

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В. В. КОВАЛЕНКО

ДИНАМИЧЕСКИЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ  
МОДЕЛИ ГИДРОЛОГИЧЕСКОГО  
ЦИКЛА

*Утверждено ученым советом института  
в качестве текста лекций*

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА  
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
имени М. И. КАЛИНИНА

ЛЕНИНГРАД  
1988

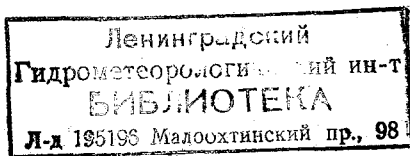
Коваленко В. В. Динамические и стохастические модели гидрологического цикла. Текст лекций. — Л., изд. ЛПИ, 1988, 34 с. (ЛГМИ).

Рассматриваются динамические модели основных звеньев гидрологического цикла. Дается общее представление о системном подходе в гидрологии, а также классификация моделей по видам процессов. Приводятся модели руслового и склонового стока с распределенными и сосредоточенными параметрами, включая простейшие дифференциальные уравнения водоемов и подземных вод. Указываются способы объединения отдельных гидрологических моделей в системы. Излагаются пути стохастического обобщения динамических моделей. Приводятся численные методы решений уравнений для плотности вероятности гидрологических характеристик, а также способы параметризации стохастических моделей.

Текст лекций предназначен для студентов гидрометеорологических институтов и государственных университетов по специальности «Гидрология суши».

Илл. 9. Библ. 9.

Рецензенты: кафедра гидрологии суши Ленинградского государственного университета имени А. А. Жданова; Рождественский А. В., д-р техн. наук (Государственный гидрологический институт).



© Ленинградский гидрометеорологический институт (ЛГМИ), 1988.

## ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в науке и технике имеется явная тенденция к возрастанию роли системного подхода при анализе различных научно-технических проблем. На современном этапе развития науки доминируют интегративные тенденции, направленные на комплексное, а не фрагментарное изучение возникающих на практике вопросов. Координирует и направляет эту деятельность ВНИИ системных исследований Госплана СССР. По словам академика Д. М. Гвишиани системные исследования возникают там, где нет зрелой, полной теории, относящейся к исследуемой ситуации, где цели исследования слишком общи, расплывчаты, недостаточно конкретны и где не только не ясно, как лучше сделать то, что мы собираемся сделать, но и вообще неизвестно, как это сделать. Такая ситуация часто возникает в медицине, в науках о Земле и обществе. Недаром в «Основных направлениях перестройки высшего и среднего специального образования в стране» прямо указывается, что «Процесс формирования инженерных кадров должен быть подчинен развитию у них навыков... системного анализа технико-экономических проблем...»

Гидрометеорология (и гидрология в частности) не является исключением. Печальный опыт несостоявшегося проекта переброски стока северных рек, нарушение экологического равновесия озера Байкал и бассейна Ладожского озера, потребовавшие соответствующих постановлений ЦК КПСС, указывают на актуальность подготовки специалистов-гидрометеорологов, умеющих комплексно решать задачи, связанные, в частности, с управлением водным хозяйством страны. Предлагаемый текст лекций ни в коей мере не претендует на роль учебного пособия по системному анализу гидрологических процессов — это задача будущего. Для начала достаточно свести воедино модели основных звеньев гидрологического цикла, показать как они стыкуются и как решаются основные из них. Так как для инженера-гидролога гораздо ближе по духу статистический подход к изучению гидрологических процессов (построение кривых обеспеченности и т. п.), то вполне естественной представляется предпринятая попытка стохастического обобщения динамических моделей. Такое обобщение в принципе можно выполнить для всех рассмотренных динамических моделей, но это потребовало бы привлечения довольно сложного математического аппарата характеристических функционалов, что вряд ли оправдано на данном этапе. Поэтому подробно рас-

смотрено стохастическое обобщение простейшей динамической модели водосбора с сосредоточенными параметрами, приводящее к уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова для эволюции плотности вероятности расхода воды в замыкающем створе. Стационарное его решение для обычных гидрологических условий дается семейством кривых Пирсона 3-го типа, что обычно и подтверждается данными натурных наблюдений.

При написании формул, уравнений, а также изображении некоторых рисунков ссылки на соответствующие источники не делались. Перечень основной использованной литературы указан в конце текста общим списком.

## 1. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОСНОВНЫХ ЗВЕНЬЕВ ГИДРОЛОГИЧЕСКОГО ЦИКЛА

### 1.1. Общее представление о системном подходе в гидрологии. Классификация моделей по видам процессов

Марксистско-ленинская философия определяет систему как внутренне или внешне упорядоченное множество взаимосвязанных или взаимодействующих элементов. Понятия системы и элемента соотносительны, так как интересующая нас система может быть элементом более общего образования. Например, нас будет интересовать система, представляющая гидрологический цикл, который сам может рассматриваться как элемент более общей гидрометеорологической системы и т. д.

В приземном слое атмосферы формируются осадки, представляющие наряду с другими метеорологическими факторами (температура воздуха, скорость ветра и т. д.) внешнее воздействие на речной водосбор. Выпавшие осадки формируют склоновый сток, который, поступая в русловую сеть, трансформируется в русловой сток. Часть выпавших осадков испаряется, другая часть инфильтруется в почву, питая ненасыщенную зону. Взаимодействие насыщенной и ненасыщенной зон, а также русловой сток определяют уровень грунтовых вод, на который влияет также и напорный горизонт. Основные звенья гидрологического цикла иллюстрирует рис. 1.

В нашу задачу входит рассмотрение математических моделей перечисленных звеньев гидрологического цикла и объединение их в единую систему уравнений, описывающих круговорот воды. Отсутствуют вопросы, связанные с фазовыми переходами (промерзание почвы, таяние снега и т. д.). Упор будет сделан на формальную (математическую) сторону. Предполагается, что студенты уже частично знакомы с физико-географическими процессами формирования стока. В той или иной степени в различных гидрологических дисциплинах подобные (или упрощенные) модели рассматривались, скажем система Сен-Венана в речной гидравлике. Однако в большинстве гидрологических задач важную роль

играет наличие гидравлической связи между поверхностными и подземными водами. В этих случаях необходимо определять уровни и расходы совместной математической модели. Для замыкания системы уравнений будет использована экологическая модель роста растений, определяющая отток воды из ненасыщенной зоны почвы через корневую систему растений и транспирацию в приземном слое атмосферы.

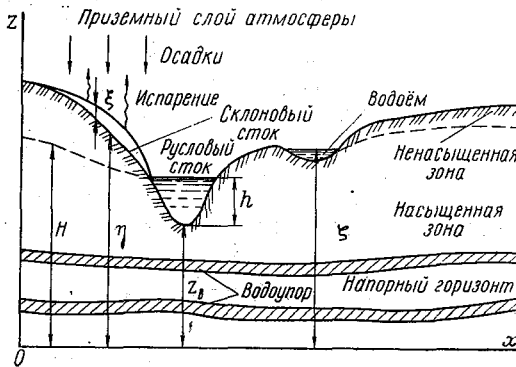


Рис. 1. Основные звенья гидрологического цикла.

## 1.2. Модели руслового стока

Одной из наиболее простых моделей движения воды в русле в одномерной гидравлической идеализации является модель кинематической волны. Основная ее предпосылка заключается в том, что, несмотря на неустановившийся характер движения воды, описываемой этой моделью, связь расходов и уровней считается однозначной. Это допущение приводит к следующей системе уравнений:

$$Q = f(F, x), \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q(x, t), \quad (1.2)$$

где  $Q$  — расход воды;  $F$  — площадь живого сечения;  $q$  — боковая приточность (это может быть и отток);  $x, t$  — продольная координата и время.

Подставляя первое уравнение во второе, получим модель кинематической волны

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial f(F, x)}{\partial x} = q(x, t). \quad (1.3)$$

Функция  $f(F, x)$  должна быть задана, т. е. из предварительных измерений или расчетов должна быть известна связь расходов и площадей на рассматриваемом участке русла. Решить это уравнение — значит найти  $F=F(x, t)$  (а следовательно, и  $Q=Q(x, t)$ , так как  $Q=f(F, x)$ ) при заданной боковой приточности  $q=(x, t)$ , верхнем граничном условии  $F=F(x_b, t)$  и начальном условии  $F=F(x, t_0)$ .

Модель кинематической волны (1.3) является довольно общей моделью руслового стока. Для задач, связанных с количественным учетом стока в условиях плавноизменяющегося движения воды, ею часто можно ограничиться. Для более «тонких» гидравлических задач она не приемлема, так как в реальных условиях при неустановившемся и неравномерном движении (переменный подпор, сгонно-нагонные явления и т. п.) связь  $Q=f(F)$  неоднозначная. Учет последнего обстоятельства производится в так называемой диффузионной модели, если принять, что расход воды зависит не только от площади, но и от ее градиента, то есть

$$Q=f(F, x) - k \frac{\partial F}{\partial x},$$

где  $k$  — коэффициент, определяемый эмпирически. Подставляя это соотношение в уравнение неразрывности (1.2), получим

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial f(F, x)}{\partial x} = k \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + q(x, t).$$

Эта модель называется диффузионной, так как аналогичным уравнением параболического типа описывается процесс диффузии примеси в какой-либо среде. Более строгий путь обобщения модели кинематической волны заключается в том, что в формуле Шези (1.1) вместо уклона дна  $i_0$  используется уклон свободной поверхности  $i_0 - \frac{\partial h}{\partial x}$ , что приводит к следующей параболической системе уравнений:

$$i_0 - \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{Q^2}{C^2 R F^3}, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q(x, t),$$

где  $h$  — средняя глубина;  $C$  — коэффициент Шези;  $R$  — гидравлический радиус.

