k_e+p')\mathbf{v}'}\right)=\bar{\rho}K_M\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{v}}_h}{\partial z}\right)^2-$$
$$-\bar{\rho}K_H\frac{g}{\bar{\Theta}}\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial z}-\bar{\rho}\Delta+\frac{g\bar{\rho}}{c_{pa}\bar{T}}\left(\overline{qw}-L_v\overline{\varepsilon_{vi}'w}\right)+rgF_W=$$
$$=\bar{\rho}K_M\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{v}}_h}{\partial z}\right)^2+g\left(\frac{F_H}{c_{pa}\bar{T}}+rF_W\right)+\frac{1}{\bar{T}}\frac{\partial\bar{T}}{\partial z}\overline{p'w'}-\bar{\rho}\Delta, \quad (10.20)$$

а уравнение (8.11) для осредненной внутренней энергии — в форме

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial\bar{e}}{\partial t}+\mathbf{v}_h\cdot\nabla_h\bar{e}\right)+\operatorname{div}\left(\overline{\mathbf{W}}+\mathbf{W}_e^*\right)=\bar{\rho}\eta\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{v}}_h}{\partial z}\right)^2+$$
$$+\bar{\rho}K_H\frac{g}{\bar{\Theta}}\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial z}+\bar{\rho}\Delta-\frac{g\bar{\rho}}{c_{pa}\bar{T}}\left(\overline{qw}-L_v\overline{\varepsilon_{vi}'w}\right)-rgF_W=$$
$$=\bar{\rho}\eta\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{v}}_h}{\partial z}\right)^2-g\left(\frac{F_H}{c_{pa}\bar{T}}+rF_W\right)-\frac{1}{\bar{T}}\frac{\partial\bar{T}}{\partial z}\overline{p'w'}+\bar{\rho}\Delta, \quad (10.21)$$

где

$$\mathbf{W}_e^*\equiv c_{pa}\left(\bar{T}/\bar{\Theta}\right)\bar{\rho}\,\overline{\Theta'\mathbf{v}'}+L_v\bar{\rho}\,\overline{\varepsilon_v'\mathbf{v}'}.$$

Интересно сравнить уравнения для турбулентной кинетической энергии (9.15) и (10.20) и уравнения для внутренней энергии (9.16) и (10.21)

В случае свободной конвекции можно пренебречь пространственными производными по горизонтальному направлению в левых частях уравнений баланса (10.20) и (10.21), а также можно отбросить член $\eta\,(\partial\bar{\mathbf{v}}_h/\partial z)^2$, коль скоро присутствует Δ. Таким образом, упрощенные уравнения энергии запишем в виде:

$$\bar{\rho}\frac{\partial\bar{k}_e}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{\rho}\,\overline{k_e+p')w'}\right)\approx\bar{\rho}K_M\left(\frac{\partial\bar{\mathbf{v}}_h}{\partial z}\right)^2-\bar{\rho}K_H\frac{g}{\bar{\Theta}}\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial z}-$$
$$-\bar{\rho}\Delta+\frac{g\bar{\rho}}{c_{pa}\bar{T}}\left(\overline{qw}-L_v\overline{\varepsilon_{vi}'w}\right)+rgF_W, \quad (10.20a)$$

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial\bar{e}}{\partial t}+\bar{\mathbf{v}}_h\cdot\nabla_h\bar{e}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{W}_z+F_H+L_vF_W\right)\approx\bar{\rho}K_H\frac{g}{\bar{\Theta}}\frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial z}+\bar{\rho}\Delta-$$
$$-\frac{g\bar{\rho}}{c_{pa}\bar{T}}\left(\overline{qw}-L_v\overline{\varepsilon_{vi}'w}\right)-rgF_W. \quad (10.21a)$$

Что касается кинетической энергии среднего движения, то первое из приближенных уравнений баланса (9.18) может применяться и в случае свободной конвекции. Диссипация турбулентной кинетической энергии в тепло со скоростью $\overline{\rho\Delta}$ посредством молекулярных процессов происходит в основном в микромасштабных вихрях вязкого поддиапазона (см. п. 4.4). Не рассматривая эти очень малые вихри, мы можем отбросить член $\overline{\rho\Delta}$ в правых частях уравнений (10.20а) и (10.21а).

Сравнивая уравнения баланса (9.15) и (10.20) для турбулентной кинетической энергии и уравнения баланса (9.16) и (10.21) для внутренней энергии, следует помнить, что вынужденная конвекция возникает под влиянием вертикального сдвига ветра и соответственно в этом случае главную роль в преобразовании энергии играет член $\overline{\rho}K_M\,(\partial\overline{\mathbf{v}}_h/\partial z)^2$, описывающий переход кинетической энергии от среднего движения к турбулентному. В то же время свободная конвекция может наблюдаться даже при отсутствии вертикального сдвига вихря $[(\partial\overline{\mathbf{v}}_h/\partial z) = 0]$, таким образом, в этом случае главную роль играют эффекты плавучести, а именно положительные скорости $(g\overline{\rho}/c_{pa}\overline{T})\overline{qw}$ — $-L_v\,(g\overline{\rho}/c_{pa}\overline{T})\overline{\varepsilon'_{vi}\,w}$ и rgF_W превращения внутренней энергии в турбулентную кинетическую энергию. В обоих случаях происходит диссипация турбулентной кинетической энергии в тепло под влиянием статической устойчивости ($\partial\overline{\Theta}/\partial z > 0$) и молекулярной вязкости ($\Delta > 0$). Поскольку в атмосфере всегда наблюдается вертикальный сдвиг ветра, вынужденная конвекция является постоянной чертой динамики атмосферы.

Свободная конвекция возникает тогда, когда наблюдаются неадиабатические эффекты плавучести (локальное охлаждение и нагревание), обусловливающие подъем теплых вихрей и опускание холодных в гравитационном поле.

10.5. Мелкомасштабные турбулентные процессы переноса в пограничном слое и выше его

Теперь обратим внимание на уровни тропосферы, где шероховатость земной поверхности непосредственно не действует на движение атмосферы. Косвенное влияние земной поверхности, однако, сохраняется и на этих уровнях, например, в виде источника явного тепла и влаги (облачные образования).

Вполне приемлемо считать, что в пограничном слое процессы переноса регулируются осредненными профилями ветра, температуры и влажности и, конечно, турбулентными потоками количества движения, тепла и водяного пара, сформировавшимися в приземном слое, где эти потоки можно считать постоянными по высоте. Очень мало известно о турбулентных процессах переноса в верхней части пограничного слоя, расположенной над приземным слоем, и выше, в свободной тропосфере. Здесь труднее использовать технику наблюдений, применяемую в микрометеорологии и для исследования кучевых облаков; кроме того, встречаются затруднения в интерпретации наблюдений вследствие важной роли, какую играют адвективные процессы (горизонтальными градиентами нельзя более пренебрегать) и крупномасштабные вертикальные движения ($w \neq 0$) в свободной тропосфере. В облаках дополнительные трудности появляются из-за фазовых переходов воды [92].

При изучении механизма турбулентного обмена нужно знать не только осредненные вертикальные профили скорости ветра, температуры и влажности, но и распределение по вертикали автокорреляционных и взаимно-корреляционных функций этих трех метеорологических величин.

В области западного переноса турбулентный поток зонального количества движения с большой вероятностью направлен вниз. Направление турбулентного потока явного тепла, однако, определяется двумя противоположными факторами: поток направлен вниз или вверх в зависимости от того, какой из факторов преобладает — сдвиг ветра или плавучесть.

Трудной и нерешенной проблемой остается также проблема проникающей конвекции в устойчиво стратифицированной свободной тропосфере, расположенной над пограничным слоем. Наблюдения указывают на то, что даже при очень сильной конвекции (кучевые облака распространяются до больших высот) неустойчивая стратификация ограничивается приземным слоем: вертикальный градиент температуры $-\partial\overline{T}/\partial z$ выше 100 м несколько меньше сухоадиабатического градиента. Толщина неустойчивого приземного слоя, кажется, служит важным параметром при изучении проникающей конвекции [92].

11

Энергетика крупномасштабных вихрей

11.1. Крупномасштабные вихри

В большинстве теорий крупномасштабных динамических систем принято считать, что общая циркуляция атмосферы может быть описана с помощью средних значений физических величин, включенных в уравнение движения, и корреляционных связей между отклонениями этих величин от их средних значений (см. п. 4.5). Обычно вводится зональное осреднение (см. п. 5.3), а именно осреднение по кругу широты и определенному временно́му интервалу, который в большинстве случаев предполагается достаточно большим по отношению к местному времени жизни атмосферных возмущений. Выбор зонального осреднения оправдан фактом преобладания западно-восточного переноса. Как обычно, в теориях общей циркуляции атмосферы u, v, w обозначают зональную, меридиональную и вертикальную проекции скорости ветра соответственно.

Среднее зональное значение величины X обозначим через $\overline{X}$, среднее взвешенное значение — через $\tilde{X}$, а соответствующие флуктуации — через X' и X'' (см. главу 5). Движения атмосферы всех масштабов и времен жизни вносят вклад в корреляции $\overline{\rho X'' Y''}$ между флуктуациями X'', Y'' величин X, Y, определяющих эти движения. Однако значение вклада движений воздуха в корреляционные связи между отклонениями метеорологических величин от их зональных значений зависит в основном от пространственно-временны́х масштабов рассматриваемых динамических систем. Эта избирательная роль атмосферных возмущений важна и представляет интерес, но при этом сильно усложняет толкование уравнений движения с точки зрения метеорологии [125].

Можно предположить, что вертикальное движение в возмущениях большой горизонтальной протяженности вносит очень малый вклад в корреляционные связи между флуктуациями, одна из которых (w'' или w') представляет собой вертикальную скорость w, как, например, в вертикальный турбулентный поток горизонтального количества движения. Эти корреляции обусловлены главным образом вихрями значительно меньшего масштаба (см. п. п. 4.4 и 4.6). Наибольший вклад в корреляционные связи между величинами, включающими вертикальную скорость w, вносят вихри, горизонтальный и вертикальный размеры которых сравнимы между собой, например движения в конвективных облаках [91]. С другой стороны, крупномасштабные движения, такие, как длинные волны в западном потоке, вносят наибольший вклад в корреляционные связи между величинами, характеризующими только горизонтальное движение. Меридиональный турбулентный поток $\overline{\rho u''v''}$ зонального количества движения, например, обусловлен в основном крупномасштабными возмущениями (горизонтальный и временной масштаб которых по крайней мере несколько тысяч километров и несколько суток соответственно), в то же время за вертикальный турбулентный поток $\overline{\rho u''w''}$ зонального количества движения ответственны возмущения более мелкого размера [125]. Следует заметить, что корреляции вида $\overline{\rho X''Y''}$, в которые не входит вертикальная скорость, можно рассчитать непосредственно по данным карт верхних уровней (см. п. 12.1). Этого нельзя сделать, если рассматривается вертикальная скорость — ненаблюдаемая метеорологическая величина. Таким образом, скорости преобразования энергии, зависящие от w, можно рассчитать лишь путем построения упрощенных моделей атмосферы, привлекая для вычисления w одно из следующих уравнений: притока тепла, неразрывности, переноса вихря или изобарической дивергенции (см. п. 18.5). Полученные таким путем вертикальные скорости представляют собой сглаженные величины, при этом недооценивается истинный вклад в вертикальную скорость движения крупномасштабных систем ($L > 1000$ км). Системы меньшего масштаба, вне всякого сомнения, вносят значительно больший вклад в вертикальное движение атмосферы. К сожалению, оценить этот вклад в настоящее время не представляется возможным.

Гармонический анализ зонального движения (см. [131]) показал, что спектр крупномасштабных систем движения в тропосфере, отражаемых на синоптических картах верхних уровней, можно грубо разделить на три интервала.

1. *Квазистационарные планетарные волны* (с волновыми числами $n = 1 \div 4$, длинами волн от 33 000 до 7000 км на широте около 45°), среди которых волны с $n = 2$ и $n = 3$ представляются наиболее устойчивыми и переносящими наибольшее количество кинетической и потенциальной энергии. Планетарные волны

в северном полушарии возникают в основном под влиянием географического распределения материков и океанов ($n = 2$), крупных орографических особенностей земной поверхности ($n = 3$) и планетарного распределения источников и стоков [140]. Эти очень длинные квазистационарные волны, вероятно, контролируются главными горными массивами и усиливаются неадиабатическими процессами [трение и обмен теплом между источниками (стоками) и средой, их окружающей].

2. *Длинные движущиеся и неустойчивые волны* (с волновыми числами $n=5 \div 10$, длинами волн от 5500 до 2800 км на широте около 45°), среди которых волны с $n = 6$, $n = 7$ и $n = 8$ можно отождествить с возмущениями максимальной скорости роста [19]. Эти длинные волны возникают преимущественно под влиянием бароклинной неустойчивости циркумполярного потока и ответственны за бароклинные процессы, такие, как переходы доступной энергии зонального движения в доступную потенциальную энергию вихрей и превращение доступной потенциальной энергии вихрей в турбулентную кинетическую энергию (см. главу 15).

3. *Более быстро движущиеся волновые возмущения умеренных широт* (волновые числа больше 10, длины волн меньше 2800 км на широте около 45°). Эти более короткие неустойчивые волны есть не что иное, как перемещающиеся циклоны и антициклоны умеренных широт. Они очень активны в нижних слоях тропосферы и довольно быстро теряют свою индивидуальность с увеличением высоты [131].

11.2. Скорости превращения энергии и уравнения баланса

В случае рассматриваемых здесь масштабов движения члены уравнений баланса (6.3) и (6.12), включающие вязкие напряжения, пренебрежимо малы. Во всяком случае, члены, содержащие тензор вязких напряжений Навье—Стокса $\boldsymbol{P}$, могут быть отброшены. Хотя приближение Буссинеска применимо в случае крупномасштабных систем движения, оно не будет вводиться в уравнения и формулы этого параграфа; однако это легко сделать.

Замечая, что для масштабов общей циркуляции и осреднения зональных величин по длинному периоду справедливы неравенства $\tilde{w} \ll \tilde{v} \ll \tilde{u}$, можем кинетическую энергию среднего зонального движения записать в приближенном виде: $k_m \equiv \equiv \{(\tilde{\mathbf{v}})^2/2\} \approx \{(\tilde{u})^2/2\}$ [37, 101, 123]. В этом случае переход энергии крупномасштабных турбулентных возмущений в энергию среднего движения $\tilde{\mathbf{v}}$ определяется выражением

$$\overline{\rho \mathbf{v}'' \cdot (\mathbf{v}'' \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}})} \approx R \overline{\rho u'' \mathbf{v}''_{\mathrm{M}}} \cdot \nabla_{\mathrm{M}} (\tilde{u}/R) \equiv$$
$$\equiv R \overline{\rho u'' v''} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tilde{u}}{R} \right) + R \overline{\rho u'' w''} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\tilde{u}}{R} \right), \qquad (11.1)$$

где R — расстояние до оси вращения Земли ($R \approx a \cos \varphi$, a — средний радиус Земли и φ — широта). Индекс «М» указывает на принадлежность к меридиональной плоскости; в этой плоскости производные $(\partial/\partial y) \approx (1/a)(\partial/\partial\varphi)$ и $\partial/\partial z$ характеризуют соответственно скорости изменения вдоль меридиана и по вертикали.

Сначала рассмотрим член, пропорциональный меридиональному турбулентному потоку $\overline{\rho u'' v''}$ зонального импульса. Этот поток направлен к полюсу [2, 101]; максимум его расположен в субтропических широтах, к югу от максимума средней угловой скорости $\tilde{u}/R$ вращения атмосферы вокруг земной оси. Следует заметить, что рост $\tilde{u}/R$ по мере продвижения с юга на север в низких широтах значительно больше уменьшения этой величины в умеренных и высоких широтах (рис. 10). Следовательно, член

$$R \overline{\rho u'' v''} \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{u}/R)$$

положителен в низких и отрицателен в умеренных широтах, однако в среднем на любой уровенной поверхности положительные значения преобладают над отрицательными [101]. Далее рассмотрим член, пропорциональный вертикальному турбулентному потоку $\overline{\rho u'' w''}$ зонального импульса. Этот поток направлен вниз ($\overline{\rho u'' w''} < 0$) ниже уровня максимума западного ветра, где $(\partial/\partial z) \times (\tilde{u}/R) > 0$, и направлен вверх ($\overline{\rho u'' w''} > 0$) над этим уровнем, где $(\partial/\partial z)(\tilde{u}/R) < 0$, и поэтому член

$$R \overline{\rho u'' w''} \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{u}/R)$$

на всех уровнях отрицателен. Можно, таким образом, сделать вывод, что первый из турбулентных членов в соотношении (11.1) вызывает генерацию [101], а второй — диссипацию кинетической энергии среднего движения.

Более того, на основе приведенного выше замечания относительно избирательной роли атмосферных возмущений можно заключить, что основная часть перехода турбулентной кинетической энергии в энергию среднего движения $\overline{\rho u}$ сосредоточена в длинных волнах западного потока. Этот переход зависит от корреляции между составляющими u'' и v'' пульсационной скорости и от меридионального градиента средней зональной угловой скорости,

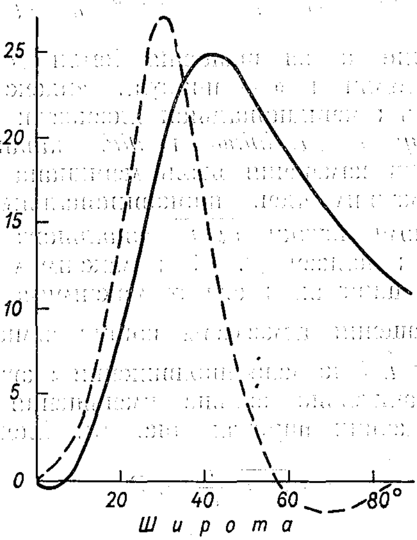

Рис. 10. Относительная угловая скорость $\tilde{u}/R$ в 10^{-7} $с^{-1}$ (сплошная кривая) и крупномасштабный поток количества движения $R\overline{\rho u''v''}$ (штриховая кривая) в 10^{25} СГС (по Старру [101]).

и потому он является баротропным процессом [125], не зависящим от бароклинности атмосферы.

С другой стороны, переход $-R\overline{\rho u''w''}$ $(\partial/\partial z)$ $(\tilde{u}/R) > 0$ кинетической энергии среднего зонального движения в энергию турбулентного движения совершается в основном за счет вихрей, масштаб которых значительно меньше синоптического масштаба. Этот переход зависит от корреляции между составляющими u'' и w'' пульсационной скорости и от вертикального градиента средней зональной угловой скорости $(\partial/\partial z)$ $(\tilde{u}/R)$, и потому он является бароклинным процессом [124], поскольку хорошо известно, что бароклинность планетарного вихря $\tilde{u}$ связана с величиной $(\partial/\partial z)$ $(\tilde{u}/R)$.

Теперь рассмотрим уравнение турбулентной кинетической энергии (6.12) и заметим, что

$$-\overline{\mathbf{v}''\cdot\nabla p} = -\overline{\mathbf{v}''}\cdot\nabla\bar{p} - \overline{\mathbf{v}''\cdot\nabla p'} = \overline{\rho'\mathbf{v}''}\cdot\frac{\nabla\bar{p}}{\bar{\rho}} - \overline{\mathbf{v}''\cdot\nabla p'}. \qquad (11.2)$$

Если пренебречь кинематическими эффектами флуктуаций плотности (см. главу 8), то можно записать

$$\overline{\rho'\mathbf{v}''}\cdot\frac{\nabla\bar{p}}{\bar{\rho}} \approx -\overline{\rho'\mathbf{v}''}\cdot\nabla\phi = -g\overline{\rho' w''} > 0. \qquad (11.3)$$

Из этого приближения сразу же следует, что член $\overline{\rho'\mathbf{v}''}\cdot(\nabla\bar{p}/\bar{\rho})$ в основном представляет среднее значение работы, совершаемой в гравитационном поле силой плавучести $-\rho'\nabla\phi$ (см. п. 6.5). Хорошо известно, что в атмосфере при масштабах движения бо́льших, чем масштаб вынужденной конвекции, эта работа положительна, как правило, для поднимающихся масс более легкого воздуха и опускающихся масс более тяжелого воздуха. Следовательно, вихри с большой вертикальной скоростью генерируют свою кинетическую энергию главным образом за счет превращения потенциальной энергии в кинетическую. Этими вихрями являются движущиеся неустойчивые циклоны и антициклоны и динамические системы меньшего масштаба. На уровне современных знаний трудно высказать более определенное суждение.

Подставляя (11.3) в (11.2), а затем (11.1) и (11.2) в (6.12) и пренебрегая членами, содержащими составляющие тензора вязких напряжений Навье—Стокса $\boldsymbol{P}$, получаем приближенное уравнение баланса турбулентной кинетической энергии [125]

$$\frac{\partial\bar{\rho}\tilde{k}_\epsilon}{\partial t} + \mathrm{div}_\mathrm{M}\overline{\rho k_\epsilon \mathbf{v}_\mathrm{M}} = -\overline{\mathbf{v}''\cdot\nabla p'} - g\overline{\rho' w''} - R\overline{\rho u''\mathbf{v}_\mathrm{M}}\cdot\nabla_\mathrm{M}(\tilde{u}/R). \qquad (11.4)$$

Первые два члена в правой части этого уравнения

$$-\overline{\mathbf{v}''\cdot\nabla p'} - g\,\overline{\rho' w''} \qquad (11.5)$$

определяют скорость возникновения осредненной турбулентной кинетической энергии атмосферы. Эта величина представляет собой в действительности скорость преобразования внутренней энергии в кинетическую энергию возмущений [см. уравнения баланса (6.11) и (6.18), п. 6.5].

В случае крупномасштабных возмущений можно с хорошим приближением записать

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v}'' \approx -\frac{w''}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}. \qquad (11.6)$$

Отсюда, подставляя $\rho' = -\rho\Theta''/\tilde{\Theta} + (c_{va}/c_{pa})\bar{\rho}\,(p'/\bar{p})$ в (11.5), заменяя $-g\bar{\rho}$ на $\partial\bar{p}/\partial z$ и вспоминая, что $(1/\tilde{\Theta})\,(\partial\tilde{\Theta}/\partial z)$ на порядок меньше, чем $(-1/\bar{\rho})\,(\partial\bar{\rho}/\partial z)$, получаем [26, 124, 125]

$$-\overline{\mathbf{v}''\cdot\nabla p'} - g\overline{\rho'w''} \approx -\operatorname{div}\overline{p'\mathbf{v}''} - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}\overline{p'w''} - g\overline{\rho'w''} =$$
$$= -\operatorname{div}\overline{p'\mathbf{v}''} + \frac{1}{\tilde{\Theta}}\frac{\partial\tilde{\Theta}}{\partial z}\overline{p'w''} + \frac{g}{\Theta}\overline{\rho\Theta''w''} \approx$$
$$\approx -\operatorname{div}\overline{p'\mathbf{v}''} + \frac{g}{\tilde{\Theta}}\overline{\rho\Theta''w''}. \qquad (11.7)$$

Интегрируя (11.7) по всей атмосфере, находим скорость возникновения турбулентной кинетической энергии в атмосфере в целом, а именно

$$\int\limits_{\text{atm}} \frac{1}{\tilde{\Theta}}\frac{\partial\tilde{\Theta}}{\partial z}\overline{p'w''}\,d\tau + \int\limits_{\text{atm}}\frac{g}{\tilde{\Theta}}\overline{\rho\Theta''w''}\,d\tau \approx \int\limits_{\text{atm}}\frac{g}{\tilde{\Theta}}\overline{\rho\Theta''w''}\,d\tau > 0. \qquad (11.8)$$

Из этого неравенства видно, что знак скорости возникновения кинетической энергии возмущений совпадает со знаком скорости превращения $-g\overline{\rho'w''} > 0$ потенциальной энергии в турбулентную кинетическую энергию [см. формулу (11.3) и п. 6.5]. Это превращение энергии как следствие отрицательной корреляции между пульсациями ρ' и w'' или, что то же самое, положительной корреляции между пульсациями Θ'' и w'' доставляет кинетическую энергию, необходимую для поддержания атмосферных возмущений [26, 121, 122].

Наконец, заметив, что $\overline{\rho k_e \mathbf{v}_M}$ мало́ по сравнению с $\overline{p'\mathbf{v}''_M}$, уравнение баланса (11.4) запишем в удобном приближенном виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho k_e}) + \operatorname{div}_M\overline{p'\mathbf{v}''_M} \approx (g/\tilde{\Theta})\,\overline{\rho\Theta''w''} - R\overline{\rho u''\mathbf{v}''_M}\cdot\nabla_M(\tilde{u}/R). \qquad (11.9)$$

С учетом полученных выше результатов можно сделать из уравнения баланса (11.9) вывод о том, что кинетическая энергия атмосферных возмущений, обеспечиваемая в основном переходом $(g/\tilde{\Theta})\,\overline{\rho\Theta''w''}$ потенциальной энергии в кинетическую в движущихся циклонах и антициклонах и в динамических системах меньшего масштаба, передается среднему зональному движению посредством длинных волн в западно-восточном потоке со скоростью $R\overline{\rho u''v''}\,(\partial/\partial y)\,(\tilde{u}/R)$.

Интенсивность средней зональной циркуляции, однако, не может расти неограниченно, поскольку кинетическая энергия передается от среднего зонального движения к вихрям масштаба меньше синоптического со скоростью $-R\overline{\rho u'' w''}\,(\partial/\partial z)\,(\tilde{u}/R)$ (>0, диссипация кинетической энергии среднего зонального движения).

11.3. Образование турбулентной кинетической энергии

В заключение обсудим влияние статической устойчивости, нагревания и охлаждения, испарения и конденсации на образование турбулентной кинетической энергии возмущений. С эйлеровыми отклонениями p', ρ' и Θ'' величин можно связать соответствующие лагранжевы отклонения:

$$p_i' = p' + \mathbf{r}\cdot\nabla_M\bar{p}, \quad \rho_i' = \rho' + \mathbf{r}\cdot\nabla_M\bar{\rho}, \quad \Theta_i'' = \Theta'' + \mathbf{r}\cdot\nabla_M\tilde{\Theta}, \tag{11.10}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор массы воздуха в возмущенном состоянии в момент времени t по отношению к невозмущенному положению в тот же момент.

Подставляя (11.10) в (11.7), используя квазистатическое приближение $g\bar{\rho} \approx -\partial\bar{p}/\partial z$ и опуская дивергентный член, получаем [см. уравнение баланса (11.9)] [125]

$$\sum(\tilde{K}_e) = \frac{g}{\tilde{\Theta}}\overline{\rho\Theta_i'' w''} + \frac{1}{\tilde{\Theta}}\frac{\partial\tilde{\Theta}}{\partial z}\overline{p_i' w''} - \frac{g}{\tilde{\Theta}}\frac{d\tilde{\Theta}}{dy}\overline{\rho r_y w}, \tag{11.11}$$

где $\tilde{K}_e$ — осредненная турбулентная кинетическая энергия или кинетическая энергия возмущений; $\widetilde{r_y w} = (\overline{\rho r_y w}/\bar{\rho}) \approx \overline{r_y w}$ — коэффициент турбулентности в меридиональном направлении; $(d/d\bar{y}) \equiv (\partial/\partial y) - (\partial\bar{p}/\partial y/\partial\bar{p}/\partial z)\,(\partial/\partial z)$ — производная по меридиану вдоль изобарической поверхности.

Прежде чем истолковать члены в правой части (11.11), введем упрощенный вариант первого начала термодинамики (10.12) для насыщенного воздуха:

$$c_{pa}\tilde{T}\,(\Theta_i''/\tilde{\Theta}) + L_v\varepsilon_{vi} = q, \tag{11.12}$$

где q — скорость нагревания ($q > 0$) или охлаждения ($q < 0$) единичной массы в конце траектории $\mathbf{r}$; ε_{vi}'' — скорость испарения, отнесенная к единичной массе воздуха в конце той же траектории; L_v — удельная теплота парообразования (конденсации).

После подстановки (11.12) в (11.11) сразу же становится ясно, что первый член в (11.11) выражает влияние нагревания ($q > 0$) или охлаждения ($q < 0$) и испарения ($\varepsilon_{vi}'' > 0$) или конденсации ($\varepsilon_{vi}'' < 0$), второй же член — влияние статической устойчивости и третий член — влияние бароклинности ($d\tilde{\Theta}/dy \neq 0$) на скорость образования турбулентной кинетической энергии [125].

Порядок величины факторов, влияющих на скорость образования энергии, изменяется вместе с атмосферными условиями. Существует много приближенных выражений формулы (11.11). Например, когда корреляция между флуктуациями p' и w'' слабая, что нередко наблюдается, формула (11.11) принимает упрощенный вид

$$\sum(\tilde{K}_e) \approx (g/\tilde{\Theta})\,(\overline{\rho\Theta_i''w} - \overline{\rho w\mathbf{r}}\cdot\nabla_M\tilde{\Theta}). \qquad (11.11а)$$

Если теперь пренебречь эффектами нагревания или охлаждения и эффектами испарения и конденсации, то формула (11.11а) примет вид, впервые полученный Фьортофтом [26], а именно

$$\sum(\tilde{K}_e) \approx (g/\tilde{\Theta})\,\overline{\rho\Theta''w} = (-g/\tilde{\Theta})\,\overline{\rho w\mathbf{r}}\cdot\nabla_M\tilde{\Theta}. \qquad (11.11б)$$

Смысл этой формулы состоит в том, что атмосферные возмущения генерируют кинетическую энергию, когда воздух движется адиабатически между геопотенциальной и изэнтропической ($\tilde{\Theta} = \text{const}$) поверхностями [91, 94, 125].

Теперь проанализируем формулу (11.11) в двух важных случаях: влажной конвекции и синоптических систем движения.

1. *Влажная конвекция*

В этом случае справедливы следующие неравенства:

$$r_z > 0,\ w > 0,\ \varepsilon_{vi} < 0,\ q > 0,\ p_i' < 0$$

и

$$r_z < 0,\ w < 0,\ \varepsilon_{vi} > 0,\ q < 0,\ p_i' > 0.$$

Эффект горизонтального смещения r_y может не учитываться в этом случае. Полагая $r_y \approx 0$, формулу (11.11) с учетом соотношения (11.12) перепишем в виде

$$\sum(\tilde{K}_e) \approx (g/c_{pa}\tilde{T})\,(\overline{\rho q w} - L_v\overline{\rho\varepsilon_{vi}''w}) + \frac{1}{\tilde{\Theta}}\frac{\partial\tilde{\Theta}}{\partial z}\,\overline{p_i'w''}. \qquad (11.13)$$

Первые два члена в правой части (11.13) играют в обсуждаемом случае важную роль: вклад процессов нагревания (охлаждения) и конденсации (испарения) в образование кинетической энергии положителен. Вклад третьего члена в статически устойчивой атмосфере, напротив, отрицателен: $\overline{p'w''} = \overline{p_i'w} < 0$. Следовательно, влажная конвекция (кучевые и кучево-дождевые облака и тропические циклоны) поддерживается нагреванием (или охлаждением) и теплом, высвобождающимся в процессе испарения и конденсации. Статическая устойчивость ($\partial\tilde{\Theta}/\partial z > 0$), однако, способствует затуханию этой циркуляции [125]. Следовательно, чем менее устойчиво вертикальное распределение массы, тем интенсивнее влажная конвекция. Наблюдения показывают, что тропические циклоны зарождаются только над теплой водной поверхностью тропической зоны (температура поверхности океана выше 25° С), где потоки тепла и водяного пара от поверхности к атмосфере достигают наибольших значений после вторжений полярного воздуха в тропическую тропосферу. Тропические циклоны начинают заполняться при прохождении над холодными поверхностями воды или суши. Их усиление находится в тесной корреляционной связи с развитием кучевых облаков и в основном происходит вследствие высвобождения скрытого тепла в свободной тропосфере тропиков [38, 63].

2. *Синоптические системы движения*

В этом случае имеют место следующие статистические связи:

$$r_y > 0,\ r_z > 0,\ v > 0,\ w > 0,\ p_i' < 0,\ q < 0,\ \varepsilon_{vi}'' < 0$$

и

$$r_y < 0,\ r_z < 0,\ v < 0,\ w < 0,\ p_i' > 0,\ q > 0,\ \varepsilon_{vi}'' > 0.$$

Согласно формуле (11.11), в упомянутых динамических системах вклады процессов нагревание — охлаждение и испарение — конденсация в образование кинетической энергии имеют противоположные знаки (первый отрицателен, второй положителен) и в значительной степени компенсируют друг друга. Второй член в правой части (11.11), пропорциональный статической устойчивости, всегда отрицателен. Здесь следует подчеркнуть, что только третий член способен внести заметный вклад в образование кинетической энергии синоптических возмущений. В самом деле, хорошо известно, что в северном полушарии, как правило, $d\tilde{\Theta}/dy < 0$. В отсутствии изобарического температурного градиента $-d\tilde{\Theta}/dy$ в меридиональном направлении никакое превращение потенциальной энергии в кинетическую в синоптических системах невозможно. Таким образом, превращение потенциальной энергии в кинетическую — подлинно бароклинный процесс. Таким путем проявляется фундаментальная роль бароклинности в одном из наиболее важных энергетических процессов атмосферы [26, 124, 125].

Здесь уместно напомнить, что внетропические циклоны являются бароклинными возмущениями, обычно движущимися с запада на восток. Теплый воздух поднимается в передней части этих возмущений, а холодный воздух опускается в их тыловой части. Этот динамический процесс превращает потенциальную энергию в кинетическую. Внетропические циклоны наблюдаются в основном в зоне, где градиент $-d\tilde{\Theta}/dy$ (>0) достигает наибольших значений.

Показано [6, 19, 25], что крупномасштабные линейные бароклинные возмущения становятся неустойчивыми, когда изобарический градиент в направлении полюса становится больше некоторого критического (порогового) значения, зависящего от статистической устойчивости (или, что то же самое, когда вертикальный сдвиг $-\partial\tilde{u}/\partial z$ среднего зонального потока $\tilde{u}$ становится больше критического значения, соответствующего пороговому значению $-d\tilde{\Theta}/dy$). Расширение интервала неустойчивых длин волн с ростом бароклинности происходит в основном за счет длинноволнового участка спектра.

Теперь рассмотрим более подробно синоптические системы, движущиеся сухоадиабатически. Пренебрегая флуктуациями плотности, запишем формулу (11.11б) в следующем приближенном виде:

$$\sum(\tilde{K}_e) \approx \sum(\overline{K}_e) \approx -(g\bar{\rho}/\overline{\Theta})\,\overline{w\mathbf{r}}\cdot\nabla_M\overline{\Theta}. \tag{11.14}$$

Эта формула демонстрирует тот факт, что образование кинетической энергии крупномасштабных вихрей, движущихся адиабатически во всей области потенциальной температуры $\overline{\Theta}(\varphi, z)$, зависит от относительного наклона изэнтропических поверхностей $\overline{\Theta}(\varphi, z) = \text{const}$ и от траекторий воздушных масс.

Необходимо рассмотреть четыре частных случая. Прежде всего, изэнтропические поверхности наклонены либо в сторону экватора (наиболее часто наблюдающийся в тропосфере случай), либо в сторону полюса. Далее, частицы воздуха в крупномасштабных вихрях могут двигаться либо между уровенной и изэнтропической поверхностью, либо вне острого угла между этими двумя поверхностями. Эти четыре случая изображены на рис. 11, где изэнтропические поверхности $\overline{\Theta}(\varphi, z) = \text{const}$ расположены в меридиональной плоскости (φ, z) или (y, z) вместе с проекциями на эту плоскость траекторий частиц воздуха (в предположении квазистатического движения), причем круги широт используются в качестве проектирующих кривых. Частицы воздуха перемещаются в направлении полюса (от A к B) на одних долготах и в направлении экватора (от B к A) на других. Эта модель движения вдоль наклонной поверхности представляет собой волновое движение, охватывающее всю Землю. В определенных интервалах долгот массы воздуха, первоначально расположенные в точках, проекции которых на меридиональную плоскость находятся

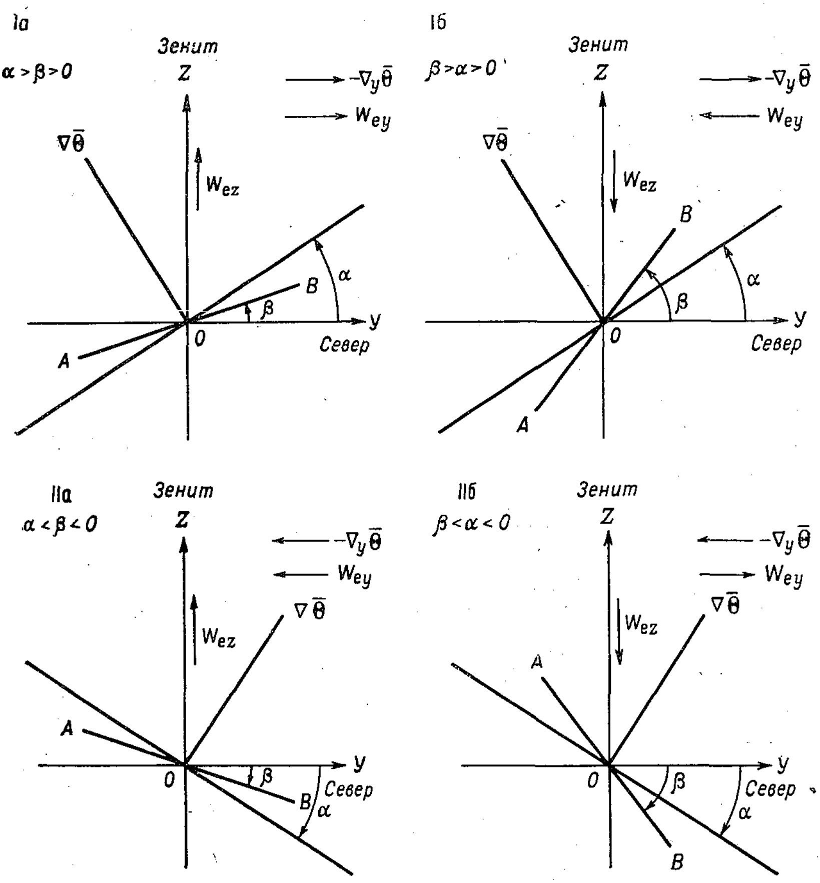

Рис. 11. Синоптические системы движения.

в точке A (см. рис. 11), замещаются массами воздуха, расположенными в точках, проекции которых находятся в точке B. В оставшихся интервалах долгот массы воздуха, первоначально находившиеся в точке, подобной B, заменяются массами, расположенными в точках, подобных A. Этот межширотный обмен массами воздуха ($A \to B$, $B \to A$) вызывает преобразование потенциальной энергии в кинетическую со скоростью, определенной формулой (11.14) (см. п. 6.5).

Обозначим через α острый угол между уровенной и изэнтропической поверхностью и через β угол между уровенной и наклонной поверхностью, вдоль которой движутся массы воздуха синоптического масштаба. Тангенсы этих углов определяются формулами

$$\operatorname{tg}\alpha = -\left(\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial y}\bigg/\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z}\right) \text{ и } \operatorname{tg}\beta = (r_z/r_y),$$

где r_y и r_z — меридиональная и вертикальная проекции вектора $\mathbf{r} = \overrightarrow{AB}$ или $\overrightarrow{BA}$.

Предполагая движение сухоадиабатическим, можем записать

$$\Theta' = -\mathbf{r}\cdot\nabla_M\overline{\Theta} = r_y\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta).$$

Отсюда скорость преобразования потенциальной энергии в кинетическую $\sum(\overline{K}_e)$, меридиональная W_{ey} и вертикальная W_{ez} составляющие турбулентного потока явного тепла $\mathbf{W}_e$, обусловленного межширотным обменом, принимают вид:

$$\sum(\overline{K}_e) = \frac{g}{\overline{\Theta}}\bar{\rho}\,\overline{\Theta' w} = \bar{\rho}\,\overline{r_y w}\,\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta), \qquad (11.14')$$

$$W_{ey} = c_{pa}\frac{\tilde{T}}{\overline{\Theta}}\bar{\rho}\,\overline{\Theta' v} = c_{pa}\frac{\tilde{T}}{\overline{\Theta}}\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z}\bar{\rho}\,\overline{r_y v}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta),$$

$$W_{ez} = c_{pa}\frac{\tilde{T}}{\overline{\Theta}}\bar{\rho}\,\overline{\Theta' w} = c_{pa}\frac{\tilde{T}}{\overline{\Theta}}\frac{\partial\overline{\Theta}}{\partial z}\bar{\rho}\,\overline{r_y w}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta). \qquad (11.15)$$

Когда межширотный обмен осуществляется вдоль изэнтропической поверхности $\overline{\Theta} = \mathrm{const}$, тогда $\alpha \equiv \beta$ и, согласно (11.14') и (11.15), кинетическая энергия не возникает и не уничтожается, а также отсутствует поток тепла.

В четырех указанных выше случаях $\partial\overline{\Theta}/\partial z > 0$, иначе говоря, вертикальный градиент $-\partial\overline{\Theta}/\partial z$ потенциальной температуры $\overline{\Theta}$ направлен вниз. Теперь рассмотрим эти случаи по порядку.

Случай Ia

Изэнтропические поверхности наклонены в сторону экватора (горизонтальный градиент $-\partial\overline{\Theta}/\partial y$ потенциальной температуры $\overline{\Theta}$ направлен в сторону полюса) и $\alpha > \beta > 0$, $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta > 0$.

Если в этом случае масса воздуха смещается от A к B, совершая восходящее движение, то она приобретает более высокую потенциальную температуру, чем температура окружающей среды (возникает положительная плавучесть), и масса будет продолжать подниматься и дальше. Если воздушная масса перемещается из B в A, то она приобретает температуру более низкую, чем температура окружающей среды, и, следовательно, масса будет продолжать опускаться.

Таким образом, в этом случае ($\partial\bar{\Theta}/\partial z > 0$ и $\partial\bar{\Theta}/\partial y < 0$) имеем:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{r},\ r_y > 0,\ r_z > 0,\ v > 0,\ w > 0,\ \Theta' > 0,$$

$$\overrightarrow{BA} = \mathbf{r},\ r_y < 0,\ r_z < 0,\ v < 0,\ w < 0,\ \Theta' < 0.$$

В атмосферных возмущениях синоптического масштаба, охватывающих всю Землю, межширотный обмен является энергообразующим процессом, если он происходит вдоль поверхностей, угол наклона которых меньше (обычный случай в атмосфере) угла наклона изэнтропических поверхностей. Количество кинетической энергии, генерируемой в единичном объеме за единицу времени, рассчитывается по формулам (11.14) или (11.14′). Эта кинетическая энергия образуется в результате уменьшения потенциальной энергии, обусловленного подъемом теплого воздуха и опусканием холодного. Более того, процесс межширотного обмена в наклонной плоскости влечет за собой возникновение потока тепла, меридиональная и вертикальная составляющие которого равны:

$$W_{ey} = c_{pa}\frac{\tilde{T}}{\bar{\Theta}}\bar{\rho}\,\overline{\Theta' v'} > 0, \quad W_{ez} = c_{pa}\frac{\tilde{T}}{\bar{\Theta}}\bar{\rho}\,\overline{\Theta' w'} > 0,$$

т. е. вертикальный поток тепла W_{ez} направлен вверх, а горизонтальный W_{ey} — к полюсу. Таким образом, вертикальный поток тепла имеет направление, противоположное направлению вертикального градиента $-\partial\bar{\Theta}/\partial z$ (<0) потенциальной температуры (противоградиентный поток), тогда как горизонтальный поток тепла и горизонтальный градиент потенциальной температуры $-\partial\bar{\Theta}/\partial y$ (>0) совпадают по направлению (градиентный поток).

Случай Iб

Изэнтропические поверхности наклонены в сторону экватора (горизонтальный градиент $-\partial\bar{\Theta}/\partial y$ потенциальной температуры направлен в сторону полюса), и угол наклона β траекторий воздушных масс больше угла наклона изэнтропических поверхностей ($\beta > \alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta < 0$).

Если в этом случае воздушная масса воздуха сместится из A в B, то ее температура будет ниже температуры окружающей среды, т. е. среда будет противодействовать восходящему движению и возвращать массу в начальное состояние. В случае смещения из B в A воздушная масса приобретает более высокую температуру, чем ее окружение, что также способствует возвращению массы в исходное состояние.

Таким образом, в этом случае ($\partial\overline{\Theta}/\partial z > 0$ и $\partial\overline{\Theta}/\partial y < 0$) имеем:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{r},\ r_y > 0,\ r_z > 0,\ v > 0,\ w > 0,\ \Theta' < 0,$$
$$\overrightarrow{BA} = \mathbf{r},\ r_y < 0,\ r_z < 0,\ v < 0,\ w < 0,\ \Theta' > 0.$$

Межширотный обмен в данном случае приводит к уничтожению кинетической энергии со скоростью, определяемой формулой (11.14), и порождает поток тепла, вертикальная составляющая W_{ez} которого направлена вниз (градиентный поток), а горизонтальная W_{ey} — к экватору (противоградиентный поток). Кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию, так что в этом случае движение синоптического масштаба является вынужденным движением. Если этот случай реализуется в некотором слое атмосферы, движение синоптического масштаба в этом слое происходит за счет кинетической энергии соседних слоев.

Случай IIa

Изэнтропические поверхности наклонены в сторону полюса (горизонтальный градиент $-\partial\overline{\Theta}/\partial y$ потенциальной температуры направлен в сторону экватора), и угол наклона β траекторий воздушных масс меньше по абсолютной величине угла наклона α изэнтропических поверхностей ($\alpha < \beta < 0$, $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta < 0$).

В этом случае ($\partial\overline{\Theta}/\partial z > 0$ и $\partial\overline{\Theta}/\partial y > 0$) имеем:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{r},\ r_y > 0,\ r_z < 0,\ v > 0,\ w < 0,\ \Theta' < 0,$$
$$\overrightarrow{BA} = \mathbf{r},\ r_y < 0,\ r_z > 0,\ v < 0,\ w > 0,\ \Theta' > 0.$$

Таким образом, межширотный обмен сопровождается образованием кинетической энергии со скоростью, определяемой по формуле (11.14), и появлением потока тепла, вертикальная составляющая W_{ez} которого направлена вверх (противоградиентный поток), а горизонтальная составляющая W_{ey} — в сторону экватора (градиентный поток).

Случай IIб.

Изэнтропические поверхности наклонены в сторону полюса (горизонтальный градиент $-\partial\overline{\Theta}/\partial y$ потенциальной температуры направлен в сторону экватора), и угол наклона β траекторий воздушных масс больше по абсолютной величине угла наклона α изэнтропических поверхностей ($\beta < \alpha < 0$, $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta > 0$).

В этом случае ($\partial\overline{\Theta}/\partial z > 0$ и $\partial\overline{\Theta}/\partial y > 0$) имеем:

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{r},\ r_y > 0,\ r_z < 0,\ v > 0,\ w < 0,\ \Theta' > 0,$$
$$\overrightarrow{BA} = \mathbf{r},\ r_y < 0,\ r_z > 0,\ v < 0,\ w > 0,\ \Theta' < 0,$$

Межширотный обмен в обсуждаемом случае уничтожает кинетическую энергию со скоростью, определенной формулой (11.14), и порождает поток тепла, вертикальная составляющая W_{ez} которого направлена вниз (градиентный поток), а горизонтальная — W_{ey} — к полюсу (противоградиентный поток). В этом случае, так же и в случае Iб, движения синоптического масштаба являются вынужденными движениями.

Случаи Iб и IIа до настоящего времени не наблюдались в атмосфере. Случай Iа реализуется в слое атмосферы, заключенном между поверхностью земли и уровнем около 10 км (этот слой содержит $^3/_4$ общей массы атмосферы), и приблизительно между 25 и 55 км (средняя и верхняя стратосфера, 2,5% общей массы атмосферы). Случай IIб реализуется в слое между 10 и 25 км (нижняя стратосфера и верхняя экваториальная тропосфера, 22,5% общей массы атмосферы) и, вполне вероятно, в слое между 55 и 80 км (мезосфера, около 1% общей массы атмосферы) [57, 136].

В тропосфере, а также в средней и верхней стратосфере крупномасштабные движения таковы, что потенциальная энергия как результат бароклинности атмосферы непрерывно преобразуется в кинетическую энергию. Таким образом поддерживаются возмущения синоптического масштаба.

В нижней стратосфере и верхней экваториальной тропосфере потенциально более холодные массы воздуха совершают восходящее движение в направлении экватора, тогда как потенциально более теплый воздух опускается в направлении полюса (рис. 11, случай IIб). Следовательно, экваториальная зона теряет тепло, тогда как субполярная зона его получает приблизительно в слое между 10 и 25 км. В этом слое крупномасштабные вихри непрерывно переносят тепло из низких широт в субполярные широты в направлении, противоположном меридиональному градиенту температуры (рис. 11, случай IIб). Таким путем поддерживаются низкие температуры в экваториальной зоне верхней тропосферы и нижней стратосферы вопреки источникам тепла в этих широтах ниже 25 км.

Вполне вероятно, что холодная полярная мезосфера летом также формируется под влиянием крупномасштабных систем типа IIб, хотя и здесь выше 25 км существует источник тепла.

12

Мелкомасштабные и крупномасштабные энергетические процессы

12.1. Динамика и энергетика систем погоды

Как было уже отмечено в главе 4, основное количество кинетической энергии заключено в макрометеорологической и микрометеорологической областях спектра, при этом количество кинетической энергии крупномасштабных движений (см. главу 11) во много раз превышает количество кинетической энергии мелкомасштабных движений (вынужденная и свободная конвекция; см. главы 9 и 10).

Поскольку количество кинетической энергии мезомасштабных движений составляет лишь чрезвычайно малую часть кинетической энергии движений всех масштабов, можно разделить спектр атмосферных динамических систем так, что сохраняются только крупномасштабные движения (см. главу 11).

Мелкомасштабные движения будут полностью отфильтрованы путем осреднения по периоду того же порядка, что и местное время существования мезомасштабных систем, которому соответствует плоский минимум в спектре энергии. Этот период не меньше 10 мин и не больше 3 ч. Изучение систем движения, оставшихся после такой операции осреднения, более точно, систем движения, относящихся к макрометеорологической области спектра, составляет главную задачу динамической метеорологии. Напомним, что скорость ветра, рассматриваемая в синоптической метеорологии, осреднена по периоду времени не менее 10 мин.

Полученные в главе 6 уравнение движения и уравнение энергии описывают движение системы именно макрометеорологического масштаба (см. п. 4.5). В этом частном случае черта означает операцию осреднения, определенную выше (или соответствующее пространственное осреднение). Уравнение среднего движения (6.2), соответствующее уравнение неразрывности (5.49), уравнение (6.11) или уравнение (7.18) турбулентной кинетической энергии и термодинамическое уравнение (6.18) или (7.17) [члены с $\tilde{\mathbf{v}}'$ могут быть отброшены в (6.11) и (6.18)], дополненные соответствующими граничными условиями, образуют замкнутую систему уравнений в частных производных, если тензор турбулентных напряжений, турбулентные потоки различных видов энергии и скорости преобразования турбулентной энергии могут быть выражены как функции средней скорости $\tilde{\mathbf{v}}$, давления $\bar{p}$ и плотности $\bar{\rho}$ [20]. К сожалению, наши знания о свойствах турбулентных движений недостаточны для того, чтобы установить такие связи для различных видов временного или пространственного осреднения метеорологических величин. Что касается турбулентных движений микрометеорологического масштаба, то только грубые предположения позволили связать тензор турбулентных напряжений и турбулентный поток тепла со средней скоростью ветра, температурой и влажностью (см. главы 9 и 10). Относительно турбулентных движений макрометеорологического масштаба в нашем распоряжении нет данных о системах движения, горизонтальные размеры которых меньше или сравнимы со средними расстояниями между метеорологическими станциями, так что размер самых малых систем движения, который мы можем изучать, в решающей степени зависит от плотности сети станций наблюдения. При современном состоянии сети адекватное изучение систем минимального размера, относящихся к макрометеорологической области спектра, невозможно. Соответственно известно очень мало о структуре турбулентных движений, горизонтальные размеры которых составляют несколько сотен километров (скажем, 300 км) или меньше, а также о взаимодействии этих движений с крупномасштабными системами. Здесь уместно напомнить, что на левом конце макрометеорологической области спектра расположены конвективные системы крупного размера, через посредство которых тепло поступает в атмосферу, главным образом в тропиках.

Следует также вспомнить, что в проблеме общей циркуляции атмосферы граничные условия заранее не предписываются, как обычно делается в механике жидкости. Достаточно надежно установлено, что общая циркуляция атмосферы в значительной степени контролируется взаимодействием атмосферы с земной поверхностью. Шероховатость и температура поверхности океана зависят от ветровых условий в прошлом и настоящем, оптические и термические свойства поверхности материков определяются прошлой и текущей погодой.

Введем новые обозначения средних величин:

$$\overline{\rho} \to \rho,\ \overline{p} \to p,\ \overline{\boldsymbol{P}} \to \boldsymbol{P},\ \tilde{\mathbf{v}} \to \mathbf{v},\ k_{\mathrm{m}} \equiv \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{v}})^2 \to k \equiv \frac{1}{2}\mathbf{v}^2,$$

$$\tilde{k}_{\mathrm{e}} \equiv \frac{1}{2}\{\overline{\rho(\mathbf{v}'')^2}/\overline{\rho}\} \to \mathscr{k},\ \tilde{e} \to e,\ -\overline{\rho\mathbf{v}''\mathbf{v}''} \to \boldsymbol{R}.$$

Здесь k — кинетическая энергия среднего движения (движений макрометеорологического участка спектра, или, согласно распространенной терминологии, движений синоптического масштаба); $\mathscr{k}$ — кинетическая энергия мелкомасштабной турбулентности (движений микрометеорологического участка спектра, или, согласно распространенной терминологии, механической и термической турбулентности); e — внутренняя энергия движений синоптического масштаба; $\boldsymbol{R} \equiv -\overline{\rho\mathbf{v}''\mathbf{v}''}$ — тензор напряжений Рейнольдса, обусловленных мелкомасштабной турбулентностью.

Будем также обозначать:

$$\rho\sigma \equiv \overline{p' \operatorname{div}\mathbf{v}''} - g\overline{\rho' w''},\ \rho\Delta_{\mathrm{m}} \equiv \overline{\boldsymbol{P}' \cdot \nabla\mathbf{v}''},\ \Delta \equiv \Delta_{\mathrm{m}} - \sigma,$$

$$\varkappa = \overline{\rho k_{\mathrm{e}}\mathbf{v}''},\ \chi \equiv -\overline{\mathbf{v}'' \cdot \boldsymbol{P}'} + \overline{p'\mathbf{v}''},\ \mathbf{W} \equiv \overline{\mathbf{W}} + \mathbf{W}_{\mathrm{e}}^{*},$$

где σ — количество внутренней энергии, трансформируемой в единичной массе воздуха за единицу времени в кинетическую энергию мелкомасштабной турбулентности; Δ_{m} (> 0) — количество кинетической энергии мелкомасштабной турбулентности, переходящей в тепло (внутреннюю энергию под влиянием молекулярной вязкости); $\varkappa$ и χ — потоки турбулентной кинетической энергии, обусловленные соответственно турбулентной диффузией и мелкомасштабными флуктуациями давления и вязких напряжений; $\mathbf{W}$ — общий поток тепла, обусловленный радиацией, теплопроводностью (молекулярные процессы играют роль лишь вблизи поверхности земли) и мелкомасштабной турбулентностью. С учетом этих новых обозначений уравнение движения (6.2), уравнение неразрывности (5.49) и уравнения энергии (6.3), (7.18) и (7.17) перепишем в виде:

$$(6.2) \to \rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \rho\mathbf{v} =$$

$$= -\nabla p + \operatorname{div}(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{R}) - \rho\nabla\phi, \tag{12.1}$$

$$(5.49) \to \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\mathbf{v} = 0, \tag{12.2}$$

$$(6.3) \to \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho k \mathbf{v} + p\mathbf{v} - (\boldsymbol{P} + \boldsymbol{R}) \cdot \mathbf{v}) =$$

$$= -(\boldsymbol{P} + \boldsymbol{R}) \cdot \nabla \mathbf{v} + p \operatorname{div} \mathbf{v} - g\rho w, \tag{12.3}$$

$$(7.18) \to \frac{\partial \rho \mathscr{k}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathscr{k} \mathbf{v} + \varkappa + \chi) = \boldsymbol{R} \cdot \nabla \mathbf{v} - \rho \Delta, \tag{12.4}$$

$$(7.17) \to \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho e \mathbf{v} + \mathbf{W}) = -p \operatorname{div} \mathbf{v} + \boldsymbol{P} \cdot \nabla \mathbf{v} + \rho \Delta, \tag{12.5}$$

где $\boldsymbol{P} \cdot \nabla \mathbf{v}$ (>0) — скорость диссипации (в единичном объеме) кинетической энергии движений синоптического масштаба в тепло,

$$\rho \Delta_e \equiv \boldsymbol{R} \cdot \nabla \mathbf{v} > 0 \tag{12.6}$$

есть скорость перехода той же энергии в энергию мелкомасштабной турбулентности; $\rho\Delta$ — скорость перехода кинетической энергии мелкомасштабных вихрей в тепло. Складывая левые и правые части уравнений (3.14) и (12.5), получаем уравнение баланса полной потенциальной энергии $e + \phi$ (см. п. 14.1):

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\rho(e + \phi)\} + \operatorname{div}\{\rho(e + \phi)\mathbf{v} + \mathbf{W}\} =$$

$$= -(p \operatorname{div} \mathbf{v} - g\rho w) + \boldsymbol{P} \cdot \nabla \mathbf{v} + \rho \Delta, \tag{12.7}$$

где $p \operatorname{div} \mathbf{v}$ и $g\rho w$ — скорости перехода внутренней и потенциальной энергии в кинетическую энергию движений синоптического масштаба.

Наконец, складывая левые и правые части уравнений (12.3) — (12.5), находим уравнение баланса полной энергии $e = \phi + \mathscr{k} + k$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\rho(e + \phi + \mathscr{k} + k)\} + \operatorname{div}\{\rho(e + \phi + \mathscr{k} + k)\mathbf{v} +$$

$$+ p\mathbf{v} - (\boldsymbol{P} + \boldsymbol{R}) \cdot \mathbf{v} + \varkappa + \chi + \mathbf{W}\} = 0. \tag{12.8}$$

Это уравнение баланса содержит важный результат для движений макрометеорологического участка спектра (см. п. 12.3). Подчеркнем еще раз, что вошедшие в уравнения (12.1) — (12.7) величины ρ, p, e, $\mathbf{v}, \cdots$ представляют собой сглаженные (осредненные) величины; таким образом, они не содержат флуктуаций, относящихся к микрометеорологическому участку спектра.

Уравнение баланса (12.5) можно также записать в двух классических формах уравнения термодинамики:

$$\rho \frac{de}{dt} + p \operatorname{div} \mathbf{v} = \rho(Q_E + \Delta) + \boldsymbol{P} \cdot \nabla \mathbf{v} \tag{12.9}$$

или

$$\rho \frac{dh}{dt} - \frac{dp}{dt} = \rho (Q_E + \Delta) + \boldsymbol{P} \cdot \nabla \mathbf{v}, \tag{12.9'}$$

где h — удельная энтальпия ($h = e + p\alpha$, $\alpha = \rho^{-1}$ — удельный объем) и

$$\rho Q_E = -\operatorname{div} \mathbf{W} \tag{12.10}$$

есть приток тепла (от окружающей среды) к единичному объему за единицу времени. Напомним, что в произвольной точке пространства и в любой момент времени

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_\Sigma + \mathbf{W}_T + \mathbf{W}_S + \mathbf{W}_L + \mathbf{W}_d, \tag{12.11}$$

где $\mathbf{W}_\Sigma$ — поток солнечной радиации; $\mathbf{W}_T$ — поток инфракрасной (длинноволновой) радиации от земной поверхности и атмосферы; $\mathbf{W}_S = c_{pa}\overline{\rho T''\mathbf{v}''}$ — мелкомасштабный турбулентный поток явного тепла; $\mathbf{W}_L = L_v\overline{\rho\varepsilon_v''\mathbf{v}''}$ — мелкомасштабный турбулентный поток скрытого тепла; $\mathbf{W}_d$ — поток тепла, обусловленный молекулярной теплопроводностью. По сравнению с турбулентным потоком $\mathbf{W}_S + \mathbf{W}_L$ поток $\mathbf{W}_d$ всюду очень мал, за исключением тонкого слоя вблизи земной поверхности, где

$$|\mathbf{W}_d| \gg |\mathbf{W}_S + \mathbf{W}_L|.$$

Для движений синоптического масштаба вязкие напряжения очень малы по сравнению с турбулентными напряжениями:

$$|\boldsymbol{P}| \ll |\boldsymbol{R}|; \tag{12.12}$$

исключение составляет вязкий подслой вблизи земной поверхности или аэродинамически гладкая поверхность, где $|\boldsymbol{P}| \gg |\boldsymbol{R}|$ (см. главу 9). Таким образом, выше очень тонкого вязкого подслоя можно всюду в уравнениях (12.1) — (12.5), (12.9) и (12.9') спокойно отбросить члены, содержащие вязкие напряжения.

