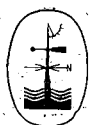


А. М. Яглом

**КОРРЕЛЯЦИОННАЯ
ТЕОРИЯ
СТАЦИОНАРНЫХ
СЛУЧАЙНЫХ
ФУНКЦИЙ**

с примерами из метеорологии



ЛЕНИНГРАД ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ 1981

Рецензенты: акад. А. М. Колмогоров, чл.-корр. АН СССР А. С. Монин

Общедоступное введение в корреляционную теорию стационарных случайных функций, не предполагающее у читателей специальной подготовки, выходящей за пределы общего курса математики, читаемого в вузах гидрометеорологического профиля. Анализируется современное состояние математической теории, приводятся последние достижения в области применения этой теории. Большое внимание уделяется вопросу определения статистических характеристик стационарных случайных функций по результатам наблюдений за одной реализацией в течение конечного промежутка времени. Дается большое число примеров из метеорологии; многочисленные примечания содержат обзор математической и технической специальной литературы по теории стационарных случайных функций.

Для специалистов гидрометеорологов, математиков, физиков.

Time series data consisting of constant mean value and superimposed stationary irregular fluctuations meet very often in meteorology, hydrology and oceanology. Such time series occur frequently also in many other parts of science and engineering, and they are naturally described by the model of a stationary random function. The book «Correlation Theory of Stationary Random Functions with Examples from Meteorology» by A. M. Yaglom contains an elementary exposition of the most important part of the mathematical theory of such functions dealing with their first and second moments. Much attention is paid to the determination of the main statistical characteristics of the stationary random functions (namely mean values, correlation functions and frequency spectra) from observational data; such determination is evidently very important for all the applications of the theory.

The book is designed for students of hydrometeorology, oceanology on other applied areas dealing with the time series. It will also be useful for various practical workers interested in simple presentation of the part of the mathematical theory of stationary time series needed for the modern methods of the statistical treatment of time series data.

АКИВА МОИСЕЕВИЧ ЯГЛОМ
КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ
СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ
с примерами из метеорологии

Редактор Г. А. Солдатова. Художник В. В. Бабанов. Художественный редактор Б. А. Денисовский. Технический редактор Л. М. Шишкова. Корректор Т. В. Прокофьева

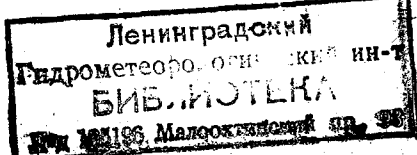
ИБ № 1192. Сдано в набор 03.09.80. Подписано в печать 03.09.81. М-21574. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Печ. л. 17,5. Кр.-отт. 17,5. Уч.-изд. л. 21,21. Тираж 2550 экз. Индекс МЛ-94. Заказ № 559. Цена 3 р. 50 к.

Гидрометеиздат. 199053. Ленинград, 2-я линия, 23.

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгения Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 193144, г. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

Я 20807-159
069(02)-81 23-80. 1903040000

© Гидрометеиздат, 1981 г.



6274572

В метеорологии, гидрологии и океанологии постоянно приходится иметь дело с рядами наблюдений $x(t)$, не претерпевающими каких-либо заметных систематических изменений в течение значительных промежутков времени, а лишь беспорядочно флуктуирующими около одного и того же среднего уровня (см., в частности, достаточно типичные примеры, изображенные на рис. 1 б, г и 2 на с. 20 и 22—23). Ясно, что теоретическое описание всех деталей такого рода рядов $x(t)$ представляется достаточно безнадежной задачей и единственно разумным подходом к их изучению является статистический подход, опирающийся на методы теории вероятностей и математической статистики.

Естественной статистической моделью рассматриваемых временных рядов $x(t)$ является модель стационарной случайной функции переменного t , пробегающего дискретную последовательность равноотстоящих (например, целочисленных) значений или же все вообще действительные значения. Поэтому неудивительно, что математическая теория стационарных случайных функций имеет множество важных приложений к наукам о воздушной и водной оболочках Земли, ряд которых описан, в частности, в выпущенных Гидрометеоздатом книгах [49, 87, 95, 98, 154, 155, 162, 163]. Отметим еще, что почти все эти приложения используют только ту часть общей теории стационарных случайных функций, которая имеет дело лишь с моментами этих функций первых двух порядков и обычно называется корреляционной теорией таких функций.

Настоящая книга также рассчитана на читателей, интересующихся приложениями корреляционной теории стационарных случайных функций, но по своему характеру она заметно отличается от всех книг, перечисленных выше. Дело в том, что хотя здесь и имеется ряд относящихся к метеорологии примеров и ссылок на метеорологическую литературу, конкретные приложения излагаемой в книге математической теории к решению специальных метеорологических задач в ней нигде детально не рассматриваются. Зато здесь дается систематическое изложение современного состояния корреляционной теории стационарных случайных функций и примыкающих к ней разделов математической статистики, посвященных методам определения корреляционных и спектральных характеристик стационарных временных рядов $x(t)$ по данным наблюдений. Нам представляется поэтому, что

ознакомление с настоящей книгой должно предшествовать изучению более специальных прикладных книг и статей, понимание которых такое ознакомление может существенно облегчить и углубить.

Обобщение изложенных в книге результатов на очень часто встречающиеся (в частности, и в гидрометеорологии) многомерные временные ряды $x(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ или даже ряды $x(r) = \{x_1(r), \dots, x_n(r)\}$, зависящие от точки $r = \{r_1, \dots, r_m\}$ многомерного пространства (и обладающие родственным стационарности свойством пространственной однородности), является в принципе очень несложным. Поэтому мы сочли возможным ограничиться здесь лишь одномерными рядами наблюдений $x(t)$, зависящими от одного переменного t .

Ряды наблюдений $x(t)$, хорошо описываемые моделью стационарной случайной функции, разумеется, встречаются не только в метеорологии и гидрологии, но и во множестве разделов физики, а также и почти во всех областях современной техники (особенно часто в радиотехнике, электронике и автоматике), экономике, биологии и медицине и многих других прикладных дисциплинах. Поэтому неудивительно, что в последнее время наблюдается бурный рост самой разнообразной прикладной литературы, имеющей дело с исследованиями стационарных случайных функций. Также и чисто математическая литература на ту же тему, интерес к которой все время стимулируется запросами смежных дисциплин, с каждым годом становится все более и более обширной.

Многие результаты, содержащиеся в математической или же в далекой от гидрометеорологии прикладной литературе, имеющей дело со стационарными случайными функциями, могут представлять значительный интерес для метеорологов, гидрологов и океанологов, но, к сожалению, стиль изложения авторов математиков, как правило, малодоступен для большинства прикладников, а литература, скажем, по технике связи или автоматическому управлению часто бывает перегружена деталями, представляющими интерес лишь для специалистов в данной области техники, и малоизвестна за пределами узкого круга таких специалистов. Поэтому в разделе примечаний настоящей книги автор попытался, в частности, дать обзор разнообразной прикладной литературы о стационарных случайных функциях и доступно рассказать также и о ряде относящихся к ним математических результатов.

Книга предназначена для читателей, не имеющих специальной математической подготовки, которая выходила бы за пределы курсов высшей математики, читаемых в гидрометеорологических (или технических) вузах и элементарного курса теории вероятностей, причем большинство нужных сведений из теории вероятностей вкратце напоминает во введении. Поскольку нами предполагается, что основной интерес для читателей представляют при-

ложения теории, а не доказательства теорем, математические доказательства в тексте книги в ряде случаев лишь намечены или даже совсем опущены. Однако автор стремился во всех случаях точно указывать, каких именно фактов не хватает в его изложении, даже если сами эти факты являются довольно тонкими и их строгое доказательство требует привлечения сложного математического аппарата, далеко выходящего за пределы знаний, которых естественно ожидать у читателей настоящей книги.

Вообще уровень математической строгости изложения здесь выше, чем в большинстве книг и статей, предназначенных для прикладников; поэтому можно надеяться, что эта книга будет полезна и читателям-прикладникам, которых не вполне устраивает облегченный, так называемый инженерный уровень строгости, и лицам, изучающим математическую теорию случайных функций и специально интересующимся приложениями соответствующей теории.

Заметное место в книге занимает обсуждение некоторых принципиально важных, но традиционно опускаемых в книгах прикладного содержания вопросов, таких, как, например, вопрос о точном определении понятия случайной функции, о физических и математических условиях эргодичности и о смысле спектрального разложения стационарных случайных функций. Вместе с тем также и изложение теоретических основ методов определения статистических характеристик стационарных случайных функций по эмпирическим данным здесь является заметно более детальным, чем в большинстве других книг того же уровня сложности, причем оно доведено до рассмотрения самых последних достижений в этой области.

В конце книги помещено большое число примечаний к основному тексту. Читателям, впервые знакомящимся по этой книге с теорией стационарных случайных функций, можно порекомендовать при первом чтении просто опустить все примечания; в дальнейшем, однако, им, может быть, захочется еще раз разобраться некоторые места книги более подробно или узнать добавочную литературу по тому или иному специальному вопросу.

Содержание примечаний является довольно разнообразным: в некоторых случаях здесь дается изложение доказательства, только вкратце намеченного или вовсе опущенного в основном тексте; другие примечания содержат дополнительный материал, имеющий более специальный характер и непосредственно не используемый в основном тексте (в частности, в раздел примечаний вынесены и некоторые более тонкие математические факты, ранее никогда в книге для прикладников вообще не включавшиеся); иногда же в примечаниях даются сведения по истории рассматриваемого вопроса или обсуждаются связи излагаемых в книге результатов с некоторыми результатами, относящимися к другим разделам математики и физики. Наконец, в раздел примечаний

вынесены также и практически все ссылки на литературу, которые по причинам, объясненным выше, автор решил сделать довольно многочисленными и как можно более разнообразными (хотя, конечно, они все же включают лишь небольшую долю имеющейся литературы по теории стационарных случайных функций и их приложениям, разбросанной по громадному числу журналов и книг самой разнообразной тематики).

При написании книги автор столкнулся с множеством трудностей, связанных с выбором обозначений и терминологии, так как, к сожалению, очень многие обозначения и термины, принятые в математической литературе, не совпадают с обозначениями и терминами, используемыми в прикладной литературе, причем часто различные авторы прикладники или различные области приложений в этом отношении также заметно отличаются друг от друга.

Стремясь способствовать этой книгой облегчению взаимопонимания между прикладниками и математиками, автор решил прибегнуть к компромиссу, не отдавая решительного предпочтения ни одной из сторон. Так, например, круговая частота, много раз упоминаемая в тексте книги, здесь всегда обозначается буквой ω , общепринятой в прикладной литературе, но не буквой λ , чаще всего используемой математиками, а в качестве знака осреднения используются угловые скобки, привычные для многих прикладников, но редко встречающиеся в чисто математической литературе. В то же время в соответствии с тем, как это принято в математической литературе, спектральная плотность обозначается в книге буквой f (а не, например, одной из букв S , F , E или W , широко используемых в прикладных книгах и статьях) и не называется просто спектром случайной функции. В некоторых случаях оказалось также, что в русской литературе не удастся найти специального термина для некоторых достаточно полезных понятий; в этих случаях автор предпочитал не обойти соответствующие понятия, а ввести новый термин.

В заключение автор хочет указать, что работа над настоящей книгой вначале имела целью переработку для нового издания его старой обзорной статьи [227], несколько раз издававшейся за рубежом в виде отдельной книги. Эта переработка очень затянулась и привела в конце концов к книге, резко отличающейся от исходной статьи (в первую очередь за счет включения материала по статистике стационарных случайных функций, совсем не затрагивавшейся в статье [227], и исключения всей теории линейной экстраполяции и фильтрации таких функций, занимавшей в этой статье основное место).

ВВЕДЕНИЕ

Теория вероятностей изучает такие опыты (иначе — наблюдения или испытания), результаты которых в принципе не могут быть совершенно точно предсказаны заранее, так как они зависят от каких-то обстоятельств, которых мы не знаем или не можем точно учесть. При этом далеко не все такие опыты могут служить объектом теоретико-вероятностного изучения. Прежде всего, требуется еще, чтобы рассматриваемые опыты относились к числу *м а с с о в ы х я в л е н и й*, т. е. чтобы они могли быть многократно повторены при практически одинаковых условиях (и даже не только могли, но и на самом деле повторялись бы — только при этом условии применение теории вероятностей может принести реальную пользу). Далее требуется, чтобы результаты опыта обладали определенной *статистической устойчивостью*, а именно, чтобы при многократном повторении опыта частота появления любого заданного его результата (т. е. отношение числа опытов, приведших к этому результату, к общему числу проделанных опытов) оставалась бы почти все время примерно одинаковой, лишь слегка колеблясь около некоторого постоянного числа p .

Требование наличия такой статистической устойчивости (или, как еще говорят, наличия относящейся к данному опыту *статистической закономерности* или *статистического закона*) на первый взгляд кажется весьма ограничительным, но на самом деле оно поразительно часто оказывается выполняющимся и в естественных (природных) условиях, и в условиях, создаваемых деятельностью человека *. Рассматриваемый результат опыта называют в таком случае *случайным событием*, а число p — *вероятностью* этого события.

Случайные события представляют собой самый первый объект изучения в теории вероятностей, но они не являются основным предметом исследования в этой теории. Основное место в теории вероятностей занимает изучение всевозможных численных характеристик случайных событий, т. е. величин, принимающих различные численные значения в зависимости от результата некоторого опыта (допускающего многократное повторение и обладаю-

* Заметим, в частности, что статистическую природу имеют все законы квантовой механики и все следствия из этих законов. В связи с последним обстоятельством многие крупные современные физики склонны даже считать, что в основе вообще всех законов природы лежат некоторые статистические закономерности.

шего статистической устойчивостью исходов). Такие величины обычно называются случайными величинами. Примерами случайных величин могут, в частности, служить: а) число очков, выпавших на брошенной игральной кости; б) ошибка измерения какой-либо величины определенным прибором; в) температура в г. Москве в 12 ч в один из дней января; г) суммарная площадь солнечных пятен, зафиксированных в некоторый момент времени солнечной обсерваторией. Во всех этих примерах опыт подтверждает выполнимость условий, требующихся для того, чтобы эти величины можно было считать случайными в теоретико-вероятностном смысле этого слова.^{1*}

Случайные величины всегда будут обозначаться в этой книге заглавными буквами, а принимаемые ими числовые значения (которые принято называть выборочными значениями, наблюдаемыми значениями или реализациями рассматриваемой случайной величины) — соответствующими строчными буквами. Если X — случайная величина, то событие, состоящее в том, что ее значение оказалось меньшим фиксированного числа x , будет случайным событием. Вероятность

$$P\{X < x\} = F(x) \quad (B.1)$$

(символом $P\{\dots\}$ мы всегда будем обозначать вероятность выполнения соотношений, выписанных внутри фигурных скобок) является функцией от x , называемой функцией распределения случайной величины X . Из самого определения (B. 1) сразу вытекает, что функция распределения является монотонно неубывающей функцией x , стремящейся к нулю при $x \rightarrow -\infty$ и к единице при $x \rightarrow \infty$. Если величина X может принимать лишь какие-то дискретные значения $x_1, x_2, \dots$ (в таком случае и сама эта величина называется дискретной), то функция $F(x)$, очевидно, будет «ступенчатой функцией», возрастающей скачком на величину $p_k = P\{X = x_k\}$ в точках x_k , но остающейся постоянной на всех интервалах между точками x_k .

Другой важный класс случайных величин составляют непрерывные величины, обладающие тем свойством, что $P\{x \leq X < x + \Delta x\} \approx p(x) \Delta x$ при всех x и любом достаточно малом Δx . Здесь уже

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x') dx', \quad p(x) = dF(x)/dx, \quad (B.2)$$

т. е. $F(x)$ — это дифференцируемая функция, совпадающая с интегралом от своей производной. В этом случае вместо задания

* Номера относятся к примечаниям в конце книги.

функции $F(x)$ достаточно задать ее производную $p(x)$ — плотность вероятности непрерывной случайной величины X .

Понятие плотности вероятности формально можно использовать и в применении к дискретным величинам X , но только теперь уже эта плотность будет являться «несобственной» (обобщенной) функцией, представимой в виде комбинации δ -функций Дирака ²:

$$p(x) = \sum_k p_k \delta(x - x_k).$$

Помимо чисто дискретных и чисто непрерывных случайных величин иногда встречаются случайные величины смешанного типа, которым отвечает функция $F(x)$, имеющая скачки, но плавно возрастающая в промежутках между ними, и плотность $p(x)$, равная сумме обыкновенной функции и линейной комбинации δ -функций. В принципе могут существовать также и еще более сложные случайные величины, функция распределения которых содержит слагаемое, являющееся непрерывной (не имеющей скачков), но не представимой в виде интеграла от своей производной функцией; однако такого рода случайные величины в физических и технических приложениях никогда не встречаются.

Функция распределения $F(x)$ (или соответствующая плотность вероятности $p(x)$) доставляют полное статистическое описание случайной величины X . (Другой важный метод такого полного описания, которым мы, однако, не будем пользоваться, состоит в задании так называемой характеристической функции этой случайной величины.) ³ Для описания же частных свойств величины X удобны более простые ее числовые статистические характеристики, важнейшими из которых являются моменты X :

$$\mu^{(n)} = \langle X^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF(x). \quad (\text{B.3})$$

Угловые скобки в формуле (B.3) служат символом вероятностного осреднения (т. е. осреднения по статистическому ансамблю всевозможных реализаций), а ее правая часть описывает эту операцию осреднения аналитически. Интеграл в правой части — это так называемый интеграл Стильеса, который в случае конечных пределов интегрирования определяется равенством

$$\int_a^b f(x) dF(x) = \lim_{\max |x_k - x_{k-1}| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^N f(x'_k) [F(x_k) - F(x_{k-1})], \quad (\text{B.4})$$

где $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$, $x_{k-1} \leq x'_k \leq x_k$, а в случае интегрирования от $-\infty$ до ∞ находится как предел интеграла от a до b при $a \rightarrow -\infty$, $b \rightarrow \infty$. Если существует плотность

вероятности $p(x)$ величины X , то интеграл Стильеса (В. 3) переходит в обыкновенный интеграл

$$\mu^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n p(x) dx. \quad (\text{В.5})$$

В случае дискретной или смешанной случайной величины X также можно использовать формулу (В. 5), если только допустить, что $p(x)$ может включать и δ -функции. В дальнейшем для простоты систематически будут использоваться для моментов формулы вида (В.5), однако, так как интегралы Стильеса нам все равно понадобятся ниже для другой цели, мы предпочли выписать здесь и общую формулу (В. 3).

Наиболее широко используются на практике моменты первых двух порядков, которые и в этой книге будут играть центральную роль. Первый момент

$$m_X = \langle X \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx \quad (\text{В.6})$$

(среднее значение или математическое ожидание величины X) определяет «центр распределения», около которого группируются все наблюдаемые значения X . Второй момент $\mu^{(2)} = \langle X^2 \rangle$ позволяет численно охарактеризовать разброс наблюдаемых значений величины X относительно ее среднего значения с помощью дисперсии

$$D_X = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^2 p(x) dx, \quad (\text{В.7})$$

легко выражающейся через $\mu^{(1)} = m_X$ и $\mu^{(2)}$ по формуле

$$D_X = \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \mu^{(2)} - m_X^2. \quad (\text{В.8})$$

В дальнейшем в этой книге всегда будут рассматриваться лишь случайные величины X , имеющие конечные средние значения и дисперсию, т. е. такие, что для них интегралы в правых частях (В.6) и (В.7) являются сходящимися. В таком случае корень квадратный из дисперсии $\sigma_X = D_X^{1/2}$, называемый средним квадратичным отклонением X , как раз и будет описывать величину разброса наблюдаемых значений X относительно m_X .* Заметим еще, что, как легко видеть,

$$\langle (X - a)^2 \rangle = \langle [(X - m_X) + (m_X - a)]^2 \rangle = D_X + (m_X - a)^2 \quad (\text{В.9})$$

* Таким образом, символы D_X и σ_X^2 обозначают одну и ту же величину. Заметим еще, что ниже иногда вместо D_X и σ_X будут использоваться также обозначения $D(X)$ и $\sigma(X)$.

при любом a ; следовательно, $\langle (X - a)^2 \rangle$ принимает наименьшее значение при $a = m_X$. В частном случае, когда X принимает лишь неотрицательные целочисленные значения, причем $\mathbf{P}\{X = k\} = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$, $k = 0, 1, 2, \dots$ (случай так называемого распределения Пуассона с параметром $\lambda > 0$), нетрудно показать, что $m_X = \lambda$, $D_X = \lambda$; если же X принимает произвольные вещественные значения и имеет плотность вероятности $p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} \sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$

(случай нормального или гауссовского распределения вероятностей с параметрами m и $\sigma > 0$), то $m_X = m$, $D_X = \sigma^2$.⁴

Пару произвольных случайных величин X и Y всегда можно рассматривать как одну двумерную случайную величину $\mathbf{X} = (X, Y)$, задаваемую двумерной функцией распределения

$$F(x, y) = \mathbf{P}\{X < x, Y < y\}, \quad (\text{B.10})$$

зависящей от переменных x и y . В частном случае непрерывной двумерной величины, для которой $\mathbf{P}\{x \leq X < x + \Delta x, y \leq Y < y + \Delta y\} \approx p(x, y) \Delta x \Delta y$ при малых Δx и Δy , вместо $F(x, y)$ можно использовать двумерную плотность вероятности $p(x, y)$, связанную с $F(x, y)$ соотношениями:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(x', y') dx' dy',$$

$$p(x, y) = \partial^2 F(x, y) / \partial x \partial y. \quad (\text{B.11})$$

Простейшими статистическими характеристиками двумерной случайной величины являются ее моменты $\mu^{(n, m)} = \langle X^n Y^m \rangle$, которые в случае непрерывной величины $\mathbf{X}$, имеющей двумерную плотность вероятности $p(x, y)$, представляются в виде

$$\mu^{(n, m)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^n y^m p(x, y) dx dy. \quad (\text{B.12})$$

Моменты $\mu^{(n, 0)} = \langle X^n \rangle$ и $\mu^{(0, m)} = \langle Y^m \rangle$, очевидно, совпадают с обычными моментами (одномерных) случайных величин X и Y ; если же $n > 0$ и $m > 0$, то момент $\mu^{(n, m)}$ называется смешанным моментом X и Y . Самым простым (и важным для приложений) смешанным моментом является второй смешанный момент $\mu^{(1, 1)} = \langle XY \rangle$. В ряде случаев вместо $\mu^{(1, 1)}$ удобнее использовать второй смешанный центральный момент,

$$b_{XY} = \langle (X - \langle X \rangle)(Y - \langle Y \rangle) \rangle = \langle XY \rangle - \langle X \rangle \langle Y \rangle, \quad (\text{B.13})$$

который иногда называется ковариацией случайных величин X и Y . Нормированное на корни из соответствующих дисперсий (среднеквадратичные отклонения) значение ковариации

$$r = b_{XY}/\sigma_X\sigma_Y \quad (\text{B.14})$$

называется коэффициентом корреляции величин X и Y ; нетрудно показать, что всегда $-1 \leq r \leq 1$. В самом деле, так как $\langle (X - aY)^2 \rangle = \langle X^2 \rangle - 2\langle XY \rangle a + \langle Y^2 \rangle a^2 \geq 0$ при всех значениях a , то в силу известного критерия неотрицательности квадратного двучлена

$$|\langle XY \rangle| \leq \langle X^2 \rangle^{1/2} \langle Y^2 \rangle^{1/2} \quad \text{и} \quad |b_{XY}| \leq \sigma_X \sigma_Y \quad (\text{B.15})$$

(второе неравенство (B.15) — это частный случай первого неравенства, относящийся к величинам $\overset{\circ}{X} = X - \langle X \rangle$ и $\overset{\circ}{Y} = Y - \langle Y \rangle$); следовательно, $|r| \leq 1$. И первое, и второе неравенства (B.15) иногда называются неравенством Коши, или неравенством Буняковского, или неравенством Шварца, или, наконец, неравенством Коши — Буняковского — Шварца (по имени ученых, доказавших некоторые родственные (B.15) неравенства, относящиеся к другим разделам математики). Отметим еще, что если $r = \pm 1$, то $\langle (\overset{\circ}{X} - a\overset{\circ}{Y})^2 \rangle = 0$ при некотором значении a , т. е. здесь X с вероятностью единицы совпадает с линейной комбинацией вида $aY + b$.

Важным частным случаем двумерного распределения вероятностей является случай двумерного нормального распределения (распределения Гаусса), задаваемого плотностью вероятности вида

$$\begin{aligned} p(x, y) = & \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2(1-r^2)^{1/2}} \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r \frac{(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

где m_1 и m_2 — произвольные числа, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ и $-1 < r < 1$. Нетрудно проверить, что при таких m_1 , m_2 , σ_1 , σ_2 и r функция (B.16) действительно является двумерной плотностью вероятности, т. е. вещественной неотрицательной функцией, интеграл от которой по всей плоскости (x, y) равен единице. При $r = \pm 1$ равенство (B.16) не имеет смысла, но легко видеть, что, полагая $r \rightarrow +1$ или $r \rightarrow -1$ в формуле (B.16), мы приходим к предельному случаю, когда $X - m_1 = \pm \sigma_1 (Y - m_2)/\sigma_2$ с вероятностью единицы (так что все значения $\mathbf{X} = (X, Y)$ лежат на фиксированной прямой плоскости (x, y)), причем и X , и Y имеют одномерное нормальное распределение вероятностей; в этом случае распределение

вероятностей пары (X, Y) называется вырожденным нормальным распределением. Одномерные плотности вероятности величин X и Y , отвечающие двумерной плотности (В.16), равны:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-m_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \\ p_2(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}, \end{aligned} \quad (\text{В.17})$$

т. е. обе являются одномерными нормальными плотностями вероятности. Из (В.17) сразу следует, что m_1 и m_2 — это средние значения случайных величин X и Y , а σ_1^2 и σ_2^2 — дисперсии этих величин. Легко показать также, что для пары величин, имеющих плотность (В. 16), коэффициент корреляции X и Y равен r . Заметим, что при $r = 0$ формула (В.16) может быть переписана в виде: $p(x, y) = p_1(x) p_2(y)$; отсюда следует, что в случае нормально распределенных величин (X, Y) из некоррелированности X и Y вытекает их независимость друг от друга. В общем же случае, как известно, из независимости двух величин X и Y друг от друга всегда вытекает и их некоррелированность, но из того, что коэффициент корреляции X и Y равен нулю, еще не следует, что величины X и Y независимы друг от друга.

В случаях, когда приходится одновременно иметь дело с n различными случайными величинами $X_1, X_2, \dots, X_n$, их все можно рассматривать как одну n -мерную случайную величину $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. Для задания такой величины можно использовать n -мерную функцию распределения

$$F(x_1, \dots, x_n) = P\{X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n\}, \quad (\text{В.18})$$

зависящую от переменных $x_1, \dots, x_n$. В частном случае существования n -мерной плотности вероятности $p(x_1, \dots, x_n)$ имеем

$$\begin{aligned} F(x_1, \dots, x_n) &= \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} p(x'_1, \dots, x'_n) dx'_1 \dots dx'_n, \\ p(x_1, \dots, x_n) &= \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}, \end{aligned} \quad (\text{В.19})$$

где $p(x_1, \dots, x_n)$ — неотрицательная функция, интеграл от которой по всему n -мерному пространству равен единице. По функции $F(x_1, \dots, x_n)$ или $p(x_1, \dots, x_n)$ можно определить все моменты

величины $\mathbf{X}$; в частности, если существует плотность вероятности, то

$$\begin{aligned} \mu^{(i_1, \dots, i_n)} &= \langle X_{i_1}^{i_1}, \dots, X_{i_n}^{i_n} \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_{i_1}^{i_1}, \dots, x_{i_n}^{i_n} p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

В настоящей книге мы будем иметь дело только с первыми моментами $\mu_k^{(1)} = \langle X_k \rangle = m_k$, образующими вектор средних значений $\mathbf{m}_X = (m_1, \dots, m_n)$, и вторыми моментами $\mu_{jk}^{(1,1)} = B_{jk} = \langle X_j X_k \rangle$, образующими корреляционную матрицу $\mathcal{B} = \|B_{jk}\|$ случайной величины $\mathbf{X}$. Вместо величин B_{jk} часто оказывается более удобным рассматривать вторые центральные моменты

$$b_{jk} = \langle (X_j - \langle X_j \rangle)(X_k - \langle X_k \rangle) \rangle = B_{jk} - m_j m_k; \quad (\text{B.21})$$

матрица $\tilde{\mathcal{B}} = \|b_{jk}\|$ также часто называется корреляционной матрицей величины $\mathbf{X}$ (или же центрированной корреляционной матрицей, ковариационной матрицей или матрицей ковариаций). В дальнейшем для краткости термин «корреляционная матрица» будет, как правило, прилагаться к обеим матрицам $\mathcal{B}$ и $\tilde{\mathcal{B}}$ и лишь тогда, когда из-за этого может возникнуть путаница, $\tilde{\mathcal{B}}$ будет называться центрированной корреляционной матрицей. Иногда вместо $\tilde{\mathcal{B}}$ будет также рассматриваться нормированная матрица коэффициентов корреляции $\mathcal{R} = \|r_{jk}\| = \|b_{jk}/\sigma_j \sigma_k\|$.

Ясно, что все три матрицы $\mathcal{B}$, $\tilde{\mathcal{B}}$ и $\mathcal{R}$ по самому своему определению являются симметрическими: $B_{jk} = B_{kj}$, $b_{jk} = b_{kj}$ и $r_{jk} = r_{kj}$. Кроме того, эти матрицы являются также и положительно определенными: каковы бы ни были вещественные числа $c_1, \dots, c_n$, всегда

$$\sum_{j,k=1}^n B_{jk} c_j c_k \geq 0, \quad \sum_{j,k=1}^n b_{jk} c_j c_k \geq 0, \quad \sum_{j,k=1}^n r_{jk} c_j c_k \geq 0 \quad (\text{B.22})$$

(так как квадратная форма в левой части первого неравенства (B.22) равна $\langle (c_1 X_1 + \dots + c_n X_n)^2 \rangle$), а второе и третье неравенства (B.22) являются частными случаями первого неравенства, соответствующими замене произвольных n случайных величин X_j , $j = 1, \dots, n$, величинами $X_j - \langle X_j \rangle$, $j = 1, \dots, n$ или же $(X_j - \langle X_j \rangle)/\sigma_j$, $j = 1, \dots, n$).

Рассмотрим теперь многомерное нормальное распределение вероятностей (многомер-

ное распределение Гаусса), задаваемое плотностью вероятности вида

$$p(x_1, \dots, x_n) = A \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n g_{jk} (x_j - m_j) (x_k - m_k) \right\}, \quad (\text{B.23})$$

где $m_1, \dots, m_n$ — произвольные вещественные постоянные, $g_{jk} = g_{kj}$ и числа g_{jk} обладают тем свойством, что $\mathcal{G} = \|g_{jk}\|$ является строго положительно определенной матрицей (т. е. $\sum_{j,k=1}^n g_{jk} c_j c_k > 0$ при любых вещественных $c_1, \dots, c_n$, не все из которых равны нулю), а A определяется исходя из требования, чтобы интеграл от $p(x_1, \dots, x_n)$, распространенный по всему n -мерному пространству, равнялся единице. Выполнив сравнительно несложные преобразования, можно показать, что

$$A = G^{1/2} / (2\pi)^{n/2}, \quad (\text{B.24})$$

где $G = |g_{jk}|$ — детерминант матрицы $\mathcal{G}$.⁵ Заметим еще, что многомерное нормальное распределение может быть определено и в случае, когда $\mathcal{G} = \|g_{jk}\|$ — положительно определенная (но не строго положительно определенная) матрица; при этом надо лишь считать, что случайные величины $X_1, \dots, X_n$ связаны одной или несколькими линейными зависимостями, так что все распределение вероятностей здесь сосредоточено на некотором $(n - m)$ -мерном линейном подпространстве (где $m > 0$) всего n -мерного пространства точек $(x_1, \dots, x_n)$. Если заданное на этом подпространстве распределение является $(n - m)$ -мерным нормальным распределением, то исходное распределение n величин $X_1, \dots, X_n$ также будет называться нормальным (но только в вырожденных нормальных распределениях) распределением. Такие вырожденные нормальные распределения, которые для простоты дальше не будут специально рассматриваться, обладают на самом деле многими теми же свойствами, что и невырожденные распределения с плотностью вероятности вида (B.23).

Подставив выражение (B.23) в формулы для первых и вторых моментов, вытекающие из общей формулы (B.20), нетрудно убедиться, что в случае плотности (B.23)

$$\begin{aligned} \langle X_j \rangle &= m_j, \quad B_{jk} = \langle X_j X_k \rangle = G_{jk}/G + m_j m_k, \\ b_{jk} &= G_{jk}/G, \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

где как и выше, $G = \det \mathcal{G} = |g_{jk}|$, а G_{jk} — алгебраическое дополнение элемента g_{jk} в детерминанте G (так что $\mathcal{B} = \|b_{jk}\| = \|g_{jk}\|^{-1} = \mathcal{G}^{-1}$). Из формул (B.25) вытекает, что для любого набора n вещественных чисел $(m_1, \dots, m_n) = \mathbf{m}$ и любой строго положительно определенной матрицы $\mathcal{B}$ можно легко определить

n -мерное нормальное распределение, имеющее m своим вектором средних значений a $\mathcal{B}$ —своей центрированной корреляционной матрицей; если же мы будем рассматривать также и вырожденные n -мерные нормальные распределения, то последнее утверждение, как легко видеть, будет справедливым в применении и к любому вектору m , и к любой положительно определенной (но не обязательно строго положительно определенной) матрице $\mathcal{B}$. Формулы (В.25) показывают, кроме того, что плотность нормального распределения вероятностей однозначно определяется своими первыми и вторыми моментами; поэтому указанные моменты должны однозначно определять и все вообще статистические характеристики случайных величин $X_1, \dots, X_n$ (это последнее утверждение также оказывается справедливым и для вырожденных многомерных нормальных распределений). Отметим, еще что в случае n -мерного нормального распределения величин $X_1, \dots, X_n$ распределение вероятностей любой подгруппы из $m < n$ этих величин также будет нормальным; кроме того, нормальным здесь будет и распределение вероятностей любых M линейных комбинаций величин $X_1, \dots, X_n$ при всех $M > 0$, так что, в частности, и каждая такая комбинация $Y = \sum_{i=1}^n c_i X_i + c_0$ обязательно будет иметь нормальное распределение (см. литературу, указанную в примечании ⁵).

Изучение одномерных и многомерных случайных величин представляет собой основное содержание классической теории вероятностей — законченной математической дисциплины, излагаемой в целом ряде учебников различного уровня сложности. В последние годы однако, во многих приложениях оказалось полезным или даже необходимым рассматривать и более сложные теоретико-вероятностные объекты, а именно — с л у ч а й н ы е ф у н к ц и и. Этим термином обозначаются функции аргумента t (чаще всего играющего роль времени), определяющиеся результатами какого-то опыта или наблюдения, при многократном повторении которого они могут принимать различные значения, и обладающие определенной статистической устойчивостью (о точном смысле последнего утверждения еще будет идти речь ниже). Изучению таких случайных функций и посвящена настоящая книга.

Простейшей ситуацией, в которой понятие случайной функции оказывается полезным, является та, где приходится иметь дело с данными наблюдений, повторяющихся через регулярные промежутки времени. Разумеется, здесь в распоряжении исследователя всегда имеется лишь какое-то конечное число N результатов наблюдений, которые можно считать значением некоторой N -мерной случайной величины $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$; однако если N очень велико (например, имеет порядок нескольких сотен или тысяч), то

часто удобнее рассматривать величины $X_1, \dots, X_N$ как отрезок бесконечного временного ряда $\dots, X_{-1}, X_0, X_1, \dots, X_N, X_{N+1}, \dots$ всех возможных наблюдений. Такой временной ряд представляет собой уже случайную функцию дискретного аргумента t (номера наблюдения), пробегающего все возможные целые значения. Возникающие здесь случайные функции целочисленного аргумента t часто называются случайными последовательностями.

Более сложными с точки зрения теории являются опыты, в которых наблюдения производятся непрерывно, т. е. регистрируется значение некоторой функции аргумента t , пробегающего все вещественные значения из некоторого интервала (может быть, даже бесконечного). Случайные функции такого непрерывного аргумента t очень часто называются случайными процессами. Наконец в случае результатов опытов, представляемых в виде значения функции $X(t_1, \dots, t_k)$ нескольких вещественных аргументов (обычно имеющих смысл координат точки некоторого пространства), часто употребляется термин случайные поля.

Исторически одним из самых первых примеров опытов, приводящих к появлению случайных функций, явились наблюдения брауновского движения мелких частиц, взвешенных в жидкости или газе, впервые описанные почти полтора столетия назад⁶. Наблюдаемые в этих опытах частицы всегда движутся крайне нерегулярно; регистрируя значения какой-либо координаты одной из таких частиц через определенные промежутки времени, мы получаем одну реализацию (иначе наблюденное значение, или выборочное значение, или траекторию) некоторой случайной последовательности $X(t)$. Аналогично этому значения координаты $x(t)$ брауновской частицы при всех t доставляют нам реализацию случайного процесса $X(t)$.

К брауновскому движению близко примыкают флуктуации силы тока и напряжения в электрических цепях; строго говоря, напряжение $V = V(t)$ на концах любого проводника и сила тока $I = I(t)$ в нем всегда беспорядочно флуктуируют во времени, так как тепловое движение отдельных электронов (родственное брауновскому движению взвешенных частиц) вызывает неконтролируемые изменения функций $V(t)$ и $I(t)$ (так называемые тепловые шумы). Если же цепь включает еще и электронные лампы или полупроводниковые устройства, то электрические флуктуации в ней заметно возрастают из-за наличия хаотических пульсаций интенсивности переноса электрических зарядов в лампе и полупроводнике.

В радиоприемных устройствах помимо шумов, возникающих в самой приемной цепи, всегда наблюдаются еще и дополнительные помехи и случайные замирания принимаемых сигналов (фединги),

возникающие из-за рассеяния распространяющихся радиоволн на неоднородностях коэффициента преломления атмосферы и влияния посторонних электрических разрядов (метеорологические и промышленные шумы).

Электронные и радиотехнические приборы часто используются в качестве одного из звеньев систем автоматического управления; однако и помимо того работа систем автоматического управления всегда протекает под воздействием нерегулярных помех, представляющих собой случайные функции времени (достаточно вспомнить про систему автоматического управления самолетом, летящим в реальной турбулентной атмосфере и подвергающимся воздействию неупорядоченных порывов ветра).

Все сказанное хорошо объясняет, почему широкое развитие электро- и радиотехники, электроники и автоматики послужило мощным стимулом для бурного расцвета исследований по теории случайных функций и связанного с ним появления новой очень важной прикладной дисциплины, обычно называемой статистической радиотехникой, или статистической радиофизикой, или статистической теорией связи, или статистической теорией систем автоматического управления.⁷

Выше, говоря о системе управления самолетом, мы уже упоминали про турбулентность — нерегулярные изменения во времени и в пространстве значений скорости, давления, температуры и других гидродинамических величин в почти любом течении жидкости или газа (так называемые ламинарные течения, не сопровождающиеся нерегулярными пульсациями, на самом деле представляют собой лишь редкое исключение). Турбулентность приводит к тому, что значения трех компонент вектора скорости, давления, температуры и других характеризующих течение величин как в природных условиях (в земной атмосфере, морях и океанах, реках и проточных озерах), так и в течениях, осуществляемых в инженерных и промышленных устройствах или физических лабораториях, почти всегда представляют собой реализации некоторых случайных полей — случайных функций времени и трех пространственных координат.

Воздействие создаваемых турбулентностью порывов ветра на растительность, различные строения и другие возвышающиеся над землей объекты является одним из источников микросейсм — небольших беспорядочных вибраций земной поверхности, фиксируемых чувствительными сейсмометрами; эти микросейсм заставляют иногда считать уровень земной поверхности в фиксированной точке случайной функцией времени. Аналогичный случайный характер имеют и так называемые геомагнитные вариации — беспорядочные изменения напряженности земного магнитного поля, изучаемые специалистами в области земного магнетизма.

Реализациями случайных процессов естественно считать и многие функции времени, изучаемые в биологии; хорошим примером здесь могут служить беспорядочные изменения биоэлектрических потенциалов мозга, регистрируемые на электроэнцефалограммах. Очень часто возникают случайные функции также в разнообразных технологических процессах — если в ходе производства непрерывно создается какой-то продукт, то его параметры всегда в какой-то мере флуктуируют во времени и поэтому временной ход каждого из них, как правило, должен рассматриваться как реализация некоторого случайного процесса. Аналогично этому обыкновенная скачка нить в силу целого ряда неконтролируемых причин всегда оказывается не вполне однородной, так что ее толщина в некоторых случаях должна рассматриваться как случайная функция расстояния от начала нити; также и вертикальная координата любой горизонтальной шероховатой поверхности представляет собой случайную функцию двух горизонтальных координат.

Важным примером шероховатой поверхности является взволнованная поверхность моря; так как, однако, морские волны подвижны, то здесь уже высота поверхности представляет собой случайную функцию трех переменных — двух пространственных координат и времени. Перечисленным здесь конкретным примерам случайных функций посвящена обширная (и очень различная по своему характеру) научная и учебная литература.⁸ В дальнейшем изложении нам встретятся и другие примеры случайных функций, возникающих в тех или иных прикладных вопросах.

Примеры наблюдаемых значений случайных функций приведены на рис. 1. Мы видим, что все представленные кривые имеют примерно одинаковый характер, хотя они и относятся к совершенно различным явлениям. Подобного рода кривые, характеризующиеся наличием многочисленных хаотических отклонений от «среднего уровня» разной продолжительности и величины, весьма часто встречаются на практике; по одному их внешнему виду обычно можно заключить, что мы, по-видимому, имеем дело с реализацией какой-то случайной функции, к которой целесообразно применить статистические рассуждения. Иногда, однако, это первое впечатление может оказаться ошибочным, поэтому на вопросе о применимости теории случайных функций к данным реальных наблюдений стоит остановиться немного подробнее.

Из всего сказанного выше вытекает, что основным признаком случайной функции является вовсе не запутанность и нерегулярность ее графика, а наличие целого «статистического ансамбля» однотипных реализаций $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... и т. д., каждая из которых отвечает одному из множества допустимых однотипных опытов (или наблюдений) и которые в своей совокупности обладают неко-

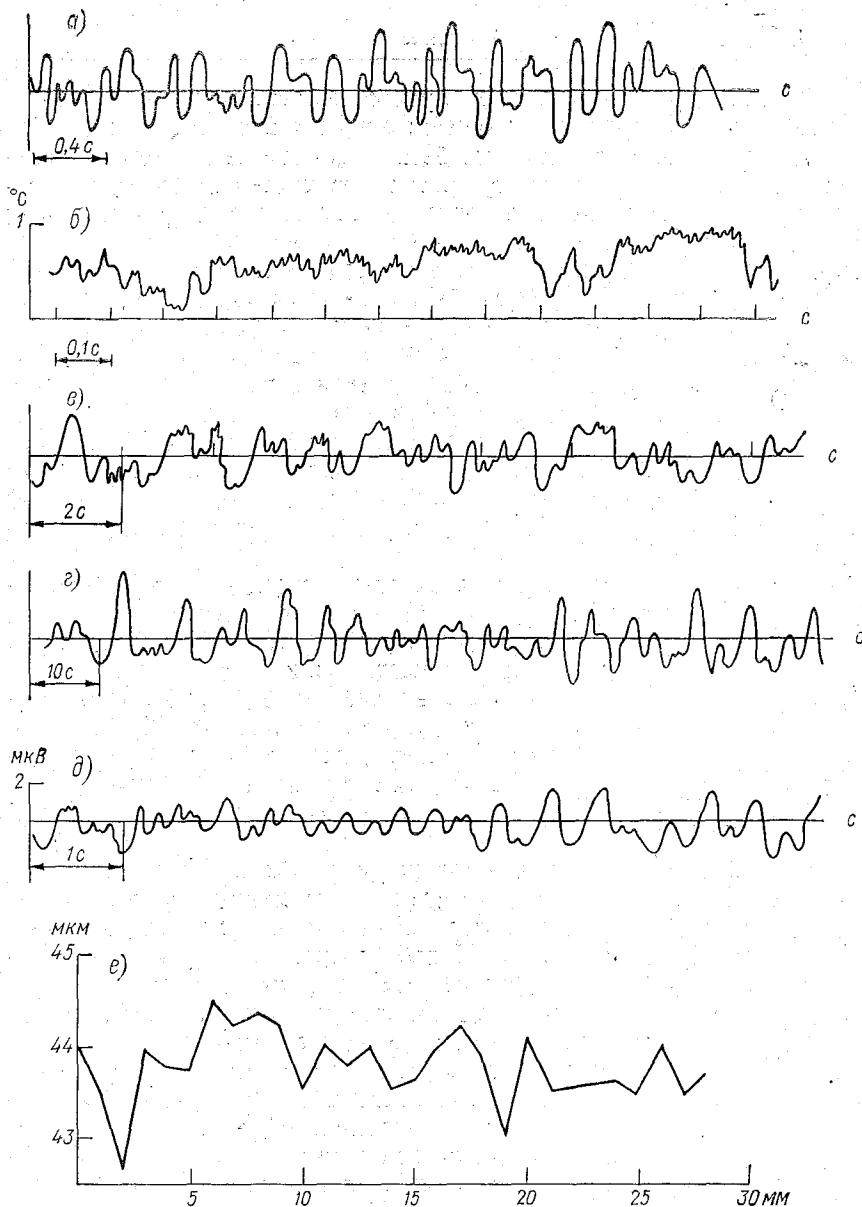


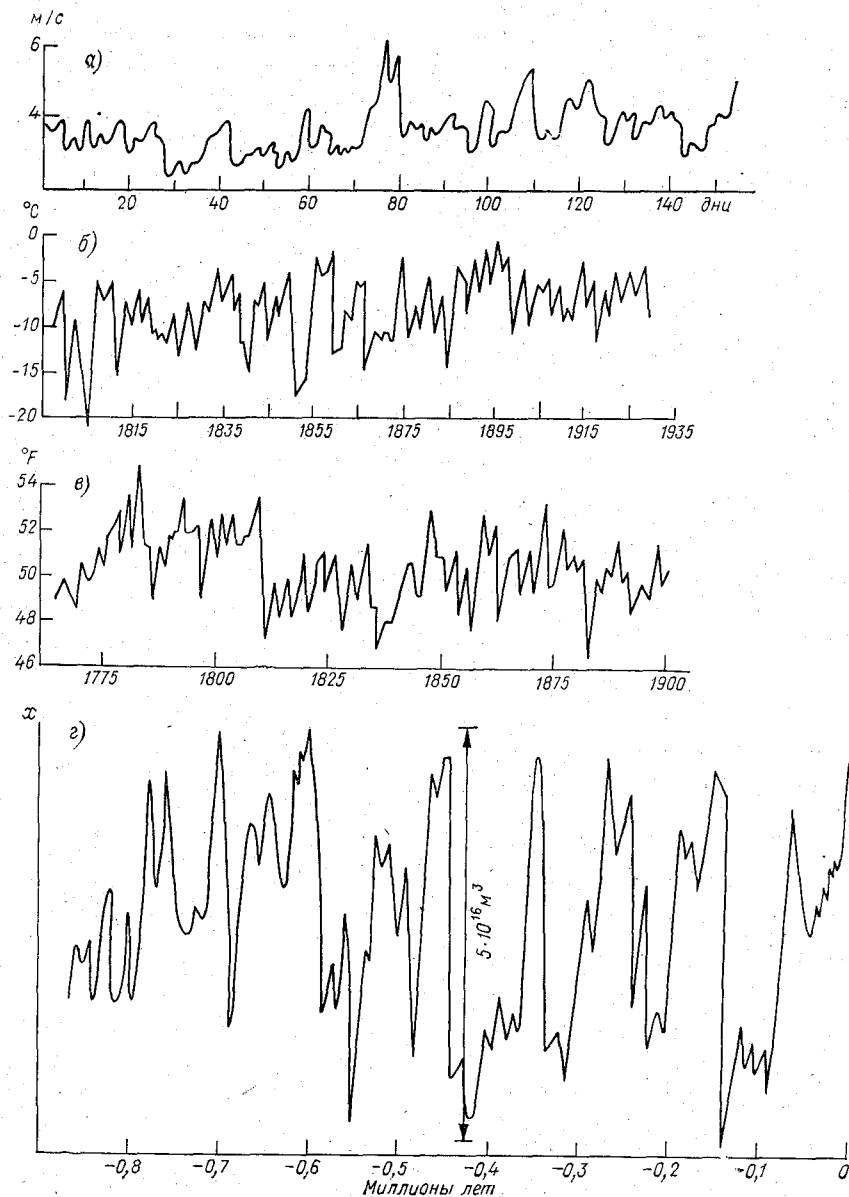
Рис. 1.

- а — Флуктуации интенсивности радиолокационного сигнала (по [196]).
 б — Турбулентные пульсации температуры в фиксированной точке атмосферы на высоте 2 м над поверхностью Земли (по [147]).
 в — Микропульсации уровня Земли (микросейсмы), зарегистрированные сейсмографом на наблюдательной площадке в Восточном Казахстане (по [43]).
 г — Изменения высоты поверхности волнующегося моря в фиксированной точке (по [59]).
 д — Изменения разности значений биологического потенциала двух участков мозга здорового спящего человека (по [103]).
 е — Изменение диаметра нейлоновой нити вдоль ее длины (по [120]).

торой статистической устойчивостью. Наличие же лишь какой-то одной крайне нерегулярной кривой (типа тех которые изображены на рис. 1) показывает только, что мы имеем дело с явлением, в случае которого трудно рассчитывать на создание полноценной детерминистической (динамической) теории, позволяющей точно описать все наблюдаемые изгибы кривой (не говоря уже о том, что такая динамическая теория неизбежно должна быть очень сложной и вряд ли может быть полезной, так как точные данные о крайне запутанной кривой вообще трудно как-нибудь использовать на практике). Именно поэтому представляется естественным применить здесь статистический подход и поискать ансамбль кривых, в который входит наша кривая и который в целом соответствует одной случайной функции $X(t)$ со сравнительно простыми статистическими свойствами.

В случае всех кривых, изображенных на рис. 1, речь идет о наблюдениях, допускающих многократное повторение в аналогичных условиях; поэтому вопрос об определении случайной функции, отвечающей этим наблюдениям, здесь представляется сравнительно простым. Заметим, однако, что статистический ансамбль всевозможных реализаций $x(t)$ во многих случаях можно выбирать по-разному: в случае кривой на рис. 1 б мы можем включить в него лишь данные измерений в той же точке, в то же время дня и при примерно одинаковой погоде, а можем рассматривать и данные всевозможных измерений в различных точках, начинающихся в совершенно произвольные моменты времени на протяжении всего года; в случае кривой на рис. 1 д можно рассматривать лишь электроэнцефалограммы здоровых людей примерно одинакового возраста и находящихся в примерно одинаковом физическом и психическом состоянии, а можно включить в статистический ансамбль вообще все записанные электроэнцефалограммы (большинство из которых относится к больным людям); в случае кривой на рис. 1 е можно рассматривать лишь нити, выпущенные одним станком, а можно и включить в число реализаций данные измерений, относящихся ко всем вообще ткацким нитям, выпускаемым на всевозможных фабриках, имеющих весьма различное оборудование. Отсюда видно, что одна и та же кривая $x(t)$ иногда может рассматриваться как реализация нескольких различных случайных функций, имеющих различные статистические характеристики. В некоторых случаях целесообразно также одну и ту же кривую при решении различных относящихся к ней задач иногда рассматривать как реализацию случайной функции, а иногда как кривую, определяемую, хотя бы приближенно, некоторыми динамическими уравнениями.

К числу реализаций случайных функций можно отнести также целый ряд функций $x(t)$, возникающих в некоторых геофизиче-



ских, астрофизических, экономических и родственных им задачах, в которых как будто бы трудно четко определить статистический ансамбль аналогичных опытов или наблюдений, задающий мно-

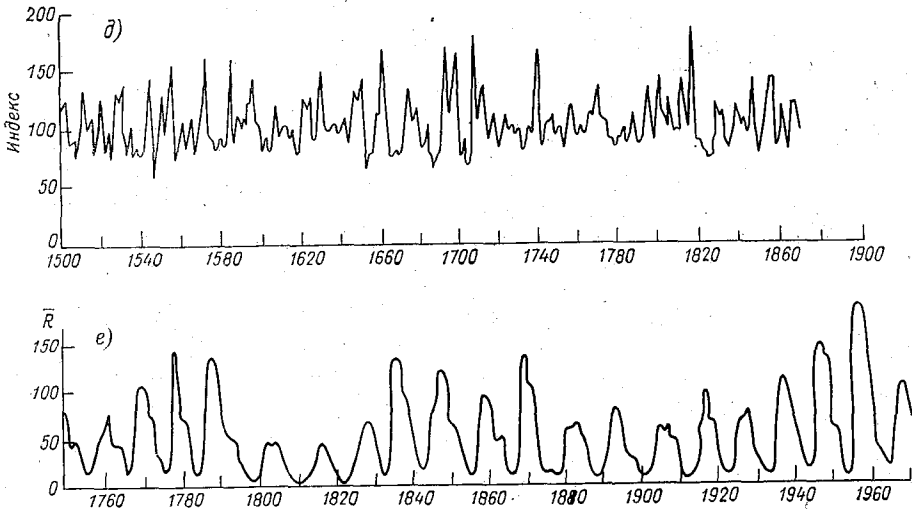


Рис. 2.

- а — Средние суточные значения скорости ветра, зарегистрированные метеорологической обсерваторией Кью (по [321]).
 б — Изменчивость средней январской температуры воздуха в Ленинграде (по [8]).
 в — Средние годовые значения температуры воздуха в Лондоне за период с 1763 по 1900 г. (по [120]).
 г — Изменения степени оледенения Земли (т. е. суммарного объема льда на планете) за последний миллион лет (по [203]).
 д — Колебания цен на пшеницу на рынках Западной и Центральной Европы за период с 1500 до 1869 г. (ряд Бевериджа) (по [282]).
 е — Средние годовые значения числа Вольфа.

жество однотипных реализаций. Напомним, что к области геофизики относятся, в частности, и кривые на рис. 1 б—г; в этих случаях, однако, речь идет о мелкомасштабных флуктуациях, естественно укладывающихся в схему «массовых явлений».

Кривые такого же характера, однако, часто появляются и тогда, когда на график наносятся данные более грубых измерений с помощью приборов с большой инерцией, регистрирующих лишь весьма значительные и достаточно медленные изменения измеряемых величин. В качестве примеров на рис. 2 а—в нанесены данные об изменениях во времени изучаемых в климатологии средних суточных значений скорости ветра, средних месячных январских значений температуры воздуха и средних годовых значений температуры в некоторых фиксированных точках наблюдения. Все эти кривые по своему характеру не отличаются от кривой на рис. 1 б, хотя масштабы по оси времени здесь совсем иные; в то же время в случае, например, кривых на рис. 2б — в, вопрос об определении охватывающего их статистического ансамбля аналогичных рядов наблюдений вовсе не кажется простым.

Еще одним более экзотическим примером такого же типа является относящийся к палеоклиматологии рис. 2 г, на котором изображены приблизительные изменения степени оледенения Земли (т. е. суммарного объема льда на нашей планете) за последний миллион лет, восстановленные по изменениям изотопического состава ископаемых останков океанского планктона, отражающего длиннопериодные вариации средней температуры Земли за указанный период. Родственный пример, относящийся уже к экономике, представлен на рис. 2 д, изображающем так называемый ряд Бевериджа колебаний цен на пшеницу на рынках Западной и Центральной Европы за период с 1500 по 1869 г. Этот ряд был построен на основе анализа большого статистического материала, относящегося примерно к пятидесяти пунктам, охватывающим ряд европейских стран; для исключения влияния систематического изменения цен на пшеницу в течение трех с половиной столетий для каждого года подсчитывалось отношение (в процентах) средней цены за этот год к среднему арифметическому цен за этот год, 15 предшествующих и 15 последующих лет — изменения именно этих отношений и указаны на рис. 2 д.

Наконец, на рис. 2 е изображен относящийся к астрофизике знаменитый ряд средних годовых значений числа Вольфа, характеризующего солнечную активность (среднее число солнечных пятен).⁹ Для определенности мы здесь подробнее остановимся именно на рис. 2 е.

Разумеется, можно считать, что изображенная на рис. 2 е кривая входит в множество подобных ей кривых, относящихся к всевозможным звездам, близким по всем основным своим параметрам к нашему Солнцу и находящимся примерно на той же стадии своей эволюции. Поскольку, однако, мы не можем точно указать ни одной такой звезды, сформулированное здесь допущение вряд ли можно признать плодотворным. Однако рассматривая какой-то отрезок $x(t)$, $x(t+1)$, ..., $x(t+N-1)$ изображенного на рис. 2 е временного ряда, мы можем понимать под всевозможными его реализациями просто всевозможные совокупности из N последовательных наблюдений числа Вольфа — данные наблюдений заставляют ожидать, что статистическая устойчивость результатов при этом будет иметь место.

Такой подход фактически означает, что мы принимаем за ансамбль всевозможных реализаций случайной функции $X(t)$ множество всевозможных сдвигов по времени (т. е. преобразований вида $x(t) \rightarrow x(t+a)$, где a фиксировано) одной и той же функции $x(t)$; к получаемым при этом функциям $X(t)$ также часто будут применимы все выводы настоящей книги, если только вероятностное осреднение мы всюду заменим осреднением по времени (совпадающим, очевидно, с осреднением по введенному множеству ре-

лизаций).¹⁰ Естественно думать, что тот же подход можно применить и к кривым на рис. 2 б—д.

С другой стороны, в случае, например, представленных на рис. 3 а данных о многолетних изменениях среднего годового уровня Каспийского моря или данных о средних месячных коли-

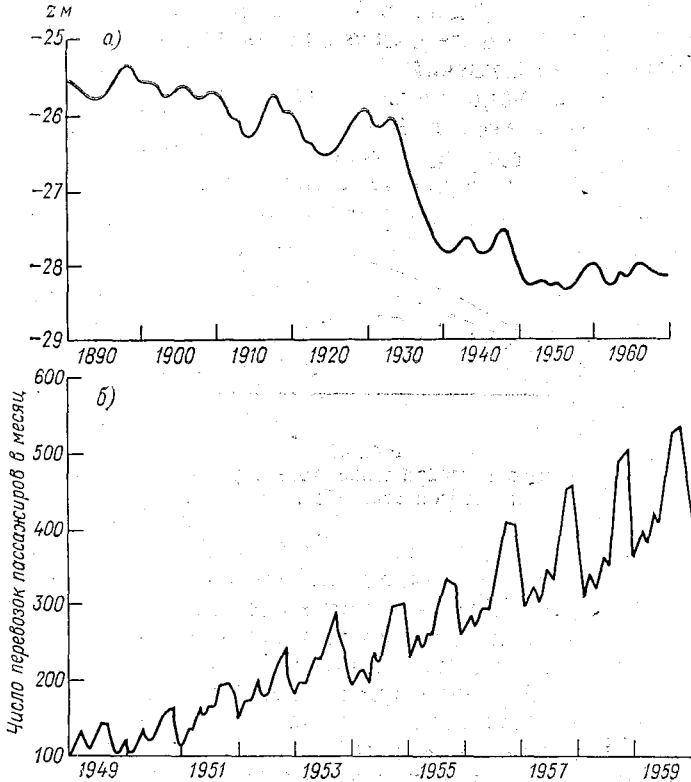


Рис. 3.

а — Многолетние изменения среднего годового уровня Каспийского моря (по [167]).
б — Изменение во времени среднего месячного числа пассажиров, перевозимых международными авиакомпаниями США (по [21]).

чествах пассажиров, перевозимых международными авиакомпаниями (см. рис. 3 б), использование статистических методов уже вызывает известные опасения, поскольку здесь также нельзя указать статистический ансамбль однотипных наблюдений, включающий представленные на рис. 3 а или 3 б данные, но в то же время и множество всевозможных сдвигов во времени исходной кривой теперь уже явно не обладает статистической устойчивостью. Тем не менее имеются работы, в которых методы теории случайных функций применяются и к рядам наблюдений, изображен-

ным на рис. 3; существует также ряд специальных приемов статистического анализа подобных неоднородных во времени рядов.¹¹ Следует иметь в виду, однако, что практическая целесообразность приложения теории случайных функций к подобным ситуациям вряд ли может быть выяснена на основании общих соображений и должна каждый раз определяться на основании тщательного сопоставления получаемых теоретических выводов с данными непосредственных наблюдений.

В то время как вопрос о возможности применения теории случайных функций к замысловатым и явно нерегулярным кривым, изображенным на рис. 3, требует специального исследования, применимость той же теории ко многим гораздо более простым и «правильным» функциям представляется совершенно бесспорной.

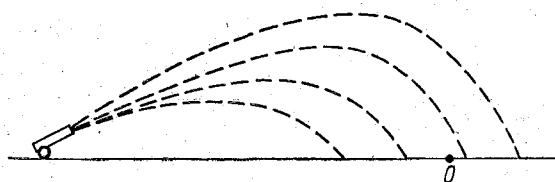


Рис. 4.

Схематическое изображение траекторий снарядов при учебной стрельбе по цели O.

Рассмотрим, например, данные учебной стрельбы по фиксированной цели из одного орудия, схематически показанные на рис. 4; статистический ансамбль всевозможных траекторий снарядов здесь может быть просто определен, а каждую траекторию естественно рассматривать как реализацию случайной функции, приближенно представимой уравнением параболы со случайными коэффициентами. В качестве второго примера того же типа рассмотрим гармоническое колебание высокой частоты ω_0 , модулированное по амплитуде или по фазе (или и по амплитуде, и по фазе) медленно меняющимся процессом. Здесь речь идет о функции вида $x(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$, где хоть одна из функций $a(t)$ или $\varphi(t)$ отлична от постоянной, но заметно изменяется лишь за время, содержащее много периодов $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

В этом случае на протяжении интервалов времени, лишь в немногo раз превышающих период T_0 , наша функция будет весьма точно изображаться отрезком синусоиды, но ее амплитуда или фаза будет различной для различных таких интервалов. В электро- и радиотехнике модулированные колебания часто применяются для передачи информации; при этом изменения функций $a(t)$ и $\varphi(t)$ оказываются хоть и медленными, но весьма нерегулярными и поэтому различные отрезки колебательного процесса $x(t)$ удобно рассматривать как реализации гармонического колеба-

ния $X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Phi)$ фиксированной частоты ω_0 со случайными амплитудой A и фазой Φ . Такое случайное гармоническое колебание безусловно представляет собой случайную функцию, хотя все его реализации имеют форму точных синусоид и совсем не похожи на запутанные кривые, изображенные на рис. 1 и 2.

Разумеется, приведенные выше иллюстрации далеко не исчерпывают всех типов случайных функций, встречающихся на практике. Так, в вероятностной теории массового обслуживания, первоначально возникшей в связи с задачами рациональной эксплуатации телефонных сетей, а затем нашедшей и целый ряд других важных приложений, большую роль играет так называемый случайный пуассоновский процесс $N(t)$, схематически описывающий число вызовов, поступивших, скажем, на телефонную станцию за время от некоторого начального момента $t = 0$ и до текущего момента t . Все реализации этого процесса имеют вид, изображенный на правой половине рис. 5 (отвечающей значениям $t > 0$): они представляют собой ступенчатые кривые, возрастающие на единицу в каждой из своих точек разрыва.

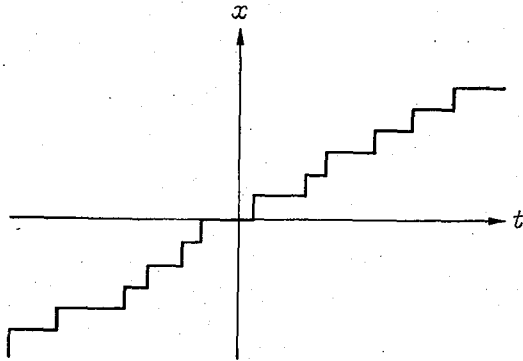


Рис. 5.
Реализация пуассоновского процесса на оси $-\infty < t < \infty$.

Совокупность точек разрыва (скачков) процесса $N(t)$ в данном случае представляет собой так называемую пуассоновскую систему точек (фиксированной интенсивности $\lambda > 0$). Для такой системы все расстояния L_k между соседними точками являются реализациями взаимно независимых случайных величин, имеющих показательное распределение вероятностей (т. е. плотность вероятности вида $p(l) = \lambda e^{-\lambda l}$ при $l \geq 0$); числа точек на любых двух непересекающихся временных интервалах также представляют собой независимые случайные величины, а распределение числа $N(s)$ точек, попавших на произвольный интервал длины s , является распределением Пуассона с параметром λs (так что $\langle N(s) \rangle =$

$= \lambda s$ и $P\{N(s) = n\} = e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!}$, $n = 0, 1, \dots$).

Заметим еще, что иногда процесс Пуассона $N(t)$ бывает удобно распространить и на отрицательные значения t , приняв, что пуассоновская система точек разрыва $\{t_k\}$ задана на всей вещественной

оси $-\infty < t < \infty$, а значение $N(t)$ при $t < 0$ равно взятому с обратным знаком числу точек t_k , таких, что $t \leq t_k < 0$; реализация именно такого процесса $N(t)$ и изображена на рис. 5. Пуассоновское распределение точек разрыва t_k характерно и для так называемого случайного телеграфного сигнала $X(t)$, встречающегося в некоторых задачах статистической теории связи; однако в этом случае процесс $X(t)$ в промежутках между своими точками разрыва поочередно принимает значение $+a$ или $-a$ (рис. 6). Еще один важный класс случайных процессов, строящихся по пуассоновской последовательности случайных точек

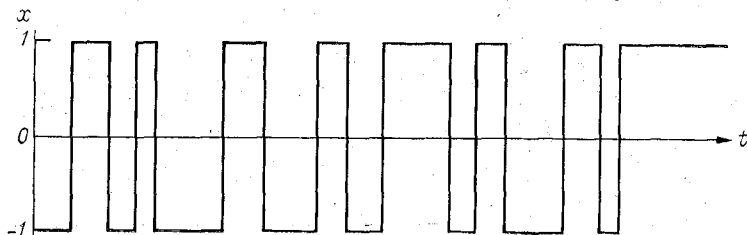


Рис. 6.

Схематическое изображение реализации «случайного телеграфного сигнала» при $a = 1$.

$\{t_n\}$, образуют пуассоновские импульсные процессы, задаваемые формулой вида

$$X(t) = \sum_n E_n \Gamma(t - t_n), \quad (\text{В.26})$$

где $\Gamma(t)$ — фиксированная функция (определяющая форму импульса), E_n — последовательность независимых (и между собой, и от точек t_n) одинаково распределенных случайных величин с известной функцией распределения (см. рис. 7, на котором все импульсы предполагаются имеющими форму прямоугольников).¹²

Допустив далее, что последовательность точек $\{t_n\}$ не обязательно является пуассоновской, а представляет собой просто какой-то точечный случайный процесс (т. е. случайную последовательность точек, подчиняющуюся определенным статистическим закономерностям), мы можем значительно обобщить классы случайных процессов, схематически изображенных на рис. 5—7. Так, например, предположив, что все расстояния $L_n = t_{n+1} - t_n$ между точками разрыва кривой на рис. 5 являются реализациями взаимно независимых случайных величин, имеющих одинаковое (но не обязательно показательное) распределение вероятностей, мы приходим к так называемым процессам восстановления, описывающим, в частности, число замен некоторой детали за время t при условии, что время работы детали от момента ее установки и до момента выхода из строя имеет фиксированное распределение вероятностей. Если же точки

..., $t_n, t_{n+1}, \dots$ образуют произвольный точечный случайный процесс, то рис. 5 будет изображать реализацию общего случайного процесса счета событий.

Если мы примем, что на рис. 6 последовательность точек разрыва t_n задается формулой $t_n = nT_0 + \Phi$, где T_0 — фиксированное число (период), а Φ — случайная величина, то получим прямоугольную волну со случайной фазой. Предположив, что последовательность $\{t_n\}$ в формуле (В. 26) — это периодическая последовательность равноотстоящих точек вида $t_n = nT_0$, а $\{E_n\}$ — некоторая случайная последовательность, мы придем к модели импульсно-амплитудной модуляции, используемой иногда для передачи информации; если же все E_n одинаковы, но $t_n = nT_0 + \tau_n$, где τ_n — случайная последовательность, то процесс $X(t)$ будет описывать импульсно-фазовую модуляцию, и т. д.¹³ В

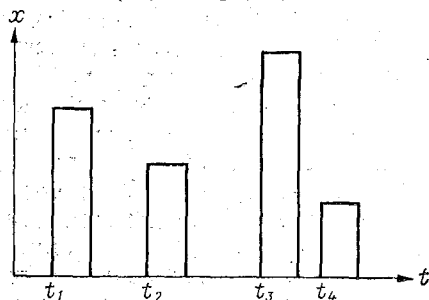


Рис. 7.

Реализация пуассоновского импульсного процесса в случае импульсов прямоугольной формы

прикладной теории случайных процессов] можно найти также множество других разнообразных примеров случайных функций, на которых мы здесь не будем задерживаться.

Понятие случайной функции не укладывается в рамки классической теории вероятностей и требует привлечения совсем нового математического аппарата. Выше уже отмечалось, что изучение одномерных случайных величин сводится к изучению распределений вероятностей на прямой $-\infty < x < \infty$ — множестве допустимых значений величины X . Такие распределения задаются функциями распределения $F(x)$ или плотностями вероятности $p(x)$, которые могут изучаться с помощью обычных методов математического анализа — раздела высшей математики, рассматривающего функции вещественного переменного x .

При исследовании многомерных случайных величин $X = (X_1, \dots, X_n)$ приходится иметь дело со значительно более сложными многомерными функциями распределения $F(x_1, \dots, x_n)$ и плотностями вероятности $p(x_1, \dots, x_n)$; однако и здесь мы еще не выходим за пределы тех математических объектов, которые традиционно относятся к области приложений математического анализа. При изучении же случайных функций $X(t)$ приходится использовать гораздо более сложное понятие *распределения вероятностей в бесконечномерном (функциональном) пространстве*

всевозможных реализаций рассматриваемой функции. В бесконечномерном пространстве нет естественного элемента объема, а значит не имеет смысла и понятие «плотность вероятности»; понятие «функция распределения» здесь также не может быть просто определено. Именно поэтому строгая математическая теория случайных функций не может быть развита без использования сравнительно сложных и далеких от элементарности понятий и методов, относящихся к малопопулярным среди прикладников специальным разделам современной математики.

Первые попытки математического исследования вероятностных схем, приводящих к понятию случайной функции, появились еще в начале этого века; примерно к тому же времени относятся и первые физические теории, имеющие дело со случайными процессами. Однако создание общей теории случайных функций явилось делом лишь 20—40-х гг. XX в.; впрочем, развитие указанной теории на этом, разумеется, не остановилось, а интенсивно продолжается вплоть до настоящего времени. В 30-е гг. были также заложены основы теории важнейших специальных классов случайных функций — процессов с независимыми приращениями, марковских случайных процессов и стационарных случайных процессов; эти разделы теории также продолжают весьма интенсивно развиваться еще и сегодня наряду с выросшими из них новыми направлениями, относящимися к другим классам случайных функций (ветвящиеся процессы, мартингалы, общие гауссовские случайные функции, однородные случайные поля и т. д.). В конце 40-х и начале 50-х годов появились первые большие обзорные статьи и специальные монографии по теории случайных функций; с тех пор число относящихся сюда книг непрерывно увеличивается и в настоящее время оно, по-видимому, исчисляется уже многими сотнями.¹⁴

Настоящая книга охватывает лишь небольшую, но практически весьма важную часть теории случайных функций. Она посвящена элементарному введению в теорию стационарных случайных последовательностей и процессов — специальных классов случайных функций, очень часто встречающихся в различного рода прикладных задачах. При этом из всей теории стационарных случайных функций $X(t)$ в книге будут затрагиваться лишь вопросы, рассмотрение которых требует привлечения только моментов случайных величин $X(t)$ первых двух порядков.

Оправданием для такого отбора может служить то, что вопросы указанного типа на самом деле составляют центральную — наиболее далеко продвинутую и наиболее широко применяющуюся — часть всей современной теории стационарных случайных функций; в то же время принятое ограничение позволит нам не входить в тонкости общей теории бесконечномерных распределений вероятностей и сделать книгу доступной для читателей, не обладающих специальной математической подготовкой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

1.

Определение случайной функции

Пусть T — это произвольное множество элементов $t, s, \dots$. Случайной функцией аргумента t из T (иначе — случайной функцией на T) мы будем называть функцию $X(t)$, все значения которой являются случайными величинами. Таким образом, случайная функция на T — это набор случайных величин $X(t), X(s), \dots$, отвечающих всем $t, s, \dots$ из T . Если множество T — конечное, то $X(t)$ будет совокупностью конечного числа случайных величин; в этом случае нашу функцию можно рассматривать как одну многомерную случайную величину. Такие многомерные величины изучаются в классической теории вероятностей, где для их задания используются функции распределения $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ или же многомерные плотности вероятности $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Если, однако, множество T бесконечно, то $X(t)$ будет бесконечной совокупностью случайных величин; подобные совокупности в классической теории вероятностей не рассматривались и здесь надо специально указать, как же они задаются.

В конце введения мы отмечали, что понятие плотности вероятности не допускает простого перенесения на бесконечномерный случай; понятие бесконечномерной функции распределения также не может быть просто определено. Поэтому при задании распределения вероятностей бесконечного числа случайных величин $X(t)$ (иначе — распределения вероятностей в бесконечномерном пространстве) приходится поступать иначе. Случайную функцию $X(t)$ на бесконечном множестве T мы будем считать заданной, если для каждого t из T определена функция распределения величины $X(t)$

$$F_t(x) = \mathbf{P}\{X(t) < x\}, \quad (1.1)$$

для каждой пары элементов t_1, t_2 множества T определена функция распределения двумерной случайной величины $\mathbf{X}(t_1, t_2) = \{X(t_1), X(t_2)\}$

$$F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = \mathbf{P}\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2\}, \quad (1.2)$$

и вообще для любого конечного числа n элементов $t_1, t_2, \dots, t_n$ множества T определена n -мерная функция распределения величины $X(t_1, t_2, \dots, t_n) = \{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\}$

$$\begin{aligned} & F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ & = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \dots, X(t_n) < x_n\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Во многих (хотя и не во всех) практически интересных случаях вместо функций распределения (1.1)—(1.3) можно использовать соответствующие *плотности вероятности*

$$p_t(x), p_{t_1, t_2}(x_1, x_2), \dots, p_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots \quad (1.4)$$

Таким образом, случайная функция $X(t)$ на бесконечном множестве T задается целой иерархией многомерных распределений вероятностей различных порядков $n = 1, 2, 3, \dots$. Существование всех этих распределений вероятностей и указывает как раз на наличие статистической устойчивости исходов опыта, порождающего функцию $X(t)$, о которой упоминалось на с. 16.

Функции (1.1)—(1.3) и (1.4) очевидно не могут быть вполне произвольными. Так, например, функции (1.4) все должны быть неотрицательными и такими, чтобы интеграл от каждой из них по всем переменным равнялся единице; функции же (1.1)—(1.3) должны удовлетворять условиям, позволяющим считать их многомерными функциями распределения. Кроме того, эти функции должны еще удовлетворять определенным условиям симметрии и согласованности. Так, для плотностей вероятности $p_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по самому их смыслу должно выполняться соотношение

$$p_{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) = p_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.5)$$

где $i_1, i_2, \dots, i_n$ — это те же числа $1, 2, \dots, n$, но расположенные в каком-то другом порядке. Далее, если $n > m$, то для любых n точек $t_1, t_2, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n$ из T должно выполняться равенство

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p_{t_1, t_2, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_m, \\ & x_{m+1}, \dots, x_n) dx_{m+1} \dots dx_n = p_{t_1, t_2, \dots, t_m}(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{aligned} \quad (1.6)$$

В применении к функциям распределения $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ условие симметрии (1.5) и условие согласованности (1.6) принимают следующий вид:

$$F_{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.5a)$$

$$\begin{aligned} F_{t_1, t_2, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_m, \infty, \dots, \infty) = \\ = F_{t_1, t_2, \dots, t_m}(x_1, x_2, \dots, x_m). \end{aligned} \quad (1.6a)$$

Указанные условия являются не только необходимыми, но и достаточными в том смысле, что любую систему многомерных функций распределения (1.1)—(1.3), для которой выполняются условия (1.5a) и (1.6a), можно считать задающей некоторую случайную функцию $X(t)$ на множестве T ; в частности, такую функцию $X(t)$ задает и любая система плотностей вероятности (1.4), удовлетворяющая (1.5) и (1.6).¹⁵

Задание случайной функции $X(t)$ совокупностью бесконечного числа конечномерных распределений вероятностей (1.1)—(1.3) или (1.4) представляет собой наиболее общий и поэтому основной с теоретической точки зрения способ ее задания. Однако этот способ является весьма громоздким, что делает его неудобным для практического использования. Поэтому на практике, как правило, используются другие, более частные, способы задания функций $X(t)$, которые в принципе позволяют определить и все конечномерные распределения вероятностей (1.3) (или плотности (1.4)), но сами имеют более простую форму. Так, например, в ряде задач случайные функции $X(t)$ удается задать аналитической формулой, содержащей какие-то случайные параметры $Y_1, \dots, Y_k$:

$$X(t) = f(t, Y_1, \dots, Y_k) \quad (1.7)$$

(частным случаем таких функций $X(t)$ являются многочлены или тригонометрические многочлены со случайными коэффициентами). Что касается общего задания $X(t)$ посредством бесконечного набора конечномерных распределений вероятностей, то оно представляется реальным лишь в применении к специальным классам случайных функций, для которых соответствующие конечномерные распределения обладают теми или иными особенно простыми свойствами — например, полностью определяются заданием одних лишь распределений немногих низших порядков. Важнейшим классом случайных функций $X(t)$ дискретного аргумента $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ или $t = 0, 1, 2, \dots$, полностью определяемых заданием лишь одномерных распределений вероятностей (1.1), являются п о с л е -

довательности независимых случайных величин, для которых

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1}(x_1) F_{t_2}(x_2) \dots F_{t_n}(x_n) \quad (1.8)$$

и

$$p_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_{t_1}(x_1) p_{t_2}(x_2) \dots p_{t_n}(x_n). \quad (1.8a)$$

Последовательности независимых случайных величин подробно изучаются в классической теории вероятности (в первую очередь в связи с рассмотрением различных предельных теорем), но с точки зрения теории случайных функций они кажутся слишком уж специальным и простым примером. Однако многие важные типы случайных функций могут быть заданы соотношениями, сводящими недетерминированный характер величин $X(t)$ к их зависимости от некоторой последовательности независимых случайных величин. Так, например, значительный интерес представляют функции $X(t)$ вида

$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{t-n} E_n \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.9)$$

или же

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \varphi_n(t) \quad a \leq t \leq b, \quad (1.10)$$

где a_t и $\varphi_n(t)$ — некоторые числовые коэффициенты и функции, а E_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ или $n = 0, 1, 2, \dots$) — одинаково распределенные независимые случайные величины (случайные функции вида (1.9) нам еще встретятся на с. 83).

Переходя теперь к случайным функциям $X(t)$, для которых все конечномерные распределения определяются заданием одномерных распределений (1.1) и двумерных распределений (1.2), можно назвать несколько важных классов таких функций. Так, например, нетрудно видеть, что указанным здесь свойством обладают все случайные процессы с независимыми приращениями — случайные функции вещественного аргумента t , для которых разности $X(t_2) - X(t_1)$ и $X(t_4) - X(t_3)$ являются независимыми случайными величинами, если только $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$.

Далее легко показать, что тем же свойством обладают и все марковские случайные процессы, для которых условное распределение величины $X(t_k)$ при известных значениях величин $X(t_{k-1}), X(t_{k-2}), \dots, X(t_{k-m})$, где $t_{k-m} < \dots < t_{k-2} < t_{k-1} < t_k$, зависит только от значения «последней величины» $X(t_{k-1})$. Наконец, что особенно важно для дальнейшего изложения, задание одномерных и двумерных распределений вероятностей полностью определяет случайную функцию $X(t)$ (где t теперь уже

может пробегать любое множество T) также и тогда, когда $X(t)$ — гауссовская случайная функция, т. е. такая, для которой все конечномерные распределения вероятностей являются нормальными (гауссовскими) распределениями. В самом деле, мы уже отмечали во введении, что нормальные распределения вероятностей однозначно определяются своими первыми и вторыми моментами, а для нахождения этих моментов вполне достаточно знать только одномерные распределения величин $X(t)$ и двумерные распределения пар $\{X(t), X(s)\}$.

Помимо указанных выше, существуют и некоторые другие способы задания случайных функций $X(t)$; нам они, однако, нигде не понадобятся.¹⁶

2.

Моменты случайной функции. Корреляционная теория

Для полного описания случайных функции $X(t)$, как мы знаем, надо задать все ее конечномерные функции распределения (1.3) или плотности вероятности (1.4). Однако в практических применениях многомерные (и даже одномерные) распределения вероятностей чаще всего оказываются слишком громоздкими для того, чтобы с ними было удобно иметь дело. К тому же, что еще важнее, теоретическое определение одномерных и тем более многомерных распределений вероятностей значений $X(t)$ возможно лишь в исключительных случаях (важнейшие из которых относятся к гауссовским функциям $X(t)$), а экспериментальное нахождение таких распределений в большинстве реальных физических и технических задач оказывается сложным и дорогостоящим. Поэтому при построении теории случайных функций естественно ограничиться (на первых порах, во всяком случае) изучением тех их свойств, которые определяются одними лишь простейшими числовыми характеристиками многомерных распределений (1.3).

Известно, что наиболее простыми и общепотребительными числовыми характеристиками распределений вероятностей являются соответствующие моменты

$$\begin{aligned} \mu^{(i_1, i_2, \dots, i_n)}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ = \langle [X(t_1)]^{i_1} [X(t_2)]^{i_2} \dots [X(t_n)]^{i_n} \rangle. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Простейшим из моментов (1.11) является первый момент, который в простейшем (и самом важном) случае существования плотностей вероятности (1.4) может быть записан в виде

$$\mu^{(1)}(t) = m(t) = \langle X(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x p_t(x) dx, \quad (1.12)$$

где $m(t)$ — среднее значение случайной функции $X(t)$, описывающее (в случае, когда оно не является постоянным) систематическое изменение (иначе тренд) функции $X(t)$. Очень важной характеристикой $X(t)$ является также общий второй момент

$$\mu^{(1,1)}(t, s) = B(t, s) = \langle X(t) X(s) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x y \rho_{t,s}(x, y) dx dy, \quad (1.13)$$

вместо которого иногда удобно использовать центральный второй момент

$$b(t, s) = \langle (X(t) - \langle X(t) \rangle) (X(s) - \langle X(s) \rangle) \rangle = B(t, s) - m(t) m(s), \quad (1.14)$$

характеризующий случайные отклонения значений $X(t)$ от $m(t)$. Ясно, что $b(t, t) = D(X(t))$ — дисперсия $X(t)$, а $R(t, s) = b(t, s) / \sigma(t) \sigma(s)$, где $\sigma(t) = [b(t, t)]^{1/2}$ — коэффициент корреляции $X(t)$ и $X(s)$. Функция $B(t, s)$ часто называется *корреляционной функцией* случайной функции $X(t)$; впрочем, то же название довольно часто применяется и к функциям $b(t, s)$ или $R(t, s)$.^{*} В дальнейшем в тех случаях, когда не возникает опасность путаницы, мы будем называть корреляционной функцией и функцию $B(t, s)$, и функцию $b(t, s)$ (при опасности путаницы функцию $b(t, s)$ мы будем называть *центрированной корреляционной функцией*); коэффициент же корреляции $R(t, s)$ будет называться *нормированной корреляционной функцией* случайной функции $X(t)$. Ясно, что все три функции $B(t, s)$, $b(t, s)$ и $R(t, s)$ по самому своему определению являются симметричными,

$$B(t, s) = B(s, t), \quad b(t, s) = b(s, t), \quad R(t, s) = R(s, t), \quad (1.15)$$

и что все они представляют собой положительно определенные ядра на T , т. е., например,

$$\sum_{j, k=1}^n B(t_j, t_k) c_j c_k \geq 0 \quad (1.16)$$

при любых целом положительном n , точках $t_1, \dots, t_n$ множества T и вещественных числах $c_1, \dots, c_n$ и такие же неравенства справедливы для $b(t, s)$ и $R(t, s)$. Действительно, левая часть (1.16), очевидно, равна неотрицательному числу $\langle (c_1 X(t_1) + \dots + c_n X(t_n))^2 \rangle$; функции же $b(t, s)$ и $R(t, s)$ являются частными случаями функции $B(t, s)$, отвечающими случайным функциям

^{*} Вообще терминология здесь не является полностью установившейся; например, вместо термина «корреляционная функция» иногда используются выражения *автокорреляционная функция*, *функция автокорреляции* или *ковариационная функция*.

$X(t) - m(t)$ и $(X(t) - m(t))/\sigma(t)$. При $n = 1$ и $n = 2$ условие (1.16) и аналогичное условие, относящееся к $b(t, s)$, сводятся к элементарным неравенствам: $B(t, t) \geq 0$, $b(t, t) \geq 0$ и

$$|B(t, s)| \leq [B(t, t)B(s, s)]^{1/2}, \quad b(t, s) \leq \sigma(t)\sigma(s) \quad (1.17)$$

(ср. неравенства (B.15)).

Отметим также, что, как нетрудно показать, любое положительно определенное ядро $B(t, s)$ на T является корреляционной функцией некоторой случайной функции $X(t)$ с нулевым средним значением; если и разность $b(t, s) = B(t, s) - m(t)m(s)$, где $m(t)$ — некоторая заданная функция t , является положительно определенным ядром, то соответствующую функцию $X(t)$ можно выбрать так, что $\langle X(t) \rangle = m(t)$. Для доказательства этих утверждений надо только рассмотреть семейства нормальных плотностей вероятности $p_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вида (B.23) с нулевыми средними значениями или соответственно вектором средних значений $\mathbf{m}(t_1, \dots, t_n) = (m(t_1), \dots, m(t_n))$ и матрицей вторых моментов $\mathcal{B}(t_1, \dots, t_n) = \|B(t_j, t_k)\|$, $j, k = 1, \dots, n$, и затем доказать справедливость для этих плотностей условий симметрии (1.5) и согласованности (1.6).¹⁷

Разумеется, первый и второй моменты случайной функции $X(t)$ еще далеко не полностью определяют эту функцию — существует много совершенно непохожих друг на друга функций $X(t)$, средние значения $m(t)$ и корреляционные функции $B(t, s)$ которых полностью совпадают. Так, например, в случае пуассоновского случайного процесса $X(t) = N(t)$ (см. рис. 5) среднее значение $m(t)$, как нетрудно показать, равно λt , а корреляционная функция при $t \geq s$ имеет вид $B(t, s) = \lambda s + \lambda^2 ts$, а при $t < s$ $B(t, s) = \lambda t + \lambda^2 ts$.¹⁸

Отсюда вытекает, что для центрированного пуассоновского процесса $\hat{X}(t) = X(t) - \langle X(t) \rangle$, все реализации которого представляют собой ломаные, составленные из отрезков, попеременно образующих с осью Ox угол 45° и 135° ,

$$m(t) = \langle \hat{X}(t) \rangle = 0, \quad B(t, s) = \langle \hat{X}(t)\hat{X}(s) \rangle = \lambda \min(t, s), \quad (1.18)$$

где $\min(t, s)$ — наименьшее из чисел t и s .

С другой стороны, ниже (см. с. 157 и примечание⁹⁷) нам встретится еще так называемый процесс брауновского движения (иначе винеровский случайный процесс) $W(t)$, неплохо моделирующий одномерное брауновское движение и являющийся гауссовским случайным процессом с нулевым средним значением и корреляционной функцией $B(t, s) = C^2 \min(t, s)$. Как было показано Винером (ср. примечание⁹⁸), все реализации этого процесса являются крайне нерегу-

лярными нигде не дифференцируемыми (хотя и непрерывными) кривыми, совсем не похожими на реализации центрированного пуассоновского процесса; тем не менее при $C^2 = \lambda$ эти два процесса будут иметь точно одинаковые первые и вторые моменты.

Рассмотрим теперь случайный телеграфный сигнал (см. рис. 6), отвечающий пуассоновской последовательности точек t_k , характеризуемой параметром λ . Среднее значение этого процесса равно, очевидно, нулю; нетрудно также показать (см. примечание¹⁸), что здесь

$$B(t, s) = \langle X(t) X(s) \rangle = a^2 e^{-2\lambda |t-s|}. \quad (1.19)$$

В дальнейшем нам встретится также гауссовский случайный процесс с нулевым средним значением и корреляционной функцией $B(t, s) = \sigma^2 e^{-\alpha |t-s|}$ (так называемый процесс Орнштейна — Уленбека; (см. примечание⁹⁷); он совсем не похож на процесс, изображенный на рис. 6, но при $\sigma = a$, $\alpha = 2\lambda$ имеет одинаковые с ним первый и второй моменты. Кроме того, на с. 97 будет показано, что можно построить и случайный процесс с теми же моментами первых двух порядков, все реализации которого являются точными синусоидами, а на с. 94 и 242 будут рассмотрены два различных импульсных процесса $X(t)$, для которых процесс $X(t) - \langle X(t) \rangle$ снова имеет такие же первый и второй моменты.

Имеется, однако, довольно много свойств случайной функции $X(t)$, которые полностью определяются ее средним значением $m(t)$ и корреляционной функцией $B(t, s)$. Такие свойства особенно важны для приложений, так как они зависят лишь от двух простейших статистических характеристик функции $X(t)$, которые во многих случаях можно сравнительно точно определить без большого труда (об этом еще будет идти речь ниже). По этой причине оказалось даже целесообразным присвоить специальное наименование той части общей теории случайных функций, которая изучает свойства таких функций, определяемые их моментами первых двух порядков — она называется *корреляционной теорией случайных функций*.¹⁹ Именно эта теория в основном и рассматривается в настоящей книге.

Практическая ценность корреляционной теории существенно возрастает в связи с тем, что реально встречающиеся случайные функции очень часто оказываются или точно гауссовскими, или хотя бы приближенно гауссовскими с точностью, достаточной для многих практических целей. Так как многомерные распределения Гаусса однозначно определяются своими моментами первых двух порядков, то для гауссовских случайных функций $X(t)$ среднее значение $m(t)$ и корреляционная функция $B(t, s)$ однозначно задают все конечномерные распределения (1.3), т. е. полностью определяют $X(t)$. Поэтому в применении к гауссовским

случайным функциям корреляционная теория не отличается от полной теории, опирающейся на знание всей совокупности распределений (1.3). Заметим еще, что для любой случайной функции $X(t)$ с конечными моментами первых двух порядков всегда можно подобрать гауссовскую функцию $X_0(t)$, имеющую то же среднее значение и ту же корреляционную функцию, что и $X(t)$ (этот факт уже отмечался нами в другой связи на с. 37). Следовательно, в рамках корреляционной теории случайных функций можно без потери общности принять, что исследуемая функция $X(t)$ является гауссовской, хотя, конечно, никакой надобности в этом не может быть, так как здесь, кроме значений первых двух моментов, ничего об $X(t)$ знать не надо.

3

Стационарность

В дальнейшем переменное t у нас всегда будет принимать лишь вещественные значения и обычно будет истолковываться как время. Что же касается множества T , то оно иногда будет содержать всю совокупность вещественных чисел $-\infty < t < \infty$ (так что в соответствии с терминологией, указанной на с. 17, $X(t)$ будет являться случайным процессом), а иногда будет состоять лишь из целых чисел $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ (в этом случае $X(t)$ будет представлять собой случайную последовательность). Термин же «случайная функция» мы далее, как правило, будем употреблять лишь тогда, когда нам будет удобно совместно рассматривать и случайные процессы, и случайные последовательности.