Однако и эта модель руслового стока обладает рядом недостатков, в частности, она не в состоянии описать колебательные процессы, которые могут наблюдаться в реках. Этот недостаток

можно устранить, если в (1.4) учесть силы инерции, то есть обратиться к полной системе (уже гиперболического типа) Сен-Венана

$$i_0 - \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{Q^2}{C^2 R F^2} + \frac{1}{gF} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2\alpha Q}{gF^2} \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q(x, t), \quad (1.6)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения;  $\alpha$  — коэффициент неравномерности распределения скоростей по живому сечению. В этой системе  $Q$  и  $F$  (или  $Q$  и  $h$ ) — искомые функции двух независимых аргументов  $t$  и  $x$ . Для ее решения необходимо знать следующие параметры и морфометрические зависимости:  $\alpha$ ,  $i_0(x)$ ,  $q(x, t)$ ,  $F(x, h)$ ,  $R(x, h)$ ,  $C(x, h)$ . Кроме этого должны быть заданы граничные и начальные условия, которые в общем виде записываются следующим образом:

$$\beta_1 h + (1 - \beta_1) Q = \varphi_1(t) \quad \text{при } x = x_1, 0 \leq t \leq T;$$

$$\beta_2 h + (1 - \beta_2) Q = \varphi_2(t) \quad \text{при } x = x_2, 0 \leq t \leq T;$$

$$h = h_0(x), Q = Q_0(x) \quad \text{при } t = 0, x_1 \leq x \leq x_2.$$

Здесь  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$  — заданные функции;  $T$  — интервал времени, на котором ищется решение, а коэффициенты  $\beta_1$  и  $\beta_2$  могут принимать значения 0 или 1 в зависимости от того, какая информация нам известна на границах участка.

Методы решения системы (1.5), (1.6) изучаются в гидравлике, а методы решения модели кинематической волны будут рассмотрены ниже на примере склонового стока.

### 1.3. Модели склонового стока с распределенными параметрами

В модели руслового стока входит боковая приточность  $q(x, t)$ , представляющая как сосредоточенный приток (или отток), так и распределенный (склоновый) приток. При их решении считается, что функция  $q(x, t)$  задана из каких-либо соображений. Так как происхождение  $q(x, t)$  связано с осадками и подземным питанием, то естественной представляется попытка получить соответствующую математическую модель для нахождения  $q(x, t)$ . Так как для любого типа движения справедливо уравнение неразрывности, то по аналогии с русловым стоком можно записать следующую модель кинематической волны для склонового стока:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = R_{ос} - I, \quad (1.7)$$

$$q = f(\xi), \quad (1.8)$$

где  $\xi$  — слой поверхностного стока (см. рис. 1);  $q$  — расход, отнесенный к единице ширины водосбора (склона) в  $m^2/c$ ;  $R_{ос}$ ,  $I$  — соответственно интенсивность осадков и фильтрации.

По аналогии с формулой Шези можно конкретизировать зависимость (1.8) между единичным расходом и слоем стока

$$q = \alpha_1 \xi^m, \quad (1.9)$$

где  $\alpha_1 = \sqrt{i_0 C}$ ;  $m = 3/2$  (для квадратичного закона сопротивления).

Интенсивность осадков  $R_{oc}$  должна быть известна, например, из решения модели приземного слоя атмосферы, а интенсивность фильтрации  $I$  определяется характером и физическим состоянием почвы и также должна быть задана.

Уравнения (1.7) и (1.9) представляют одномерную модель склонового стока с распределенными параметрами. «Одномерную» — так как рассматривается изменение рассчитываемого параметра  $q$ , или слоя стока, только по одной пространственной переменной  $x$ , а «с распределенными параметрами» — так как эта модель учитывает изменение (распределение) параметров как искомых  $q$  и  $\xi$ , так и задаваемых  $\alpha_1$  и  $m$ , по длине склона. Можно обобщить эту модель на двумерный случай

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = R(x, y) - I(x, y), \quad (1.10)$$

$$q_x = f_1(\xi), \quad (1.11)$$

$$q_y = f_2(\xi), \quad (1.12)$$

где  $q_x, q_y$  — проекции единичного расхода на оси координат.

Для решения системы (1.10) — (1.12) задаются следующие начальные и граничные условия:

$$\xi = \varphi_3(x, y) \quad \text{при } t=0, \quad (x, y) \in D;$$

$$\xi = \varphi_4(x, y, t) \quad \text{при } (x, y) \in \Gamma, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Здесь  $D$  — область водосбора;  $\Gamma$  — его граница;  $\varphi_3$  и  $\varphi_4$  — задаваемые функции.

Для решения модели кинематической волны обычно применяется либо метод характеристик, либо метод сеток. Сведем систему (1.7) и (1.9) к одному уравнению

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \alpha_1 m \xi^{m-1} \frac{\partial \xi}{\partial x} = R_{oc} - I, \quad (1.13)$$

Так как

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = R_{oc} - I,$$

то дифференциальное уравнение (1.13) в частных производных сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi}{dt} = R_{oc} - I, \quad (1.14)$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_1 m \xi^{m-1}. \quad (1.15)$$



Уравнение (1.15) называется уравнением характеристик. В данном случае процедура решения заключается в том, что сначала решается первое уравнение (1.14) и находится слой стока  $\xi = \xi(t)$ , а затем найденное решение подставляется во второе уравнение (1.15) и находится  $x = x(t)$ . Окончательно получается решение задачи  $\xi = \xi(x, t)$ , т. е. «картина» изменения слоя стока в каждой точке склона (водосбора), а следовательно, и поверхностный сток  $q_1 = \alpha_1 \xi^m(x, t)$ . В более общем случае необходимо учитывать, что разность  $R_{oc} - I$  зависит от  $\xi$ , тогда оба уравнения (1.14) и (1.15) надо решать совместно, т. е. рассматривать их как систему дифференциальных уравнений.

В методе сеток дифференциальное уравнение заменяется его конечно-разностным аналогом, например, таким:

$$\frac{\xi_{i+1,j} - \xi_{i,j}}{\Delta t} + \alpha_1 m \xi_{i,j}^{m-1} \frac{\xi_{i,j} - \xi_{i,j-1}}{\Delta x} = (R_{oc} - I)_{i,j},$$

где индексы  $i$  и  $j$  поясняет рис. 2. Считая, что значения слоя стока в начальный момент времени и на границе известны (зачерненные точки на рис. 2 — внешние узлы сетки), находим решение во внутреннем узле (на рис. 2 квадрат) по следующему алгоритму:

$$\xi_{i+1,j} = \xi_{i,j} - \alpha_1 m (\Delta t / \Delta x) (\xi_{i,j}^m - \xi_{i,j-1}^m) + (R_{oc} - I)_{i,j} \Delta t.$$

Передвигаясь последовательно от узла к узлу, находим значения слоя стока во всех узлах сетки.

Для устойчивости решения необходимо, чтобы соблюдалось определенное соотношение между шагом по времени  $\Delta t$  и шагом по продольной координате  $\Delta x$ :  $(\Delta t / \Delta x) (\alpha_1 m) \leq 1$ . Существуют и другие более совершенные конечно-разностные аппроксимации, на которых мы не останавливаемся.

#### 1.4. Модель склонового стока с сосредоточенными параметрами

Рассмотренные модели склонового стока с распределенными параметрами обладают, по крайней мере, двумя недостатками: 1) использование «фиктивного» понятия слоя стока; 2) возникновение существенных сложностей с заданием распределенных параметров  $m = m(x, y)$  и  $\alpha_1 = \alpha_1(x, y)$ , так как для их определения необходимы трудоемкие водно-технические изыскания. От этих недостатков уходят (многое при этом и теряя), переходя к более простым моделям склонового стока, считая, что бассейн «сосредото-

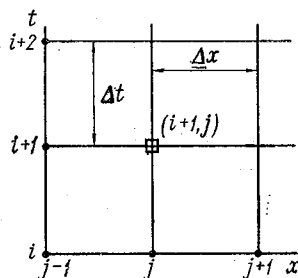


Рис. 2. Прямоугольная сетка.

чен в точке» (отсюда и название «с сосредоточенными параметрами»). Эти модели значительно проще, так как представляют обыкновенные дифференциальные уравнения и требуют для решения значительно меньше исходной информации, но, тем не менее, позволяют ответить на один из основных вопросов, интересующих гидрологов: как меняется расход воды в замыкающем створе водосбора в зависимости от изменения водоподачи на бассейн (осадки плюс подземное питание или разгрузка).

Вывод модели производится на основе балансовых соотношений. Используя понятия коэффициента стока  $k=Q/X$  и эффективного времени добегания, учитывающего инерционные свойства водосбора, модель можно записать в виде следующего дифференциального уравнения:

$$\tau \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{k} Q = X. \quad (1.16)$$

Время добегания  $\tau$  можно определять различными способами, в частности по эмпирическим формулам, например формуле Г. А. Алексеева  $\tau = 16,7 L k_1 / a I^{1/2} Q^{1/2}$ , где  $L$  — длина главного лога в км;  $I$  — уклон реки, в ‰;  $a$  — коэффициент, зависящий от шероховатости русла водотока ( $\approx 0,15$ ); коэффициент  $k_1 \approx 0,75-2,0$  в зависимости от физико-географической зоны, в которой расположен речной бассейн (0,75 — степная зона, ..., 2,0 — лесная зона и горные реки). Так как (1.16) линейное уравнение с постоянными коэффициентами, то решение может быть записано в явном виде. Например для сухого лога, т. е. при  $Q|_{t_0} = 0$ , и при постоянной интенсивности осадков:  $X=0$  при  $t \leq t_0$ ,  $X = \text{const}$  при  $t > t_0$  решение имеет вид

$$Q = kX(1 - \exp(-t/k\tau)).$$

При  $t \rightarrow \infty$  получим квазистационарную модель:  $Q = kX$ .