Общее количество тепла $\int\limits_{\text{atm}} \rho Q_E \, d\tau$, поступающего за единицу времени к атмосфере, можно представить в форме уравнения баланса. Эта скорость поступления тепла к атмосфере в действительности представляет собой алгебраическую сумму следующих величин. На верхней границе атмосферы: приходящая солнечная радиация *1* минус уходящая отраженная солнечная радиация *2* (прямая и рассеянная) и уходящая инфракрасная радиация *3*. На земной поверхности: уходящая инфракрасная радиация земной поверхности *4* минус поглощаемая земной поверхностью солнечная радиация *5* и инфракрасная радиация атмосферы *6* плюс мелкомасштабные турбулентные потоки *7* явного и скрытого тепла, которые переносят в атмосферу часть тепла, запасенного сушей и водой в результате поглощения коротковолновой и длинноволновой радиации (сумма 5 + 6) (рис. 12). Другая часть этой суммы поступает в глубь суши и воды, но затем вновь возвращается

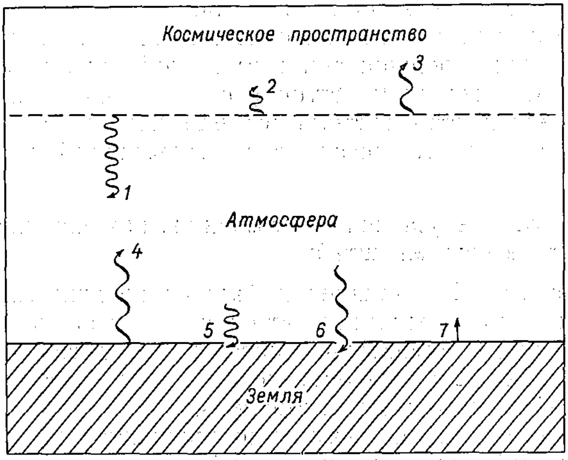

Рис. 12. Средний годовой баланс тепла земной поверхности и атмосферы.

1, 2, 5 — потоки коротковолновой (солнечной) радиации; *3, 4, 6* — потоки длинноволновой радиации; *7* — турбулентные потоки явного и скрытого тепла; *1*) 100%, *2*) 34, *3*) 66, *4*) 127, *5*) 47, *6*) 113, *7*) 33%.

в атмосферу в виде инфракрасного потока *4*, излучаемого земной поверхностью [134]. Количество тепла, переносимого в твердой почве вниз или вверх, пренебрежимо мало́ (за исключением районов вулканической деятельности), и поэтому нами учитываться не будет. Известную роль в отдельных районах может играть энергия разрядов молний. Поток радиации *2*, выраженный в процентах от потока *1*, представляет собой так называемое планетарное альбедо Земли. Годовые значения солнечной радиации *1—2*, поглощенной системой земная поверхность — атмосфера, уменьшаются от экватора к полюсам. Такая же (но только более слабая) зависимость от широты справедлива в отношении уходящего потока инфракрасной радиации *3*. Как следствие этих зависимостей поглощенная солнечная радиация *1—2* превышает уходящую радиацию *3* в низких широтах (где наблюдается радиационное нагревание: *1—2—3* > 0); в высоких широтах наблюдается обратное соотношение между поглощенной *1—2* и уходящей *3* радиацией (здесь происходит радиационное выхолаживание). Несмотря на многочисленные попытки определить в обоих полушариях различные составляющие теплового баланса атмосферы и деятельных слоев суши и океана (приток радиации, усваиваемой системой; потоки лучистой энергии на земной поверхности и на верхней границе атмосферы; тепло, затрачиваемое на испарение и выделяющееся при конденсации; запасы тепла в океане, атмосфере и почве; перенос тепла от земной поверхности к атмосфере; притоки энергии в атмосфере и океане), наши знания о балансе энергии этой системы все еще далеки от удовлетворительного состояния (см. обзор этих исследований в [58]).

12.2. Приближенное уравнение термодинамики для движений синоптического масштаба

Общая форма (12.8) уравнения баланса энергии малопригодна для исследования энергетики атмосферы, особенно энергетики общей циркуляции атмосферы. Поставим перед собой цель упростить уравнение (12.8) с учетом некоторых характерных особенностей общей циркуляции атмосферы.

В классической термодинамике не проводится различия между явной и скрытой формами внутренней энергии. Именно в таком виде записано основное уравнение (3.9), которое затем широко использовано в книге [см. уравнения (3.11), (6.18), (7.17) и (12.5)]. Однако такое различие следует делать, поскольку в системе земля—океан—атмосфера наблюдается переход внутренней энергии из явной в скрытую форму, когда происходит испарение воды и таяние льда, и обратный переход при конденсации водяного пара и замерзании воды. В процессе испарения океан теряет внутреннюю энергию в явной форме, а атмосфера получает внутреннюю энергию в скрытой форме. Когда затем водяной пар конденсируется в атмосфере, внутренняя энергия переходит из скрытой в явную форму.

При изучении общей циркуляции атмосферы скрытая форма внутренней энергии часто трактуется не как форма энергии, а как скрытое тепло. В таком случае внутренняя энергия прибавляется к атмосфере не тогда, когда происходит испарение воды с земной поверхности, а лишь тогда, когда конденсируется водяной пар в атмосфере. Теперь мы учтем это обстоятельство и в согласии с ним трансформируем основное уравнение (3.9).

С учетом определения $\rho h = \rho e + p$ удельной энтальпии h уравнение (3.9) перепишем в виде

$$\rho \frac{de}{dt} + p \operatorname{div} \mathbf{v} = \rho \left(\frac{de}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} \right) = \rho \frac{dh}{dt} - \frac{dp}{dt} =$$

$$= \rho \sum_{i=1}^{4} \left(\tau_i \frac{dh_i}{dt} + h_i \frac{d\tau_i}{dt} \right) - \frac{dp}{dt} = \rho Q + \boldsymbol{P} \cdot \nabla \mathbf{v}, \qquad (12.13)$$

где индексы 1, 2, 3, 4 обозначают составные части атмосферного воздуха, а именно: сухой воздух, водяной пар, жидкую воду и лед (см. также главу 7); τ_i — удельное содержание $\left(\sum_{i=2}^{4} \tau_i = 1 - \right.$ $\left. - \tau_1 = \text{const} \right)$; h_i — удельная энтальпия $\left(h = \sum_{i=1}^{4} \tau_i h_i \right)$; α_i — удельный объем $\left(\alpha = \sum_{i=1}^{4} \tau_i \alpha_i \right)$ i-той составляющей; $\rho Q = -\operatorname{div} (\mathbf{W}_R + \mathbf{W}_d)$ при $\mathbf{W}_R = \mathbf{W}_\Sigma + \mathbf{W}_T$.

Однако в реальных условиях атмосферы $\tau_1 \approx 1$, $\tau_2, \tau_3, \tau_4 \ll 1$, и с приемлемым приближением

$$\alpha \approx \alpha_1, \quad \sum_{i=1}^{4} \tau_i \frac{dh_i}{dt} \approx \frac{dh_1}{dt}.$$

Вводя эти упрощения в уравнение (12.13), найдем:

$$Q + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{P} \cdot \nabla \mathbf{v} \approx \frac{dh_1}{dt} - \alpha_1 \frac{dp}{dt} - Q_L = \frac{de_1}{dt} + p \frac{d\alpha_1}{dt} - Q_L,$$

$$Q + \frac{1}{\rho} \boldsymbol{P} \cdot \nabla \mathbf{v} \approx c_{pa} \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} - Q_L = c_{va} \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} - Q_L,$$

где c_{va} и c_{pa} — удельные теплоемкости сухого воздуха при постоянном объеме и давлении;

$$Q_L \equiv - \sum_{k=2}^{4} h_k \frac{d\tau_k}{dt}$$

есть тепло, выделяющееся (или затрачиваемое) за единицу времени в процессе фазовых переходов в единичной массе воздуха; $h_1 \equiv h_a$ $(\equiv c_{pa} T + \text{const})$ и $e_1 \equiv e_a$ $(\equiv c_{va} T + \text{const})$ — удельная энтальпия и удельная внутренняя энергия сухого воздуха.

Скорость нагревания Q_L положительная, если происходит конденсация (сублимация) водяного пара или замерзание воды, и отрицательна, если испаряется вода или тает лед. Таким образом, с термодинамической точки зрения реальную атмосферу можно считать сухой при условии, что учтены притоки тепла, обусловленные фазовыми переходами воды [134].

Вводя потенциальную температуру Θ, запишем уравнение энергии в следующем приближенном виде:

$$\rho \frac{c_{\mathrm{pa}} T}{\Theta} \frac{d\Theta}{dt} \approx \rho c_{\mathrm{va}} \frac{dT}{dt} + p \operatorname{div} \mathbf{v} \approx \rho c_{\mathrm{pa}} \frac{dT}{dt} - \frac{dp}{dt} \approx$$
$$\approx \rho (Q + Q_{\mathrm{L}}) + \boldsymbol{P} \cdot \nabla \mathbf{v}. \qquad (12.14)$$

Такие же рассуждения, которые позволили перейти от уравнения (3.9) к (12.14), приводят к следующим преобразованиям уравнений баланса:

$$(3.11) \to \frac{\partial}{\partial t} (\rho e_{\mathrm{a}}) + \operatorname{div} (\rho e_{\mathrm{a}} \mathbf{v} + \mathbf{W}) = -p \operatorname{div} \mathbf{v} +$$
$$+ \boldsymbol{P} \cdot \nabla \mathbf{v} + \rho Q_{\mathrm{L}}, \qquad (12.15)$$

где $\mathbf{W} \equiv \mathbf{W}_{\mathrm{R}} + \mathbf{W}_{\mathrm{d}}, \quad \rho Q = -\operatorname{div} \mathbf{W}$,

$$(6.18) \to \frac{\partial}{\partial t} (\overline{\rho e_{\mathrm{a}}}) + \operatorname{div} (\overline{\rho e_{\mathrm{a}}}\, \tilde{\mathbf{v}} + c_{\mathrm{pa}} \overline{\rho T'' \mathbf{v}''} + \overline{\mathbf{W}} + \overline{\boldsymbol{P}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}') =$$
$$= -\bar{p} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} + \overline{\boldsymbol{P}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} + \overline{\mathbf{v}'' \cdot \nabla p'} + g \overline{\rho' w''} +$$
$$+ \overline{\boldsymbol{P}' \cdot \nabla \mathbf{v}''} + \overline{\rho \mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}' + \overline{\rho Q_{\mathrm{L}}}, \qquad (12.16)$$

$$(7.17) \to \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho e_{\mathrm{a}}} + \operatorname{div} (\overline{\rho e_{\mathrm{a}}}\, \tilde{\mathbf{v}} + c_{\mathrm{pa}} (\tilde{T}/\tilde{\Theta}) \bar{\rho} \overline{\Theta'' \mathbf{v}''} + \overline{\mathbf{W}}) =$$
$$= -\bar{p} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} + \overline{\boldsymbol{P}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} - \overline{p' \operatorname{div} \mathbf{v}''} + g \overline{\rho' w''} +$$
$$+ \overline{\boldsymbol{P}' \cdot \nabla \mathbf{v}''} + \overline{\rho Q_{\mathrm{L}}}. \qquad (12.17)$$

Переписывая, наконец, уравнение (12.17) с учетом новых обозначений, введенных в п. 12.1, получаем вместо (12.15) следующее приближенное уравнение термодинамики для движений синоптического масштаба:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e_{\mathrm{a}}) + \operatorname{div} (\rho e_{\mathrm{a}} \mathbf{v} + \mathbf{W}_{\mathrm{R}} + \mathbf{W}_{\mathrm{C}}) =$$
$$= -p \operatorname{div} \mathbf{v} + \boldsymbol{P} \cdot \nabla \mathbf{v} + \rho \Delta + \rho Q_{\mathrm{L}} \quad \text{или}$$
$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e_{\mathrm{a}}) + \operatorname{div} (\rho e_{\mathrm{a}} \mathbf{v}) = -p \operatorname{div} \mathbf{v} + \boldsymbol{P} \cdot \nabla \mathbf{v} + \rho (\Delta + Q), \qquad (12.5')$$

где $e_a \equiv (c_{va}T + \text{const})$ — удельная внутренняя энергия сухого воздуха;

$$\mathbf{W}_R = \mathbf{W}_\Sigma + \mathbf{W}_T, \quad \mathbf{W}_C = \mathbf{W}_S + \mathbf{W}_d; \qquad (12.11')$$

$\mathbf{W}_R$ — радиационный поток тепла и $\mathbf{W}_C$ — турбулентный и молекулярный поток тепла;

$$\rho Q_R = -\operatorname{div} \mathbf{W}_R, \quad \rho Q_C = -\operatorname{div} \mathbf{W}_C;$$

Q_R и Q_C — соответствующие скорости удельных притоков тепла;

$$Q \equiv Q_R + Q_C + Q_L. \qquad (12.10')$$

Величина Q представляет собой приток тепла, поступающего к единице массы воздуха за единицу времени от окружающей среды (за вычетом притока тепла, обусловленного трением).

Уравнение энергии (12.5′) допускает другую форму записи:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho h_a) + \operatorname{div}(\rho h_a \mathbf{v}) = \frac{dp}{dt} + \boldsymbol{P} \cdot \nabla \mathbf{v} + \rho(\Delta + Q), \qquad (12.5'')$$

где $h_a (\equiv c_{pa}T + \text{const})$ — удельная энтальпия сухого воздуха. Приближенная форма уравнения баланса полной потенциальной энергии следующая:

$$(12.7) \to \frac{\partial}{\partial t}(\rho(e_a + \phi)) + \operatorname{div}\{\rho(e_a + \phi)\mathbf{v}\} =$$
$$= -p \operatorname{div} \mathbf{v} + g\rho w + \boldsymbol{P} \cdot \nabla \mathbf{v} + \rho(\Delta + Q). \qquad (12.7')$$

Наконец, складывая левые и правые части уравнений (12.3), (12.4) и (12.7′), получаем приближенную форму уравнения баланса полной энергии

$$(12.8) \to \frac{\partial}{\partial t}\{\rho(e_a + \phi + \mathscr{k} + k)\} + \operatorname{div}\{\rho(e_a + \phi + \mathscr{k} + k)\mathbf{v} +$$
$$+ p\mathbf{v} - (\boldsymbol{P} + \boldsymbol{R}) \cdot \mathbf{v} + \varkappa + \chi\} = \rho Q, \qquad (12.8')$$

где всегда можно положить $\phi \approx gz$.

12.3. Энергетика общей циркуляции

Интегрируя уравнение (12.8′) по всей атмосфере и по времени от t_1 до t_2, считая, что промежуток времени $t_2 - t_1$ велик по сравнению с локальным временем существования синоптических систем погоды, а также замечая, что полная энергия всей атмосферы

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{atm} \rho(e_a + \phi + \mathscr{k} + k)\, d\tau$$

почти постоянна, получаем

$$-\int_{t_1}^{t_2} dt\left[\oint_S \{\rho(e_a+\phi+\Bbbk+k)+p\} v_N dS-\oint_S \{(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{R})\cdot\mathbf{v}\}_N dS+\right.$$
$$\left.+\oint_S (\varkappa+\chi)_N dS\right]=\int_{t_1}^{t_2} dt\int_{\text{atm}} \rho Q\, d\tau, \qquad (12.18)$$

где N — внешняя нормаль к земной поверхности S [134].

Левая часть уравнения (12.18) представляет собой количество энергии, которое атмосфера передает гидросфере и литосфере за интервал времени (t_1, t_2), а правая — количество тепла, поступающего в атмосферу из окружающей среды за тот же интервал времени (нагревание атмосферы при отсутствии трения). Левая часть (12.18) — следствие подвижности земной поверхности (движущиеся поверхностные волны и течения в океанах, эрозия почвы на континентах); это работа, которую совершает атмосфера по отношению к земной поверхности. Левая часть (12.18) положительна, поскольку хорошо известно, что атмосфера передает океанам механическую энергию, необходимую для поддержания морских волн и течений, а под влиянием ветра происходит эрозия твердой поверхности земли. Отсюда следует, что и правая часть (12.18) также положительна, т. е. атмосфера получает тепло от окружающей среды.

Количество механической энергии, затрачиваемой на эрозию почвы, пренебрежимо мало́. Механическая энергия, передаваемая атмосферой океанам, составляет существенную часть энергии океанов, однако эта энергия очень мала по сравнению с энергией атмосферы. Поэтому приемлемо предположение о возможности пренебрежения левой частью уравнения (12.18). Это предположение равносильно допущению, что земная поверхность представляет собой поверхность твердого тела, на которой обращается в нуль не только нормальная составляющая v_N, но и тангенциальная составляющая скорости ветра (в планетарном масштабе атмосфера прилипает к земной поверхности). Таким образом,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt\int_{\text{atm}} \rho Q\, d\tau\approx 0, \qquad (12.19)$$

где $t_2-t_1>0$ велико по сравнению с локальным временем существования возмущений синоптического масштаба. Следовательно, атмосфера за большие интервалы времени получает тепла столько же, сколько его теряет [20, 134]. За такие промежутки времени результирующая скорость нагревания атмосферы равна скорости нагревания под влиянием трения.

Можно, таким образом, заключить, что если гипотеза жесткой поверхности земли приемлема, то атмосферу за достаточно большой интервал времени можно рассматривать как систему, изолированную не только механически, но и термически.

Этот важный результат, однако, не означает, что крупномасштабные движения атмосферы можно считать адиабатическими. Действительно, интегральное условие (12.19) по необходимости предполагает, что знак Q изменяется в пространстве и во времени ($Q \gtrless 0$). Соответственно крупномасштабные движения порождаются и поддерживаются благодаря нагреванию ($Q > 0$) или охлаждению ($Q < 0$), но не под влиянием результирующего притока тепла $\int\limits_{\text{atm}} \rho Q\, d\tau$, среднее значение которого для интервалов времени, значительно превосходящих время существования синоптических систем, близко к нулю. Общая циркуляция атмосферы, таким образом, существует благодаря наличию источников ($Q > 0$) и стоков ($Q < 0$) тепла, распределение которых в пространстве и времени таково, что выполняется интегральное соотношение (12.19).

Более того, поскольку общая масса воды в атмосфере, осредненная за длительный интервал времени, практически постоянна, то это означает, что масса испаряющейся с земной поверхности воды за этот интервал времени равна массе воды, выпадающей на землю в виде осадков. С другой стороны, водяной пар, переносимый в атмосфере от земной поверхности, не вносит вклада в баланс тепла до тех пор, пока не произойдет конденсация водяного пара с последующим выпадением осадков на земную поверхность. Отсюда следует, что среднее (за большой интервал времени) количество скрытого тепла, выделяющегося в атмосфере, определяется количеством воды и льда, выпадающих на земную поверхность в виде осадков. Следовательно, осредненная за тот же интервал времени скорость нагревания всей атмосферы под влиянием скрытого тепла практически постоянна, т. е.

$$-\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\text{atm}} \rho\,(Q_R + Q_C)\, d\tau \approx \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\text{atm}} \rho Q_L\, d\tau \approx \text{const} > 0. \quad (12.19')$$

Хотя $Q_E \neq Q$ [величины Q_E и Q определены соотношениями (12.10) и (12.10′) в п. п. 12.1 и 12.2 соответственно], однако по-тем же самым причинам

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\text{atm}} \rho Q_{\text{E}}\, d\tau \approx 0. \tag{12.19''}$$

С одной стороны, атмосфера — механически и термически изолированная система (при условии, что рассматривается в глобальном масштабе и за большой интервал времени $t_2 - t_1$), а с другой — средние (за тот же интервал времени) значения четырех видов энергии ϕ, k, $\not{k}$ и e_a в атмосфере практически постоянны. Эти факты имеют важные следствия для энергетики движений синоптического масштаба.

Прежде всего, интегрируя уравнение (12.4) по всей атмосфере и по времени от t_1 до t_2, с учетом неравенства (12.6) получаем

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\text{atm}} \rho\Delta_{\text{e}}\, d\tau = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\text{atm}} \rho\Delta\, d\tau > 0. \tag{12.20}$$

В случае движений синоптического масштаба скорость перехода $\Delta \equiv \Delta_{\text{m}} - \sigma$ кинетической энергии мелкомасштабной турбулентности во внутреннюю энергию играет, как будет показано ниже, важную роль в общей циркуляции. Известно, что во всех случаях $\Delta_{\text{m}} > 0$. Скорость перехода σ, однако, может быть как положительной, так и отрицательной. В действительности σ представляет собой сумму двух членов: один из них описывает влияние неадиабатических эффектов (свободная конвекция или термическая турбулентность) и всегда положителен, другой же — влияние адиабатических процессов смешения (вынужденная конвекция или механическая турбулентность), знак его зависит от гидростатической устойчивости. Обычно считают, что

$$\Delta \equiv \Delta_{\text{m}} - \sigma > 0. \tag{12.21}$$

Это предположение представляется достаточно обоснованным. Однако в дневное время суток, особенно в нижнем слое атмосферы, неравенство (12.21) может местами нарушаться. Заметим, что из неравенства (12.21) следует неравенство (12.20), однако обратное заключение не всегда справедливо.

Далее, интегрируя (12.5′) по пространству—времени, получаем

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\text{atm}} p\,\text{div}\,\mathbf{v}\, d\tau = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\text{atm}} -\mathbf{v}\cdot\nabla p\, d\tau =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\text{atm}} (\rho\Delta + \boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v})\, d\tau > 0, \tag{12.22}$$

при этом приняты во внимание соотношения (12.19), (12.6) и (3.3). Таким образом, работа расширения во всей атмосфере за большие интервалы времени должна быть положительна для того, чтобы произвести количество кинетической энергии, достаточное для компенсации потерь кинетической энергии под влиянием трения, а потому расширение ($\operatorname{div} \mathbf{v} > 0$) должно происходить при более высоком давлении, чем сжатие ($\operatorname{div} \mathbf{v} < 0$), или, другими словами, силы давления должны совершать работу [20, 134].

Наконец, интегрируя уравнения (12.3) и (12.7′) по тому же пространству—времени, найдем количество $\mathscr{K}$ кинетической энергии, генерируемой в движениях синоптического масштаба за интервал времени $t_2 - t_1$:

$$\mathscr{K} \equiv \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\text{atm}} (p \operatorname{div} \mathbf{v} - g\rho w)\, d\tau = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\text{atm}} (\rho\Delta_e + \boldsymbol{P} \cdot \nabla \mathbf{v})\, d\tau =$$
$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\text{atm}} (\rho\Delta + \boldsymbol{P} \cdot \nabla \mathbf{v})\, d\tau > 0, \qquad (12.23)$$

при этом учтены неравенства (3.3) и (12.6). Неравенство (12.23) указывает на существование в атмосфере динамического процесса (синоптического масштаба), обеспечивающего переход потенциальной и внутренней энергии в кинетическую энергию. Более того, в согласии с интегральным соотношением (12.19) величина $\mathscr{K}$ не зависит от глобального притока тепла к атмосфере. Количество кинетической энергии $\mathscr{K}$, генерируемое за большие интервалы времени, компенсирует диссипацию кинетической энергии в тепло под влиянием трения. Вследствие этого среднее за большой интервал времени значение кинетической энергии во всей атмосфере практически постоянно и составляет около $3 \cdot 10^{17}$ кДж. Заметим, что значение $\mathscr{K}$, поделенное на $t_2 - t_1$ и площадь $4\pi a^2$ земной поверхности, может служить мерой интенсивности общей циркуляции [47].

Попытаемся теперь выяснить, какие динамические процессы ответственны за производство кинетической энергии движений синоптического масштаба. С этой целью возвратимся к уравнению (12.5″) и проинтегрируем его по пространству—времени в указанном выше смысле. С учетом неравенства (12.23), а также того факта, что за большой интервал времени полная энтальпия $\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\text{atm}} \rho h_a\, d\tau$, равно как и полная внутренняя энергия атмосферы, практически постоянна, получаем

$$\mathscr{K} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\text{atm}} (\rho\Delta + \boldsymbol{P}\cdot\nabla\mathbf{v})\, d\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\text{atm}} -\alpha \frac{dp}{dt}\, dm > 0, \quad (12.24)$$

где $dm = \rho\, d\tau$ — масса элементарного объема $d\tau$.

Согласно (12.12), членами, содержащими вязкие напряжения, в уравнениях (12.22)—(12.24) можно пренебречь. Из этого вполне приемлемого упрощения следует, что количество кинетической энергии, генерируемое в движениях синоптического масштаба за большой интервал времени, очень близкó к тому количеству кинетической энергии, которое переходит во внутреннюю энергию мелкомасштабных вихрей. Таким образом,

$$\mathscr{K} \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\text{atm}} (p \operatorname{div} \mathbf{v} - g\rho w)\, d\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\text{atm}} -\alpha \frac{dp}{dt}\, dm \approx$$

$$\approx \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\text{atm}} \rho\Delta_e\, d\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\text{atm}} \rho\Delta\, d\tau > 0. \quad (12.25)$$

Это уравнение показывает, что величина Δ служит характерным параметром энергетики крупномасштабных систем движения. Количество кинетической энергии $\int_0^\infty \rho\, \Delta dz$, диссипируемой в тепло в вертикальном столбе единичного сечения (1 м^2), составляет несколько ватт на квадратный метр (согласно оценкам, колеблется между 2 и 5 Вт/м^2), в то время как среднее по Земле значение притока солнечной радиации к системе земная поверхность — атмосфера равно примерно 200 Вт/м^2. Отсюда следует, что $|Q| \gg \Delta$.

Из (12.25) и уравнений энергии (12.3), (12.4) и (12.7′), в которых членами, содержащими тензор вязких напряжений $\boldsymbol{P}$, пренебрегаем, можно заключить, что, как правило, потенциальная и внутренняя энергия переходит в случае движений синоптического масштаба в кинетическую энергию упорядоченных движений, связанных с системами погоды, а затем кинетическая энергия упорядоченного движения постепенно деградирует в кинетическую энергию мелкомасштабной турбулентности, которая в свою очередь диссипирует в тепло (внутреннюю энергию) с той же самой средней скоростью (рис. 13).

Замечая, что с очень хорошим приближением элементарная масса dm равна $(a^2 \cos\varphi/g)\, d\lambda\, d\varphi\, dp$ (см. п. 14.1), на основании неравенства (12.24) можем заключить, что в целом по атмосфере и за большие интервалы времени коэффициенты корреляции между α и dp/dt на изобарических поверхностях меньше нуля, т. е. отрицательным и положительным значениям dp/dt соответствуют, как правило, большие и малые значения удельного объема α на изобарических поверхностях. Поскольку величина

$$(-1/|\nabla p|)\,(dp/dt)$$

представляет собой скорость смещения воздуха относительно изобарической поверхности, то из неравенства (12.24) следует, что теплый воздух (большие значения α) перемещается, как правило, вверх, а холодный воздух (малые значения α) — вниз

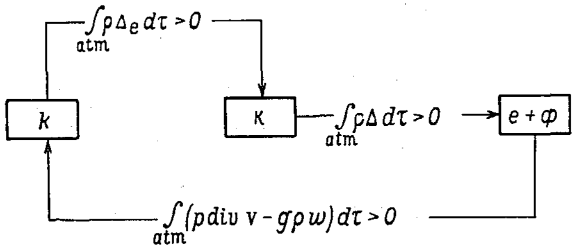

Рис. 13. Преобразования энергии в атмосфере, обусловленные мелкомасштабной турбулентностью.

относительно изобарической поверхности. Наблюдения подтверждают это заключение. Такое смещение относительно изобарической поверхности воздушных масс (синоптического масштаба) в поле силы тяжести представляет собой динамический процесс, способствующий возникновению кинетической энергии движений этого масштаба. Таким образом, кинетическая энергия образуется тогда, и только тогда, когда существуют контрасты плотности или температуры на изобарических поверхностях. Интенсивность этого бароклинного процесса производства кинетической энергии определяется величиной $\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{atm} \Delta\, dm$ перехода кинетической энергии в тепло под влиянием мелкомасштабных движений.

В действительности кинетическая энергия движений синоптического масштаба возникает вследствие перехода потенциальной и внутренней энергии в кинетическую энергию. Проблема образования потенциальной и внутренней энергии (или полной потенциальной энергии) — одна из нерешенных основных проблем динамики атмосферы (см. п. 14.2).

Запишем уравнение термодинамики (12.5′), пренебрегая в нем тензором вязких напряжений $\boldsymbol{P}$, в трех различных формах:

$$c_{\text{pa}}(p/p_0)^{R_{\text{a}}/c_{\text{pa}}}\frac{d\Theta}{dt}=Q+\Delta,$$

$$c_{\text{pa}}\frac{d\Theta}{dt}=(p_0/p)^{R_{\text{a}}/c_{\text{pa}}}(Q+\Delta),$$

$$c_{\text{pa}}\frac{d\ln\Theta}{dt}=\frac{Q+\Delta}{T}=\frac{ds_{\text{a}}}{dt}.$$

Интегрируя эти уравнения по всей атмосфере и по большому интервалу времени $(t_1,\ t_2)$, с учетом соотношений (12.19) и (12.23) получаем:

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\int\limits_{\text{atm}}c_{\text{pa}}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{R_{\text{a}}/c_{\text{pa}}}\frac{d\Theta}{dt}dm=\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\int\limits_{\text{atm}}c_{\text{pa}}T\frac{d\ln\Theta}{dt}dm=$$

$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\int\limits_{\text{atm}}(Q+\Delta)\,dm\approx\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\int\limits_{\text{atm}}\Delta\,dm>0, \tag{12.26}$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\int\limits_{\text{atm}}-Q\,(1/p)^{R_{\text{a}}/c_{\text{pa}}}dm=$$

$$=\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\int\limits_{\text{atm}}\Delta\,(1/p)^{R_{\text{a}}/c_{\text{pa}}}dm>0, \tag{12.27}$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\int\limits_{\text{atm}}\frac{-Q}{T}dm\approx\int\limits_{t_1}^{t_2}dt\int\limits_{\text{atm}}\frac{\Delta}{T}dm>0. \tag{12.28}$$

Осредненные за большие интервалы времени величины $\int\limits_{\text{atm}}\Theta\,dm$ и $\int\limits_{\text{atm}}\ln\Theta\,dm$ постоянны.

Из этих интегральных соотношений при условии, что реальная атмосфера заменена сухой, следует:

1) потенциальное нагревание ($d\Theta/dt>0$ или $Q+\Delta>0$) происходит в среднем при более высоком давлении, чем потенциальное охлаждение ($d\Theta/dt<0$ или $Q+\Delta<0$);

2) увеличение энтропии ($d\Theta/dt>0$) происходит в среднем при более высокой температуре, чем ее уменьшение ($d\Theta/dt<0$);

3) нагревание ($Q>0$) атмосферы происходит в среднем при более высоких температуре и давлении, чем охлаждение ($Q<0$);

4) увеличение энтропии, обусловленное нагреванием под влиянием трения, скажем, в результате перехода кинетической энергии в тепло [правая часть (12.28)], в среднем компенсируется уменьшением энтропии под влиянием распределения источников ($Q > 0$) и стоков ($Q < 0$) тепла в атмосфере [20, 134].

12.4. Трансформация энергии в общей циркуляции атмосферы

С помощью первой операции осреднения была отфильтрована мелкомасштабная турбулентность, но при этом появился как плата за осреднение тензор турбулентных напряжений $\boldsymbol{R}$ — тензор напряжений Рейнольдса. Были также получены основные уравнения (12.1)—(12.5) динамики и энергетики систем движения, принадлежащих к макрометеорологической области спектра. После первого осреднения была введена вторая операция осреднения по большому интервалу времени или по объему большой горизонтальной протяженности. Как следствие этой второй операции осреднения появились турбулентные напряжения другого рода. В частности, вводя зональное осреднение (средние значения по кругу широты, см. главу 11), мы получили возможность отделить системы движения самого крупного размера от всех остальных крупномасштабных систем движения. Соответствующий тензор крупномасштабных турбулентных напряжений представляет собой тензор Джефриса $\boldsymbol{J} = -\overline{\rho \mathbf{v}''\mathbf{v}''}$, где $\mathbf{v}'' = \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}$ — крупномасштабная флуктуация скорости. Важная роль напряжения $-\overline{\rho u''v''}$, являющегося наиболее значительной компонентой тензора $\boldsymbol{J}$, впервые была подмечена Джефрисом в 1926 г. (см. [32]).

Зональные значения $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$, $\bar{p}$ и $\bar{\rho}$ составляющих скорости u, v, w, давления p и плотности ρ не зависят от долготы. Они характеристики движения самого крупного размера. Это движение в действительности представляет собой круговой вихрь, симметричный по отношению к оси вращения Земли; его линии тока совпадают с параллелями и движутся со скоростью $(0, \tilde{v}, \tilde{w})$, одинаковой на всех долготах (при фиксированных широте φ, высоте z и времени t). Скорость движения в меридиональной плоскости мала по сравнению со скоростью движения $\tilde{u}$ вдоль круга широты (см. п. 11.2).

Если зональное осреднение объединить с осреднением по времени, то получаемые средние не будут зависеть также от времени при условии, что период осреднения достаточно велик.

Средняя зональная $(\tilde{u}, 0, 0)$ и средняя меридиональная $(0, \tilde{v}, \tilde{w})$ циркуляции не зависят от времени, они кинематически независимы.

Выполняя над основными уравнениями (12.1)—(12.5) операцию зонального осреднения или операцию комбинированного осреднения по кругу широты — времени и привлекая технику главы 6, находим (знаки осреднения у величин $\tilde{\mathbf{v}}'$ или $\overline{\mathbf{v}''}$ опущены, так же как в главе 8):

$$\bar{\rho}\left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}\right) + 2\Omega \times \overline{\rho \tilde{\mathbf{v}}} = -\nabla \bar{p} + \\ + \operatorname{div}(\bar{\boldsymbol{P}} + \bar{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{J}) - \bar{\rho} \nabla \phi, \tag{12.29}$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div} \overline{\rho \tilde{\mathbf{v}}} = 0, \tag{12.30}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho} k_{\mathrm{m}}) + \operatorname{div}(\bar{\rho} k_{\mathrm{m}} \tilde{\mathbf{v}} + \bar{p} \tilde{\mathbf{v}} - (\bar{\boldsymbol{P}} + \bar{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{J}) \cdot \tilde{\mathbf{v}}) = \\ = \bar{p} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} - g \bar{\rho} \tilde{w} - (\bar{\boldsymbol{P}} + \bar{\boldsymbol{R}} + \boldsymbol{J}) \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}}, \tag{12.31}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho k_{\mathrm{e}}}) + \operatorname{div}(\overline{\rho k_{\mathrm{e}} \mathbf{v}} + \overline{p' \mathbf{v}''} - \overline{(\boldsymbol{P}' + \boldsymbol{R}') \cdot \mathbf{v}''}) = \\ = \boldsymbol{J} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} - \overline{(\boldsymbol{P}' + \boldsymbol{R}') \cdot \nabla \mathbf{v}''} + \overline{p' \operatorname{div} \mathbf{v}''} - \overline{g \rho' w''}, \tag{12.32}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho \mathscr{k}}) + \operatorname{div}(\overline{\rho \mathscr{k} \mathbf{v}} + \bar{\varkappa} + \bar{\chi}) = \bar{\boldsymbol{R}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} + \overline{\boldsymbol{R}' \cdot \nabla \mathbf{v}''} - \overline{\rho \Delta}, \tag{12.33}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho(e + \phi)} + \operatorname{div}\{\overline{\rho(e + \phi)\mathbf{v}} + \mathbf{W}_{\mathrm{e}}^* + \bar{\mathbf{W}}\} = \\ = \bar{p} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}} + g \bar{\rho} \tilde{w} + \bar{\boldsymbol{P}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{v}} + \overline{\boldsymbol{P}' \cdot \nabla \mathbf{v}''} - \overline{p' \operatorname{div} \mathbf{v}''} + \\ + \overline{g \rho' w''} + \overline{\rho \Delta}, \tag{12.34}$$

где $\boldsymbol{J}$ — тензор турбулентных напряжений Джефриса и $\mathbf{W}_{\mathrm{e}}^*$ — крупномасштабный турбулентный поток тепла, равный

$$\mathbf{W}_{\mathrm{e}}^* = c_{\mathrm{pa}} \frac{\tilde{T}}{\tilde{\Theta}} \overline{\rho \Theta'' \mathbf{v}''} + L_{\mathrm{v}} \overline{\rho \varepsilon_{\mathrm{v}}'' \mathbf{v}''}. \tag{12.35}$$

Формулы (7.14) и (12.35) формально идентичны, но их физическое содержание различно. Первая из этих формул определяет мелкомасштабный турбулентный поток тепла, который по направлению практически совпадает с вертикалью (квазивертикален, см. главы 9 и 10), вторая — крупномасштабный турбулентный поток тепла, который квазигоризонтален (его основная составляющая — вдоль меридиана). Точно так же выражения для тензора Рейнольдса и тензора Джефриса формально идентичны, но они включают турбулентные напряжения двух очень различных масштабов. Наиболее важные напряжения Рейнольдса были введены в главах 9 и 10; это зональная R_x^z и меридиональная R_y^z составляющие тензора, которые порождены воздействием на горизонтальную площадку со стороны вышележащих слоев

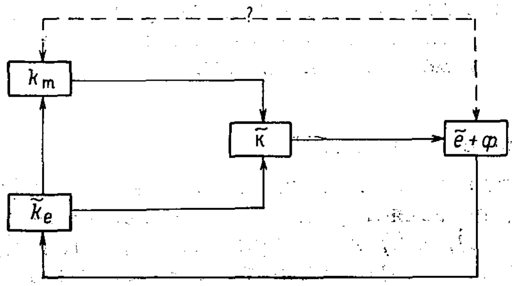

Рис. 14. Преобразования энергии, связанные с общей циркуляцией атмосферы.

воздуха; главная составляющая тензора Джефриса $J_x^y = -\overline{\rho u'' v''}$ порождается воздействием на вертикальную площадку со стороны массы воздуха, находящегося севернее площадки.

В согласии с неравенством (12.12) членами, содержащими $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{P}'$, в уравнениях (12.29)—(12.34) можно пренебречь. Более того, в согласии с неравенством (12.6) резонно считать, что $\overline{\boldsymbol{R}}\cdot\nabla\tilde{\mathbf{v}} > 0$ и $\overline{\boldsymbol{R}'\cdot\nabla\mathbf{v}''} > 0$ в предположении, что структура $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{R}'$ сохраняется. Наконец, вспоминая, что

$$\overline{p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}} - g\overline{\rho w} \equiv \bar{p}\,\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{v}} - g\bar{\rho}\bar{w} + \overline{p'\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}'} - g\overline{\rho' w'} \equiv$$
$$\equiv (\bar{p}\,\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{v}} - g\bar{\rho}\bar{w}) + (\overline{p'\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}''} - g\overline{\rho' w''}),$$

и замечая, что главными членами в этом выражении являются члены в последних скобках, можно на основании (12.25) заключить, что в среднем в атмосфере потенциальная и внутренняя энергия превращается в кинетическую энергию возмущений ρ', $\mathbf{v}''$, p' синоптического масштаба.

Объединяя результаты этого параграфа с предыдущими, можем схему преобразований энергии в атмосфере представить в виде, иллюстрируемом рис. 14. В среднем потенциальная и внутренняя энергия ($e + \phi$) преобразуется в кинетическую энергию крупномасштабных возмущений $k_e \approx \frac{1}{2}(\mathbf{v}_h'')^2$, которая в свою очередь переходит в кинетическую энергию планетарного вихря $\left[k_m \approx \frac{1}{2}(\tilde{u})^2\right.$, см. п. 11.2$\left.\right]$; одновременно кинетическая энергия k_m зонального движения и кинетическая энергия k_e крупномасштабного турбулентного движения деградируют в кинетическую энергию k мелкомасштабной турбулентности, которая в свою очередь диссипирует в тепло (внутреннюю энергию) в вихрях очень малого размера (не превышающего нескольких сантиметров, см. п. 4.4).

12.5. Разложение поля движения

Тот факт, что параметры зонального движения $[\mathbf{v}]$ не зависят от долготы λ, позволяет разделить это движение на зональную циркуляцию ($[u]$, 0, 0) и циркуляцию (0, $[v]$, $[w]$) в меридиональной плоскости. Привлекая технику главы 6, можно получить уравнения баланса следующих четырех видов кинетической энергии: кинетической энергии $\frac{1}{2}[u]^2$ зональной циркуляции; кинетической энергии $\frac{1}{2}([v]^2 + [w]^2) \approx \frac{1}{2}[v]^2$ циркуляции в меридиональной плоскости; средней кинетической энергии $\frac{1}{2}[(u^{\mathrm{I}})^2]$ крупномасштабного турбулентного движения вдоль кругов широт; средней кинетической энергии $\frac{1}{2}[(v^{\mathrm{I}})^2 + (w^{\mathrm{I}})^2]$ крупномасштабного турбулентного движения в меридиональной плоскости [121]. На основе этих уравнений затем легко установить возможные переходы кинетической энергии этих четырех видов движения.

Мы уже ранее выяснили, что когда средние (по времени) зональные величины не зависят от времени, то осредненное (по времени) зональное движение можно разложить на зональную циркуляцию $[\bar{u}]$ и кинематически от нее независимую циркуляцию $[\bar{v}]$, $[\bar{w}]$ в меридиональных плоскостях (см. конец п. 5.3). В этом частном случае работа, совершаемая меридиональным градиентом среднего зонального давления $[\bar{p}]$, переходит в кинетическую энергию циркуляции в меридиональных плоскостях, которая может трансформироваться в зональную циркуляцию тогда, и только тогда, когда наблюдается отрицательная корреляция в пространстве и во времени между средней зональной скоростью $[\overline{u}]$ и скоростью изменения $[\overline{w}] \cos \varphi - [\overline{v}] \sin \varphi$ расстояния $r \cos \varphi$ от оси вращения Земли. В низких и высоких широтах циркуляция $[\overline{v}]$, $[\overline{w}]$ в меридиональных плоскостях способствует поддержанию зональной циркуляции [142]. В умеренных широтах, однако, наблюдается обратный процесс перехода кинетической энергии от зональной циркуляции к меридиональной [111, 142].

Если операцию осреднения по времени ($\overline{X} \equiv X_{01}$) и операцию зонального осреднения ($[X] \equiv X_{10}$) применить последовательно (см. п. 5.3), а не одновременно, как это сделано выше (см. также главу 11), то скорость движения синоптического масштаба может быть представлена в виде

$$\mathbf{v} = [\overline{\mathbf{v}}] + [\mathbf{v}]' + \overline{\mathbf{v}}^{\mathrm{I}} + \mathbf{v}^{\mathrm{I}'}$$

или, используя обозначения Лоренца (см. п. 5.3), в виде

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{11} + \mathbf{v}_{12} + \mathbf{v}_{21} + \mathbf{v}_{22}.$$

Таким образом, скорость движения $\mathbf{v}$ представляет собой результирующую четырех составляющих. Составляющая $[\overline{\mathbf{v}}]$, зависящая от широты φ и высоты z, получена путем применения обеих операций осреднения; ее проекциями служат $[\overline{u}]$, $[\overline{v}]$, $[\overline{w}]$. Составляющая $[\mathbf{v}]' \equiv [\mathbf{v}']$, зависящая от φ, z и времени t, характеризует неустановившуюся часть зонального движения. Составляющая $\overline{\mathbf{v}}^{\mathrm{I}}$, зависящая от λ, φ и z, — это скорость движения малоподвижных крупномасштабных возмущений (например, муссонной циркуляции); наконец, составляющая $\mathbf{v}^{\mathrm{I}'}$, зависящая от λ, φ, z и t, — это скорость движения возмущений синоптического масштаба (например, движущихся циклонов и антициклонов в западном потоке).

Любая другая метеорологическая величина $X(\lambda, \varphi, z, t)$ может быть представлена в аналогичном виде:

$$X = [\overline{X}] + [X]' + \overline{X}^{\mathrm{I}} + X^{\mathrm{I}'}.$$

Как уже было указано, средние зональные значения имеют простую интерпретацию: они определяют физические параметры осредненного зонального движения, которое складывается из чисто зонального движения ($[u]$, 0, 0) и меридионального движения (0, $[v]$, $[w]$), каждое из которых не зависит от долготы λ. Флуктуации, наоборот, описывают наиболее нерегулярную часть общей циркуляции. В самом деле, флуктуация X^1 параметра X относительно зонального значения $[X]$ включает эффект воздействия на X всех крупномасштабных систем, наблюдаемых в атмосфере. Следует отметить, что мелкомасштабные вихри были отфильтрованы первым осреднением, поэтому рассматриваемые здесь параметры не содержат флуктуаций с периодами и длинами волн, принадлежащими к микрометеорологическому диапазону. Синоптический опыт показывает, что системы движения крупного масштаба нередко охватывают (вдоль круга широты) всю Землю и как следствие наличия возмущений линии тока по нескольку раз отклоняются к северу и югу от среднего круга широты. Такой волнообразный характер циркумполярного потока позволяет использовать гармонический анализ при изучении общей циркуляции. На основе гармонического анализа можно ввести масштабный параметр (волновое число n), математически описать атмосферные возмущения (волновые движения в зональном потоке), разложить каждую метеорологическую величину на составные части, соответствующие движениям с различными волновыми числами. Таким путем можно оценить вклад возмущений различного масштаба в перенос количества движения, в потоки энергии, а также в скорости перехода одних форм энергии в другие (см. обзор [131]).

13

Движение в ламинарном приближении

13.1. Превращение внутренней и потенциальной энергии в кинетическую энергию движений синоптического масштаба

При изучении динамических систем макрометеорологического масштаба можно в определенных случаях пренебречь взаимодействием между мелкомасштабными и крупномасштабными системами, например, в том случае, когда рассматривается эволюция крупномасштабных систем только за короткий промежуток времени (несколько дней). Однако эффектами трения нельзя пренебречь даже в этом случае; эти эффекты играют важную роль и в энергетике крупномасштабных атмосферных движений. Внутреннюю силу трения, обусловленную напряжениями Навье—Стокса и Рейнольдса, обозначим через $\mathbf{F}$, не обращая особого внимания на природу процессов трения.

Упрощенная система уравнений движения и соответствующих уравнений энергии принимает следующий вид:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \rho \mathbf{v} + \nabla p + \rho \nabla \phi = \rho \mathbf{F}, \tag{13.1}$$

$$\rho \frac{dk}{dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \phi + \rho D = 0, \tag{13.2}$$

$$\rho \frac{de}{dt} + p \operatorname{div} \mathbf{v} = \rho \frac{dh}{dt} - \frac{dp}{dt} = \rho (Q_E + \Delta), \tag{13.3}$$

где $\mathbf{F}$ — сила трения, приложенная к единичной массе воздуха; $D = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ (>0) — скорость, с которой расходуется кинетическая энергия в единичной массе под влиянием трения; Δ (>0, тепло трения) — количество кинетической энергии, диссипирующее в единичной массе за единицу времени в тепло под влиянием трения; скорость внешнего нагрева Q_E уже определена соотношением (12.10). Имеем

$$\rho D = \rho \Delta + \operatorname{div} \mathbf{A},$$

где $\mathbf{A}$ — поток механической энергии, обусловленный трением.

На основе уравнений (13.2), (13.3) и уравнения неразрывности (2.4) легко получить уравнения баланса различных видов энергии: k, $e+\phi$ и h (см. главу 3). Интегрируя эти уравнения по объему τ, получаем:

$$\frac{\partial K}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\int_\tau k\,dm = -\oint_\sigma \{(\rho k + p) v_N + A_N\}\,d\sigma + \int_\tau (p \operatorname{div} \mathbf{v} - g\rho w)\,d\tau - \int_\tau \Delta\,dm, \tag{13.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(E+\Phi) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\int_\tau (e+\phi)\,dm = -\oint_\sigma \rho(e+\phi) v_N\,d\sigma - \int_\tau (p \operatorname{div} \mathbf{v} - g\rho w)\,d\tau + \oint_\tau (Q_E + \Delta)\,dm, \tag{13.5}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\int_\tau h\,dm = -\oint_\sigma \rho h v_N\,d\sigma + \int_\tau \alpha\frac{dp}{dt}\,dm + \int_\tau (Q_E + \Delta)\,dm, \tag{13.6}$$

где $dm \equiv \rho\,d\tau$ и N — внешняя нормаль к поверхности σ объема τ. Здесь следует напомнить, что $|Q_E| \gg \Delta > 0$.

Кинетическая энергия K в объеме τ, неподвижном по отношению к Земле в момент времени t, может изменяться во времени под влиянием:

1) оттока $\oint_\sigma \rho k v_N\,d\sigma$ кинетической энергии, которую несет воздух, пересекающий поверхность σ;

2) работы $\oint_\sigma - p v_N\,d\sigma$ сил давления, совершаемой на поверхности σ;

3) оттока $\oint_\sigma A_N\,d\sigma$ механической энергии, обусловленного трением; этот член пренебрежимо мал и обычно отбрасывается вне пограничного слоя;

4) превращения $\int_\tau (p \operatorname{div} \mathbf{v} - g\rho w)\,d\tau$ потенциальной и внутренней энергии в кинетическую энергию; установлено, что в среднем для всей атмосферы такое превращение происходит достаточно эффективно (см. формулу (12.23) и [148]);

5) диссипации $\int_\tau \Delta\,dm$ кинетической энергии в тепло ($\Delta > 0$) под влиянием трения.

Сумма $E + \Phi$ внутренней энергии E и потенциальной энергии Φ в объеме τ, неподвижном относительно Земли в момент времени t, может изменяться во времени под влиянием:

1) оттока $\oint\limits_\sigma \rho\,(e + \phi)\, v_N\, d\sigma$ внутренней и потенциальной энергии через поверхность σ;

2) перехода $\int\limits_\tau (p \operatorname{div} \mathbf{v} - g\rho w)\, d\tau$ внутренней и потенциальной энергии в кинетическую энергию (см. выше пункт 4);

3) образования $\int\limits_\tau (\Delta + Q_E)\, dm$ внутренней и потенциальной энергии вследствие притока тепла Q_E извне и диссипации Δ кинетической энергии в тепло (скорость нагревания под влиянием трения).

Наконец, складывая уравнения (13.4) и (13.5), получаем уравнение баланса полной энергии $K + \Phi + E$ в объеме τ:

$$\frac{\partial}{\partial t}(K + \Phi + E) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\int (k + \phi + e)\, dm = -\oint\limits_\sigma \{\rho\,(k + \phi + h)\, v_N + A_N\}\, d\sigma + \int\limits_\tau Q_E\, dm. \tag{13.7}$$

Интегрируя это уравнение по времени, находим

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \oint\limits_\sigma (\rho\,(k + \phi + h)\, v_N + A_N)\, d\sigma = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_\tau Q_E\, dm, \tag{13.7a}$$

при этом мы приняли во внимание тот факт, что среднее значение величины $K + \Phi + E$ практически постоянно, если период осреднения (t_1, t_2) и объем τ достаточно велики. В частности, если τ — объем тропической атмосферы обоих полушарий, где $Q_E > 0$, то из (13.7a) следует, что меридиональный поток полной энергии направлен в сторону полюсов в обоих полушариях [100, 118, 147].

В нижних слоях атмосферы (большие значения ρ и p) $\rho k \equiv \equiv \frac{1}{2}\rho \mathbf{v}^2 \approx \frac{1}{2}\rho \mathbf{v}_h^2 \ll p$; следовательно, в интеграле (13.7a) величиной k можно пренебречь по сравнению с h, которую можем записать (с точностью до постоянной) в приближенном виде: $h \approx c_{pa}T + \varepsilon_v L_v$ [см. формулу (7.2′a)].

Теперь используем найденные уравнения для изучения превращений внутренней и потенциальной энергии в кинетическую энергию синоптических погодных систем.

Исследование общей циркуляции показывает, что средние месячные и зональные значения меридионального потока кинетической энергии $\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + p\right) v$ сильно зависят от широты: максимальные значения потока наблюдаются между 45 и 50° с. ш., а в сторону полюса и экватора от этой широтной зоны средний меридиональный поток кинетической энергии уменьшается.

Теперь рассмотрим две вертикальные зональные поверхности к югу от максимума меридионального потока энергии. Ясно, что дефицит кинетической энергии, наблюдающийся в кольцевой зоне между этими двумя поверхностями, обусловлен не только тем, что через южную границу втекает энергии меньше, чем вытекает через северную, но и тем, что кинетическая энергия диссипирует под влиянием поверхностного трения. Поэтому к югу от максимума меридионального потока кинетической энергии должны существовать источники кинетической энергии [33, 98, 100].

Мы уже неоднократно отмечали (см. главы 3, 11 и 12), что кинетическая энергия образуется из потенциальной и внутренней энергии. Скорость генерации кинетической энергии в единичном объеме определяется уравнениями (3.16) или (3.4):

$$\sum(K) = p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - g\rho w, \tag{13.8}$$

где K — кинетическая энергия атмосферы.

Следует заметить, что эти превращения играют более важную роль в нижних слоях атмосферы. В самом деле, давление p уменьшается с высотой по экспоненте, тогда как $|\mathrm{div}\,\mathbf{v}|$ меняется с высотой намного меньше. С другой стороны, вертикальная скорость w обратно пропорциональна статической устойчивости, которая в стратосфере значительно выше, чем в тропосфере.

Подведем некоторые итоги:

1) два вышеупомянутых механизма превращения энергии существуют в атмосфере одновременно;

2) один из них способствует образованию кинетической энергии, другой — ее уничтожению;

3) из двух механизмов превращения энергии преобладающую роль играет механизм, включающий потенциальную энергию [125].

В атмосфере расширение воздуха ($\mathrm{div}\,\mathbf{v} > 0$) сопровождается, как правило, восходящим движением ($w > 0$), а сжатие ($\mathrm{div}\,\mathbf{v} < < 0$) — нисходящим ($w < 0$). Это заключение следует из приближенного уравнения неразрывности, которое в случае крупномасштабного движения можно записать в виде

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \frac{-1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} \approx -\frac{w}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}, \tag{13.9}$$

где показатель стратификации $(-1/\rho)(\partial\rho/\partial z)$ положителен. Таким образом, в атмосфере наблюдается достаточно тесная положительная корреляционная связь между $\operatorname{div} \mathbf{v}$ и w, вследствие чего скорость превращения $p \operatorname{div} \mathbf{v}$ [см. уравнения (3.11) и (3.12)] внутренней энергии в кинетическую и скорость образования потенциальной энергии $g\rho w$ [см. уравнение (13.14)] имеют, как правило, один и тот же знак, а именно знак вертикальной скорости w. Однако скорость генерации кинетической энергии определяется разностью (13.8) этих двух скоростей, и поэтому если первый член (13.8) приводит к уничтожению кинетической энергии, то второй в это время вносит вклад в ее образование, и наоборот. Заменяя в (13.8) величины $\operatorname{div} \mathbf{v}$ и ρg их приближенными выражениями по уравнению (13.9) и по уравнению гидростатики $\rho g \approx -\partial p/\partial z$, с учетом уравнения состояния воздуха получаем

$$\sum(K) \equiv p \operatorname{div} \mathbf{v} - g\rho w \approx \frac{p}{T} \frac{\partial T}{\partial z} w. \qquad (13.8\text{a})$$

В тропосфере и мезосфере, где, как правило, $\partial T/\partial z < 0$, знак скорости образования кинетической энергии совпадает со знаком $-w$, т. е. в тропосфере и мезосфере скорость образования $\sum(K)$ кинетической энергии совпадает по знаку со скоростью превращения $(-g\rho w)$ потенциальной энергии в кинетическую. Другими словами, в тропосфере и мезосфере переход потенциальной энергии в кинетическую перекрывает, как правило, превращение внутренней энергии в кинетическую (ср. с [102]). Из приближенного выражения (13.8а) также следует, что источники кинетической энергии расположены в тропосфере, как правило, там, где воздух опускается ($w < 0$), а именно в субтропическом поясе высокого давления; сток же кинетической энергии происходит там, где воздух поднимается ($w > 0$). Поскольку скорость образования потенциальной энергии определяется величиной $g\rho w$, становится ясно, что области стока потенциальной энергии совпадают с областями образования кинетической энергии, и наоборот (см. уравнение баланса кинетической энергии).

Свыше 70 лет назад Маргулес пришел к заключению [50], которое совпадает с этими результатами. Однако в стратосфере и термосфере, где, как правило, $\partial T/\partial z > 0$, скорость образования кинетической энергии совпадает по знаку со знаком w, т. е. со знаком скорости превращения $p \operatorname{div} \mathbf{v}$ внутренней энергии в кинетическую. Наконец, напомним, что p, $|\partial T/\partial z|$ и $|w|$ имеют в стратосфере меньшие значения, чем в тропосфере. Следовательно, в тропосфере находятся наиболее важные источники и стоки кинетической энергии.

Поскольку поднимающийся воздух ($w > 0$) расширяется ($\mathrm{div}\,\mathbf{v} > 0$), а опускающийся ($w < 0$) сжимается ($\mathrm{div}\,\mathbf{v} < 0$), в первом (втором) случае внутренняя энергия убывает (возрастает) со скоростью $-p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}$ [см. уравнение (3.11)], тогда как потенциальная энергия этого воздуха возрастает (убывает) со скоростью $g\rho w$ [см. уравнение (3.14)], и в то же самое время генерируется кинетическая энергия со скоростью $p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - g\rho w$ [см. уравнение (3.16)]. Одновременно протекающие энергетические процессы, включающие преобразование потенциальной и внутренней энергии, имеют противоположные направления. Для образования кинетической энергии важен результирующий эффект этих двух процессов, следовательно, эти виды энергии нужно рассматривать совместно (см. [50] и п. 14.1).

Теперь рассмотрим более детально процессы превращения энергии, сопровождающиеся образованием кинетической энергии. С этой целью выделим в тропосфере массу опускающегося холодного воздуха, имеющую куполообразную форму. Такие воздушные массы формируются обычно перед резким изменением погоды (перед аномальным развитием). Под действием силы тяжести холодный воздух опускается; вслед за ним оседает и тропический воздух, располагающийся над куполом холодного воздуха. В этом случае воздух опускается в очень толстом слое. Предположим, что вертикальная скорость w отрицательна в слое от нуля до h и обращается в нуль на поверхности земли $z = 0$ и на высоте $z = h$. Скорость образования кинетической энергии в вертикальном столбе единичного поперечного сечения и высотой h определяется выражением

$$\int_0^h - g\rho w\,dz + \int_0^h p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,dz. \tag{13.10}$$

Первый из этих интегралов положителен [$w < 0$ в интервале $(0, h)$] и представляет собой количество потенциальной энергии, превращающейся в кинетическую в вертикальном столбе. Из предыдущего следует, что $\mathrm{div}\,\mathbf{v}$ и w имеют одинаковые знаки, следовательно, $\mathrm{div}\,\mathbf{v} < 0$. Таким образом, превращение потенциальной энергии в кинетическую сопровождается переходом кинетической энергии во внутреннюю. Покажем, что образование кинетической энергии в оседающем столбе воздуха перекрывает ее разрушение. Подставляя очевидное тождество $p\,(\partial w/\partial z) = (\partial p w/\partial z) - w\,(\partial p/\partial z)$ в выражение (13.10), получаем приближенное выражение для количества кинетической энергии, образовавшейся в вертикальном столбе:

$$\int_0^h (p \operatorname{div} \mathbf{v} - g\rho w)\, dz = \int_0^h \left\{ p \operatorname{div} \mathbf{v}_h + \frac{\partial p w}{\partial z} - \right.$$
$$\left. - w\left(\frac{\partial p}{\partial z} + g\rho\right)\right\} dz \approx \int_0^h p \operatorname{div} \mathbf{v}_h\, dz, \qquad (13.11)$$

при этом учтено также уравнение гидростатики.

Дивергенция скорости $\operatorname{div} \mathbf{v}_h$ в горизонтальной плоскости и дивергенция скорости $\partial w/\partial z$ по вертикали имеют, как правило, противоположные знаки в атмосфере [исключение составляет слой, заключенный между уровнем максимального оседания ($\partial w/\partial z = 0$) и соседним, более низким уровнем, где $\operatorname{div} \mathbf{v}_h = 0$ (см. ниже)]; $\operatorname{div} \mathbf{v}_h$ отрицательна (т. е. наблюдается конвергенция горизонтального потока) выше уровня максимального оседания и положительна (т. е. наблюдается дивергенция горизонтального потока) ниже этого уровня. Отсюда следует, что при больших значениях p наблюдаются положительные значения $\operatorname{div} \mathbf{v}_h$, значит, выражение (13.11) в целом положительно, т. е. знак скорости генерации кинетической энергии в вертикальном столбе совпадает со знаком первого интеграла в (13.10), определяющего превращение потенциальной энергии в кинетическую. Можно, таким образом, сделать вывод, что основной причиной атмосферных движений является превращение потенциальной энергии в кинетическую.

Для того чтобы избежать каких-либо недоразумений в интерпретации приближенного уравнения неразрывности (13.9), следует заметить, что: 1) дивергенция горизонтальной скорости $\mathbf{v}_h$ достигает нулевого значения [$\operatorname{div} \mathbf{v}_h = 0$ или $\partial w/\partial z = (-1/\rho)(\partial\rho/\partial z)\, w < 0$] несколько ниже уровня максимального оседания ($\partial w/\partial z = 0$); 2) в нижней части столба конвергенция вертикальной скорости $-\partial w/\partial z$ перекрывает дивергенцию горизонтальной скорости, тогда как в верхней части столба конвергенция $-\operatorname{div} \mathbf{v}_h$ перекрывает дивергенцию $\partial w/\partial z$.

В более общем случае интеграл $\int_0^\infty p \operatorname{div} \mathbf{v}_h\, dz$ выражает скорость образования кинетической энергии в вертикальном столбе единичного сечения и бесконечной протяженности [99]. Известно, что в атмосфере слои горизонтальной дивергенции чередуются со слоями горизонтальной конвергенции, таким образом,

$\int\limits_0^\infty \operatorname{div} \mathbf{v}_h\, dz \approx 0$. Поэтому если достаточно мощный по вертикали горизонтальный слой расположен в нижней атмосфере и в нем $\operatorname{div} \mathbf{v}_h$ сохраняет на всех уровнях знак, а наибольшее значение (по абсолютной величине) $\operatorname{div} \mathbf{v}_h$ принимает вблизи поверхности земли, то знак скорости образования кинетической энергии будет совпадать со знаком $\operatorname{div} \mathbf{v}_h$ в рассматриваемом слое. Следовательно, если наблюдается горизонтальная конвергенция в нижней части столба, особенно вблизи его основания (циклогенез), то кинетическая энергия в таком столбе со временем уменьшается. В противном случае, т. е. при горизонтальной дивергенции в нижней части столба, особенно вблизи его основания (антициклогенез), кинетическая энергия в таком столбе со временем возрастает. Замечая, что справедливо равенство

$$p \frac{\partial w}{\partial z} - g\rho w = \frac{\partial p w}{\partial z} - \chi \rho w,$$

скорость генерации $p \operatorname{div} \mathbf{v} - g\rho w$ кинетической энергии можем представить в следующей форме:

$$p \operatorname{div} \mathbf{v} - g\rho w = p \operatorname{div} \mathbf{v}_h + \frac{\partial p w}{\partial z} - \chi \rho w \tag{13.12а}$$

и

$$p \operatorname{div} \mathbf{v} - g\rho w = \operatorname{div} p\mathbf{v} - \mathbf{v}_h \cdot \nabla p - \chi \rho w, \tag{13.12б}$$

где $\chi = (1/\rho)(\partial p/\partial z) + g$ — гидростатический дефицит [16].

