МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РСФСР

Ленинградский гидрометеорологический институт

И.П.Спицын, В.А.Соколова

НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ В РЕКАХ

Утверждено ученым советом института
в качестве конспекта лекций

Ленинградский ордена Ленина
политехнический институт
имени М.И.Калинина

Ленинград
1986

УДК 532 + 556.536

С п и ц ы н И. П., С о к о л о в а В. А. Неравномерное движение в реках. Конспект лекций. – Л., изд.ЛПИ, с.44.(ЛГМИ).

В работе излагаются вопросы, связанные с неравномерным установившемся движением воды в открытых руслах. Рассматриваются способы расчета и построения кривых свободной поверхности для случая призматического русла и для естественных (речных) русел.

Материал излагается в соответствии с действующей программой курса "Общая и речная гидравлика" на основе лекций, читаемых для студентов-гидрологов.

Конспект лекций предназначается для студентов гидрометеорологических институтов и государственных университетов по специальности гидрология суши.

Ил.18. Библ.5.

Рецензенты: кафедра гидрологии суши Ленинградского государственного университета имени А.А.Жданова; Гончаров В.В., канд. техн.наук (Всесоюзный научно-исследовательский институт гидротехники имени Б.Е.Веденеева).

© Ленинградский гидрометеорологический институт (ЛГМИ), 1986 г.

Российский государственный
гидрометеорологический
институт
БИБЛИОТЕКА
195196, СПб, Малоохтинский пр., 98

ПРЕДИСЛОВИЕ

Неравномерное установившееся движение воды в реках (открытых руслах) представляет собой случай, наиболее часто встречающийся в инженерной практике.

В искусственных водотоках, которые характеризуются постоянным (и по форме и по размерам) профилем поперечного сечения, однообразной шероховатостью и однообразным уклоном дна, иногда можно встретить участки с равномерным движением, тогда как в естественных водотоках оно никогда не наблюдается.

Всякое сооружение, построенное в русле (плотина, мост и т.д.), всякие более или менее значительные неровности дна, изменения уклона дна нарушают процесс равномерного движения и обусловливают появление неравномерного движения.

Помимо этого, искусственные сооружения, возводимые на каналах, всегда сопровождаются такими участками каналов (переходами), где равномерное движение с физической точки зрения просто невозможно: например, русло с горизонтальным дном или русло с обратным уклоном дна и др.

Ниже рассматривается вывод дифференциального уравнения неравномерного плавно изменяющегося движения воды в открытом русле. Приводятся решения этого уравнения для случая призматического русла и для движения воды в естественных (речных) руслах. На основании полученных решений рассматриваются различные способы построения кривых свободной поверхности, к чему, главным образом, и сводится основная задача по расчету неравномерного движения.

I. НЕРАВНОМЕРНОЕ УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВОДЫ В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ

I.I. Понятие о неравномерном движении

Установившимся движением жидкости называется такое движение, характеристики которого (глубина h, средняя скорость v, расход Q и др.) во времени не меняются. Установившееся движение может быть равномерным и неравномерным. Равномерным движением называется такое движение, при котором гидравлические характеристики потока не изменяются по его длине. При этом гидравлический уклон J (в случае безнапорного движения он совпадает с уклоном свободной поверхности) и уклон дна водотока i равны между собой, т.е. $J = i$. Глубина, которая при заданном расходе устанавливается в русле, если бы движение было равномерным, называется нормальной глубиной.

Неравномерным движением жидкости называется такое движение, характеристики которого зависят от выбора координат, т.е. изменяются по длине потока. При этом равенство гидравлического уклона и уклона дна водотока нарушается. Оно может быть вызвано: I) либо изменением живого сечения по длине потока; 2) либо при постоянном живом сечении изменением распределения скоростей и ускорений в соответственных точках разных живых сечений; 3) либо изменением и того и другого одновременно.

Следует отметить, что в естественных условиях в реках движение, как правило, неравномерное. Однако в целях облегчения расчетов часто разбивают рассматриваемый участок реки на отдельные более мелкие участки небольшой длины ℓ, в пределах которых гидравлические характеристики потока не меняются, и рассчитывают эти участки по формулам равномерного движения. Но далеко не во всех случаях мы имеем право это делать.

Различают две категории русел: I) призматические, 2) непризматические. Призматическим называется такое русло, которое имеет неизменную форму и геометрические размеры поперечного профиля по длине. Если поперечный профиль русла очерчивается кривой линией (например, квадратичной параболой), определяемой в любом сечении одним и тем же уравнением, то такое русло называется цилиндрическим. Очевидно, что цилиндрическое русло по своим свойствам аналогично призматическому.

В случае непризматического русла площадь поперечного сечения потока ω является функцией двух переменных - глубины потока h и расстояния S, отсчитываемого по длине потока от некоторого "начального" сечения: $\omega = f(h, S)$. В случае же призматического русла поперечное сечение потока не зависит от расстояния S и, следовательно, $\omega = f(h)$.

По форме поперечного профиля открытые русла разделяют на русла правильной формы и русла неправильной формы. К руслам правильной формы относятся такие русла, для которых гидравлические элементы (ширина, глубина, площадь и др.) любого поперечного сечения являются непрерывными монотонно возрастающими функциями глубины потока, причем каждая из этих функций имеет вполне определенное аналитическое выражение для всего диапазона изменения глубины потока. Этому условию удовлетворяют русла прямоугольные, трапецеидальные, треугольные, параболические и другие, т.е. большинство искусственных русел, встречающихся в инженерной практике.

К руслам неправильной формы относятся русла, неудовлетворяющие высказанному выше условию. Это русла, характеризующиеся составными профилями в пределах наибольшей глубины потока, естественные русла рек. В некоторых случаях в пределах отдельных участков естественное неправильное русло можно приближенно заменить призматическим или цилиндрическим руслом правильной формы.

Приведем примеры, когда в открытых руслам может возникнуть неравномерное движение.

I. Призматическое русло с прямым уклоном дна ($i > 0$). Неравномерное движение здесь может возникнуть в следующих случаях.

а) В канале устроена плотина $\Pi л$ (рис. I, а). Вода накапливается перед ней и переливается. Перед плотиной устанавливается некоторая фиксированная глубина h_φ, отличная от глубины h_0, соответствующей равномерному движению. На участке АВ условия равномерного движения нарушаются, движение становится неравномерным и возникает кривая подпора, которая целиком лежит выше линии нормальных глубин NN.

б) В канале устроен перепад $\Pi р$ (рис. I, б). На гребне перепада устанавливается некоторая фиксированная глубина h_φ, отличная от нормальной глубины h_0. На участке АВ движение становится неравномерным и возникает кривая спада. За пределами этой зоны движение остается равномерным.

в) В канале устроен щит $Щ$ (рис. I, в). При истечении воды из-под щита глубина воды в зоне АВ $h_\varphi \neq h_0$, т.е. в этой зоне уста-

навливается неравномерное движение и возникает кривая подпора.

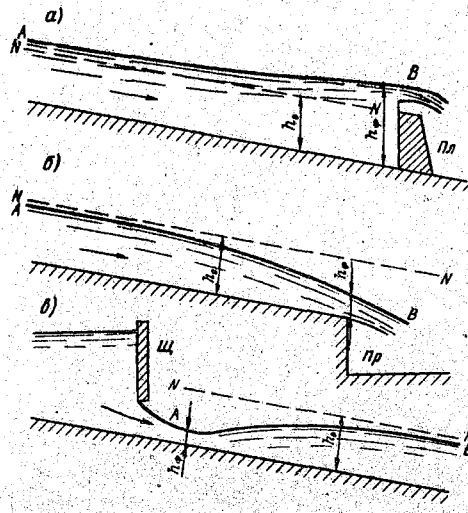

Рис.I. Примеры неравномерного движения в призматическом русле ($i > 0$). В каналах устроены: а - плотина; б - перепад; в - щит.

2. Призматическое русло с горизонтальным дном ($i = 0$) или имеющее обратный уклон ($i < 0$). Из анализа формулы Шези для скорости v следует, что при $i = 0$, а тем более при $i < 0$ равномерного движения физически быть не может. В этом случае в потоке устанавливается только неравномерное движение.

3. Непризматическое русло, расширяющееся или сужающееся в плане. В этом случае устанавливается всегда только неравномерное движение воды.

В дальнейшем рассмотрим лишь плавно изменяющееся неравномерное движение жидкости в открытом русле. При плавно изменяющемся движении местные потери энергии (напора), связанные с деформацией потока, отсутствуют, а имеют место лишь потери энергии по длине.

При рассмотрении неравномерного движения главным образом занимаются вопросом о построении кривой свободной поверхности АВ (рис.I). Основная инженерная задача при этом сводится к следующему.

I. Найти связь глубины с длиной распространения подпора или спада, т.е. установить зависимость $h = f(S)$. С этой задачей мы встречаемся, например, при определении судоходных глубин воды в каналах и реках, при решении вопроса о глубине выемок русла в разных

его местах и др.

2. Иногда приходится решать обратную задачу – определить длину распространения кривой подпора или спада; найти длину участка, обеспечивающего заданные глубины и др. С этим случаем мы встречаемся при строительстве плотин на реках там, где подпор перед сооружением вызывает затопление берегов. Определение зоны затопления (ее длины и ширины) связано с экономическим обоснованием проекта при сооружении плотины. Эта задача огромной экономической важности.

Таким образом, построение кривой свободной поверхности при неравномерном движении представляет большой практический интерес. Вопросу о том, как решается такая задача, посвящено все дальнейшее изложение.

I.2. Основное дифференциальное уравнение неравномерного движения воды

Рассмотрим неравномерное плавно изменяющееся движение воды в открытом непризматическом русле. Представим на рис.2 продольный разрез потока. Допустим, что при заданном расходе воды Q поток проходит участок между сечениями I-I и 2-2 с глубиной h_0 при равномерном движении. После постройки плотины равномерное движение нарушилось и на участке установилась кривая подпора AB. Обозначим расстояние от постоянного начала до сечения I-I через S_1, до сечения 2-2 через S_2, расстояние между сечениями ΔS.

Применим уравнение Бернулли к движению жидкости на участке I-2. Наметим горизонтальную плоскость сравнения 00 (рис.2). Обозначим расстояния от плоскости сравнения до отметок свободной поверхности в выбранных сечениях I-I и 2-2 соответственно через z_1 и z_2, расстояния до отметок дна через y_1 и y_2. Условимся относить слагаемые уравнения Бернулли к частицам жидкости на свободной поверхности, так как нас интересует уравнение кривой свободной поверхности потока.