### 1.5. Простейшая модель водоема

При изучении озер и водохранилищ возникает много разнообразных задач, связанных с внутренними процессами, которые в них происходят (волнение, тепловой режим и т. д.). Для их решения используются довольно сложные уравнения. Однако с точки зрения изучения процессов водообмена можно ограничиться довольно грубой моделью, учитывающей только изменение уровня водоема во времени, так как, зная уровни и морфометрию водоема, можно легко находить изменение объема водоемов и водохранилищ. Задача ставится следующим образом:

$$\frac{d\xi}{dt} = d(t), \quad \xi = \xi_0 \text{ при } t=0,$$

где  $d$  — поступление (потери) воды в водоеме на единицу площади свободной поверхности. Для решения задачи на интервале от 0 до  $T$  необходимо, чтобы была задана функция  $d=d(t)$ .

## 1.6. Модель ненасыщенной зоны

Для ненасыщенной зоны справедлива следующая форма уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{v} - \varepsilon_1(\theta, \mathbf{x}, t), \quad (1.17)$$

где  $\theta$  — объемная влажность;  $\mathbf{v}$  — вектор скорости,  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ ;  $\varepsilon_1(\theta, \mathbf{x}, t)$  — функция источников (стоков), например поглощение влаги корнями растений;  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ .

Из гидрогеологии известен закон Дарси:

$$\mathbf{v} = -k(\theta) \nabla (\psi(\theta) + z), \quad (1.18)$$

где  $k(\theta)$  — коэффициент влагопроводности;  $(\psi(\theta) + z)$  — гидравлический потенциал;  $\psi(\theta)$  — влажностный потенциал;  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$  — оператор «набла».

Подставив (1.18) в (1.17), получим

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \operatorname{div} (k(\theta) \nabla (\psi(\theta) + z)) + \varepsilon_1(\theta, \mathbf{x}, t).$$

Ограничиваясь одномерным случаем, т. е. рассматривая изменение объемной влажности только по вертикальной координате  $z$ , и учитывая, что  $\partial \psi / \partial z = \partial \psi / \partial \theta \cdot \partial \theta / \partial z$ , получим

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (D(\theta)) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial k(\theta)}{\partial z} + \varepsilon_1(\theta, z, t). \quad (1.19)$$

Здесь  $D(\theta) = k(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$  — коэффициент почвенной влаги, который наряду с  $k(\theta)$  и  $\varepsilon_1(\theta, z, t)$  должен быть известен.

Для постановки задачи о диффузии влаги необходимо задать следующие граничные и начальные условия:

$$\beta_3 \theta + (1 - \beta_3) \left( D \frac{\partial \theta}{\partial z} + k \right) = \Phi(t) \quad \text{при } z = \eta,$$

$$\theta = \theta_{\max}(t) \quad \text{при } z = H, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\theta = \theta_0(z) \quad \text{при } t = 0, \quad H \leq z \leq \eta. \quad (1.20)$$

Условием (1.20) задается начальное распределение влажности по глубине зоны неполного насыщения.

## 1.7. Модель насыщенной зоны и напорных горизонтов

Как и для случая зоны неполного насыщения, вывод модели насыщенной зоны и напорных горизонтов основывается на уравнении неразрывности

$$\frac{\partial(\mu H)}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{v} + \varepsilon_2(x, y, t), \quad (1.21)$$

( $\mu$  — удельная водоотдача) и законе фильтрации Дарси

$$\mathbf{v} = -k_n \nabla H. \quad (1.22)$$

Здесь  $k_n$  — коэффициент пьезопроводности.

С учетом (1.22) и (1.21), имеем

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_n \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_n \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \varepsilon_2(x, y, t). \quad (1.23)$$

В уравнении (1.23)  $H$  — уровень грунтовых вод для безнапорного движения и пьезометрический напор для напорного движения.

Граничными и начальными условиями для модели (1.23) являются следующие:

$$\beta_4 H + (1 - \beta_4) k_n \frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}} = \Phi_1(x, y, t) \quad \text{при } (x, y) \in \Gamma, 0 \leq t \leq T,$$

$$H = H_0(x, y) \quad \text{при } t = 0, \quad (x, y) \in D$$

( $D$  — область, в которой ищется решение;  $\Gamma$  — граница этой области, или линия водораздела;  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к границе  $\Gamma$ ). Например, при  $\beta_4 = 1$   $H = \Phi_1(x, y, t)$ , т. е. должен быть задан уровень грунтовых вод на водоразделе.

## 1.8. Понятие об управляемых природно-технических системах

Сначала остановимся на модели природной (гидрологической) системы. Полученная система уравнений может быть записана в виде одного векторного уравнения

$$F_1(\mathbf{Y}, \varepsilon, \wedge, x, t) = 0, \quad (1.24)$$

где  $\mathbf{Y}$  — вектор параметров, характеризующих состояние речного бассейна

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} q \text{ (или } \xi) \\ Q \text{ (или } F) \\ s \\ \theta \\ H \end{pmatrix};$$

$\varepsilon$  — вектор внешних воздействий

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \text{осадки} \\ \text{температура воздуха} \\ \text{влажность} \\ \text{тектонические воздействия} \\ \text{граничные условия} \\ \text{и т. п.} \end{pmatrix};$$

$\Lambda$  — вектор заданных функций и коэффициентов, характеризующих физические, геометрические, морфологические и т. п. параметры системы

$$\Lambda = \begin{pmatrix} C \\ D(\theta) \\ F=f(\eta) \\ i_0 \\ \text{и т. д.} \end{pmatrix};$$

$x$  — вектор пространственных координат;  $t$  — время.

Обычно уравнение (1.24) дифференциальное. Поэтому его можно записать так:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + L(\Lambda, Y) = \varepsilon, \quad (1.25)$$

где  $L$  — оператор, определяемый конкретным набором используемых моделей отдельных звеньев гидрологического цикла. Интегрируя (1.25) по времени, получим

$$Y(t) = Y(t_0) - \int L(\Lambda, Y) dt + \int \varepsilon dt. \quad (1.26)$$

Начальное состояние системы  $Y(t_0)$  определяется с помощью специальной сети пунктов наблюдений, оптимальное размещение которых представляет важную самостоятельную задачу. Зная прогнозируемые внешние воздействия (или их «сценарии»), можно спрогнозировать (или проимитировать) поведение гидрологической системы, решая ее тем или иным численным методом (1.26).

Если речь идет не просто о речном бассейне, а о ВХК, т. е. если на водосборе имеются гидротехнические сооружения, с помощью которых можно управлять движением воды, то объект представляет уже природно-техническую систему (рис. 3). В этом случае перед системой поставлены определенные цели и необходимо производить оптимально управление для их достижения, например, пространственно-временное перераспределение речного стока. Поэтому соотношение (1.26) перепишем так:

$$F_2(Y, U, \varepsilon, \Lambda, x, t) = 0,$$

где  $U$  — вектор управляющих воздействий, например режим регулирования ГЭС.

В роли управляющих воздействий может выступать и часть компонентов вектора  $\Lambda$ , например поперечный профиль проектируемого канала, уклон его дна или шероховатость русла, а в качестве  $U$  — компоненты  $\varepsilon$ , например управление погодой. На рис. 3 показана в общем виде схема природно-технической управляемой системы.

Блок «Оценивание», представленный на рис. 3, подразумевает получение тем или иным способом информации о состоянии объекта (ВХК). Эта информация может быть получена либо исходя из общих географических закономерностей формирования стока, например карты изолиний, либо на основе расчетов по математическим моделям  $F_2$ , либо путем непосредственных измерений на сети постов  $Y_0$ . Чем более зарегулирован сток, т. е. чем активнее ведется управление, тем меньшее значение начинают играть географические методы оценки.

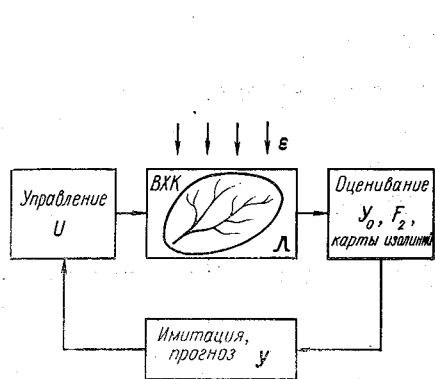


Рис. 3. Гидрологическая управляемая система.

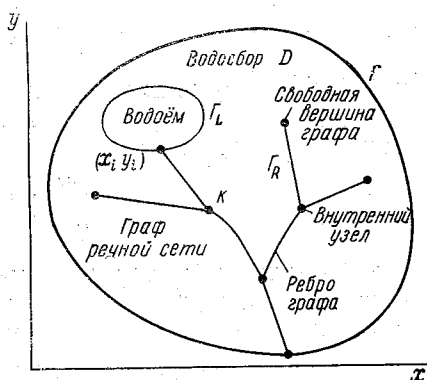


Рис. 4. Гидрографическая схема речного бассейна.

### 1.9. Объединение моделей отдельных звеньев в систему

Объединение полученных моделей отдельных звеньев гидрологического цикла с соответствующими дополнительными условиями (русловой сток, склоновый сток, ненасыщенная зона, насыщенная зона и напорные горизонты, а также водоемы) в единую систему производится путем «стыковки» отдельных моделей между собой. Для иллюстрации, кроме рис. 1, потребуется еще рис. 4, на котором изображена гидрографическая схема речного бассейна. Эти модели находятся как бы на двух «этажах», поэтому рассмотрим отдельно стыковку моделей «по горизонтали» и «по вертикали».