Интегрируя (13.12а) по всему вертикальному столбу единичного сечения и помня, что $pw = 0$ на нижней и верхней границах этого столба, получаем

$$\int\limits_0^\infty (p \operatorname{div} \mathbf{v} - g\rho w)\, dz = \int\limits_0^\infty p \operatorname{div} \mathbf{v}_h\, dz - \int\limits_0^\infty \chi \rho w\, dz. \tag{13.13а}$$

Здесь первый член в правой части представляет влияние агеострофичности движения ($\operatorname{div} \mathbf{v}_h \neq 0$), а второй — влияние нарушения гидростатичности на изменение кинетической энергии во времени. Гидростатический дефицит очень мал в атмосфере. Если выполняется условие квазистатичности по вертикали ($\chi \approx 0$), то образование (разрушение) потенциальной энергии в вертикальном столбе (со скоростью $g\rho w$) почти полностью компенсируется убылью (увеличением) внутренней энергии [со скоростью $p\,(\partial w/\partial z)$], обусловленной расширением (сжатием) столба вдоль вертикали.

В самом деле, в случае квазистатического равновесия

$$\int_0^\infty \left(p\frac{\partial w}{\partial z} - g\rho w\right) dz = -\int_0^\infty \chi\rho w\, dz \approx 0.$$

Интегрируя теперь (13.12б) по всей атмосфере, находим

$$\int_{\text{atm}} (p \operatorname{div} \mathbf{v} - g\rho w)\, d\tau = \int_{\text{atm}} -\mathbf{v}_\text{h}\cdot\nabla_\text{h} p\, d\tau - \int_{\text{atm}} \chi\rho w\, d\tau. \quad (13.13б)$$

При квазистатическом равновесии ($\chi \approx 0$) скорость C генерации кинетической энергии в пределах всей атмосферы принимает следующую приближенную форму:

$$C \equiv \int_{\text{atm}} (p \operatorname{div} \mathbf{v} - g\rho w)\, d\tau \approx \int_{\text{atm}} -\mathbf{v}_\text{h}\cdot\nabla_\text{h} p\, d\tau =$$

$$= \int_{\text{atm}} p \operatorname{div} \mathbf{v}_\text{h}\, d\tau \approx \int_{\text{atm}} -\alpha\omega\, dm, \quad (13.14)$$

где $dm \approx (a^2 \cos\varphi/g)\, d\lambda\, d\varphi\, dp$ и $\omega \equiv dp/dt$. Последнее приближенное соотношение будет установлено в следующей главе (см. конец п. 14.1). Кинетическая энергия образуется в атмосфере, если горизонтальный градиент давления совершает работу или если на геопотенциальных (горизонтальных) поверхностях в нижних слоях атмосферы большим значениям давления (субтропические области высокого давления, движущиеся полярные антициклоны и массы холодного оседающего воздуха) соответствуют, как правило, положительные значения дивергенции горизонтальной скорости ветра ($\operatorname{div} \mathbf{v}_\text{h} > 0$), а малым значениям давления (области низкого давления) — отрицательные значения дивергенции горизонтальной скорости ветра ($\operatorname{div} \mathbf{v}_\text{h} < 0$) [98, 100, 116].

Из (13.14) следует, что при геострофическом движении кинетическая энергия не генерируется. В самом деле, при таком движении $\mathbf{v}_\text{h}\cdot\nabla_\text{h} p \equiv 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{v}_\text{h} \approx 0$. В этом случае кинетическая энергия атмосферы не изменяется во времени, поскольку при геострофическом движении отсутствуют силы трения, а атмосфера рассматривается как механически изолированная система. Это заключение подчеркивает определяющую роль в возникновении кинетической энергии агеострофической составляющей скорости движения ($\mathbf{v}_\text{h}\cdot\nabla p \neq 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{v}_\text{h} \neq 0$). Кинетическая энергия образуется в атмосфере, если на геопотенциальных поверхностях в областях высокого давления дивергенция агеострофической составляющей скорости положительна, а в областях низкого давления — отрицательна.

Из (13.14) также следует, что движение воздуха поперек изобар в сторону низкого давления сопровождается переходом внутренней энергии в кинетическую. Этот процесс адиабатический и обратимый. Однако следует заметить, что интенсивность прямого и обратного процесса неодинаковая, поскольку осредненная за большой интервал скорость образования кинетической энергии положительна и равна средней (за тот же интервал) скорости нагревания под влиянием трения [см. формулу (12.25)].

Поскольку в областях циклогенеза расположены стоки, а в областях антициклогенеза — источники кинетической энергии, должен существовать поток кинетической энергии от вторых областей к первым. Этот теоретический результат подтверждается данными наблюдений: кинетическая энергия переносится, как правило, из тропических районов в средние широты.

Во избежание недоразумений заметим, что с первого взгляда член $p \operatorname{div} \mathbf{v}_h$ определяется только полем горизонтального движения $\mathbf{v}_h$; на самом же деле он тесно связан с полем вертикальной скорости w. Действительно, с учетом упрощенного уравнения неразрывности (13.9) имеем

$$p \operatorname{div} \mathbf{v}_h \approx (-p/\rho)\,(\partial \rho w/\partial z).$$

Из (13.14) ясно, что величина $\int\limits_{atm} p \operatorname{div} \mathbf{v}_h \, d\tau$ обусловлена движением воздуха со скоростью $-\omega/g$ через изобарические поверхности, т. е. практически вертикальным движением.

Наконец, из (13.14) следует, что кинетическая энергия образуется в атмосфере, если на изобарических поверхностях большие значения α связаны с отрицательными значениями ω, а малые значения α — с положительными значениями ω, т. е. теплый воздух движется через изобарическую поверхность вверх, а холодный — вниз [см. формулу (12.24) и п. 12.3].

13.2. Преобразование энергии в невязкой и сухой атмосфере

В случае сухой и невязкой атмосферы уравнения баланса кинетической $\left(k = \frac{1}{2}\mathbf{v}^2\right)$, внутренней $(e = c_{va}T + \text{const})$ и потенциальной ($\phi \approx gz + \mathrm{const}$) энергии имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \operatorname{div}\{(\rho k + p)\mathbf{v}\} = p \operatorname{div}\mathbf{v} - g\rho w, \\ &\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \operatorname{div}(\rho e \mathbf{v}) = -p \operatorname{div}\mathbf{v} + \rho Q, \\ &\frac{\partial}{\partial t}(\rho \phi) + \operatorname{div}(\rho \phi \mathbf{v}) = g\rho w, \end{aligned}\right\} \qquad (13.15)$$

где Q — скорость притока тепла в сухой и невязкой атмосфере. С учетом уравнения неразрывности, определения потенциальной температуры Θ и первого начала термодинамики

$$\frac{1}{\Theta}\frac{d\Theta}{dt} = (Q/c_{pa}T) \text{ или } \rho Q = \{c_{va}/(c_{pa} - c_{va})\}\frac{dp}{dt} - $$
$$- \{c_{pa}/(c_{pa} - c_{va})\}\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}$$

скорость перехода $p \operatorname{div}\mathbf{v}$ внутренней энергии в кинетическую можно представить в форме

$$p \operatorname{div}\mathbf{v} = -\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{c_{pa} - c_{va}}{c_{pa}}\rho Q - \frac{c_{va}}{c_{pa}}\frac{dp}{dt}. \qquad (13.16)$$

Таким образом, два физических фактора вносят вклад в дивергенцию воздушного потока: приток тепла Q и восходящий поток $(-1/g)(dp/dt)$ воздуха через изобарическую поверхность. Объединяя (13.16) и (13.15), получаем:

$$\left\{\begin{aligned} &\sum(K) = \{(c_{pa} - c_{va})/c_{pa}\}\rho Q - (c_{va}/c_{pa})\frac{dp}{dt} - g\rho w, \\ &\sum(E) = (c_{va}/c_{pa})\left(\rho Q + \frac{dp}{dt}\right), \\ &\sum(\Phi) = g\rho w. \end{aligned}\right. \qquad (13.17)$$

Здесь знак $\sum$ обозначает скорость образования энергии в единичном объеме.

На основе этих формул можно сделать следующие выводы.

1. Из количества тепла Q, получаемого единичной массой сухого воздуха за единицу времени, часть его, равная $c_{va}/c_{pa} = {}^5/_7$, идет на увеличение внутренней энергии, а оставшаяся часть — на увеличение кинетической энергии [128]. Отсюда классиче-

ское утверждение, что «при поступлении к вертикальному столбу некоторого количества энергии часть его, равная c_{va}/c_{pa}, идет на увеличение внутренней энергии, а остальная часть $(c_{pa} - c_{va})/c_{pa}$ — на приращение потенциальной энергии», справедливо тогда, и только тогда, когда вся кинетическая энергия, порожденная теплом, трансформируется в потенциальную энергию. Это ограничение достаточно серьезно.

2. В случае крупномасштабных квазистатических движений справедливо следующее приближение:

$$\frac{dp}{dt} \approx -g\rho w. \tag{13.18}$$

Таким образом, переход внутренней энергии в кинетическую со скоростью $-(c_{va}/c_{pa})\, dp/dt$ и переход потенциальной энергии в кинетическую со скоростью $-g\rho w$ всегда имеют противоположные знаки; более того, интенсивность первого из этих переходов составляет только $c_{va}/c_{pa} = {}^5/_7$ от интенсивности второго (см. п. 13.1).

3. Вводя (13.18) в (13.17), получаем

$$\frac{\sum(E)}{c_{va}} = \frac{\sum(K)}{c_{pa} - c_{va}} = \frac{\sum(\Phi) - \rho Q}{-c_{pa}} = \frac{\sum(E+K+\Phi) - \rho Q}{0}. \tag{13.19}$$

Заметим, что $\sum(\Phi) - \rho Q = \rho\,(gw - Q)$ представляет собой сумму скорости охлаждения и скорости генерации потенциальной энергии в единичном объеме воздуха.

4. Если при движении выполняется не только условие квазистатичности, но и условие адиабатичности $Q \equiv 0$, то

$$\frac{\sum(E)}{c_{va}} = \frac{\sum(K)}{c_{pa} - c_{va}} = \frac{\sum(\Phi)}{-c_{pa}} = \frac{\sum(E+\Phi)}{-(c_{pa} - c_{va})} =$$
$$= \frac{\sum(E+K)}{c_{pa}} = \frac{\sum(K+\Phi)}{-c_{va}} = \frac{\sum(E+K+\Phi)}{0}. \tag{13.20}$$

Легко видеть, что отношение скоростей приращения потенциальной и внутренней энергии вертикального столба, простирающегося от поверхности земли до верхней границы атмосферы, равно $-c_{pa}/c_{va}$ [128]. Классическое утверждение, согласно которому «всякое изменение в вертикальном столбе, простирающемся от уровня моря до верхней границы атмосферы, влечет результирующее изменение потенциальной энергии, которое в $(c_{pa} - c_{va})/c_{va}$ раз больше результирующего изменения внутренней энергии», не находит подтверждения.

Приведенные выше классические утверждения, которые содержатся во многих пособиях по динамической метеорологии, исходят из соотношений

$$\frac{\Phi}{c_{pa}-c_{va}}=\frac{E}{c_{va}}=\frac{E+\Phi}{c_{pa}}=\frac{H}{c_{pa}}=\int_0^\infty \rho T\,dz, \qquad (13.21)$$

где Φ, E и H — соответственно потенциальная энергия, внутренняя энергия и энтальпия вертикального столба сухого воздуха в состоянии гидростатического равновесия. Отношение E/Φ равно $c_{va}/(c_{pa}-c_{va})$ тогда, и только тогда, когда атмосфера находится в гидростатическом равновесии, при котором сумма $E+\Phi$ внутренней и потенциальной энергии атмосферы в целом достигает минимума (см. п. 14.6). Сохранит ли то же самое значение отношение E/Φ, когда экстремальное состояние будет нарушено?

14

Энергетика квазистатических систем движения

14.1. Уравнения энергии в квазистатическом приближении

Крупномасштабные системы движения в поле силы тяжести Земли с очень высокой степенью приближения можно рассматривать как квазистатические. Наибольший горизонтальный размер таких систем по меньшей мере на два порядка больше их вертикальной протяженности. Другими словами, крупномасштабные атмосферные движения квазигоризонтальны, а вертикальные движения, сопровождающие их, малы, и они способствуют восстановлению гидростатического равновесия. Вертикальную скорость w в квазистатическом приближении можно определить по уравнению Ричардсона [78], полученному путем исключения барической тенденции $\partial p/\partial t$ из уравнения первого начала термодинамики и уравнения неразрывности (предварительно проинтегрированного по высоте). В крупномасштабных системах движения горизонтальные составляющие (u, v) скорости ветра в сотни и даже тысячи раз больше вертикальной составляющей w и в то же самое время вертикальное ускорение пренебрежимо мало́ по сравнению с горизонтальным ускорением. Таким образом, можно принять два следующих положения:

1) толщина атмосферы мала по сравнению с радиусом Земли, т. е.

$$z \ll a, \tag{14.1}$$

где z — высота над средним уровнем моря; a — средний радиус Земли;

2) вертикальный градиент давления почти уравновешивается силой тяжести, т. е.

$$-\frac{\partial p}{\partial z} - g\rho \approx 0 \quad \text{или} \quad -\alpha - \frac{\delta \phi}{\delta p} \approx 0, \tag{14.2}$$

где g — ускорение свободного падения; ϕ — геопотенциал ($d\phi = g\,dz$); $\alpha \equiv \rho^{-1}$ — удельный объем воздуха [130, 132]. Поправки, которые вносят другие члены третьего уравнения Эйлера, не превышают 0,1% от членов, вошедших в уравнение гидростатики (14.2). Следует также заметить, что горизонтальный градиент давления $|\nabla_h p|$ в атмосфере очень мал по сравнению с вертикальным градиентом давления $|\partial p/\partial z|$, а наклон $|\nabla_h p|/|\partial p/\partial z|$ изобарических поверхностей имеет порядок величины 10^{-4}.

В крупномасштабных системах движения безвихревая дивергентная составляющая $\nabla\gamma$ поля скорости $\mathbf{v} = \nabla\alpha \times \nabla\beta + \nabla\gamma$ (α, β, γ — скалярные величины) мала по сравнению с вихревой бездивергентной составляющей $\nabla\alpha \times \nabla\beta$, так что относительный вихрь $\operatorname{curl} \mathbf{v}$ и кинетическая энергия $\mathbf{v}^2/2$ практически совпадают с относительным вихрем и кинетической энергией бездивергентного горизонтального движения. Более того, горизонтальная составляющая $\Omega \cos \varphi$ угловой скорости вращения Земли, как правило, пренебрежимо мала по сравнению с горизонтальной составляющей $\frac{1}{2} \operatorname{curl}_h \mathbf{v}$ скорости относительного вращения, благодаря чему горизонтальная компонента абсолютного вихря приблизительно равна горизонтальной компоненте относительного вихря. Отсюда следует, что в выражении для кориолисовой силы член, содержащий множителем горизонтальную составляющую угловой скорости вращения Земли, может быть отброшен [20].

Чтобы отфильтровать безвихревые (потенциальные) движения, не представляющие для нас интереса (звуковые волны и колебания), введем квазистатическое условие (14.2) в основные уравнения энергии (12.3) и (12.5) или (13.2) и (13.3), которые здесь перепишем в виде

$$\rho \frac{dk}{dt} = -\mathbf{v} \cdot \nabla p - \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \phi - \rho D, \tag{14.3}$$

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \operatorname{div} \mathbf{v} + \rho (Q_E + \Delta), \tag{14.4}$$

где e, k и ϕ — соответственно внутренняя, кинетическая и потенциальная энергии; D (> 0) — скорость потерь кинетической энергии под влиянием трения; Δ (> 0) — скорость перехода той же энергии в тепло (внутреннюю энергию) вследствие трения; $Q_E \gtreqless 0$ — скорость притока тепла (все величины отнесены к единице массы).

Напомним, что

$$\rho Q_E = -\operatorname{div} \mathbf{W}, \quad \rho (D - \Delta) = \operatorname{div} \mathbf{A}, \tag{14.5}$$

где **A** — отток механической энергии, обусловленный трением; **W** — полный поток тепла, введенный в п. 12.1 [см. формулу (12.10)].

Если, однако, в уравнении (14.4) величины e и h заменить на $e_a = c_{va}T$ и $h_a = c_{pa}T$, то вместо Q_E в это уравнение войдет $Q = Q_R + Q_C + Q_L$ [см. формулу (12.10′) и п. 12.2]. Проинтегрировав формулу (14.5) по всей атмосфере, получаем: 1) скорость нагревания атмосферы определяется приходящей и уходящей коротковолновой и длинноволновой радиацией и конвективным потоком тепла на земной поверхности; 2) в атмосфере в целом скорость диссипации кинетической энергии под влиянием сил трения равна скорости перехода этой энергии в тепло вследствие трения, т. е.

$$\int_{atm} \rho D\, d\tau = \int_{atm} \rho\Delta\, d\tau. \tag{14.5′}$$

Прежде чем вводить квазистатическое условие в уравнения энергии (14.3) и (14.4), обсудим вопрос о полной потенциальной энергии. В главе 13 уже было показано, что внутренняя энергия и потенциальная энергия связаны между собой. При восходящем движении ($w > 0$) кинетическая энергия переходит в потенциальную и одновременно внутренняя энергия—в кинетическую ($\operatorname{div}\mathbf{v} > 0$), в то время как при нисходящем движении ($w < 0$) потенциальная энергия переходит в кинетическую и одновременно кинетическая энергия — во внутреннюю ($\operatorname{div}\mathbf{v} < 0$). Однако неизвестны случаи прямого перехода потенциальной энергии во внутреннюю, равно как и случаи обратного перехода ($E \rightleftarrows K \rightleftarrows \Phi$). По этой причине полезно объединить внутреннюю энергию с гравитационной потенциальной и ввести понятие полной потенциальной энергии как суммы гравитационной потенциальной энергии и внутренней энергии, что и было сделано еще в 1903 г. Маргулесом [50].

Складывая левые и правые части уравнения (14.4) и тождества

$$\rho\frac{d\phi}{dt} \equiv \rho\mathbf{v}\cdot\nabla\phi \equiv g\rho w, \tag{14.6}$$

получаем уравнение полной потенциальной энергии

$$\rho\frac{d(e+\phi)}{dt} = -p\operatorname{div}\mathbf{v} + \rho\mathbf{v}\cdot\nabla\phi + \rho(Q_E + \Delta). \tag{14.7}$$

Объединяя (14.3), (14.4) и (14.6), находим уравнение полной энергии $k + \phi + e$

$$\rho\frac{d(k+\phi+e)}{dt} = -\operatorname{div} p\mathbf{v} - \rho(D - \Delta - Q_E), \tag{14.8}$$

которое с учетом соотношения (14.5) принимает вид уравнения баланса

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\rho(k+\phi+e)\}+\operatorname{div}[\{\rho(k+\phi+e)+p\}\mathbf{v}+\mathbf{W}+\mathbf{A}]=0, \quad (14.9)$$

где поток $\mathbf{A}$ пренебрежимо мал по сравнению с потоками $p\mathbf{v}$ и $\mathbf{W}$. Эта форма уравнения показывает, что полная энергия $\rho(k+\phi+e)$ единичного объема воздуха изменяется только под влиянием втока энергии через границы рассматриваемого единичного объема.

Хорошо известно, что квазистатические движения лучше изучать в эйлеровых переменных — долгота λ, широта φ, давление p и время t. Поскольку дивергенция скорости движения играет важную роль при изучении энергетики атмосферы, найдем выражение для этой скалярной характеристики поля ветра в обобщенных координатах λ, φ, p [13, 14, 132].

Дивергенция $\operatorname{div}\mathbf{A}$ некоторого вектора $\mathbf{A}$, конечно же, не зависит от используемой системы координат. Однако конкретный аналитический вид дивергенции изменяется при переходе от одной системы координат к другой. Так, например, в классической сферической системе координат λ, φ, $r=a+z$ имеем

$$\operatorname{div}\mathbf{A}\equiv\frac{\partial A^1}{\partial\lambda}+\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial(A^2\cos\varphi)}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial(A^3r^2)}{\partial r}, \quad (14.10)$$

где A^1, A^2, A^3 — контравариантые проекции вектора $\mathbf{A}$. Напомним, что

$$A^1=A_x/r\cos\varphi,\quad A^2=A_y/r,\quad A^3=A_z,$$

где A_x, A_y, A_z — классические зональная, меридиональная и вертикальная составляющие вектора $\mathbf{A}$. В случае скорости ветра $\mathbf{v}$

$$v^1=\frac{u}{r\cos\varphi}=\dot\lambda,\quad v^2=\frac{v}{r}=\dot\varphi,\quad v^3=w=\dot r=\dot z,$$

где u, v, w — обычные зональная, меридиональная и вертикальная составляющие скорости ветра (здесь точка над буквой обозначает индивидуальную производную по времени). Введя дифференциальные операторы

$$\frac{\partial}{\partial x}\equiv\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda},\quad \frac{\partial}{\partial y}\equiv\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial}{\partial z}\equiv\frac{\partial}{\partial r},$$

дивергенцию скорости ветра можем записать в хорошо известном виде

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial(v\cos\varphi)}{\partial y}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial(wr^2)}{\partial z}, \quad (14.10\text{a})$$

где среди дифференциалов $dx = r\cos\varphi\, d\lambda$, $dy = r\, d\varphi$ и $dz = dr$ только последний представляет полный дифференциал. В самом деле

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \neq \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) \neq \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \neq \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

В обобщенных координатах (λ, φ, p) $\operatorname{div}\mathbf{A}$ принимает вид

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{z_p}\frac{\delta}{r^2\delta\lambda}(z_p r^2 A'^1) + \frac{1}{z_p r^2\cos\varphi}\frac{\delta}{\delta\varphi}(z_p r^2 A'^2\cos\varphi) + \\ + \frac{1}{z_p}\frac{\delta}{r^2\delta p}(z_p r^2 A'^3), \qquad (14.10')$$

где z — высота изобарической поверхности p над уровнем моря (z — функция λ, φ, p и t); A'^1, A'^2, A'^3 — контравариантные проекции вектора $\mathbf{A}$ на оси координат λ, φ, p; $z_p \equiv \delta z/\delta p$.

Чтобы избежать недоразумений, используются символы

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}, \quad \frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial t}$$

для обозначения частных производных по λ, φ, z, t в том случае, когда эти переменные берутся в качестве независимых переменных, и символы

$$\frac{\delta}{\delta\lambda}, \quad \frac{\delta}{\delta\varphi}, \quad \frac{\delta}{\delta p}, \quad \frac{\delta}{\delta t}$$

для обозначения частных производных по λ, φ, p, t в том случае, когда эти переменные берутся в качестве независимых переменных.

Напомним, что

$$A'^1 = A^1, \; A'^2 = A^2, \; A'^3 = A^1\frac{\partial p}{\partial\lambda} + A^2\frac{\partial p}{\partial\varphi} + A^3\frac{\partial p}{\partial z} = \mathbf{A}\cdot\nabla p.$$

Если $A^3 = 0$, то вектор $\mathbf{A}$ горизонтальный, т. е. направлен по касательной к уровенной (геопотенциальной) поверхности, которая в динамической метеорологии принимается за сферу радиусом $r = a + z$, концентрическую с поверхностью земли (поверхность постоянной высоты z над средним уровнем моря $r = a$). Вектор с проекциями (A^1, A^2, 0) — горизонтальная составляющая $\mathbf{A}_h$ вектора $\mathbf{A}$ (ортогональная проекция $\mathbf{A}$ на горизонтальную плоскость x, y). Два первых члена в правой части (14.10) определяют $\operatorname{div}\mathbf{A}_h$. Более того, векторное поле $\mathbf{A}_h$ на геопотенциальной поверхности постоянной высоты представляет собой плоское векторное поле, дивергенция которого равна

$$\mathrm{div_h}\, \mathbf{A}_h = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial (A_y \cos\varphi)}{\partial y},$$

т. е. $\mathrm{div}\, \mathbf{A}_h = \mathrm{div_h}\, \mathbf{A}_h$. Обозначение $\mathrm{div_h}\, \mathbf{A}_h$ (горизонтальная дивергенция горизонтального вектора $\mathbf{A}_h$) часто и вполне оправданно используется в динамической метеорологии.

Если $A'^3 = 0$, то вектор $\mathbf{A}$ изобарический, т. е. направлен по касательной к изобарической поверхности $p = \mathrm{const}$. Вектор с проекциями $(A'^1, A'^2, 0)$ — изобарическая составляющая $\mathbf{A}_{is}$ вектора $\mathbf{A}$ (проекция $\mathbf{A}$ на плоскость x', y' при направляющей, параллельной оси z; здесь x' — касательная к кривой пересечения поверхностей $\varphi = \mathrm{const}$ и $p = \mathrm{const}$ с положительным направлением на восток, y' — касательная к кривой пересечения поверхностей $\lambda = \mathrm{const}$ и $p = \mathrm{const}$ с положительным направлением на север). Два первых члена в правой части (14.10′) определяют $\mathrm{div}\, \mathbf{A}_{is}$. Однако дивергенция $\mathrm{div_{is}}\, \mathbf{A}_{is}$ плоского векторного поля $\mathbf{A}_{is}$, связанного с изобарической поверхностью, зависит от метрики изобарической поверхности и не равна $\mathrm{div}\, \mathbf{A}_{is}$ ($\mathrm{div_{is}}\, \mathbf{A}_{is} \neq \mathrm{div}\, \mathbf{A}_{is}$). Тем не менее можно ввести оператор

$$\mathrm{div_{is}}\, \mathbf{A} \equiv \frac{\delta A_x}{\delta x} + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\delta (A_y \cos\varphi)}{\delta y}$$

при

$$\frac{\delta}{\delta x} \equiv \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\delta}{\delta\lambda} \quad \text{и} \quad \frac{\delta}{\delta y} \equiv \frac{1}{r}\frac{\delta}{\delta\varphi},$$

где $r = a + z$ — функция λ, φ, p и t. Этот оператор, однако, нельзя назвать изобарической дивергенцией. Скалярная величина $\mathrm{div_{is}}\, \mathbf{A}$ представляет собой изобарическую дивергенцию вектора $\mathbf{A}$ тогда и только тогда, когда изобарические поверхности горизонтальны (совпадают со сферическими поверхностями, концентрическими с земной поверхностью). В динамической метеорологии широко используется оператор $\mathrm{div}\, \mathbf{A}_{is}$, а не оператор $\mathrm{div_{is}}\, \mathbf{A}_{is}$.

Из (14.10′), (14.1) и (14.2) следует

$$\mathrm{div}\, \mathbf{A} = \mathrm{div}\, \mathbf{A}_{is} + \rho \frac{\delta(\alpha \mathbf{A}\cdot\nabla p)}{\delta p} \qquad (14.11)$$

при

$$\mathrm{div}\, \mathbf{A}_{is} = \rho \left\{ \frac{\delta(\alpha A_x)}{\delta x} + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\delta(\alpha A_y \cos\varphi)}{\delta y} \right\} = \rho\, \mathrm{div_{is}}\, \alpha\mathbf{A}, \qquad (14.11a)$$

где

$$\alpha = \rho^{-1}, \quad \frac{\delta}{\delta x} \approx \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\delta}{\delta\lambda}, \quad \frac{\delta}{\delta y} \approx \frac{1}{a}\frac{\delta}{\delta\varphi}.$$

В соотношении (14.11а) учтено не только уравнение гидростатики $z_p \approx -\alpha/g$, но также и малая толщина атмосферы ($r \approx a$).

Заменяя в (14.11) вектор $\mathbf{A}$ на $\mathbf{v}$, получаем

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \rho\left[\frac{\delta}{\delta x}(\alpha u) + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\delta}{\delta y}(\alpha v\cos\varphi) + \frac{\delta}{\delta p}\left\{\alpha\left(\omega - \frac{\partial p}{\partial t}\right)\right\}\right] =$$

$$= \rho\left\{\frac{d\alpha}{dt} - \frac{\delta\alpha}{\delta t} - \frac{\delta}{\delta p}\left(\alpha\frac{\partial p}{\partial t}\right)\right\} + \operatorname{div}_{is}\mathbf{v} + \frac{\delta\omega}{\delta p}, \qquad (14.10'а)$$

где $\omega \equiv \dot{p} \equiv dp/dt$, u и v — зональная и меридиональная составляющие скорости ветра. Используя теперь соотношения

$$\alpha\,(\partial p/\partial t) \approx \delta\phi/\delta t, \quad (\delta\phi/\delta p) + \alpha \approx 0,$$

справедливые при квазистатическом движении, приходим к следующему выражению для дивергенции:

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}_{is}\mathbf{v} + \frac{\delta\omega}{\delta p}.$$

В эйлеровых переменных λ, φ, p и t уравнение неразрывности (2.4) принимает с учетом последнего соотношения следующую простую форму:

$$\operatorname{div}_{is}\mathbf{v} + \frac{\delta\omega}{\delta p} = 0 \qquad (14.12)$$

или с учетом (14.11а)

$$\operatorname{div}\rho\mathbf{v}_{is} + \rho\frac{\delta\omega}{\delta p} = 0.$$

Для того чтобы ввести условия (14.1) и (14.2) в уравнения энергии (14.3) и (14.7), предварительно заметим

$$\mathbf{v}\cdot\nabla p + \rho\mathbf{v}\cdot\nabla\phi = \rho\mathbf{v}_h\cdot\nabla_{is}\phi + (\rho\mathbf{v}\cdot\nabla p)\left(\alpha + \frac{\delta\phi}{\delta p}\right) \approx \rho\mathbf{v}_h\cdot\nabla_{is}\phi, \qquad (14.13)$$

где $\nabla_{is}\,(\delta/\delta x,\ \delta/\delta y,\ 0)$ — дельта-оператор при $p = \text{const}$ [130, 132].

Подставляя теперь (14.2) и (14.13) в (13.1), (14.3), (14.7) и (14.8), получаем с учетом (14.1) и (14.12) приближенные уравнения движения

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\delta\mathbf{v}_h}{\delta t} + \mathbf{v}_h\cdot\nabla_{is}\mathbf{v}_h + \omega\frac{\delta\mathbf{v}_h}{\delta p} + 2\Omega\sin\varphi\mathbf{k}\times\mathbf{v}_h = -\nabla_{is}\phi + \mathbf{F}_h, \\ &0 = \frac{\delta\phi}{\delta p} + \alpha \end{aligned}\right\} \qquad (14.14)$$

(здесь $\mathbf{k}$ — единичный вертикальный вектор) и уравнения энергии в квазистатическом приближении [137]

$$\frac{\delta k}{\delta t} + \operatorname{div}_{is}\{(k+\phi)\mathbf{v}\} + \frac{\delta}{\delta p}\{(k+\phi)\omega\} = -\alpha\omega - D, \tag{14.3a}$$

$$\frac{\delta h}{\delta t} + \operatorname{div}_{is}(h\mathbf{v}) + \frac{\delta}{\delta p}(h\omega) = \alpha\omega + \Delta + Q_E, \tag{14.7a}$$

$$\frac{\delta(k+h)}{\delta t} + \operatorname{div}_{is}\{(k+h+\phi)\mathbf{v}\} + \frac{\delta}{\delta p}\{(k+h+\phi)\omega\} + \\ + D - (\Delta + Q_E) = 0. \tag{14.8a}$$

Появление в (14.7а) и (14.8а) величины h вместо $e + \phi$ будет пояснено ниже.

Уравнения движения (14.14) и неразрывности (14.12), а также уравнения энергии (14.3а), (14.7а) и (14.8а) не содержат плотности воздуха, что позволяет не рассматривать средневзвешенные величины.

Отпадает также необходимость вводить приближение Буссинеска (см. главу 8). Преимущества системы координат (λ, φ, p) сводятся к следующему.

1. Переход от сферической системы координат (λ, φ, $r = a + z$) к обобщенной квазисферической системе координат (λ, φ, p) возможен всюду и в любой момент времени, поскольку якобиан $\partial p/\partial z$ этого перехода в атмосфере никогда не изменяет знака: $\partial p/\partial z < 0$.

2. Элемент объема $r^2 \cos\varphi\, d\lambda\, d\varphi\, dp$ в системе координат (λ, φ, p) и квазистатическом приближении является инвариантной величиной. По этой причине крупномасштабные движения в (λ, φ, p)-пространстве представляют собой несжимаемые движения [см. уравнение (14.12)]. В таком пространстве распределение массы определяет давление p, благодаря чему плотность воздуха исключается из уравнений динамики атмосферы. Соответственно обычные (невзвешенные) средние значения (включая и напряжения Рейнольдса) в (λ, φ, p, t)-пространстве однозначно описывают среднее и турбулентное движение.

3. Уравнение неразрывности в системе координат (λ, φ, p) сохраняет диагностическое (но не прогностическое) значение.

Объединяя соотношения (14.5) и (14.11) с уравнениями (14.3а), (14.7а) и (14.8а), получаем соответствующие балансовые формы уравнений энергии:

$$\frac{\delta k}{\delta t} + \operatorname{div}_{is}\{(k+\phi)\mathbf{v} + \alpha\mathbf{A}\} + \\ + \frac{\delta}{\delta p}\{(k+\phi)\omega + \mathbf{A}\cdot\alpha\nabla p\} = -\alpha\omega - \Delta, \tag{14.3б}$$

$$\frac{\delta h}{\delta t} + \mathrm{div_{is}}(h\mathbf{v} + \alpha\mathbf{W}) + \frac{\delta}{\delta p}(h\omega + \mathbf{W}\cdot\alpha\nabla p) = \alpha\omega + \Delta, \tag{14.7б}$$

$$\frac{\delta}{\delta t}(k+h) + \mathrm{div_{is}}\{(k+h+\phi)\mathbf{v} + \alpha(\mathbf{W}+\mathbf{A})\} + \\ + \frac{\delta}{\delta p}\{(k+h+\phi)\omega + (\mathbf{W}+\mathbf{A})\cdot\alpha\nabla p\} = 0. \tag{14.8б}$$

Следует сделать одно замечание о переходе от уравнения (14.7) к (14.7а). Используя тождество $p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} \equiv \mathrm{div}\,p\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\nabla p$, приближенное соотношение (14.13), определение (14.11), уравнение неразрывности (14.12), приближение (14.2) и определение $h \equiv e + p\alpha$ удельной энтальпии, после некоторых преобразований получаем

$$\frac{\delta}{\delta t}(e+\phi) + \mathrm{div_{is}}(h\mathbf{v}) + \frac{\delta}{\delta p}(h\omega) - \\ - \frac{\delta}{\delta p}\left(p\alpha\frac{\partial p}{\partial t}\right) = \alpha\omega + Q_E + \Delta, \tag{14.7'}$$

где $\partial/\partial t$ — знак локальной производной по времени, когда λ, φ, z, t — независимые переменные. Затем, вспоминая, что в квазистатическом приближении $\alpha\,(\partial p/\partial t) = (\delta\phi/\delta t)$, находим

$$\frac{\delta}{\delta p}\left(p\alpha\frac{\partial p}{\partial t}\right) = \frac{\delta}{\delta p}\left(p\frac{\delta\phi}{\delta t}\right) = \frac{\delta\phi}{\delta t} - \frac{\delta}{\delta t}(p\alpha),$$

при этом использовано очевидное тождество $(\delta p/\delta t) \equiv 0$. Наконец, исключая величину $\delta\,\{p\alpha\,(\partial p/\partial t)\}/\delta p$ из двух последних уравнений, приходим к уравнению (14.7а) [137].

Из уравнений (14.7а) или (14.7б) следует, что в квазистатическом приближении уравнение (14.7) для полной потенциальной энергии равнозначно уравнению первого начала термодинамики (13.3). Из приближенного уравнения (14.8б) баланса полной энергии следует, что сумма $k+h$ представляет собой в квазистатическом приближении полную энергию $k+\phi+e$. Таким образом, в случае квазистатического движения энтальпия h может быть использована в качестве приближенного выражения для полной потенциальной энергии $\phi+e$ $(\phi+e \to h)$.

Выражения для изменения во времени кинетической и полной потенциальной энергии в некотором объеме воздуха легко получить, если проинтегрировать по этому объему уравнения (14.3б) и (14.7б). Выполним для примера такое интегрирование для всей атмосферы, расположенной выше изобарической поверхности p. Получаем

$$\left.\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta t}\left(\int\limits_0^p \frac{dp}{g}\oint\limits_\sigma k\,d\sigma\right) &= -\oint\limits_\sigma \{(k+\phi)\,\omega + \mathbf{A}\cdot\alpha\,\nabla p\}_p\,\frac{d\sigma}{g} - \\ &\quad -\int\limits_0^p \frac{dp}{g}\oint\limits_\sigma (\alpha\omega+\Delta)\,d\sigma, \\ \frac{\delta}{\delta t}\left(\int\limits_0^p \frac{dp}{g}\oint\limits_\sigma h\,d\sigma\right) &= -\oint\limits_\sigma (h\omega + \mathbf{W}\cdot\alpha\,\nabla p)_p\,\frac{d\sigma}{g} + \\ &\quad +\int\limits_0^p \frac{dp}{g}\oint\limits_\sigma (\alpha\omega+\Delta)\,d\sigma,\end{aligned}\right\} \tag{14.15}$$

где $d\sigma \approx a^2 \cos\varphi\, d\lambda\, d\varphi$, σ — площадь изобарической поверхности, приближенно равная площади поверхности земли [см. формулу (14.1)]. На основе уравнений (14.15), если их записать для двух уровней, легко получить уравнения баланса кинетической и полной потенциальной энергии в слое атмосферы, заключенном между двумя изобарическими поверхностями.

Первый член в правой части уравнений (14.15) представляет собой поток энергии через изобарическую поверхность p, а второй — взаимное преобразование выше уровня p полной потенциальной энергии и кинетической энергии из одного вида в другой. Конвективные части потоков через поверхность p представлены выражениями $-(k+\phi)\,\omega/g$ и $-h\omega/g$ для кинетической и полной потенциальной энергии соответственно. Знак этих потоков (направлены ли они вверх или вниз) зависит от корреляции на данном уровне p между механической энергией $k+\phi$ и энтальпией h, с одной стороны, и скоростью вертикального движения $-\omega/g$, с другой.

Имеется мало данных наблюдений для определения коэффициентов корреляции между k и $-\omega/g$ [103]. Однако коэффициент корреляции между ϕ и $-\omega/g$ или между z и $-\omega$ положителен (поток потенциальной энергии через поверхность p направлен вверх), если воздух движется вверх ($-\omega > 0$) в гребнях (большие значения z) и вниз ($-\omega < 0$) в ложбинах (малые значения z). В противном случае (нисходящее движение в гребнях и восходящее в ложбинах) этот коэффициент отрицателен.

Аналогично коэффициент корреляции между энтальпией h (т. е. температурой) и $-\omega/g$ положителен (поток полной потенциальной энергии через поверхность p направлен вверх), если теплый воздух через поверхность p поднимается, а холодный опускается. В противном случае (теплый воздух опускается, а холодный поднимается) этот коэффициент отрицателен. В тропосфере коэффициенты корреляции между температурой и $-\omega/g$, как правило, положительные [137].

Следует подчеркнуть, что уравнения баланса энергии (14.15) справедливы только в тех случаях, когда изобарическая поверхность p в пределах площади σ не пересекает земную поверхность, т. е. $p < p_0(\lambda, \varphi, t)$; здесь p_0 — давление воздуха на уровне земной поверхности. Если, однако, в некоторых районах $p > p_0$, то в уравнениях баланса (14.15) интервал интегрирования $(0, p)$ над такими районами должен быть заменен на интервал $(0, p_0)$. Принимая во внимание тот факт, что p_0 — функция λ, φ и t, для всех точек площади σ, где $p > p_0$, имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\delta}{\delta t}\int_0^{p_0} k\,dp + \operatorname{div}_{\text{is}}\left[\int_0^{p_0}\{(k+\phi)\mathbf{v}+\alpha\mathbf{A}\}\,dp\right] = \\ &\qquad = -\int_0^{p_0}(\alpha\omega+\Delta)\,dp - gz_0\frac{\partial p_0}{\partial t} + g\mathbf{A}_0\cdot\nabla(z-z_0), \\ &\frac{\delta}{\delta t}\int_0^{p_0} h\,dp + \operatorname{div}_{\text{is}}\left\{\int_0^{p_0}(h\mathbf{v}+\alpha\mathbf{W})\,dp\right\} = \\ &\qquad = \int_0^{p_0}(\alpha\omega+\Delta)\,dp + g\mathbf{W}_0\cdot\nabla(z-z_0). \end{aligned}\right\} \quad (14.16)$$

Здесь $z_0(\lambda, \varphi)$ — высота поверхности земли над средним уровнем моря $z = 0$; индекс 0 обозначает принадлежность величины к земной поверхности. При получении уравнений (14.16) учтено, что $w_0 = \mathbf{v}_\text{h}^0 \cdot \nabla_\text{h} z_0$, $p_0 = p(\lambda, \varphi, z_0, t) = p_0(\lambda, \varphi, t)$ и $\nabla_\text{h} p_0 = (\nabla_\text{h} p)_0 + (\partial p/\partial z)_0 \nabla_\text{h} z_0$ [132].

Поскольку все члены уравнений (14.16) не зависят от p, то, умножая их на $d\sigma/g = (a^2/g)\cos\varphi\, d\lambda\, d\varphi$ и интегрируя, получаем следующие уравнения баланса энергии всей атмосферы:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\delta}{\delta t}\int\limits_{\text{atm}} k\,dm + \oint\limits_{\sigma}\left\{z_0\frac{\partial p_0}{\partial t} - \mathbf{A}_0\cdot\nabla(z-z_0)\right\}d\sigma = \\ &\qquad\qquad = -\int\limits_{\text{atm}}(\alpha\omega+\Delta)\,dm, \\ &\frac{\delta}{\delta t}\int\limits_{\text{atm}} h\,dm + \oint\limits_{\sigma}\mathbf{W}_0\cdot\nabla(z-z_0)\,d\sigma = \int\limits_{\text{atm}}(\alpha\omega+\Delta)\,dm, \end{aligned}\right. \tag{14.17}$$

где $dm = (a^2/g)\cos\varphi\, d\lambda\, d\varphi\, dp$ — элемент массы. Ясно, что вклад члена $\oint\limits_{\sigma} z_0(\partial p_0/\partial t)\,d\sigma$ в изменение кинетической энергии атмосферы очень мал, поскольку $z_0 \geqslant 0$, а $\partial p_0/\partial t \gtreqless 0$; кроме того, вне гор z_0 мало́, а барическая тенденция имеет разные знаки (так что $\oint\limits_{\sigma}(\partial p_0/\partial t)\,d\sigma \approx 0$).

Аналогично, интегрируя уравнение (14.7′) по всей атмосфере, получаем

$$\frac{\delta}{\delta t}\int\limits_{\text{atm}}(e+\phi)\,dm - \oint\limits_{\sigma} z_0\frac{\partial p_0}{\partial t}\,d\sigma = \int\limits_{\text{atm}}(\alpha\omega+\Delta+Q_E)\,dm,$$

где поверхностный интеграл также очень мал. Отсюда

$$H \equiv \int\limits_{\text{atm}} h\,dm \approx \int\limits_{\text{atm}}(e+\phi)\,dm = E + \Phi, \tag{14.18}$$

где E, H и Φ — соответственно внутренняя энергия, энтальпия и гравитационная потенциальная энергия всей атмосферы.

Наконец, покажем, что сохраняют силу выражения для скорости образования C кинетической энергии, которые получены в п.п. 12.3 и 13.1. В самом деле, привлекая соотношение

$$\nabla_h p \approx \rho\nabla_{\text{js}}\phi.$$

на основе формулы (13.14) в квазистатическом приближении с учетом того, что ω обращается на земной поверхности в нуль, находим

$$\int\limits_{\text{atm}}(p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - g\rho w)\,d\tau \approx \int\limits_{\text{atm}} -\rho\mathbf{v}_h\cdot\nabla_{\text{is}}\phi\,d\tau =$$

$$= \int\limits_{\text{atm}}\phi\,\mathrm{div}\,\rho\mathbf{v}_{\text{is}}\,d\tau = -\int\limits_{\text{atm}}\phi\frac{\delta\omega}{\delta p}\,dm = -\int\limits_{\text{atm}}\alpha\omega\,dm,$$

при этом приняты во внимание (14.12), (14.2) и тождество

$$\operatorname{div} \rho\psi \mathbf{A}_{is} = \psi \operatorname{div} \rho\mathbf{A}_{is} + \rho\mathbf{A}_h \cdot \nabla_{is}\psi,$$

где $\mathbf{A}$ и ψ — соответственно произвольные вектор и скаляр.

14.2. Энергия, доступная для перехода в кинетическую энергию

Вслед за Маргулесом (1903 г.) неоднократно доказывалось, что переход полной потенциальной энергии в кинетическую — основная причина движений синоптического масштаба. Последние результаты исследования общей циркуляции подтверждают это положение. Таким образом, пополнение полной потенциальной энергии — основная проблема энергетики движений синоптического масштаба.

Предполагая, что атмосфера — механически изолированная система, и интегрируя уравнения (14.7) и (14.3) по всей атмосфере, получаем

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\Phi + E) = -C + \int\limits_{\text{atm}} \rho (Q + \Delta)\, d\tau, \\ \frac{\partial}{\partial t}(K) = C - \int\limits_{\text{atm}} \rho D\, d\tau, \end{cases} \tag{14.19}$$

где величина

$$C \equiv \int\limits_{\text{atm}} (p \operatorname{div} \mathbf{v} - g\rho w)\, d\tau \approx \int\limits_{\text{atm}} -\alpha\omega\, dm$$

определяет скорость перехода полной потенциальной энергии $\Phi + E = \int\limits_{\text{atm}} \rho (\phi + e)\, d\tau$ в кинетическую энергию $K = \frac{1}{2} \int\limits_{\text{atm}} \rho\, \mathbf{v}^2\, d\tau$ в пределах всей атмосферы.

Осредненные за большие интервалы времени значения C, $\int\limits_{\text{atm}} \rho\, \Delta\, d\tau$ и $\int\limits_{\text{atm}} \rho\, D\, d\tau$ положительны и равны между собой [см. формулы (12.25) и (14.5′)]. Чтобы избежать неправильного толкования уравнения (14.19), напомним, что величина Q должна быть заменена на Q_E, когда для внутренней энергии используется общее выражение [см. п. 12.1], и на $Q_R + Q_C + Q_L$, если привлекается упрощенное соотношение $e = c_{va}T + \text{const}$ (см. п. 12.2). Именно этот последний случай и рассматривается в дальнейшем (т. е. атмосфера предполагается сухой). Однако будут учтены притоки тепла Q_L (соответствующим образом распределенные в пространстве) вследствие фазовых переходов воды. Символы Q_R и Q_C обозначают соответственно скорость нагревания под влиянием поглощения радиации и явного тепла, поступающего от земной поверхности в атмосферу.

Переход полной потенциальной энергии $\Phi + E$ в кинетическую энергию K со скоростью C, равно как и обратный переход со скоростью $-C$, представляет собой процесс адиабатический и обратимый, в то же время увеличение полной потенциальной энергии $\Phi + E$ со скоростью $\int\limits_{atm} \rho (Q + \Delta) \, d\tau$ и разрушение кинетической энергии K под влиянием трения со скоростью $\int\limits_{atm} \rho D \, d\tau$ — процессы неадиабатические и необратимые. Если никаких других процессов, кроме обратимых процессов перехода $K \rightleftarrows (\Phi + E)$, в атмосфере нет, то движение будет адиабатическим ($Q = 0$, $\Delta = 0$). При этих условиях потенциальная температура Θ каждой воздушной частицы будет оставаться постоянной вдоль траектории движения ее. Другими словами, изэнтропические поверхности ($\Theta = \text{const}$) будут представлять собой поверхности, по которым перемещается воздух. При таком движении сохраняется полная энергия $K + \Phi + E$ атмосферы, а всякое увеличение (уменьшение) кинетической энергии K сопровождается равным по количеству уменьшением (увеличением) полной потенциальной энергии $\Phi + E$.

В главе 12 было показано, что наиболее важное значение имеет не столько общее количество тепла $\int\limits_{atm} \rho Q \, d\tau$, получаемое атмосферой, сколько распределение в пространстве источников ($Q > 0$) и стоков ($Q < 0$) тепла. Действительно, различие между реальным состоянием атмосферы и состоянием при гидростатическом равновесии как раз и определяется наличием источников и стоков тепла в атмосфере. Следует подчеркнуть, что приток тепла к атмосфере, находящейся в гидростатическом равновесии, и отток его сопровождаются нарушением равновесия и увеличением кинетической энергии; полная же потенциальная энергия, согласно (14.19), уменьшается в случае оттока и увеличивается в случае притока тепла [43].

Можно, таким образом, заключить, что более важным фактором, ответственным за генерацию и поддержание атмосферных движений синоптического и более крупного масштаба, является не полное количество тепла, переданное атмосфере, а неравномерное (по горизонтали) нагревание или охлаждение атмосферы, которое создают Солнце и подстилающая поверхность Земли. Таким образом, возникает важный вопрос: как учесть в уравнениях энергии такое неравномерное нагревание?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, обозначим через $(\Phi + E)_e$ полную потенциальную энергию атмосферы, когда последняя находится в устойчивом гидростатическом равновесии в поле силы тяжести Земли (индекс «e» используется ниже для обозначения условий устойчивого гидростатического равновесия). Из работы Маргулеса известно, что

$$(\Phi + E)_e \equiv \int\limits_{\text{atm}} \rho_e (h_a)_e \, d\tau_e = c_{pa} \int\limits_{\text{atm}} \rho_e T_e \, d\tau_e = \frac{c_{pa}}{R_a} \int\limits_{\text{atm}} p_e \, d\tau_e =$$

$$= \frac{c_{va}}{c_{pa} - c_{va}} \int\limits_{\text{atm}} \rho_e c_e^2 \, d\tau_e = 4\pi a^2 \frac{c_{pa}}{g} \int\limits_0^{p_0} T_e \, dp_e \approx 1{,}3 \cdot 10^{21} \text{ кДж}. \quad (14.20)$$

Здесь $d\tau_e$ — элементарный объем воздуха в гидростатическом равновесии; c_e — скорость звука, $c_e^2 = (c_{pa}/c_{va})(p_e/\rho_e)$; p_0 — давление на поверхности Земли ($p_0 \approx 1010$ мбар); T_e — температура воздуха при гидростатическом равновесии. Оценка $(\Phi + E)_e$ по (14.20) основана на том, что $c_e^2 \approx 10^5$ м$^2\cdot$с$^{-2}$, $c_{va}/c_{pa} = 5/7$ и $\int\limits_{\text{atm}} \rho \, d\tau = 5{,}13 \cdot 10^{18}$ кг. Температура воздуха T_e, как и все другие величины, при гидростатическом равновесии не зависит от горизонтальных координат (λ, φ). Полная потенциальная энергия $(\Phi + E)_e$ атмосферы при устойчивом гидростатическом равновесии представляет огромную часть полной потенциальной энергии, которая не может быть превращена в кинетическую энергию. Наоборот, разность

$$A \equiv (\Phi + E) - (\Phi + E)_e \quad (14.21)$$

представляет собой часть полной потенциальной энергии, которая может быть трансформирована в кинетическую энергию. Равновесное состояние (T_e, p_e) получается из фактического состояния (T, p) посредством сухоадиабатического преобразования; атмосфера предполагается термически и механически изолированной в течение этого процесса. Понятие энергии, доступной для превращения в кинетическую, было впервые введено Маргулесом (1903 г.) [50], который назвал ее доступной кинетической энергией. Это понятие вновь введено Лоренцом (1955 г.) [43] под названием *доступной потенциальной энергии*, поскольку эта энергия относится скорее к полной потенциальной энергии, чем к кинетической.

Определение этого важного понятия основывается на трех следующих фактах.

1. Сумма кинетической (K), потенциальной (Φ) и внутренней (E) энергии механически и термически изолированной жидкой, лишенной трения системы является постоянной величиной ($K + \Phi + E = \text{const}$).

2. Когда такая система достигает состояния устойчивого гидростатического равновесия в поле силы тяжести Земли, полная потенциальная энергия $\Phi + E$ принимает минимальное значение $(\Phi + E)_e$ (см. п. 14.6).

3. Состояние устойчивого гидростатического равновесия может быть достигнуто адиабатическим (изэнтропическим) перемещением воздушных частиц из их исходного состояния. Изэнтропическое движение в атмосфере динамически возможно, однако состояния устойчивого гидростатического равновесия можно при этом не достичь. Иными словами, состояние устойчивого равновесия не является единственно возможным среди всех состояний атмосферы. При изэнтропической перестройке фактического состояния атмосферы, в процессе которой достигается состояние устойчивого равновесия, волнообразные изэнтропические поверхности $[\Theta(\lambda, \varphi, z, t) = \text{const}]$ преобразуются в горизонтальные $[\Theta_e(z, t) = \text{const}]$. При этом более теплый воздух в ложбинах изэнтропических поверхностей поднимается и расширяется, в то время как более холодный воздух в гребнях этих поверхностей оседает и сжимается.

Помня, что наклон изобарических поверхностей на один порядок величины меньше наклона изэнтропических поверхностей, на основании результатов главы 13 можем заключить, что этот динамический процесс вызывает превращение полной потенциальной энергии $\Phi + E$ в кинетическую энергию K. Поскольку это превращение энергии является обратимым и адиабатическим, то состояние устойчивого гидростатического равновесия $[T_e(z, t), p_e(z, t)]$, достигнутое в результате изэнтропического изменения фактического состояния $[T(\lambda, \varphi, z, t), p(\lambda, \varphi, z, t)]$ атмосферы, остается неизменным в отсутствии других энергетических процессов, кроме превращения $\Phi + E$ в K. Из этого факта вытекают два следствия [47]: а) скорость C превращения $\Phi + E$ в K представляет собой также скорость перехода A в K [см. уравнения баланса (14.19) и (14.36)]; б) полная потенциальная энергия $(\Phi + E)_e$ в состоянии устойчивого гидростатического равновесия может рассматриваться как недоступная потенциальная энергия; доступная потенциальная энергия A — это превышение полной потенциальной энергии $\Phi + E$ над недоступной потенциальной энергией $(\Phi + E)_e$ [см. формулу (14.21)] [47].

В добавление к трем фактам (1, 2 и 3), упомянутым выше, предположим, что движение является квазистатическим и имеет тенденцию восстанавливать равновесное состояние; при этих условиях происходит уменьшение $[\Delta(\Phi + E) < 0]$ полной потенциальной энергии $\Phi + E$ и увеличение $(\Delta K > 0)$ кинетической энергии K, при этом $\Delta K + \Delta(\Phi + E) = 0$. Максимальное значение ΔK определяется разностью (14.21). Этот максимальный прирост кинетической энергии равен, по определению, максимальному количеству полной потенциальной энергии, доступной для превращения в кинетическую энергию в рассматриваемой системе. Максимальное значение ΔK, равное A, достигается тогда, когда система оказывается в состоянии устойчивого гидростатического равновесия:

$$K_e - K = -(\Phi + E)_e + (\Phi + E) = A.$$

Эта величина зависит только от распределения массы внутри системы (см. также конец п. 14.4).

Надо, однако, заметить, что необязательно вся доступная энергия (14.21) превращается в кинетическую, а состояние гидростатического равновесия необязательно является естественным состоянием атмосферы. Например, в случае постоянного вихря кинетическая энергия системы остается неизменной и, следовательно, доступная энергия A такой системы не может превратиться в кинетическую [43].

14.3. Стандартное состояние атмосферы

В предыдущем параграфе уже отмечено, что если не наблюдается других процессов, кроме обратимых переходов энергии $(\Phi + E) \rightleftarrows K$, то потенциальная температура каждой воздушной частицы остается неизменной вдоль всей траектории ее движения. Иными словами, изэнтропические поверхности $(\Theta = \mathrm{const})$ представляют собой материальные поверхности, перемещающиеся вместе с воздушной массой. В этом случае распределение в пространстве потенциальной температуры в некоторый момент времени t можно связать с распределением ее в любой другой момент времени. Взаимно-однозначное соответствие между двумя такими распределениями обусловливается траекториями воздушных частиц; рассматривая положение одной и той же изэнтропической поверхности в два разных момента времени t' и t'' $(t' < t'')$, соответствующие точки P' и P'' найдем как точки пересечения траектории частицы с рассматриваемой изэнтропической поверхностью (при ее положении в указанные выше моменты времени).

Среди возможных распределений потенциальной температуры в пространстве наблюдается распределение, характеризующее так называемое стандартное состояние атмосферы. Это состояние соответствует наименьшему значению полной потенциальной энергии $(\Phi + E)_e$ (см. п. 14.6). При этом состоянии изобарические и изэнтропические поверхности совпадают с геопотенциальными поверхностями, на каждой из которых метеорологические величины p, ρ, T, Θ для данного фактического состояния постоянны. Кроме того, состояние гидростатического равновесия должно быть устойчивым $[(\partial\Theta/\partial z) > 0]$, т. е. потенциальная температура должна возрастать с высотой z. Это условие является существенным требованием. Действительно, в противном случае невозможно выполнить переход от сферических координат (λ, φ, z) к обобщенным координатам $(\lambda, \varphi, \Theta)$ и наоборот; и следовательно, будет нарушено взаимно-однозначное соответствие между точками с координатами (λ, φ, z) и $(\lambda, \varphi, \Theta)$. Предполагая, что $\partial\Theta/\partial z$ и $\partial\Theta_e/\partial z$ всюду в атмосфере положительны, уравнения $\Theta = \Theta(\lambda, \varphi, z, t)$ и $\Theta = \Theta_e(z, t)$ можем разрешить относительно z, т. е. для любого момента времени указать вид функций $z = z(\lambda, \varphi, \Theta, t)$ и $z = z_e(\Theta, t)$.

Стандартное состояние, очевидно, наиболее удобно описывается в системе координат, в которой потенциальная температура Θ играет роль «вертикальной» координаты. Итак, стандартное состояние атмосферы достигается путем адиабатической перестройки фактического состояния атмосферы, при этом устанавливается устойчивое гидростатическое равновесие. При такой перестройке сохраняется не только потенциальная температура воздушных частиц, но и их масса. Следовательно, полная масса атмосферы над изэнтропической поверхностью $\Theta(\lambda, \varphi, z, t)$ при фактическом состоянии равна полной массе атмосферы над изэнтропической поверхностью $\Theta_e(z, t)$ при стандартном состоянии. Выразим этот факт с помощью соотношения [16]

$$\oint\limits_{\sigma} d\sigma \int\limits_{\Theta}^{\infty} \rho \frac{\partial z}{\partial \Theta} d\Theta = \oint\limits_{\sigma} d\sigma \int\limits_{\Theta_e}^{\infty} \rho_e \frac{\partial z_e}{\partial \Theta} d\Theta =$$

$$= 4\pi a^2 \int\limits_{\Theta_e}^{\infty} \rho_e \frac{\partial z_e}{\partial \Theta} d\Theta, \qquad (14.22)$$

где $d\sigma = a^2 \cos\varphi \, d\lambda \, d\varphi$ — элемент площади земной поверхности; $\Theta > \Theta_0$ в любой момент времени; $\Theta_0 = \Theta_0(\lambda, \varphi, t)$ — значение Θ на поверхности земли:

$$\Theta_0 = \Theta(\lambda, \varphi, z_0(\lambda, \varphi), t) = \Theta_0(\lambda, \varphi, t).$$

Здесь z_0 — высота земной поверхности над уровнем моря.

Допустим, что Θ_L и Θ_H — наименьшее и наибольшее значение потенциальной температуры $\Theta_0(\lambda, \varphi, t)$ на земной поверхности ($\Theta_L \leqslant \Theta_0 \leqslant \Theta_H$). Соотношение (14.22) справедливо при $\Theta \geqslant \Theta_H$. Если последнее неравенство не выполняется (что возможно при $\Theta_L \leqslant \Theta \leqslant \Theta_H$), левая часть (14.22) должна быть записана следующим образом:

$$\int\limits_{\sigma'} d\sigma \int\limits_{\Theta}^{\infty} \rho \frac{\partial z}{\partial \Theta} d\Theta + \int\limits_{\sigma''} d\sigma \int\limits_{\Theta_0}^{\infty} \rho \frac{\partial z}{\partial \Theta} d\Theta,$$

где σ' — часть σ, в которой $\Theta > \Theta_0$, и $\sigma'' = \sigma - \sigma'$ — часть σ, в которой $\Theta < \Theta_0$. Если, однако, задать $(\partial z/\partial\Theta) = (\partial\Theta/\partial z)^{-1}$ ниже земной поверхности, приняв для $\partial z/\partial\Theta$ нулевое значение, а для $\partial\Theta/\partial z$ — бесконечность (там, где $\Theta < \Theta_0$), то соотношение (14.22) будет выполняться во всем интервале $\Theta_L \leqslant \Theta < \infty$ [16, 43]. Необходимо заметить, что в фактическом состоянии Θ меняется от значения Θ_0 до бесконечности при условии, что $\Theta_L \leqslant \Theta_0 < \Theta_H$, в то время как в стандартном состоянии Θ меняется от значения Θ_L до бесконечности ($\Theta_L \leqslant \Theta < \infty$).