Случайную функцию $X(t)$ мы будем называть стационарной, если все ее конечномерные функции распределения (1.3) (или плотности вероятности (1.4)) не меняются при любом сдвиге всей группы точек $t_1, \dots, t_n$ вдоль оси времени, т. е. если для любых $n, t_1, t_2, \dots, t_n$ и τ

$$F_{t_1+\tau, t_2+\tau, \dots, t_n+\tau}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.20)$$

или, соответственно,

$$p_{t_1+\tau, t_2+\tau, \dots, t_n+\tau}(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.21)$$

Отсюда, в частности, следует, для стационарной случайной функции все одномерные распределения вероятностей должны быть точно одинаковыми (т. е. $F_t(x) = F(x)$ и $p_t(x) = p(x)$) не должны зависеть от t все двумерные распределения пар $(X(t), X(s))$ могут зависеть только от разности $t - s$ и т. д.

Функции $F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $p_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ здесь, очевидно, могут зависеть лишь от $n-1$ разностей $t_2 - t_1, \dots, t_n - t_1$: полагая в (1.20) и (1.21) $\tau = -t_1$, мы убедимся, что эти равенства могут быть также переписаны в виде

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{0, t_2-t_1, \dots, t_n-t_1}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.20a)$$

и

$$p_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_{0, t_2-t_1, \dots, t_n-t_1}(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (1.21a)$$

Пусть теперь $y = g(x)$ — произвольная функция одного переменного. Нетрудно понять, что функция распределения случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, т. е. значения вероятности того, что $X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n$ при всех $x_1, x_2, \dots, x_n$, однозначно определяет также и функцию распределения случайных величин $Y_1 = g(X_1), Y_2 = g(X_2), \dots, Y_n = g(X_n)$, т. е. вероятность того, что $Y_1 < y_1, Y_2 < y_2, \dots, Y_n < y_n$. Следовательно, если функция распределения случайных величин $X_1 = X(t_1), X_2 = X(t_2), \dots, X_n = X(t_n)$ зависит только от значений $t_2 - t_1, \dots, t_n - t_1$, то только от этих значений будет зависеть и функция распределения случайных величин $Y_1 = g(X(t_1)), Y_2 = g(X(t_2)), \dots, Y_n = g(X(t_n))$.

Таким образом, если $X(t)$ — стационарная случайная функция, то стационарной случайной функцией будет и любая функция $Y(t) = g(X(t))$ от $X(t)$. Это важное свойство отличает класс стационарных случайных функций, например, от класса гауссовских случайных функций $X(t)$ или класса марковских случайных процессов $X(t)$, для которых, как нетрудно показать, функция $g(X(t))$ уже, вообще говоря, не будет принадлежать рассматриваемому классу случайных функций.

Физический смысл условия стационарности совершенно ясен: это условие показывает, что реальное явление или испытание, числовой характеристикой которого является случайная функция $X(t)$, стационарно в том смысле, что все доступные фиксации условия его осуществления не меняются со временем. Иначе говоря, $X(t)$ описывает изменение во времени какой-то характеристики полностью установившегося явления, для которого никакой выбор начала отсчета времени не имеет никаких преимуществ перед любым другим его выбором. Так, например, пульсации силы тока или напряжения в электрической цепи (шум) будут представлять собой стационарный процесс, если эта цепь находится в стационарном режиме, т. е. если все ее характеристики (включая, разумеется, и температуру проводников, и все внешние э. д. с.) не меняются со временем.

Аналогичным образом пульсации скорости в точке турбулентного потока будут стационарной функцией времени, если только поток этот установившийся, т. е. все его осредненные характеристики остаются постоянными; диаметр сечения ткацкой нити будет однородной функцией координаты сечения,* если процесс выработки этой нити не менялся во времени и т. д.

Вообще встречающиеся в практических приложениях случайные функции очень часто можно с большой степенью точности считать стационарными, и это обстоятельство обычно достаточно наглядно проявляется на внешнем виде наблюдаемых значений таких функций. Так, например, при взгляде на кривые, изображенные на рис. 1 и 2, бросается в глаза, что общий характер зафиксированных здесь нерегулярных пульсаций остается одним и тем же на протяжении всего периода наблюдения: кривые не имеют среднего систематического хода (тренда), амплитуда пульсаций не возрастает и не убывает заметно вдоль кривой, типичные периоды наблюдающихся пульсаций также не претерпевают заметных изменений и т. д. Все это дает достаточные основания предположить, что рассматриваемые кривые представляют собой реализации некоторых стационарных случайных процессов.

В этой связи целесообразно подчеркнуть, что на практике, для возможности считать данную случайную функцию $X(t)$ стационарной, вовсе не требуется, чтобы все ее статистические характеристики совсем не менялись со временем; в действительности здесь надо лишь требовать, чтобы они не менялись заметным образом в течение времени наблюдения за $X(t)$. Последнее замечание имеет непосредственное отношение, например, к кривой на рис. 1 б, характеризующей атмосферную турбулентность, на которую безусловно влияет суточный и годовой ход средней температуры воздуха; однако при наблюдениях в течение сравнительно коротких промежутков времени (например, порядка нескольких десятков минут) соответствующие случайные функции обычно вполне можно считать стационарными. Вообще понятие стационарной случайной функции, предполагающее, что рассматриваемая функция определена при всех значениях t и при всех t обладает одинаковыми статистическими свойствами, всегда представляет собой лишь математическую идеализацию, т. е. описывает некоторую упрощенную модель, только приближенно согласующуюся со свойствами тех или иных реальных процессов. Однако модель эта имеет весьма широкую область

* В том случае, когда переменное t , от которого зависит случайная функция не имеет смысла времени, вместо выражения «стационарная случайная функция» обычно употребляют выражение «однородная случайная функция». Выражение же «однородная во времени функция», также иногда встречающееся в литературе, имеет точно тот же смысл, что и стационарная функция.

применимости, в пределах которой она оказывается очень полезной для решения многих важных задач; последнее обстоятельство и определяет в конечном счете большую практическую ценность математической теории стационарных случайных функций.

Переходя к другим примерам случайных функций, рассмотрим введенный, отметим, что изображенный на рис. 6 «случайный телеграфный сигнал», также будет стационарным случайным процессом, если только начало отсчета выбрано «наудачу», т. е. никак не связано с точками t_k (именно это предположение принималось, в частности, при выводе формулы (1.19) для корреляционной функции такого процесса). В то же время все весьма различные кривые, изображенные на рис. 3—5, определенно не кажутся похожими на реализации стационарных случайных процессов. Однако в отношении кривой, изображенной на рис. 3 а, можно все же предположить, что для отдельных сравнительно небольших промежутков времени ее допустимо считать приближенно стационарной; нельзя также быть уверенным, что при значительном удлинении интервала наблюдения она не приобретет снова вида реализации стационарного процесса, включающего некоторые длиннопериодные колебания.²⁰

Модулированное по амплитуде гармоническое колебание с фиксированной фазой вида $X(t) = A \cos \omega_0 t$, где A — случайная величина, разумеется, не представляет собой стационарного случайного процесса, так как здесь $X(t)$ обращается в нуль в строго определенные моменты времени и в определенные же моменты времени принимает наибольшие положительные и наибольшие отрицательные значения; по аналогичной причине не будут стационарными и процессы импульсно-амплитудной модуляции.

Модулированное по фазе гармоническое колебание вида $X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Phi)$, где Φ — случайная величина со значениями из интервала $0 \leq \Phi < 2\pi$, тоже, как легко понять, не будет стационарным процессом, если распределение вероятностей Φ не является равномерным (например, если плотность вероятности Φ имеет острый максимум). Однако если Φ равномерно распределено на $[0, 2\pi]$ с постоянной плотностью $p = 1/2\pi$, то колебание $X(t)$ будет представлять собой стационарный случайный процесс при любом распределении вероятностей амплитуды A (в предположении, что A не зависит от Φ). Действительно, в этом случае никакие распределения вероятностей, очевидно, не могут измениться от изменения начала отсчета времени (эквивалентного добавлению постоянного слагаемого к фазе Φ).²¹

По тем же причинам стационарным процессом будет и сумма гармонических колебаний

$$X(t) = \sum_{k=1}^n A_k \cos(\omega_k t + \Phi_k), \quad (1.22)$$

где все фазы $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ — независимые равномерно распределенные на интервале $[0, 2\pi]$ случайные величины, а величины $A_1, \dots, A_n$ не зависят друг от друга и от фаз $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ (в случае, когда $A_1, \dots, A_n$ — это фиксированные постоянные, процесс (1.22) называется процессом со случайными фазами).

Так как в случае стационарной функции одномерная функция распределения $F_t(x) = F(x)$ величины $X(t)$ не зависит от t , то ясно, что среднее значение $m(t) = \langle X(t) \rangle$ здесь должно быть постоянным:

$$\langle X(t) \rangle = m. \quad (1.23)$$

Аналогично этому двумерная функция распределения в стационарном случае зависит только от разности $t - s$; поэтому корреляционная функция $B(t, s) = \langle X(t) X(s) \rangle$ здесь имеет вид

$$\langle X(t) X(s) \rangle = B(t - s). \quad (1.24)$$

Ясно также, что в этом случае $b(t, s) = B(t - s) - m^2 = b(t - s)$ отличается от $B(t - s)$ лишь постоянным слагаемым, а $R(t, s) = b(t - s)/b(0) = R(t - s)$ отличается от $b(t - s)$ лишь постоянным множителем. Таким образом, в корреляционной теории стационарных случайных функций эти функции полностью характеризуются одной постоянной m и одной функцией $B(\tau)$ (или $b(\tau)$) (одного переменного $\tau = t - s$ (целочисленного для случайных последовательностей и произвольного вещественного для случайных процессов)).

Поскольку в корреляционной теории многомерные распределения вообще не фигурируют, то и само определение стационарных случайных функций здесь целесообразно изменить. Естественно считать здесь случайную функцию $X(t)$ стационарной, если только ее среднее значение $\langle X(t) \rangle$ постоянно, а корреляционная функция $\langle X(t) X(s) \rangle$ зависит только от разности $t - s$.

Случайные функции, удовлетворяющие двум указанным условиям, называются стационарными в широком смысле или корреляционно стационарными.²² Именно такие функции мы и будем в основном изучать в дальнейшем (и для краткости будем их обычно называть просто стационарными).

Ясно, что общее условие стационарности (1.20) или (1.21) (которое называется также условием стационарности в узком смысле) для случайных функций, стационарных лишь в широком смысле, вообще говоря, может и не выполняться. Заметим, однако, что на практике выполнение условий (1.23) и (1.24) стационарности в широком смысле почти всегда означает, что исследуемая функция $X(t)$ описывает какой-то установив-

шийся (не эволюционирующий) процесс (ибо какие же еще причины могут обеспечить строгое выполнение этих двух условий?); поэтому функции $X(t)$, строго стационарные в широком смысле, но не стационарные в узком смысле, в приложениях почти никогда не встречаются. И тем не менее это не означает, что понятие стационарности в широком смысле вообще не представляет практического интереса.

Дело в том, что проверка общих условий (1.20) или (1.21) стационарности в узком смысле во многих реальных случаях очень затруднительна, а иногда и вообще представляется невозможной; в то же время условия (1.23) и (1.24) относятся лишь к простейшим статистическим характеристикам $m(t)$ и $B(t, s)$ функции $X(t)$, которые часто без большого труда могут быть сравнительно точно измерены. Если при этом оказывается, что условия (1.23) и (1.24) выполняются с хорошей точностью, то этого уже достаточно для того, чтобы на практике можно было применять выводы корреляционной теории стационарных случайных функций, не заботясь о том, что точность какого-то из условий (1.20) или (1.21) здесь может оказаться явно неудовлетворительной.

В заключение подчеркнем еще, что в случае гауссовских случайных функций, для которых средние значения $m(t)$ и значения корреляционной функции $B(t, s)$ (или $b(t, s)$) полностью определяют все многомерные распределения вероятностей, понятия стационарности в широком смысле и стационарности в узком смысле вообще совпадают между собой. В самом деле, гауссовская функция всегда имеет конечные моменты первых порядков и для нее из того, что $m(t)$ не зависит от t , а $B(t, s)$ зависит лишь от $t - s$, вытекает и справедливость общего условия (1.20), относящегося к многомерным распределениям вероятностей.

4.

Свойства корреляционной функции.

Производная и интеграл от случайного процесса

В следующем параграфе будет показано, что среднее значение m стационарной случайной функции $X(t)$ при широких условиях может быть сравнительно просто измерено с хорошей точностью. Это обстоятельство позволяет во многих случаях рассматривать вместо функции $X(t)$ ее пульсацию $\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m$, т. е. отклонение $X(t)$ от своего среднего значения. Функция $\overset{\circ}{X}(t)$ имеет равное нулю среднее значение, а ее корреляционная функция $B(\tau)$ (являющаяся единственной характеристикой $\overset{\circ}{X}(t)$, используемой в корреляционной теории) совпадает с центрированной корреляционной функцией $b(\tau)$ исходной функции $X(t)$.

Так как даже в тех случаях, когда t нам неизвестно, добавление постоянной к $X(t)$ почти не изменяет большинства теоретических рассмотрений и обычно может быть легко учтено, то в дальнейшем, как правило, мы будем считать, что $\langle X(t) \rangle = 0$, т. е. будем рассматривать именно отклонения стационарных случайных функций от их средних значений. В тех случаях, когда дело будет обстоять иначе, этот факт будет оговариваться особо.

В силу общих свойств (1.15) и (1.17) корреляционной функции $B(t, s)$ функция $B(\tau)$ должна быть такой, что

$$B(0) > 0, \quad B(-\tau) = B(\tau), \quad |B(\tau)| \leq B(0). \quad (1.25)$$

Кроме того, в силу (1.16) для любого целого положительного n , любых n чисел (целых в случае стационарных последовательностей и произвольных вещественных в случае стационарных процессов) $\tau_1, \dots, \tau_n$ и любых n вещественных чисел $c_1, \dots, c_n$ должно выполняться неравенство

$$\sum_{j, k=1}^n B(\tau_j - \tau_k) c_j c_k \leq 0. \quad (1.26)$$

Функция $B(\tau)$ называется положительно определенной функцией аргумента τ (целочисленного или произвольного вещественного)*, если $B(-\tau) = B(\tau)$ и для нее при всех $n, \tau_1, \dots, \tau_n$ и $c_1, \dots, c_n$ выполняется условие (1.26); таким образом, корреляционная функция стационарной случайной функции всегда положительно определена. Верно также и обратное утверждение: всякая положительно определенная функция целочисленного или, соответственно, вещественного аргумента τ является корреляционной функцией некоторой стационарной случайной последовательности или, соответственно, стационарного случайного процесса (см. с. 37, где аналогичное утверждение формулировалось для общих случайных функций, определенных на произвольном множестве T). Отсюда видно, что класс корреляционных функций стационарных случайных функций $X(t)$ совпадает с классом положительно определенных функций соответствующего аргумента (целочисленного или произвольного вещественного).

Используя совпадение класса корреляционных функций с классом положительно определенных функций или же опираясь непосредственно на само определение корреляционной функции $B(\tau)$, можно получить многие важные свойства совокупности всех таких функций. Так, например, легко видеть, что если функции

* Положительно определенные функции..., $B(-1)$, $B(0)$, $B(1)$, ... целочисленного аргумента τ называются также положительно определенными последовательностями.

$B_1(\tau)$ и $B_2(\tau)$ — это корреляционные функции каких-то случайных функций, а a_1 и a_2 — неотрицательные постоянные, то

$$B(\tau) = a_1 B_1(\tau) + a_2 B_2(\tau) \quad (1.27)$$

также будет корреляционной функцией.

В самом деле, из справедливости неравенств (1.26) для функций $B_1(\tau)$ и $B_2(\tau)$ сразу следует, что они будут справедливы и для функции (1.27). Ясно также, что простейшую линейную комбинацию (1.27) можно заменить и общей линейной комбинацией m корреляционных функций $B_1(\tau), \dots, B_m(\tau)$ с неотрицательными коэффициентами $a_1, \dots, a_m$ или даже пределом последовательности таких линейных комбинаций.

Далее нетрудно показать, что и произведение

$$B(\tau) = B_1(\tau) B_2(\tau) \quad (1.28)$$

двух корреляционных функций $B_1(\tau)$ и $B_2(\tau)$ всегда будет являться корреляционной функцией. При доказательстве этого факта проще опираться не на условие (1.26), а на определение корреляционной функции как второго момента случайной функции.

Пусть $X_1(t)$ и $X_2(t)$ — стационарные случайные функции, корреляционные функции которых равны $B_1(\tau)$ и соответственно $B_2(\tau)$. Функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$ задаются совокупностями своих конечномерных распределений вероятностей, а для задания пары $(X_1(t), X_2(t))$ мы, очевидно, должны задать еще и распределения вероятностей всевозможных групп $\{X_1(t_1), \dots, X_1(t_n), X_2(t'_1), \dots, X_2(t'_m)\}$, включающих значения и первой, и второй случайной функции. При этом всегда возможно, не меняя распределений значений $X_1(t)$ и $X_2(t)$ по отдельности, задать совместные распределения значений двух функций с помощью соотношения

$$\begin{aligned} P\{X_1(t_1) < x_1, \dots, X_1(t_n) < x_n, X_2(t'_1) < x'_1, \dots, X_2(t'_m) < x'_m\} = \\ = P\{X_1(t_1) < x_1, \dots, X_1(t_n) < x_n\} \times \\ \times P\{X_2(t'_1) < x'_1, \dots, X_2(t'_m) < x'_m\}, \end{aligned}$$

т. е. выбрать в качестве $X_1(t)$ и $X_2(t)$ взаимно независимые случайные функции. Рассмотрим теперь новую случайную функцию $X(t) = X_1(t) X_2(t)$; так как среднее значение произведения независимых случайных величин равно произведению соответствующих средних значений, то для нее

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \langle X_1(t + \tau) X_2(t + \tau) X_1(t) X_2(t) \rangle = \\ &= \langle X_1(t + \tau) X_1(t) \rangle \langle X_2(t + \tau) X_2(t) \rangle = B_1(\tau) B_2(\tau). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $B(\tau)$ — корреляционная функция.

Имея какие-то примеры корреляционных функций, с помощью приведенных здесь утверждений можно получить большое число новых примеров таких функций. На первый взгляд представляется,

однако, что справедливость условия (1.26) для той или иной функции очень нелегко проверить, и поэтому неясно, откуда же можно взять первоначальные примеры функций $B(\tau)$. Ниже мы увидим, что это первое впечатление на самом деле ошибочно и что существуют сравнительно простые приемы нахождения положительно определенных функций $B(\tau)$; также и проверка справедливости условия (1.26) для заданной функции $B(\tau)$ оказывается вовсе не столь сложной, как это может показаться сначала. В § 12 и 17 будут приведены многочисленные конкретные примеры корреляционных (т. е. положительно определенных) функций $B(\tau)$.

Заметим еще, что $R(\tau) = b(\tau)/b(0)$ (где $b(\tau) = B(\tau) - m^2$, а $m = \langle X(t) \rangle$) — коэффициент корреляции случайных величин $X(t + \tau)$ и $X(t)$ (в стационарном случае зависящий только от τ). В большинстве приложений теории стационарных случайных функций естественно предполагать, что статистическая связь между величинами $X(t)$ и $X(t + \tau)$ неограниченно ослабевает при неограниченном возрастании τ ; в таком случае, очевидно,

$$b(\tau) \rightarrow 0, \quad B(\tau) \rightarrow m^2 = \text{const} \quad \text{при } |\tau| \rightarrow \infty, \quad (1.29)$$

где число m мы теперь не считаем обязательно равным нулю. Условие (1.29) в отличие от рассматривавшихся выше условий, относящихся к $B(\tau)$, не является математически необходимым (ниже мы столкнемся и с примерами функций $B(\tau)$, для которых оно неверно); однако в приложениях его чаще всего можно смело считать выполняющимся.

Ниже в настоящем параграфе рассматриваются лишь стационарные случайные процессы — функции $X(t)$ вещественного аргумента t . При этом нам понадобится понятие предела последовательности случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$. Вообще говоря, в теории вероятностей употребляется несколько различных разумных определений такого предела, выбор наиболее удобного из которых зависит от решаемой задачи. В корреляционной теории случайных функций целесообразнее всего считать, что случайная величина X является пределом последовательности случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ (т. е. $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$), если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle (X - X_n)^2 \rangle = 0, \quad (1.30)$$

т. е. если для любого (сколь угодно малого) $\varepsilon > 0$ существует такое $N = N(\varepsilon)$, что

$$\langle (X - X_n)^2 \rangle < \varepsilon \quad \text{при } n > N. \quad (1.31)$$

Определенный таким образом предел X принято называть пределом в среднем квадратичном после-

довательности величин X_n ; иначе этот же факт выражают, говоря, что *последовательность случайных величин X_n сходится к X в среднем квадратичном*.

В дальнейшем в настоящей книге сходимость и предел последовательности случайных величин всюду, где не оговорено обратное, будет пониматься именно в этом смысле. Воспользовавшись известным неравенством Чебышева²³

$$P\{|X - X_n| > \varepsilon\} \leq \frac{\langle (X - X_n)^2 \rangle}{\varepsilon^2}, \quad (1.32)$$

легко показать, что из (1.30) вытекает также, что при любом $\varepsilon > 0$ имеет место равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X - X_n| > \varepsilon\} = 0. \quad (1.33)$$

Иначе говоря, здесь при любых $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ существует такое $N_0 = N_0(\varepsilon, \eta)$, что

$$P\{|X - X_n| \leq \varepsilon\} > (1 - \eta) \quad \text{при } n > N_0. \quad (1.34)$$

Это последнее соотношение особенно наглядно поясняет, почему случайную величину X , удовлетворяющую (1.30), естественно назвать пределом последовательности $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$. Понятно также, что величину X , удовлетворяющую (1.33) при всех $\varepsilon > 0$, естественно считать пределом последовательности $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ даже в том случае, когда условие (1.30) для нее не имеет места; в теории вероятностей величина X , удовлетворяющая (1.33), называется обычно *пределом по вероятности* последовательности $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$. Приведенный выше вывод условия (1.33) из (1.30) показывает, таким образом, что *если величина X является пределом последовательности $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ в среднем квадратичном, то она обязательно будет пределом той же последовательности и по вероятности*.

Пусть теперь $x, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ — некоторая реализация совокупности случайных величин $X, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$. Согласно сказанному выше, если X — предел по вероятности последовательности $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, то разность $x - x_n$ при любом достаточно большом n будет очень мала по абсолютной величине с вероятностью, очень близкой к единице. Отсюда, однако, еще не следует, что $|x - x_n|$ обязательно будет очень малым сразу при всех достаточно больших значениях n . Иначе говоря, из сходимости по вероятности последовательности случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ к X при $n \rightarrow \infty$ еще не следует, что $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$ для каждой реализации $x, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Если же $x_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow \infty$ для всех реализаций (за исключением, быть может, какого-то настолько малого множества патологических реализаций, что суммарная вероятность появле-

ния хоть какой-то из них равна нулю), то последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ называется сходящейся к случайной величине X почти наверное (или с вероятностью единица), и соответственно X называется пределом почти наверное (или с вероятностью единица) последовательности $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$. Нетрудно показать, что из сходимости последовательности $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ к X почти наверное вытекает, что X_n сходится к X и по вероятности (хотя может и не сходиться к X в среднем квадратичном); однако из сходимости X_n к X по вероятности (или даже в среднем квадратичном) еще не следует, что X_n сходится к X и почти наверное.²⁴

Продолжим теперь рассмотрение наиболее интересных для нас пределов в среднем квадратичном; как и всюду в этой книге, мы будем считать при этом, что все случайные величины, о которых идет речь, имеют конечные дисперсии. Воспользовавшись общим неравенством Коши — Буняковского — Шварца

$$|\langle UV \rangle| \leq [\langle U^2 \rangle \langle V^2 \rangle]^{1/2} \quad \text{при всех } U, V \quad (1.35)$$

(см. (B.15)), легко показать, что если $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ и $Y = \lim_{m \rightarrow \infty} Y_m$,

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \langle X_n Y_m \rangle = \langle XY \rangle. \quad (1.36)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} |\langle X_n Y_m \rangle - \langle XY \rangle| &= |\langle [(X_n - X) + X][(Y_m - Y) + Y] \rangle - \langle XY \rangle| = \\ &= |\langle (X_n - X)(Y_m - Y) \rangle + \langle (X_n - X)Y \rangle + \langle X(Y_m - Y) \rangle|. \end{aligned}$$

Применив здесь ко всем членам правой части неравенство (1.35), найдем, что она стремится к нулю при $n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$, т. е. верно соотношение (1.36). Еще проще доказывается, что если $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle X_n Y \rangle = \langle XY \rangle. \quad (1.37)$$

Из (1.36) также следует, что если последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ является сходящейся (т. е. существует $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \langle (X_n - X_m)^2 \rangle = 0. \quad (1.38)$$

Более сложно доказывается обратное утверждение о том, что если для какой-то последовательности случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ имеет место соотношение (1.38), то последователь-

ность эта обязательно сходится, т. е. существует $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$; однако и это утверждение является верным.²⁵

Раскрыв скобки в (1.38), нетрудно убедиться и в том, что последовательность $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ наверное будет сходящейся, если существует конечный предел вида

$$\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \langle X_n X_m \rangle \quad (1.39)$$

(ибо $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle X_n^2 \rangle$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} \langle X_m^2 \rangle$ — это лишь частные случаи (1.39)); ясно также, что предел (1.39) для любой сходящейся последовательности существует и равен $\langle X^2 \rangle$, где $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$.

Вернемся теперь к изучению стационарных случайных процессов $X(t)$ и их корреляционных функций $B(\tau)$. Так как, очевидно,

$$\langle [X(t+h) - X(t)]^2 \rangle = 2[B(0) - B(\tau)],$$

то, если функция $B(\tau)$ непрерывна в нуле (т. е. $\lim_{h \rightarrow 0} B(h) = B(0)$), процесс $X(t)$ будет непрерывным в среднем квадратичном в том смысле, что при всех t

$$\lim_{h \rightarrow 0} \langle [X(t+h) - X(t)]^2 \rangle = 0, \text{ т. е. } \lim_{h \rightarrow 0} X(t+h) = X(t) \quad (1.40)$$

(и, следовательно, $\lim_{h \rightarrow 0} P\{|X(t+h) - X(t)| > \varepsilon\} = 0$ при всех t и любом $\varepsilon > 0$). Если функция $B(\tau)$ не непрерывна в нуле, то процесс $X(t)$ ни в одной точке не будет непрерывным в среднем квадратичном (т. е. условие $\lim_{h \rightarrow 0} \langle [X(t+h) - X(t)]^2 \rangle = 0$ не будет выполняться ни при каком t). Такие случайные процессы, всюду разрывные в среднем квадратичном, естественно, должны вести себя крайне нерегулярным образом и они вряд ли могут служить подходящей моделью для каких-либо разумных прикладных задач. Поэтому такие процессы в дальнейшем вовсе не будут рассматриваться, т. е. корреляционные функции $B(\tau)$ всех рассматриваемых стационарных случайных процессов будут предполагаться непрерывными в точке $\tau = 0$. Легко показать, что в таком случае функция $B(\tau)$ обязательно будет непрерывной и при всех вообще значениях τ . В самом деле, применив неравенство (1.35) к величинам $U = X(t+h) - X(t)$ и $V = X(t) - X(t-\tau)$, найдем, что

$$|B(\tau+h) - B(\tau)| \leq \sqrt{2} [B(0) - B(h)]^{1/2} [B(0)]^{1/2};$$

значит, если $\lim_{h \rightarrow 0} B(h) = B(0)$, то и $\lim_{h \rightarrow 0} B(\tau+h) = B(\tau)$ при всех τ .

Отметим, что из непрерывности процесса $X(t)$ в среднем квадратичном при всех t вовсе не следует, что все реализации $x(t)$ этого процесса непрерывные функции. В самом деле, на с. 38 мы уже отмечали, что, например, для случайного телеграфного сигнала $B(\tau) = \langle X(t+\tau) X(t) \rangle = a^2 e^{-2\lambda|\tau|}$, т. е. функция $B(\tau)$ здесь непрерывна; между тем практически все реализации $x(t)$ этого процесса разрывны (см. рис. 6).

Никакого противоречия здесь, конечно, нет: хотя $x(t)$ и имеет точки разрыва, но для каждого отдельного t вероятность появления разрыва между моментами t и $t+h$ при малом h очень мала, так что и средний квадрат разности $X(t+h) - X(t)$ мал. Для нахождения же условий непрерывности траекторий сразу во всех точках нужен, очевидно, совсем другой подход, не опирающийся уже на рассмотрение одних лишь пределов в среднем квадратичном; на нем мы здесь не будем задерживаться.²⁶

Для непрерывного в среднем квадратичном случайного процесса $X(t)$ естественно рассмотреть также последовательности случайных величин $X(t, h_k) = [X(t+h_k) - X(t)]/h_k$, отвечающие стремящимся к нулю числовым последовательностям $h_1, h_2, \dots, h_k, \dots$. Если для любой такой сходящейся к нулю последовательности $h_1, h_2, \dots, h_k, \dots$ величины $X(t, h_k)$ сходятся (в среднем квадратичном) к одной и той же случайной величине, то процесс $X(t)$ называется дифференцируемым в среднем квадратичном в точке t , а величина

$$X'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} \quad (1.41)$$

называется производной (точнее — производной в среднем квадратичном) процесса $X(t)$ в точке t . Легко понять, что стационарный процесс $X(t)$ будет или дифференцируемым при всех значениях t , или же всюду не дифференцируемым. Для дифференцируемости процесса (т. е. существования производной (1.41)), очевидно, требуется, чтобы существовал предел

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0, h' \rightarrow 0} \left\langle \frac{X(t+h) - X(t)}{h} \frac{X(t+h') - X(t)}{h'} \right\rangle &= \\ = \lim_{h \rightarrow 0, h' \rightarrow 0} \frac{B(h-h') - B(h) - B(h') + B(0)}{hh'} &. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Легко видеть, что если функция $B(\tau)$ имеет вторую производную $B''(0)$ в точке $\tau = 0$, то предел (1.42) будет конечным и рав-

ным $-B''(0)$; в этом случае процесс $X(t)$ будет дифференцируемым при любом t . Поскольку

$$\left\langle \frac{X(t+\tau+h) - X(t+\tau)}{h} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} \right\rangle = \\ = \frac{2B(\tau) - B(\tau+h) - B(\tau-h)}{h^2},$$

ясно, что в случае дифференцируемого процесса $X(t)$ производная $B''(\tau)$ существует при всех τ и

$$\langle X'(t+\tau) X'(t) \rangle = -B''(\tau). \quad (1.43)$$

Итак, если корреляционная функция $B(\tau)$ имеет вторую производную в точке $\tau = 0$, то она обязательно будет дважды дифференцируемой при всех значениях τ , а соответствующий стационарный процесс $X(t)$ будет дифференцируемым, причем корреляционная функция процесса $X'(t)$ здесь равна $-B''(\tau)$ (т. е. $-B''(\tau)$ является корреляционной функцией). Ясно также, что

$$\langle X'(t+\tau) X(t) \rangle = B'(\tau), \quad \langle X(t+\tau) X'(t) \rangle = -B'(\tau). \quad (1.44)$$

Поскольку $B(-\tau) = B(\tau)$, если $B(\tau)$ — дифференцируемая функция, то обязательно $B'(0) = 0$; поэтому всегда $\langle X'(t) X(t) \rangle = 0$. Отметим еще, что функция $B''(\tau)$ обязательно непрерывна во всех точках τ , если только она непрерывна в точке $\tau = 0$; это легко доказывается с помощью применения неравенства (1.35) к случайным величинам $U = X'(t+h) - X'(t)$ и $V = X'(t-\tau)$. Если же функция $B(\tau)$ не имеет конечной второй производной в точке $\tau = 0$, то предел (1.42) не будет существовать и процесс $X(t)$ будет всюду недифференцируемым в среднем квадратичном.

Процессы $X(t)$, для которых $B''(\tau)$ — непрерывная функция и, значит, существует непрерывный в среднем квадратичном процесс $X'(t)$, мы в дальнейшем будем называть просто дифференцируемыми. Из сказанного выше о непрерывных процессах следует, что для таких процессов реализации $x'(t)$ процесса $X'(t)$ могут быть и разрывными функциями t . С другой стороны, процесс $X(t)$ может быть недифференцируемым и тогда, когда все его реализации $x(t)$ имеют непрерывные по t производные $x'(t)$; так, на с. 38 отмечалось, что корреляционную функцию $B(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$ (для которой производная $B'(\tau)$ разрывна в точке $\tau = 0$, а $B''(0)$ не существует) может иметь процесс, все реализации которого являются точными синусоидами. Отметим, однако, что для всех встречающихся на практике дифференцируемых стационарных процессов $X(t)$ реализации $x(t)$ также оказываются дифференцируемыми и функции $x'(t)$ совпадают с реализациями процесса $X'(t)$.²⁷ Этот редко отмечаемый факт на самом

деле весьма важен для приложений, так как из него следует, что производную в среднем квадратичном $X'(t)$ (точнее говоря, ее реализацию $x'(t)$) обычно можно определить по одной реализации $x(t)$ процесса $X(t)$ с помощью дифференцирования этой последней.

Рассмотрим еще интегралы вида

$$\int_a^b f(t) X(t) dt,$$

где $f(t)$ — числовая функция, а $X(t)$ — случайный стационарный процесс. Такой интеграл естественно определить как предел (в среднем квадратичном) соответствующей интегральной суммы:

$$\int_a^b f(t) X(t) dt = \lim_{\max |t_k - t_{k-1}| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(t'_k) X(t'_k) (t_k - t_{k-1}), \quad (1.45)$$

где $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$, $t_{k-1} \leq t'_k \leq t_k$. Отсюда легко выводится, что интеграл (1.45) всегда будет существовать, если

$$\int_a^b \int_a^b B(t-s) f(t) f(s) ds dt < \infty, \quad (1.46)$$

причем

$$\left\langle \left(\int_a^b f(t) X(t) dt \right)^2 \right\rangle = \int_a^b \int_a^b B(t-s) f(t) f(s) ds dt, \quad (1.47)$$

и вообще

$$\left\langle \int_a^b f(t) X(t) dt \int_c^d g(s) X(s) ds \right\rangle = \int_a^b \int_c^d B(t-s) f(t) g(s) dt ds. \quad (1.48)$$

Несобственные интегралы от $f(t) X(t)$ по dt обычным образом определяются как пределы (в среднем квадратичном) интеграла (1.45) при $a \rightarrow -\infty$, или $b \rightarrow \infty$, или $a \rightarrow -\infty$ и $b \rightarrow \infty$; при этом условие (1.46) существования интеграла и формулы (1.47), (1.48) оказываются применимыми и к несобственным интегралам.

Следует подчеркнуть, однако, что при всей простоте указанных выше результатов, касающихся интегралов (1.45), практиков эти результаты вряд ли могут удовлетворить. Дело в том, что в приложениях мы чаще всего сталкиваемся лишь с одной какой-то реализацией $x(t)$ процесса $X(t)$ (реже с конечным числом таких реализаций), а интеграл от процесса определяем, интегрируя

эту реализацию (численно или с помощью специального прибора — интегратора). При этом, естественно, получается величина

$$\int_a^b f(t) x(t) dt, \quad (1.45a)$$

а вовсе не предел в среднем квадратичном (1.45), включающий осреднение по всему множеству реализаций. Поэтому для приложений крайне важно то обстоятельство (редко явно отмечаемое в книгах, рассчитанных не на математиков), что непрерывные в среднем квадратичном стационарные случайные процессы всегда имеют интегрируемые (с вероятностью единица) реализации и интеграл (1.45) для них совпадает со случайной величиной, выборочные значения которой равны интегралам (1.45a). На доказательстве этого утверждения, требующего привлечения довольно тонких математических понятий и теорем, мы не будем задерживаться.²⁸

5.

Эргодические теоремы; оценка среднего значения функции $X(t)$ по данным наблюдений

Перейдем теперь к важному вопросу об определении статистических характеристик случайных функций по данным наблюдений.

Начнем с вопроса об определении среднего значения $m = \langle X(t) \rangle$ и вспомним в этой связи, как обстоит дело в более простом случае наблюдений, относящихся к случайной величине X .

В обычных применениях теории вероятностей чаще всего имеют дело с многократно повторяющимися независимыми наблюдениями. При этом за среднее значение случайной величины X , характеризующей наблюдаемое явление, обыкновенно принимают

среднее арифметическое $m_N = \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) / N$ всех наблюденных значений (реализаций) величины X . В качестве оценки неизвестного среднего значения $m = \langle X \rangle$ величина m_N бесспорно обладает целым рядом привлекательных свойств. Прежде всего, m_N является несмещенной оценкой m , т. е. она не содержит систематической ошибки. Точный смысл сделанного утверждения таков: построенная по данным наблюдений величина m_N (выборочная или эмпирическая оценка) сама является выборочным значением (реализацией) случайной величины

$$M_N = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N} \quad (1.49)$$

(соответствующей теоретической оценки), где $X_1, X_2, \dots, X_N$ — независимые случайные величины, имеющие то же распределение, что и X ; при этом

$$\langle M_N \rangle = m. \quad (1.50)$$

Последнее соотношение, показывающее, что среднее значение теоретической оценки M_N совпадает с оцениваемой величиной m , как раз и называется условием несмещенности. (В случаях, когда это условие не выполняется, разность между средним значением оценки и оцениваемой величиной называется смещением оценки или ее систематической ошибкой).

Ясно, что на практике свойство несмещенности еще недостаточно для того, чтобы оценку можно было считать хорошей. На самом деле крайне желательно еще, чтобы малой была и случайная ошибка, т. е. чтобы случайная величина M_N была близка (в каком-то разумном смысле) к постоянной m . В качестве критерия близости удобнее всего выбрать значение $\langle (M_N - m)^2 \rangle$ (в силу несмещенности оценки M_N совпадающее с ее дисперсией), т. е. считать оценку M_N хорошей, только если $\langle (M_N - m)^2 \rangle$ достаточно мало. В случае средней арифметической оценки M_N , построенной по N независимым однотипным наблюдениям, очевидно,

$$\langle (M_N - m)^2 \rangle = \sigma_{M_N}^2 = \frac{\sigma_X^2}{N}, \quad (1.51)$$

где σ_X^2 — дисперсия величины X , которую мы предполагаем конечной (так что σ_X — типичная величина ошибки одного наблюдения). Отсюда видно, что средняя квадратическая ошибка среднего арифметического M_N убывает с ростом N пропорционально $N^{-1/2}$. Существенно, что $\sigma_{M_N}^2 \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, т. е. что M_N стремится (в среднеквадратичном смысле) при $N \rightarrow \infty$ к оцениваемой величине m — это очень важное свойство оценки M_N (зависящей от числа наблюдений N) называется ее состоятельностью (или, что то же самое, состоятельностью оценки m_N).^{*} Состоятельность оценки, очевидно, означает, что, увели-

^{*} В математической статистике выборочная оценка и соответствующая ей теоретическая оценка чаще всего не различаются и обозначаются обычно одним и тем же символом. Отметим, кроме того, что в случае произвольной оценки A_N некоторого параметра a величина $\Delta_{A_N} = \langle (A_N - a)^2 \rangle^{1/2}$ называется средней квадратической ошибкой оценки A_N и оценка A_N называется состоятельной, если $\Delta_{A_N} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. В силу формулы (B.9), $\Delta_{A_N}^2 = \delta_{A_N}^2 + \sigma_{A_N}^2$, где $\delta_{A_N} = \langle A_N - a \rangle$, а $\sigma_{A_N}^2 = \langle (A_N - \langle A_N \rangle)^2 \rangle$; отсюда видно, что средний квадрат ошибки A_N , вообще говоря, складывается из квадрата систематической ошибки (т. е. смещения) и среднего квадрата случайной ошибки $\sigma_{A_N}^2$.

чивая число наблюдений, здесь можно достигнуть любой нужной нам степени точности.

В применении к случайной функции $X(t)$ приведенные выше соображения показывают, что среднее арифметическое $m_N(t) = \left[\sum_{i=1}^N x_i(t) \right] / N$ значений в один и тот же момент времени t каких-то N независимых реализаций $x_i(t)$ функции $X(t)$ будет несмещенной и состоятельной оценкой среднего значения $\langle X(t) \rangle = m(t)$. Ясно, однако, что оценка $m_N(t)$ будет иметь хорошую точность, лишь если число N используемых реализаций является достаточно большим. Между тем на практике получение каждой отдельной реализации часто оказывается трудоемким и дорогостоящим делом, а иногда оно даже и невозможно, так как опыт, с которым связана наша функция, нельзя повторить. Поэтому крайне желательно иметь возможность обойтись наименьшим числом реализаций — лучше всего просто одной из них.

Особая практическая ценность корреляционной теории именно стационарных случайных функций как раз и определяется в значительной степени тем, что здесь весьма часто среднее значение m (а также и корреляционную функцию $B(\tau)$) удастся достаточно надежно определить по одной единственной реализации $x(t)$ (типа тех, которые изображены на рис. 1).

Дело в том, что для стационарных случайных функций $X(t)$ все моменты времени t являются равноправными; поэтому здесь естественно попытаться заменить осреднение по множеству реализаций осреднением по времени данных, относящихся к единственной реализации $x(t)$. В применении к задаче об оценке среднего значения m стационарной функции $X(t)$ по наблюдаемым значениям $x(t)$ при $t = 1, 2, \dots, T$ (в случае дискретного времени t) или же при $0 \leq t \leq T$ (в случае непрерывного t) такой подход означает, что в качестве оценки m принимается величина

$$m_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x(t) \quad (1.52)$$

или, соответственно,

$$m_T = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt. \quad (1.52a)$$

Ясно, что оценка m_T всегда будет *несмещенной*; иначе говоря, она представляет собой реализацию случайной величины (теоретической оценки)

$$M_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X(t) \quad \text{или} \quad M_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt \quad (1.53)$$

такой, что и при дискретном, и при непрерывном t

$$\langle M_T \rangle = \langle X(t) \rangle = m \quad \text{при всех } T \quad (1.54)$$

(в силу стационарности $X(t)$). Отсюда, однако, еще не следует, что оценку m_T во всех случаях можно рекомендовать для практического использования. Ясно, что кроме того надо еще потребовать, чтобы рассматриваемая оценка была состоятельной, т. е. чтобы ее точность неограниченно возрастала при неограниченном увеличении длины T используемого интервала наблюдения. Иначе говоря, для возможности определения среднего значения m стационарной случайной функции $X(t)$ с помощью осреднения по времени одной ее реализации $x(t)$ требуется, чтобы выполнялось равенство

$$\langle (M_T - m)^2 \rangle \rightarrow 0 \quad \text{при } T \rightarrow \infty, \quad (1.55)$$

т. е. равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X(t) = m \quad (1.56)$$

или, соответственно,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt = m, \quad (1.56a)$$

где, как обычно, предел понимается в смысле среднего квадратичного. При условии (1.55) (т. е. (1.56) или (1.56a)) величину m можно будет определить по одной реализации $x(t)$ сколь угодно точно, если только время наблюдения T будет выбрано достаточно большим; поэтому, желая найти величину m , здесь при любых требованиях к точности можно ограничиться данными, относящимися к одной единственной реализации*.

Задача об определении условий, при которых временные средние характеристик физических систем приближаются при увеличении времени наблюдения к соответствующим «средним по ансамблю» (т. е. фактически к теоретико-вероятностным средним значениям), впервые возникла в статистической механике, где системы, обладающие указанным свойством традиционно называются эргодическими системами. В соответствии с этим и математические теоремы, имеющие своей целью

* Это, конечно, не означает, что данные о нескольких реализациях здесь вообще бесполезны; если такие данные имеются, то, дополнив осреднение по времени для каждой из реализаций осреднением полученных временных средних по имеющимся реализациям, можно значительно увеличить точность получаемой оценки значения m (или, иначе, добиться той же точности при значительно меньшем времени осреднения).

доказательство равенства среднего по времени и теоретико-вероятностного среднего значения для тех или иных классов случайных функций, часто называются эргодическими теоремами*; сами же случайные функции $X(t)$, для которых верны такие теоремы, называются эргодическими случайными функциями.

Простейшая эргодическая теорема касается условий, при которых для стационарной случайной функции $X(t)$ справедливо равенство (1.55). Отметим прежде всего, что равенство это не может иметь места для всех стационарных функций. В самом деле, пусть, например, с вероятностью единица $X(t) = X(0)$ при всех t (так что все реализации $x(t)$ изображаются прямыми, параллельными оси t), но $X(0)$ не является постоянным. Соответствующая функция $X(t)$, очевидно, стационарна, но задание ее реализации эквивалентно заданию лишь одного выборочного значения $x = x(0)$ величины $X(0)$. Поэтому здесь $m_T = x(0)$ при любом T , так что для определения $m = \langle X(t) \rangle = \langle X(0) \rangle$ с приемлемой точностью необходимо иметь много разных реализаций $x(t)$ (т. е. значений $x = x(0)$).

Разумеется, этот пример является довольно искусственным: в прикладных вопросах такая функция $X(t)$ всегда будет рассматриваться просто как случайная величина $X = X(0)$, и никто не станет применять к ней теорию случайных функций. Более содержательным (а также и более общим) является следующий пример: пусть $X(t) = X(t, A)$ — некоторый набор различных стационарных случайных функций, нумеруемых значениями какого-то параметра A (могущего иметь или конечное, или счетное, или даже непрерывное множество значений). Допустим, что значение A выбирается наудачу в соответствии с некоторым распределением вероятностей (так что A само оказывается случайной величиной), а затем осуществляется опыт, порождающий стационарную случайную функцию $X(t, a)$, где a — выбранное значение A .

Нетрудно видеть, что здесь случайная функция $X(t) = X(t, A)$, представляющая собой объединение всех функций $X(t, a)$, также будет стационарной; однако если даже для функций $X(t, a)$ при любом a соотношение вида (1.55) имеет место, то все равно для $X(t)$ оно уже будет неверным. Действительно, в силу (1.56) величина m_T при $T \rightarrow \infty$ будет стремиться к $m(a) = \langle X(t, a) \rangle$; для получения же общего среднего значения $m = \langle X(t) \rangle = \langle X(t, A) \rangle$, величину $m(a)$ надо дополнительно

* Другое распространенное название тех же теорем (заимствованное уже не из физики, а из классической теории вероятностей) — это законы больших чисел для случайных функций (или, в применении к дискретному t , для последовательностей зависимых случайных величин).

осреднить по всем значениям α . Описанная здесь ситуация является наиболее обычным источником появления в практических задачах стационарных, но неэргодических случайных функций: как правило, в приложениях неэргодичность как раз и означает, что рассматриваемая функция получена с помощью искусственного объединения ряда различных эргодических функций. Типичным примером такого рода являются изображенные на рис. 16 пульсации температуры воздуха, по поводу которых на с. 21 уже отмечалось, что их можно, если угодно, считать реализацией случайной функции, описывающей измерения в различных точках земной атмосферы и при всевозможных метеорологических условиях (в частности, при всевозможных значениях средней температуры воздуха). Легко понять, что при таком условии соответствующая функция $X(t)$ определенно не будет эргодической — осреднение ее реализации по времени будет характеризовать лишь среднюю температуру, при которой производилось данное конкретное измерение, но никак не «среднюю температуру всей земной атмосферы при всевозможных погодных условиях», описываемую значением $\langle X(t) \rangle$.

Приведенные рассуждения подсказывают, что общая стационарная случайная функция вполне может оказаться смесью различных эргодических функций, для которой величина m_T характеризует лишь одну из компонент смеси, но не всю смесь в целом (см. примечание ³⁵, где разъясняется, в каком смысле неэргодическая стационарная случайная функция практически всегда представляет собой некоторую смесь эргодических компонент). Если, однако, стационарная функция $X(t)$ не является явной смесью, т. е. искусственным объединением ряда по существу различных функций (т. е. если статистический ансамбль, включающий реализацию $x(t)$, не выбран явно излишне широким), то можно смело исходить из допущения, что эргодичность будет иметь здесь место.

Дело в том, что для справедливости соотношения (1.55) нужно лишь, чтобы имели место некоторые очень общие (и почти всегда выполняющиеся на практике) условия. Действительно, рассмотрим для определенности случай непрерывного времени t и разобьем отрезок $0 \leq t \leq T$ на n равных частей длины $T_1 = T/n$. В таком случае временное среднее M_T формулы (1.53) можно будет представить в виде среднего арифметического n

случайных величин $M_{T_1}^{(i)} = \frac{1}{T_1} \int_{(i-1)T_1}^{iT_1} X(t) dt$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Если, как это чаще всего бывает, $b(\tau) = \langle (X(t + \tau) - m) \times (X(t) - m) \rangle \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, то при достаточно большом $T_1 = T/n$ величины $M_{T_1}^{(i)}$ и $M_{T_1}^{(j)}$ с $|j - i| > 1$ будут почти полностью некоррелированы между собой (так как они включают

только значения $X(t)$, разделенные не меньшим, чем T_1 , интервалом); даже соседние среди величин $M_{T_1}^{(i)}$ здесь будут коррелированы довольно слабо, так как подавляющее большинство значений $X(t)$, входящих в $M_{T_1}^{(i)}$, далеко удалено от всех значений $X(t)$, входящих в $M_{T_1}^{(i+1)}$. Поэтому естественно ожидать, что если $b(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, то к величинам $M_{T_1}^{(i)}$, где $T_1 = T/n$ достаточно велико, будет применим обычный закон больших чисел (справедливый для некоррелированных случайных величин). Но это означает, что в рассматриваемом случае среднее арифметическое n величин $M_{T_1}^{(i)}$ (равное $M_{nT_1} = M_T$) при $n \rightarrow \infty$ (т. е. $T \rightarrow \infty$) должно стремиться к $\langle M_{T_1}^{(i)} \rangle = \langle X(t) \rangle = m$, т. е. должно выполняться соотношение (1.56a). Более того, можно даже ожидать, что закон больших чисел для величин $M_{T_1}^{(i)}$ (а следовательно, и соотношение (1.56a) будет справедливым и при каких-то еще более общих условиях, при которых $b(\tau)$ не обязательно стремиться к нулю при $\tau \rightarrow \infty$, но тем не менее корреляция между величинами $M_{T_1}^{(i)}$ и $M_{T_1}^{(j)}$ с $i \neq j$ при большом T_1 оказывается достаточно слабой.

Ожидания, описанные выше, оказываются вполне справедливыми. Можно показать, что для стационарной случайной функции $X(t)$ соотношения (1.55) и (1.56) (или (1.56a)) обязательно будут иметь место, если только

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{\tau=0}^{T-1} b(\tau) = 0 \quad (1.57)$$

(в случае дискретного времени) или, соответственно,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(\tau) d\tau = 0 \quad (1.57a)$$

(в случае непрерывного времени); если же условия (1.57) или (1.57a) не будут выполняться, то равенство (1.55) будет неверным. Выделенное курсивом утверждение составляет содержание эргодической теоремы Слущкого. Фигурирующие в формулировке этой теоремы условия Слущкого (1.57) и (1.57a), как легко видеть, наверное будут справедливы, если имеет место соотношение $\lim_{\tau \rightarrow \infty} b(\tau) = 0$, которое на практике чаще всего выполняется (см. с. 47), но они могут иметь место даже и тогда, когда $b(\tau)$ не стремится к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ ²⁹.

Для доказательства теоремы Слущкого надо выразить величину $\sigma_{M_T}^2 = \langle (M_T - m)^2 \rangle$ через центрированную корреляционную

функцию $b(\tau)$ процесса $X(t)$. Используя равенство (1.47) или его аналог для случая дискретного времени, легко показать, что

$$\begin{aligned}\sigma_{M_T}^2 &= \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T b(t-s) = \frac{2}{T^2} \sum_{\tau_1=0}^{T-1} \sum_{\tau=0}^{\tau_1} b(\tau) - \frac{1}{T} b(0) = \\ &= \frac{2}{T^2} \sum_{\tau=0}^{T-1} (T-\tau) b(\tau) - \frac{1}{T} b(0)\end{aligned}\quad (1.58)$$

в случае дискретного времени t и, соответственно,

$$\begin{aligned}\sigma_{M_T}^2 &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T b(t-s) dt ds = \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^{\tau_1} b(\tau) d\tau d\tau_1 = \\ &= \frac{2}{T^2} \int_0^T (T-\tau) b(\tau) d\tau\end{aligned}\quad (1.58a)$$

в случае непрерывного времени t . Теперь остается только доказать, что условие (1.57) необходимо и достаточно для стремления правой части (1.58) к нулю при $T \rightarrow \infty$, а условие (1.57a) — для стремления к нулю правой части (1.58a). Это доказательство, по существу, очень простое (см. примечание³⁰).

Из теоремы Слущкого и неравенства Чебышева (1.32) вытекает, что для любых $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ можно подобрать $T_0 = T_0(\varepsilon, \eta)$ такое, что

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X(t) - m \right| < \varepsilon \right\} > 1 - \eta \quad (1.59)$$

или соответственно

$$\mathbf{P} \left\{ \left| \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt - m \right| < \varepsilon \right\} > 1 - \eta \quad (1.59a)$$

при $T > T_0$. Последние соотношения дают основание считать, что при достаточно большом T

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x(t) \approx m \quad (1.60)$$

или, соответственно,

$$\frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \approx m. \quad (1.60a)$$

В случае непрерывного времени t и функции $x(t)$, реализуемой в виде флуктуирующего электрического тока, интеграл в правой

части (1.60a) часто может быть очень просто подсчитан с помощью автоматического интегратора, ток на выходе которого равен интегралу по некоторому (обычно достаточно большому) промежутку времени от тока на входе; можно также воспользоваться численным интегрированием, заменив предварительно правую часть (1.60a) интегральной суммой, т. е. положив

$$\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N x\left(\frac{kT}{N}\right) \approx m, \quad (1.60б)$$

где T и N достаточно велики.

Для оценки точности приближений (1.60) и (1.60a) следует воспользоваться формулами (1.58) и (1.58a), явным образом выражающими средний квадрат ошибки этих приближений через корреляционную функцию $b(\tau)$; аналогичная формула легко может быть получена и для среднего квадрата ошибки приближения (1.60б).³¹

Будем пока, для определенности, считать время t непрерывным. Предположим, что $b(\tau)$ убывает с ростом τ настолько быстро, что не только $\lim_{\tau \rightarrow \infty} b(\tau) = 0$, но и

$$\int_0^{\infty} b(\tau) d\tau = C < \infty \quad (1.61)$$

(в применении к встречающимся на практике процессам $X(t)$ это последнее условие также почти всегда можно считать выполняющимся). Допустим еще, что $C > 0$ и

$$T_1 = \frac{1}{b(0)} \int_0^{\infty} b(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau. \quad (1.62)$$

Величина T_1 , имеющая размерность времени, определяет порядок величины тех промежутков времени τ , в течение которых между $X(t)$ и $X(t+\tau)$ еще сохраняется заметная корреляция; она обычно называется временем корреляции (или радиусом корреляции, или интегральным временным масштабом) случайного процесса $X(t)$. Если время осреднения T не превосходит времени корреляции T_1 в достаточное число раз, то оценка M_T обычно оказывается весьма неточной, и поэтому малополезной. Если же $T \gg T_1$, то для всех τ , при которых значение $b(\tau)$ еще не очень мало, слагаемое $Tb(\tau)$ под знаком интеграла в правой части (1.58a) намного превосходит слагаемое $\tau b(\tau)$; в области значений τ , где τ составляет заметную

часть T , функция $b(\tau)$ оказывается настолько малой, что вкладом этой области в правую часть (1.58a) вообще можно пренебречь.

Учитывая еще, что $\int_0^T b(\tau) d\tau \approx \int_0^\infty b(\tau) d\tau = b(0) T_1$ при $T \gg T_1$, получим для $\sigma_{M_T}^2 = \langle (M_T - m)^2 \rangle$ очень простую оценку*:

$$\sigma_{M_T}^2 \approx \frac{2b(0) T_1}{T} = \frac{\sigma_X^2 \cdot 2T_1}{T}. \quad (1.63)$$

Полученный результат показывает, что σ_{M_T} с ростом T убывает примерно как $T^{-1/2}$; он близок по форме к выражению (1.51) для дисперсии среднего арифметического N независимых наблюдений, но вместо N теперь выступает число $N_1 = T/2T_1$.

Число N_1 можно назвать эффективным числом независимых наблюдений, поскольку сравнение (1.63) с (1.51) показывает, что определение среднего значения m по одной реализации длины T примерно эквивалентно по своей точности определению m по N_1 независимым наблюдениям (так что увеличение времени наблюдения на $2T_1$ эквивалентно добавлению еще одного независимого измерения). В случае дискретного времени t формулы (1.61)—(1.63) принимают вид:

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} b(\tau) < \infty, \quad T_1 = \left[\frac{1}{2} b(0) + \sum_{\tau=1}^{\infty} b(\tau) \right] / b(0) > 0, \\ \sigma_{M_T}^2 \approx 2b(0) T_1 / T,$$

вывод последней из них очень похож на вывод той же формулы в случае непрерывного t . Формула (1.63) показывает, в частности, что, желая оценить значение $\langle X(t) \rangle = m$ с помощью осреднения по времени так, чтобы относительная средняя квадратическая ошибка σ_{M_T}/m не превосходила заданного значения ε , мы должны выбрать интервал осреднения не меньше, чем

$$T_\varepsilon = \frac{\sigma_X^2}{m^2} \frac{2T_1}{\varepsilon^2}. \quad (1.63a)$$

Формулы (1.63) и (1.63a) достаточно просты, однако надо иметь в виду, что их практическое применение часто сильно осложняется отсутствием надежных данных о дисперсии $b(0) = \sigma_X^2$

* Отметим, что T вовсе не должно быть очень уж большим для того, чтобы формула (1.63) имела приличную точность. Например, если $b(\tau) = Ae^{-\alpha|\tau|}$, то уже при $T \geq 4T_1 = 4/\alpha$ оценка значения σ_{M_T} по формуле (1.63) будет приводить к ошибке, не превосходящей 13%; если же $b(\tau) = A \sin \alpha\tau/\tau$, то эта ошибка не будет превосходить 5% при $T \geq 4T_1 = 2\pi/\alpha$ и 2,5% при $T \geq 8T_1 = 4\pi/\alpha$.

и о масштабе времени T_1 . Тем не менее порядок величины типичного уровня флуктуаций $\sigma_x = [b(0)]^{1/2}$ процесса $X(t)$ и отвечающего ему характерного времени T_1 часто можно грубо оценить или по данным наблюдений за реализацией $x(t)$, или исходя из физических соображений, связанных с природой эксперимента порождающего случайную функцию $X(t)$; этого уже достаточно для того, чтобы формулы (1.63) и (1.63а) можно было использовать для оценки порядка величины ошибки оценки M_T при заданном T или же значения T , гарантирующего данную величину ошибки.³²

Формулы (1.63) и (1.63а), разумеется, оказываются неприменимыми, если $T_1 = 0$. В приложениях процессы $X(t)$ с нулевым временем корреляции чаще всего появляются в виде производных $X(t) = Y'(t)$ некоторого стационарного процесса $Y(t)$ с дважды дифференцируемой корреляционной функцией $B_{YY}(\tau)$. В таких случаях, однако, обычно заранее известно, что $\langle X(t) \rangle = \langle Y'(t) \rangle = 0$, так что задача оценки значения $\langle X(t) \rangle$ здесь не представляется важной. Вообще же говоря, если $T_1 = 0$, то, как легко видеть из формул (1.58) и (1.58а), величина σ_{M_T} при возрастании T будет убывать не как $T^{-1/2}$, а быстрее.³³

Заметим еще, что, если $T \gg T_1$, то оценка M_T среднего значения $m = \langle X(t) \rangle$, а также и родственная ей оценка

$$M_{TN} = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N X\left(\frac{kT}{N}\right)$$

при условии, что и N весьма велико, будут при широких условиях иметь очень близкое к нормальному распределение вероятностей. Этот факт сразу вытекает из так называемой центральной предельной теоремы для стационарных случайных процессов; он позволяет легко строить достоверные интервалы для величины m — интервалы вида $[M_T - \Delta, M_T + \Delta]$ (или $[M_{TN} - \Delta, M_{TN} + \Delta]$), внутри которых истинное значение m будет находиться с заранее фиксированной достаточно близкой к единице (например, равной 0,95, 0,99 или 0,995) вероятностью p .³⁴

Соотношение (1.55), очевидно, гарантирует, что при любом достаточно большом T значение m_T величины M_T с очень близкой к единице вероятностью будет близко к m , но, разумеется, из него еще не следует, что разность $|m_T - m|$ обязательно будет малой сразу при всех достаточно больших значениях T (ср. выше с. 51, где аналогичная ситуация рассматривалась в связи с обсуждением вопроса о непрерывности функции $x(t)$). В приложениях значения m_T сразу при всех достаточно больших значениях T обычно не рассматривают, а ограничиваются лишь каким-то одним значением T и, кроме того, всегда принимается, что событие, имеющее очень малую вероятность, допустимо считать практически невозможным; поэтому с точки зрения практики соотношение (1.55) (или даже еще более слабые соотношения (1.59)

и (1.59а) уже достаточны для оправдания использования оценок вида (1.60)—(1.60б). Однако с точки зрения теории вопрос об условиях, гарантирующих, что m_T будет близко к m сразу при всех достаточно больших T (т. е. что числовая функция m_T аргумента T будет стремиться к постоянной m при $T \rightarrow \infty$ в обычном смысле теории пределов), представляется достаточно интересным. Поэтому неудивительно, что этому вопросу посвящено много работ; основным выводом из них является утверждение о том, что хотя теоретически из сходимости величин M_T к m в среднем квадратичном еще не следует, что значения m_T для отдельных реализаций $x(t)$ также будут стремиться к m , в реальных приложениях сходимость временных средних m_T к m с вероятностью единица практически всегда имеет место.³⁵

6.

Оценка значений корреляционной функции по данным наблюдений

До сих пор мы рассматривали лишь простейшую задачу об оценке по данным наблюдений за одной реализацией $x(t)$ среднего значения $m = \langle X(t) \rangle$ функции $X(t)$. Однако в приложениях очень часто кроме m нужны также и какие-то другие статистические характеристики рассматриваемой случайной функции $X(t)$. В этом параграфе основное внимание уделено задаче об оценке значений корреляционной функции $B(\tau)$; начнем мы, однако, с рассмотрения случая, когда представляет интерес среднее значение $m^{(g)} = \langle g(X(t)) \rangle$ некоторой функции g аргумента $X(t)$. Если случайная функция $X(t)$ — стационарная в узком смысле, то стационарной, как мы знаем, будет и функция $Y(t) = g(X(t))$ при всех $g(x)$ (см. выше с. 40). Поэтому, для того чтобы $m^{(g)}$ можно было определить с помощью осреднения по времени значений $g(x(t))$ надо, чтобы корреляционная функция

$$b_g(\tau) = \langle [g(X(t+\tau)) - \langle g(X(t+\tau)) \rangle][g(X(t)) - \langle g(X(t)) \rangle] \rangle$$

удовлетворяла условию Слуцкого (1.57) или (1.57а), причем в этом случае средний квадрат ошибки (т. е. дисперсия) соответствующей оценки будет просто выражаться через $b_g(\tau)$. Корреляционную функцию $b_g(\tau)$ можно приближенно оценить по наблюдаемым значениям $x(t)$, позволяющим определить и значения $y(t) = g(x(t))$ (ср. с. 67—77). Точное же определение функции $b_g(\tau)$ требует знания двумерных распределений вероятностей пар случайных величин $\{X(t), X(t+\tau)\}$; оно лишь в некоторых специальных случаях может быть доведено до получения явной формулы для $b_g(\tau)$. Однако в очень важном частном случае, когда функция $X(t)$ является гауссовской, положение заметно упрощается, так как здесь все конечномерные распределения вероятностей, а значит и функция $b_g(\tau)$ при любом $g(x)$, однозначно определяются одними лишь значениями среднего значения m и корреляционной функции $b(\tau)$ случайной функции $X(t)$. Примем

пока для простоты, что $m = 0$, и рассмотрим вопрос об определении с помощью осреднения по времени среднего квадрата (т. е. дисперсии — при $m = 0$ это одно и то же) $\mu^{(2)} = b(0) = \langle X^2(t) \rangle$ процесса $X(t)$. Нетрудно проверить³⁶, что в случае гауссовской стационарной функции

$$b_{x^2}(\tau) = \langle X^2(t + \tau) X^2(t) \rangle - \langle X^2(t) \rangle^2 = 2b^2(\tau). \quad (1.64)$$

Таким образом, для того, чтобы оценка*

$$b_T^*(0) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X^2(t) \quad \text{или} \quad b_T^*(0) = \frac{1}{T} \int_0^T X^2(t) dt$$

величины $b(0)$ была состоятельной, должно выполняться условие

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{\tau=0}^{T-1} b^2(\tau) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b^2(\tau) d\tau = 0. \quad (1.65)$$

Ясно, что если $b(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, то условие (1.65) обязательно будет выполняться (так же как и условие Слуцкого (1.57)—(1.57а)). Вообще же говоря, условие (1.65) является более ограничительным, чем условие (1.57)—(1.57а): из (1.65) уже вытекает, что выполняется и соотношение (1.57) или, соответственно, (1.57а), но существуют корреляционные функции $b(\tau)$, для которых выполняется условие Слуцкого (1.57) или (1.57а), но тем не менее соответствующее условие (1.55) не имеет места.³⁷

Формула (1.64) показывает, что дисперсия простейшей оценки $b_T^*(0)$ среднего квадрата гауссовской стационарной случайной функции $X(t)$ с $\langle X(t) \rangle = 0$ может быть найдена с помощью простой замены в формулах (1.58) или (1.58а) функции $b(\tau)$ на $2b^2(\tau)$. Несколько более сложно обстоит дело, когда среднее значение m рассматриваемой функции $X(t)$ также неизвестно.** Желая в таком случае оценить значение дисперсии $\sigma_X^2 = b(0) = \langle (X(t) - m)^2 \rangle$, естественно воспользоваться осреднением по времени квадрата значений разности $x(t) - m_T$, т. е., например, в случае непрерывного t использовать эмпирическую оценку

$$b_T^*(0) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[x(t) - \frac{1}{T} \int_0^T x(s) ds \right]^2 dt.$$

* Отметим, что в дальнейшем в настоящем параграфе мы, как это часто делается в книгах по статистике, не будем различать теоретические оценки (зависящие от случайной функции $X(t)$) и соответствующие им выборочные оценки (т. е. выборочные значения теоретических оценок, зависящие от реализации $x(t)$), а будем обозначать те и другие оценки одной и той же буквой.

** Если значение $\langle X(t) \rangle = m$ известно, но не равно нулю, то его можно заранее вычесть из всех наблюдаемых значений $x(t)$; поэтому этот случай фактически не отличается от того, когда известно, что $\langle X(t) \rangle = 0$.

Среднее значение оценки $b_T^*(0)$ (точнее говоря, соответствующей теоретической оценки, где $x(t)$ заменено на $X(t)$) сравнительно просто выражается через центрированную корреляционную функцию $b(\tau) = \langle X(t+\tau)X(t) \rangle - \langle X(t) \rangle^2$ функции $X(t)$; в гауссовском случае через $b(\tau)$ можно выразить и дисперсию оценки $b_T^*(0)$. Однако все формулы оказываются здесь заметно более громоздкими, чем при известном значении m .

В частности, нетрудно проверить, что теперь $\langle b_T^*(0) \rangle \neq b(0)$, так что оценка $b_T^*(0)$, вообще говоря, оказывается смещенной. Поэтому средний квадрат $\Delta^2(0) = \langle [b_T^*(0) - b(0)]^2 \rangle$ ошибки этой оценки не совпадает с ее дисперсией, а равняется сумме дисперсии $\sigma^2(b_T^*(0))$ и квадрата смещения $\delta(b_T^*(0)) = \langle b_T^*(0) \rangle - b(0)$ (в силу формулы (В.9)). Можно показать, однако, что в случае справедливости условий Слуцкого средний квадрат смещения оценки $b_T^*(0)$ при $T \rightarrow \infty$ быстро стремится к нулю, а в выражении для $\Delta^2(0)$ главным оказывается член, совпадающий с выражением для дисперсии оценки $b_T^*(0)$ при известном $m = \langle X(t) \rangle$.³⁸ Отсюда вытекает, что и при неизвестном значении $\langle X(t) \rangle$ условие (1.65) также гарантирует состоятельность оценки $b_T^*(0)$ дисперсии $b(0)$ гауссовской стационарной случайной функции $X(t)$. Далее, в случае, например, гауссовского процесса $X(t)$,

для которого $b(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ и $\int_0^\infty b^2(\tau) d\tau = C_2 < \infty$, и при известном, и при неизвестном значении $\langle X(t) \rangle$ к процессу $X^2(t)$ можно применить формулу (1.63). Поскольку $b_{x^2}(0) = 2b^2(0)$ в силу (1.64), при достаточно больших значениях T средний квадрат относительной ошибки оценки $b_T^*(0)$ величины $b(0)$ здесь будет определяться соотношением

$$\frac{\sigma^2[b_T^*(0)]}{[b(0)]^2} \approx \frac{4T_2}{T}, \quad T_2 = \frac{1}{b^2(0)} \int_0^\infty b^2(\tau) d\tau. \quad (1.66)$$

В обширной литературе по прикладной теории стационарных случайных функций можно найти также ряд статей об оценивании с помощью осреднения по времени моментов высших порядков как гауссовской случайной функции $X(t)$, так и некоторых специальных негауссовских функций.³⁹ Так как, однако, настоящая книга посвящена лишь корреляционной теории, то мы не будем задерживаться на этом вопросе, выходящем за пределы указанной теории, а сразу перейдем к задаче об оценке значений корреляционной функции $B(\tau) = \langle X(t+\tau)X(t) \rangle$ (или родственных ей функций $b(\tau) = B(\tau) - m^2$ и $R(\tau) = b(\tau)/b(0)$) по экспериментальным данным. Для того чтобы значение $B(\tau)$, где τ — фиксированное неотрицательное число, можно было с любой степенью точности определить с помощью осреднения по времени данных,

относящихся к одной реализации $x(t)$, должно выполняться предельное соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T-\tau} \sum_{t=1}^{T-\tau} X(t+\tau) X(t) = B(\tau) \quad (1.67)$$

или соответственно

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} X(t+\tau) X(t) dt = B(\tau). \quad (1.67a)$$

При этом условии в качестве несмещенной и состоятельной оценки $B(\tau)$, где $\tau \geq 0$, в случае дискретного t можно использовать величину

$$B_T^*(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \sum_{t=1}^{T-\tau} x(t+\tau) x(t), \quad (1.68)$$

а в случае непрерывного t — одну из величин:

$$B_T^*(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t+\tau) x(t) dt \quad (1.68a)$$

или

$$B_{TN}^*(\tau) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N x\left(\frac{k(T-\tau)}{N} + \tau\right) x\left(\frac{k(T-\tau)}{N}\right) \quad (1.68b)$$

(при $\tau < 0$ в правых частях (1.68) — (1.68b) надо лишь заменить τ на $|\tau|$).

Условия, нужные для справедливости предельных соотношений (1.67) и (1.67a), могут быть сразу получены из теоремы Случайного, если мы применим ее к новой (зависящей от параметра τ) случайной функции $Y_\tau(t) = X(t+\tau) X(t)$, реализацию которой теперь уже надо считать известной лишь при $t = 1, 2, \dots, T-\tau$ или, соответственно, $0 \leq t \leq T-\tau$ (в предположении, что реализация $X(t)$ известна при $0 \leq t \leq T$). Эта новая функция будет стационарной в широком смысле, если $\langle X(t+\tau) X(t) \rangle$ не зависит от t и, кроме того, не зависит от t (но зависит от τ и s)

$$\langle X(t+s+\tau) X(t+s) X(t+\tau) X(t) \rangle = B^{(4)}(\tau, s). \quad (1.69)$$

В силу теоремы Случайного оценка (1.68a) корреляционной функции $B(\tau)$ будет состоятельной (т. е. будет выполняться соотношение (1.67a)), если только

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \{B^{(4)}(\tau, s) - [B(\tau)]^2\} ds = 0 \quad (1.70)$$

(и только в этом случае); совершенно аналогично обстоит дело и в случае функций $X(t)$ дискретного аргумента t .

Сформулированное здесь утверждение является примером «эргодической теоремы второго порядка», относящейся ко вторым моментам стационарного процесса $X(t)$. В приложениях обычно, исходя из физических соображений, можно быть уверенным, что коэффициент корреляции случайных величин $Y_\tau(t+s) = X(t+s+\tau)X(t+s)$ и $Y_\tau(t) = X(t+\tau)X(t)$ стремится к нулю при $s \rightarrow \infty$; в таком случае, очевидно, и условие (1.70) обязательно будет выполняться. Средний квадрат ошибки, возникающей из-за замены значения $B(\tau)$ его оценкой $B_T^*(\tau)$ или $B_{TN}^*(\tau)$, можно определить так же, как это делалось выше в применении к оценкам среднего значения; однако реальное использование получаемых при этом формул существенно затрудняется тем, что теперь уже квадрат ошибки будет выражаться не через корреляционную функцию $B(\tau)$, а через более сложный четвертый момент $B^{(4)}(\tau, s)$, относительно которого чаще всего нет сколько-нибудь надежных данных.

Так как оценки $B_T^*(\tau)$ и $B_{TN}^*(\tau)$ представляют собой реализации случайных величин того же типа, что и величины M_T и M_{TN} , но только отвечающих уже случайной функции $Y_\tau(t)$, а не $X(t)$, то ясно, что распределение вероятностей значений $B_T^*(\tau)$ и $B_{TN}^*(\tau)$ при достаточно большом T при широких условиях должно быть близким к нормальному распределению вероятностей. По тем же причинам можно кроме того утверждать, что, как правило, значения $B_T^*(\tau)$ будут стремиться при $T \rightarrow \infty$ к истинным значениям $B(\tau)$ не только в среднем квадратичном, но и в обычном смысле теории пределов (ср. выше с. 65). О конкретных условиях, обеспечивающих асимптотическую (при $T \rightarrow \infty$) нормальность распределений величин $B_T^*(\tau)$ и $B_{TN}^*(\tau)$ или стремление их значений к $B(\tau)$ при $T \rightarrow \infty$ для каждой отдельной реализации $x(t)$, см. примечание.⁴⁰

Остановимся снова немного подробнее на важном частном случае гауссовских стационарных функций $X(t)$, часто встречающихся в самых разнообразных приложениях. В этом частном случае моменты четвертого порядка $B^{(4)}(\tau, s)$ (как и все вообще статистические характеристики функции $X(t)$) однозначно определяются одними лишь значениями m и $B(\tau)$ (или $b(\tau)$). А именно, нетрудно показать⁴¹, что в гауссовском случае

$$B^{(4)}(\tau, s) = B^2(s) + B^2(\tau) + B(s+\tau)B(s-\tau) - 2m^4. \quad (1.71)$$

Воспользовавшись формулой (1.71), можно убедиться, что для гауссовских стационарных случайных функций оценки (1.68)—(1.68б) при всех значениях τ будут состоятельными тогда и только

тогда, когда будет выполнено условие (1.65), т. е. когда с помощью ссрелднения по времени можно будет определить значение $B(0)$. Средний квадрат ошибки оценки $B_T^*(\tau)$ (или $B_{TN}^*(\tau)$) значения $B(\tau)$ в гауссовском случае, очевидно, будет выражаться через значения $B(\tau)$ и m ; этими же значениями будет в рассматриваемом случае определяться и ошибки оценок $b_T^*(\tau) = B_T^*(\tau) - m_T^2$ и $R_T^*(\tau) = b_T^*(\tau)/b_T^*(0)$ функций $b(\tau) = B(\tau) - m^2$ и $R(\tau) = b(\tau)/b(0)$.⁴²

Соответствующие формулы для средних квадратов ошибок можно, вообще говоря, использовать на практике, заменив в них неизвестные нам значения корреляционной функции теми самими оценками, точность которых мы хотим оценить; ясно, однако, что точность получаемых при этом результатов будет не слишком высокой.

Отметим еще, что воспользовавшись общей формулой для моментов высших порядков многомерных гауссовских распределений, о которой говорится в примечании³⁶, можно показать, что в применении к гауссовской стационарной функции $X(t)$ условие (1.65) обеспечивает также и сходимость при $T \rightarrow \infty$ среднего по интервалу времени длины T значения общего произведения $x(t)x(t+\tau_1)\dots x(t+\tau_{n-1})$ к соответствующему моменту $\langle X(t)X(t+\tau_1)\dots X(t+\tau_{n-1}) \rangle$ при любых значениях n и $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$. Более того, можно показать, что при том же условии (1.65) для любой функции $\Phi(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ такой, что $\langle \Phi(X(t), X(t+\tau_1), \dots, X(t+\tau_{n-1})) \rangle = m_\Phi(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) < \infty$, среднее по интервалу времени длины T значение функции времени $\Phi(x(t), x(t+\tau_1), \dots, x(t+\tau_{n-1}))$ при $T \rightarrow \infty$ будет стремиться к соответствующему вероятностному среднему значению $m_\Phi(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$. Этот последний факт составляет содержание общей эргодической теоремы для гауссовских стационарных случайных функций.⁴³

Так как все распределения вероятностей гауссовской стационарной случайной функции $X(t)$ с $\langle X(t) \rangle = 0$ определяются значениями $B(\tau) = b(\tau)$, то ясно, что любые статистические характеристики $X(t)$ здесь должны выражаться через функцию $b(\tau)$. Это обстоятельство может быть положено в основу целого ряда специальных методов приближенного определения значений $b(\tau)$ и $R(\tau) = b(\tau)/b(0)$ для таких функций по данным наблюдений. Так, например, легко показать, что в гауссовском случае

$$\langle g(X(t+\tau))X(t) \rangle = cR(\tau), \quad c = \langle g(X(t))X(t) \rangle, \quad (1.72)$$

если $\langle X(t) \rangle = 0$ и $\langle g(X(t))X(t) \rangle < \infty$.⁴⁴ Поэтому для нахождения значений $R(\tau)$ можно использовать, например, осрелднение по времени значений $g(x(t+\tau))x(t)$, позволяющее оценить среднее значение $\langle g(X(t+\tau))X(t) \rangle$. В частном случае, когда $g(x) = \text{sign } x$ (т. е. $g(x) = -1$ при $x < 0$, $g(x) = 0$ при $x = 0$ и $g(x) = 1$ при $x > 0$), $c = \langle |X(t)| \rangle = (2b(0)/\pi)^{1/2}$; следовательно,

$$\langle \text{sign } X(t+\tau) \cdot X(t) \rangle = (2b(0)/\pi)^{1/2} R(\tau). \quad (1.73)$$

Отсюда вытекает, что приближенное определение значений $b^{(r)}(\tau) = \langle \text{sign } X(t + \tau) \cdot X(t) \rangle$ и $b^{(r)}(0) = \langle \text{sign } X(t) \cdot X(t) \rangle$ для гауссовской случайной функции $X(t)$ с $\langle X(t) \rangle = 0$ позволяет приближенно определить также и значения $R(\tau) = b^{(r)}(\tau)/b^{(r)}(0)$ и $b(\tau) = \pi b^{(r)}(0) b^{(r)}(\tau)/2$. В прикладной литературе функция $b^{(r)}(\tau)$ иногда называется релейной корреляционной функцией случайной функции $X(t)$, а методы оценки корреляционных функций $R(\tau)$ и $b(\tau)$, использующие соотношение (1.73), где фигурирующая в левой части функция $b^{(r)}(\tau)$ находится с помощью осреднения по времени значений $\text{sign } x(t + \tau) \cdot x(t)$, называются релейными методами.⁴⁵

Также и значения $\langle g(X(t + \tau)) g(X(t)) \rangle = b_g(\tau)$ для гауссовской стационарной функции $X(t)$ с $\langle X(t) \rangle = 0$ однозначно определяются по значениям $b(\tau)$, причем довольно часто и обратно значения $b(\tau)$ (или хотя бы $R(\tau) = b(\tau)/b(0)$) можно выразить через $b^{(r)}(\tau)$. Так, например, если $g(x) = \text{sign } x$, то, как нетрудно показать⁴⁶,

$$\langle \text{sign } X(t + \tau) \text{sign } X(t) \rangle = 2 \arcsin [R(\tau)]/\pi. \quad (1.74)$$

Следовательно, оценка значений $b^{(p)}(\tau) = b_{\text{sign}}(\tau)$ корреляционной функции вспомогательной случайной функции $Y(t) = \text{sign } X(t)$ может быть использована для приближенного определения значений нормированной корреляционной функции $R(\tau) = \sin [\pi b^{(p)}(\tau)/2]$ исходной случайной функции $X(t)$. Функция $b^{(p)}(\tau)$ в прикладной литературе иногда называется полярной или знаковой корреляционной функцией случайной функции $X(t)$, а методы определения значений $R(\tau)$, опирающиеся на соотношение (1.74) или какую-либо его модификацию, называются полярными или знаковыми методами; им посвящена довольно большая литература.⁴⁷

Вернемся теперь снова к общим стационарным функциям $X(t)$ и простейшим оценкам (1.68), (1.68a) и (1.68б) соответствующей корреляционной функции $B(\tau)$.

Согласно сказанному выше, эти оценки при широких условиях, которые на практике почти всегда можно считать выполняющимися, оказываются состоятельными, т. е. они позволяют сколь угодно точно определить значения $B(\tau)$ по одной реализации $x(t)$, если только интервал T наблюдения за этой реализацией является достаточно продолжительным.

Вычисления по формулам (1.68) или (1.68б), которые еще недавно казались весьма трудоемкими, в настоящее время могут быть очень быстро выполнены с помощью ЭВМ; для нахождения же интегралов (1.68a) было сконструировано большое число различных по своему устройству специальных аналоговых вычислительных машин — корреляторов.⁴⁸ В качестве конкретных примеров на рис. 8 приведены оценки нормированной корреляционной функции $R(\tau) = B(\tau)/B(0)$ изображенных на рис. 1 а замираний отраженного радиолокационного сигнала (здесь для получения оценки использовалась формула (1.68б) при $T = 20$ с и $T/N = 0,016$ с) и изображенного на рис. 2 д ряда Бевериджа (в этом случае применялась формула (1.68)). Мы видим, что эмпирическая нормированная корреляционная функция $B_T^*(\tau)/B_T^*(0)$ в обоих случаях

ведет себя примерно одинаково: она вначале очень быстро убывает, переходит через нуль, а затем начинает совершать плавные колебания небольшой амплитуды около нуля. Но реальны ли эти колебания? Здесь мы сталкиваемся с довольно трудным вопросом, требующим специального исследования.

Выше было показано только, что при любом фиксированном τ оценки (1.68), (1.68а) и (1.68б) сходятся к истинному значению $B(\tau)$ при $T \rightarrow \infty$ (и фиксированном или убывающем T/N). Но в приложениях интерес обычно представляет не одно значение $B(\tau)$, а вся функция $B(\tau)$. Из сходимости оценки $B_T^*(\tau)$ или $B_{TN}^*(\tau)$ к $B(\tau)$ при каждом фиксированном τ вовсе не следует еще, что сходимость будет иметь место одновременно при всех τ , т. е. что функ-

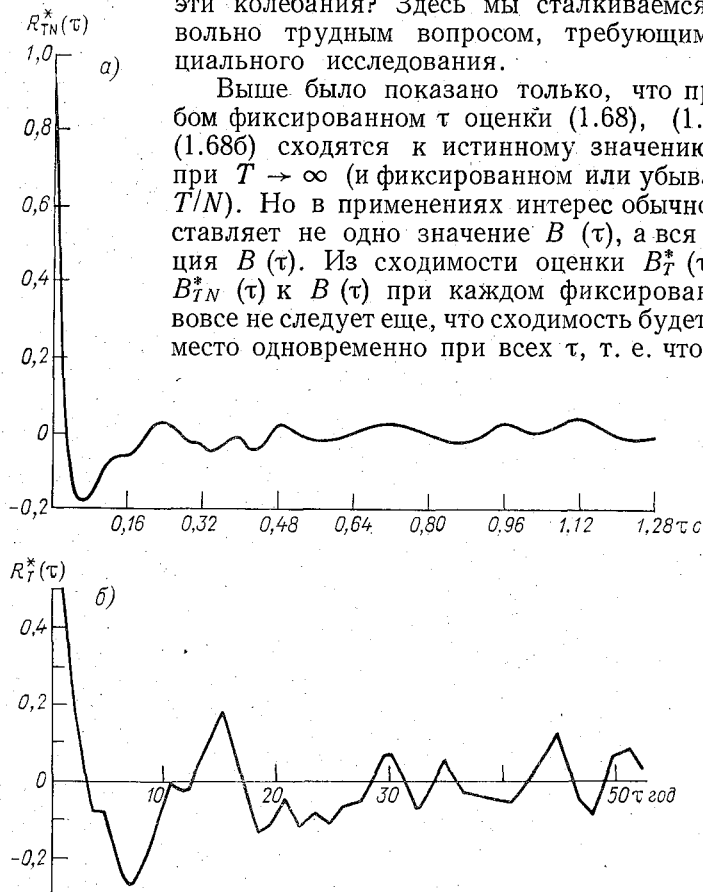


Рис. 8.

Оценки нормированной корреляционной функции

$$R_{TN}^*(\tau) = B_{TN}^*(\tau)/B_{TN}^*(0) \text{ и } R_T^*(\tau) = B_T^*(\tau)/B_T^*(0).$$

а — флуктуаций интенсивности радиолокационного сигнала (по [196]),
б — ряда Бевериджа (по [282]).

ция $B_T^*(\tau)$ (или $B_{TN}^*(\tau)$) будет сходиться к функции $B(\tau)$. Кроме того ясно, что при τ , приближающемся к T , все указанные оценки будут становиться крайне ненадежными, так как здесь реальный интервал осреднения $T - \tau$ оказывается относительно небольшим; поэтому на практике обычно ограничиваются лишь значениями τ , составляющими небольшую долю от T (как правило,

не более, чем 10—20%). Но и в таком случае оценки при сравнительно больших значениях τ , при которых истинное значение $B(\tau)$ весьма мало, чаще всего оказываются не имеющими смысла,

так как их средняя квадратическая ошибка обычно заметно превосходит само оцениваемое значение $B(\tau)$. К тому же значения $B_T^*(\tau)$ (или $B_{TN}^*(\tau)$) при близких τ сравнительно сильно коррелированы друг с другом; поэтому функции $B_T^*(\tau)$ и $B_{TN}^*(\tau)$ плавно меняются с изменением τ , что часто создает ложное впечатление наличия на графике функции $B(\tau)$ ряда довольно правильных волн.

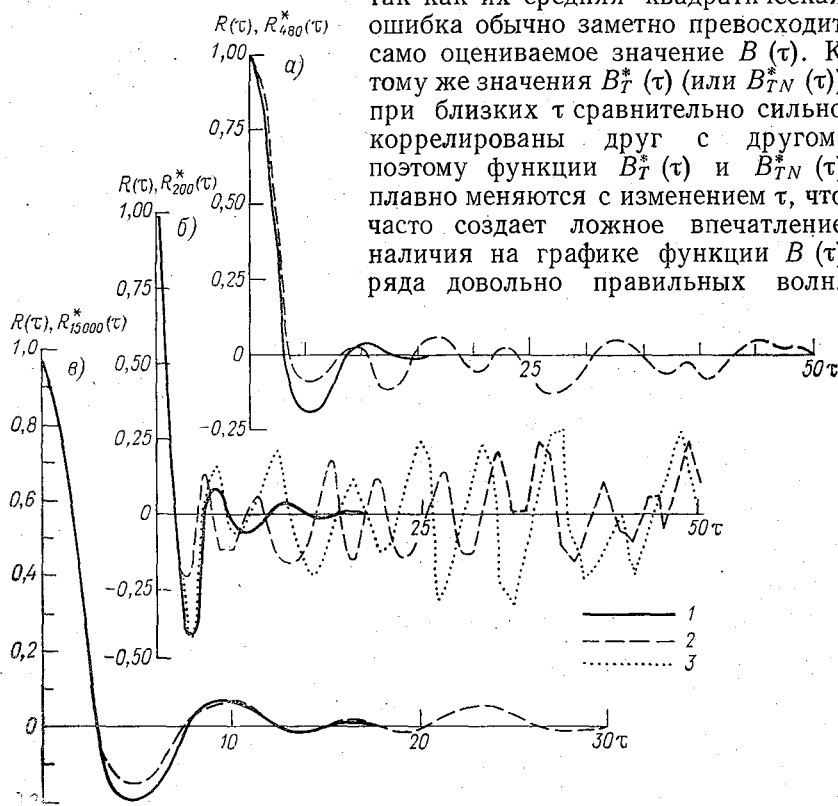


Рис. 9.

Сопоставление теоретической нормированной корреляционной функции $R(\tau)$ с эмпирическими функциями $R_T^*(\tau)$.

а— $R(\tau)$ для искусственного ряда Кендалла (1) (по [282]) и $R_{480}^*(\tau)$, построенная для этого ряда (2) (по [210]);

б— $R(\tau)$ для стационарной последовательности (1) и $R_{200}^*(\tau)$, построенная по двум независимым реализациям этой последовательности (2, 3) (по [336]);

в— $R(\tau)$ для искусственного ряда Кендалла (1) (по [282]) и $R_{15\,000}^*(\tau)$, построенная для этого ряда (2) (по [257]).

В качестве иллюстрации к сказанному на рис. 9 а изображена функция $R_T^*(\tau) = B_T^*(\tau)/B_T^*(0)$, где $T = 480$, подсчитанная для искусственного ряда $x(t)$, $t = 1, 2, \dots, 480$, составленного с помощью специальных «случайных чисел» (имитирующих реализации независимых случайных величин) так, чтобы корреляционную

функцию $R(\tau) = B(\tau)/B(0)$ соответствующей стационарной последовательности $X(t)$ можно было определить теоретически (подробнее об этом см. с. 85—86). Аналогичный пример изображен на рис. 9 б, где представлены сразу две функции $R_T^*(\tau)$, $T = 200$, подсчитанные по двум независимым реализациям $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$, $t = 1, 2, \dots, 200$, вместе с соответствующей «теоретической» функцией $R(\tau)$. Мы видим, что в обоих рассмотренных случаях теоретическая корреляционная функция $R(\tau)$ быстро затухает, в то время как эмпирические корреляционные функции $R_T^*(\tau)$ совершают плавные незатухающие колебания около нуля (причем на рис. 9 б колебания двух функций $R_T^*(\tau)$, подсчитанных по двум реализациям, явно не согласуются друг с другом). Естественно думать, что то же происхождение, что и колебания около нуля эмпирических корреляционных функций на рис. 9 а, б, имеют и беспорядочные колебания около нуля функций $R_{TN}^*(\tau)$ и $R_T^*(\tau)$ на рис. 8 а, б, т. е. что и они также никак не связаны с (неизвестной нам) истинной формой функции $R(\tau)$.

Разумеется, амплитуда фиктивных волн на графиках эмпирических корреляционных функций зависит от размера используемой выборки (т. е. от выбранного интервала осреднения T и, в случае использования формулы (1.68б), периода дискретизации T/N), и может быть заметно уменьшена при помощи увеличения числа используемых значений $x(t)$. Это видно, в частности, и из рис. 9 в, где изображен еще один пример эмпирической нормированной корреляционной функции $R_T^*(\tau)$ той же стационарной последовательности $X(t)$, к которой относился рис. 9 а, но уже построенный с использованием гораздо большего числа значений $x(t)$ — при $T = 15\,000$. Мы видим, что значения $R_{15\,000}^*(\tau)$ гораздо более точно, чем значения $R_{480}^*(\tau)$, воспроизводят ход теоретической корреляционной функции $R(\tau)$; тем не менее и на графике $R_{15\,000}^*(\tau)$ намечаются волны (правда, очень небольшой амплитуды), отсутствующие на графике $R(\tau)$.