Запишем уравнение Бернулли

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \sum h_w . \qquad (I.1)$$

Здесь p_1 и p_2 – давления на уровне свободной поверхности. Для сечений I-I и 2-2 оно одинаковое, равно атмосферному давлению p_0 и поэтому слагаемые $\frac{p_1}{\gamma}$ и $\frac{p_2}{\gamma}$ в уравнении (I.I) сокращаются. Потери

энергии $\sum h_w$ при плавно изменяющемся движении можно рассматривать как потери, обусловленные трением и приравнять их к путевым потерям, т.е. $\sum h_w = \sum h_l$.

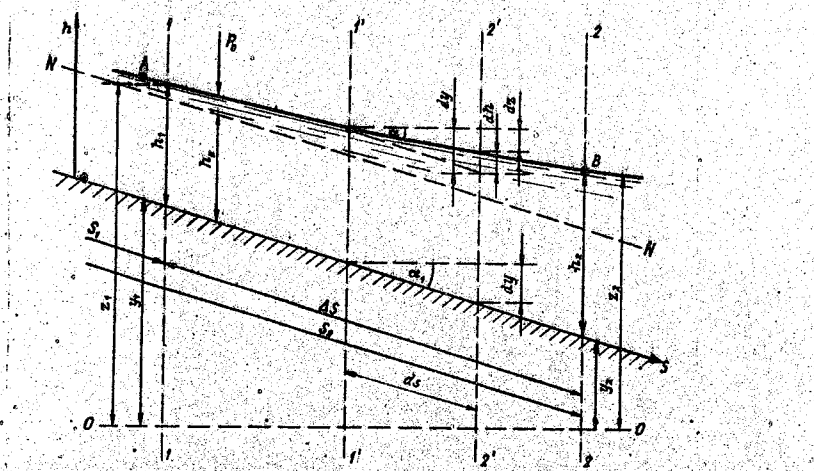

Рис.2. К выводу дифференциального уравнения неравномерного движения.

Уравнение (I.I) перепишем в следующем виде:

$$z_1 - z_2 = \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \sum h_l . \qquad (I.2)$$

Сблизим сечения I-I и 2-2 так, чтобы между ними осталось бесконечно малое расстояние dS (рис.2). Тогда коэффициенты, учитывающие неравномерность распределения скоростей по сечениям потока α_1 и α_2 можно приравнять α и уравнение (I.2) примет вид

$$dz = \alpha d\frac{v^2}{2g} + dh_l . \qquad (I.3)$$

Разделим все члены уравнения (I.3) на dS

$$\frac{dz}{dS} = \alpha \frac{d\frac{v^2}{2g}}{dS} + \frac{dh_l}{dS} . \qquad (I.4)$$

Выясним смысл составляющих выражения (I.4). Из рассмотрения рис.2 следует, что $\frac{dz}{dS} = \sin\alpha = J$ – уклон свободной поверхности при неравномерном движении. Так как при неравномерном движении свободная поверхность криволинейна, то под уклоном, строго говоря, на-

до понимать уклон касательной в любой точке к свободной поверхности.

Второй член выражения $\frac{d\frac{v^2}{2g}}{ds} = i_{hv}$ – это тоже уклон, который образуется за счет изменения скорости на участке ds. Этот член уравнения (I.4) характеризует изменение уклона свободной поверхности при переходе от равномерного движения к неравномерному.

Третий член выражения (I.4) $\frac{dh_\ell}{ds} = i_\ell$ – уклон трения, который, пользуясь формулой Шези, можно выразить как $i_\ell = \frac{v^2}{C^2R}$. Отметим, что потери напора на трение h_ℓ при неравномерном движении мы выразили формулой того же вида, что и при равномерном движении. Однако в этом случае гидравлические характеристики потока: v – средняя скорость; C – коэффициент Шези; R – гидравлический радиус – переменные по длине потока.

После необходимых подстановок в уравнение (I.4) получим:

$$J = \alpha \frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2g}\right) + \frac{v^2}{C^2R}. \qquad (I.5)$$

Это уравнение и является первой формой основного уравнения неравномерного движения. Оно является общим для равномерного и неравномерного движения. При равномерном движении $i_{hv} = 0$, тогда

$$J = \frac{v^2}{C^2R}. \qquad (I.6)$$

Преобразуем уравнение (I.5). Для этого обратимся сначала к чертежу (рис.2), откуда видно, что

$$dz = dy - dh. \qquad (I.7)$$

Разделив все члены этого выражения на ds, получим

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dy}{ds} - \frac{dh}{ds}, \qquad (I.8)$$

где $\frac{dy}{ds} = \sin\alpha_1 = i$ – уклон дна водотока.

Подставим выражение (I.8) в левую часть уравнения (I.5)

$$i - \frac{dh}{ds} = \alpha \frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2g}\right) + \frac{v^2}{C^2R}. \qquad (I.9)$$

Рассмотрим слагаемые правой части выражения (I.9). Будем предполагать, что расход потока Q задан.

Член $\alpha \frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2g}\right)$. Выражая v через Q, получим

$$\alpha \frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2g}\right) = \alpha \frac{d}{ds}\left(\frac{Q^2}{\omega^2 2g}\right) = \frac{\alpha Q^2}{2g}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\omega^2}\right) = -\frac{\alpha Q^2}{g\omega^3}\frac{d\omega}{ds}. \qquad (I.10)$$

В общем случае для русла непризматической формы $\omega = f(h, s)$.

Имея это в виду, можем записать:

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{\partial\omega}{\partial s} + \frac{\partial\omega}{\partial h}\frac{dh}{ds} = \frac{\partial\omega}{\partial s} + B\frac{dh}{ds}, \qquad (I.II)$$

где $B = \frac{\partial\omega}{\partial h}$ – ширина потока поверху (рис.3).

Подставляя (I.II) в (I.IO), получим

$$\alpha\frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2g}\right) = -\frac{\alpha Q^2}{g}\frac{1}{\omega^3}\left(\frac{\partial\omega}{\partial s} + B\frac{dh}{ds}\right). \qquad (I.I2)$$

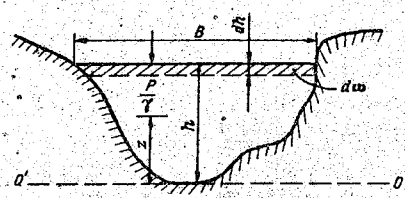

Рис.3. К обоснованию формулы (I.I5).

Член $\frac{v^2}{C^2R}$. Это слагаемое можно представить в следующем виде:

$$\frac{v^2}{C^2R} = \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R} . \qquad (I.I3)$$

Подставим теперь найденные выражения (I.I2) и (I.I3) в (I.9)

$$i - \frac{dh}{ds} = -\frac{\alpha Q^2}{g}\frac{1}{\omega^3}\left(\frac{\partial \omega}{\partial s} + B\frac{dh}{ds}\right) + \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R} . \qquad (I.I4)$$

Решая уравнение (I.I4) в отношении $\frac{dh}{ds}$, окончательно получим:

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}\left(1 - \frac{\alpha C^2}{g}\frac{R}{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial s}\right)}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g}\frac{B}{\omega^3}} . \qquad (I.I5)$$

Уравнение (I,I5) является вторым видом дифференциального уравнения неравномерного движения; оно относится к общему случаю непризматического русла. Трудности в интегрировании уравнения приводят к тому, что в практике расчетов часто русло считают призматическим и используют уравнение в более простом виде.

Далее рассмотрим отдельно призматические и непризматические русла.

2. НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВОДЫ В ПРИЗМАТИЧЕСКИХ РУСЛАХ

2.1. Дифференциальное уравнение неравномерного движения для случая призматического русла

Для случая призматического русла уравнение (I.I5) следует переписать в виде

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g}\frac{B}{\omega^3}} \qquad (2.1)$$

Имея в виду, что $\omega^2 C^2 R = K^2$, где K – модуль расхода, отвечающий действительной глубине h, уравнение (2.I) можно представить в виде

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i - \frac{Q^2}{K^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g}\frac{B}{\omega^3}} \qquad (2.2)$$

При выводе уравнения (2.2) мы предполагали, что водоток имеет прямой уклон дна ($i > 0$). Однако полученное уравнение применимо также к водотокам с горизонтальным дном ($i = 0$) и к водотокам с обратным уклоном дна ($i < 0$). Эти случаи могут иметь место при постройке на водотоках тех или иных гидротехнических сооружений:

а) случай $i = 0$. Подставляя в (2.2) $i = 0$, имеем

$$\frac{dh}{ds} = -\frac{\frac{Q^2}{K^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g}\frac{B}{\omega^3}}; \qquad (2.3)$$

б) случай $i < 0$. Условимся обозначать через i' абсолютное значение i, тогда вместо уравнения (2.2) получаем

$$\frac{dh}{ds} = -\frac{i' + \frac{Q^2}{K^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g}\frac{B}{\omega^3}} \qquad (2.4)$$

При анализе и интегрировании уравнения неравномерного движения используются некоторые новые понятия, которые необходимо пояснить.

2.2. Некоторые понятия, используемые при изучении неравномерного движения

2.2.I. Удельная энергия сечения

Удельной энергией сечения Э называется частное значение полной удельной энергии, подсчитанное в предположении, что плоскость сравнения проведена через самую нижнюю точку дна сечения русла

(рис.3, линия $0'0'$). Для плоскости сравнения $0'0'$ имеем равенство: $z + \frac{p}{\gamma} = h$, а удельная энергия в соответствии с уравнением Бернулли записывается в виде

$$\mathcal{Э} = h + \frac{\alpha v^2}{2g} = h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2} \qquad (2.5)$$

При заданном расходе Q вода через данное сечение русла может протекать с различными глубинами h (в зависимости от уклона русла, от его шероховатости и т.п.). Поэтому выражение удельной энергии $\mathcal{Э}$ для правильной формы живого сечения есть функция глубины потока $\mathcal{Э} = f(h)$, которую можно представить кривой (рис.4), имеющей один минимум.

Как видно, кривая $\mathcal{Э} = f(h)$ имеет две асимптоты: верхней асимптотой является прямая, направленная под углом 45^0 к осям координат (биссектриса прямого угла); нижней – горизонтальная ось графика. Площадь, покрытая на чертеже штриховкой, дает эпюру изменения скоростного напора $\frac{\alpha v^2}{2g}$.