Стыковка моделей по горизонтали сводится к следующему. Вдоль ребер графа речной системы течение описывается моделями руслового стока. В свободных вершинах графа задаются обычные граничные условия. Во внутренних узлах необходимо

соблюсти баланс расходов  $\sum_{i=1}^N Q_i^k = 0$  и условие равенства уровней воды в каждом  $k$ -м узле ( $\zeta = z_b + h$ ):  $\zeta_i^k = \zeta^k$ , где  $i=1, 2, \dots$ , (число ребер, входящих к  $k$ -й узел).

Объединение моделей руслового и склонового стока производится через боковую приточность  $q$ , которая, в свою очередь, является решением уравнения склонового стока по границе склона  $\Gamma_R$ , идущей вдоль русла.

Стыковка моделей водоемов с моделью склонового стока также осуществляется через боковую приточность  $q$ . В этом случае граница склона  $\Gamma_R$  будет совпадать с границей акватории озера или водохранилища  $\Gamma_L$ .

Объединение модели водоема с моделью руслового стока при отсутствии в месте вытекания реки из водоема  $x_i$  гидротехнических сооружений производится путем соблюдения равенства уровней в реке и в водоеме  $\zeta(x_i, t) = \zeta_L(t)$ . При наличии гидротехнических сооружений условие стыковки содержит управление  $U_i$ , поддерживающее определенное соотношение между уровнем и расходом,  $Q(x_i, t) = Q[U_i(x_i, t), \zeta(x_i, t)]$ .

Стыковка моделей по вертикали производится следующим образом. При наличии гидравлической связи между речными и подземными водами она осуществляется через боковую приточность (или отточность)

$$q = - \left[ k \left( \frac{\partial H}{\partial n} \right)_1 + k \left( \frac{\partial H}{\partial n} \right)_2 \right];$$

$$\left[ k \frac{\partial H}{\partial n} - \beta(H - \zeta) \right]_i = 0; \quad i=1, 2,$$

где  $\mathbf{n}$  — направление внешней по отношению к области фильтрации нормали к границе  $\Gamma_R$ ; индексы 1 и 2 указывают, что величины берутся слева и справа от русла реки.

Если  $H < z_b$ , т. е. уровень грунтовых вод ниже отметки дна реки, то вода из реки будет питать грунтовые воды, что учитывается членом  $\varepsilon_2$  в модели насыщенной зоны. Объединение моделей насыщенной зоны и водоема осуществляется с помощью соотношения

$$d = - \frac{1}{F_L} \oint_{\Gamma_L} k \frac{\partial H}{\partial n} ds,$$

где  $F_L(\zeta_L)$  — площадь акватории водоема;  $\Gamma_L$  — граница водоема.

Стыковка моделей ненасыщенной и насыщенной зон производится через условие  $\theta = \theta_{\max}(t)$  при  $z = H$  и  $0 \leq t \leq T$  и стоковый член  $\varepsilon_2$ . Если уровень грунтовых вод опускается очень низко,

то они перестают оказывать влияние на движение воды в ненасыщенной зоне и появляется, так называемое, условие гравитационного потока:  $q_j = k(\theta_j)$  при  $z = z_j$ .

Несмотря на все выполненные стыковки, система уравнений осталась незамкнутой, так как в уравнении для ненасыщенной зоны имеется стоковый член  $\epsilon_1(\theta, z, t)$ . Надо либо его «выкинуть», делая тем самым весь гидрологический цикл во многих отношениях бессодержательным, либо вводить в рассмотрение еще одну, экологическую, модель.

### 1.10. Замыкание гидрологического цикла экологической моделью

Появление стокового члена  $\epsilon_1(\theta, z, t)$  в уравнении (1.19) ненасыщенной зоны связано с потреблением влаги корнями растений (рис. 5).

Одна из основных задач системной гидрологии ставится как задача управления природно-техническим комплексом, цель которого — получение заданного количества сельскохозяйственной продукции (биомассы) при наименьших отрицательных воздействиях на окружающую природную среду. Рост биомассы описывается уравнением вида

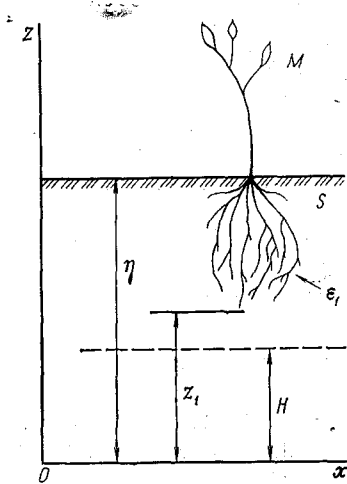


Рис. 5. Поглощение воды корневой системой растений.

где  $\Phi$ ,  $E$  — соответственно интенсивность фотосинтеза и транспирации;  $S$  — концентрация питательных веществ в почве. Задача сводится к тому, чтобы  $M \rightarrow \max_{\epsilon_1, S} M$ , т. е. к обеспечению таких агротехнических условий (режим полива и внесения удобрений), при которых можно добиться максимальной урожайности.

$$\frac{\partial M}{\partial t} = L(\epsilon_1, \Phi, M, E, S, \dots),$$

где  $\Phi$ ,  $E$  — соответственно интенсивность фотосинтеза и транспирации;  $S$  — концентрация питательных веществ в почве. Задача сводится к тому, чтобы  $M \rightarrow \max_{\epsilon_1, S} M$ , т. е. к обеспечению таких агротехнических условий (режим полива и внесения удобрений), при которых можно добиться максимальной урожайности.

Для величины  $\epsilon_1$  существуют эмпирические зависимости, типа

$$\epsilon_1 = \begin{cases} E f_1(\theta) f_2(M) / \int_{\eta}^{z_1} f_1(\theta) f_2(M) dz & \text{при } \eta > z_1 \\ 0 & \text{при } z < z_1 \text{ или } \int_{\eta}^{z_1} f_1(\theta) dz = 0. \end{cases}$$

Таким образом, построена замкнутая система моделей гидрологического цикла. Надо иметь в виду, что системный анализ математических моделей процессов водообмена только входит в ин-



женерную практику. Пока остается ряд неясных вопросов, в том числе, математического характера (вопросы корректности постановки начально-краевых задач, т. е. теоремы существования, единственности и устойчивости решений). Много проблем с численной реализацией этих моделей на ЭВМ. Но другие пути, кроме обращения к этим или подобным им моделям для оценки последствий вмешательства человека в природные процессы, особенно таких, которые проявляются не сразу, а через большие промежутки времени, представляются менее эффективными.

## 2. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИНЖЕНЕРНОЙ ГИДРОЛОГИИ

### 2.1. Типы случайных процессов. Понятие о белом шуме

Решить векторное уравнение (1.25) в динамическом (детерминистическом) смысле означает найти функцию  $Y(t)$  при известном начальном условии  $Y(t_0)$ . В более общем случае процесс необходимо рассматривать как случайный (стохастический). Возможны три пути появления стохастичности в решении.

1. Так как начальные условия получаем при измерениях, которые всегда сопровождаются погрешностями, то величину  $Y(t_0)$  можно задать только в вероятностном смысле.

2. Как внешние воздействия на систему  $\epsilon$ , например осадки, так и ее собственные параметры, например коэффициент шероховатости в деформируемом русле, являются случайными процессами («шумят»).

3. Даже если начальные условия заданы точно, а параметры системы и внешние воздействия строго детерминированы, то стохастичность может появиться из-за того, что решение модели (1.25), начиная с определенного момента времени, теряет устойчивость и становится случайным (аналогично переходу ламинарного режима в турбулентный при критических числах Рейнольдса).

Мы остановимся только на первых двух случаях, предварительно рассмотрев основные типы используемых в дальнейшем случайных процессов.

Как известно, случайной функцией называют такую функцию своего аргумента, значение которой при любом значении аргумента является случайной величиной. Если в качестве аргумента выступает время, то говорят о случайном процессе (рис. 6, а). Для любого момента времени  $t$  (сечения) может быть построена кривая распределения плотности вероятности  $p(x)$  (рис. 6, б). Таким образом, чтобы задать случайную функцию  $X$ , необходимо задать следующий набор плотностей вероятностей  $p(x_1/t_1)$ ,  $p(x_2/t_2)$  и т. д. Обычно этот набор записывают так  $p(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots / t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots)$  и называют  $n$ -мерной плотностью вероятности. Так как ее получение очень сложно, то на практике для опи-

сания случайных процессов часто ограничиваются следующими более простыми характеристиками:

1. Математическим ожиданием

$$\bar{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x/t)dx,$$

которое зависит только от одномерного закона распределения;

2. Корреляционной функцией

$$K(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t_1)x_2(t_2)p(x_1, x_2/t_1, t_2)dx_1dx_2,$$

зависящей от двумерного закона распределения. Ее физический смысл заключается в том, что она показывает как меняется статистическая связь координат случайного процесса в зависимости от расстояния (сдвиги) между ними;

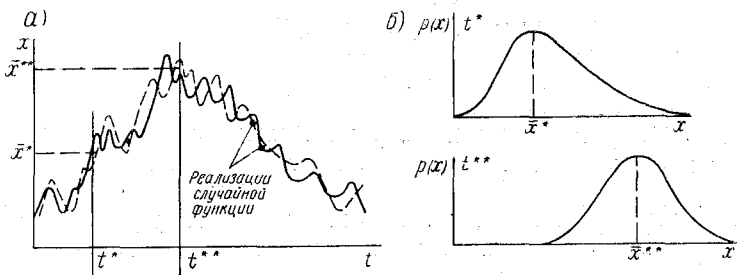


Рис. 6. Случайная функция (а) и кривые распределения плотности вероятности для двух сечений (б).