В связи с тем, что все оценки значений корреляционной функции оказываются малонадежными при больших значениях τ , возникает даже вопрос о том, нельзя ли улучшить, например, оценки $B_T^*(\tau)$, искусственно занизив их значения при всех не слишком малых τ . Самый простой метод такого занижения состоит во включении в правую часть формул (1.68) и (1.68а) дополнительного множителя $(T - \tau)/T = 1 - \tau/T$, обращающегося в единицу при $\tau = 0$ и линейно убывающего до нуля в точке $\tau = T$, где оценки (1.68) и (1.68а) совсем ненадежны. При этом мы приходим к оценкам

$$B_T^{**}(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-\tau} x(t + \tau) x(t) \quad (1.75)$$

$$\text{или} \quad B_T^{**}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^{T-\tau} x(t+\tau) x(t) dt, \quad (1.75a)$$

оказывающимся уже, в отличие от оценок $B_T^*(\tau)$, смещенными (так как $\langle B_T^{**}(\tau) \rangle = (1 - \tau/T) B(\tau)$, где тем же символом $B_T^{**}(\tau)$ теперь уже обозначена теоретическая оценка, получающаяся при замене в правых частях (1.75) и (1.75a) неслучайной реализации $x(t)$ на случайную функцию $X(t)$). В применении к оценке (1.686) роль $B_T^{**}(\tau)$ играет смещенная оценка

$$B_{TN}^{**}(\tau) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{[(T-\tau)N/T]} x\left(\frac{kT}{N} + \tau\right) x\left(\frac{kT}{N}\right), \quad (1.756)$$

где $[(T - \tau)N/T]$ — наибольшее целое число, не превосходящее числа $(T - \tau)N/T = (1 - \tau/T)N$ (т. е. наибольшее значение k , при котором $\tau + kT/N \leq T$); так как, однако, оценки $B_{TN}^{**}(\tau)$ и $B_T^{**}(\tau)$ обладают близкими свойствами, то мы для простоты будем говорить лишь об оценках $B_T^{**}(\tau)$. Важно, что всегда оценки $B_T^{**}(\tau)$ — асимптотически несмещенные, т. е. при $T \rightarrow \infty$ их смещение $\delta_T(\tau) = \langle B_T^{**}(\tau) \rangle - B(\tau)$ стремится к нулю. Еще важнее то, что оценки $B_T^{**}(\tau)$ практически всегда будут состоятельными (так как при $\tau \ll T$ они почти не отличаются от $B_T^*(\tau)$).⁴⁹ Будем далее характеризовать точность оценок $B_T^{**}(\tau)$ и $B_T^*(\tau)$ их средними квадратами ошибок $\Delta_{1T}^2(\tau) = \langle [B_T^{**}(\tau) - B(\tau)]^2 \rangle$ и $\Delta_T^2(\tau) = \langle [B_T^*(\tau) - B(\tau)]^2 \rangle$.

В таком случае, по-видимому, по крайней мере для всех гауссовских стационарных функций $X(t)$ с $\langle X(t) \rangle = 0$ (для которых и $\Delta_{1T}^2(\tau)$, и $\Delta_T^2(\tau)$ могут быть выражены через $B(\tau) = b(\tau)$) при всех τ будет выполняться неравенство $\Delta_{1T}^2(\tau) \leq \Delta_T^2(\tau)$, т. е. оценка $B_T^{**}(\tau)$ оказывается по меньшей мере не менее точной, чем $B_T^*(\tau)$; во всяком случае, все конкретные примеры, для которых величины $\Delta_{1T}^2(\tau)$ и $\Delta_T^2(\tau)$ рассчитывались, подтверждают это предположение.⁵⁰ Последнее обстоятельство одно уже делает целесообразным использование на практике оценок $B_T^{**}(\tau)$, а не $B_T^*(\tau)$. Но помимо того, оценка $B_T^{**}(\tau)$ имеет и дополнительное важное преимущество перед $B_T^*(\tau)$: можно показать, что функция $B_T^{**}(\tau)$ (доопределенная при отрицательных или больших, чем T , значениях τ с помощью естественных равенств $B_T^{**}(-\tau) = B_T^{**}(\tau)$ и $B_T^{**}(\tau) = 0$ при $|\tau| > T$) всегда будет положительно определенной, т. е. такой, что она может быть корреляционной функцией некоторого $X(t)$, в то время как функция $B_T^*(\tau)$ этим свойством не обладает.⁵¹

Разумеется, из положительной определенности функции $B_T^{**}(\tau)$ еще не следует, что она при всех τ должна быть близка к корреляционной функции именно того $X(t)$, реализацией которого

является входящая в (1.75) или (1.75а) функция $x(t)$. Так, вызывает сомнение то обстоятельство, что функция $B_T^{**}(\tau)$ будет положительно определенной лишь, если формула (1.75) или (1.75а) используется при всех $|\tau| < T$, в то время оценки $B(\tau)$ имеет смысл рассматривать только при значениях τ , составляющих малую долю от T . Ясно также, что фиктивные волны, наблюдавшиеся на графиках функций $R_T^*(\tau)$ (см. рис. 9), будут присутствовать и на графиках функций $R_T^{**}(\tau) = B_T^{**}(\tau)/B_T^{**}(0)$ (хотя, вообще го-

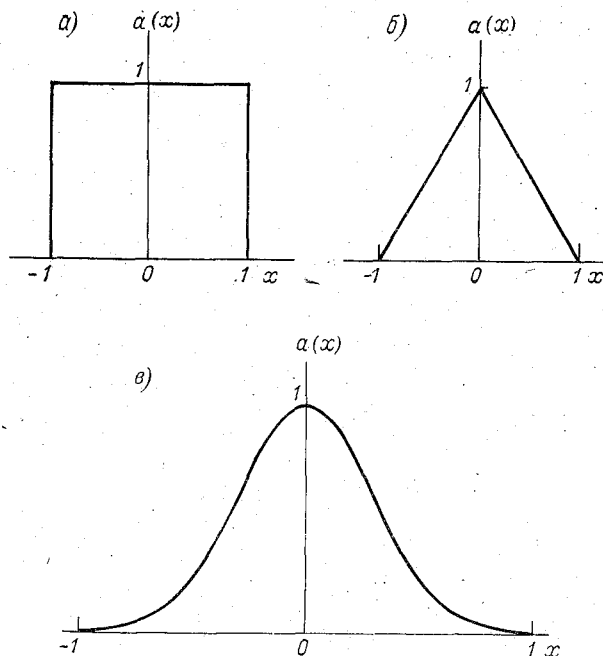


Рис. 10.
Примеры корреляционных окон.

a — прямоугольное окно,
 b — окно Барлетта,
 c — окно Парзена.

воря, эти волны здесь будут поменьше и будут затухать с ростом τ). Поэтому во многих случаях имеет смысл вместо $B_T^{**}(\tau)$ использовать еще более заниженную оценку вида

$$B_T^{(a)}(\tau) = a_T(\tau) B_T^{**}(\tau), \quad (1.76)$$

где $a_T(0) = 1$, но $a_T(\tau)$ убывает с ростом τ и $a_T(\tau) = 0$ при $\tau \geq k_T$, причем k_T/T достаточно мало (скажем, имеет порядок 0,1). Можно, например, положить $a_T(\tau) = a(\tau/k_T)$, где $a(x) = 0$ при $x > 1$.

Если принять, что $a(x) = 1$ при $x \leq 1$ (т. е. $a_T(\tau) = 1$ при $\tau \leq k_T$) и $a(x) = 0$ при $x > 1$ (т. е. $a_T(\tau) = 0$ при $\tau > k_T$), то это значит, что формулы (1.75) используются лишь при $\tau \leq k_T$, а все значения $B_T^{**}(\tau)$ при $\tau > k_T$ здесь просто отбрасываются (заме- няются нулем). Однако, такой выбор $a(\tau)$ (отвечающий рис. 10 а) имеет тот недостаток, что функция $B_T^{(a)}(\tau)$ при этом снова оказы- вается, вообще говоря, не положительно определенной. Если, однако, саму функцию $a_T(\tau)$ выбрать положительно определен- ной, то в силу сказанного на с. 46 произведение $a_T(\tau) B_T^{**}(\tau)$ также будет положительно определенной функцией; например, можно принять, что $a_T(\tau) = a(\tau/k_T)$, где $a(x) = 1 - x$ при $0 \leq x \leq 1$ и $a(x) = 0$ при $x > 1$ (рис. 10 б). Функция $a_T(\tau)$, вхо- дящая в правую часть (1.76) обычно называется корреля- ц и о н н ы м о к н о м; ее включение в формулу для оценки B (τ) часто оказывается полезным. В частности, рассмотренное выше треугольное корреляционное окно $a(\tau/k_T)$, где $a(x) = \min(1 - x, 0)$, в литературе называется окном Бартлетта, а отвечающая ему оценка $B_T^{(a)}(\tau)$ — оценкой Бартлетта. Известны и другие корреляционные окна, например положительно определенное окно Парзена (рис. 10 в), медленнее убывающее в окрестности нуля.⁵² С оценками вида (1.76) мы еще встретимся в § 18, где будет обрисован совсем другой подход к задаче об оценке кор- реляционной функции; при этом выяснится, что в настоящее время наиболее удобными в ряде отношений являются некоторые отлич- ные от перечисленных выше корреляционные окна $a(\tau)$, которые уже не обращаются в тождественный нуль при всех $|\tau| \geq k_T$, а лишь быстро затухают с ростом $|\tau|$ (такое затухание, очевидно, уже достаточно для того, чтобы позволить избавиться от ложных волн на графиках корреляционных функций, о которых говори- лось выше в связи с рис. 9).

7.

Комплексные случайные функции. Пространство случайных величин

Рассматривая во введении примеры случайных функций, мы, в частности, упоминали про случайные гармонические колебания. Из дальнейшего будет видно, что для теории стационарных слу- чайных функций этот пример является основным в том смысле, что любую стационарную функцию $X(t)$ можно представить в виде суперпозиции таких случайных гармонических колебаний, т. е. задать с помощью некоторой модификации обычного интеграла Фурье.

В этой связи представляется полезным сделать следующее замечание. До сих пор мы все время говорили только о веществен-

ных случайных величинах и вещественных случайных функциях. Между тем известно, что гармонические колебания очень удобно описывать комплексными функциями вида $Ae^{i\omega t}$; также и комплексная форма интеграла Фурье в ряде отношений более проста, чем его вещественная форма. Поэтому и в теории стационарных случайных функций часто оказывается удобным рассматривать не вещественные, а более общие комплексные случайные величины вида $X = X_1 + iX_2$, где X_1 и X_2 — две вещественные случайные величины, и соответственно комплексные же случайные функции $X(t) = X_1(t) + iX_2(t)$.

Комплексная случайная функция $X(t) = X_1(t) + iX_2(t)$ задается совокупностью функций распределения (или плотностей вероятности) всевозможных наборов из $2n$ вещественных случайных величин $X_1(t_1), X_1(t_2), \dots, X_1(t_n), X_2(t_1), X_2(t_2), \dots, X_2(t_n)$ для всех целых положительных n и всех значений $t_1, t_2, \dots, t_n$. Функция $X(t)$ называется стационарной, если все указанные распределения вероятностей инвариантны относительно произвольных сдвигов во времени, т. е. не меняются при добавлении ко всем аргументам $t_1, t_2, \dots, t_n$ одного и того же числа t . Ясно, что в этом случае вещественная и мнимая части $X(t)$ — функции $X_1(t)$ и $X_2(t)$ — будут вещественными стационарными случайными функциями.

Среднее значение $\langle X(t) \rangle = \langle X_1(t) + iX_2(t) \rangle$ комплексной стационарной случайной функции, очевидно, будет (комплексной) постоянной $m = m_1 + im_2$. В дальнейшем, мы, как правило, будем предполагать, что $\langle X(t) \rangle = m = 0$ — фактически это нигде не приведет к потере общности. Что же касается вторых моментов функции $X(t)$, то они включают четыре вещественные функции аргумента τ (а именно, $\langle X_1(t+\tau) X_1(t) \rangle$, $\langle X_1(t+\tau) X_2(t) \rangle$, $\langle X_2(t+\tau) X_1(t) \rangle$ и $\langle X_2(t+\tau) X_2(t) \rangle$), из которых важной для нас будет лишь следующая комбинация:

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \langle X(t+\tau) \overline{X(t)} \rangle = \langle (X_1(t+\tau) + \\ &+ iX_2(t+\tau))(X_1(t) - iX_2(t)) \rangle = \langle X_1(t+\tau) X_1(t) \rangle + \\ &+ \langle X_2(t+\tau) X_2(t) \rangle + i[\langle X_2(t+\tau) X_1(t) \rangle - \langle X_1(t+\tau) X_2(t) \rangle]. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Функцию $B(\tau)$ мы будем называть корреляционной функцией комплексной стационарной случайной функции $X(t)$. Соответственно при $\langle X(t) \rangle = m \neq 0$ мы будем называть $b(\tau) = \langle (X(t+\tau) - m) \overline{(X(t) - m)} \rangle = B(\tau) - |m|^2$ центрированной корреляционной функцией случайной функции $X(t)$, а $R(\tau) = b(\tau)/b(0)$ — нормированной корреляционной функцией; при $m = 0$, очевидно, $b(\tau) = B(\tau)$. Ясно, что в частном случае, когда функция $X(t)$ — вещественная (т. е.

$X_2(t) = 0$), приведенные здесь определения совпадают с теми, которыми мы пользовались раньше. Аналогично этому комплексные случайные величины X и Y будем называть некоррелированными, если $\langle (X - \langle X \rangle)(\bar{Y} - \langle \bar{Y} \rangle) \rangle = 0$ (в частности, при $\langle X \rangle = \langle Y \rangle = 0$, если $\langle X\bar{Y} \rangle = 0$), а дисперсией X будем называть величину $\langle |X - \langle X \rangle|^2 \rangle$.

Корреляционная функция $B(\tau)$ — комплексная функция, удовлетворяющая первому и третьему условиям (1.25); что же касается второго из этих условий, то оно в комплексном случае приобретает следующий вид:

$$B(-\tau) = \overline{B(\tau)}. \quad (1.78)$$

Аналогично этому условие (1.26) теперь обращается в следующее утверждение: для любых целого положительного n , целочисленных (в случае стационарных последовательностей) или произвольных вещественных (в случае стационарных процессов) $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ и комплексных $c_1, c_2, \dots, c_n$

$$\sum_{j,k=1}^n B(\tau_j - \tau_k) c_j \bar{c}_k \geq 0. \quad (1.79)$$

Доказательство этих фактов практически не отличается от соответствующих доказательств в вещественном случае (например, левая часть (1.79) равна $\left\langle \left| \sum_{j=1}^n X(\tau_j) c_j \right|^2 \right\rangle \geq 0$). Комплексную функцию $B(\tau)$, удовлетворяющую условию (1.79), мы будем называть положительно определенной функцией аргумента τ (можно показать, что первое и третье неравенства (1.25) и условие (1.78) уже вытекают из (1.79); ср. примечание 3). Следовательно, в комплексном случае корреляционная функция стационарной случайной функции также обязательно оказывается положительно определенной. Вполне аналогично вещественному случаю можно доказать и обратный факт — то, что всякая положительно определенная функция целочисленного или, соответственно, вещественного аргумента τ является корреляционной функцией некоторой стационарной случайной последовательности или, соответственно, случайного процесса.⁵³

В дальнейшем рассматриваемые стационарные случайные функции $X(t)$ всегда будут предполагаться комплексными. В качестве примеров, однако, мы, как правило, будем выбирать вещественные случайные функции, так как именно такие функции особенно интересны для приложений.

Совокупность всевозможных случайных величин, очевидно, представляет собой линейное векторное про-

пространство, т. е. такое множество элементов (иначе, векторов или точек) X , что элементы эти можно складывать друг с другом (т. е. для любых двух элементов X и Y можно определить сумму $X + Y$, также являющуюся элементом нашего пространства, т. е. случайной величиной) и умножать на произвольные числа c (т. е. для любой случайной величины X и числа c можно определить случайную величину cX). Рассматривая комплексные случайные величины X , мы будем иметь дело с комплексным линейным пространством, в котором произведение cX имеет смысл для всех элементов X и всех комплексных чисел c .

Известно, что теория линейных векторных пространств оказывается наиболее наглядной, содержательной и удобной для использования в тех случаях, когда помимо операций сложения и умножения на число для элементов (векторов) X можно определить еще и операцию скалярного умножения, сопоставляющую каждой паре векторов X и Y комплексное число (X, Y) — скалярное произведение X и Y , обладающее обычными свойствами скалярного произведения $(x, y) = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n$ векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ конечномерного комплексного евклидова пространства. А именно, произведение (X, Y) должно быть таким, что $(X, Y) = \overline{(Y, X)}$, $(cX, Y) = c(X, Y)$, $(X_1 + X_2, Y) = (X_1, Y) + (X_2, Y)$ и $(X, X) > 0$, если $X \neq 0$ (т. е. если $0X \neq X$); положительное число $(X, X)^{1/2} = \|X\|$ в таком случае называется нормой X (или длиной вектора X).

Если рассматриваемое векторное пространство H является конечномерным, т. е. среди его элементов можно найти такую конечную группу $(X_1, \dots, X_n)$, что любое X будет уже представимо в виде линейной комбинации $c_1 X_1 + \dots + c_n X_n$, то H будет представлять собой обычное конечномерное евклидово пространство. Оказывается, однако, что и на общий случай векторного пространства H со скалярным произведением (вообще говоря, бесконечномерного), называемого в математике гильбертовым пространством, также просто переносятся многие представления и факты обычной евклидовой геометрии.⁵⁴

Относящиеся к гильбертовым пространствам геометрические рассуждения имеют многие важные приложения к корреляционной теории случайных функций. В самом деле, рассмотрим совокупность H всевозможных комплексных случайных величин X с ограниченным средним квадратом модуля $\langle |X|^2 \rangle$ (т. е. с конечной дисперсией). Это H является линейным векторным пространством: действительно, если $\langle |X|^2 \rangle < \infty$, то и $\langle |cX|^2 \rangle = |c|^2 \langle |X|^2 \rangle < \infty$, и если $\langle |X|^2 \rangle < \infty$ и $\langle |Y|^2 \rangle < \infty$, то, как легко видеть,⁵⁵ $\langle |X + Y|^2 \rangle < \infty$, т. е. cX и $X + Y$ здесь также принадлежат H . Определим теперь в пространстве H

скалярное произведение (X, Y) векторов X и Y и норму $\|X\|$ вектора X с помощью равенств

$$(X, Y) = \langle X\bar{Y} \rangle, \quad \|X\| = \langle |X|^2 \rangle^{1/2}. \quad (1.80)$$

Ясно, что такие скалярное произведение и норма удовлетворяют всем свойствам обычных скалярного произведения и квадрата длины вектора конечномерного евклидова пространства, т. е. H является гильбертовым пространством.

Случайная последовательность $X(t)$ с точки зрения изложенных здесь геометрических представлений — это счетная последовательность элементов (векторов или точек) гильбертова пространства H ; случайный же процесс $X(t)$ — это однопараметрическая совокупность точек H , т. е. иначе говоря, кривая в этом пространстве.⁵⁶ Корреляционная функция $B(t, s) = (X(t), X(s))$ представляет собой скалярное произведение векторов $X(t)$ и $X(s)$, т. е. является основной геометрической характеристикой соответствующей последовательности точек или кривой.

Таким образом, например, корреляционная теория случайных процессов в известном смысле эквивалентна теории кривых гильбертова пространства. В частности, стационарным случайным процессам отвечают кривые $X(t)$ этого пространства, для которых скалярное произведение $(X(t), X(s))$ зависит только от $t - s$. Нетрудно понять, что геометрически последний факт означает, что существует однопараметрическая группа вращений пространства H , переводящая точку $X(0)$ в произвольную точку $X(t)$, а всю кривую — в саму себя (в трехмерном пространстве таким свойством будет обладать только окружность).

Отметим еще в заключение, что при исследовании случайной функции $X(t)$ вовсе необязательно привлекать к рассмотрению все гильбертово пространство H всевозможных случайных величин X с ограниченным средним квадратом $\langle |X|^2 \rangle$. Вполне достаточно ограничиться лишь рассмотрением более узкого гильбертова пространства H_X (являющегося линейным подпространством пространства H), состоящего из всевоз-

можных конечных линейных комбинаций $\sum_{k=1}^m c_k X(t_k)$ и всех пределов в среднем квадратичном последовательностей таких линейных комбинаций. Норма и скалярное произведение в H_X задаются точно так же, как и во всем пространстве H ; преимуществом H_X является, однако, то, что это новое гильбертово пространство уже непосредственно связано именно с функцией $X(t)$ и не содержит никаких «лишних» элементов (ибо H_X — это наименьшее из линейных подпространств H , содержащих все элементы $X(t)$).

ПРИМЕРЫ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Ряд примеров стационарных случайных функций был уже рассмотрен во введении и § 3. Ниже будет приведен ряд дополнительных примеров, охватывающих широкие классы таких функций и естественно приводящих к важному представлению произвольных стационарных случайных функций в виде должным образом модифицированного интеграла Фурье.

8.

Примеры стационарных случайных последовательностей

Пример 1. Самым простым примером стационарной последовательности является последовательность $E(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ независимых (вещественных) случайных величин, имеющих одинаковое распределение вероятностей. Примем, что $\langle E(t) \rangle = 0$, а $\sigma_E^2 = \langle E^2(t) \rangle = 1$. В таком случае корреляционная функция последовательности $E(t)$ будет равна

$$B(\tau) = \langle E(t + \tau) E(t) \rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau = 0, \\ 0 & \text{при } \tau \neq 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

В общем случае элементы $E(t)$ стационарной (в широком смысле) последовательности, имеющей нулевое среднее значение и корреляционную функцию (2.1), могут и не быть ни одинаково распределенными, ни взаимно независимыми; из (2.1) следует лишь, что они имеют одинаковые дисперсии (равные единице) и некоррелированы друг с другом. В дальнейшем такие последовательности мы будем называть последовательностями некоррелированных случайных величин*: если не оговорено обратное, то $E(t)$ при дискретном t всегда будет обозначать одну из них. С точки зрения геометрии гильбертова пространства H (см. § 7) последовательность некор-

* Заметим, что в частном случае гауссовских стационарных последовательностей из некоррелированности автоматически вытекает независимость, а из одинаковости дисперсий (при нулевых средних значениях) — одинаковость распределений вероятностей.

релированных случайных величин, очевидно, представляет собой ортонормированную последовательность векторов (т. е. последовательность взаимно ортогональных векторов единичной длины).

Пример 2. Пусть теперь

$$X(t) = \frac{E(t) + E(t-1) + \dots + E(t-m+1)}{\sqrt{m}}. \quad (2.2)$$

Ясно, что $X(t)$ будет стационарной случайной последовательностью с нулевым средним значением. Легко проверить, что здесь

$$B(\tau) = \langle X(t+\tau) X(t) \rangle = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{m} & \text{при } |\tau| \leq m-1, \\ 0 & \text{при } |\tau| \geq m, \end{cases} \quad (2.3)$$

т. е. с увеличением τ корреляционная функция убывает от единицы до нуля в арифметической прогрессии, а далее остается равной нулю.

Пример 3. Обобщением примера 2 является последовательность

$$X(t) = \sum_{k=0}^n b_k E(t-k), \quad t = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

где b_k — какие-то числа (для простоты мы их будем считать вещественными). Нетрудно видеть, что в этом случае

$$B(\tau) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-|\tau|} b_{k+|\tau|} b_k & \text{при } |\tau| \leq n, \\ 0 & \text{при } |\tau| > n. \end{cases} \quad (2.5)$$

Последовательность $X(t)$ вида (2.4) называется последовательностью скользящих средних порядка n (или, иначе, последовательностью, получаемой с помощью скользящего суммирования порядка n). Можно показать, что каждая стационарная последовательность $X(t)$ такая, что $B(\tau) = 0$ при $|\tau| > n$, но $B(n) \neq 0$, может быть представлена в виде последовательности скользящих средних порядка n .⁵⁷

Пример 4. Пример 3 можно обобщить, приняв $n = \infty$. При этом для того, чтобы бесконечная сумма

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k E(t-k) \quad (2.6)$$

была сходящейся, надо, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^2 < \infty \quad (2.7)$$

(сумма (2.7) тогда будет равна $B(0) = \langle |X(t)|^2 \rangle$). Можно также допустить, что индекс k в (2.4) и (2.6) принимает и отрицательные значения, т. е. положить

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k E(t-k), \quad \text{где} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |b_k|^2 < \infty \quad (2.8)$$

(а числа b_k могут быть даже и комплексными). В таком случае, очевидно,

$$B(\tau) = \langle X(t+\tau) \overline{X(t)} \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{k+\tau} \overline{b_k}. \quad (2.9)$$

Стационарные последовательности вида (2.6) или (2.8) также часто называют последовательностями скользящих средних (бесконечного порядка); в случаях, когда хотят отметить, что речь идет именно о виде (2.6) или, соответственно, (2.8), говорят об односторонних или, соответственно, двусторонних скользящих средних. Ясно, что формулы вида (2.6) или, тем более, (2.8) описывают сравнительно широкий класс стационарных случайных последовательностей.⁵⁸

Пример 5. Предположим, что

$$X(t) = aX(t-1) + cE(t), \quad (2.10)$$

где для простоты мы считаем a и c вещественными, и $|a| < 1$. Согласно (2.10), каждый следующий член последовательности $X(t)$ может быть получен с помощью добавления к умноженному на a последнему ее члену какого-то не зависящего от всего прошлого слагаемого $cE(t)$ фиксированной дисперсии $\sigma^2 = |c|^2$. Иначе говоря, здесь за время от $t-1$ до t функция $X(t)$ частично затухает (ибо $|a| < 1$), но в то же время подвергается еще и «внешнему возмущению», сводящемуся к добавлению случайного «толчка» $cE(t)$. Если задать последовательность $E(t)$ и выбрать произвольным образом значение $X(t_0) = x_0$, то по формуле (2.10) легко определить последовательно все значения $X(t_0+1)$, $X(t_0+2)$, $X(t_0+3)$ и т. д.; легко понять, что при этом вначале значение x_0 еще будет как-то сказываться на значениях $X(t_0+n)$, но по мере удаления от начального момента t_0 его роль будет все более и более ослабевать. Это рассуждение подсказывает, что должна существовать стационарная последовательность $X(t)$, удовлетворяющая уравнению (2.10), причем ее можно получить с помощью предельного перехода, выбрав x_0 каким угодно, но затем положив, что $t_0 \rightarrow -\infty$.

Легко видеть, что решение уравнения (2.10) при начальном условии $X(t_0) = x_{t_0}$ имеет вид

$$\begin{aligned} X(t_0 + n) &= a^n x_{t_0} + c \sum_{k=1}^n a^{n-k} E(t_0 + k) = \\ &= a^n x_{t_0} + c \sum_{j=0}^{n-1} a^j E(t_0 + n - j). \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что стационарным решением этого уравнения будет решение

$$X(t) = c \sum_{j=0}^{\infty} a^j E(t - j), \quad t = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

являющееся частным случаем последовательности односторонних скользящих средних бесконечного порядка.

Стационарная последовательность вида (2.11) называется последовательностью авторегрессии первого порядка. Воспользовавшись формулой (2.9), легко показать, что ее корреляционная функция имеет вид

$$B(\tau) = \langle X(t + \tau) X(t) \rangle = C a^{|\tau|}, \quad C = |c|^2 / (1 - a^2). \quad (2.12)$$

Пример 6. Обобщением примера 5 является последовательность авторегрессии порядка m , определяемая как стационарное решение уравнения в конечных разностях вида

$$X(t) + a_1 X(t-1) + \dots + a_m X(t-m) = cE(t), \quad (2.13)$$

где $a_m \neq 0$. Уравнение (2.13) позволяет по значениям $E(t)$ и заданным m начальным условиям $X(t_0) = x_{t_0}$, $X(t_0 - 1) = x_{t_0-1}$, ..., $X(t_0 - m + 1) = x_{t_0-m+1}$ легко находить все значения $X(t)$ с $t > t_0$. Для того, чтобы такое решение приближалось к стационарности при $t - t_0 \rightarrow \infty$ (в частности, при $t_0 \rightarrow -\infty$) надо, чтобы все корни уравнения

$$1 + a_1 z + \dots + a_m z^m = 0 \quad (2.14)$$

были по модулю больше единицы (т. е. чтобы все корни $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ уравнения $z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m = 0$ были по модулю меньше единицы). В этом случае, как можно показать, уравнение (2.13) будет иметь единственное стационарное решение, являющееся частным случаем последовательности (2.6) односторонних скользящих средних бесконечного порядка, построенной по $E(t)$.⁵⁹

Имея в распоряжении какую-то последовательность «случайных чисел» $e(1), e(2), \dots$ имитирующих реализацию последовательности независимых случайных величин $E(1), E(2), \dots$ с $\langle E(t) \rangle = 0$, $\langle E(t) E(s) \rangle = \delta_{ts}$ и заданным распределением вероятностей (числа $e(1), e(2), \dots$ могут быть, например, заимство-

ваны из какой-то таблицы случайных чисел или же заново подсчитаны на ЭВМ, как это обычно делается при вычислениях по методу Монте-Карло)⁶⁰, легко получить и реализацию $x(t)$, последовательности авторегрессии $X(t)$ с $|\alpha_j| < 1$, $j = 1, \dots, m$. Для этого надо только, выбрав как-то начальные условия $x(0) = x_0$, $x(-1) = x_{-1}$, ..., $x(-m+1) = x_{-m+1}$, определять одно за другим значения $x(t)$ с $t > 0$ по формуле $x(t) = -a_1 x(t-1) - \dots - a_m x(t-m) + ce(t)$, а затем отбросить некоторое число начальных членов полученного ряда $x(t)$, достаточное для практически полного затухания переходного процесса, на протяжении которого еще сказывается специальный выбор начальных условий. В частности, именно такими реализациями последовательностей авторегрессии (второго порядка) являются и те модельные последовательности $x(t)$, $t = 1, 2, \dots, 480$ или же $t = 1, 2, \dots, 15\,000$, и $x^{(1)}(t)$ и $x^{(2)}(t)$, $t = 1, 2, \dots, 200$, о которых шла речь на с. 73–74 в связи с обсуждением рис. 9 (последовательности на рис. 9 а, в, отвечали модели с $a_1 = -1,1$, $a_2 = 0,5$, а на рис. 9 б — модели с $a_1 = -0,7$, $a_2 = 0,49$).

Представление последовательности $X(t)$ в виде (2.6) может быть, в частности, использовано для вычисления корреляционной функции $B(\tau) = \langle X(t+\tau) \bar{X}(t) \rangle$ (другой, более простой, метод определения функции $B(\tau)$ для последовательностей авторегрессии будет рассмотрен в § 17). Например, если $m = 2$ и корни α_1 и α_2 уравнения $z^2 + a_1 z + a_2 = 0$ (оба меньшие единицы по модулю) различны, то можно показать, что

$$B(\tau) = \frac{|c|^2}{(\alpha_1 - \alpha_2)(1 - \alpha_1 \alpha_2)} \left(\frac{\alpha_1^{|\tau|+1}}{1 - \alpha_1^2} - \frac{\alpha_2^{|\tau|+1}}{1 - \alpha_2^2} \right); \quad (2.15)$$

в случае же кратных корней $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ здесь надо перейти к пределу $\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$, после чего получается формула

$$B(\tau) = \frac{|c|^2}{(1 - \alpha^2)^2} (|\tau| + 1) \alpha^{|\tau|}. \quad (2.15a)$$

Если корни α_1 и $\alpha_2 \neq \alpha_1$ вещественные, то правая часть (2.15) является линейной комбинацией двух экспоненциально затухающих функций; если же корни $\alpha_1 = \alpha e^{i\theta}$ и $\alpha_2 = \alpha e^{-i\theta}$ комплексно сопряженные, то формулу (2.15) удобнее переписать в виде

$$B(\tau) = C \alpha^{|\tau|} \cos(\theta |\tau| - \Psi), \quad (2.15б)$$

где

$$C = \frac{|c|^2}{(1 - \alpha^2)(1 - 2\alpha^2 \cos 2\theta + \alpha^4)^{1/2} \sin \theta},$$

$$\Psi = \arctg \frac{(1 - \alpha^2) \operatorname{ctg} \theta}{1 + \alpha^2},$$

так что $B(\tau)$ здесь имеет форму затухающего гармонического колебания.⁶¹ В частности, форму (2.156) имеют и нормированные корреляционные функции $R(\tau) = B(\tau)/B(0)$ на рис. 9 а—в.

Заметим еще, что поскольку $X(t)$ представимо в виде (2.6), то $\langle E(t) \overline{X(t-k)} \rangle = 0$ при $k > 0$. Используя этот результат, мы, после умножения обеих сторон комплексно сопряженного равенства (2.13) на $E(t)$ и последующего осреднения, найдем, что $\langle E(t) \overline{X(t)} \rangle = c \langle |E(t)|^2 \rangle = c$.

Умножим теперь все члены (2.13) на $\overline{X(t-k)}$ и снова осредним то, что получится; при этом мы придем к равенствам

$$B(k) + a_1 B(k-1) + \dots + a_m B(k-m) = 0 \quad (2.16)$$

при $k = 1, 2, \dots$

и

$$B(k) + a_1 B(k-1) + \dots + a_m B(k-m) = |c|^2 \quad \text{при } k = 0. \quad (2.16a)$$

Уравнения (2.16) и (2.16a) часто называются уравнениями Юла — Уокера; нетрудно проверить, что функции (2.12) и (2.15) — (2.156) действительно удовлетворяют уравнениям такого рода.

Пример 7. Обобщением как примера 6, так и примера 3, является стационарная последовательность $X(t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\begin{aligned} X(t) + a_1 X(t-1) + \dots + a_m X(t-m) = \\ = c[E(t) + b_1 E(t-1) + \dots + b_n E(t-n)]; \end{aligned} \quad (2.17)$$

она обычно называется смешанной последовательностью авторегрессии — скользящих средних. Мы будем рассматривать лишь случай, когда все корни уравнения (2.14) по модулю больше единицы; в таком случае последовательность $X(t)$ опять же будет представима в виде суммы (2.6) с коэффициентами специального вида.⁶² Исходя отсюда во многих случаях можно без труда получить и явную формулу для $B(\tau)$; частный случай $m = n = 1$ и вещественных $a_1 = \alpha$ и $b_1 = \beta$, меньших единицы, будет рассмотрен в § 17 (см. формулу (2.259)). Из возможности представления $X(t)$ в виде (2.6) снова следует, что $\langle E(t) \overline{X(t-k)} \rangle = 0$ при $k > 0$; поэтому из (2.17) вытекает, что корреляционная функция $B(\tau)$ в рассматриваемом случае удовлетворяет уравнениям типа Юла — Уокера вида

$$B(k) + a_1 B(k-1) + \dots + a_m B(k-m) = 0, \quad (2.18)$$

$k = n+1, n+2, \dots$

Нетрудно указать много других примеров стационарных случайных последовательностей $X(t)$. В частности, здесь можно воспользоваться и методами, аналогичными используемым ниже в применении к случаю непрерывного t (см., например, начало § 15).

9.

Примеры стационарных случайных процессов

В этом и следующих пяти параграфах мы будем рассматривать только случайные процессы $X(t)$, зависящие от непрерывно меняющегося аргумента t . В случае такого t не существует простого аналога последовательности некоррелированных случайных величин $E(t)$; это обстоятельство сильно усложняет построение примеров стационарных случайных процессов, аналогичных примерам последовательностей, рассматривавшихся в предыдущем параграфе. Поэтому несмотря на то, что на самом деле подобные примеры случайных процессов все же существуют и даже играют большую роль во многих приложениях, мы отложим их рассмотрение вплоть до § 14 и будем строить примеры случайных процессов на основе совсем других соображений. А именно, мы рассмотрим ряд процессов $X(t)$, задаваемых простыми аналитическими формулами, содержащими случайные параметры. Начнем с простейшей такой формулы вида $X(t) = X\Phi(t)$, где X — случайная величина, а $\Phi(t)$ — числовая функция аргумента t .

Пример 1. Пусть

$$X(t) = X\Phi(t), \quad (2.19)$$

где X — случайная величина, а $\Phi(t)$ — комплексная функция вещественного аргумента t , причем $-\infty < t < \infty$. Поскольку $\langle X\Phi(t) \rangle = \Phi(t) \langle X \rangle$, то ясно, что если $\Phi(t) \neq \text{const}$ (т. е. процесс (2.19) не сводится к постоянной случайной величине), то $X(t)$ может быть стационарным процессом лишь, если

$$\langle X \rangle = 0. \quad (2.20)$$

Если же равенство (2.20) имеет место, то для стационарности $X(t)$ надо только, чтобы функция

$$\langle X(t+\tau) \overline{X(t)} \rangle = \Phi(t+\tau) \overline{\Phi(t)} \langle |X|^2 \rangle$$

не зависела от t , т. е. чтобы от значения t не зависело произведение $\Phi(t+\tau) \overline{\Phi(t)}$. Полагая здесь $\tau = 0$, получаем

$$|\Phi(t)|^2 = r^2 = \text{const}, \quad \Phi(t) = re^{i\varphi(t)}, \quad (2.21)$$

где r — вещественное число, $\varphi(t)$ — вещественная функция t .

Подставив найденную формулу для $\Phi(t)$ в выражение $\Phi(t + \tau) \overline{\Phi(t)}$, получим, что разность $\Phi(t + \tau) - \Phi(t)$ не должна зависеть от t . Предположив для простоты, что функция $\Phi(t)$ дифференцируема*, сразу же получаем:

$$\frac{d}{dt} [\Phi(t + \tau) - \Phi(t)] = 0, \quad \text{т. е.} \quad \Phi'(t + \tau) = \Phi'(t).$$

Так как τ здесь может быть любым, то это означает, что $\Phi'(t) = \omega = \text{const}$, т. е.

$$\Phi(t) = \omega t + \theta, \quad \Phi(t) = re^{i(\omega t + \theta)}. \quad (2.22)$$

Постоянный множитель $re^{i\theta}$ теперь можно включить в состав случайной величины X (т. е. обозначить одной буквой X все произведение $Xre^{i\theta}$). Поэтому отличный от постоянной случайный процесс вида (2.19) будет стационарным тогда и только тогда, когда он имеет вид

$$X(t) = Xe^{i\omega t}, \quad (2.23)$$

где X — комплексная случайная величина с нулевым средним значением, а ω — вещественная постоянная.

Случайный процесс (2.23) очевидно описывает гармоническое колебание круговой частоты ω со случайной амплитудой и случайной фазой; вещественная (а также и мнимая) часть каждой его реализации представляет собой косинусоиду вида $x^{(1)}(t) = a \cos(\omega t + \varphi)$, где a и φ меняются от реализации к реализации. Корреляционная функция здесь имеет вид

$$B(\tau) = \langle X(t + \tau) \overline{X(t)} \rangle = \langle |X|^2 \rangle e^{i\omega\tau} = f e^{i\omega\tau}, \quad (2.24)$$

где $f = \langle |X|^2 \rangle > 0$ — среднее значение квадрата амплитуды колебания, пропорциональное его средней энергии (или мощности).** Заметим, что от статистических характеристик фазы φ колебания $X(t)$ корреляционная функция (2.24) вовсе не зависит.

Пример 2. Дальнейшие примеры стационарных случайных процессов можно получить, рассматривая линейные комбинации процессов вида (2.23). Пусть, например,

$$X(t) = X_1 e^{i\omega_1 t} + X_2 e^{i\omega_2 t}, \quad (2.25)$$

* Нетрудно видеть, что в действительности это условие можно сильно ослабить; например, вполне достаточно считать функцию $\Phi(t)$ лишь непрерывной (т. е. рассматривать любые непрерывные процессы вида (2.19)).

** Если $X(t)$ — это скорость некоторого механического колебания, то f пропорционально его средней кинетической энергии; если $X(t)$ есть сила тока или электрическое напряжение, то f пропорционально энергии (точнее говоря мощности) тока и т. д.

где X_1 и X_2 — случайные величины с нулевым средним значением.

Ясно, что здесь $\langle X(t) \rangle = 0$ и

$$\begin{aligned} & \langle X(t+\tau) \overline{X(t)} \rangle = \\ & = \langle (X_1 e^{i\omega_1(t+\tau)} + X_2 e^{i\omega_2(t+\tau)}) (\overline{X_1} e^{-i\omega_1 t} + \overline{X_2} e^{-i\omega_2 t}) \rangle = \\ & = \langle |X_1|^2 \rangle e^{i\omega_1 \tau} + \langle X_1 \overline{X_2} \rangle e^{i(\omega_1 - \omega_2)t + i\omega_1 \tau} + \\ & + \langle \overline{X_1} X_2 \rangle e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t + i\omega_2 \tau} + \langle |X_2|^2 \rangle e^{i\omega_2 \tau}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы процесс (2.25) был стационарным, последнее выражение не должно зависеть от t . В силу линейной независимости функций $e^{i(\omega_1 - \omega_2)t}$, $e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t}$ и 1 при $\omega_2 \neq \omega_1$, это возможно, лишь если

$$\langle X_1 \overline{X_2} \rangle = \langle \overline{X_1} X_2 \rangle = 0. \quad (2.26)$$

Итак, процесс (2.25) будет стационарным в том и только в том случае, когда X_1 и X_2 — некоррелированные комплексные случайные величины с нулевым средним значением. В этом случае $X(t)$ представляет собой суперпозицию двух некоррелированных колебаний частот ω_1 и ω_2 со случайными амплитудами и фазами. Корреляционная функция здесь равна

$$B(\tau) = \langle |X_1|^2 \rangle e^{i\omega_1 \tau} + \langle |X_2|^2 \rangle e^{i\omega_2 \tau} = f_1 e^{i\omega_1 \tau} + f_2 e^{i\omega_2 \tau}, \quad (2.27)$$

где f_1 и f_2 — средние энергии соответствующих колебаний.

Заметим, что процесс (2.25) может быть и вещественным (процесс (2.23) обязательно комплексный). Для этого надо только, чтобы выполнялись соотношения $\omega_2 = -\omega_1 = -\omega$ и $X_2 = \overline{X_1}$ (т. е. $X_1 = (U - iV)/2$, $X_2 = (U + iV)/2$). В таком случае, очевидно,

$$X(t) = U \cos \omega t + V \sin \omega t, \quad (2.28)$$

где U и V — вещественные случайные величины. Равенство (2.26) здесь сводится к равенствам

$$\langle U^2 \rangle = \langle V^2 \rangle = g, \quad \langle UV \rangle = 0 \quad (2.29)$$

(где $g = \langle |X_1|^2 \rangle / 2 = \langle |X_2|^2 \rangle / 2$), а корреляционная функция (2.27) запишется в виде

$$B(\tau) = g \cos \omega \tau. \quad (2.30)$$

Пример 3. Аналогично обстоит дело и в случае суперпозиции n случайных гармонических колебаний:

$$X(t) = \sum_{k=1}^n X_k e^{i\omega_k t}, \quad (2.31)$$

где или $\langle X_1 \rangle = \langle X_2 \rangle = \dots = \langle X_n \rangle = 0$, или $\langle X_2 \rangle = \dots = \langle X_n \rangle = 0$, а $\omega_1 = 0$.

Как и в примере 2, легко показать, что процесс (2.31) будет стационарным, если только

$$\langle X_i \bar{X}_j \rangle = 0 \quad \text{при } i \neq j. \quad (2.32)$$

Корреляционная функция $B(\tau)$ здесь имеет вид

$$B(\tau) = \sum_{k=1}^n \langle |X_k|^2 \rangle e^{i\omega_k \tau} = \sum_{k=1}^n f_k e^{i\omega_k \tau}, \quad (2.33)$$

где $f_k > 0$ при всех k . Коэффициенты f_k очевидно определяют среднюю энергию отдельных гармонических колебаний, входящих в состав процесса (2.31). Положив в (2.33) $\tau = 0$, получим равенство

$$B(0) = \langle |X(t)|^2 \rangle = \sum_{k=1}^n f_k, \quad (2.34)$$

показывающее, что при суперпозиции гармонических колебаний с некоррелированными амплитудами средняя энергия составного движения равна сумме средних энергий отдельных его гармонических компонент.

Будем для определенности считать, что $\omega_k \neq 0$ при всех k (так что $\langle X_k \rangle = 0$ при всех k и $\langle X(t) \rangle = 0$). Тогда для того, чтобы процесс (2.31) был вещественным, число n должно быть четным (равным $2m$), а $2m$ слагаемых суммы (2.31) должны распадаться на m пар комплексно сопряженных слагаемых. В этом случае процесс $X(t)$ можно представить в виде

$$X(t) = \sum_{k=1}^m (U_k \cos \omega_k t + V_k \sin \omega_k t), \quad (2.35)$$

где $\omega_k > 0$ при всех k , U_k и V_k — вещественные случайные величины с $\langle U_k \rangle = \langle V_k \rangle = 0$, и в силу (2.32) должны иметь место равенства $\langle U_k V_j \rangle = 0$ при всех k и j , $\langle U_k U_j \rangle = \langle V_k V_j \rangle = 0$ при $k \neq j$ и $\langle U_k^2 \rangle = \langle V_k^2 \rangle = g_k = f_k/2$ (ср. с равенствами (2.29)). Если частоты ω_k включают и нулевую частоту $\omega_1 = 0$ ($\langle X(t) \rangle$ может в этом случае и отличаться от нуля), то в вещественном случае формула (2.35) все равно будет иметь место, а также будут справедливы и все остальные выписанные выше равенства с той лишь разницей, что теперь $\omega_k \geq 0$, а $\langle U_1 \rangle$ здесь может и отличаться от нуля.

Корреляционная функция (2.33) наряду со слагаемым $f_k e^{i\omega_k \tau}$, где $\omega_k \neq 0$, в вещественном случае обязательно будет включать и комплексно сопряженное слагаемое $f_k e^{-i\omega_k \tau}$ и, следовательно, может быть переписана в виде

$$B(\tau) = \sum_{k=1}^m g_k \cos \omega_k \tau. \quad (2.36)$$

В формуле (2.31) можно положить и $n = \infty$. Тогда для того, чтобы бесконечная сумма в правой части (2.31) представляла собой случайную величину конечной дисперсии, очевидно должно выполняться условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle |X_k|^2 \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} f_k < \infty. \quad (2.37)$$

При условии (2.37) ряд

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{i\omega_k t}, \quad (2.38)$$

где $\langle X_k \rangle = 0$ при всех k и $\langle X_k \bar{X}_j \rangle = 0$ при $k \neq j$, будет сходящимся (в смысле сходимости в среднем квадратичном). Корреляционная функция $B(\tau)$ процесса (2.38) равна

$$B(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{i\omega_k \tau}. \quad (2.39)$$

В вещественном случае формулы (2.38) и (2.39) могут быть, разумеется, переписаны в виде, аналогичном (2.35) и (2.36).

Стационарные случайные процессы вида (2.31) или (2.38) называются процессами с дискретным спектром; спектром процесса в этом случае называется соответствующая совокупность чисел $\omega_1, \omega_2, \dots$ ⁶³. Из формулы (2.39) нетрудно вывести, что в рассматриваемом случае спектр всегда можно однозначно определить по корреляционной функции $B(\tau)$ процесса $X(t)$ — он совпадает с совокупностью тех значений ω , для которых

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T B(\tau) e^{-i\omega \tau} d\tau \neq 0. \quad (2.40)$$

Легко видеть также, что при $\omega = \omega_k$ предел (2.40) равен f_k ; таким образом, корреляционная функция $B(\tau)$ здесь определяет и средние значения f_k квадратов амплитуд X_k отдельных гармонических компонент $X_k e^{i\omega_k t}$ процесса $X(t)$. В частном случае, когда вещественный стационарный процесс $X(t)$ с дискретным спектром является гауссовским, легко показать, что вещественная и мнимая части всех комплексных амплитуд X_k должны иметь одинаковое нормальное распределение вероятностей; при этом вещественные амплитуды $|X_k|$ будут иметь так называемое распределение Рэлея с плотностью вероятности $p(x) = 2xf_k^{-1} \exp(-x^2/f_k)$ при $x > 0$, а все фазы $\varphi_k = \arg X_k$ будут равномерно распределены на окружности $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Поэтому в гауссовском случае корреляционная функция $B(\tau)$ будет однозначно задавать процесс $X(t)$.

В качестве следующего, несколько более сложного примера мы рассмотрим случай формулы для $X(t)$, содержащей уже бесконечное число случайных параметров.

Пример 4. Пусть $X(t)$ — пуассоновский импульсный процесс вида

$$X(t) = \sum_n E_n \Gamma(t - t_n), \quad (2.41)$$

где (как и в формуле (В.26)) $\Gamma(t)$ — фиксированная (неслучайная) функция, которую мы будем считать ограниченной и стремящейся к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$ (причем достаточно быстро, чтобы обеспечить сходимость всех встречающихся ниже интегралов), последовательность $\dots, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}, \dots$ — пуассоновская последовательность случайных точек с параметром λ (так, что среднее число точек t_n на интервале времени длины s равно λs), а $\dots, E_{n-1}, E_n, E_{n+1}, \dots$ — последовательность независимых (и друг от друга, и от всех величин t_n) одинаково распределенных случайных величин со средним значением $\langle E_n \rangle = m_E$ и дисперсией $\langle (E_n - \langle E_n \rangle)^2 \rangle = \sigma_E^2$. Таким образом, случайными параметрами в формуле (2.41) являются величины E_n и t_n .

Начнем с вычисления среднего значения процесса $X(t)$. В силу независимости случайных величин E_n и t_n (а значит, также E_n и $\Gamma(t - t_n)$)

$$\langle X(t) \rangle = \sum_n \langle E_n \rangle \langle \Gamma(t - t_n) \rangle = m_E \left\langle \sum_n \Gamma(t - t_n) \right\rangle.$$

Нам будет удобно ввести в рассмотрение упоминавшийся на с. 27—28 пуассоновский случайный процесс $N(t)$, при $t > 0$ равный числу случайных точек t_k на интервале $[0, t]$, а при $t < 0$ — взятому со знаком минус числу точек t_k на интервале $[t, 0]$ (см. рис. 5). Используя процесс $N(t)$, можно записать соотношение

$$\sum_n \Gamma(t - t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t - s) dN(s), \quad (2.42)$$

где интеграл в правой части — интеграл Стильеса (ср. выше с. 9).

Так как среднее число точек t_k на любом интервале равно длине этого интервала, умноженной на λ , то $\langle N(t_2) - N(t_1) \rangle = \lambda(t_2 - t_1)$ при $t_2 > t_1$ и $\langle dN(s) \rangle = \lambda ds$. Следовательно, в силу (2.42)

$$\left\langle \sum_n \Gamma(t - t_n) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t - s) \langle dN(s) \rangle = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t - s) ds$$

и, значит,

$$m = \langle X(t) \rangle = \lambda m_E \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(u) du. \quad (2.43)$$

Аналогичный, но более сложный подсчет позволяет убедиться, что корреляционная функция $B(\tau) = \langle X(t+\tau) X(t) \rangle$ процесса (2.41) может быть представлена в виде⁶⁴

$$B(\tau) = \lambda (m_E^2 + \sigma_E^2) \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(u+\tau) \Gamma(u) du + \lambda^2 m_E^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(u) du \right]^2, \quad (2.44)$$

так что здесь

$$b(\tau) = B(\tau) - m^2 = \lambda (m_E^2 + \sigma_E^2) \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(u+\tau) \Gamma(u) du, \quad (2.45)$$

$$\sigma_X^2 = b(0) = \lambda (m_E^2 + \sigma_E^2) \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma^2(u) du. \quad (2.46)$$

В случае, когда амплитуда импульсов постоянна, т. е. E_n — постоянные числа, а не случайные величины (и, следовательно, $\sigma_E^2 = 0$), равенства (2.43) и (2.46) составляют содержание так называемой теоремы Кэмпбела (впервые доказанной еще в 1910 г.).⁶⁵

Рассмотрим два частных случая соотношений (2.43) и (2.45). Если все импульсы прямоугольные, случайной высоты E_n , но фиксированной ширины T_0 (см. рис. 7), то, как легко проверить,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(u) du = T_0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(u+\tau) \Gamma(u) du = \begin{cases} T_0 - |\tau| & \text{при } |\tau| \leq T_0, \\ 0 & \text{при } |\tau| > T_0, \end{cases}$$

так что здесь

$$m = \lambda m_E T_0, \quad b(\tau) = \begin{cases} \lambda (m_E^2 + \sigma_E^2) (T_0 - |\tau|) & \text{при } |\tau| \leq T_0, \\ 0 & \text{при } |\tau| > T_0. \end{cases} \quad (2.47)$$

Если же все импульсы являются экспоненциально затухающими (т. е. $\Gamma(u) = e^{-\alpha u}$ при $u \geq 0$, $\Gamma(u) = 0$ при $u < 0$), то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(u) du = \frac{1}{\alpha}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(u+\tau) \Gamma(u) du = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha |\tau|},$$

так что в этом случае

$$m = \lambda m_E / \alpha, \quad b(\tau) = \lambda (m_E^2 + \sigma_E^2) e^{-\alpha |\tau|} / 2\alpha. \quad (2.48)$$

В заключение рассмотрим еще один пример стационарного случайного процесса, задаваемого аналитической формулой, содержащей конечное (и притом небольшое) число случайных параметров, но резко отличающейся от тех формул, которые рассматривались в примерах 1—3.

Пример 5. Пусть

$$X(t) = Y e^{-it\Omega}, \quad (2.49)$$

где Y — случайная величина (вещественная или комплексная — безразлично) такая, что $\langle Y \rangle = 0$, $\langle |Y|^2 \rangle = a^2$, а Ω — произвольная независимая от Y вещественная случайная величина, характеризующаяся своей функцией распределения

$$\mathbf{P}\{\Omega < \omega\} = F_\Omega(\omega). \quad (2.50)$$

В таком случае и Y , и $|Y|^2$ будут случайными величинами, независимыми от величины $e^{it\Omega}$, и поэтому здесь

$$\langle X(t) \rangle = \langle Y \rangle \langle e^{it\Omega} \rangle = 0, \quad \langle X(t+\tau) X(t) \rangle = \langle |Y|^2 \rangle \langle e^{i\tau\Omega} \rangle. \quad (2.51)$$

Мы видим, что случайный процесс $X(t)$ оказывается стационарным в широком смысле, причем его среднее значение равно нулю, а корреляционная функция может быть представлена в виде

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\omega} dF(\omega), \quad F(\omega) = a^2 F_\Omega(\omega) \quad (2.52)$$

(ср. формулу (П.1)).

Так как $F_\Omega(\omega)$ — произвольная функция распределения, а a^2 — произвольное положительное число, то $F(\omega)$ — произвольная монотонно неубывающая функция аргумента ω такая, что $\lim_{\omega \rightarrow -\infty} F(\omega) = 0$ (последнее условие, разумеется, не является ограничением, так как интеграл (2.52) вообще не меняется при добавлении к $F(\omega)$ произвольной постоянной).

Рассмотренный пример показывает, что любая функция, представимая в виде (2.52), где $F(\omega)$ — вещественная монотонно неубывающая функция, может являться корреляционной функцией стационарного случайного процесса. Заметим, что все реализации процесса (2.49) имеют весьма специальный вид комплексных функций вида $x(t) = y e^{i\omega t}$. Впрочем, в случае, когда распределение вероятностей случайной величины Ω является симметричным относительно точки $\omega = 0$ (т. е. $\mathbf{P}\{a_1 \leq \Omega < a_2\} = \mathbf{P}\{-a_2 < \Omega \leq -a_1\}$ при любых a_1 и a_2 , так что, в частности,

$dF_{\Omega}(\omega) = dF_{\Omega}(-\omega)$ формула (2.52) может быть переписана в вещественной форме:

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau dF(\omega) = \int_0^{\infty} \cos \omega \tau dG(\omega), \quad G(\omega) = 2F(\omega), \quad (2.53)$$

а сам пример процесса $X(t)$ может быть модифицирован таким образом, чтобы и все его реализации $x(t)$ оказались вещественными. Для этого надо только вместо (2.49) рассмотреть случайный процесс

$$X_1(t) = \sqrt{2} Y \cos(t\Omega + \Phi), \quad (2.54)$$

где Y , Ω и Φ — три независимые друг от друга вещественные случайные величины (причем величину Y , если угодно, можно заменить просто вещественной постоянной a), $\langle Y^2 \rangle = a^2$, Ω имеет симметричное относительно точки $\omega = 0$ распределение вероятностей с функцией распределения $F_{\Omega}(\omega)$, а Φ принимает значения из интервала $[0, 2\pi]$ и имеет на этом интервале равномерное распределение вероятностей. Легко видеть, что в таком случае $\langle X_1(t) \rangle = 0$ (независимо от распределения вероятностей величины Y), а

$$B(\tau) = \langle X_1(t + \tau) X_1(t) \rangle = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau dF_{\Omega}(\omega), \quad (2.55)$$

что совпадает с (2.53).⁶⁶ Все реализации процесса (2.54) очевидно имеют вид синусоид $x(t) = \sqrt{2} y \cos(\omega t + \varphi)$ со случайной фазой φ и случайной амплитудой $\sqrt{2} y$ (впрочем, если принять, что $Y = a$, то амплитуда всех реализаций будет одинаковой). Таким образом, для любой вещественной функции $B(\tau)$ вида (2.53) можно построить стационарный случайный процесс $X(t)$, имеющий $B(\tau)$ своей корреляционной функцией и такой, что все его реализации представляют собой синусоиды.

Заметим, что если корреляционные функции стационарных случайных функций, рассматривавшихся в предыдущем параграфе и примерах 1—3 настоящего параграфа, представляли собой функции более или менее частного вида, определяемые некоторым дискретным набором параметров, то в случае последних примеров 4 и 5 класс корреляционных функций оказался уже значительно более широким. В самом деле, в случае примера 4 он зависит от вещественной функции $\Gamma(u)$, от которой фактически лишь требуется, чтобы ее квадрат был интегрируемым (т. е. чтобы имела смысл формула (2.46)), а в случае примера 5 — от произвольной монотонно неубывающей функции $F(\omega)$, $-\infty < \omega < \infty$ (или, в вещественном случае, от произвольной монотонно неубывающей функции $G(\omega)$, $0 \leq \omega < \infty$). Ясно, что формулы (2.45), (2.52)

и (2.53) охватывают весьма широкую совокупность частных примеров корреляционных функций, причем нетрудно показать, что все функции (2.45) могут быть представлены также и в виде (2.53), т. е. класс функций вида (2.45) представляет собой лишь некоторую часть класса функций вида (2.53).⁶⁷ Более того, еще в 1934 г. Хинчиным было установлено, что формулы (2.52) и (2.53) вообще исчерпывают весь класс возможных корреляционных функций стационарных случайных процессов — любая функция $b(\tau)$, которая может быть корреляционной функцией какого-либо процесса $X(t)$, обязательно допускает представление в виде (2.52) (а в вещественном случае — в виде (2.53)), где $F(\omega)$ (или $G(\omega)$) — монотонно неубывающая вещественная функция.⁶⁸ Эта теорема Хинчина (иногда называемая теоремой Винера — Хинчина) играет весьма существенную роль в общей теории стационарных случайных процессов, и о ней мы еще поговорим более подробно в § 11. Однако для более четкого понимания физического смысла формул (2.52) и (2.53) удобно предварительно рассмотреть вопрос о представлении в виде интегралов Фурье — Стильтеса самих стационарных процессов $X(t)$, хотя исторически это представление и было установлено после появления результатов Хинчина (и притом — на основе этих результатов).

Подчеркнем лишь в заключение настоящего параграфа, что в силу теоремы Хинчина пример 5 показывает, что для любой функции $B(\tau)$, могущей быть корреляционной функцией, существует процесс $X(t)$, для которого $\langle X(t + \tau) \bar{X}(t) \rangle = B(\tau)$ и такой, что все реализации $x(t)$ процесса $X(t)$ имеют вид комплексных гармоник $ye^{i\omega t}$; если же функция $B(\tau)$ — вещественная, то можно также добиться, чтобы все реализации $x(t)$ представляли собой просто вещественные синусоиды. Из этого замечания вытекает, в частности, что существует и процесс $X(t)$ с корреляционной функцией $B(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$, все реализации которого имеют вид синусоид (см. с. 38).

10.

Спектральное разложение стационарных случайных процессов

Известно, что при изучении непрерывных процессов колебательного характера во многих случаях крайне полезным оказывается гармонический анализ рассматриваемых функций, т. е. их представление в виде ряда или интеграла Фурье. При этом, однако, приходится иметь в виду, что представление в виде ряда Фурье возможно лишь для довольно узкого класса периодических функций (или, если не требовать, чтобы периоды всех членов ряда были кратны одному основному периоду — для несколько более общих, но все же относительно специальных почти-периодических

функций⁶⁹⁾, а представление в виде интеграла Фурье — лишь для функций, достаточно быстро убывающих на бесконечности*.

В приложениях эта трудность часто обходится крайне просто: без всякого обоснования предполагают, что представление в виде интеграла (или ряда) Фурье для исследуемых функций всегда является возможным, и затем применяют обычные формулы, строго доказанные лишь для некоторых специальных классов функций. Замечательно, что несмотря на очевидную математическую нестрогость такого подхода, он с успехом применялся целым рядом выдающихся ученых-физиков и многократно приводил к бесспорно верным результатам. Это обстоятельство явно показывает, что на самом деле гармонический анализ имеет более широкую область применения чем та, которая указывается в стандартных математических руководствах.

В специальной математической литературе можно найти ряд попыток расширения рамок гармонического анализа, позволяющих охватить также и некоторые классы незатухающих (и непериодических) функций, но ни одна из них так и не привела к вполне удовлетворительным результатам. Типичный (и наиболее известный) пример теории такого рода представляет собой так называемый обобщенный гармонический анализ Винера, прямо возникший из стремления автора придать строгий смысл физическому понятию спектра незатухающих беспорядочных колебаний. Винер исследовал класс (неслучайных) функций $x(t)$, $-\infty < t < \infty$, принимающих, вообще говоря, комплексные значения, и таких, что для них при любом τ существует следующий конечный предел:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau) \overline{x(t)} dt = B(\tau); \quad (2.56)$$

основное внимание при этом было уделено подклассу функций $x(t)$, для которых функция $B(\tau)$ не только существует, но и непрерывна.

В применении к таким функциям Винер доказал ряд важных математических теорем; в частности, он показал, что $B(\tau)$ здесь всегда допускает представление в виде (2.52) или (в вещественном случае) (2.53) и что соответствующая функция $F(\omega)$, которую он предложил назвать спектром функции $x(t)$, всегда является неубы-

* Наряду с рядами и интегралами Фурье можно, разумеется, рассмотреть и более общие интегралы Фурье — Стильеса, которые нам уже встречались выше (см., например, формулу (2.52) и будут еще играть большую роль в дальнейшем изложении. Однако в применении к обычным (не случайным) функциям времени представление в виде интеграла Фурье—Стильеса также возможно только в исключительных случаях — практически лишь для функций, представимых в виде суммы функции, затухающей на бесконечности, и периодической или почти-периодической функции.

вающей и обладает многими свойствами, согласующимися с физическими представлениями о спектре колебательного процесса. Однако гармонический анализ самих функций $x(t)$ (т. е. их представление в виде суперпозиции комплексных гармонических колебаний $e^{it\omega}$) имел в теории Винера громоздкий и малопривычный вид, а его связь со спектром $F(\omega)$ оказалась сложной и ненаглядной.⁷⁰

Значительный шаг вперед в направлении обоснования гармонического анализа незатухающих функций был сделан в спектральной теории стационарных случайных процессов, созданной в период 1934—1942 гг. в работах Хинчина, Колмогорова и Крамера. Заметно более простые и законченные результаты здесь удалось получить, перейдя от рассмотрения индивидуальных функций $x(t)$ к рассмотрению сразу множества таких функций с заданным на нем распределением вероятностей, т. е. к рассмотрению случайного процесса $X(t)$. Условие существования предела (2.56) при этом естественно заменилось условием стационарности (в широком смысле) процесса $X(t)$. Заметим еще, что если процесс $X(t)$ к тому же является еще и эргодическим (точнее говоря, таким, что для его моментов второго порядка справедлива эргодическая теорема, формулируемая в терминах сходимости почти наверное — именно такие процессы нам здесь будет удобно называть эргодическими), то реализации $x(t)$ этого процесса с вероятностью единица будут таковы, что для них предел (2.56) будет существовать и будет равен корреляционной функции $\langle X(t + \tau) X(t) \rangle$ процесса $X(t)$.

Таким образом, в применении к частному (но, пожалуй, самому важному — ср. примечание¹⁰) классу функций $x(t)$, обладающих временным средним (2.56), — классу реализаций эргодических стационарных случайных процессов — относящаяся к математическому анализу теорема Винера о представимости функции (2.56) в виде (2.52) или (2.53) оказывается простым следствием общей теоремы Хинчина, относящейся к теории вероятностей (теории стационарных случайных процессов). С другой стороны, выше уже отмечалось, что встречающиеся на практике стационарные случайные процессы почти всегда являются эргодическими в определенном выше смысле; поэтому для них теорема Хинчина вытекает из теоремы Винера (и эргодической теоремы). Именно по последней причине теорему Хинчина о представимости корреляционной функции любого стационарного случайного процесса в виде (2.52) (или (2.53)) иногда также называют теоремой Винера—Хинчина.

Основное преимущество перехода от рассмотрения индивидуальных функций $x(t)$ к рассмотрению стационарных случайных процессов $X(t)$ связано с гораздо большей простотой гармонического анализа таких процессов. Мы уже видели, что в некоторых случаях спектральное представление стационарного случайного процесса $X(t)$ имеет очень простой вид: если $X(t)$ — это процесс

с дискретным спектром, то его можно представить в виде дискретной суммы некоррелированных гармонических колебаний:

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k e^{i\omega_k t}.$$

Разумеется, стационарные случайные процессы с дискретным спектром не исчерпывают еще всех типов стационарных случайных процессов; это следует, например, из того, что корреляционная функция $B(\tau)$ процессов с дискретным спектром никогда не затухает на бесконечности (она является периодической или почти-периодической функцией τ), в то время как корреляционные функции почти всех реально встречающихся стационарных процессов с нулевым средним значением быстро стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Оказывается, однако, что любой стационарный случайный процесс $X(t)$ может быть получен как предел последовательности процессов с дискретным спектром (причем эти последние можно даже все считать суммами лишь конечного числа гармонических компонент, т. е. задавать формулами (2.31)). А именно, можно доказать, что для каждого стационарного случайного процесса $X(t)$, любого (сколь угодно малого) $\varepsilon > 0$ и любого (сколь угодно большого) T можно подобрать такие (вообще говоря, комплексные) попарно некоррелированные случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ (где число n , разумеется, будет зависеть от ε и T) и такие вещественные числа $\omega_1, \dots, \omega_n$, что при любом t из интервала $-T \leq t \leq T$

$$\left\langle \left| X(t) - \sum_{k=1}^n X_k e^{i\omega_k t} \right|^2 \right\rangle < \varepsilon. \quad (2.57)$$

Отсюда, в частности, следует и то, что для каждого стационарного случайного процесса $X(t)$, любых $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ и любого $T > 0$ существуют некоррелированные случайные величины $X_1, X_2, \dots, X_n$ и вещественные числа $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ такие, что при любом t , по модулю не превосходящем T ,

$$\mathbf{P} \left\{ \left| X(t) - \sum_{k=1}^n X_k e^{i\omega_k t} \right| < \varepsilon \right\} > 1 - \eta \quad (2.57a)$$

(ср. переход от (1.31) к (1.34)).

Равенства (2.57) и (2.57a) показывают, что стационарный случайный процесс $X(t)$ всегда можно сколь угодно точно аппроксимировать линейной комбинацией попарно некоррелированных гармонических колебаний со случайными амплитудами и фазами. Они являются следствием общей теоремы о спектральном разложении стационарных случайных процессов — по-видимому, самой важной из всех теорем о таких процессах.

Помимо утверждения о существовании сумм гармонических колебаний, удовлетворяющих соотношениям (2.57) и (2.57a), эта

теорема включает еще и некоторые утверждения о предельном поведении этих сумм при $\varepsilon \rightarrow 0$ (или $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\eta \rightarrow 0$). Дело в том, что для увеличения точности и надежности аппроксимации процесса $X(t)$ суммой гармонических колебаний (т. е. для уменьшения чисел ε и η в формуле (2.57а) или числа ε в формуле (2.57)) и для увеличения продолжительности интервала времени $-T \leq t \leq T$, в течение которого эти формулы остаются справедливыми, надо, вообще говоря, увеличить число n используемых гармонических колебаний и уменьшить все расстояния $\omega_{k+1} - \omega_k$ между соседними их частотами. Поэтому, если мы будем в формуле (2.57) неограниченно уменьшать число ε (или в формуле (2.57а) неограниченно уменьшать ε и η) и одновременно будем неограниченно увеличивать число T , то в общем случае число частот ω_k , лежащих в пределах некоторого фиксированного интервала $\Delta\omega$ оси частот ω , будет неограниченно возрастать.

Оказывается (и в этом и состоит основное содержание теоремы о спектральном разложении стационарных случайных процессов), что при таком предельном переходе сумма некоррелированных случайных величин X_k , отвечающих частотам ω_k из фиксированного интервала $\Delta\omega$, будет стремиться к определенной случайной величине (разумеется, зависящей от $\Delta\omega$), которую мы обозначим символом $Z(\Delta\omega)$. Последнее обстоятельство позволяет представить стационарный процесс $X(t)$ в виде следующего интеграла Фурье — Стильбеса:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} Z(d\omega). \quad (2.58)$$

Несобственный интеграл в правой части (2.58) естественно понимается как предел:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} Z(d\omega) = \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} \int_a^b e^{i\omega t} Z(d\omega), \quad (2.59)$$

где

$$\int_a^b e^{i\omega t} Z(d\omega) = \lim_{\max |\Delta_k \omega| \rightarrow 0} \sum_k e^{i\omega_k t} Z(\Delta_k \omega), \quad (2.60)$$

а суммирование в правой части (2.60) распространяется по всем интервальчикам $\Delta_k \omega$, входящим в разбиение $a = \omega_0 < \omega_1 < \dots < \omega_{n-1} < \omega_n = b$ основного интервала $[a, b]$ на малые части; ω_k в правой части (2.60) — произвольная точка интервала $\Delta_k \omega$, $|\Delta_k \omega|$ — его длина.

Функция $Z(\Delta\omega)$ сопоставляет каждому интервалу $\Delta\omega$ оси ω случайную величину, т. е. она является случайной функцией интервала. Из самого определения этой функции как предела величины $\sum_{\Delta\omega} X_k$ (суммы случайных амплитуд гармонических колебаний с частотами ω_k из $\Delta\omega$) следует, что в случае, когда $\langle X(t) \rangle = 0$, т. е. $\langle X_k \rangle = 0$ при всех k (напомним, что этому случаю мы выше условились уделять основное внимание), она будет обладать следующими свойствами:

- а) $\langle Z(\Delta\omega) \rangle = 0$ для всех $\Delta\omega$,
- б) для непересекающихся интервалов $\Delta_1\omega$ и $\Delta_2\omega$

$$\langle Z(\Delta_1\omega) \overline{Z(\Delta_2\omega)} \rangle = 0,$$

- в) для примыкающих друг к другу интервалов $\Delta_1\omega$ и $\Delta_2\omega$, определяемых неравенствами $\omega_1 < \omega \leq \omega_2$ и соответственно $\omega_2 < \omega \leq \omega_3$,

$$Z(\Delta_1\omega) + Z(\Delta_2\omega) = Z(\Delta_1\omega + \Delta_2\omega),$$

где $\Delta_1\omega + \Delta_2\omega$ — совокупность точек ω таких, что $\omega_1 < \omega \leq \omega_3$.

В случае, когда $\langle X(t) \rangle = m \neq 0$, надо только учесть, что для приближения процесса $X(t)$ суммой гармонических колебаний здесь ко всем суммам вида $\sum X_k e^{i\omega_k t}$, соответствующим процессу $X(t) - m$ с нулевым средним значением, придется еще добавить постоянную m . В этом случае $\langle X_0 \rangle = m \neq 0$, где X_0 — амплитуда, отвечающая нулевой частоте $\omega = 0$, но $\langle X_k \rangle = 0$ при $\omega_k \neq 0$. Следовательно, при $\langle X(t) \rangle = m \neq 0$ условие а) должно быть заменено условием:

- а₁) $\langle Z(\Delta\omega) \rangle = 0$, если $\Delta\omega$ не содержит точки $\omega = 0$;

$\langle Z(\Delta\omega) \rangle = m \neq 0$, если $\Delta\omega$ содержит точку $\omega = 0$.

Однако в этом параграфе [на рассмотрении процессов $X(t)$ с $\langle X(t) \rangle \neq 0$ мы не будем задерживаться, а будем считать, что $\langle X(t) \rangle = 0$.

Вместо случайной функции интервала $Z(\Delta\omega)$ можно также использовать случайную функцию точки $Z(\omega_1) = Z([-\infty, \omega_1])$, где $[-\infty, \omega_1]$ — полупрямая $-\infty < \omega \leq \omega_1$. В таком случае интегральное представление (2.58) можно будет переписать в виде более обычного интеграла Фурье—Стилтьеса

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega), \quad (2.61)$$

понимая под этим тот же предел (2.59)–(2.60), который теперь приобретает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega) =$$

$$= \lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{\max |\omega_k - \omega_{k-1}| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n e^{i\omega'_k t} [Z(\omega_k) - Z(\omega_{k-1})] \right\}, \quad (2.62)$$

где $\omega_0 = a$, $\omega_1, \dots, \omega_{k-1}, \omega_n = b$ и ω'_k имеют тот же смысл, что и выше (ср. с определением интеграла Стильеса для обычных неслучайных функций на с. 9). Условия а) и б) в новых обозначениях принимают вид:

а') $\langle Z(\omega) \rangle = 0$ при всех ω ,

б') $\langle [Z(\omega_1 + \Delta\omega_1) - Z(\omega_1)] [Z(\omega_2 + \Delta\omega_2) - Z(\omega_2)] \rangle = 0$,

если интервалы $[\omega_1, \omega_1 + \Delta\omega_1]$ и $[\omega_2, \omega_2 + \Delta\omega_2]$ не пересекаются между собой.

Случайные функции, удовлетворяющие условию б'), часто называются случайными функциями с некоррелированными приращениями.

В том случае, когда процесс $X(t)$ является вещественным, случайная функция интервала $Z(\Delta\omega)$, очевидно, должна быть такой, что $Z(\Delta^*\omega) = \overline{Z(\Delta\omega)}$, где через $\Delta^*\omega$ обозначен интервал, симметричный интервалу $\Delta\omega$ относительно точки $\omega = 0$. Положив, что $Z(\omega) = [Z_1(\omega) - iZ_2(\omega)]/2$ при $\omega \geq 0$, формулу (2.61) можно в этом случае переписать также в виде, аналогичном (2.35):

$$X(t) = \int_0^{\infty} \cos \omega t dZ_1(\omega) + \int_0^{\infty} \sin \omega t dZ_2(\omega), \quad (2.63)$$

где $Z_1(\omega)$ и $Z_2(\omega)$ — вещественные случайные функции неотрицательного переменного ω такие, что

$$\langle [Z_i(\omega_1 + \Delta\omega_1) - Z_i(\omega_1)] [Z_j(\omega_2 + \Delta\omega_2) - Z_j(\omega_2)] \rangle = 0, \quad (2.64)$$

если $i \neq j$ или же $i = j$, но интервалы $[\omega_1, \omega_1 + \Delta\omega_1]$ и $[\omega_2, \omega_2 + \Delta\omega_2]$ не пересекаются друг с другом, и

$$\langle [Z_1(\omega + \Delta\omega) - Z_1(\omega)]^2 \rangle = \langle [Z_2(\omega + \Delta\omega) - Z_2(\omega)]^2 \rangle. \quad (2.65)$$

Однако на самом деле даже и для вещественных процессов $X(t)$ использование формулы (2.61) обычно проще, чем формулы (2.63); поэтому формула (2.63) ниже не будет употребляться.

Представление стационарного случайного процесса $X(t)$ в виде интеграла (2.61), где функция $Z(\omega)$ обладает свойствами а') и б'), называется спектральным разложением этого про-

цесса; тот же термин применяется и к формам (2.58) и (2.63) представления (2.61). Спектральное разложение как раз и описывает гармонический анализ общего стационарного процесса $X(t)$, т. е. его представление в виде суперпозиции гармонических колебаний. Оно, в частности, показывает, что используемое довольно часто в прикладных исследованиях допущение о представимости рассматриваемых неупорядоченных флуктуаций (шумов) в виде дискретной суммы (2.31) (или (2.38)) некоррелированных гармонических колебаний в стационарном случае не является ограничением; ведь на любом конечном отрезке временной оси каждый процесс $X(t)$ может быть приближен такой суммой со сколь угодно высокой степенью точности.

Надо, однако, иметь в виду, что хотя использование интегралов Фурье—Стилтьеса вида (2.61) малопривычно для тех, кто не является математиком-профессионалом, на самом деле оно ничем не сложнее, чем использование сумм вида (2.31) или (2.38); поэтому привлечение упомянутого выше допущения вряд ли можно считать особенно целесообразным. Что касается также иногда встречающегося в прикладных работах представления стационарных флуктуаций в виде обычного интеграла Фурье, то его приходится считать явно нестрогим: в § 11 будет разъяснено, что во всех реально встречающихся случаях функция $Z(\omega)$ в формуле (2.61) оказывается нигде не дифференцируемой, так что переход здесь от интеграла Фурье—Стилтьеса к обычному интегралу Фурье является невозможным.

Напомним еще, что при обсуждении на с. 53—54 вопроса об интегралах от случайных процессов $X(t)$, понимаемых как пределы в среднем квадратичном последовательности соответствующих интегральных сумм, особо подчеркивалось, что практическая ценность таких интегралов связана в первую очередь с тем, что реализации так определенных интегралов, как правило, совпадают с интегралами от соответствующей реализации $x(t)$ процесса $X(t)$, с которой обычно только и имеет дело исследователь. Ясно, однако, что к интегралу в правой части (2.61) подобное замечание уже не может быть приложено — этот интеграл обязательно надо понимать только как предел (2.62) в среднем квадратичном. В самом деле, реализация процесса $X(t)$, фигурирующего в левой части (2.61), обычно оказывается неслучайной функцией, для которой выполняется винеровское условие существования предела (2.56), а выше мы уже видели, что такие функции никак не могут быть разложены ни в интеграл Фурье, ни в интеграл Фурье—Стилтьеса *. Таким образом, именно возможность вероятностной

* Формально это проявляется также в том, что реализации $z(\omega)$ случайной функции $Z(\omega)$ оказываются крайне нерегулярными функциями «неограниченной вариации», для которых интеграл Фурье—Стилтьеса вида (2.61) просто не существует.

интерпретации интеграла в правой части (2.61) как некоторого предела в среднем квадратичном повлекла за собой возможность получения простого по форме спектрального разложения для любых стационарных случайных процессов. Естественно в таком случае поставить вопрос о практической ценности указанного разложения в обычных ситуациях, когда в распоряжении исследователя имеется лишь одна реализация $x(t)$ процесса $X(t)$.

Ниже будет показано, что на самом деле разложение (2.61) имеет ясный физический смысл, который может быть отнесен и к каждой отдельной реализации $x(t)$; кроме того, как будет разъяснено в § 13, все обычные применения гармонического анализа неслучайных функций переносятся без изменения и на стационарные случайные процессы, если только под разложением на гармонические колебания понимать спектральное разложение (2.61). Именно это последнее обстоятельство в соединении с тем фактом, что встречающиеся на практике беспорядочные незатухающие колебания почти всегда имеют статистическую природу, как раз и объясняет, почему в прошлом так часто формальное применение разложений Фурье к различного рода незатухающим флуктуационным процессам, будучи математически нестрогим, приводило тем не менее к совершенно правильным результатам.

Возможность спектрального разложения произвольного стационарного случайного процесса $X(t)$ была впервые отмечена Колмогоровым в начале 40-х гг. настоящего столетия, в последующие годы этому же вопросу был посвящен целый ряд работ других авторов. В настоящее время в литературе можно найти множество различных доказательств теоремы о спектральном разложении стационарных процессов, почти все из которых имеют свои достоинства⁷¹ (см. также с. 148).

11.

Спектральное разложение корреляционной функции стационарного процесса

Вернемся теперь снова к теореме Хинчина о том, что корреляционная функция $B(\tau)$ любого стационарного случайного процесса $X(t)$ может быть представлена в уже известном нам виде (2.52):

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\omega} dF(\omega),$$

где $F(\omega)$ — монотонно неубывающая функция ω . Ясно, что функция $F(\omega)$ определяется формулой (2.52) лишь с точностью до произвольного постоянного слагаемого, которое можно выбрать так, чтобы выполнялось соотношение $F(-\infty) = 0$.

В вещественном случае, как известно, $B(-\tau) = B(\tau)$ и, значит, $B(\tau) = [B(\tau) + B(-\tau)]/2$; поэтому формулу (2.52) здесь можно переписать в виде

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \tau \omega dF(\omega) = \int_0^{\infty} \cos \omega \tau dG(\omega),$$

где $dG(\omega) = dF(\omega) + dF(-\omega)$ при $\omega > 0$. Из равенства $B(\tau) = B(-\tau)$ нетрудно вывести, что в случае вещественного $X(t)$ приращения функции $F(\omega)$ на интервалах, симметричных относительно точки $\omega = 0$, должны совпадать друг с другом; следовательно, $dG(\omega) = 2dF(\omega)$ при $\omega > 0$ и, если функция $F(\omega)$ непрерывна в точке $\omega = 0$, то $G(\omega) = 2F(\omega) + \text{const}$ (но если $F(\omega)$ претерпевает разрыв в точке $\omega = 0$, то и у $G(\omega)$ в этой точке будет точно такой же, а не в два раза больший, скачок).

В применении к $G(\omega)$ удобно считать, что $G(-0) = 0$ (где $G(-0)$ — значение $G(\omega)$ перед ее возможным скачком в точке $\omega = 0$). Отметим в этой связи, что если $\langle X(t) \rangle = m \neq 0$, то $B(\tau) = b(\tau) + m^2$, где $b(\tau)$ — центрированная корреляционная функция процесса $X(t)$, также допускающая представление в виде (2.52); поэтому при $\langle X(t) \rangle = m$ функция $F(\omega)$ в формуле (2.52) для $B(\tau)$ обязательно будет такой, что $F(+0) - F(-0) \geq |m^2|$ (т. е. $\omega = 0$ будет точкой разрыва $F(\omega)$, которой соответствует скачок, не меньший, чем $|m|^2$). В дальнейшем в этом параграфе, однако, мы, как обычно, всегда будем считать, что $\langle X(t) \rangle = 0$ (т. е. в случаях, когда $\langle X(t) \rangle = m \neq 0$, заранее будем считать, что значение m уже вычтено из всех значений процесса, так что $B(\tau)$ фактически является центрированной корреляционной функцией).

В реальных приложениях, использующих понятие стационарного случайного процесса, при $\langle X(t) \rangle = 0$ корреляционная функция $B(\tau)$, как правило, будет стремиться к нулю при $|\tau| \rightarrow \infty$ (см. (1.29)). Пусть $B(\tau)$ убывает при $|\tau| \rightarrow \infty$ настолько быстро, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |B(\tau)| d\tau < \infty \quad (2.66)$$

(на практике это последнее условие обычно также можно считать выполняющимся). В таком случае функция $B(\tau)$ может быть разложена в интеграл Фурье

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\omega} f(\omega) d\omega, \quad (2.67)$$

где $f(\omega)$ — ограниченная и непрерывная функция ω . Разложение (2.67) возможно также и при ряде других условий, налагаемых на $B(\tau)$; так, например, из теории интегралов Фурье известно, что (2.66) можно заменить менее ограничительным условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} |B(\tau)|^2 d\tau < \infty, \quad (2.68)$$

но только в этом случае $f(\omega)$ уже не будет обязательно непрерывной и ограниченной функцией. Формула (2.67), очевидно, является частным случаем формулы (2.52); она показывает, что при условии (2.66) (или (2.68))

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} f(\omega') d\omega', \quad f(\omega') = F'(\omega'). \quad (2.69)$$

Отсюда видно, что в рассматриваемом случае $F(\omega)$ — дифференцируемая функция.

В случае вещественного процесса $X(t)$, когда функция $B(\tau)$ — четная, функция $f(\omega)$ также будет четной, а разложение в интеграл Фурье (2.67) здесь может быть переписано в виде

$$B(\tau) = \int_0^{\infty} \cos \tau\omega g(\omega) d\omega, \quad g(\omega) = 2f(\omega). \quad (2.70)$$

Ясно, что в этом случае $g(\omega) = G'(\omega)$, а $G(\omega) = \int_0^{\omega} g(\omega') d\omega'$, где $G(\omega)$ — функция, входящая в формулу (2.53).

Представление корреляционной функции $B(\tau)$ в виде интеграла Фурье (2.52) или (2.67) называется спектральным разложением корреляционной функции. Входящая в это разложение функция $F(\omega)$ называется спектральной функцией стационарного случайного процесса $X(t)$;

если же она представима в виде (2.69), то $f(\omega)$ называется спектральной плотностью этого процесса*. В силу (2.53)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dF(\omega) = B(0) = \langle |X(t)|^2 \rangle, \quad (2.71)$$

так что

$$\int_{-\infty}^{\infty} dF(\omega) = F(\infty) - F(-\infty) < \infty, \quad (2.72)$$

поэтому спектральная функция обязательно ограничена. Если существует спектральная плотность $f(\omega)$, то, очевидно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) d\omega = B(0) < \infty; \quad (2.73)$$

таким образом, спектральная плотность всегда интегрируема. Далее, так как $F(\omega)$ — монотонно неубывающая функция, то спектральная плотность $f(\omega) = F'(\omega)$ всюду неотрицательна:

$$f(\omega) \geq 0. \quad (2.74)$$

Обратно, если $f(\omega)$ — неотрицательная функция, то функция $F(\omega)$ формулы (2.69), очевидно, будет монотонно неубывающей, т. е. функция (2.67) будет удовлетворять условиям теоремы Хинчина. Таким образом, в применении к достаточно быстро убывающим функциям $B(\tau)$, представимым в виде интеграла Фурье (в частности, тем, которые удовлетворяют условию (2.66) или (2.68)), теорема Хинчина приобретает особенно простой вид: *здесь для того, чтобы функция $B(\tau)$ могла являться корреляционной*

* Терминология, относящаяся к спектральным разложениям, до сих пор окончательно не установилась. Так, например, термины «спектральная функция» и «спектральная плотность» довольно часто относятся и к функциям $G(g)$ и $g(\omega) = 2f(\omega)$; определенным лишь для неотрицательных частот ω . Кроме того, вместо разложений по функциям $e^{i\omega t}$ или $\cos \omega t$, где ω — круговая частота, измеряемая в радианах в единицу времени (например, в радианах в секунду), нередко используются разложения по функциям $e^{2\pi i n t}$ или $\cos 2\pi n t$, где n — обычная частота, измеряемая в циклах (или оборотах) в единицу времени (например, в циклах в секунду, т. е. в герцах); при этом спектральная плотность должна быть умножена на 2π , т. е. заменена функцией $f_1(n) = 2\pi f(\omega/2\pi)$. Отметим еще, что в прикладной литературе вместо термина «спектральная плотность процесса $X(t)$ » очень широко употребляется и более краткий (но менее точный) термин «спектр процесса $X(t)$ » (но при этом довольно часто слово «спектр» одновременно используется и в прямом его смысле, который будет разъяснен чуть ниже). Термин «спектральное разложение» часто заменяется также на «спектральное представление»; встречается и ряд других различий в терминологии, используемой разными авторами.

функцией стационарного процесса, надо только, чтобы ее преобразование Фурье было всюду неотрицательным.

До сих пор в настоящем параграфе мы еще не объяснили, как доказывается теорема Хинчина; однако об этом говорится в примечании⁶⁸, относящемся к § 9. Как отмечено в этом примечании, доказательство теоремы Хинчина сразу следует из сопоставления друг с другом следующих двух утверждений:

1) класс функций $B(\tau)$, являющихся корреляционными функциями стационарных случайных процессов, совпадает с классом положительно определенных функций вещественного переменного (см. § 4 и 7);

2) для того чтобы непрерывная функция $B(\tau)$ вещественного переменного τ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде (2.52), где $F(\omega)$ — монотонно неубывающая функция ω (это утверждение составляет содержание так называемой теоремы Бохнера—Хинчина; см. по этому поводу примечание⁶⁹).

В предыдущем параграфе подчеркивалось, что теорема Хинчина лежит в основе почти всех доказательств теоремы о спектральном разложении стационарных случайных процессов. Ясно, однако, что если бы мы доказали теорему о спектральном разложении без использования теоремы Хинчина, то отсюда сразу следовала бы и возможность представления $B(\tau)$ в виде (2.52): В самом деле, подставив в формулу $B(\tau) = \langle X(t + \tau) \overline{X(t)} \rangle$ вместо $X(t + \tau)$ и $X(t)$ их спектральное разложение (2.61) и воспользовавшись определением (2.62) соответствующего интеграла Фурье—Стилтьеса и свойством б') приращений $dZ(\omega)$, мы сразу придем к формуле (2.52), где

$$F(\omega + \Delta\omega) - F(\omega) = \langle |Z(\omega + \Delta\omega) - Z(\omega)|^2 \rangle \quad (2.75)$$

(откуда в силу свойства б') приращений $Z(\omega)$ сразу следует, что $F(\omega)$ — неубывающая функция ω). Формулу (2.75) можно также записать в дифференциальной форме:

$$\langle |dZ(\omega)|^2 \rangle = dF(\omega); \quad (2.76)$$

кроме того, последнее равенство можно объединить со свойством б') приращений $Z(\omega)$ в виде одного символического равенства

$$\langle dZ(\omega) \overline{dZ(\omega')} \rangle = \delta(\omega - \omega') dF(\omega) d\omega', \quad (2.77)$$

где $\delta(\omega)$ — это δ -функция Дирака. Легко видеть, что, подставив (2.77) в любой двукратный интеграл, включающий интегрирование по $dZ(\omega)$ и по $\overline{dZ(\omega')}$ под знаком среднего значения, мы придем

к правильному результату; простейшим примером здесь является следующий вывод формулы Хинчина (2.52):

$$\begin{aligned}\langle X(t+\tau) \overline{X(t)} \rangle &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\bar{t}+\tau)\omega} dZ(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega'} d\overline{Z(\omega')} \right\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[(t+\tau)\omega - t\omega']} \langle dZ(\omega) d\overline{Z(\omega')} \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[(t+\tau)\omega - t\omega']} \delta(\omega - \omega') dF(\omega) d\omega' = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\omega} dF(\omega).\end{aligned}$$

В случае существования спектральной плотности $f(\omega)$ равенства (2.76) и (2.77) очевидно, приобретают вид

$$\langle |dZ(\omega)|^2 \rangle = f(\omega) d\omega, \quad (2.78)$$

$$\langle dZ(\omega) d\overline{Z(\omega')} \rangle = \delta(\omega - \omega') f(\omega) d\omega d\omega'. \quad (2.79)$$

Формулы (2.75)—(2.79) устанавливают связь между спектральным разложением корреляционной функции (определяемым функциями $F(\omega)$ и $f(\omega)$) и спектральным разложением самого стационарного случайного процесса $X(t)$, включающим случайную функцию $Z(\omega)$ (или, точнее, случайную функцию интервала $Z(\Delta\omega) = Z(\omega_2) - Z(\omega_1)$, где $\Delta\omega = [\omega_1, \omega_2]$).

Ниже в § 13 будет показано, что такая связь позволяет придать физический смысл математической теореме Хинчина о спектральном разложении корреляционной функции и осуществить ее экспериментальную проверку в случаях, когда стационарный процесс $X(t)$ реализуется в виде колебаний какой-то измеримой физической величины X . Сейчас мы, однако, остановимся лишь на некоторых частных вопросах, имеющих отношение к указанной связи.