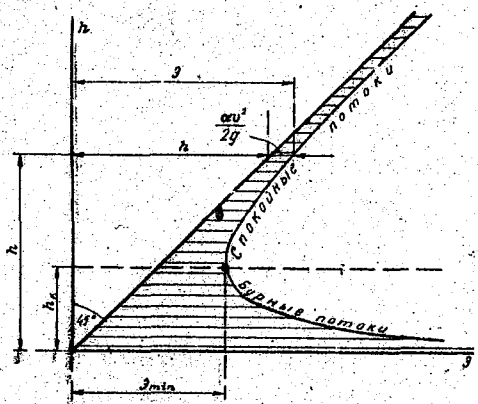

Рис.4. График удельной энергии сечения.

2.2.2. Критическая глубина

Минимальному значению удельной энергии сечения $\mathcal{Э}_{min}$ на рис.4 отвечает некоторая вполне определенная глубина потока. Эта глубина называется критической и обозначается через $h_к$. В общем случае величину $h_к$ можно было бы определить, построив предварительно для данного поперечного сечения русла и заданной величины Q график

$\mathcal{Э} = f(h)$. Однако такой способ отыскания $h_к$ неудобен, так как минимум кривой $\mathcal{Э} = f(h)$ выражен нерезко и поэтому найти значение критической глубины с достаточной точностью по этой кривой, обычно, не удается.

Установим зависимость, которой следует пользоваться для определения критической глубины. Продифференцируем выражение (2.5) по h, принимая во внимание из рис.3, что $d\omega = B dh$ и считая $Q = const$. При критической глубине функция $\mathcal{Э} = f(h)$ имеет минимум, следовательно, производная $\frac{d\mathcal{Э}}{dh}$ при глубине $h = h_к$ обращается в нуль. В результате получим

$$\frac{d\mathcal{Э}}{dh} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \frac{B_к}{\omega_к^3} = 0, \qquad (2.6)$$

или

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{\omega_к^3}{B_к}, \qquad (2.7)$$

где гидравлические элементы $\omega_к$ и $B_к$ отвечают критической глубине.

Уравнением (2.7) следует пользоваться для определения критической глубины $h_к$ при любой заданной форме русла и при заданном расходе Q. Для определения $h_к$ применяем графоаналитический способ: задаемся различными значениями h, вычисляем B, ω и $\frac{\omega^3}{B}$ и строим график $\frac{\omega^3}{B} = f(h)$. Пользуясь построенной кривой, находим точку, абсцисса которой на оси $\frac{\omega^3}{B}$ равна $\frac{\alpha Q^2}{g}$. Ордината этой точки, как это следует из уравнения (2.7), и будет критической глубиной $h_к$.

В случае прямоугольного русла решение может быть получено аналитическим способом, непосредственно из уравнения (2.7). При этом $B = const$, $\omega = Bh$. Уравнение (2.7) принимает вид

$$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{B^3 h_к^3}{B} = B^2 h_к^3, \qquad (2.8)$$

откуда

$$h_к = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{g B^2}} = \sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}}, \qquad (2.9)$$

где $q = \frac{Q}{B}$ – единичный расход воды.

2.2.3. Критический уклон

Критическим уклоном $i_к$ называется уклон дна потока, при котором заданный расход Q проходит в условиях равномерного движения с минимальным значением удельной энергии сечения, т.е. уклон, при котором нормальная глубина h_o равна критической глубине $h_к$ для дан-

ного расхода Q .

Очевидно, если $i_к > i$, то $h_к < h_о$; если $i_к < i$, то $h_к > h_о$ и если $i_к = i$, то $h_к = h_о$.

Выражение для вычисления $i_к$ можно получить из (2.7), если входящую в него величину Q выразить по формуле Шези для равномерного движения при $h_о = h_к$ и $i_о = i_к$:

$$Q = \omega_к C_к \sqrt{R_к i_к} . \qquad (2.10)$$

Подставляя (2.10) в (2.7) и принимая $R_к = \frac{\omega_к}{\chi_к}$, получим

$$i_к = \frac{q}{\alpha C_к^2} \cdot \frac{\chi_к}{B_к} , \qquad (2.11)$$

где $\chi_к$ – длина смоченного периметра при критической глубине.

В потоках значительной ширины по сравнению со средней глубиной (например, реки равнинного типа) можно с достаточной степенью точности принять $\chi_к \approx B_к$ и $R_к \approx h_к$. В этом случае получим упрощенное выражение для критического уклона

$$i_к = \frac{q}{\alpha C_к^2} . \qquad (2.12)$$

2.2.4. Спокойное, бурное и критическое состояние потока

Различают три состояния безнапорного потока:

1) спокойное состояние потока, когда действительные глубины больше критической глубины $h > h_к$;

2) бурное состояние потока, когда $h < h_к$;

3) критическое состояние потока, когда $h = h_к$.

Обратимся к рис.4. Точка, отвечающая минимуму удельной энергии сечения, соответствует критическому состоянию потока и разделяет кривую $Э = f(h)$ на две ветви.

Спокойному движению отвечает верхняя ветвь кривой $Э = f(h)$, откуда видно, что спокойное движение характеризуется условием $\frac{dЭ}{dh} > 0$, т.е. с увеличением глубины удельная энергия возрастает.

Бурному движению отвечает нижняя ветвь кривой $Э = f(h)$, откуда видно, что бурное движение характеризуется условием $\frac{dЭ}{dh} < 0$, т.е. здесь с возрастанием h величина $Э$ убывает.

Примером спокойных потоков служат равнинные реки с малыми продольными уклонами, бурных – горные потоки с большими уклонами. Однако следует помнить, что в одном и том же русле поток в одних условиях может находится в бурном состоянии, а в других условиях –

в спокойном состоянии. При этом уклон дна водотока может быть каким угодно ($i > 0$, $i = 0$, $i < 0$). Состояние потока, следовательно, можно определить, сопоставляя фактические глубины с критической при одном и том же расходе.

Для определения состояния потока часто пользуются безразмерным параметром, именуемым числом Фруда и обозначаемым символом Fr .

В случае прямоугольного русла (плоская задача) этот параметр определяется формулой

$$Fr = \frac{\alpha v^2}{g h}, \qquad (2.13)$$

где v и h – соответственно средняя скорость течения и глубина потока в данном сечении.

Имея в ивду, что $\omega = Bh$ и $Q = \omega v$, формуду (2.13) можно записать в таком виде:

$$Fr = \frac{\alpha Q^2}{g} \cdot \frac{B}{\omega^3}. \qquad (2.14)$$

Сравнивая (2.6) и (2.14), получаем, что при критической глубине число Фруда равно единице. Это значение называется критическим. Критерий, определяющий спокойное и бурное состояния потока, можно записать в такой форме: $Fr \gtrless 1$.

2.3.-Формы кривых свободной поверхности потока при неравномерном движении в открытом русле

Прежде чем перейти к интегрированию дифференциального уравнения неравномерного движения, необходимо выяснить, какой вид может иметь искомая свободная поверхность потока. С этой целью обратимся к исследованию полученных выше уравнений (2.2), (2.3) и (2.4).

2.3.1. Русло с прямым уклоном ($i > 0$)

Приведем уравнение (2.2) к виду, удобному для исследования. С этой целью рассмотрим отдельно числитель (τ) и знаменатель (χ) правой части этого уравнения.

Числитель правой части уравнения (2.2)

$$\tau = i - \frac{Q^2}{K^2} = i\left(1 - \frac{K_0^2}{K^2}\right), \qquad (2.15)$$

где расход Q выражен по формуле равномерного движения $Q = K_0\sqrt{i}$, K_0 – модуль расхода в условиях равномерного движения.

Знаменатель правой части уравнения (2.2)

$$\mathcal{Z} = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g}\cdot\frac{B}{\omega^3} = 1 - \frac{f(h_K)}{f(h)}, \qquad (2.16)$$

где по уравнению (2.7) $\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{\omega_K^3}{B_K} = f(h_K)$, а $\frac{\omega^3}{B} = f(h)$.

Отметим, что ограничимся рассмотрением только русел правильной формы, для которых $f(h)$ и K непрерывно возрастают с увеличением глубины наполнения.

Подставляя найденные выражения (2.15) и (2.16) в уравнение (2.2), получаем

$$\frac{dh}{ds} = \frac{i\left(1 - \frac{K_0^2}{K^2}\right)}{1 - \frac{f(h_K)}{f(h)}} = \frac{i}{\mathcal{Z}}. \qquad (2.17)$$

Рассматривая неравномерное движение в русле с прямым уклоном ($i > 0$), различаем три случая:

I-й, характеризуемый условиями $h_0 > h_K$ и $i_0 < i_K$;

2-й, характеризуемый условиями $h_0 < h_K$ и $i_0 > i_K$;

3-й, характеризуемый условиями $h_0 = h_K$ и $i_0 = i_K$.

Рассмотрим отдельно каждый из намеченных случаев.

I-й случай представлен на рис.5 тремя кривыми свободной поверхности, отвечающими каждой из трех зон (a, b, c).

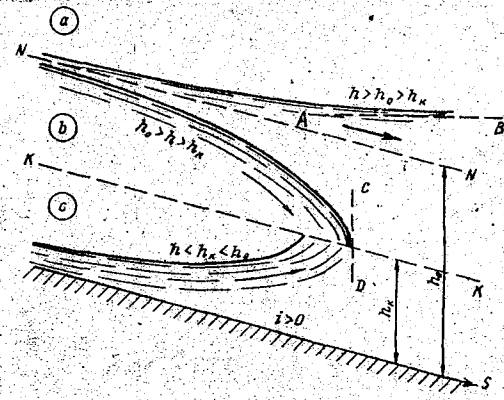

Рис.5. Формы кривых свободной поверхности при $i_0 < i_K$.