3. Дисперсией (частный случай корреляционной функции при  $t_1=t_2$ )

$$\sigma^2 = D[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x/t)dx.$$

Раздел теории случайных процессов, который ограничивается изучением только этих характеристик, называется корреляционной теорией.

Случайные процессы можно также классифицировать по виду кривой распределения плотности вероятности, например, нормальные (гауссовские) процессы. В гидрологии расчетные характеристики распределены, как правило, не по нормальному закону, а с некоторой положительной асимметрией, например кривые Пирсона.

Для инженерных приложений, в том числе гидрологических, доступны два специфических вида процессов: марковский случайный процесс и процесс «белого шума». Марковским, по имени

русского математика А. А. Маркова (1856—1922 гг.), называется процесс, для которого закон распределения ординаты процесса, т. е.  $p(x/t)$ , в любой будущий момент времени зависит только от значения ординаты в данный момент времени и не зависит от того, какие ординаты случайная функция имела в прошлом. На математическом языке это определение выглядит так:  $p(x_k/x_1, \dots, x_{k-1}) = p(x_k/x_{k-1})$ . На «житейском языке» это можно сформулировать следующим образом: распределения плотности вероятности нашего поведения в будущем зависят только от того, кем мы являемся сегодня, а наше прошлое не имеет никакого значения.

Еще более специальный класс случайных процессов представляет процесс «белого шума» или процесс с независимыми ординатами. Обычно он вводится с помощью дельта-функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1 \quad \text{при } \tau=0,$$

$$\delta(\tau) = 0 \quad \text{при } \tau \neq 0,$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - a) d\tau = 1 \quad \text{при } \tau = a,$$

$$\delta(\tau - a) = 0 \quad \text{при } \tau \neq a$$

и определяется как процесс, имеющий корреляционную функцию вида  $K(t_1, t_2) = \sigma_0^2 \delta(\tau)$ , где  $\sigma_0^2$  — интенсивность шума. Зрительно его можно представить как беспорядочно (без всякой связи) следующие друг за другом положительные и отрицательные игольчатые импульсы. Амплитуда импульсов имеет случайный характер и подчиняется нормальному закону с плотностью вероятности

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[ -\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2} \right].$$

Часто этот процесс называют «дельта-коррелированным». Он полностью определяется одномерным законом распределения своих ординат  $p(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p(x_i)$ . Хотя в природе таких процессов реально не существует, они, как будет видно из дальнейшего, являются полезной математической идеализацией.

## 2.2. Стохастическое обобщение модели склонового стока с сосредоточенными параметрами

Запишем модель склонового стока (1.16) в виде

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{k\tau} Q + \frac{X}{\tau}$$

и введем новые обозначения:  $-1/k\tau \equiv c$ ;  $X/\tau \equiv N(t)$ . Если  $c$  и  $N(t)$  не случайные функции, то и решение этого уравнения не случайный (динамический) процесс  $Q=f(t)$ . Однако на самом деле и  $c$  и  $N(t)$  являются случайными функциями. Поэтому будем считать, что  $c = \bar{c} + \tilde{c}(t)$ ,  $N(t) = \bar{N}(t) + \tilde{N}(t)$ , где  $\tilde{c}(t)$ , и  $\tilde{N}(t)$  — случайные процессы с независимыми ординатами (белые шумы). В качестве решения такого стохастического уравнения имеем марковский случайный процесс. Чтобы показать это, проинтегрируем уравнение по времени от  $t$  до  $t+\Delta t$ :

$$Q(t+\Delta t) = Q(t) + \int_t^{t+\Delta t} [\bar{c} + \tilde{c}(t)] Q dt + \int_t^{t+\Delta t} [\bar{N}(t) + \tilde{N}(t)] dt.$$

Из этого соотношения следует, что значение расхода  $Q(t+\Delta t)$  в будущем, т. е. при  $t+\Delta t$ , зависит только от его значения на момент  $t$   $Q(t)$  и не зависит от прошлого до момента  $t$ , так как  $\tilde{c}$  и  $\tilde{N}$  являются белыми шумами и статистически не зависят от своих прошлых значений. Таким образом, имеем равенство

$$p[Q(t+\Delta t)/Q(t), Q(t-\Delta t), Q(t-2\Delta t)\dots] = p[Q(t+\Delta t)/Q(t)],$$

т. е. подпадаем под условия марковского случайного процесса (это было бы не так при другой исходной модели (1.16) или если бы шумы были не белыми).

Раз у нас процесс марковский, то, чтобы его полностью описать в статистическом смысле, необходимо научиться вычислять двумерные условные плотности вероятности  $p(Q(t+\Delta t)/Q(t))$ , для чего можно получить соответствующее дифференциальное уравнение, к пояснению вывода которого и перейдем.

### 2.3. Уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова (ФПК)

Решением рассматриваемого стохастического уравнения является марковский случайный процесс: процесс, состояние которого в будущем зависит только от настоящего и не зависит от прошлого, т. е.  $p(Q_k/Q_1, \dots, Q_{k-1}) = p(Q_k/Q_{k-1})$ , где  $p(Q_k/Q_1, \dots, Q_{k-1})$  — условная плотность распределения случайной величины  $Q(t_k)$  при условии совместного выполнения равенств

$$Q(t_1) = Q_1, \dots, Q(t_{k-1}) = Q_{k-1}.$$

Из определения марковости процесса следует, что любые многомерные законы распределения могут быть выражены через условные двумерные плотности и плотности вероятности начального состояния, т. е.  $p(Q_1, \dots, Q_n) = p(Q_n/Q_{n-1}), \dots, p(Q_2/Q_1)p(Q_1)$ . Это легко показать, например для трехмерной плотности. Из теории вероятностей известно, что условная плотность вероятности определяется формулой

$$p(Q_n/Q_{n-1}) = p(Q_n, Q_{n-1}) / p(Q_{n-1}).$$

В соответствии с ней имеем

$$p(Q_1, Q_2, Q_3) = p(Q_3/Q_1, Q_2) p(Q_1, Q_2).$$

Так как согласно свойству марковости процесса  $p(Q_3/Q_1, Q_2) = p(Q_3/Q_2)$ , то  $p(Q_1, Q_2, Q_3) = p(Q_3/Q_2) p(Q_2/Q_1) p(Q_1)$ .

Из теории вероятностей известна также формула, связывающая одномерную и двумерную плотности вероятности,

$$p(Q_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(Q_n, Q_{n-1}) dQ_n.$$

Следовательно, все законы распределения марковского случайного процесса выражаются через двумерные законы, т. е. двумерный закон распределения  $p(Q_n, Q_{n-1})$ , заданный для любых значений времени  $t_n$  и  $t_{n-1}$ , является полной характеристикой процесса.

Для дальнейшего изложения вместо  $p(Q_n/Q_{n-1})$  введем следующие обозначения  $p(t, x; \tau, y)$ , где  $t$  и  $\tau$  предыдущий и последующий моменты времени, а  $x, y$  — соответствующие им ординаты процесса. Введем интегральный закон распределения

$$F(t, x, \tau, y) = P\{Y(\tau) < y / X(t) < x\}.$$

Если существует производная

$$\frac{\partial F(t, x; \tau, y)}{\partial y} = p(t, x; \tau, y),$$

то она является условной плотностью распределения  $Y(\tau)$  при условии  $X(t) = x$  и  $t < \tau$ . Дальнейшие рассуждения поясняет рис. 7.

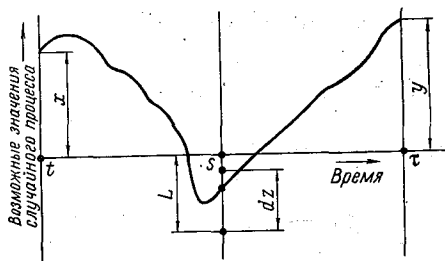


Рис. 7. К выводу уравнения Маркова.

Траектория случайного процесса из точки  $(t, x)$  попадает в интервал  $(z, z+dz)$  в момент времени  $s$  с вероятностью  $p(t, x; s, z) dz$ . Из любой точки интервала  $(z, z+dz)$  в момент  $\tau$  траектория попадает в полубесконечный интервал  $(-\infty, y)$  с вероятностью  $F(s, z; \tau, y)$ . Пользуясь теоремами сложения и умножения вероятностей, получаем

$$F(t, x; \tau, y) = \int F(s, z; \tau, y) p(t, x; s, z) dz.$$

Дифференцируя по  $y$ , находим так называемое уравнение Маркова

$$p(t, x; \tau, y) = \int p(s, z; \tau, y) p(t, x; s, z) dz,$$

из которого следуют два дифференциальных уравнения для  $p(t, x; \tau, y)$ .