Начнем с рассмотрения специального случая, когда функция $F(\omega)$ — это «ступенчатая функция» (иначе, функция скачков), изменяющаяся лишь в дискретных точках разрыва (в каждой из которых она возрастает на некоторую положительную величину), а в промежутках между разрывами принимающая постоянное значение. В этом случае, впервые детально рассмотренном Слуцким в 1938 г. (см. примечание⁶³), формула (2.52) показывает, что функция $B(\tau)$ имеет вид (2.39), а формулы (2.75) и (2.76) означают, что функция интервала $Z(\Delta\omega)$ принимает нулевое значение для всех интервалов, целиком расположенных между точками разрыва $F(\omega)$, так что и случайная функция $Z(\omega)$ формулы (2.61) оказывается «ступенчатой функцией», скачкообразно изменяющейся (на случайную величину $\Delta_k Z = X_k$) в точке k -го разрыва $F(\omega)$,

а в промежутках между этими разрывами принимающей постоянное (случайное) значение. Отсюда видно, что случайный процесс $X(t)$ в данном случае обязательно будет иметь вид суммы случайных гармонических колебаний (2.31) или (2.38), т. е. будет процессом с дискретным спектром в смысле, разъясненном на с. 92.

В общем случае монотонно неубывающая функция $F(\omega)$ может быть разложена в сумму непрерывной функции $F_I(\omega)$ и ступенчатой функции $F_{II}(\omega)$, построенной по скачкам (разрывам) функции $F(\omega)$. Согласно формулам (2.75) и (2.76), каждой точке разрыва функции $F(\omega)$ отвечает точка разрыва случайной функции $Z(\omega)$, в которой эта последняя функция скачкообразно изменяется на случайную величину X_k такую, что $\langle |X_k|^2 \rangle = f_k$, где f_k — прирост функции $F(\omega)$ в соответствующей точке разрыва. В формуле (2.61) скачкам $Z(\omega)$ отвечают дискретные слагаемые вида $X_k e^{i\omega_k t}$ в правой части; аналогичным образом в формуле (2.52) скачкам функции $F(\omega)$ отвечают слагаемые вида $f_k e^{i\omega_k \tau}$ в выражении для $B(\tau)$. Таким образом, представлению $F(\omega)$ в виде суммы $F_I(\omega) + F_{II}(\omega)$ отвечает представление корреляционной функции $B(\tau)$ и самого процесса $X(t)$ в виде

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dF_I(\omega) + \sum_k f_k e^{i\omega_k \tau}, \quad (2.80)$$

и, соответственно,

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ_I(\omega) + \sum_k X_k e^{i\omega_k t}, \quad (2.81)$$

где $F_I(\omega)$ — непрерывная функция ω , а каждому слагаемому суммы в правой части (2.80) соответствует одно слагаемое в правой части (2.81). Ясно, что если сумма в правой части (2.80) содержит хотя бы одно ненулевое слагаемое, то $B(\tau)$ содержит какую-то периодическую компоненту и поэтому не может стремиться к нулю при $|\tau| \rightarrow \infty$. Так как на практике чаще всего можно быть уверенным, что $B(\tau) \rightarrow 0$ при $|\tau| \rightarrow \infty$, то в большинстве практических приложений суммы в правых частях (2.80) и (2.81) будут отсутствовать.

Заметим еще, что в принципе первое слагаемое в правой части (2.80) может также представлять собой функцию, не стремящуюся к нулю на бесконечности; это возможно, однако, лишь в некоторых совершенно исключительных случаях, на практике никогда не встречающихся. Поэтому с точки зрения приложений вполне можно считать, что первое слагаемое в правой части (2.80) всегда

описывает стремящуюся к нулю компоненту $B_I(\tau)$ функции $B(\tau)$, представимую в виде

$$B_I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\omega} f(\omega) d\omega,$$

где

$$f(\omega) = F'_I(\omega) = F'(\omega), \text{ а } F_I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega') d\omega'.$$

Формула (2.80) поясняет двоякую природу спектра общего стационарного процесса $X(t)$. С п е к т р о м процесса $X(t)$ обычно называется множество тех значений ω (частот), которые вносят определенный вклад в интеграл в левой части (2.71); точнее говоря, точка ω называется принадлежащей спектру процесса $X(t)$, если $F(\omega + \varepsilon) - F(\omega - \varepsilon) > 0$ при любом $\varepsilon > 0$, где $F(\omega)$ — спектральная функция $X(t)$. В случае существования непрерывной спектральной плотности $f(\omega)$ точками спектра, очевидно, являются все те значения ω , для которых $f(\omega) > 0$, а также и все изолированные нули $f(\omega)$ (т. е. все точки ω , не имеющие окрестности, в которой $f(\omega)$ тождественно равняется нулю); в случае процессов с дискретным спектром спектр процесса состоит из совокупности всех его частот ω_k (этот последний случай рассматривался на с. 92). В более общем случае, когда $F(\omega)$ складывается из неопределенного интеграла $F_I(\omega)$ от функции $f(\omega) = F'(\omega)$ и ступенчатой функции $F_{II}(\omega)$, спектр состоит из объединения всех точек ω , не имеющих окрестности, в которой $f(\omega)$ тождественно равняется нулю (множество этих точек называется н е п р е р ы в н ы м с п е к т р о м $X(t)$), и всех точек разрыва $F(\omega)$ (составляющих в своей совокупности д и с к р е т н ы й с п е к т р процесса $X(t)$).

Остановимся еще на одном замечании, имеющем отношение к формулам (2.75)—(2.79). Так как встречающиеся на практике корреляционные функции $B(\tau)$ почти всегда удовлетворяют условию затухания на бесконечности и имеют преобразование Фурье, то использование спектральной плотности позволяет в большинстве приложений теории обойтись без интегралов Стильеса до тех пор, пока речь идет лишь о спектральном разложении корреляционных функций*. В предыдущем параграфе мы, однако, подчеркивали, что в тех случаях, когда, кроме разложения корреляционной функции, интерес представляет также и спектральное

* Заметим, что и в более общем случае, когда $F(\omega)$ — это сумма неопределенного интеграла от $f(\omega)$ и ступенчатой функции $F_{II}(\omega)$, функцию $B(\tau)$ можно представить в виде (2.80), где первое слагаемое в правой части сводится к обычному интегралу Фурье, т. е. также обойтись без интегралов Стильеса.

разложение самого стационарного процесса $X(t)$, использование интегралов Стильтьеса оказывается неизбежным: случайная функция $Z(\omega)$ не является дифференцируемой ни в каком разумном смысле и поэтому в формуле (2.61) никак нельзя перейти от интеграла Фурье—Стильтьеса к обычному интегралу Фурье.

Теперь нам легко понять, почему функция $Z(\omega)$ не может быть дифференцируемой: в силу (2.78) во всех наиболее обычных случаях, когда процессу $X(t)$ отвечает положительная спектральная плотность $f(\omega)$, средний квадрат приращения $\Delta Z(\omega)$ функции $Z(\omega)$ на малом отрезке $\Delta\omega$ оси частот будет близок к $f(\omega)\Delta\omega$, т. е. имеет тот же порядок малости, что и $\Delta\omega$; поэтому само $\Delta Z(\omega)$ будет, как правило, иметь порядок $(\Delta\omega)^{1/2}$, что несовместимо с допущением о дифференцируемости функции $Z(\Delta\omega)$ (т. е. о существовании предела отношения $\Delta Z(\omega)/\Delta\omega$ при $\Delta\omega \rightarrow 0$). Приведенное рассуждение относится, вообще говоря, к любой точке ω оси частот; таким образом, мы сталкиваемся здесь с довольно редким случаем, когда в задаче, имеющей реальный физический смысл, возникают нигде не дифференцируемые функции, которые еще совсем недавно многим прикладникам представлялись заумной математической абстракцией, которая не может иметь никаких приложений.⁷²

Согласно формулам (2.52) и (2.67), зная спектральную функцию $F(\omega)$ или спектральную плотность $f(\omega)$ стационарного процесса $X(t)$, нетрудно определить и его корреляционную функцию $B(\tau)$. Обратно, по корреляционной функции $B(\tau)$ процесса $X(t)$ можно вычислить и его спектральную функцию $F(\omega)$ или спектральную плотность $f(\omega)$. Особенно просто обстоит дело в случае, когда выполняется условие (2.66), и поэтому существует непрерывная спектральная плотность $f(\omega)$; согласно (2.67), $B(\tau)$ здесь является преобразованием Фурье функции $f(\omega)$, и значит, плотность $f(\omega)$ может быть определена с помощью обычной формулы обращения интегралов Фурье:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} B(\tau) d\tau. \quad (2.82)$$

Воспользовавшись теперь формулой (2.69), нетрудно найти и функцию $F(\omega)$; в частности, разность $F(\omega_2) - F(\omega_1)$, где $\omega_2 >$

$> \omega_1$, очевидно равна $\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(\omega) d\omega$, т. е. в силу (2.82)

$$F(\omega_2) - F(\omega_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega_2\tau} - e^{-i\omega_1\tau}}{-i\tau} B(\tau) d\tau. \quad (2.83)$$

В общем случае, когда спектральная функция $F(\omega)$ не представима в виде неопределенного интеграла (2.69), т. е. спектраль-

ная плотность не существует, формула (2.82) будет неприменимой; оказывается, однако, что формула (2.83) справедлива и в общем

случае, если только интеграл от $-\infty$ до ∞ понимать как $\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T$, а значения $F(\omega_2)$ и $F(\omega_1)$ в случаях, когда речь идет о точке разрыва спектральной функции, заменить полусуммой соответствующих значений до скачка и после скачка. Этот факт на самом деле сразу вытекает из известной в теории вероятностей формулы обращения характеристических функций (см. формулу (П. 4)) и того обстоятельства, что класс характеристических функций распределений вероятностей в силу теоремы Хинчина совпадает с классом нормированных корреляционных функций $R(\tau) = B(\tau)/B(0)$; впрочем, в дальнейшем общая формула (2.83) нам нигде не понадобится.

В вещественном случае, когда применима формула (2.70), родственная (2.82) формула для $g(\omega) = 2f(\omega)$ очевидно будет иметь вид

$$g(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega \tau B(\tau) d\tau, \quad (2.84)$$

а формула для соответствующей монотонно неубывающей функции $G(\omega)$ может быть записана в виде

$$G(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega \tau}{\tau} B(\tau) d\tau. \quad (2.85)$$

Ниже, однако, даже и в случае вещественных случайных процессов мы обычно будем использовать комплексную форму спектрального разложения (2.52) или (2.67), т. е. во всех случаях будем употреблять функции $F(\omega)$ и $f(\omega)$, а не $G(\omega)$ и $g(\omega)$.

Так как задание корреляционной функции $B(\tau)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ равносильно заданию его спектральной функции $F(\omega)$ или (при условии справедливости условия (2.66)) спектральной плотности $f(\omega)$, то ясно, что любая величина, выражающаяся через функцию $B(\tau)$, может быть выражена также и через $F(\omega)$ или (при условии (2.66)) $f(\omega)$. Так, например, время корреляции T_1 формулы (1.62) вещественного стационарного процесса $X(t)$ в силу формулы (2.82) может быть представлено в виде

$$T_1 = \frac{\pi f(0)}{b(0)} = \frac{\pi f(0)}{2 \int_0^{\infty} f(\omega) d\omega}, \quad (2.86)$$

где $f(\omega)$ — спектральная плотность процесса $\overset{0}{X}(t) = X(t) - \langle X(t) \rangle$ (т. е. преобразование Фурье функции $b(\tau)$)*. Менее проста задача о спектральном

истолковании величины $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(\tau) d\tau$, входящей в эргодическую теорему Слущкого; ясно, однако, что она должна как-то выражаться через $F(\omega)$. И действительно, выполнив несложные преобразования⁷³, нетрудно показать, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b(\tau) d\tau = \Delta F(0), \quad (2.87)$$

где $\Delta F(0) = F(+0) - F(-0)$ — скачок спектральной функции $F(\omega)$ (центрированного процесса $X(t) - \langle X(t) \rangle$) в точке $\omega = 0$. Таким образом, теорема Слущкого, как оказывается, имеет крайне простую спектральную формулировку:

для того чтобы величина $M_T = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt$ при $T \rightarrow \infty$ стремилась к среднему

значению $m = \langle X(t) \rangle$, необходимо и достаточно чтобы спектральная функция $F(\omega)$ была непрерывна в точке $\omega = 0$. Такая формулировка делает смысл теоремы Слущкого особенно наглядным. В самом деле, как показывает разложение (2.81), скачку функции $F(\omega)$ в точке $\omega = 0$ отвечает постоянное случайное слагаемое X_0 (с нулевым средним значением), входящее в состав $X(t) - \langle X(t) \rangle$, а при наличии такой ненулевой постоянной случайной компоненты X_0 среднее значение $\langle X(t) \rangle$, разумеется, не может быть однозначно восстановлено с помощью осреднения по времени одной реализации $x(t)$, включающей какое-то одно выборочное значение x_0 величины X_0 (ср. аналогичное рассуждение на с. 58, где рассматривался случай, когда процесс $X(t)$ целиком сводится к постоянной компоненте X_0). Более того, легко показать (см. примечание⁷³), что в общем случае $M_T \rightarrow m + X_0$ при $T \rightarrow \infty$; этот результат также имеет очень наглядный смысл.

Что касается величины $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b^2(\tau) d\tau$, входящей в условие (1.65)

сходимости при $T \rightarrow \infty$ оценки $\frac{1}{T} \int_0^T X^2(t) dt$ к среднему квадрату $\langle X^2(t) \rangle$

гауссовского случайного процесса $X(t)$, то она также имеет очень простой спектральный смысл. В примечании³⁷ отмечено, что если корреляционная функция $b(\tau)$ включает компоненту $a \cos \omega_0 \tau$ (т. е. если спектральная функция $F(\omega)$)

* Если $\langle X(t) \rangle = m \neq 0$, то спектральная функция процесса $X(t)$ будет, очевидно, отличаться от спектральной функции процесса $\overset{0}{X}(t) = X(t) - m$ лишь добавочным скачком величины $|m|^2$ в точке $\omega = 0$, которому в спектральном разложении (2.61) самого процесса $X(t)$ отвечает скачок $Z(\omega)$ в точке $\omega = 0$ на неслучайную постоянную m , добавляющий к интегралу в левой части (2.61) постоянное слагаемое m . Включение этого постоянного слагаемого в спектральное разложение малоцелесообразно; поэтому обычно спектральное разложение применяют лишь к процессу $\overset{0}{X}(t) = X(t) - \langle X(t) \rangle$, а под спектральной функцией и спектральной плотностью процесса $X(t)$ с $\langle X(t) \rangle \neq 0$ понимают значения $F(\omega)$ и $f(\omega)$, отвечающие процессу $\overset{0}{X}(t)$ с нулевым средним.

имеет разрыв в какой-то точке $\omega = \omega_0$, то указанная величина будет включать положительное слагаемое $a^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega_0 \tau d\tau = \frac{a^2}{2}$. Нетрудно также показать, что в случае процесса $X(t)$ с дискретным спектром, когда $b(\tau) = \sum_k f_k e^{i\omega_k \tau}$,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b^2(\tau) d\tau = \sum_k f_k^2. \quad (2.88)$$

Если же дискретный спектр отсутствует (т. е. спектральная функция $F(\omega)$ непрерывна), то предел в левой части (2.88) будет обязательно равен нулю.⁷⁴ В общем случае произвольного стационарного процесса $X(t)$ также имеет место равенство (2.88), где только теперь уже сумма в правой части распространяется по всем точкам разрыва спектральной функции $F(\omega)$, а под f_k понимается скачок $F(\omega)$ в своей k -й точке разрыва. Таким образом, условие (1.65) равносильно условию непрерывности спектральной функции $F(\omega)$ при всех ω .

12.

Примеры корреляционных функций стационарных процессов

В § 4 был перечислен ряд свойств корреляционных функций, позволяющих по имеющимся примерам таких функций $B(\tau)$ строить много новых подобных примеров; однако там не объяснялось, как можно получить хоть какие-то примеры функций $B(\tau)$, если раньше у нас таких примеров не было.

Теперь мы видим, что задача эта не представляет труда — в силу теоремы Хинчина для быстро затухающих функций (см. с. 108—109) достаточно выбрать какие угодно всюду неотрицательные и интегрируемые функции $f(\omega)$, и тогда определенные по формуле (2.67) функции $B(\tau)$ обязательно будут корреляционными функциями. Также и проверка того, принадлежит ли интегрируемая функция $B(\tau)$ к классу корреляционных функций или нет, оказывается довольно простой — надо вычислить по формуле (2.82) соответствующую функцию $f(\omega)$, и если окажется, что $f(\omega) \geq 0$ при всех ω , то, значит, $B(\tau)$ принадлежит к классу корреляционных функций, а если $f(\omega) < 0$ хоть при одном ω , то, значит, не принадлежит. Напомним также, что вещественная корреляционная функция $B(\tau)$ обязательно должна удовлетворять условиям: $B(0) > 0$, $B(-\tau) = B(\tau)$ и $|B(\tau)| \leq B(0)$ (см. соотношения (1.25)); поэтому при построении примеров корреляционных функций $B(\tau)$ функций, для которых нарушается хоть одно из указанных условий, не могут представлять интереса.

Пример 1. Экспоненциальная корреляционная функция. Начнем с рассмотрения функции $B(\tau)$ вида

$$B(\tau) = Ce^{-\alpha|\tau|}, \quad (2.89)$$

где $C > 0$, $\alpha > 0$.

Мы уже знаем, что такая функция может быть корреляционной функцией стационарного случайного процесса; так, на с. 38, 94 и в примечании⁶⁵ было приведено даже несколько примеров процессов $X(t)$, имеющих такую корреляционную функцию. Проверим теперь справедливость этого утверждения и с помощью критерия (2.74); при этом мы попутно определим соответствующую спектральную плотность $f(\omega)$, во многих случаях представляющую значительный интерес.

В силу формулы (2.82) из (2.89) вытекает, что

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Ce^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{C}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-i\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau} d\tau \right\} = \\ &= \frac{C}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\alpha-i\omega} + \frac{1}{\alpha+i\omega} \right\} = \frac{C\alpha}{\pi} \frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}, \end{aligned}$$

т. е. в этом случае

$$f(\omega) = A/(\alpha^2 + \omega^2), \quad A = C\alpha/\pi. \quad (2.90)$$

Мы видим, что $f(\omega) > 0$ при всех ω ; тем самым мы еще раз доказали, что функция (2.89) действительно может являться корреляционной функцией стационарного случайного процесса. Графики этой функции и отвечающей ей спектральной плотности (2.90) приведены на рис. 11.

Время корреляции T_1 , отвечающее функции (2.89), равно $1/\alpha$ — это следует и из формулы (1.62), и из формулы (2.86). Таким образом, постоянная α^{-1} (размерности времени) характеризует типичное время затухания корреляционных связей между величинами $X(t)$ и $X(t+\tau)$ и для оценки параметра α надо только как-то оценить промежуток времени, на протяжении которого сохраняется заметная зависимость значения $X(t)$ от начального значения $X(0)$.

Изображения на рис. 11 б спектральная плотность $f(\omega)$ имеет максимум в нуле, остается почти постоянной при ω , малом по сравнению с α , а далее сравнительно медленно (по степенному закону с показателем -2) убывает. То обстоятельство, что увеличению α отвечает уменьшение затухания $B(\tau)$ с ростом τ , но замедление убывания $f(\omega)$ с ростом ω и удлинение области приближительного постоянства $f(\omega)$, связано с известным «соотношением неопределенностей», в силу которого «эффективная ширина»

затухающей на бесконечности функции (т. е. длина интервала, на котором эта функция еще существенно отлична от нуля) обратно пропорциональна «эффективной ширине» ее преобразования Фурье.⁷⁵

Кроме моделей, рассматривающихся выше, в дальнейшем (на с. 157—158) нам встретится еще один практически важный пример случайного процесса $X(t)$, имеющего корреляционную функцию, описываемую формулой (2.89). Отметим также, что в связи с простотой этой формулы, она часто применяется на практике и тогда,

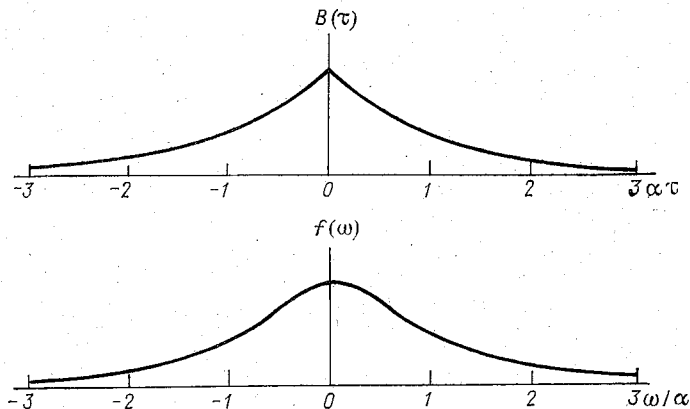


Рис. 11.

Экспоненциальная корреляционная функция $B(\tau)$, вычисленная по формуле (2.89), и соответствующая ей спектральная плотность $f(\omega)$.

когда точный вид $B(\tau)$ нам неизвестен или же оказывается слишком сложным и малоудобным для требующихся дальнейших расчетов.

Пример 1а. «Белый шум». На практике часто важным оказывается случай, когда корреляционная связь между $X(t)$ и $X(t + \tau)$ затухает чрезвычайно быстро, так что при использовании формулы (2.89) α приходится считать очень большим. Рассмотрим, например, броуновское движение частицы, помещенной в жидкость, и пусть $X(t)$ — пульсация силы, действующей на частицу. Изменения $X(t)$ определяются столкновениями молекул жидкости с рассматриваемой частицей; так как в нормальных условиях (при комнатной температуре и реальных размерах частиц) частица, погруженная в жидкость, испытывает около 10^{21} столкновений в секунду, то значения $X(t)$ и $X(t + \tau)$ при τ , имеющем, например, порядок 10^{-18} с, будут фактически независимыми. Поэтому, если мы захотим приблизить корреляционную функцию процесса $X(t)$ функцией вида (2.89), придется считать, что α здесь существенно больше, чем 10^{18} с^{-1} .

Аналогично ведут себя пульсации электродвижущей силы, возникающей в проводнике из-за теплового движения электронов, или пульсации силы тока между анодом и катодом электронной лампы, вызываемые пульсацией числа проходящих электронов; во всех этих случаях при описании соответствующей корреляционной функции формулой (2.89) постоянной α приходится придавать исключительно большое значение.

Выше отмечалось, что при ω , малом по сравнению с α , спектральная плотность $f(\omega)$ остается практически постоянной — равной значению $f(0) = f_0$. Следовательно, в случае очень большого α плотность $f(\omega)$ будет постоянной в очень широком интервале частот. Но на практике нас почти никогда не интересуют все возможные значения ω ; в каждой частной задаче существенную роль играет обычно лишь некоторый ограниченный интервал частот (подробнее об этом будет сказано на с. 146—147).

Если в соответствующем ограниченном интервале частот спектральная плотность практически постоянна, то при решении данной задачи мы можем вообще пренебречь изменчивостью $f(\omega)$, т. е. считать, что

$$f(\omega) = f_0 = \text{const.} \quad (2.91)$$

Разумеется, строго говоря, спектральная плотность (2.91) является невозможной, так как ей должна отвечать бесконечная

дисперсия $\langle X^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) d\omega$ (ср. условие (2.73)). Тем не

менее представление о стационарном случайном процессе с постоянной спектральной плотностью оказывается весьма полезной математической идеализацией (аналогично представлению о материальной точке в механике, строго говоря, противоречащему физически очевидному утверждению о конечности плотности любого реально существующего тела).

Идеализированный случайный процесс с постоянной спектральной плотностью часто называют *белым шумом* или говорят, что он имеет «белый» спектр (по аналогии с белым светом в оптике, имеющим широкий оптический спектр).

Ценность этой идеализированной модели «обобщенного случайного процесса» обуславливается в первую очередь тем, что во многих случаях, если мы будем производить вычисления, например, со спектральной плотностью (2.90) (или корреляционной функцией (2.89)), а затем в окончательном результате устремим A (или C) и α к бесконечности так, чтобы отношение $A/\alpha^2 = C/\pi\alpha = f_0$ оставалось конечным, то придем к разумному результату (зависящему, конечно, только от f_0 , а не от A и α в отдельности). Во всех таких случаях этим предельным результатом можно с хорошей точностью пользоваться при всех достаточно больших

α , а получить его можно гораздо проще, допустив с самого начала, что спектральная плотность рассматриваемого случайного процесса имеет постоянное значение (2.91). Более того, тот же результат будет с хорошей точностью применим и в случае многих других форм корреляционной функции $B(\tau)$ таких, что $B(\tau)$ быстро убывает от сравнительно большого значения $B(0)$ до пренебрежимо малых значений при всех $|\tau| > \eta$, где η — относительно малый промежуток времени (спектральная плотность $f(\omega)$ при этом условии обязательно будет постоянной в широком интервале частот). Вообще, спектральная плотность (2.91) отвечает «несобственной» корреляционной функции

$$B(\tau) = 2\pi f_0 \delta(\tau), \quad (2.92)$$

имеющей форму δ -функции (см. примечание ²).

Форма (2.92) функции $B(\tau)$ подразумевает, что рассматривается предельный переход, при котором $B(\tau) \rightarrow 0$ при всех $\tau \neq 0$,

а $B(0) \rightarrow \infty$ таким образом, что $\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) d\tau = \text{const}$ (но форма $B(\tau)$ до перехода к пределу ограничена лишь требованием, чтобы

выполнялось условие $\int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) d\tau \neq 0$). Иначе говоря, она озна-

чает, что значения $X(t)$ в любые два различных момента времени некоррелированы между собой, т. е. что $X(t)$ — «абсолютно случайный» процесс, как раз и представляющий собой аналог «последовательности некоррелированных случайных величин» $E(t)$, относящийся к случаю непрерывного времени t . Поэтому в дальнейшем в случаях, когда t — непрерывное, символом $E(t)$ мы будем всегда обозначать «белый шум» единичной интенсивности (т. е. такой, что $f_0 = 1/2\pi$, а $B(\tau) = \delta(\tau)$).

Заметим еще, что оценка тех значений параметров быстро затухающей функции $B(\tau)$, при которых уже можно пользоваться предельным результатом, полученным в предположении (2.91) (или (2.92)), эквивалентна, в известном смысле, оценке ширины спектральной полосы, существенной для данной задачи; для трех перечисленных в начале этого примера случайных процессов физического происхождения (пульсация силы, действующей на брауновскую частицу, пульсация электродвижущей силы при тепловом шуме в проводнике, пульсация силы тока при дробовом эффекте) допущение о том, что рассматриваемый процесс является белым шумом, вполне приемлемо в применении к большинству представляющих интерес задач.

Основной спектральной характеристикой случайного процесса $X(t) = c E(t)$ такого, что его можно считать белым шумом, является, разумеется, значение $f_0 = c^2/2\pi$ его спектральной плотности в нуле; определение этого зна-

чения и надо считать первоочередной задачей теории рассматриваемого процесса. В случае процесса $X(t)$, описывающего пульсации силы, действующей на брауновскую частицу, статистическая физика дает для f_0 формулу $f_0 = \omega kT/\pi$, где ω — коэффициент пропорциональности между силой трения и скоростью (равный $6\pi\eta r$ для сферической частицы радиуса r , погруженной в жидкость вязкости η), T — абсолютная температура жидкости, а k — постоянная Больцмана (см. с. 158). Если $X(t)$ — это пульсации электродвижущей силы теплового движения электронов в проводнике, то в предыдущей формуле для f_0 надо лишь заменить ω сопротивлением проводника R : здесь $f_0 = R kT/\pi$ (этот результат в теории электрических флуктуаций называется формулой Найквиста).

В случае же, когда $X(t)$ — это пульсации силы тока, создаваемые дробовым эффектом в электронной лампе, при широких условиях имеет место так называемая формула Шоттки, согласно которой $f_0 = e i_0 / 2\pi$, где e — заряд электрона, i_0 — среднее значение тока через лампу.⁷⁶

Пример 2. Косинусоида. На с. 90 было показано, что функция вида

$$B(\tau) = C \cos \omega_0 \tau. \quad (2.93)$$

где $C > 0$, $\omega_0 > 0$, может являться корреляционной функцией стационарного случайного процесса. Так как $\cos \omega_0 \tau = (e^{-i\omega_0 \tau} + e^{i\omega_0 \tau})/2$, то функции (2.93) отвечает спектральная функция

$$F(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega \leq -\omega_0, \\ C/2 & \text{при } -\omega_0 < \omega \leq \omega_0, \\ C & \text{при } \omega > \omega_0, \end{cases} \quad (2.94)$$

формально тот же результат можно записать в виде следующей «формулы для спектральной плотности»:

$$f(\omega) = \frac{C}{2} [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]. \quad (2.95)$$

Появление δ -функций в формуле (2.95) для $f(\omega)$, очевидно, связано с тем обстоятельством, что корреляционная функция (2.93) не затухает на бесконечности.

Пример 3. Функция

$$B(\tau) = C e^{-\alpha |\tau|} \cos \omega_0 \tau, \quad (2.96)$$

где $C > 0$, $\alpha > 0$, $\omega_0 > 0$, представляет собой произведение функций вида (2.89) и (2.93); следовательно, она также должна принадлежать классу корреляционных функций. Вычислим соответствующую спектральную плотность $f(\omega)$:

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C e^{-\alpha |\tau|} e^{-i\omega \tau} \cos \omega_0 \tau d\tau = \frac{C}{4\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha |\tau|} e^{-i(\omega + \omega_0) \tau} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha |\tau|} e^{-i(\omega - \omega_0) \tau} d\tau \right\} = \frac{C\alpha}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.97)$$

(ср. вывод формулы (2.90)). Иначе говоря,

$$f(\omega) = \frac{A(\omega^2 + b^2)}{\omega^4 + 2a\omega^2 + b^4}, \quad (2.98)$$

где

$$A = C\alpha/\pi, \quad a = \alpha^2 - \omega_0^2, \quad b = (\alpha^2 + \omega_0^2)^{1/2}. \quad (2.99)$$

Формула (2.97) показывает, что $f(\omega) > 0$ при всех ω ; отсюда снова следует, что функция (2.96) принадлежит к классу корреляционных функций. †

Функция (2.96) отвечает некоторым встречающимся на практике простым моделям стационарных случайных процессов ⁷⁷; кроме того, она часто оказывается удобной для приближенного представления

возникающих в приложениях эмпирических корреляционных функций, несколько раз меняющих знак. В качестве одного примера такого рода мы рассмотрим нормированную эмпирическую корреляционную функцию $R_{TN}^*(\tau)$ пульсаций интенсивности радиолокационного сигнала (см. рис. 8 а). На рис. 12 кривая 1 воспроизводит в увеличенном масштабе начальный участок кривой, изображенной на рис. 8 а; кривая же 2 — это функция вида (2.96)

$$\tilde{R}(\tau) = e^{-24|\tau|} \cos 40\tau. \quad (2.100)$$

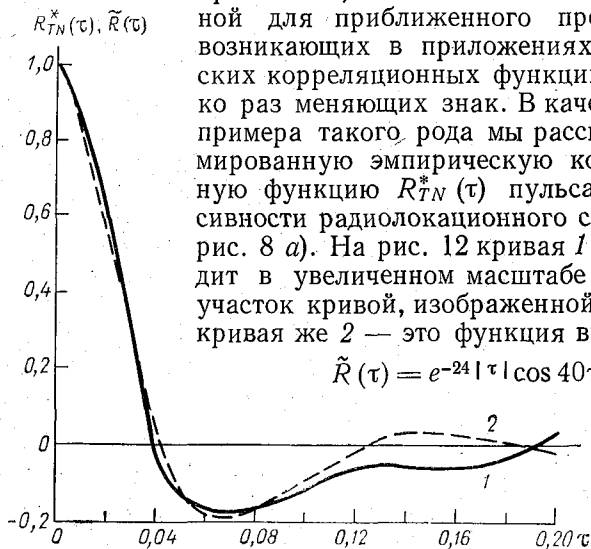


Рис. 12.

Начальный участок эмпирической корреляционной функции $R_{TN}^*(\tau)$ интенсивности радиолокационного сигнала (1) и его аппроксимация затухающей косинусоидой $\tilde{R}(\tau)$ (2).

Мы видим, что функция (2.100) весьма точно передает ход эмпирической корреляционной функции $R_{TN}^*(\tau)$ на всем участке значений τ , на котором значения $R_{TN}^*(\tau)$ можно считать надежными; поэтому на практике корреляционную функцию, изображенную на рис. 8 а, можно заменить функцией (2.100). В частности, исходя отсюда можно с помощью формулы (2.97) приближенно определить спектральную плотность замираний радиосигнала, частично показанных на рис. 1 а; получающийся при этом результат представлен на рис. 13.

Согласно рис. 13, спектральная плотность $f(\omega)$, отвечающая корреляционной функции (2.100), принимает наибольшее значение при частоте ω_1 , где ω_1 очень близко к частоте $\omega_0 = 40$ рад/с периодического множителя функции (2.100). В общем случае корреляционной функции (2.96) элементарные подсчеты показывают, что если $\alpha < \sqrt{3} \omega_0$ (т. е. $a < b^2/2$), то функция (2.97) максимальна в точке $\omega = \omega_1$, где

$$\omega_1 = b \{ [2(1 - a/b^2)]^{1/2} - 1 \}^{1/2};$$

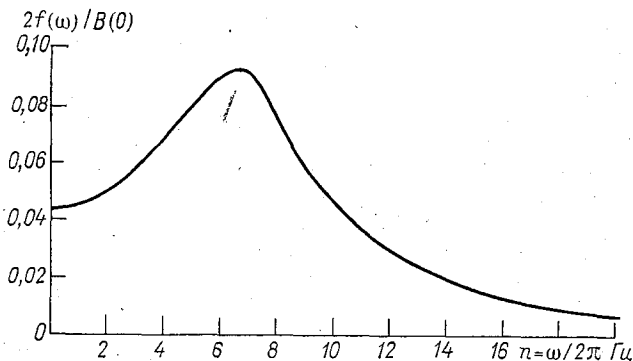


Рис. 13.

Нормированная спектральная плотность $2f(\omega)/B(0)$,
отвечающая корреляционной функции $\tilde{R}(\tau)$.

если к тому же α значительно меньше, чем ω_0 , то последняя формула может быть преобразована к виду: $\omega_1 \approx (1 - \alpha^4/8\omega_0^4) \omega_0 \approx \omega_0$. Острота максимума функции (2.97) будет, очевидно, определяться значением α , т. е. скоростью затухания функции (2.96). При очень малом α максимум будет очень острым, и функция (2.97) здесь близка по форме к «несобственной» спектральной плотности (2.95). В этом случае и реализации соответствующего случайного процесса $X(t)$ по характеру близки к реализациям случайного гармонического колебания частоты $\omega_0/2\pi$, отвечающего косинусоидальной корреляционной функции (2.93); точнее говоря, эти реализации будут хорошо описываться функциями вида $x(t) = a(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t)]$, где $|a'(t)/a(t)| \ll \omega_0^{-1}$ и $|\varphi'(t)/\varphi(t)| \ll \omega_0^{-1}$, т. е. «гармоническими колебаниями частоты $\omega_0/2\pi$ с медленно меняющейся амплитудой и фазой».

При $\alpha \geq \sqrt{3} \omega_0$ (т. е. $a \geq b^2/2$) функция (2.97) будет иметь единственный максимум в точке $\omega = 0$; в случае очень большого α этот максимум будет очень пологим, так что для многих задач здесь вообще будет допустимо считать, что $f(\omega) = f_0 = \text{const}$, т. е. считать рассматриваемый процесс $X(t)$ белым шумом.

Пример 4. До сих пор мы рассматривали примеры, в которых корреляционная функция $B(\tau)$ задавалась какой-то простой формулой, после чего подсчитывалась соответствующая спектральная плотность $f(\omega)$ и проверялось, что эта плотность неотрицательна. Теперь мы поступим наоборот — начнем именно с формулы для спектральной плотности $f(\omega)$. Итак, пусть

$$f(\omega) = A/(\omega^4 + 2a\omega^2 + b), \quad (2.101)$$

где A , a и b — вещественные постоянные. Нетрудно проверить, что для того, чтобы плотность (2.101) была всюду неотрицательной и интегрируемой, числа A , a и b должны удовлетворять неравенствам

$$A > 0, \quad b > 0, \quad \sqrt{b} + a > 0. \quad (2.102)$$

При условиях (2.102) мы можем ввести обозначения $\sqrt{b} = \omega_1^2$, $\sqrt{b} + a = 2\alpha^2$ и переписать формулу (2.101) в виде

$$f(\omega) = A/[(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2], \quad (2.103)$$

откуда сразу видно, что $f(\omega) > 0$ при всех ω . При любых A , a и b , удовлетворяющих (2.102), или, что то же самое, при любых $A > 0$, $\alpha^2 > 0$ и $\omega_1^2 > 0$ функция (2.101) или, соответственно, (2.103) будет спектральной плотностью и ей будет отвечать корреляционная функция $B(\tau)$, определяемая формулой

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Ae^{i\omega\tau} d\omega}{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}. \quad (2.104)$$

Интеграл в правой части (2.104) легко подсчитывается с помощью теории вычетов, причем получаемая формула для $B(\tau)$ будет иметь разный вид в зависимости от знака разности $\omega_1^2 - \alpha^2 = (\sqrt{b} - a)/2$. При $\omega_1^2 - \alpha^2 = \omega_0^2 > 0$ получаем

$$B(\tau) = \frac{\pi A}{2A\omega_1^2} e^{-\alpha|\tau|} (\cos \omega_0\tau + \frac{\alpha}{\omega_0} \sin \omega_0|\tau|). \quad (2.105)$$

В частности, такой вид (с $\omega_0 = \alpha$) будет иметь корреляционная функция, отвечающая спектральной плотности

$$f(\omega) = \frac{A}{\omega^4 + 4\alpha^4}. \quad (2.106)$$

При $\omega_1^2 = \alpha^2$ спектральная плотность (2.103) приобретает вид

$$f(\omega) = \frac{A}{(\omega^2 + \alpha^2)^2}, \quad (2.107)$$

причем здесь

$$B(\tau) = \frac{\pi A}{2\alpha^3} e^{-\alpha|\tau|} (1 + \alpha|\tau|). \quad (2.108)$$

Наконец, при $\omega_1^2 - \alpha^2 = -\beta^2 < 0$ параметр ω_0 в формуле (2.105) оказывается чисто мнимым: $\omega_0 = i\beta$. В этом случае (2.105) обращается в формулу

$$B(\tau) = \frac{\pi A}{4\alpha\omega_0^2\beta} [(\alpha + \beta) e^{-(\alpha-\beta)|\tau|} - (\alpha - \beta) e^{-(\alpha+\beta)|\tau|}]. \quad (2.109)$$

График спектральной плотности (2.103) имеет тот же характер, что и график функции (2.97): он симметричен относительно оси ординат и, если $\omega_1^2 > 2\alpha^2$, он на полуоси $\omega > 0$ представляется куполообразной кривой (типа той, которая изображена на рис. 13), имеющей максимум в точке $\omega = (\omega_1^2 - 2\alpha^2)^{1/2}$ (близкой к ω_0 , если $\alpha \ll \omega_1$). Если же $\omega_1^2 \leq 2\alpha^2$, то плотность $f(\omega)$ имеет единственный максимум в точке $\omega = 0$ и монотонно убывает по обе стороны от этой точки. Формулы (2.101)–(2.109) также довольно часто могут использоваться для приближенного задания эмпирических спектральной плотности и корреляционной функции, встречающихся на практике стационарных случайных процессов; кроме того, применимость этих формул в ряде случаев может быть оправдана и теоретически (см. с. 159–161).

Пример 5. Обобщением формул (2.96) и (2.105) является следующая формула, описывающая общее затухающее колебание:

$$B(\tau) = C e^{-\alpha|\tau|} \cos(\omega_0|\tau| - \Psi), \quad (2.110)$$

где $C > 0$, $\alpha > 0$, $\omega_0 > 0$. Поскольку для корреляционной функции $B(\tau)$ должно выполняться условие $|B(\tau)| \leq B(0)$, ясно, что функция (2.110) может быть корреляционной лишь при условии, что $B'(+0) \leq 0$, где $B'(+0)$ — предел $|B(h) - B(0)|/h$, когда $h \rightarrow 0$, пробегаая лишь положительные значения. Отсюда легко вытекает, что фазовый сдвиг Ψ должен удовлетворять неравенству

$$|\Psi| \leq \arctg(\alpha/\omega_0). \quad (2.111)$$

При $\Psi = 0$ функция (2.110), очевидно, обращается в (2.96), а при $\Psi = \arctg(\alpha/\omega_0)$ — в (2.105).

Нетрудно проверить, что преобразование Фурье функции (2.110) имеет вид

$$f(\omega) = \frac{c\omega^2 + d}{(\omega^2 + \alpha^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\omega_0^2}, \quad (2.112)$$

где

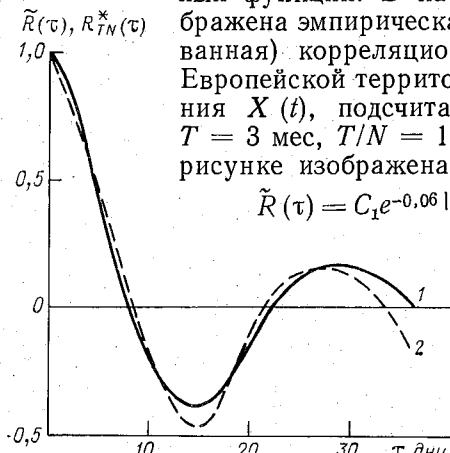
$$c = \frac{C}{\pi} (\alpha \cos \Psi - \omega_0 \sin \Psi),$$

$$d = \frac{C(\alpha^2 + \omega_0^2)}{\pi} (\alpha \cos \Psi + \omega_0 \sin \Psi). \quad (2.113)$$

Из формул (2.112) и (2.113) вытекает, что при условии (2.111) функция $f(\omega)$ обязательно будет неотрицательной при всех ω ; если же условие (2.111) не выполняется, то найдутся значения ω , при которых $f(\omega) < 0$. Таким образом, условие (2.111) является необходимым и достаточным для того, чтобы функция (2.110) могла быть корреляционной функцией.

Функция вида (2.110) также часто оказываются удобными для приближенного описания поведения эмпирических корреляционных функций. В качестве примера на рис. 14 изображена эмпирическая (центрированная и нормированная) корреляционная функция осредненного по Европейской территории СССР атмосферного давления $X(t)$, подсчитанная по формуле (1.756) при $T = 3$ мес, $T/N = 12$ ч для осени 1949 г. На том же рисунке изображена функция

$\tilde{R}(\tau), R_{TN}^*(\tau)$



$\tilde{R}(\tau) = C_1 e^{-0,06|\tau|} \cos(0,21|\tau| - 0,08), \quad (2.114)$

имеющая вид (2.110).⁷⁸ Мы видим, что используемая здесь формула для $\tilde{R}(\tau)$ позволяет сравнительно точно передать ход эмпирической корреляционной функции на интервале, охватывающем несколько перемен знака функции $R_{TN}^{**}(\tau)$, а не только одну переменну знака (ср. рис. 12).

Рис. 14. Эмпирическая корреляционная функция $R_{TN}^*(\tau)$ осредненного поля атмосферного давления (t) и ее аппроксимация функцией $\tilde{R}(\tau)$ (2).

Стационарные процессы $X(t)$ с корреляционными функциями примеров 1, 3, 4

и 5 относятся к важному классу процессов с рациональной спектральной плотностью (так как функция $f(\omega)$ во всех этих примерах является рациональной). Такие процессы часто встречаются в прикладных задачах (во многих случаях по специальным причинам; см. примечание⁸¹) и обладают некоторыми важными свойствами, очень облегчающими решение многих относящихся к ним задач. К процессам с рациональной спектральной плотностью мы еще вернемся (см. пример 9).

Пример 6. Белый шум в конечной полосе частот. Белый шум со спектральной плотностью (2.91) представляет собой математическую идеализацию, не укладывающуюся в рамки обычного определения стационарного случайного процесса. Довольно часто, однако, в приложениях можно считать, что рассматриваемый процесс $X(t)$ имеет постоянную спектральную плотность $f(\omega) = f_0$ лишь при $|\omega| \leq \Omega$, где Ω — некоторая фиксированная «частота обреза-

ния спектра»; если же $|\omega| > \Omega$, то плотность $f(\omega)$ можно считать просто равной нулю. Функция

$$f(\omega) = \begin{cases} f_0 & \text{при } |\omega| \leq \Omega, \\ 0 & \text{при } |\omega| > \Omega, \end{cases} \quad (2.115)$$

разумеется, может быть спектральной плотностью; отвечающая ей корреляционная функция $B(\tau)$, очевидно, имеет вид

$$B(\tau) = \int_{-\Omega}^{\Omega} f_0 e^{i\tau\omega} d\omega = 2f_0 \frac{\sin \Omega\tau}{\tau}. \quad (2.116)$$

Идеальный белый шум (пример 1а) можно рассматривать как предел рассмотренного здесь «белого шума в конечной полосе частот» при $\Omega \rightarrow \infty$ (и фиксированном f_0).

Пример 7. Треугольная корреляционная функция. На с. 94 мы видели, что функция

$$B(\tau) = \begin{cases} C(T - |\tau|) & \text{при } |\tau| \leq T, \\ 0 & \text{при } |\tau| > T, \end{cases} \quad (2.117)$$

где $C > 0$ может быть корреляционной функцией стационарного процесса. Отвечающая ей спектральная плотность легко подсчитывается с помощью формулы (2.82):

$$f(\omega) = \frac{C}{2\pi} \int_{-T}^T (T - |\tau|) e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{2C}{\pi} \frac{\sin^2(\omega T/2)}{\omega^2} \quad (2.118)$$

(см. рис. 15). Мы видим, что действительно $f(\omega) \geq 0$ при всех ω .

Заметим, кстати, что родственная функции (2.117) функция

$$B(\tau) = \begin{cases} C(T^2 - \tau^2) & \text{при } |\tau| \leq T, \\ 0 & \text{при } |\tau| > T, \end{cases}$$

также удовлетворяющая условиям (1.28) и иногда используемая в качестве модели корреляционной функции⁷⁹, уже имеет преобразование Фурье, принимающее также и отрицательные значения, так что она на самом деле не может быть корреляционной функцией. При этом для того чтобы убедиться, что преобразование Фурье функции $B(\tau)$ здесь не является всюду неотрицательным, не надо даже производить никаких вычислений. Действительно, мы знаем, что если корреляционная функция $B(\tau)$ имеет вторую производную $B''(0)$ в точке $\tau = 0$, то она должна быть дважды дифференцируемой и при всех вообще значениях τ (см. с. 52). Однако рассматриваемая нами функция этому условию не удовлетворяет: в точке $\tau = 0$ она имеет производные всех порядков, но в точках $\tau = \pm T$ она недифференцируема.

Пример 8. Гауссовская кривая. Положим

$$B(\tau) = Ce^{-\alpha\tau^2}, \quad (2.119)$$

т. е. примем, что $B(\tau)$ имеет форму плотности вероятности одномерного распределения Гаусса с нулевым средним значением. Формула для преобразования Фурье такой $B(\tau)$ хорошо известна (см., в частности, примечание ⁴); из нее следует, что

$$f(\omega) = \frac{C}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\omega^2/4\alpha}. \quad (2.120)$$

Таким образом, здесь $f(\omega) > 0$ при всех ω .⁸⁰

Приведем еще несколько более сложных примеров функций $B(\tau)$ и $f(\omega)$.

Пример 9. *Общая рациональная спектральная плотность.* Рассмотрим рациональную функцию ω общего вида

$$f(\omega) = C \frac{B(\omega)}{A(\omega)} = C \frac{(\omega - \beta_1)(\omega - \beta_2) \dots (\omega - \beta_q)}{(\omega - \alpha_1)(\omega - \alpha_2) \dots (\omega - \alpha_p)}, \quad (2.121)$$

где $\alpha_k, k = 1, \dots, p$ и $\beta_j, j = 1, 2, \dots, q$ — корни многочленов $A(\omega)$ (степени p) и $B(\omega)$ (степени q). Естественно считать, что ни один из корней α_k не совпадает ни с одним из корней β_j (но, разумеется, как среди $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, так и среди $\beta_1, \dots, \beta_q$ могут встречаться кратные корни). Если $f(\omega)$ — это спектральная плотность (т. е. вещественная, всюду неотрицательная и интегрируемая в пределах от $-\infty$ до ∞ функ-

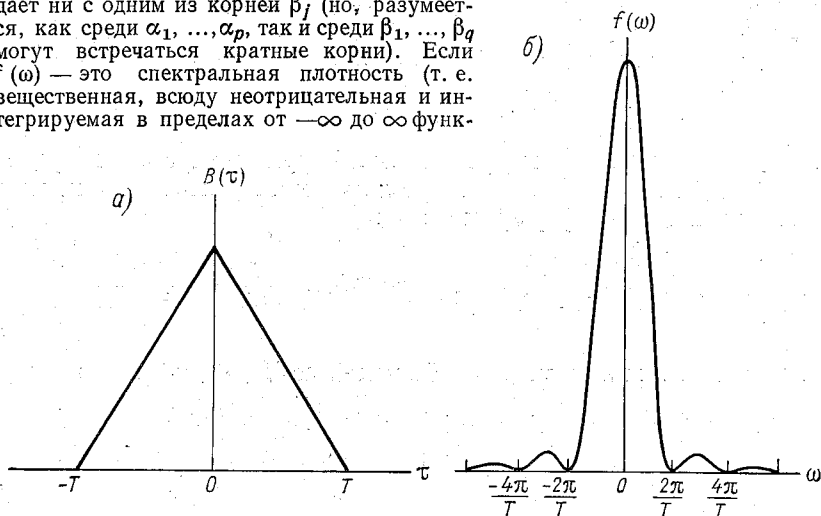


Рис. 15.

Треугольная корреляционная функция (а) и соответствующая ей спектральная плотность (б).

ция), то ясно, что $p \geq q + 2$ и что ни один из корней α_k не может быть вещественным, а все вещественные корни β_j должны иметь четную кратность (иначе функция $f(\omega)$ меняла бы знак в окрестности точки $\omega = \beta_j$). Далее, в силу вещественности $f(\omega)$

$$C \frac{(\omega - \beta_1) \dots (\omega - \beta_q)}{(\omega - \alpha_1) \dots (\omega - \alpha_p)} = \bar{C} \frac{(\omega - \bar{\beta}_1) \dots (\omega - \bar{\beta}_q)}{(\omega - \bar{\alpha}_1) \dots (\omega - \bar{\alpha}_p)}.$$

Отсюда видно, что все корни α_k и все комплексные корни β_j разбиваются на пары комплексно сопряженных корней $(\alpha_k, \bar{\alpha}_k)$ и $(\beta_j, \bar{\beta}_j)$; поэтому $p = 2n$ и $q = 2m$ —

четные числа. Кроме того, ясно, что C — вещественное положительное число (иначе не выполнялось бы условие $f(\omega) \geq 0$). Так как $(\omega - \alpha_k)(\omega - \bar{\alpha}_k) = |\omega - \alpha_k|^2$ и $(\omega - \beta_j)(\omega - \bar{\beta}_j) = |\omega - \beta_j|^2$, то формулу (2.121) можно переписать в виде

$$f(\omega) = C \frac{|\omega - \beta_1| \dots |\omega - \beta_m|^2}{|\omega - \alpha_1| \dots |\omega - \alpha_n|^2}, \quad (2.122)$$

где $m < n$, $C > 0$ и можно считать, что все корни $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и все комплексные корни $\beta_1, \dots, \beta_m$ имеют положительную мнимую часть (так как из пар $(\alpha_k, \bar{\alpha}_k)$ и $(\beta_j, \bar{\beta}_j)$ в (2.122) входит лишь по одному корню, выбранному по произволу). Формула (2.122), где $C, n, m, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m$ удовлетворяют указанным условиям, задает общий вид рациональной спектральной плотности $f(\omega)$.

В случае вещественного процесса $X(t)$, когда $f(-\omega) = f(\omega)$, в число корней $\alpha_1, \dots, \alpha_p = \alpha_{2n}$, наряду с α_k и $\bar{\alpha}_k$ должны входить также корни $-\alpha_k$ и $-\bar{\alpha}_k$ (аналогично обстоит дело и с корнями $\beta_1, \dots, \beta_q = \beta_{2m}$). Поэтому наряду с корнем $\alpha_k = \alpha_k^{(1)} + i\alpha_k^{(2)}$ или $\beta_j = \beta_j^{(1)} + i\beta_j^{(2)}$, где $\alpha_k^{(2)} > 0$, $\beta_j^{(2)} > 0$, здесь в число корней $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ и, соответственно, $\beta_1, \dots, \beta_m$ войдет и корень $-\bar{\alpha}_k = -\alpha_k^{(1)} + i\alpha_k^{(2)}$ или $-\bar{\beta}_j = -\beta_j^{(1)} + i\beta_j^{(2)}$. Отсюда легко следует, что спектральная плотность (2.122) вещественного процесса $X(t)$ всегда может быть также записана в виде

$$\begin{aligned} f(\omega) &= C \frac{|(i\omega)^m + b_1(i\omega)^{m-1} + \dots + b_m|^2}{|(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \dots + a_n|^2} = \\ &= C \frac{\omega^{2m} + B_1\omega^{2(m-1)} + \dots + B_m}{\omega^{2n} + A_1\omega^{2(n-1)} + \dots + A_n}, \end{aligned} \quad (2.123)$$

где все коэффициенты $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ и $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_m$ — вещественные.

Используя формулу (2.67) и теорию вычетов, нетрудно найти корреляционную функцию $B(\tau)$, отвечающую спектральной плотности (2.122). В частности, нетрудно показать, что в случае вещественного $X(t)$, когда $B(-\tau) = B(\tau)$, функция $B(\tau)$ всегда может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} B(\tau) &= \sum_{j=1}^{n_1} C_j (|\tau|) e^{-\alpha_j' |\tau|} + \sum_{k=1}^{n_2} [C_k^{(1)} (|\tau|) \cos \alpha_k^{(1)} \tau + \\ &+ C_k^{(2)} (|\tau|) \sin \alpha_k^{(1)} |\tau|] e^{-\alpha_k^{(2)} |\tau|}, \end{aligned} \quad (2.124)$$

где $i\alpha_1', \dots, i\alpha_{n_1}'$ — чисто мнимые корни, входящие в число корней $\alpha_1, \dots, \alpha_n$; $\alpha_1^{(1)} + i\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_{n_2}^{(1)} + i\alpha_{n_2}^{(2)}$ — комплексные корни с положительной вещественной частью, входящие в число корней $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, а $C_j (|\tau|)$, $C_k^{(1)} (|\tau|)$ и $C_k^{(2)} (|\tau|)$ — многочлены относительно $|\tau|$, степени которых на единицу меньше кратности соответствующих корней $i\alpha_j'$ или $\alpha_k^{(1)} + i\alpha_k^{(2)}$ (так что при отсутствии у $A(\omega)$ кратных корней все C_j , $C_k^{(1)}$ и $C_k^{(2)}$ — постоянные коэффициенты).⁸¹

Пример 10. Теорема Поля. Экспоненциальная корреляционная функция (2.89) и треугольная корреляционная функция (2.117) обладают следующим общим свойством: график этих функций на полуоси $0 \leq \tau < \infty$ в обоих случаях пред-

ставляет собой стремящуюся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ вогнутую кривую. Напомним, что кривая $y = B(\tau)$ называется вогнутой, если при любых τ_1 и τ_2 из области изменения аргумента τ имеет место неравенство: $B\left(\frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2} [B(\tau_1) + B(\tau_2)]$ (геометрически это означает, что кривая $y = B(\tau)$ на любом интервале $[\tau_1, \tau_2]$ ни в одной точке не может оказаться выше хорды, соединяющей точки $(\tau_1, B(\tau_1))$ и $(\tau_2, B(\tau_2))$). Оказывается, что указанное свойство уже гарантирует, что функция $B(\tau)$ принадлежит классу корреляционных функций: если график функции $B(\tau)$ на полуоси $0 \leq \tau < \infty$ представляет собой вогнутую кривую и $B(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, то функция $B(\tau)$, доопределенная при $\tau < 0$ условием $B(-\tau) = B(\tau)$, обязательно представляет собой корреляционную функцию. Это утверждение составляет содержание теоремы Пойа.⁸²

В случае дважды дифференцируемых функций $B(\tau)$ вогнутость графика на интервале $[\tau_1, \tau_2]$ эквивалентна условию: $B''(\tau) \geq 0$ при $\tau_1 < \tau < \tau_2$. Таким образом, четная функция $B(\tau)$ такая, что $B(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ и $B''(\tau) \geq 0$ при всех $\tau > 0$, всегда является корреляционной функцией.

Пример 11. Экспоненциальные корреляционные функции. Выше мы уже видели, что функции $Ce^{-\alpha|\tau|}$ и $Ce^{-\alpha\tau^2}$, где $C > 0$, $\alpha > 0$, являются корреляционными функциями. Нетрудно также доказать, что функция

$$B(\tau) = Ce^{-\alpha|\tau|^k}, \quad C > 0, \quad \alpha > 0, \quad (2.125)$$

при $k > 2$ не может быть корреляционной функцией (см., например, примечания³ и ⁴). С другой стороны, если $0 < k < 1$, то функция (2.125) наверное будет принадлежать классу корреляционных функций в силу теоремы Пойа (ибо здесь $B''(\tau) > 0$ при всех $\tau > 0$). Более трудно доказывается, что функция (2.125) будет корреляционной функцией и при всех k таких, что $1 < k < 2$; однако и этот факт оказывается верным. Таким образом, функция (2.125) принадлежит классу корреляционных функций при всех k из интервала $0 < k \leq 2$. Соответствующие спектральные плотности $f(\omega)$ в совсем другой связи детально изучались в теории вероятностей⁸³; для них, однако, при $k \neq 1$ и $k \neq 2$ уже не удается получить явной формулы.

Пример 12. Корреляционные функции, выражающиеся через бесселевы функции. Имеется много примеров корреляционных функций, выражающихся через известные из математической физики классы специальных функций. Так, например, в теории бесселевых функций известно следующее представление бесселевой функции нулевого порядка $J_0(t)$ ⁸⁴:

$$J_0(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{e^{itx} dx}{(1-x^2)^{1/2}}.$$

Отсюда сразу вытекает, что функция

$$B(\tau) = CJ_0(\alpha\tau), \quad C > 0, \quad \alpha > 0, \quad (2.126)$$

принадлежит классу корреляционных функций, причем ей отвечает стремящаяся к бесконечности при $\omega \rightarrow \pm\alpha$ спектральная плотность вида

$$f(\omega) = \begin{cases} C\pi^{-1}(\alpha^2 - \omega^2)^{-1/2} & \text{при } |\omega| < \alpha, \\ 0 & \text{при } |\omega| > \alpha. \end{cases} \quad (2.127)$$

Корреляционная функция (2.126) входит в следующее семейство корреляционных функций:

$$B(\tau) = C \frac{J_{n/2}(\alpha\tau)}{(\alpha\tau)^{n/2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.128)$$

(о них см. примечание⁸⁵). При $n = 1$ функция (2.128) сводится к корреляционной функции (2.116) белого шума в конечной полосе частот, с которой мы сталкивались выше.

Еще одним примером корреляционной функции, выражающейся через функции Бесселя, является функция

$$B(\tau) = C(\alpha\tau)^\nu K_\nu(\alpha\tau), \quad C > 0, \quad \alpha > 0, \quad \nu \geq 0, \quad (2.129)$$

где $K_\nu(x)$ — так называемая функция Макдональда, т. е. функция Бесселя второго рода от мнимого аргумента. Этой корреляционной функции отвечает всюду положительная спектральная плотность

$$f(\omega) = \frac{2^{\nu-2} \Gamma(\nu + 1/2) \alpha^{2\nu} C}{\pi^{1/2} (\alpha^2 + \omega^2)^{\nu+1/2}}. \quad (2.130)$$

Формулы (2.129) и (2.130) имеют важные применения в теории электрических шумов и теории турбулентности⁸⁶; при $\nu = 1/2$ они обращаются в уже известные нам формулы (2.89) и (2.90).

Исходя из приведенных выше примеров корреляционных функций ($B(\tau)$), легко построить большое число новых примеров таких функций. Много дополнительных примеров корреляционных функций $B(\tau)$ можно также найти в обширной специальной литературе по теории характеристических функций^{86a}; здесь, однако, мы ограничимся теми примерами, которые были указаны выше.

13.

Линейные преобразования стационарных случайных процессов

В § 10 было разъяснено, что спектральное разложение стационарного случайного процесса $X(t)$ имеет довольно специальный смысл: оно не приложимо к отдельным реализациям $x(t)$, а требует рассмотрения всего ансамбля таких реализаций и вероятностного истолкования соответствующего интеграла Фурье—Стилтьеса. И тем не менее это разложение оказывается очень полезным для многих приложений. Для того чтобы понять, почему так обстоит дело, надо прежде всего вспомнить, как именно обычно используется в прикладных задачах гармонический анализ числовых (неслучайных) функций $x(t)$.

Так как наибольшую ценность гармонический анализ представляет при изучении инвариантных во времени линейных преобразований функций $x(t)$, то стоит начать с общего рассмотрения таких линейных преобразований. Теории линейных преобразований (или, иначе, линейных систем, линейных фильтров или линейных операторов в функциональных пространствах — эти четыре термина имеют одно и то же значение) посвящен ряд больших монографий⁸⁷; здесь мы лишь кратко осветим некоторые самые основные относящиеся сюда факты, не претендуя ни на математическую строгость, ни на охват хотя бы важнейших прикладных аспектов соответ-

ствующей теории. Под преобразованием мы будем понимать операцию $\mathcal{L}$, применимую к некоторой совокупности функций (составляющей область определения операции $\mathcal{L}$) и переводящую каждую из этих функций $x(t)$ во вполне определенную новую функцию $y(t)$:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = y(t). \quad (2.131)$$

Операция $\mathcal{L}$ называется линейным преобразованием, если ее область определения вместе с любым конечным набором функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$ содержит и все их линейные комбинации $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t)$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — произвольные комплексные числа, и при этом

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{L}\{x_i(t)\}. \quad (2.132)$$

Число n в (2.132) может принимать любое целое положительное значение, но если допустить, что $n = \infty$, то операция $\mathcal{L}$ может оказаться неприменимой к функции $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i(t)$, даже если она применима ко всем функциям $x_i(t)$. Однако в дальнейшем нам будет удобно требовать, чтобы операция $\mathcal{L}$ обладала свойством непрерывности (т. е. переводила близкие друг к другу функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ из своей области определения снова в близкие функции) и, в частности, чтобы равенство (2.132) с $n = \infty$ было справедливым во всех тех случаях, когда обе его стороны при таком n имеют смысл.

Линейное преобразование $\mathcal{L}$ называется инвариантным во времени, если

$$\mathcal{L}\{x(t + \tau)\} = y(t + \tau) \quad (2.133)$$

при любом вещественном τ , где $x(t + \tau)$ и $y(t + \tau)$ — функции аргумента t , значения которых в момент t равны значениям функций $x(t)$ и соответственно $y(t)$ в момент $t + \tau$.

Важный класс линейных преобразований образуют линейные интегральные преобразования вида

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t; s) x(s) ds, \quad (2.134)$$

применимые к тем $x(t)$, для которых интеграл в правой части (2.134) оказывается сходящимся. Если преобразование (2.134) инвариантно во времени, то, значит,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(t; s) x(s + \tau) ds &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t + \tau; s) x(s) ds = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t + \tau; s + \tau) x(s + \tau) ds \end{aligned} \quad (2.135)$$

для любой функции $x(t)$ и любого τ . Следовательно, в этом случае $h(t + \tau; s + \tau) = h(t; s)$ при всех τ . Полагая, в частности, $\tau = -s$, найдем, что

$$h(t; s) = h(t - s; 0) = h(t - s) \quad (2.136)$$

(функция $h(t - s; 0)$ зависит уже только от одного аргумента $t - s$, и поэтому ее естественно обозначить просто как $h(t - s)$).

Итак, линейное преобразование (2.134) будет инвариантным во времени лишь при условии (2.136), когда оно приобретает вид

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - s) x(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) x(t - u) du. \quad (2.137)$$

Функция $h(t)$, которая называется *весовой функцией* (или *импульсной переходной функцией*, или *временной характеристикой*) преобразования $\mathcal{L}$, имеет простой физический смысл. Рассмотрим последовательность функций $\delta_n(t)$ из области определения оператора $\mathcal{L}$ такую, что

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n(t) = 0$ при всех $t \neq 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(t) dt = 1$ при всех n . Подставив $\delta_n(t)$ в правую часть формулы (2.137) вместо функции $x(t)$ и полагая $n \rightarrow \infty$, легко получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{\delta_n(t)\} = h(t). \quad (2.138)$$

Но последовательность $\delta_n(t)$ — это не что иное, как последовательность, сходящаяся к δ -функции $\delta(t)$, а равенство (2.138) эквивалентно основному свойству δ -функции:

$\int_{-\infty}^{\infty} h(t - s) \delta(s) ds = h(t)$. Следовательно, равенство (2.138) формально можно переписать в виде

$$h(t) = \mathcal{L}\{\delta(t)\}. \quad (2.139)$$

Таким образом, весовая функция $h(t)$ — это результат применения линейного преобразования $\mathcal{L}$ к (обобщенной) функции $\delta(t)$, отвечающей идеализированному представлению о мгновенном импульсе единичной интенсивности.

Предыдущие рассуждения показывают, что для того, чтобы линейное преобразование $\mathcal{L}$ могло быть записано в виде (2.137) (т. е. чтобы для него существовала весовая функция $h(t)$), надо, чтобы существовал предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L} \{ \delta_n(t) \} = h(t)$ (иначе говоря, надо, чтобы $\mathcal{L}$ можно было применить к δ -функции). Последнее условие, разумеется, выполняется далеко не всегда: существуют многие простые линейные преобразования, для которых выражению $\mathcal{L} \{ \delta(t) \}$ никакого разумного смысла придать нельзя. Однако даже и в таких случаях довольно часто используется запись (2.137), но только при этом считается, что h также является «обобщенной» функцией, для которой на самом деле не существуют «значения в точке» $h(t)$. При таком понимании обобщенные функции, разумеется, становятся просто синонимами линейных преобразований: задав каким-то образом линейное преобразование $\mathcal{L}$, можно считать, что тем самым задана и обобщенная функция h , являющаяся его весовой функцией.

Перейдем теперь к еще одному методу описания инвариантных во времени линейных преобразований $\mathcal{L}$, как раз и поясняющему ценность гармонического анализа для теории таких преобразований.

Предположим, что речь идет о преобразовании $\mathcal{L}$, применимом ко всем гармоническим колебаниям вида $x(t) = e^{i\omega t}$ (это предположение, которое ниже мы не будем специально оговаривать, на практике всегда можно считать справедливым). Оказывается, что в таком случае применение преобразования $\mathcal{L}$ к функции $e^{i\omega t}$ сводится к простому умножению этой функции на постоянный (т. е. не зависящий от t , но, вообще говоря, зависящий от ω) множитель $H = H(\omega)$, так что

$$\mathcal{L} \{ e^{i\omega t} \} = H(\omega) e^{i\omega t}. \quad (2.140)$$

Действительно, пусть $\mathcal{L} \{ e^{i\omega t} \} = y(t)$; тогда в силу линейности $\mathcal{L}$ (т. е. условия (2.132), где полагается $n = 1$, а $\alpha_1 = e^{i\omega \tau}$) имеем

$$\mathcal{L} \{ e^{i\omega(t+\tau)} \} = \mathcal{L} \{ e^{i\omega \tau} e^{i\omega t} \} = e^{i\omega \tau} \mathcal{L} \{ e^{i\omega t} \} = e^{i\omega \tau} y(t).$$

С другой стороны, в силу инвариантности $\mathcal{L}$ во времени (свойство (2.133)) $\mathcal{L} \{ e^{i\omega(t+\tau)} \} = y(t+\tau)$, так что

$$y(t+\tau) = e^{i\omega \tau} y(t).$$

Полагая здесь $t = 0$, получим

$$y(\tau) = e^{i\omega \tau} y(0).$$

Последнее равенство очевидно равносильно соотношению (2.140); они различаются лишь тем, что величина $y(0)$ в (2.140) обозначена символом $H(\omega)$, а переменное τ заменено на t .

Функция $H(\omega)$ является очень важной характеристикой преобразования $\mathcal{L}$; она называется **п е р е д а т о ч н о й ф у н к ц и е й**.

цией (или коэффициентом передачи, или частотной характеристикой) этого преобразования. Если преобразование $\mathcal{L}$ — вещественное (т. е. переводит вещественные функции $x(t)$ в вещественные же функции), то функция $\mathcal{L}\{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\} = H(\omega)e^{i\omega t} + H(-\omega)e^{-i\omega t}$ должна при всех t быть вещественной; отсюда, как нетрудно видеть, вытекает, что в случае вещественного преобразования $\mathcal{L}$

$$H(-\omega) = \overline{H(\omega)}. \quad (2.141)$$

Вместо одной комплексной функции $H(\omega)$ преобразование $\mathcal{L}$ иногда характеризуют двумя вещественными функциями $A(\omega) = |H(\omega)|$ и $\Psi(\omega) = \arg H(\omega)$ (так что $H(\omega) = A(\omega)e^{i\Psi(\omega)}$, т. е. $\mathcal{L}\{e^{i\omega t}\} = A(\omega)e^{i[\omega t + \Psi(\omega)]}$). Функцию $A(\omega)$ в таком случае называют коэффициентом усиления (или амплитудной частотной характеристикой) преобразования $\mathcal{L}$, а функцию $\Psi(\omega)$ — его фазовым сдвигом (или просто фазой, или фазовой частотной характеристикой). В случае вещественного преобразования $\mathcal{L}$ из (2.141) следует, что

$$A(-\omega) = A(\omega), \quad \Psi(-\omega) = -\Psi(\omega). \quad (2.141a)$$

Заметим, что если $H(\omega)$ — передаточная функция $\mathcal{L}$, то в силу линейности $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{k=1}^n \alpha_k e^{i\omega_k t}\right\} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathcal{L}\{e^{i\omega_k t}\} = \sum_{k=1}^n \alpha_k H(\omega_k) e^{i\omega_k t}. \quad (2.142)$$

Рассмотрим теперь значительно более широкий класс функций $x(t)$, к которым применим гармонический анализ (т. е. функций, разложимых в ряд Фурье, интеграл Фурье или интеграл Фурье—Стилтьеса). Вспомним, что мы условились считать рассматриваемые преобразования $\mathcal{L}$ в пределах своей области определения непрерывными в том смысле, что если $\mathcal{L}$ применимо и ко всем функциям $x_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$ и к их пределу при $n \rightarrow \infty$, то при весьма широких условиях имеет место равенство $\mathcal{L}\{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{x_n(t)\}$. Ясно, что это условие непрерывности наверное выполняется для интегральных преобразований вида (2.137); также и все другие реально встречающиеся на практике линейные преобразования $\mathcal{L}$ являются непрерывными в указанном здесь смысле. Так как и бесконечный ряд Фурье, и интеграл Фурье, и интеграл Фурье—Стилтьеса представимы в виде предела частных (или интегральных) сумм, состоящих из конечного числа гармоник, то в силу непрерывности символ линейного преобразования можно внести под знак суммы (в случае

рядов Фурье) или интеграла (в случае интегралов Фурье и Фурье—Стилтьеса), так что

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_k \alpha_k e^{i\omega_k t} \right\} = \sum_k \alpha_k \mathcal{L} \{ e^{i\omega_k t} \} = \sum_k \alpha_k H(\omega_k) e^{i\omega_k t}, \quad (2.143)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \int e^{i\omega t} \varphi(\omega) d\omega \right\} &= \int \mathcal{L} \{ e^{i\omega t} \} \varphi(\omega) d\omega = \\ &= \int e^{i\omega t} H(\omega) \varphi(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (2.143a)$$

$$\mathcal{L} \left\{ \int e^{i\omega t} d\Phi(\omega) \right\} = \int \mathcal{L} \{ e^{i\omega t} \} d\Phi(\omega) = \int e^{i\omega t} H(\omega) d\Phi(\omega). \quad (2.143б)$$

Мы видим, что знание передаточной функции $H(\omega)$ позволяет очень просто описать воздействие преобразования $\mathcal{L}$ на любую функцию $x(t)$, к которой применим гармонический анализ. Именно это обстоятельство и определяет в первую очередь прикладную ценность гармонического анализа, так как инвариантные во времени линейные преобразования крайне часто встречаются в приложениях и играют центральную роль в очень многих практических задачах.

Пусть теперь $\mathcal{L}$ — это интегральное преобразование вида (2.137). В таком случае, подставив в правую часть (2.137) вместо $x(s)$ функцию $e^{i\omega s}$, найдем, что

$$\mathcal{L} \{ e^{i\omega t} \} = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{-i\omega u} du,$$

откуда следует, что в данном случае

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} h(u) du. \quad (2.144)$$

В силу формулы обращения интегралов Фурье отсюда вытекает, что

$$h(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega u} H(\omega) d\omega, \quad (2.145)$$

т. е. функции $h(u)$ и $H(\omega)$ являются просто преобразованиями Фурье друг друга. Следовательно, в случае интегрального преобразования (2.137) передаточная функция $H(\omega)$ должна достаточно быстро убывать на бесконечности — так, чтобы существовало ее преобразование Фурье $h(u)$. Легко показать и обратно, если существует преобразование Фурье $h(u)$ функции $H(\omega)$, то это означает, что линейное преобразование $\mathcal{L}$ можно применить

к δ -функции, причем $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = h(u)$, так что $\mathcal{L}$ — это интегральное преобразование с весовой функцией $h(u)$. Если же интеграл в правой части (2.145) — расходящийся, то соответствующая «весовая функция» $h(u)$ не существует в обычном смысле, а является обобщенной функцией.

Предположим теперь, что функция $x(t)$ описывает изменение во времени некоторой реальной физической величины (например, силы электрического тока, или скорости, или температуры), а линейное преобразование $\mathcal{L}$ значений $x(t)$ осуществляется какой-то физической системой, состоящей из электрических, механических или термодинамических элементов и имеющей реальный «вход», на который непосредственно воздействуют колебания $x(t)$, создавая тем самым на «выходе» системы колебания $y(t) = \mathcal{L}\{x(t)\}$. В таком случае весовая функция $h(u)$ преобразования $\mathcal{L}$ должна еще удовлетворять важному дополнительному условию. А именно, в реальных физических системах всегда

$$h(u) = 0 \quad \text{при } u < 0. \quad (2.146)$$

Нетрудно понять физический смысл условия (2.146): в силу (2.137) оно означает, что отклик на выходе системы $\mathcal{L}$ не может появиться до того, как было подано воздействие на ее вход (так что значение $\mathcal{L}\{x(t)\}$ в момент t_1 зависит лишь от значений $x(t)$ при $t \leq t_1$; в частности, если $x(t) = 0$ при $t \leq t_1$, то и $\mathcal{L}\{x(t)\} = 0$ при $t \leq t_1$). Иначе говоря, условие (2.146) выражает общий принцип причинности (следствие не может предвращать во времени причину), действующий в окружающем нас материальном мире; оно называется условием ф и з и ч е с к о й р е а л и з у е м о с т и преобразования $\mathcal{L}$. Разумеется, это условие можно выразить и в виде некоторого свойства передаточных функций $H(\omega)$ всех реальных линейных систем $\mathcal{L}$; на этом, однако, мы здесь не будем задерживаться.⁸⁸

Перейдем к основной теме настоящего параграфа — применению инвариантных во времени линейных преобразований $\mathcal{L}$ к стационарным случайным процессам $X(t)$. Вообще говоря, класс рассматриваемых преобразований $\mathcal{L}$ и в этом случае можно задать, указав их общие свойства (2.132) и (2.133), где только надо заменить фиксированные функции времени $x(t)$ случайными процессами $X(t)$. Нам, однако, удобнее будет воспользоваться более конкретным описанием класса преобразований $\mathcal{L}$, выписав общую формулу для таких преобразований, охватывающую все представляющие интерес линейные преобразования процессов $X(t)$.

Начнем с частного класса преобразований вида

$$\mathcal{L}\{X(t)\} = \sum_{j=1}^N h_j X(t - \tau_j), \quad (2.147)$$

где N — целое число, h_j — постоянные (вообще говоря, комплексные) коэффициенты, а τ_j — фиксированные вещественные числа (положительные, отрицательные или равные нулю). Ясно, что формула (2.147) задает инвариантное во времени линейное преобразование, т. е. что $\mathcal{L}$ обладает свойствами (2.132) и (2.133) (с заменой $x(t)$ на $X(t)$); однако класс таких преобразований (2.147) является все же довольно узким. Гораздо более широкий класс линейных преобразований мы получим, допустив, что $\mathcal{L}$ может также быть и пределом конечных сумм вида (2.147), т. е. включив в класс рассматриваемых преобразований все $\mathcal{L}$, представимые в виде

$$\mathcal{L}\{X(t)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{N_n} h_j^{(n)} X(t - \tau_j^{(n)}) \quad (2.148)$$

(где предел последовательности случайных величин, как обычно, понимается в смысле сходимости в среднем квадратичном). Формула (2.148) оказывается уже достаточно широкой; поэтому в дальнейшем мы ограничимся преобразованиями вида (2.148).

Воспользуемся теперь спектральным разложением (2.61) процесса $X(t)$. Подставив это разложение в формулу (2.148), получим

$$\mathcal{L}\{X(t)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \sum_{j=1}^{N_n} h_j^{(n)} e^{-i\tau_j^{(n)}\omega} dZ(\omega). \quad (2.149)$$

Нетрудно убедиться, что предел в среднем квадратичном в правой части (2.149) будет существовать тогда и только тогда, когда последовательность функций $H_n(\omega) = \sum_{j=1}^{N_n} h_j^{(n)} e^{-i\tau_j^{(n)}\omega}$ сходится к некоторой функции $H(\omega)$ в среднем квадратичном по мере $dF(\omega)$ (где $F(\omega)$ — спектральная функция процесса $X(t)$, так что $dF(\omega) = \langle |dZ(\omega)|^2 \rangle$), т. е. когда существует функция $H(\omega)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |H_n(\omega) - H(\omega)|^2 dF(\omega) = 0. \quad (2.150)$$

Функция $H(\omega)$ при этом условии очевидно будет удовлетворять неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 dF(\omega) < \infty, \quad (2.151)$$

а предел в правой части (2.149) будет выражаться через $H(\omega)$ с помощью формулы

$$\mathcal{L}\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} H(\omega) dZ(\omega). \quad (2.152)$$

С другой стороны, если $H(\omega)$ — произвольная комплексная функция, удовлетворяющая условию (2.151), то всегда найдется последовательность функций $H_n(\omega)$, $n = 1, 2, \dots$ вида $H_n(\omega) = \sum_j h_j^{(n)} e^{-it_j^{(n)}\omega}$, сходящаяся к $H(\omega)$ в смысле (2.150); это означает, что отвечающее $H(\omega)$ преобразование (2.152) при условии (2.151) всегда может быть представлено в виде (2.148). Таким образом, введенный нами класс линейных преобразований $\mathcal{L}$ вида (2.148) точно совпадает с классом преобразований (2.152), где $Z(\omega)$ — случайная функция частоты, фигурирующая в спектральном разложении (2.61) стационарного процесса $X(t)$, а $H(\omega)$ — обычная (неслучайная) функция, удовлетворяющая (2.151). Комплексная функция $H(\omega)$ называется передаточной функцией преобразования (2.152), а ее модуль $|H(\omega)| = A(\omega)$ и аргумент $\arg H(\omega) = \Psi(\omega)$ — его коэффициентом усиления и, соответственно, фазовым сдвигом.

Формула (2.152) показывает, что $\mathcal{L}\{X(t)\} = Y(t)$ также является стационарным случайным процессом, причем функция $Z_Y(\omega)$, входящая в спектральное разложение этого процесса, связана с функцией $Z(\omega) = Z_X(\omega)$ соотношениями:

$$dZ_Y(\omega) = H(\omega) dZ(\omega) = A(\omega) e^{i\Psi(\omega)} dZ(\omega),$$

$$Z_Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} H(\omega') dZ(\omega'). \quad (2.153)$$

Следовательно, если $F_{YY}(\omega)$ — спектральная функция преобразованного процесса $Y(t)$, то

$$dF_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 dF(\omega) = [A(\omega)]^2 dF(\omega),$$

$$F_{YY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} |H(\omega')|^2 dF(\omega'). \quad (2.154)$$

Формула (2.153), в частности, показывает, что линейное преобразование $Y(t)$ процесса $X(t)$ с дискретным спектром всегда будет процессом с дискретным спектром (причем спектры $X(t)$ и $Y(t)$ будут состоять из той же совокупности частот $\omega_1, \omega_2, \dots$); если же, как это чаще всего бывает на практике, процесс $X(t)$

имеет спектральную плотность $f(\omega)$, то и $Y(t)$ будет иметь спектральную плотность $f_{YY}(\omega)$, причем

$$f_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 f(\omega). \quad (2.155)$$

Класс допустимых передаточных функций $H(\omega)$ в последнем случае определяется очень простым условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(\omega)|^2 f(\omega) d\omega < \infty, \quad (2.151a)$$

а корреляционная функция $B_{YY}(\tau)$ процесса $Y(t)$ будет равна

$$B_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\omega} |H(\omega)|^2 f(\omega) d\omega. \quad (2.156)$$

Постараемся теперь связать друг с другом рассматривавшееся в начале этого параграфа понятие линейного преобразования $\mathcal{L}$, действующего на фиксированные функции $x(t)$ времени t , и введенное выше понятие линейного преобразования $\mathcal{L}$, действующего на стационарные случайные процессы $X(t)$. Пусть, например, преобразование $\mathcal{L}$ функций $x(t)$ имеет непрерывную весовую функцию $h(u)$, т. е. может быть представлено в виде (2.137), где функция $h(u)$ непрерывна. Сопоставим этому преобразованию следующее преобразование стационарных случайных процессов $X(t)$:

$$\mathcal{L}\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) X(t-u) du, \quad (2.153a)$$

где интеграл в правой части теперь понимается как интеграл в среднем квадратичном (т. е. в обычном смысле, о котором шла речь в конце § 4). Ясно, что преобразование (2.137a) входит в класс преобразований (2.148), если только интеграл в правой части (2.137a) — сходящийся, т. е. если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \overline{h(v)} B(v-u) du dv < \infty \quad (2.157)$$

(ср. условие (1.46)). Подставив в правую часть (2.137a) вместо процесса $X(t)$ его спектральное разложение, легко убедимся, что передаточная функция $H(\omega)$ преобразования (2.137a) задается известной нам формулой преобразования Фурье (2.144); условие (2.157) при этом может быть переписано в терминах преобразования Фурье $H(\omega)$ функции $h(u)$ и тогда оно примет вид (2.151). Но на с. 54 мы отмечали, что в случае непрерывных в среднем квадратичном стационарных процессов $X(t)$ (а только

такие процессы и рассматриваются в этой книге) соответствующие реализации $x(t)$ будут интегрируемыми функциями (обычно либо просто непрерывными, либо имеющими лишь дискретные точки разрыва первого рода), причем значения

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) x(t-u) du \quad (2.158)$$

здесь будут выборочными значениями (реализациями) интеграла в среднем квадратичном, стоящего в правой части равенства (2.137а). Поэтому, подав на вход линейной системы, осуществляющей преобразование (2.137) неслучайных функций $x(t)$, реализацию $x(t)$ процесса $X(t)$, мы получим (при условии (2.157)) на выходе этой системы реализацию процесса $\mathcal{L}\{X(t)\} = Y(t)$, задаваемого формулой (2.137а).

Напомним, что ни спектральное разложение процесса $X(t)$, ни спектральное разложение преобразованного процесса $Y(t)$ не могут быть непосредственно применены к отдельным реализациям $x(t)$ и $y(t)$; существенно, однако, что функция $y(t)$ на выходе линейной системы, описываемой уравнением (2.137), будет в рассматриваемом случае являться реализацией стационарного случайного процесса $Y(t)$, имеющего спектральное разложение (2.152), и поэтому во многих отношениях будет вести себя так, как будто она допускает разложение по гармоникам $e^{i\omega t}$, коэффициенты которого получаются из коэффициентов соответствующего разложения функции $x(t)$ с помощью умножения на передаточную функцию $H(\omega)$ (типичный пример, иллюстрирующий такое поведение $y(t)$, будет приведен на с. 144).

Именно это обстоятельство и объясняет, почему предположение о допустимости гармонического анализа функций $x(t)$ так часто приводило к вполне разумным результатам даже тогда, когда речь шла о функциях, заведомо ни в ряд Фурье, ни в интеграл Фурье, ни в интеграл Фурье—Стилтьеса не разлагающихся (но могущих считаться реализациями стационарных случайных процессов); его мы и имели в виду, когда отмечали (на с. 105), что обычные применения гармонического анализа неслучайных функций $x(t)$ переносятся практически без изменения и на спектральное разложение стационарных случайных процессов.

До сих пор мы для простоты предполагали, что преобразование $\mathcal{L}\{X(t)\}$ задается интегральной формулой (2.137а). Однако на с. 52 отмечалось, что и в случае дифференцируемого (в среднем квадратичном) процесса $X(t)$ его реализации $x(t)$ оказываются дифференцируемыми функциями, причем $x'(t)$ здесь совпадает с реализацией случайного процесса $X'(t)$. Отсюда следует,

что и в применении, например, к линейному преобразованию вида

$$\mathcal{L}\{X(t)\} = a_0 \frac{d^n X(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} X(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n X(t), \quad (2.159)$$

где все производные понимаются в смысле пределов в среднем квадратичном, реализации процесса $\mathcal{L}\{X(t)\}$ при условии, что процесс $X(t)$ имеет все производные до n -го порядка включительно, также будут совпадать с функциями $\mathcal{L}\{x(t)\} = a_0 d^n x(t)/dt^n + \dots + a_n x(t)$, получающимися с помощью применения соответствующего линейного преобразования $\mathcal{L}$ к отдельным реализациям процесса $X(t)$. Вообще, если $\mathcal{L}$ — линейное преобразование (2.148), имеющее смысл в применении к процессу $X(t)$, то для реализаций $x(t)$ этого процесса $X(t)$, как правило, будет существовать предел (понимаемый в обычном смысле)

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{N_n} h_j^{(n)} x(t - \tau_j^{(n)}), \quad (2.148a)$$

причем предел (2.148a) будет совпадать с соответствующей реализацией процесса $\mathcal{L}\{X(t)\}$. Это важное обстоятельство как раз и позволяет заменять линейные преобразования вида (2.148) стационарных случайных процессов $X(t)$ линейными преобразованиями (2.148a), применяемыми к отдельной реализации $x(t)$ процесса $X(t)$.

Возможность реального осуществления линейных преобразований $\mathcal{L}$ случайных процессов $X(t)$ при помощи специальных устройств (линейных систем или фильтров) позволяет придать спектральному разложению (2.61) непосредственный физический смысл. Выше термин «линейный фильтр» мы употребляли как синоним линейной системы или линейного преобразования; теперь, однако, стоит подчеркнуть, что в технике этот термин имеет еще и более специальный смысл: фильтром часто называется такое устройство, которое пропускает гармонические колебания с частотами из определенного интервала (полосы пропускания данного фильтра), но подавляет (т. е. резко ослабляет или вообще не пропускает) все прочие гармонические колебания. Особенно широкое распространение имеют электрические фильтры, играющие важную роль почти во всех радиотехнических приборах; такие фильтры обычно представляют собой электрическую цепь, имеющую четыре свободных конца (четыре полюсника); два конца являются «входом» фильтра, а два — «выходом». Если на вход

фильтра подать электрическое напряжение, гармонически колеблющееся с круговой частотой ω , то в зависимости от того, принадлежит ω полосе пропускания фильтра или нет, напряжение на выходе будет или почти точно следовать напряжению на входе (а иногда даже будет отвечать умножению напряжения на входе на постоянное число — в этом случае соответствующий фильтр называется усилителем), или будет практически равно нулю.

В основном на практике применяют следующие типы фильтров: фильтры низких частот, пропускающие гармонические колебания с частотой, меньшей некоторой пороговой частоты ω_0 , но задерживающие все колебания с частотой $\omega > \omega_0$; фильтры высоких частот, пропускающие колебания, если $\omega > \omega_0$, но задерживающие колебания при $\omega < \omega_0$; и полосовые фильтры, пропускающие лишь колебания с частотой из некоторого интервала $\omega_1 < \omega < \omega_2^*$. Электрические схемы таких фильтров можно найти в любых справочниках по радиотехнике; описания реже применяющихся (но иногда все же использующихся) механических и акустических фильтров также можно найти в специальной литературе.⁸⁹

Пусть теперь $X(t)$ — вещественный стационарный случайный процесс, имеющий спектральное разложение (2.61), а $x(t)$ — его реализация, которую для определенности мы будем себе представлять в виде флуктуирующего электрического напряжения. Если мы подадим это напряжение на вход полосового электрического фильтра с полосой пропускания $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$, то напряжение на выходе фильтра будет представлять собой реализацию случайного процесса $X_{\omega_1, \omega_2}(t)$ со спектральным разложением вида

$$X_{\omega_1, \omega_2}(t) = \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} e^{i\omega t} dZ(\omega) + \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{i\omega t} dZ(\omega) = 2\operatorname{Re} \int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (2.160)$$

(где $\operatorname{Re} X$ означает вещественную часть комплексного числа X). Процесс $X_{\omega_1, \omega_2}(t)$ — это спектральная компонента процесса $X(t)$, отвечающая интервалу частот $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ (или, иначе, — вклад указанного интервала частот в значения $X(t)$). Таким образом, мы видим, что отдельные спектральные компоненты $X_{\omega_1, \omega_2}(t)$ (точнее говоря, их реализации $x_{\omega_1, \omega_2}(t)$) могут быть эффективно выделены при помощи соответствующих полосовых фильтров.

* На самом деле идеальные фильтры (т. е. такие, что для них точно выполняются равенства: $|H(\omega)| = 1$ в пределах полосы пропускания фильтра и $|H(\omega)| = 0$ вне этой полосы) всегда являются физически нереализуемыми. Однако на практике всегда можно подобрать физически реализуемый фильтр с коэффициентом усиления $A(\omega) = |H(\omega)|$, достаточно близким к тому, который нам требуется (см. примечание ⁸⁹).

Заметим еще, что если полоса пропускания $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ полосового фильтра будет достаточно узкой (по сравнению со «средней частотой» $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$), то реализацию $x_{\omega_1, \omega_2}(t)$ компоненты $X_{\omega_1, \omega_2}(t)$ можно будет на любом заранее заданном конечном интервале временной оси $0 \leq t \leq T$ с любой заданной степенью точности аппроксимировать реализацией случайного гармонического колебания $\text{Re} [Z(\Delta\omega) e^{i\omega_0 t}]$ (где $Z(\Delta\omega) = Z(\omega_2) - Z(\omega_1)$). Иначе говоря, хотя функция $x_{\omega_1, \omega_2}(t)$, будучи реализацией стационарного процесса, также не будет разлагаться в интеграл Фурье (или Фурье—Стилтьеса), тем не менее при очень малом $\Delta\omega/\omega_0$ колебание на выходе соответствующего полосового фильтра на протяжении большого числа периодов будет с высокой степенью точности аппроксимироваться синусоидой круговой частоты ω_0 , т. е. будет вести себя так же, как оно вело бы себя, если бы заданная реализация $x(t)$ разлагалась в интеграл Фурье. Разумеется, амплитуда и фаза соответствующей синусоиды будут меняться от реализации к реализации; кроме того, в случае непрерывного спектра процесса $X(t)$ компонента $x_{\omega_1, \omega_2}(t)$ ни при каком $\Delta\omega$ не будет строго периодической: если мы выделим одну очень длинную реализацию и рассмотрим два ее отрезка, отделенные большим промежутком времени, то окажется, что хотя оба эти отрезка и хорошо приближаются отрезками синусоид одной и той же частоты ω_0 , но амплитуда и фаза у этих двух отрезков синусоиды будут, вообще говоря, различными.