Зоне a отвечает кривая подпора. Она появляется в русле, когда $h > h_0 > h_K$. Используя уравнение (2.17), докажем, что кривая свободной поверхности в зоне a имеет форму, показанную на рис.5. Так как для данной кривой имеется условие $h > h_0 > h_K$, то она

Российский государственный
гидрометеорологический
институт
БИБЛИОТЕКА
195196, СПб. Малоохтинский пр., 98

характеризуется неравенствами $K^2 > K_0^2$ и $f(h) > f(h_K)$. Следовательно, в уравнении (2.17) $\tau > 0$ и $\zeta > 0$, а поэтому $\frac{dh}{ds} > 0$; отсюда заключаем, что глубины потока h по течению увеличиваются, т.е. в зоне a действительно получаем кривую подпора. При стремлении $h \to \infty$, K^2 и $f(h)$ также стремятся к бесконечности; в то же время величины K_0^2 и $f(h_K)$ сохраняют свои значения. Следовательно, при стремлении $h \to \infty$, согласно (2.17), $\frac{dh}{ds} \to i$; отсюда заключаем, что в низовой части кривая подпора в зоне a имеет горизонтальную асимптоту АВ. Таким образом, вниз по течению кривая подпора будет все более и более приближаться к горизонтальной прямой. При стремлении h к h_0 (см. левый конец кривой на рис.5) величина K^2 стремится к K_0^2, поэтому, согласно (2.17), производная $\frac{dh}{ds} \to 0$, следовательно, в верхней части кривая подпора в зоне a имеет асимптоту в виде линии нормальных глубин N-N.

Зоне b (рис.5) отвечает кривая спада. Она появляется в русле, когда $h_0 > h > h_K$, следовательно, $K_0^2 > K^2$ и $f(h) > f(h_K)$. Тогда, согласно (2.17), $\tau < 0$ и $\zeta > 0$, а поэтому $\frac{dh}{ds} < 0$; отсюда заключаем, что глубины потока h вниз по течению уменьшаются, т.е. в зоне b действительно получаем кривую спада. При стремлении h к h_0 величина K^2 стремится к K_0^2, поэтому, согласно (2.17), производная $\frac{dh}{ds} \to 0$, следовательно, в левой (верхней) части кривая спада в зоне b имеет асимптоту в виде линии нормальных глубин N-N. При стремлении h к h_K знаменатель правой части уравнения (2.17) обращается в нуль и, следовательно, величина $\frac{dh}{ds} \to \infty$; отсюда заключаем, что в низовой части кривая спада в зоне b имеет вертикальную касательную CD (водопад), т.е. подходит к линии критических глубин К-К под углом 90^0.

Зоне С (рис.5) отвечает кривая подпора. Она появляется в русле, когда $h < h_K < h_0$. Рассуждая, как и выше, можно с помощью уравнения (2.17) показать, что кривая в зоне С обладает следующими свойствами: она является кривой подпора, на правом своем конце имеет вертикальную касательную (гидравлический прыжок), асимптот нет, выпуклость ее обращена вниз, длина ее является конечной.

2-й случай, характеризуемый условиями $h_0 < h_K$ и $i_0 > i_K$, представлен на рис.6. Путем исследования уравнения (2.17), проводимого точно так же, как и в I-м случае, легко доказать, что имеют место три кривые свободной поверхности, отвечающие каждой из трех зон (a, b, c). Та или другая кривая появляется в русле в зависимости от того, в какой зоне (a, b или c) мы фиксируем точку

свободной поверхности с глубиной h .

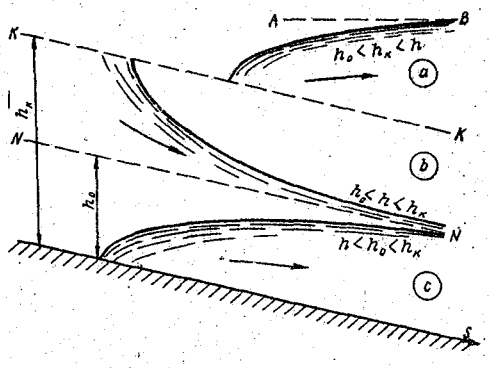

Рис.6. Формы кривых свободной поверхности при $i_0 > i_к$.

3-й случай, характеризуемый условиями $h_0 = h_к$ и $i_0 = i_к$, представлен на рис.7. Здесь линии N-N и К-К совпадают, поэтому зона b исчезает и остаются только две зоны a и c . Соответственно этому получаем две кривые свободной поверхности. Путем исследования уравнения (2.17) можно доказать, что эти кривые являются кривыми подпора и имеют форму, показанную на рис.7.

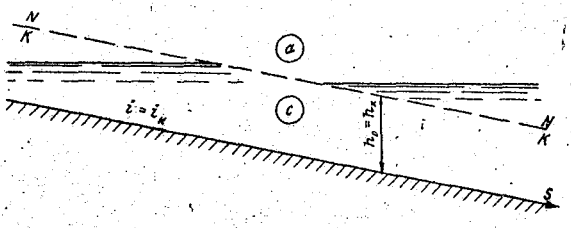

Рис.7. Формы кривых свободной поверхности при $i_0 = i_к$.

Как видно, при $i > 0$ всего получаем восемь различных свободных поверхностей (относящихся к случаю неравномерного движения): шесть из них являются кривыми подпора; две – кривыми спада. Заметим, что кривой подпора называется такая кривая свободной поверхности, вдоль которой (по течению) глубины потока возрастают; кривой спада – кривая свободной поверхности вдоль которой глубины потока уменьшаются.

2.3.2. Русло с горизонтальным дном ($i = 0$)

После приведения уравнения (2.3) к виду, удобному для исследования, и анализа данного уравнения легко показать, что в случае $i = 0$ может иметь место одна из двух форм свободных поверхностей, показанных на рис.8.

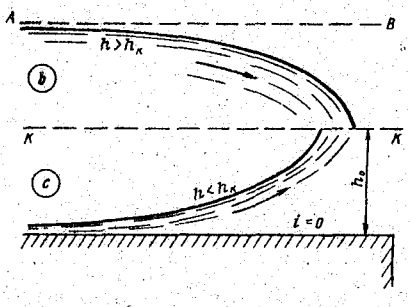

Рис.8. Формы кривых свободной поверхности при $i = 0$.

В данном случае $h_0 = \infty$, поэтому зона a исчезает (линия $N - N$ располагается на бесконечно большом расстоянии от линии дна); остаются только зоны b и c . Зоне b отвечает кривая спада. На левом своем конце она имеет горизонтальную асимптоту AB (рис.8), удаленную на бесконечно большое расстояние от линии дна русла. Зоне c отвечает кривая подпора.

2.3.3. Русло с обратным уклоном дна ($i < 0$)

После приведения уравнения (2.4) к виду, удобному для исследования, и анализа данного уравнения можно показать, что в случае $i < 0$ может иметь место одна из двух форм свободных поверхностей, показанных на рис.9. Здесь, как и в случае $i = 0$, получаем в зоне b кривую спада, а в зоне c – кривую подпора.

Как видно, для случая неравномерного движения воды в призматическом русле имеют место двенадцать форм кривых свободной поверхности. Следует запомнить, что кривые свободной поверхности всегда подходят к линии $N - N$ асимптотически, к линии же К–К, имея вертикальную касательную и заканчиваясь при спаде водопадом, при подпоре – гидравлическим прыжком. Кривая свободной поверхности данной формы никогда не пересекает линий К–К и $N - N$.

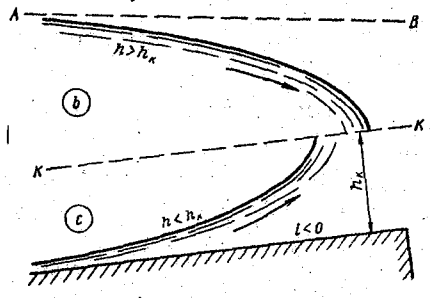

Рис.9. Формы кривых свободной поверхности при $i < 0$.

2.4. Интегрирование дифференциального уравнения неравномерного движения воды в русле с прямым уклоном дна ($i > 0$)

Преобразуем дифференциальное уравнение неравномерного движения воды в русле с прямым уклоном дна (2.2) к виду, удобному для интегрирования.

Знаменатель правой части уравнения (2.2) представим в виде

$$\zeta = 1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \cdot \frac{B}{\omega^3} = 1 - j \frac{K_0^2}{K^2}, \qquad (2.18)$$

где $j = \frac{\alpha i C^2}{g} \cdot \frac{B}{\chi}$; $K_0 = \frac{Q}{\sqrt{i}}$; $K = \omega C \sqrt{R}$.

Подставляя выражения для числителя (2.15) и знаменателя (2.18) в уравнение (2.2), получаем

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{1 - \frac{K_0^2}{K^2}}{1 - \frac{K_0^2}{K^2}}. \qquad (2.19)$$

Введем дополнительное обозначение $\frac{K}{K_0} = \varkappa$, где $\varkappa$ называется относительным модулем расхода.

Применяя это обозначение, окончательно вместо (2.2) получаем

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{\varkappa^2 - 1}{\varkappa^2 - j}. \qquad (2.20)$$

Для интегрирования уравнения (2.20) Б.А.Бахметев предложил использовать приближенную показательную зависимость

$$\left(\frac{K}{K_0}\right)^2 = \left(\frac{h}{h_0}\right)^x, \qquad (2.21)$$

где X – постоянный для данного русла показатель степени, зависящий от формы и размеров поперечного сечения, а также от шероховатости русла, называемый гидравлическим показателем русла.

Величину гидравлического показателя русла можно определить с помощью зависимости (2.21). Логарифмируя ее и принимая $h = h_{ср}$, получим

$$X = 2\,\frac{\lg K_{ср} - \lg K_0}{\lg h_{ср} - \lg h_0}\,, \qquad (2.22)$$

где $h_{ср}$ – средняя глубина на данном участке потока; $K_{ср}$ – модуль расхода, отвечающий этой глубине.

Введем в рассмотрение относительную глубину η, определяемую как отношение глубины h в данном сечении к нормальной глубине h_0

$$\eta = \frac{h}{h_0}\,. \qquad (2.23)$$

Показательную зависимость (2.21) запишем в такой форме:

$$\varkappa^2 = \eta^x\,. \qquad (2.24)$$

Воспользовавшись этим соотношением, преобразуем уравнение (2.20) следующим образом:

$$\frac{dh}{ds} = i\,\frac{\eta^x - 1}{\eta^x - j}\,. \qquad (2.25)$$

Дифференцируя равенство (2.23), будем иметь:

$$dh = h_0 d\eta\,. \qquad (2.26)$$

Подставляя значение дифференциала dh в предыдущее уравнение и отделяя переменные, после соответствующих преобразований получим:

$$\frac{i}{h_0}\,ds = d\eta + (1-j)\,\frac{d\eta}{\eta^x - 1}\,. \qquad (2.27)$$

Дифференциальное уравнение (2.27) составлено для произвольной элементарной части потока длиной ds (см.рис.2). После интегрирования этого уравнения от сечения I–I до сечения 2–2 получим

$$\frac{i}{h_0}(s_2 - s_1) = \eta_2 - \eta_1 - \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{1-j}{1-\eta^x}\,d\eta\,, \qquad (2.28)$$

где $\eta_1 = \frac{h_1}{h_0}$, $\eta_2 = \frac{h_2}{h_0}$.