Фактическое состояние движения является квазистатическим, а стандартное — состоянием гидростатического равновесия, поэтому приближенно имеем

$$p(\lambda, \varphi, \Theta, t) \approx \int\limits_{\Theta}^{\infty} g\rho \frac{\partial z}{\partial \Theta} d\Theta, \tag{14.23}$$

а точно

$$p_e(\Theta, t) = \int\limits_{\Theta}^{\infty} g\rho_e \frac{\partial z_e}{\partial \Theta} d\Theta. \tag{14.24}$$

Когда $\Theta < \Theta_0$, следует использовать вышеупомянутое расширенное определение $\partial z/\partial\Theta$.

Введем среднее значение [43] произвольного параметра $X = X(\lambda, \varphi, \Theta, t)$ на изэнтропической поверхности Θ:

$$\overline{(X)}_\Theta = \overline{(X)}_\Theta(\Theta, t) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\lambda \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} X \cos\varphi \, d\varphi. \tag{14.25}$$

Когда $\Theta < \Theta_0$, при $\Theta_L \leqslant \Theta_0 \leqslant \Theta_H$ изэнтропическая поверхность пересекает поверхность земли и среднее значение $\overline{(X)}_\Theta$ находится с помощью соотношения

$$4\pi a^2 \overline{(X)}_\Theta = \int_{\sigma'} X \, d\sigma + \int_{\sigma''} X_0 \, d\sigma, \qquad (14.25')$$

где σ' и σ'' определены выше, $X_0 = X_0(\lambda, \varphi, t)$ — значение X на поверхности земли $[X_0(\lambda, \varphi, t) = X\{\lambda, \varphi, \Theta_0(\lambda, \varphi, t), t\}]$.

Если, однако, определение X распространить на область ниже земной поверхности, положив $X(\lambda, \varphi, \Theta, t) \equiv X_0(\lambda, \varphi, t)$ при $\Theta < \Theta_0$, то (14.25) будет справедливо во всем интервале $\Theta_L \leqslant \leqslant \Theta < \infty$ [43]. Вводя выражения (14.23) и (14.24) в соотношение (14.22), с учетом (14.25) получаем

$$p_e(\Theta, t) = \int_\Theta^\infty g\rho_e \frac{\partial z_e}{\partial \Theta} d\Theta = \int_\Theta^\infty g \overline{\left(\rho \frac{\partial z}{\partial \Theta}\right)_\Theta} d\Theta \approx \overline{(p)}_\Theta. \qquad (14.26)$$

Полагая $\Theta = \Theta_L$ в (14.26), находим

$$p_e(\Theta_L, t) = \int_{\Theta_L}^\infty g\rho_e \frac{\partial z_e}{\partial \Theta} d\Theta = \int_{\Theta_L}^\infty g \overline{\left(\rho \frac{\partial z}{\partial \Theta}\right)_\Theta} d\Theta = \overline{(p_0)}_\Theta = \text{const}, \qquad (14.26а)$$

где $p_0 = p_0(\lambda, \varphi, t)$ — давление на земной поверхности, а величина

$$4\pi a^2 \int_{\Theta_L}^\infty \overline{\left(\rho \frac{\partial z}{\partial \Theta}\right)_\Theta} d\Theta$$

представляет собой полную массу атмосферы; таким образом, $\overline{(p_0)}_\Theta$ и $p_e(\Theta_L, t)$ — постоянные. В самом деле, обе величины представляют собой вес столба атмосферы единичного сечения. При фактическом состоянии давление p меняется от значения p_0 на поверхности до нуля, а при стандартном состоянии p_e меняется от значения $\overline{(p_0)}_\Theta$ на поверхности до нуля.

Наконец, получим уравнение, определяющее стандартное состояние через параметры фактического состояния атмосферы.

Для этого необходимо, во-первых, исключить плотность ρ_e и температуру T_e воздуха с помощью уравнения статики

$$(1/\rho_e)(\partial p_e/\partial z) + g = 0,$$

которое является точным, уравнения состояния $p_e = R_a \rho_e T_e$ и определения потенциальной температуры $\Theta_e = T_e (p_{00}/p_e)^k$, где $k \equiv R_a/c_{pa} = {}^2/_7$ и $p_{00} = 1000$ мбар. Поступив так, получаем

$$\Theta_e \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p_e}{p_{00}}\right)^k + \frac{g}{c_{pa}} = 0. \tag{14.27}$$

Используя сейчас Θ как вертикальную координату вместо z, заменяя Θ_e на Θ и z на z_e и затем умножая (14.27) на $\partial z_e/\partial\Theta$, находим

$$\Theta \frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\frac{p_e}{p_{00}}\right)^k + \frac{g}{c_{pa}} \frac{\partial z_e}{\partial \Theta} = 0. \tag{14.27'}$$

Интегрируя это уравнение по Θ, получаем [16] соотношение

$$z_e(\Theta,\ t) = -\frac{c_{pa}}{g} \int\limits_{\Theta_L}^{\Theta} \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\frac{p_e}{p_{00}}\right)^k d\Theta, \tag{14.28}$$

в котором, согласно (14.26), p_e можно оценить по фактическому состоянию атмосферы $[p_e \approx \overline{(p)}_\Theta]$.

14.4. Уравнения баланса доступной и недоступной потенциальной энергии

Установим вид уравнений баланса в переменных λ, φ, Θ, t. Для этого необходимо уравнение неразрывности записать также в этих переменных. Легко видеть, что полная производная по времени от элемента массы $dm = a^2 \rho \cos\varphi\, (\partial z/\partial\Theta)\, d\lambda\, d\varphi\, d\Theta$ принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(\rho \frac{\partial z}{\partial \Theta} a^2 \cos\varphi\, d\lambda\, d\varphi\, d\Theta\right) = \left[\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \frac{\partial z}{\partial \Theta}\right)\right\}_\Theta + \left\{\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\rho \frac{\partial z}{\partial \Theta} \dot{\lambda}\right)\right\}_\Theta + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\cos\varphi}\left\{\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\rho \frac{\partial z}{\partial \Theta} \dot{\varphi} \cos\varphi\right)\right\}_\Theta + \frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\rho \frac{\partial z}{\partial \Theta} \dot{\Theta}\right)\right] a^2 \cos\varphi \times$$
$$\times\, d\lambda\, d\varphi\, d\Theta,$$

где $\dot{\lambda}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\Theta}$ — полные производные от λ, φ, Θ по t; индекс Θ напоминает нам, что частные производные $\partial/\partial t$, $\partial/\partial\lambda$, $\partial/\partial\varphi$ берутся при постоянном Θ. На основе приведенного соотношения легко получить уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \frac{\partial z}{\partial \Theta}\right)_\Theta + \frac{1}{a\cos\varphi}\left\{\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\rho \frac{\partial z}{\partial \Theta} u\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\rho \frac{\partial z}{\partial \Theta} v \cos\varphi\right)\right\}_\Theta +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \Theta}\left(\rho \frac{\partial z}{\partial \Theta} \frac{d\Theta}{dt}\right) = 0. \tag{14.29}$$

выражающее инвариантность $[(d/dt)(dm) = 0]$ элемента массы dm. Интегрируя уравнение (14.29) вдоль изэнтропической поверхности Θ, получаем

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}\overline{\left(\rho\frac{\partial z}{\partial\Theta}\right)_\Theta}\right\}_\Theta + \frac{\partial}{\partial\Theta}\overline{\left(\rho\frac{\partial z}{\partial\Theta}\frac{d\Theta}{dt}\right)_\Theta} = 0. \qquad (14.29a)$$

Из квазистатического приближения (14.23) следует

$$\frac{\partial p}{\partial\Theta} = -g\rho\frac{\partial z}{\partial\Theta}.$$

Вставляя это уравнение в (14.29) и затем интегрируя (14.29) по Θ в интервале (Θ, ∞), получаем [44]

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_\Theta = \frac{1}{a\cos\varphi}\int\limits_\Theta^\infty\left\{\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial p}{\partial\Theta}u\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial p}{\partial\Theta}v\cos\varphi\right)\right\}_\Theta d\Theta - -\frac{\partial p}{\partial\Theta}\frac{d\Theta}{dt}. \qquad (14.29б)$$

Необходимо также ввести потенциальную температуру Θ в первый закон термодинамики. В связи с этим вернемся к уравнению (13.3) и заменим в нем h на $(c_{pa}T + \text{const})$ и Q_E на $Q \equiv \equiv Q_R + Q_C + Q_L$ (см. п. 12.2). В результате получаем

$$\frac{c_{pa}T}{\Theta}\frac{d\Theta}{dt} = Q + \Delta. \qquad (14.30)$$

Теперь вернемся к выражению (14.20) для недоступной потенциальной энергии $(\Phi + E)_e$. Используя первое определение, получаем

$$(\Phi + E)_e = 4\pi a^2 c_{pa}\int\limits_0^\infty \rho_e T_e\,dz_e = 4\pi a^2\frac{c_{pa}}{g}\int\limits_0^{\overline{(p_0)_\Theta}} T_e\,dp_e = = \frac{4\pi a^2}{p_{00}^k}\frac{c_{pa}}{g}\int\limits_0^{\overline{(p_0)_\Theta}}\Theta_e p_e^k\,dp_e$$

и окончательно

$$(\Phi + E)_e = \frac{4\pi a^2}{(k+1)\,p_{00}^k}\frac{c_{pa}}{g}\left[\int\limits_{\Theta_L}^\infty p_e^{k+1}d\Theta_e + \Theta_L\left\{\overline{(p_0)_\Theta}\right\}^{k+1}\right], \qquad (14.31)$$

при этом использовано уравнение статики $dp_e + g\rho_e\,dz_e = 0$, определение потенциальной температуры $\Theta_e = T_e\,(p_{00}/p_e)^k$ для стандартного состояния, а также применено интегрирование по частям. Необходимо отметить, что $\overline{(p_0)}_\Theta$ — величина постоянная (вес атмосферы на единицу площади) и что недоступная энергия $(\Phi + E)_e$ является только функцией времени.

Сейчас мы уже в состоянии вычислить частную производную от $(\Phi + E)_e$ по t; имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi + E)_e = \frac{4\pi a^2}{p_{00}^k}\frac{c_{pa}}{g}\int\limits_{\Theta_L}^{\infty} p_e^k\left(\frac{\partial p_e}{\partial t}\right)_\Theta d\Theta. \qquad (14.32)$$

Вычисляя производную $(\Phi + E)_e$ по t, надо помнить, что Θ_L — функция времени. Принимая во внимание (14.26), получаем

$$\left(\frac{\partial p_e}{\partial t}\right)_\Theta = \int\limits_{\Theta}^{\infty} g\left\{\frac{\partial}{\partial t}\overline{\left(\rho\frac{\partial z}{\partial \Theta}\right)_\Theta}\right\}_\Theta d\Theta \qquad (14.33)$$

или с учетом уравнения неразрывности (14.29a) и уравнения (14.30)

$$\left(\frac{\partial p_e}{\partial t}\right)_\Theta = g\overline{\left(\rho\frac{\partial z}{\partial \Theta}\frac{d\Theta}{dt}\right)_\Theta} = g\Theta\overline{\left(\frac{\rho(Q + \Delta)}{c_{pa}T}\frac{\partial z}{\partial \Theta}\right)_\Theta}. \qquad (14.34)$$

Окончательно, вводя уравнение (14.34) и приближенное соотношение $p_e \approx \overline{(p)}_\Theta$ [см. формулу (14.26)] в уравнение (14.32), а также привлекая классическую формулу $\Theta/T = (p_{00}/p)^k$ и определение (14.25) среднего значения на изэнтропической поверхности, получаем уравнение баланса недоступной энергии $(\Phi + E)_e$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi + E)_e = \int\limits_{\mathrm{atm}}\left\{\overline{(p)}_\Theta/p\right\}^k\rho(Q + \Delta)\,d\tau. \qquad (14.35)$$

Вычитая из уравнения баланса (14.29) полной потенциальной энергии $(\Phi + E)$ уравнение баланса (14.35) недоступной энергии $(\Phi + E)_e$, получаем с учетом определения (14.21) уравнение баланса доступной потенциальной энергии A [47]:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \int\limits_{\mathrm{atm}}\left[(Q + \Delta)\left(1 - \{\overline{(p)}_\Theta/p\}^k\right) + \alpha\omega\right]dm, \qquad (14.36)$$

где $dm = \rho d\tau$. Множитель $N = 1 - \{\overline{(p)}_\Theta/p\}^k$ характеризует эффективность местного притока тепла при образовании доступной потенциальной энергии A [16, 44, 47]. Он может быть как положительным (при $p > \overline{(p)}_\Theta$, малые высоты), так и отрицательным (при $p < \overline{(p)}_\Theta$, большие высоты). Как правило, охлаждение на больших высотах $(Q < 0)$ связано с нагреванием $(Q > 0)$

на малых высотах, поэтому приток тепла Q, как правило, генерирует доступную потенциальную энергию A. С другой стороны, нагревание за счет трения ($\Delta > 0$) будет уничтожать доступную потенциальную энергию на больших высотах и генерировать ее на малых высотах, приблизительно компенсируя друг друга.

Лоренц [47] выполнил оценку среднего распределения множителя N в меридиональной плоскости северного полушария.

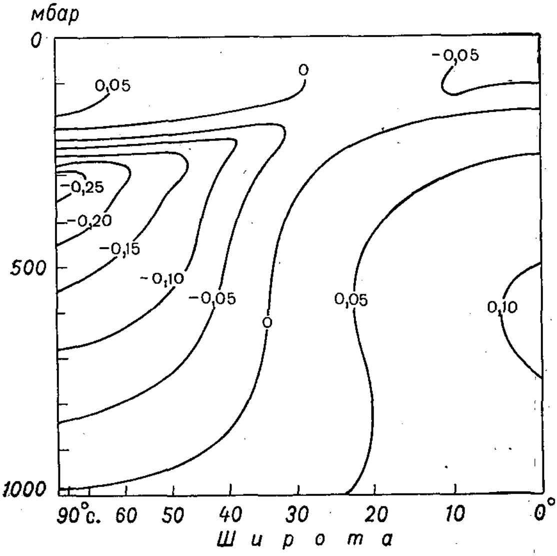

Рис. 15. Зависимость множителя N от широты φ и давления p (по Лоренцу [47]).

Он нашел, что в тропосфере N меняется от 0,10 в экваториальной области до нуля в субтропических широтах; к северу от этих широт множитель N отрицателен; наибольшего по абсолютной величине значения ($N \approx -0{,}25$) множитель N достигает под полярной тропопаузой; в нижней стратосфере, однако, множитель N, как правило, отрицателен в низких широтах ($0 > N > -0{,}05$) и положителен ($0 < N < 0{,}05$) в высоких (рис. 15). Принимая во внимание тот факт, что $Q > 0$ в низких и $Q < 0$ в высоких широтах, в то время как Δ положительно всюду, легко показать, что скорость образования G доступной потенциальной энергии

$$G = \int_{\mathrm{atm}} \rho (Q + \Delta) N \, d\tau \tag{14.37}$$

можно представить в приближенном виде

$$G \approx \int\limits_{\text{atm}} \rho Q N \, d\tau > 0. \qquad (14.37\text{a})$$

Вклад тропосферы (где, как правило, $N > 0$ и $Q > 0$ или $N < 0$ и $Q < 0$) в генерацию доступной потенциальной энергии A положителен, в то время как вклад нижней стратосферы (где, как правило, $N < 0$ и $Q > 0$ или $N > 0$ и $Q < 0$) отрицателен; вклад тропосферы, однако, намного превосходит вклад стратосферы, обусловливая увеличение доступной потенциальной энергии A.

Вернемся еще раз к уравнению баланса (14.35) недоступной потенциальной энергии. Множитель $\overline{((p)_\Theta/p)^k}$ здесь всегда положителен и близок к единице ($0{,}9 < \overline{((p)_\Theta/p)^k} < 1{,}25$). С учетом соотношения (12.19) уравнение баланса, записанное в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi + E)_e \approx \int\limits_{\text{atm}} \overline{\{(p)_\Theta/p\}^k} \rho \Delta \, d\tau \approx \int\limits_{\text{atm}} \rho \Delta \, d\tau, \qquad (14.35\text{a})$$

обеспечивает приемлемое приближение для скорости образования недоступной потенциальной энергии $(\Phi + E)_e$. Таким образом, скорость образования недоступной потенциальной энергии $(\Phi + E)_e$ приблизительно равна скорости образования полной потенциальной энергии $\Phi + E$ только за счет нагревания, обусловленного трением.

В п. 14.3 были рассмотрены адиабатические процессы. Сейчас обсудим неадиабатические процессы. Мы уже видели, что результирующий приток тепла Q под влиянием всех процессов, кроме трения, за длительные промежутки времени близок к нулю [см. уравнение (12.19)]. Таким образом, приращение величины $\Phi + E$ за такие интервалы времени под влиянием одного лишь трения равно приращению $\Phi + E$ за счет всех возможных видов притока тепла (притока, обусловленного трением Δ, радиационного притока Q_R, притока вследствие молекулярной и турбулентной теплопроводности в пограничном слое Q_C, за счет скрытой теплоты фазовых переходов воды Q_L; см. п. 12.2) [47].

Трение, однако, превращает кинетическую энергию K в полную потенциальную энергию $\Phi + E$ и увеличивает более или менее равномерно потенциальную температуру изэнтропических слоев, не изменяя заметно горизонтальные градиенты давления (медленный процесс). Трение должно поэтому увеличивать полную потенциальную энергию $\Phi + E$ стандартного состояния атмосферы, представляющую собой недоступную потенциальную энергию. Приближенное уравнение баланса (14.35а) показывает, что трение увеличивает полную потенциальную энергию $(\Phi+E)_e$ стандартного состояния приблизительно так же, как оно увеличивает полную потенциальную энергию $\Phi+E$ фактического состояния атмосферы [см. формулы (14.19) и (14.35а)]. Следовательно, скорость генерации G доступной потенциальной энергии A за счет трения должна быть намного меньше скорости образования полной потенциальной энергии $\Phi+E$ под влиянием того же трения (диссипация кинетической энергии K вызывает переход K в $\Phi+E$). Доступная потенциальная энергия образуется под влиянием главным образом всех видов притока тепла, кроме притока, обусловленного трением; по этой причине доступная потенциальная энергия A служит удобной мерой той части $\Phi+E$, которая наиболее доступна для перехода в кинетическую энергию K. Этот факт и отражает приближенное соотношение (14.37а) для скорости генерации G доступной потенциальной энергии [47]. В заключение можно сказать, что доступная потенциальная энергия образуется под влиянием главным образом неравномерно распределенных в пространстве источников и стоков тепла ($Q \gtrless 0$), в то время как недоступная потенциальная энергия образуется в основном за счет притока тепла, обусловленного трением.

Мы уже отмечали (см. п. 14.2), что адиабатическое движение, трансформирующее фактическое состояние атмосферы в соответствующее ему стандартное состояние, не обязательно осуществляется в атмосфере. В самом деле, энергетические процессы, отличающиеся от адиабатических и обратимых переходов энергии $(\Phi+E) \rightleftarrows K$, всегда и одновременно происходят в атмосфере. Например, адиабатический и обратимый переход $\Phi+E$ в K будет сопровождаться образованием A под влиянием неравномерно распределенных источников тепла и потерями K за счет трения. Как правило, стандартное состояние никогда не достигается, так что доступная потенциальная энергия A представляет максимальное количество полной потенциальной энергии, доступное для перехода в кинетическую энергию K. Образование A под влиянием неравномерно распределенных притоков тепла в реальной атмосфере происходит так, что, несмотря на обратимость процесса перехода энергии $A \rightleftarrows K$, количество энергии в форме A и K изменяется в одном и том же направлении (см. конец п. 14.7), вследствие чего баланс сил давления, тяжести и Кориолиса (геострофическое равновесие) достигается раньше, чем баланс сил тяжести и давления (гидростатическое равновесие). Однако связать доступность энергии с геострофическим равновесием не так-то легко [66].

Следуя Лоренцу [47], можем заключить, что генерация доступной потенциальной энергии A со скоростью G под влиянием Q [см. формулу (14.37а)], переход доступной потенциальной энергии A в кинетическую K со скоростью C вследствие обратимых

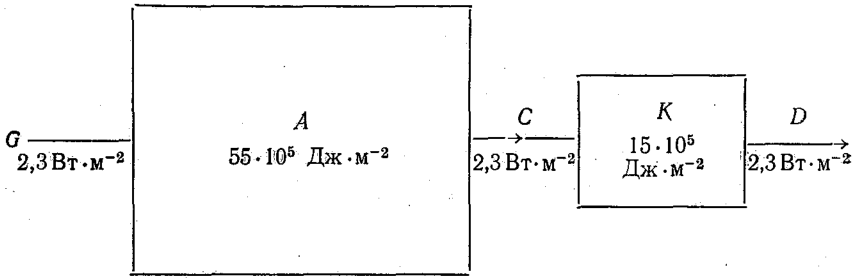

Рис. 16. Основной цикл преобразования энергии общей циркуляции атмосферы (по Орту [61]).

адиабатических процессов [см. формулу (13.14)] и диссипация кинетической энергии K со скоростью D за счет трения представляют собой три ступени основного энергетического цикла общей циркуляции (рис. 16).

14.5. Фактическое состояние атмосферы

Чтобы получить выражение для полной потенциальной энергии $\Phi+E$ в случае фактического состояния атмосферы, можно поступить так же, как и в предыдущем параграфе, где было найдено выражение (14.31) для полной потенциальной энергии стандартного состояния $(\Phi+E)_e$. Существует, однако, заметное различие между $\Phi+E$ и $(\Phi+E)_e$. Формула (14.31) для $(\Phi+E)_e$ точная, в то время как формула для $\Phi+E$, если ее получить аналогичным образом, уже не будет точной. Приближенность результатов является следствием неоднократного использования уравнения статики (14.2) ($\chi\approx 0$) [138]: первый раз — при определении $\Phi+E$ по соотношению (14.18)

$$\Phi+E\equiv\int\limits_{\mathrm{atm}}\{c_{\mathrm{va}}T+\phi(\chi/g)\}\,\rho\,d\tau\approx\int\limits_{\mathrm{atm}}c_{\mathrm{pa}}\rho T\,d\tau \qquad (14.38)$$

и второй раз — когда в правой части последней формулы $\rho\,dz$ заменяется на $-dp/g$ ($dp+\rho g\,dz\approx 0$). Путем этой замены потенциальная температура вводится под знак интеграла, который затем берется по частям. Как и в п. 14.4, получаем в случае фактического состояния атмосферы приближенную формулу для полной потенциальной энергии

$$\Phi + E \approx \frac{c_{pa}}{g} \frac{p_{00}^{-k}}{k+1} \oint_{\sigma} d\sigma \left(\int_{\Theta_0}^{\infty} p^{k+1}\, d\Theta + \Theta_0 p_0^{k+1} \right) =$$

$$= 4\pi a^2 \frac{c_{pa}}{g} \frac{p_{00}^{-k}}{k+1} \left\{ \int_{\Theta_0}^{\infty} \overline{(p^{k+1})_\Theta}\, d\Theta + \overline{(\Theta_0 p_0^{k+1})_\Theta} \right\} =$$

$$= 4\pi a^2 \frac{c_{pa}}{g} \frac{p_{00}^{-k}}{k+1} \left\{ \int_{\Theta_L}^{\infty} \overline{(p^{k+1})_\Theta}\, d\Theta + \Theta_L \overline{(p_0^{k+1})_\Theta} \right\}, \qquad (14.39)$$

при условии, что в интервале (Θ_L, Θ_0) давление $p(\lambda, \varphi, \Theta, t)$ заменяется на давление $p_0(\lambda, \varphi, t)$ на поверхности земли.

Используя еще раз гидростатическое приближение и заменяя p_e на $\overline{(p)_\Theta}$ в (14.31), получаем доступную потенциальную энергию в форме, установленной Лоренцом [16, 47]:

$$A = (\Phi + E) - (\Phi + E)_e \approx$$

$$\approx \frac{c_{pa}}{g} \frac{p_{00}^{-k}}{k+1} \oint_{\sigma} d\sigma \left[\int_{\Theta_L}^{\infty} [p^{k+1} - \{\overline{(p)_\Theta}\}^{k+1}]\, d\Theta + \right.$$

$$\left. + \Theta_L [p_0^{k+1} - \{\overline{(p_0)_\Theta}\}^{k+1}] \right]. \qquad (14.40)$$

Если распространить на интервал $(0, \Theta_0)$ вышеупомянутое определение давления p в интервале (Θ_L, Θ_0), то в выражении для A можно положить $\Theta_L = 0$ [43, 47]. Проделав это, получаем выражение для среднего значения $\overline{(A)_\Theta}$ доступной потенциальной энергии на изэнтропической поверхности

$$\overline{(A)_\Theta} \approx \frac{c_{pa}}{g} \frac{p_{00}^{-k}}{k+1} \int_0^{\infty} [\overline{(p^{k+1})_\Theta} - \{\overline{(p)_\Theta}\}^{k+1}]\, d\Theta > 0 \qquad (14.40')$$

для $\overline{(p^{k+1})_\Theta} - \{\overline{(p)_\Theta}\}^{k+1} > 0$, поскольку p всегда положительно и $1 + k > 1$.

Взяв частные производные от обеих частей (14.40′) по времени и исключив $(\partial p/\partial t)_\Theta$ и $d\Theta/dt$ с помощью соотношения (14.29б), первого начала термодинамики $\{c_{pa}(d\Theta/dt) = (p_{00}/p)^k (Q + \Delta)\}$ и формулы (14.40′), получаем уравнение баланса (14.36) для A [44].

Представив $p = \overline{(p)_\Theta} + (p')_\Theta$ [здесь $(p')_\Theta$ — отклонение давления на изэнтропических поверхностях] и разложив в ряд, легко найдем

$$p^{k+1} = \{\overline{(p)_\Theta}\}^{k+1}\left[1 + (k+1)\frac{(p')_\Theta}{\overline{(p)_\Theta}} + \frac{(k+1)k}{2}\left\{\frac{(p')_\Theta}{\overline{(p)_\Theta}}\right\}^2 + \dots\right].$$

Подстановка этого выражения в (14.40′) приводит с учетом того, что $\overline{\{(p')_\Theta\}_\Theta} = 0$, к следующей приближенной формуле для $\overline{(A)_\Theta}$ [43]:

$$\overline{(A)_\Theta} \approx \frac{1}{2}\,\frac{R_a/g}{p_{00}^k}\int_0^\infty \left(\overline{(p)_\Theta}\right)^{k+1}\overline{\left(\{(p')_\Theta/\overline{(p)_\Theta}\}^2\right)_\Theta}\,d\Theta, \qquad (14.40'a)$$

показывающей, что доступная потенциальная энергия зависит главным образом от изменения давления на изэнтропических поверхностях. Поступая точно так же, найдем выражение для множителя

$$N \approx (R_a/c_{pa})\,\{(p')_\Theta/\overline{(p)_\Theta}\}.$$

Возвращаясь к определению потенциальной температуры для стандартного состояния атмосферы, отметим, что потенциальная температура является независимой переменной, и с учетом того, что $p_e \approx \overline{(p)_\Theta}$, имеем $T_e \approx \overline{(T)_\Theta}$. Используя теперь определение потенциальной температуры при фактическом состоянии атмосферы и замечая, что $(\Theta')_\Theta \equiv 0$, находим

$$\{(T')_\Theta/\overline{(T)_\Theta}\} = (R_a/c_{pa})\,\{(p')_\Theta/\overline{(p)_\Theta}\}, \qquad (14.41)$$

поэтому

$$N \approx (R_a/c_{pa})\,\{(p')_\Theta/\overline{(p)_\Theta}\} = \{(T')_\Theta/\overline{(T)_\Theta}\}.$$

Таким образом, формула (14.37а) принимает вид

$$G \approx \int_{\mathrm{atm}} \{Q\,(T')_\Theta/\overline{(T)_\Theta}\}\,dm. \qquad (14.37б)$$

Эта формула показывает, что скорость генерации G доступной потенциальной энергии зависит только от связи на изэнтропических поверхностях между флуктуациями температуры и притоком тепла Q (кроме притока, обусловленного трением).

14.6. Полная потенциальная энергия и ее первая и вторая производные по времени

Рассматривается невязкая жидкая система, которая занимает объем τ, ограниченный поверхностью σ. Полная потенциальная энергия

$$\Phi + E \equiv \int_\tau \rho (\phi + e)\, d\tau$$

жидкой системы зависит, по предположению, только от времени. Ее изменение во времени

$$\frac{d}{dt}(\Phi + E) = \int_\tau \rho \left(\mathbf{v} \cdot \nabla \phi + \frac{de}{dt} \right) d\tau, \qquad (14.42)$$

где элемент массы $dm = \rho\, d\tau$ — инвариант движения [см. формулу (2.4′)]. Подставляя уравнение

$$\rho Q \equiv -\operatorname{div} \mathbf{W} = \rho \frac{de}{dt} + p \operatorname{div} \mathbf{v} \qquad (14.43)$$

первого начала термодинамики в (14.42) и используя тождество $\operatorname{div} p\mathbf{v} \equiv p \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla p$, получаем [126]

$$\frac{d}{dt}(\Phi + E) = \int_\tau (\rho \nabla \phi + \nabla p) \cdot \mathbf{v}\, d\tau - \int_\sigma (W_N + p v_N)\, d\sigma, \qquad (14.42')$$

где N — внешняя нормаль к поверхности σ; W_N и v_N — нормальные компоненты потока тепла $\mathbf{W}$ и скорости движения $\mathbf{v}$ соответственно.

Объемный и поверхностный интегралы в правой части уравнения (14.42′) являются только функциями времени. Принимая во внимание хорошо известное соотношение $(d/dt)\, d\tau = d\tau \operatorname{div} \mathbf{v}$, уравнение неразрывности (2.4)

$$(d/dt)(\rho\, d\tau) = (\rho\, d\tau)\{(1/\rho)(d\rho/dt) + \operatorname{div} \mathbf{v}\} = 0$$

и дифференцируя еще раз сумму $\Phi + E$ по времени, находим [126]

$$\frac{d^2}{dt^2}(\Phi + E) = \int_\tau \left[\mathbf{v} \cdot (\rho \nabla\nabla \phi + \nabla\nabla p) \cdot \mathbf{v} + \left\{ \nabla \frac{\partial p}{\partial t} + (\operatorname{div} \mathbf{v}) \nabla p \right\} \cdot \mathbf{v} + \right.$$
$$\left. + (\rho \nabla \phi + \nabla p) \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right] d\tau - \frac{d}{dt} \oint_\sigma (W_N + p v_N)\, d\sigma. \qquad (14.44)$$

Поскольку система термически и механически изолирована, для любого момента времени справедливо тождество

$$\oint_\sigma (W_N + pv_N)\, d\sigma \equiv 0, \tag{14.45}$$

поэтому

$$\frac{d}{dt}\oint_\sigma (W_N + pv_N)\, d\sigma = 0. \tag{14.46}$$

Во избежание недоразумений сформулируем, что следует понимать под механически и термически изолированной системой. Система механически и термически изолирована, если через ограничивающую ее поверхность σ вток тепла и механической энергии (в данном случае это работа поверхностных сил давления) за любой интервал времени в точности равен оттоку этих форм энергии. В случае невязкого потока, ограниченного твердой поверхностью ($v_N \equiv 0$), вток и отток механической энергии тождественно равны нулю. Необходимо заметить, что термическая и механическая изолированность не означает отсутствия обмена тепловой и механической энергией между различными частями жидкой системы.

Если, кроме того, в некоторый момент времени $t = t_e$ система находится в гидростатическом равновесии, т. е.

$$\rho\, \nabla\phi + \nabla p = 0, \tag{14.47}$$

то на основании (14.42′) и (14.45) можем заключить, что в этот момент $(d/dt)\,(\Phi + E) = 0$. Следовательно, когда термически и механически изолированный невязкий поток находится в состоянии гидростатического равновесия (14.47), сумма $\Phi + E$ гравитационной потенциальной энергии Φ и внутренней энергии E достигает экстремального значения. Последнее утверждение можно выразить с помощью тождеств

$$\rho_e\nabla\phi + \nabla p_e \equiv 0, \quad \nabla\rho_e\nabla\phi + \rho_e\nabla\nabla\phi + \nabla\nabla p_e \equiv 0$$

в пространственных переменных и условия достижения экстремума

$$\left\{\frac{d}{dt}(\Phi + E)\right\}_e \equiv 0. \tag{14.48}$$

Поля скалярных величин ρ_e и p_e представляют соответственно распределение в пространстве плотности и давления в момент времени t_e, когда наблюдается гидростатическое равновесие.

Если теперь воспользоваться приведенными выше тождествами и еще одним тождеством

$$\mathbf{v}\cdot\nabla\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right) \equiv \operatorname{div}\left(\mathbf{v}\,\frac{\partial p}{\partial t}\right) - \frac{\partial p}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{v},$$

то уравнение (14.44) примет следующий окончательный вид:

$$\left\{\frac{d^2}{dt^2}(\Phi+E)\right\}_e = \int\limits_{\tau_e}\Big[-(\mathbf{v}_e\cdot\nabla\rho_e)(\mathbf{v}_e\cdot\nabla\phi) + \\ + \left\{\mathbf{v}_e\cdot\nabla p_e - \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_e\right\}\operatorname{div}\mathbf{v}_e\Big]\,d\tau_e + \oint\limits_{\sigma_e}\left(v_N\frac{\partial p}{\partial t}\right)_e d\sigma_e, \qquad (14.49)$$

где $\mathbf{v}_e$ — скорость в момент времени t_e. В этот момент времени объем τ_e при стандартном состоянии соответствует объему τ при фактическом состоянии; σ_e — поверхность объема τ_e. Необходимо заметить, что $dm = \rho_e\,d\tau_e = \rho\,d\tau$, dm — инвариант элемента массы. В момент времени $t = t_e$ имеем

$$\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)_e + 2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}_e = -\alpha_e\nabla p_e - \nabla\phi = 0,$$

где α_e — удельный объем при равновесных условиях ($\alpha_e = \rho_e^{-1}$) [126].

Для того чтобы привести уравнение (14.49) к более удобному для интерпретации виду, необходимо наложить на движение более жесткое условие, нежели условие (14.45).

Следуя Маргулесу [50] и Лоренцу [43], примем, что перераспределение массы, приводящее к горизонтальной неоднородности поля, происходит адиабатически, т. е.

$$\rho Q \equiv -\operatorname{div}\mathbf{W} = 0,$$

и, кроме того, предположим, что поток воздуха сухой. Следовательно, пренебрегая константой, E запишем в виде

$$E = \int\limits_\tau \rho e_a\,d\tau = \int\limits_\tau \rho c_{va} T\,d\tau.$$

Из уравнения (14.43) легко получить классическое уравнение сухоадиабатического процесса

$$-\frac{\rho}{\Theta}\frac{d\Theta}{dt} = \frac{d\rho}{dt} - \frac{1}{c^2}\frac{dp}{dt} = 0, \qquad (14.50)$$

где Θ — потенциальная температура сухого воздуха; c — скорость звука $[c^2 = (c_{pa}/c_{va})\,p\alpha$; c_{va} и c_{pa} — удельные теплоемкости сухого воздуха при постоянном объеме и давлении соответственно]. С учетом уравнения неразрывности уравнение (14.50) перепишем в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla p + c^2\rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{14.51}$$

Привлекая тождество

$$\rho \frac{\nabla\Theta}{\Theta} = -\nabla\rho + \frac{\nabla p}{c^2}$$

и исключая $\partial p/\partial t$ из (14.49) с помощью (14.51), получаем

$$\left\{\frac{d^2}{dt^2}(\Phi + E)\right\}_{\mathrm{e}} = \int_{\tau_{\mathrm{e}}} \left\{\left(\mathbf{v}_{\mathrm{e}}\cdot\frac{\nabla\Theta_{\mathrm{e}}}{\Theta_{\mathrm{e}}}\right)(\mathbf{v}_{\mathrm{e}}\cdot\nabla\phi) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c_{\mathrm{e}}^2}\left(c_{\mathrm{e}}^2 \operatorname{div}\mathbf{v}_{\mathrm{e}} - \mathbf{v}_{\mathrm{e}}\cdot\nabla\phi\right)^2\right\}\rho_{\mathrm{e}}\, d\tau_{\mathrm{e}} + \oint_{\sigma_{\mathrm{e}}}\left(v_{\mathrm{N}}\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{\mathrm{e}} d\sigma_{\mathrm{e}} \tag{14.52}$$

или, вновь используя уравнение адиабаты (14.50) и уравнение статики (14.47),

$$\left\{\frac{d^2}{dt^2}(\Phi + E)\right\}_{\mathrm{e}} = \int_{\tau_{\mathrm{e}}} \left\{\left(\mathbf{v}_{\mathrm{e}}\cdot\frac{\nabla\Theta_{\mathrm{e}}}{\Theta_{\mathrm{e}}}\right)(\mathbf{v}_{\mathrm{e}}\cdot\nabla\phi) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{\mathrm{e}}^2\right\}\rho_{\mathrm{e}}\, d\tau_{\mathrm{e}} + \oint_{\sigma_{\mathrm{e}}}\left(v_{\mathrm{N}}\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{\mathrm{e}} d\sigma_{\mathrm{e}}. \tag{14.52a}$$

Объемный интеграл в (14.52) и (14.52а) можно упростить. Из (14.47) ясно, что в момент времени t_{e}, когда реализуются равновесные условия, давление p_{e}, плотность ρ_{e} и потенциальная температура Θ_{e} являются функциями только ϕ:

$$p_{\mathrm{e}} = p_{\mathrm{e}}(\phi,\ t_{\mathrm{e}}),\quad \rho_{\mathrm{e}} = \rho_{\mathrm{e}}(\phi,\ t_{\mathrm{e}}),\quad \Theta_{\mathrm{e}} = \Theta_{\mathrm{e}}(\phi,\ t_{\mathrm{e}}),$$

и в момент t_{e} справедливо тождество

$$\frac{dp_{\mathrm{e}}}{d\phi} + \rho_{\mathrm{e}} \equiv 0. \tag{14.53}$$

Производные $(dp/dz)_{\mathrm{e}}$ и dp_{e}/dz одинаковы, потому что обе равны $-g\rho_{\mathrm{e}}$. Если, как обычно, z представляет собой увеличивающуюся вверх высоту, то

$$\mathbf{v}_{\mathrm{e}}\cdot\nabla\phi = \frac{d\phi}{dz} w_{\mathrm{e}} = g w_{\mathrm{e}},$$

$$\mathbf{v}_{\mathrm{e}}\cdot\nabla p_{\mathrm{e}} = g\frac{dp_{\mathrm{e}}}{d\phi} w_{\mathrm{e}} = -g\rho_{\mathrm{e}} w_{\mathrm{e}},$$

$$\mathbf{v}_{\mathrm{e}}\cdot\nabla\Theta_{\mathrm{e}} = \frac{d\Theta_{\mathrm{e}}}{dz} w_{\mathrm{e}}, \tag{14.54}$$

где g — ускорение свободного падения; w_e — вертикальная компонента $\mathbf{v}_e$.

Подставляя выражения (14.54) в первую часть объемных интегралов (14.52) и (14.52a), получаем

$$\int_{\tau_e} (\rho_e/\Theta_e)(\mathbf{v}_e\cdot\nabla\Theta_e)(\mathbf{v}_e\cdot\nabla\phi)\,d\tau_e = \\ = \int_{\tau_e} \frac{g}{\Theta_e}\frac{d\Theta_e}{dz}\rho_e w_e^2\,d\tau_e. \tag{14.55}$$

Сейчас сосредоточим внимание на поверхностном интеграле в правой части уравнения (14.52). Разумно принять, что жидкая система ограничена твердыми стенками σ_s $(v_N = 0)$ и свободными поверхностями σ_f $[(dp/dt) = 0]$.

При достижении гидростатического равновесия в момент времени t_e на свободной поверхности жидкости имеем

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)_e = \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_e + \mathbf{v}_e\cdot(\nabla p)_e = \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_e + w_e\frac{dp_e}{dz} = \\ = \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_e - g\rho_e w_e = 0.$$

Кроме того, свободная поверхность, будучи изобарической поверхностью, совпадает при гидростатическом равновесии с геопотенциальной поверхностью, так что в этом случае $(v_N)_e = w_e$. Таким образом, имеем

$$\oint_{\sigma_e}\left(v_N\frac{\partial p}{\partial t}\right)_e d\sigma_e = \int_{(\sigma_e)_f}\left(v_N\frac{\partial p}{\partial t}\right)_e d\sigma_e = \\ = \int_{(\sigma_e)_f} g\rho_e w_e^2\,d\sigma_e. \tag{14.56}$$

Окончательно, объединяя результаты (14.55) и (14.56), получаем

$$\left\{\frac{d^2(\Phi+E)}{dt^2}\right\}_e = \int_{\tau_e}\left\{\frac{g}{\Theta_e}\frac{d\Theta_e}{dz}w_e^2 + c_e^{-2}\left(c_e^2\operatorname{div}\mathbf{v}_e - gw_e\right)^2\right\}\rho_e\,d\tau_e + \\ + \int_{(\sigma_e)_f} g\rho_e w_e^2\,d\sigma_e = \int_{\tau_e}\left\{\frac{g}{\Theta_e}\frac{d\Theta_e}{dz}w_e^2 + \left(\frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial t}\right)_e^2\right\}\rho_e\,d\tau_e + \\ + \int_{(\sigma_e)_f} g\rho_e w_e^2\,d\sigma_e. \tag{14.57}$$

Следовательно, если $(d\Theta_e/dz) > 0$, то $\{(d^2/dt^2)(\Phi + E)\}_e > 0$, т. е. экстремальное значение $(\Phi + E)_e$ величины $\Phi + E$ является минимальным, а гидростатическое равновесие (14.47) — устойчивым равновесием. Неравенство $(d\Theta_e/dz) > 0$ является достаточным условием того, что $(\Phi + E)_e$ служит минимумом величины $\Phi + E$.

Отметим, что, когда $(\partial p/\partial t)_e = 0$, выражение для $((d^2/dt^2)(\Phi + E))_e$ приобретает более простой вид. Принимая в качестве нижней границы атмосферы твердую поверхность (см. п. 12.3), а в качестве верхней границы свободную поверхность, где ρ_e равно нулю ($\rho_e \to 0$, $p_e \to 0$), формулу (14.57), если ее записать для всей атмосферы, приведем к виду

$$\left\{\frac{d^2}{dt^2}(\Phi + E)\right\}_e = \oint_{\text{atm}} \left\{\frac{g}{\Theta_e}\frac{d\Theta_e}{dz} w_e^2 + c_e^{-2}\left(c_e^2 \operatorname{div} \mathbf{v}_e - g w_e\right)^2\right\} dm =$$
$$= \int_{\text{atm}} \left(\frac{g}{\Theta_e}\frac{d\Theta_e}{dz} w_e^2 + \left(\frac{1}{\rho c}\frac{\partial p}{\partial t}\right)_e^2\right) dm, \tag{14.58}$$

где $(g/\Theta)(d\Theta/dz)$ ($\sim 10^{-4}$ с$^{-2}$) — хорошо известный параметр статической устойчивости [126] и $dm = \rho_e d\tau_e = \rho\, d\tau$.

14.7. Оценка доступной потенциальной энергии

На этой стадии легко оценить доступную потенциальную энергию. Обозначим через $(\Phi + E)$ значение суммы $\Phi + E$ потенциальной и внутренней энергий атмосферы в момент времени t (фактическое состояние), при этом $t = t_e - \Delta t$, $\Delta t > 0$. С учетом соотношений (14.48) и (14.58) энергию A, доступную для превращения в кинетическую энергию, можем записать в виде

$$A \equiv (\Phi + E) - (\Phi + E)_e = \frac{(\Delta t)^2}{2} \int_{\text{atm}} \left\{\frac{g}{\Theta_e}\frac{d\Theta_e}{dz} w_e^2 + \right.$$
$$\left. + c_e^{-2}\left(c_e^2 \operatorname{div} \mathbf{v}_e - g w_e\right)^2\right\} dm - \frac{(\Delta t)^3}{6}(\cdots) + \cdots \tag{14.59}$$

Если $\mathbf{r}$ представляет собой вектор положения частицы воздуха в момент $t = t_e - \Delta t$ по отношению к ее равновесному положению в момент времени t_e ($t_e > t$), то

$$\mathbf{r} = -\mathbf{v}_e \Delta t - (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_e)(\Delta t)^2 - \left(\frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2}\right)_e \frac{(\Delta t)^3}{6} + \cdots, \tag{14.60}$$

при этом должны быть приняты во внимание тождества, выведенные из уравнения (14.47). Вектор $\mathbf{r}$ представляет собой смещение, превращающее состояние гидростатического равновесия, рассматриваемое как стандартное состояние, в фактическое состояние.

Подставляя сейчас (14.60) в (14.59) и пренебрегая малыми величинами более высокого порядка, окончательно получаем приближенное выражение для доступной энергии

$$A \equiv (\Phi + E) - (\Phi + E)_e \approx \frac{1}{2} \int\limits_{atm} \left\{ \frac{g}{\Theta_e} \frac{d\Theta_e}{dz} r_z^2 + c_e^{-2} (g r_z - c_e^2 \operatorname{div} \mathbf{r})^2 \right\} dm \qquad (14.61)$$

или с учетом связи между $\nabla\Theta$, $\nabla\rho$ и ∇p

$$A \equiv (\Phi + E) - (\Phi + E)_e \approx \frac{1}{2} \int\limits_{atm} \left\{ -\frac{g}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dz} r_z^2 - 2 g r_z \operatorname{div} \mathbf{r} + (c_e \operatorname{div} \mathbf{r})^2 \right\} dm, \qquad (14.62)$$

где r_z — вертикальная компонента $\mathbf{r}$ [126, 127].

Хорошо известно, что крупномасштабное распределение массы воздуха в поле силы тяжести не отклоняется очень сильно от равновесного гидростатического распределения. Таким образом, фактическое физическое и динамическое состояние атмосферы может рассматриваться как малое отклонение от состояния устойчивого гидростатического равновесия. Разность A в уравнении (14.61) — малая величина по сравнению с каждым из слагаемых $(\Phi + E)$ и $(\Phi + E)_e$. Эта особенность оправдывает приближение $\mathbf{r} = -\mathbf{v}_e \Delta t$ и использование метода малых возмущений. Правая часть уравнения (14.62) может быть легко интерпретирована в свете некоторых классических результатов теории возмущений [127].

Хорошо известно, что в невязкой и несжимаемой жидкости при устойчивом равновесии в поле силы тяжести Земли возможны только гравитационные колебания, если жидкость термически изолирована и находится в сосуде с твердыми стенками. Эти колебания преобразуют потенциальную энергию в кинетическую и наоборот. Уравнение энергии чисто гравитационных волн в этом случае сводится к простому виду: $K + \Phi = \text{const}$, где K означает кинетическую энергию возмущенного движения [127], а

$$\Phi = \Phi_e + \frac{1}{2} \int\limits_{\tau} -\frac{g}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dz} r_z^2 \, dm. \qquad (14.62a)$$

Здесь τ — объем жидкости и Φ_e — равновесное значение потенциальной энергии Φ. Последняя формула показывает, что Φ_e является минимальным значением величины Φ, если $(d\rho_e/dz) < 0$, т. е. выполнен критерий устойчивого равновесия несжимаемой жидкости в поле силы тяжести Земли.

Аналогичным образом можно показать, что в покоящейся невязкой сжимаемой, термически и механически изолированной жидкости вне поля силы тяжести могут наблюдаться только волны сжатия. Эти волны преобразуют внутреннюю энергию E в кинетическую и наоборот. Энергетическое уравнение в случае волн сжатия принимает простой вид: $K + E = \text{const}$. На основании первого начала термодинамики внутреннюю энергию E колеблющейся жидкости можно записать следующим образом [187]:

$$E = E_e + \frac{1}{2} \int_\tau (c_e \operatorname{div} \mathbf{r})^2 \, dm, \qquad (14.62б)$$

где индекс «е» обозначает состояние покоя жидкости. Когда это состояние достигается, E принимает свое минимальное значение E_e.

Таким образом, первый член в скобках в правой части (14.62), пропорциональный параметру устойчивости $(-1/\rho_e)(d\rho_e/dz)$, описывает чисто гравитационный эффект, третий член — чистый эффект сжатия. Хотя и заманчиво считать, что первый член описывает точно преобразование потенциальной энергии, а третий член — преобразование внутренней энергии, такая интерпретация будет ошибочной. В самом деле, помимо гравитационного эффекта $\frac{1}{2}(-g/\rho_e)(d\rho_e/dz)\, r_e^2$, потенциальная энергия может отклоняться от равновесного значения Φ_e под влиянием расширения или сжатия, наблюдаемых при вертикальных смещениях r_z, а также в результате совместного влияния вертикального движения w и объемного расширения или сжатия. На основе теории возмущений нетрудно показать [127], что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_\tau \left(r_z - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dz} r_z^2 \right) g \, dm - \int_\tau (g w \operatorname{div} \mathbf{r}) \, dm,$$

где w — вертикальная компонента скорости возмущенного движения.

Аналогично в дополнение к эффекту сжатия $\frac{1}{2}(c_e \operatorname{div} \mathbf{r})^2$ внутренняя энергия может отклоняться от своего равновесного значения E_e под влиянием расширения или сжатия при вертикальных смещениях r_z, а также за счет объединенного эффекта вертикального смещения r_z и расширения или сжатия. Предполагая движение адиабатическим, на основе той же теории возмущений нетрудно показать [127], что

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \left\{-gr_z + \frac{1}{2}(c_e \operatorname{div}\mathbf{r})^2\right\} dm - \int_\tau (gr_z \operatorname{div}\mathbf{v})\, dm,$$

где $\mathbf{v}$ — скорость возмущенного движения $[\mathbf{v} = (d\mathbf{r}/dt)]$.

Из двух последних формул легко получить (14.62). Влияние вертикального расширения или сжатия на потенциальную энергию

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau gr_z dm$$

оказывается равным по абсолютной величине, но противоположным по знаку влиянию того же самого расширения или сжатия на внутреннюю энергию. Следовательно, в движущейся системе, находящейся в квазистатическом равновесии, расширение или сжатие, вызванные вертикальным перемещением воздушных частиц из их равновесного положения, не влияют ни на полную потенциальную энергию $\Phi + E$, ни на доступную энергию A. Поскольку атмосфера находится в квазистатическом равновесии, на энергетические переходы, происходящие в атмосфере, должны быть наложены некоторые ограничения (см. п. 13.1).

Складывая обе части приведенных выше формул для $\partial\Phi/\partial t$ и $\partial E/\partial t$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Phi + E) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\int_\tau \left\{-\frac{g}{\rho_e}\frac{d\rho_e}{dz} r_z^2 - 2gr_z \operatorname{div}\mathbf{r} + (c_e \operatorname{div}\mathbf{r})^2\right\} dm\right].$$

Интегрирование этой формулы в интервале (t_e, t) приводит к (14.62) [см. также формулу (14.67)].

Обозначая через $\psi_\times$ отклонение (от стандартного значения) некоторой величины ψ в переменных Эйлера, а через $\psi_{\times l}$ то же отклонение в переменных Лагранжа, можем записать: $\psi_\times = \psi - \psi_e$ (здесь все величины берутся в одной и той же точке и в один момент времени) и

$$\psi_{\times l} = \psi_\times + r_z\frac{d\psi_e}{dz}. \tag{14.63}$$

Используя это соотношение для потенциальной температуры, получаем уравнение адиабаты

$$\Theta_{\times l} = \Theta_\times + r_z\frac{d\Theta_e}{dz} = 0. \tag{14.64}$$

С другой стороны, с учетом уравнений (14.51) и (14.63) можно также записать

$$p_\times - g\rho_e r_z + c_e^2 \rho_e \operatorname{div} \mathbf{r} = 0. \tag{14.65}$$

Величины $\Theta_\times$ и $p_\times$ представляют собой отклонения Θ и p на геопотенциальных поверхностях.

Наконец, вставляя (14.64) и (14.65) в формулу (14.62), получаем для доступной энергии A выражение, не содержащее распределения скорости в момент t_e, когда достигается стандартное состояние (состояние статического равновесия) [126]:

$$A \approx \frac{1}{2} \int\limits_{\text{atm}} \left\{ \left(\frac{1}{\Theta_e} \frac{d\Theta_e}{dz} \right)^{-1} \left(\frac{\Theta_\times}{\Theta_e} \right)^2 + \frac{c_{va}}{c_{pa}} \left(\frac{-1}{p_e} \frac{dp_e}{dz} \right)^{-1} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{p_\times}{p_e} \right)^2 \right\} g\, dm. \tag{14.66}$$

Поскольку в атмосфере

$$\left| \frac{\Theta_\times}{\Theta_e} \right|^2 \sim \left| \frac{p_\times}{p_e} \right|^2 \sim 10^{-3} \text{ и } \left| \frac{1}{\Theta_e} \frac{d\Theta_e}{dz} \right| \sim 10^{-1} \left| \frac{1}{p_e} \frac{dp_e}{dz} \right| \sim 10^{-5} \text{ м}^{-1},$$

то ясно, что второй член в (14.66) на один порядок величины меньше, чем первый. С учетом этого обстоятельства нетрудно получить количественную оценку A:

$$A \approx 2 \cdot 10^{-3} (\Phi + E)_e \approx 2{,}6 \cdot 10^{18} \text{ кДж}.$$

Сравнивая порядки величины A и K, можем заключить, что всегда имеется в достаточном количестве потенциальная энергия, доступная для перехода в кинетическую энергию.

Подынтегральная функция в выражении (14.66) — положительная квадратичная функция, зависящая от отношения безразмерных отклонений $\Theta_\times/\Theta_e$ и $p_\times/p_e$ потенциальной температуры Θ и давления p на геопотенциальных поверхностях. Коэффициент при квадрате отклонения потенциальной температуры обратно пропорционален параметру устойчивости $(g/\Theta_e)(d\Theta_e/dz)$ равновесного состояния сухой атмосферы в поле силы тяжести, а коэффициент при квадрате отклонения давления прямо пропорционален вертикальному масштабу атмосферы $[(-1/p_e)(/dp_e/dz)]^{-1} = R_a T_e/g$ при том же равновесном состоянии. То, что доступная потенциальная энергия не зависит от знака отклонений $\Theta_\times$ и $p_\times$,— это следствие экстремальных свойств суммы $\Phi + E$ в случае простой модели атмосферы, положенной в основу оценки A.

Мы предполагали, что атмосфера сухая, лишена трения, механически и термически изолирована, движется адиабатически.

Отклонения $\Theta_\times$ и $p_\times$ в реальной атмосфере не удовлетворяют соотношениям, полученным для упрощенной атмосферы [см. формулы (14.64) и (14.65), положенные в основу вывода уравнения для A].

Фундаментальное отличие реальной атмосферы от упрощенной состоит в том, что в последней потенциальная энергия A и кинетическая энергия K могут изменяться только в противоположные стороны, в то время как в реальной атмосфере A и K изменяются в одну сторону (в смысле знака). В самом деле, адиабатическое движение, сопровождающееся переходами трех видов энергии K, Φ и E, в случае упрощенной атмосферы можно разложить на гравитационные колебания и волны сжатия, которые могут быть стационарными или подвижными. Это обстоятельство — следствие отсутствия неадиабатических эффектов. В реальных условиях чем больше атмосфера удаляется от состояния равновесия, тем больше по абсолютной величине становятся отклонения $\rho_\times$, $p_\times$ и $\Theta_\times$, обусловливая соответствующее постоянное увеличение доступной энергии A. При этом наклон изобарических поверхностей увеличивается и как следствие квазигеострофического приближения в случае крупномасштабных движений растет кинетическая энергия K (см. п. 14.4, а также [43]).

Вставляя (14.66) в (14.21), находим приближенное выражение для полной потенциальной энергии

$$\Phi + E \approx (\Phi + E)_e + \frac{1}{2} \int\limits_{atm} \left\{ \left(\frac{1}{\Theta_e} \frac{d\Theta_e}{dz} \right)^{-1} \left(\frac{\Theta_\times}{\Theta_e} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{c_{va}}{c_{pa}} \left(\frac{-1}{p_e} \frac{dp_e}{dz} \right)^{-1} \left(\frac{p_\times}{p_e} \right)^2 \right\} g\, dm, \qquad (14.67)$$

где $(\Phi + E)_e = \int\limits_{atm} c_{pa} T_e \rho_e \, d\tau_e$ — функция, медленно меняющаяся со временем. В самом деле, системы с относительно небольшим временем существования (не более нескольких суток) движутся квазиадиабатически, благодаря чему величина $(\Phi + E)_e$ практически не изменяется. Только сезонные изменения $(\Phi + E)_e$ следует принимать во внимание.

Последнее замечание — интеграл в (14.66) охватывает всю атмосферу. Возвратившись к (14.52) или (14.52а), можем заключить, что формулы (14.66) и (14.67) справедливы также для части атмосферы при условии, что в каждой точке поверхности σ, ограничивающей объем τ, нормальная к σ компонента v_N скорости $\mathbf{v}$ равна нулю. Рассмотрим только одно полушарие и предположим, что меридиональная компонента скорости движения равна нулю во всех точках экваториальной плоскости. В действительности сезонный перенос воздушных масс через экваториальную плоскость наблюдается, однако скорость этого переноса мала. Пренебрегая этим переносом, можем формулу, аналогичную (14.67), записать также для северного полушария. В этом случае величина $(\Phi + E)_e$ испытывает значительные сезонные колебания: достигает максимума летом и минимума зимой. Поэтому совсем неудивительно, что в каждом из полушарий величины A и K также подвержены сезонным колебаниям: оба вида энергии (A и K) максимальны зимой и минимальны летом.

14.8. Приближенные выражения доступной потенциальной энергии и ее уравнение баланса

Уравнение первого начала термодинамики можно представить в простой форме

$$\frac{d\tau}{dt} = H = \frac{Q + \Delta}{c_{pa}T}, \tag{14.68}$$

где Q — индивидуальная скорость притока тепла (исключая вязкость) $Q_R + Q_C + Q_L$ [см. формулу (12.10′)]; Δ — скорость диссипации механической энергии в тепло (скорость нагревания за счет трения); $\tau \equiv \ln \Theta$. Складывая уравнение (14.68) с уравнением неразрывности $(d/dt) \ln \rho + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ и принимая во внимание классическое соотношение $(d/dt) \ln \Theta + (d/dt) \ln \rho = (c_{va}/c_{pa}) \, (d/dt) \ln p$, находим

$$\frac{d\pi}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{v} = H, \tag{14.69}$$

где $\pi = (c_{va}/c_{pa}) \ln p$.

Будем использовать переменные Эйлера λ, φ, z и t. Величины Θ_e и p_e меняются главным образом с высотой z и медленно со временем t. Вводя отклонения $\Theta_\times \equiv \Theta - \Theta_e$, $p_\times \equiv p - p_e$ и подставляя $\Theta_e + \Theta_\times$ вместо Θ и $p_e + p_\times$ вместо p в уравнения (14.68) и (14.69), получаем:

$$\frac{d\tau_\times}{dt} + \tau_{et} + \tau_{ez} w = H, \tag{14.70}$$

$$\frac{d\pi_\times}{dt} + \pi_{et} + \pi_{ez} w + \operatorname{div} \mathbf{v} = H, \tag{14.71}$$

где $\tau_\times = (\Theta_\times/\Theta_e)$ и $\pi_\times = (c_{va}/c_{pa}) \, (p_\times/p_e)$; τ_{et}, π_{et} — местные (локальные) и τ_{ez}, π_{ez} — частные (геометрические) производные от τ_e и π_e по t и z. Умножая (14.70) на $g\rho_e \tau_\times/\tau_{ez}$ и (14.71) на $-g\rho_e\pi_\times/\pi_{ez}$, получаем:

$$\left.\begin{aligned} &\rho_e \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{2}\frac{\tau_\times^2}{\tau_{ez}}\right) - \frac{g}{2}\rho_e\tau_\times^2\frac{d\tau_{ez}^{-1}}{dt} + g\rho_e\tau_\times\frac{\tau_{et}}{\tau_{ez}} + \\ &\qquad + g\rho_e\tau_\times w = g\rho_e\frac{\tau_\times H}{\tau_{ez}}, \\ &-\rho_e\frac{d}{dt}\left(\frac{g}{2}\frac{\pi_\times^2}{\pi_{ez}}\right) + \frac{g}{2}\rho_e\pi_\times^2\frac{d\pi_{ez}^{-1}}{dt} - g\rho_e\pi_\times\frac{\pi_{et}}{\pi_{ez}} - \\ &\quad - g\rho_e\pi_\times w - g\rho_e\frac{\pi_\times}{\pi_{ez}}\operatorname{div}\mathbf{v} = -g\rho_e\frac{\pi_\times H}{\pi_{ez}}. \end{aligned}\right\} \qquad (14.72)$$

Складывая левые и правые части уравнений (14.72) и пренебрегая членами, включающими τ_{et}, π_{et} и τ_{ezt}, π_{ezt}, поскольку τ_e, π_e и τ_{ez}, π_{ez} являются медленно меняющимися во времени функциями, находим

$$\rho_e\frac{da}{dt} - \frac{g\rho_e}{2}\{\tau_\times^2(\tau_{ez}^{-1})_z - \pi_\times^2(\pi_{ez}^{-1})_z\}w - g\rho_\times w + p_\times \operatorname{div}\mathbf{v} =$$
$$= g\rho_e\left(\frac{\tau_\times}{\tau_{ez}} - \frac{\pi_\times}{\pi_{ez}}\right)H, \qquad (14.73)$$

где

$$\rho_\times/\rho_e = -\Theta_\times/\Theta_e + (c_{va}/c_{pa})(p_\times/p_e),$$

$$a \equiv \frac{g}{2}\left(\frac{\tau_\times^2}{\tau_{ez}} + \frac{\pi_\times^2}{-\pi_{ez}}\right) =$$
$$= \frac{g}{2}\left\{\left(\frac{\Theta_{ez}}{\Theta_e}\right)^{-1}\left(\frac{\Theta_\times}{\Theta_e}\right)^2 + \frac{c_{va}}{c_{pa}}\left(\frac{-p_{ez}}{p_e}\right)^{-1}\left(\frac{p_\times}{p_e}\right)^2\right\}. \qquad (14.74)$$

Интегрируя (14.74) по всей атмосфере, с учетом (14.66) получаем

$$\int\limits_{atm}\rho_e a\, d\tau_e = \int\limits_{atm} a\, dm \approx A.$$

Чтобы избежать неверного толкования понятия «доступная потенциальная энергия», введенного в п. 14.2, необходимо подчеркнуть, что величину a, определенную формулой (14.74), нельзя интерпретировать как доступную потенциальную энергию в единице массы. Доступная потенциальная энергия является понятием глобальным, определенным для системы в целом, а не для отдельных ее частей. Иными словами, доступная потенциальная энергия A является величиной, определенной для всего объема; для нее нет соответствующего удельного (локального) значения a [137]. Величина a, определенная соотношением (14.74), может рассматриваться как вклад единичной массы в доступную потенциальную энергию атмосферы, а не как доступная потенциальная энергия единицы массы (см. п. 14.9).