Для вывода первого положим:

1) для любого  $\delta > 0$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| > \delta} p(t - \Delta t, x; t, y) dy = 0,$$

т. е. требование непрерывности случайного процесса (вероятность скачков случайного процесса  $|y - x| \geq \delta$  равна нулю);

2) существуют непрерывные производные

$$\frac{\partial p(t, x; \tau, y)}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial^2 p(t, x; \tau, y)}{\partial x^2};$$

3) для любого  $x: y - \delta < x < y + \delta$  существуют пределы

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| < \delta} (y-x) p(t - \Delta t, x; t, y) dy = a(t, x),$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| < \delta} (y-x)^2 p(t - \Delta t, x; t, y) dy = b(t, x).$$

Согласно уравнению Маркова, имеем

$$p(t - \Delta t, x; \tau, y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t, z; \tau, y) p(t - \Delta t, x; t, z) dz. \quad (2.1)$$

Так как по определению вероятности

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t - \Delta t, x; t, z) dz = 1,$$

то можно записать

$$p(t, x; \tau, y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t, x; \tau, y) p(t - \Delta t, x; t, z) dz. \quad (2.2)$$

Вычитая (2.2) из (2.1) и поделив на  $\Delta t$ , получим

$$\frac{p(t - \Delta t, x; \tau, y) - p(t, x; \tau, y)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} [p(t, z; \tau, y) - p(t, x; \tau, y)] p(t - \Delta t, x; t, z) dz.$$

По второму предположению разность в подынтегральном выражении можно, используя ряд Тейлора, записать так

$$p(t, z; \tau, y) - p(t, x; \tau, y) = (z - x) \frac{\partial p(t, x; \tau, y)}{\partial x} + \\ + \frac{(z - x)^2}{2} \frac{\partial^2 p(t, x; \tau, y)}{\partial x^2} + o(|z - x|^2).$$

Опуская вывод, можно показать, что как условная плотность вероятности  $p(t, x; \tau, y)$ , так и безусловная плотность вероятности

$p(\tau, y) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, t; \tau, y) dx$  подчиняются следующему дифференциальному уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова (ФПК):

$$\frac{\partial p(\tau, y)}{\partial \tau} = - \frac{\partial}{\partial y} [a(\tau, y) p(\tau, y)] + 0,5 \frac{\partial^2}{\partial y^2} [b(\tau, y) p(\tau, y)],$$

где

$$a(\tau, y) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} M [Y(\tau) - Y(\tau - \Delta\tau)],$$

$$b(\tau, y) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\tau} M [Y(\tau) - Y(\tau - \Delta\tau)]^2.$$

Таким образом,  $a(\tau, y)$  — скорость изменения математического ожидания процесса  $Y(t)$  в текущий момент времени (коэффициент сноса);  $b(\tau, y)$  — скорость изменения дисперсии случайного процесса  $Y(t)$  в текущий момент времени (коэффициент диффузии).

Искомой функцией в этом уравнении является плотность вероятности  $p(\tau, y)$ , независимыми аргументами  $\tau$  и  $y$ . Для решения необходимо задать начальное условие  $p(\tau_0, y) = \varphi(y)$ .

#### 2.4. Физический смысл уравнения ФПК. Граничные условия

Для того чтобы понять физический смысл уравнения ФПК, рассмотрим «блуждание» каких-либо частиц по прямой  $OY$ . Обозначим через  $p(\tau, y)$  концентрацию частиц в момент времени  $\tau$  в точке с координатой  $y$ . Тогда произведение скорости  $a(\tau, y)$  на концентрацию  $p(\tau, y)$  даст регулярный поток частиц, а величина  $-0,5\partial[b(\tau, y)p(\tau, y)]/\partial y$  — диффузионный, так как  $b(\tau, y)$  есть скорость изменения дисперсии разброса частиц. Общий поток частиц, точнее сказать плотность потока, будет

$$G(\tau, y) = a(\tau, y)p(\tau, y) - 0,5 \frac{\partial}{\partial y} [b(\tau, y)p(\tau, y)].$$

Тогда уравнение ФПК можно записать в таком виде

$$\frac{\partial p(\tau, y)}{\partial \tau} + \frac{\partial G(\tau, y)}{\partial y} = 0.$$

Это — математическое выражение закона сохранения общего числа частиц, а если вернуться от концентрации частиц к плотности вероятности, то — уравнение неразрывности, выражающее закон сохранения вероятности.

Плотность вероятности состояния системы деформируется во времени ( $\partial p/\partial \tau$ ) и смещается в пространстве ( $\partial G/\partial y$ ). Однако общее количество вероятности во всей бесконечной области существования случайного процесса остается неизменным, если отсутствуют стоки и источники вероятности, т. е. если отсутствуют поглощение и восстановление реализации случайного процесса  $y(\tau)$ . Действительно, интегрируя уравнение ФПК, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} p(\tau, y) dy = - \int_{-\infty}^{\infty} \text{div } G(\tau, y) dy.$$

При отсутствии источников и стоков правый интеграл равен нулю. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\tau, y) dy = \text{const},$$

причем эта константа нормируется единицей, т. е. вероятностью достоверного события.

Для решения уравнения ФПК, кроме начального условия, необходимо задание граничных условий:

$$\left[ \chi_1(\tau) \frac{\partial p}{\partial y} - \nu_1(\tau) p(\tau, y) \right] \Big|_{y=L_1} = 0;$$

$$\left[ \chi_2(\tau) \frac{\partial p}{\partial y} - \nu_2(\tau) p(\tau, y) \right] \Big|_{y=L_2} = 0.$$

При  $\chi_1 = \chi_2 = 0$  имеем граничные условия поглощения  $p(\tau, L_1) = p(\tau, L_2) = 0$ . Смысл этого условия, если снова вернуться к частицам, в том, что частицы непрерывно покидают пределы интервала  $[L_1, L_2]$ . Плотность вероятности уже не удовлетворяет условию нормировки и с течением времени обращается в нуль. При

$$\chi_1 = 0,5 b(L_1, \tau), \quad \chi_2 = 0,5 b(L_2, \tau), \quad \nu_1 = a(L_1, \tau), \quad \nu_2 = a(L_2, \tau),$$

приходим к граничным условиям отражения

$$\left[ a(\tau, y) p(\tau, y) - 0,5 b(\tau, y) \frac{\partial p(\tau, y)}{\partial y} \right] \Big|_{y=L_1}^{y=L_2} = 0,$$

т. е. поток через границу равен нулю и частицы отскакивают.



## 2.5. Коэффициенты сноса и диффузии

Вернемся к стохастической модели склонового стока

$$\frac{dQ}{dt} = [\bar{c}(t) + \tilde{c}(t)] \varphi(Q) + \bar{N}(t) + \tilde{N}(t),$$

где  $\varphi(Q)$  — функция, которая в общем случае может быть и нелинейной;  $\tilde{c}(t)$  и  $\tilde{N}(t)$  — случайные процессы с независимыми ординатами, т. е. белые шумы (рис. 8). Считаем, что белые шумы имеют нормальное (гауссовское) распределение амплитуд и следующие корреляционные функции:

$$K_{\tilde{c}}(t, \tau) = M[\tilde{c}(t)\tilde{c}(\tau)] = G_{\tilde{c}}(t)\delta(t - \tau),$$

$$K_{\tilde{N}}(t, \tau) = M[\tilde{N}(t)\tilde{N}(\tau)] = G_{\tilde{N}}(t)\delta(t - \tau),$$

$$K_{\tilde{c}\tilde{N}}(t, \tau) = M[\tilde{c}(t)\tilde{N}(\tau)] = G_{\tilde{c}\tilde{N}}(t)\delta(t - \tau),$$

где  $G_{\tilde{c}}$ ,  $G_{\tilde{N}}$  и  $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$  — интенсивности и взаимные интенсивности белых шумов;  $\delta(t - \tau)$  — дельта-функция.

Запишем без вывода формулы для коэффициентов сноса и диффузии:

$$a(t, Q) = (\bar{c}(t) + M[\tilde{c}(t)])\varphi(Q) + 0,5 \frac{\partial \varphi}{\partial Q} [G_{\tilde{c}}\varphi(Q) + G_{\tilde{c}\tilde{N}}] + \bar{N},$$

$$b(t, Q) = G_{\tilde{c}}\varphi(Q)\varphi(Q) + 2G_{\tilde{c}\tilde{N}}\varphi(Q) + G_{\tilde{N}}.$$

Из этих соотношений видно, что коэффициенты  $a(t, Q)$  и  $b(t, Q)$  полностью определяются видом исходного динамического уравнения и характеристиками шумов.

## 2.6. Численные методы решения уравнения ФПК

Уравнение ФПК

$$\frac{\partial p(Q, t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial Q} [a(Q, t)p(Q, t)] + 0,5 \frac{\partial^2}{\partial Q^2} [b(Q, t)p(Q, t)] \quad (2.3)$$

относится к определенному классу уравнений в частных производных (параболический тип) и к нему применимы методы решений, разработанные в математической физике, например (в частных случаях) метод разделения переменных. Однако при произволь-

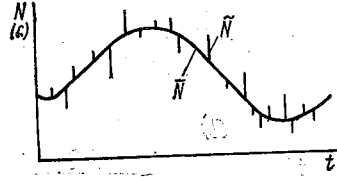


Рис. 8. Случайный процесс с независимыми ординатами.

ных (сложных) зависимостях для коэффициентов сноса и диффузии эффективное применение находят численные методы.

Их суть сводится к замене дифференциального уравнения его конечно-разностным аналогом, например таким:

$$\frac{p_j^{i+1} - p_j^i}{\Delta t} = - \frac{a_j^i p_j^i - a_{j-1}^i p_{j-1}^i}{\Delta Q} + 0,5 \frac{b_{j+1}^i p_{j+1}^i - 2b_j^i p_j^i + b_{j-1}^i p_{j-1}^i}{\Delta Q^2}, \quad (2.4)$$

где  $i, j$  — номер расчетного шага по времени и расходу соответственно (рис. 9, а).

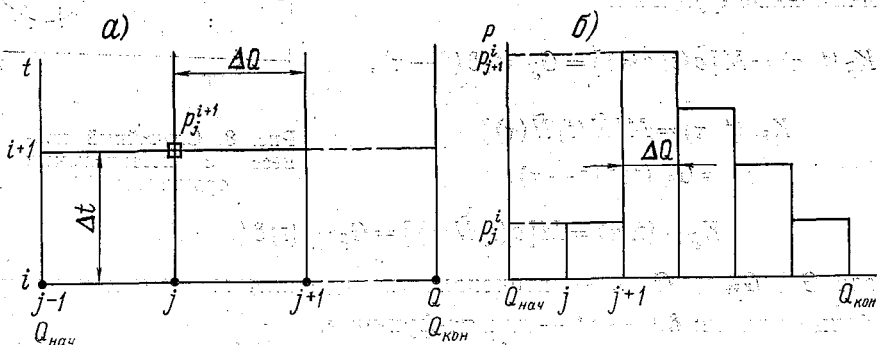


Рис. 9. Прямоугольная сетка (а) и гистограмма (б).