Как показывают подсчеты, j обычно мало изменяется с изменением глубины потока. Имея это в виду, $(1-j)$ можно вынести за

знак интеграла, приписав величине j некоторое среднее значение для рассматриваемого участка потока, которое далее будем обозначать через $\bar{j}$. Учитывая, что $S_2 - S_1 = \ell$, вместо (2.28) получим

$$\frac{i\ell}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 - (1-\bar{j})\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{d\eta}{\eta^x - 1}. \qquad (2.29)$$

Считая, что для данного русла $X = const$, подынтегральную функцию в уравнении (2.29) следует рассматривать как функцию только η. Поэтому можно написать

$$\int \frac{d\eta}{1-\eta^x} = Б(\eta) + C_0, \qquad (2.30)$$

где $Б(\eta)$ носит название функции Бахметева, а C_0 – произвольная постоянная величина.

Пользуясь обозначением (2.30), уравнение (2.29) окончательно представим в виде

$$\frac{i\ell}{h_0} = \eta_2 - \eta_1 - (1-\bar{j})[Б(\eta_2) - Б(\eta_1)]. \qquad (2.31)$$

Это и есть уравнение кривой свободной поверхности потока АВ (см.рис.2). Оно называется уравнением неравномерного движения или иначе – уравнением Бахметева (для случая $i > 0$). Величины $Б(\eta)$, входящие в уравнение (2.31), вычислены и сведены в таблицы. Установив для данного русла величину X, можно легко найти по величинам η_1 и η_2 соответствующие им функции $Б(\eta_1)$ и $Б(\eta_2)$.

Если в зависимости (2.24) принять $X = 2$, то будем иметь $\eta = \chi$. В этом частном случае, предложенном Н.Н.Павловским, уравнение (2.31) получит вид

$$\bar{a}\, i\ell = \chi_2 - \chi_1 - (1-\bar{j})[П(\chi_2) - П(\chi_1)]. \qquad (2.32)$$

Величина $\bar{a}$ определяется формулой

$$\frac{d\chi}{dh} = \frac{\chi_2 - \chi_1}{h_2 - h_1} = \bar{a} = const, \qquad (2.33)$$

где h_1 и h_2 – глубины в сечениях I-I и 2-2; χ_1 и χ_2 – соответствующие им значения относительного модуля расхода.

Функция Павловского $П(\chi)$ выражает интеграл

$$\int \frac{d\chi}{1-\chi^2} = П(\chi), \qquad (2.34)$$

значения которого определяются по таблицам или по формулам:

$$П(\chi) = \frac{1}{2}\ln\frac{\chi+1}{\chi-1} \quad (\chi>1) \quad \text{или} \quad П(\chi) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\chi}{1-\chi} \quad (\chi<1). \qquad (2.35)$$

3. НЕРАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВОДЫ В ЕСТЕСТВЕННЫХ (РЕЧНЫХ) РУСЛАХ

3.1. Общие указания

Рассматривая движение воды в естественных руслах, всегда сталкиваются с неравномерным ее движением. Такое движение обусловливается тем, что уклоны дна и поперечные сечения в значительной мере изменяются вдоль потока.

При проектировании плотин на реках, а также при проектировании расчисток естественных русел приходится строить кривые свободной поверхности потока, которые будут наблюдаться после изменения его естественного режима. Знать заранее положение кривой свободной поверхности потока с нарушенным естественным режимом весьма важно; это позволит составить проект обвалования, если оно требуется по топографии местности, вычислить убытки от затопления, вызванного подпором и т.д.

Полученное выше дифференциальное уравнение неравномерного движения воды в случае естественных русел интегрированию не поддается и приходится обращаться к специальным методам расчета, которые являются в значительной степени приближенными. Применяемые в этом случае методы расчета могут быть сведены к двум основным:

1-й метод заключается в замене действительного естественного русла в пределах расчетного участка фиктивным призматическим руслом с однообразным уклоном дна и неизменной по длине потока формой поперечного сечения;

2-й метод заключается в построении кривой свободной поверхности путем непосредственного суммирования и основан на применении уравнения Бернулли.

Относительно точное решение для естественных русел может быть получено только при наличии достаточных данных, освещающих формы поперечных и продольного профилей русла, коэффициенты шероховатости русла, величины ожидаемых расходов, кривые связи $Q = f(h)$ для отдельных створов водотока в естественном его состоянии.

3.2. Построение кривых свободной поверхности потока в естественном русле путем замены его фиктивным призматическим руслом

Данный метод применяется главным образом для ориентировочных подсчетов. Используя его, приходится решать два вопроса.

I. Как выполнить замену естественного русла на данном расчетном участке фиктивным призматическим руслом?

2. Каким образом следует рассчитывать намеченное фиктивное русло, т.е. как определить отметку горизонта воды в начале русла, зная отметку горизонта в конце его?

Чаще всего естественное русло заменяют или фиктивным широким прямоугольным, или фиктивным широким параболическим. При выборе одного из двух следует остановиться на том, которое по своей форме ближе к естественным поперечным сечениям данного русла.

Уклон дна фиктивного русла назначают

$$i = J_0 = \frac{\Delta_0}{l}, \qquad (3.I)$$

где l – длина рассматриваемого расчетного участка; Δ_0 – падение свободной поверхности на длине l в естественном состоянии при том расходе Q, для которого необходимо построить кривую свободной поверхности; J_0 – уклон свободной поверхности в естественном состоянии при равномерном движении. Как видно, принимая i по формуле (3.I), линию дна $\mathcal{D}-\mathcal{D}$ фиктивного русла (рис.I0) назначаем параллельно свободной поверхности E_0-E_0 в естественном состоянии. Вопрос о высотном положении линии дна $\mathcal{D}-\mathcal{D}$ решается следующим образом: от линии E_0-E_0, отвечающей заданному расходу Q, откладываем вниз отрезок, равный нормальной глубине h_0 фиктивного русла, и получаем положение линии $\mathcal{D}-\mathcal{D}$.

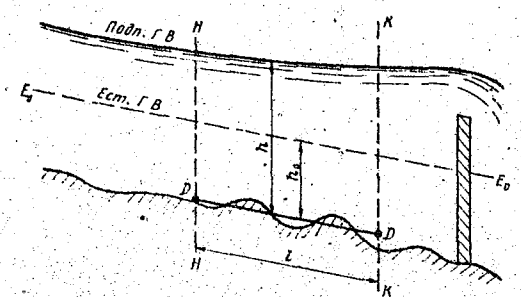

Рис.I0. К выбору фиктивного призматического русла.

Рассмотрим определение глубины h_0 в случае широкого прямоугольного фиктивного русла. Представим на рис.II некоторое среднее поперечное сечение естественного русла.

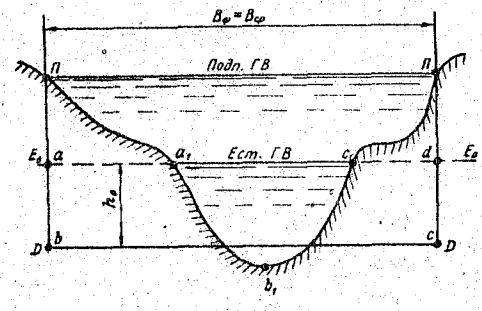

Рис.II. Определение глубины h_0 в случае широкого прямоугольного фиктивного русла.

Через П – П обозначим уровень воды после постройки плотины (подпертый уровень). Величина B_{cp} – средняя ширина потока поверху в подпертом состоянии – заранее нам неизвестна и устанавливается приблизительно по уровню П – П. Ширину фиктивного прямоугольного русла принимаем $B_\varphi = B_{cp}$. Глубину h_0 находим из условия, что живое сечение фиктивного русла $abcd$ (рис.II) пропускает при равномерном режиме и при уклоне i (3.I) такой же расход, как и живое сечение $a_1b_1c_1$ действительного русла.

Исходя из этого условия, можем записать

$$Q = \omega_\varphi C_\varphi \sqrt{R_\varphi i}\,, \qquad (3.2)$$

где $\omega_\varphi = B_{cp} h_0$; $R_\varphi = h_0$; индекс "φ" обозначает параметры, относящиеся к фиктивному руслу. После подстановки этих значений в (3.2) формула для определения h_0 примет вид

$$h_0 = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{B_{cp}^2 C_\varphi^2 \mathcal{J}_0}}\,. \qquad (3.3)$$

По этой формуле и определяют h_0, установив предварительно величину коэффициента Шези C_φ для какой-либо глубины фиктивного русла, взятой на глаз.

Определение глубины h_0 в случае широкого параболического русла несколько сложнее, так как ее приходится находить методом подбора.

При дальнейшем расчете неравномерного движения в фиктивном призматическом русле вводят следующие допущения:

1) в случае спокойного движения, которое обычно рассматривается, значение j мало и его принимают равным нулю;

2) коэффициент Шези C считают не изменяющимся с изменением глубины наполнения русла;

3) гидравлический показатель русла X округляют до ближайшего целого его значения и принимают: для прямоугольного фиктивного русла X = 3; для параболического фиктивного русла X = 4.

Пользуясь этими допущениями, расчет неравномерного движения может быть выполнен, например, по методу Бахметева или Павловского.

3.3. Построение кривых свободной поверхности потока в естественном русле путем непосредственного суммирования

Этот метод построения кривых свободной поверхности применяется в инженерной практике наиболее часто, причем непосредственное суммирование осуществляется различными способами. Здесь наряду с аналитическими способами можно указать целый ряд графоаналитических и графических способов. При расчетах по этому методу оперируют с некоторыми средними значениями гидравлических элементов потока, которые и принимают за действительные характеристики данного водотока.

Так как гидравлические элементы потока в естественных условиях подвергаются значительным изменениям по его длине, то при установлении средних значений этих элементов данный водоток необходимо разбить с помощью раздельных створов (или раздельных сечений) на участки и для каждого из этих участков установить эти значения. Только при таких условиях средние значения характеристик будут приближаться к действительным их значениям и, следовательно, более или менее правильно отражать естественное состояние потока.

3.3.1. Разбивка водотока на участки

Разбивку водотока на участки осуществляют различными способами в зависимости от имеющегося гидрометрического материала.