Использование в энергетике атмосферы доступной потенциальной энергии A вместо полной потенциальной энергии $E+\Phi$ исключает возможность изучения переноса потенциальной и внутренней энергии через любую внутреннюю и внешнюю границы системы. Следовательно, энергетический баланс части атмосферы (слоя между двумя изобарическими поверхностями; атмосферы ниже или выше данной изобарической поверхности) может быть изучен только через посредство потоков и скоростей образования трех классических форм энергии: внутренней, потенциальной и кинетической [см. уравнение баланса энергии (14.15)] [137]. Интегрируя (14.73) по всей атмосфере, получаем уравнение баланса доступной энергии A атмосферы

$$\frac{dA}{dt}=\frac{\partial A}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\text{atm}} a\,dm=-C+G, \tag{14.75}$$

где величина

$$C\equiv\int\limits_{\text{atm}}(p\operatorname{div}\mathbf{v}-g\rho w)\,d\tau=\int\limits_{\text{atm}}(p_\times\operatorname{div}\mathbf{v}-g\rho_\times w)\,d\tau \tag{14.76}$$

означает скорость адиабатического перехода полной потенциальной энергии $\Phi+E$ или доступной энергии A в кинетическую энергию K, а величина

$$G\equiv\int\limits_{\text{atm}} g\left(\frac{\tau_\times}{\tau_{ez}}-\frac{\pi_\times}{\pi_{ez}}\right)H\,dm=\int\limits_{\text{atm}} g\left(\frac{\Theta_\times}{\Theta_{ez}}-\frac{p_\times}{p_{ez}}\right)H\,dm \tag{14.77}$$

представляет собой скорость генерации доступной энергии A.

В правой части (14.77) величина $\Theta^\times$, определенная соотношением

$$\Theta^\times/\Theta_{ez}=(\Theta_\times/\Theta_{ez})-(p_\times/p_{ez}), \tag{14.78}$$

представляет собой отклонение (флуктуацию) Θ на изобарических поверхностях $p=p_e$. Легко видеть [133], что

$$p^\times=p_\times+p_{ez}z^\times=0 \text{ и } \Theta^\times=\Theta_\times+\Theta_{ez}z^\times.$$

Здесь $z^\times$ — отклонение $(z-z_e)$ высоты изобарической поверхности p при фактическом состоянии, которая трансформируется в изобарическую поверхность p_e при стандартном состоянии (т. е. в геопотенциальную поверхность $z = z_e$); $\Theta_\times$ и $p_\times$ — отклонения Θ и p на геопотенциальной поверхности $z = z_e$. При выводе уравнения (14.75) предположено, что

$$\tau_\times^2 w\, dS \approx 0, \quad \pi_\times^2 w\, dS \approx 0, \tag{14.79}$$

где S — геопотенциальная поверхность. Поскольку $\tau_\times^2 > 0, \pi_\times^2 > > 0$, а $w \lesseqgtr 0$, то вклад интегралов от этих слагаемых в правую часть уравнения баланса (14.75) на самом деле очень мал. Так как $\Delta > 0$, $\Theta^\times \lesseqgtr 0$ и $\Delta \ll |Q|$, то вклад интеграла $\int\limits_{\mathrm{atm}} (g\Theta^\times \Delta/\Theta_{ez})\, dm$ в G также очень мал [45]:

$$\int\limits_{\mathrm{atm}} \frac{g\Theta^\times \Delta}{\Theta_{ez}}\, dm \approx 0. \tag{14.79'}$$

Таким образом, имеем

$$G \equiv \int\limits_{\mathrm{atm}} g\frac{\Theta^\times H}{\Theta_{ez}}\, dm \approx \int\limits_{\mathrm{atm}} g\frac{\Theta^\times Q}{c_{pa}T_e\Theta_{ez}}\, dm \approx \int\limits_{\mathrm{atm}} g\frac{\Theta^\times Q^\times}{c_{pa}T_e\Theta_{ez}}\, dm, \tag{14.77a}$$

где $Q^\times$ — отклонение Q на изобарических поверхностях. Следовательно, генерация доступной энергии существенно зависит от пространственной корреляции между Q и Θ.

Окончательно уравнение баланса (14.75) можем записать в следующем приближенном виде:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -C + \int\limits_{\mathrm{atm}} \gamma T^\times Q^\times\, dm. \tag{14.75a}$$

Здесь величины $\gamma \equiv (g/c_{pa})/((g/c_{pa}) + T_{ez})\, T_e$, $\Theta^\times/\Theta_e = T^\times/T_e$ берутся на изобарических поверхностях.

Скорость генерации доступной энергии принимает простую форму, когда отклонения $\Theta_\times$ величины Θ на горизонтальных поверхностях заменены флуктуациями $\Theta^\times$ величины Θ на изобарических поверхностях [133]. Этот факт позволяет использовать переменные Эйлера λ, φ, p, t вместо λ, φ, z, t. Умножая обе части формулы (14.78) на Θ_{ez}/Θ_e, получаем

$$\frac{\Theta^\times}{\Theta_e} = \frac{\Theta_\times}{\Theta_e} - \left(\frac{p_e}{p_{ez}}\frac{\Theta_{ez}}{\Theta_e}\right)\frac{p_\times}{p_e} = \frac{\Theta_\times}{\Theta_e} + \frac{\Gamma_d - \Gamma_e}{\Gamma_h}\frac{p_\times}{p_e}, \tag{14.80}$$

где $\Gamma_d \equiv g/c_{pa}$ — сухоадиабатический градиент; $\Gamma_h \equiv g/R_a$ — вертикальный градиент температуры в однородной атмосфере; $\Gamma_e \equiv -dT_e/dz$ — вертикальный градиент температуры в стандартной атмосфере (устойчивое гидростатическое состояние). Подставляя (14.78) в (14.66), получаем приближенное выражение для доступной потенциальной энергии (Лоренц [43, 44])

$$A \approx \frac{1}{2}\int_{\text{atm}} g\left\{\left(\frac{1}{\Theta_e}\frac{d\Theta_e}{dz}\right)^{-1}\left(\frac{\Theta^\times}{\Theta_e}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\rho_e}\frac{d\rho_e}{dz}\right)z^{\times 2} - 2\frac{\Theta^\times z^\times}{\Theta_e}\right\}\times$$
$$\times\, dm \approx \frac{1}{2}\int_{\text{atm}} g\left(\frac{1}{\Theta_e}\frac{d\Theta_e}{dz}\right)^{-1}\left(\frac{\Theta^\times}{\Theta_e}\right)^2 dm. \qquad (14.81)$$

При этом приняты во внимание порядки величин: $(\Theta^\times/\Theta_e)^2 \sim 10^{-3}$, $z^\times \sim 10^2$ м, $(1/\Theta_e)(d\Theta_e/dz) \sim 10^{-5}$ м$^{-1}$, $(-1/\rho_e)(d\rho_e/dz) \sim 10^{-4}$ м$^{-1}$.

Вспоминая, что Θ_e и p_e — медленно меняющиеся во времени величины и что $(\Theta_\times/\Theta_e) \ll 1$, $(p_\times/p_e) \ll 1$, легко устанавливаем вполне хорошее приближение

$$\frac{1}{\Theta}\frac{d\Theta}{dt} \approx \frac{1}{\Theta_e}\frac{d}{dt}\left\{\Theta_e\left(1+\frac{\Theta_\times}{\Theta_e}\right)\right\} \approx \frac{\Theta_{ez}}{\Theta_e}w + \frac{d}{dt}\left(\frac{\Theta_\times}{\Theta_e}\right) \approx H$$

и аналогично

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dt} \equiv \frac{\omega}{p} \approx \frac{p_{ez}}{p_e}w + \frac{d}{dt}\left(\frac{p_\times}{p_e}\right),$$

где H определено выражением (14.68). Если затем пренебречь изменением $(\Gamma_d - \Gamma_e)/\Gamma_h$ с высотой и взять полные производные по t от обеих частей (14.80), то с учетом последней формулы получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Theta^\times}{\Theta_e}\right) \approx \frac{Q+\Delta}{c_{pa}T_e} + \frac{\Gamma_d - \Gamma_e}{\Gamma_h}\frac{\omega}{p}. \qquad (14.82)$$

При этом следует помнить, что $(\Theta_{ez}/\Theta_e) \equiv (\Gamma_d - \Gamma_e)/T_e$. Умножая (14.82) на $g\Theta^\times/\Theta_{ez}$, находим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g}{2}\left(\frac{\Theta_{ez}}{\Theta_e}\right)^{-1}\left(\frac{\Theta^\times}{\Theta_e}\right)^2\right) \approx \frac{g}{2}\left(\frac{\Theta_e}{\Theta_{ez}}\right)_z\left(\frac{\Theta^\times}{\Theta_e}\right)^2 w +$$
$$+\alpha^\times\omega + \gamma(Q+\Delta)T^\times, \qquad (14.83)$$

где $\alpha^\times = RT^\times/p$, $T^\times$ — флуктуации температуры T и удельного объема α на изобарических поверхностях. Интегрируя обе части (14.83) по всей атмосфере, получаем приближенное уравнение баланса доступной потенциальной энергии A атмосферы [43, 44, 133]

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} \approx \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{atm}} \frac{g}{2}\left(\frac{\Theta_{ez}}{\Theta_e}\right)^{-1}\left(\frac{\Theta^\times}{\Theta_e}\right)^2 dm =$$
$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{\text{atm}} \frac{1}{2}\gamma c_{pa}(T^\times)^2\, dm \approx \int_{\text{atm}} \alpha^\times\omega\, dm + \int_{\text{atm}} \gamma Q T^\times\, dm. \qquad (14.84)$$

Отметим, что при интегрировании соотношения (14.83) по всей атмосфере мы пренебрегли объемными интегралами, содержащими величины ω и Δ [см. формулы (14.79) и (14.79′)]. В первом интеграле правой части уравнения (14.84) $\alpha^\times$ можно заменить на α, поскольку интеграл от $\alpha_e\omega$ близок к нулю.

Из уравнения баланса (14.84) следует, что доступную потенциальную энергию A, скорость перехода C доступной потенциальной энергии в кинетическую K и скорость генерации G доступной потенциальной энергии можно представить в следующем виде:

$$A \approx \int\limits_{\text{atm}} \frac{g}{2}\left(\frac{\Theta_{ez}}{\Theta_e}\right)^{-1}\left(\frac{\Theta^\times}{\Theta_e}\right)^2 dm = \int\limits_{\text{atm}} \frac{1}{2}\gamma c_{pa}(T^\times)^2\,dm,$$

$$C \approx -\int\limits_{\text{atm}} R_a T^\times(\omega/p)\,dm, \quad G \approx \int\limits_{\text{atm}} \gamma Q T^\times\,dm \approx \int\limits_{\text{atm}} \gamma Q^\times T^\times\,dm, \tag{14.85}$$

где $dm \approx (a^2/g)\cos\varphi\,d\lambda\,d\varphi\,dp$. Приближенные выражения (14.85) для A и G нельзя использовать, если вертикальный температурный градиент Γ_e близок к сухоадиабатическому Γ_d ($\gamma \to \infty$, когда $\Gamma_e \to \Gamma_d$). Они обеспечивают удовлетворительную точность при $\Gamma_d - \Gamma_e > 0{,}2°$ С/100 м. Коэффициент при $(\Theta^\times)^2$ в выражении для A пропорционален введенной выше величине γ. Легко проверить, что в (λ, φ, p)-координатах

$$\Gamma \equiv g/c_{pa}\Theta_e\Theta_{ez} = \gamma\,(T_e/\Theta_e)^2 = (R_a/c_{pa}) \times$$
$$\times (T_e/\Theta_e)(1/p)\left(-1\Big/\frac{\partial\Theta_e}{\partial p}\right).$$

Этот коэффициент зависит главным образом от z или p; изменение его во времени настолько медленное, что им можно пренебречь.

Крупномасштабные движения атмосферы квазистатические, поэтому разумно предположить, что равновесные значения физических величин равны средним значениям этих величин на изобарических поверхностях, в частности

$$\Theta_e \equiv \Theta_e(p, t) \equiv (\overline{\Theta})_p, \text{ так что } \Theta^\times \equiv (\Theta')_p.$$

Здесь $(\overline{\Theta})_p$ — среднее значение Θ на изобарической поверхности и $(\Theta')_p$ — отклонение Θ от среднего значения на изобарической поверхности.

В (λ, φ, p)-координатах уравнение (14.68) первого начала термодинамики принимает вид

$$\frac{d}{dt}(\Theta')_p + \omega\frac{\partial}{\partial p}(\overline{\Theta})_p \approx \frac{(\overline{\Theta})_p(Q+\Delta)}{c_{pa}(\overline{T})_p}, \tag{14.68′}$$

где

$$d/dt \equiv \delta/\delta t + u\,\delta/\delta x + v\,\delta/\delta y + \omega\,\delta/\delta p.$$

Чтобы исключить из уравнения баланса доступной потенциальной энергии A трудно определяемые члены, введем [61] среднее (по вертикальному столбу) значение $\overline{\Gamma}$:

$$\overline{\Gamma} = \frac{1}{p_0}\int_0^{p_0} \Gamma\, dp,$$

где p_0 — давление на поверхности земли. Умножая обе части (14.68′) на $c_{pa}\overline{\Gamma}\,(\Theta')_p$, затем заменяя $\overline{\Gamma}$ на $\gamma_*\,(T_e/\Theta_e)^2$ или $\gamma_*\,\{(\overline{T})_p/(\overline{\Theta})_p\}^2$, получаем

$$\frac{d}{dt}\,[c_{pa}\overline{\Gamma}\,\{(\Theta')_p\}^2/2] \equiv \frac{d}{dt}\,[\gamma_* c_{pa}\,\{(T')_p\}^2/2] \approx$$

$$\approx (\alpha')_p\,\omega\,\frac{\overline{\Gamma}}{\Gamma} + (\gamma_*\,(Q+\Delta)\,(T')_p. \qquad (14.84')$$

Уравнения баланса (14.84) и (14.84′), если в последнем при интегрировании по всей атмосфере пренебречь членом, содержащим Δ, идентичны при условии принятия приближения $\Gamma \approx \overline{\Gamma}$. При этом предположении в соотношениях (14.85) γ можно заменить на $\gamma_* = \overline{\Gamma}\,(\Theta_e/T_e)^2$.

Из приближенного выражения (14.85) для A следует, что полная потенциальная энергия, доступная для перехода в кинетическую энергию, увеличивается, когда уменьшается осредненная по изобарической поверхности статическая устойчивость и когда возрастает изменчивость температуры на изобарических поверхностях. Лоренц [47] отметил, что приближенные формулы (14.85) согласуются между собой (непротиворечивы). В самом деле, если одновременно холодный воздух $[T^\times = (T')_p < 0]$ опускается $(\omega > 0)$, а теплый воздух $[T^\times = (T')_p > 0]$ поднимается $(\omega < < 0)$ по отношению к изобарической поверхности, то $C > 0$, т. е. доступная потенциальная энергия переходит в кинетическую. Этот процесс (см. п. 12.3) может наблюдаться при наличии температурных контрастов на изобарических поверхностях, т. е. при бароклинности атмосферы. При устойчивой стратификации температура воздуха на данном изобарическом уровне будет расти в опускающемся холодном воздухе и понижаться в поднимающемся теплом воздухе, поэтому процесс перехода потенциальной энергии в кинетическую энергию K будет сопровождаться уменьшением температурных контрастов на изобарических поверхностях и в конце концов приведет к уничтожению этих контрастов. Амплитуда скоростей нисходящих и восходящих движений, под влиянием которых сглаживаются температурные контрасты на изобарических поверхностях, зависит не только от самих температурных контрастов между поднимающимся теплым и опускающимся холодным воздухом, но и от статической устойчивости. С уменьшением статической устойчивости эта амплитуда увеличивается. Следовательно, чем больше температурные контрасты на изобарических поверхностях и чем меньше статическая устойчивость, тем больше запас доступной энергии в атмосфере и в то же самое время тем больше кинетической энергии может образоваться. Приближенное выражение Лоренца для A показывает, что доступная потенциальная энергия может возрастать под влиянием притока тепла двумя путями: 1) путем нагревания более теплых районов и охлаждения более холодных при одном и том же давлении, что способствует увеличению температурных контрастов на изобарических поверхностях [см. приближенное выражение (14.85) для G и п. 14.10); 2) путем нагревания более низких слоев и охлаждения верхних слоев, что способствует уменьшению статической устойчивости.

Наконец, сравним приближенные выражения (14.40′ а) и (14.37б) для доступной потенциальной энергии A и ее скорости генерации G, полученные в п. 14.5, с соответствующими выражениями (14.81) и (14.85), в которых положим $\Theta_e \approx (\overline{\Theta})_p$, $\Theta^{\times} \approx \approx (\Theta')_p$.

Даттон и Джонсон [16] отметили, что приближенная формула (14.85) дает для G значения более низкие, чем формула (14.37б). Поскольку наклон изобарических поверхностей, как правило, в 10 раз меньше наклона изэнтропических поверхностей, температурные контрасты $(T')_p$ на изобарических поверхностях значительно меньше температурных контрастов $(T')_\Theta$ на изэнтропических поверхностях. Поэтому точная формула (14.37) дает для G бóльшие значения, чем приближенная формула (14.85). Вероятно, приближенная формула для G, содержащая температурные контрасты $(T')_\Theta$ на изэнтропических поверхностях [см. формулу (14.37б)], обеспечивает лучшие результаты, чем формула, включающая температурные контрасты $(T')_p$ на изобарических поверхностях [см. формулу (14.85)]. Ньюэлл и др. (см. [58], особенно рис. 11 в [58]) также обнаружили большое различие между значениями G (точнее, G_z, см. главу 15), вычисленными по точной формуле (14.37) и приближенной формуле Лоренца (14.85).

До сих пор мы систематически использовали переменные Эйлера λ, φ, p, t вместо λ, φ, z, t. Преобразование классических переменных Эйлера λ, φ, z, t в λ, φ, p, t всегда возможно, поскольку вертикальный градиент давления — $\partial p/\partial z$ принимает только положительные значения и нигде не обращается в нуль. В противоположность нам Лоренц и Даттон, а также Джонсон использовали переменные Эйлера λ, φ, Θ, t. Преобразование переменных λ, φ, z, t в λ, φ, Θ, t не всегда возможно. В самом деле, производная $\partial\Theta/\partial z$, как правило, положительна в свободной атмосфере (статическая устойчивость: $\partial\Theta/\partial z > 0$), однако вблизи земной поверхности в отдельных районах $\partial\Theta/\partial z$ отрицательно (статическая неустойчивость: $\partial\Theta/\partial z < 0$). При использовании переменных Эйлера λ, φ, Θ, t районы, в которых $\partial\Theta/\partial z = 0$ и $\partial\Theta/\partial z < 0$, должны быть исключены из рассмотрения.

Если обозначить через $\overline{(X)}_p$ среднее значение величины $X(\lambda, \varphi, p, t)$ на изобарической поверхности, а через $\overline{(X)}_\Theta$ среднее значение той же величины $X(\lambda, \varphi, \Theta, t)$ на изэнтропической поверхности, то будем иметь: $X(\lambda, \varphi, p, t) = X(\lambda, \varphi, \Theta, t)$ при условии, что $\Theta = \Theta(\lambda, \varphi, p, t)$ или $p = p(\lambda, \varphi, \Theta, t)$. Флуктуации $(X')_p$ и $(X')_\Theta$ величины X соответственно на изобарической и изэнтропической поверхностях связаны соотношением $X = \overline{(X)}_p + (X')_p = \overline{(X)}_\Theta + (X')_\Theta$. Эти флуктуации не независимы. В самом деле, имеем

$$(X')_\Theta = (X')_p + \frac{\partial X}{\partial p}(p')_\Theta, \quad (X')_p = (X')_\Theta + \frac{\partial X}{\partial \Theta}(\Theta')_p \tag{14.86}$$

при условиях

$$(\Theta')_\Theta = (\Theta')_p + \frac{\partial \Theta}{\partial p}(p')_\Theta \equiv 0, \quad (p')_p = (p')_\Theta + \frac{\partial p}{\partial \Theta}(\Theta')_p \equiv 0. \tag{14.87}$$

В формулах (14.86), чтобы исключить нелинейные члены, величину X можно заменить на $\overline{(X)}_p$ и $\overline{(X)}_\Theta$.

Вставляя $(p')_\Theta$, найденное из (14.87), в (14.40'а) и заменяя $d\Theta$ на $(\partial\Theta/\partial p)\,dp$, получаем

$$A \approx \frac{1}{2}\frac{R_a}{g}\oint_\sigma d\sigma \int_0^{p_0} \{(\bar{p})_\Theta/p_{00}\}^k (1/(\bar{p})_\Theta)\left(-\frac{\partial\Theta}{\partial p}\right)^{-1} \{(\Theta')_p\}^2\,dp,$$

где σ — земная поверхность. Это приближенное выражение показывает, что доступная потенциальная энергия увеличивается с ростом изменчивости температуры $[(T')_p = \{(\bar{T})_p/(\bar{\Theta})_p\}(\Theta')_p]$ на изобарических поверхностях и с уменьшением статической устойчивости $[-(\partial\Theta/\partial p) > 0]$. Напомним, что здесь $(\bar{p})_\Theta = (p_{00}/\Theta^{1/k})\,(\overline{T^{1/k}})_\Theta$. Наконец, заменяя $(\bar{p})_\Theta$ на p_e, Θ на Θ_e и $\partial\Theta/\partial p$ на $\partial\Theta_e/\partial p$, находим

$$A \approx \frac{1}{2}\oint\limits_{\sigma} d\sigma \int\limits_{0}^{p_0} \left(\frac{1}{\Theta_e}\frac{\partial\Theta_e}{\partial z}\right)^{-1}\left(\frac{(\Theta')_p}{\Theta_e}\right)^2 dp.$$

В предположении, что $\Theta^\times \approx (\Theta')_p$, последнее выражение становится формально эквивалентно формуле Лоренца для A [см. (14.81)]. Поскольку $(T^\times/T_e) = (\Theta^\times/\Theta_e)$ на изобарических поверхностях, $(\partial\Theta_e/\partial z) = -(\partial\Theta_e/\partial p)\,g\rho_e$ и $p_e = R_a T_e \rho_e$, то с учетом (14.41) и (14.87) имеем

$$\gamma T^\times \approx \gamma\,(T')_p \approx \frac{R_a}{c_{pa}}\frac{(p')_\Theta}{(\bar{p})_\Theta} = \frac{(T')_\Theta}{(\bar{T})_\Theta} \approx N. \tag{14.88}$$

Таким образом, выражения (14.37а) и (14.85) для скорости генерации G доступной энергии приближенно одинаковые [см. также (14.37б)].

В заключение заметим, что для аналитического представления доступной потенциальной энергии A [см. формулы (14.40′) и (14.66)] использованы два подхода. При обоих подходах в основу положена простая модель атмосферы — выделено фактическое (см. п. 14.5) и стандартное (см. п. 14.3) состояние. Первый подход (см. п. 14.5) основан на преобразовании фактического состояния (T, p) атмосферы в стандартное состояние (T_e, p_e) и на том факте, что это преобразование целиком обусловливается распределением массы фактического состояния [см. формулу (14.28)]. Второй метод (см. п. 14.7) предполагает, что фактическое состояние — это результат адиабатической перестройки стандартного состояния. Такое предположение справедливо в случае гидростатической устойчивости обоих физических состояний. Доступная потенциальная энергия, другими словами, полная потенциальная энергия, высвобожденная в процессе адиабатической перестройки, переводит стандартное состояние в фактическое и зависит только от распределения массы [см. формулы (14.64) и (14.65)]. Первый подход основан на классическом приближенном выражении (14.38) для полной потенциальной энергии (см. п. 14.5), которое часто рассматривается как точное выражение. В действительности же точное выражение является отправной точкой второго подхода (п. 14.6). Оба подхода приводят к одним и тем же приближенным выражениям (14.85) для доступной потенциальной энергии A, скорости генерации ее G и скорости перехода в кинетическую энергию K атмосферы. Численные методы позволяют рассчитывать величину A, используя ее непосредственное определение (14.21) [74].

14.9. Вклад массы воздуха в доступную потенциальную энергию атмосферы

Возвращаясь еще раз к приближенному выражению (14.18) или (14.38) для полной потенциальной энергии реальной атмосферы и к точному выражению (14.20) для полной потенциальной энергии стандартной атмосферы и привлекая соотношения

$$\Theta/p_{00}^k = T/p^k = T_e/p_e^k,$$

получаем

$$A \equiv (\Phi + E) - (\Phi + E_e) \approx \int\limits_{atm} N c_{pa} T \rho \, d\tau > 0, \tag{14.89}$$

где $N = 1 - (p_e/p)^k$ — множитель (см. рис. 15), введенный в связи с получением уравнения баланса (14.36) доступной потенциальной энергии A атмосферы. В выражениях (14.20) и (14.38) произведения $\rho_e d\tau_e$ и $\rho d\tau$ представляют одну и ту же элементарную массу dm соответственно стандартной и реальной атмосферы, так что $dm = \rho_e \, d\tau_e = \rho \, d\tau$. Неравенство (14.89) — следствие того, что в тропосфере, как правило, большим значениям T соответствуют положительные значения N, а малым T — отрицательные N [это неравенство неприложимо к (14.90)]. На основании (14.89) множитель N можно интерпретировать как часть полной потенциальной энергии единичной массы воздуха, являющуюся доступной потенциальной энергией. Соответственно $1-N$ характеризует оставшуюся часть полной потенциальной энергии той же единичной массы, представляющую собой недоступную потенциальную энергию. Отсюда

$$(\Phi + E)_e = \int\limits_{atm} (1 - N) \, c_{pa} T \rho \, d\tau > 0. \tag{14.89'}$$

Это неравенство вытекает из того факта, что $|N| \ll 1$. Объемный интеграл

$$A_\tau \equiv \int\limits_{\tau} N c_{pa} T \rho \, d\tau \tag{14.90}$$

можно интерпретировать теперь как вклад массы воздуха, заключенной в объеме τ, в доступную потенциальную энергию A всей атмосферы (см. [87] и п. 14.8) при условии, что стандартное состояние определено для всей атмосферы. Следует заметить, что A_τ может быть отрицательным; это бывает в том случае, когда температура воздуха в объеме τ намного ниже температуры остальной части атмосферы [88].

Чтобы получить уравнение баланса A_τ, нужно взять индивидуальную производную по времени t от обеих частей (14.90). С учетом (2.6) получаем

$$\frac{\partial A_\tau}{\partial t} = \int_\tau N c_{pa} \frac{dT}{dt} \rho \, d\tau + \int_\tau \frac{dN}{dt} c_{pa} T \rho \, d\tau - \oint_\sigma N c_{pa} T \rho v_N \, d\sigma, \tag{14.91}$$

где σ — поверхность объема τ; v_N — проекция скорости на внешнюю нормаль N к σ [87]. Привлекая уравнение первого начала термодинамики

$$c_{pa} \frac{dT}{dt} - \alpha\omega = Q + \Delta,$$

находим

$$\int_\tau N c_{pa} \frac{dT}{dt} \rho \, d\tau = \int_\tau N (Q + \Delta + \alpha\omega) \rho \, d\tau. \tag{14.91а}$$

Поскольку в переменных Эйлера (λ, φ, Θ, t) с учетом соотношений (14.26) и (14.29) имеем

$$\frac{dp_e}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int_{\lambda=0}^{2\pi} \int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\Theta}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(g\rho \frac{\partial z}{\partial \Theta} \cos\varphi \, d\lambda \, d\varphi \, d\Theta \right) = 0$$

[здесь $(\partial z / \partial \Theta) \equiv 0$ для «подземного интервала» $\Theta_0 > \Theta > 0$], то

$$\int_\tau \frac{dN}{dt} c_{pa} T \rho \, d\tau = \int_\tau (1 - N) \alpha\omega \, dm, \tag{14.91б}$$

где $dm = \rho \, d\tau$ и $\alpha = \rho^{-1}$.

Вставляя выражения (14.91а) и (14.91б) в (14.91), уравнение баланса A_τ получаем в следующем виде:

$$\frac{\partial A_\tau}{\partial t} + \oint_\sigma N c_{pa} T \rho v_N \, d\sigma = \int_\sigma \{(Q + \Delta) N + \alpha\omega\} \, dm. \tag{14.92}$$

Это уравнение следует сравнить с уравнением баланса (14.36). Поверхностный интеграл в левой части (14.92) представляет поток полной потенциальной энергии через σ. С учетом формул (14.10a) или (14.10'a) этот интеграл в переменных Эйлера (λ, φ, z, t) или (λ, φ, p, t) можно представить соответственно в следующем виде:

$$\oint\!\!\oint_{\sigma} Nc_{\mathrm{pa}} T\rho\,(ua\,d\varphi\,dz + va\cos\varphi\,dz\,d\lambda + wa^2\cos\varphi\,d\lambda\,d\varphi)$$

или

$$\oint\!\!\oint_{\sigma} N\,(c_{\mathrm{pa}}/g)\,T\,\Big(ua\,d\varphi\,dp + va\cos\varphi\,dp\,d\lambda + \left(\omega - \frac{\partial p}{\partial t}\right) a^2\cos\varphi\,d\lambda\,d\varphi\Big).$$

В динамической метеорологии членом $\partial p/\partial t$ часто пренебрегают: движение пространства (λ, φ, p) по отношению к Земле, как правило, незначительно.

Дифференцируя аналогичным образом обе части (14.89'), получаем уравнение баланса (14.35) недоступной энергии.

Соответствующее уравнение баланса кинетической энергии

$$K_\tau \equiv \int_\tau \rho k\,d\tau$$

массы воздуха, заключенной в объеме τ, можно легко получить на основании уравнения (14.3a); находим

$$\frac{\partial K_\tau}{\partial t} + \oint\!\!\oint_{\sigma} (1/g)\,\{(k+\phi)\,(ua\,d\varphi\,dp + va\cos\varphi\,dp\,d\lambda + \omega a^2\cos\varphi\,d\lambda\,d\varphi)\} = -\int_\tau (\alpha\omega + D)\,dm, \qquad (14.92')$$

где dm заменяет $(a^2/g)\cos\varphi\,d\lambda\,d\varphi\,dp$. Подынтегральное выражение в левой части (14.92'), содержащее k, представляет собой горизонтальный и вертикальный потоки кинетической энергии, в то время как член с ϕ — это работа силы давления на поверхности σ.

С помощью уравнений баланса (14.92) и (14.92') можно установить связь между энергетикой ограниченного объема и глобальным бюджетом энергии всей атмосферы. Исследование атмосферы над Северной Америкой в марте 1962 г. (см. [88]) показало: 1) существует тесное взаимодействие между рассматриваемым ограниченным районом и атмосферой вне его, в процессе которого большую роль играет конвективный перенос кинетической энергии и полной потенциальной энергии через замкнутую поверхность σ, а также поток кинетической энергии, обусловленный работой силы давления на поверхности σ; 2) полная потенциальная энергия, высвобождаемая в ограниченном районе, усваивается вне этого района. Деление атмосферы на ограниченные области следует производить с учетом главных особенностей планетарной циркуляции, а также с учетом освещенности данными зондирования атмосферы.

14.10. Генерация доступной потенциальной энергии и общая циркуляция атмосферы

Если доступная энергия A в течение длительного промежутка времени не испытывает прогрессивных изменений во времени, то на основании (12.25) и (14.75а) можем записать

$$\mathcal{K} \equiv \int_{t_1}^{t_2} C\,dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\text{atm}} -a\omega\,dm =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \int \Delta\,dm = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\text{atm}} \gamma T^{\times} Q^{\times}\,dm > 0 \qquad (14.93)$$

при условии, что интервал времени $(t_2—t_1)$ много больше местного времени существования крупномасштабных систем движения. Энергетические процессы, сопровождающие общую циркуляцию атмосферы, удовлетворяют интегральному условию (14.93) [134].

Формула (14.93) содержит три выражения для количества $\mathcal{K}$ кинетической энергии, генерируемой в атмосфере макрометеорологическими процессами турбулентного типа за интервал времени, во много раз превосходящий время существования систем движения крупного масштаба (погодных систем). Будучи осредненной за большой интервал времени и по всей поверхности Земли, величина $\mathcal{K}$ служит мерой интенсивности общей циркуляции (см. п. 12.3). Из равенств (14.93) следует, что интенсивность общей циркуляции может быть оценена путем расчета скорости перехода полной потенциальной энергии (доступной потенциальной энергии) в кинетическую, диссипации кинетической энергии в тепло под влиянием трения или генерации доступной потенциальной энергии. Каждую из этих трех величин нелегко рассчитать на основе имеющихся метеорологических данных.

Неравномерный в пространстве приток тепла $Q^{\times}$ порождает контрасты температуры $T^{\times}$ на изобарических поверхностях и тем самым увеличивает запас доступной потенциальной энергии A, которая может превращаться в кинетическую энергию K. Увеличение энергии A происходит, однако, лишь при положительной корреляции на изобарической поверхности между скоростью нагревания Q (кроме обусловленного трением) и температурой воздуха T. Доступная энергия A генерируется тогда, и только тогда, когда, как правило, в течение длительного периода на изобарических поверхностях теплый воздух ($T^{\times} > 0$) нагревается ($Q > 0$), а холодный ($T^{\times} < 0$) охлаждается или когда на тех же поверхностях теплый (холодный) воздух нагревается (охлаждается) сильнее, чем холодный (теплый) воздух, т. е. тогда, когда на изобарических поверхностях увеличиваются контрасты температуры (бароклинность) [134].

Из уравнения баланса (14.75а) доступной потенциальной энергии вытекает, что пространственная корреляция между температурой T и скоростью притока тепла Q играет определяющую роль в энергетике атмосферы. Наши знания о поле температуры в атмосфере более или менее удовлетворительны; с другой стороны, очень бедны сведения о распределении в пространстве источников и стоков тепла. Известны лишь зональные значения $[\overline{Q}_R]$ среднего (за зиму и лето) радиационного притока $\overline{Q}_R$ тепла. Таким образом, мы располагаем более или менее удовлетворительными сведениями о распределении в меридиональной плоскости средних (за сезон) зональных значений $[\overline{Q}_R]$ и $[\overline{T}]$ от экватора до полюса (и то только в северном полушарии).

На рис. 17 представлено зональное поле температуры $[\overline{T}]$ в осях координат широта — высота. Можно отметить следующие особенности осредненного поля температуры планетарного масштаба [58]: 1) вблизи экваториальной тропопаузы зональные значения температуры $[\overline{T}]$ в декабре—феврале ниже, чем в июне—августе; 2) летом меридиональный градиент температуры $[\overline{T}]$ в северном полушарии меньше, чем в южном; 3) зимой температура над Южным полюсом ниже, чем над Северным; 4) зимняя область тепла в стратосфере умеренных широт в северном полушарии более обширна, чем в южном.

В стратосфере и мезосфере поля температуры и движения формируются в основном под влиянием поглощения солнечной и инфракрасной радиации некоторыми незначительными составными частями атмосферы (H_2O, CO_2, O_3). Таким образом, выше тропопаузы $Q = Q_R$. В этом отношении стратосфера и мезосфера очень существенно отличаются от тропосферы, в которой решающую роль играют источники тепла и холода на земной поверхности, последующий конвективный перенос явного тепла от нее к атмосфере (приток тепла в пограничном слое со скоростью Q_C) и выделение скрытого тепла со скоростью Q_L.

Маргетройд и Синглтон [56] предприняли попытку разумно согласовать различные оценки радиационного баланса в слое 15—80 км, рассчитанного как функция широты и высоты на

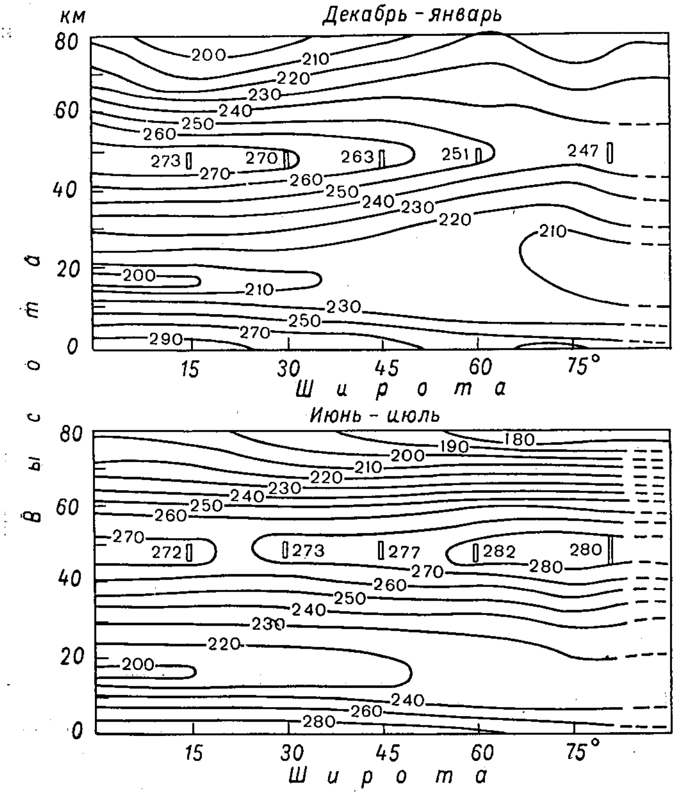

Рис. 17. Средняя зональная температура $[\overline{T}]$ (K) в декабре — январе и июне—июле (северное полушарие) как функция высоты z и широты φ. Двойными вертикальными линиями отмечены изотермические слои (по А. Е. Колю, «Первоначальный вариант Международной стандартной атмосферы», февраль 1972 г.).

основе данных о среднем (за зиму и лето) распределении водяного пара и озона в меридиональной плоскости. Результаты расчета скорости притока тепла (выраженной в °С/сут) представлены на рис. 18.

Предпринимались многочисленные усилия улучшить информацию о пространственном (в планетарном масштабе) распределении и сезонном изменении притоков тепла Q_R, Q_C и Q_L (см. обзор [58]). Однако эта информация все еще не очень удовлетворительна. В частности, полученные значения притоков тепла не удовлетворяют важному интегральному условию (12.19); более того, в южном полушарии для Q_R принимаются такие же значения, как и в северном.

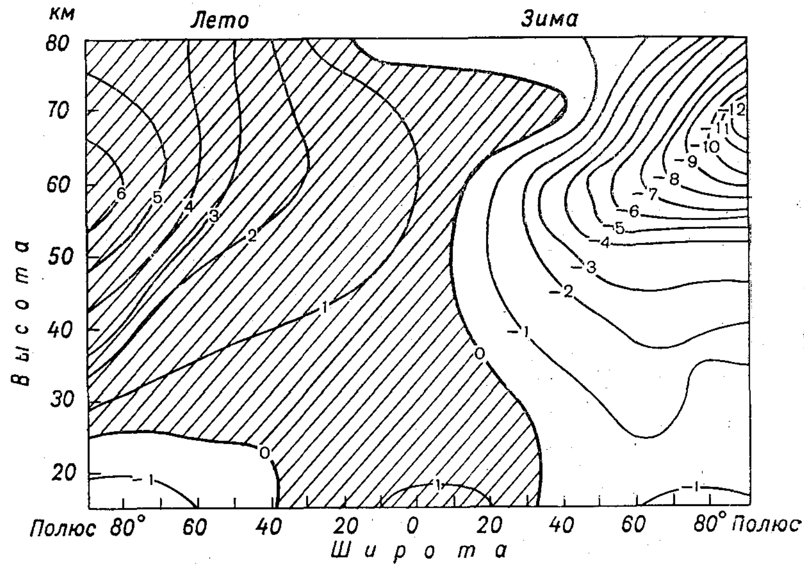

Рис. 18. Распределение в меридиональной плоскости (северное полушарие) источников и стоков тепла (радиационный баланс). Интенсивность источников и стоков представлена скоростью нагревания и охлаждения в °С/сут (по Мергатройду и Синглтону [56]).

Уменьшение с широтой величины $Q \equiv Q_R + Q_C + Q_L$ в тропосфере, по необходимости влекущее за собой увеличение доступной потенциальной энергии, обусловлено в большей степени распределением вдоль меридиана величин Q_L и Q_C, чем Q_R, при этом преобладающую роль играет Q_L. Именно конденсация водяного пара в восходящей ветви экваториальной ячейки Гадлея перемещает максимум $[\overline{Q}]$ из области, расположенной к югу от экватора в декабре—феврале, в область, расположенную в июне—августе к северу от него. Подчеркнем здесь, что зимой и летом существует только одна экваториальная ячейка Гадлея, в то время как в переходные сезоны (март—май и сентябрь—ноябрь) наблюдаются ячейки Гадлея в том и другом полушарии [58].

Конвективный приток $[\overline{Q}_C]$ явного тепла положителен до высот менее 2 км и до широт, не превышающих 65° (в том и другом полушарии). Приток $[\overline{Q}_L]$ скрытого тепла достигает максимума над экватором в слое 6—7 км (2,5° С/сут), а над умеренными широтами обоих полушарий в слое 2—3 км, на широте около 45° зимой и около 55° летом (~2° С/сут). Приток скрытого тепла отсутствует в среднем выше 15—16 км над экватором и выше 4—5 км над полюсами.

Среднее распределение температуры вдоль меридиана летом и зимой отличается от того распределения, которое наблюдалось бы при лучистом равновесии. Поэтому происходит перенос тепла из экваториального пояса к полюсам в слое от поверхности земли до высоты около 25 км [1, 2, 29, 47] и от полюса летнего полушария к полюсу зимнего полушария в стратосфере (выше 25 км) и мезосфере. Следствием этого обстоятельства является существенное различие в характере циркуляции ниже и выше примерно 25 км (~25 мбар). В самом деле, из среднего распределения в меридиональной плоскости источников и стоков тепла от поверхности земли до основания термосферы следует, что ниже 25 км атмосферу можно рассматривать как состоящую из двух термодинамических систем, общий источник тепла которых расположен в экваториальном поясе, а стоки тепла находятся в высоких широтах северного и южного полушарий, где интенсивность их имеет заметный сезонный ход. От 25 км до термосферы атмосферу можно рассматривать как одну термодинамическую систему с источником тепла над полюсом летнего полушария и стоком тепла над полюсом зимнего полушария. Источники и стоки тепла выше 25 км два раза в год (в дни равноденствий) меняются местами. Таким образом, можно ожидать [135, 136]: 1) *сезонных колебаний* полусферной циркуляции в тропосфере и нижней стратосфере (<25 км), контролируемых разностью средних значений температуры между экватором и полюсом или, другими словами, сезонными изменениями средней бароклинности ниже 25 км; 2) *полной смены*, дважды в год, полусферной циркуляции в мезосфере и стратосфере (выше 25 км); 3) *некоторой независимости* планетарных циркуляций полушарий ниже 25 км и, наоборот, объединения этих циркуляций выше 25 км, несмотря на различие в устойчивости и поведении циклонического вихря полярной ночи зимнего полушария и антициклонического вихря полярного дня летнего полушария.

Сравнив, наконец, среднее распределение в меридиональной плоскости источников и стоков тепла и температуры воздуха (см. рис. 17—19), устанавливаем следующее.

1. Ниже 25 км, где на системы движения определяющее влияние оказывает земная поверхность (приток тепла в пограничном слое и приток скрытого тепла), полная потенциальная энергия, доступная для перехода в кинетическую энергию, контролируется распределением температуры зональной тропосферной циркуляции каждого полушария, при этом полное количество доступной энергии зимой больше, чем летом. В слое между полярной тро-

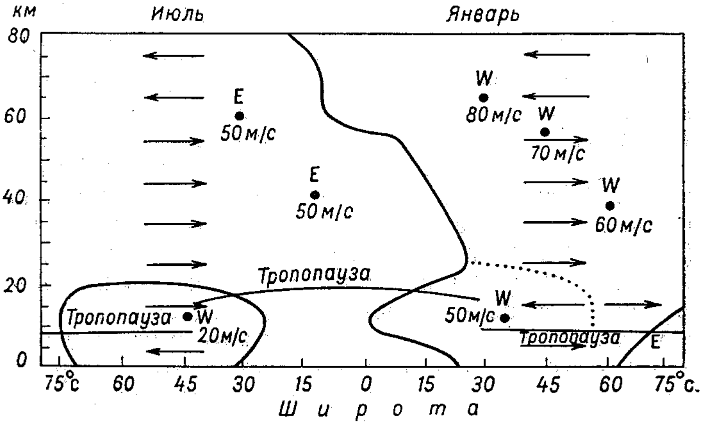

Рис. 19. Стрелками показано направление меридионального градиента $(-1/a)\ (\partial/\partial\varphi)\ [\overline{T}]$ средней зональной температуры в июле и январе (северное полушарие). Буквами E и W обозначено положение осей восточного и западного струйных течений; пунктирная кривая — граница области с полярным режимом зимой; тонкая сплошная кривая — тропопауза; толстая сплошная кривая — нулевая изотаха.

попаузой (7—8 км) и уровнем 25 км доступная потенциальная энергия летом уничтожается, так что летняя циркуляция в нижней стратосфере должна поддерживаться за счет механической энергии тропосферы (вынужденная циркуляция нижней стратосферы). Зимой условия в нижней стратосфере менее простые: холодный воздух над полярной шапкой охлаждается ($T^{\times} < 0$, $Q^{\times} < 0$ на изобарических поверхностях), вызывая прирост доступной потенциальной энергии, в то время как холодный воздух тропического пояса нагревается ($T^{\times} < 0$, $Q^{\times} > 0$), что связано с потерей потенциальной энергии. С другой стороны, теплый воздух умеренных широт в нижней стратосфере целиком располагается в области стока тепла ($T^{\times} > 0$, $Q^{\times} < 0$). Таким образом, теплый пояс нижней стратосферы поддерживается не радиационным, а динамическим фактором — вынужденным нисходящим движением.

2. В стратосфере выше уровня 25 км, где крупномасштабные системы движения, как правило, более не находятся под контролем тропосферы, образование полной потенциальной энергии, доступной для перехода в кинетическую энергию, обусловливается ($T^{\times} > 0$, $Q^{\times} > 0$ или $T^{\times} < 0$, $Q^{\times} < 0$) распределением температуры зональной циркуляции обоих полушарий, рассматриваемой зимой и летом как единая система (другими словами, стратосфера выше 25 км представляет собой единое целое).

3. В мезосфере выше уровня максимума скорости западных ветров полная потенциальная энергия, доступная для перехода в кинетическую энергию, уничтожается ($T^{\times} < 0$, $Q^{\times} > 0$ или $T^{\times} > 0$, $Q^{\times} < 0$) под влиянием распределения температуры зональной циркуляции обоих полушарий, рассматриваемой как единая система. Соответственно, для того чтобы поддержать мезосферную циркуляцию, необходим приток механической энергии в нее из других слоев, преимущественно с более низких уровней [136, 137].

15

Цикл Лоренца превращения и переноса энергии в атмосфере

Операция зонального осреднения позволяет: 1) отделить крупномасштабные системы движения (атмосферные возмущения, называемые также синоптическими системами) от зонального потока ($[u]$, $[v]$, $[\omega]$), в котором главная составляющая $[u]$ определяет планетарный вихрь (см. главу 12); 2) исследовать превращения и переносы энергии между атмосферными возмущениями и планетарным вихрем ($[u]$, 0, 0) [133]. Если для оценки различных членов уравнений баланса энергии используются синоптические данные, то автоматически отфильтровываются мелкомасштабные движения.

Совершенно очевидно, что планетарный вихрь ($[u]$, 0, 0) — эта наибольшая система движения атмосферы — не играет никакой роли в переносе импульса, явного тепла и влаги (скрытого тепла) в меридиональных плоскостях. Однако эти переносы существенны для поддержания планетарного вихря. Поддерживают планетарный вихрь зональное движение (0, $[v]$, $[\omega]$) в меридиональных плоскостях и крупномасштабные вихри, особенно меридиональная и вертикальная составляющие v^{I} и ω^{I} вихревой скорости $\mathbf{v}^{\mathrm{I}}$. Как уже было отмечено (см. п. 11.1), очень затруднительна оценка всех вертикальных потоков, а из меридиональных потоков с большей достоверностью оцениваются турбулентные потоки, нежели потоки, обусловленные наличием составляющей $[v]$ скорости зонального движения вдоль меридиана. На рис. 20—22 приведены данные о меридиональных потоках момента абсолютного количества движения (рис. 20) и явного тепла (рис. 21), обусловленных средней циркуляцией в меридиональной плоскости и переносом крупномасштабных вихрей, а также данные о меридиональном потоке скрытого тепла под влиянием крупномасштабных вихрей (рис. 22). Зимой макротурбулентный поток момента абсолютного количества движения достигает максимума на широте 30° вблизи уровня 200 мбар, а макротурбулентный поток явного тепла — на широте 50° вблизи уровней 700 и 200 мбар [140]. Перенос скрытого тепла под влиянием

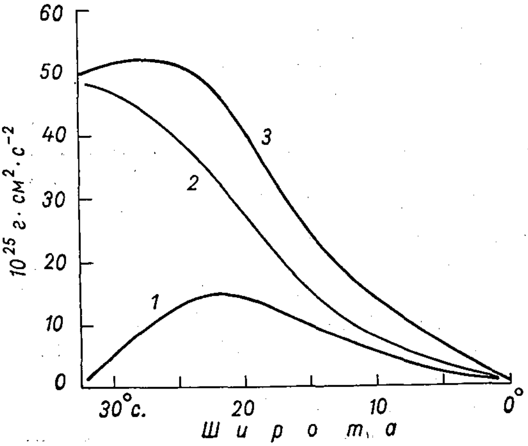

Рис. 20. Меридиональный (в сторону полюса) поток момента абсолютного количества движения зимой (по Минцу [53], Старру и Уайту [105], Пальмену [62]).

1 — средняя циркуляция; 2 — крупномасштабные вихри; 3 — результирующий.

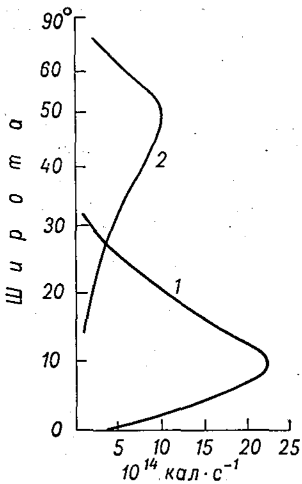

Рис. 21

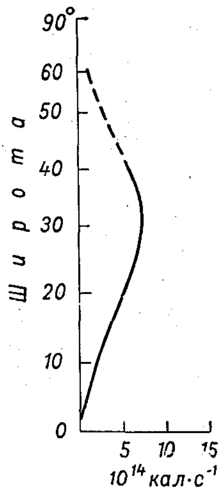

Рис. 22

Рис. 21. Меридиональный (в сторону полюса) поток потенциальной энергии и явного тепла под влиянием средней циркуляции (*1*) (по Рилю [79, 80]) и крупномасштабный турбулентный поток явного тепла (*2*) в январе 1949 г. (по Минцу [53]).

Рис. 22. Меридиональный (в сторону полюса) крупномасштабный турбулентный поток скрытого тепла (по ван де Богарту [109]).

меридиональной циркуляции опущен, поскольку он оценивается на основе высотных данных с большой погрешностью.

Турбулентные потоки количества движения, тепла и влаги в меридиональном направлении характеризуют среднее состояние крупномасштабного потока. Этот поток квазигеострофический; значит, к востоку от оси ложбины ветер имеет южную составляющую, а к западу от нее — северную. Согласно высотным данным, в умеренных широтах южная составляющая ветра связана с более сильной западной составляющей (см. п. 11.2), в то же время южный поток переносит тепла и влаги больше, чем северный. Таким путем осуществляется обмен импульсом, теплом и влагой через широтные круги, главным образом в барических ложбинах. Этот обмен порождает потоки импульса, тепла и влаги, направленные к полюсу. Очень часто ложбины на верхних уровнях высоких широт распространяются в сторону экватора до низких широт. Главные ложбины пересекают в обоих полушариях практически все широтные зоны от Арктики и Антарктики до тропиков, в которые они также проникают достаточно глубоко [79, 80]. В этих ложбинах осуществляется перенос импульса, тепла и влаги из тропиков в высокие широты, т. е. из зоны избытка в зону недостатка зональной (западной) составляющей импульса, тепла и влаги. Такой перенос необходим для поддержания общей циркуляции.

Как будет показано ниже, турбулентные потоки зональной (западной) составляющей импульса [105] и явного тепла [29] играют существенную роль в цикле Лоренца переноса и превращения энергии. Турбулентный поток скрытого тепла, ограниченный нижней половиной тропосферы, прямо не входит в этот цикл, хотя конвергенция этого потока вносит вклад в приток тепла (кроме обусловленного трением).

Рассматривая раздельно осредненную зональную циркуляцию и возмущения синоптического масштаба, можем кинетическую энергию K и доступную потенциальную энергию A атмосферы разделить на две части: кинетическую энергию K_Z и доступную потенциальную энергию A_Z зонального движения и кинетическую энергию K_E и доступную потенциальную энергию A_E крупномасштабных вихрей:

$$K \equiv K_Z + K_E \text{ и } A \equiv A_Z + A_E,$$

где, согласно (5.47),

$$K_Z \approx \int\limits_{atm} \frac{1}{2} [\mathbf{v}_h]^2 \, dm \approx \int\limits_{atm} \frac{1}{2} [u]^2 \, dm,$$

$$A_Z \approx \int\limits_{atm} \frac{1}{2} \gamma c_{pa} [T^{II}]^2 dm \approx \int\limits_{atm} \frac{1}{2} \gamma c_{pa} \{([T]^{II})^2\} dm, \tag{15.1}$$

$$K_E \approx \int\limits_{atm} \frac{1}{2} [(\mathbf{v}_h^I)^2] dm, \quad A_E \approx \int\limits_{atm} \frac{1}{2} \gamma c_{pa} [(T^I)^2] dm \tag{15.2}$$

[по поводу смысла символов см. формулы (5.32) и (5.33)].

Следует заметить, что: 1) основная часть полного количества K_Z кинетической энергии зонального движения ([u], [v], [ω]) сосредоточена в планетарном вихре ([u], 0, 0); 2) бо́льшая часть полного количества K_E турбулентной кинетической энергии — это кинетическая энергия горизонтального движения крупномасштабных вихрей; 3) A_Z представляет собой количество доступной потенциальной энергии осредненного зонального поля; 4) A_E — это количество доступной потенциальной энергии крупномасштабных вихрей как результат флуктуаций в распределении массы по отношению к зональному распределению.

Объединяя уравнение движения (14.14) с уравнением неразрывности (14.12), записанным в переменных Эйлера λ, φ, p, t, легко получаем уравнение зонального движения, а также уравнение для кинетической энергии K_Z. Затем на основе этого последнего уравнения и зонально осредненного уравнения (14.3а) устанавливаем уравнение для кинетической энергии K_E (см. п. 6.1 и 6.2). После несколько длинных выкладок находим

$$\frac{\delta}{\delta t}(K_Z) \approx \frac{\delta}{\delta t} \int\limits_{atm} \frac{1}{2} [u]^2 dm \approx C_Z + C_K - D_Z, \tag{15.3}$$

$$\frac{\delta}{\delta t}(K_E) \approx \frac{\delta}{\delta t} \int\limits_{atm} \frac{1}{2} [(\mathbf{v}_h^I)^2] dm \approx C_E - C_K - D_E, \tag{15.4}$$

где D_Z и D_E — скорости диссипации кинетической энергии под влиянием трения:

$$D_Z = -[\mathbf{F}_h]\cdot[\mathbf{v}_h] > 0, \quad D_E = -[\mathbf{F}_h^I \cdot \mathbf{v}_h^I] > 0;$$

$$C_K \approx \int\limits_{atm} a \cos\varphi \left([u^I v^I] \frac{\delta}{a\delta\varphi} \left(\frac{[u]}{a\cos\varphi} \right) + \right.$$

$$\left. + [u^I \omega^I] \frac{\delta}{\delta p} \left(\frac{[u]}{a\cos\varphi} \right) \right) dm > 0, \tag{15.5}$$

$$C_Z \approx \int\limits_{atm} -[\alpha][\omega] dm, \quad C_E \approx \int\limits_{atm} -[\alpha^I \omega^I] dm > 0. \tag{15.6}$$

Если объединить уравнение неразрывности (14.12) с уравнением (14.82), то легко получим уравнение для зонально осредненного значения $[\Theta^{\times}]$ величины $\Theta^{\times}$, а затем и уравнение для доступной потенциальной энергии A_Z. На основе последнего уравнения и зонально осредненного уравнения (14.83) находим уравнение для доступной потенциальной энергии A_E. После несколько длинных выкладок получаем [43, 133, 136]

$$\frac{\delta}{\delta t}(A_Z) \approx \frac{\delta}{\delta t} \int\limits_{\text{atm}} \frac{1}{2} \gamma c_{pa} \{([T]^{\text{II}})^2\}\, dm = -C_Z - C_A + G_Z, \quad (15.7)$$

$$\frac{\delta}{\delta t}(A_E) \approx \frac{\delta}{\delta t} \int\limits_{\text{atm}} \frac{1}{2} \gamma c_{pa} [(T^{\text{I}})^2]\, dm = -C_E + C_A + G_E, \quad (15.8)$$

где

$$C_A \approx - \int\limits_{\text{atm}} \gamma c_{pa} \left([T^{\text{I}} v^{\text{I}}] \frac{\delta}{\delta y} [T] + \frac{(\overline{T})_p}{(\overline{\Theta})_p} \left\{ [T^{\text{I}} \omega^{\text{I}}]^{\text{II}} \frac{\delta}{\delta p} [\Theta]^{\text{II}} \right\} \right) dm > 0, \quad (15.9)$$

$$G_Z \approx \int\limits_{\text{atm}} \gamma \{[Q]^{\text{II}} [T]^{\text{II}}\}\, dm > 0, \quad G_E \approx \int\limits_{\text{atm}} \gamma [Q^{\text{I}} T^{\text{I}}]\, dm. \quad (15.10)$$

При выводе уравнений (15.7) и (15.8) пренебрегли кинематическими эффектами флуктуаций плотности, однако гравитационные эффекты сохранены. Более того, предположено, что $X_e \approx (\overline{X})_p$; эта гипотеза справедлива вследствие квазистатического характера крупномасштабных движений.

Оценим знак скоростей превращения энергии C_Z, C_E, D_Z и D_E и скоростей перехода энергии C_K и C_A.

Поскольку скорости диссипации энергии D_Z и D_E положительны, то для поддержания зональной кинетической энергии K_Z и турбулентной кинетической энергии K_E необходимы источники энергии.

В п. 11.3 мы уже видели, что в тропосфере и стратосфере наибольшие положительные значения меридионального потока $(\overline{\rho})_p\, a \cos \varphi\, [u^{\text{I}} v^{\text{I}}]$ момента количества движения [2, 53, 105] связаны с положительными значениями скорости возрастания $(1/a)\ (\delta/\delta\varphi)\ ([u]/a \cos \varphi)$ вдоль меридиана (более точно, вдоль кривых пересечения поверхностей $\lambda = \text{const}$ и $p = \text{const}$) угловой зональной скорости $[u]/a \cos \varphi$, а наименьшие положительные (и отрицательные) значения этого потока — с отрицательными значениями этой скорости возрастания, благодаря чему первое слагаемое под интегралом в (15.5) вносит положительный вклад в C_K. Второе слагаемое в этом интеграле отрицательное (см.

п. 11.3), однако оно на один порядок меньше первого; таким образом, $C_K > 0$. Скорость перехода C_K ($K_E \to K_Z$) энергии достигает ощутимых значений только в верхней тропосфере. Вблизи экватора и к северу от субтропического струйного течения есть области, где C_K несколько меньше нуля [58].

Переход турбулентной кинетической энергии K_E в кинетическую энергию K_Z зонального движения находится в противоречии с тем, что следует ожидать от классической теории турбулентности (явление отрицательной вязкости [104]).

В вихрях синоптического масштаба распределение плотности на изобарических поверхностях таково, что на одной и той же широте теплый воздух ($\alpha^I > 0$) совершает восходящее движение ($\omega < 0$) по отношению к изобарической поверхности, а холодный ($\alpha^I < 0$) — нисходящее ($\omega > 0$). Таким образом, на данной широте и изобарической поверхности (приближенно на фиксированном круге широты) корреляционная связь между α^I и ω^I или между T^I и ω^I отрицательная, т. е. $C_E > 0$ (см. также п. 11.2, пункт 2, случай Iа и [148]). Отсюда следует, что в поле силы тяжести изменчивость температуры (флуктуации плотности) вдоль круга широты вызывает превращение доступной потенциальной энергии A_E вихрей в турбулентную кинетическую энергию K_E.