Возможность реального выделения спектральных компонент $X_{\omega_1, \omega_2}(t)$ открывает возможность экспериментального определения значений спектральной функции $F(\omega)$ и спектральной плотности $f(\omega)$ стационарного случайного процесса $X(t)$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \langle [X_{\omega_1, \omega_2}(t)]^2 \rangle &= [F(\omega_2) - F(\omega_1)] + [F(-\omega_1) - F(-\omega_2)] = \\ &= 2[F(\omega_2) - F(\omega_1)]. \end{aligned} \quad (2.161)$$

Таким образом, разность $F(\omega_2) - F(\omega_1)$ (совпадающая с $\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(\omega) d\omega$, если существует плотность $f(\omega)$) равна половине среднего квадрата спектральной компоненты $X_{\omega_1, \omega_2}(t)$ процесса $X(t)$, т. е. она пропорциональна полной энергии выделяемой за единицу времени (мощности) совокупности колебаний с частотами из интервала $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$, входящих в состав $X(t)$.

Напомним еще, что в силу некоррелированности приращений $Z(\omega)$ спектральные компоненты $X(t)$, отвечающие непересекающимся интервалам оси частот, будут взаимно некоррелированными, а средний квадрат их суммы будет равен сумме средних квадратов слагаемых; поэтому полная энергия $X(t)$ складывается из энергий компонент, отвечающих разбиению оси частот на непе-

ресекающиеся части, а спектральная функция $F(\omega)$ определяет *распределение полной энергии (или мощности) $X(t)$ по спектру частот ω* . Соответственно этому спектральная плотность $f(\omega)$ может быть также названа плотностью спектрального распределения энергии (или мощности) процесса $X(t)$; в прикладной литературе ее часто просто называют спектром энергии (или спектром мощности) процесса $X(t)^*$.

В § 6 мы видели, что средний квадрат стационарного случайного процесса $X(t)$ может быть при широких условиях определен с хорошей точностью по одной достаточно длинной реализации этого процесса. Отсюда вытекает, что функции $F(\omega)$ и $f(\omega)$ обе могут быть определены экспериментально по данным о процессах на выходе ряда полосовых фильтров, на вход которых подается реализация процесса $X(t)$. Вопрос об определении спектральных функции и плотности стационарного процесса $X(t)$ по относящимся к нему экспериментальным данным является весьма важным, и о нем мы еще будем специально говорить в § 18; здесь же мы ограничимся лишь несколькими краткими замечаниями, относящимися к случаю существования спектральной плотности $f(\omega)$.

Подадим реализацию $x(t)$ процесса $X(t)$, заданную в виде флуктуирующего электрического напряжения, на вход электрического фильтра низких частот, пропускающего (и притом практически без искажений) лишь колебания с частотой, меньшей заданного значения ω , а к выходу фильтра подключим ваттметр (квадрант), измеряющий энергию тока (т. е. квадрат силы тока или напряжения). В таком случае стрелка этого прибора остановится на значении, пропорциональном
$$\int_0^{\omega} f(\omega') d\omega' = F(\omega) - F(0)$$

(осреднение по времени, нужное для получения именно среднего квадрата тока на выходе прибора, всегда в какой-то мере осуществляется самим прибором в силу его инерционности; если этого недостаточно, то надо лишь дополнительно осреднить по времени показания ваттметра, что нетрудно сделать).

Меняя значение ω , мы найдем здесь весь ход кривой $F(\omega) - F(0)$ (при условии, что коэффициент пропорциональности между показаниями ваттметра и квадратом напряжения на его входе уже определен из данных тарировки прибора). После дифференцирования найденной кривой по ω получаются и сами значения $f(\omega)$.

* Эти термины иногда используются даже и тогда, когда процесс $X(t)$ описывает флуктуации величины, квадрат которой не имеет смысла энергии (например, когда $X(t)$ — это температура или толщина ткацкой нити).

Вместо непрерывного изменения граничной частоты ω фильтра низких частот можно также воспользоваться набором полосовых фильтров с узкой полосой пропускания, каждый из которых позволяет приближенно определить значение $f(\omega)$ при ω , равном средней частоте соответствующей полосы — такой набор ряда узкополосных фильтров часто монтируется в виде одного прибора, называемого спектральным анализатором (см. также с. 206—207).

Вернемся теперь к теореме Хинчина о спектральном разложении корреляционной функции $B(\tau)$. Как мы видим, теорема эта связывает важнейшую статистическую характеристику процесса $X(t)$ — его корреляционную функцию, с очень важной физической характеристикой — распределением энергии процесса по спектру частот. Обе указанные характеристики могут быть непосредственно измерены (вопрос об измерении функции $B(\tau)$ обсуждался нами в § 6); это обстоятельство позволяет поставить вопрос об экспериментальной проверке и самой математической теоремы Хинчина.

Одна из первых попыток такой проверки была осуществлена в 1938 г. известным английским ученым-механиком Тэйлором на материале измерений пульсаций скорости в турбулентном потоке, создающемся за решеткой, установленной внутри аэродинамической трубы (см. рис. 16 а); на рис. 16 б приведены результаты еще одной подобной проверки, также относящейся к турбулентным пульсациям скорости.⁹⁰ Как и следовало ожидать, результаты обоих представленных на рис. 16 опытов весьма точно согласуются с выводами из теоремы Хинчина.

Аналогичные эксперименты многократно производились в применении к случайным флуктуациям $X(t)$ самой разнообразной природы и всегда приводили к прекрасному согласию теории с опытом; в настоящее время такого рода опыты широко используются на практике для взаимной проверки приборов, предназначенных для измерения спектральных плотностей $f(\omega)$ и корреляционных функций $B(\tau)$, а теорема Хинчина при этом всегда рассматривается как твердо установленное соотношение, связывающее между собой результаты этих двух типов измерений. Заметим еще, что та же теорема очень часто применяется и для определения спектральной плотности по измеренным значениям корреляционной функции или же корреляционной функции по измеренным значениям спектральной плотности (подробнее об этом будет говориться в § 18).

Результаты настоящего параграфа проливают дополнительный свет на сделанное при обсуждении понятия белого шума замечание о том, что в каждой конкретной задаче существенную роль обычно играет лишь некоторый ограниченный интервал частот (см. с. 119). Смысл этого замечания заключается в том, что практические задачи теории случайных процессов в большинстве случаев связаны с исследованием тех или иных линейных преобразований рассматриваемых

процессов (т. е. их прохождения через одну или несколько «линейных систем»). Но реальные линейные системы почти всегда можно считать имеющими лишь ограниченную полосу пропускания, за пределами которой их коэффициент усиления $A(\omega)$ оказывается уже настолько малым, что с точки зрения приложений его можно просто считать равным нулю. Совокупность частот ω , входящих в полосу пропускания всех линейных систем, преобразующих процесс $X(t)$ в условиях данной задачи, как раз и составляет «ограниченную полосу частот, только и

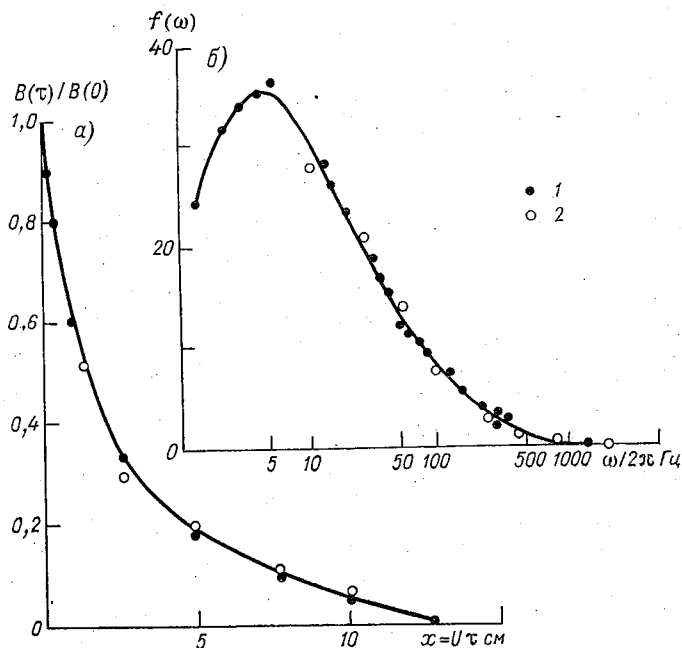


Рис. 16.

а — Сравнение измеренных значений корреляционной функции турбулентных пульсаций продольной скорости в потоке за решеткой, установленной в аэродинамической трубе (1), со значениями $B(\tau)$, вычисленными по измеренным значениям $f(\omega)$ с помощью теоремы Хинчина (2) (по [325]); U — средняя скорость течения в аэродинамической трубе. б — Сравнение измеренной спектральной плотности турбулентных пульсаций скорости в аналогичных условиях (1) со значениями $f(\omega)$, вычисленными по измеренным значениям с помощью формулы (2.82) (2) (по [270]) $B(\tau)$.

интересную для рассматриваемой задачи; если в пределах этой полосы спектральная плотность $f(\omega)$ процесса $X(t)$ остается практически постоянной, то мы вполне можем заменить этот процесс идеализированным процессом белого шума.

Заметим еще, что понятие линейного преобразования (иначе, линейной системы или линейного фильтра) может быть положено в основу доказательства как теоремы Бохнера—Хинчина о спектральном разложении любой положительно определенной функции (а значит и любой корреляционной функции $B(\tau)$), так и теоремы о спектральном разложении самих стационарных процессов $X(t)$. Начнем с теоремы Бохнера—Хинчина и наметим вкратце метод ее доказательства, опирающийся на понятие линейного преобразования. Ограничимся для простоты случаем функций $B(\tau)$, так быстро убывающих на беско-

нечности, что они допускают разложение в интеграл Фурье вида (2.67) с непрерывной функцией $f(\omega)$. Для таких функций основным содержанием теоремы Бохнера—Хинчина будет утверждение о том, что если функция $B(\tau)$ — положительно определенная, то ее преобразование Фурье $f(\omega)$ обязательно будет неотрицательным при всех ω (обратное утверждение о том, что из неотрицательности $f(\omega)$ следует положительная определенность $B(\tau)$, доказывается совсем просто; ср. с.221). Для доказательства нужного нам утверждения попробуем допустить, что преобразование Фурье $f(\omega)$ какой-то положительно определенной функции $B(\tau)$ отрицательно в точке $\omega = \omega_0$ (а значит, в силу непрерывности $f(\omega)$, и во всех точках какого-то достаточно узкого интервала $\Delta\omega = [\omega_1, \omega_2]$, окружающего точку ω_0). Воспользуемся тем, что в силу результатов, изложенных на с. 45, каждая положительно определенная функция $B(\tau)$ является корреляционной функцией некоторого стационарного случайного процесса $X(t)$. Рассмотрим следующее линейное преобразование процесса $X(t)$:

$$Y(t) = \mathcal{L}\{X(t)\} = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_2 u} - e^{i\omega_1 u}}{iu} X(t-u) du, \quad (2.162)$$

которое, как легко видеть, эквивалентно пропусканию этого процесса через идеальный полосовой фильтр с полосой пропускания $\Delta\omega = [\omega_1, \omega_2]$ (см. формулу (П.36)); при этом то, что фильтр (2.162) физически нереализуем, для нас теперь не играет роли. Используя формулу (1.47), нетрудно показать, что

$$\langle |Y(t)|^2 \rangle = \int_{\omega_1}^{\omega_2} f(\omega) d\omega \quad (\text{этот результат, разумеется, фактически совпадает}$$

с (2.161)). Но величина $\langle |Y(t)|^2 \rangle$ всегда неотрицательна; значит, и $\int_{\omega_1}^{\omega_2} f(\omega) d\omega$ не может быть отрицательным, что противоречит сделанному нами предположению.⁹¹

Что же касается доказательства теоремы о спектральном разложении стационарного случайного процесса $X(t)$, опирающегося на понятие линейного преобразования, то оно оказывается довольно близким к тому доказательству этой теоремы, о котором говорится в примечании.⁷¹ В самом деле, формула (П.22) как раз и задает некоторое линейное преобразование процесса $X(t)$, и нам надо только доказать, что получаемая при этом преобразовании функция $Z(\omega)$ обладает всеми нужными свойствами и может быть использована для представления $X(t)$ в виде интеграла Фурье—Стилтьеса. Теперь мы можем сделать идею этого доказательства еще более прозрачной, внося в него некоторые непринципиальные изменения. Вместо линейного преобразования (П.22) можно использовать родственное ему преобразование (2.162), где $[\omega_1, \omega_2] = \Delta\omega$; в таком случае, опираясь на формулу (1.48), легко показать, что процессы $Y_1(t), \dots, Y_n(t)$, отвечающие непересекающимся интервалам $\Delta_1\omega, \dots, \Delta_n\omega$ оси частот, будут все попарно некоррелированными, а $X(t)$ будет равно сумме процессов $Y_1(t), \dots, Y_n(t)$, отвечающих произвольному разбиению всей оси частот на непересекающиеся интервалы $\Delta_i\omega$. Полагая далее, что длины всех интервалов, на которые разбивается отрезок $-\Omega \leq \omega \leq \Omega$ оси частот, стремятся к нулю, а затем устремляя Ω к бесконечности, нетрудно получить отсюда общую формулу (2.58), описывающую спектральное разложение процесса $X(t)$.⁹²

14.

Примеры линейных преобразований
стационарных случайных процессов

Пример 1. Дифференцирование. В § 4 было введено понятие производной (в среднем квадратичном) стационарного случайного процесса $X(t)$, определяемое следующим равенством: $X'(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} [X(t + \Delta) - X(t)]/\Delta$. Ясно, что такая операция дифференцирования представляет собой линейное преобразование вида (2.148). Если $X(t)$ имеет спектральное разложение (2.61), то

$$\frac{X(t + \Delta) - X(t)}{\Delta} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega(t+\Delta)} - e^{i\omega t}}{\Delta} dZ(\omega).$$

Используя определение (2.62) интеграла (2.61), нетрудно показать, что если $X'(t)$ существует, то предельный переход $\Delta \rightarrow 0$ в предыдущей формуле можно осуществить под знаком интеграла, так что

$$X'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} i\omega dZ(\omega). \quad (2.163)$$

Формула (2.163) описывает спектральное разложение процесса $X'(t)$; одновременно она показывает, что операции дифференцирования отвечает передаточная функция $H(\omega) = i\omega$ (т. е. коэффициент усиления $A(\omega) = |\omega|$ и фазовый сдвиг $\Psi(\omega)$, равный $\pi/2$ при $\omega \geq 0$ и $-\pi/2$ при $\omega < 0$). Ясно, что операция дифференцирования является (неидеальным) фильтром высоких частот; она ослабляет входящие в состав $X(t)$ гармонические колебания с низкими частотами ω и усиливает колебания с высокими частотами.

Из формулы (2.163) сразу следует, что

$$\langle X'(t + \tau) \overline{X'(t)} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \omega^2 dF(\omega), \quad (2.164)$$

где $F(\omega)$ — спектральная функция $X(t)$. Используя спектральное разложение (2.52) корреляционной функции $B(\tau)$, легко показать, что правая часть (2.164) совпадает с $-B''(\tau)$, так что эта формула не отличается от (1.43). Условие (2.151) применимости линейного преобразования с передаточной функцией $H(\omega)$ к процессу $X(t)$ в рассматриваемом случае обращается в следующее условие дифференцируемости $X(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 dF(\omega) < \infty, \quad (2.165)$$

равносильное условию существования второй производной функции $B(\tau)$ в точке $\tau = 0$, так как левая часть (2.165) равна $-B''(0)$.

Дифференцируя процесс $X'(t)$, мы приходим ко второй производной $X''(t)$ исходного процесса $X(t)$; аналогично можно получить и высшие производные. Ясно, что n -я производная $X^{(n)}(t)$ процесса $X(t)$ представляется формулой

$$X^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} (i\omega)^n dZ(\omega), \quad (2.166)$$

т. е. она получается с помощью применения к $X(t)$ линейного преобразования с передаточной функцией $H(\omega) = (i\omega)^n$. Для применимости к $X(t)$ такого линейного преобразования (т. е. для существования $X^{(n)}(t)$) спектральная функция $F(\omega)$ должна удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2n} dF(\omega) < \infty, \quad (2.167)$$

равносильному условию существования у функции $B(\tau)$ производной порядка $2n$ в точке $\tau = 0$. Корреляционная функция процесса $X^{(n)}(t)$ в силу (2.166) будет представляема в виде

$$\langle X^{(n)}(t + \tau) \overline{X^{(n)}(t)} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \omega^{2n} dF(\omega); \quad (2.168)$$

она, очевидно, совпадает с функцией $(-1)^n B^{(2n)}(\tau)$.

Пример 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. К процессам $X(t)$, удовлетворяющим условию (2.167) (т. е. имеющим производные до n -го порядка включительно), можно применить преобразование

$$Y(t) = \mathcal{L}\{X(t)\} = a_0 \frac{d^n X(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} X(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n X(t). \quad (2.169)$$

Ясно, что передаточная функция этого преобразования равна

$$H(\omega) = a_0 (i\omega)^n + a_1 (i\omega)^{n-1} + \dots + a_n. \quad (2.170)$$

Пример 3. Среднеарифметическое и экспоненциальное сглаживания. В тех случаях, когда специально интересуются лишь длиннопериодными (т. е. низкочастотными) возмущениями, а высокочастотные возмущения с периодами, меньшими некоторого фиксированного значения T или имеющими порядок T , не представляют интереса и могут рассматриваться как «шум», или тогда, когда есть основания считать, что указанные высокочастотные возмущения фиксируются с большими искажениями и поэтому данные о них все равно малонадежны, процесс $X(t)$ иногда ис-

кусственно осредняют по промежутку времени длины T , т. е. вместо $X(t)$ рассматривают новый процесс

$$Y_T(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t X(s) ds = \frac{1}{T} \int_0^T X(t-u) du. \quad (2.171)$$

Наоборот, в случаях, когда хотят подавить (т. е. исключить из рассмотрения) наиболее низкочастотные возмущения больших периодов, не представляющие интереса для данного исследования, среднее значение по фиксированному промежутку времени T вычитают из текущих значений рассматриваемого процесса, т. е. от значений $X(t)$ переходят к значениям

$$Y_T^1(t) = X(t) - \frac{1}{T} \int_{t-T}^t X(s) ds = X(t) - Y_T(t). \quad (2.171a)$$

Преобразование (2.171a) часто применяется, например, к измеренным значениям метеорологических полей для исключения так называемой эволюции уровня, состоящей в постепенном изменении среднего значения соответствующего поля (скажем, скорости ветра, температуры или влажности) с течением времени. Дело в том, что указанная эволюция уровня представляет собой очень низкочастотный процесс, который лишь с натяжкой (и только в случаях, когда значения $X(t)$ регистрируются на протяжении очень длительных промежутков времени) можно считать приближенно стационарным, в то время как процесс $Y_T^{(1)}(t)$ при разумном выборе значения T бесспорно будет стационарным процессом с нулевым средним значением, пригодным для определения статистических характеристик мелкомасштабных турбулентных пульсаций.⁹³

Ясно, что $Y_T(t)$ — это интегральное линейное преобразование процесса $X(t)$ с весовой функцией $h(u)$, равной $1/T$ при $0 \leq u \leq T$ и нулю при $u < 0$ или $u > T$; преобразованию $Y_T^{(1)}(t)$ отвечает обобщенная весовая функция $h^{(1)}(u) = \delta(u) - h(u)$. Отметим еще, что величина $Y_T(t)$ отличается от величины M_T формулы (1.53) только тем, что начальная точка интервала осреднения теперь считается не фиксированной, а переменной.

В силу формулы (2.144) линейному преобразованию (2.171) отвечает передаточная функция

$$H(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\omega u} du = e^{-i\omega T/2} \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}, \quad (2.172)$$

так что $|H(\omega)| = A(\omega) = \left| \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right|$ (ср. рис. 15 б, где изображена функция $f(\omega)$, пропорциональная $[A(\omega)]^2$). Преобразованию (2.171а) отвечает передаточная функция

$$H^{(1)}(\omega) = 1 - H(\omega) = 1 - e^{-i\omega T/2} \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}; \quad (2.172а)$$

соответствующий коэффициент усиления $A^{(1)}(\omega) = |H^{(1)}(\omega)|$ обращается в нуль в точке $\omega = 0$, быстро возрастает с ростом $|\omega|$, а затем начинает колебаться со все уменьшающейся амплитудой около своего предельного значения $A^{(1)}(\infty)$, равного единице. Ясно, что преобразование, переводящее $X(t)$ в $Y_T(t)$, представляет собой (неидеальный) фильтр низких частот, в то время как преобразование, переводящее $X(t)$ в $Y_T^{(1)}(t)$ — неидеальный фильтр высоких частот.

Формула (2.171) иногда применяется и для приближенного учета осреднения, вносимого измеряющим величиной $X(t)$ прибором в ее истинные значения. Дело в том, что любой измерительный прибор всегда обладает инерцией (характеризуемой так называемой постоянной времени прибора), т. е. он в какой-то мере осредняет значения измеряемой величины. Это осреднение нередко играет заметную роль, причем во многих случаях о нем можно получить достаточное представление, приняв грубое предположение о том, что показание $Y_T(t)$ прибора связано с истинным значением измеряемой величины $X(t)$ формулой (2.171), где T — соответствующая постоянная времени.

Помимо среднеарифметического сглаживания (2.171) в приложениях довольно часто встречается и экспоненциальное сглаживание процесса $X(t)$, задаваемое формулой

$$Y(t) = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} e^{-u/T} X(t-u) du. \quad (2.173)$$

В частности, формула (2.173) весьма точно описывает осредняющее действие измеряющего значения $X(t)$ инерционного прибора с постоянной времени T в тех (весьма многочисленных) случаях, когда прибор этот описывается дифференциальным уравнением первого порядка (см. с. 155—156).⁹⁴ Экспоненциальное сглаживание (2.173) (а также и его дискретный аналог, относящийся к функциям от дискретного аргумента $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) иногда вводится и искусственно в ряды наблюдений $X(t)$ для ослабления входящих в состав $X(t)$ высокочастотных возмущений.

Передаточная функция $H(\omega)$ преобразования (2.173), очевидно, равна

$$H(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} e^{-i\omega u - u/T} du = \frac{1}{1 + i\omega T}, \quad (2.174)$$

так что, в частности,

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{1 + i\omega T} dZ(\omega),$$

$$A(\omega) = \frac{1}{(1 + \omega^2 T^2)^{1/2}}. \quad (2.175)$$

Функция $[A(\omega)]^2$ пропорциональна изображенной на рис. 11 б спектральной плотности $f(\omega)$, если принять, что $\alpha = 1/T$.

Пример 4. Решения дифференциальных уравнений как линейные преобразования. Пусть $Y_1(t) = \mathcal{L}_1\{X(t)\}$ — линейное преобразование случайного процесса $X(t)$. Мы можем применить к Y_1 еще одно линейное преобразование $\mathcal{L}_2$; тогда $Y_2(t) = \mathcal{L}_2\{Y_1(t)\} = \mathcal{L}_2\{\mathcal{L}_1\{X(t)\}\}$ также будет некоторым линейным преобразованием процесса $X(t)$. Это новое линейное преобразование обычно называется *произведением* преобразований $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ и обозначается как $\mathcal{L} = \mathcal{L}_2\mathcal{L}_1$. Его передаточная функция $H(\omega)$, как легко видеть, например, из формулы (2.140), определяется простой формулой $H(\omega) = H_2(\omega)H_1(\omega)$, где $H_1(\omega)$ и $H_2(\omega)$ — передаточные функции преобразований $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.

Введем теперь в рассмотрение тождественное (или единичное) преобразование $\mathcal{E}$, определяемое условием $\mathcal{E}\{X(t)\} = X(t)$ (т. е. никак не изменяющее процесса $X(t)$); ясно, что его передаточная функция — это $H_0(\omega) \equiv 1$. Преобразование $\mathcal{L}_1^{-1}\{X(t)\} = Y(t)$ называется *обратным* преобразованием $\mathcal{L}_1$, если $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_1^{-1} = \mathcal{E}$, так что $\mathcal{L}_1\{Y(t)\} = X(t)$. Передаточная функция $H_1^{-1}(\omega)$ преобразования $\mathcal{L}_1^{-1}$, обратного $\mathcal{L}_1$, очевидно задается формулой $H_1^{-1}(\omega) = 1/H_1(\omega)$, где $H_1(\omega)$ — передаточная функция $\mathcal{L}_1$.

Выше мы уже рассматривали преобразования $\mathcal{L}$, описываемые дифференциальными операторами (2.169) и имеющие передаточную функцию

$$H(\omega) = P(i\omega), \quad P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n. \quad (2.170a)$$

Рассмотрим теперь преобразование $\mathcal{L}\{X(t)\} = Y(\omega)$, обратное такому $\mathcal{L}$ и, следовательно, имеющее передаточную функцию

$$H^-(i\omega) = \frac{1}{P(i\omega)}. \quad (2.176)$$

В этом случае равенство $\mathcal{L}\{Y(t)\} = X(t)$ приобретает вид

$$a_0 \frac{d^n Y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} Y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n Y(t) = X(t), \quad (2.177)$$

так что преобразованным процессом $Y(t)$ здесь оказывается просто стационарное решение дифференциального уравнения (2.177).

Будем считать, что преобразуемый процесс $X(t)$ имеет непрерывную и всюду положительную спектральную плотность $f(\omega)$. В силу (2.151a) в таком случае для возможности применения к нему преобразования $\mathcal{L}^-$ должно выполняться условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)}{|P(i\omega)|^2} d\omega < \infty. \quad (2.178)$$

Отсюда видно, что многочлен $P(i\omega)$ не может иметь вещественных нулей, т. е. уравнение $P(z) = 0$ не может иметь корней с нулевой вещественной частью. С другой стороны, если последнее условие будет выполнено, то условие (2.178) наверное будет справедливым для всех спектральных плотностей $f(\omega)$, а для функции $H^-(\omega) = [P(i\omega)]^{-1}$ будет существовать преобразование Фурье $h(u)$. Следовательно, процесс $Y(t)$ здесь может быть представлен как в виде

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \frac{dZ(\omega)}{P(i\omega)} \quad (2.179)$$

(и значит $f_{YY}(\omega) = \frac{f(\omega)}{|P(i\omega)|^2}$), так и в виде

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) X(t-u) du, \quad (2.180)$$

$$h(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega u}}{P(i\omega)} d\omega. \quad (2.180a)$$

Отметим, что из рассмотрения спектрального разложения обеих частей уравнений (2.177) сразу вытекает справедливость равенства (2.179); следовательно, при условии (2.178) (т. е. при отсутствии у уравнения $P(z) = 0$) чисто мнимых корней уравнение (2.177) всегда будет иметь точно одно стационарное решение $Y(t)$, задаваемое формулой (2.179) (или эквивалентными ей формулами (2.180)—(2.180а).

Представление (2.180) случайного процесса $Y(t)$ позволяет выявить существенное различие между случаем, когда все корни уравнения $P(z) = 0$ имеют отрицательные вещественные части (т. е. лежат в левой полуплоскости комплексного переменного), и случаем, когда это уравнение имеет и корни с положительной вещественной частью.

В самом деле, легко показать, что в первом случае функция $h(u)$ будет равна нулю при всех отрицательных значениях u , так что здесь

$$Y(t) = \int_0^{\infty} h(u) X(t-u) du, \quad (2.180б)$$

т. е. преобразование $\mathcal{L}^-$ будет физически реализуемым. Более того, при наличии у $P(z)$ лишь нулей с отрицательной вещественной частью, функция $h(u)$ будет экспоненциально затухать при $u \rightarrow \infty$ и решение уравнения (2.177) при любых начальных значениях $Y(t_0)$, $Y'(t_0)$, ..., $Y^{(n-1)}(t_0)$ в момент t_0 будет стремиться при $t - t_0 \rightarrow \infty$ к статистически стационарному решению (2.179) (т. е. (2.180б) этого уравнения⁹⁵). Если же хоть один из корней уравнения $P(z) = 0$ имеет положительную вещественную часть, то стационарное решение $Y(t)$ будет зависеть и от значений $X(t')$ с $t' > t$; поэтому здесь оно имеет гораздо более искусственный смысл и для приложений обычно оказывается бесполезным (см., в частности, приведенные ниже примеры).

Рассмотрим теперь подробнее простейшие дифференциальные уравнения вида (2.177).

а) Уравнения первого порядка. Пусть

$$\frac{dY(t)}{dt} + aY(t) = X(t), \quad (2.181)$$

где $X(t)$ — процесс со спектральной плотностью $f(\omega)$. Ограничиваясь вещественными процессами мы, естественно, и коэффициент a должны считать вещественным. Условие отсутствия у уравнения $z + a = 0$ корней с нулевой вещественной частью сводится при этом к условию $a \neq 0$; при $a > 0$ единственный корень $z = -a$ будет иметь отрицательную вещественную часть, а при $a < 0$ — положительную.

Решение уравнения (2.181) при начальном условии $Y(t_0) = Y_0$, как нетрудно показать, имеет вид

$$\begin{aligned} Y(t | Y_0, t_0) &= Y_0 e^{-a(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{-a(t-s)} X(s) ds = \\ &= Y_0 e^{-a(t-t_0)} + \int_0^{t-t_0} e^{-au} X(t-u) du. \end{aligned} \quad (2.182)$$

Если $a < 0$, то при возрастании $t - t_0$ это решение экспоненциально возрастает и не стремится ни к какому пределу; кроме того, оно ни при каком Y_0 здесь не будет являться стационарным случайным процессом. Стационарное решение (2.179)—(2.180) уравнения (2.181) при $a < 0$ имеет вид

$$Y(t) = \int_0^\infty e^{au} X(t+u) du; \quad (2.183)$$

с решением (2.182) задачи с начальными значениями для этого уравнения оно никак не связано. С другой стороны, если $a > 0$, то при $t - t_0 \rightarrow \infty$ решение (2.182) будет стремиться к стационарному решению (2.179)—(2.180) уравнения (2.181), имеющему вид

$$Y(t) = \int_0^\infty e^{-au} X(t-u) du \quad (2.184)$$

(причем стремление к пределу при $t - t_0 \rightarrow \infty$ здесь будет иметь место и для случайных величин $Y(t | Y_0, t_0)$, и для соответствующих числовых функций $y(t | y_0, t_0)$, являющихся реализациями процессов $Y(t | Y_0, t_0)$). То же самое стационарное решение можно и сразу получить из $Y(t | Y_0, t_0)$, если положить $Y_0 = \int_0^\infty e^{-au} X(t_0 - u) du$. Спектральная плотность $f_{YY}(\omega)$ процесса (2.184), как легко видеть (ср. (2.174)), задается формулой $f_{YY}(\omega) = f(\omega)/(a^2 + \omega^2)$.

Линейное преобразование (2.184) фактически совпадает с рассматривавшимся выше экспоненциальным сглаживанием (2.173); они различаются лишь тем, что в (2.173) a было заменено на $1/T$ а $X(t)$ — на $X(t)/T$. Уравнение первого порядка (2.181) при таких заменах переходит в уравнение, описывающее многие измерительные приборы (причем $Y(t)$ — это показание прибора, $X(t)$ — измеряемая величина, а T — постоянная времени прибора; см., например, литературу, указанную в примечании⁹⁴). Отсюда как раз и следует, что создаваемое такими приборами дополнительное осреднение измеряемых величин будет описываться формулой (2.173).

При $|P(i\omega)|^{-2} = |i\omega + a|^{-2} = (\omega^2 + a^2)^{-1}$ условие (2.178) будет выполняться даже и при $f(\omega) = f_0 = \text{const}$, т. е. в случае, когда $X(t) = cE(t)$ — идеализированный белый шум. Таким образом, имеет смысл рассмотреть также уравнение

$$\frac{dY(t)}{dt} + aY(t) = cE(t), \quad (2.181a)$$

являющееся частным случаем уравнения (2.181). Стационарному решению (2.184) уравнения (2.181) в данном случае можно легко придать вполне строгий смысл, просто переписав это решение в виде

$$Y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-a(t-s)} dW(s), \quad (2.184a)$$

$$W(s) = \int_0^s X(s') ds' = c \int_0^s E(s') ds'. \quad (2.184a)$$

Подставив теперь формулу $\langle E(s') E(s'') \rangle = \delta(s' - s'')$ в общую формулу (1.48) для среднего значения произведения двух интегралов от случайного процесса $X(t) = cE(t)$, нетрудно убедиться, что при $t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$

$$\langle W(t_1) W(t_2) \rangle = c^2 \min(t_1, t_2), \quad (2.185)$$

и при $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$

$$\langle [W(t_2) - W(t_1)]^2 \rangle = c^2 (t_2 - t_1), \quad (2.185a)$$

$$\langle [W(t_2) - W(t_1)] [W(t_4) - W(t_3)] \rangle = 0. \quad (2.185b)$$

Таким образом, вторые моменты процесса $W(t)$ не содержат никаких δ -функций, т. е. $W(t)$ — это обыкновенный (но нестационарный) случайный процесс, свойства которого родственны свойствам функции $Z(\omega)$, рассматривавшейся в связи со спектральным разложением стационарных процессов $X(t)$. При этом интеграл в равенстве (2.184a) может быть определен обычным образом (аналогично тому, как определялся интеграл, задающий спектральное разложение); соответствующий процесс $Y(t)$ оказывается тогда стационарным и его естественно как раз и принять за стационарное решение уравнения (2.181a).

Корреляционная функция процесса $Y(t)$ может быть легко выведена из (2.184a), если учесть, что в силу (2.185a)–(2.185b) $\langle dW(s) dW(s') \rangle = 0$ при $s' \neq s$, $\langle [dW(s)]^2 \rangle = c^2 ds$ (т. е. формально $\langle dW(s) dW(s') \rangle = c^2 \delta(s - s') ds ds'$). Отсюда при $\tau \geq 0$ получаем

$$\langle Y(t + \tau) Y(t) \rangle = c^2 \int_{-\infty}^t e^{-a(\tau + 2t - 2s)} ds = \frac{c^2}{2a} e^{-a\tau}. \quad (2.186)$$

Корреляционной функции (2.186) отвечает спектральная плотность $f_{YY}(\omega) = f_0/(a^2 + \omega^2)$, как это и должно быть в силу (2.179).

Отметим, что процесс с корреляционной функцией (2.186) — это обычный стационарный случайный процесс, но он не имеет производной (в среднем квадратичном), что и неудивительно, так как в силу (2.181a) $dY(t)/dt = cE(t) - aY(t)$ содержит белый шум, т. е. не является обыкновенным случайным процессом. Поэтому в работах, стремящихся к сохранению математической строгости, уравнение (2.181a) иногда предпочитают записывать в более сложной, но зато и более строгой форме (например, в виде уравнения в дифференциалах или интегрального уравнения).⁹⁶

Уравнение (2.181a), очевидно, родственно разностному уравнению (2.10), определяющему последовательность авторегрессии первого порядка, а формула (2.184a) — родственна представлению (2.11) последовательности авторегрессии в виде последовательности односторонних скользящих средних. В этой связи стационарный случайный процесс $Y(t)$ формулы (2.184a) (т. е. процесс с экспоненциальной корреляционной функцией вида (2.89) и спектральной плотностью вида (2.90)) иногда называют стационарным процессом авторегрессии первого порядка.

Уравнение вида (2.181a) впервые было в 1908 г. предложено Ланжевеном для описания брауновского движения; поэтому оно часто называется уравнением Ланжевена. На малую частицу, погруженную в жидкость, окружающая среда действует двояким образом: во-первых, она создает сопротивление движению, проявляющееся в виде тормозящей силы «вязкого трения», равной $-\omega Y(t)$, где $Y(t)$ — скорость частицы, а ω — коэффициент, пропорциональный вязкости μ (для сферической частицы радиуса r он равен $6\pi\mu r$); во-вторых, неупорядоченные пульсации числа столкновений частицы с молекулами среды за единицу времени проявляются как дополнительная «чисто случайная» сила $X_1(t)$ (имеющая белый спектр $f(\omega) = f_0$ — ср. с. 118—119). Отсюда видно, что уравнение движения частицы вдоль любой фиксированной координатной оси, после деления всех его членов на массу m частицы, будет иметь вид (2.181a), где $Y(t)$ — это скорость частицы, $a = \omega/m > 0$, а $cE(t) = X_1(t)/m$ — новый процесс белого шума со спектральной плотностью $c^2/2\pi = f_0/m^2$. Соответственно этому, скорость $Y(t)$ брауновской частицы в рамках излагаемой здесь теории должна представлять собой стационарный случайный процесс со спектральной плотностью $f(\omega) = f_0/m^2 (\omega^2 + a^2)$ и корреляционной функцией (2.186), где $c^2 = 2\pi f_0/m^2$. Так как средний квадрат скорости $Y(t)$ в силу законов статистической физики должен равняться kT/m (ибо $m\langle Y^2 \rangle/2 = kT/2$), то для спектральной плотности f_0 процесса $X_1(t)$ отсюда получается формула $f_0 = \omega kT/\pi$, которая уже упоминалась на с. 121.

Уравнение точно того же вида (2.181a) получается и для силы тока, генерируемого «тепловыми шумами» в цепи, содержащей или сопротивление R и самоиндукцию L , или же сопротивление R и емкость C . Вообще, уравнение вида (2.181a) оказывается очень часто применимым для описания флуктуаций тех или иных физических величин; это обстоятельство служит еще одной причиной, приводящей к частому появлению в прикладных задачах случайных процессов с корреляционной функцией вида (2.89) и спектральной плотностью вида (2.90).⁹⁷

б) Уравнения второго порядка. Пусть

$$\frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + 2a \frac{dY(t)}{dt} + bY(t) = X(t), \quad (2.187)$$

где a и b — вещественные коэффициенты, а $X(t)$ — стационарный случайный процесс со спектральной плотностью $f(\omega)$. Уравнение $P(z) = z^2 + 2az + b = 0$ будет иметь корни с нулевой вещественной частью только если $b = 0$ или же $a = 0$, $b > 0$; во всех остальных случаях уравнение (2.187) будет иметь единственное стационарное решение $Y(t)$ со спектральной плотностью

$$f_{YY}(\omega) = \frac{f(\omega)}{|-\omega^2 + 2ia\omega + b|^2} = \frac{f(\omega)}{(\omega^2 - b)^2 + 4a^2\omega^2}. \quad (2.188)$$

Предположим, например, что $b > 0$, $b - a^2 = \beta^2 > 0$; в таком случае уравнение $P(z) = 0$ будет иметь два комплексно сопряженных корня $z_1 = -a + i\beta$ и $z_2 = -a - i\beta$. Решение уравнения (2.187) при начальных условиях $Y(t_0) = Y_0$, $Y'(t_0) = Y'_0$ в момент t_0 будет, как нетрудно видеть, иметь вид

$$Y(t | Y_0, Y'_0, t_0) = C_1 e^{-a(t-t_0)} \cos \beta(t-t_0) + \\ + C_2 e^{-a(t-t_0)} \sin \beta(t-t_0) + \beta^{-1} \int_0^{t-t_0} e^{-au} \sin \beta u X(t-u) du, \quad (2.189)$$

где $C_1 = Y_0$, $C_2 = (Y_0 a + Y'_0)/\beta$. Если $a > 0$, то каковы бы ни были значения Y_0 и Y'_0 (т. е. C_1 и C_2), это решение при $t - t_0 \rightarrow \infty$ будет стремиться к следующему единственному стационарному решению уравнения (2.187):

$$Y(t) = \beta^{-1} \int_0^\infty e^{-au} \sin \beta u X(t-u) du \quad (2.190)$$

(как раз и имеющему спектральную плотность (2.188)). Если же $a < 0$, то решение (2.189) при $t - t_0 \rightarrow \infty$ не будет стремиться ни к какому пределу, а стационарное решение $Y(t)$ здесь будет выражаться не через прошлые, а через будущие значения $X(s)$ с $s > t$.

Вполне аналогично будет обстоять дело и в случае, когда $a^2 - b = \beta_1^2 \geq 0$ (т. е. уравнение $P(z) = 0$ имеет вещественные корни $z_1 = -a + \beta_1$, $z_2 = -a - \beta_1$). Если $a > 0$, $\beta_1 < a$, так что оба корня z_1 и z_2 отрицательны, то стационарное решение $Y(t)$ уравнения (2.187) будет представляться интегралом от значений $X(t-u)$ с $u \geq 0$ (и будет совпадать с пределом при $t - t_0 \rightarrow \infty$ решения этого уравнения при любых фиксированных начальных условиях в момент $t = t_0$); если же оба корня z_1 и z_2

будут положительными, то это решение будет равно интегралу от значений $X(t-u)$ при $u \leq 0$, а если один из них будет положительным, а второй — отрицательным, то оно будет равно интегралу от значений $X(t-u)$ при всех вещественных u .

Особый интерес представляет частный случай уравнения (2.187), относящийся к ситуации, когда роль правой части $X(t)$ играет идеализированный процесс белого шума (т. е. $X(t) = cE(t)$). В этом случае стационарное решение $Y(t)$ уравнения (2.187) будет иметь спектральную плотность

$$f_{YY}(\omega) = \frac{f_0}{(\omega^2 - b)^2 + 4a^2\omega^2}. \quad (2.191)$$

где $f_0 = c^2/2\pi$ — постоянная спектральная плотность белого шума $X(t) = cE(t)$. Если уравнение $P(z) = z^2 + 2az + b = 0$ не имеет корней с нулевой вещественной частью, то знаменатель в формуле (2.191) не будет обращаться в нуль и $Y(t)$ будет обыкновенным (и даже дифференцируемым) стационарным случайным процессом, но не имеющим второй производной $d^2Y(t)/dt^2$.

Корреляционная функция $B_{YY}(\tau)$, отвечающая спектральной плотности (2.191), при $b > a^2 > 0$ будет иметь вид (2.105); при $b = a^2 > 0$ или $a = 0, b < 0$ — (2.108) и при $b < a^2, a \neq 0$ — (2.109). При $a > 0, b - a^2 = \beta^2 > 0$ стационарное решение (2.190) уравнения (2.187) (где $X(t)$ — белый шум) может быть представлено формулой

$$Y(t) = \beta^{-1} \int_0^\infty e^{-a(t-s)} \sin \beta(t-s) dW(s), \quad (2.192)$$

где $W(s)$ — неопределенный интеграл от $X(t) = cE(t)$ (см. (2.184a)), обладающий свойствами (2.185)–(2.185б). Аналогично может быть представлен процесс $Y(t)$ и в случаях, когда $a > 0, a^2 \geq b > 0$ (т. е. всегда, когда уравнение $P(z) = 0$ имеет лишь корни с отрицательными вещественными частями). Уравнение (2.187), где $X(t) = cE(t)$, родственно конечноразностному уравнению (2.13) с $m = 2$; поэтому стационарные случайные процессы со спектральной плотностью вида (2.191) иногда называют процессами авторегрессии второго порядка. Совершенно аналогично могут быть, разумеется, определены и процессы авторегрессии порядка m — как стационарные случайные процессы со спектральной плотностью вида $f(\omega) = 1/|P(i\omega)|^2$, где $P(z)$ — многочлен степени m , не имеющий чисто мнимых нулей. Что касается стационарных смешанных последовательностей авторегрессии — скользящих средних, рассматривавшихся на с. 87, то аналогом таких последовательностей среди стационарных процессов $X(t)$, зависящих от непрерывно меняющегося t , будут общие процессы с рациональ-

ными спектральными плотностями $f(\omega)$; на этой более общей аналогии мы, однако, здесь не будем задерживаться.⁹⁸

Уравнение вида (2.187), где $X(t) = cE(t)$, естественно возникает при рассмотрении брауновского движения гармонического осциллятора, т. е. частицы массы m , удерживаемой некоторой упругой пружиной, создающей дополнительную силу $-\lambda Y(t) = m\omega^2 Y(t)$, пропорциональную координате $Y(t)$ и стремящуюся вернуть частицу в ее «положение равновесия» (совпадающее с началом координат). Если в данном случае через $Y(t)$ мы обозначим координату осциллятора, то слагаемое $2a \, dY/dt$ (где $2a = \omega/m$) будет снова выражать действие силы трения, а $X(t) = X_1(t)/m$ будет представлять «абсолютно случайную» силу, создаваемую неравномерностью во времени числа молекулярных толчков. Осцилляторы, удерживаемые линейно зависящей от отклонения силой, составляют существенную часть многих тонких измерительных приборов; неуправляемое брауновское движение таких осцилляторов часто заметно ограничивает максимальную доступную точность измерений и поэтому теория такого движения представляет существенный прикладной интерес (см. примечание⁹⁴). Еще одна задача, приводящая к уравнению вида (2.187) с белым шумом в правой части — это задача о прохождении теплового шума через электрическую цепь, содержащую сопротивление, емкость и самоиндукцию; существует и ряд других физических задач, приводящих к тому же самому уравнению.

15.

Спектральное разложение стационарных последовательностей и их корреляционных функций

Легко видеть, что почти все результаты, изложенные в §. 9—13, могут быть с малопринципиальными изменениями перенесены также и на случайные стационарные последовательности $X(t)$, где $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Так, строя пример последовательности $X(t)$ в виде $X\Phi(t)$, где $\Phi(t)$ — числовая функция, а X — случайная величина, мы, как и в случае непрерывно изменяющегося t , придем к выводу, что должны выполняться равенства $\langle X \rangle = 0$ и $\Phi(t) = e^{i\omega t}$, т. е. что $X(t)$ должно представлять собой гармоническое колебание со случайными амплитудой и фазой:

$$X(t) = X e^{i\omega t}. \quad (2.193)$$

Однако в отличие от случая непрерывно изменяющегося t здесь надо еще учесть, что теперь t — это целое число, и значит, $e^{i(\omega+2k\pi)t} = e^{i\omega t}$ при любом целом k для всех значений t . Отсюда видно, что в случае последовательностей значение ω определяется лишь с точностью до произвольного слагаемого, кратного 2π . Это обстоятельство позволяет считать, что в случае стационарных последовательностей $X(t)$ круговая частота ω всегда заключена между $-\pi$ и π . Поэтому, рассматривая конечные суммы гармонических колебаний вида (2.193), мы также можем ограничиться лишь колебаниями с частотами в этом интервале; в то же время условия стационарности такой суммы (заключающиеся в требо-

вании некоррелированности отдельных колебаний) здесь будут точно теми же, что и при непрерывно изменяющемся t . Переходя затем к пределу последовательности конечных сумм гармонических колебаний, как раз и дающему общее спектральное разложение функций $X(t)$, мы во все суммы должны будем включать только колебания с круговой частотой ω такой, что $-\pi \leq \omega < \pi$. В результате вместо несобственного интеграла по $dZ(\omega)$ в пределах от $-\infty$ до ∞ мы придем к спектральному разложению стационарных последовательностей $X(t)$ вида

$$X(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} dZ(\omega). \quad (2.194)$$

В последней формуле свойства комплексной случайной функции $Z(\omega)$ и смысл интеграла в правой части те же, что и в рассматривавшемся в § 10 случае стационарных процессов $X(t)$ (с тем лишь небольшим упрощением, что в определении интеграла по $dZ(\omega)$ теперь уже не нужен дополнительный предельный переход от конечного интервала $a \leq \omega \leq b$ ко всей прямой $-\infty < \omega < \infty$). Если, как в § 11, мы примем, что

$$\begin{aligned} \langle |dZ(\omega)|^2 \rangle &= dF(\omega), \\ \langle dZ(\omega) \overline{dZ(\omega')} \rangle &= 0 \quad \text{при } \omega' \neq \omega, \end{aligned} \quad (2.195)$$

т. е. иначе

$$\langle dZ(\omega) \overline{dZ(\omega')} \rangle = \delta(\omega - \omega') dF(\omega) d\omega', \quad (2.195a)$$

то из (2.194) получим

$$B(\tau) = \langle X(t + \tau) \overline{X(t)} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\tau\omega} dF(\omega), \quad (2.196)$$

где $F(\omega)$ — ограниченная, монотонно неубывающая функция, определенная на интервале $-\pi \leq \omega < \pi$ (ср. с. 110). Функция $F(\omega)$, очевидно, определена лишь с точностью до произвольного постоянного слагаемого, которое всегда можно выбрать, например, так, чтобы выполнялось условие $F(-\pi) = 0$. Формула (2.219) описывает общее спектральное разложение корреляционной функции $B(\tau)$ стационарной случайной последовательности $X(t)$. Входящая в эту формулу функция $F(\omega)$ называется спектральной функцией последовательности $X(t)$; если эта функция дифференцируема и может быть представлена в виде неопределенного интеграла от своей производной так, что

$$F(\omega) = \int_{-\pi}^{\omega} f(\omega') d\omega', \quad f(\omega) = \frac{dF(\omega)}{d\omega}, \quad (2.197)$$

то $f(\omega)$ называется спектральной плотностью $X(t)$.

Возможность представления любой корреляционной функции $B(\tau)$ стационарной случайной последовательности $X(t)$ в виде (2.196), где $F(\omega)$ — неубывающая функция (т. е. теорема о спектральном разложении корреляционных функций стационарных последовательностей) сразу следует из сопоставления друг с другом следующих двух утверждений:

1) класс функций $B(\tau)$ целочисленного аргумента τ , являющихся корреляционными функциями стационарных случайных последовательностей, совпадает с классом положительно определенных последовательностей (см. § 4 и 7);

2) для того чтобы числовая последовательность $\dots, B(-2), B(-1), B(0), B(1), B(2), \dots$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде интеграла Фурье—Стилтьеса (2.196), где $F(\omega)$ — монотонно неубывающая функция (это утверждение составляет содержание так называемой теоремы Герглца, опубликованной этим автором еще в 1911 г.⁹⁹).

То обстоятельство, что функция вида (2.196), где $F(\omega)$ — неубывающая функция, всегда является корреляционной функцией некоторой стационарной последовательности, может быть, разумеется, доказано и с помощью рассмотрения примера последовательности вида $X(t) = Y e^{i t \Omega}$, где Y — случайная величина с нулевым средним значением и конечной дисперсией, а Ω — вещественная случайная величина, все возможные значения ω которой законно считать принадлежащими интервалу $-\pi \leq \omega < \pi$ (ср. пример 5 на с. 95).

После того, как теорема о спектральном разложении корреляционных функций $B(\tau)$ стационарных последовательностей уже доказана, возможность представления самой последовательности $X(t)$ в виде интеграла Фурье—Стилтьеса (2.194), где $Z(\omega)$ — комплексная случайная функция с некоррелированными приращениями, заданная на интервале $[-\pi, \pi]$ (т. е. теорема о спектральном разложении стационарных последовательностей), может быть доказана совершенно аналогично тому, как доказывается теорема о спектральном разложении стационарных случайных процессов.¹⁰⁰

Если последовательность $X(t)$ — вещественная, то

$$\begin{aligned} Z(\omega_2) - Z(\omega_1) &= \overline{Z(-\omega_1)} - \overline{Z(-\omega_2)}, \\ F(\omega_2) - F(\omega_1) &= F(-\omega_1) - F(-\omega_2) \end{aligned} \quad (2.198)$$

при $0 < \omega_1 < \omega_2 \leq \pi$. Отсюда вытекает, что в вещественном случае спектральные разложения (2.194) и (2.196) последовательности

$X(t)$ и ее корреляционной функции $B(\tau)$ могут быть переписаны в виде

$$X(t) = \int_0^\pi \cos \omega t dZ_1(\omega) + \int_0^\pi \sin \omega t dZ_2(\omega), \quad (2.199)$$

$$B(\tau) = \int_0^\pi \cos \omega \tau dG(\omega), \quad (2.200)$$

где $Z_1(\omega)$ и $Z_2(\omega)$ — вещественные случайные функции, удовлетворяющие соотношениям (2.64) и (2.65), а $G(\omega)$ — монотонно неубывающая функция ω .

В силу формул (2.194), (2.195) и (2.196) точки разрыва ω_{kk} функции $F(\omega)$ (в которых эта функция скачком возрастает на положительное значение f_k) являются также и точками разрыва случайной функции $Z(\omega)$, отвечающими «гармоническим компонентам» $X_k e^{i\omega_k t}$ (где $\langle |X_k|^2 \rangle = f_k$) последовательности $X(t)$. Совокупность таких точек разрыва ω_k составляет дискретный спектр $X(t)$, который может быть однозначно восстановлен по функции $B(\tau)$ как совокупность значений $\omega = \omega_k$ таких, что¹⁰¹

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T+1} \sum_{\tau=-T}^T B(\tau) e^{-i\omega_k \tau} = f_k \neq 0. \quad (2.201)$$

С другой стороны, если, как это чаще всего бывает в реальных приложениях, $B(\tau)$ настолько быстро убывает при $\tau \rightarrow \infty$, что

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |B(\tau)| < \infty \quad (2.202)$$

или хотя бы

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |B(\tau)|^2 < \infty, \quad (2.202a)$$

то величины $B(\tau)$, $\tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ будут представлять собой совокупность коэффициентов Фурье периодической (с периодом 2π) функции $f(\omega)$, задаваемой формулой

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega \tau} B(\tau) \quad (2.203)$$

(причем при условии (2.202) функция $f(\omega)$ обязательно будет непрерывной и ограниченной). В силу известной формулы для коэффициентов Фурье из формулы (2.203) вытекает, что

$$B(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega \tau} f(\omega) d\omega, \quad (2.204)$$

так что в этом случае существует спектральная плотность $f(\omega)$, неопределенным интегралом от которой является функция $F(\omega)$ (а последовательность $X(t)$ имеет только чисто непрерывный спектр; ср. с. 112).

Формулы (2.203) и (2.201) позволяют просто найти спектральную функцию $F(\omega)$ по корреляционной функции $B(\tau)$ в тех случаях, когда существует спектральная плотность или же, наоборот, спектр является чисто дискретным. Однако и в самом общем случае произвольной спектральной функции $F(\omega)$ эта функция также может быть однозначно определена по значениям $B(\tau)$ с помощью следующей общей формулы

$$F(\omega_2) - F(\omega_1) = B(0)(\omega_2 - \omega_1) + \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{\substack{\tau=-T \\ (\tau \neq 0)}}^T B(\tau) \frac{e^{-i\omega_2\tau} - e^{-i\omega_1\tau}}{-i\tau}, \quad (2.205)$$

аналогичной формуле (2.83) (причем если ω_1 или ω_2 — точки разрыва $F(\omega)$, то значения $F(\omega_1)$ или $F(\omega_2)$ здесь надо понимать так же, как и в (2.83).¹⁰²

В случае вещественной последовательности $X(t)$ формулы (2.203)—(2.205) могут быть переписаны в виде:

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[B(0) + 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} B(\tau) \cos \omega\tau \right], \quad (2.203a)$$

$$B(\tau) = \int_0^{\pi} \cos \omega\tau g(\omega) d\omega, \quad (2.204a)$$

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[B(0)\omega + 2 \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{B(\tau)}{\tau} \sin \omega\tau \right]. \quad (2.205a)$$

Впрочем, даже и в вещественном случае комплексная форма записи (2.203)—(2.205) нередко оказывается более удобной, чем вещественная форма (2.203a)—(2.205a).

16. Дискретные выборки случайных процессов и дискретные линейные преобразования

Последовательности значений стационарного случайного процесса $X(t)$, $-\infty < t < \infty$, в дискретные моменты времени $t_k = k\Delta$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ разделенные одним и тем же промежутком Δ , образуют, по-видимому, самый важный класс стационарных случайных последовательностей. Во введении отмечалось,

что с такого рода последовательностями мы сталкиваемся во всех тех сравнительно частых случаях, когда наблюдения за непрерывно изменяющейся величиной $x(t)$, представляющей собой реализацию стационарного процесса $X(t)$, регулярно повторяются через один и тот же промежуток времени. Однако даже и тогда, когда у нас имеются данные непрерывной регистрации значений $x(t)$ в течение какого-то промежутка времени (записанные, например, на магнитную ленту), обработку этих данных во многих случаях удобнее всего производить на современных ЭВМ. Такая обработка требует, чтобы непрерывная запись $x(t)$ была преобразована в дискретный ряд чисел; поэтому и здесь приходится пожертвовать непрерывной записью, а отобрать из нее лишь числовые значения $x(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, N$ в некоторые дискретные моменты времени t_k , никак не используя все данные, относящиеся к промежуточным значениям t . Последовательность значений

$$X(t\Delta) = X_\Delta(t), \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.206)$$

непрерывного стационарного случайного процесса $X(t)$ в равноотстоящие моменты $t\Delta$, отсчитываемые через промежутки Δ , называется дискретной выборкой процесса $X(t)$ с шагом дискретизации Δ ; * она представляет собой стационарную случайную последовательность с тем же средним значением $\langle X_\Delta(t) \rangle = \langle X(t) \rangle$, что и процесс $X(t)$ (ниже это среднее значение мы, как обычно, будем просто считать равным нулю) и корреляционной функцией $B_\Delta(\tau)$, связанной с корреляционной функцией $B(\tau)$ процесса $X(t)$ формулой

$$B_\Delta(\tau) = \langle X((t+\tau)\Delta) \overline{X(t\Delta)} \rangle = B(\tau\Delta), \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.207)$$

Из (2.207), в частности, следует, что если $B(\tau)$ — корреляционная функция какого-то стационарного случайного процесса, то последовательность (2.207) обязательно будет представлять собой возможную корреляционную функцию стационарной последовательности.

Дискретные выборки процесса $X(t)$ очень часто используются для приближенного определения статистических характеристик этого случайного процесса; поэтому очень важен вопрос о связи характеристик процесса $X(t)$ и последовательности $X_\Delta(t)$. Мы уже отмечали, что $X(t)$ и $X_\Delta(t)$ имеют одинаковое среднее зна-

* Если бы мы не считали, что начало отсчета времени (т. е. момент $t = 0$) совпадает с одним из моментов наблюдения над $X(t)$ (т. е. вместо $X(t\Delta)$ использовали бы значения $X(t\Delta + t_0)$, где t_0 — фиксированное число), то это внесло бы во все дальнейшие формулы лишь некоторые почти очевидные изменения, на которых мы здесь не будем задерживаться.

чение; связь между соответствующими корреляционными функциями $B(\tau)$ и $B_\Delta(\tau)$ определяется равенством (2.207). Однако самой важной с точки зрения приложений характеристикой процесса $X(t)$ является его спектральная плотность $f(\omega)$ или (в общем случае) спектральная функция $F(\omega)$; поэтому особый интерес представляет вопрос о нахождении этих функций по наблюдаемым значениям последовательности $X_\Delta(t)$.

Спектральные характеристики $f(\omega)$ и $F(\omega)$ описывают представление процесса $X(t)$ в виде суперпозиции гармонических колебаний вида $X_\omega e^{i\omega t}$; легко понять, что такое представление

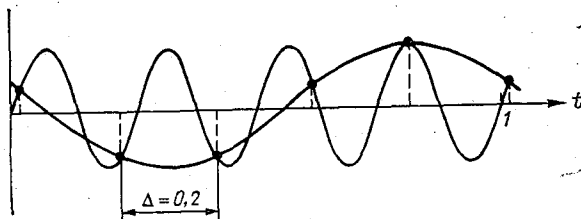


Рис. 17.

Две синусоиды с частотами $n = \omega/2\pi = 1$ и $n = 4$, неразличимые при использовании дискретной выборки с шагом дискретизации $\Delta = 0,2$ (по [249]).

никак не может быть однозначно восстановлено по данным наблюдений через интервал времени Δ . В самом деле, поскольку при целых t и k

$$e^{i\omega t \Delta} = e^{i(\omega + k \cdot 2\pi/\Delta) t \Delta} = e^{i\omega t \Delta} e^{i2\pi k t}, \quad (2.208)$$

то по дискретным наблюдениям, повторяющимся через Δ единиц времени, мы просто не в состоянии будем отличить гармонику с круговой частотой ω от всех гармоник с круговой частотой $\omega + k \cdot 2\pi/\Delta$, где k — произвольное целое число. В вещественном случае, когда гармонические колебания с частотами ω и $-\omega$ не отличаются друг от друга, гармонику с частотой ω нельзя будет уже отличить и от всех гармоник с частотами $\omega + k \cdot 2\pi/\Delta$ и от всех гармоник с частотами $-\omega + k \cdot 2\pi/\Delta$, где k — целое число (ср. рис. 17).

При наблюдении колебаний частоты ω в дискретные моменты времени мы всегда будем автоматически приписывать им наименьшую из частот $\pm\omega + 2\pi k/\Delta$ (это обстоятельство используется, в частности, в стробоскопе, позволяющем с помощью освещения быстро колеблющегося тела через равные промежутки времени существенно «замедлить» его колебания). В применении же к стационарным случайным процессам такое «перепутывание» при наблюдениях через интервал времени Δ гармонических компонент с частотами, отличающимися на целое кратное частоты $2\pi/\Delta$,

лежит в основе важного спектрального наложения или элайзинга*, к рассмотрению которого мы теперь и перейдем.

Воспользовавшись спектральным разложением процесса $X(t)$ можно выписать равенства

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} dZ(\omega), \quad X_{\Delta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\Delta\omega} dZ(\omega), \quad (2.209)$$

где в первом равенстве t пробегает все вещественные значения, а во втором — только целочисленные значения. В силу (2.208) значения подынтегральной функции $e^{it\Delta\omega}$ аргумента ω во втором из равенств (2.209) будут точно повторяться через интервалы длины $2\pi/\Delta$, так что

$$\int_{(2k-1)\pi/\Delta}^{(2k+1)\pi/\Delta} e^{it\Delta\omega} dZ(\omega) = \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} e^{it\Delta\omega} dZ(\omega + 2k\pi/\Delta) \quad (2.210)$$

при любом целом (положительном или отрицательном) k . Не имея возможности различить гармоники с частотами ω и $\omega + 2k\pi/\Delta$, естественно рассматривать лишь частоты, по модулю не превосходящие π/Δ , т. е. использовать тождество (2.210) при всех $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ и с его помощью переписать второе равенство (2.209) в виде

$$X_{\Delta}(t) = \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} e^{it\Delta\omega} dZ_{\Delta}^{(1)}(\omega),$$

$$Z_{\Delta}^{(1)}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [Z(\omega + 2k\pi/\Delta) - Z((2k-1)\pi/\Delta)], \quad (2.211)$$

где вычитаемые $Z((2k-1)\pi/\Delta)$, не меняющие дифференциала $dZ_{\Delta}^{(1)}(\omega)$, подобраны так, чтобы удовлетворялось условие $Z_{\Delta}^{(1)}(-\pi/\Delta) = 0$. Из (2.211) для $B_{\Delta}(\tau) = \langle X_{\Delta}(t + \tau) \overline{X_{\Delta}(t)} \rangle$ получается формула

$$B_{\Delta}(\tau) = \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} e^{i\tau\Delta\omega} dF_{\Delta}^{(1)}(\omega), \quad (2.212)$$

$$F_{\Delta}^{(1)}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [F(\omega + 2k\pi/\Delta) - F((2k-1)\pi/\Delta)], \quad (2.212a)$$

* Получивший широкое распространение непереводимый термин «элайзинг» (aliasing) принадлежит Тьюки (см., например, [249]) и происходит от английского слова «aliases», означающего клички, используемые преступником в дополнение к своему настоящему имени.

которая в случае существования спектральной плотности $f(\omega) = F'(\omega)$ может быть также переписана в виде

$$B_{\Delta}(\tau) = \int_{-\pi/\Delta}^{\pi/\Delta} e^{i\tau\omega} f_{\Delta}^{(1)}(\omega) d\omega, \quad f_{\Delta}^{(1)}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\omega + \frac{2k\pi}{\Delta}\right). \quad (2.213)$$

Спектральные разложения (2.211)–(2.213) могут быть, разумеется, переписаны и в виде обыкновенных спектральных разложений стационарной последовательности $X_{\Delta}(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и ее корреляционной функции $B_{\Delta}(\tau)$ (относящихся к интервалу частот $-\pi \leq \omega \leq \pi$); для этого надо только принять в качестве новой переменной безразмерное произведение $\Delta \cdot \omega$ (которое, ради сохранения обычной формы записи спектральных разложений, мы снова обозначим той же буквой ω):

$$X_{\Delta}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} dZ_{\Delta}(\omega), \quad (2.214)$$

$$B_{\Delta}(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\tau\omega} dF_{\Delta}(\omega) \quad \text{или} \quad B_{\Delta}(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\tau\omega} f_{\Delta}(\omega) d\omega, \quad (2.215)$$

где $Z_{\Delta}(\omega) = Z_{\Delta}^{(1)}\left(\frac{\omega}{\Delta}\right)$,

$$F_{\Delta}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[F\left(\frac{\omega + 2k\pi}{\Delta}\right) - F\left(\frac{(2k-1)\pi}{\Delta}\right) \right],$$

$$f_{\Delta}(\omega) = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\omega + 2k\pi}{\Delta}\right). \quad (2.215a)$$

Формулы (2.215a) как раз и описывают связь между спектральными характеристиками $F_{\Delta}(\omega)$ и $f_{\Delta}(\omega)$ последовательности $X_{\Delta}(t)$ и соответствующими характеристиками процесса $X(t)$.¹⁰³

Эффект элайзинга наиболее наглядно описывается, однако, как раз первоначальными формулами (2.212) и (2.213) для $F_{\Delta}^{(1)}(\omega)$ и $f_{\Delta}^{(1)}(\omega)$. Согласно этим формулам, если наблюдения над непрерывным процессом $X(t)$ производятся лишь в дискретные моменты времени, разделенные промежутками длины Δ , то спектр наблюдений $X_{\Delta}(t)$ оказывается целиком сосредоточенным в пределах конечной полосы частот $-\pi/\Delta \leq \omega \leq \pi/\Delta$ (границная круговая частота $\omega_{\Delta} = \pi/\Delta$ этой полосы или же соответствующая обыкновенная частота $n = \omega_{\Delta}/2\pi = 1/2\Delta$ обычно называются круговой или обыкновенной частотой Найквиста, отвечающей данной выборке). При этом вклад в значения $B(0) = \langle |X(t)|^2 \rangle$ (энергию колебания $X(t)$) и $B(\tau) = \langle X(t+\tau) \overline{X(t)} \rangle$ всех частот, лежащих за пределами полосы $-\pi/\Delta \leq \omega \leq \pi/\Delta$, искусственно

переносится в пределы данной полосы: спектр частот ω как бы разрезается на отрезки длины $2\pi/\Delta$ точками $(2k+1)\pi/\Delta$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, после чего спектральное распределение энергии на каждом из получающихся отрезков, лежащих вне основного интервала $-\pi/\Delta \leq \omega \leq \pi/\Delta$ накладывается на распределение энергии в пределах этого основного интервала (т. е. просто добавляется к нему; см. рис. 18).

Ясно, что если в исходное распределение энергии по спектру заметный вклад вносят частоты, превышающие частоту Найквиста,

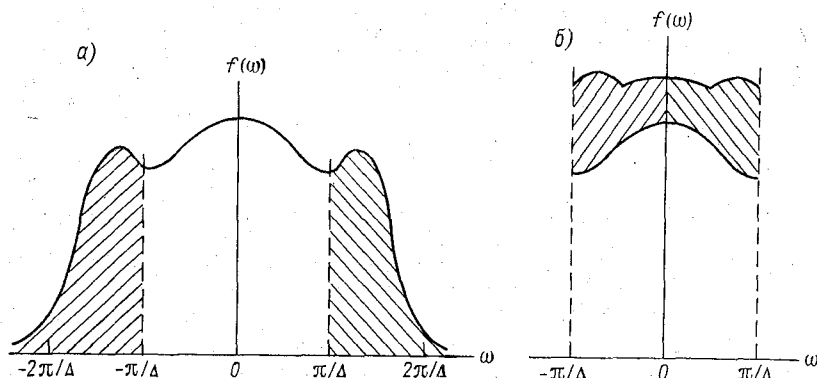


Рис. 18.

Спектральная плотность, включающая значительную часть (заштриховано), соответствующую частотам ω , превышающим частоту Найквиста $\omega_\Delta = \pi/\Delta$ (а), и спектральная плотность ряда дискретных наблюдений $X_\Delta(k) = X(k\Delta)$, включающая результат наложения высоких частот, т. е. элайзинга (заштриховано) (б).

то по выборке через время Δ функции $F(\omega)$ и $f(\omega)$ можно будет оценить лишь со значительной ошибкой из-за возникающего элайзинга (наложения высоких частот на низкие). Выбор интервала Δ (т. е. частоты дискретной выборки $X_\Delta(t)$) эквивалентен выбору частоты Найквиста $\omega_\Delta = \pi/\Delta$; эта частота ω_Δ обязательно должна быть столь высокой, чтобы еще более высокие частоты ω вносили лишь пренебрежимо малый вклад в суммарную энергию процесса, если желать, чтобы спектральные характеристики процесса $X(t)$ можно было достаточно аккуратно восстановить по наблюдаемой выборке $x_\Delta(t)$ (являющейся реализацией последовательности $X_\Delta(t)$).

К сожалению, во многих случаях мы заранее не знаем, начиная с какой частоты вкладом еще более высоких частот в распределение энергии по спектру можно пренебречь; из-за этого иногда приходится использовать для оценки спектральной плотности $f(\omega)$ несколько разных выборок $X_\Delta(t)$ с все уменьшающимися

значениями Δ (что позволяет выяснить на опыте, начиная с какой частоты выборки дальнейшее уменьшение интервала Δ уже практически не меняет оценки $f(\omega)$).

Идеальной, разумеется, была бы ситуация, при которой все частоты вне интервала $-\pi/\Delta \leq \omega < \pi/\Delta$ вообще не вносили бы никакого вклада в процесс $X(t)$; поэтому случай процессов $X(t)$ с ограниченной полосой частот представляет особый интерес с точки зрения использования дискретной выборки $X_\Delta(t)$. Предположим, что для процесса $X(t)$ существует такая граничная частота

Ω , что $\int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega) d\omega = B(0)$, т. е. $F(\omega) = 0$ при $\omega < -\Omega$,

$F(\omega) = \text{const}$ при $\omega > \Omega$, так что спектральное разложение $X(t)$ включает только частоты из интервала $-\Omega \leq \omega \leq \Omega$ (именно такие $X(t)$ и называются стационарными процессами с ограниченной полосой частот или, иначе, с ограниченным спектром). В этом случае, выбрав Δ так, чтобы выполнялось условие $\Omega \leq \omega_\Delta = \pi/\Delta$, мы найдем, что $Z_\Delta^{(1)}(\omega) = Z(\omega)$ в формуле (2.211); отсюда видно, что здесь по совокупности всех дискретных значений $X_\Delta(t) = X(t_\Delta)$, $t = 0, \pm 1, \dots$ в принципе уже можно будет однозначно восстановить спектральную функцию (или плотность) процесса $X(t)$ без всяких искажений, т. е. эффект элайзинга здесь вообще никак не будет проявляться.

Нетрудно также понять, что в рассматриваемом случае процессов $X(t)$ со спектром, ограниченным частотой Ω , дискретные значения $X_\Delta(t) = X(t\Delta)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ при $\Delta \leq \pi/\Omega$ будут вообще однозначно определять и значения $X(t)$ при всех вещественных t . В самом деле, значения $X_\Delta(t)$ всегда позволяют восстановить значения случайной функции $Z_\Delta(\omega) = Z_\Delta^{(1)}(\omega/\Delta)$ (см., в частности, равенство (П. 40)). Но если $\omega_\Delta = \pi/\Delta \geq \Omega$, то $Z_\Delta^{(1)}(\omega) = Z(\omega)$; поэтому здесь по значениям $X_\Delta(t)$ можно восстановить значения $Z(\omega)$, однозначно определяющие значения $X(t)$ при всех t . Явную формулу, выражающую все значения $X(t)$ через значения $X_\Delta(t) = X(t\Delta)$, проще всего можно вывести следующим образом.

Воспользуемся тем, что $\omega_\Delta \geq \Omega$, где $-\Omega \leq \omega \leq \Omega$ — полоса частот, охватывающая весь спектр $X(t)$, и перепишем спектральное разложение $X(t)$ в виде

$$X(t) = \int_{-\omega_\Delta}^{\omega_\Delta} e^{it\omega} dZ(\omega). \quad (2.216)$$

Подставим теперь в эту формулу разложение заданной на конечном интервале $-\omega_\Delta \leq \omega \leq \omega_\Delta$ функции $e^{it\omega}$, где t — фиксированное число, в ряд Фурье по гармоникам $e^{i\omega 2\pi k/2\omega_\Delta} = e^{ik\Delta\omega}$,

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; это разложение, как нетрудно проверить, имеет вид

$$e^{it\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi (t/\Delta - k)}{\pi (t/\Delta - k)} e^{ik\Delta\omega}, \quad -\frac{\pi}{\Delta} \leq \omega \leq \frac{\pi}{\Delta}. \quad (2.217)$$

Учитывая первую формулу (2.209), отсюда получаем

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi (t/\Delta - k)}{\pi (t/\Delta - k)} X(k\Delta), \quad (2.218)$$

где, как обычно, бесконечная сумма понимается в смысле сходимости в среднем квадратичном. Формула (2.218), справедливая для любых стационарных процессов $X(t)$ с ограниченным спектром, целиком сосредоточенным внутри полосы $-\pi/\Delta \leq \omega \leq \pi/\Delta$, и позволяющая выразить все значения таких процессов в виде линейной комбинации их «дискретных отсчетов» через интервалы времени Δ , играет важную роль во многих инженерных задачах; в радиотехнической литературе она часто называется *формулой Котельникова*.¹⁰¹

Формула (2.218) является конкретным примером специального, зависящего от параметра t дискретного линейного преобразования, т. е. линейного преобразования (иначе, линейного фильтра или линейной системы), применяемого к стационарной последовательности $X_{\Delta}(k) = X(k\Delta)$. Рассмотрим теперь общий класс линейных преобразований $\mathcal{L}$ произвольной последовательности $X(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ представимых в виде

$$\mathcal{L}\{X(t)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=-n}^n h_j^{(n)} X(t-j), \quad (2.219)$$

где $h_j^{(n)}$ — постоянные коэффициенты. Рассуждая так же, как и на с. 138 и 244, легко показать, что предел (2.219) будет существовать тогда и только тогда, когда последовательность функций

$$H_n(\omega) = \sum_{j=-n}^n h_j^{(n)} e^{-ij\omega}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi, \quad \text{сходится при } n \rightarrow \infty$$

(в среднем квадратичном по $dF(\omega)$, где $F(\omega)$ — спектральная функция $X(t)$, т. е. в том же смысле, о котором шла речь на с. 138) к некоторой функции $H(\omega)$, причем в этом случае обязательно

$$\int_{-\pi}^{\pi} |H(\omega)|^2 dF(\omega) < \infty \quad (2.220)$$

и

$$\mathcal{L}\{X(t)\} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega} H(\omega) dZ(\omega). \quad (2.221)$$

Из (2.221) в свою очередь вытекает, что если $\mathcal{L}\{X(t)\} = Y(t)$, то корреляционная функция последовательности $Y(t)$ равна

$$B_{YY}(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\tau\omega} |H(\omega)|^2 dF(\omega), \quad (2.222)$$

а ее спектральная функция $F_{YY}(\omega)$ задается равенством

$$F_{YY}(\omega) = \int_{-\pi}^{\omega} |H(\omega')|^2 dF(\omega'). \quad (2.223)$$

В частности, если $X(t)$ имеет спектральную плотность $f(\omega)$, то и $Y(t)$ будет иметь спектральную плотность $f_{YY}(\omega)$, причем

$$f_{YY}(\omega) = |H(\omega)|^2 f(\omega). \quad (2.223a)$$

Как и в случае преобразований процессов $X(t)$ с непрерывным временем, функция $H(\omega)$ называется передаточной функцией преобразования $\mathcal{L}$, а ее модуль $A(\omega) = |H(\omega)|$ и аргумент $\Psi(\omega) = \arg H(\omega)$ — коэффициентом усиления и соответственно фазовым сдвигом $\mathcal{L}$. Передаточная функция линейного преобразования (2.218), очевидно, равна $e^{it\omega}$, что и определяет основное свойство этого преобразования.

Подавляющее большинство дискретных линейных преобразований, встречающихся в приложениях, принадлежит к несколько более узкому, чем (2.219), подклассу преобразований, задаваемых весовой последовательностью. Такие преобразования описываются формулой вида

$$\mathcal{L}\{X(t)\} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j X(t-j), \quad (2.224)$$

отличающейся от (2.219) тем, что коэффициенты h_j не зависят ни от какого n , а могут быть выбраны раз и навсегда. Для сходимости ряда в правой части (2.224) последовательность h_j , $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (которая как раз и называется весовой последовательностью преобразования $\mathcal{L}$) должна удовлетворять условию

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_j \bar{h}_l B(j-l) < \infty, \quad (2.225)$$

где $B(k) = \langle X(t+k) \overline{X(t)} \rangle$. На самом деле последовательность h_j для реально встречающихся преобразований $\mathcal{L}$ вида (2.224) почти всегда удовлетворяет также условию

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |h_j| < \infty \text{ или хотя бы } \sum_{j=-\infty}^{\infty} |h_j|^2 < \infty, \quad (2.226)$$

гарантирующему существование функции $H(\omega)$, $-\pi \leq \omega < \pi$, имеющей h_j своими коэффициентами Фурье:

$$H(\omega) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j e^{-ij\omega}, \quad h_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\omega} H(\omega) d\omega. \quad (2.227)$$

В таком случае функция $H(\omega)$ и будет передаточной функцией линейного преобразования $\mathcal{L}$ вида (2.224); наоборот, если передаточная функция H допускает разложение в ряд Фурье (2.227), где коэффициенты h_j удовлетворяют условию (2.226) (или (2.225)), то $\mathcal{L}$ будет задаваться весовой последовательностью h_j .¹⁰⁵

Реализации дискретных линейных преобразований $\mathcal{L}$ обычно могут быть представлены в виде $\mathcal{L}\{x(t)\}$, т. е. они получаются при применении того же преобразования $\mathcal{L}$ (в определении которого сходимость рядов вида (2.219) или (2.224) теперь должна пониматься в обычном смысле теории пределов) к реализации $x(t)$ последовательности $X(t)$.

Применение операций вида (2.224) (особенно, в самом простом и важном случае, когда отлично от нуля лишь конечное число весовых коэффициентов h_j) к реализациям $x(t)$ крайне просто осуществляется на цифровых вычислительных машинах. В связи с широким распространением ЭВМ исследование различных классов дискретных линейных преобразований с целью отбора среди них тех, которые обладают ценными для практических применений свойствами, в последнее время приобрело очень большое значение; сами дискретные линейные преобразования теперь часто называют цифровыми линейными преобразованиями или цифровыми линейными фильтрами — такое название подчеркивает их связь с цифровыми вычислительными машинами.¹⁰⁶

Отметим еще, что дискретное линейное преобразование $\mathcal{L}$, задаваемое весовой последовательностью h_j , только тогда может быть реально осуществлено на вычислительной машине, когда оно обладает свойством физической реализуемости, требующим, чтобы равенство $h_j = 0$ выполнялось при всех $j < 0$. Аналогично этому в случае общего линейного преобразования вида (2.219) условие физической реализуемости состоит в требовании, чтобы при всех $j < 0$ и $n = 1, 2, \dots$ выполнялось равенство $h_j^{(n)} =$

$= 0$. Условие физической реализуемости может быть, разумеется, выражено в терминах передаточной функции $H(\omega)$ преобразования $\mathcal{L}$.¹⁰⁷ На практике, однако, это условие обычно не играет важной роли.

Дело в том, что если $X(t)$ — это стационарная последовательность, то, применив $\mathcal{L}$ к сдвинутой назад во времени («задержанной») последовательности $\mathcal{S}_{-T}\{X(t)\} = X(t-T)$, мы получим последовательность $\mathcal{L}\{\mathcal{S}_{-T}X(t)\}$, все статистические характеристики которой не отличаются от характеристик последовательности $\mathcal{L}\{X(t)\}$; поэтому вместо $\mathcal{L}\{X(t)\}$ вполне можно использовать $\mathcal{L}\{\mathcal{S}_{-T}X(t)\}$. В применении же к $\mathcal{L}\{\mathcal{S}_{-T}X(t)\}$ условие физической реализуемости (требующее, чтобы равенство $h_j^{(n)} = 0$, где $h_j^{(n)}$ — коэффициенты в равенстве (2.219), задающем преобразование $\mathcal{L}$, выполнялось при всех $j < -T$) всегда может быть приближенно удовлетворено с достаточно высокой степенью точности, если только мы выберем T достаточно большим.

17.

Примеры дискретных линейных преобразований и корреляционных функций стационарных последовательностей

Ряд примеров и корреляционных функций стационарных случайных последовательностей, и их линейных преобразований был рассмотрен в § 8 этой книги; сейчас, однако, целесообразно снова обратиться к такого рода примерам, уделив основное внимание вычислению соответствующих спектральных плотностей $f(\omega)$ и передаточных функций $H(\omega)$. Начнем с примеров линейных преобразований $\mathcal{L}$.

Пример 1. Аналогом операции дифференцирования, применимым к стационарным последовательностям, является операция взятия первой разности

$$\mathcal{D}X(t) = X(t) - X(t-1). \quad (2.228)$$

Ясно, что $\mathcal{D}$ — это дискретное линейное преобразование, причем $\mathcal{D} = \mathcal{E} - \mathcal{P}$, где $\mathcal{E}$ — тождественное преобразование, а $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{-1}$ — оператор единичного сдвига назад (так что $\mathcal{P}X(t) = X(t-1)$).

Передаточная функция преобразования $\mathcal{D}$ равна

$$H(\omega) = 1 - e^{-i\omega} = 2ie^{-i\omega/2} \sin(\omega/2); \quad (2.229)$$

ей отвечает коэффициент усиления

$$A(\omega) = |H(\omega)| = 2 |\sin(\omega/2)|. \quad (2.229a)$$

Применив n раз преобразование $\mathcal{D}$, мы приходим к операции $\mathcal{D}^n$ перехода к разности n -го порядка; передаточная функция и коэффициент усиления $\mathcal{D}^n$ будут, очевидно, равны

$$H(\omega) = (2i)^n e^{-in\omega/2} [\sin(\omega/2)]^n, \quad (2.230)$$

$$A(\omega) = 2^n (\sin \omega/2)^n. \quad (2.230a)$$

Пример 2. Аналогом дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, рассматривавшихся в § 14, являются разностные операторы вида

$$\mathcal{L} = a_n \mathcal{D}^n + a_1 \mathcal{D}^{n-1} + \dots + a_n \mathcal{E}. \quad (2.231)$$

Преобразования (2.231) входят в класс общих преобразований скользящего суммирования порядка n вида

$$\mathcal{L}\{X(t)\} = b_0 X(t) + b_1 X(t-1) + \dots + b_n X(t-n), \quad (2.232)$$

представляющих собой физически реализуемые линейные преобразования, задаваемые весовой последовательностью, содержащей лишь конечное число $n+1$ отличных от нуля весовых коэффициентов.

Передаточная функция преобразования (2.232) очевидно равна

$$H(\omega) = b_0 + b_1 e^{-i\omega} + \dots + b_n e^{-in\omega}. \quad (2.233)$$

Часто встречающимся частным случаем преобразования скользящего суммирования порядка $n-1$ является среднеарифметическое сглаживание

$$\mathcal{L}\{X(t)\} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X(t-k). \quad (2.234)$$

В этом случае, очевидно,

$$H(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-ik\omega} = e^{-i(n-1)\omega/2} \frac{\sin(n\omega/2)}{n \sin(\omega/2)}. \quad (2.235)$$

Пример 3. Рекуррентные фильтры. Преобразования скользящего суммирования конечного порядка n очень легко осуществляются на вычислительных машинах, но, к сожалению, они представляют собой лишь относительно узкий класс дискретных линейных преобразований. Значительно более широкий класс физически реализуемых линейных преобразований составляют так называемые рекуррентные линейные фильтры $\mathcal{L}$ конечного порядка, для которых $Y(t) = \mathcal{L}\{X(t)\}$ (функция на выходе фильтра в момент t) линейно зависит от конечного числа значений $X(t')$ (в момент $t' = t$ и в более ранние моменты

времени $t' < t$) и конечного числа прошлых значений $Y(t')$ (при $t' < t$). Такие фильтры $\mathcal{L}$ описываются равенствами вида

$$Y(t) = -a_1 Y(t-1) - \dots - a_m Y(t-m) + b_0 X(t) + \\ + b_1 X(t-1) + \dots + b_n X(t-n), \quad (2.236)$$

где a_j , $j = 1, \dots, m$, и b_k , $k = 1, \dots, n$ — постоянные коэффициенты.

Если $H(\omega)$ — передаточная функция рекуррентного фильтра формулы (2.236), то, подставив в (2.236) вместо всех величин $Y(t')$ и $X(t')$ их спектральное разложение и воспользовавшись равенством (2.221), будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} [P(e^{-i\omega}) H(\omega) - Q(e^{-i\omega})] dZ(\omega) = 0, \\ t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.237)$$

где

$$P(z) = \sum_{j=0}^m a_j z^j, \quad a_0 = 1, \quad Q(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k. \quad (2.238)$$

Так как равенство (2.236) должно иметь место для всех последовательностей $X(t)$, к которым может быть применен рассматриваемый фильтр $\mathcal{L}$, т. е. равенство (2.237) должно быть справедливым при всех $Z(\omega)$, для которых интеграл в правой части (2.237) сходится, то ясно, что передаточная функция $H(\omega)$ должна задаваться равенством

$$H(\omega) = \frac{Q(e^{-i\omega})}{P(e^{-i\omega})}. \quad (2.239)$$

Обратно, если линейное преобразование $\mathcal{L}$ имеет передаточную функцию (2.239), то $Y(t) = \mathcal{L}\{X(t)\}$ очевидно будет удовлетворять равенству (2.236), т. е. $\mathcal{L}$ будет рекуррентным линейным фильтром.

Ясно, что после того как все значения $Y(t')$ с $t' < t$ нам уже известны, значение $Y(t)$ может быть очень просто подсчитано по известным значениям $X(t')$ с помощью формулы (2.236). Сложность состоит лишь в том, что неясно, как следует поступать вначале, когда еще никакие значения $Y(t')$ нам неизвестны.

С этой точки зрения наибольший интерес, представляют так называемые устойчивые рекуррентные фильтры, обладающие тем свойством, что как бы мы не выбрали начальные значения $y(t_0-1), \dots, y(t_0-m)$ величин $Y(t_0-1), \dots, Y(t_0-m)$, если затем мы будем последовательно определять значения $y(t_0), y(t_0+1), \dots$ по формуле (2.236), исходя из известных нам значений реализации $x(t)$ стационарной случайной после-

довательности $X(t)$, то с ростом $t - t_0$ влияние выбранных «начальных условий» на $y(t)$ будет затухать и $y(t)$ будет стремиться при

$t - t_0 \rightarrow \infty$ к выборочному значению (реализации) величины $Y(t) = \mathcal{L}\{X(t)\}$, где $\mathcal{L}$ — линейное преобразование с передаточной функцией (2.239).

Из общей теории уравнений в конечных разностях вытекает, что фильтр (2.236) будет тогда и только тогда устойчивым, когда все корни уравнения $P(z) = 0$ будут превосходить по модулю единицу, причем скорость затухания влияния начальных условий с ростом $t - t_0$ здесь определяется скоростью затухания функции $|\alpha|^{-(t-t_0)}$, где α — наименьший по модулю корень указанного уравнения (ср. § 8, примеры 6 и 7, а также примечания ⁵⁹ и ⁶²). Поэтому в данном случае нетрудно оценить, сколько начальных членов последовательности $y(t_0)$, $y(t_0 + 1)$, ... надо опустить, чтобы далее уже можно было считать, что значения $y(t)$ задают реализацию стационарной последовательности $Y(t)$.

Так как современные вычислительные машины могут очень быстро подсчитать много значений $y(t)$, $t = t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, \dots$ то отбрасывание даже сравнительно длинного начального участка этого ряда не создает больших затруднений; поэтому устойчивые рекуррентные фильтры без труда реализуются на вычислительных машинах.

Отметим еще, что формально рекуррентный линейный фильтр $\mathcal{L}$, задаваемый равенством (2.236), можно выразить через оператор сдвига $\mathcal{P}$ с помощью формулы

$$\mathcal{L} = \frac{b_0\mathcal{E} + b_1\mathcal{P} + \dots + b_n\mathcal{P}^n}{\mathcal{E} + a_1\mathcal{P} + \dots + a_m\mathcal{P}^m} = \frac{Q(\mathcal{P})}{P(\mathcal{P})} \quad (2.240)$$

(так как равенство (2.236) означает, что $P(\mathcal{P})\mathcal{L}\{X(t)\} = Q(\mathcal{P})X(t)$).

В случае устойчивого рекуррентного фильтра функцию $[P(z)]^{-1}$ можно разложить в сходящийся при $|z| \leq 1$ степенной ряд: $[P(z)]^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j z^j$, где $\gamma_0 = 1$. Поэтому (2.240) в рассматриваемом случае можно переписать в виде

$$\mathcal{L} = Q(\mathcal{P}) \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \mathcal{P}^j = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \mathcal{P}^j, \\ Y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j X(t - j), \quad (2.241)$$

где ряд в правой части второго равенства (2.241) — сходящийся (в обычном среднеквадратичном смысле). Нетрудно показать, что соответствующее $Y(t)$ будет совпадать со стационарным решением

уравнения (2.236) (см. примечание ⁶²), так что устойчивый рекуррентный фильтр $\mathcal{L}$ всегда может быть представлен в виде преобразования скользящего суммирования (2.241) бесконечного порядка. Однако задание этого фильтра равенством вида (2.236) имеет то существенное преимущество, что оно позволяет проще применить его к заданной числовой последовательности $x(t_0)$, $x(t_0 + 1)$, ... (являющейся реализацией случайной последовательности $X(t)$).

Устойчивые рекуррентные фильтры охватывают широкий класс физически реализуемых дискретных линейных преобразований, причем многие из них обладают теми или другими практически полезными свойствами. В частности, рекуррентный фильтр $\mathcal{L}$ можно подобрать и так, чтобы он аппроксимировал с хорошей точностью фильтр низких частот (или фильтр высоких частот, или полосовой фильтр) с любой заданной полосой пропускания. Мы здесь, однако, не будем задерживаться на примерах такого рода, ¹⁰⁸ а ограничимся рассмотрением лишь одного очень простого (но притом довольно часто встречающегося в приложениях) частного рекуррентного фильтра, задаваемого равенством

$$Y(t) = aY(t-1) + (1-a)X(t), \quad (2.242)$$

где a — вещественное число, $|a| < 1$. В силу (2.239) здесь

$$H(\omega) = \frac{1-a}{1-ae^{-i\omega}}, \quad A(\omega) = \frac{1-a}{(1-2a \cos \omega + a^2)^{1/2}}. \quad (2.243)$$

Нетрудно показать, что такой фильтр $\mathcal{L}$ при $a > 0$ представляет собой (неидеальный) фильтр низких частот, а при $a < 0$ — фильтр высоких частот. Равенства (2.241), примененные к (2.242), принимают вид

$$\mathcal{L} = (1-a) \sum_{j=0}^{\infty} a^j \mathcal{I}^j,$$

$$Y(t) = (1-a) \sum_{j=0}^{\infty} a^j X(t-j), \quad (2.244)$$

так что фильтр (2.242) может рассматриваться как дискретная форма преобразования экспоненциального сглаживания (2.173)*.

Перейдем теперь к примерам корреляционных функций стационарных случайных последовательностей. Начнем с самого простого примера, рассматривавшегося нами в начале § 8.

Пример 1. Пусть

$$B(0) = 1, \quad B(\tau) = 0 \text{ при } \tau \neq 0. \quad (2.245)$$

* Аналогия между равенствами (2.173) и (2.244) становится особенно наглядной, если ввести обозначение $T^{-1} = \ln(a^{-1})$, так как тогда $a^j = e^{-j/T}$.