Граничными условиями могут быть, например, условия поглощения  $p(t, Q_{нач}) = p(t, Q_{кон}) = 0$ . В качестве начального условия берется гистограмма (рис. 9, б) с условием нормировки  $\sum_{j=0}^N p_{i,j} = 1$ . Расчет производится последовательно по временным шагам в соответствии с алгоритмом

$$p_j^{i+1} = p_j^i + F \left( \begin{matrix} i \\ j-1 ; j ; j+1 \end{matrix} \right) \Delta t,$$

(программу для расчета см. в приложении).

Это — так называемая явная разностная схема. Она проста логически, однако, при ее использовании существует опасность потери устойчивости счета при переходе от одного временного слоя к другому, так как незначительная погрешность, возникающая, например, в результате округлений, может возрастать от слоя к слою. Как и в случае модели кинематической волны необходимо соблюдать определенные условия устойчивости, связанные с интенсивностью шумов и соотношением шагов  $\Delta t$  и  $\Delta Q$ .

От указанных недостатков свободна так называемая неявная схема, хотя сам алгоритм расчета по ней существенно усложняется. Рассмотрим алгоритм решения, именуемый методом прогонки. Конечно-разностная аппроксимация уравнения ФПК имеет вид

$$\frac{p_j^i - p_{j-1}^{i-1}}{\Delta t} = - \frac{a_j^i p_j^i - a_{j-1}^i p_{j-1}^i}{\Delta Q} + 0,5 \frac{b_{j+1}^i p_{j+1}^i - 2b_j^i p_j^i + b_{j-1}^i p_{j-1}^i}{\Delta Q^2},$$

или более сжато

$$A_{j+1}^i p_{j+1}^i - 2B_j^i p_j^i + C_{j-1}^i p_{j-1}^i = - \frac{1}{\Delta t} p_j^{i-1}, \quad (2.5)$$

где использованы следующие обозначения:

$$A_{j+1}^i = \frac{1}{2\Delta Q^2} b_{j+1}^i, \quad B_j^i = \frac{\Delta Q^2 + \Delta Q \Delta t a_j^i + \Delta t b_j^i}{2\Delta Q^2 \Delta t}, \\ C_{j-1}^i = \frac{2\Delta Q a_{j-1}^i + b_{j-1}^i}{2\Delta Q^2}.$$

Левое граничное условие аппроксимируется так:

$$x_1^i \frac{p_j^i - p_{j-1}^i}{\Delta Q} - y_1^i \frac{p_{j-1}^i + p_j^i}{2} = 0,$$

или

$$p_{j-1}^i = V_j^i p_j^i + W_j^i. \quad (2.6)$$

При  $j=0$

$$V_0^i = \frac{2x_1^i - \Delta Q y_1^i}{2x_1^i + \Delta Q y_1^i}, \quad W_0^i = 0.$$

Подставляя (2.6) в (2.5), получим

$$p_j^i = \frac{A_{j+1}^i p_{j+1}^i + \Delta t C_{j-1}^i V_j^i + p_j^{i-1}}{2B_j^i - C_j^i W_j^i}. \quad (2.7)$$

Сравнивая (2.6) и (2.7), получаем рекуррентную формулу для вычисления  $W_j^i$  и  $V_j^i$ :

$$W_{j+1}^i = \frac{A_{j+1}^i}{2B_j^i - C_j^i W_j^i}; \quad V_{j+1}^i = \frac{\Delta t C_{j-1}^i V_j^i + p_j^{i-1}}{\Delta t (2B_j^i - C_j^i W_j^i)}. \quad (2.8)$$

Значения  $p_j^{i-1}$  берутся из начального условия. Соотношения (2.8) реализуют прогонку левого граничного условия в прямом направлении. Зная  $W_j^i$  и  $V_j^i$ , решение  $p_j^i$  находим по формуле (2.6) начиная с правого граничного условия (обратная прогонка).

## 2.7. Уравнения для моментов распределения плотности вероятности

Исчерпывающей характеристикой для статистического описания случайной функции, как уже указывалось, является  $n$ -мерная плотность вероятности. Существуют и более простые характеристики, именуемые моментами распределения  $m^k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Q^k p(Q, t) dQ$ . При  $k=1$  имеем математическое ожидание случайной величины  $M[Q]$ , при  $k=2$  — дисперсию  $\sigma^2 = D[Q]$ . Отношение  $\sqrt{D[Q]}/M[Q]$  называется коэффициентом вариации  $C_v$ . При  $k=3$  получаем величину, определяющую коэффициент асимметрии, а при  $k=4$  — эксцесс.

Можно показать, что задание кривой плотности вероятности эквивалентно заданию бесконечного числа моментов, т. е. (условно)  $p(Q, t) \sim m^k$ ,  $k=1, 2, \dots$ . Однако во многих практически важных случаях можно ограничиться только несколькими моментами распределения. Например, при нормальном распределении достаточно знать математическое ожидание и дисперсию, так как

$$p(Q, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D[Q]}} \exp \left[ -\frac{(Q - m^1)^2}{2D[Q]} \right].$$

Знание на практике только этих характеристик объясняется во многом тем, что точность исходной информации не позволяет сделать надежные выводы о численных значениях моментов выше третьего порядка. Если даже мы и рассчитали по уравнению ФПК эволюцию плотности вероятности во времени, то экспериментальные данные дают возможность подсчитать, а следовательно, и сравнить с теоретическими расчетами только математическое ожидание и дисперсию. В некоторых же случаях при достаточно длинных рядах наблюдений — коэффициент асимметрии. Следовательно, разумно упростить задачу и получить уравнения, позволяющие описывать эволюцию не самих распределений плотности вероятности, а только нескольких первых моментов.

Схема вывода этих уравнений такова. Умножим уравнение ФПК на расход  $Q$  и проинтегрируем в бесконечных пределах

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q \frac{\partial p(Q, t)}{\partial t} dQ = - \int_{-\infty}^{\infty} Q \frac{\partial}{\partial Q} [a(Q, t) p(Q, t)] dQ + \\ + 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} Q \frac{\partial^2}{\partial Q^2} [b(Q, t) p(Q, t)] dQ.$$

Левый интеграл записывается так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q \frac{\partial p}{\partial t} dQ = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} Q p(Q, t) dQ = \frac{\partial}{\partial t} m^1 = \frac{\partial}{\partial t} M[Q].$$

Можно показать, что правая часть будет равна математическому ожиданию коэффициента сноса  $M[a(Q, t)]$ . Таким образом, имеем дифференциальное уравнение для математического ожидания

$$\frac{dM[Q]}{dt} = M[a(Q, t)],$$

которое следует решать при следующем начальном условии:

$$\int_{-\infty}^{\infty} Qp(Q, t=0)dQ = m^1(0) = M[Q(0)].$$

Уравнение для дисперсии имеет вид

$$\frac{dD[Q]}{dt} = M[2Qa(Q, t) + b(Q, t)]$$

(при начальном условии  $D[Q(t=0)] = M[Q^2(t=0)]$ ). Зная из решений этих уравнений, как меняется во времени  $M[Q]$  и  $D[Q]$ , мы тем самым знаем как эволюционирует кривая плотности вероятности в нормальном приближении.

Аналогично можно записать уравнения и для старших моментов. В практической гидрологии эволюция распределений может быть описана системой из трех дифференциальных уравнений для  $M[Q]$ ,  $D[Q]$  и  $m^3$ .

## 2.8. Параметризация стохастической модели водосбора

Для того, чтобы решить уравнение ФПК для стохастической модели водосбора (2.3), необходимо задать параметры, определяющие коэффициенты сноса и диффузии:  $\bar{c}(t)$ ,  $G_{\bar{c}}$ ,  $G_{\bar{c}} \bar{N}$ ,  $M[N]$ ,  $G_{\bar{N}}$ . Процедура их предварительного (перед решением уравнения ФПК) нахождения называется параметризацией. Естественно, что за этими параметрами стоит глубокий физический смысл, определяемый характером формирования стока на водосборе. Однако имеется формальный путь нахождения их значений, основанный на идеях теории идентификации. Суть его заключается в том, что эти параметры находятся с использованием того же самого уравнения ФПК, в которое они входят (так называемая, обратная задача). При этом решение прямой задачи, т. е.  $p(Q, t)$ , считается известным из предварительных измерений расхода воды в замыкающем створе речного бассейна (ряды гидрологических наблюдений).

Будем считать процесс формирования стока на водосборе случайным, но установившимся. В этом случае в уравнении ФПК можно пренебречь величиной  $\partial p(Q, t)/\partial t$  и оно примет вид

$$\frac{dp}{dQ} = \frac{Q - a}{b_0 + b_1 Q + b_2 Q^2} p,$$

где

$$a = \frac{G_{\bar{c}} \bar{N} + 2M[N]}{2\bar{c} + 2M[\bar{c}] + G_{\bar{c}}}; \quad b_0 = \frac{-\bar{G}_{\bar{N}}}{2\bar{c} + 2M[\bar{c}] + G_{\bar{c}}};$$

$$b_1 = \frac{2G_{\bar{c}} \bar{N}}{2\bar{c} + 2M[\bar{c}] + G_{\bar{c}}}; \quad b_2 = \frac{-G_{\bar{c}}}{2\bar{c} + 2M[\bar{c}] + G_{\bar{c}}}.$$

Если в «прямой» задаче необходимо, решая уравнение ФПК, найти  $p(Q)$ , зная  $M[N]$ ,  $G_{\bar{N}}$ ,  $G_{\bar{c}} \bar{N}$ ,  $G_{\bar{c}}$ ,  $\bar{c}$ , то в «обратной» задаче (идентификации), требуется найти все эти параметры, зная  $p(Q)$ .