Скорость перехода C_A энергии зависит от меридионального турбулентного потока $(\bar{\rho})_p\, c_{pa}\, [T^I v^I]$ и вертикального турбулентного потока $(-c_{pa}/g)\ [T^I \omega^I]$ явного тепла. В нижнем 10-километровом слое (где сосредоточено три четверти всей массы атмосферы) меридиональный турбулентный поток явного тепла направлен к полюсу [2, 146], такое же направление имеет и горизонтальный градиент средней зональной температуры $[-(\delta/\delta y)\times \times [T] > 0]$, благодаря чему первый член в правой части (15.9) положителен. Хотя и менее определенно, но второй член также положителен. В самом деле, имеем

$$\{[T^I \omega^I]^{II} (\delta/\delta p) [\Theta]^{II}\} = \{[T^I \omega^I]^{II} (\delta/\delta p) [\Theta]\}.$$

Вспоминая, что вертикальный турбулентный поток явного тепла направлен вверх $[(-c_{pa}/g)\ [T^I \omega^I] > 0]$ и уменьшается при увеличении статической устойчивости $[(\delta/\delta p)\ [\Theta] < 0]$, устанавливаем, что корреляционная связь вдоль меридиана между $-[T^I \omega^I]$ и $-(\delta/\delta p)\ [\Theta]$ отрицательная, т. е. действительно второе слагаемое в правой части (15.9) положительное. Таким образом, $C_A > 0$ выражает переход A_Z в A_E. Скорость перехода C_A ($A_Z \to A_E$) наиболее значительна в нижней тропосфере умеренных широт. Такой же знак C_A имеет в высоких широтах нижней стратосферы зимой. В умеренных широтах нижней стратосферы C_A имеет противоположный знак. Скорость перехода C_A также меньше нуля в части тропической тропосферы, однако существенно меньше по абсолютной величине [58]. Таким образом, в этих районах происходит сток доступной потенциальной энергии вихрей.

Из интегральных выражений A_Z и A_E следует, что процесс перехода энергии C_A сопровождается увеличением колебаний температуры $[(T^I)^2]$ вдоль параллелей (более точно, вдоль кривых пересечения поверхностей $\varphi = \text{const}$ и $p = \text{const}$) за счет уменьшения колебаний зональной температуры $\{([T]^{II})^2\}$ вдоль меридианов (более точно, вдоль кривых пересечения поверхностей $\lambda = \text{const}$ и $p = \text{const}$). Последние колебания поддерживаются источниками и стоками тепла, неравномерно распределенными вдоль меридиана. Поскольку первый член в C_A главный, то колебания температуры вдоль широтных кругов поддерживаются в основном турбулентным потоком явного тепла, направленным к полюсу.

Знак C_Z неопределенен. Циркуляция Гадлея (опускание воздуха в холодных областях и подъем в теплых) вносит положительный вклад в C_Z, а циркуляция Ферреля (опускание воздуха в теплых областях и подъем в холодных) — отрицательный. Переход энергии C_Z наиболее интенсивен в верхней части нисходящей ветви этих циркуляционных ячеек, особенно в низких широтах.

Также неопределенен знак C_E. В самом деле, на данной параллели, как правило, теплый воздух ($T^I > 0$) охлаждается ($Q < 0$), а холодный ($T^I < 0$) нагревается ($Q > 0$) по той причине, что теплый воздух, как правило, движется по направлению к полюсу, а холодный — к экватору. Эти неадиабатические эффекты, сопровождающиеся отрицательной корреляционной связью между Q и T вдоль широтных кругов, вносят отрицательный вклад в C_E. С другой стороны, как правило, в поднимающемся теплом воздухе, движущемся к северу, формируются облака, а в холодном воздухе, смещающемся к экватору, наблюдается тенденция к рассеиванию облаков. Этот неадиабатический эффект вносит положительный вклад в C_E. Трудно дать количественную оценку этих двух противоположных эффектов, хотя, по всей вероятности, предыдущий эффект оказывает более сильное влияние, чем последний.

Согласно Орту [61], скорость генерации G_Z доступной потенциальной энергии A_Z зонального движения составляет: $G_Z = 3{,}1$ Вт/м²; скорость диссипации кинетической энергии $K =$

$= K_Z + K_E$ равна 2,3 Вт/м², так что $G_E = -0{,}8$ Вт/м². Оценка Орта основана на приближенном выражении для G_Z и использовании контрастов температуры $T^{\times}$ на изобарических поверхностях. Согласно Даттону и Джонсону [16], $G_Z = 5{,}5$ Вт/м². Принимая более позднюю оценку Кунга [36] для скорости диссипации кинетической энергии K, а именно 6,4 Вт/м², находим, что скорость генерации G_E доступной потенциальной энергии вихрей составляет +0,9 Вт/м², поскольку в течение длительного периода диссипация кинетической энергии K должна быть скомпенсирована

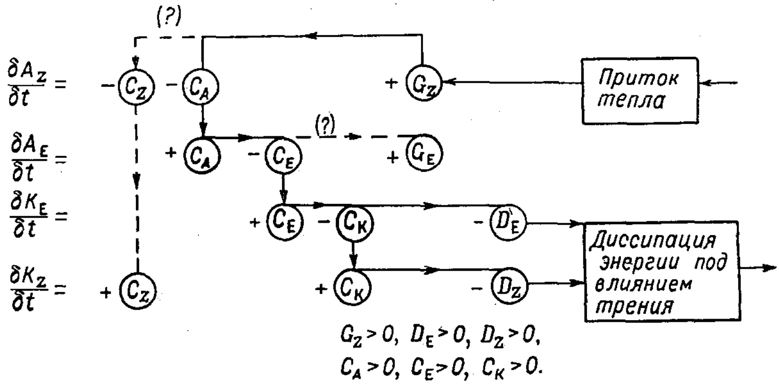

Рис. 23. Энергетический цикл Лоренца.

генерацией $G = G_Z + G_E$ доступной потенциальной энергии A. Ясно, что необходимы дальнейшие исследования энергетического цикла. Ньюэлл и др. [58] нашли, что в планетарном масштабе скорость генерации G_Z колеблется между 2,4 и 2,8 Вт/м².

Следует заметить, что в атмосфере не наблюдается переходов энергии $A_Z \leftrightarrows K_E$ и $A_E \leftrightarrows K_Z$ и что переходы от A_Z к A_E и от K_E к K_Z возможны без участия кинетической энергии в первом случае и доступной потенциальной энергии во втором.

Можно, таким образом, заключить, что главную роль в энергетических процессах общей циркуляции атмосферы играют поток момента количества движения по отношению к оси вращения Земли и поток явного тепла. С другой стороны, хорошо и давным-давно известно, что атмосфера (ниже 25 км) нагревается в низких широтах и охлаждается в высоких. Из этого факта следует, что существует положительная корреляционная связь между $[Q]$ и $[T]$ вдоль меридиана, т. е. $G_Z > 0$. Непрерывное образование доступной потенциальной энергии в зональном потоке — следствие непрекращающегося нагревания атмосферы в низких широтах, где температура $[T]$ высокая, и охлаждения ее в высоких широтах, где температура $[T]$ низкая.

На основе уравнений баланса (15.3), (15.4), (15.7) и (15.8) можно составить схему энергетического цикла Лоренца [43], изображенную на рис. 23. Главные процессы энергетического

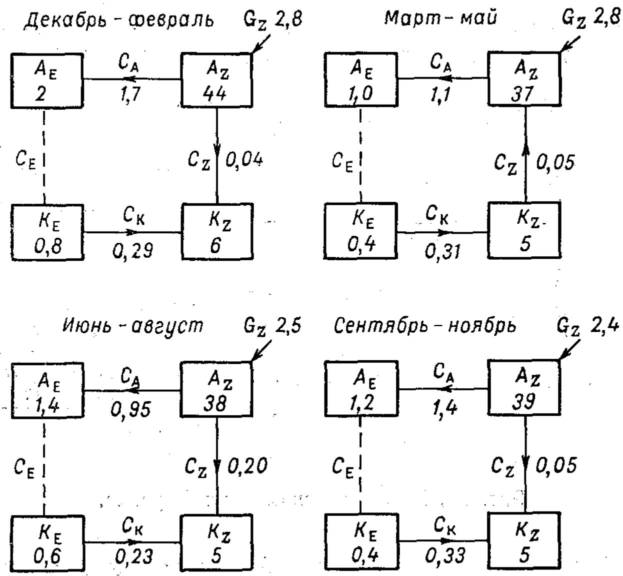

Рис. 24. Энергетический цикл земной атмосферы (1000—100 мбар), осредненный по трехмесячному периоду. Единицы: количество энергии в 10^5 Дж$\cdot$м$^{-2}$ (10^8 эрг$\cdot$см$^{-2}$), скорость перехода энергии в Вт$\cdot$м$^{-2}$ (10^3 эрг$\cdot$см$^{-2}\cdot$с$^{-1}$) (по Ньюэллу и др. [58]).

цикла (цикла Лоренца [43]) в системе общей циркуляции тропосферы таковы: $A_Z \to A_E \to K_E \to K_Z$ при $C_A > 0$, $C_E > 0$ и $C_K > 0$ (см. рис. 24 и 25).

Переходы и превращения энергии в нижнем 10-километровом слое атмосферы (где сосредоточена бóльшая часть массы воздуха) можно описать следующим образом.

1. Непрекращающееся образование (со скоростью G_Z) доступной потенциальной энергии A_Z в зональном потоке — результат притоков тепла, изменяющихся с широтой. Распределение притоков тепла вдоль меридиана таково, что флуктуации $[Q]''$ на изобарических поверхностях зональных значений $[Q]$ притока тепла Q

порождают на тех же поверхностях флуктуации $[T]^{\mathrm{II}}$, связанные положительной корреляционной зависимостью с $[Q]^{\mathrm{II}}$; отсюда $G_Z > 0$.

2. Как следствие симметричного (относительно полюса) распределения крупномасштабных вихрей в поясе умеренных широт теплые воздушные массы пересекают параллели, распространяясь

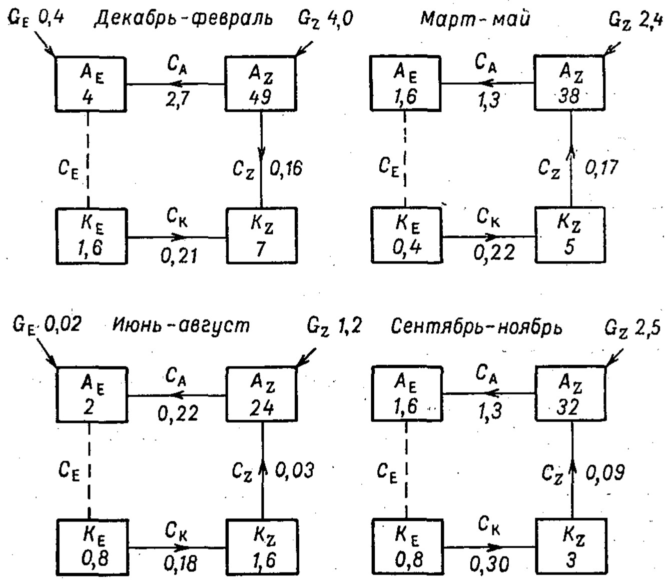

Рис. 25. Энергетический цикл северного полушария (1000—100 мбар), осредненный по трехмесячному периоду. Единицы такие же, как на рис. 24 (по Ньюэллу и др. [58]).

с юга, а холодные массы пересекают те же параллели (но при других значениях долготы), перемещаясь с севера. Такие смежные воздушные течения порождают перенос явного тепла в сторону полюса и контрасты температуры T^{I} вдоль широтных кругов. Этот процесс переноса и бароклинность атмосферы обеспечивают переход доступной потенциальной энергии от среднего зонального потока к крупномасштабным вихрям ($A_Z \to A_E$, $C_A > 0$).

3. Более того, в поясе умеренных широт теплый тропический воздух совершает восходящее, а холодный полярный воздух — нисходящее движение, вызывая (в вертикальной плоскости $\varphi = \mathrm{const}$) переворачивание воздуха. Этот процесс определяет переход доступной потенциальной энергии A_E крупномасштабных

вихрей в кинетическую энергию K_E тех же вихрей ($A_E \to K_E$, $C_E > 0$).

4. Крупномасштабные вихри, однако, переносят вдоль меридианов не только тепло, но и количество движения. В самом деле, вихри несут момент количества движения из пояса восточных ветров (из низких и высоких широт; первая область имеет несравнимо большее значение, чем вторая) в пояс западных ветров (область умеренных широт), предохраняя таким образом момент импульса от разрушения, вызываемого поверхностным трением (восходящий поток западной составляющей количества движения вблизи поверхности земли в поясе восточных ветров и нисходящий поток в поясе западных ветров). Этот процесс определяет переход кинетической энергии от крупномасштабных вихрей к зональной циркуляции ($K_E \to K_Z$, $C_K > 0$), предохраняя энергию последней от диссипации, обусловленной трением.

5. Потоки кинетической и полной потенциальной энергии перераспределяют эти формы энергии в атмосфере, перенося ее из района источника (см. [58] и [88], а также п. 14.9).

В основе цикла Лоренца, описанного выше, лежат фактические (не осредненные по времени) данные о зональных значениях величин и об отклонениях от них. Сведения о полях ветра и температуры берутся из наблюдений (см. п. 11.1). Интегральные величины K_Z, K_E, A_Z, A_E, C_A, C_K ... по этим данным оцениваются численно, а затем осредняются за достаточно длительный интервал времени (не меньше 1 месяца). Вместо фактических (мгновенных) зональных значений и отклонений от них можно использовать осредненные по времени и долготе скорость движения и температуру (см. п. 5.3) и отклонения от этих средних. Цикл Лоренца качественно остается при этом тем же самым, однако появляются количественные различия. Второй способ с точки зрения объема вычислений легче первого [61].

Возможны многие другие подходы к анализу полей движения и температуры. Так, если горизонтальный поток в квазистатическом приближении проинтегрировать по высоте, определив среднее (по вертикали) значение и отклонение от него, то можно установить, что: 1) переход доступной потенциальной энергии в кинетическую вызывает рост кинетической энергии, сосредоточенной в отклонениях скорости от среднего значения (в так называемом потоке со сдвигом), в то время как кинетическая энергия осредненного потока не изменяется; 2) отношение перехода кинетической энергии от потока со сдвигом к осредненному потоку увеличивается с ростом горизонтального масштаба L, пока $L < 3000$ км, равно почти единице для промежуточных значений масштаба (3000 км $< L <$5000 км) и становится меньше единицы для планетарных масштабов ($L >$ 5000 км) при условии (в двух последних случаях), что амплитуда возмущений (вдоль меридиана) достаточно велика. Таким образом, при малых масштабах синоптических возмущений ($L <$ 3000 км) наблюдается снижение кинетической энергии потока со сдвигом, в то время как в возмущениях планетарного масштаба кинетическая энергия в потоке со сдвигом накапливается. В промежуточной области масштабов кинетическая энергия потока со сдвигом не изменяется [149].

Возвращаясь к основным уравнениям цикла Лоренца, отметим, что вихревое движение (определяемое по флуктуациям скорости по отношению к фактическим зональным значениям) можно разложить в ряд по зональным гармоникам (библиографию по 1960 г. см. в [131], см. также [82, 83, 84]). Таким путем более глубоко выясняется роль движений различного масштаба (масштаб представлен зональным волновым числом n) в общей циркуляции атмосферы. Обычно рассчитывают от 12 до 15 гармоник (см. [131] и п. 11.1); три первые гармоники (n = 1, 2, 3) представляют квазистационарные планетарные волны, гармоники n = 6, 7, 8 — медленно движущиеся бароклинные волны и гармоники n = = 10, 12, ... — быстро смещающиеся циклонические волны. Основные результаты гармонического анализа общей циркуляции атмосферы можно свести к следующему [1, 82, 83, 84, 131, 150, 151].

1. Зимой бо́льшая часть (свыше 50%) тепла и количества движения переносится очень длинными квазистационарными волнами (n = 1, 2, 3); в другие сезоны года эти волны переносят значительно меньше тепла и импульса.

2. Явное тепло переносится преимущественно в нижней тропосфере (максимум потока в умеренных широтах), в то же время максимальный перенос западной составляющей количества движения наблюдается в верхней тропосфере. Поток тепла направлен к полюсу, поток импульса южнее примерно 55° с. ш. также направлен к полюсу, севернее же этой широты он направлен к экватору; максимальные значения потока импульса достигаются на широте 35 и 65° с. ш.

3. Наблюдается хорошо выраженный сезонный ход потоков тепла и количества движения с максимумом зимой и минимумом летом.

4. Скорость перехода энергии C_A ($A_Z \to A_E$) также испытывает заметные сезонные колебания, достигая максимума зимой и минимума летом. Величина C_A положительна при всех волно-

вых числах, наибольшие значения ее зимой наблюдаются при $n = 2$ или 3. Летом этот максимум сдвигается на более высокие значения волновых чисел.

5. Сезонные колебания скорости перехода энергии C_K ($K_E \to K_Z$) существенно отличаются от сезонного хода C_A ($A_Z \to A_E$) : C_K достигает максимума осенью. Распределение C_K по спектру очень нерегулярно, четко выраженных максимумов не наблюдается. Скорость перехода C_K положительна при малых волновых числах, но может принимать отрицательные значения при некоторых больших n. Просуммированная по всем волновым числам скорость перехода C_K в большинстве случаев оказывается положительной, но составляет лишь часть C_A.

6. Скорость превращения энергии C_E ($A_E \to K_E$) положительна почти при всех волновых числах.

16

Энергетика линейных возмущений

16.1. Уравнение баланса энергии возмущенного движения

Ради простоты рассуждений мы пренебрежем влиянием кривизны Земли на кинематику потока, которое существенно лишь для движений планетарного масштаба $L \sim 10^7$ м; однако мы сохраним это влияние, вытекающее из зависимости кориолисова параметра $f = 2\Omega \sin \varphi$ от широты φ, на динамику потока. Будем рассматривать движение в β-плоскости Россби, в которой декартовы горизонтальные оси x и y направлены соответственно на восток и север. В этой плоскости, согласно определению ее, $f = f_0 + \beta y$, где f_0 — значение f в начале координат и $\beta = df/dy$ — парамет Россби, принимаемый за постоянную (на широте 45°, например, $f_0 = 1{,}0313 \cdot 10^{-4}$ с$^{-1}$, $\beta = 1{,}619 \cdot 10^{-11}$ м$^{-1} \cdot$с$^{-1}$). Ось z, как обычно, направлена по вертикали вверх.

Основной поток представляет собой прямолинейный зональный поток, скорость u_0 которого не зависит от x и который удовлетворяет условиям гидростатического и геострофического равновесия, т. е.

$$f_0\rho_0 u_0 + p_{0y} = 0, \quad g\rho_0 + p_{0z} = 0, \tag{16.1}$$

где g — ускорение свободного падения; p_0 и ρ_0 — давление и плотность основного потока; индексы x, y, z, t обозначают дифференцирование по соответствующей переменной. Исключая p_0 из уравнений (16.1), получаем известное уравнение термического ветра

$$f_0 u_{0z} = \frac{\nabla p_0 \times \nabla \rho_0}{\rho_0^2} = -\frac{g}{\Theta_0}\left(\Theta_{0y} - \frac{p_{0y}}{p_{0z}}\Theta_{0z}\right) \equiv$$
$$\equiv -\frac{g}{\Theta_0}\Theta_{0y}^{is} \approx -\frac{g}{\Theta_0}\Theta_{0y}, \tag{16.2}$$

где Θ_{0y}^{is} — изобарический меридиональный градиент потенциальной температуры Θ_0. Напомним, что $c_{pa} \ln \Theta = c_{va} \ln p - c_{pa} \ln \rho + \text{const}$, где c_{va} и c_{pa} — удельные теплоемкости сухого воздуха.

Дополнительно сделаем следующие предположения: 1) $\Theta_{0z} > 0$, т. е. распределение плотности основного потока устойчивое по отношению к вертикальным смещениям частиц в поле силы тяжести; 2) $f_0 - u_{0y} > 0$, т. е. вертикальная составляющая абсолютного вихря в основном потоке положительная; другими словами, основной поток устойчив по отношению к горизонтальным смещениям частиц в поле центробежной силы, порождаемой абсолютным вращением с угловой скоростью $\Omega + (u_0/a \cos\varphi)$ [инерционная устойчивость $f_0(f_0 - u_{0y}) > 0$].

Теперь наложим на основной поток (u_0, ρ_0, p_0) малое возмущение, скорость которого обозначим через $\mathbf{v}(u, v, w)$, плотность — через ρ, давление — через p и потенциальную температуру — через Θ. Эти возмущенные значения малы по сравнению с соответствующими значениями метеорологических величин основного потока. Кроме того, предположим, что

$$\left|\frac{1}{u_0}\frac{\partial u_0}{\partial t}\right| \ll |\nabla u_0|, \quad \left|\frac{1}{u_0}\frac{\partial p_0}{\partial t}\right| \ll |\nabla p_0|, \quad \left|\frac{1}{u_0}\frac{\partial \rho_0}{\partial t}\right| \ll |\nabla \rho_0|.$$

Скорость $u_0\mathbf{i} + \mathbf{v}$, давление $p_0 + p$, плотность $\rho_0 + \rho$ и потенциальная температура $\Theta_0 + \Theta$ удовлетворяют основным уравнениям динамики атмосферы. Пренебрегая нелинейными членами по отношению к возмущенным значениям $\mathbf{v}$, p, ρ и Θ, получаем уравнения возмущенного движения:

$$\rho_0 D\mathbf{v} + \rho_0\mathbf{v}\cdot\nabla(u_0\mathbf{i}) + 2\boldsymbol{\Omega}\times\rho_0\mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega}\times\rho u_0\mathbf{i} + \nabla p + g\rho\mathbf{k} = 0, \tag{16.3}$$

$$D(\rho/\rho_0) + \mathbf{v}\cdot(\nabla\rho_0/\rho_0) + \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{16.4}$$

$$D(\Theta/\Theta_0) + \mathbf{v}\cdot(\nabla\Theta_0/\Theta_0) = H, \tag{16.5}$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы вдоль осей x, y, z; $H = Q/c_{\text{pa}}T_0$ (Q — скорость притока тепла к возмущенной единичной массе воздуха; T_0 — абсолютная температура). Символ $D(\ldots)$ здесь введен для обозначения оператора $(\ldots)_t + u_0\cdot(\ldots)_x$.

Объединяя уравнения (16.5) и (16.4), приведем уравнение неразрывности (16.4) к виду

$$\frac{c_{\text{va}}}{c_{\text{pa}}}\{D(p/p_0) + \mathbf{v}\cdot(\nabla p_0/p_0)\} + \operatorname{div}\mathbf{v} = H. \tag{16.6}$$

В теории линейных колебаний обычно предполагается, что общее решение исходных уравнений (16.3)—(16.5) или (16.3), (16.4) и (16.6) в бесконечном полупространстве $z > 0$ можно представить в виде линейной комбинации волновых решений типа $A(y, z)\exp \mathrm{i}\,\mathrm{m}(x - ct)$ для каждой из пяти неизвестных величин (u, v, w, p, ρ или Θ); здесь A — амплитуда волны, m — волновое число, c — фазовая скорость и $\mathrm{i} \equiv \sqrt{-1}$.

Уравнения (16.3)—(16.5) описывают все возможные колебательные движения, накладывающиеся на изменяющийся прямолинейный основной поток: короткие гравитационные волны с периодом колебаний много меньше маятниковых суток $2\pi/f$, на которые вращение Земли не оказывает влияния; гравитационно-инерционные волны с периодом колебаний порядка $2\pi/f$ и длинные волны (волны Россби), период колебаний которых существенно больше $2\pi/f$. Последние волны удовлетворяют условиям квазистатического и квазигеострофического равновесия.

Умножая уравнение движения (16.3) скалярно на $\mathbf{v}$, уравнение термодинамики (16.5) на $(\Theta/\Theta_{0z})\, g\rho_0$ и уравнение неразрывности (16.6) на $-(p/p_{0z})\, g\rho_0$ и складывая таким образом полученные уравнения, находим уравнение баланса энергии

$$(\rho_0 k)_t + (\rho_0 k u_0 + pu)_x + (pv)_y + (pw)_z =$$
$$= -u_{0y}\rho_0 uv - u_{0z}\rho_0 uw + (f u_{0z}/\Theta_{0z})\,\rho_0\Theta v + g\rho_0\,(\Theta^{\mathrm{is}}\omega^*/\Theta_0), \quad (16.7)$$

где k — полная удельная энергия возмущения, равная

$$k \equiv \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{g}{2}\left\{\left(\frac{\Theta_{0z}}{\Theta_0}\right)^{-1}\left(\frac{\Theta}{\Theta_0}\right)^2 + \frac{c_{\mathrm{va}}}{c_{\mathrm{pa}}}\left(\frac{-p_{0z}}{p_0}\right)^{-1}\left(\frac{p}{p_0}\right)^2\right\}.$$

Первый член в этом выражении представляет собой кинетическую энергию возмущения, сумма двух последних (если их проинтегрировать по всему потоку) — доступную потенциальную энергию возмущенного потока. Символ Θ^{is} в уравнении (16.7) введен для обозначения $\Theta_{0z}\,\{(\Theta/\Theta_{0z}) - (p/p_{0z})\}$ — возмущенного значения потенциальной температуры в переменных x, y, p [см. формулу (14.78)], а ω^* обозначает $H\Theta_0/\Theta_{0z}$.

Уравнение баланса энергии можно истолковать следующим образом. Энергия возмущения $\rho_0 k$, заключенная в неподвижном единичном объеме, изменяется под влиянием дивергенции потока энергии $\rho_0 k u_0 \mathbf{i} + p\mathbf{v}$ и образования энергии со скоростью, определенной правой частью уравнения (16.7). Два первых члена здесь представляют собой скорость перехода кинетической энергии основного потока в энергию возмущений, третий член — скорость превращения полной потенциальной энергии основного потока в энергию возмущений и четвертый член — скорость генерации энергии возмущений (неадиабатические процессы). Проинтегрировав этот последний член по кругу широты, установим, что генерация энергии возмущений—результат корреляции (вдоль круга широты) между флуктуациями потенциальной температуры на изобарических поверхностях и притоками тепла.

Напомним, что $\rho_0\overline{uv}$ и $\rho_0\overline{uw}$ представляют собой соответственно меридиональный и вертикальный потоки западной составляющей количества движения, а $\rho_0\overline{\Theta v}$ пропорционально меридиональному потоку явного тепла.

В заключение заметим, что вертикальная составляющая $-2\Omega u_0 \cos\varphi$ кориолисова ускорения была опущена в уравнении статики основного движения, поскольку она на 4 порядка величины меньше ускорения g; опущены также члены $-2\Omega\rho_0 u \cos\varphi$ и $-2\Omega\rho u_0 \cos\varphi$ в уравнении возмущенного движения вдоль вертикали. Более того, кориолисов параметр $2\Omega\cos\varphi$ всегда мал по сравнению с u_{0z}, и поэтому мы им также пренебрегаем по сравнению с вертикальным сдвигом ветра. Поперечным движением $(0,\ v_0,\ w_0)$ в основном потоке $(u_0,\ 0,\ 0)$, равно как напряжением Рейнольдса $\rho_0\mathbf{vv}$ в возмущенном потоке, пренебрегаем вследствие линеаризации уравнений динамики (см. п. 16.5).

16.2. Поток механической энергии

Предположим теперь, что возмущенные значения пропорциональны $\exp \mathrm{i}\, m\, (x - ct)$; здесь m — зональное волновое число, связанное с длиной волны L соотношением

$$2\pi a \cos\varphi / L \equiv ma \cos\varphi,$$

c — зональная фазовая скорость волны; a — радиус Земли. Таким образом, движение периодическое по x и во времени t.

Осредненные в пределах одной волны $L = 2\pi/m$ и по периоду $2\pi/mc$ значения величин равны нулю $(\overline{\mathbf{v}} = \overline{p} = \overline{\rho} = \overline{\Theta} = \overline{H} = 0)$. Подставляя реальные части решения (u, v, w, p, ρ или Θ) уравнений возмущенного движения в уравнение энергии (16.7) и осредняя его по x в пределах одной волны, получаем

$$(\overline{pv})_y + (\overline{pw})_z = -\rho_0\overline{u\mathbf{v}}\cdot\nabla u_0 + \frac{fu_{0z}}{\Theta_{0z}}\rho_0\overline{\Theta v} + g\frac{\rho_0}{\Theta_0}\overline{\Theta^{\mathrm{is}}\omega^*}. \quad (16.8)$$

Умножая уравнение возмущенного движения на $\rho_0 u_0 u + p$ и осредняя по x в пределах одной волны, находим

$$-(f - u_{0y})(u_0\rho_0\overline{uv} + \overline{pv}) + u_{0z}(u_0\rho_0\overline{uw} + \overline{pw}) = \overline{p_t u}. \quad (16.9)$$

Исключая w из уравнения возмущенного движения и уравнения термодинамики (16.5) и умножая результат на $\rho_0 u_0 \{u - (u_{0z}/\Theta_{0z})\,\Theta\} + p = \rho_0 u_0 u' + p$, получаем

$$\overline{pv} + u_0\rho_0\overline{uv} = u_0 u_{0z}\frac{\rho_0\overline{\Theta v}}{\Theta_{0z}} + \frac{u_{0z}\overline{\eta\omega^*} + \overline{p_t u'}}{u_{0y}^{(\Theta)} - f}, \tag{16.10}$$

где величина

$$-u_{0y}^{(\Theta)} \equiv -u_{0y} + (\Theta_{0y}/\Theta_{0z})\,u_{0z} \approx -u_{0y}$$

представляет меридиональный градиент u_0 вдоль изэнтропической поверхности,

$$\eta \equiv -(\rho_0 u_0 u' + p),$$

$$u' = u - u_{0z}(\Theta/\Theta_{0z}) = u + u_{0z}\zeta \text{ и } \Theta + \Theta_{0z}\zeta = 0.$$

Следует заметить, что в случае плоского возмущенного движения $(u, 0, w)$ величина u' представляет собой зональную составляющую лагранжевой скорости, связанную последним соотношением с зональной составляющей u эйлеровой скорости $\mathbf{v}$ и вертикальным смещением ζ частицы воздуха из положения равновесия в предположении, что процесс адиабатический (см. п. 16.3).

Умножая уравнение (16.5) на Θ и осредняя результат по x в пределах одной длины волны, находим

$$\Theta_{0y}\overline{\Theta v} + \Theta_{0z}\overline{\Theta w} = \Theta_0\overline{H\Theta}. \tag{16.11}$$

Таким образом, осредненный поток явного тепла, пропорциональный $(\overline{\Theta v}, \overline{\Theta w})$ в меридиональной плоскости yz, направлен в сторону возрастания или убывания Θ_0 в зависимости от того, нагревается теплый воздух и охлаждается холодный $(\overline{H\Theta} > 0)$ или охлаждается теплый воздух и нагревается холодный $(\overline{H\Theta} < 0)$. Если наклон осредненного потока $(\overline{\Theta v}, \overline{\Theta w})$ меньше наклона изэнтропической поверхности $\Theta_0 = \text{const}$, то поток нисходящий в первом случае и восходящий во втором.

Линейные уравнения (16.9) и (16.10) позволяют получить выражения для составляющих потока энергии возмущенного движения в меридиональной плоскости [135]:

$$\overline{pv} = -u_0\rho_0\overline{uv} + u_0(u_{0z}/\Theta_{0z})\,\rho_0\overline{\Theta v} + (u_{0z}\overline{\eta\omega^*} + \overline{p_t u'})/(u_{0y}^{(\Theta)} - f),$$

$$\overline{pw} = -u_0\rho_0\overline{uw} + \{(f - u_{0y})/\Theta_{0z}\}\,u_0\rho_0\overline{\Theta v} - \overline{\eta\omega^*} - \overline{p_t\zeta}. \tag{16.12}$$

В правой части последней формулы отношение $(f - u_{0y})/(f - u_{0y}^{(\Theta)})$ положено равным единице. Вставляя теперь (16.12) в (16.8), получаем

$$u_0\left\{(-\rho_0\overline{u'v})_y + \left(\frac{f-u_{0y}}{\Theta_{0z}}\rho_0\overline{\Theta v} - \rho_0\overline{uw}\right)_z\right\} =$$
$$= g\rho_0\frac{\overline{\Theta^{is}\omega^*}}{\Theta_0} + \left(\frac{u_{0z}\overline{\eta\omega^*} + \overline{p_t u'}}{f - u_{0y}^{(\Theta)}}\right)_y + (\overline{\eta\omega^*} + \overline{p_t\zeta})_z. \qquad (16.13)$$

С учетом этого соотношения формулы (16.12) приобретают вид:

$$\left.\begin{aligned} \overline{pv} &= u_0(\Psi_z + X_y) + \frac{u_{0z}\overline{\eta\omega^*} + \overline{p_t u'}}{u_{0y}^{(\Theta)} - f}, \\ \overline{pw} &= u_0(-\Psi_y + X_z) - \overline{\eta\omega^*} - \overline{p_t\zeta}, \end{aligned}\right\} \qquad (16.12a)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Psi z + X_y &\equiv \frac{u_{0z}}{\Theta_{0z}}\rho_0\overline{\Theta v} - \rho_0\overline{uv} = -\rho_0\overline{u'v}, \\ -\Psi_y + X_z &\equiv \frac{f - u_{0y}}{\Theta_{0z}}\rho_0\overline{\Theta v} - \rho_0\overline{uw}, \end{aligned}\right\} \qquad (16.14)$$

при этом

$$u_0(X_{yy} + X_{zz}) = g\rho_0\frac{\overline{\Theta^{is}\omega^*}}{\Theta_0} + \left(\frac{u_{0z}\overline{\eta\omega^*} + \overline{p_t u'}}{f - u_{0y}^{(\Theta)}}\right)_y +$$
$$+ (\overline{\eta\omega^*} + \overline{p_t\zeta})_z. \qquad (16.13a)$$

Символы Ψ и X введены для обозначения функций, не зависящих от переменной x.

Следует отметить, что уравнения энергии возмущенного движения теряют силу при $u_0 = 0$. Из формул (16.12) или (16.12a) и соотношений (16.13) или (16.13a) следует, что средний поток энергии $\overline{pv}$, $\overline{pw}$ в меридиональной плоскости yz становится прямолинейным, если правая часть (16.13a) тождественно равна нулю, в частности, если возмущенное движение установившееся и адиабатическое. Когда оба условия выполнены, механическая энергия возмущенного движения переносится вдоль линий тока $\Psi = \text{const}$. В этом частном случае функция Ψ определяет кинематику переноса энергии (см. п. 16.3). Если одно из этих условий не выполняется, то поток энергии перестает быть прямолинейным, вдоль траектории переноса энергии появляются источники и стоки этой энергии. Распределение последних в меридиональной плоскости описывается с помощью функции X (см. п. 16.5).

16.3. Адиабатическое и установившееся возмущенное движение

Если возмущенное движение адиабатическое и установившееся, то формулы (16.12) и (16.12а) принимают при $u_0 \neq 0$ вид [21]:

$$\left.\begin{aligned} \overline{pv} &= u_0\left(\frac{u_{0z}}{\Theta_{0z}}\rho_0\overline{\Theta v} - \rho_0\overline{uv}\right) = u_0\Psi_z, \\ \overline{pw} &= u_0\left(\frac{f-u_{0y}}{\Theta_{0z}}\rho_0\overline{\Theta v} - \rho_0\overline{uw}\right) = \\ &= u_0\left(\frac{f-u_{0y}}{-\Theta_{0y}}\rho_0\overline{\Theta w} - \rho_0\overline{uw}\right) = -u_0\Psi_y. \end{aligned}\right\} \qquad (16.12б)$$

В этом очень простом, но важном случае средний поток энергии возмущенного движения пропорционален зональной скорости ветра u_0, а член

$$\begin{gathered} \operatorname{div}\overline{p\mathbf{v}_\mathrm{M}} = (\overline{pv})_y + (\overline{pw})_z = -\rho_0\overline{u\mathbf{v}}\cdot\nabla u_0 + \\ + \frac{fu_{0z}}{\Theta_{0z}}\rho_0\overline{\Theta v} = \nabla u_0 \times \nabla\Psi = \frac{\overline{p\mathbf{v}}\cdot\nabla u_0}{u_0}, \end{gathered} \qquad (16.15)$$

описывающий приток энергии (в правой части уравнения энергии), пропорционален сдвигу ∇u_0 зональной скорости ветра. Более того, средний поток энергии возмущенного движения можно выразить через средний меридиональный $\rho_0\overline{\Theta v}$ или средний вертикальный $\rho_0\overline{\Theta w}$ поток тепла [см. формулу (16.11) при $H = 0$] и средние меридиональный и вертикальный потоки количества движения $\rho_0\overline{uv}$ и $\rho_0\overline{uw}$.

Меридиональный поток энергии $\overline{pv}$ включает два компонента: один из них направлен вдоль среднего меридионального потока тепла или противоположно ему в зависимости от того, увеличивается или уменьшается с высотой модуль скорости $|u_0|$ основного потока; другой компонент направлен вдоль среднего меридионального потока западной составляющей количества движения или противоположно ему в зависимости от того, какой основной поток — восточный ($u_0 < 0$) или западный ($u_0 > 0$).

Средний вертикальный поток $\overline{pw}$ энергии возмущенного движения также имеет два компонента: один из них в зависимости от знака u_0 направлен вдоль среднего вертикального потока явного тепла (при $u_0 > 0$) или (при $u_0 < 0$) противоположно ему (при этом предполагается, что $f - u_{0y} > 0$ и $\Theta_{0y} < 0$); другой компонент при $u_0 < 0$ (основной поток восточный) совпадает по направлению со средним вертикальным потоком западной составляющей количества движения или противоположен ему при $u_0 > 0$.

Кривые $\Psi = \text{const}$ — это линии тока в меридиональной плоскости yz, вдоль которых энергия возмущенного движения от источников ее в нижних слоях атмосферы переносится в высокие

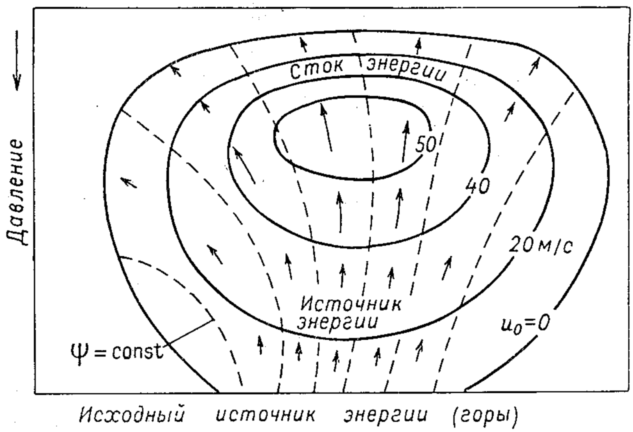

Рис. 26. Поток механической энергии волновых возмущений вдоль линий тока $\Psi = \text{const}$ в меридиональной плоскости от источника, порожденного орографией. Стрелки в определенном масштабе показывают поток энергии, сплошные кривые — изотахи основного течения (при западном ветре $u_0 > 0$), штриховые кривые — линии тока (по Элиассену и Пальму [21]).

слои. Средний поток механической энергии $(0, \overline{pv}, \overline{pw})$ пропорционален u_0 (что отражено длиной стрелок на рис. 26).

Если механическая энергия возмущений переносится в направлении увеличивающихся или уменьшающихся значений скорости западного ветра ($u_0 > 0$) основного потока, поток энергии соответственно дивергирует $[(\overline{p\mathbf{v}} \cdot \nabla u_0/u_0) > 0]$ или конвергирует $[(\overline{p\mathbf{v}} \cdot \nabla u_0/u_0) < 0]$. В первом случае, как следует из уравнения (16.15), энергия переходит от основного потока к волновому возмущению (есть источник волновой энергии, или так называемый вторичный источник); во втором случае наблюдается переход энергии от волнового возмущения к основному потоку (есть сток энергии, или вторичный сток). Таким образом, распределение в меридиональной плоскости источников энергии тесно связано с распределением зональной скорости основного течения. В пределах области, где u_0 положительно, поток энергии вдоль линий тока $\Psi = \mathrm{const}$ имеет одно и то же направление. Этот поток меняет направление на противоположное при переходе через нулевую изотаху ($u_0 = 0$) основного течения. Однако, как уже отмечено выше, уравнения переноса энергии возмущенного потока [см. уравнения (16.12) и (16.13)] перестают быть справедливыми в точках нулевой изотахи ($u_0 = 0$); если из уравнений (16.3)—(16.6) исключить все величины, кроме одной (например, давления), то окажется, что для уравнения, содержащего эту одну величину, точки кривой $u_0 = c$ в меридиональной плоскости служат сингулярными точками. Для устранения сингулярности нужно потребовать, чтобы поток энергии стремился к нулю при приближении линии тока $\Psi = \mathrm{const}$ к сингулярной кривой $u_0 = c = 0$ в установившемся случае; таким образом, перенос энергии через кривую $u_0 = 0$ невозможен.

Отсюда следует, что в умеренных широтах механическая энергия волновых возмущений может переноситься из нижних слоев, где сосредоточена бóльшая часть механической энергии, в верхние слои только зимой, когда западные ветры наблюдаются в слое от поверхности земли до нижней ионосферы. Летом, когда восточный ветер преобладает выше 20 км в стратосфере и в нижней половине мезосферы, невозможна передача энергии от нижнего западного потока верхнему восточному. В этом случае западный и восточный потоки следует рассматривать как две механически не связанные системы ветров.

Следует в заключение отметить, что схема переноса энергии возмущенного движения в том виде, в каком она изображена на рис. 26, теряет силу при $\overline{pw} = 0$, т. е., например, в том случае, когда энергия распространяется только по горизонтали ($\overline{p\,v} \neq 0$). Это случай возмущенного волнового движения внешнего типа. С другой стороны, если волновое движение относится к движениям внутреннего типа, то $\overline{pw} \neq 0$; таким образом, появляется возможность установить связь между потоками энергии и типом движения, определенным на основе общего решения соответствующего волнового уравнения [21]. В более общем случае можно ввести некоторый индекс N, зависящий от различных факторов, таких, как статическая устойчивость, вертикальный масштаб атмосферы, интенсивность зональной циркуляции и ее изменение с широтой и высотой, кориолисов параметр и его изменение с широтой, длина волны возмущения. В тех слоях, где $N^2 > 0$, возмущенное движение относится к внутреннему типу: $\overline{pw} \neq 0$ — энергия будет распространяться по вертикали. В тех слоях, где

$N^2 < 0$, волновое движение относится к внешнему типу: $\overline{pw} \equiv \equiv 0$ — энергия может распространяться только по горизонтали. Такие слои служат слоями отражения механической энергии волнового возмущения [8, 21, 135].

16.4. Вертикальный перенос механической энергии в атмосфере

Кинетическая энергия K всей атмосферы составляет только одну десятую от полной потенциальной энергии, способной превратиться в кинетическую энергию. Бóльшая часть доступной энергии сконцентрирована в тропосфере, главным образом в квазистационарных возмущениях с волновыми числами от 1 до 4. Среди этих возмущений наиболее устойчивы возмущения с волновыми числами 2 и 3; в них сосредоточено наибольшее количество кинетической и потенциальной энергии атмосферы. Эти квазистационарные волны в северном полушарии возникают под влиянием географического распределения материков и океанов ($n = 2$) и под влиянием крупных орографических неоднородностей земной поверхности ($n = 3$), а также планетарного распределения источников и стоков тепла [131, 140].

Если бы энергия, сконцентрированная в тропосферных квазистационарных возмущениях (например, порядка 10^{18} кДж), не использовалась в нижних слоях атмосферы, то она поступала бы в верхнюю атмосферу, где произошли бы катастрофические изменения. До сих пор таких изменений не наблюдалось.

Хорошо известно, что волны значительно меньшего масштаба (длина волны не превышает 100 км), внутренние гравитационные волны сжатия (частота колебаний меньше частоты колебаний $\{(g/\Theta_0)(\partial\Theta_0/\partial z)\}^{1/2} \approx 10^{-2}$ с$^{-1}$, порожденных плавучестью, период больше 10 мин) переносят механическую энергию вверх. Поскольку амплитуда этих волн растет экспоненциально с высотой, даже очень слабые возмущения нижних слоев (например, порожденные орографическими препятствиями) способны вызвать вполне ощутимые возмущения в верхних слоях [21]. Орографические волны ограничены нижней половиной тропосферы, если их длина волны не превышает примерно 20 км. Более длинные орографические волны переносят свою энергию в стратосферу, где, согласно наблюдениям, длины волн действительно больше, чем в тропосфере.

В слоях ионосферы, D и E, как показывают наблюдения за следами метеоров, гравитационные волны имеют период около 100 мин и длину около 100 км, а период колебаний квазистатических инерционных волн значительно больше (приливные волны Солнца с полусуточным периодом [152]).

Энергия длинных квазигеострофических волн нижних уровней (длина волны от 6000 до 15 000 км) не распространяется вверх выше 20 км летом и 30 км зимой [8]. Стратосфера и мезосфера действуют на них как фильтр. Последний обладает избирательным свойством. В самом деле, вертикальному переносу энергии очень длинных волн (10 000—15 000 км) препятствует стратосфера, но этот перенос может возобновляться в мезосфере; в случае менее длинных волн (6000—10 000 км) вертикальный перенос механической энергии может возобновляться выше мезопаузы. Короче, перенос по вертикали механической энергии крупномасштабных возмущений, несущих бо́льшую часть механической энергии тропосферы, ограничен сверху нижней границей восточных ветров летом и уровнем очень сильных западных ветров зимой. Большое количество механической энергии может уноситься из тропосферы в короткие периоды равноденствий, когда зональная циркуляция ослаблена, особенно в период весеннего равноденствия, когда зональная циркуляция наиболее слабая. В течение большей части года почти вся энергия планетарных возмущений сосредоточена в нижней атмосфере — между земной поверхностью и 25-километровым уровнем. Выше этого уровня атмосфера с точки зрения энергетики крупномасштабных процессов может рассматриваться как независимая от нижней атмосферы (<25 км) [8].

16.5. Ограничения линейной модели и пределы использования концепции передачи и отражения

Во избежание недопонимания следует заметить, что уравнение энергии (16.7) возмущенного движения не описывает адекватно всех процессов передачи энергии в атмосфере. В основе линейной модели лежит предположение о наложении (суперпозиции) волновых возмущений на основной поток; таким образом полностью исключается нелинейное взаимодействие между различными гармониками ряда Фурье. Уравнение (16.7) позволяет исследовать лишь взаимодействие одной составляющей ряда Фурье с основным потоком. Однако линейная теория исключает не только перераспределение энергии между возмущениями различного масштаба. В ней не учтено также влияние молекулярной и турбулентной вязкости и теплопроводности на диссипацию энергии. Эти эффекты особенно существенны в верхней атмосфере. Поэтому линейная теория приводит к особенно нереальным результатам именно в верхней атмосфере (см. ниже).

С другой стороны, на бесконечности при построении теории используется условие Зоммерфельда. Это условие вытекает из предположения, что при физически приемлемом решении никакие внутренние волны не могут переносить механическую энергию из бесконечности и что при отсутствии вертикального переноса энергии (внешние волны) плотность кинетической энергии должна быть ограничена на бесконечности. Из условия Зоммерфельда следует, что самый верхний слой бесконечной протяженности действует как полный отражатель всех внутренних волн, возникающих ниже этого слоя, при условии, что волновые движения верхнего слоя обусловлены внешними причинами. В этом случае энергия внутренних волн сосредоточена в нижележащем слое, и здесь может наблюдаться резонанс. Напомним, что резонанс возникает тогда, когда земная поверхность является одной из узловых поверхностей, образованных интерференцией отраженных и падающих волн. Однако если волны в самом верхнем слое являются внутренними, то часть волновой энергии нижележащих слоев пройдет через верхний слой. В таком случае энергия волновых движений рассеивается во внешнюю среду. Такая модель, конечно, не вполне реальна [21]. Установлено [8], что потеря механической энергии волновых движений при распространении волн в пределы стратосферы и мезосферы может иногда достигать значений, близких по порядку величины к диссипации кинетической энергии на земной поверхности.

Более того, в п. 16.4 описаны два важных случая, а именно коротких гравитационных волн и длинных квазигеострофических волн, когда давление p_0 в основном потоке изменяется пропорционально $\rho_0(z)$, а отклонение давления p пропорционально $\sqrt{\rho_0(z)}$, по крайней мере при волновом движении внутреннего типа. В этом случае самый верхний слой является передающим энергию слоем, а отношение p/p_0 изменяется пропорционально $1/\sqrt{\rho_0(z)}$, т. е. растет с высотой по экспоненте. По-видимому, линеаризированная теория возмущений перестает быть справедливой где-то на уровнях выше, скажем, 100 км (120 км по Уилкесу [152]). На этих уровнях могут стать значимыми другие эффекты, такие, как диссипация волновой энергии и переход последней от одних волн к другим.

Разумно предположить, что следствием нелинейных эффектов, которыми пренебрегают в теории возмущений, является переход волновой энергии в турбулентную и, в конце концов, на молекулярном уровне — в тепловую. Другими словами, нелинейные эффекты влекут за собой поглощение волновой энергии.

В слоях, где упорядоченное волновое движение под влиянием молекулярной и турбулентной вязкости превращается в турбулентное и где, следовательно, волновая энергия рассеивается и поглощается, принцип передачи и отражения волновой энергии уже нельзя использовать. Более того, условие Зоммерфельда нужно применять лишь на нижней границе поглощающего слоя. Тогда волновые движения будут наблюдаться ниже этого слоя и в том случае, когда волновая энергия будет излучаться во внешнее бесконечное пространство.

Из того, что сказано в п. 16.3, следует, что зимой, когда западные ветры в умеренных широтах простираются от земной поверхности до уровня 100 км, энергия орографических волн может распространяться до очень больших высот; летом, однако, не наблюдается переноса механической энергии гравитационных волн из области западных ветров на нижних уровнях в область восточных ветров выше 20 км. Этот вывод справедлив только для стационарных гравитационных волн. Нестационарные гравитационные волны могут распространяться до ионосферы как летом, так и зимой. В п. 16.4 было отмечено, что длинные планетарные волны не могут проникать в высокие слои атмосферы, за исключением того случая, когда западные ветры выше 25 км не слишком сильны. Более того, способность к переносу длинных волн убывает с уменьшением длины волны, так что энергия бароклинных волн сосредоточена в основном в тропосфере и нижней стратосфере [8].

Следует заметить, что гравитационные волны и длинные квазигеострофические волны ведут себя подобно электромагнитным волнам с точки зрения переноса и отражения волновой энергии. Действительно, формула для потока механической энергии волн подобна формуле для потока энергии электромагнитных волн. Последняя в электромагнитной теории выражается через классический вектор Пойнтинга. Аналогично формула для коэффициента отражения в случае механической энергии волн такая же, как и в случае электромагнитных волн. Более того, когда поток энергии изображен графически (см. п. 16.2), механическая энергия переносится вдоль линий тока $\Psi = \text{const}$ точно таким же путем, как электромагнитная энергия вдоль луча. Эта тесная аналогия между распространением механических и электромагнитных волн вытекает из линейности уравнений возмущенного движения [см. уравнения (16.3)—(16.6)] и из их инвариантности по отношению к преобразованию координат.

Следует отметить, что концепция переноса и отражения волновой энергии может быть применена только в тех областях, в которых отсутствуют стоки (поглощение) энергии, а также источники (так называемые первичные источники [21], способные генерировать энергию волнового движения). Эта концепция, однако, применима в тех областях, где расположены вторичные источники (стоки), т. е. источники энергии, зависящие как от возмущенного движения, так и от основного потока, на который накладывается это возмущение [см. в адиабатическом приближении правую часть уравнения (16.8)].

16.6. Полулагранжева форма уравнения энергии линейных возмущений

В п. 16.1 были получены уравнения возмущенного движения [(16.3)—(16.5)] в форме Эйлера, которые послужили основой для вывода уравнения баланса энергии (16.7). Теперь покажем, что уравнения возмущенного движения допускают полулагранжеву форму, которая, в частности, полезна для изучения возмущений при равновесном состоянии [20] (устойчивое гидростатическое равновесие).

Введем декартовы координаты x^i ($i = 1, 2, 3$), вращающиеся вместе с Землей. Вектор скорости $\mathbf{v}$ движения по отношению к земной поверхности задан своими составляющими $dx^i/dt = v^i(x^1, x^2, x^3, t)$. Как обычно, $p(x^1, x^2, x^3, t)$ обозначает давление, $\rho(x^1, x^2, x^3, t)$ — плотность воздуха, $\phi(x^1, x^2, x^3)$ — геопотенциал, а Ω — скорость вращения Земли, заданная антисимметричными декартовыми составляющими $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$ ($i, j = 1, 2, 3$).

Невозмущенное движение представлено параметрами p, v^i, ρ; уравнения этого движения можно записать в следующей форме:

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2\Omega_{ki}\frac{dx^k}{dt} = \frac{-1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \quad (i, k = 1, 2, 3), \qquad (16.16)$$

где по повторяющемуся индексу k предполагается суммирование.

Обозначим для некоторой величины ψ через $\delta\psi$ ее локальное возмущение (эйлерово возмущение), а через $\Delta\psi$ индивидуальное возмущение (лагранжево возмущение). Величина $\delta\psi$ соответствует изменению ψ в момент времени t и в данной точке $P(x^1, x^2, x^3)$ пространства, возникающему под влиянием наложения малых возмущений на невозмущенное движение, в то время как $\Delta\psi$ — соответствующее изменение ψ в момент времени t в данной жидкой частице. Поэтому

$$\Delta\psi = \delta\psi + \frac{\partial\psi}{\partial x^i}\Delta x^i, \qquad (16.17)$$

где Δx^i — приращение координаты x^i жидкой частицы при смещении ее из невозмущенного положения (x^1, x^2, x^3) в возмущенное ($x^1+\Delta x^1$, $x^2+\Delta x^2$, $x^3+\Delta x^3$) в фиксированный момент времени t. Все три приращения Δx^i есть функции x^1, x^2, x^3 и t. Следует заметить, что $\delta t = 0$, $\delta x^1 = \delta x^2 = \delta x^3 = 0$ и $\Delta t = 0$. Классическое правило дифференцирования справедливо и для дифференциальных операторов δ и Δ, и, кроме того, имеем:

$$\delta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}(\delta\psi) \quad \text{и} \quad \Delta\left(\frac{d\psi}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\Delta\psi),$$

где $d/dt = \partial/\partial t + v^i\,(\partial/\partial x^i)$ — индивидуальная производная по времени для невозмущенного движения (v^1, v^2, v^3). Однако операторы Δ и $\partial/\partial x^i$ нельзя менять местами; то же самое справедливо и для операторов δ и d/dt.

Применяя к обеим частям уравнения (16.16) оператор Δ, получаем уравнения возмущенного движения

$$\frac{d^2}{dt^2}(\Delta x^i) + 2\Omega_{ki}\frac{d}{dt}(\Delta x^k) = -\Delta\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{\partial p}{\partial x^i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x^i}(\delta p) - \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x^i\,\partial x^k} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\,\partial x^k}\right)\Delta x^k. \tag{16.18}$$

Если ΔQ — скорость удельного притока тепла, связанного с возмущением, то

$$\frac{\Delta Q}{c_{pa}T} = -\frac{\Delta\rho}{\rho} + \frac{\Delta p}{\rho c^2} = -\frac{1}{\rho}\left(\delta\rho - \frac{\delta p}{c^2}\right) - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x^i} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial x^i}\right)\Delta x^i = \frac{\Delta\Theta}{\Theta}, \tag{16.19}$$

где T и Θ — абсолютная и потенциальная температура; c_{pa} — удельная теплоемкость сухого воздуха при постоянном давлении; c — скорость звука (по Лапласу). Путем подстановки в (16.18) уравнения первого начала термодинамики приведем уравнения возмущенного движения к виду

$$\rho\left(\delta_{ki}\frac{d^2}{dt^2} + 2\Omega_{ki}\frac{d}{dt} + \sigma_{ki}\right)\Delta x^k = -\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial p}{\partial x^i}\right)\delta p - \frac{\partial p}{\partial x^i}\frac{\Delta\Theta}{\Theta} \quad (i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3), \tag{16.20}$$

где

$$\sigma_{ij} \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p}{\partial x^i\,\partial x^j} - \frac{1}{(\rho c)^2}\frac{\partial p}{\partial x^i}\frac{\partial p}{\partial x^j} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^i\,\partial x^j} \equiv \sigma_{ji}$$

есть компоненты симметричного тензора и δ_{ij} — компоненты тензора Кронекера ($\delta_{ij}=0$ при $i\neq j$ и $\delta_{ij}=1$ при $i=j$; $i, j=1, 2, 3$).

Чтобы получить уравнение неразрывности возмущенного движения, применим Δ-оператор к инварианту $\rho\, dx^1\, dx^2\, dx^3$; имеем:

$$\Delta(\rho\, dx^1\, dx^2\, dx^3)=0 \quad \text{или} \quad \frac{\delta\rho}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x^i}\Delta x^i+\frac{\partial}{\partial x^i}(\Delta x^i)=0, \tag{16.21}$$

где i — индекс суммирования. Подставляя (16.19) в (16.21), окончательно получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\Delta x^i)+\frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial p}{\partial x^i}\Delta x^i=\frac{\Delta\Theta}{\Theta}-\frac{\delta p}{\rho c^2}. \tag{16.22}$$

Пять уравнений (16.19)—(16.21) образуют замкнутую систему уравнений относительно пяти неизвестных величин δp, Δx^1, Δx^2, Δx^3, $\delta\rho$ при условии, что задано распределение тепловых источников в пространстве и во времени ($\Delta\Theta/\Theta=\Delta Q/c_{pa}T$). Эти уравнения имеют полулагранжеву форму, поскольку приращения координат рассматриваются как зависимые переменные. Но, с другой стороны, частные производные в этих уравнениях содержат эйлеровы переменные x^1, x^2, x^3. Действительно, координаты x^1, x^2, x^3 в этих производных употребляются как эйлеровы переменные, и в то же время, когда эти координаты характеризуют невозмущенное положение жидкой частицы, их можно считать переменными Лагранжа. Этот формальный недостаток уравнений ((16.19)—(16.21)) не имеет серьезного значения, поскольку в выражении

$$\begin{aligned}\Delta x^i(x^1+\Delta x^1,\ x^2+\Delta x^2,\ x^3+\Delta x^3,\ t)&\approx\Delta x^i(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t)+\\&+\frac{\partial(\Delta x^i)}{\partial x^k}\Delta x^k\approx\Delta x^i(x^1,\ x^2,\ x^3,\ t)\end{aligned} \tag{16.23}$$

величинами второго порядка в классической теории возмущений пренебрегают.

Если записать соотношение (16.17) для составляющей скорости v^k, то получим

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{dx^k}{dt}\right)&=\frac{d}{dt}(\Delta x^k)=\frac{\partial(\Delta x^k)}{\partial t}+\\&+v^i\frac{\partial(\Delta x^k)}{\partial x^i}=\Delta v^k=\delta v^k+\frac{\partial v^k}{\partial x^i}\Delta x^i.\end{aligned}$$

Используя эти формулы, можно получить уравнения (16.3)—(16.5) в форме Эйлера из соответствующих им уравнений (16.19)—(16.21) в полулагранжевой форме. Однако этот переход довольно громоздкий. Эйлерову форму уравнений возмущенного движения можно получить более просто путем непосредственного применения δ-оператора к классическим эйлеровым уравнениям движения, неразрывности и термодинамики:

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + 2\Omega_{ki} v^k = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x^i} - \frac{\partial \phi}{\partial x^i},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^k \frac{\partial \rho}{\partial x^k} + \rho \frac{\partial v^k}{\partial x^k} = 0,$$

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + v^k \frac{\partial p}{\partial x^k}\right) - \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^k \frac{\partial \rho}{\partial x^k}\right) = \frac{\rho Q}{c_{pa} T} = \frac{\rho}{\Theta}\frac{d\Theta}{dt}.$$

Применяя δ-оператор к этим уравнениям, получаем:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right)\delta v^i + \frac{\partial v^i}{\partial x^k}\delta v^k + 2\Omega_{ki}\delta v^k =$$

$$= -\delta\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{\partial p}{\partial x^i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial (\delta p)}{\partial x^i},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right)\delta\rho + \frac{\partial \rho}{\partial x^k}\delta v^k + \rho\frac{\partial (\delta v^k)}{\partial x^k} + \frac{\partial v^k}{\partial x^k}\delta\rho = 0,$$

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + v^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right)\delta p - \left(\frac{\partial}{\partial t} + v^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right)\delta\rho +$$

$$+ \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial x^k} - \frac{\partial \rho}{\partial x^k}\right)\delta v^k = \delta\left(\frac{\rho Q}{c_{pa} T}\right).$$

Система (16.3)—(16.5) является частным случаем этой системы уравнений возмущенного движения.