Соответствующая спектральная плотность в силу (2.203) равна

$$f(\omega) = 1/2\pi, \quad -\pi \leq \omega < \pi. \quad (2.246)$$

Аналогично этому, если $B(\tau) = 0$ при $\tau \neq 0$, а $B(0) = C$, где $C > 0$, то $f(\omega) = C/2\pi = \text{const}$. Таким образом, для стационарных последовательностей некоррелированных случайных величин спектральная плотность $f(\omega)$ при всех ω принимает постоянное значение; в этой связи указанные последовательности иногда называют дискретным белым шумом.

Пример 2. Если

$$B(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau|/m & \text{при } |\tau| < m, \\ 0 & \text{при } |\tau| \geq m, \end{cases} \quad (2.247)$$

то, заменив в (2.203а) $g(\omega)$ на $2f(\omega)$, после несложных преобразований получаем

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{\tau=0}^{m-1} (1 - \tau/m) \cos \tau\omega \right\} = \frac{\sin^2(m\omega/2)}{2\pi m \sin^2(\omega/2)} \quad (2.248)$$

(здесь использованы формулы 1.342.2 и 1.352.2 из книги Градштейна и Рыжика [64]). Мы видим, что $f(\omega) \geq 0$ при всех ω , как это и должно быть в силу доказанного на с. 83 утверждения о том, что функция (2.247) (не отличающаяся от (2.3)) может быть корреляционной функцией стационарной случайной последовательности. Отметим еще, что, воспользовавшись формулами (2.2), (2.235), (2.223а) и (2.246), формулу (2.248) для $f(\omega)$ можно получить не производя никаких преобразований.

Допустимость корреляционной функции стационарной последовательности вида (2.247) вытекает и из того, что эта функция совпадает со значениями при целых τ положительно определенной функции (2.117) непрерывного аргумента τ , если $T = m$, $C = m^{-1}$. При этом в силу (2.118) и (2.213) для спектральной плотности $f(\omega)$, отвечающей (2.247), получается соотношение

$$f(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin^2[(\omega + 2k\pi)m/2]}{\pi m (\omega + 2k\pi)^2} = \frac{\sin^2(\omega m/2)}{2\pi^2 m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega/2\pi + k)^2}.$$

Отсюда также легко вывести формулу (2.248), воспользовавшись известным равенством

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} \quad (2.249)$$

(см. [64], формула 1.422.4); наоборот, считая известной формулу (2.248), мы приходим к доказательству формулы (2.249).

Если теперь $B(\tau)$ задается более общей формулой (2.5), то, используя формулы (2.4), (2.223а), (2.233) и (2.246), можно без труда доказать, что

$$f(\omega) = \left| \sum_{k=0}^n b_k e^{-ik\omega} \right|^2 / 2\pi. \quad (2.250)$$

Пример 3. Пусть

$$B(\tau) = Ca^{|\tau|}, \quad C > 0, \quad |a| < 1, \quad \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.251)$$

т. е. $B(\tau)$ убывает с ростом $|\tau|$ в геометрической прогрессии, a — вещественное число. В таком случае в силу (2.203) получаем

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{C}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^{|k|} e^{-ik\omega} = \frac{C}{2\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (ae^{i\omega})^k + \sum_{k=0}^{\infty} (ae^{-i\omega})^k \right\} = \\ &= \frac{C}{2\pi} \left\{ \frac{ae^{i\omega}}{1 - ae^{i\omega}} + \frac{1}{1 - ae^{-i\omega}} \right\} = \\ &= \frac{C}{2\pi} \left\{ \frac{a}{e^{-i\omega} - a} + \frac{e^{i\omega}}{e^{i\omega} - a} \right\} = \frac{C}{2\pi} \frac{1 - a^2}{|e^{i\omega} - a|^2}. \end{aligned} \quad (2.252)$$

Неотрицательность функции (2.252) показывает, что функция (2.251) может быть корреляционной функцией стационарной последовательности — факт, который совсем иначе был доказан в § 8 (пример 5). Сопоставление формул (2.252) и (2.243) показывает также, что последовательность $Y(t)$ с корреляционной функцией (2.251) можно получить, применив рекуррентный фильтр (2.242) к последовательности $X(t) = cE(t)$ некоррелированных величин с дисперсией $c^2 = C(1 - a^2)/(1 - a)^2 = C(1 + a)/(1 - a)$; этот результат также нам уже известен из § 8. Наоборот, зная, что последовательность с корреляционной функцией (2.251) можно получить из последовательности $cE(t)$ указанным выше способом, мы можем сразу вывести формулу (2.252) для $f(\omega)$ из (2.223а), (2.243) и (2.246). Наконец отметим еще, что законность выбора функции (2.251) в качестве корреляционной функции стационарной последовательности вытекает и из того, что значения $B(\tau)$ здесь совпадают со значениями при целочисленных τ положительно определенной функции (2.89), где $e^{-\alpha} = a$. Отсюда, в частности, вытекает, что для вычисления спектральной плотности $f(\omega)$, отвечающей корреляционной функции (2.251), можно также воспользоваться формулами (2.90) и (2.213), в силу которых

$$f(\omega) = \frac{C\alpha}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + 2k\pi)^2}, \quad \alpha = -\ln a.$$

Сравнение последней формулы с (2.252) позволяет установить любопытное тождество¹⁰⁹

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 + (\omega + 2k\pi)^2} = \frac{1 - e^{-2\alpha}}{2\alpha(1 - 2e^{-\alpha} \cos \omega + e^{-2\alpha})}. \quad (2.253)$$

Пример 4. В случае последовательности авторегрессии m -го порядка, удовлетворяющей конечноразностному уравнению (2.13), спектральная плотность $f(\omega)$ в силу формул (2.223а), (2.239) и (2.246) будет равна

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \frac{c^2}{2\pi |1 + a_1 e^{-i\omega} + \dots + a_m e^{-im\omega}|^2} = \\ &= \frac{c^2}{2\pi |(e^{i\omega} - \alpha_1) \dots (e^{i\omega} - \alpha_m)|^2}, \end{aligned} \quad (2.254)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — корни уравнения $z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m = 0$. Соответствующая корреляционная функция $B(\tau)$ после этого легко находится по формуле (2.204). В частности, если $m = 2$, то, переписав эту формулу в виде

$$\begin{aligned} B(k) &= \frac{c^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{ik\omega} d\omega}{(e^{i\omega} - \alpha_1)(e^{-i\omega} - \bar{\alpha}_1)(e^{i\omega} - \alpha_2)(e^{-i\omega} - \bar{\alpha}_2)} = \\ &= \frac{c^2}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{z^{k-1} dz}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \left(\frac{1}{z} - \bar{\alpha}_1\right) \left(\frac{1}{z} - \bar{\alpha}_2\right)}, \quad z = e^{i\omega}, \end{aligned} \quad (2.255)$$

и применив теорему о вычетах, легко показать, что $B(k)$ совпадает с коэффициентом при $1/z^k$ в разложении в ряд Лорана рациональной функции

$$f^*(z) = \frac{c^2 z^2}{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(1 - \bar{\alpha}_1 z)(1 - \bar{\alpha}_2 z)}. \quad (2.256)$$

В случае, например, когда корни α_1 и α_2 — вещественные, меньшие единицы по модулю и не равные между собой, воспользовавшись разложением функции $f^*(z)$ на простейшие дроби и разложив затем соответствующие простейшие дроби в степенные ряды, можно легко вывести из формулы (2.225) формулу (2.15). Аналогичным образом из формул (2.255) и (2.256) могут быть получены формулы (2.15а) и (2.15б); тот же метод, разумеется, может быть применен и к последовательностям авторегрессии порядка, превосходящего два.

Пример 5. Обобщением предыдущего примера является корреляционная функция $B(\tau)$, отвечающая общей рациональной отно-

сительно $e^{i\omega}$ спектральной плотности $f(\omega)$. Нетрудно показать, что такая спектральная плотность $f(\omega)$ всегда может быть представлена в виде

$$f(\omega) = \frac{|b_0 e^{in\omega} + b_1 e^{i(n-1)\omega} + \dots + b_n|^2}{|e^{im\omega} + a_1 e^{i(m-1)\omega} + \dots + a_m|^2} = \\ = |b_0|^2 \frac{|(e^{i\omega} - \beta_1) \dots (e^{i\omega} - \beta_n)|^2}{|(e^{i\omega} - \alpha_1) \dots (e^{i\omega} - \alpha_m)|^2}, \quad (2.257)$$

где коэффициенты b_0 , b_n и a_m отличны от нуля, все корни $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ уравнения $z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m = 0$ по модулю больше нуля, но меньше единицы, а все корни $\beta_1, \dots, \beta_n$ уравнения $b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n = 0$ по модулю больше нуля, но не превосходят единицы.¹¹⁰

Ясно, что процесс со спектральной плотностью вида (2.257) может быть получен с помощью применения устойчивого рекуррентного фильтра, задаваемого формулой (2.236), к дискретному белому шуму $X(t) = cE(t)$. Значение $B(k)$, где $k \geq 0$, здесь очевидно равно умноженному на 2π коэффициенту при z^{-k} в разложении рациональной функции

$$f^*(z) = |b_0|^2 \frac{(z - \beta_1) \dots (z - \beta_n) \left(\frac{1}{z} - \bar{\beta}_1\right) \dots \left(\frac{1}{z} - \bar{\beta}_n\right)}{(z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_n) \left(\frac{1}{z} - \bar{\alpha}_1\right) \dots \left(\frac{1}{z} - \bar{\alpha}_n\right)}$$

в ряд Лорана; его можно явно вычислить, воспользовавшись разложением функции $f^*(z)$ на простейшие дроби.

Пусть, например, $n = 1$ и $m = 1$, а корни $\beta_1 = \beta$ и $\alpha_1 = \alpha$ — вещественные и по модулю меньше единицы, так что

$$f(\omega) = C \frac{|e^{i\omega} - \beta|^2}{|e^{i\omega} - \alpha|^2} = C \frac{(e^{i\omega} - \beta)(e^{-i\omega} - \beta)}{(e^{i\omega} - \alpha)(e^{-i\omega} - \alpha)}. \quad (2.258)$$

Нетрудно проверить, что в этом случае разложение $f^*(z)$ на простейшие дроби будет иметь вид

$$f^*(z) = \frac{C(\alpha - \beta)(1 - \alpha\beta)}{\alpha(1 - \alpha^2)} \left(\frac{\alpha}{z - \alpha} + \frac{1}{1 - \alpha z} \right) + \frac{C\beta}{\alpha}.$$

Воспользовавшись теперь тем, что $1/(1 - \alpha z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k z^k$, а $\alpha/(z - \alpha) = -\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k / z^k$, после несложных преобразований находим, что

$$B(\tau) = \begin{cases} \frac{2\pi C(\alpha - \beta)(1 - \alpha\beta)}{1 - \alpha^2} \alpha^{|\tau|-1} & \text{при } |\tau| \neq 0, \\ \frac{2\pi C(1 - 2\alpha\beta + \beta^2)}{1 - \alpha^2} & \text{при } \tau = 0, \end{cases} \quad (2.259)$$

18. Оценка спектральной плотности и спектральной функции по данным наблюдений за значениями $x(t)$

Понятия спектральной функции и спектральной плотности стационарной случайной функции $X(t)$ бесспорно являются центральными для всей корреляционной теории таких функций. Также и в почти всех применениях теории стационарных случайных функций эти понятия играют основную роль — недаром практическим приложениям спектральных методов посвящен целый ряд специальных монографий.¹¹¹ Ясно, однако, что плодотворное использование спектральной теории стационарных случайных функций возможно лишь тогда, когда нам известны значения спектральной функции $F(\omega)$ или, что еще удобнее, спектральной плотности $f(\omega)$ случайной функции $X(t)$, фигурирующей в нашей задаче.

Между тем, в большинстве приложений значения $f(\omega)$ и $F(\omega)$ оказываются неизвестными и их приходится приближенно определять по данным наблюдений за $X(t)$, т. е. по значениям нескольких или, чаще всего, одной единственной реализации $x(t)$, известным в течение конечного интервала времени. Кое-какие замечания по поводу методов определения значений спектральных функций и плотности по экспериментальным данным уже приводились выше (см., в частности, с. 145—146 и рис. 13 и 166); однако важность этой задачи делает целесообразным значительно более подробное ее рассмотрение. Этому и посвящен настоящий параграф.

Задаче об оценке спектральных характеристик стационарных случайных функций $X(t)$ посвящена огромная литература.¹¹² Мы здесь уделим основное внимание наиболее широко используемым в настоящее время численным методам оценки спектральной плотности $f(\omega)$; поэтому к замечаниям по этому поводу на с. 122 и 145—146 мы вернемся только в конце параграфа, а сначала рассмотрим другой подход к той же задаче.

Ограничимся случаем, когда из наблюдений известна лишь одна реализация $x(t)$ вещественной функции $X(t)$, где $t = 1, 2, \dots, T$ или $0 \leq t \leq T^*$, и при этом будем считать, что $\langle X(t) \rangle = 0$, а корреляционная функция $B(\tau) = b(\tau)$ настолько быстро убывает при $|\tau| \rightarrow \infty$, что существует спектральная плотность $f(\omega)$, непрерывно зависящая от частоты ω . Пусть как раз значения $f(\omega)$ нам и требуется оценить по значениям $x(t)$. Ясно, что возникающая здесь задача родственна рассматривавшейся в § 6

* В случае, когда известно несколько (скажем, N) независимых реализаций $x(t)$ одинаковой длины, целесообразно по каждой из них одинаковым образом оценить интересующую нас величину, а затем использовать среднее арифметическое N полученных оценок. При этом смещение результирующей оценки, разумеется, останется тем же, что и у каждой из оценок, построенных по одной реализации, но дисперсия уменьшится в N раз.

задаче об оценке значений корреляционной функции $B(\tau)$. В частности, нетрудно понять, что состоятельная оценка $f_T^*(\omega)$ функции $f(\omega)$ (т. е. оценка, стремящаяся при $T \rightarrow \infty$ к истинному значению $f(\omega)$) может существовать лишь тогда, когда выполняются указанные в § 6 «условия эргодичности второго порядка», обеспечивающие существование состоятельной оценки корреляционной функции $B(\tau)$; поэтому эти условия всегда будут предполагаться выполняющимися.

В § 6 рассматривалось несколько оценок функции $B(\tau)$, из числа которых надо особо выделить оценку $B_T^*(\tau)$, задаваемую формулами (1.68), (1.68а), и близкую к ней оценку $B_T^{**}(\tau)$ (см. с. 74—75)*. Напомним, что оценка $B_T^*(\tau)$, в отличие от $B_T^{**}(\tau)$, является строго несмещенной (правда, лишь тогда, когда точно известно, что $\langle X(t) \rangle = 0$). В то же время оценка $B_T^{**}(\tau)$, как правило, более точна (т. е. характеризуется меньшей средней квадратической ошибкой) и, кроме того, она представляет собой положительно определенную функцию τ , тогда как $B_T^*(\tau)$ этим свойством не обладает. Последнее обстоятельство представляется особенно важным, когда мы оцениваем функцию $f(\omega)$; из него следует, что, используя в качестве нужной нам оценки $f(\omega)$ преобразование Фурье функции $B_T^{**}(\tau)$, можно быть уверенным хотя бы в том, что ни при каком ω мы не получим бессмысленного отрицательного значения. Поэтому представляется целесообразным попробовать оценить $f(\omega)$, заменив в формулах (2.82) и (2.203), выражающих $f(\omega)$ через $B(\tau)$, значения неизвестной нам функции $B(\tau)$ ее оценкой $B_T^{**}(\tau)$.

Учитывая, что $B_T^{**}(\tau) = 0$ при $|\tau| \geq T$, найдем, что соответствующая оценка $f(\omega)$ имеет вид

$$i_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T e^{-i\omega\tau} B_T^{**}(\tau) d\tau \quad (2.260)$$

или

$$i_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-T+1}^{T-1} e^{-i\omega\tau} B_T^{**}(\tau). \quad (2.260a)$$

С помощью несложных преобразований нетрудно доказать,¹¹³ что формулы (2.260) могут быть также переписаны в виде

$$i_T(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T e^{-i\omega t} x(t) dt \right|^2 \quad (2.261).$$

* Оценки $B_{TN}^*(\tau)$ и $B_{TN}^{**}(\tau)$, упоминавшиеся в § 6 на с. 68 и 75, представляют собой те же оценки $B_T^*(\tau)$ и $B_T^{**}(\tau)$, но только относящиеся к дискретной выборке $X_{1/N}(t) = X(t/N)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ процесса $X(t)$; поэтому их можно отдельно не рассматривать.

или

$$i_T(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=1}^T e^{-i\omega t} x(t) \right|^2, \quad (2.261a)$$

еще раз подтверждающем, что $i_T(\omega) \geq 0$ при всех ω .

Ясно, что $i_T(\omega)$ — это выборочное значение (т. е. реализация) следующей случайной функции аргумента ω :

$$I_T(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T e^{-i\omega t} X(t) dt \right|^2 \quad (2.261б)$$

или

$$I_T(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=1}^T e^{-i\omega t} X(t) \right|^2. \quad (2.261в)$$

Неслучайная функция $i_T(\omega)$ и случайная функция $I_T(\omega)$ представляют собой эмпирическую (выборочную) и теоретическую формы одной и той же оценки спектральной плотности $f(\omega)$ (родственные формам m_T и M_T оценки среднего значения $m = \langle X(t) \rangle$); обе они называются периодограммой случайной функции $X(t)$. Понятие периодограммы было введено в рассмотрение английским физиком Шустером еще в конце прошлого столетия; оно играет основную роль в большинстве существующих методов оценки значений $f(\omega)$.

Ясно, что в случае вещественной функции $X(t)$ функция $i_T(\omega)$ при непрерывном t может быть также представлена в следующей чисто вещественной форме:

$$i_T(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \left\{ \left[\int_0^T x(t) \cos \omega t dt \right]^2 + \left[\int_0^T x(t) \sin \omega t dt \right]^2 \right\}; \quad (2.262)$$

аналогичным образом может быть здесь переписана и формула для $I_T(\omega)$, а также формулы для $i_T(\omega)$ и $I_T(\omega)$ при дискретном t .

Учтя, что $\langle B_T^{**}(\tau) \rangle = (1 - |\tau|/T) B(\tau)$, и выразив здесь $B(\tau)$ через $f(\omega)$, нетрудно вывести из (2.260) — (2.260а) что в случае непрерывного t

$$\langle I_T(\omega) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi T} \frac{\sin^2 [T(\omega' - \omega)/2]}{(\omega' - \omega)^2} f(\omega') d\omega', \quad (2.263)$$

а в случае дискретного t

$$\langle I_T(\omega) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi T} \frac{\sin^2 [T(\omega' - \omega)/2]}{\sin^2 [(\omega' - \omega)/2]} f(\omega') d\omega' \quad (2.263a)$$

(более подробно этот вывод, а также и вывод некоторых последующих формул рассмотрены в примечании)¹¹⁴. Согласно (2.263) и (2.263а), вообще говоря, $\langle I_T(\omega) \rangle \neq f(\omega)$, так что $I_T(\omega)$ представляет собой смещенную оценку спектральной плотности $f(\omega)$. Последнее обстоятельство, впрочем, не играет большой роли: ведь при небольших T вообще нельзя рассчитывать на получение более или менее удовлетворительной оценки значений $f(\omega)$, а при больших T разница между $\langle I_T(\omega) \rangle$ и $f(\omega)$ очень мала, так как подынтегральные функции в правых частях (2.263) и (2.263а) обе при $T \rightarrow \infty$ стремятся к δ -функции $\delta(\omega' - \omega)$.

Из последнего замечания следует, что оценка $I_T(\omega)$ непрерывной спектральной плотности $f(\omega)$ (так же как и оценка $B_T^{**}(\tau)$ функции $B(\tau)$) — асимптотически несмещенная, т. е. при $T \rightarrow \infty$ ее смещение стремится к нулю. Этого, разумеется, и следовало ожидать в силу того, что функции $B_T^{**}(\tau)$ и $I_T(\omega)$ являются преобразованиями Фурье друг друга.

Вычисление дисперсии $DI_T(\omega) = \langle (I_T(\omega) - \langle I_T(\omega) \rangle)^2 \rangle$ и общей центрированной корреляционной функции $b_I(\omega_1, \omega_2) = \langle (I_T(\omega_1) - \langle I_T(\omega_1) \rangle) (I_T(\omega_2) - \langle I_T(\omega_2) \rangle) \rangle$ случайной функции $I_T(\omega)$ является более сложным делом, но при некоторых дополнительных предположениях и для этих величин можно получить явные выражения. Мы здесь ограничимся рассмотрением лишь случая, когда функция $X_1^f(t)$ — гауссовская, хотя на самом деле очень близкие результаты могут быть получены и при значительно более широких предположениях (см. примечание¹¹⁴). В гауссовском случае нетрудно доказать, что, например, при непрерывном t

$$\begin{aligned}
 b_I(\omega_1, \omega_2) = & \\
 = & \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi T} \frac{\sin [T(\omega' - \omega_1)/2]}{\omega' - \omega_1} \frac{\sin [T(\omega' - \omega_2)/2]}{\omega' - \omega_2} f(\omega') d\omega' \right]^2 + \\
 + & \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi T} \frac{\sin [T(\omega' - \omega_1)/2]}{\omega' - \omega_1} \frac{\sin [T(\omega' + \omega_2)/2]}{\omega' + \omega_2} \times f(\omega') d\omega' \right]^2; \quad (2.264)
 \end{aligned}$$

формула для $b_I(\omega_1, \omega_2)$ при дискретном t отличается от (2.264) лишь заменой пределов интегрирования в правой части на $-\pi$ и π , а функций $\frac{\sin(Tx/2)}{x}$ (где $x = \omega' - \omega_1$, $\omega' - \omega_2$ и $\omega' + \omega_2$) — на $\frac{\sin(Tx/2)}{2 \sin(x/2)}$. Положив, что $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ в (2.264), мы получим

выражение для дисперсии $DI_T(\omega)$; нетрудно показать, что при $T \rightarrow \infty$ это выражение приводит к результату

$$\lim_{T \rightarrow \infty} DI_T(\omega) = \begin{cases} 2f^2(\omega) & \text{при } \omega = 0, \\ f^2(\omega) & \text{при } \omega \neq 0. \end{cases} \quad (2.265)$$

Аналогичный результат справедлив и для дискретного t , но только здесь уже $\lim_{T \rightarrow \infty} DI_T(\omega) = 2f^2(\omega)$ и при $\omega = 0$, и при $\omega = \pm \pi$ (но снова $\lim_{T \rightarrow \infty} DI_T(\omega) = f^2(\omega)$ при всех других ω). Далее, если $\omega_2 \neq \pm \omega_1$ (напомним, что по определению $I_T(-\omega) = I_T(\omega)$), то в силу (2.264) получаем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} b_I(\omega_1, \omega_2) = 0 \quad \text{при } \omega_2 \neq \pm \omega_1. \quad (2.266)$$

В дополнение к (2.266) заметим еще, что на самом деле при $T \rightarrow \infty$ значения $I_T(\omega)$ в точках ω_1 и $\omega_2 \neq \pm \omega_1$ становятся, как это нетрудно доказать, не только некоррелированными, но и взаимно независимыми случайными величинами.

Из формулы (2.265) видно, что дисперсия периодограммы $I_T(\omega)$ при $T \rightarrow \infty$ не стремится к нулю, а принимает конечное значение. Иначе говоря, хотя систематическая ошибка оценки $I_T(\omega)$ величины $f(\omega)$ и стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$ (так как $\langle I_T(\omega) \rangle \rightarrow f(\omega)$), но ее средняя квадратическая случайная ошибка $\sigma(I_T) = [DI_T(\omega)]^{1/2}$ при всех T остается конечной (и имеет тот же порядок величины, что и $f(\omega)$). Поэтому периодограмма $I_T(\omega)$ не является состоятельной оценкой спектральной плотности $f(\omega)$, несмотря на то, что ее преобразование Фурье (функция $B_T^{**}(\tau)$) является состоятельной оценкой преобразования Фурье $B(\tau)$ функции $f(\omega)$ (о причине этого различия в свойствах оценок $B_T^{**}(\tau)$ и $I_T(\omega)$ мы еще скажем ниже). Более того, формула (2.266) показывает, что при больших T значения $I_T(\omega)$ в разных точках оси частот оказываются (в гауссовском случае по крайней мере) взаимно некоррелированными (и даже независимыми) величинами. Последнее обстоятельство означает, что при больших значениях T эмпирическая периодограмма $i_T(\omega)$ должна быть крайне нерегулярной функцией частоты ω : ее значения должны резко изменяться при незначительном изменении аргумента, беспорядочно флуктуируя около среднего значения $\langle I_T(\omega) \rangle$ (мало отличающегося от истинной спектральной плотности $f(\omega)$).

И действительно, во всех случаях, когда значения $i_T(\omega)$ реально подсчитывались по достаточно длинному отрезку значений $x(t)$ какого-то временного ряда, имеющего характер реализации стационарной случайной функции, их изменение с частотой оказывалось достаточно хаотическим; этот факт мы сейчас проиллюстрируем несколькими примерами.

В качестве первого примера, сыгравшего значительную роль в развитии теории временных рядов, мы рассмотрим вычисленную Бевериджем периодограмму представленных на рис. 2 д колебаний цен на пшеницу на рынках Западной Европы (см. рис. 19а) *. Мы видим, что функция $i_T(T_0)$, $T_0 = 2\pi/\omega$, здесь характеризуется большим числом максимумов (пики), разделенных глубокими провалами. Сам Беверидж был склонен признать по крайней мере 18 из этих максимумов вполне реальными, т. е. отражающими какие-то реальные периодические изменения экономических условий. Однако предшествующие рассмотрения (в частности, формулы (2.265) и (2.266)) делают это заключение очень сомнительным; скорее можно ожидать, что или все, или почти все «пики» на рис. 19а на самом деле порождены чисто случайными флуктуациями значений $i_T(\omega)$ **.

В качестве второго, более современного примера такого же рода, относящегося к метеорологии, мы приводим на рис. 19 б рассчитанную Поляком¹¹⁶ периодограмму 200-летнего ряда наблюдений средней годовой температуры воздуха в Базеле (по оси абсцисс здесь отложены и значения круговой частоты ω в радианах в год, и соответствующие значения периода $T_0 = 2\pi/\omega$ в годах).

Периодограмма и в этом случае оказалась настолько изрезанной и нерегулярной, что трудно поверить, чтобы ее «пики» могли как-то отражать общие статистические закономерности соответствующего случайного процесса, а не определяться одними лишь весьма частными особенностями используемого отрезка реализации $x(t)$.

В случае рядов, периодограммы которых изображены на рис. 19 а и 19 б, мы, разумеется, не знаем истинной формы спектральной плотности и можем лишь догадываться, что она должна быть гораздо более гладкой, чем соответствующая периодограмма. Для того же чтобы иметь возможность сравнить значения $i_T(\omega)$ с истинными значениями $f(\omega)$, целесообразно рассмотреть периодограммы искусственных временных рядов $x(t)$, построенных с помощью таблиц случайных чисел (или с помощью вычисленных на

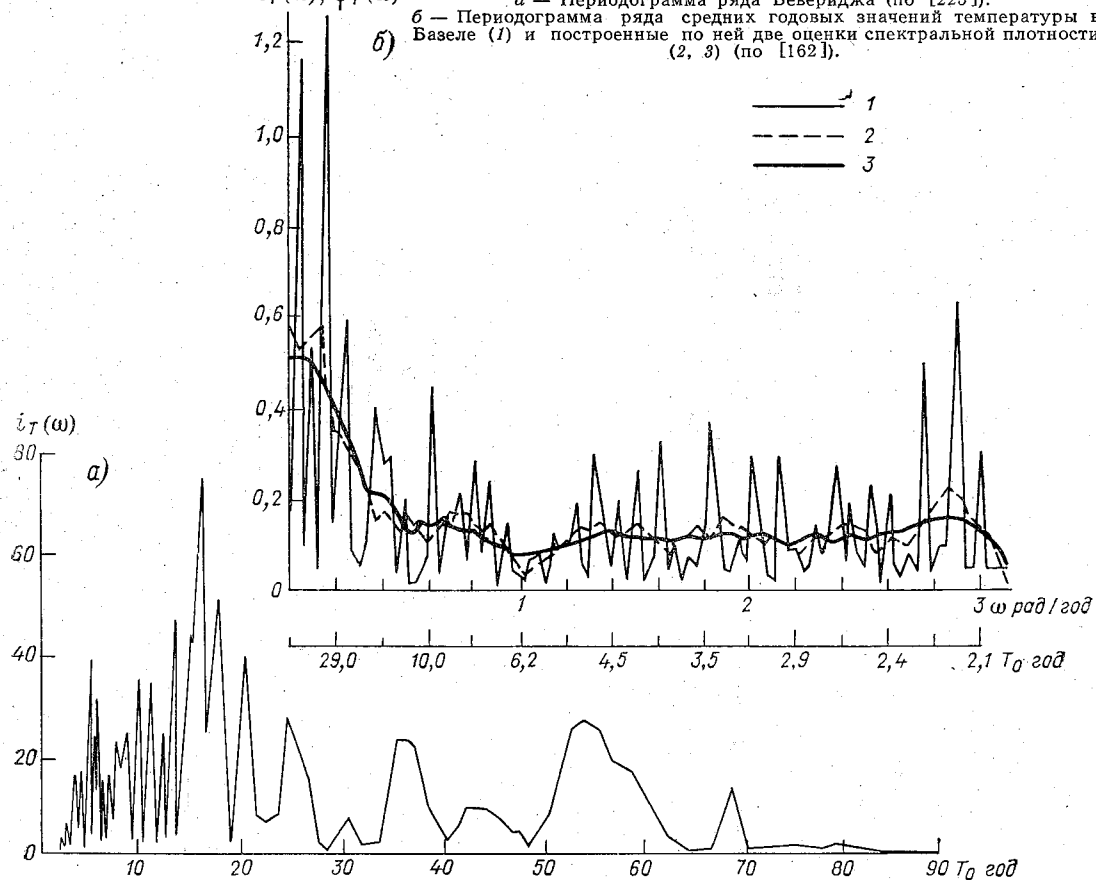
* В соответствии с тем, как это было принято раньше, на рис. 19 а по оси абсцисс отложена не частота ω (или $n = \omega/2\pi$), а период $T_0 = 1/n = 2\pi/\omega$. Такой выбор независимой переменной влияет на форму графика,¹¹⁵ но число «пиков» и «провалов» на нем при этом, разумеется, не меняется.

** По-видимому, именно графики типа того, который изображен на рис. 19 а побудили известного английского математика и геофизика Джеффриса, много имевшего дело с временными рядами, прийти, в связи с обсуждением использования периодограммы, к следующему пессимистическому заключению: «При отсутствии теоретического обоснования периодичности периоды, найденные с помощью разложений Фурье, не заслуживают доверия; едва ли даже десятая часть тех периодов, о существовании которых было заявлено, статистически обоснована» (см. [80, с. 316]).

Рис. 19.

 $i_T(\omega), \varphi_T^{(A)}(\omega)$

а — Периодограмма ряда Бевриджа (по [225]).
 б — Периодограмма ряда средних годовых значений температуры в Базеле (1) и построенные по ней две оценки спектральной плотности (2, 3) (по [162]).



ЭВМ «псевдослучайных чисел») таким образом, чтобы ряд $x(t)$ имитировал реализацию стационарной последовательности $X(t)$ с известной корреляционной функцией $B(\tau)$ и спектральной плотностью $f(\omega)$ (см. с. 85—86).

Первые примеры такого рода были рассчитаны Кендаллом [282]. Один из них воспроизведен на рис. 20 а. На этом рисунке приведены значения $f(\omega)$ и значения периодограммы $i_T(\omega)$ при $T = 480$. Мы видим, что значения $i_T(\omega)$ здесь беспорядочно флуктуируют около значений $f(\omega)$, образуя целый ряд пиков, не имеющих никакого отношения к истинной форме спектра.

Другой аналогичный пример (принадлежащий Волду [336]) изображена на рис. 20 б. Здесь наряду со значением спектральной плотности $f(\omega)$ нанесены значения двух выборочных периодограмм $i_T(\omega)$, построенных по двум различным реализациям (содержащим по 200 значений $x(t)$ каждая) одной и той же стационарной последовательности $X(t)$. Мы видим, что обе периодограммы $i_T(\omega)$ имеют крайне нерегулярную форму, причем их колебания относительно гладкой кривой $f(\omega)$ не имеют ничего общего друг с другом. Наконец, на рис. 20 в приведена периодограмма $i_T(\omega)$, построенная по реализации дискретного белого шума (т. е. последовательности независимых случайных величин, имеющей постоянную спектральную плотность). Все эти рисунки наглядно показывают, насколько плохой оценкой спектральной плотности является периодограмма; при этом, в силу сказанного выше (см., в частности, равенство (2.266) и примечание ¹¹⁴), с ростом длины T используемой реализации поведение периодограммы $i_T(\omega)$ должно становиться все более и более нерегулярным. Ясно поэтому, что часто встречающееся в прикладной литературе утверждение о том, что $f(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} I_T(\omega)$ (иногда принимаемое даже за определение спектральной плотности $f(\omega)$), на самом деле является совершенно бесосновательным.

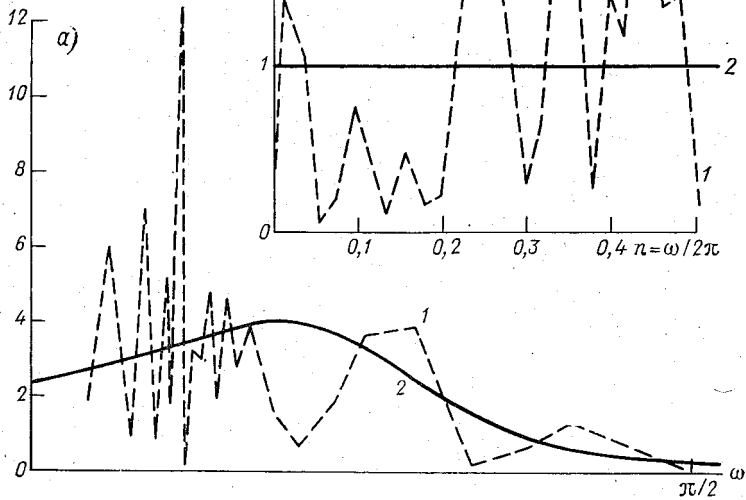
Изложенные выше результаты не только позволяют объяснить крайнюю изрезанность графиков эмпирических периодограмм $i_T(\omega)$ на рис. 19 и 20, но и подсказывают, что приемлемые (т. е. состоятельные) оценки спектральной плотности $f(\omega)$ могут быть получены при помощи осреднения (сглаживания) значений $i_T(\omega)$.

Само это осреднение может реализоваться по-разному; здесь мы рассмотрим два различных способа нахождения состоятельных оценок значений $f(\omega)$, опирающихся на вычисление периодограммы. Первый из них использует тот факт (см. рис. 20б), что отклонения построенных по значениям $x(t)$ периодограмм $i_T(\omega)$ от близкого к значению $f(\omega)$ среднего значения $\langle I_T(\omega) \rangle$ для различных реализаций $x(t)$ (или мало связанных друг с другом отрезков одной реализации) будут независимы (или почти независимы) друг от друга. Поэтому если мы разобьем достаточно длинную ре-

$f(\omega), i_T(\omega)$

$\alpha)$

12
10
8
6
4
2
0



$i_T(\omega), f(\omega)$

$\beta)$

3
2
1
0

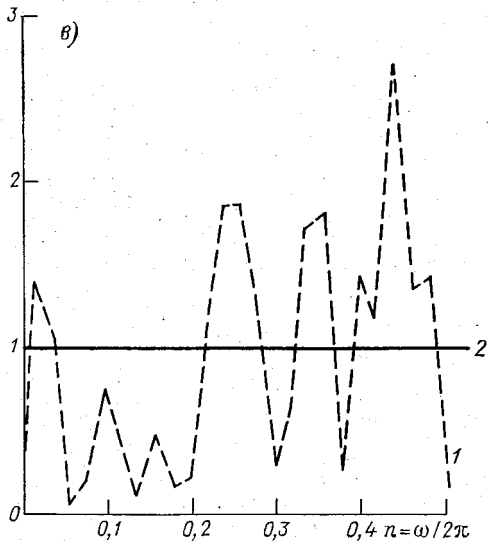
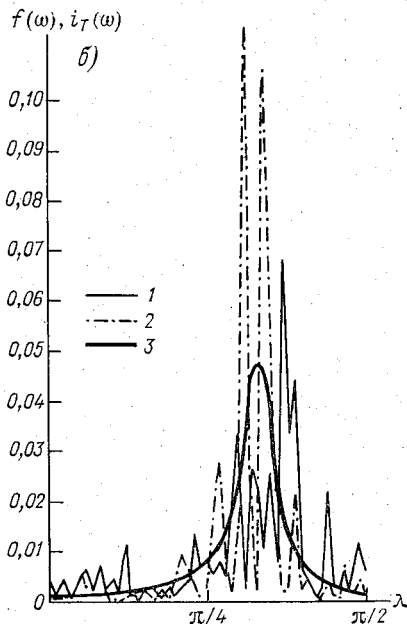


Рис. 20.

a — Периодограмма $i_{480}(\omega)$ искусственного ряда Кендалла (1) (по [282]) и соответствующая теоретическая спектральная плотность $f(\omega)$ этого ряда (2).
б — Две выборочные периодограммы $i_{200}(\omega)$, построенные по двум независимым реализациям (1, 2), и соответствующая теоретическая спектральная плотность (3) для одного из искусственных рядов Волда (по [336]).
в — Периодограмма $i_{100}(\omega)$ (1) и истинная спектральная плотность $f(\omega)$ (2) реализации последовательности независимых величин (по [78]).



лизацию длины T на большое число n отрезков длины $T_1 = T/n$ и построим по каждому из них свою периодограмму $i_{T_1}^{(k)}(\omega)$, $k = 1, \dots, n$, то среднее арифметическое $\Phi_T^{(n)}(\omega) = \left[\sum_{k=1}^n i_{T_1}^{(k)}(\omega) \right] / n$ будет выборочным значением оценки $\Phi_T^{(n)}(\omega) = \left[\sum_{k=1}^n i_{T_1}^{(k)}(\omega) \right] / n$ ности $f(\omega)$, смещение которой равно разности $\langle I_{T_1}(\omega) \rangle - f(\omega)$ (и поэтому стремится к нулю при $T_1 = T/n \rightarrow \infty$), а дисперсия близка к $DI_{T_1}(\omega)/n$ (т. е. стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$).^{*} Поэтому, выбрав зависящее от T значение $n = n_T$ так, что $n_T \rightarrow \infty$, но также и $T/n_T \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow \infty$, мы придем к оценке $\Phi_T^{(n_T)}(\omega)$, которая, очевидно, будет состоятельной.

Наряду с этим состоятельную оценку можно построить и не разбивая реализации длины T на большое число n отдельных кусков, а исходя из значений периодограммы $I_T(\omega)$, отвечающей всей имеющейся реализации. В самом деле, поскольку значения теоретической периодограммы $I_T(\omega)$ при близких друг к другу значениях ω представляют собой взаимно независимые случайные величины с примерно одинаковым средним значением, то, осреднив эти значения по небольшому интервалу оси частот, на протяжении которого спектральная плотность $f(\omega)$ мало меняется, мы получим значительно лучшую, чем $I_T(\omega)$, оценку значения $f(\omega)$. Более того, из формулы (2.264) можно вывести, что при большом, но конечном T корреляция между значениями $I_T(\omega_1)$ и $I_T(\omega_2)$ практически исчезает при $|\omega_2 - \omega_1|$, имеющем порядок $1/T$ (см. примечание¹¹⁴); следовательно, осреднив значения $I_T(\omega)$ по интервалу частот ω длины Δ_T и выбрав это Δ_T так, что $\Delta_T \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$, но $\Delta_T \gg 1/T$, т. е. $T\Delta_T \rightarrow \infty$ (например, приняв, что $\Delta_T \sim T^{-\alpha}$, где $0 < \alpha < 1$), мы придем к состоятельной оценке $f_T^*(\omega) =$

$$= \frac{1}{\Delta_T} \int_{\omega - \Delta_T/2}^{\omega + \Delta_T/2} I_T(\omega') d\omega'.$$

Именно на основании таких соображений и был в конце 40-х гг. этого столетия впервые получен вывод о возможности состоятельного оценивания произвольной спектральной плотности $f(\omega)$.¹¹⁷

Рассмотрим теперь несколько подробнее общую операцию осреднения периодограммы по области частот, окружающей

^{*} При большом значении T_1 (много большем времени корреляции последовательности $X(t)$) даже прилегающие друг к другу отрезки длины T_1 последовательности $X(t)$ будут очень слабо связаны друг с другом. Поэтому величины $i_{T_1}^{(k)}(\omega)$, $k = 1, \dots, n$, здесь будут практически независимыми друг от друга, так что дисперсия их суммы будет почти точно в n раз больше, чем $DI_{T_1}(\omega)$, а дисперсия среднего арифметического будет близка к $DI_{T_1}(\omega)/n$.

точку ω , которую аналитически можно представить как операцию перехода к значениям *

$$\Phi_T^{(A)}(\omega) = \int A_T(\omega - \omega') I_T(\omega') d\omega', \quad (2.267)$$

где $A_T(\omega)$ — неслучайная функция.

В формуле (2.267), как и всюду ниже в этом параграфе, интеграл без указания пределов интегрирования считается распространенным по всей оси $-\infty < \omega' < \infty$ в случае непрерывного t и по интегралу $-\pi \leq \omega' < \pi$ в случае дискретного t (причем весовую функцию $A_T(\omega)$ в этом последнем случае следует считать периодической с периодом 2π). «Эмпирической формой» теоретической оценки (2.267) будет «осредненная эмпирическая периодограмма»

$$\varphi_T^{(A)}(\omega) = \int A_T(\omega - \omega') i_T(\omega') d\omega', \quad (2.267a)$$

представляющая собой выборочное значение случайной величины $\Phi_T^{(A)}(\omega)$. Правые части формул (2.267) и (2.267a) представляют собой свертки двух функций, к которым, как известно, удобно применить преобразование Фурье. В самом деле, если $a_T(\tau)$ — преобразование Фурье весовой функции $A_T(\omega)$, т. е.

$$a_T(\tau) = \int e^{i\omega\tau} A_T(\omega) d\omega, \quad -\infty < \tau < \infty \text{ или } \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.268)$$

то, учитывая, что $B_T^{**}(\tau) = \int e^{i\omega\tau} i_T(\omega) d\omega$ в силу (2.260)–(2.260a), из (2.267a) получим

$$\int e^{i\omega\tau} \varphi_T^{(A)}(\omega) d\omega = a_T(\tau) B_T^{**}(\tau). \quad (2.269)$$

Формула (2.269) выражает собой известную «теорему о свертке» теории преобразований Фурье, согласно которой преобразование Фурье свертки двух функций равно произведению их преобразований Фурье; она показывает, что

$$\varphi_T^{(A)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T e^{-i\omega\tau} a_T(\tau) B_T^{**}(\tau) d\tau \quad (2.270)$$

или

$$\varphi_T^{(A)}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-T+1}^{T-1} e^{-i\omega\tau} a_T(\tau) B_T^{**}(\tau). \quad (2.270a)$$

* В правой части (2.267) иногда оказывается удобным заменить $A_T(\omega - \omega')$ на $[A_T(\omega - \omega') + A_T(\omega + \omega')]/2$ (такая замена не изменяет значения интеграла, поскольку $I_T(-\omega) = I_T(\omega)$).

В той же форме (2.270) — (2.270a) может быть представлена и теоретическая оценка (2.267); только под $B_T^{**}(\tau)$ теперь надо будет понимать соответствующую «теоретическую оценку» функции $B(\tau)$ (т. е. среднее по времени значение произведения $X(t + \tau)X(t)$, а не $x(t + \tau)x(t)$).

Для получения хорошей оценки спектральной плотности $f(\omega)$ весовую функцию $A_T(\omega)$ естественно выбрать так, чтобы она принимала наибольшее значение в точке $\omega = 0$, а с ростом $|\omega|$ убывала бы, приближаясь к нулю. Представляется также целесообразным считать функцию $A_T(\omega)$ четной (т. е. такой, что $A_T(-\omega) = A_T(\omega)$), нормировать ее условием

$$\int A_T(\omega) d\omega = 1 \quad (2.271)$$

и требовать, чтобы при $T \rightarrow \infty$ эта функция становилась все более и более «узкой» (т. е. все более и более тесно концентрировалась около нуля). В таком случае функция $a_T(\tau)$ также будет принимать наибольшее значение в точке $\tau = 0$ (где $a_T(0) = 1$ в силу (2.271)), а с ростом $|\tau|$ она будет убывать (и притом, в силу четности $A_T(\omega)$, симметрично — так что $a_T(\tau)$ вещественно и $a_T(-\tau) = a_T(\tau)$), принимая при больших $|\tau|$ очень малые значения. В силу «соотношения неопределенностей» (см. с. 117—118), «эффективная ширина» функции $a_T(\tau)$ будет обратно пропорциональной «эффективной ширине» $A_T(\omega)$, так что неограниченному «сужению» функции $A_T(\omega)$ при $T \rightarrow \infty$ отвечает неограниченное «расширение» функции $a_T(\tau)$. Иначе говоря, при больших значениях T разумно выбирать функцию $a_T(\tau)$ так, чтобы на значительном интервале не слишком больших значений $|\tau|$ она оставалась близкой к значению $a_T(0) = 1$ и только при относительно больших $|\tau|$ (скажем, превышающих определенную долю от T) принимала малые по абсолютной величине значения. Подробнее о том, как обычно на практике выбираются функции $a_T(\tau)$ и $A_T(\omega)$, будет сказано ниже. Пока отметим лишь, что, следуя широко используемой в последнее время терминологии, мы будем называть функцию $A_T(\omega)$ спектральным окном оценки $\varphi_T^{(A)}(\omega)$, а функцию $a_T(\tau)$ — ее корреляционным окном.¹¹⁸

Запись оценки $\varphi_T^{(A)}(\omega)$ в виде (2.270) или (2.270a) проливает дополнительный свет на роль «сглаживания по частотам» в (2.267). Мы отмечали выше, что хотя $B_T^{**}(\tau)$ при любом фиксированном τ — состоятельная оценка $B(\tau)$, периодограмма $i_T(\omega)$ не является состоятельной оценкой $f(\omega)$. Нетрудно понять причину этого: ведь $i_T(\omega)$ в силу (2.260) — (2.260a) зависит сразу от всех значений $B_T^{**}(\tau)$, $-T < \tau < T$, а как бы велико не было T , значения $B_T^{**}(\tau)$ при не слишком малых значениях $|\tau|/T$ всегда оказываются «плохими оценками» $B(\tau)$, поскольку график функции $B_T^{**}(\tau)$ в области таких τ содержит «фиктивные волны», не имеющие отношения

к истинной форме $B(\tau)$ (см. § 6, с. 71—74 и, в частности, рис. 9). При увеличении T амплитуда соответствующих «волн» уменьшается, но зато увеличивается длина отрезка оси τ , на котором эти волны присутствуют; поэтому нет ничего удивительного в том, что свойства оценки $i_T(\omega)$ с ростом T не улучшаются. На с. 76 мы отмечали, что для устранения таких фиктивных волн разумно умножить оценку $B_T^{**}(\tau)$ на весовую функцию (корреляционное окно) $a_T(\tau)$, придающую больше веса наиболее надежным значениям $B_T^{**}(\tau)$ с малыми значениями $|\tau|$ и позволяющую или полностью пренебречь весьма сомнительными значениями $B_T^{**}(\tau)$, относящимися к сравнительно большим значениям $|\tau|$, или учесть и их, но с очень малым весом. Сейчас мы видим, что эта операция умножения оценки $B_T^{**}(\tau)$ на разумным образом подобранное корреляционное окно оказывается точно эквивалентной сглаживанию периодограммы в соответствии с формулой (2.267а).

Перейдем теперь к математическому исследованию свойств оценок вида (2.267). При больших значениях T , очевидно

$$\begin{aligned}\langle \Phi_T^{(A)}(\omega) \rangle &= \int A_T(\omega - \omega') \langle I_T(\omega') \rangle d\omega' \approx \\ &\approx \int A_T(\omega - \omega') f(\omega') d\omega' \quad (2.272)\end{aligned}$$

(а при меньших T здесь можно воспользоваться формулами (2.263) и (2.263а)); поэтому вычисление смещения $\delta(\Phi_T^{(A)}(\omega)) = \langle \Phi_T^{(A)}(\omega) \rangle - f(\omega)$ оценки $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ не представляет труда. Заметно сложнее вычисляется дисперсия $D\Phi_T^{(A)}(\omega)$ случайной величины $\Phi_T^{(A)}(\omega)$. Для ее определения приходится использовать общую формулу (1.48), позволяющую выразить $D\Phi_T^{(A)}(\omega)$ через центрированную корреляционную функцию $b_I(\omega_1, \omega_2)$ периодограммы $I_T(\omega)$. Если функция $X(t)$ — гауссовская, то затем можно использовать формулу (2.264) для $b_I(\omega_1, \omega_2)$ (или аналогичную формулу, относящуюся к случаю дискретного t); при этом после ряда преобразований для больших значений T удастся получить следующую важную асимптотическую формулу:

$$\begin{aligned}D\Phi_T^{(A)}(\omega) &= \\ &= \frac{2\pi}{T} \int [A_T^2(\omega - \omega') + A_T(\omega - \omega') A_T(\omega + \omega')] f^2(\omega') d\omega'. \quad (2.273)\end{aligned}$$

Родственные этой формуле соотношения могут быть также выведены и при некоторых допущениях, более широких, чем допущение о том, что $X(t)$ — это гауссовская случайная функция.¹¹⁹

Нас здесь особенно интересует случай, когда спектральное окно $A_T(\omega)$ имеет острый пик при $\omega = 0$. В случае, когда $A_T(\omega)$ существенно отлично от нуля лишь в малой окрестности нуля, где

изменением спектральной плотности $f(\omega)$ в первом приближении можно вообще пренебречь, формулы (2.272) и (2.273) можно переписать в виде:

$$\langle \Phi_T^{(A)}(\omega) \rangle \approx f(\omega) \int A_T(\omega') d\omega', \quad (2.272a)$$

$$D \Phi_T^{(A)}(\omega) \approx \frac{2\pi}{T} f^2(\omega) \int A_T^2(\omega') d\omega' \quad \text{при } \omega \neq 0. \quad (2.273a)$$

При $\omega = 0$ в силу того, что $A_T(-\omega) = A_T(\omega)$, множитель $2\pi/T$ в правой части (2.273a) должен быть заменен на $4\pi/T$ (а в случае дискретного t , когда $A_T(\omega)$ четная периодическая функция периода 2π , такая замена множителя $2\pi/T$ на $4\pi/T$ необходима и при $\omega = \pm\pi$).

Если справедлива формула (2.272a), то условие (2.271), очевидно, обеспечивает асимптотическую несмещенность оценки $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ спектральной плотности $f(\omega)$. Формула (2.273a) показывает, что для того, чтобы, кроме того, дисперсия $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ стремилась к нулю при $T \rightarrow \infty$, т. е. чтобы оценка $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ была состоятельной, должно еще выполняться условие

$$T^{-1} \int A_T^2(\omega') d\omega' \rightarrow 0 \quad \text{при } T \rightarrow \infty. \quad (2.274)$$

Пусть речь идет о случайном процессе $X(t)$, так что $-\infty < t < \infty$. Тогда выполнения обоих условий (2.271) и (2.274), проще всего добиться, выбрав зависящую от T функцию частоты $A_T(\omega)$ в виде

$$A_T(\omega) = k_T A(k_T \omega), \quad (2.275)$$

где $k_T \rightarrow \infty$ при $T \rightarrow \infty$, а фиксированная функция частоты $A(\omega)$ (которую также иногда называют спектральным окном соответствующей оценки $\Phi_T^{(A)}(\omega)$) удовлетворяет условиям

$$\int A(\omega) d\omega = 1, \quad |A(\omega)| \leq A(0), \quad A(\omega) \rightarrow 0 \quad \text{при } |\omega| \rightarrow \infty \quad (2.276)$$

(условие $A(\omega) \geq 0$, гарантирующее неотрицательность $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ при всех T и ω , здесь не выписано, так как оно не является строго необходимым; подробнее об этом будет сказано ниже). Для преобразования Фурье $a_T(\tau)$ функции $A_T(\omega)$ из (2.275) следует соотношение

$$a_T(\tau) = a(\tau/k_T), \quad (2.275a)$$

где $a(\tau) = \int e^{i\omega\tau} A(\omega) d\omega$ — фиксированная четная функция τ (которую иногда тоже называют корреляционным окном соответствующей оценки) такая, что

$$a(0) = 1, \quad |a(\tau)| \leq a(0), \quad a(\tau) \rightarrow 0 \text{ при } |\tau| \rightarrow \infty \quad (2.276a)$$

(см. ниже конкретные примеры функций $A(\omega)$ и $a(\tau)$). Условие (2.271) в рассматриваемом случае очевидно является простым следствием (2.275) и (2.276), т. е. оно выполняется автоматически; что же касается условия (2.274), то оно здесь сводится к требованию, чтобы выполнялось соотношение: $k_T/T \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Итак, если $k_T \rightarrow \infty$, но $k_T/T \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$, то оценка $\varphi_T^{(A)}(\omega)$, где $A_T(\omega) = k_T A(k_T \omega)$ и выполняются условия (2.276), будет состоятельной оценкой $f(\omega)$.

В случае дискретного t положение немного усложняется тем, что здесь функция $A_T(\omega)$ определена лишь при $-\pi \leq \omega \leq \pi$ (а дальше является периодической с периодом 2π). Поэтому здесь, если только $A(\omega)$ не обращается в нуль вне конечного отрезка (скажем, при $|\omega| > 1$), то из справедливости (2.275) при $-\pi \leq \omega \leq \pi$ еще не вытекает ни (2.271), ни (2.275a). Если, однако, $A(\omega) \equiv 0$ при $|\omega| > 1$ и $k_T > 1/\pi$, то все сказанное выше об оценках $\varphi_T^{(A)}(\omega)$ с $A_T(\omega) = k_T A(k_T \omega)$ без изменения переносится и на случай дискретного t . Часто также в случае дискретного t при выборе спектрального и корреляционного окон исходят не из соотношения (2.275), а из формулы (2.275a) для $a_T(\tau)$; при этом, однако, преобразование Фурье $A_T(\omega)$ функции $a_T(\tau) = a(\tau/k_T)$ дискретного аргумента τ будет, вообще говоря, только приближенно удовлетворять соотношению (2.275).^{*} Заметим, впрочем, что в наиболее интересном для приложений случае, когда T и k_T велики, так что функция $A_T(\omega)$ имеет острый максимум в нуле и быстро падает до очень малых значений по обе стороны от него, поведение $A_T(\omega)$ вблизи нуля при $a_T(\tau) = a(\tau/k_T)$ и в дискретном случае будет хорошо описываться формулой (2.275). В связи с этим в дальнейшем для простоты мы будем, как правило, во всех случаях использовать формулы (2.275) и (2.276), никак не оговаривая небольших изменений, возникающих, когда $a_T(\tau) = a(\tau/k_T)$, но время t — дискретное (этот

^{*} Воспользовавшись формулой (П. 41), легко показать, что при дискретном t и $a_T(\tau) = a(\tau/k_T)$, где $a(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} A(\omega) d\omega$, точная формула для $A_T(\omega)$ имеет вид $A_T(\omega) = k_T \sum_{l=-\infty}^{\infty} A(k_T(\omega + 2\pi l))$.

случай подробно рассмотрен, в частности, в литературе, перечисленной в примечании¹¹⁹).

Итак, предположим, что функция $A_T(\omega)$ удовлетворяет условиям (2.275) и (2.276). В силу (2.273а) здесь $D\Phi_T^{(A)}(\omega) \sim k_T/T$, т. е. дисперсия величины $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ тем меньше, чем меньше k_T . Следовательно, учитывая только дисперсию рассматриваемой оценки, целесообразно выбрать функцию k_T аргумента T так, чтобы она как можно медленнее возрастала при возрастании T . Нетрудно видеть, однако, что на самом деле медленный рост k_T не только улучшает, но в чем-то и существенно ухудшает качество рассматриваемой оценки.

В самом деле, величина $1/k_T$, как это видно из (2.275), характеризует «ширину» спектрального окна, так что малым значениям k_T отвечают широкие окна $A_T(\omega)$. Ясно, что при широком спектральном окне значение дисперсии оценки $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ (т. е. среднего квадрата ее случайной ошибки) будет малым, но зато большим будет ее смещение $\delta(\Phi_T^{(A)}(\omega)) = \langle \Phi_T^{(A)}(\omega) \rangle - f(\omega)$ (систематическая ошибка оценки) и плохой будет ее разрешающая способность (т. е. возможность на основе использования данной оценки различить два пика истинной спектральной плотности, приходящиеся на близкие друг к другу частоты).^{*} Поэтому на практике приходится идти на компромисс между оценками с малыми значениями k_T , имеющими малую дисперсию, но сравнительно большое смещение (и плохую разрешающую способность), и оценками с большим k_T , имеющими большую дисперсию, но малое смещение.

Желая оценить зависимость смещения $\delta(\Phi_T^{(A)}(\omega))$ от параметра k_T , нельзя ограничиться лишь приближенной формулой (2.272а), на основании которой мы выше пришли к выводу об асимптотической несмещенности $\Phi_T^{(A)}(\omega)$, а следует вернуться к более точной формуле (2.272) для $\langle \Phi_T^{(A)}(\omega) \rangle$. Если мы разложим функцию $f(\omega')$ в правой части (2.272) в ряд Тейлора относительно точки $\omega' = \omega$ и воспользуемся также и формулой (2.275), то легко найдем, что если $f(\omega)$ — дважды дифференцируемая функция и $\int \omega^2 A(\omega) d\omega = 2L$, где $0 < L < \infty$ (что, как нетрудно видеть, эквивалентно условию $a(\tau) \approx 1 - L\tau^2$ при малых значениях τ), то при больших T и k_T

$$\delta(\Phi_T^{(A)}(\omega)) \approx L f''(\omega) k_T^{-2}. \quad (2.277)$$

Если, однако, $\int \omega^2 A(\omega) d\omega = \infty$ или же $\int \omega^2 A(\omega) d\omega = 0$ (последнее равенство, разумеется, возможно лишь тогда, когда функция $A(\omega)$ принимает и отрицательные значения), то формула (2.277) уже оказывается неприменимой. В более общем случае, когда $a(\tau) \approx 1 - L|\tau|^q$ при малых $|\tau|$, где $0 < L < \infty$, а функ-

^{*} Заметим, что в случаях, когда особенно важна именно разрешающая способность оценки, иногда вообще используются совсем другие методы оценивания функции $f(\omega)$.¹²⁰

ция $f(\omega)$ — достаточно гладкая, асимптотическая формула для $\delta(\Phi_T^{(A)}(\omega))$ принимает вид

$$\delta(\Phi_T^{(A)}(\omega)) \approx LM_q(\omega) k_T^{-q}, \quad (2.277a)$$

где $M_q(\omega)$ определяется по спектральной плотности $f(\omega)$ (в частности, если q — целое четное число, то $M_q(\omega) = f^{(q)}(\omega)$).¹²¹ Обе формулы (2.277) и (2.277a) подтверждают, что при уменьшении k_T смещение $\delta(\Phi_T^{(A)}(\omega))$ увеличивается.

Разумеется, систематическая и случайная ошибки оценки иногда играют разную роль, т. е. не являются равноценными; однако часто представляется вполне разумным попытаться так подобрать k_T , чтобы минимизировать суммарный средний квадрат ошибки $\Delta^2(\Phi_T^{(A)}(\omega)) = \langle [\Phi_T^{(A)}(\omega) - f(\omega)]^2 \rangle = \delta^2(\Phi_T^{(A)}(\omega)) + D(\Phi_T^{(A)}(\omega))$. Поступая таким образом, в случае справедливости формулы (2.277) найдем, что $k_T \sim T^{1/5}$, а $\Delta^2(\Phi_T^{(A)}(\omega)) \sim T^{-4/5}$ при больших значениях T ; если же имеет место соотношение (2.277a), то $k_T \sim T^{1/(2q+1)}$, $\Delta^2(\Phi_T^{(A)}) \sim T^{-2q/(2q+1)}$.¹²² Впрочем, на практике чаще всего вообще приходится иметь дело лишь с одним фиксированным заранее значением T ; поэтому асимптотические формулы для «оптимальной» зависимости k_T и $\Delta^2(\Phi_T^{(A)})$ от T (коэффициенты которых, к тому же, сами зависят от неизвестной спектральной плотности $f(\omega)$ и ее производных) не очень полезны для приложений.

Если в нашем распоряжении имеется график функции $B_T^{**}(\tau)$, то значение k_T можно выбрать исходя из требования, чтобы умножение $B_T^{**}(\tau)$ на $a_T(\tau) = a(\tau/k_T)$ исключало все сомнительные «колебания около нуля» на этом графике, но мало меняло бы плавный ход функции $B_T^{**}(\tau)$ при малых τ ; однако необходимость построения сначала графика функции $B_T^{**}(\tau)$ делает малоудобным такой метод подбора k_T .

Часто выдвигающееся требование, чтобы ширина спектрального окна $A_T(\omega)$ имела тот же порядок, что и ширина самой узкой из существенных деталей исследуемой спектральной плотности, также не представляется достаточно широко применимым, так как в большинстве случаев нет возможности заранее хотя бы грубо оценить ширину самой узкой детали графика функции $f(\omega)$. Вообще единого мнения по поводу выбора значения k_T при практических вычислениях спектральной плотности не существует; по-видимому, его и не может быть, так как нет единой «лучшей» рекомендации, применимой во всех случаях.

В частности, Блэкман и Тьюки считают полезным выбирать k_T так, чтобы окно $a(\tau/k_T)$ оказывалось практически равным нулю при всех τ , превышающих некоторое «предельное значение» T_0 , лежащее в пределах от 5 до 10% длины T используемой реализации; Парзен рекомендует вычислять $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ при трех разных значениях k_T , отвечающих трем разным значениям $T_0^{(1)}$, $T_0^{(2)}$

и $T_0^{(3)}$ «точки обрезания» T_0 соответствующего корреляционного окна $a_T(\tau)$ таким, что $0,05 \leq T_0^{(1)}/T \leq 0,1$, $0,1 \leq T_0^{(2)}/T \leq 0,25$ и $T_0^{(3)}/T \approx 0,5$, а затем из трех полученных графиков спектральной плотности «на глазок» выбрать тот, который кажется наиболее правдоподобным; Дженкинс и Ваттс советуют выполнить вычисления при нескольких все увеличивающихся значениях k_T и окончательно остановиться на том из них, при котором дальнейшее увеличение k_T уже не изменит существенно формы получающейся функции $\varphi_T^{(A)}(\omega)$ (ср. ниже рис. 23 а, б).¹²³ В действительности же в этом вопросе никакие рецепты не являются универсальными и только практический опыт позволяет научиться поступать разумным образом; стоит, однако, еще раз подчеркнуть, что выполнение вычислений при нескольких разных значениях k_T часто оказывается практически целесообразным.

Рассмотрим теперь некоторые конкретные примеры применяемых на практике окон $A_T(\omega)$ и $a_T(\tau)$. На с. 77 уже были указаны три примера окон $a_T(\tau) = a(\tau/k_T)$: прямоугольное окно (см. рис. 10 а), треугольное окно Бартлетта (см. рис. 10 б) и так называемое «окно Парзена» (см. рис. 10 в; явная формула для этого $a(\tau)$ приведена в примечании⁵²). Нетрудно проверить, что в применении к случаю непрерывного t (т. е. к процессам $X(t)$) этим трем корреляционным окнам отвечают спектральные окна вида $A_T(\omega) = k_T A(k_T \omega)$, где $A(\omega) = \sin \omega/\pi\omega$ в случае прямоугольного корреляционного окна, $A(\omega) = 2 \sin^2(\omega/2)/\pi\omega^2$ в случае окна Бартлетта и $A(\omega) = \frac{3}{8\pi} \left(\sin \frac{\omega}{4} \left| \frac{\omega}{4} \right| \right)^4$ в случае окна Парзена; немного сложнее формулы для $A_T(\omega)$ получаются, если $X(t)$ — стационарная последовательность (т. е. t дискретное).¹²⁴

Все три упомянутых здесь корреляционных окна обращаются в нуль при $|\tau| \geq k_T$ — последнее обстоятельство, как это будет объяснено ниже, долгое время считалось существенно упрощающим вычисления, но в настоящее время оно в значительной степени потеряло свое былое значение. То, что спектральные окна $A_T(\omega)$, отвечающие корреляционным окнам Бартлетта и Парзена, оказались строго неотрицательными, в то время как в случае прямоугольного окна $a(\tau)$ функция $A(\omega)$ принимает и отрицательные значения, подтверждает отмеченный на с. 77 факт положительной определенности функций $a(\tau)$, отвечающих корреляционным окнам Бартлетта и Парзена (но не прямоугольному корреляционному окну).

Еще два примера корреляционных окон вида $a_T(\tau) = a(\tau/k_T)$ было предложено Тьюки; для них

$$a(\tau) = \begin{cases} (1 - 2a) + 2a \cos \pi \tau & \text{при } |\tau| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |\tau| > 1, \end{cases} \quad (2.278)$$

где $a=0,25$ (окно ханнинг), или же $a=0,23$ (окно хэмминг) (рис. 21). Оба эти окна не являются строго положительно определенными, но все отрицательные значения их преобразований Фурье $A(\omega)$ крайне малы по модулю.¹²⁵ В имеющейся обширной литературе по спектральному анализу стационарных случайных функций можно найти также множество других примеров корреляционных и спектральных окон, большинство из которых в этой книге даже не будет упомянуто.¹²⁶

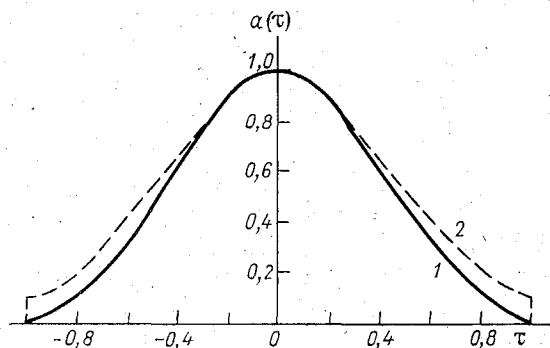


Рис. 21.

Корреляционные окна Тьюки.

1 — «ханнинг», 2 — «хэмминг».

Вспомним, однако, упоминавшийся на с. 193 простейший (и предложенный первым) метод получения состоятельной оценки спектральной плотности $f(\omega)$ с помощью осреднения периодограммы по малому отрезку оси частот длины $\Delta_T = 2/k_T$ (где $\Delta_T \rightarrow 0$ и $T\Delta_T \rightarrow \infty$, т. е. $k_T \rightarrow \infty$ и $k_T/T \rightarrow 0$, при $T \rightarrow \infty$) с центром в точке ω . Этот метод, очевидно, сводится к использованию равного нулю вне конечного интервала прямоугольного спектрального окна $A_T(\omega) = k_T A(k_T \omega)$, где $A(\omega)$ изображено на рис. 22 а. Такое $A(\omega)$ часто называется спектральным окном Даниеля (ср. примечание¹¹⁷); отвечающее ему корреляционное окно имеет вид $a_T(\tau) = a(\tau/k_T)$, где $a(\tau) = \sin \tau/\tau$ (и при непрерывном, и при дискретном t). Другие представляющиеся разумными формы спектральных окон $A_T(\omega) = k_T A(k_T \omega)$, обращающихся в нуль вне конечного интервала, это треугольное спектральное окно, для которого $A(\omega) = \max\{1 - |\omega|, 0\}$ (рис. 22б), и параболическое спектральное окно, для которого $A(\omega) = \max\{3(1 - \omega^2)/4, 0\}$ (рис. 22в). Все три спектральных окна, изображенных на рис. 22, являются строго неотрицательными; поэтому отвечающая им оценка $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ функции $f(\omega)$ также всегда будет неотрицательной, а оценка

$B_T^{(a)}(\tau) = a_T(\tau) B_T^{**}(\tau)$ корреляционной функции — положительно определенной. Эти простые спектральные окна удобны для расчета оценок $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ при помощи алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ), о котором будет идти речь немного ниже; поэтому в последнее время они привлекают довольно много внимания.¹²⁷

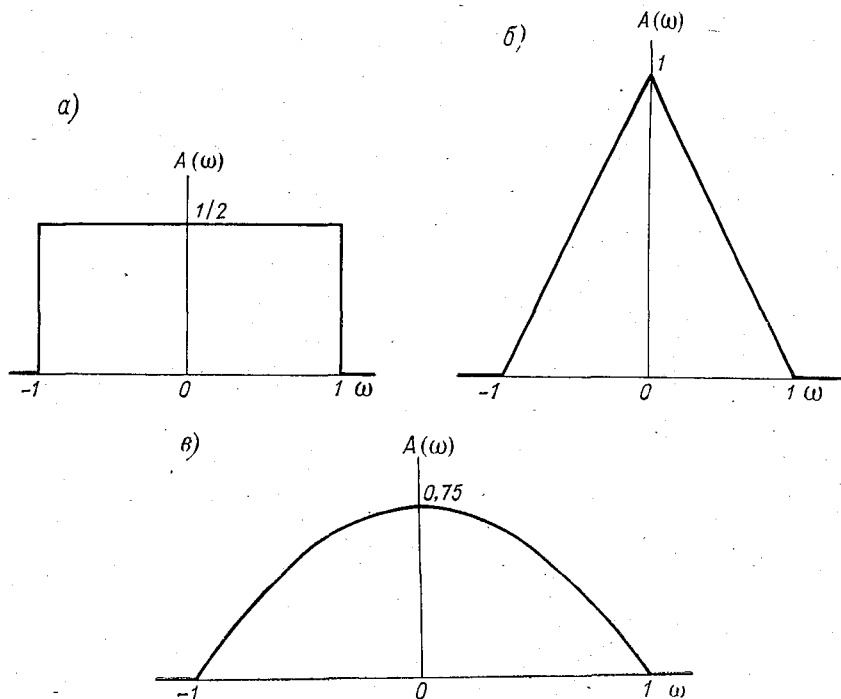


Рис. 22.

Простейшие спектральные окна.

a — прямоугольное (окно Даниела), *б* — треугольное, *в* — параболическое.

В последние годы оживился также интерес к принимающим и отрицательные значения спектральным окнам $A(\omega)$ таким, что $\int_{-\infty}^{\infty} \omega^{2k} A(\omega) d\omega = 0$ для нескольких первых значений $k = 1, 2, \dots, m-1$. Нетрудно проверить, что в этом случае $q = 2m$ в равенстве (2.277а); поэтому здесь смещение оценки $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ заметно быстрее убывает с ростом k_T , чем в случае строго неотрицательных окон $A(\omega)$, и, следовательно, при достаточно больших значениях T и смещение $\delta(\Phi_T^{(A)}(\omega))$, и средний квадрат ошибки $\Delta^2(\Phi_T^{(A)}(\omega))$ могут быть значительно уменьшены по сравнению с их наименьшими значениями при условии, что

$A(\omega) \geq 0$ при всех ω . С другой стороны, даже если $A(\omega)$ и принимает отрицательные значения, то все равно при больших значениях T , когда значения $A_T(\omega)$ существенно отличаются от нуля лишь в очень малой окрестности точки $\omega = 0$, вероятность получить отрицательное значение $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ будет крайне малой, если только истинная спектральная плотность $f(\omega)$ не является уж очень изрезанной (если же, тем не менее, окажется, что $\Phi_T^{(A)}(\omega) < 0$ при каких-то значениях ω , то соответствующие значения $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ следует просто заменить нулем). Таким образом, использование окон $A(\omega)$, не являющихся строго неотрицательными, при достаточно больших значениях T представляется вполне оправданным, хотя пока еще трудно точно указать, какие именно значения T должны здесь считаться достаточно большими.¹²⁸

Говоря о методах уменьшения смещения оценок спектральной плотности, следует сказать и об еще одном методе, в последнее время получившем довольно большое распространение. Этот метод опирается уже не на использование каких-то специальных спектральных окон, а на модификацию самой периодограммы с помощью предварительного неравномерного взвешивания (иначе, заострения) реализации $x(t)$, т. е. замены значений $x(t)$ на $x^{(h)}(t) = h_T(t)x(t)$, где $h_T(t)$ — зависящая от T заранее выбранная неслучайная функция, нормированная так, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{t=1}^T h_T^2(t) = T \quad \text{или} \quad \int_0^T h^2(t) dt = T, \quad (2.279)$$

и называемая временным окном или окном выборки. Ясно, что рассмотрение лишь ограниченного отрезка реализации $x(t)$ при $t = 1, \dots, T$ или $0 \leq t \leq T$ эквивалентно использованию специального временного окна, а именно — прямоугольного окна, равного единице на этом отрезке и нулю вне его. Применение неравномерного взвешивания (заострения) означает, что выбирается иная функция $h_T(t)$, постепенно убывающая от середины к краям имеющегося отрезка реализации. Обозначим теперь символом $I_T^{(h)}(\omega)$ периодограмму заостренной случайной функции $X^{(h)}(t) = h_T(t)X(t)$; тогда, аналогично выводу обычных формул (2.263) и (2.263а), для $\langle I_T(\omega) \rangle$ может быть получено соотношение¹²⁹

$$\langle I_T^{(h)}(\omega) \rangle = \int K_T^{(h)}(\omega - \omega') f(\omega') d\omega', \quad (2.280)$$

где

$$K_T^{(h)}(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=1}^T e^{-i\omega t} h_T(t) \right|^2 \quad (2.281)$$

или

$$K_T^{(h)}(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T e^{-i\omega t} h_T(t) dt \right|^2. \quad (2.281a)$$

Если форма временного окна $h_T(t)$ не меняется с изменением T (например, $h_T(t) = h(t/T)$), то $K_T^{(h)}(\omega \rightarrow \delta(\omega))$ при $T \rightarrow \infty$; существенно, однако, что при сравнительно больших, но конечных, значениях T весовая функция $K_T^{(h)}(\omega)$, отвечающая окну $h_T(t)$, плавно убывающему от середины отрезка реализации к его краям, обычно быстрее убывает по обе стороны от точки $\omega = 0$,

чем весовая функция в формулах (2.263) и (2.263а), относящихся к случаю равномерного взвешивания. В качестве типичного примера достаточно рассмотреть случай биномиального временного окна вида

$$h_T(t) = L_T C_{T-1}^{t-1}, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (2.282)$$

где $L_T = [T! (T-1)! / (2T-2)!]^{1/2}$ — нормирующий множитель, а C_{T-1}^{t-1} — биномиальные коэффициенты. В этом случае, как нетрудно показать,

$$K_T^{(h)}(\omega) = \frac{L_T^2}{2\pi T} \left(2 \cos \frac{\omega}{2} \right)^{2(T-1)}. \quad (2.283)$$

Функция (2.283) стремится к $\delta(\omega)$ при $T \rightarrow \infty$, причем все ее значения в точках $\omega \neq 0$ экспоненциального убывают, когда T растет, в то время как боковые максимумы функции $K_T^{(h)}(\omega) = \sin^2 \frac{T\omega}{2} / 2\pi T \sin^2 \frac{\omega}{2}$ формулы (2.263а) убывают при возрастании T только как T^{-1} . Поэтому ясно, что при больших, но конечных значениях T смещение $\langle I_T^{(h)}(\omega) \rangle - f(\omega)$ будет гораздо меньшим, чем $\langle I_T(\omega) \rangle - f(\omega)$.

Нетрудно показать, что модифицированная периодограмма $I_T^{(h)}(\omega)$ также не является состоятельной оценкой спектральной плотности и ее дисперсия стремится при $T \rightarrow \infty$ к тому же пределу, что и дисперсия обычной (немодифицированной) периодограммы (см. примечание 129). Состоятельную оценку можно получить, осреднив периодограмму $I_T^{(h)}(\omega)$ по небольшой частотной области, т. е., подставив ее вместо $I_T(\omega)$ в правую часть формулы (2.267). При этом, однако, мы в какой-то мере теряем основное преимущество модифицированной периодограммы, так как создаем значительное дополнительное смещение, связанное с отличием правой части формулы (2.272) от $f(\omega)$. Но, как мы уже знаем (см. с. 193), для получения состоятельной оценки можно поступить и иначе: разбить реализацию заданной длины T на большое число n непересекающихся (или, что часто оказывается более выгодным, частично пересекающихся) частей длины T_1 , подсчитать периодограмму для каждой из этих частей и далее осреднить все полученные периодограммы. При таком подходе смещение получаемой оценки $\Phi_T^{(n)}(\omega)$ будет точно совпадать с общим смещением периодограммы каждой из частей и, следовательно, здесь уже использование удачно подобранного временного окна $h_T(t)$ бесспорно будет очень полезным.¹³⁰

Отвлечемся теперь от вопроса об использовании переменных временных окон $h_T(t)$ и будем для простоты снова рассматривать лишь обычные периодограммы $I_T(\omega)$ и построенные по ним оценки $\Phi_T^{(A)}(\omega)$. Ряд относящихся к этим оценкам работ посвящен обсуждению вопроса об оптимальной форме спектрального (или корреляционного) окна оценки.¹³¹ При этом различные авторы использовали разные «критерии оптимальности» исследуемой оценки; поэтому неудивительно, что и их выводы оказались кое в чем расходящимися друг с другом. Существенно, однако, что и теоретические рассуждения, и практические расчеты показывают, что оценки $\Phi_T^{(A)}(\omega)$, отвечающие различным разумным формам окна $A_T(\omega)$ или $a_T(\tau)$ (например, окну Парзена, двум окнам Тьюки и трем спектральным окнам, изображенным на рис. 22) при близкой «ширине» используемого окна обычно оказываются достаточно близкими друг к другу (см., например, рис. 24); поэтому при реальных расчетах спектральных плотностей форму окна обычно можно выбирать исходя в первую очередь из соображений удобства вычислений. Большое внимание в литературе по прикладному спектральному

анализу уделяется также вопросу о распределениях вероятностей оценок $\Phi_T^{(A)}(\omega)$, важному для построения доверительных интервалов для оцениваемой спектральной плотности (ср. с. 64), но мы на этом вопросе задерживаться не будем.¹³²

Перейдем теперь к краткому обзору различных практических методов нахождения спектральных плотностей. Основные используемые в настоящее время для этой цели приемы можно условно разбить на четыре широкие категории.

1. *Аналоговые методы обработки непрерывных сигналов на спектральных анализаторах.* Об этих методах приближенного определения функции $f(\omega)$ по одной реализации $x(t)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ мы говорили на с. 145—146. Здесь для нахождения спектральной плотности сигнал $x(t)$ (реализуемый в виде флуктуирующего электрического напряжения) пропускается через узкополосный линейный фильтр, после чего сигнал с выхода фильтра возводится в квадрат и этот квадрат осредняется по времени. Среднее по времени значение квадрата тока на выходе фильтра и принимается за оценку значения $f(\omega)$ спектральной плотности процесса $X(t)$ в точке ω , совпадающей с центром полосы пропускания используемого фильтра.

Возведение тока с выхода фильтра в квадрат и осреднение этого квадрата по времени обычно осуществляется автоматически аналоговыми вычислительными устройствами, входящими в состав спектрального анализатора. Типичный анализатор спектра включает ряд узкополосных линейных фильтров (ячеек анализатора) с разными полосами пропускания, позволяющих сразу получить ряд значений $f(\omega_i)$. Совокупность таких значений $f(\omega_i)$ и дает представление о всей непрерывной функции частоты $f(\omega)$.

Данные, полученные с помощью аналоговых спектральных анализаторов, широко используются в разнообразных прикладных областях; описанию различных систем таких анализаторов посвящена обширная специальная литература.¹³³ Оценка значения $f(\omega)$, доставляемая показанием спектрального анализатора, во многом родственна величине $\Phi_T^{(A)}(\omega)$; поэтому исследование систематической и случайной ошибок (т. е. смещения и дисперсии) этой оценки проводится аналогично исследованию смещения и дисперсии оценок $\Phi_T^{(A)}(\omega)$, о котором говорилось выше.¹³⁴

В последнее время в связи с широким развитием методов цифровой обработки данных на ЭВМ довольно часто вместо аналоговой фильтрации сигналов $x(t)$ используется их цифровая фильтрация, т. е. сигнал $x(t)$ преобразуется в цифровую запись и затем над ним численно проделяются все операции, осуществляемые над электрическими колебаниями $x(t)$ аналоговым спектральным анализатором. Описание ряда методов оценки спектральной плотности с помощью цифровой фильтрации можно найти в книгах, ука-

занных в примечании ¹³³ (см. также литературу о цифровых фильмах, перечисленную в примечании ¹⁰⁶); здесь, однако, мы на них не будем задерживаться, а сразу перейдем к другим методам оценки спектральной плотности с помощью ЭВМ, родственным методам цифровой фильтрации, но получившим значительно большее распространение.

Отметим еще, что достигнутое в последние годы существенное удешевление и уменьшение размеров существующих ЭВМ, совпавшее во времени с широким внедрением в практику значительно более удобных ускоренных методов расчета преобразований Фурье, сделало возможным появление совсем новых систем настольных цифровых спектральных анализаторов. Эти приборы включают, во-первых, специальный преобразователь сигнал-код, переводящий подаваемый на вход аналоговый сигнал $x(t)$ в запись на магнитную ленту совокупности чисел $x_\Delta(t) = x(t\Delta)$, $t = 1, 2, \dots$, где Δ — заданный достаточно малый интервал времени, и, во-вторых, портативную ЭВМ с фиксированной программой, автоматически подсчитывающую значения сглаженной периодограммы $\varphi_T^{(A)}(\omega)$ последовательности $x_\Delta(t)$, где форма спектрального окна $A(\omega)$ обычно также заранее фиксирована, но ширина окна (т. е. значение k_T) может варьироваться. Цифровые спектральные анализаторы могут быть внешне очень похожими на настольные аналоговые анализаторы старого типа, использующие набор электрических фильтров, но по существу они представляют собой лишь иную инженерную реализацию цифровых методов оценки спектральной плотности, относящихся к рассматриваемой ниже третьей категории практических приемов приближенного определения значений функции $f(\omega)$.

2. *Числовые методы определения значений $\varphi_T^{(A)}(\omega)$ по значениям оценки корреляционной функции (первоначальный вариант).* В связи с огромным распространением начиная с конца 40-х гг. этого столетия универсальных быстродействующих цифровых ЭВМ очень широкое развитие получили в последние десятилетия методы численного определения значений спектральной плотности на ЭВМ. К настоящему времени эти методы явно оттеснили на второй план методы нахождения спектральной плотности с помощью аналоговых спектральных анализаторов (хотя и не вытеснили совсем аналоговые методы обработки, имеющие свои важные преимущества, делающие их в ряде случаев незаменимыми).

Мы уже указывали, что оценку значений $f(\omega)$ можно получить, заставив ЭВМ произвести над цифровой записью сигнала $x(t)$ все те операции, которые аналоговый спектральный анализатор производит над электрическими колебаниями $x(t)$. Ясно, однако, что при использовании ЭВМ нет нужды копировать на них аналоговые методы; более целесообразной здесь представ-

ляется попытка разработать иные приемы обработки, специально приспособленные для цифровых вычислительных машин. Из числа таких специальных методов цифровой обработки сигналов в течение длительного времени считался основным и шире всего применялся на практике метод, опирающийся на вычисление значений сглаженной периодограммы $\varphi_T^{(A)}(\omega)$ с помощью формулы (2.270а), представляющей $\varphi_T^{(A)}(\omega)$ в виде дискретного преобразования Фурье оценки $B_T^{(a)}(\tau) = a_T(\tau) B_T^{**}(\tau)$ корреляционной функции $B(\tau)$. При этом применение именно формулы (2.270а), а не формулы (2.267а), диктовалось чисто практическими, но с точки зрения практики очень важными соображениями.

Дело в том, что обычные методы вычисления преобразования Фурье ряда из T чисел при большом T оказывались даже для ЭВМ крайне трудоемкими, причем количество требующихся элементарных арифметических операций (а, следовательно, и время, затрачиваемое ЭВМ на вычисление) с ростом T росло приблизительно как T^2 . Вычисление же оценки $B_T^{**}(\tau)$ корреляционной функции представлялось гораздо более простой и быстрой операцией; кроме того, при использовании формулы (2.270а), где $a_T(\tau) = 0$ при $|\tau| \geq k_T$, значения $B_T^{**}(\tau)$ также надо было определять лишь для $\tau = 0, 1, \dots, k_T - 1$, где $k_T \ll T$ (например, $k_T = 0,1T$ или $k_T = 0,05T$). Далее требовалось только еще найти дискретное преобразование Фурье сравнительно короткого ряда $B_T^{(a)}(0), B_T^{(a)}(1), \dots, B_T^{(a)}(k_T - 1)$, состоящего лишь из k_T чисел. Тем самым суммарное время расчета значений $\varphi_T^{(A)}(\omega)$ на ЭВМ сокращалось (по сравнению с процедурой, основанной на использовании формулы (2.267а)) в сто (или даже в несколько сот) раз; применение же формулы (2.267а) в случае длинных рядов наблюдений часто требовало затраты сотен часов машинного времени. Неудивительно поэтому, что еще сравнительно недавно спектральные окна $A_T(\omega)$, преобразование Фурье которых не обращалось в тождественный нуль за пределами некоторого интервала (например, окно Даниела, изображенное на рис. 22 а и предложенное раньше всех других окон), принято было считать представляющими определенный интерес для теории, но практически совершенно бесполезными.

Описанный здесь метод построения оценок спектральной плотности в течение 50-х и начала 60-х гг. этого столетия определенно считался самым лучшим численным методом. Одним из его важных преимуществ перед методом нахождения значений $f(\omega)$ с помощью аналоговых спектральных анализаторов является то, что на ЭВМ можно параллельно производить вычисления при нескольких различных значениях k_T , в то время как ширина полосы пропускания отдельных фильтров аналогового анализатора, играющая ту же роль, что и параметр k_T , всегда бывает

заранее фиксирована (например, равна 0,5 или 0,33 октавы). Два конкретных примера вычисления значений $\varphi_T^{(A)}(\omega)$ с помощью второй (2.270а) представлены на рис. 23. Рисунок 23 а относится к искусственному ряду $x(t)$, $t = 1, 2, \dots, 400$,

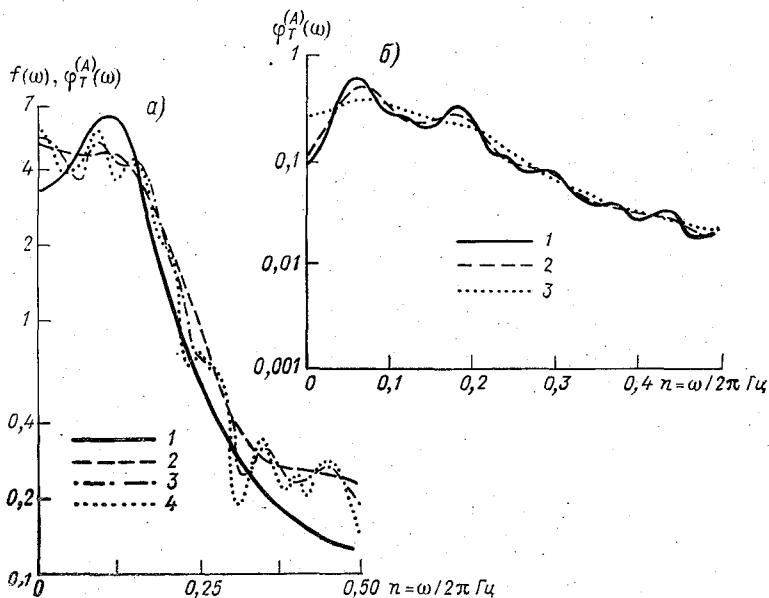


Рис. 23.

а — Истинная спектральная плотность $f(\omega)$ искусственной стационарной последовательности $X(t)$ (по [78]) и оценки $\varphi_T^{(A)}(\omega)$ ($T = 400$) этой спектральной плотности, построенные с использованием корреляционного окна Парзена при $k_T = 16$ (2), $k_T = 32$ (3) и $k_T = 48$ (4) (по [78]).

б — Сглаженные периодограммы $\varphi_T^{(A)}(\omega)$ ряда Бевериджа, построенные с использованием корреляционного окна «ханнинг» при $k_T = 30$ (1), $k_T = 20$ (2) и $k_T = 10$ (3) (по [9]).

представляющему собой реализацию стационарной последовательности $X(t)$ с известной спектральной плотностью $f(\omega)$ (также изображенной на рисунке). Мы видим, что с увеличением значения k_T (т. е. с уменьшением ширины полосы частот, по которой производится осреднение) оценка $\varphi_T^{(A)}(\omega)$ становится все более нерегулярной функцией частоты, но в среднем она при этом все более приближается к истинным значениям $f(\omega)$. В частности, значения $\varphi_T^{(A)}(\omega)$ при $k_T = 32$ и $k_T = 48$ (но не при $k_T = 16$) уже выявляют наличие пика спектральной плотности на частоте $n \approx 0,125$ Гц; однако и ширина, и высота этого пика в обоих

случаях оказываются заметно заниженными.* На рис. 23 б изображены значения $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ для ряда Бевериджа (см. рис. 2 д); здесь изменение $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ с частотой оказывается весьма плавным (в отличие от поведения периодограммы $i_T(\omega)$ на рис. 19 а), причем при переходе от значения $k_T = 20$ к $k_T = 30$ оценка $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ меняется лишь незначительно.

Метод определения значений $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ на основе применения формулы (2.270а) сохранил большое практическое значение вплоть до настоящего времени. Однако сейчас, если длина T выборки очень велика, то наиболее важной должна считаться модифицированная реализация этого метода, о которой будет сказано немного ниже.

3. *Методы определения значений $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ с помощью сглаживания периодограммы, основанные на алгоритме быстрого преобразования Фурье.* Кардинальные изменения в оценке практической значимости различных методов приближенного определения спектральной плотности произошли во второй половине 60-х гг., после того как значительное распространение получил так называемый метод быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Метод БПФ представляет собой специальный алгоритм (точнее говоря, даже целую группу родственных друг другу алгоритмов) для вычисления дискретного преобразования Фурье ряда из T (вообще говоря, комплексных) чисел при помощи приблизительно $2T \log_2 T$ элементарных арифметических операций (вместо примерно T^2 операций, требующихся, как считали раньше почти все специалисты, для выполнения этой задачи). Когда в 1965 г. Кули и Тьюки опубликовали небольшую заметку, посвященную указанному алгоритму, он был почти всеми воспринят как нечто совершенно новое; позже, однако, выяснилось, что аналогичный метод вычисления преобразований Фурье был предложен (но не привлек никакого внимания и почти сразу же был забыт) еще в 1942 г., причем в основу его тогда были положены некоторые результаты, относящиеся вообще к самому началу настоящего столетия.¹³⁵

Легко понять, что при $T = 1000$ метод БПФ приводит к сокращению машинного времени, требуемого для выполнения на ЭВМ дискретного преобразования Фурье, примерно в 50 раз, причем при дальнейшем росте T эта разница продолжает крайне быстро увеличиваться. Описание алгоритмов БПФ в настоящее время можно найти во многих литературных источниках.¹³⁶

* Последнее обстоятельство может объясняться недостаточностью длины выборки $T = 400$, но может быть связанным и с неудачным выбором «псевдослучайных чисел», использовавшихся для построения значений $x(t)$ (ср. примечание⁸⁰).

Естественно, что появление метода БПФ резко изменило все положение дел в области прикладного спектрального анализа. С помощью этого метода вычисление периодограммы $i_T(\omega)$ даже в случае очень большого T может быть без труда осуществлено на ЭВМ — требуемое для этого машинное время часто оказывается даже заметно меньшим, чем то, которое требуется для вычисления оценки $B_T^{**}(\tau)$ корреляционной функции $B(\tau)$. После того как значения $i_T(\omega')$ рассчитаны для ряда равноотстоящих дискретных значений ω' (скажем для значений $\omega_k = \pi k/T$, $k = 0, 1, \dots, T-1$), нетрудно применить и формулу (2.267а), осреднив полученные значения $i_T(\omega_k)$ по ряду частот ω_k с весами, задаваемыми спектральным окном $A_T(\omega - \omega')$.