Если имеются наблюденные естественные продольные профили сво-

бодной поверхности, то разбивку водотока на участки рекомендуется осуществлять таким образом, чтобы в пределах данного участка наблюдался по возможности однообразный уклон свободной поверхности и вместе с тем чтобы живое сечение не претерпевало резких изменений величины формы.

Если наблюденных естественных продольных профилей свободной поверхности нет, то при разбивке водотока на участки приходится руководствоваться только лишь данными о живых сечениях потока. В этом случае при решении задачи можно идти двумя путями: во-первых, водоток можно разбить на участки таким образом, чтобы на протяжении участков площади живого сечения были примерно постоянными; во-вторых, водоток можно разбить на участки так, чтобы в пределах одних участков наблюдалось только увеличение площади живого сечения (расширяющийся участок), а в пределах других – только уменьшение ее (суживающийся участок). Для такой разбивки используется график изменения площади живого сечения по длине потока. Первый из отмеченных здесь приемов нужно признать более целесообразным.

Что касается выбора длины участков, измеряемой или по геометрической оси потока, или по стрежню (по линии наибольших глубин), то эта длина определяется принятым способом разбивки водотока на участки и величиной падения Δ свободной поверхности потока в пределах участка (рис. I2). Величину падения Δ на участке обычно принимают не более 0,75 м.

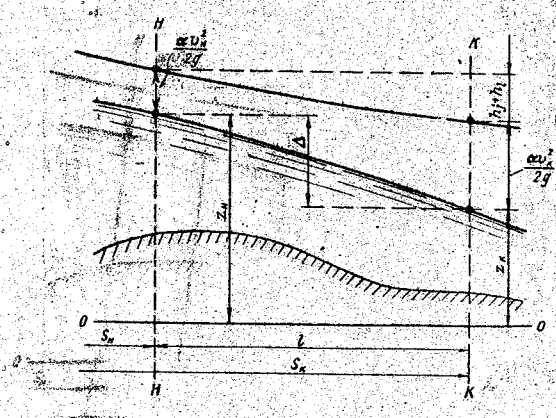

Рис. I2. К выводу основных расчетных зависимостей для естественного водотока.

Излагаемые ниже способы построения кривых свободной поверхности для естественных водотоков применимы лишь в тех случаях, когда расход потока в пределах каждого участка водотока остается постоянным. Поэтому, если водоток имеет притоки, то разбивать его на участки нужно таким образом, чтобы в устьях притоков или в непосредственной близости от них были расположены раздельные створы. В отдельные расчетные участки рекомендуется также выделять части естественных водотоков с поймами и участки в случае раздвоения русла.

3.3.2. Основные расчетные зависимости

Рассмотрим один из участков естественного водотока, ограниченный раздельными створами Н – Н и К – К (рис.12). Выше, в связи с выводом основного дифференциального уравнения установившегося неравномерного движения (I.5), имели зависимость (I.3). Учитывая возможность возникновения в естественном русле местных потерь напора, что обусловливается изменением живых сечений по длине потока, эту зависимость в данном случае следует переписать в более полном виде

$$-dz = dh_v + dh_\ell + dh_j \,, \tag{3.4}$$

где

$$dh_v = d\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right); \tag{3.5}$$

$$dh_\ell = \frac{v^2}{C^2 R} ds = \frac{Q^2}{K^2} ds \,. \tag{3.6}$$

Что касается местных потерь dh_j, то их принято представлять в виде

$$dh_j = \zeta d\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right) = \zeta dh_v \,, \tag{3.7}$$

где ζ – коэффициент сопротивления, зависящий от характера изменения живых сечений.

Подставляя (3.5), (3.6) и (3.7) в (3.4), имеем

$$-dz = (1+\zeta) d\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right) + \frac{Q^2}{K^2} ds \,. \tag{3.8}$$

Интегрируя (3.8) от сечения Н – Н до сечения К – К (рис.12), получим

$$z_н - z_к = (1+\zeta)\left(\frac{\alpha v_к^2}{2g} - \frac{\alpha v_н^2}{2g}\right) + Q^2 \int_{s_н}^{s_к} \frac{ds}{K^2} \,, \tag{3.9}$$

где $z_н$ и $z_к$ – отметки горизонтов воды в раздельных створах; $v_н$ и

$v_к$ – скорости в этих сечениях.

С некоторым приближением можно считать, что

$$Q^2\int_{S_н}^{S_к}\frac{dS}{K^2}=\frac{1}{\bar{K}^2}Q^2(S_к-S_н)=Q^2\frac{\ell}{\bar{K}^2}\,, \qquad (3.10)$$

где $\bar{K}^2$ – среднее значение модуля расхода на рассматриваемом участке.

Подставляя (3.10) в (3.9), получаем:

1) полную форму уравнения, учитывающую как изменение скоростного напора по длине потока, так и местные потери напора:

$$\Delta=z_н-z_к=Q^2\left[(1+\xi)\frac{\alpha}{2g}\left(\frac{1}{\omega_к^2}-\frac{1}{\omega_н^2}\right)+\frac{\ell}{\bar{K}^2}\right]; \qquad (3.11)$$

2) промежуточную форму, учитывающую изменение скоростного напора, но не учитывающую местные потери напора:

$$\Delta=z_н-z_к=Q^2\left[\frac{\alpha}{2g}\left(\frac{1}{\omega_к^2}-\frac{1}{\omega_н^2}\right)+\frac{\ell}{\bar{K}^2}\right]; \qquad (3.12)$$

3) упрощенную форму, не учитывающую изменений скоростного напора и местных потерь напора и учитывающую только потери напора по длине потока h_ℓ:

$$\Delta=z_н-z_к=Q^2\frac{\ell}{\bar{K}^2}\,. \qquad (3.13)$$

Последним упрощенным выражением главным образом и пользуются в практике. При помощи полученных уравнений (3.11)–(3.13) можно найти отметку $z_{н1}$, зная отметку горизонта воды $z_к$ в сечении $K-K$

3.3.3. Общий прием построения кривых свободной поверхности

При построении кривой свободной поверхности обычно являются известными: расход потока Q и отметка уровня воды в одном из граничных створов рассматриваемого участка водотока. Задачей расчета является отыскание отметки уровня воды в другом граничном створе этого участка.

Пусть, например, нам будет известна отметка $z_к$ уровня воды в конечном створе последнего (считая вниз по течению) участка водотока. Последним обычно является участок, непосредственно прилегающий к подпорному сооружению, так что построение кривой подпора ведется от сооружения вверх по течению.

Задачу можно решить, пользуясь одним из уравнений (3.11), (3.12) или (3.13). Поясним здесь только решение упрощенного урав-

нения (3.13). Для решения задачи перепишем его в виде

$$z_н - Q^2 \frac{\ell}{\bar{K}^2} = z_к . \qquad (3.14)$$

Как видно, левая часть этой зависимости является функцией $z_н$, т.е.

$$z_н - Q^2 \frac{\ell}{\bar{K}^2} = f(z_н); \qquad (3.15)$$

правая же часть зависимости (3.14) нам известна.

Имея это в виду, уравнение (3.14) решается в отношении $z_н$ методом графо-аналитического подбора следующим образом. Задаваясь произвольно рядом значений отметки $z_н$, находим соответствующие величины $\bar{K}^2$ и далее по выражению (3.15) - значения функции $f(z_н)$. На основании этих расчетов строится график функции $f(z_н)$, с помощью которого по величине $z_к$ определяется $z_н$. Найденная отметка $z_н$ уровня воды в замыкающем створе последнего участка является отметкой $z_к$ для предпоследнего участка и, следовательно, этот участок может быть подвергнут расчету аналогично тому, как это было изложено выше.

В результате подобных расчетов мы получим отметки уровня воды во всех интересующих нас створах и, таким образом, будем иметь возможность построить проектную кривую свободной поверхности.

В целях сокращения объема вычислительных работ при решении уравнения (3.14) следует пользоваться предварительно построенными вспомогательными графиками, изображающими зависимость различных гидравлических элементов от отметки уровня воды в данном створе.

3.4. Модуль сопротивления. Постулат инвариантности модуля сопротивления

При построении кривых свободной поверхности в естественных водотоках советская гидротехническая практика пользуется понятием модуля сопротивления. По предложению Н.Н.Павловского величину

$$\frac{\Delta}{Q^2} = F \qquad (3.16)$$

называют модулем сопротивления расчетного участка реки.

Н.М.Бернадский и А.Н.Рахманов показали, что модуль сопротивления F для равнинных рек не зависит от уклона свободной поверхности и его можно рассматривать как функцию только средней отметки уровня воды на участке, т.е. $F = f(\bar{z})$, где $\bar{z} = 1/2(z_н + z_к)$.

Это положение и составляет сущность постулата инвариантности (неизменности) модуля сопротивления, который можно иллюстрировать

следующим образом. Представим на рис.13 продольный разрез расчетного участка русла, ограниченный раздельными створами Н-Н и К-К. Пусть на данном участке при расходе Q_1 кривая свободной поверхности занимает положение $a_1 b_1$, чему соответствует падение уровня на участке Δ_1, а при расходе Q_2 - положение $a_2 b_2$ с падением Δ_2, причем и в том и в другом случае средняя отметка $\overline{z}$ уровня воды на участке одна и та же.

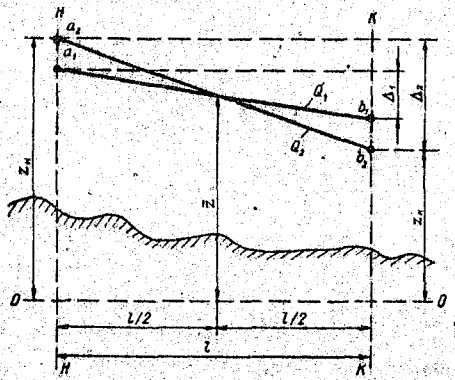

Рис.13. К постулату инвариантности модуля сопротивления.

В соответствии с высказанным выше постулатом инвариантности, модуль сопротивления в обоих рассматриваемых случаях должен быть одним и тем же, т.е. величины $\frac{\Delta_1}{Q_1^2}$ и $\frac{\Delta_2}{Q_2^2}$ должны быть одинаковыми.

Это свойство модуля сопротивления F дает возможность просто и притом достаточно точно построить кривую свободной поверхности в естественном водотоке.

3.5. Построение графика функции $F = f(\overline{z})$

Построение графиков функции $F = f(\overline{z})$ можно осуществить различными приемами. В одних случаях они могут быть построены с помощью непосредственного использования гидрометрических данных, в других, когда данных недостаточно, с помощью соответствующих расчетов.