Уравнение энергии для линейных возмущений можно вывести из уравнений (16.20); умножая обе части последних соответственно на $(d/dt)\,\Delta x^i$, находим

$$\frac{\rho}{2}\left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{d(\Delta x^i)}{dt}\frac{d(\Delta x^i)}{dt}\right\} + \sigma_{ki}\frac{d}{dt}(\Lambda x^k \Delta x^i)\right] + \frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\frac{d(\Delta x^i)}{dt}\delta p\right\} =$$

$$= \delta p\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial p}{\partial x^i}\right)\frac{d(\Delta x^i)}{dt} - \frac{\partial p}{\partial x^i}\frac{d(\Delta x^i)}{dt}\frac{\Delta\Theta}{\Theta}.$$

Используя тождество

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\frac{d(\Delta x^i)}{dt}\right\} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial(\Delta x^i)}{\partial x^i}\right\} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i}\frac{\partial(\Delta x^i)}{\partial x^k}$$

и уравнение неразрывности (16.22) применительно к первому члену правой части вышенаписанного уравнения, после некоторых преобразований получаем уравнение энергии

$$\frac{\rho}{2}\left[\frac{d}{dt}\left\{\frac{d(\Delta x^i)}{dt}\frac{d(\Delta x^i)}{dt}\right\}+\sigma_{ij}\frac{d}{dt}(\Delta x^i\,\Delta x^j)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(\rho c)^2}\frac{d}{dt}(\delta p)^2\right]+\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\delta p\,\frac{d(\Delta x^i)}{dt}\right\}=$$

$$=\delta p\left\{\frac{\partial v^k}{\partial x^i}\frac{\partial(\Delta x^i)}{\partial x^k}-\Delta x^i\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho c^2}\frac{\partial p}{\partial x^i}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta\Theta}{\Theta}\right)\right\}-(\delta p)^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho c^2}\right)-\frac{d(\Delta x^i)}{dt}\frac{\partial p}{\partial x^i}\frac{\Delta\Theta}{\Theta}. \qquad (16.24)$$

Еще раз вернемся к уравнениям (16.20); умножая каждое из них на Δx^i и используя уравнение неразрывности (16.22), находим

$$\frac{\rho}{2}\frac{d^2}{dt^2}(\Delta x^i\,\Delta x^i)-\rho\frac{d(\Delta x^i)}{dt}\frac{d(\Delta x^i)}{dt}+\rho\sigma_{ij}\,\Delta x^i\,\Delta x^j+$$

$$+2\Omega_{ki}\frac{d(\Delta x^k)}{dt}\rho\Delta x^i+\frac{(\delta p)^2}{\rho c^2}+\frac{\partial}{\partial x^i}(\delta p\,\Delta x^i)=$$

$$=\frac{\Delta\Theta}{\Theta}\left(\delta p-\frac{\partial p}{\partial x^i}\,\Delta x^i\right)\quad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3). \qquad (16.25)$$

В случае адиабатических ($\Delta\Theta=0$) коротковолновых возмущений ($\Omega_{kv}\approx 0$) и состояния устойчивого гидростатического равновесия ($v^1\equiv v^2\equiv v^3\equiv 0$) величины p, ρ или Θ являются функциями лишь высоты $x^3\equiv z$; поскольку в этом случае также $\sigma_{ij}\equiv\equiv 0$, за исключением σ_{33}, то уравнения (16.24) и (16.25) принимают вид [20]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\rho(k+\omega^*)\}+\frac{\partial}{\partial x^i}\left\{\delta p\,\frac{\partial(\Delta x^i)}{\partial t}\right\}=0 \qquad (16.24')$$

и

$$\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho\Delta x^i\,\Delta x^i)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}(\delta p\,\Delta x^j)=\rho(k-\omega^*), \qquad (16.25')$$

где $k\equiv\frac{1}{2}(\partial\,\Delta x^i/\partial t)(\partial\,\Delta x^i/\partial t)$ — удельная кинетическая энергия волнового возмущения, а $\omega^*=\frac{1}{2}\nu_s^2(\Delta z)^2+\frac{1}{2}(\delta p/\rho c)^2$ — сумма потенциальной и внутренней энергии волн (полная потенциальная энергия); $\sigma_{33} = \nu_s^2 = -(g/c)^2 - (g/\rho)(\partial\rho/\partial z) > 0$ — хорошо известный показатель устойчивости $(g/\Theta)(\partial\Theta/\partial z)$.

Уравнение баланса энергии (16.24′) показывает, что в данном частном случае энергия возмущений $k + \omega^*$ является консервативным свойством системы. В данном объеме энергия волновых возмущений может изменяться только за счет потока энергии через ограничивающую поверхность, который представлен вектором $\delta p(\partial/\partial t)(\Delta x^i)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Если уравнение (16.25′) проинтегрировать по всему объему, занятому системой, то члены $(\partial/\partial x^i)(\delta p\,\Delta x^i)$ войдут в интеграл по поверхности, ограничивающей систему, и будут стремиться к нулю вместе с потоком энергии.

Устойчивость гидростатического равновесия означает ограниченное изменение во времени суммы $\Delta x^i\,\Delta x^i$, так что интеграл от первого члена левой части (16.25′), будучи осреднен по достаточно большому интервалу времени, может стать очень малой величиной. Следовательно, в этом случае энергия волновых возмущений равномерно распределяется между кинетической энергией k и полной потенциальной энергией ω^* [20].

17

Роль агеострофического движения в энергетике общей циркуляции атмосферы

Можно указать две наиболее характерные черты крупномасштабных атмосферных движений:

1) различие в порядках величин вертикальной и горизонтальной составляющих скорости ветра, что вынуждает раздельно рассматривать горизонтальные и вертикальные движения;

2) как и любой другой вектор, рассматриваемый на замкнутой двумерной поверхности (например, на сфере), вектор горизонтальной скорости ветра $\mathbf{v}_h$ может быть представлен в виде суммы соленоидальной (бездивергентной) $\mathbf{v}_S$ и потенциальной (безвихревой) $\mathbf{v}_L$ составляющих. Вторая составляющая намного меньше первой, но не всегда пренебрежимо мала. Согласно определению имеем:

$$\mathbf{v}_h \equiv \mathbf{v}_S + \mathbf{v}_L, \quad \mathbf{v}_S \equiv \mathbf{k} \times \nabla_h \psi, \quad \mathbf{v}_L \equiv \nabla_h \chi, \quad |\nabla_h \chi| \ll |\nabla_h \psi|. \tag{17.1}$$

Здесь $\mathbf{k}$ — единичный вектор, направленный по вертикали z вверх; ∇_h — горизонтальный ∇-оператор; ψ и χ — функции долготы λ, широты φ, высоты z ($r = a + z$, a — средний радиус Земли) и времени t. Как обычно, w означает вертикальный компонент скорости. Такое разложение горизонтального вектора на соленоидальный и потенциальный не единственное на сфере. В трехмерном пространстве любой вектор $\mathbf{v}$ также может быть представлен в виде суммы соленоидальной $\mathbf{v}_S \equiv \nabla\alpha \times \nabla\beta$ и потенциальной $\mathbf{v}_L = \nabla\gamma$ составляющих, где α, β, γ — скалярные функции λ, φ, $r = a + z$, t. Заменив в последних выражениях α на r (или z), β на ψ, γ на χ, ∇ на ∇_h и $\mathbf{v}$ на $\mathbf{v}_h$, получим соотношения (17.1).

Путем перекрестного дифференцирования эйлеровых уравнений горизонтального движения в сферических координатах и вычитания одного уравнения из другого находим уравнение вихря

$$\frac{d\zeta}{dt} + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_h f + (f + \zeta)\left(D + \frac{2w}{r}\right) + \mathbf{k} \cdot \left\{\frac{\nabla_h w}{r} \times \frac{\partial (r \cdot \mathbf{v}_h)}{\partial z}\right\} - f' w_y = \mathbf{k} \cdot \left\{\nabla_h p \times \nabla_h \left(\frac{1}{\rho}\right)\right\}, \tag{17.2}$$

где u и v — зональная и меридиональная составляющие скорости ветра $\mathbf{v}$:

$$u = (-1/r)\,(\partial\psi/\partial\varphi) + (1/r\cos\varphi)(\partial\chi/\partial\lambda),$$

$$v = (1/r\cos\varphi)\,(\partial\psi/\partial\lambda) + (1/r)\,(\partial\chi/\partial\varphi);$$

ζ — вертикальная составляющая вихря (curl $\mathbf{v}_\mathrm{h}$) скорости:

$$\zeta = v_x - u_y + \frac{u}{r}\operatorname{tg}\varphi = \nabla_\mathrm{h}^2\psi,$$

D — горизонтальная дивергенция:

$$D \equiv \operatorname{div}\mathbf{v}_\mathrm{h} = u_x + v_y - \frac{v}{r}\operatorname{tg}\varphi = \nabla_\mathrm{h}^2\chi.$$

Как обычно, d/dt заменяет $\partial/\partial t + \mathbf{v}\cdot\nabla$, f и f' равны $2\Omega\sin\varphi$ и $2\Omega\cos\varphi$ соответственно; Ω — угловая скорость вращения Земли; кроме того, введены следующие обозначения:

$$u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda}, \quad u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}, \quad u_z \equiv \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Напомним, что

$$\nabla_\mathrm{h}^2\psi \equiv \psi_{xx} + \psi_{yy} - \frac{\operatorname{tg}\varphi}{r}\psi_y.$$

Подставляя (17.1) в (17.2), находим

$$\frac{d}{dt}(\nabla_\mathrm{h}^2\psi) + \nabla_\mathrm{h}f\cdot\nabla_\mathrm{h}\chi + \mathbf{k}\cdot(\nabla_\mathrm{h}\psi\times\nabla_\mathrm{h}f) +$$
$$+ (f + \nabla_\mathrm{h}^2\psi)\left(\nabla_\mathrm{h}^2\chi + \frac{2w}{r}\right) + \nabla_\mathrm{h}w\cdot\nabla_\mathrm{h}\psi_z +$$
$$+ \mathbf{k}\cdot(\nabla_\mathrm{h}w\times\nabla_\mathrm{h}\chi_z) - f'w_y = \mathbf{k}\cdot\left\{\nabla_\mathrm{h}p\times\nabla_\mathrm{h}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right\}, \qquad (17.3)$$

где членом $2w/r$ можно пренебречь, поскольку он по крайней мере на два порядка меньше $\nabla_\mathrm{h}^2\chi$.

Умножая уравнение (17.3) на $-\psi$ и затем интегрируя по сфере S радиусом r, концентрической с земной поверхностью, получаем уравнение энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\frac{(\nabla_\mathrm{h}\psi)^2}{2}}\right)_z + \overline{((f + \nabla_\mathrm{h}^2\psi)(\nabla_\mathrm{h}\psi\cdot\nabla_\mathrm{h}\chi))_z} + \left(\overline{w\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{(\nabla_\mathrm{h}\psi)^2}{2}\right\}}\right)_z +$$
$$+ \mathbf{k}\cdot\overline{(w(\nabla_\mathrm{h}\psi\times\nabla_\mathrm{h}\chi_z))_z} + \overline{(f'\psi w_y)_z} = \mathbf{k}\cdot\overline{((\nabla_\mathrm{h}p/\rho)\times\nabla_\mathrm{h}\psi)_z} \qquad (17.4)$$

после повторного применения теоремы Стокса

$$\oint_S (\mathrm{curl}\, \mathbf{l}_z \mathbf{v}_\mathrm{h})\, dS \equiv 0, \quad \oint_S (\mathrm{div}\, \mathbf{v}_\mathrm{h})\, dS \equiv 0,$$

где S — замкнутая геопотенциальная поверхность.

Символ $(\overline{A})_z$ означает величину A, осредненную по горизонтальной поверхности S (эту поверхность можно рассматривать и как сферу, концентрическую с земной поверхностью): $(\overline{A})_z \equiv \equiv (1/S) \oint_S A\, dS$.

Наконец, объединяя (17.4) с приближенным уравнением неразрывности для крупномасштабных движений

$$D + \frac{1}{\rho_\mathrm{e}} \frac{\partial (\rho_\mathrm{e} w)}{\partial z} \approx 0, \tag{17.5}$$

уравнение баланса кинетической энергии соленоидального горизонтального движения приведем к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho_\mathrm{e} \left(\overline{\frac{(\nabla_\mathrm{h}\psi)^2}{2}}\right)_z\right\} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\rho_\mathrm{e} \left(\overline{w \frac{(\nabla_\mathrm{h}\psi)^2}{2}}\right)_z\right\} =$$

$$= -\rho_\mathrm{e} \overline{\left((f + \nabla_\mathrm{h}^2 \psi)(\nabla_\mathrm{h}\psi \cdot \nabla_\mathrm{h}\chi)\right)}_z - \mathbf{k} \cdot \rho_\mathrm{e} \overline{(w (\nabla_\mathrm{h}\psi \times \nabla_\mathrm{h}\chi_z))}_z -$$

$$- \rho_\mathrm{e} \overline{\left(\frac{(\nabla_\mathrm{h}\psi)^2}{2} \nabla_\mathrm{h}^2 \chi\right)}_z + \mathbf{k} \cdot \overline{(\nabla_\mathrm{h} p \times \nabla_\mathrm{h}\psi)}_z - \rho_\mathrm{e} \overline{(f' \psi w_y)}_z. \tag{17.6}$$

В правой части (17.4) отношение ρ_e/ρ заменено единицей. Символ ρ_e описывает распределение плотности по вертикали при статическом равновесии $[\rho_\mathrm{e} = \rho_\mathrm{e}(z)]$.

Возвращаясь снова к эйлеровым уравнениям горизонтального движения и дифференцируя уравнения для зональной и меридиональной составляющих по λ и φ, легко находим так называемое уравнение дивергенции (см. п. 14.1)

$$\frac{dD}{dt} + D\left(D + \frac{2w}{r}\right) + \frac{\nabla_\mathrm{h} w}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z}(r \mathbf{v}_\mathrm{h}) +$$

$$+ f' w_x - f\zeta + \mathbf{k} \cdot (\mathbf{v}_\mathrm{h} \times \nabla_\mathrm{h} f) + 2\mathbf{k} \cdot (\nabla_\mathrm{h} v \times \nabla_\mathrm{h} u) +$$

$$+ \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{r}\left(\mathbf{v}_\mathrm{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_\mathrm{h}}{\partial y}\right) + \frac{\mathbf{v}_\mathrm{h}^2}{r^2} = -\operatorname{div}(\nabla_\mathrm{h} p/\rho) \tag{17.7}$$

или после преобразования и объединения трех последних членов левой части с D^2

$$\frac{dD}{dt}+\mathbf{k}\cdot(\mathbf{v}_h\times\nabla_h f)-\zeta(\zeta+f)+\nabla_h^2\left(\frac{\mathbf{v}_h^2}{2}\right)-$$

$$-(\nabla_h^2\mathbf{v}_h)\cdot\mathbf{v}_h+\frac{\nabla_h\omega}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial z}(r\mathbf{v}_h)+f'\omega_x=-\operatorname{div}(\nabla_h p/\rho), \qquad (17.7a)$$

где члены, имеющие порядок $1/r$ и $1/r^2$, отброшены. Подставляя (17.1) в (17.7a), получаем

$$\frac{d}{dt}(\nabla_h^2\chi)-\nabla_h f\cdot\nabla_h\psi+\mathbf{k}\cdot(\nabla_h\chi\times\nabla_h f)-$$

$$-(\nabla_h^2\psi+f)\nabla_h^2\psi+\mathbf{k}\cdot(\nabla_h\psi_z\times\nabla_h\omega)+$$

$$+\nabla_h\omega\cdot\nabla_h\chi_z+\nabla_h^2\left(\frac{\mathbf{v}_h^2}{2}\right)-(\nabla_h^2\mathbf{v}_h)\cdot\mathbf{v}_h+f'\omega_x=-\operatorname{div}(\nabla_h p/\rho). \quad (17.8)$$

Умножив (17.8) на $-\chi$ и проинтегрировав затем по горизонтальной поверхности S, придем к следующему уравнению энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\left(\frac{(\nabla_h\chi)^2}{2}\right)_z}-\overline{((f+\nabla_h^2\psi)(\nabla_h\psi\cdot\nabla_h\chi))_z}-$$

$$-\mathbf{k}\cdot\overline{(\nabla_h^2\chi(\nabla_h\psi\times\nabla_h\chi))_z}-\frac{1}{2}\overline{(\nabla_h^2\chi\{(\nabla_h\psi)^2+(\nabla_h\chi)^2\})_z}+$$

$$+\overline{\left(\omega\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{(\nabla\chi)^2}{2}\right\}\right)_z}+\mathbf{k}\cdot\overline{(\omega(\nabla_h\psi_z\times\nabla_h\chi))_z}-$$

$$-\overline{(f'\chi\omega_x)_z}=-\overline{\left(\frac{\nabla_h p}{\rho}\cdot\nabla_h\chi\right)_z}. \qquad (17.9)$$

Подставив теперь (17.5) в (17.9), получим уравнение баланса кинетической энергии потенциального (безвихревого) горизонтального движения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho_e\overline{\left(\frac{(\nabla_h\chi)^2}{2}\right)_z}\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\rho_e\overline{\left(\omega\left\{\frac{(\nabla_h\chi)^2}{2}+\mathbf{k}\cdot(\nabla_h\psi\times\nabla_h\chi)\right\}\right)_z}\right\}=$$

$$=\rho_e\overline{((f+\nabla_h^2\psi)(\nabla_h\psi\cdot\nabla_h\chi))_z}+\mathbf{k}\cdot\rho_e\overline{(\omega(\nabla_h\psi\times\nabla_h\chi_z))_z}+$$

$$+\rho_e\overline{\left(\frac{(\nabla_h\psi)^2}{2}\nabla_h^2\chi\right)_z}-\overline{(\nabla_h\chi\cdot\nabla_h p)_z}+\rho_e\overline{(f'\chi\omega_x)_z}. \qquad (17.10)$$

Сложив (17.6) и (17.10), придем к уравнению баланса кинетической энергии горизонтального движения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\rho_e\overline{(\mathbf{v}_h^2)_z}\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{2}\rho_e\overline{(\varpi\mathbf{v}_h^2)_z}\right\}=$$
$$=-\overline{(\nabla_h\chi\cdot\nabla_h p)_z}+\mathbf{k}\cdot\overline{(\nabla_h p\times\nabla_h\psi)_z}+$$
$$+\rho_e\overline{(f'\chi\varpi_x)_z}-\rho_e\overline{(f'\psi\varpi_y)_z}, \qquad (17.11)$$

при этом приняты в расчет тождества

$$\mathbf{v}_h^2\equiv(\nabla_h\psi)^2+(\nabla_h\chi)^2+2\mathbf{k}\cdot(\nabla_h\psi\times\nabla_h\chi),$$
$$\overline{(\mathbf{v}_h^2)_z}=\overline{((\nabla_h\psi)^2+(\nabla_h\chi)^2)_z}. \qquad (17.12)$$

Сравнив (17.6) и (17.10), легко установим [153], что члены

$$\rho_e\overline{((f+\nabla_h^2\psi)(\nabla_h\psi\cdot\nabla_h\chi))_z},$$
$$\frac{1}{2}\rho_e\overline{(\nabla_h^2\chi(\nabla_h\psi)^2)_z},\quad \mathbf{k}\cdot\rho_e\overline{(\varpi(\nabla_h\psi\times\nabla_h\chi_z))_z} \qquad (17.13)$$

представляют собой скорости трансформации кинетической энергии потенциального горизонтального движения в кинетическую энергию соленоидального горизонтального движения. Величиной $\mathbf{k}\cdot\overline{(\nabla_h p\times\nabla_h\psi)_z}$ можно пренебречь, если горизонтальное соленоидальное движение квазигеострофическое. Следует отметить, что безвихревое движение можно рассматривать как агеострофическое, а соленоидальное — как геострофическое, хотя это заключение строго справедливо лишь в случае пренебрежения величиной $\beta\equiv(\partial f/\partial y)$.

Три вышеупомянутых выражения (17.13) для скоростей трансформации энергии нелегко истолковать. Первое из них в циклонах ($\nabla_h^2\psi>0$) намного больше, чем в антициклонах ($\nabla_h^2\psi<0$). На оси струйного течения величина $\nabla_h^2\psi$ отрицательна и по абсолютной величине больше, чем f. Вторая величина зависит от знака корреляции на горизонтальных поверхностях между интенсивностью соленоидальной циркуляции $(\nabla_h\psi)^2$ и дивергенцией ($\nabla_h^2\chi>0$) или конвергенцией ($\nabla_h^2\chi<0$) горизонтального движения. В самых нижних слоях большие значения $(\nabla_h^2\psi)^2/2$ наблюдаются обычно тогда, когда горизонтальный поток конвергирует ($\nabla_h^2\chi<0$ в циклонах, где $\nabla_h^2\psi>0$), а малые значения $(\nabla_h\psi)^2/2$ отмечаются тогда, когда горизонтальный поток дивергирует ($\nabla_h^2\chi>0$ в антициклонах, где $\nabla_h^2\psi<0$). Это влечет за собой переход кинетической энергии от безвихревого к соленоидальному движению. Третий член, зависящий от вертикального движения, довольно трудно истолковать в простых выражениях.

Члены $\rho_e \overline{(f'\chi w_x)_z}$ и $-\rho_e \overline{(f'\psi w_y)_z}$ представляют собой скорости перехода кинетической энергии безвихревого горизонтального движения и кинетической энергии соленоидального горизонтального движения в кинетическую энергию вертикального движения. В самом деле, уравнение баланса кинетической энергии вертикального движения имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_e\overline{\left(\frac{w^2}{2}\right)_z}+\frac{\partial}{\partial z}\overline{\left(\left\{\rho_e\frac{w^2}{2}+p_\times\right\}w\right)_z}=$$
$$=\rho_e\overline{(f'\psi w_y)_z}-\rho_e\overline{(f'\chi w_x)_z}-g\overline{(\rho_\times w)_z}+\overline{\left(p_\times\frac{\partial w}{\partial z}\right)_z}, \qquad (17.14)$$

где членами, пропорциональными f/r, мы пренебрегли. Напомним, что $p=p_e(z)+p_\times$ и $\rho=\rho_e(z)+\rho_\times$, где ρ_e и p_e — величины, соответствующие условиям статического равновесия. Следует истолковать еще одну величину в правой части (17.10), а именно

$$-\overline{(\nabla_h\chi\cdot\nabla_h p_\times)_z}=-\overline{(\nabla_h\chi\cdot\nabla_h p)_z}. \qquad (17.15)$$

Чтобы установить ее смысл, рассмотрим уравнение для доступной потенциальной энергии $A=\int\limits_{\text{atm}} a\,dm$:

$$\rho_e\frac{da}{dt}+p_\times\operatorname{div}\mathbf{v}-g\rho_\times w=g\rho_e(H\Theta^\times/\Theta_{ez}), \qquad (17.16)$$

де

$$a\equiv\frac{1}{2}g\left\{\left(\frac{\Theta_{ez}}{\Theta_e}\right)^{-1}\left(\frac{\Theta_\times}{\Theta_e}\right)^2+\frac{c_{va}}{c_{pa}}\left(-\frac{p_{ez}}{p_e}\right)^{-1}\left(\frac{p_\times}{p_e}\right)^2\right\},$$
$$H\equiv Q/c_{pa}T,$$

Q — скорость притока тепла к единице массы при отсутствии трения; $\Theta=\Theta_e(z)+\Theta_\times$ — потенциальная температура; $\Theta^\times$ — флуктуация Θ на изобарической поверхности; $\Theta_\times$ — флуктуация Θ на горизонтальной поверхности; T — абсолютная температура (см. п. 14.8).

Вводя (17.1) в (17.16) и интегрируя уравнение по горизонтальной поверхности, приходим к уравнению баланса доступной энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\rho_e\overline{(a)_z}\}+\frac{\partial}{\partial z}\{\rho_e\overline{(aw)_z}\}=-\overline{\left(-g\rho_\times w+p_\times\frac{\partial w}{\partial z}\right)_z}+$$
$$+\overline{(\nabla_h\chi\cdot\nabla_h p)_z}+(g\rho_e/\Theta_{ez})\overline{(H\Theta^\times)_z}, \qquad (17.17)$$

где последний член, если проинтегрировать по всей атмосфере, представляет собой скорость генерации доступной энергии A.

Из сравнения (17.17) с (17.10) и (17.14) следует, что выражение (17.15) определяет скорость перехода доступной потенциальной энергии в кинетическую энергию безвихревого горизонтального движения и что выражение в скобках в первом члене правой части (17.17) представляет собой скорость перехода доступной потенциальной энергии в кинетическую энергию вертикального движения. Эта скорость чрезвычайно мала, поскольку движения большого масштаба квазистатические.

Из этого анализа вытекает очень важный результат. В планетарном масштабе та потенциальная энергия, которая может превратиться в кинетическую, переходит в кинетическую энергию безвихревого агеострофического горизонтального движения; прямой переход доступной энергии в кинетическую энергию соленоидального геострофического горизонтального движения в планетарном масштабе невозможен. Поэтому квазигеострофические атмосферные модели не очень реальны с точки зрения превращения энергии крупномасштабных движений [153]. Наконец, когда в некоторый момент времени $t = t_1$ отсутствует соленоидальное движение, т. е. $\psi = 0$ и $\nabla_h\psi = 0$ при $t = t_1$, все три скорости (17.13) обращаются в нуль и кинетическая энергия соленоидального движения в момент t_1 не производится; в то же самое время доступная потенциальная энергия превращается в кинетическую энергию безвихревого движения со скоростью, определяемой выражением (17.15). Однако на основе (17.6) легко установить

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\rho_e\overline{\left(\frac{(\nabla_h\psi)^2}{2}\right)_z}\right\}\right]_{t=t_1} = [\rho_e\overline{((\nabla_h\psi_t)^2)_z}]_{t=t_1} =$$
$$= -[\rho_e\overline{(f\nabla_h\chi\cdot\nabla_h\psi_t)_z}]_{t=t_1} - \mathbf{k}[\rho_e\overline{(w\{\nabla_h\psi_t\times\nabla_h\chi_z\})_z}]_{t=t_1} +$$
$$+\mathbf{k}\cdot[\overline{(\nabla_h p\times\nabla_h\psi_t)_z}]_{t=t_1} - [\rho_e\overline{(f'\psi_t w_y)_z}]_{t=t_1}.$$

Таким образом, через короткое время после момента $t = t_1$ начнется постепенный рост кинетической энергии соленоидального движения [153].

18

Энергетика атмосферных моделей

Чтобы получить решения, которые согласовались бы с данными наблюдений, уравнения атмосферных моделей (так называемые упрощенные уравнения) не должны нарушать основные принципы механики (законы сохранения абсолютного момента или вихря и полной энергии изолированной системы), из которых выводится система уравнений движения. В частности, в моделях атмосферы должен соблюдаться закон сохранения полной энергии при обратимых адиабатических процессах.

18.1. Эйлеровы уравнения движения в обобщенных координатах

Уравнения движения в обобщенных координатах x^1, x^2, x^3 имеют следующий вид [13, 14, 141]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial k_{(a)}}{\partial v^k}\right)-\frac{\partial k_{(a)}}{\partial x^k}=-\alpha\frac{\partial p}{\partial x^k}-\frac{\partial \phi_{(a)}}{\partial x^k}-F_k \tag{18.1}$$

или

$$\frac{dv_k}{dt}-\frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k}v^i v^j+2\Omega_{ik}v^i=$$
$$=-\alpha\frac{\partial p}{\partial x^k}-\frac{\partial \phi}{\partial x^k}-F_k \quad (i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3), \tag{18.1'}$$

где неоднородная квадратичная форма

$$2k_{(a)}\equiv\gamma_{ij}v^i v^j+2W_i v^i+(\mathbf{W})^2 \tag{18.2}$$

представляет собой кинетическую энергию единичной массы в абсолютной системе координат (по отношению к этой системе координат период вращения Земли составляет 1 сидерические сутки), $\phi_{(a)}$ — потенциальная энергия единичной массы в этой же системе координат (потенциал силы земного притяжения) и $\phi=\phi_{(a)}-\frac{1}{2}(\mathbf{W})^2$ — потенциальная энергия единичной массы в относительной системе координат (x^1, x^2, x^3). Потенциал ϕ является геопотенциалом тогда, и только тогда, когда относительная система координат (x^1, x^2, x^3) находится в покое относительно земной поверхности (см. п. 3.5). Как и всюду p обозначает давление, α — удельный объем, Ω_{ji} ($\equiv -\Omega_{ji}$) — ковариантные составляющие антисимметричного тензора угловой скорости вращения Земли $\mathbf{\Omega}$, F_i — ковариантные составляющие силы трения, отнесенной к единичной массе. Символы γ_{ij} ($\equiv \gamma_{ji}$) и $\mathbf{W}_i$ означают ковариантные составляющие соответственно метрического тензора и скорости движения $\mathbf{W}$ относительной системы (x^1, x^2, x^3) по отношению к абсолютной системе координат. Символы v^i и v_i означают соответственно контравариантные и ковариантные составляющие относительной скорости $\mathbf{v}$:

$$v^i \equiv dx^i/dt \equiv \dot{x}^i \text{ и } v_i = \gamma_{ij} v^i, \quad v^i = \gamma^{ij} v_j.$$

Здесь j — индекс суммирования, а γ^{ij} ($\equiv \gamma^{ji}$) — контравариантные составляющие метрического тензора. Скорость $\mathbf{v}$ будет скоростью движения воздуха по отношению к земной поверхности (скоростью ветра) тогда, и только тогда, когда относительная система координат (x^1, x^2, x^3) покоится по отношению к Земле. Напомним еще раз, что повторяющийся индекс у одной и той же величины служит индексом суммирования. Когда долгота λ, широта φ и радиус r или высота над уровнем моря $z = r - a$ используются как пространственные координаты, то

$$\gamma_{11} \equiv r^2 \cos^2 \varphi, \quad \gamma_{22} \equiv r^2, \quad \gamma_{33} \equiv 1,$$

$$\gamma_{ij} \equiv 0 \text{ при } i \neq j \text{ и } \gamma \equiv \|\gamma_{ij}\| = r^4 \cos^2 \varphi,$$

$$\gamma^{11} \equiv \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi}, \quad \gamma^{22} \equiv \frac{1}{r^2}, \quad \gamma^{33} \equiv 1,$$

$$\gamma^{ij} \equiv 0 \text{ при } i \neq j \text{ и } \|\gamma^{ij}\| = \frac{1}{\gamma},$$

$$W_1 \equiv \Omega r^2 \cos^2 \varphi, \quad W_2 \equiv W_3 \equiv 0 \text{ и } W^1 \equiv \Omega,$$

$$W^2 \equiv W^3 \equiv 0, \quad (\mathbf{W})^2 = \Omega^2 r^2 \cos^2 \varphi.$$

В этом первом примере $v^1 \equiv \dot{\lambda}$, $v^2 \equiv \dot{\varphi}$, $v^3 \equiv \dot{r} \equiv \dot{z}$, $v_1 \equiv r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda}$, $v_2 \equiv r^2 \dot{\varphi}$, $v^3 \equiv \dot{z}$ — контравариантные и ковариантные составляющие скорости ветра, а кинетическая энергия единичной массы в абсолютной системе координат принимает следующий вид:

$$2k_{(a)} \equiv r^2 \cos^2 \varphi\, (\dot{\lambda})^2 + r^2 (\dot{\varphi})^2 + (\dot{z})^2 + 2\Omega r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda} + \Omega^2 r^2 \cos^2 \varphi. \quad (18.2a)$$

Подставляя это выражение в (18.1), получаем классические эйлеровы уравнения движения в сферических координатах.

Когда вместо λ, φ, r в качестве пространственных координат применяются λ, φ и давление $p = p(\lambda, \varphi, r, t)$, то справедливы соотношения:

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\gamma_{11} \equiv r^2\cos^2\varphi + (z_\lambda)^2, \ \gamma_{23} \equiv \gamma_{32} \equiv z_\varphi z_p, \\
\gamma_{22} \equiv r^2 + (z_\varphi)^2, \ \gamma_{31} \equiv \gamma_{13} \equiv z_p z_\lambda, \\
\gamma_{33} \equiv (z_p)^2, \ \gamma_{12} \equiv \gamma_{21} \equiv z_\lambda z_\varphi,
\end{array}\right\} \text{при } \gamma \equiv \|\gamma_{ij}\| \equiv \equiv (z_p)^2 r^4 \cos^2\varphi, \\
\left.\begin{array}{l}
\gamma^{11} \equiv 1/r^2\cos^2\varphi, \ \gamma^{23} \equiv \gamma^{32} \equiv \dfrac{\partial p}{\partial\varphi} \Big/ r^2, \\
\gamma^{22} \equiv 1/r^2, \ \gamma^{31} \equiv \gamma^{13} \equiv \dfrac{\partial p}{\partial\lambda} \Big/ r^2\cos^2\varphi, \\
\gamma^{33} \equiv (\nabla p)^2, \ \gamma^{12} \equiv \gamma^{21} \equiv 0,
\end{array}\right\} \text{при } \|\gamma^{ij}\| \equiv \equiv 1/(z_p)^2 r^4\cos^2\varphi, \\
W_1 \equiv \Omega r^2\cos^2\varphi + z_t z_\lambda, \ W_2 \equiv z_t z_\varphi, \ W_3 \equiv z_t z_p \\
W^1 \equiv \Omega, \ W^2 \equiv 0, \ W^3 \equiv \Omega\dfrac{\partial p}{\partial\lambda} - \dfrac{\partial p}{\partial t}, \\
(\mathbf{W})^2 \equiv W^i W_i \equiv \Omega^2 r^2\cos^2\varphi + (z_t)^2,
\end{array}\right\} \qquad (18.3)$$

где z_λ, z_φ, z_p и z_t — частные производные $\delta z/\delta\lambda$, $\delta z/\delta\varphi$, $\delta z/\delta p$ и $\delta z/\delta t$. Следует заметить, что радиус r — функция λ, φ, p и t и, кроме того, справедливы соотношения

$$z_\lambda + z_p\frac{\partial p}{\partial\lambda} \equiv 0, \quad z_\varphi + z_p\frac{\partial p}{\partial\varphi} \equiv 0, \quad z_t + z_p\frac{\partial p}{\partial t} \equiv 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} z_p \equiv 1.$$

В этом втором примере контравариантные составляющие $v^1 \equiv \equiv \dot\lambda$, $v^2 \equiv \dot\varphi$, $v^3 \equiv \dot p$ представляют собой проекции скорости движения воздуха по отношению к системе координат λ, φ, p, которые отличаются от проекций скорости ветра ($\dot\lambda$, $\dot\varphi$, $\dot z$). Из определения величины $\dot p$ следует

$$\dot p \equiv \frac{dp}{dt} \equiv \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial\lambda}\dot\lambda + \frac{\partial p}{\partial\varphi}\dot\varphi + \frac{\partial p}{\partial z}\dot z.$$

Отсюда ясно, что составляющая скорости ветра вдоль градиента давления $-\nabla p$

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial\lambda}\dot\lambda + \frac{\partial p}{\partial\varphi}\dot\varphi + \frac{\partial p}{\partial z}\dot z\right) \Big/ |\nabla p|$$

равна сумме скорости движения воздуха $-\dot{p}/|\nabla p|$ в том же направлении по отношению к изобарической поверхности и скорости движения $(\partial p/\partial t)/|\nabla p|$ самой изобарической поверхности по отношению к земной поверхности в направлении барического градиента $-\nabla p$. Напомним также, что во втором примере ковариантные составляющие v_1, v_2, v_3 скорости движения воздуха по отношению к системе координат λ, φ, p имеют следующий вид:

$$v_1 \equiv r^2 \cos^2 \varphi \dot{\lambda} + z_\lambda (w - z_t), \quad v_2 \equiv r^2 \dot{\varphi} + z_\varphi (w - z_t),$$
$$v_3 \equiv z_p (w - z_t), \tag{18.3'}$$

где w — вертикальная проекция скорости ветра $dz/dt \equiv \dot{z}$.

В атмосфере наклон изобарических поверхностей к горизонтальной поверхности (или к сфере, концентрической с Землей) столь мал, что мы можем принять метрику изобарических поверхностей весьма близкой к соответствующей метрике сфер, концентрических с Землей. Кроме того, величина $(z_t)^2$ пренебрежимо мала по сравнению с $\Omega^2 r^2 \cos^2\varphi$.

Поскольку атмосферные движения большого масштаба являются квазистатическими, в качестве наиболее подходящих независимых переменных целесообразно выбрать пространственные координаты λ, φ, p (см. п. 14.1). В этом случае $|z_p| \equiv 1/|\partial p/\partial z| \approx \alpha/g \equiv 1/g\rho$, причем зависимостью α или ρ от долготы λ и широты φ можно пренебречь. Наконец, малая толщина земной атмосферы может быть учтена в дальнейшем приближенным равенством $r \approx a$. Таким образом, можно ввести следующие упрощения:

$$\left.\begin{gathered}
\gamma_{11} \approx a^2 \cos^2 \varphi, \ \gamma_{22} \approx a^2, \ \gamma_{33} \approx (1/g\rho)^2, \\
\gamma_{ij} \equiv 0 \text{ при } i \neq j, \ \gamma \equiv a^4 \cos^2 \varphi / g^2 \rho^2, \\
\gamma^{11} \approx 1/a^2 \cos^2 \varphi, \ \gamma^{22} \approx 1/a^2, \ \gamma^{33} = g^2 \rho^2, \\
\gamma^{ij} \equiv 0 \text{ при } i \neq j, \\
W_1 \approx \Omega r^2 \cos^2 \varphi, \ W_2 \approx 0, \ W_3 \approx 0, \\
W^1 \equiv \Omega, \ W^2 \equiv 0, \ W^3 \approx 0,
\end{gathered}\right\} \tag{18.3a}$$

при

$$(\mathbf{W})^2 \approx \Omega^2 r^2 \cos^2 \varphi \text{ и } \phi \approx \phi_{(a)} - \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \cos^2 \varphi = \text{геопотенциал}.$$

Введя эти упрощения в (18.1′), найдем классические приближенные уравнения движения вдоль кривых пересечения изобарических поверхностей с поверхностями постоянной долготы и постоянной широты, а именно:

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv}{a}\operatorname{tg}\varphi - 2\Omega\sin\varphi v = \frac{-1}{a\cos\varphi}\frac{\delta\phi}{\delta\lambda},$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2}{a}\operatorname{tg}\varphi + 2\Omega\sin\varphi u = -\frac{1}{a}\frac{\delta\phi}{\delta\varphi}, \qquad (18.1а)$$

где, как обычно, ϕ — геопотенциал, $u \approx a\cos\varphi\dot{\lambda}$, $v \approx a\dot{\varphi}$ и

$$(d/dt) \equiv \delta/\delta t + \dot{\lambda}\delta/\delta\lambda + \dot{\varphi}\delta/\delta\varphi + \dot{p}\delta/\delta p.$$

Трение здесь в расчет не принимается.

18.2. Уравнение неразрывности в обобщенных координатах

В обобщенных координатах x^1, x^2, x^3 это уравнение можно записать в следующем виде [13, 141]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{\sqrt{(\gamma)}\rho\} + \frac{\partial}{\partial x^i}\{\sqrt{(\gamma)}\rho v^i\} = 0. \qquad (18.4)$$

Если в (18.4) положить $x^1 = \lambda$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = r = a + z$, то сразу получим уравнение неразрывности в сферических координатах. С другой стороны, если принять $x^1 = \lambda$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = p$ и ввести те же упрощения, что и при выводе (18.1а), то придем к классическому уравнению неразрывности (см. [132] и п. 14.1)

$$\frac{1}{a\cos\varphi}\left\{\frac{\delta u}{\delta\lambda} + \frac{\delta}{\delta\varphi}(v\cos\varphi)\right\} + \frac{\delta\omega}{\delta p} = 0,$$

где $\omega \equiv dp/dt = \dot{p}$, или в более компактной форме

$$\frac{\delta}{\delta x^i}(a^2\cos\varphi v^i) + \frac{\delta}{\delta p}(a^2\cos\varphi\omega) = 0 \quad (i = 1, 2) \qquad (18.4а)$$

Уравнение (18.4а) является уравнением диагностического типа. Это обстоятельство позволяет дать простое толкование поля «вертикальной» скорости ω. В самом деле, поле скорости $(\dot{\lambda}, \dot{\varphi}, 0)$ на изобарических поверхностях ($\dot{p} \equiv 0$) может быть представлено с помощью двух скалярных полей, определяемых произвольными функциями ψ и χ эйлеровых переменных λ, φ, p и t. В этом случае поле скорости ($v^1 \equiv \dot{\lambda}$, $v^2 \equiv \dot{\varphi}$, $v^3 \equiv 0$) является результатом сложения двух полей:

1) соленоидального поля скорости (u_S^1, v_S^2, v_S^3)

$$\left.\begin{array}{l} v_S^1 \equiv \dfrac{-1}{a^2 \cos\varphi} \dfrac{\delta\psi}{\delta\varphi}, \quad v_S^2 \equiv \dfrac{1}{a^2\cos\varphi} \dfrac{\delta\varphi}{\delta\lambda}, \quad v_S^3 \equiv 0 \\ \text{или} \\ \mathbf{v}_S \equiv \mathbf{k} \times \nabla_{is}\psi, \end{array}\right\} \tag{18.5а}$$

2) потенциального поля скорости (v_L^1, v_L^2, v_L^3)

$$\left.\begin{array}{l} a^2 \cos^2\varphi v_L^1 \equiv -\dfrac{\delta}{\delta\lambda}\left(\dfrac{\delta\chi}{\delta p}\right) \equiv (v_1)_L, \\ a^2 v_L^2 \equiv -\dfrac{\delta}{\delta\varphi}\left(\dfrac{\delta\chi}{\delta p}\right) \equiv (v_2)_L, \quad v_L^3 \equiv 0 \\ \text{или} \\ \mathbf{v}_L = -\nabla_{is}\left(\dfrac{\delta\chi}{\delta p}\right), \end{array}\right\} \tag{18.5б}$$

так что

$$v^i = v_S^i + v_L^i$$

или

$$\mathbf{v} = \mathbf{k} \times \nabla_{is}\psi - \nabla_{is}\left(\frac{\delta\chi}{\delta p}\right). \tag{18.6}$$

Во избежание недоразумений следует заметить, что функция χ в главе 17 играет ту же роль, что и функция $\delta\chi/\delta p$ в данной главе.

Соленоидальное поле скорости (18.5а) бездивергентное, но обладает вихрем $\nabla_{is}^2\psi$, в то время как потенциальное поле безвихревое, но имеет дивергенцию — ∇_{is}^2 $(\delta\chi/\delta p)$. Напомним здесь определение оператора ∇_{is}^2:

$$\nabla_{is}^2 \equiv \frac{1}{a^2\cos^2\varphi}\frac{\delta^2}{\delta\lambda^2} + \frac{1}{a^2\cos\varphi}\frac{\delta}{\delta\varphi}\left(\cos\varphi \frac{\delta}{\delta\varphi}\right). \tag{18.7}$$

Подчеркнем также тот факт, что при получении формул (18.5)—(18.7) использована приближенная метрика согласно соотношениям (18.3а). Линии тока соленоидального поля скорости совпадают с линиями пересечения поверхностей $\psi = \text{const}$ и $p = \text{const}$. Линии тока потенциального поля направлены по нормали к изобарам; вдоль этих линий $\delta\chi/\delta p = \text{const}$. Если пренебречь изменением параметра Кориолиса $f \equiv 2\Omega \sin\varphi$ с широтой, то соленоидальное поле скорости можно отождествить с полем геострофического ветра ($\psi \approx \phi/f$).

Подставляя (18.6) и (18.7) в (18.4а) получаем соотношение

$$\nabla^2_{\mathrm{is}} \frac{\delta \chi}{\delta p} = \frac{\delta \omega}{\delta p}, \qquad (18.4'\text{a})$$

которое показывает, что уравнение неразрывности (18.4а) будет автоматически удовлетворено, если положить

$$\omega = \nabla^2_{\mathrm{is}} \chi. \qquad (18.8)$$

Таким образом, поле агеострофического ветра довольно хорошо представляется скалярным полем χ (λ, φ, p, t).

18.3. Уравнение абсолютного вихря

Перекрестное дифференцирование эйлеровых уравнений динамики (18.1′) приводит после некоторых (несколько громоздких) преобразований к уравнениям движения в форме вихря [141]:

$$\frac{dV_{ij}}{dt} + \frac{\partial v^k}{\partial x^i} V_{kj} + \frac{\partial v^k}{\partial x^j} V_{ik} = \frac{\partial p}{\partial x^i} \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} - \\ - \frac{\partial p}{\partial x^j} \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} \quad (i, j, k = 1, 2, 3), \qquad (18.9)$$

где $V_{ij} \equiv (\partial V_j / \partial x^i - \partial V_i / \partial x^j)$ — ковариантные составляющие антисимметричного тензора curl **V**; абсолютная скорость ветра **V** представлена ковариантными составляющими $V_i = W_i + v_i$. Напомним, что curl **V** может быть представлен также контравариантными составляющими $\xi^k = V_{ij}/\sqrt{\gamma}$, где ($i$, j, k) — циклическая перестановка индексов 1, 2, 3.

Вводя пространственные переменные $x^1 \equiv \lambda$, $x^2 \equiv \varphi$, $x^3 \equiv p$ в (18.9) и рассматривая только уравнение, соответствующее $i = 1$ и $j = 2$, найдем

$$\frac{\delta V_{12}}{\delta t} + \frac{\delta}{\delta \lambda}(V_{12} v^1 - v^3 V_{23}) + \frac{\delta}{\delta \varphi}(V_{12} v^2 - v^3 V_{31}) = 0, \qquad (18.10)$$

при этом принято во внимание очевидное тождество

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \{\sqrt{\gamma}\, \xi^k\} = \frac{\partial V_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial V_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial V_{12}}{\partial x^3} \equiv 0.$$

Приступим теперь к расчету составляющих curl **V**. Имея в виду формулу $V_i = W_i + v_i$, на основе соотношений (18.3) и (18.3′) легко покажем:

$$V_1 = \Omega r^2 \cos^2 \varphi + r \cos \varphi u + z_\lambda w, \quad V_2 = rv + z_\varphi w, \quad V_3 = z_p w,$$

где u, v, w — зональная, меридиональная и вертикальная составляющие скорости ветра. Из этих выражений сразу же следует:

$$\left.\begin{aligned}
V_{23} &= \frac{\delta V_3}{\delta\varphi} - \frac{\delta V_2}{\delta p} = rz_p\left(\xi - \frac{z_\varphi}{r}\frac{1}{z_p}\frac{\delta w}{\delta p}\right),\\
V_{31} &= \frac{\delta V_1}{\delta p} - \frac{\delta V_3}{\delta\lambda} = r\cos\varphi z_p\left(\eta + \frac{z_\lambda}{r\cos\varphi}\frac{1}{z_p}\frac{\delta w}{\delta p}\right),\\
V_{12} &= \frac{\delta V_2}{\delta\lambda} - \frac{\delta V_1}{\delta\varphi} = r^2\cos\varphi\left(\zeta - \frac{z_\lambda}{r\cos\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\delta w}{\delta\varphi} - \frac{v}{r}\right) + \right.\\
&\quad \left. + \frac{z_\varphi}{r}\left(\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\delta w}{\delta\lambda} - \frac{u}{r} - 2\Omega\cos\varphi\right)\right),
\end{aligned}\right\} \quad (18.11)$$

где

$$\xi = \frac{1}{r}\frac{\delta w}{\delta\varphi} - \frac{1}{z_p}\frac{\delta v}{\delta p} - \frac{v}{r},$$

$$\eta = \frac{1}{z_p}\frac{\delta u}{\delta p} - \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\delta w}{\delta\lambda} + \frac{u}{r} + 2\Omega\cos\varphi,$$

$$\zeta = \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\delta v}{\delta\lambda} - \frac{1}{r}\frac{\delta u}{\delta\varphi} + \frac{u\operatorname{tg}\varphi}{r} + 2\Omega\sin\varphi,$$

ξ, η, ζ — обычные составляющие абсолютного вихря. В выражениях для ζ и η членами, включающими $1/r$ и производные от w по λ и φ, обычно пренебрегают. Кроме того, меридиональная проекция угловой скорости вращения Земли $\Omega\cos\varphi$ мала по сравнению с вертикальным сдвигом зонального ветра $(1/z_p)(\delta u/\delta p) = \partial u/\partial z$, и поэтому в выражении для η слагаемое $2\Omega\cos\varphi$ также обычно опускается.

Добавляя эти упрощения к тем, которые упоминались в п. 18.1 [см. формулу (18.3а)], и вводя их в (18.11), получаем:

$$\left.\begin{aligned}
&\xi \approx -\frac{1}{z_p}\frac{\delta v}{\delta p} = -\frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta \approx \frac{1}{z_p}\frac{\delta u}{\delta p} = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \zeta = \nabla_{is}^2\psi + f,\\
&V_{12} \approx a^2\cos\varphi\,(\nabla_{is}^2\psi + f), \quad V_{23} \approx -a\frac{\delta v}{\delta p} = -\frac{\delta v_2}{\delta p},\\
&V_{31} \approx a\cos\varphi\frac{\delta u}{\delta p} = \frac{\delta v_1}{\delta p},
\end{aligned}\right\} \quad (18.12)$$

где $v_1 \approx a^2\cos^2\varphi\dot\lambda = (a\cos\varphi)\,u$, $v_2 \approx a^2\dot\varphi = av$ при $v^1 \equiv \dot\lambda$, $v^2 = \dot\varphi$ и $f = 2\Omega\sin\varphi$. Так называемый абсолютный вихрь ζ

определяется выражением $\nabla^2_{\text{is}}\psi + f$. Наконец, подставляя (18.12) в (18.10), приходим к уравнению абсолютного вихря [113]

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(a^2 \cos\varphi \left(\nabla^2_{\text{is}}\psi + f\right)\right) + \frac{\delta}{\delta x^i}\left(a^2 \cos\varphi \left(\nabla^2_{\text{is}}\psi + f\right) v^i + \omega\varepsilon^{ij}\frac{\delta v_j}{\delta p}\right) = 0$$

$$(i,\ j = 1,\ 2), \tag{18.13}$$

где $x^1 = \lambda$, $x^2 = \varphi$; $v^1 = \dot{\lambda}$, $v^2 = \dot{\varphi}$, $v^3 = \dot{p} = \omega$; $\varepsilon^{ii} = 0$ и $\varepsilon^{ij} = -\varepsilon^{ji}$ при $\varepsilon^{12} \equiv 1$. Следует заметить, что $\varepsilon^{ij}/a^2 \cos\varphi$ — контравариантные составляющие антисимметричного тензора в $(\lambda,\ \varphi)$-пространстве.

Уравнение (18.13) имеет форму уравнения баланса с нулевой правой частью. Поэтому абсолютный вихрь $\nabla^2_{\text{is}}\psi + f$ консервативен и его поток определяется контравариантными составляющими

$$\left(\nabla^2_{\text{is}}\psi + f\right) v^i + \omega \frac{\varepsilon^{ij}}{a^2 \cos\varphi}\frac{\delta v_j}{\delta p} \quad (i,\ j = 1,\ 2), \tag{18.14}$$

при этом третья составляющая $i = 3$ равна нулю. Поток абсолютного вихря определен по отношению к изобарической поверхности. Он может быть представлен в виде пяти составляющих:

$$A^i = a^2 \cos\varphi \left(\nabla^2_{\text{is}}\psi + f\right) v^i_{\text{S}}, \quad B^i = a^2 \cos\varphi f v^i_{\text{L}},$$

$$C^i = a^2 \cos\varphi \nabla^2_{\text{is}}\psi v^i_{\text{L}},$$

$$D^i = \varepsilon^{ij}\omega \frac{\delta}{\delta p}(v_j)_{\text{S}}, \quad E^i = \varepsilon^{ij}\omega \frac{\delta}{\delta p}(v_j)_{\text{L}} \quad (i,\ j = 1.\ 2). \tag{18.15}$$

Единственное упрощение, которое можно сделать в уравнении абсолютного вихря, — это опустить одну или несколько составляющих потока вихря или какую-то часть некоторой составляющей. Например, в A^i могут быть опущены f и (или) $\nabla^2_{\text{is}}\psi$. Любые другие упрощения неприемлемы, поскольку при этом будет нарушаться закон сохранения абсолютного вихря системы.

Уравнение (18.13) является уравнением прогностического типа. Из соотношений (18.5а), (18.5б), (18.6) и (18.8) следует, что уравнение (18.13) содержит две неизвестные функции ψ и χ. Поэтому необходимо привлечь еще одно уравнение, а именно уравнение притока тепла. Оно, однако, вводит новую неизвестную величину—геопотенциал ϕ. Последний можно исключить путем перекрестного дифференцирования уравнений движения.

18.4. Уравнение притока тепла

Ограничиваясь адиабатическим приближением, уравнение первого начала термодинамики запишем в виде

$$\rho c_{\mathrm{pa}} \frac{dT}{dt} - \omega = 0. \qquad (18.16)$$

Используя уравнение статики

$$\frac{\delta \phi}{\delta p} = \frac{-1}{\rho} \quad \text{или} \quad T = \frac{-1}{R_{\mathrm{a}}} \frac{\delta \phi}{\delta (\ln p)}, \qquad (18.17)$$

приведем (18.16) к виду

$$c_{\mathrm{pa}} \frac{dT}{dt} + \omega \frac{\delta \phi}{\delta p} = 0. \qquad (18.16\mathrm{a})$$

С учетом уравнения неразрывности (18.4) уравнению (18.16a) можно придать форму уравнения баланса, а именно уравнения баланса полной потенциальной энергии [137]:

$$\frac{\delta}{\delta t} (c_{\mathrm{pa}} T) + \frac{\delta}{\delta \lambda} (c_{\mathrm{pa}} T \dot{\lambda}) + \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\delta}{\delta \varphi} (c_{\mathrm{pa}} T \dot{\varphi} \cos \varphi) +$$
$$+ \frac{\delta}{\delta p} (c_{\mathrm{pa}} T \omega) + \omega \frac{\delta \phi}{\delta p} = 0$$

или

$$\frac{\delta}{\delta t} (a^2 \cos \varphi c_{\mathrm{pa}} T) + \frac{\delta}{\delta x^i} (a^2 \cos \varphi c_{\mathrm{pa}} T v^i) +$$
$$+ \frac{\delta}{\delta p} (a^2 \cos \varphi T \omega) = -\omega \frac{\delta}{\delta p} (a^2 \cos \varphi \phi) \quad (i = 1, 2). \qquad (18.18)$$

Контравариантные составляющие скорости $\dot{\lambda}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{p}$ ($\equiv \omega$) зависят от ψ и χ, а T может быть выражено как функция ϕ. Таким образом, уравнения (18.13) и (18.18) образуют систему двух прогностических уравнений с тремя неизвестными функциями ϕ, ψ и χ. Для полной определенности обсуждаемой модели необходимо иметь третье прогностическое уравнение. В качестве такового обычно применяется уравнение так называемой изобарической дивергенции.

18.5. Уравнение изобарической дивергенции

Изобарическая дивергенция скорости ветра

$$\mathrm{div_{is}}\mathbf{v} \equiv \frac{\delta\dot{\lambda}}{\delta\lambda} + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\delta(\dot{\varphi}\cos\varphi)}{\delta\varphi} \equiv$$
$$\equiv \frac{1}{a\cos\varphi}\left\{\frac{\delta u}{\delta\lambda} + \frac{\delta(v\cos\varphi)}{\delta\varphi}\right\} \equiv \nabla^2_{\mathrm{is}}\left(\frac{\delta\chi}{\delta p}\right) \tag{18.19}$$

называется так потому, что производные $\delta/\delta\lambda$ и $\delta/\delta\varphi$ берутся при $p = \mathrm{const}$. Это выражение не совпадает с истинной дивергенцией, за исключением того случая, когда изобарические поверхности совпадают с уровенными поверхностями (см. п. 14.1).

Чтобы получить уравнение изобарической дивергенции, возвратимся к приближенным эйлеровым уравнениям (18.1а) и продифференцируем первое из них по λ, а второе по φ, предварительно умножив его на $\cos\varphi$. Если теперь сложить полученные таким образом уравнения (разделив предварительно второе на $\cos\varphi$), то найдем

$$\frac{d}{dt}(\mathrm{div_{is}}\mathbf{v}) + (\mathrm{div_{is}}\mathbf{v})^2 - \frac{2}{a^2\cos\varphi}J\left(\frac{u, v}{\lambda, \varphi}\right) +$$
$$+ \nabla_{\mathrm{is}}\omega\cdot\frac{\delta\mathbf{v}_h}{\delta p} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{tg}\,\varphi}{a^2}\frac{\delta\mathbf{v}_h^2}{\delta\varphi} - \left(f + \frac{u\,\mathrm{tg}\,\varphi}{a}\right)\nabla^2_{\mathrm{is}}\psi +$$
$$+ \frac{u}{a}\frac{\partial f}{\partial\varphi} + \frac{u^2}{a^2\cos^2\varphi} + \nabla^2_{\mathrm{is}}\phi = 0, \tag{18.20}$$

где $f \equiv 2\Omega\sin\varphi$ — кориолисов параметр; $\mathbf{v}_h$ — горизонтальная скорость ветра (u, v, $w \equiv 0$); $J\left(\frac{u, v}{\lambda, \varphi}\right)$ — якобиан величин u и v, взятый по λ и φ, причем производные берутся при $p = \mathrm{const}$.

Уравнение изобарической дивергенции (18.20) содержит те же неизвестные функции ϕ, ψ и χ, что и прогностические уравнения (18.13) и (18.18). Если в (18.20) пренебречь величинами $\mathrm{div_{is}}\,\mathbf{v}$ и ω, а также опустить члены, зависящие от кривизны Земли, то получим так называемое уравнение баланса

$$\nabla^2_{\mathrm{is}}\phi - f\nabla^2_{\mathrm{is}}\psi + \beta u - 2\left(\frac{\delta u}{\delta x}\frac{\delta v}{\delta y} - \frac{\delta u}{\delta y}\frac{\delta v}{\delta x}\right) = 0, \tag{18.20a}$$

где $\delta/\delta x = (1/a\cos\varphi)(\delta/\delta\lambda)$, $\delta/\delta y = (1/a)(\delta/\delta\varphi)$, $\beta = (1/a)\times$ $\times(\partial f/\partial\varphi) \equiv \partial f/\partial y$ — параметр Россби. Следует отметить, что уравнение баланса является диагностическим.

Для того чтобы численно решить систему трех уравнений (18.13), (18.18) и (18.20), их необходимо упростить. Лоренц показал, как произвести такие упрощения без нарушения закона сохранения полной энергии системы [46]. С этой целью Лоренц классифицировал члены трех вышеупомянутых уравнений в соответствии с функциями ϕ, ψ и χ, появляющимися в этих членах.

Правило упрощения Лоренца применяется затем следующим образом. В упомянутых уравнениях можно опустить все члены, которые порождают в уравнении полной энергии члены аналогичного типа. Например, величины C^i и D^i в уравнении (18.13) являются членами типа (ψ, χ). Они порождают в уравнении полной энергии величины типа (ϕ, ψ, χ), поэтому их можно опустить одновременно с соответствующими величинами в (18.20). Как заметил Ван Изакер [113], правило Лоренца в некоторых случаях является слишком жестким.

18.6. Уравнение полной энергии

Уравнение изобарической дивергенции (18.20) громоздко и не допускает прямой интерпретации. Некоторые из его членов довольно сложны. Ему нельзя придать форму уравнения баланса, как двум другим уравнениям — (18.13) и (18.18). Более того, в основе этого уравнения лежат приближенные уравнения [см. (18.1a)], в то время как уравнения (18.13) и (18.18) получены на основе точных соотношений [см. (18.10) и (18.16)]. Учитывая все это, Ван Изакер [113] предложил заменить уравнение изобарической дивергенции таким уравнением, которое устанавливается более простым путем на основе закона сохранения полной энергии системы. Ван Изакер рассуждает следующим образом. Полная энергия единичной массы $c_{pa}T + k$ представляет собой сумму полной потенциальной энергии $c_{pa}T$ (потенциальная энергия ϕ + внутренняя энергия e, см. п. 14.1) и кинетической энергии $k \equiv \left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{v}^2$. Уравнение баланса полной потенциальной энергии — это уравнение (18.18). Для получения уравнения баланса полной энергии необходимо вывести уравнение баланса кинетической энергии. Принимая во внимание тот факт, что в атмосфере скорость безвихревого движения, определяемая функцией χ, мала по сравнению со скоростью соленоидального движения, определяемой функцией ψ, можно записать

$$\left|\nabla_{\mathrm{is}} \frac{\delta\chi}{\delta p}\right| \ll |\nabla_{\mathrm{is}}\psi|;$$

тогда с достаточной точностью величину k можно представить в виде

$$k \approx \frac{1}{2}(\nabla_{is}\psi)^2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\delta\psi}{\delta\lambda}\right)^2 + \frac{1}{a^2}\left(\frac{\delta\psi}{\delta\varphi}\right)^2\right\}.$$

В противоположность тому, что наблюдается в реальной атмосфере (см. главу 17), в данной модели допускается непосредственное превращение полной (или доступной) потенциальной энергии в кинетическую энергию потока, так что

$$\frac{\delta k}{\delta t} = \frac{1}{a^2\cos^2\varphi}\frac{\delta\psi}{\delta\lambda}\frac{\delta^2\psi}{\delta\lambda\delta t} + \frac{1}{a^2}\frac{\delta\psi}{\delta\varphi}\frac{\delta^2\psi}{\delta\varphi\delta t}.$$

Из этого уравнения следует уравнение баланса кинетической энергии

$$\frac{1}{2}\frac{\delta}{\delta t}(\nabla_{is}\psi)^2 + \frac{\delta}{\delta\lambda}\left\{\frac{-\psi}{a^2\cos^2\varphi}\frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{\delta\psi}{\delta t}\right)\right\} +$$
$$+\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\delta}{\delta\varphi}\left\{\frac{-\psi\cos\varphi}{a^2}\frac{\delta}{\delta\varphi}\left(\frac{\delta\psi}{\delta t}\right)\right\} = -\psi\frac{\delta}{\delta t}(\nabla_{is}^2\psi)$$

или в более компактной форме

$$\frac{\delta}{\delta t}\left\{\frac{1}{2}a^2\cos\varphi(\nabla_{is}\psi)^2\right\} + \frac{\delta}{\delta x^i}\left\{-\psi a^2\cos\varphi\gamma^{ij}\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\delta\psi}{\delta t}\right)\right\} =$$
$$= -\psi\frac{\delta}{\delta t}(a^2\cos\varphi\nabla_{is}^2\psi), \quad (i, j = 1, 2). \tag{18.21}$$

Символы γ^{ij} и γ_{ij} определены соотношениями (18.3а).