Легче всего произвести самое простое среднеарифметическое осреднение по группе соседних значений ω_k , что эквивалентно использованию прямоугольного спектрального окна Даниела (вдруг оказавшегося, таким образом, практически очень удобным; в частности, именно так были получены две довольно близкие друг к другу оценки спектральной плотности ряда средних годовых температур в Базеле (см. рис. 19 б), отличающиеся шириной используемого спектрального окна, т. е. значением k_T . Привлекательная алгоритмы БПФ и комбинируя метод осреднения периодограммы по частоте с методом осреднения периодограмм, построенных по отдельным участкам реализации (см. с. 191, 193), удается успешно оценивать значения спектральной плотности в очень широком интервале частот, используя, если надо, до нескольких миллионов отдельных значений $x(t)$.¹³⁷

На рис. 24 в качестве примера одновременно представлены оценки $\varphi_T^{(A)}(\omega)$ спектральной плотности $\hat{f}(\omega)$, полученные для 1024 членов искусственного ряда $x(t)$ (с известной спектральной плотностью $f(\omega)$) как с помощью формулы (2.270а) по непосредственно вычисленным оценкам $B_T^{**}(\omega)$, так и с помощью формулы (2.267а) по значениям периодограммы $i_T(\omega)$ (определенным с помощью метода БПФ). Значения k_T во всех случаях подбирались так, чтобы соответствующие окна $A_T(\omega)$ по ширине мало отличались. Мы видим, что точность оценок того и другого типа оказывается вполне сопоставимой, но в среднем оценки, получаемые осреднением периодограммы, пожалуй все же несколько превосходят по качеству оценки, найденные по значениям $B_T^{**}(\tau)$. В то же время машинное время, затраченное на расчет оценок по формуле (2.267а), в данном случае было заметно меньшим, чем то, которое пришлось затратить при использовании формулы (2.270а). Поэтому при $T > 1000$ использование формулы (2.270а) в настоящее время может считаться оправданным лишь при условии, что соответствующие расчеты ведутся на базе широкого применения алгоритма БПФ.

За. Использование метода БПФ для построения оценок корреляционной функции. Современные методы нахождения значений $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ по значениям $B_T^{}(\omega)$ (модифицированная процедура с использованием метода БПФ).** Изложенные выше обстоятельства, связанные с развитием метода БПФ, существенно повлияли

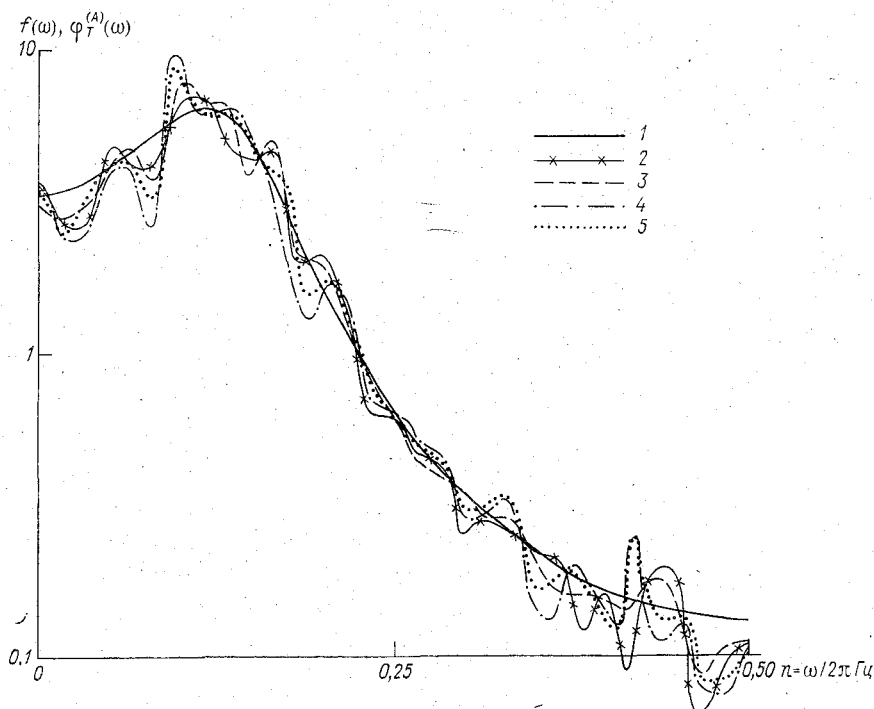


Рис. 24.

Истинная спектральная плотность $f(\omega)$ искусственной стационарной последовательности $X(t)$ (1) и оценки $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ ($T = 1024$) этой плотности, построенные И. А. Кожевниковой (МГУ) с помощью осреднения периодограммы по параболическому (2) и прямоугольному (3) спектральным окнам и с помощью применения преобразования Фурье к величинам $a(\tau/k_T) B_T^{**}(\tau)$ для корреляционного окна «ханнинг» (4) и окна Парзена (5).

также и на современное состояние вопроса об оценивании значений корреляционной функции $B(\tau)$. Как мы уже отмечали выше, вычисление значений периодограммы $i_T(\omega)$ в настоящее время в ряде случаев оказывается более простой задачей, чем прямое вычисление значений $B_T^{**}(\omega)$ по формулам (1.75) или (1.75а). Поэтому даже в тех случаях, когда основной интерес представляют именно оценки корреляционной функции $B(\tau)$, часто оказывается целесообразным сначала с помощью метода БПФ вычислить значения $i_T(\omega)$, а затем использовать эти значения для

нахождения оценок $B_T^{**}(\tau)$ с помощью обращения формулы (2.260a) (чего очень легко добиться, еще раз применив метод БПФ).¹³⁸

Простота выполнения дискретного преобразования Фурье на ЭВМ с помощью метода БПФ делает практически целесообразным переход к преобразованиям Фурье каждый раз, когда надо вычислить свертку (конволюцию) двух достаточно длинных рядов чисел (см., в частности, литературу, указанную в примечании¹³⁸). Последнее замечание может быть, в частности, применено и к формуле (2.267a) для сглаженной периодограммы $\varphi_T^{(A)}(\omega)$, правая часть которой фактически представляет собой свертку функций $i_T(\omega)$ и $A_T(\omega)$. Результат оказывается в чем-то неожиданным: применив преобразование Фурье к правой части (2.267a), а затем обратное преобразование Фурье к получающимся при этом значениям, мы снова приходим к знакомой нам записи (2.270a) оценки $\varphi_T^{(A)}(\omega)$ в виде преобразования Фурье ряда чисел $B_T^{(a)}(\omega) = a_T(\tau) B_T^{**}(\tau)$, по поводу которой говорилось, что она играла основную роль при оценивании спектральной плотности до появления метода БПФ именно в связи с тем, что непосредственное вычисление периодограммы при больших значениях T тогда представлялось практически неосуществимым. Мы видим, таким образом, что определение значений $\varphi_T^{(A)}(\omega)$ с помощью формулы (2.270a) по значениям оценки $B_T^{**}(\tau)$ корреляционной функции в случае очень больших значений T и в настоящее время (в эпоху БПФ) может оказаться практически целесообразным, если только в ходе вычислений метод БПФ будет применен трижды: первый раз для нахождения преобразования Фурье значений $x(t)$, $t = 1, \dots, T$, нормированный квадрат модуля которого определяет периодограмму $i_T(\omega)$, второй раз для получения преобразования Фурье $B_T^{**}(\tau)$ ряда значений $i_T(\omega)$, а третий — для получения значений $\varphi_T^{(A)}(\omega)$ с помощью преобразования Фурье ряда чисел $B_T^{(a)}(\tau) = a_T(\tau) B_T^{**}(\tau)$. Отметим, впрочем, что такой метод, выгодный лишь при очень больших T , до сих пор на практике значительного распространения не получил.

4. *Параметрические методы оценивания спектральной плотности.* Вспомним пример эмпирического определения спектральной плотности флуктуаций радиолокационного сигнала, результаты которого представлены на рис. 13. В данном примере, относящемся к 40-м гг. настоящего столетия, не использовался ни один из описанных выше методов нахождения значений $f(\omega)$. Вместо этого здесь было использовано то, что оценивание соответствующей корреляционной функции $B(\tau)$ привело к кривой, напоминающей, при относительно небольших значениях $|\tau|$, затухающую косинусоиду $Se^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0\tau$. В связи с этим исследователями были просто подобраны значения параметров α и ω_0 ,

при которых функция $e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$ оказалась при небольших $|\tau|$ неплохо приближающей эмпирические значения $R_{TN}^*(\tau) = B_{TN}^*(\tau)/B_{TN}^*(0)$ (см. рис. 12), после чего неизвестные значения $f(\omega)/B(0)$ были приравнены значениям преобразования Фурье такой функции $e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega_0 \tau$.

Аналогичный пример изображен и на рис. 14, где также показана аппроксимация эмпирических значений $R_{TN}^*(\tau)$ простой комбинацией элементарных функций, позволяющей легко получить явную формулу для соответствующего преобразования Фурье $f(\omega)$. Вообще метод приближенного определения значений $f(\omega)$ с помощью аппроксимации эмпирических значений корреляционной функции простыми аналитическими формулами, параметры которых находятся с помощью «подгонки», довольно широко применялся на первом этапе развития приложений теорий стационарных случайных функций к реальным временным рядам.

Недостатки этого метода сразу бросаются в глаза: он представляется весьма громоздким, довольно субъективным и на первый взгляд кажется мало приспособленным для реализации на ЭВМ. С другой стороны, однако, получаемые таким образом спектральные плотности обычно оказываются разумно выглядящими довольно плавными и гладкими функциями частоты, не содержащими множества противоестественных «пиков» и «провалов». Еще важнее, пожалуй, то, что получаемые здесь функции $f(\omega)$ описываются несложными аналитическими формулами (обычно имеющими вид рациональных функций ω или $e^{i\omega}$); последнее обстоятельство очень облегчает их использование в тех, довольно частых, случаях, когда значения $f(\omega)$ нужны для решения каких-то конкретных статистических задач, касающихся случайной функции $X(t)$ (например, задачи наилучшего линейного прогноза будущих значений этой функции или задачи об ее оптимальном сглаживании, позволяющем исключить влияние ошибок наблюдения; см. в этой связи примечания ⁸¹ и ¹¹⁰).

Аппроксимация эмпирических значений корреляционных функций (или, что то же самое, спектральных плотностей) несложными аналитическими формулами может быть осуществлена, в частности, с помощью специализированных аналоговых приборов («аппроксимационных коррелометров» или «коррелометров с аппроксимацией»; см. примечание ⁴⁸). Еще больший интерес для практики, однако, представляет разработка вычислительных методов реализации такого рода аппроксимации (для случая дискретного t) на универсальных цифровых ЭВМ. В этом направлении в последние годы было проведено много исследований, показавших, что первое впечатление здесь оказывается ошибочным, а на самом деле указанная задача вовсе не так уж сложна. Разумеется, успех при таком подходе (как, впрочем, и при любом

другом методе приближенного определения значений $f(\omega)$ существенно зависит от истинной формы аппроксимируемой спектральной плотности; большую роль, однако, играет и удачный выбор класса зависящих от конечного числа параметров $c_1, \dots, c_M$ функций $f(\omega; c_1, \dots, c_M)$ или $B(\tau; c_1, \dots, c_M)$, из числа которых выбирается приближенное значение интересующей нас функции $f(\omega)$ или $B(\tau)$.

Наиболее удобен для рассматриваемой здесь цели, по-видимому, класс спектральных плотностей вида (2.254), т. е. функций

$$f(\omega) = \frac{c^2}{2\pi |1 + a_1 e^{-i\omega} + \dots + a_m e^{-im\omega}|^2} = \frac{1}{|c_0 + c_1 e^{-i\omega} + \dots + c_m e^{-im\omega}|^2}, \quad (2.254a)$$

отвечающих модели стационарной последовательности авторегрессии m -го порядка (см. с. 85 и 182). При использовании этого класса аппроксимирующих функций задача исследователя состоит в нахождении достаточно удовлетворительных оценок параметров $c^2, a_1, \dots, a_m$ (или, что то же самое, $c_0, c_1, \dots, c_m$) функции (2.254a) по значениям $x(t), t = 1, \dots, T$, конечного отрезка одной реализации последовательности $X(t)$. Получаемые таким образом оценки значений $f(\omega)$ вида (2.254a) называются авторегрессионными оценками спектральной плотности.

Для нахождения оценок значений параметров $a_1, \dots, a_m$ можно, например, воспользоваться тем, что в случае процесса авторегрессии m -го порядка корреляционная последовательность $B(\tau), \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, удовлетворяет уравнениям Юла—Уокера (2.16)—(2.16a). Решив систему уравнений (2.16) с $k = 1, 2, \dots, m$ относительно неизвестных $a_1, a_2, \dots, a_m$ при условии, что известные нам величины $B(0), B(1), \dots, B(m)$ в левых частях (2.16) заменены соответствующими оценками $B_T^{**}(0), B_T^{**}(1), \dots, B_T^{**}(m)$, мы получим решения $a_1 = a_1^*, \dots, a_m = a_m^*$, зависящие от значений $B_T^{**}(0), B_T^{**}(1), \dots, B_T^{**}(m)$ (т. е. в конечном счете от $x(1), \dots, x(T)$). Эти решения и представляют собой оценки коэффициентов $a_1, \dots, a_m$, обладающие (при достаточно большом T) хорошими статистическими свойствами.¹³⁹ После этого, подставив значения a_j^* коэффициентов a_j в уравнение (2.16a), где $B(\tau)$ снова заменяются на $B_T^{**}(\tau)$, мы найдем также и оценку c^{*2} параметра c^2 формулы (2.254a).

В обширной литературе, посвященной авторегрессионным оценкам спектральной плотности, можно найти и другие практически удобные рекомендации, касающиеся оценивания неизвестных параметров в формуле (2.254a) по значениям $x(1), \dots, x(T)$,

причем некоторые из них не требуют даже предварительного расчета оценок $B_T^{**}(\tau)$ значений $B(\tau)$. Подставив далее в правую часть (2.254а) в качестве параметров $c^2, a_1, \dots, a_m$ (или $c_0, c_1, \dots, c_m$) значения их оценок, построенных по $x(1), \dots, x(T)$, мы как раз и получим авторегрессионную оценку $\hat{f}(\omega)$ (которую мы будем обозначать символом $\varphi_T^{AR}(\omega)$)¹⁴⁰. Что касается значения параметра m , от которого зависит оценка $\varphi_T^{AR}(\omega)$, то он здесь играет роль, аналогичную роли параметра k_T в формулах (2.275) и (2.275а): его целесообразно выбрать сначала небольшим, а затем последовательно увеличивать до тех пор, пока мы не убедимся, что дальнейшее возрастание m уже мало меняет форму функции $\varphi_T^{AR}(\omega)$. Существуют также методы, позволяющие заранее теоретически оценить оптимальное значение m (см. снова примечание ¹⁴⁰).

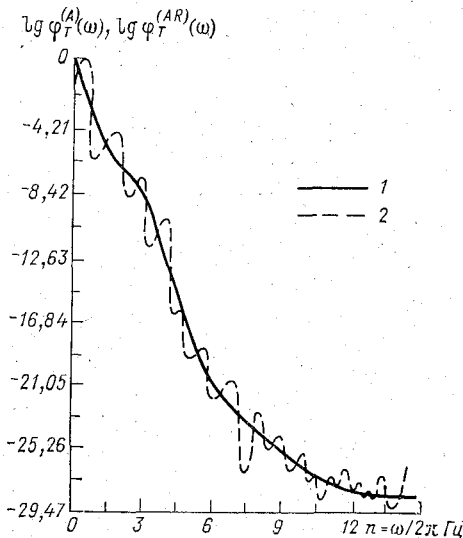


Рис. 25.

Оценки спектральной плотности электроэнцефалограммы новорожденного младенца (по [279]).

1 — $\varphi_T^{(AR)}(\omega)$ (порядок $m = 6$ был выбран исходя из результатов применения к имеющимся данным специального «критерия Акайке»);

2 — $\varphi_T^{(A)}(\omega)$, отвечающее корреляционному окну Парзена при разумном значении k_T .

Имеющийся опыт использования авторегрессионных оценок показывает, что их смещение и дисперсия обычно имеют тот же порядок, что и смещение и дисперсия соответствующих оценок $\varphi_T^{(A)}(\omega)$; этот вывод согласуется и с результатами теоретического исследования статистических свойств оценок $\varphi_T^{AR}(\omega)$.¹⁴¹ С точки зрения затрат машинного времени при использовании ЭВМ

оценки $\varphi_T^{AR}(\omega)$ также никак не уступают оценкам типа $\varphi_T^{(A)}(\omega)$. Отметим еще, что авторегрессионные оценки $\varphi_T^{AR}(\omega)$ обычно имеют разумную форму (хоть и являются, разумеется, очень неточными) даже в случае очень коротких выборок (т. е. малых значений T) и что они во многих случаях имеют лучшую разрешающую способность (т. е. лучше разделяют близкие по частоте пики спектральной плотности), чем сглаженные периодограммы $\varphi_T^{(A)}(\omega)$. Неудивительно поэтому, что к настоящему времени число при-

кладных работ, использующих авторегрессионные оценки $\varphi_T^{AR}(\omega)$, значительно превышает сотню, причем число это все время возрастает.¹⁴² В качестве иллюстрации на рис. 25 приведен один пример сопоставления оценки $\varphi_T^{AR}(\omega)$ с более обычной оценкой типа $\varphi_T^{(A)}(\omega)$; многочисленные дополнительные примеры того же типа могут быть найдены в литературе, указанной в примечаниях¹⁴⁰ и¹⁴².

Класс функций вида (2.254а), разумеется, не исчерпывает еще всех параметрических семейств неотрицательных функций $f(\omega; c_1, \dots, c_M)$, пригодных в качестве возможных аппроксимаций значений спектральной плотности $f(\omega)$. Следующим по важности (и по сложности) после класса функций (2.254а) будет, по-видимому, класс рациональных функций вида (2.257), где можно, например, считать, что степени n и m многочленов в числителе и знаменателе заранее выбраны, $M = n + m + 1$, а неизвестными параметрами $c_1, \dots, c_M$ являются коэффициенты $a_1, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n$. В таком случае задача будет состоять в том, чтобы по значениям $x(t)$, $t = 1, \dots, T$, оценить значения $a_1, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n$ (т. е. найти какие-то оценки $a_1^*, \dots, a_m^*, b_0^*, \dots, b_n^*$ этих коэффициентов, зависящие от $x(1), \dots, x(T)$ и обладающие при большом T хорошими статистическими свойствами). Последней задаче посвящен целый ряд специальных работ.¹⁴³ После того как оценки $a_1^*, \dots, a_m^*, b_0^*, \dots, b_n^*$ найдены, их можно подставить в формулу (2.257); при этом мы придем к параметрической оценке спектральной плотности $f(\omega)$ более общей, чем оценка $\varphi_T^{AR}(\omega)$.¹⁴⁴

В приложении к стационарным процессам $X(t)$ с непрерывным временем такой подход охватывает, в частности, и примеры, к которым относятся рис. 12, 13 и 14, где аппроксимирующая эмпирическую корреляционную функцию $R_{TN}^*(\tau)$ аналитическая функция выбиралась из числа функций, имеющих рациональное преобразование Фурье. Возможны также и другие выборы класса функций $f(\omega; c_0, \dots, c_M)$, используемых для параметрической оценки спектральной плотности $f(\omega)$; на них, однако, мы не будем задерживаться.

До сих пор мы говорили лишь об оценках спектральной плотности $f(\omega)$, совершенно не касаясь вопроса об оценке спектральной функции $F(\omega)$. Такое распределение материала имеет веские основания: дело в том, что в большинстве прикладных исследований спектральная функция вообще не упоминается, а все внимание уделяется спектральной плотности $f(\omega)$ (чаще всего называемой, как это уже указывалось в сноске на с. 108, просто спектром процесса или последовательности $X(t)$). Поэтому неудивительно, что и во всей обширной литературе об оценках спектральных характеристик стационарных случайных функций $X(t)$ (большая

часть которой предназначена в первую очередь для прикладников) основное место занимает именно задача об оценке плотности $f(\omega)$, гораздо более важная практически, а кроме того, еще и гораздо более трудная теоретически, чем задача об оценке значений не-

определенного интеграла $F(\omega) = \int_{\omega_0}^{\omega} f(\omega') d\omega'$. Последнее замечание, касающееся сравнения задач об оценке значений $f(\omega)$ и $F(\omega)$ по степени трудности, является простым следствием тех результатов о свойствах периодограммы $I_T(\omega)$, которые уже рассматривались в этом параграфе.

В самом деле, мы уже видели, что значения $I_T(\omega)$ при широких условиях представляют собой случайные величины со средним значением, близким к $f(\omega)$ (в случае существования спектральной плотности), и ограниченной дисперсией, причем при $T \rightarrow \infty$ величины $I_T(\omega_1)$ и $I_T(\omega_2)$ становятся попарно независимыми, если только $\omega_2 \neq \omega_1$. Выше уже фактически подчеркивалось (хоть и не формулировалось вполне четко), что отсюда вытекает следующее важное свойство величин $I_T(\omega)$: если Δ — произвольный интервал оси частот ω , то $\int_{\Delta} I_T(\omega') d\omega'$ является состоятельной оценкой величины $\int_{\Delta} f(\omega') d\omega'$ (ср. с. 193 и 202).

Выберем теперь в качестве Δ интервал $[-\pi, \omega]$ (в случае, когда речь идет о последовательностях $X(t)$, зависящих от дискретного аргумента t) или полупрямую $(-\infty, \omega)$ (когда речь идет о стационарных процессах, т. е. t — непрерывное); при этом мы получим, что

$$F_T^*(\omega) = \int_{\omega_0}^{\omega} I_T(\omega') d\omega', \quad (2.284)$$

где $\omega_0 = -\pi$ при дискретном t и $\omega_0 = -\infty$ при непрерывном t , является состоятельной оценкой спектральной функции $F(\omega)$ (т. е. эта оценка — асимптотически несмещенная, и ее дисперсия стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$).

Приведенные рассуждения непосредственно относятся к случаю, когда существует непрерывная спектральная плотность $f(\omega)$ и функция $X(t)$ — гауссовская (ибо такие предположения принимались выше при изучении свойств периодограммы), но на самом деле сформулированное в предыдущей фразе утверждение о $F_T^*(\omega)$ не зависит от этих предположений. Нетрудно показать, что оно может быть просто доказано при очень общих условиях (фактически здесь требуется лишь эргодичность второго порядка стационарной функции $X(t)$, т. е. сходимость оценок $B_T^{**}(\tau)$ при $T \rightarrow \infty$ к истинным значениям корреляционной функции

$B(\tau)$).¹⁴⁵ Разумеется, из состоятельности оценки $F_T^*(\omega)$ спектральной функции $F(\omega)$ вовсе не следует, что в случае, когда $F(\omega)$ является неопределенным интегралом от спектральной плотности $f(\omega)$, производная от $F_T^*(\omega)$ по ω будет состоятельной оценкой $f(\omega)$: дифференцируя $F_T^*(\omega)$, мы снова придем к периодограмме $I_T(\omega)$, вовсе не являющейся хорошей оценкой $f(\omega)$. Оценивание лишь функции $F(\omega)$ с практической точки зрения представляется не очень полезным, так как монотонно неубывающие функции частоты ω все на первый взгляд кажутся довольно похожими друг на друга (в отличие от спектральных плотностей $f(\omega)$, часто очень резко различающихся по своей форме). Поэтому значения $F(\omega)$, вообще говоря, характеризуют спектральные свойства функции $X(t)$ значительно менее наглядно, чем значения $f(\omega)$ (откуда, разумеется, вовсе не следует, что оценки $F_T^*(\omega)$ вообще не должны использоваться на практике).¹⁴⁶

Доказательство состоятельности оценки (2.284) спектральной функции $F(\omega)$ конечно далеко не исчерпывает всей статистической теории оценивания значений $F(\omega)$ по данным наблюдений за значениями $x(t)$. В имеющейся статистической литературе можно найти множество дополнительных тонких результатов, касающихся, например скорости сходимости среднего квадрата ошибки оценки (2.284) к нулю при $T \rightarrow \infty$, асимптотических (при больших T) распределений вероятностей значений $F_T^*(\omega)$ при разных ω или максимума модуля разности $F_T^*(\omega) - F(\omega)$ и т. д.¹⁴⁷ Особенно много внимания было уделено в исследованиях такого рода специальному, но практически весьма важному вопросу об изучении «скачков» функции $F(\omega)$, т. е. ее точек разрыва, которым отвечают компоненты $X(t)$ вида $X_k e^{i\omega_k t}$ или, в вещественной форме, вида $X_k \cos(\omega_k t + \Theta_k)$ (ср. с. 111). Нахождение таких периодических компонент $X(t)$ тесно примыкает к классическому для математической статистики вопросу о выделении скрытых периодичностей, т. е. об определении амплитуд, частот и фаз гармонических колебаний, наблюдаемых на фоне нерегулярных помех (шума).

Задача о выделении скрытых периодичностей имеет большую и весьма интересную историю; отметим, в частности, что и само введение Шустером в конце прошлого века понятия периодограммы было вызвано его поисками скрытых периодичностей в некоторых геофизических и астрофизических временных рядах.¹⁴⁸ В настоящее время эта задача должна рассматриваться как одна из важных задач статистики стационарных случайных функций, примыкающих к теории оценивания спектральной функции $F(\omega)$; на ней, однако, мы здесь уже не можем задерживаться.¹⁴⁹

Введение

¹ Напомним, что условия, требующиеся для возможности считать некоторое событие A или некоторую величину X случайными в теоретико-вероятностном смысле, должны включать описание совокупности опытов (статистического ансамбля), результаты которых, во-первых, определяют A или X и, во-вторых, обладают статистической устойчивостью. Поэтому часто встречающееся в прикладной литературе утверждение, что случайным событием является любое событие A , которое при осуществлении заданного комплекса условий может или произойти, или не произойти (см., например, [87, с. 5]), или даже вообще любое событие A , которое может осуществиться, а может и не осуществиться, а случайной величиной X — любая величина, которая может принимать разные значения, является, разумеется, неточным. Отметим также, что совокупность опытов, определяющая событие A или величину X , часто может выбираться по-разному: так, в частности, для случайной величины примера г) можно рассматривать лишь совокупность измерений в периоды, относящиеся к одной и той же фазе одиннадцатилетнего цикла солнечной активности, а можно говорить и о средней площади пятен в совершенно произвольный (выбранный наудачу) момент времени. При изменении совокупности опытов, определяющих данное событие или величину, мы должны считать, что и само случайное событие или случайная величина также изменились.

² Как известно, δ -функцией Дирака называется «несобственная функция»

$\delta(x)$, определяемая соотношениями: $\delta(x) = 0$ при всех $x \neq 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$

(откуда видно, что $\delta(0)$ не может быть конечным). Функция Дирака и другие родственные ей «несобственные» (обобщенные) функции оказываются очень полезными для многих приложений математики; строгая математическая теория такого рода функций в настоящее время может быть найдена в целом ряде книг (см., например, [45, 52]). Заметим еще, что аналогично теории обобщенных функций может быть построена и теория обобщенных случайных функций (в частности, стационарных); см. примечание ⁷⁶ и [51, гл. III].

³ Так как некоторые факты из теории характеристических функций нам еще понадобятся ниже в другой связи, то имеет смысл на них здесь задержаться.

Характеристической функцией случайной величины X с функцией распределения $F(x)$ называется комплексная функция вспомогательного переменного t , определяемая равенством

$$\Psi(t) = \langle e^{itX} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) \quad (\text{П.1})$$

(угловые скобки здесь, как и в равенстве (В.3), означают вероятностное осреднение, а интеграл в правой части — несобственный интеграл Стильтьеса). Если X имеет плотность вероятности $p(x)$, то, очевидно,

$$\Psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x) dx, \quad (\text{П.2})$$

так что в силу формулы обращения преобразований Фурье

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \Psi(t) dt. \quad (\text{П.3})$$

Следовательно, в этом случае значения $p(x)$ и $F(x)$ однозначно определяются по значениям $\Psi(t)$. Можно также показать, что если даже величина X не имеет плотности вероятности, то все равно ее характеристическая функция $\Psi(t)$ однозначно задает функцию распределения $F(x)$; этот факт вытекает из следующей формулы обращения теории характеристических функций

$$F(x_2) - F(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{-itx_2} - e^{-itx_1}}{-it} \Psi(t) dt, \quad (\text{П.4})$$

всегда справедливой для любых точек непрерывности x_2 и x_1 функции распределения $F(x)$ (см., например, [60, § 36], [100, § 4.3] или [119, § 10.3]).

Ясно, что не каждая комплексная функция $\Psi(t)$ может быть характеристической функцией. Так, из самого определения (П.1) следует, что всегда

$$\Psi(0) = 1, \quad \Psi(-t) = \overline{\Psi(t)}, \quad |\Psi(t)| \leq \Psi(0) = 1 \quad (\text{П.5})$$

(где черта сверху — знак перехода к комплексно сопряженной величине) и что функция $\Psi(t)$ обязательно непрерывна при всех t . Не намного труднее доказывается то, что если $\Psi(t)$ — дважды дифференцируемая характеристическая функция и $\Psi'(0) = 0$, $\Psi''(0) = 0$, то $\Psi(t) = 1$ при всех t (см. примечание 4). Следовательно, если $\Psi'(0) = \Psi''(0) = 0$, но $\Psi(t) \neq 1$ хотя бы при одном t (например, если $\Psi(t) = e^{-\alpha |t|^k}$, где $\alpha > 0$, $k > 2$), то $\Psi(t)$ наверное не может быть характеристической функцией.

Существует и ряд других условий, ограничивающих класс характеристических функций $\Psi(t)$. Сформулируем одно очень общее условие: пусть n — целое положительное число, $t_1, \dots, t_n$ — вещественные числа, а $c_1, \dots, c_n$ — произвольные комплексные числа; тогда для любой характеристической функции $\Psi(t)$

$$\sum_{j,k=1}^n \Psi(t_j - t_k) c_j \bar{c}_k \geq 0. \quad (\text{П.6})$$

В самом деле, в силу (П.1) левая часть (П.6) равна

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^n e^{i(t_j - t_k)x} c_j \bar{c}_k dF(x) = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^n e^{it_j x} c_j \right|^2 dF(x), \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

где все приращения $F(x)$ неотрицательны.

Комплексная функция $\Psi(t)$, для которой при любых $n, t_1, \dots, t_n$ и $c_1, \dots, c_n$ выполняется условие (П.6), называется положительно определенной. Таким образом, характеристическая функция всегда является непрерывной положительно определенной функцией, удовлетворяющей условию $\Psi(0) = 1$.

Легко проверить, что из условия (П.6) при $n = 2$ и $\Psi(0) = 1$ вытекает необходимость всех условий (П.5).

Более глубоким (но и более трудно доказываемым) является то обстоятельство, что условия непрерывности, положительной определенности и справедли-

ности равенства $\Psi(0) = 1$ на самом деле обеспечивают выполнение в с е х условий, которым должна удовлетворять характеристическая функция, так что класс характеристических функций распределений вероятностей совпадает с классом непрерывных положительно определенных функций, обращающихся в единицу при $t = 0$. Сформулированное здесь утверждение составляет фактически содержание очень важной теоремы, доказанной почти одновременно Бохнером и Хинчиным и впервые опубликованной Бохнером в 1932 г.

Теорема Бохнера — Хинчина. Непрерывная комплексная функция $\Psi(t)$ вещественного переменного t тогда и только тогда является, положительно определенной, когда она допускает представление в виде интеграла Фурье—Стилтьеса, вида (П. 1), где $F(x)$ — монотонно неубывающая функция переменного x .

Действительно, если к условиям этой теоремы добавить еще условие $\Psi(0) = 1$, (в силу (П. 1) эквивалентное равенству $F(\infty) - F(-\infty) = 1$), то в таком случае $F(x)$ будет функцией распределения, а $\psi(t)$ — характеристической функцией, отвечающей этому распределению.

Строгое доказательство теоремы Бохнера—Хинчина может быть найдено, например, в [24, 60, 120, 130, 136, 202]. Оригинальное доказательство этой теоремы, опирающееся на некоторые факты теории стационарных случайных функций, намечено в конце § 13 этой книги.

⁴ Во многих случаях для вычисления моментов случайной величины X удобно использовать ее характеристическую функцию $\Psi(t)$. В самом деле, из формулы (П. 1) легко вытекает, что если $\langle |X|^n \rangle < \infty$, то функция $\Psi(t)$ дифференцируема по крайней мере n раз и

$$\langle X^n \rangle = \mu^{(n)} = (-i)^n \Psi^{(n)}(0). \quad (\text{П. 8})$$

Если $\Psi'(0) = \Psi''(0) = 0$, то из формулы (П. 8) следует, что $\langle X \rangle = 0$ и

$$\langle X^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) = 0; \text{ ясно, что это возможно, лишь если } X = 0 \text{ с вероят-}$$

ностью единица, т. е. если $\Psi(t) = \langle e^{itX} \rangle \equiv 1$ (этот факт уже отмечался в примечании ³).

Легко проверить, что в случае распределения Пуассона $\Psi(t) = \exp \{ \lambda (e^{it} - 1) \}$, в то время как в случае нормального распределения вероятностей $\Psi(t) = \exp \{ imt - \sigma^2 t^2 / 2 \}$. Отсюда сразу вытекают и формулы для первых и вторых моментов этих распределений, указанные на с. 11.

⁵ О многомерных нормальных распределениях см., например, [23, гл. 6, § 6], [60, § 40], [100, гл. 15], [119, гл. 24] или же [147, ч. 1, § 4.3]. Отметим, что при рассмотрении многомерных нормальных распределений очень удобно широко использовать отвечающие им многомерные характеристические функции, представляющие собой естественное обобщение одномерной характеристической функции (П. 1); такой подход делает многие доказательства гораздо более простыми и, кроме того, позволяет не различать невырожденные и вырожденные многомерные нормальные распределения.

⁶ Термин «брауновское движение» происходит от имени английского ботаника Роберта Брауна, еще в 20-е гг. XIX в. детально описавшего это движение, которое, впрочем, было известно и до него. Так как английская фамилия Brown в течение многих лет по-русски писалась (а изредка и до сих пор пишется; см., например, [26]) как Броун (вместо более правильного написания Браун), то в литературе на русском языке соответствующее движение очень часто по традиции называется броуновским движением. Классическое описание наблюдений брауновского движения содержится в [157].

Количественная теория брауновского движения, объясняющая это движение воздействием на малые частицы молекулярных толчков, порожденных тепловым движением молекул окружающего газа или жидкости, была развита примерно одновременно (около 1905 г.) независимо друг от друга Эйнштейном

и Смолуховским (см. [224] или [223]; ср. также [221]). Любопытно, что в период написания своей первой статьи на эту тему Эйнштейн, по-видимому, даже не слышал про существование брауновского движения (уже широко известного в ту эпоху); он фактически сам предсказал его существование исходя из теоретических соображений и правильно описал все его основные свойства. Теория Эйнштейна и Смолуховского (некоторые важные результаты которой содержались в недооцененной в свое время более ранней статье Башелье [239]) имела дело только с распределениями вероятностей (и моментами) значений координаты $X(t)$ частицы, совершающей брауновское движение, в один или два момента времени. Полное же математическое описание этой случайной функции $X(t)$, включающее строгое доказательство ряда тонких фактов о свойствах отдельных реализаций $x(t)$, никак не вытекающих из более элементарных физических рассуждений предыдущих авторов, было дано между 1920 и 1923 гг. в серии работ Винера (см., в частности, [42, гл. IX]).

⁷ См., например, [15, 75, 129, 131, 134, 137, 143, 170, 171, 181, 182, 193, 194, 197] и др. С электрическими флуктуациями и шумами, явившимися основным источником широкого развития статистических методов в прикладных исследованиях, можно познакомиться, например, по [29, 30, 85, 138, 195], содержащим много дополнительных ссылок.

⁸ Турбулентности посвящена двухтомная монография [147], содержащая обширную библиографию, а также книги [27, 212] и др.; специально атмосферной турбулентности посвящены книги [128, 155]. О микросейсммах см., например, [43, 180]. С геомагнитными вариациями можно познакомиться по [233]. Статистическому анализу электроэнцефалограмм посвящены, в частности, книги [103, 186]; совсем другое применение понятия случайного процесса в биофизике рассмотрено в [135]. Случайные изменения толщины нити вдоль ее длины рассмотрены в [120, с. 14] и [227, с. 7]. О приложениях теории случайных функций к анализу шероховатых поверхностей рассказывается в [218]; морским волнам посвящены работы [59, 123].

⁹ Число Вольфа обычно определяется как сумма числа наблюдаемых в данный момент отдельных солнечных пятен и умноженного на десять числа тесных групп таких пятен; в настоящее время, однако, для придания какой-то однородности данным имеющихся очень разнородных наблюдений, в него обычно включают еще дополнительный множитель, зависящий от качества используемого телескопа и от метеорологических условий в период наблюдения. Кое-какие результаты статистической обработки ряда чисел Вольфа могут быть найдены в [9, 21] (ср. также [189, с. 201—204]).

Ряд Бевеиджа впервые рассматривался в двух статьях известного английского экономиста Бевеиджа, опубликованных в 1921 и 1922 гг.; он воспроизведен, в частности, в [9, 101, 225] (см. также [334]). Другие примеры беспорядочно флуктуирующих временных рядов, возникающих в экономике, могут быть найдены в [21, 68, 101, 225]. О подобных примерах, относящихся к гидрометеорологии, рассказывается, в частности, в книгах [49, 87, 95, 98, 154, 162, 163, 245], в последней из которых рассмотрен также ряд задач, относящихся к сейсмологии и другим разделам физики Земли, и имеется обширная библиография по вопросу о флуктуирующих временных рядах геофизического происхождения.

¹⁰ Рассмотрение множества всевозможных временных сдвигов заданной функции времени $x(t)$ и осреднения по этому множеству играет важную роль в развитии в начале 30-х гг. Винером «обобщенном гармоническом анализе» (см. [41, гл. IV] и с. 98—99 настоящей книги). Теория Винера была специально ориентирована на приложения к изучению неупорядоченных колебаний типа тех, которые изображены на рис. 1 и 2; вероятностные соображения в этой теории нигде явно не упоминаются, но в качестве единственного негравитального примера функции $x(t)$, к которой применима его теория, Винер приводит в [41, с. 194], а также и в предыдущих журнальных публикациях на ту же тему) функцию, являющуюся реализацией просто задаваемого случайного процесса.

Позже вопросу о задаваемых аналитически примерах функций $x(t)$, в применении к которым теория Винера дает физически разумные результаты (типа

тех, которых можно ожидать, например, для кривых, описывающих турбулентные пульсации), большое внимание уделил Басс [244], предложивший даже для таких $x(t)$ специальное название «псевдослучайные функции»; однако все эти примеры оказались весьма искусственными и вряд ли они могут представлять интерес с точки зрения приложений. К вопросу о том, как следует понимать статистическую устойчивость множества всевозможных сдвигов кривой $x(t)$, мы еще вернемся в конце примечания¹⁵.

¹¹ Так, например, иногда вместо самих значений $x(t)$ рассматривают отклонения этих значений от их тренда (гладкой кривой $x_0(t)$, приближенно описывающей «систематические изменения» значений $x(t)$ во времени) в надежде, что временные сдвиги разностей $\tilde{x}(t) = x(t) - x_0(t)$ уже будут обладать необходимой статистической устойчивостью (см., например, [101, гл. 46], [9, гл. 3] или [162]). В некоторых случаях целесообразно также для придания ряду большей однородности разделить полученные значения $\tilde{x}(t)$ на $|x_0(t)|$ (ср. описание ряда Бевериджа на с. 24). Другой метод исключения систематических изменений ряда $x(t)$ заключается в переходе от самих значений $x(t)$ к их разностям типа $x(t) - x(t - \tau)$ или, например, типа $x(t) - 2x(t - \tau) + x(t - 2\tau)$, где τ — фиксированное число (см., в частности, [101, с. 531]). Теории случайных процессов $X(t)$ таких, что временные сдвиги разностей определенного порядка их реализаций обладают статистической устойчивостью, посвящены работы [106] (см. также [83, гл. XI, § 11], [158] и [230]); применения этой теории рассматривались, в частности, в [21].

Применению статистических методов к анализу колебаний уровня Каспийского моря посвящено много работ (см. примечание²⁰). Ряд, изображенный на рис. 3 б, анализировался, в частности, в [21].

¹² О пуассоновском случайном процессе и порождающих его пуассоновских последовательностях случайных точек см., например, [60, § 51] или [23, гл. 13, § 4]. Случайный телеграфный сигнал впервые, по-видимому, был рассмотрен в 1944 г. Райсом (см. [173]). По поводу пуассоновских импульсных процессов см., например, [194, § 6.1], [181, гл. II], а также литературу об импульсных процессах, указанную в следующем примечании.

¹³ Точечным случайным процессам посвящена, в частности, работа [105], в которой заметное внимание уделено случайным процессам восстановления. Процессы счета событий (counting processes) рассматриваются, например, в [320]. Общим процессам $X(t)$, принимающим лишь два значения $+a$ и $-a$ (т. е. имеющим реализации типа той, которая изображена на рис. 6), посвящен ряд работ (см., например, [299]). Различным типам импульсных случайных процессов посвящены специальные главы в книгах [131, 143, 181, 197], а также монография [111].

¹⁴ Математическое понятие случайной функции (зависящей от непрерывно меняющегося аргумента t), по-видимому, впервые появилось в интересной, но довольно нечеткой статье Башелье [239]. Позже появились работы физиков Эйнштейна, Смолуховского, Фоккера и Планка по теории брауновского движения, фактически сводящиеся к исследованию специального класса случайных процессов. В начале 20-х гг. Винером была разработана детальная математическая теория одного частного случайного процесса, представляющего собой простейшую модель одномерного брауновского движения свободной частицы в однородной среде (см. примечание⁶). В конце 20-х гг. начал публиковаться цикл работ Слуцкого (см. [189]) по общей теории случайных функций; понятие «распределения вероятностей в бесконечномерном пространстве», эквивалентное понятию случайной функции, получило четкий смысл в рамках общей аксиоматики теории вероятностей, разработанной в 1933 г. Колмогоровым [109] (см. также [286]). Примерно в то же время Колмогоровым была разработана общая теория очень важного для приложений класса марковских случайных процессов, а Хинчин [213] заложил основы теории стационарных случайных процессов.

В последующие годы рост литературы по математической теории случайных функций непрерывно ускорялся. В конце 40-х и начале 50-х гг. появились об-

зорные статьи [292, 108, 265, 227] по теории случайных процессов, имеющие много точек пересечения с содержанием настоящей книги. Первой книгой по теории случайных функций была, по-видимому, вышедшая в 1948 г. книга Леви, второе переработанное издание которой позже было переведено на русский язык (см. [130]). В настоящее время только на русском языке уже имеется несколько десятков книг по теории случайных процессов, ссылки на многие из которых еще встретятся нам ниже; помимо того, фактически к той же области относятся и много десятков изданных в нашей стране книг прикладного содержания (см., в частности, примечание 7).

Глава 1

¹⁵ Точный смысл сделанного здесь утверждения связан с некоторыми довольно тонкими рассмотрениями, касающимися восходящего к Колмогорову [109] и являющегося в настоящее время общепринятым в математической литературе (но близко примыкающего и к интуитивным физическим представлениям) отождествления понятия случайной функции $X(t)$ с понятием вероятностной меры P , заданной на функциональном пространстве ее реализаций $x(t)$. А именно, согласно «основной теореме» Колмогорова [109, с. 48] (по поводу которой см. также [23, 32, 120]), *каждой совокупности конечномерных распределений вероятностей, удовлетворяющих условиям симметрии и согласованности, отвечает единственная вероятностная мера P в пространстве всех вещественных функций $x(t)$, заданных на T* . Именно этот факт и имелся в виду на с. 33.

Задание вероятностной меры при помощи совокупности конечномерных распределений вероятностей вполне достаточно для всех задач, в которых приходится иметь дело лишь с вероятностями событий, зависящих от конечного числа величин $X(t)$, но оно зачастую оказывается недостаточным для определения вероятностей событий, зависящих от бесконечного числа величин $X(t)$ (типа, например, вероятности того, что реализация $x(t)$ функции $X(t)$ будет непрерывной функцией t ; см. примечание ²⁶). Необходимость определения в ряде случаев также и вероятностей этого последнего типа породила ряд детальных исследований вероятностных мер на функциональных пространствах, использующих обширный арсенал тонких средств из теории множеств, теории функций и функционального анализа (см., например, [120, § 3.6], а также [51, 57, 58, 83, 136]).

Отметим еще, что задание случайной функции $X(t)$ совокупностью ее конечномерных распределений вероятностей позволяет также придать точный смысл понятию «статистической устойчивости множества всевозможных временных сдвигов» кривой $x(t)$, упоминавшемуся на с. 24—25 и в примечании ¹⁰.

Будем для определенности считать время непрерывным (случай, когда t пробегает только целочисленные значения, требует лишь очевидной замены интегралов на суммы в последующих формулах), и пусть $\chi_a[x] = 1$ при $x < a$ и $\chi_a[x] = 0$ при $x \geq a$. Для того чтобы по множеству временных сдвигов функции $x(t)$ можно было определить функции (1.3) при любых n , $t_1, \dots, t_n$ и значениях $x_1, \dots, x_n$ таких, что при них правая часть (1.3) оказывается непрерывной функцией своих аргументов, должны существовать пределы

$$\lim_{T_1 \rightarrow -\infty, T_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \chi_{x_1}[x(t + t_1)] \dots \chi_{x_n}[x(t + t_n)] dt = F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n). \quad (\text{П.9})$$

Легко понять, что при этом условии функции $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ будут удовлетворять условиям симметрии и согласованности, т. е. будут задавать случайную функцию $X(t)$, реализацией которой можно считать функцию $x(t)$;

поэтому, оно и является нужным условием статистической устойчивости. Отметим еще, что получаемые случайные функции $X(t)$ автоматически оказываются стационарными и эргодическими (смысл этих терминов разъяснен в § 3 и примечании³⁵); обратно, для стационарной и эргодической случайной функции $X(t)$ пределы (П. 9) всегда существуют и могут использоваться для определения соответствующих многомерных распределений вероятностей (1.3). Если же нас интересует только корреляционная теория стационарных случайных функций $X(t)$ (о ней см. § 2 и 3), то, имея в распоряжении лишь одну функцию $x(t)$, не надо даже требовать существования общих пределов (П. 9), а достаточно ограничиться требованием, чтобы существовали следующие пределы:

$$m = \lim_{T_1 \rightarrow -\infty, T_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} x(t) dt,$$

$$B(t_1, t_2) = B(t_1 - t_2) = \lim_{T_1 \rightarrow -\infty, T_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_2 - T_1} \times$$

$$\times \int_{T_1}^{T_2} x(t + t_1) x(t + t_2) dt \quad (\text{П. 10})$$

см. [41, гл. IV], ср. также [335]).

¹⁶ В частности, по аналогии с заданием случайной величины X ее характеристической функцией $\Psi(t)$ (см. примечание³) случайную функцию $X(t)$ можно задать ее характеристическим функционалом, представляющим собой естественное обобщение понятия характеристической функции (см., например, [14, § 5.2], [194, § 6] и [147, ч. 1, § 3.4 и 4.4]). Понятие характеристического функционала было введено в сильно опередившей свое время статье Колмогорова [286]; с современной математической теорией таких функционалов можно познакомиться, например, по [51, гл. IV].

¹⁷ Разумеется, плотности вероятности $p_{t_1}, \dots, t_n(x_1, \dots, n)$ будут существовать при всех $t_1, \dots, t_n$ лишь при условии, что ядро $b(t, s) = B(t, s) - m(t)m(s)$ является строго положительно определенным

(т. е. таким, что $\sum_{j, k=1}^n b(t_j, t_k) c_j c_k > 0$, если хотя бы одно из чисел $c_1, \dots, c_n$

отлично от нуля). В общем же случае рассматриваемые многомерные нормальные распределения вероятностей могут оказаться и вырожденными, и поэтому их удобнее задавать не плотностями вероятности, а соответствующими многомерными характеристическими функциями или даже характеристическим функционалом. Аккуратное доказательство того, что каждое положительно определенное ядро представляет собой корреляционную функцию некоторой гауссовской случайной функции $X(t)$, может быть найдено (сразу для общего случая комплексных функций $X(t)$), например, в [83, гл. II, § 3] и [136, § 34.1].

¹⁸ Среднее значение $m(t)$ и дисперсия $D(t)$ пуассоновского процесса $X(t)$ очевидно равны среднему значению и дисперсии числа пуассоновских точек t_k таких, что $0 < t_k < t$; следовательно, $m(t) = D(t) = \lambda t$ (ср. выше с. 11). Так как для пуассоновской последовательности точек t_k число таких точек, попавших на интервал $[0, s]$, не влияет на появление точек той же последовательности после момента s (см., например, [60, § 51]), то разность $X(t) - X(s)$ при $t > s$ здесь не зависит от $X(s)$. Поэтому если $t > s$, то

$$B(t, s) = \langle X(t) X(s) \rangle = \langle [X(s)]^2 \rangle +$$

$$+ \langle [X(t) - X(s)] X(s) \rangle = D(s) + m^2(s) +$$

$$+ \langle X(t) - X(s) \rangle \langle X(s) \rangle = \lambda s + \lambda^2 s^2 + \lambda(t - s)\lambda s = \lambda s + \lambda^2 ts.$$

Если $X(t)$ — случайный телеграфный сигнал, то $X(t)X(s) = a^2$ в случае, когда на интервал $[s, t]$ попадает четное число точек t_k , и $X(t)X(s) = -a^2$, когда число таких точек t_k оказывается нечетным. Поэтому здесь

$$B(t, s) = a^2 e^{-\lambda |t-s|} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda |t-s|)^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda |t-s|)^{2k+1}}{(2k+1)!} \right] = a^2 e^{-2\lambda |t-s|}.$$

¹⁹ Следуя работам Слуцкого (см. [189, с. 135, 144], ср. также [292]), корреляционную теорию случайных функций иногда также называют теорией второго порядка случайных функций или теорией случайных функций второго порядка.

²⁰ Попытка применения к колебаниям уровня Каспийского моря теории стационарных случайных функций была, в частности, предпринята в [167, 168]. Вопросу о том, можно или нельзя рассматривать эти колебания как стационарные, посвящено много работ (см., например, [10, 82, 122]).

²¹ Ср. в этой связи работу Херда [275], посвященную случайным функциям вида $Y(t) = X(t + \Phi)$, где $X(t)$ — случайная функция, а Φ — независимая от $X(t)$ случайная величина, равномерно распределенная на интервале длины T_0 . Херд показал, что процесс $Y(t)$ будет стационарным тогда и только тогда, когда $X(t)$ — периодически распределенный случайный процесс периода T_0 (т. е. такой, что все его конечномерные распределения вероятностей не меняются при преобразованиях вида $X(t) \rightarrow X(t+h)$, где h кратно T_0). Аналогичные результаты Херд получил и для так называемых периодически коррелированных случайных процессов периода T_0 , обладающих тем свойством, что $m(t) = m(t + kT_0)$ и $B(t, s) = B(t + kT_0, s + kT_0)$ при любом целом k ; здесь только свойство стационарности $Y(t)$ надо заменить на определенную на с. 43 стационарность в широком смысле. Изучению более общего класса стационаризуемых случайных процессов $X(t)$, обладающих тем свойством, что хотя бы для одной независимой от $X(t)$ случайной величины Φ процесс $Y(t) = X(t + \Phi)$ оказывается стационарным, посвящена работа [271].

²² Наряду с приведенными на с. 43 двумя наименованиями иногда для той же цели используются и термины: стационарные функции второго порядка, или функции «стационарные до второго порядка», или «слабо стационарные» (общее свойство (1.20) тогда называется строгой или сильной стационарностью), или, наконец, «стационарные в смысле Хинчина» (так как важность соответствующего понятия была особенно подчеркнута в работе Хинчина [213]).

²³ Доказательство неравенства Чебышева (1.32) крайне просто: если $\tilde{F}(x)$ — функция распределения величины $X - X_n$, то

$$\begin{aligned} \langle (X - X_n)^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 d\tilde{F}(x) \geq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x^2 d\tilde{F}(x) + \\ &+ \int_{\varepsilon}^{\infty} x^2 d\tilde{F}(x) \geq \varepsilon^2 \left\{ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\tilde{F}(x) + \int_{\varepsilon}^{\infty} d\tilde{F}(x) \right\} = \varepsilon^2 \mathbf{P} \{ |X - X_n| > \varepsilon \}. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично доказывается следующий более общий результат: если Y — случайная величина такая, что $|Y|^\alpha < \infty$ при некотором $\alpha > 0$, то

$$\mathbf{P} \{ |Y| > \varepsilon \} \leq \langle |Y|^\alpha \rangle / \varepsilon^\alpha. \quad (\text{П.11})$$

²⁴ См., например, [23, гл. 6, § 2], [60, § 34], [120, § 2.8 и 3.5] или [136, § 9].

²⁵ См., например, [136, § 9.4]. Сформулированное здесь утверждение фактически относится к математическому анализу (точнее, функциональному анализу), а не к теории вероятностей; в анализе оно часто называется теоремой Фишера—Рисса.

²⁶ Покажем прежде всего, что по значениям одних лишь конечномерных распределений (1.3), вероятность того, что $x(t)$ будет непрерывной функцией t , вообще не может быть определена. В самом деле, пусть $X(t)$ (где $0 \leq t \leq 1$) — какой-то случайный процесс, все реализации $x(t)$ которого непрерывны, так что $P\{x(t) \text{ — непрерывная функция } t\} = 1$ (например, $X(t) = \cos(\omega t + \Phi)$, где Φ — случайная величина), а Z — независимая от $X(t)$ случайная величина, принимающая значения между 0 и 1 и имеющая на интервале $[0, 1]$ равномерное распределение вероятностей. Пусть далее $X_1(t) = X(t)$, если $t \neq Z$, но $X_1(t) = X(t) + 1$, если $t = Z$. Так как $P\{Z = t\} = 0$ при любом t и, более того, $P\{Z = t_1, \text{ или } Z = t_2, \dots, \text{ или } Z = t_n\} = 0$ при любых фиксированных $t_1, t_2, \dots, t_n$, то $P\{X_1(t_1) = X(t_1), \dots, X_1(t_n) = X(t_n)\} = 1$ при любых $t_1, \dots, t_n$, так что все конечномерные распределения случайных процессов $X_1(t)$ и $X(t)$ точно одинаковы. В то же время все реализации $x_1(t)$ процесса $X_1(t)$ имеют разрыв в точке $t = z$ (где z — выборочное значение Z), и, следовательно, $P\{x_1(t) \text{ — непрерывная функция } t\} = 0$. Поэтому условия, налагаемые на конечномерные распределения вероятностей, в лучшем случае могут лишь гарантировать существование процесса с такими распределениями, реализации которого непрерывны с вероятностью единица (но не то, что любой процесс с такими конечномерными распределениями будет иметь непрерывные реализации), — именно в этом смысле ниже и будет пониматься утверждение о том, что реализации процесса $X(t)$ непрерывны с вероятностью единица.

Отметим, впрочем, что с практической точки зрения указанное здесь обстоятельство малосущественно, так как если $X(t)$ процесс с непрерывными (или, например, дифференцируемыми) реализациями $x(t)$, то обычно все прочие «нерегулярные» процессы с теми же конечномерными распределениями вероятностей уже будут представлять собой лишь некоторые «математические патологии» (типа приведенного выше примера процесса $X_1(t)$), никогда не встречающиеся в реальных приложениях. Эти «патологические процессы» можно также с самого начала исключить из рассмотрения, заранее потребовав, чтобы процесс $X(t)$ удовлетворял некоторым весьма общим «условиям регулярности» (накладываемым уже не на конечномерные распределения, а исходящие из иного описания случайного процесса), которые на практике всегда можно считать выполняющимися; об этом см., например, [120, § 3.6 и гл. 4] или же [57, 58, 83, 136].

Простейшее и самое важное из известных в настоящее время условий непрерывности реализаций было еще в 30-е гг. найдено Колмогоровым (и впервые опубликовано Слуцким [189, с. 276]). Оно состоит в утверждении, что *реализации процесса $X(t)$, заданного на интервале $a \leq t \leq b$, будут с вероятностью единица непрерывными функциями t , если только при некоторых $\alpha > 0$, $\delta > 0$ и $C < \infty$ для всех достаточно малых $|h|$ (скажем, при $|h| < h_0$, где h_0 — фиксированное число) выполняется неравенство*

$$\langle |X(t+h) - X(t)|^\alpha \rangle < C|h|^{1+\delta} \quad (\text{П.12})$$

(накладывающее ограничения лишь на двумерные распределения процесса $X(t)$). Мы здесь не будем приводить полного доказательства этого утверждения, являющегося не очень простым, а ограничимся лишь следующим рассуждением, поясняющим суть дела.

Разобьем интервал $[a, b]$ точками $t_k = a + (b-a)k/2^n$, $k = 1, 2, \dots, 2^n - 1$; $t_0 = a$; $t_{2^n} = b$, на 2^n равных частей длины $(b-a)/2^n$ и пусть n так

велико, что $(b - a)/2^n < h_0$. Воспользуемся тем, что для любых случайных событий $A_1, A_2, \dots, A_{2^n}$

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_{2^n}) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_{2^n}),$$

где $A_1 + A_2 + \dots + A_{2^n}$ означает событие, состоящее в том, что выполняется хотя бы одно из событий $A_1, \dots, A_{2^n}$, а знак равенства отвечает случаю, когда все события A_k попарно несовместимы. Приняв теперь за A_k событие, состоящее в выполнении неравенства $|X(t_k) - X(t_{k-1})| > 1/n^2$, и используя также неравенства (П. 11) (для случая, когда $Y = X(t_k) - X(t_{k-1})$, а $\varepsilon = 1/n^2$) и (П. 12), мы найдем, что

$$P\{|X(t_k) - X(t_{k-1})| > 1/n^2 \text{ хотя бы при одном } k = 1, 2, \dots, 2^n\} < 2^n \frac{C(b-a)^{1+\delta} n^{2\alpha}}{2^n(1+\delta)} = C(b-a)^{1+\delta} \frac{n^{2\alpha}}{2^{n\delta}}. \quad (\text{П. 13})$$

Но $n^{2\alpha}/2^{n\delta} \rightarrow 0$ и $1/n^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, поэтому из (П. 13) вытекает, что при условии (П. 12) все приращения $X(t)$ на 2^n отрезках $[t_{k-1}, t_k]$ длины $(b-a)/2^n$ при большом значении n с очень близкой к единице вероятностью будут очень малы по модулю. Этот вывод показывает, что ситуация типа той, которая имеет место при рассмотрении случайного телеграфного сигнала, здесь оказывается невозможной и что, по-видимому, реализации $x(t)$ с вероятностью единица будут непрерывными функциями.

Заметим, что предположение о стационарности $X(t)$ в намеченном рассуждении не использовалось; на самом деле оно и не нужно для доказательства утверждения Колмогорова. Если $X(t)$ — нормальный случайный процесс, то, как нетрудно показать, $\langle |X(t+h) - X(t)|^{m\alpha} \rangle = C_{m,\alpha} \langle |X(t+h) - X(t)|^\alpha \rangle^m$, где $C_{m,\alpha}$ — зависящая от m и α постоянная; поэтому здесь условие (П. 12) наверное будет справедливо, если только $\langle |X(t+h) - X(t)|^\alpha \rangle < C_1 |h|^{\beta_1}$ для каких-либо $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$ и $C_1 < \infty$.

Строгое доказательство утверждения Колмогорова, ряда его усилений и некоторых дальнейших результатов об условиях непрерывности реализаций может быть найдено, например, в [120, § 4.2, 7.3 и 9.2—9.5], а также в [32, 57, 58, 83, 136].

²⁷ Заметим, что из существования $B''(t)$ вытекает справедливость условия (П. 12) с $\alpha = 2$ и $\delta = 1$; поэтому реализации $x(t)$ дифференцируемого в среднем квадратичном процесса $X(t)$ с вероятностью единица непрерывны. Производная же $x'(t)$ здесь при некоторых значениях t может не существовать (подобно тому как реализация непрерывного в среднем квадратичном процесса $X(t)$ может иметь точки разрыва).

Однако если дифференцируемый в среднем квадратичном процесс $X(t)$ удовлетворяет некоторому очень общему «условию регулярности», которое на практике всегда можно считать выполняющимся, то его реализация $x(t)$ с вероятностью единица будет иметь производную $x'(t)$ при всех t (за исключением, быть может, некоторого множества точек t , имеющего нулевую суммарную «длину») и $x(t)$ будет с точностью до постоянной совпадать с неопределенным интегралом от $x'(t)$; при этом в каждой фиксированной точке t значение $x'(t)$ с вероятностью единица будет совпадать с реализацией производной в среднем квадратичном $X'(t)$ процесса $X(t)$ (см. [83, с. 481]).

Отметим еще, что если процесс $X(t)$ дважды дифференцируем в среднем квадратичном (т. е. если существует $B^{IV}(t)$), то его реализации обязательно будут иметь всюду непрерывную производную $x'(t)$ (см. [189, с. 278]). Дальнейшее обсуждение вопроса об условиях дифференцируемости реализаций см. в [120, § 4.3, 7.3 и 9.2—9.5].

²⁸ Упомянутое доказательство можно найти, например, в [58, т. I, гл. IV, § 3], см. также [83, с. 63 и 465—466].

²⁹ Например, если $b(\tau) = A \cos \omega \tau$ или $b(\tau) = \sum_k A_k \cos \omega_k \tau$ (ср. с. 115, где разъясняется спектральный смысл условия Слуцкого).

Теорема Слуцкого была впервые опубликована в 1938 г. [189, с. 252]. Еще раньше Хинчин (см., в частности, [213]) доказал, что *величина M_T всегда стремится в среднем квадратичном к некоторому пределу (не обязательно совпадающему с $\langle X(t) \rangle$) при $T \rightarrow \infty$* . Последний результат близко примыкает также к так называемой квазиэргодической теореме Неймана [304], относящейся к общей механике (теории динамических систем).

³⁰ Ясно, что левая часть (1.57) и (1.57а) совпадает с $\langle (M_T - m)(X(0) - m) \rangle$; поэтому если $\langle (M_T - m)^2 \rangle \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$, то эта левая часть стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$ в силу неравенства (1.35). Предположим теперь для определенности, что время t — непрерывное; тогда если справедливо условие (1.57а), то для

любого $\varepsilon > 0$ существует $T_0 = T_0(\varepsilon)$ такое, что $\int_0^{\tau_1} b(\tau) d\tau \leq \varepsilon \tau_1$ при $\tau_1 > T_0$.

Так как $|b(\tau)| < b(0)$ и, значит, $\int_0^{\tau_1} b(\tau) d\tau \leq b(0) \tau_1$ при любом τ_1 , то при $T > T_0$

$$\begin{aligned} \sigma_{M_T}^2 &= \frac{2}{T^2} \int_0^T \int_0^{\tau_1} b(\tau) d\tau d\tau_1 \leq \frac{2}{T^2} \left[\int_0^{T_0} b(0) \tau_1 d\tau_1 + \int_{T_0}^T \varepsilon \tau_1 d\tau_1 \right] = \\ &= \frac{b(0) T_0^2}{T^2} + \frac{\varepsilon (T^2 - T_0^2)}{T^2} < b(0) \frac{T_0^2}{T^2} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что $\sigma_{M_T}^2$ можно сделать сколь угодно малым, выбрав достаточно большое T , так что $\sigma_{M_T}^2 \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$.

Формула (1.58а) впервые появилась в другой связи в работе [324] о турбулентной диффузии; см. также [99]. Формула (1.58) принадлежит Слуцкому [189, с. 144].

³¹ См., например, [39, 40], где, в частности, показано, что при широких условиях (накладываемых на $b(\tau)$) для каждого T можно найти N такое, что $\sigma_{M_{TN}}^2 < \sigma_{M_T}^2$ (где M_{TN} — левая часть (1.60б), в которой $x(kT/N)$ заменено на $X(kT/N)$); см. также [200] и [87, § 5.3]. Впрочем, разница между средними квадратическими ошибками приближения (1.60а) и лучшего из приближений (1.60б) во всех случаях оказывается очень небольшой.

Многочисленные примеры расчета значений $\sigma_{M_T}^2$ и $\sigma_{M_{TN}}^2$ для некоторых конкретных форм корреляционных функций $b(\tau)$, иногда сопровождающиеся таблицами и графиками, могут быть найдены, в частности, в книгах [16, 39, 40, 87, 134, 144, 185], а также в [33, 140, 192, 205, 208, 246, 306, 338, 339]. Значение формулы (1.58а) для исследований климата (всегда имеющих дело лишь с осредненными значениями) обсуждается в [289] и [203, с. 146]. Разумеется, аккуратные расчеты значений $\sigma_{M_T}^2$ и $\sigma_{M_{TN}}^2$ по формулам (1.58) и (1.58а) имеют смысл лишь тогда, когда функция $b(\tau)$ нам точно известна. Если же это не так (как чаще всего и бывает в реальных приложениях), то вместо истинных значений $b(\tau)$ приходится использовать какие-то их приближенные оценки (о некоторых еще будет идти речь ниже), и поэтому здесь уже можно рассчиты-

вать лишь на получение довольно грубых оценок величин $\sigma_{M_T}^2$ и $\sigma_{M_{TN}}^2$ (ср. обсуждение этого вопроса в [338], а также в [275] и [301], где рассматриваются некоторые приближения к значениям $\sigma_{M_T}^2$ для случая дискретного t , зависящие только от значений $x(1), x(2), \dots, x(T)$).

Заметим еще, что если функция $b(\tau)$ точно известна, то в принципе можно подобрать и более точную, чем M_T , несмещенную оценку среднего значения m , линейно зависящую от значений $X(t)$ (см., например, [40, 65, 74, 229]). Однако чаще всего разница между средними квадратическими ошибками оценки M_T и наилучшей возможной линейной несмещенной оценки значения m оказывается очень небольшой (см. типичные примеры в [74, 200]). Некоторые довольно специальные примеры, когда дело обстоит иначе, рассмотрены, в частности, в [174, 330].

³² Формула (1.63) впервые была получена в другой связи Тэйлором [324] (см. также [99]). По поводу приложений формул (1.63) и (1.63а) к исследованию атмосферной турбулентности см., например, [128, § 1.15] и [322].

³³ Равенство $C = 0$, как легко видеть, означает, что $f(0) = 0$, где $f(\omega)$ — спектральная плотность процесса $X(t)$ (см. формулу (2.86)); в частности, $X(t) = Y'(t)$, где $Y(t)$ — стационарный процесс, тогда и только тогда, когда $f(\omega)$ имеет в точке $\omega = 0$ нуль не ниже чем второго порядка. Можно показать, что если $f(0) = 0$, то порядок убывания σ_{M_T} при $T \rightarrow \infty$ определяется скоростью приближения $f(\omega)$ к нулю при $\omega \rightarrow 0$ (см. [133, гл. 4]).

³⁴ Центральная предельная теорема для стационарных случайных функций $X(t)$ рассматривается, в частности, в [175, гл. IV, § 11], [92, гл. XVIII] и [211, гл. IV, § 4], а также в [99] и обзорных докладах Ламли и Розенблатта на специальном симпозиуме по математическим вопросам механики турбулентности [323, с. 1—40]. Условия применимости этой теоремы обычно сводятся к некоторым достаточно естественным требованиям асимптотической независимости далекого будущего функции $X(t)$ от ее далекого прошлого; в приложениях они чаще всего могут считаться выполняющимися. Заметим еще, что многие варианты доказательства указанной теоремы для стационарных функций $X(t)$ могут быть перенесены и на широкие классы нестационарных случайных функций.

О построении доверительных интервалов (сводящемся к определению длин Δ по заданному значению p) рассказывается, например, в [190, гл. VI, § 4].

³⁵ В математической литературе утверждение о сходимости величин m_T к m с вероятностью единица обычно называется усиленным законом больших чисел для случайной функции $X(t)$ (см., в частности, [34, 50, 250, 292] и [83, 120, 136, 211]). В качестве примера относящихся сюда результатов отметим, что усиленный закон больших чисел *наверное будет выполняться, если только равенство (1.57) или (1.57а) остается справедливым при замене множителя $1/T$ в левой части множителем $(\lg T)^a/T$, где $a > 3$* (см. [34]). Отсюда вытекает, что для справедливости указанного закона достаточно, чтобы функция $b(\tau)$ убывала при $\tau \rightarrow \infty$ не медленнее, чем $(\lg \tau)^{-a_1}$, где $a_1 > 3$. Позже в [50] было показано, что на самом деле для справедливости усиленного закона больших чисел достаточно, чтобы функция $b(\tau)$ убывала при $\tau \rightarrow \infty$ не медленнее, чем $(\lg \lg \tau)^{-2-\varepsilon}$, где ε — какое-то положительное число; если же $b(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ только как $(\lg \lg \tau)^{-2}$, то усиленный закон больших чисел может оказаться несправедливым.

Сложность и искусственность всех имеющихся примеров стационарных функций $X(t)$, для которых выполняется условие Слущкого, но m_T не стремится к m при $T \rightarrow \infty$ с вероятностью единица (см., в частности, [50]), естественно объясняется тем, что все они должны относиться к случайным функциям, стационарным лишь в широком, но не в узком смысле (т. е. к функциям $X(t)$, почти никогда не встречающимся на практике; ср. с. 43—44). Дело в том, что еще в 1931 г. Биркгофом [248] была доказана важная эргодическая теорема для

динамических систем, которая, как это было почти сразу же указано Хинчиным [285], позволяет утверждать, что для любой стационарной в узком смысле случайной функции $X(t)$, для которой $\langle |X(t)| \rangle < \infty$ (и в случае непрерывного t выполняется еще некоторое крайнее общее условие регулярности), всегда с вероятностью единица существует $\lim_{T \rightarrow \infty} m_T$ (доказательство этой теоремы

Биркгофа — Хинчина может быть найдено, например, в [57, 58, 60, 83, 120, 136, 175]). Заметим, что в условиях этой теоремы даже не требуется, чтобы выполнялось условие $\langle X^2(t) \rangle < \infty$.

Если, однако, $\langle X^2(t) \rangle < \infty$ и справедливо условие Слущкого (1.57а), то m_T при $T \rightarrow \infty$ будет стремиться в среднем квадратичном к m ; так как для стационарного в узком смысле процесса $X(t)$ временные средние к тому же должны сходиться к пределу и с вероятностью единица, то отсюда уже следует, что для стационарных в узком смысле случайных процессов, удовлетворяющих условию Слущкого, усиленный закон больших чисел также обязательно будет иметь место.

С эргодической теоремой Биркгофа — Хинчина связаны еще некоторые важные результаты теории стационарных (в узком смысле) случайных процессов, на которых имеет смысл вкратце здесь задержаться.

На с. 40 уже подчеркивалось, что если $X(t)$ — стационарный в узком смысле случайный процесс, то стационарным в узком смысле будет и процесс $Y(t) = g(X(t))$, где $g(x)$ — произвольная функция. Аналогично доказывается, что в рассматриваемом случае также и процесс $Y_\Phi(t) = \Phi(X(t), X(t + \tau_1), \dots, X(t + \tau_{n-1}))$, где $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — произвольная функция n переменных, будет стационарным (в узком смысле). Поэтому если $\langle \Phi(X(t), X(t + \tau_1), \dots, X(t + \tau_{n-1})) \rangle = m_\Phi(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) < \infty$, то в силу теоремы Биркгофа — Хинчина для каждой реализации $x(t)$ процесса $X(t)$ среднее значение от $x(t + \tau_1), \dots, x(t + \tau_{n-1})$ по интервалу времени T (назовем его $m_T^{(\Phi)}$) $\Phi(x(t), \dots, x(t + \tau_{n-1}))$ должно с вероятностью единица сходиться к некоторому пределу $m^{(\Phi)} = m^{(\Phi)}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ при $T \rightarrow \infty$. Особый интерес представляют те стационарные процессы $X(t)$, для которых $m^{(\Phi)}(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) = m_\Phi(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ при любой функции $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ такой, что $\langle \Phi(X(t), X(t + \tau_1), \dots, X(t + \tau_{n-1})) \rangle < \infty$; эти процессы $X(t)$ обычно называются эргодическими (или метрически транзитивными) стационарными случайными процессами.

Отметим, что частным случаем функции $\Phi(X(t), X(t + \tau_1), \dots, X(t + \tau_{n-1}))$ с конечным средним значением является функция $\chi_{a_1}[X(t)] \chi_{a_2}[X(t + \tau_1)] \dots \chi_{a_n}[X(t + \tau_{n-1})]$ (см. примечание 15); поэтому ясно, что для реализации стационарного эргодического процесса $X(t)$ с вероятностью единица будет выполняться соотношение (П. 9), где $F_{t_1}, \dots, t_n(x_1, \dots, x_n)$ — отвечающая $X(t)$ n -мерная функция распределения (1.3). Нетрудно также понять, что из справедливости соотношений (П. 9) уже вытекает и общее условие эргодичности процесса $X(t)$.

Разумеется, не каждый стационарный случайный процесс является эргодическим. При этом, вообще говоря, условие эргодичности чаще всего очень нелегко проверить (исключением является лишь случай гауссовских процессов $X(t)$ (см. с. 70 и примечание 43)). Поэтому в приложениях наличие эргодичности очень часто приходится просто принимать на веру, опираясь прежде всего на физическую интуицию. Кроме того, если стационарный процесс $X(t)$ не является эргодическим, то при очень больших условиях регулярности (которые на практике всегда можно считать выполняющимися) множество всех его реализаций $x(t)$ может быть разложено на некоторые непересекающиеся подмножества, в пределах каждого из которых все временные средние значения $m_T^{(\Phi)}$ с вероятностью единица сходятся при $T \rightarrow \infty$ к постоянным значениям, равным условным средним значениям $\Phi(X(t), X(t + \tau_1), \dots, X(t + \tau_{n-1}))$ при условии что реализация $x(t)$ принадлежит соответствующему подмножеству.

Этот важный факт впервые был установлен Нейманом [305] для широкого (но все же частного) класса динамических систем, а позже, опять же в рамках общей динамики, был существенно обобщен Рохлиным [178]; его доказательство для стационарных случайных процессов может быть найдено в [175, гл. IV, § 8]. Указанный факт как раз и придает точный смысл приведенному на с. 59 утверждению о том, что общая (неэргодическая) стационарная случайная функция $X(t)$ представляет собой смесь различных эргодических функций.

³⁶ Формулу (1.64) проще всего вывести, воспользовавшись формулой для двумерной характеристической функции гауссовского двумерного распределения вероятностей и формулой, выражающей моменты многомерного распределения через производные соответствующей характеристической функции (см., например, [60, § 40], или [147, ч. I, § 4.3]). Аналогичным образом может быть получена и общая формула Иссерлиса, выражающая произвольный центральный момент многомерного гауссовского распределения в виде суммы произведений соответствующих вторых моментов (см. [150] или [147, § 4.3]). Из формулы Иссерлиса, в частности, следует, что если вектор (X_1, X_2, X_3, X_4) имеет нормальное распределение вероятностей с нулевым средним значением, то

$$\langle X_1 X_2 X_3 X_4 \rangle = b_{12} b_{34} + b_{13} b_{24} + b_{14} b_{23}, \quad (\text{П.14})$$

где $b_{ij} = \langle X_i X_j \rangle$. При $X_1 = X_2 = X(t + \tau)$, $X_3 = X_4 = X(t)$ последняя формула обращается в формулу (1.64).

³⁷ Примем для определенности, что t — непрерывное. Подставив в известное неравенство Буняковского — Шварца

$$\left| \int_a^b f(\tau) g(\tau) d\tau \right|^2 \leq \int_a^b f^2(\tau) d\tau \int_a^b g^2(\tau) d\tau$$

значения $a = 0$, $b = T$, $f(\tau) = b(\tau)$, $g(\tau) = 1/T$, сразу убеждаемся, что условие (1.65) влечет за собой (1.57а). С другой стороны, например, для функции $b(\tau) = a \cos \omega \tau$ (ее положительная определенность будет доказана в гл. 2, § 12) условие Слуцкого (1.57а) очевидно выполняется, а условие (1.65) — нет (левая часть (1.65) здесь очевидно равна $a^2/2$).

Нетрудно показать, что условие Слуцкого эквивалентно требованию непрерывности спектральной функции процесса (или последовательности) $X(t)$ в точке $\omega = 0$, а более жесткое условие (1.65) — требованием непрерывности этой спектральной функции при всех ω (см. с. 115—116).

³⁸ Пусть $X(t) = \overset{0}{X}(t) + m$, где $m = \langle X(t) \rangle$; тогда

$$\begin{aligned} b_T^*(0) &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[X(t) - \frac{1}{T} \int_0^T X(s) ds \right]^2 dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[\overset{0}{X}(t) - \frac{1}{T} \int_0^T \overset{0}{X}(s) ds \right]^2 dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T [\overset{0}{X}(t)]^2 dt - \left[\frac{1}{T} \int_0^T \overset{0}{X}(t) dt \right]^2 \end{aligned} \quad (\text{П.15})$$

(время t для определенности считаем непрерывным). Осреднив правую часть последней формулы, легко найдем, что $\delta(b_T^*(0)) = \langle b_T^*(0) \rangle - b(0) = -\sigma_M^2$.

где σ_{M_T} — дисперсия M_T . Напомним, что обычно $\sigma_{M_T}^2 \sim T^{-1}$ при больших значениях T , так что $\delta^2(b_T^*(0))$ имеет порядок T^{-2} , в то время как дисперсия оценки $b_T^*(0)$ при известном m имеет порядок T^{-1} .

Дисперсия $b_T^*(0)$ при неизвестном m складывается из дисперсий двух членов правой части формулы (П. 15) и их смешанного второго момента; при широких условиях (в частности, в случае гауссовского $X(t)$) главный вклад в $\sigma^2(b_T^*(0))$ будет вносить дисперсия первого члена, совпадающая со значением $\sigma^2(b_T^*(0))$ при $\langle X(t) \rangle = 0$ (см., например, [37]).

Заметим еще, что средний квадрат ошибки $\Delta_T^2(0) = \sigma^2(b_T^*(0)) + \delta^2(b_T^*(0))$ оценки (П. 15) часто оказывается даже меньшим, чем средний квадрат ошибки

(т. е. дисперсия) оценки $T^{-1} \int_0^T X^2(t) dt$ в случае, когда $\langle X(t) \rangle = 0$; поэтому

даже тогда, когда значение $\langle X(t) \rangle = m$ известно, при оценке дисперсии $X(t)$ иногда имеет смысл сначала вычесть из всех значений $x(t)$ не m , а величину m_T (ср. [55]). Однако существенно повысить точность оценки дисперсии такое вычитание может лишь при относительно коротком (по сравнению с временем корреляции T_1) интервале наблюдения T , когда случайно может оказаться, что все наблюдаемые значения $x(t)$ одновременно заметно отклоняются в одну и ту же сторону от значения $\langle X(t) \rangle$.

Ряд примеров расчета среднего квадрата ошибки оценки $b_T^*(0)$ дисперсии гауссовской стационарной функции $X(t)$ (и при известном, и при неизвестном $\langle X(t) \rangle$) как для дискретного, так и для непрерывного времени t , а также и родственной оценке (1.60б) дискретной оценки $b_{TN}^*(0)$ может быть найден, в частности, в [16, 39, 40, 87, 134, 144] и [33, 36, 55, 140, 192, 208, 246, 306]. Разумеется, ценность такого рода расчетов существенно понижается тем обстоятельством, что точные значения $b(t)$ на практике чаще всего бывают неизвестны.

³⁹ Общие формулы для среднего квадрата ошибки оценки $M_T^{(2n)} =$

$= T^{-1} \int_0^T X^{2n}(t) dt$ момента $\mu^{(2n)} = \langle X^{2n}(t) \rangle$ гауссовского стационарного про-

цесса $X(t)$ с $\langle X(t) \rangle = 0$ можно найти, например, в [2, 153] (ср. также родственную более специальную работу [322]). Простые асимптотические формулы типа (1.66) для ошибок оценок $M_T^{(4)}$ и $M_T^{(6)}$ приведены в [128, с. 50] и [294,

с. 72]; их конкретизация для частного случая, когда $b(t) = Ce^{-t/T_1}$, указана в [2]. Ряд примеров оценки точности определения моментов различных порядков турбулентных пульсаций в атмосфере по формуле (1.63), примененной к процессу $y(t) = x^k(t)$, и сопоставления получаемых при этом результатов с выводами, отвечающими гауссовской модели турбулентных пульсаций, можно найти в [322]. В [44, 54, 97, 152, 313] средний квадрат ошибки оценки $M_T^{(2)}$ момента $\mu^{(2)}$ (а в [2] также и оценок $M_T^{(3)}$ и $M_T^{(4)}$ моментов $\mu^{(3)}$ и $\mu^{(4)}$) рассчитан для следующих специальных моделей негауссовских стационарных процессов $X(t)$: пуассоновского импульсного процесса (В. 26) с $E_n = \text{const}$ и $\Gamma(t) = Ae^{-t/T_0}$ [152, 313]; случайного телеграфного сигнала [152]; процессов $X(t) = |Y(t)|$ (буквой Y здесь и ниже обозначаются гауссовские процессы с нулевым средним значением), $X(t) = Y(t) - c|Y(t)|$, $c = \text{const}$, и $X(t) = \exp\{Y(t)\}$ [2]; процессов $X(t) = Y^2(t)$ [97, 152], или $X(t) = Y_1(t)Y_2(t)$, где $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ взаимно независимы, [44, 97, 152] и процесса $X(t) = Y(t) \cos(\omega_0 t + \Phi)$, где Φ равномерно распределено на интервале $0 \leq \Phi \leq 2\pi$, [44, 54, 97]. Отметим, в частности, что, согласно результатам работы [2], надежное определение третьего момента рассматриваемых здесь процессов всегда требует заметно большего осреднения, чем определение с той же точностью второго момента (этот

вывод хорошо согласуется и с эмпирическими выводами работы [322]), а оценка моментов логарифмически нормального процесса $X(t) = \exp \{Y(t)\}$ требует несравненно большего осреднения, чем оценка той же точности тех же моментов гауссовского процесса.

⁴⁰ Примеры условий, обеспечивающих асимптотическую нормальность распределений вероятностей значений оценок $B_T^*(\tau)$, $b_T^*(\tau) = B_T^*(\tau) - M_T^2$ и $R_T^*(\tau) = b_T^*(\tau)/b_T^*(0)$ функций $B(\tau)$, $b(\tau) = B(\tau) - m^2$ и $R(\tau) = b(\tau)/b(0)$ для случая дискретного аргумента t могут быть найдены, в частности, в [211, гл. IV, § 4] и [9, § 8.4]. Любопытно, что условия асимптотической нормальности распределений $R_T^*(\tau)$ оказываются кое в чем даже более широкими, чем те, при которых удастся доказать асимптотическую нормальность распределений $B_T^*(\tau)$ (см. [9]). Некоторые условия сходимости значений $B_T^*(\tau)$ при $T \rightarrow \infty$ к $B(\tau)$ с вероятностью единица (т. е. применимости к функции $Y_\tau(t) = X(t + \tau)X(t)$ усиленного закона больших чисел) указаны в [83, гл. X, § 7 и гл. XI, § 7] и [211, гл. IV, § 3].

⁴¹ Формула (1.71) может быть выведена с помощью приложения формулы (П. 14) к случайным величинам $X(t + s + \tau) - m$, $X(t + s) - m$, $X(t + \tau) - m$ и $X(t) - m$; она может быть также записана в виде

$$B^{(4)}(\tau, s) - [B(\tau)]^2 = b^2(s) + b(s + \tau)b(s - \tau) + m^2[2b(s) + b(s + \tau) + b(s - \tau)]. \quad (\text{П. 16})$$

⁴² Воспользовавшись формулой (П. 16) и известным неравенством

$$\int_0^T b(s + \tau)b(s - \tau) d\tau \leq \left[\int_0^T b^2(s + \tau) d\tau \int_0^T b^2(s - \tau) d\tau \right]^{1/2} \quad (\text{или аналогич-}$$

ным неравенством для дискретного t) и тем, что из условия (1.65) вытекает и условие Слуцкого (1.57) или (1.57а), легко показать, что в гауссовском случае условие (1.70) (или аналогичное ему условие, относящееся к случаю дискретного τ) эквивалентно более частному условию (1.65).

Формула для среднего квадрата $\Delta_T^2(\tau)$ ошибки оценки $B_T^*(\tau)$ функции $B(\tau)$ получается из формул (1.58) и (1.58а) с помощью замены в этих формулах τ на s , а T на $T - \tau$, и подстановки функции $B^{(4)}(\tau, s) = B^2(\tau)$ вместо $b(s)$; аналогично может быть получена и формула для среднего квадрата ошибки оценки $B_{TN}^*(\tau)$. Исходя из формулы для $\Delta_T^2(\tau)$ нетрудно вывести также формулу для среднего квадрата ошибки оценки $b_T^*(\tau) = B_T^*(\tau) - M_T^2$ функции $b(\tau)$ и приближенную формулу для среднего квадрата ошибки оценки $R_T^*(\tau) = b_T^*(\tau)/b_T^*(0)$ функции $R(\tau)$. Почти столь же просто могут быть найдены и формулы для вторых моментов разностей $B_T^*(\tau) - B(\tau)$, $b_T^*(\tau) - b(\tau)$ или $R_T^*(\tau) - R(\tau)$ при двух различных значениях τ .

Если функция $X(t)$ — гауссовская, то вторые моменты (и средние квадраты) разностей $B_T^*(\tau) - B(\tau)$ выражаются через $b(\tau)$ и m ; в случае же разностей $b_T^*(\tau) - b(\tau)$ или $R_T^*(\tau) - R(\tau)$ эти моменты зависят только от $b(\tau)$ или, соответственно, от $R(\tau)$ (причем в применении к оценкам $R_T^*(\tau)$ указанный результат оказывается справедливым даже и для ряда негауссовских функций $X(t)$ специального вида). По поводу всех этих результатов см., например, оригинальные работы [189, с. 144] и [242], а также книги [9, 14, 101, 210], [13, 16, 39, 40, 78, 125, 131, 134, 162, 170, 185] и [36, 37, 46, 55, 94, 127]. Ср. примечания ⁴⁸ и ⁵⁰, содержащие некоторые добавочные ссылки.

Явные формулы для среднего квадрата ошибки оценок $B_T^*(\tau)$, $b_T^*(\tau)$ и $R_T^*(\tau)$ могут быть получены и для ряда специальных моделей негауссовских случай-

ных процессов, допускающих вычисление четвертого момента $B^{(4)}(\tau, s)$; в этой связи см., например, [44, 54, 152, 313].

⁴³ Используя терминологию, введенную в конце примечания ³⁵, можно сказать, что для гауссовских стационарных функций условие (1.65) является необходимым и достаточным условием эргодичности. Доказательство этой теоремы было независимо найдено Маруяма [298], Гренандером [65, § 5.10] и (в несколько иных терминах и в предположении, что время дискретное) Фоминым [204]; оно изложено, в частности, в [93, § 30], [120, § 7.11] и [175, гл. IV, § 6].

Некоторые обобщения указанной теоремы, относящиеся уже к негауссовским случайным процессам и формулируемые в терминах высших моментов процесса $X(t)$ или соответствующих многомерных характеристических функций, могут быть найдены в [133, гл. 3] и [311, с. 21].

⁴⁴ Воспользовавшись формулами (B. 16) и (B. 17) и тем, что плотность условного распределения вероятностей величины Y при условии, что X принимает фиксированное значение x , равна $p(x, y)/p_1(x)$, легко показать, что если вектор (X, Y) имеет двумерное нормальное распределение с $\langle X \rangle = m_1 = 0$, $\langle Y \rangle = m_2 = 0$, то условное распределение вероятностей Y при условии, что $X = x$, представляет собой одномерное нормальное распределение со средним значением $\sigma_2 x / \sigma_1$ и дисперсией $\sigma_2^2 (1 - r^2)$. Поэтому условное среднее значение произведения $g(X(t+\tau))X(t)$ при условии, что $X(t+\tau) = x(t+\tau)$, равно $g(x(t+\tau))x(t+\tau)R(\tau)$. Осреднив это условное среднее значение по всем значениям $x(t+\tau)$ величины $X(t+\tau)$ и учтя стационарность $X(t)$, получаем формулу (1.72).

Отметим, что условное среднее значение $X(t+\tau)$ при условии, что $X(t) = x$, равно $xR(\tau)$ и, следовательно, его приближенное определение также может быть использовано для получения оценки функции $R(\tau)$ (см., например, [84, 102, 145] или [71, 86, 144], где описаны также некоторые модификации метода условных средних значений и имеются добавочные ссылки на литературу).

Существенным обобщением формулы (1.72) является так называемая формула Фуруцу — Донскера — Новикова, позволяющая выразить через $b(t)$ значение $\langle G[X(t)] \cdot X(t) \rangle$, где $G[X(t)]$ — функционал от $X(t)$, зависящий, вообще говоря, от значений $X(t)$ при всех t (см., например, [182, с. 42]).

⁴⁵ О релейных методах определения корреляционных функций см., в частности, [13, 71, 86, 96, 115, 125, 144, 206, 215, 277]. Вычисление среднего квадрата ошибки такого метода рассматривалось в [115, 206, 277]; любопытно, что, согласно полученным здесь результатам, релейный метод в ряде случаев оказывается более точным, чем непосредственное определение корреляционной функции с помощью осреднения по времени значений произведения $x(t+\tau)x(t)$.

⁴⁶ Пусть вектор (X, Y) имеет нормальную плотность вероятности (B. 16) с $m_1 = m_2 = 0$, а $q = P\{X > 0, Y > 0\} = P\{X/\sigma_1 > 0, Y/\sigma_2 > 0\}$. Ясно, что q не зависит от σ_1 и σ_2 ; поэтому законно считать, что $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$.

Переходя от декартовых (x, y) к полярным координатам (ρ, φ) , получаем

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2\pi(1-r^2)^{1/2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{x^2 - 2rxy + y^2}{2(1-r^2)}\right\} dx dy = \\ &= \frac{1}{2\pi(1-r^2)^{1/2}} \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \exp\left\{-\rho^2 \left[\frac{\cos^2 \varphi - 2r \cos \varphi \sin \varphi + \sin^2 \varphi}{2(1-r^2)}\right]\right\} \rho d\rho d\varphi = \\ &= \frac{(1-r^2)^{1/2}}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{1-r \sin 2\varphi} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{r}{(1-r^2)^{1/2}} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \arcsin r \right] = \frac{1}{2\pi} \arccos(-r). \end{aligned}$$

Следовательно, $P\{X(t+\tau) > 0, X(t) > 0\} = q(\tau) = \arccos[-R(\tau)]/2\pi$, откуда вытекает, что $P\{X(t+\tau)X(t) > 0\} = 2q(\tau) = \arccos[-R(\tau)]/\pi$, $P\{X(t+\tau)X(t) < 0\} = 1 - 2q(\tau)$ и, наконец, $\langle \text{sign } X(t+\tau) \text{sign } X(t) \rangle = 4q(\tau) - 1 = 2\arcsin[R(\tau)]/\pi$.

По поводу вычисления общих средних значений $\langle g(X(t+\tau))g(X(t)) \rangle = b_g(\tau)$ или даже $\langle g_1(X(t+\tau))g_2(X(t)) \rangle$, где $X(t)$ — гауссовская случайная функция с нулевым средним значением, см., например, [76, 131, 143, 197]; вопрос о восстановлении значений $b(\tau)$ по $b_g(\tau)$ специально изучен в [258]. Еще более общие средние значения вида $\langle G_1[X(t)]G_2[X(t)] \rangle$, где G_1 и G_2 — функционалы от $X(t)$, рассмотрены в [25].