3.5.I. Гидрометрический способ

Предположим, что в нашем распоряжении имеется целый ряд наблюденных естественных продольных профилей потока на расчетном участке, отвечающих расходам Q_1, Q_2, Q_3 и т.д.(рис.I4). Следовательно, мы можем найти для этого участка значения средней отметки $\bar{z}$ и падения Δ свободной поверхности, соответствующие наблюденным расходам. Затем, пользуясь зависимостью (3.I6), вычислим значения модуля сопротивления $F_1 = \frac{\Delta_1}{Q_1^2}$, $F_2 = \frac{\Delta_2}{Q_2^2}$, $F_3 = \frac{\Delta_3}{Q_3^2}$ и т.д.

По полученным данным строим график функции $F = f(\bar{z})$.

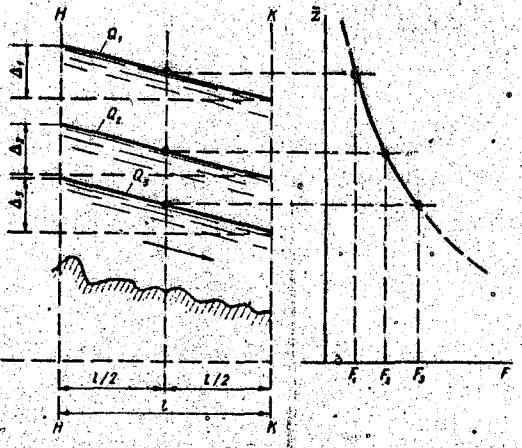

Рис.I4. Построение графика $F = f(\bar{z})$ по продольным профилям потока.

График функции $F = f(\bar{z})$ можно построить также с помощью кривых связи $Q = f(z)$, если эти кривые имеются для всех створов, которыми данный водоток разграничен на участки. Как видно из рис.I5, и в этом случае график функции $F = f(\bar{z})$ строится весьма просто.

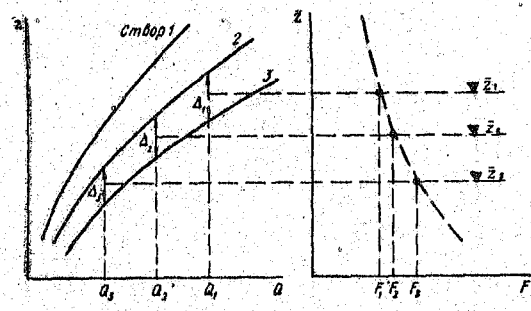

Рис.I5. Построение графика $F = f(\bar{z})$ по кривым $Q = f(z)$.

3.5.2. Способ гидравлического расчета

Если гидрометрические данные по интересующему нас водотоку ограничены, то при построении графика функции $F = f(\bar{z})$ приходится прибегать к гидравлическим расчетам. Важным этапом этих расчетов является установление расчетного значения коэффициента шероховатости.

В целях упрощения расчетов воспользуемся уравнением (3.I3). Тогда выражение для модуля сопротивления (3.I6) можно представить в виде

$$F = \frac{\ell}{\bar{K}^2} . \qquad (3.17)$$

Величину $\bar{K}$ можно определять по формуле $\bar{K} = \bar{\omega}\bar{C}\sqrt{\bar{R}}$, т.е. оперируя средними значениями гидравлических элементов в пределах данного участка потока, или по формуле $\bar{K} = 1/2(K_н + K_к)$, где $K_н$ и $K_к$ – значения модуля расхода на границах расчетного участка.

Задав ряд произвольных значений средней отметки $\bar{z}$ и определив соответствующие значения модуля сопротивления по формуле (3.I7), мы и получим данные для построения графика $F = f(\bar{z})$. Если подпорные отметки проектируемой кривой свободной поверхности превышают наивысшую наблюденную отметку свободной поверхности, то график $F = f(\bar{z})$ может быть проэкстраполирован графическим способом по тенденции на I0–I5%, как это показано пунктирной линией на рис.I4 и I5.

3.6. Построение кривых свободной поверхности в естественных водотоках с помощью постулата инвариантности модуля сопротивления

3.6.1. Способ А.Н.Рахманова

Предположим, что графики $F = f(\overline{z})$ для каждого участка рассматриваемого водотока построены. Кроме того, известны расход Q и отметка $z_к$ в конце последнего участка водотока. Задаем для этого участка произвольное значение средней отметки $\overline{z}$ уровня воды и по графику $F = f(\overline{z})$ находим соответствующее значение модуля сопротивления F. Далее с помощью (3.16) определяем падение Δ свободной поверхности в пределах данного участка и находим среднюю отметку уровня воды $\overline{z} = z_к + \frac{\Delta}{2}$.

Если найденное значение $\overline{z}$ совпадает со значением этой отметки, заданным ранее, то можно считать, что отметка $\overline{z}$ найдена правильно. В противном случае нужно задать новое значение средней отметки $\overline{z}$ и весь расчет повторить заново.

После того, как подобрана отметка $\overline{z}$ на участке, можно найти отметку $z_н$ в начале участка по формуле $z_н = \overline{z} + \frac{\Delta}{2}$.

На этом заканчивается расчет рассматриваемого участка водотока. Подобным же образом можно рассчитать соседний участок, приняв найденную отметку $z_н$ за исходную. Переходя, таким образом, от одного участка к другому, можно определить отметки свободной поверхности во всех интересующих нас створах и по ним построить кривую свободной поверхности. Как видно, построение кривой свободной поверхности по способу А.Н.Рахманова осуществляется методом подбора.

3.6.2. Способ Н.Н.Павловского

Н.Н.Павловский предложил два способа для построения кривых свободной поверхности в естественных водотоках: графо-аналитический и графический. Рассмотрим ниже только графический способ, основанный на использовании уравнения (3.13), при условии, что постулат инвариантности для рассматриваемого русла оказывается приемлемым.

Предположим, что весь водоток разделен на пять расчетных участков, величина расхода Q и отметка $z_к$ в конце последнего участка водотока нам известны. Для всех участков на одном чертеже совме-

щены графики функции $F = f(\overline{z})$, как это показано на рис.16. При построении графиков $F = f(\overline{z})$ перемещать их в горизонтальном направлении нельзя.

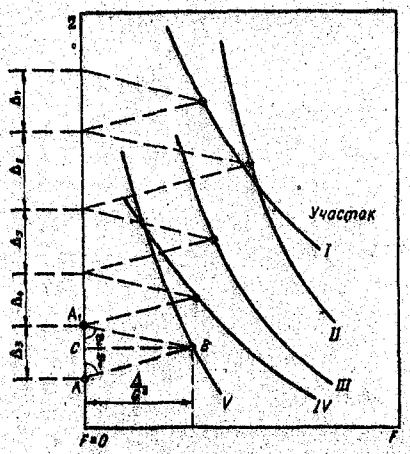

Рис.16. Определение отметок свободной поверхности по способу Н.Н.Павловского.

На чертеже (рис.16) выполним такое построение. Из точки A, лежащей на оси ординат и определяемой отметкой $z_к$ уровня воды в конце пятого участка, проведем прямую под углом φ к оси ординат до встречи с кривой $F = f(\overline{z})$ этого участка в точке B, причем величину $tg\,\varphi$ (с учетом масштабов шкал) подчиним условию:

$$tg\,\varphi = \frac{2}{Q^2} \qquad (3.18)$$

Из чертежа имеем:

$$tg\,\varphi = \frac{BC}{AC} = \frac{F}{AC} = \frac{1}{AC} \cdot \frac{\Delta}{Q^2} \qquad (3.19)$$

Приравнивая правые части выражений (3.18) и (3.19), получим $AC = \frac{\Delta}{2}$.

Отсюда следует, что если мы проведем из точки B прямую BA_1 под углом φ к оси ординат, то точка A_1 определит нам отметку $z_н$ уровня воды в начале рассматриваемого участка. Она же будет являться конечной отметкой $z_к$ для четвертого участка. Производя указанные построения для каждого из участков (рис.16), нетрудно определить отметки уровня воды во всех интересующих нас створах и по ним построить кривую свободной поверхности.

3.6.3. Способ Н.М.Бернадского

Введем в рассмотрение вместо модуля сопротивления F обратную функцию

$$\Psi = \frac{1}{F} = \frac{Q^2}{\Delta} . \qquad (3.20)$$

Функция $\Psi = f(\bar{z})$ обладает тем же свойством инвариантности, что и функция $F = f(\bar{z})$. Графики этой функции могут быть построены с помощью тех же приемов, что и графики функции $F = f(\bar{z})$.

Представим себе, что для рассматриваемого участка водотока мы имеем зависимость $\Psi = f(\bar{z})$ (рис.17).

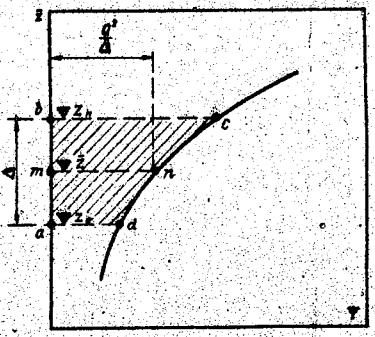

Рис.17. График функции $\Psi = f(\bar{z})$.

Возьмем на этой кривой две точки c и d, определяемые отметками свободной поверхности в начале и конце участка, т.е. отметками $z_н$ и $z_к$. Через точки c и d проведем прямые ad и bc, параллельные оси абсцисс. Очевидно, расстояние между этими прямыми равно падению свободной поверхности Δ на участке.

Подсчитаем величину площади Ω фигуры $abcd$, рассматривая последнюю как трапецию. Будем иметь $\Omega = \Delta \cdot mn$, где mn – средняя линия трапеции $abcd$.

Отрезок mn с достаточной степенью точности можно приравнять значению функции Ψ при средней отметке уровня воды на данном участке. Тогда получим $\Omega = \Delta \cdot \frac{Q^2}{\Delta} = Q^2$, т.е. площадь фигуры $abcd$ равна, с учетом масштабов, квадрату расхода Q, который соответствует заданному падению уровня воды Δ на участке.

Аналитически это можно записать в виде

$$Q^2 = \int_к^н f(\bar{z})\, d\bar{z} . \qquad (3.21)$$

Отсюда следует, что если постулат инвариантности модуля соп-

ротивления справедлив, то интеграл в правой части выражения (3.21), независимо от численных значений отметок $z_н$ и $z_к$, мы можем определять как площадь, ограниченную кривой $\Psi = f(\bar{z})$, осью ординат и двумя горизонтальными прямыми, отвечающими отметкам $z_н$ и $z_к$.