Сложив уравнения (18.18) и (18.21), получаем [после подстановки (18.13) в правую часть (18.21)] уравнение баланса полной энергии данной модели атмосферы

$$\frac{\delta}{\delta t}\left[a^2\cos\varphi\left\{\frac{1}{2}(\nabla_{is}\psi)^2 + c_{pa}T\right\}\right] +$$
$$+\frac{\delta}{\delta x^i}\left\{a^2\cos\varphi c_{pa}Tv^i - \psi a^2\cos\varphi\gamma^{ij}\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\delta\psi}{\delta t}\right)\right\} +$$
$$+\frac{\delta}{\delta p}(a^2\cos\varphi c_{pa}T\omega) = -\omega\frac{\delta}{\delta p}(a^2\cos\varphi\phi) +$$
$$+\psi\frac{\delta}{\delta x^i}\left\{a^2\cos\varphi(\nabla_{is}^2\psi + f)v^i + \omega\varepsilon^{ij}\frac{\delta v_j}{\delta p}\right\} \quad (i, j = 1, 2), \tag{18.22}$$

где, согласно (18.5а), (18.5б) и (18.6),

$$\left.\begin{aligned} v^i &= \frac{-\varepsilon^{ij}}{a^2\cos\varphi}\frac{\delta\psi}{\delta x^j} - \gamma^{ij}\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\delta\chi}{\delta p}\right) \\ \text{и}\qquad v_i &= -\frac{\gamma_{ij}}{a^2\cos\varphi}\varepsilon^{jk}\frac{\delta\psi}{\delta x^k} - \frac{\delta}{\delta x^i}\left(\frac{\delta\chi}{\delta p}\right) \end{aligned}\right\} \tag{18.23}$$

при $i, j, k = 1, 2$.

Полная энергия $\left(\frac{1}{2}\right)|\nabla_{\text{is}}\psi|^2 + c_{pa}T$ в данной модели будет консервативным свойством только тогда, когда правая часть уравнения (18.22) имеет форму дивергенции (см. главу 2); отсюда следует условие

$$-\omega\frac{\delta}{\delta p}(a^2\cos\varphi\phi) + \psi\frac{\delta}{\delta x^i}\left\{a^2\cos\varphi\,(\nabla^2_{\text{is}}\psi + f)\,v^i + \omega\varepsilon^{ij}\frac{\delta v_j}{\delta p}\right\} \equiv$$

$$\equiv \frac{\delta A^i}{\delta x^i} + \frac{\delta A}{\delta p}, \tag{18.24}$$

где A^1, A^2, A — произвольные функции переменных ϕ, ψ, χ. Эти функции определяют контравариантный нормированный вектор в пространстве (λ, φ, p), иными словами, $A^1/\sqrt{\gamma}$, $A^2/\sqrt{\gamma}$, $A/\sqrt{\gamma}$ (здесь $\sqrt{\gamma} \approx a^2\cos\varphi$) — составляющие контравариантного вектора в относительной системе координат (λ, φ, p) [13]. Переставляя ω и $\delta/\delta p$, а также ψ и $\delta/\delta x^i$ в (18.24) и учитывая уравнение неразрывности (18.4а) и тождество

$$\varepsilon^{ij}(\delta\phi/\delta x^i)(\delta\psi/\delta x^j) \equiv (\delta/\delta x^i)\,[\varepsilon^{ij}\phi\,(\delta\psi/\delta x^j)],$$

находим

$$-a^2\cos\varphi\gamma^{ij}\frac{\delta\phi}{\delta x^i}\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\delta\chi}{\delta p}\right) + a^2\cos\varphi\,(\nabla^2_{\text{is}}\psi + f)\,\times$$

$$\times\,\gamma^{ij}\frac{\delta\psi}{\delta x^i}\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\delta\chi}{\delta p}\right) - \frac{1}{2}\omega a^2\cos\varphi\frac{\delta}{\delta p}(\nabla_{\text{is}}\psi)^2 +$$

$$+\,\omega\varepsilon^{ij}\frac{\delta\psi}{\delta x^i}\frac{\delta}{\delta x^j}\left(\frac{\delta^2\chi}{\delta p^2}\right) \equiv \text{div}, \tag{18.24'}$$

где

$$|\nabla_{\text{is}}\psi|^2 \equiv \gamma^{ij}(\delta\psi/\delta x^i)(\delta\psi/\delta x^j) \equiv$$

$$\equiv (1/a^2\cos^2\varphi)(\delta\psi/\delta\lambda)^2 + (1/a^2)(\delta\psi/\delta\varphi)^2 \quad (i, j \equiv 1, 2).$$

После подстановки (18.8) в (18.24′) становится ясно, что все члены левой части (18.24′) содержат χ и одно дифференцирование по p, так что при перемене порядка дифференцирования во всех этих членах появится величина $\delta\chi/\delta p$; отсюда

$$\frac{\delta\chi}{\delta p}\left[a^2\cos\varphi\nabla_{\mathrm{is}}^2\phi - \frac{\delta}{\delta x^j}\left\{a^2\cos\varphi\gamma^{ij}\frac{\delta\psi}{\delta x^i}(\nabla_{\mathrm{is}}^2\psi+f)\right\}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}a^2\cos\varphi\nabla_{\mathrm{is}}^2(\nabla_{\mathrm{is}}\psi)^2+\frac{\delta^2}{\delta p\delta x^j}\left(\varepsilon^{ij}\frac{\delta\psi}{\delta x^i}\nabla_{\mathrm{is}}^2\chi\right)\right]\equiv \mathrm{div}. \quad (18.24'')$$

Теперь приравняем нулю выражения, стоящие под операторами $\delta/\delta x^1$, $\delta/\delta x^2$, $\delta/\delta p$ в правой части (18.24″). Таким путем определяются произвольные функции A^1, A^2 и A, а условие (18.24) приводит к обобщенному уравнению баланса Ван Изакера [113]

$$a^2\cos\varphi\nabla_{\mathrm{is}}^2\phi - \frac{\delta}{\delta x^j}\left\{a^2\cos\varphi\gamma^{ij}\frac{\delta\psi}{\delta x^i}(\nabla_{\mathrm{is}}^2\psi+f)\right\}+$$
$$+\frac{1}{2}a^2\cos\varphi\nabla_{\mathrm{is}}^2(\nabla_{\mathrm{is}}\psi)^2=\frac{\delta^2}{\delta p\delta x^i}\left(\varepsilon^{ij}\frac{\delta\psi}{\delta x^j}\nabla_{\mathrm{is}}^2\chi\right). \quad (18.25)$$

Подчеркнем, что второй член в левой части (18.24″) соответствует составляющим потока вихря B^i и C^i [см. формулу (18.15)], третий член — составляющей D^i и четвертый — E^i. Уравнение баланса (18.25) можно упростить подобно уравнению вихря путем отбрасывания соответствующих членов. Членом $\nabla_{\mathrm{is}}^2\phi$ в уравнении баланса можно пренебречь лишь в случае бездивергентного движения.

Правая часть (18.25) образована из составляющих потока вихря E^i; эти члены обычно опускаются в уравнении вихря (18.13). В этом случае уравнение баланса (18.25) приобретает вид уравнения Монжа—Ампера. Уравнение баланса (18.25) в общем случае представляет собой нелинейное уравнение в частных производных высокого порядка. Эта сложность серьезно ограничивает число действующих математических моделей. В действительности их имеется всего три.

1. Баротропная, или однопараметрическая, модель, в которой сохранена лишь одна составляющая потока вихря A^i. В этом случае уравнение абсолютного вихря (18.13) приводится к виду

$$\frac{\delta}{\delta t}\{a^2\cos\varphi(\nabla_{\mathrm{is}}^2\psi+f)\}+\frac{\delta}{\delta x^i}\{a^2\cos\varphi(\nabla_{\mathrm{is}}^2\psi+f)v_{\mathrm{S}}^i\}=0 \quad (i=1,2), \quad (18.26)$$

а уравнение баланса исчезает, так что связь между функцией тока ψ и геопотенциалом ϕ произвольна. Относительный вихрь $\nabla_{\mathrm{is}}^2\psi$ и поток $\mathbf{v}_S = \mathbf{k}\times\nabla_{is}\psi$ определяются функцией тока ψ, которая в свою очередь находится из уравнения (18.26).

2. Двухпараметрическая модель с линейным уравнением баланса, в котором сохранены две составляющие потока вихря A^i и B^i, так что уравнения данной модели принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\delta}{\delta t}\{a^2\cos\varphi\,(\nabla^2_{is}\psi+f)\}+\frac{\delta}{\delta x^i}\{a^2\cos\varphi\,(\nabla^2_{is}\psi+\\ &\qquad+f)\,v^i_S+fv^i_L\}=0,\\ &c_{pa}\frac{dT}{dt}+\omega\frac{\delta\phi}{\delta p}=0,\\ &a^2\cos\varphi\nabla^2_{is}\phi-\frac{\delta}{\delta x^j}\left(a^2\cos\varphi\gamma^{ij}\frac{\delta\psi}{\delta x^i}f\right)=0, \end{aligned}\right\}\qquad(18.27)$$

где $\omega=\nabla^2_{is}\chi$ и $T=(-1/R_a)\,(\delta\phi/\delta\ln p)$. Уравнение баланса позволяет здесь исключить из двух прогностических уравнений (18.27) ϕ или ψ, так что остаются неизвестными две функции: ψ или ϕ и χ.

3. Двухпараметрическая модель с уравнением баланса типа Монжа—Ампера. В этом случае сохраняются все составляющие потока вихря, за исключением E^i. Уравнения этой модели имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\delta}{\delta t}\{a^2\cos\varphi\,(\nabla^2_{is}\psi+f)\}+\frac{\delta}{\delta x^i}\Big\{a^2\cos\varphi\,(\nabla^2_{is}\psi+f)\,v^i+\\ &\qquad+\varepsilon^{ij}\omega\frac{\delta}{\delta p}(v_j)_S\Big\}=0\quad(i,\,j=1,\,2),\\ &c_{pa}\frac{dT}{dt}+\omega\frac{\delta\phi}{\delta p}=0,\\ &a^2\cos\varphi\nabla^2_{is}\phi-\frac{\delta}{\delta x^j}\left\{a^2\cos\varphi\,(\nabla^2_{is}\psi+f)\,\gamma^{ij}\frac{\delta\psi}{\delta x^i}\right\}+\\ &\qquad+\frac{1}{2}a^2\cos\varphi\nabla^2_{is}\,(\nabla_{is}\psi)^2=0. \end{aligned}\right\}\qquad(18.28)$$

В этой модели, как и в предыдущей, одна из функций ψ или ϕ может быть исключена с помощью уравнения баланса из первых двух прогностических уравнений.

В заключение следует заметить, что в двухпараметрических моделях уравнение притока тепла (18.18) можно упростить без нарушения закона сохранения полной энергии путем отбрасывания членов с вертикальной адвекцией $(\delta/\delta p)\,(a^2\cos\varphi\, c_{pa}T\omega)$ и (или) с горизонтальной адвекцией при безвихревом движении [113].

Список литературы

1. Anderson C. E. (1964) Heat transport by large-scale atmospheric waves during October 1959—March 1960. Arctic Meteorological Research Group. McGill University, **Publications in Meteorology,** N 69. 53 p.
2. Bjerknes J. (1951) The maintenance of the zonal circulation of the atmosphere. UGGI 9th Gen. Ass., Brussels, Association of Meteorology, Presidential address. **Proceedings of the Meetings, Memoirs and Discussions, Publ. IAM,** N 9 (c), p. I—XXII.
3. Blackadar A. K. (1950) The transformation of energy by the large-scale eddy stresses in the atmosphere. **Met. Pap. New York Univ., 1** (5), p. 1—33.
4. Blackadar A. K. (1955) Extension of the laws of thermodynamics to turbulent systems, **J. Met., 12,** p. 165—175.
5. Calder K. L. (1949) The criterion of turbulence in a fluid of variable density, with particular reference to conditions in the atmosphere. **Q. J. R. Met. Soc., 75,** p. 71—88.
6. Charney J. G. (1947) The dynamics of long waves in a baroclinic westerly current. **J. Met., 4,** p. 135—162.
7. Charney J. G. (1948) On the scale of atmospheric motions. **Geofys. Publr., 17** (2), p. 3—17.
8. Charney J. G., Drazin F. G. (1961) Propagation of planetary-scale disturbances from the lower into the upper atmosphere. **J. Geophys. Res., 66,** p. 83—109.
9. Charnock H., Ellison T. H. (1967) The boundary layer in relation to large-scale motions in the atmosphere and ocean. **The global atmospheric research programme** (Report of the study Conference on the Global Atmospheric Research Programme, sponsored by ICSU/IUGG, COSPAR, and WMO), Appendix III, p. 1—11.
10. Cowling T. G. (1935) The stability of gaseous stars. **Mon. Not. R. Astr. Soc., 96,** p. 42—60.
11. Cramer H. E., Record F. A. (1955) Power spectra of the eddy velocity components. **J. Met., 12,** p. 146—151.
12. De Backer S. (1933) Turbulence atmospherique. **C. r. hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris, 197,** p. 1587—1589.
13. Defrise P. (1964) Tensor calculus in atmospheric mechanics. **Adv. Geophys., 10,** p. 261—315.
14. Defrise P. (1967) Théorie tensorielle des opérateurs différentiels utilisés en météorologie. **Publs Inst. R. Mét. Belg.** Sér. B, N 52. 42 p.
15. Dryden H. L. (1943) A review of the statistical theory of turbulence. **Q. Appl. Math., 1,** p. 7—42.
16. Dutton J. A., Johnson D. R. (1967) The theory of available potential energy and a variational approach to atmospheric energetics. **Adv. Geophys., 12,** p. 334—436.
17. Dyer A. J. (1965) The flux-gradient relation for turbulent heat transfer in the lower atmosphere. **Q. J. R. Met. Soc., 91,** p. 151—157.
18. Dyer A. J., Hicks B. B. (1970) Flux-gradient relationship in the constant flux layer. **Q. J. R. Met. Soc., 96,** p. 715—721.
19. Eady E. T. (1949) Long waves and cyclone waves. **Tellus, 1,** p. 33—52.

20. Eliassen A., Kleinschmidt E. (1957) Dynamic meteorology. **Handb. Phys., 48.** 154 p.
21. Eliassen A., Palm E. (1961) On the transfer of energy in stationary mountain waves. **Geof. Publr., 22** (3), p. 1—23.
22. Ertel H. (1942) Der verticale Turbulenz-Wärmestrom in der Atmosphäre. **Met. Z., 59,** S. 250—253.
23. Ertel H. (1943) Die hydrodynamischen Grundgleichungen Turbulenter Luftströmungen. **Met. Z., 60,** S. 289—295.
24. Fiedler F., Panofsky H. (1970) Atmospheric scales and spectral gaps. **Bull. Am. Met. Soc., 51,** p. 1114—1119.
25. Fjørtoft R. (1950) Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex. **Geof. Publr., 17** (6). 52 p.
26. Fjørtoft R. (1951) Stability properties of large-scale atmospheric disturbances. **Comp. of Meteor.,** p. 454—463. Am. Met. Soc., Boston.
27. Griffith H. L., Panofsky H. A., and Van der Hoven I. (1956) Power-spectrum analysis over large ranges of frequency. **J. Met., 13,** p. 279—282.
28. Hesselberg Th. (1926) Die Gesetze der ausgeglichenen atmosphärischen Bewegungen. **Beitr. Phys. Frei. Atmos., 12,** S. 141—160.
29. Hill C. E. (1963) A multi-level study of heat transport. Arctic Meteorological Research Group, McGill University. **Publications in Meteorology,** N 58. 50 p.
30. Hinze J. O. (1959) **Turbulence — an introduction to its mechanism and theory.** McGraw-Hill. 586 p.
31. Hollmann G. (1960) Der mikroturbulente Vertikalaustausch von Masse and Wärme, ein Beitrag zur Lösing des Wärmeaustausch — Paradoxons von W. Schmidt. **Beitr. Phys. Atmos., 32,** S. 161—194.
32. Jeffreys H. (1926) On the dynamics of geostrophic winds. **Q. J. R. Met. Soc., 52,** p. 97—101.
33. Kao S. K. (1954) The meridional transport of kinetic energy in the atmosphere. **J. Met., 11,** p. 352—361.
34. Колесникова В. Н., Монин А. С. О спектрах колебаний метеорологических полей. — «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1965, т. 1, № 7, с. 653—669.
35. Kraus E. C. (1967) Wind stress along the sea surface. **Adv. Geophys., 12,** p. 213—255.
36. Kung E. C. (1966) Large-scale balance of kinetic energy in the atmosphere. **Mon. Weath. Rev. U. S. Dep. of Commerce, 94,** p. 627—640.
37. Kuo H. L. (1951) A note on the kinetic energy balance of the zonal wind systems. **Tellus, 3,** p. 205—207.
38. Kuo H. L. (1965) On the formation and intensification of tropical cyclones through latent heat release by cumulus convection. **J. Atmos. Sci., 22,** p. 40—63.
39. Legrand M. (1970) Analyse spectrale des trois composantes du vent à 69 mètres sur la verticale de Mol. **Publs Inst. R. Mét. Belg.** Sér. B, N 58, p. 1—22.
40. Lettau H. (1939) Atmosphärische Turbulenz. Ak. Verlagsges., Leipzig. 283 S.
41. Lettau H. (1954) Notes on the transformation of mechanical energy from and to eddying motion. **J. Met., 11,** p. 196—201.
42. Lorenz E. N. (1952) A multiple-index notation for describing atmospheric transport processes. **Geoph. Res. Pap., 24.** 3 p.

43. Lorenz E. N. (1955) Available potential energy and the maintenance of the general circulation. **Tellus**, 7, p. 157—167.
44. Lorenz E. N. (1955) Generation of available potential energy and the intensity of the general circulation. **Large Scale Synoptic Processes.** University of California. Department of Meteorology (Los Angeles), Final Report 1957. 35 p.
45. Lorenz E. N. (1955) Generation of available potential energy and the intensity of the general circulation. **Dynamics of Climate** (ed. R. L. Pfeffer), p. 86—92. Pergamon Press, London and New York.
46. Lorenz E. N. (1960) Energy and numerical weather prediction. **Tellus, 12,** p. 364—373.
47. Lorenz E. N. (1967) The nature and theory of the general circulation of the atmosphere. WMO, Geneva. 161 p.
48. Lorenz E. N. (1969) The nature of the global circulation of the atmosphere: a present review. **The global circulation of the atmosphere,** p. 3—23. Roy. Met. Soc., London.
49. Ludlam F. H., Scorer R. S. (1954) **Further outlook.** Allan Wingate, London. 174 p.
50. Margules M. (1904) Ueber die Energie der Stürme. **Jb. Zent. Anst. Met. Geodyn.** (Anh. Jahrg. 1903), p. 1—26.
51. Miller J. E. (1950) Energy transformation functions. **J. Met., 7,** p. 152—159.
52. Miller J. E. (1951) Energy equations. **Comp. of Meteor.,** p. 483—491. Am. Met. Soc., Boston.
53. Mintz Y. (1951) The geostrophic poleward flux of angular momentum in the month of January 1949. **Tellus, 3,** p. 195—200.
54. Монин А. С., Обухов А. М. Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы. — «Труды Геофиз. ин-та АН СССР», 1954, вып. 24 (151), с. 163—187.
55. Montgomery R. B. (1954) Convection of heat. **Arch. Met. Geophys. Bioklim.** A7, p. 125—132.
56. Murgatroyd R. J., Singleton F. (1961) Possible meridional circulations in the stratosphere and mesosphere. **Q. J. R. Met. Soc., 87,** p. 125—135.
57. Newell R. E. (1963) Preliminary study of quasi-horizontal eddy fluxes from Meteorological Rocket Network data. **J. Atmos. Sci., 20,** p. 213—235.
58. Newell R. E., Vincent D. G., Dopplick T. G., Ferruzza D., and Kidson J. W. (1969) The energy balance of the global atmosphere. **The global circulation of the atmosphere,** p. 42—90. R. Met. Soc., London.
59. Nikuradse J. (1932) Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren. **Verein Deutscher Ingenieure,** Berlin. Forschungsheft, S. 356.
60. Nikuradse J. (1933) Strömungsgesetze in rauhen Rohren. **Verein Deutscher Ingenieure,** Berlin, Forschungsheft, S. 361.
61. Oort A. H. (1964) On estimates of the atmospheric energy cycle. **Mon. Weath. Rev. U. S. Dep. of Commerce, 92,** p. 483—493.
62. Palmén E. (1955) On the mean meridional circulation in low latitudes of the northern hemisphere in winter and the associated meridional and vertical flux of angular momentum. **Soc. Scient. Fennica, Comm. Phys. Math., 17,** p. 1—33.
63. Palmén E., Riehl H. (1957) Budget of angular momentum and energy in tropical cyclones. **J. Met., 14,** p. 150—159.
64. Panofsky H. R., McCormick R. A. (1954) Properties of spectra of atmospheric turbulence at 100 metres. **Q. J. R. Met. Soc., 80,** p. 546—564.

65. Panofsky H. R., Van der Hoven I. (1955) Spectra and cross-spectra of velocity components in the mesometeorological range. **Q. J. R. Met. Soc., 81**, p. 603—606.
66. Pfeffer R. L., Mardon D., Sterbenz P., and Fowlis W. (1966) A new concept of available potential energy. Florida State University. **Department of Meteorology, Report** N 66/1.
67. Prandtl L. (1925) Bericht über die Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. **Z. Angew. Math. Mech.**, 5 (2), S. 136—139.
68. Prandtl L. (1932) Meteorologische Anwendung der Strömungslehre. **Beitr. Phys. Frei Atmos, 19**, S. 188—202.
69. Priestley C. H. B. (1959) **Turbulent transfer in the lower atmosphere.** University of Chicago Press. 130 p.
70. Priestley C. H. B. (1962) The width-height ratio of large convection cells. **Tellus, 14**, p. 123—124.
71. Priestley C. H. B. (1967) Handover in scale of the fluxes of momentum, heat, etc. in the atmospheric boundary layer. Boundary layers and turbulence. **Proc. Int. Symp. sponsored by IUGG and IUTAM, Kyoto, Sept. 1966**, p. 38—46.
72. Priestley C. H. B. (1967) On the importance of variability in the planetary boundary layer. **The global atmospheric research programme** (Report of the Study Conference on the Global Atmospheric Research Programme, sponsored by ICSU/IUGG, COSPAR and WMO, Stockholm, July 1967). Appendix VI, p. 1—5.
73. Priestley C. H. B., Swinbank W. C. (1947) Vertical transport of heat by turbulence in the atmosphere. **Proc. R. Soc., A189**, p. 543—561.
74. Quinet A. (1972) Une méthode numérique de calcul de l'énergie potentielle disponsible au sens de Margules. **Beitr. Phys. Atmos., 45**, S. 72—83.
75. Raethjen P. (1944) Zum Wärmestrom der Turbulenz. **Annln Hydrogr. Berl., 72**, S. 129—132.
76. Reynolds O. (1895) On the dynamical theory of incompressible fluids. **Phil. Trans. R. Soc., A186**, p. 123—164.
77. Richardon L. F. (1920) The supply of energy from and to atmospheric eddies. **Proc. R. Soc., A97**, p. 354—373.
78. Richardon L. F. (1922) **Weather prediction by numerical process.** Cambridge University Press, London. 236 p.
79. Riehl H. (1950) On the role of the tropics in the general circulation of the atmosphere. **Tellus, 2**, p. 1—17.
80. Riehl H. (1969) On the role of the tropics in the general circulation of the atmosphere. **Weather, Lond., 24**, p. 288—308.
81. Saltzmann B. (1957) Equations governing the energetics of the larger scales of atmospheric turbulence in the domain of wave number. **J. Met., 14**, p. 513—523.
82. Saltzmann B., Fleischer A. (1960) The modes of release of available potential energy in the atmosphere. **J. Geophys. Res., 65**, p. 1215—1222.
83. Saltzmann B., Fleischer A. (1961) Further statistics of the modes of release of available potential energy. **J. Geophys. Res., 66**, p. 2271—2273.
84. Saltzmann B., Teweles S. (1964) Further statistics on the exchange of kinetic energy between harmonic components of the atmospheric flow. **Tellus, 16**, p. 432—435.
85. Schmidt W. (1921) Wird die Atmosphäre durch Konvektion von der Erdoberfläche her erwärmt? **Met. Z., 35**, S. 262—268.
86. Schmidt W. (1925) **Der Massenaustausch in freier Luft und Verwandte Erscheinungen.** Hamburg, H. Grand. Probl. der Phys., S. 7.

87. Smith P. J. (1969) On the contribution of a limited region to the global energy budget. **Tellus, 21,** p. 202—207.
88. Smith P. J., Horn L. H. (1969) A computational study of the energetics of a limited region of the atmosphere. **Tellus, 21,** p. 193—201.
89. Schmitz H. P. (1948) Zur Theorie der Austauschströme. **Z. Met., 2,** S. 71—77.
90. Schmitz H. P. (1953) Kritische Betrachtungen zur Theorie der vertikalen atmosphärischen Turbulenz Wärmestroms. **Z. Met., 7,** S. 353—362.
91. Sheppard P. A. (1953) Momentum flux and meridional motion in the general circulation. **Proceedings of the Meteorological Conference, Toronto,** p. 103—108. Am. Met. Soc. and R. Met. Soc.
92. Sheppard P. A. (1958) Transfer across the earth's surface and through the air above. **Q. J. Met. Soc, 84,** p. 205—224.
93. Sheppard P. A. (1962) Properties and processes at the earth's surface in relation to the general circulation of the atmosphere. **Adv. Geophys., 9,** p. 77—96.
94. Sheppard P. A. (1963) Atmospheric tracers and the study of the general circulation of the atmosphere. **Rep. Prog. Phys., 26,** p. 214—267.
95. Sheppard P. A. (1969) The atmospheric boundary layer in relation to large-scale dynamics. **The global circulation of the atmosphere,** p. 91—112. R. Met. Soc., London.
96. Sheppard P. A., Charnock H. and Francis J. R. D. (1952) Observations of the westerlies over the sea. **Q. J. R. Met. Soc., 78,** p. 563—582.
97. Sheppard P. A., Omar M. H. (1952) The wind stress over the ocean from observations in the trades. **Q. J. R. Met. Soc., 78,** p. 583—589.
98. Starr V P. (1948) On the production of kinetic energy in the atmosphere. **J. Met., 5,** p. 193—196.
99 Starr V. P. (1949) Transport of kinetic energy in the atmosphere. **J. Met., 6,** p. 160.
100. Starr V. P. (1951) Application of energy principles to the general circulation. **Comp. of Meteor.,** p. 568—574. Am. Met. Soc., Boston.
101. Starr V. P. (1953) Note concerning the nature of large-scale eddies in the atmosphere. **Tellus, 5,** p. 494—498.
102. Starr V. P. (1954) Commentaries concerning research on the general circulation. **Tellus, 6,** p. 268—272.
103. Starr V. P. (1960) Questions concerning the energy of stratospheric motions. **Arch. Met. Geophys. Bioklim., A12,** p. 1—7.
104. Starr V. P. (1966) **Physics of negative viscosity phenomena.** McGraw-Hill, New York. 256 p.
105. Starr V. P., White R. M. (1951) A hemispherical study of the atmospheric angular momentum balance. **Q. J. R. Met. Soc., 77,** p. 215—225.
106. Sutton O. G. (1953) **Micrometeorology.** McGraw-Hill, New York. 333 p. (Перевод на русский язык: Сеттон О. Г. Микрометеорология. Л., Гидрометеоиздат, 1958. 355 с.)
107. Swinbank W. C. (1964) The exponential wind profiles. **Q. J. R. Met. Soc., 90,** p. 119—135.
108. Taylor G. I. (1935) Statistical theory of turbulence, distribution of dissipation of energy in a pipe over its cross-section. **Proc. R. Soc., A151,** p. 455—478.
109. van de Boogaard H. M. E. (1964) A preliminary investigation of the daily meridional transfer of atmospheric water vapour between the equator and 40° N. **Tellus, 16,** p. 43—55.
110. Van der Hoven I. (1957) Power spectrum of horizontal wind speed in the frequency range from 0.0007 to 900 cycles per hour. **J. Met., 14,** p. 160—164.

111. Van Hamme J. L. (1971) Détermination des variations saisonnières caractéristiques de la circulation méridienne moyenne dans l'hémisphère nord. **Beitr. Phys. Atmos., 44,** p. 115—126.
112. Van Isacker J. (1951) Contribution à l'étude des fluides incompressibles en mouvement turbulent. **Mém. Inst. R. Mét. Belg., 43,** p. 1—45.
113. Van Isacker J. (1963) Conservation de la rotationnelle absolue et de l'énergie dans les modèles atmosphériques. Contribution to the International Symposium on Dynamics of Large-scale Process, Boulder, Colorado, 3—7 Septembre, 1963, unpublished.
114. Van Mieghem J. (1935) Thermodynamique des systèmes non uniformes en vue des applications à la météorologie. **Geofys. Publr., 10** (14). 18 p.
115. Van Mieghem J. (1939) Quelques formes des bilans énergétiques des fluides parfaits en mouvement relatif lorsque le mouvement d'entraînement est une rotation. **Ass. Franc. pr l'Avancement des Sciences,** 63ème session, Liège, 1939, p. 28—33; **La Météorologie** (1944), p. 200—205.
116. Van Mieghem J. (1949) Production et redistribution de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique dans l'atmosphère. Application á la circulation atmosphérique générale. **Journ. Sc. de la Météor., 1,** p. 53—67.
117. Van Mieghem J. (1949) Les équations générales de la mécanique et de l'énergétique des milieux turbulents en vue des applications á la météorologie. **Mém. Inst. R. Mét. Belg., 34.** 60 p.
118. Van Mieghem J. (1950) Comment on the global energy balance of the atmosphere. **Centenary Proc. R. Met. Soc.,** p. 173—175.
119. Van Mieghem J. (1951) Application of the thermodynamics of open systems to meteorology. **Comp. of Meteor.,** p. 531—538. Am. Met. Soc., Boston.
120. Van Mieghem J. (1951) Les bilans énergétiques en météorologie dynamique. **Geofys. Pura Appl., 19** (3—4), p. 159—166.
121. Van Mieghem J. (1952) Energy conversion in the atmosphere on the scale of the general circulation. **Tellus, 4,** p. 334—351.
122. Van Mieghem J. (1952) Crossräumige Energieumsetzungen in der Atmosphäre. **Annln Met., Hamburg, 5** (6), S. 169—174.
123. Van Mieghem J. (1952) Comment on a note on the kinetic energy balance of zonal wind systems. **Tellus, 4,** p. 68—70.
124. Van Mieghem J. (1955) Note on energy transfer and conversion in large atmospheric disturbances. **Q. J. R. Met. Soc., 81,** p. 18—22.
125. Van Mieghem J. (1956) Réflexions sur le transport et la production du moment et de l'énergie cinétiques dans l'atmosphère et sur l'existance de la circulation méridienne moyenne. **Beitr. Phys. Atmos., 29,** p. 55—82.
126. Van Mieghem J. (1956) The energy available in the atmosphere for conversion into kinetic energy. **Beitr. Phys. Atmos., 29,** p. 129—142.
127. Van Mieghem J. (1957) Energies potentielle et interne convertibles en énergie cinétique dans l'atmosphère. **Beitr. Phys. Atmos., 30,** p. 5—17.
128. Van Mieghem J. (1957) Energy conversions in an inviscid and dry atmosphere. **J. Met. Soc. Japan,** 75th Anniversary Volume, p. 116—118.
129. Van Mieghem J. (1958) On the interpretation of the energy equations in dynamic meteorology. **Geophysica, 6** (3—4), p. 559—576.
130. Van Mieghem J. (1960) Les bilans énergétiques et l'hypothèse quasi statique. **J. Méc. Phys. Atmos.** IIe série, **5,** p. 1—6.
131. Van Mieghem J. (1960) Zonal harmonic analysis of the northern hemisphere geostrophic wind field. **Monogr. Int. Un. Geod. Geophys.** N 8. 57 p.
132. Van Mieghem J. (1961) Les bilans énergétiques approchés en variables λ, φ, p et t. **Arch. Met. Geophys. Bioklim.,** A12, p. 287—301.

133. Van Mieghem J. (1961) Le bilan de l'énergie disponsible transformable en énergie cinétique dans l'atmosphère. **J. Méc. Phys. Atmos.**, IIe série, **10**, p. 49—71.
134. Van Mieghem J. (1962) Pour une exploration synoptique du champ du rayonnement dans l'atmosphère. **Arch. Met. Geophys. Bioklim.**, A13, p. 129—143.
135. Van Mieghem J. (1963) New aspects of the general circulation of the stratosphere and mesosphere. **Met. Abh. Inst. Met. Geophys. Berl.**, **36**, p. 5—62.
136. Van Mieghem J. (1966) La dynamique et l'énergétique de la circulation à grande échelle. **Les problèmes météorologiques de la stratosphere et de la mésosphere**, p. 1—80. Publication du Centre national d'Etudes spatiales, Paris.
137. Van Mieghem J. (1967) Energy transport across internal boundaries. **Beitr. Phys. Atmos.**, **40**, p. 1—6.
138. Van Mieghem J. (1970) Commentaires sur les expressions données à l'énergie potentielle disponsible. **Idöjaras**, 74 (3—4), p. 169—175.
139. Van Mieghem J. (1972) Available potential energy. **Geopaedia.**
140. Van Mieghem J., Defrise P. and Van Isacker J. (1960) Harmonic analysis of the normal monthly northern hemisphere geostrophic flow at 500 mb. ***Med. Kon. Vl. Ac. Wet. Let. en Schone Kunsten van België,*** Jg **22** (4), p. 1—38.
141. Van Mieghem J., Vandenplas A. (1950) Les équations de la dynamique atmosphérique en coordonnées généralisées. Application au cas des coordonnées sphériques. **Publs. Inst. R. Mét. Belg.** Mém. 41, p. 1—57.
142. Van Mieghem J., Van Hamme J. L. (1962) Sur la production, la redistribution et la dissipation de l'énergie cinétique dans la circulation méridienne moyenne. **Beitr. Phys. Atmos.**, **35**, p. 213—233.
143. Vinnichenko N. K. (1970) The kinetic energy spectrum in the free atmosphere — 1 second to 5 years. **Tellus**, **22**, p. 158—166.
144. Webb E. K. (1965) Aerial microclimate. **Met. Monogr.**, **6**, p. 27—58.
145. Webb E. K. (1970) Profile relationships: the log-linear range and extension to strong stability. **Q. J. R. Met. Soc.**, **96**, p. 67—90.
146. White R. M. (1951) The meridional flux of sensible heat over the Northern Hemisphere. **Tellus**, **3**, p. 82—88.
147. White R. M. (1951) The meridional eddy flux of energy. **Q. J. R. Met. Soc.**, **77**, p. 188—199.
148. White R. M., Saltzmann B. (1956) Conversions between potential and kinetic energy in the atmosphere. **Tellus**, **8**, p. 357—363.
149. Wiin-Nielsen A. (1962) On transformation of kinetic energy between the vertical shear flow and the vertical mean flow in the atmosphere. **Mon. Weath. Rev. U. S. Dep. of Commerce**, **90**, p. 311—323.
150. Wiin-Nielsen A., Brown J. A. and Drake M. (1963) On atmospheric energy conversions between the zonal flow and the eddies. **Tellus**, **15**, p. 216—279.
151. Wiin-Nielsen A., Brown J. A. and Drake M. (1964) Further studies of energy exchange between the zonal flow and the eddies. **Tellus**, **16**, p. 168—180.
152. Wilkes M. V. (1949) **Oscillations of the earth's atmosphere Camb. Monogr. Phys.** Cambridge University Press. 74 p.
153. Wippermann F. (1957) Die Transformation potentieller and innerer Energie in die Energie rotorloser und diejenige divergenzfreier Bewegungen. **Beitr. Phys. Atmos.**, **29**, p. 269—275.

Обозначения[1]

A	доступная потенциальная энергия атмосферы
A_E	вихревая доступная потенциальная энергия
A_Z	зональная доступная потенциальная энергия
A_τ	вклад массы воздуха, заключенной в объеме τ, в доступную потенциальную энергию атмосферы
$\mathbf{A}$	произвольный вектор, кроме п. 13.1, где $\mathbf{A}$ — потеря механической энергии под влиянием трения
a	средний радиус Земли (6371 км), оси Земли или вклад единичной массы в A
$\mathbf{a}$	сумма ускорения воздуха по отношению к Земле и кориолисова ускорения
C	скорость перехода полной потенциальной энергии $E+\Phi$ или доступной потенциальной энергии A в кинетическую энергию K при обратимом адиабатическом процессе
C_A	скорость перехода зональной доступной потенциальной энергии A_Z в вихревую доступную потенциальную энергию A_E
C_E	скорость превращения вихревой доступной потенциальной энергии A_E в вихревую кинетическую энергию K_E
C_K	скорость перехода вихревой кинетической энергии K_E в кинетическую энергию K_Z зонального движения
$\mathbf{C}(F)$	поток величины F
$\mathbf{C}'(F)$	неконвективная составляющая потока величины F
c	скорость звука (по Лапласу) или зональная фазовая скорость (см. главу 16)
c_H	безразмерный коэффициент теплоотдачи на поверхности земли
c_M	безразмерный коэффициент сопротивления на земной поверхности
c_W	безразмерный коэффициент влагоотдачи на поверхности земли
c_p	удельная теплоемкость при постоянном давлении
c_{pa}	удельная теплоемкость сухого воздуха при постоянном давлении (1005 $Дж \cdot кг^{-1} \cdot К^{-1}$)
c_{pv}	удельная теплоемкость водяного пара при постоянном давлении (1850 $Дж \cdot кг^{-1} \cdot К^{-1}$)
c_{va}	удельная теплоемкость сухого воздуха при постоянном объеме (718 $Дж \cdot кг^{-1} \cdot К^{-1}$)
c_{vv}	удельная теплоемкость водяного пара при постоянном объеме (1390 $Дж \cdot кг^{-1} \cdot К^{-1}$)
c_w	удельная теплоемкость жидкой воды (4190 $Дж \cdot кг^{-1} \cdot К^{-1}$)
D	удельная скорость диссипации кинетической энергии под влиянием трения или $\operatorname{div} \mathbf{v}_h$ (см. главу 17)
D_E	удельная скорость диссипации вихревой кинетической энергии K_E под влиянием трения

[1] Числовые значения величин взяты из «Международных метеорологических таблиц». ВМО, Женева, 1966 г. (повторное издание в 1968 г.).

D_Z	удельная скорость диссипации зональной кинетической энергии K_Z под влиянием трения
d	высота элементов шероховатости над земной поверхностью
E	внутренняя энергия воздуха, заключенного в произвольном объеме τ
e	удельная внутренняя энергия воздуха
e_a	удельная внутренняя энергия сухого воздуха
$e_{(a)}$	удельная внутренняя энергия воздуха в абсолютном пространстве (см. п. 3.5)
e_{ij}	декартовы составляющие симметричной части тензора сдвига $\nabla\mathbf{v}$
F	произвольная физическая величина (или свойство), связанная с произвольным объемом τ воздуха
F_H	вертикальный турбулентный поток явного тепла
F_M	вертикальный турбулентный поток количества движения
F_W	вертикальный турбулентный поток водяного пара
F_k	ковариантные составляющие силы трения $\mathbf{F}$, отнесенной к единичной массе ($k = 1, 2, 3$)
$\mathbf{F}$	сила трения, действующая на единичную массу
$\mathbf{F}_e$	внешняя сила, действующая на единичную массу
$\mathbf{F}_i$	внутренняя сила, действующая на единичную массу
$\mathbf{F}_{ih}$	горизонтальная составляющая $\mathbf{F}_i$
f	удельное (локальное) количество интегральной (глобальной) величины F (f — количество F, отнесенное к единичной массе) или безразмерная частота (см. п. 4.4), или кориолисов параметр $2\Omega \sin \varphi$
f'	кориолисов параметр $2\Omega \cos \varphi$
G	скорость генерации доступной потенциальной энергии A
G_E	скорость генерации вихревой доступной потенциальной энергии A_E
G_Z	скорость генерации доступной потенциальной энергии A_Z зонального движения
g	ускорение свободного падения (стандартное значение 9,80665 $м \cdot с^{-2}$)
H	энтальпия воздуха в объеме τ или вертикальный размер крупномасштабных вихрей, или толщина слоя трения, или скорость притока тепла $Q/c_{pa}T$ или $(Q + \Delta)/c_{pa}T$
h	удельная энтальпия
h_i	удельная энтальпия компонента i
h_a	удельная энтальпия сухого воздуха
h_v	удельная энтальпия водяного пара
h_w	удельная энтальпия жидкой воды
i	это $\sqrt{-1}$
$\mathbf{i}$	единичный вектор, направленный на восток
J	якобиан
$\boldsymbol{J}$	тензор Джефриса
$\mathbf{j}$	единичный вектор, направленный на север
K	кинетическая энергия в относительном пространстве воздуха, заключенного в произвольном объеме τ ($K \equiv K_m + K_e \equiv K_Z + K_E$)
K_E	вихревая кинетическая энергия воздуха, заключенного в произвольном объеме τ
K_e	кинетическая энергия турбулентных движений в произвольном объеме τ

K_m	кинетическая энергия среднего движения в произвольном объеме τ
K_Z	кинетическая энергия зонального движения в объеме τ
K_H	коэффициент турбулентной температуропроводности
K_M	коэффициент турбулентности (для количества движения)
K_W	коэффициент турбулентной диффузии
K_τ	кинетическая энергия массы воздуха, заключенной в объеме τ
$\mathscr{K}$	количество кинетической энергии, образованной движениями синоптического масштаба за период времени, значительно превосходящий локальное время существования погодных систем
$\mathscr{k}$	удельная кинетическая энергия мелкомасштабной турбулентности или полная удельная энергия волнового возмущения (см. главу 16)
k	удельная кинетическая энергия в относительном пространстве мгновенного движения или отношение $R_a/c_{pa} = 2/7$, или универсальная постоянная Кармана (0,41)
k_e	удельная кинетическая энергия турбулентных движений
k_m	удельная кинетическая энергия среднего движения
$k_{(a)}$	удельная кинетическая энергия в абсолютном пространстве (см. п. 3.5)
k_H	коэффициент молекулярной температуропроводности
k_W	коэффициент молекулярной диффузии
$\mathbf{k}$	единичный вектор, направленный по вертикали вверх
L	масштаб Монина—Обухова (параметр устойчивости) или горизонтальный размер крупномасштабных вихрей, или длина волны
L_v	удельная теплота испарения воды ($2{,}501 \cdot 10^6$ Дж$\cdot$кг$^{-1}$ при 0° С)
M	масса воздуха в объеме τ
$\mathbf{M}$	количество движения (импульс) воздуха в произвольном объеме τ
m	масса воздуха или отношение $2\pi/L$
m_i	масса компонента i в объеме τ
N	множитель $1 - \left\{(\bar{p})_\Theta/p\right\}^k$ или внешняя нормаль к поверхности σ, ограничивающей объем τ
n	зональное волновое число $ma \cos\varphi = (2\pi/L)\, a \cos\varphi$
P	атмосферное давление (см. п. 3.5)
$\boldsymbol{P}$	тензор вязких напряжений Навье—Стокса
P_{ij}	декартовы составляющие тензора $\boldsymbol{P}$
p	давление воздуха или отклонение давления от среднего значения (см. главу 16)
p_{00}	это 1000 мбар
Q	скорость притока тепла к единичной массе воздуха
Q_C	скорость притока тепла к единичной массе воздуха под влиянием теплопроводности
Q_E	скорость притока тепла к единичной массе воздуха, поступающего к ней из окружающей среды
Q_L	скорость притока тепла к единичной массе воздуха, высвобождающегося при фазовых переходах
Q_R	скорость радиационного притока тепла к единичной массе воздуха
q	количество тепла, получаемого единичной массой в конце пути смешения, или удельное количество тепла в относительном пространстве (см. п. 3.5)
R	расстояние от оси вращения Земли ($R \equiv r \cos\varphi \approx a \cos\varphi$)

R_a — удельная газовая постоянная сухого воздуха ($R_a = c_{pa} - c_{va} = 287{,}05$ Дж·кг$^{-1}$·К$^{-1}$)

R_v — удельная газовая постоянная водяного пара ($R_v = 461{,}51$ Дж·кг$^{-1}$·К$^{-1}$)

Re — число Рейнольдса

Re* — критическое значение числа Re

Ri — число Ричардсона

Ri_F — потоковое число Ричардсона

$\mathbf{R}$ — радиус-вектор

R — тензор Рейнольдса

r — расстояние от центра Земли или $r = R_v/R_a - 1 \approx 0{,}61$

r' — обозначение $rc_{pa}\overline{T}/L_v$

$\mathbf{r}$ — путь смешения или вектор точки, в которой находится частица воздуха в момент t по отношению к невозмущенному состоянию жидкости в тот же момент t

S — сглаженная поверхность земли (средний уровень моря) или геопотенциальная поверхность (горизонтальная поверхность)

s — удельная энтропия сухого воздуха

T — абсолютная температура воздуха

T_* — масштаб температуры (в области мелкомасштабной турбулентности)

t — время

U — средняя горизонтальная скорость ветра

u — зональная составляющая скорости ветра (положительная при движении на восток) или зональная составляющая пульсационной скорости

u_a — скорость ветра на уровне анемометра

u_* — скорость трения (масштаб скорости ветра)

u' — обозначает $u + u_{0z}\zeta$ при $\Theta + \Theta_{0z}\zeta = 0$

V_i — ковариантная составляющая абсолютной скорости $\mathbf{V}$ ($i = 1, 2, 3$)

V_{ij} — ковариантная антисимметричная составляющая вихря curl $\mathbf{V}$ ($i, j = 1, 2, 3$)

V_X, V_Y, V_Z — декартовы составляющие абсолютной скорости движения в прямоугольной геоцентрической системе координат X, Y, Z

$\mathbf{V}$ — мгновенная скорость движения воздуха по отношению к абсолютной геоцентрической системе координат

v — меридиональная составляющая скорости ветра (положительная при движении на север) или меридиональная составляющая пульсационной скорости

v_x, v_y, v_z — декартовы составляющие скорости ветра в прямоугольной системе координат x, y, z, неподвижной по отношению к земной поверхности

v_k — ковариантная составляющая скорости ветра $\mathbf{v}$ ($k = 1, 2, 3$)

v^k — контравариантная составляющая $\mathbf{v}$ ($k = 1, 2, 3$)

$\mathbf{v}$ — мгновенная скорость ветра

$\mathbf{v}_g$ — геострофическая скорость ветра

$\mathbf{v}_h$ — горизонтальная скорость ветра

$\mathbf{v}_M$ — составляющая скорости ветра в меридиональной плоскости

W_i — ковариантная составляющая скорости движения системы координат по отношению к абсолютной системе координат ($i = 1, 2, 3$)

$\mathbf{W}$ — поток тепла, обусловленный радиацией, теплопроводностью и мелкомасштабной турбулентностью, или скорость движения

	системы координат по отношению к абсолютной системе координат (см. п. 3.5)
$\mathbf{W}_d$	поток тепла под влиянием молекулярной теплопроводности
$\mathbf{W}_\Sigma$	поток солнечной радиации
$\mathbf{W}_T$	поток длинноволновой (земной) радиации
$\mathbf{W}_R$	радиационный поток тепла $(\mathbf{W}_R = \mathbf{W}_\Sigma + \mathbf{W}_T)$
$\mathbf{W}_S$	турбулентный поток явного тепла
$\mathbf{W}_C$	поток тепла под влиянием теплопроводности $(\mathbf{W}_C = \mathbf{W}_S + \mathbf{W}_d)$
$\mathbf{W}_L$	турбулентный поток скрытого тепла
$\mathbf{W}_e$	турбулентный поток тепла $(\mathbf{W}_e = \mathbf{W}_S + \mathbf{W}_L)$
$\mathbf{W}_e^*$	конвективная составляющая турбулентного потока тепла
w	вертикальная составляющая скорости ветра (положительная при движении вверх) или вертикальная составляющая пульсационной скорости
X	произвольная метеорологическая величина, зависящая от пространственных координат и времени
Z	вертикальный размер вихревого движения (см. п. 9.1)
x	абсцисса
x^i	обобщенные пространственные координаты $(i = 1, 2, 3)$
y	ордината
z	высота над средним уровнем моря $(r = a + z)$ или высота над поверхностью земли
z_a	высота анемометра
z_0	параметр шероховатости
X, Y, Z	декартовы координаты в абсолютном пространстве (см. п. 3.5) или произвольные метеорологические величины, зависящие от координат и времени (см. главу 5)
x, y, z	декартовы координаты в относительной системе координат (см. п. 3.5)
α	удельный объем воздуха или угол между изэнтропической и геопотенциальной поверхностями (см. п. 11.3), или скалярная величина
β	угол между наклонной траекторией движения воздушной массы и геопотенциальной поверхностью (см. п. 11.3) или параметр Россби $df/dy = (1/a)\,\partial f/\partial\varphi$, или скалярная величина
Γ	обозначает $\gamma\,(T_e/\Theta_e)^2$
$\overline{\Gamma}$	осредненное (по давлению) значение Γ
Γ_d	сухоадиабатический градиент $(g/c_{pa} \approx 9{,}8°\ \mathrm{C \cdot км^{-1}})$
Γ_e	вертикальный градиент температуры при гидростатическом равновесии $(\Gamma_e \equiv -dT_e/dz \equiv -T_{ez})$
Γ_h	вертикальный градиент температуры в однородной атмосфере (g/R_a)
γ	детерминант $\lVert \gamma_{ij} \rVert$ $(i, j = 1, 2, 3)$ или отношение $\Gamma_d/(\Gamma_d - \Gamma_e)\,T_e$, или скалярная величина
γ_*	обозначает $\overline{\Gamma}\,(\Theta_e/T_e)^2$
γ_{ij}	ковариантные составляющие метрического тензора $(i, j = 1, 2, 3)$
γ^{ij}	контравариантные составляющие метрического тензора $(i, j = 1, 2, 3)$
Δ	скорость перехода удельной кинетической энергии мелкомасштабных вихрей в тепло (внутреннюю энергию), $\Delta = \Delta_m - \sigma$
Δ_e	скорость перехода удельной кинетической энергии вихрей синоптического масштаба в кинетическую энергию мелкомасштабной турбулентности

Δ_m — скорость перехода удельной кинетической энергии мелкомасштабной турбулентности в тепло (внутреннюю энергию) под влиянием молекулярной вязкости

δ — толщина вязкого подслоя

δ_{ij} — декартовы проекции тензора Кронекера ($\delta_{ij} \equiv 0$ при $i \neq j$ и $\delta \equiv 1$ при $i = j$; $i, j = 1, 2, 3$)

$\boldsymbol{\delta}$ — тензор Кронекера

ε — удельное влагосодержание (масса водяного пара и жидкой воды в единичной массе воздуха)

ε_v — удельная влажность

ε_v^* — масштаб влажности (в области мелкомасштабной турбулентности)

ε^{ij} — $\varepsilon^{ij} \equiv 0$ при $i = j$ и $\varepsilon^{ij} = -\varepsilon^{ji}$ при $\varepsilon^{12} = 1$ ($i, j = 1, 2$)

ζ — вертикальный путь смещения (в области мелкомасштабной турбулентности) или вертикальная составляющая абсолютного (curl **V**) и относительного (curl **v**) вихря, или $\zeta = -\Theta/\Theta_{0z}$, где Θ — флуктуация потенциальной температуры (см. главу 16)

η — коэффициент кинематической вязкости или меридиональная составляющая абсолютного вихря curl **V**, или $-(\rho_0 u_0 u' + p)$ (см. главу 16)

Θ — потенциальная температура или флуктуация ее

Θ^{is} — обозначает Θ_{0z} $(\Theta/\Theta_{0z} - p/p_{0z})$, где Θ и p — флуктуации потенциальной температуры и давления

$\varkappa$ — поток кинетической энергии, порожденный мелкомасштабной турбулентной диффузией

λ — долгота или линейный размер мелкомасштабных вихрей (см. п. 4.4)

μ — коэффициент вязкости ($\mu = \rho\eta$)

ξ — зональная составляющая абсолютного (curl **V**) и относительного (curl **v**) вихря

$\xi^k_{\mathscr{A}}$ — контравариантная составляющая вектора, проекции которого равны $V_{ij}/\sqrt{\gamma}$

π — обозначает $(c_{va}/c_{pa}) \ln p$

ρ_1 — плотность воздуха (см. п. 3.5)

ρ — плотность воздуха или флуктуация плотности (см. главу 16)

$\sum(F)$ — скорость образования величины F в единичном объеме

σ — поверхность, ограничивающая объем τ, или скорость превращения удельной внутренней энергии в кинетическую энергию мелкомасштабной турбулентности (см. п. 12.1)

σ_{ij} — составляющие симметричного декартова тензора ($i, j = 1, 2, 3$)

τ_J — объем, занимаемый произвольной массой воздуха, или локальное время существования (период) вихря (см. главу 4), или $\ln \Theta$ (см. п. 14.8)

τ_a — масса сухого воздуха, содержащегося в единичной массе влажного воздуха

τ_v — масса водяного пара, содержащегося в единичной массе влажного воздуха

τ_w — масса жидкой воды, содержащейся в единичной массе влажного воздуха

$\boldsymbol{\tau}_h$ — горизонтальное напряжение Рейнольдса (напряжение, с которым действует слой атмосферы, расположенный выше некоторой

	поверхности, на слой атмосферы, расположенный ниже этой поверхности)
φ	широта
X	характеристика распределения источников и стоков тепла в меридиональной плоскости (см. п. 16.2)
χ	произвольная функция или потенциал, или гидростатический дефицит
$\boldsymbol{\chi}$	поток турбулентной кинетической энергии, порождаемый мелкомасштабными флуктуациями давления и вязкими напряжениями
Ψ	функция тока для потока энергии (см. главу 16)
ψ	произвольная функция или функция тока для потока массы
Ω	угловая скорость вращения Земли ($7{,}292116 \cdot 10^{-5}$ рад$\cdot$с$^{-1}$)
Ω_{ij}	ковариантные составляющие антисимметричного тензора вращения Земли
$\boldsymbol{\Omega}$	угловая скорость вращения Земли (вектор)
ω	обозначает $\frac{dp}{dt} \equiv \dot{p}$
ω^*	удельная полная потенциальная энергия волнового возмущения или $H\Theta_0/\Theta_{0z}$
Φ	гравитационная потенциальная энергия массы воздуха M в произвольном объеме τ
ϕ	геопотенциал (потенциальная энергия единичной массы воздуха)
$\phi_{(a)}$	потенциал внешней силы в абсолютном пространстве (силы притяжения Земли, см. п. 3.5)

Операторы

d	дифференциальный оператор в пространстве ($dt = 0$) или в пространстве и во времени ($dt \neq 0$)
$\frac{\partial}{\partial x^i}$	знак частной производной по координате x^i ($i = 1, 2, 3$)
$\frac{\partial}{\partial t}$	знак локальной производной по времени
$\frac{d}{dt}$	знак индивидуальной производной по времени в системе координат, вращающейся с Землей: $$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla; \quad \frac{d}{dt}(dx^i) \equiv d\left(\frac{dx^i}{dt}\right)$$
$\frac{D}{Dt}$	знак индивидуальной производной по времени в абсолютной (геоцентрической) системе координат (см. п. 3.5)
$D(\ldots)$	обозначает $(\ldots)_t + u_0(\ldots)_x$
$\frac{\partial}{\partial\lambda}, \frac{\partial}{\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial t}$	частные производные по переменным Эйлера λ, φ, z, t
$\psi_x, \psi_y, \psi_z, \psi_t$	частные производные от произвольной функции ψ
$\frac{\delta}{\delta\lambda}, \frac{\delta}{\delta\varphi}, \frac{\delta}{\delta p}, \frac{\delta}{\delta t}$	частные производные по переменным Эйлера λ, φ, p, t

$\int$	знак интеграла
$\oint$	знак интеграла по замкнутой поверхности или кривой
$\sum$	знак суммирования
$\Delta\psi$	индивидуальная (лагранжева) флуктуация ψ $\left(\Delta\psi = \delta\psi + \frac{\partial\psi}{\partial x^i}\Delta x^i\right)$
Δx^i	составляющая смещения частицы воздуха из невозмущенного положения x^i в момент времени t в возмущенное положение $x^i + \Delta x^i$ в тот же самый момент времени t $(i = 1, 2, 3)$
$\delta\psi$	локальная (эйлерова) флуктуация ψ
$\psi_\times$	флуктуация геопотенциальной поверхности ψ по отношению к ее положению в состоянии гидростатического равновесия ψ_e $(\psi_\times = \psi - \psi_e)$
$\psi_{\times i}$	обозначает $\psi_\times + r_z(d\psi_e/dz)$
$\psi^\times$	обозначает $\psi_\times - p_\times(\psi_{ez}/p_{ez})$
curl	вихрь вектора
div	пространственная дивергенция вектора или тензора
$\mathrm{div_h}$	дивергенция при $z = \mathrm{const}$
$\mathrm{div_{is}}$	дивергенция при $p = \mathrm{const}$
∇	дельта-оператор
∇_h	дельта-оператор в горизонтальной плоскости
∇^2_h	лапласиан по λ и φ при $z = \mathrm{const}$
∇_is	дельта-оператор на изобарической поверхности
∇^2_is	лапласиан по λ и φ при $p = \mathrm{const}$
∇_M	дельта-оператор в меридиональной плоскости
$=$	равно
$\equiv$	тождественно равно
$<$	меньше
$\ll$	много меньше
$\neq$	не равно
$\approx$	приближенно равно
$>$	больше
$\gg$	много больше
$\sim$	одного порядка величины
$\propto$	пропорционально
$\lesssim$	одного порядка величины, но не больше
$\cdot$	скалярное произведение
$\times$	векторное произведение
$\dot{X}$	индивидуальная производная от X $\left(\dot{X} \equiv \frac{dX}{dt}\right)$
$\lvert X \rvert$	абсолютная величина X
$\lVert X_{ij} \rVert$	детерминант элементов X_{ij} $(i,\ j = 1, 2, 3)$
$\overline{X}$	среднее значение X для данной области изменения всех независимых переменных или некоторых из них
X'	отклонение (флуктуация) X от среднего значения $\overline{X}$ $(X' \equiv X - \overline{X})$
$\tilde{X}$	средневзвешенное значение X

X''	отклонение (флуктуация) X от средневзвешенного значения $\tilde{X}$ $(X'' \equiv X - \tilde{X})$
$[X]$	значение X, осредненное по кругу широты (зональное значение X)
X^{I}	отклонение X от $[X]$ $(X^{\mathrm{I}} \equiv X - [X])$
$\{X\}$	значение X, осредненное по меридиану (от Южного до Северного полюса)
X^{II}	отклонение X от $\{X\}$ $(X^{\mathrm{II}} \equiv X - \{X\})$
$(\overline{X})_z$	значение X, осредненное по геопотенциальной поверхности (горизонтальное среднее)
$(X')_z$	отклонение X от $(\overline{X})_z$; $(X')_z \equiv X - (\overline{X})_z$
$(\overline{X})_{\mathrm{p}}$	значение X, осредненное по изобарической поверхности (изобарическое среднее)
$(X')_{\mathrm{p}}$	отклонение X от $(\overline{X})_{\mathrm{p}}$; $(X')_{\mathrm{p}} \equiv X - (\overline{X})_{\mathrm{p}}$
$(\overline{X})_{\Theta}$	значение X, осредненное по изэнтропической поверхности (изэнтропическое среднее)
$(X')_{\Theta}$	отклонение X от $(\overline{X})_{\Theta}$; $(X')_{\Theta} \equiv X - (\overline{X})_{\Theta}$
$X_{\times}$	отклонение (флуктуация) X от значения X_{e} этой величины в состоянии гидростатического равновесия на геопотенциальной поверхности $[X = X_{\mathrm{e}}(z, t) + X_{\times}]$
$X^{\times}$	отклонение X от значения X_{e} этой величины в состоянии гидростатического равновесия на изобарической поверхности $[X = X_{\mathrm{e}}(p, t) + X^{\times}]$
X'	локальная (эйлерова) флуктуация
X'_i	индивидуальная (лагранжева) флуктуация

Индексы

a	обозначение сухого воздуха или значение параметра на уровне анемометра
h	значение параметра на горизонтальной поверхности
is	значение параметра на изобарической поверхности
L	индекс потенциального вектора
M	индекс, обозначающий принадлежность к меридиональной плоскости
N	обозначение составляющей вектора вдоль внешней нормали к поверхности
0	значение параметра на поверхности земли или величина основного потока (см. главу 16)
S	индекс соленоидального вектора
v	индекс водяного пара
w	индекс жидкой воды
i, j, k	целочисленные индексы; повторение индекса в одном и том же выражении обозначает суммирование по этому индексу

Нормальная последовательность скобок следующая: $[\{(\ldots)\}]$. В некоторых параграфах, однако, скобки $[\ldots]$, $\{\ldots\}$ и $\overline{(\ldots)}_z$ обозначают соответственно осреднение по кругу широты, меридиану (от полюса до полюса) и горизонтальной поверхности на высоте z. Другое значение скобок, как, например, в формуле (5.32), оговорено в тексте.

Авторский указатель

Предметный указатель

Н

О

П

Р

С

У

Ф

Ш

Э

Оглавление

Ж. Ван Мигем

ЭНЕРГЕТИКА АТМОСФЕРЫ

Редактор Г. Я. Русакова

Художник Б. А. Денисовский

Технический редактор Л. М. Шишкова

Корректоры: И. В. Жмакина, Г. С. Макарова

ИБ № 20

Сдано в набор 8/XII 1976 г. Подписано к печати 5/VII 1977 г.
Формат $60 \times 84^1/_{16}$, бумага тип. № 1. Усл. печ. л. 19,07 Уч.-изд. л. 19,99.
Тираж 1800 экз. Индекс МЛ-160. Заказ № 1514. Цена 2 р. 85 к.

Гидрометеоиздат. 199053. Ленинград, 2-я линия, д. 23

Ленинградская типография № 6 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
193144, Ленинград, С-144, ул. Моисеенко, 10