Запишем уравнение в виде

$$(b_0 + b_1 Q + b_2 Q^2) \frac{dp}{dQ} = (Q - a)p,$$

умножим обе части на  $Q^n$  и проинтегрируем по  $Q$  в бесконечных пределах. Используя формулу интегрирования по частям и полагая, что  $p(\pm\infty) = 0$ , получим

$$nb_0 m^{n-1} + [(n+1)b_1 - a]m^n + [n+2]b_2 + 1]m^{n+1} = 0.$$

Это уравнение связывает моменты распределения с параметрами уравнения ФПК. Так как в роли неизвестных выступают четыре параметра  $a$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ , то достаточно ограничиться четырьмя моментами  $m^1$ ,  $m^2$ ,  $m^3$ ,  $m^4$ , т. е. системой из четырех алгебраических уравнений. Зная  $a$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ , можно найти искомые параметры уравнения ФПК по формулам

$$G_{\bar{c}} = \frac{-2b_2(\bar{c} + M[\bar{c}])}{b_2 + 1}; \quad G_{\bar{N}} = \frac{-2b_0(\bar{c} + M[\bar{c}]) (1 - b_0)}{b_2 + 1};$$

$$G_{\bar{c}} \bar{N} = \frac{b_1(\bar{c} + M[\bar{c}])}{b_2 + 1}; \quad M[N] = \frac{(\bar{c} + M[\bar{c}]) (2a - b_1)}{2(b_2 + 1)}.$$

Если речь идет о математической модели неизученного речного бассейна, на котором нет наблюдений или они имеют незначительную длительность, то изложенный путь параметризации неприемлем и необходимо привлекать другие соображения для задания параметров модели.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Программа расчета эволюции плотности вероятности расхода воды по уравнению ФПК\*

Приведенная программа с точностью до обозначений годится для микро-ЭВМ «Электроника» БЗ — 34, МК — 56, МК — 54, МК — 61, МК — 52. По ад-

\* Составлена студентом из МНР Ганболдом Р.

ресу 00—10 производится вычисление первого слагаемого правой части уравнения (2.4), а по адресу 11—28 — второго. Значение  $p^{i+1}$  и его хранение осуществляется по адресу 29—35.

Передвижение содержимого регистров и ввод последующих значений  $p$ ,  $a$ ,  $b$  производится по следующим адресам:

по адресу 36—42 — регистров  $RGb \rightarrow RGa$ ,  $RGc \rightarrow RGb$  и ввод значения  $p_{j+2}$  в регистр  $RGc$ , а также запись результатов  $p_j^{i+1}$ ;

по адресу 43—48 — регистров  $RG1 \rightarrow RGO$ ,  $RG2 \rightarrow RG1$  и ввод значения  $b_{j+2}$  в регистр  $RG2$ ;

по адресу 49—53 — регистров  $RG4 \rightarrow RG3$ , вычисление значения  $a_{j+1}$  и хранение его в регистре  $RG4$ . Затем происходит переход для нового счета на нулевой адрес 54—55.

Коэффициенты  $a(t, Q)$  и  $b(Q)$  из-за нехватки регистров памяти вычисляются заранее. Однако, так как коэффициент  $a(t, Q)$  на каждом временном слое меняется линейно по  $Q$ , то можно ограничиться только первыми двумя коэффициентами и их разностью  $\Delta a^i = a_1^i - a_2^i$ . Следующие значения коэффициента вычисляются автоматически.

### Программа

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	ПХ4	64	28	÷	13
01	ПХв	6L	29	ПХ5	65
02	×	12	30	+	10
03	ПХз	63	31	ПХ6	66
04	ПХа	6—	32	×	12
05	×	12	33	ПХв	6L
06	—	11	34	+	10
07	ПХd	6Г	35	ХП5	45
08	÷	13	36	ПХв	6L
09	(—)	0L	37	ХПа	4—
10	ХП5	45	38	ПХс	6с
11	ПХ2	62	39	ХПв	4L
12	ПХс	6с	40	ПХ5	65
13	×	12	41	С/П	50
14	ПХ1	61	42	ХПс	4с
15	ПХв	6L	43	ПХ1	61
16	×	12	44	ХП0	40
17	2	02	45	ПХ2	62
18	×	12	46	ХП1	41
19	—	11	47	С/П	50
20	ПХО	60	48	ХП2	42
21	ПХа	6—	49	ПХ4	64
22	×	12	50	ХП3	43
23	+	10	51	ПХ7	67
24	2	02	52	—	11
25	÷	13	53	ХП4	44
26	ПХd	6Г	54	БП	51
27	FX <sup>2</sup>	22	55	00	00

**Инструкция \***

№ п/п	Содержание	Набрать число	Выполнить команды	Результат
1	Ввести программу с нулевого адреса		В/О ФПРГ-ввод	
2	Занести исходные данные	$p_{j-1}$ $p_j$ $p_{j+1}$ $b_{j-1}$ $b_j$ $b_{j+1}$ $a_{j-1}$ $a_j$ $\Delta Q$ $\Delta t$ $\Delta a$	ХПа ХПв ХПс ХПО ХП1 ХП2 ХП3 ХП4 ХПд ХП6 ХП7	$p_{j-1}$ $p_j$ $p_{j+1}$ $b_{j-1}$ $b_j$ $b_{j+1}$ $a_{j-1}$ $a_j$ $\Delta Q$ $\Delta t$ $\Delta a$
3	Вычислить значение $p_j^{i+1}$		В/О С/П	$p_j^{i+1}$
4	Занести величины $p_{j+2}$ , $b_{j+2}$	$p_{j+2}$	С/П	$b_{j+1}$
5	Для нового счета — к п. 4	$b_{j+2}$	С/П	$p_{j+1}^{i+1}$

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Антонцев С. Н., Епихов Г. П., Кошеваров А. А. Системное математическое моделирование процессов водообмена. — Новосибирск: Наука, 1986. — 216 с.
2. Астапов Ю. М., Медведев В. С. Статистическая теория систем автоматического регулирования и управления. — М.: Наука, 1982. — 304 с.
3. Гвишиани Д. М. Диалектико-материалистические основания системных исследований. — В кн.: Диалектика и системный анализ. М., 1986, с. 5—18.
4. Евланов Л. Г., Константинов В. М. Системы со случайными параметрами. — М.: Наука, 1976. — 568 с.
5. Коваленко В. В. Измерение и расчет характеристик неустановившихся речных потоков. — Л.: Гидрометеоиздат, 1984. — 160 с.
6. Коваленко В. В. Гидрометрическое оценивание речного стока с элементами стохастического подхода. — Л.: изд. ЛПИ, 1986. — 61 с. (ЛГМИ).
7. Корявов П. П. Проблемы замыкания системы гидрологических моделей речного бассейна. — В кн.: Математическое моделирование: Процессы в сложных экономических и экологических системах. М.: Наука, 1986, с. 220—240.
8. Кучмент Л. С. Модели процессов формирования речного стока. — Л.: Гидрометеоиздат, 1980. — 144 с.
9. Основы марксистско-ленинской философии: Учебник для вузов/ Ф. В. Константинов, А. С. Боголюбов, Г. М. Гак и др. — 5-е изд. — М.: Политиздат, 1981. — 463 с.

\* Регистр 5 — оперативный.



## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение . . . . .	3
1. Динамические модели основных звеньев гидрологического цикла . . . . .	4
1.1. Общее представление о системном подходе в гидрологии. Классификация моделей по видам процессов . . . . .	4
1.2. Модели руслового стока . . . . .	5
1.3. Модели склонового стока с распределенными параметрами . . . . .	7
1.4. Модель склонового стока с сосредоточенными параметрами . . . . .	9
1.5. Простейшая модель водоема . . . . .	10
1.6. Модель ненасыщенной зоны . . . . .	12
1.7. Модель насыщенной зоны и напорных горизонтов . . . . .	12
1.8. Понятие об управляемых природно-технических системах . . . . .	12
1.9. Объединение моделей отдельных звеньев в систему . . . . .	14
1.10. Замыкание гидрологического цикла экологической моделью . . . . .	16
2. Стохастические модели инженерной гидрологии . . . . .	17
2.1. Типы случайных процессов. Понятие о белом шуме . . . . .	17
2.2. Стохастическое обобщение модели склонового стока с сосредоточенными параметрами . . . . .	19
2.3. Уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова (ФПК) . . . . .	20
2.4. Физический смысл уравнения ФПК. Граничные условия . . . . .	23
2.5. Коэффициенты сноса и диффузии . . . . .	25
2.6. Численные методы решения уравнения ФПК . . . . .	25
2.7. Уравнения для моментов распределения плотности вероятности . . . . .	28
2.8. Параметризация стохастической модели водосбора . . . . .	29
Приложение. Программа расчета эволюции плотности вероятности расхода воды по уравнению ФПК . . . . .	30
Литература . . . . .	32

**Виктор Васильевич Коваленко**  
**Динамические и стохастические модели**  
**гидрологического цикла**

**Текст лекций**

Редактор *И. Г. Максимова*

Корректор *Л. В. Ломакина*

---

Сдано в набор 30.11.87. Подписано в печать 26.09.88. М-27176.  
Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага тип. № 2. Лит. гарн. Печать высокая. Печ. л. 2,1.  
Уч.-изд. л. 3,0. Тираж 700 экз. Темплан 1988 г., поз. 265. Зак. 471. Цена 15 коп.  
ЛПИ им. М. И. Калинина. 195251, Ленинград, Политехническая ул., 29

---

Типография ВСОК ВМФ