Так как величина Ψ является функцией только средней отметки $\bar{z}$, то и площадь, ограниченная кривой $\Psi = f(\bar{z})$ и осью ординат, будет функцией средней отметки; иными словами, правая часть выражения (3.21), написанная в форме неопределенного интеграла, может быть представлена в таком виде

$$\Phi(\bar{z}) = \int f(\bar{z})\, d\bar{z} + C, \qquad (3.22)$$

где $\Phi(\bar{z})$ – некоторая функция средней отметки $\bar{z}$.

Принимая во внимание это соотношение, перепишем выражение (3.21) так:

$$Q^2 = \Phi(z_н) - \Phi(z_к), \qquad (3.23)$$

где $\Phi(z_н)$ и $\Phi(z_к)$ – частные значения функции $\Phi(\bar{z})$, отвечающие границам рассматриваемого участка.

Кривую, определяемую выражением (3.22), Н.М.Бернадский называет "опорной кривой". Важно отметить, что функция $\Phi(\bar{z})$ обладает тем же свойством инвариантности, что и функция $\Psi = f(\bar{z})$. Это свойство функции $\Phi(\bar{z})$ и дает возможность применять опорную кривую для построения кривой свободной поверхности.

Предположим, что водоток разграничен на четыре участка и для каждого участка построены опорные кривые, причем все эти кривые совмещены на одном чертеже (рис.18).

Рассмотрим кривую четвертого участка; возьмем на ней две точки В и $В_1$, ординаты которых определяются отметками $z_к$ и $z_н$ свободной поверхности в конце и в начале участка. Тогда по смыслу уравнения (3.23) разность абсцисс точек В и $В_1$ должна быть равна Q^2, где Q – расход, отвечающий падению Δ свободной поверхности на участке. Отсюда следует, что если мы, располагая отметкой $z_к$ в конце участка, отложим горизонтальный отрезок $ВВ_2$, равный в принятом масштабе Q^2 (рис.18), и через точку $В_2$ проведем вертикальную линию до встречи с опорной кривой в точке $В_1$, то последняя точка определит собой отметку $z_н$ в начале участка.

Таким образом, располагая опорными кривыми и имея в своем распоряжении расчетный расход Q и отметку $z_к$ в конце последнего участка, мы можем выполнить построения, аналогичные предыдущим, для каждого участка и получить отметки кривой свободной поверхности во

всех раздельных створах.

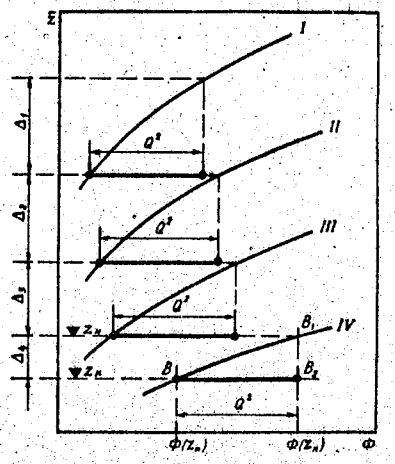

Рис.18. Определение отметок свободной поверхности по способу Н.М.Бернадского.

3.7. Построение кривых свободной поверхности в естественных руслах с поймами и при раздвоении русла

Рассмотрим построение кривых свободной поверхности в естественных руслах с поймами, когда гидрометрические данные отсутствуют и для нахождения зависимостей $F = f(\bar{z})$ или $\Phi = f(\bar{z})$ приходится прибегать к гидравлическим расчетам.

Основной прием расчета водотока в русле с поймой заключается в том, что поперечное сечение такого водотока рассматривается как составное, при этом профиль водотока разбивается вертикальными раздельными плоскостями на части, характерные для главного русла и для поймы.

Далее, пренебрегая взаимодействием частиц в плоскости раздела, полный расход потока определяем как сумму расходов отдельных его частей

$$Q = Q_2 + Q_n , \qquad (3.24)$$

где Q_2 – расход главного русла; Q_n – расход поймы.

В пределах рассматриваемого участка водотока падения свободной поверхности, отвечающие главному руслу и пойме, принимаются

одинаковыми

$$\Delta_2 = \Delta_n = \Delta \,. \qquad (3.25)$$

Воспользовавшись упрощенным уравнением (3.I3), получим:

$$\Delta_2 = \frac{Q_2^2 \ell_2}{\overline{K}_2^2}, \quad \Delta_n = \frac{Q_n^2 \ell_n}{\overline{K}_n^2}, \qquad (3.26)$$

откуда

$$Q_2 = \overline{K}_2 \sqrt{\frac{\Delta_2}{\ell_2}}, \quad Q_n = \overline{K}_n \sqrt{\frac{\Delta_n}{\ell_n}}. \qquad (3.27)$$

Подставляя (3.27) в (3.24) и принимая во внимание (3.25), а также полагая, что $\ell_2 = \ell_n = \ell$, будем иметь

$$Q = (\overline{K}_2 + \overline{K}_n)\sqrt{\frac{\Delta}{\ell}}. \qquad (3.28)$$

Выражение (3.28) можно переписать так:

$$\Delta = \frac{Q^2 \ell}{\overline{K}^2}, \qquad (3.29)$$

где $\overline{K} = \overline{K}_2 + \overline{K}_n$. (3.30)

Далее при построении кривых свободной поверхности в естественных руслах с поймой можно воспользоваться теми же приемами, которые были применены к руслам без поймы, но только среднее значение $\overline{K}$ модуля расхода нужно определять по формуле (3.30).

Рассмотренный прием построения кривых свободной поверхности может быть использован также и при раздвоении (бифуркации) естественного русла, где имеется главное русло и более или менее значительный рукав.

Рассуждая подобно предыдущему, в рассматриваемом случае вместо (3.28) получим

$$Q = (\overline{K}_2 + \overline{K}_\rho \sqrt{\frac{\ell_2}{\ell_\rho}})\sqrt{\frac{\Delta}{\ell_2}}, \qquad (3.3I)$$

где Δ – падение свободной поверхности между начальным и конечным створами. Параметры с индексом "ρ" относятся к рукаву.

Выражение (3.3I) можно переписать в виде

$$\Delta = \frac{Q^2 \ell_2}{\overline{K}^2}, \qquad (3.32)$$

где $\overline{K} = \overline{K}_2 + \overline{K}_\rho \sqrt{\frac{\ell_2}{\ell_\rho}}$. (3.33)

Если при этом $\ell_2 = \ell_\rho$, то формула (3.33) получит вид

$$\overline{K} = \overline{K}_2 + \overline{K}_\rho \,. \qquad (3.34)$$

При использовании формул (3.30) и (3.34) коэффициенты шероховатости для главного русла, для рукава и для поймы следует назна-

чать в соответствии с имеющимися данными о шероховатости водотока, так как они могут значительно отличаться друг от друга.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахутин А.Н. Гидравлика.-М.: Издание ВИА, 1959.-с.217-241.

2. Караушев А.В. Речная гидравлика.-Л.: Гидрометеоиздат,1969. -с.144-187, 210-235.

3. Киселев П.Г. Гидравлика. Основы механики жидкости. -М.: Энергия, 1980. -с.215-238.

4. Чертоусов М.Д. Гидравлика. Специальный курс. -М.-Л.: Госэнергоиздат, 1962.-с.29-139.

5. Чугаев Р.Р. Гидравлика. -Л.: Энергоиздат. Ленигр.отд-ние, 1982. -с.268-323.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Предисловие..... 3
I.Неравномерное установившееся движение воды в открытых руслах..... 4
I.I. Понятие о неравномерном движении..... 4
I.2. Основное дифференциальное уравнение неравномерного движения воды..... 7
2. Неравномерное движение воды в призматических руслах..... 12
2.I. Дифференциальное уравнение неравномерного движения для случая призматического русла..... 12
2.2. Некоторые понятия, используемые при изучении неравномерного движения..... 12
2.2.I. Удельная энергия сечения..... 12
2.2.2. Критическая глубина..... 13
2.2.3. Критический уклон..... 14
2.2.4. Спокойное, бурное и критическое состояния потока..... 15
2.3. Формы кривых свободной поверхности потока при неравномерном движении в открытом русле..... 16
2.3.I. Русло с прямым уклоном ($i > 0$)..... 16
2.3.2. Русло с горизонтальным дном ($i = 0$)..... 20
2.3.3. Русло с обратным уклоном дна ($i < 0$)..... 20
2.4. Интегрирование дифференциального уравнения неравномерного движения воды в русле с прямым уклоном дна ($i > 0$)..... 21
3. Неравномерное движение воды в естественных (речных) руслах..... 24
3.I. Общие указания..... 24
3.2. Построение кривых свободной поверхности потока в естественном русле путем замены его фиктивным призматическим руслом..... 25
3.3. Построение кривых свободной поверхности потока в естественном русле путем непосредственного суммирования..... 27
3.3.I. Разбивка водотока на участки..... 27
3.3.2. Основные расчетные зависимости..... 29
3.3.3. Общий прием построения кривых свободной поверхности.. 30
3.4. Модуль сопротивления. Постулат инвариантности модуля сопротивления..... 31
3.5. Построение графика функции $F = f(z)$..... 32

3.5.I. Гидрометрический способ..... 33
3.5.2. Способ гидравлического расчета..... 34
3.6. Построение кривых свободной поверхности в естественных водотоках с помощью постулата инвариантности модуля сопротивления..... 35
3.6.I. Способ А.Н.Рахманова..... 35
3.6.2. Способ Н.Н.Павловского..... 35
3.6.3. Способ Н.М.Бернадского..... 37
3.7. Построение кривых свободной поверхности в естественных руслах с поймами и при раздвоении русла..... 39
Литература..... 41

Иван Прокофьевич Спицын

Валерия Александровна Соколова

Неравномерное движение в реках

Конспект лекций

Редактор З.Б.Ваксенбург

Подписано в печать 02.10.86. М-15257
Формат набора 60X90 1/16 . Бумага тип.№ 2.Лит.гарн.Печать офсетная.
Печ.л.2,75 . Уч-изд. л. 3,0. Тираж 500 экз. Темплан 1986 г., поз.260. Зак.686р . Цена 10 коп.
ЛПИ им.Калинина. 195251, Ленинград, Политехническая ул., 29

Типография ВВМУПП им. Ленинского комсомола