⁴⁷ О полярных (знаковых) методах определения корреляционных функций гауссовских случайных функций $X(t)$ с $\langle X(t) \rangle = 0$ см., например, [56, 71, 86, 96, 118, 125, 144, 188, 276, 293, 296]. Отметим, что задача нахождения среднего квадрата ошибки определения функции $b^{(n)}(\tau)$ с помощью осреднения значений $\text{sign } x(t+\tau) \text{sign } x(t)$ по конечному интервалу времени до сих пор не получила удовлетворительного решения.

В случае гауссовской функции $X(t)$ с неизвестным средним значением $\langle X(t) \rangle = m$ формулы (1.72) — (1.74) будут приближенно применимы к функциям $X^{(1)}(t) = X(t) - M_T$, где M_T — оценка (1.53) значения m , если только T достаточно велико. О возможности обобщения релейных и полярных методов определения корреляционных функций, а также и упоминавшегося в примечании ⁴⁴ метода условных средних значений, на некоторые классы негауссовских случайных функций см., в частности, [28, 38, 76, 102, 113, 144, 146, 215, 295, 296].

⁴⁸ См., например, [13, 48, 71, 81, 86, 96, 114, 118, 125, 144, 177, 188]. Некоторые практические рекомендации, касающиеся упрощения вычислений сумм вида (1.68) и (1.68б), могут быть найдены в [165, 253, 283]. Другой подход к той же задаче, позволяющий очень сильно сократить время расчета таких сумм на ЭВМ в случаях, когда число используемых наблюдений очень велико, будет рассмотрен в § 18.

Отметим еще, что иногда для нахождения корреляционной функции $b(\tau)$ применяется и так называемый параметрический метод. В таком случае заранее предполагается, что искомая функция имеет специальный вид — принадлежит к некоторому семейству функций, определяемых небольшим количеством числовых параметров. После этого данные о значениях $x(t)$ используются для приближенной оценки значений неизвестных нам параметров, уже однозначно задающих форму $b(\tau)$. Такой подход имеет то преимущество, что функция $b(\tau)$ здесь всегда получается достаточно гладкой, быстро затухающей на бесконечности и удобной для использования при решении ряда конкретных задач, касающихся случайной функции $X(t)$. Об «аппроксимационных корелометрах» см., например, [47, 63]; ср. также § 18, где намеченный подход обсуждается более подробно.

⁴⁹ Из формулы (В.9) легко следует, что если $\langle [B_T^*(\tau) - B(\tau)]^2 \rangle = \Delta_T^2(\tau)$, то $\langle [B_T^{**}(\tau) - B(\tau)]^2 \rangle = \Delta_{1T}^2(\tau) = (1 - |\tau|/T)^2 \Delta_T^2(\tau) + \tau^2 B^2(\tau)/T^2$. Отсюда ясно, что если $\Delta_T^2(\tau) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$, то и $\Delta_{1T}^2(\tau) \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$.

В связи со смещенностью оценки $B_T^{**}(\tau)$ следует отметить, что на практике очень часто основной интерес представляет центрированная корреляционная функция $b(\tau) = B(\tau) - m^2$ или же нормированная корреляционная функция $R(\tau) = b(\tau)/b(0)$ (в частности, именно оценки функции $R(\tau)$ изображены на рис. 8 и 9). Но, если $\langle X(t) \rangle = m$ неизвестно, то оценка $b_T^*(\tau) = B_T^*(\tau) - M_T^2$ функции $b(\tau)$ уже оказывается смещенной, а несмещенную оценку $b(\tau)$ здесь вообще не удастся построить (ср. выше с. 67, где этот факт отмечался в применении к оценке величины $b(0)$). Что касается функции $R(\tau)$, то ее оценка $R_T^*(\tau) = b_T^*(\tau)/b_T^*(0)$, где $b_T^*(\tau) = B_T^*(\tau) - m^2$ или $b_T^*(\tau) = B_T^*(\tau) - M_T^2$, будет смещенной даже и тогда, когда m точно известно. Поэтому в применении

к оценке функции $R(\tau)$ или же функции $b(\tau)$ при известном m оценка $B_T^*(\tau)$ функции $B(\tau)$ не имеет никаких преимуществ перед $B_T^{**}(\tau)$.

Принадлежащий Кену приближенный метод устранения смещения оценки $R_T^*(\tau)$ состоит в замене $R_T^*(\tau)$ на $2R_T^*(\tau) - [R_{T/2}^{(1)*}(\tau) + R_{T/2}^{(2)*}(\tau)]/2$, где $R_{T/2}^{(1)*}(\tau)$ и $R_{T/2}^{(2)*}(\tau)$ — оценки типа $R_T^*(\tau)$, построенные по первой и второй половинам используемого ряда $x(t)$ (см., например, [101, § 48.4]); при этом, однако, возрастает дисперсия используемой оценки. В [101, § 48.4] имеются и ссылки на работы, в которых рассчитывается смещение оценки $R_T^*(\tau)$ для гауссовских стационарных последовательностей с неизвестным средним значением; примеры расчета смещения оценки $b_T^*(\tau) = B_T^*(\tau) - M_T^*$ функции $b(\tau)$ могут быть найдены в [55].

Отметим еще, что вклад смещения в суммарную ошибку оценок $b_T^*(\tau)$ и $R_T^*(\tau)$ чаще всего оказывается сравнительно небольшим, так как смещение (т. е. систематическая ошибка) при $T \rightarrow \infty$ обычно убывает как T^{-1} , в то время как средняя квадратическая случайная ошибка убывает как $T^{-1/2}$ (ср. примечание ³⁸).

⁵⁰ Предположение о том, что для гауссовских стационарных случайных функций $X(t)$ с $\langle X(t) \rangle = 0$ всегда $\Delta_{1T}^2(\tau) \leq \Delta_T^2(\tau)$, было высказано Парзен. Проверке этого предположения посвящена значительная часть работы [319], некоторые результаты которой изложены в [78, вып. I, § 5.3]; ср. также работу [55], содержащую результаты того же типа для случая, когда $\langle X(t) \rangle$ неизвестно.

Парзен исходил из того, что, во-первых, $\Delta_{1T}^2(0) = \Delta_T^2(0)$ (ибо $B_T^{**}(0) = B_T^*(0)$), но, как нетрудно проверить, $d\Delta_{1T}^2(\tau)/d\tau < d\Delta_T^2(\tau)/d\tau$ при $\tau = 0$, так что всегда $\Delta_{1T}^2(\tau) < \Delta_T^2(\tau)$ при малых значениях τ (причем $\Delta_{1T}^2(\tau)$ всегда убывает, а $\Delta_T^2(\tau)$ может и возрастет с ростом τ в окрестности точки $\tau = 0$), и, во-вторых, $\Delta_{1T}^2(T) = b^2(T) \ll b^2(0) + b^2(T) = \Delta_T^2(T)$. Шерф [319] вычислил значения функций $\Delta_{1T}^2(\tau)$ и $\Delta_T^2(\tau)$ для гауссовских процессов $X(t)$ с $\langle X(t) \rangle = 0$, для которых $b(\tau) = Ce^{-\alpha|\tau|}$, или же $b(\tau) = C \cos \omega\tau$, или $b(\tau) = C(1 - \alpha|\tau|)$ при $|\tau| \leq \alpha^{-1}$ и $b(\tau) = 0$ при $|\tau| > \alpha^{-1}$, или, наконец, $b(\tau) = b(0) = \text{const}$, а также для произвольных гауссовских стационарных последовательностей $X(t)$ с $\langle X(t) \rangle = 0$ в предположении, что $T \leq 4$. Во всех этих случаях оказалось, что $\Delta_{1T}^2(\tau) < \Delta_T^2(\tau)$ при всех $\tau \neq 0$, причем иногда различие между $\Delta_{1T}^2(\tau)$ и $\Delta_T^2(\tau)$ было весьма большим. Герман, Морозов и Свалов [55] выполнили аналогичные расчеты для гауссовской стационарной последовательности с $b(\tau) = Ca^{|\tau|}$ и неизвестным средним значением $\langle X(t) \rangle$, которое заменялось его оценкой M_T ; оказалось, что здесь уже $\Delta_{1T}^2(\tau) > \Delta_T^2(\tau)$ при некоторых малых значениях τ , но разность $\Delta_T^2(\tau) - \Delta_{1T}^2(\tau)$ при таких τ очень невелика, в то время как при дальнейшем возрастании τ эта разность меняет знак и может иногда принимать большие по модулю отрицательные значения. Поэтому они пришли к выводу, что и при известном $\langle X(t) \rangle$ оценка типа $B_T^{**}(\tau)$ предпочтительнее оценки типа $B_T^*(\tau)$.

⁵¹ В самом деле, пусть $x_T(t) = x(t)$ при $0 < t \leq T$ и $x_T = 0$ при $t \leq 0$ или $t > T$. Будем для определенности считать время непрерывным; в таком случае формулу (1.75а) можно переписать в виде

$$B_T^{**}(\tau_1 - \tau_2) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t + \tau_1 - \tau_2) x_T(t) dt =$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t + \tau_1) x_T(t + \tau_2) dt.$$

Отсюда легко следует, что

$$\sum_{j, k=1}^n B_T^{**}(\tau_j - \tau_k) c_j c_k = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^n c_j x_T(t + \tau_j) \right]^2 dt \geq 0.$$

⁵² «Окно Парзена» задается формулой: $a_T(\tau) = a(\tau/k_T)$, где $a(x) = 1 - 6x^2 + 6|x|^3$ при $0 \leq |x| \leq 1/2$, $a(x) = 2(1 - |x|)^3$ при $1/2 \leq |x| \leq 1$ и $a(x) = 0$ при $|x| > 1$ (ср. [311, с. 141]). Положительная определенность такой функции $a(x) = a_p(x)$ следует из того легко проверяемого факта, что с точностью до выбора единиц измерения на осях координат $a_p(x)$ совпадает со сверткой с самой собой функции $a_B(x) = \max(1 - |x|, 0)$, зада-

ющей окно Бартлетта, т. е. с функцией $\int_{-\infty}^{\infty} a_B(x - x_1) a_B(x_1) dx_1$. В свою оче-

редь функция $a_B(x)$ с той же степенью точности совпадает со сверткой двух функций $a_T(x)$, изображенных на рис. 10 а; исходя из этого, легко доказать, что и функция $a_B(x)$ также является положительно определенной. См. также § 18 и примечания 125–128.

⁵³ Как и в вещественном случае, для доказательства достаточно показать, что для любой комплексной положительно определенной функции $B(\tau)$ существует гауссовская комплексная случайная функция $X(t)$ (задаваемая совокупностью гауссовских конечномерных распределений вероятностей), корреляционная функция которой совпадает с $B(\tau)$. Построение такой функции более громоздко, чем аналогичное построение в вещественном случае, но в принципе оно столь же просто. Заметим, что теперь уже значения $\langle X(t) \rangle = m$ и $\langle X(t) \overline{X(s)} \rangle = B(t - s)$ не определяют однозначно все задающие $X(t)$ многомерные гауссовские распределения вероятностей, зависящие от всех моментов $\langle X_j(t) \overline{X_k(s)} \rangle$, $j = 1, 2, k = 1, 2$, а не только от их комбинации (1.77). Поэтому здесь для однозначности надо наложить на функцию $X(t)$ дополнительные условия (см., например, [83, гл. II, § 3] или [136, § 34.1]).

⁵⁴ По поводу определения и свойств гильбертовых пространств см. любой учебник функционального анализа (например, [12] или [110]). Отметим еще, что для возможности считать H гильбертовым пространством на самом деле надо также, чтобы оно было полным в том смысле, что в нем из условия $\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \|X_n - X_m\| = 0$, где $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ — последовательность элементов H , вытекало бы существование элемента $X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n$ такого, что

$\|X - X_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В частном случае рассматриваемого на с. 80–81 гильбертова пространства случайных величин полнота очевидно следует из результатов, о которых говорится на с. 49–50.

⁵⁵ Для комплексных случайных величин X и Y также справедливо неравенство Коши — Буняковского — Шварца, имеющее в данном случае вид: $|\langle X \overline{Y} \rangle| \leq \langle |X|^2 \rangle^{1/2} \langle |Y|^2 \rangle^{1/2}$. Отсюда просто выводится неравенство $\langle |X + Y|^2 \rangle^{1/2} \leq \langle |X|^2 \rangle^{1/2} + \langle |Y|^2 \rangle^{1/2}$, показывающее, что в пространстве H длина стороны $X + Y$ треугольника не превосходит суммы длин двух других его сторон X и Y , так что если $\langle |X|^2 \rangle < \infty$ и $\langle |Y|^2 \rangle < \infty$, то и $\langle |X + Y|^2 \rangle < \infty$.

⁵⁶ Строго говоря, для того, чтобы о $X(t)$ можно было говорить как о кривой в обычном значении этого слова, надо еще потребовать, чтобы выполнялось следующее условие непрерывности: расстояние между точками $X(t)$ и

$X(t')$ должно стремиться к нулю при $t' \rightarrow t$. Легко понять, что это условие эквивалентно условию непрерывности процесса $X(t)$ в среднем квадратичном. Вообще, сходимость последовательности случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ к X в среднем квадратичном означает, что расстояние между точкой X_n пространства H и точкой X стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Представление о случайном процессе (или последовательности) как о кривой (или последовательности точек) в гильбертовом пространстве впервые было введено Колмогоровым [106, 107].

Глава 2

⁵⁷ См., например, [9, с. 252—253], где доказано, что если $B(\tau) = 0$ при $|\tau| > n$, то всегда могут быть найдены числа $b_0, b_1, \dots, b_n$ такие, что для них выполняется равенство (2.5). Договорившись считать что $b_k = 0$ при $k > n$ и при $k < 0$ и рассмотрев сразу более общий случай, когда $B(\tau)$ могут принимать и комплексные значения, мы можем соответствующую формулу (2.5) переписать в виде

$$B(t-s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_{k+t-s} \bar{b}_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{t-j} \bar{b}_{s-j}. \quad (\text{П.17})$$

То, что отсюда уже вытекает и возможность представления последовательности $X(t)$ в виде (2.4), является следствием теоремы об обобщенном спектральном разложении случайных функций, указанной в примечании ⁷¹.

Частные примеры последовательностей скользящих средних рассматривались Юлом в 1921 г. и Слункиным в конце 20-х гг. (см. [189], с. 97 и 144); общий случай был рассмотрен Волдом [334].

⁵⁸ Простое описание классов стационарных случайных последовательностей $X(t)$, представимых в виде двусторонних скользящих средних (2.8) или односторонних скользящих средних (2.6), было дано Колмогоровым (см. [107], а также [83, гл. X, § 8, и гл. XII, § 4] или [9, § 7.5.2 и 7.6.3]) на основе спектрального представления соответствующей корреляционной функции $B(\tau)$, о котором говорится в § 15 этой книги.

Согласно Колмогорову, для возможности представления последовательности $X(t)$ в виде (2.8) необходимо и достаточно, чтобы существовала спектральная плотность $f(\omega)$ (т. е. чтобы $B(\tau)$ можно было представить в виде интеграла Фурье (2.196)); для возможности представления $X(t)$ в более частном виде (2.6) необходимо и достаточно, чтобы спектральная плотность $f(\omega)$ удовлетворяла

условию $\int_{-\pi}^{\pi} |\lg f(\omega)| d\omega < \infty$ (так что, в частности, теперь уже $f(\omega)$ не может тождественно равняться нулю ни на каком интервале значений ω).

⁵⁹ Пусть $(1 + a_1 z + \dots + a_m z^m)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j z^j$, $\gamma_0 = 1$, при $|z| \leq 1$.

Тогда нетрудно проверить, что $X(t) = c \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j E(t-j)$ будет удовлетворять разностному уравнению (2.13) и будет представлять собой единственное стационарное решение этого уравнения, к которому при $t - t_0 \rightarrow \infty$ будет стремиться и любое решение задачи с начальными условиями для (2.13), вне зависимости от того, как были выбраны начальные значения $x_{t_0}, x_{t_0-1}, \dots, x_{t_0-m+1}$ (см. [9, § 5.2.1]; ср. также [53, гл. 5]).

⁶⁰ Небольшая таблица случайных чисел имеется, в частности, в [142]; существуют и гораздо более обширные таблицы того же рода. В настоящее

время, однако, гораздо чаще последовательности $e(1), e(2), \dots, e(k), \dots$, имитирующие реализацию последовательности независимых случайных величин (числа $e(k)$ в этом случае называются псевдослучайными числами), каждый раз заново подсчитываются по определенным правилам на ЭВМ (см., например, [20, 142]).

⁶¹ Формулы (2.15) — (2.156) в немного другой форме впервые были указаны Кендаллом (см. [281], а также [14, § 5.2] и [101, § 47.19]). Простой вывод этих формул приведен на с. 182 этой книги.

⁶² Определим коэффициенты γ_j так же, как это было сделано в примечании ⁵⁹. Нетрудно проверить, что в таком случае

$$X(t) = c \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \gamma_j b_k E(t-j-k), \quad b_0 = 1, \quad (\text{П.18})$$

будет являться единственным стационарным решением уравнения (2.17), причем к этому решению при $t - t_0 \rightarrow \infty$ будет стремиться любое решение задачи с начальными условиями независимо от выбора начальных значений (см. [9, § 5.8.1] и [53, гл. 5]).

⁶³ Заметим еще, что процесс с дискретным спектром можно определить и как стационарный случайный процесс, корреляционная функция которого имеет вид (2.39). В самом деле, Слуцким было доказано [189, с. 252], что любой случайный процесс $X(t)$ с корреляционной функцией вида (2.39) всегда может быть представлен в виде (2.38), где $\langle X_k \bar{X}_l \rangle = 0$ при $k \neq l$. Эта теорема Слуцкого является частным случаем общей теоремы о спектральном разложении стационарных процессов, рассматриваемой в § 10.

⁶⁴ В силу независимости величин E_n и E_m при $n \neq m$ и независимости приращений процесса $N(t)$ на непересекающихся интервалах имеем: $\langle E_n E_m \rangle = m_E^2$ при $n \neq m$, $\langle E_n E_m \rangle = \langle E_n^2 \rangle = m_E^2 + \sigma_E^2$ при $n = m$ и $\langle dN(s) dN(s_1) \rangle = \langle dN(s) \rangle \langle dN(s_1) \rangle$ при $s \neq s_1$. Так как вклад диагонали $s = s_1$ в значение двойного интеграла от ограниченной функции переменных s и s_1 очевидно равен нулю, то легко получаем

$$\begin{aligned} \langle X(t+\tau) X(t) \rangle &= \sum_n \sum_m \langle E_n E_m \rangle \langle \Gamma(t+\tau-t_n) \Gamma(t-t_m) \rangle = \\ &= (m_E^2 + \sigma_E^2) \left\langle \sum_n \Gamma(t+\tau-t_n) \Gamma(t-t_n) \right\rangle + \\ &+ m_E^2 \left\langle \sum_n \sum_{m \neq n} \Gamma(t+\tau-t_n) \Gamma(t-t_m) \right\rangle = \\ &= (m_E^2 + \sigma_E^2) \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t+\tau-s) \Gamma(t-s) \langle dN(s) \rangle + \\ &+ m_E^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t+\tau-s) \Gamma(t-s_1) \langle dN(s) \rangle \langle dN(s_1) \rangle = \\ &= \lambda (m_E^2 + \sigma_E^2) \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t+\tau-s) \Gamma(t-s) ds + \\ &+ \lambda^2 m_E^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t+\tau-s) \Gamma(t-s_1) ds ds_1, \end{aligned}$$

что эквивалентно формуле (2.44).

⁶⁵ Теорема Кэмпбела, так же как и более общие формулы (2.43) — (2.46), представляет собой простейшие результаты теории импульсных случайных процессов, рассматриваемой, в частности, в [131, 143, 181, 194, 197] (см. также специальную монографию [111] о таких процессах).

Приведем здесь одно простое обобщение формул (2.43) и (2.45). Пусть

$$X(t) = \sum_n E_n \Gamma(t - t_n; Z_n), \quad (\text{П.19})$$

где последовательности $\{E_n\}$ и $\{t_n\}$ — такие же, как и в (2.41), а $\{Z_n\}$ — еще одна последовательность взаимно независимых одинаково распределенных случайных величин, независимых и от всех E_n , и от всех t_n (так что зависящая от Z_n форма импульсов $\Gamma(t - t_n; Z_n)$ теперь уже сама оказывается случайной).

В таком случае, повторив рассуждения, приведшие нас к формулам (2.43) — (2.46), но добавив еще в качестве последнего шага осреднение по распределению вероятностей величин Z_n , найдем, что

$$m = \langle X(t) \rangle = \lambda m_E \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(u; Z) du \right\rangle, \quad (\text{П.20})$$

$$b(\tau) = \lambda (m_E^2 + \sigma_E^2) \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(u + \tau; Z) \Gamma(u; Z) du \right\rangle, \quad (\text{П.21})$$

где Z имеет то же распределение, что и все Z_n . В частности, если все импульсы — прямоугольные и имеют случайную ширину Z (так что $\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(u; z) du = z$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(u + \tau; z) \Gamma(u; z) du = \max\{z - |\tau|, 0\},$$

а Z принимает только неотрицательные значения и при $z \geq 0$ имеет плотность вероятности $p(z) = \alpha e^{-\alpha z}$, то, как легко проверить, $m = \lambda m_E \alpha^{-1}$, $b(\tau) = \lambda \alpha^{-1} (m_E^2 + \sigma_E^2) e^{-\alpha |\tau|}$.

⁶⁶ Пример (2.54) и формула (2.55) принадлежат Хинчину (см. [213]).

⁶⁷ Известно (см., например, [24] или [41]), что для любой (даже и неограниченной) функции $\Gamma(u)$ такой, что $\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma^2(u) du < \infty$, существует преоб-

разование Фурье $\gamma(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(u) e^{-i\omega u} du$ (где интеграл иногда надо по-

нимать в некотором специальном смысле), причем $\gamma(-\omega) = \overline{\gamma(\omega)}$ и имеет место следующая формула Парсеваля:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(u + \tau) \Gamma(u) du &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \tau} |\gamma(\omega)|^2 d\omega = \\ &= 2 \int_0^{\infty} \cos \omega \tau |\gamma(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что функция (2.45) может быть записана также в виде (2.53),

$$\text{где } F(\omega) = \lambda (m_E^2 + \sigma_E^2) \int_{-\infty}^{\omega} |\gamma(\omega')|^2 d\omega'.$$

⁶⁸ Сформулированная теорема Хинчина [213] очевидно является простым следствием теоремы Бохнера — Хинчина (см. с. 222) и того факта, что корреляционная функция обязательно является положительно определенной.

⁶⁹ По поводу почти-периодических функций $x(t)$, допускающих представление вида $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\omega_k t}$, см., например, [41, §§ 24 и 25]. Эти функции

характеризуются следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ здесь можно найти такое число $T_0 = T_0(\varepsilon)$, что $|x(t+T_0) - x(t)| < \varepsilon$ при всех t .

⁷⁰ Об обобщенном гармоническом анализе см. [41, гл. IV] (ср. также [244], [256, § 3.9] и [93, § 25]).

⁷¹ Первые доказательства теоремы о спектральном разложении принадлежат Колмогорову [106, 107] и Крамеру [261]; см. также работы [32, 57, 58, 83, 93, 120, 136, 175, 227, 252], содержащие целый ряд таких доказательств.

Самый прямой путь доказательства указанной теоремы опирается на использование формулы обращения интегралов вида (2.61), известной для некоторых классов обычных (неслучайных) функций $X(t)$ и $Z(t)$ (см., в частности, формулу (П. 4)) и имеющей вид

$$Z(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-i\omega t} - 1}{-it} X(t) dt + Z_0 \quad (\text{П. 22})$$

(где Z_0 — не играющая роли постоянная, которую можно вообще приравнять нулю). Для получения нужного нам доказательства надо лишь показать, что формула (П. 22) (где и интеграл от $-T$ до T , и предел при $T \rightarrow \infty$ надо понимать в смысле сходимости в среднем квадратичном) действительно определяет случайную функцию $Z(\omega)$, обладающую свойствами $a')$ и $b')$ и такую, что для нее интеграл по $dZ(\omega)$, фигурирующий в правой части (2.61), существует и совпадает с исходным стационарным процессом $X(t)$, входящим в правую часть (П. 22). Все перечисленные факты могут быть выведены из относящихся к интегралам результатов § 4 и общей формулы (2.52) для корреляционной функции $B(\tau)$ процесса $X(t)$ (т. е. теоремы Хинчина), причем аккуратное их доказательство оказывается сравнительно несложным, хоть и довольно громоздким (см., например, [227, с. 33—35]).

Имеется также ряд других доказательств теоремы о спектральном разложении, на одном из которых, не включающем вывода явной формулы для $Z(\omega)$, но являющемся зато по существу очень простым и допускающим важные обобщения, мы здесь остановимся несколько подробнее.

Воспользуемся снова формулой (2.52) для $B(\tau)$ и наряду с гильбертовым пространством H_X , введенным на с. 81 рассмотрим еще гильбертово пространство $L_2(F)$ функций $\varphi(\omega)$, $-\infty < \omega < \infty$, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\omega)|^2 dF(\omega) < \infty, \text{ причем интеграл в пределах от } -\infty \text{ до } \infty \text{ от } |\varphi(\omega)|^2$$

по $dF(\omega)$ как раз и определяет квадрат нормы $\|\varphi(\omega)\|_L^2$ вектора $\varphi(\omega)$ пространства $L_2(F)$. Соответственно этому, скалярное произведение векторов $\varphi(\omega)$ и $\Psi(\omega)$ указанного пространства $L_2(F)$ задается равенством

$$(\varphi(\omega), \Psi(\omega))_L = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) \overline{\Psi(\omega)} dF(\omega). \quad (\text{П. 23})$$

Формулу (2.52) для $B(t)$ в таком случае можно очевидно переписать в виде

$$\langle X(t) \overline{X(s)} \rangle = (e^{it\omega}, e^{is\omega})_L. \quad (\text{П.24})$$

Сопоставим теперь элементам $X(t)$ гильбертова пространства H_X элементы $e^{it\omega}$ пространства $L_2(F)$, а линейным комбинациям $\sum_{k=1}^m c_k X(t_k)$ — линейные комбинации $\sum_{k=1}^m c_k e^{it_k\omega}$. Опираясь на (П. 24), легко проверить, что отображение

$$\sum_{k=1}^m c_k X(t_k) \leftrightarrow \sum_{k=1}^m c_k e^{it_k\omega} \quad (\text{П.25})$$

является линейным изометричным отображением элементов H_X на элементы $L_2(F)$, т. е. таким линейным отображением, что скалярное произведение любых двух элементов указанного вида в H_X совпадает со скалярным произведением отвечающих им элементов пространства $L_2(F)$. Отсюда, в частности, следует,

что если $\sum_{k=1}^{m_n} c_k^{(n)} X(t_k^{(n)}) = Y_n, n = 1, 2, \dots$ — произвольная последовательность линейных комбинаций значений $X(t)$, при $n \rightarrow \infty$ сходящаяся (в среднем квадратичном) к какому-то вектору Y пространства H_X , то соответствующая последовательность $\sum_{k=1}^{m_n} c_k^{(n)} e^{it_k^{(n)}\omega} = \varphi_n(\omega)$ элементов $L_2(F)$ также будет сходиться при $n \rightarrow \infty$ к некоторому элементу $\varphi_Y(\omega)$ пространства $L_2(F)$ (в том смысле, что $\|\varphi_n^*(\omega) - \varphi_Y(\omega)\|_L^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$), причем $\varphi_Y(\omega)$ будет зависеть только от Y , но не от выбора сходящейся к Y последовательности Y_n . Поэтому соответствие (П. 25) естественно распространить и на рассматриваемые здесь пределы, положив

$$Y \leftrightarrow \varphi_Y(\omega). \quad (\text{П.26})$$

Нетрудно видеть, что расширенное таким образом соответствие (П. 25) — (П. 26) будет уже являться линейным и изометричным отображением всего гильбертова пространства H_X на все гильбертово пространство $L_2(F)$ функций $\varphi(\omega)$ с интегрируемым по $dF(\omega)$ квадратом модуля*. Пусть теперь $\chi_{\Delta\omega}(\omega)$ — это так называемая индикаторная функция интервала $\Delta\omega = [\omega_1, \omega_2]$, определяемая равенствами: $\chi_{\Delta\omega}(\omega) = 1$ при $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ и $\chi_{\Delta\omega}(\omega) = 0$ при $\omega < \omega_1$ или $\omega > \omega_2$. Ясно, что функция $\chi_{\Delta\omega}(\omega)$ принадлежит $L_2(F)$; обозначим символом $Z(\Delta\omega)$ тот элемент H_X , который при отображении (П. 26) переходит в элемент $\chi_{\Delta\omega}(\omega)$ пространства $L_2(F)$. При $\langle X(t) \rangle = 0$ все элементы H_X — это случайные величины с нулевым средним значением, так что $Z(\Delta\omega)$ очевидно обладает свойством а), указанным на с. 102; свойство б) здесь сразу следует из того, что функции $\chi_{\Delta_1\omega}(\omega)$ и $\chi_{\Delta_2\omega}(\omega)$ ортогональны в $L_2(F)$, если интервалы

* Этот факт следует из легко доказываемой полноты линейных комбинаций функций $e^{it\omega}$ в $L_2(F)$ (или, иначе, из отсутствия в $L_2(F)$ ненулевого элемента $\Psi(\omega)$, «перпендикулярного» всем элементам $e^{it\omega}$, $-\infty < t < \infty$).

$\Delta_1 \omega$ и $\Delta_2 \omega$ не пересекаются, а свойство в) является совершенно очевидным. Далее, в силу линейности отображения (П. 26) ясно, что

$$\sum_k a_k Z(\Delta_k \omega) \leftrightarrow \sum_k a_k \chi_{\Delta_k \omega}(\omega). \quad (\text{П. 27})$$

Если теперь выбрать $a_1, \dots, a_m, \Delta_1 \omega, \dots, \Delta_m \omega$ так, что a_k равно значению некоторой непрерывной функции $\varphi(\omega)$ из $L_2(F)$ в какой-то точке интервала $\Delta_k \omega$, то левая часть (П. 27) будет представлять собой интегральную сумму, отвечающую интегралу $\int \varphi(\omega) Z(d\omega)$, а правая часть (П. 27) будет ступенчатой функцией, аппроксимирующей $\varphi(\omega)$. Отсюда ясно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) Z(d\omega) \leftrightarrow \varphi(\omega) \quad (\text{П. 28})$$

при нашем отображении (П. 26) для всех непрерывных функций $\varphi(\omega)$ из $L_2(F)$. Подставляя в (П. 28) $\varphi(\omega) = e^{it\omega}$ и учтя, что $e^{it\omega} \leftrightarrow X(t)$, сразу приходим к формуле (2.58).

Остановимся теперь вкратце на важном вопросе о возможности распространения намененного здесь доказательства теоремы о спектральном разложении на широкие классы случайных функций, отличных от стационарных случайных процессов. Пусть $X(t)$ — случайная функция, определенная на произвольном множестве T точек t , с нулевым средним значением и конечной корреляционной функцией $\langle X(t) \overline{X(s)} \rangle = B(t, s)$, допускающей представление вида

$$B(t, s) = \int_A \Psi(t, a) \overline{\Psi(s, a)} F(da). \quad (\text{П. 29})$$

Здесь $\Psi(t, a)$ — функция (вообще говоря, комплексная) точки t множества T и дополнительного аргумента a , пробегающего некоторое множество значений A , а F — мера на A , т. е. неотрицательная функция подмножеств Δa множества A , определенная для достаточно широкого класса таких подмножеств и аддитивная, т. е. такая, что $F(\Delta_1 a) + F(\Delta_2 a) = F(\Delta_1 a + \Delta_2 a)$, где $\Delta_1 a$ и $\Delta_2 a$ — непересекающиеся подмножества, а $\Delta_1 a + \Delta_2 a$ — их объединение. В таком случае при широких условиях интеграл (П. 29) по мере $F(da)$ может быть определен, например, аналогично обычному определению интеграла Стильбеса¹ (см., в частности, [110]). Теперь мы можем рассмотреть отображение

$$X(t) \leftrightarrow \Psi(t, a), \quad (\text{П. 30})$$

являющееся изометричным отображением элементов $X(t)$ гильбертова пространства H_X на элементы $\Psi(t, a)$ гильбертова пространства $L_2(F)$ всевозможных функций $\Phi(a)$ на A с интегрируемым по мере $F(da)$ квадратом модуля, а затем линейно и непрерывно распространить это отображение на все конечные линейные комбинации элементов $X(t)$ и на все пределы таких комбинаций.

Допустим еще, что линейными комбинациями вида $\sum_k c_k \Psi(t_k, a)$ можно с любой степенью точности приблизить (в среднем квадратичном по $F(da)$) индикаторную функцию $\chi_{\Delta a}(a)$ любого подмножества Δa из того класса подмножеств, который используется при определении интеграла по $F(da)$. В таком случае намененное выше доказательство теоремы о спектральном разложении стационарных процессов можно будет без труда перенести и на случайную функцию $X(t)$ с корреляционной функцией (П. 29). В применении

к этой функции оно обратится в доказательство существования «обобщенного спектрального разложения» вида

$$X(t) = \int_A \Psi(t, a) Z(da), \quad (\text{П.31})$$

где Z — комплексная случайная аддитивная функция подмножеств Δa такая, что $\langle Z(\Delta a) \rangle = 0$, $\langle Z(\Delta_1 a) \overline{Z(\Delta_2 a)} \rangle = 0$ для любых непересекающихся подмножеств $\Delta_1 a$ и $\Delta_2 a$ и $\langle |Z(\Delta a)|^2 \rangle = F(\Delta a)$, а интеграл по $Z(da)$ имеет тот же смысл, что и интеграл (2.58) по $Z(d\omega)$. Более того, с помощью несложного искусственного приема можно показать, что возможность аппроксимации функций $\chi_{\Delta a}(a)$ линейными комбинациями функций $\Psi(t_k, a)$ вовсе не необходима для справедливости разложения (П. 31)*, так что из *представимости корреляционной функции* $B(t, s)$ в виде (П. 29) *всегда следует возможность представления самой функции* $X(t)$ в виде (П. 31) (где, однако, значения случайной меры $Z(\Delta a)$ могут, вообще говоря, не принадлежать пространству H_X). Выделенное курсивом предложение, принадлежащее Карунену [280] (см. также [232]), составляет содержание теоремы об обобщенном спектральном разложении случайных функций; множество A здесь может быть также и дискретным, и тогда интегралы в правых частях (П. 29) и (П. 31) обращаются в обычные суммы (одно применение этого частного случая общей теоремы уже упоминалось в примечании ⁵⁷).

⁷² Как известно, первый ставший известным пример нигде не дифференцируемой функции был построен немецким математиком Вейерштрассом в 70-х гг. прошлого столетия**. Этот пример вначале вызвал всеобщее недоумение; многие математики в течение ряда лет продолжали настаивать на том, что он неверен, а другие отказывались признавать за нигде не дифференцируемыми функциями право называться функциями. Постепенно, однако, математики привыкли к тому, что нигде не дифференцируемые функции действительно существуют, но физики еще долго не хотели с этим соглашаться и воспринимали такие функции как уродливые порождения математической фантазии, не имеющие отношения к реальному миру (т. е. исходили из принципа, что «в физике все функции дифференцируемы»). По-видимому, впервые в физике нигде не дифференцируемые функции появились в теории брауновского движения, когда Винер доказал, что в теории Эйнштейна — Смолуховского траектория брауновской частицы с вероятностью единица оказывается нигде не дифференцируемой. В этом случае, однако, можно было считать, что недифференцируемость —

* А именно, если комбинациями функций $\Psi(t_k, a)$ нельзя аппроксимировать все функции $\chi_{\Delta a}(a)$, то наряду с $X(t)$ привлекается еще вспомогательная некоррелированная с $X(t)$ функция $Y(r)$ на каком-то новом множестве R — чек r такая, что $\langle Y(r) \rangle = 0$, а $\langle Y(r) \overline{Y(r_1)} \rangle = \int_A \Psi_1(r, a) \overline{\Psi_1(r_1, a)} F(da)$,

где $\int_A \Psi_1(r, a) \overline{\Psi(t, a)} F(da) = 0$ при всех $r \in R$ и $t \in T$, но комбинациями

вида $\sum_k c_k \Psi(t_k, a) + \sum_j d_j \Psi_1(r_j, a)$ уже можно сколь угодно точно прибли-

зить все $\chi_{\Delta a}(a)$. Нетрудно показать, что такая функция $Y(r)$ всегда существует, после чего доказательство существования обобщенного спектрального разложения можно приложить к заданной на $T + R$ случайной функции, принимающей значения $X(t)$ на T и $Y(r)$ на R .

** Впоследствии выяснилось, что аналогичный пример содержался также в работе, написанной чешским математиком Больцано не позже 1830 г. (но опубликованной лишь в 1930 г.); для нас здесь, однако, это не имеет значения.

следствие недопустимой идеализации в постановке задачи (так как в более точной теории Уленбека и Орнштейна, учитывающей инерцию брауновских частиц, их траектории уже оказывались дифференцируемыми — см. в частности, примечание ⁹⁷ на с. 252). Но в спектральной теории стационарных случайных процессов нигде не дифференцируемые функции $Z(\omega)$ возникают уже совершенно естественным образом и избавиться от них здесь возможно лишь отказавшись от имеющего ясный физический смысл условия стационарности, только и делающего рассматриваемую теорию простой и наглядной.

Отметим еще, что в последние годы было высказано также мнение, что нигде не дифференцируемые функции на самом деле могут служить прекрасными моделями широкого круга явлений реального мира (см. [297]).

⁷³ Напомним, что теорема Слуцкого относится к вещественным процессам, для которых $b(-\tau) = b(\tau)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T b(\tau) d\tau &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T b(\tau) d\tau = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\omega} dF(\omega) d\tau = \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iT\omega} - e^{-iT\omega}}{i\omega} dF(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_T(\omega) dF(\omega), \end{aligned}$$

где $\varphi_T(\omega) = \sin \omega T / \omega T$, так что $\varphi_T(0) = 1$, $|\varphi_T(\omega)| \leq 1$ при всех ω и T и $|\varphi_T(\omega)| \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$, если только $\omega \neq 0$. Воспользуемся тем, что $\Delta F(0) = \lim_{h \rightarrow 0} [F(h) - F(-h)]$, где $F(h) - F(-h)$ — монотонно неубывающая функция h .

Выберем h так, что $F(h) - F(-h) < \Delta F(0) + \varepsilon$, и положим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_T(\omega) dF(\omega) &= \int_{-\infty}^{-h} \varphi_T(\omega) dF(\omega) + \int_{-h}^h \varphi_T(\omega) dF(\omega) + \\ &+ \int_h^{\infty} \varphi_T(\omega) dF(\omega) = I_T^{(1)} + I_T^{(2)} + I_T^{(3)}. \end{aligned}$$

Ясно, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $T_0 = T_0(\varepsilon, h)$ такое, что $|\varphi_T(\omega)| < \varepsilon$ при $T > T_0$ и $|\omega| > h$; поскольку $\int_{-\infty}^{-h} dF(\omega) \leq b(0)$ и $\int_h^{\infty} dF(\omega) \leq b(0)$, то, значит, $I_T^{(1)} \rightarrow 0$ и $I_T^{(3)} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Далее, $I_T^{(2)} \leq F(h) + F(-h) \leq \Delta F(0) + \varepsilon$, так как $\varphi_T(\omega) \leq 1$. С другой стороны, при любых T и h существует такое $h_T < h$, что $\varphi_T(\omega) > 1 - \varepsilon$ при $|\omega| < h_T$ и, значит, $I_T^{(2)} > (1 - \varepsilon) [F(h_T) - F(-h_T)] \geq (1 - \varepsilon) \Delta F(0)$. Отсюда ясно, что $I_T^{(2)} \rightarrow \Delta F(0)$ при $T \rightarrow \infty$.

Аналогичным образом можно доказать, что

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X(t) dt \rightarrow \Delta Z(0) \text{ при } T \rightarrow \infty, \quad (\text{П.32})$$

где $\Delta Z(0)$ — скачок в нуле случайной функции $Z(\omega)$, входящий в спектральное разложение самого процесса $X(t)$ (именно $X(t)$, а не $\tilde{X}(t) = X(t) - \langle X(t) \rangle$).

где $G(k)$ — монотонно невозрастающая функция на полупрямой $0 \leq k < \infty$. Отсюда уже автоматически вытекает, что все функции вида (П. 34) при любом $n = 0, 1, 2, \dots$ являются корреляционными функциями стационарных процессов. В случае, когда функция $G(k)$ скачком возрастает в точке $k = \alpha$, а на отрезке $0 \leq k < \alpha$ и полупрямой $\alpha < k < \infty$ принимает постоянные значения, общая функция (П. 34) обращается в (2.128).

⁸⁶ Модель (2.129) корреляционной функции $B(\tau)$ обладает тем ценным свойством, что соответствующая спектральная плотность $f(\omega)$ при $\omega \gg \alpha$ ведет себя как степенная функция частоты (а именно, $f(\omega) \sim \omega^{-(2\nu+1)}$ при $\omega \gg \alpha$). Поэтому такая модель удобна для описания флуктуаций $X(t)$, имеющих степенную спектральную плотность на широком интервале значений частоты ω .

Степенные спектральные плотности играют важную роль в теории шумов в электронных лампах и полупроводниках (см., например, [29, 30, 85]); в применении к такого рода шумам формулы (2.129) и (2.130) использовались, в частности, Блан-Лапьером (см. [252, с. 453]). В теории турбулентности особенно важную роль играет случай степенной спектральной плотности, отвечающей показателю степени $-5/3$ [147, гл. 8]. Предложение об использовании формулы вида (2.129) с $\nu = 1/3$ для описания корреляционной функции турбулентных пульсаций скорости было выдвинуто Карманом в 1948 г., после чего оно многократно принималось и другими авторами; в связи с этим формулы (2.129) и (2.130) упоминаются, в частности, в [212, с. 233] и [147, ч. 2, с. 13]. То, что корреляционной функции (2.129) отвечает спектральная плотность (2.130), вытекает, в частности, из формулы 3.771.2 в [64].

^{86a} См. в первую очередь обширные таблицы характеристических функций [149a].

⁸⁷ См., например, книги [26, 90], посвященные теории линейных систем. Заметим еще, что содержание имеющихся многочисленных математических монографий по теории линейных операторов (типа [12]), как правило, вовсе не пересекается с содержанием настоящей книги.

⁸⁸ В случае физически реализуемого преобразования $\mathcal{L}$ функция $H(\omega)$ задается равенством: $H(\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega u} h(u) du$. Но функция $e^{-i\omega u}$ быстро зату-

хает при $u \rightarrow \infty$ для всех комплексных ω с $\operatorname{Re} \omega < 0$ (т. е. принадлежащих нижней полуплоскости плоскости комплексного переменного). Поэтому если интеграл, определяющий $H(\omega)$, имеет смысл при всех вещественных ω , то он тем более будет иметь смысл и при всех комплексных ω с $\operatorname{Re} \omega < 0$, причем нетрудно видеть, что в окрестности каждой такой комплексной точки ω он будет представлять собой аналитическую функцию ω . Следовательно, класс передаточных функций $H(\omega)$ физически реализуемых преобразований $\mathcal{L}$ можно определить как класс функций $H(\omega)$ вещественного переменного ω , являющихся граничными значениями на вещественной оси функций $H(\omega)$ комплексного переменного, аналитических в нижней полуплоскости.

Особенно просто можно охарактеризовать класс коэффициентов усиления $A(\omega) = |H(\omega)|$ физически реализуемых линейных преобразований $\mathcal{L}$. В силу одной теоремы Винера и Пэли [42, с. 32] функция $A(\omega)$ такая, что интеграл от $|A(\omega)|^2$ в пределах от $-\infty$ до ∞ конечен, может являться коэффициентом усиления физически реализуемого линейного преобразования $\mathcal{L}$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\lg A(\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega < \infty. \quad (\text{П.35})$$

⁸⁹ По поводу теории электрических фильтров см., например, [191, 216]. Примеры механических и акустических фильтров могут быть найдены, например, в [151].

Отметим, что идеальные фильтры, для которых $A(\omega) = 0$ вне определенной полосы пропускания наверное не могут удовлетворять условию (П. 35) и, значит, не могут быть физически реализуемыми. Этот факт следует и из того, что в силу (2.152) идеальный полосовой фильтр, для которого $H(\omega) = 1$ при $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ и $H(\omega) = 0$ при всех других ω , можно представить формулой

$$\mathcal{L}\{X(t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega_2 u} - e^{i\omega_1 u}}{iu} X(t-u) du. \quad (\text{П.36})$$

На практике, однако, вместо (П. 36) обычно можно использовать физически реализуемый фильтр вида

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T\{X(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\omega_2(u-T)} - e^{i\omega_1(u-T)}}{i(u-T)} X(t-u) du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{\infty} \frac{e^{i\omega_2 u'} - e^{i\omega_1 u'}}{iu'} X(t+T-u') du'. \end{aligned} \quad (\text{П.37})$$

Выбрав T достаточно большим, можно добиться, чтобы применение фильтра (П. 37) к процессу $X(t)$ приводило к результату, сколь угодно мало отличающемуся от того, который получается при применении фильтра (П. 36) к «сдвинутому во времени» процессу $X(t+T)$, а такой сдвиг во времени, разумеется, не может играть никакой роли.

Фильтры (П. 36) и (П. 37) имеют комплексную весовую функцию; поэтому на практике удобнее под идеальным полосовым фильтром понимать фильтр, для которого $H(\omega) = 1$ при $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ или $-\omega_2 \leq \omega \leq -\omega_1$ и $H(\omega) = 0$ при всех других ω . Формула (П. 36) в этом случае заменится формулой

$$\mathcal{L}\{X(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega_2 u - \sin \omega_1 u}{u} X(t-u) du; \quad (\text{П.36a})$$

аналогично изменяется и формула (П. 37).

⁹⁰ Для возможности применения электрических фильтров к турбулентным пульсациям скорости, надо как-то преобразовать эти пульсации в пульсации электрического тока. Такое преобразование обычно осуществляется с помощью термоанемометра — прибора, основной частью которого является тонкая проволока, по которой пропускается электрический ток. Изменение скорости обтекающего проволоку потока приводит к изменению теплоотдачи проволоки, а следовательно, и ее температуры и зависящего от температуры сопротивления; изменение же сопротивления приводит к изменению силы тока (см., например, [27, 212]).

⁹¹ Более подробное изложение указанного доказательства, не предполагающее, в частности, что функция $B(\tau)$ обязательно быстро убывает на бесконечности, см. в статье [251].

⁹² Намеченное здесь доказательство теоремы о спектральном разложении стационарных случайных процессов было предложено в 1946 г. Блан-Лапьером и Форте (см., например, [252, гл. VIII]).

⁹³ См., например, описание измерений мелкомасштабных спектров турбулентных пульсаций в [1]; ср. также работу [308], специально посвященную геофизическим применениям преобразований (2.171) и (2.171a).

⁹⁴ Применениям теории стационарных случайных процессов к анализу работы измерительных приборов посвящена, в частности, книга [148] (см. также [129, § 22]. Анализу с этой точки зрения работы тех или иных конкретных измерительных приборов посвящена огромная литература (в качестве примеров, относящихся к метеорологическим приборам, укажем на [228], [49, гл. III], [87, гл. II], где можно найти много дополнительных ссылок).

⁹⁵ Воспользовавшись известной теоремой о вычетах теории функций комплексного переменного, легко показать, что если многочлен $P(i\omega)$ не имеет корней, расположенных в нижней полуплоскости комплексного переменного ω ,

то $h(u) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega u} [P(i\omega)]^{-1} d\omega$ будет равняться нулю при $u < 0$ и рав-

няться умноженной на i сумме вычетов функции $e^{i\omega u}/P(i\omega)$ в ее полюсах при $u > 0$. Отсюда легко выводится, что в рассматриваемом случае $h(u)$ экспоненциально затухает при $u \rightarrow \infty$. При этом все частные решения однородного уравнения, отвечающего неоднородному уравнению (2.177), будут здесь затухать при $t \rightarrow \infty$, а $h(u)$ будет совпадать с функцией Грина указанного уравнения; отсюда и следует, что решение задачи с начальными значениями в момент t_0 при $t_0 \rightarrow -\infty$ будет стремиться к решению (2.180а).

⁹⁶ Запись уравнения (2.181а) в виде

$$dY(t) + aY(t)dt = dW(t) \quad (\text{П.38})$$

использовалась, в частности, в [263]. Проинтегрировав все члены этого уравнения, получим простейшее стохастическое интегральное уравнение того типа, который очень часто используется в современной теории вероятностей для задания широких классов случайных процессов (см., например, [58, т. III, гл. II, III]). С другой стороны, если мы сначала умножим все члены уравнения (П. 38) на произвольную достаточно гладкую и быстро затухающую на бесконечности функцию $f(t)$ и только после этого проинтегрируем полученное уравнение, то придем к интегральному уравнению, использовавшемуся в [83, 264, 265] и на самом деле близко примыкающему к наиболее современному пониманию уравнения (2.181а) как уравнения, относящегося к обобщенным случайным процессам (ср. примечание ⁷⁶ на с. 248).

⁹⁷ По поводу уравнения Ланжевена и его приложений см., например, [83, 129, 143, 181, 221]. Отметим еще, что в первой теории брауновского движения, развитой Эйнштейном и Смолуховским, масса m брауновской частицы считалась настолько малой, что инерцией (т. е. слагаемым mdY/dt в уравнении ее движения) можно просто пренебречь. При этом условии скорость частицы $Y(t)$, очевидно, оказывается пропорциональной «чисто случайной» силе $X_1(t)$ (т. е. также представляет собой белый шум), а соответствующая координата $W(t)$ описывается формулой вида (2.184б). Математически аккуратно такая теория брауновского движения была изучена Винером (см. примечание ⁹⁰), в связи с чем гауссовский процесс $W(t)$ вида (2.184б) обычно называется процессом брауновского движения или винеровским случайным процессом. Уточненная теория брауновского движения, в которой учитывается также и слагаемое mdY/dt уравнения движения и поэтому скорость брауновской частицы уже представляет собой обыкновенный случайный процесс с конечной дисперсией, но не существует конечного ускорения такой частицы (ибо процесс $Y(t)$ очевидно недифференцируем), была подробно изучена в 1930 г. Уленбеком и Орнштейном (ср. [221, 263]). По этой причине гауссовский стационарный случайный процесс $Y(t)$, имеющий корреляционную функцию вида (2.89) и спектральную плотность вида (2.90), часто называется процессом Орнштейна — Уленбека.

⁹⁸ Общие процессы с рациональной спектральной плотностью могут быть получены, например, как стационарные решения идеализированных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{d^n Y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} Y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_n Y(t) = \\ = c \left[\frac{d^m E(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} E(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m E(t) \right], \quad (\text{П.39}) \end{aligned}$$

где $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, c$ — постоянные коэффициенты, или как решения родственных (П. 39) систем линейных уравнений первого порядка с независимыми «процессами белого шума» в правых частях. По поводу задач, приводящих к таким уравнениям и системам уравнений, см., например, [134, 171, 196, 265]. Так как подобные уравнения и системы уравнений очень часто встречаются в приложениях, то отсюда вытекает большая практическая важность стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью.

⁹⁹ Доказательство теоремы Герглоца можно найти, например, в [83, гл. 10, § 3] или [136, § 14.1]. К выводу формулы (2.196) для корреляционной функции стационарной последовательности эта теорема впервые была приложена Волдом [334].

¹⁰⁰ Теорема о спектральном разложении стационарных случайных последовательностей впервые была доказана (в немногих других терминах) Колмогоровым [107] (см. также [32, 57, 58, 83, 175]). Намеченное на с. 243—245 доказательство теоремы о спектральном разложении стационарных процессов очевидно переносится на случай стационарных последовательностей почти без всяких изменений (только вместо рассмотрения гильбертова пространства $L_2(F) = L_2(F; -\infty, \infty)$ функций $\varphi(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, с интегрируемым по $dF(\lambda)$ квадратом модуля теперь надо рассмотреть пространство $L_2(F; -\pi, \pi)$ функций $\varphi(\lambda)$, заданных на интервале $-\pi \leq \lambda \leq \pi$). Можно также вместо этого сразу применить сформулированную на с. 246 теорему об обобщенном спектральном разложении случайных функций, в силу которой возможность спектрального разложения (2.194) непосредственно вытекает из справедливости формулы (2.196) для $B(\tau)$. Аналогичное формуле (П. 22) явное выражение функции $Z(\omega)$ через значения $X(t)$ в случае дискретного t имеет следующий вид:

$$Z(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \omega X(0) - \sum_{t \neq 0} \frac{e^{-i\omega t}}{it} X(t) \right\}. \quad (\text{П.40})$$

¹⁰¹ Для доказательства сделанного здесь утверждения надо подставить в левую часть (2.201) спектральное разложение (2.196) функции $B(\tau)$. После этого с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые изложены в примечании ⁷³ в приложении к случаю непрерывного t и $\omega_k = 0$, нетрудно доказать, что соответствующий предел равен скачку функции $F(\omega)$ в точке ω_k .

¹⁰² Математикам, изучавшим коэффициенты Фурье вида (2.196), формула (2.205) была известна уже в начале 20-х гг. (ее доказательство можно найти, например, в [83, гл. 10, § 3]).

¹⁰³ Формулы вида (2.215а) впервые были указаны (в применении к случаю вещественного $X(t)$ и вещественной формы спектральных разложений функций $B(\tau)$ и $B_\Delta(\tau)$ Волдом) [334, с. 70]; их важность для задачи оценки спектра непрерывного процесса по данным наблюдений в дискретные моменты времени была подчеркнута Блэкманом и Тьюки [249]. Обсуждение значения указанных формул для геофизических наблюдений содержится, в частности, в [183]. Небольшое уточнение приведенного на с. 168—169 вывода формул (2.215а) изложено в [317].

Отметим еще, что соотношение $f_{\Delta}(\omega) = \Delta^{-1} \sum_k f((\omega + 2\pi k)/\Delta)$ очень близко к формуле, выведенной Пуассоном еще в начале XIX в. В самом деле, пусть $\Delta = 1$, а процесс $X(t)$, $-\infty < t < \infty$, имеет спектральную плотность $f(\omega)$. В таком случае в силу (2.203) указанное соотношение можно переписать в виде

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\omega + 2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega'\tau} f(\omega') d\omega'. \quad (\text{П.41})$$

Но равенство (П. 41) (где, как это следует из хода рассуждений, приведших нас к этому равенству, можно даже не требовать, чтобы функция $f(\omega)$ была строго неотрицательна) представляет собой не что иное, как одну из форм известной формулы суммирования Пуассона [124, гл. II, § 5] (ср. также [24, § 10]).

¹⁰⁴ Для обыкновенных (не случайных) функций $X(t)$, задаваемых интегралом Фурье, распространенным по конечной полосе частот $-\pi/\Delta < \omega < \pi/\Delta$, формула вида (2.218) была получена Уиттекером в 1915 г. (впрочем, близкий результат был известен Коши еще в середине прошлого столетия; см. [79]). Независимо от работ математиков эта формула была выведена (также для обыкновенных функций) в 1933 г. Котельниковым [116], впервые подчеркнувшим ее большое значение для техники связи (см., например, [207, § 14] или [131, кн. 1, приложение VI]); позже к тому же заключению независимо от Котельникова пришел также Шеннон [222, с. 295 и 435], которому формула (2.218) часто приписывается в зарубежных работах. Обсуждение формулы (2.218) и различных ее обобщений, относящихся к числовым (неслучайным) функциям, может быть найдено, например, в [217, гл. III] и в обзорной статье [79], содержащей обширную библиографию.

В применении к стационарным случайным процессам задача о наилучшем приближении к значению $X(t)$ (где t — любое) при помощи линейной комбина-

ции $X^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(t) X(k\Delta)$ значений $X(k\Delta) = X_{\Delta}(k)$ рассматривалась авто-

ром [226], нашедшим общее необходимое и достаточное условие существования при всех t такой комбинации $X^*(t)$, что $\sigma_{\Delta}^2(t) = \langle |X(t) - X^*(t)|^2 \rangle = 0$. Из этого условия, в частности, следует, что $\sigma^2(t) \equiv 0$, если не существует двух точек спектра процесса $X(t)$, расстояние между которыми кратно $2\pi/\Delta$, т. е., например, если спектр $X(t)$ весь расположен внутри отрезка $-\pi/\Delta < \omega < \pi/\Delta$, или даже если он сосредоточен на замкнутом интервале $-\pi/\Delta \leq \omega \leq \pi/\Delta$, хоть один конец которого не является точкой разрыва $F(\omega)$. Из результатов [226] вытекает также, что для таких процессов $X(t)$ со спектром, сосредоточенным на $[-\pi/\Delta, \pi/\Delta]$, будет справедлива формула (2.218), где бесконечная сумма понимается как предел в среднем квадратичном (см., например, [231, § 18] или работу [291], в которой используются аналогичные соображения). Однако первое опубликованное доказательство формулы (2.218) для стационарных процессов $X(t)$ принадлежит Балакришнану [241], предположившему, что спектр $X(t)$ сосредоточен на интервале $-\pi/\Delta \leq \omega \leq \pi/\Delta$, оба конца которого не являясь точками разрыва $F(\omega)$. Очень простое доказательство формулы (2.218), намеченное на с. 171—172 этой книги, аккуратно изложено (при тех же ограничениях, которые принимались в [241]) в [175, гл. 1, § 6] (см. также [57, с. 272] и [58, т. 1, с. 296]). Еще одно доказательство той же формулы (относящееся к несколько более частному случаю, когда спектр $X(t)$ сосредоточен на интервале, лежащем внутри отрезка $-\pi/\Delta < \omega < \pi/\Delta$, но зато интерпретирующее сходимость в правой части (2.218) как сходимость с вероятностью единица) намечено в [217, § 6.1] (см. также [79]).

¹⁰⁵ Если коэффициенты h_k не удовлетворяют условиям (2.226), но удовлетворяют (2.225), то разложение (2.227) функции $H(\omega)$ в ряд Фурье должно

пониматься в некотором специальном смысле; для приложений, однако, это неважно, так как преобразования $\mathcal{L}$, задаваемые весовой последовательностью, не удовлетворяющей (2.226), в прикладных задачах никогда не встречаются. Наоборот, с преобразованиями, вообще не задаваемыми весовой последовательностью, иногда приходится иметь дело; так, например, еще в [104] фактически встретилось преобразование последовательности вида $X(t) = [E(t) + E(t-1)]/\sqrt{2}$ (ср. формулу (2.2)), имеющее передаточную функцию $H(\omega) = (1 - e^{-i\omega})^{-1}$. Следуя предложению Хеннана [211, с. 150] такое преобразование можно представить в виде

$$\mathcal{L}\{X(t)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n (1 - j/n) X(t - j), \quad (\text{П.42})$$

однако, в виде (2.224) оно никак не может быть записано.

¹⁰⁶ Цифровым фильтрам (и линейным, и нелинейным) посвящена огромная литература (мы здесь укажем лишь на книги [31, 35, 61, 62, 172, 220]). Много внимания цифровым фильтрам уделено в предназначенной для метеорологов книге [162], в которой специально разбирается частный класс так называемых регрессионных фильтров, широко применяемых при обработке рядов наблюдений в случаях, когда есть основание считать, что общий ход (тренд) рассматриваемого ряда описывается полиномиальной формулой, а отклонения от этого тренда (помехи) представляют собой независимые случайные величины (см., например, [101, гл. 46] или [9, § 3.3]).

¹⁰⁷ Ограничиваясь для простоты преобразованиями вида (2.224) (на самом деле это ограничение не является необходимым), найдем, что в случае физически реализуемого преобразования $\mathcal{L}$ функция $H(\omega)$ представляет собой граничное значение на единичной окружности $z = e^{i\omega}$, $-\pi \leq \omega \leq \pi$, функции $H(z) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j z^j$, аналитической в единичном круге. Воспользовавшись теорией таких граничных значений (см., например, [166]), нетрудно доказать, что класс коэффициентов усиления $A(\omega)$ физически реализуемых дискретных линейных преобразований $\mathcal{L}$ совпадает с классом функций, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\lg A(\omega)| d\omega < \infty \quad (\text{П.43})$$

(см. также [107], где условие (П. 43) для модуля граничного значения функции, аналитической в единичном круге, выведено совсем в другой связи).

¹⁰⁸ См. литературу о цифровых фильтрах, указанную в примечании ¹⁰⁶. Возможность подбора фильтра $\mathcal{L}$ вида (2.241), аппроксимирующего сколь угодно точно идеальный полосовой фильтр с произвольно узкой полосой пропускания, объясняет старый результат Слуцкого (см., например, [189, с. 99]), задолго до появления спектральной теории показавшего, что, применяя к последовательности некоррелированных случайных величин много раз подряд несложную операцию скользящего суммирования с конечным числом специально подобранных ненулевых весовых коэффициентов h_j , можно получить новую последовательность, значения которой на протяжении заданного конечного интервала времени будут со сколь угодно близкой к единице вероятностью сколь угодно мало отличаться от значений некоторой синусоиды фиксированной частоты ω (см. также [101, § 47.15]).

Эта предельная синусоидальная теорема Слуцкого (обобщенная затем Романовским; ср. [101, с. 571]) в свое время сыграла существенную роль, способствуя разъяснению того, что наличие спектра, имеющего острый пик, вовсе не указывает еще на обязательное возникновение изучаемого процесса из какого-то

реального периодического колебания. После того как было доказано, что наличие спектра на самом деле является просто автоматическим следствием статистической стационарности, с помощью возникшей отсюда спектральной теории стационарных случайных функций удалось очень просто доказать старые результаты Слуцкого и Романовского и получить также ряд новых утверждений, развивающих и дополняющих эти результаты (см., например, [300]).

¹⁰⁹ Приведенный вывод формулы (2.253), разумеется, эквивалентен ее получению с помощью использования формулы суммирования Пуассона (П. 41). В несколько иной записи эта формула приведена, в частности, в известном справочнике Джолли [278, с. 176—177].

¹¹⁰ Доказательство представимости общей рациональной относительно $e^{i\omega}$ спектральной плотности $f(\omega)$ в виде (2.257) близко к получению родственной формулы (2.122) для общей рациональной относительно ω спектральной плотности стационарного случайного процесса, описанному на с. 128—129 (см., например, [83, гл. X, § 10], [175, гл. I, § 10] или [227, с. 95—96]). Вообще стационарные случайные последовательности со спектральной плотностью вида (2.257) во многом аналогичны стационарным случайным процессам с рациональной спектральной плотностью вида (2.122); в частности, они обладают теми же важными специальными свойствами, о которых, в применении к стационарным процессам, говорилось в примечании ⁸¹, и для них также особенно просто решаются многие важные статистические задачи (см., например, [83, 175, 227, 264, 333], а также [21], где рассматривается класс не обязательно стационарных случайных последовательностей $X(t)$, немного более общий, чем класс стационарных последовательностей с рациональной относительно $e^{i\omega}$ спектральной плотностью).

¹¹¹ В качестве немногих типичных примеров достаточно упомянуть [254], [68] (приложения к экономике), [123] (приложения к исследованию морского волнения) и [245] (приложения к сейсмологии и другим разделам геофизики).

¹¹² Этой задаче и примыкающим к ней вопросам посвящены, в частности, книги [72, 73, 78, 112, 126, 249, 287], большие разделы в книгах [9, 14, 16, 39, 40, 96, 101, 114, 118, 144, 177, 187, 210, 211, 256, 272, 311] и огромное количество статей, лишь небольшая часть из которых будет упомянута ниже.

¹¹³ Примем, что в формуле для $B_T^{**}(\tau_1 - \tau_2)$, указанной в примечании ⁶¹, $\tau_1 = \tau$, $\tau_2 = 0$, и подставим полученное выражение для $B_T^{**}(\tau)$ в правую часть формулы (2.260), в которой пределы интегрирования заменим на $-\infty$ и ∞ (это законно, так как $B_T^{**}(\tau) = 0$ при $|\tau| \geq T$). В таком случае, воспользовавшись равенством $e^{-i\omega\tau} = e^{-i\omega(t+\tau)}e^{i\omega t}$, сразу получим формулу (2.261). Вывод формулы (2.261) отличается от вывода формулы (2.260) лишь тем, что все интегрирования по dt теперь надо заменить суммированиями по целым значениям t .

¹¹⁴ Осреднив обе части равенства (2.260), где $i_T(\omega)$ теперь надо заменить на $I_T(\omega)$, а под $B_T^{**}(\tau)$ понимать соответствующую случайную «теоретическую оценку», а затем подставив в правую часть получившегося равенства $(T - |\tau|) B(\tau)/T$ вместо $\langle B_T^{**}(\tau) \rangle$ и спектральное разложение (2.67) вместо $B(\tau)$, получим

$$\langle I_T(\omega) \rangle = \frac{1}{2\pi T} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} (T - |\tau|) e^{-i(\omega - \omega')\tau} f(\omega') d\omega' d\tau.$$

Выполнив здесь интегрирование по $d\tau$, приходим к результату (2.263). Тот же результат нетрудно получить, осреднив обе части формулы (2.261б) и воспользовавшись затем формулами (1.47) и (2.67); при этом удобно пределы интегрирования 0 и T в правой части (2.261б) заменить на $-T/2$ и $T/2$ (что законно в силу стационарности $X(t)$). Совершенно аналогично доказывается и формула (2.263а).

Переходя к доказательству формулы (2.264), воспользуемся тем, что при вычислении моментов величины $I_T(\omega)$ эту величину можно заменить на $J_1^2(\omega) +$

$$+ J_2^2(\omega), \quad \text{где} \quad J_1(\omega) = (2\pi T)^{-1/2} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \omega t X(t) dt \quad \text{и} \quad J_2(\omega) = \\ = (2\pi T)^{-1/2} \int_{-T/2}^{T/2} \sin \omega t X(t) dt - \text{гауссовские случайные величины с нулевыми}$$

средними значениями. Приложив формулу (П. 14) к вычислению моментов $\langle J_i^2(\omega_1) J_j^2(\omega_2) \rangle$, где $i = 1, 2$ и $j = 1, 2$, и воспользовавшись тем, что $\langle J_1(\omega_1) J_2(\omega_2) \rangle = \langle J_2(\omega_1) J_1(\omega_2) \rangle = 0$ (так как подынтегральные функции в правых частях соответствующих формул (1.48) здесь оказываются нечетными функциями двух переменных), найдем, что

$$\begin{aligned} b_I(\omega_1, \omega_2) &= 2[\langle J_1(\omega_1) J_1(\omega_2) \rangle]^2 + 2[\langle J_2(\omega_1) J_2(\omega_2) \rangle]^2 = \\ &= [\langle J_1(\omega_1) J_1(\omega_2) + J_2(\omega_1) J_2(\omega_2) \rangle]^2 + \\ &+ [\langle J_1(\omega_1) J_1(\omega_2) - J_2(\omega_1) J_2(\omega_2) \rangle]^2 = \\ &= \left[\frac{1}{2\pi T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_1 t - \omega_2 t') B(t - t') dt dt' \right]^2 + \\ &+ \left[\frac{1}{2\pi T} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega_1 t + \omega_2 t') B(t - t') dt dt' \right]^2. \end{aligned}$$

Заменив в правой части последнего равенства корреляционную функцию $B(t - t')$ ее спектральным разложением (2.67) и выполнив интегрирование по t и по t' , приходим к формуле (2.264). Формула для $b_I(\omega_1, \omega_2)$ при дискретном t выводится совершенно аналогично.

Интеграл от квадрата функции $g(x) = \left(\frac{2}{\pi T}\right)^{1/2} \frac{\sin(Tx/2)}{x}$, несколько раз фигурирующей в правой части (2.264), равен единице, а сама функция $g^2(x)$ является четной и при $T \rightarrow \infty$ стремится к δ -функции $\delta(x)$. График функции $g(x)$ при очень большом T имеет острый максимум в точке $x = 0$ (где достигается значение $g(0) = (T/2\pi)^{1/2}$), по обе стороны от которого функция $g(x)$ быстро убывает; в точках $x = \pm\pi/T$ она обращается в нуль, а при дальнейшем возрастании $|x|$ принимает уже относительно малые (по сравнению с главным максимумом) по абсолютной величине значения, колеблясь около нуля. Аналогично ведет себя и функция $g_1(x) = (x/2) g(x) (\sin x/2)^{-1}$, возникающая в случае, когда речь идет о последовательностях $X(t)$ (т. е. о дискретном t), с той лишь разницей, что здесь равен единице интеграл от $g_1^2(x)$ в пределах от $-\pi$ до π , а сама функция $g_1(x)$ — периодическая с периодом 2π . Отсюда легко вытекают соотношения (2.265) (и его аналог для случая дискретного t) и (2.266).

Более того, форма функций $g(x)$ (и $g_1(x)$), входящих в выражение для $b_I(\omega_1, \omega_2)$, показывает, что корреляция между значениями $I_T(\omega_1)$ и $I_T(\omega_2)$ при больших (но конечных) значениях T практически исчезает уже на расстоянии $|\omega_2 - \omega_1|$ порядка нескольких отрезков длины $1/T$. Тот же вывод можно

сделать, воспользовавшись следующей упрощенной асимптотической формулой для $b_I(\omega_1, \omega_2)$, справедливой при больших значениях T :

$$b_I(\omega_1, \omega_2) \approx \left\{ \left(\frac{\sin[T(\omega_2 - \omega_1)/2]}{T(\omega_2 - \omega_1)/2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\sin[T(\omega_2 + \omega_1)/2]}{T(\omega_2 + \omega_1)/2} \right)^2 \right\} f(\omega_1) f(\omega_2) \quad (\text{П. 44})$$

(в случае дискретного t здесь следует заменить выражения $(\omega_2 - \omega_1)/2$ и $(\omega_2 + \omega_1)/2$ в знаменателях правой части на $\sin[(\omega_2 - \omega_1)/2]$ и $\sin[(\omega_2 + \omega_1)/2]$ соответственно; moreover, при очень малых $|\omega_2 - \omega_1|$ или $|\omega_2 + \omega_1|$, при которых формула (П. 44) наиболее интересна, эта замена малосущественна). Вывод формулы (П. 44) на инженерном уровне строгости приведен в [78, гл. 6 и 9] (ср. также [72, 73]); более аккуратный вывод того же результата (для случая дискретного t) может быть получен, в частности, на основе формул, имеющих в [210, § III.1], [211, гл. V, § 2] и [256, § 5.2]. Формула (П. 44) заметно проще, чем (2.264), описывает закон убывания функции $b_I(\omega_1, \omega_2)$ при возрастании $|\omega_2 - \omega_1|$, кроме того, она показывает, что корреляция между $I_T(\omega_1)$ и $I_T(\omega_2)$ при большом T оказывается особенно малой, если $|T(\omega_2 - \omega_1)/2\pi|$ и $T(\omega_2 + \omega_1)/2\pi$ оба оказываются целыми числами (например, в случае, когда $\omega_1 = 2\pi n_1/T$, $\omega_2 = 2\pi n_2/T$, где n_1 и n_2 целые).

Из формулы (2.262) видно, что при $\omega = 0$ (а в случае дискретного t при $\omega = 0$ и $\omega = \pm\pi$) величина $I_T(\omega)$ представляет собой квадрат нормально распределенной случайной величины J_1 с нулевым средним значением, т. е., иначе говоря, имеет распределение χ_1^2 (напомним, что в теории вероятностей символ χ_n^2 всегда обозначает «хи-квадрат распределение с n степенями свободы»). При всех других значениях ω величина $I_T(\omega)$ равна сумме квадратов двух нормально распределенных величин J_1 и J_2 с нулевым средним значением, причем при больших значениях T эти величины, как легко видеть, будут практически некоррелированы (а, значит, и независимы) и будут иметь одинаковые дисперсии (так что $I_T(\omega)$ при больших значениях T имеет распределение χ_2^2). Отсюда, в частности, вытекает, что значения $I_T(\omega_1)$ и $I_T(\omega_2)$, где $\omega_1 \neq \omega_2$, при $T \rightarrow \infty$ становятся не только некоррелированными, но и взаимно независимыми (ибо для χ^2 -распределений, как и для нормальных распределений, из некоррелированности автоматически следует независимость).

До сих пор речь шла лишь о случае, когда функция $X(t)$ — гауссовская. Однако в приведенных выше рассуждениях на самом деле использовалось не само это обстоятельство, а лишь его следствие — то, что нормальное распределение имеют выписанные выше случайные величины $J_1(\omega)$ и $J_2(\omega)$ (где в случае дискретного t интегралы заменяются суммами). Но при больших значениях T случайные величины $J_1(\omega)$ и $J_2(\omega)$ вообще должны при очень широких условиях, налагаемых на $X(t)$, иметь близкое к нормальному распределение вероятностей (и одномерное, и двумерное) в силу общей центральной предельной теоремы для зависимых случайных величин (ср. примечание ²⁴).

Отсюда ясно, что рассматривавшиеся на с. 186—188 и в настоящем примечании результаты, касающиеся периодограммы $I_T(\omega)$, на самом деле должны выполняться и для очень многих негауссовских стационарных функций $X(t)$. И действительно, в [78, гл. 9], [210, § III.1], [211, гл. V], [9, гл. 8] и [256, гл. 5] могут быть найдены обобщения указанных результатов на несколько разных широких классов негауссовских стационарных функций $X(t)$ (как правило, лишь для случая дискретного t). Специально вопросу о статистических свойствах периодограммы $I_T(\omega)$ при большом T (также в предположении, что время дискретное) посвящена, в частности, работа [307].

¹¹⁵ Заметим, что, заменяя аргумент ω функции $i_T(\omega)$ (или $f(\omega)$) некоторой нелинейной функцией от ω , для сохранения площадей под графиком периодо-

граммы (или спектральной плотности) мы должны умножить значения i_T (или f) на значения еще одной функции от того же аргумента. При этом локальные максимумы получающейся функции уже не будут точно совпадать с локальными максимумами исходной функции $i_T(\omega)$ (или $f(\omega)$), откуда ясно, что в случае непрерывного спектра эти максимумы вообще имеют условный характер (зависят от выбора независимой переменной).

Детальный график периодограммы $i_T(\omega)$ ряда Бевериджа, рассматриваемой уже как функция частоты, может быть найден, в частности, в [101, рис. 49.1] и [9, рис. А.1.3]; он оказался еще заметно более изрезанным, чем кривая на рис. 19 а из-за значительно большего числа учитываемых значений аргумента. В тех же двух книгах, а также в книгах [78, 256] и в целом ряде других книг и журнальных статей (см., в частности, примечание ¹¹⁶ можно найти целый ряд дополнительных примеров периодограмм $i_T(\omega)$ стационарных временных рядов $x(t)$; все они оказываются крайне нерегулярными функциями частоты.

¹¹⁶ См. [162, с. 179]. В книгах [162, 163] и статьях [69, 70, 117, 141, 314] можно найти множество примеров эмпирических периодограмм $i_T(\omega)$ гидрометеорологических рядов наблюдений; все они по своему характеру не отличаются от периодограммы, изображенной на рис. 19 б.

¹¹⁷ Приведенные здесь соображения, по-видимому, впервые были намечены Даниелом в небольшом сообщении, присланном на состоявшийся в 1946 г. в Англии симпозиум по теории временных рядов; немного позже к ним независимо пришел также Тьюки. Метод построения состоятельной оценки спектральной плотности $f(\omega)$, опирающийся на разбиение имеющейся реализации $x(t)$ на ряд частей и вычисление среднего арифметического отвечающих этим частям периодограмм, был указан Бартлеттом в заметке, опубликованной в 1948 г. в журнале «Nature» (см. также [269, с. 70—73] и примечание ¹³⁰).

¹¹⁸ Термины «спектральное окно» (spectral window) и «корреляционное окно» (lag window, т. е. точнее «окно запаздывания»; этот термин также иногда используется в русской литературе) принадлежат Тьюки [249].

¹¹⁹ Если не претендовать на полную математическую строгость, то для гауссовских случайных функций $X(t)$ можно очень просто получить важную формулу (2.273), воспользовавшись формулой (1.48), формулой (П. 44) для $b_I(\omega_1, \omega_2)$, четностью $f(\omega)$ и тем, что $[2\sin^2(Tx/2)/\pi Tx^2 \rightarrow \delta(x)$ при $T \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} D\Phi_T^{(A)}(\omega) &= \iint A_T(\omega - \omega') A_T(\omega - \omega'') b_I(\omega', \omega'') d\omega' d\omega'' \approx \\ &\approx \iint A_T(\omega - \omega') A_T(\omega - \omega'') \left\{ \frac{4 \sin^2 [T(\omega' - \omega'')/2]}{T^2 (\omega' - \omega'')^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4 \sin^2 [T(\omega' + \omega'')/2]}{T^2 (\omega' + \omega'')^2} \right\} f(\omega') f(\omega'') d\omega' d\omega'' \approx \\ &\approx \frac{2\pi}{T} \iint A_T(\omega - \omega') A_T(\omega - \omega'') \{ \delta(\omega' - \omega'') + \\ &\quad + \delta(\omega' + \omega'') \} f(\omega') f(\omega'') d\omega' d\omega'' = \\ &= \frac{2\pi}{T} \int A_T(\omega - \omega') [A_T(\omega - \omega') + A_T(\omega + \omega')] f^2(\omega') d\omega' \end{aligned}$$

(см., например, [78, гл. 6] или [72, с. 229—230]). По поводу более строгого вывода этой формулы, обсуждения некоторых связанных с ней вопросов и расширения указанной формулы на широкие классы негауссовских стационарных функций $X(t)$ см., в частности, [9, гл. 9], [210, гл. III], [211, гл. V],

[256, гл. 5], [272, гл. 4] и [311, с. 44, 56, 98, 132, 190], а также [3, 4, 18, 66, 67, 156, 209, 315], где можно найти много дополнительных ссылок (основное внимание во всех этих работах уделяется случаю дискретного t). То, что формула (2.273) оказывается справедливой не только для гауссовских, но и для очень многих негауссовских стационарных функций $X(t)$, разумеется, связано с отмеченным в примечании ¹¹⁴ фактом универсальности при широких условиях распределений вероятностей периодограммы $I_T(\omega)$. Некоторые уточнения формулы (2.273), полезные при не слишком больших значениях T , указаны в [302].

¹²⁰ См., например, [159], а также примечание ¹⁴².

¹²¹ Результат (2.277а) принадлежит Парзену (см. [156] и [311, с. 24, 132]), он изложен также в [9, 210, 211, 256].

¹²² Нетрудно проверить, что минимум выражения $C_1 k_T^{-2q} + C_2 k_T T^{-1}$ (где C_1 и C_2 — независимые от T коэффициенты), описывающего поведение $\Delta^2(\Phi_T^{(A)}(\omega))$ при больших значениях T , достигается при $k_T = (C_1/C_2)^{1/(2q+1)} T^{1/(2q+1)}$ и равен $2C_1^{1/(2q+1)} C_2^{2q/(2q+1)} T^{-2q/(2q+1)}$. Так как значения $T^{-2q/(2q+1)}$ при большом T тем меньше, чем больше q , то отсюда вытекает, что если спектральная плотность $f(\omega)$ — очень гладкая (много раз дифференцируемая), то при больших значениях T выгодно использовать оценки, которым отвечает большое значение q (см. [5]; ср. также с. 203—204). Если, однако, $f(\omega)$ имеет лишь конечное число производных, то неограниченное увеличение значения q уже не будет полезным. А именно, можно показать, что если функция $f(\omega)$ дифференцируема только r раз и ее r -я производная $f^{(r)}(\omega)$ принадлежит классу $Lip \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ (т. е. удовлетворяет при любых ω' и ω'' неравенству $|f^{(r)}(\omega') - f^{(r)}(\omega'')| \leq K |\omega' - \omega''|^\alpha$, где K — положительная постоянная), то при любом $q \geq r + \alpha$ стремление $\Delta^2(\Phi_T^{(A)}(\omega)) = \Delta_T^2$ к нулю при $T \rightarrow \infty$ будет описываться одной и той же формулой $\Delta_T^2 \sim T^{-(2r+2\alpha)/(2r+2\alpha+1)}$ (ср. [6]).

Отметим еще, что можно доказать также следующее важное утверждение: для любой возможной оценки $f_T^*(\omega)$ спектральной плотности $f(\omega)$, построенной по значениям $X(t)$, где $t = 1, \dots, T$ или $0 \leq t \leq T$, всегда найдется такая гауссовская стационарная случайная функция $X(t)$ с r раз дифференцируемой спектральной плотностью $f(\omega)$, имеющей r -ю производную, принадлежащую классу $Lip \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, что для нее средний квадрат ошибки $\Delta^2(f_T^*) = \langle [f_T^*(\omega) - f(\omega)]^2 \rangle$ будет убывать при $T \rightarrow \infty$ не быстрее, чем $c T^{-(2r+2\alpha)/(2r+2\alpha+1)}$ где c — некоторая постоянная (см. [184]).

Таким образом, в применении к гауссовским стационарным функциям $X(t)$ наилучшие оценки спектральной плотности вида (2.267) являются асимптотически оптимальными, т. е. им отвечает самое быстрое из возможных убывание среднего квадрата ошибки при $T \rightarrow \infty$. В применении к общим негауссовским функциям $X(t)$ последнее утверждение уже, вообще говоря, не будет справедливым (так что с точки зрения достижимой асимптотической точности оценок спектральной плотности гауссовский случай оказывается самым неблагоприятным). Существенно, однако, что в применении к негауссовским случайным функциям $X(t)$ оценки $\mathcal{D}_T^{(A)}(\omega)$ хотя и не являются оптимальными по точности, но зато обладают следующим очень важным свойством: отвечающий им средний квадрат ошибки Δ_T^2 при больших значениях T будет практически одним и тем же для очень широкого класса стационарных случайных функций с заданной спектральной плотностью (т. е. в пределах этого класса он вообще не зависит от соответствующих распределений вероятностей, которые поэтому даже не требуется знать). Это последнее свойство оценок $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ часто называют их *робастностью* (от английского прилагательного *robust*, т. е. здоровый или крепкий; ср. [274]).

¹²³ См. [249, с. 11], [312] и [78, вып. 2, гл. 7]. По поводу практических аспектов оценивания спектральной плотности $f(\omega)$ по данным наблюдений см. книги [16, 72, 210, 211] и статьи [269, с. 56—66] и [323, с. 470—492].

¹²⁴ Формулы для спектральных окон $A(\omega)$, отвечающих корреляционным окнам Бартлетта и Парзена, разумеется, очень просто получаются из выражения для $A(\omega)$, отвечающего прямоугольному окну $a(\tau)$, если воспользоваться свойствами трех рассматриваемых корреляционных окон, указанными в примечании ⁵². Явные формулы для спектральных окон, отвечающих этим трем корреляционным окнам в случае дискретного t , могут быть легко найдены с помощью соотношения, указанного в сноске на с. 198 (см. также [210, § 111.2] или [9, § 9.2.3]).

¹²⁵ По поводу окон Тьюки (2.278) см., например, [249], где, в частности, указано, что термин «ханнинг» (hanning) был предложен в честь австрийского метеоролога Ю. фон Хана, еще в начале века применившего родственный метод сглаживания при обработке данных метеорологических наблюдений, а термин «хэмминг» (hanning) — в честь современного американского математика-вычислителя Р. У. Хэмминга. Явный вид преобразований Фурье $A(\omega)$ функций (2.278), а также спектральных окон $A_T(\omega)$, отвечающих корреляционным окнам $a_T(\tau) = a(\tau/k_T)$ в случае дискретного t , могут быть найдены, например, в книгах [9, 72, 73, 210, 249, 256]. Минимальное значение преобразования Фурье $A(\omega)$ окна ханнинг отрицательно, но по модулю оно близко к лишь 2% максимального положительного значения $A(\omega)$ при $\omega = 0$; в случае окна хэмминг минимум $A(\omega)$ также отрицателен, но по модулю он заметно меньше, чем 1% от $A(0)$.

¹²⁶ Целый ряд конкретных примеров окон $a_T(\tau) = a(\tau/k_T)$ и отвечающих им преобразований Фурье можно найти, в частности, в [156, 219, 309], [144, § 5.4], [256, § 3.3]. Специально отметим только следующие три примера положительно определенных окон $a(\tau)$: гауссовское окно $a(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}$, изученное Даниэлсом [262], окно $a(\tau)$, равное нулю при $|\tau| \geq 1$ и равное $(1 - |\tau|)e^{-\alpha\tau^2}$ при $|\tau| < 1$, рекомендовавшееся Нидеккер [149] и, наконец, предложенное в 1966 г. Хекстом и включенное в сводные таблицы корреляционных окон, имеющиеся в [144, 309], окно $a(\tau)$, представляющее собой свертку окон Бартлетта и Парзена (ему отвечает преобразование Фурье $A(\omega) = \frac{10}{33\pi} \left[\frac{\sin(\omega/6)}{\omega/6} \right]^6$).

¹²⁷ Так, например, изображенное на рис. 22 б треугольное спектральное окно рассматривалось в [3, 260], а параболическое окно — в [3, 315].

¹²⁸ Предложение об использовании с целью уменьшения смещения оценки спектральных окон $A_T(\omega)$, принимающих также и отрицательные значения, высказывалось еще в начале 60-х гг. (см., например, [243, 262]), но тогда не привлекло большого внимания. Значительно позже Парзен ввел в рассмотрение одно конкретное окно $A_T(\omega)$ (точнее говоря, его преобразование Фурье $a_T(\tau)$), для которого $q = 4$ в формуле (2.277а) — см. [323, с. 470].

Более подробно вопрос об использовании заперевенных спектральных окон был исследован Алексеевым [5—7], предложившим ряд новых удобных окон такого типа, оценившим отвечающий им средний квадрат ошибки Δ_T^2 и проиллюстрировавшим их выгодность на примерах некоторых конкретных расчетов оценок спектра модельных рядов $x(t)$, соответствующих реализациям стационарных последовательностей с известной спектральной плотностью. Наконец Поляк [162] предложил вычислять периодограмму ряда $x(t)$, $t = 1, \dots, T$, лишь для частот $\omega_p = 2\pi p/T$, $p = 1, 2, \dots$ принадлежащих интервалу $[0, \pi]$, а затем сглаживать полученные значения $I_T(\omega_p)$ при помощи регрессионного фильтра определенного порядка. Нетрудно видеть, что применение регрессионного фильтра первого порядка эквивалентно осреднению нескольких соседних значений $I_T(\omega_p)$, взятых с равными весами (т. е. использованию спектрального окна Даниела), а фильтры высших порядков уже не являются всюду неотрицательными и соответствуют четным значениям $q > 2$ в формуле (2.277а).

В связи с тем, что сглаживание регрессионными фильтрами высших порядков может привести к появлению отрицательных оценок спектральной плотности, в работе [11] рекомендовалось использовать вместо них специальный биномиальный фильтр со строго неотрицательными весовыми коэффициентами; однако при очень больших значениях T регрессионные фильтры высших порядков на самом деле приводят к оценкам спектральной плотности более точным, чем те оценки, которые получаются с помощью биномиального фильтра.

¹²⁹ Вывод соотношений (2.280) и (2.281) — (2.281а) почти не отличается от второго вывода формулы (2.263), указанного в примечании ¹¹⁴. Приложив затем намеченный там же метод получения формулы для $b_I(\omega_1, \omega_2)$ к выводу формулы для корреляционной функции $b_I^{(h)}(\omega_1, \omega_2)$ модифицированной периодограммы $I_T^{(h)}(\omega)$, придем к формуле вида (2.264), в правой части которой, однако, функция $g(\omega) = \left(\frac{2}{\pi T}\right)^{1/2} \frac{\sin(T\omega/2)}{\omega}$ должна быть теперь уже заменена функцией

$$g^{(h)}(\omega) = \frac{1}{(2\pi T)^{1/2}} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i\omega t} h_t(t + T/2) dt \text{ (или соответствующей суммой в слу-}$$

чае дискретного времени t); отсюда, в частности, следует, что $\lim_{T \rightarrow \infty} DI_T^{(h)}(\omega) =$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} DI_T(\omega).$$

Более подробный разбор метода оценивания спектральной плотности при помощи осреднения модифицированной периодограммы по некоторой частотной области (см., например, в книгах [16, 112, 254, 256, 287] и статьях [269 с. 56—66], [260]; в этих же источниках и в [164, 219, 326] можно найти также много примеров используемых на практике временных окон $h_T(t)$ и ряд дополнительных ссылок на литературу. Биномиальное временное окно (2.282), приводящее к простой явной формуле (2.283) для $K_T^{(h)}(\omega)$, рассматривалось Журбенко [89].

¹³⁰ Метод оценивания спектральной плотности с помощью подсчета значений модифицированной периодограммы для ряда частично пересекающихся отрезков имеющейся реализации и последующего осреднения всех этих значений принадлежит Уэлчу (см. [269, с. 70—73]). Статистические свойства получаемой на этом пути оценки были изучены Журбенко [88, 89] для широкого класса случайных последовательностей $X(t)$.

¹³¹ См., например, [3, 5, 303, 309, 310, 315, 332].

¹³² Вопросу о распределении вероятностей оценок спектральной плотности посвящено много работ. Еще в 1949 г. Тьюки принял, что распределение вероятностей оценки $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ может быть аппроксимировано так называемым χ^2_ν -распределением (хи-квадрат распределением с ν степенями свободы) и предложил формулу для подсчета соответствующего эквивалентного числа степеней свободы ν ; см. [249], а также [72, § 3—6], [78, вып. 1, § 6.4.2] или [112, § 3.4]. Попытка математического обоснования этой рекомендации Тьюки содержится в [211, гл. V, § 4 и 5]; однако степень точности рассматриваемого приближения пока все же не выяснена. В [256, § 5.6] могут быть найдены ссылки на некоторые работы, в которых предлагаются иные приближения к распределению вероятностей величин $\Phi_T^{(A)}(\omega)$; теорема 5.5.3 той же книги указывает на еще одну возможную аппроксимацию, являющуюся, однако, слишком сложной для использования на практике. При $T \rightarrow \infty$ и $k_T \rightarrow \infty$ (но $k_T/T \rightarrow 0$) распределение вероятностей оценок $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ при широких условиях стремится к нормальному распределению; этот результат, различные доказательства которого могут быть найдены в [211, гл. V, § 5], [9, § 9.4] и [256, § 5.6], примыкает к хорошо известному радиофизикам факту приближенной нормальности распределения вероятностей шума на выходе достаточно узкополосного фильтра и в какой-то мере

оправдывает содержащуюся в [315] довольно грубую рекомендацию — во всех случаях аппроксимировать распределение вероятностей величин $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ нормальным распределением.

Знание распределения вероятностей оценок $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ может быть использовано для построения доверительных интервалов для значений спектральной плотности (см. любой из указанных в этом примечании источников).

¹³³ См., например, [16, 81, 96, 114, 118, 121, 144], где можно также найти множество дополнительных ссылок.

¹³⁴ Ряд результатов, касающихся расчета ошибок показаний спектральных анализаторов, может быть найден в работах, указанных в примечании ¹³³. Принципиальная близость друг к другу осредненного по времени квадрата сигнала на выходе узкополосного фильтра и сглаженной периодограммы $\Phi_T^{(A)}(\omega)$ была выявлена еще в [272, § 4.5] и [249] (см. также [315]). Детальному расчету ошибок показаний тех или иных конкретных типов аналоговых спектральных анализаторов посвящено большое число специальных работ (см., например, [1, 316]).

¹³⁵ Истории метода БПФ посвящена заметка Кули, Льюиса и Уэлча в [199, с. 18—21].

¹³⁶ См., например, [19, 172, 179, 199, 255, 269, 290]. Краткое изложение метода БПФ можно найти также в [9, 16, 72, 126, 162, 211, 254, 256] и др.

¹³⁷ Различным методам расчета оценок спектральной плотности, использующим алгоритмы БПФ, посвящен ряд статей в [269], а также [126, 260] и др.; см. также обзорную статью [323, с. 470—492] и книги [16, 72, 162, 172, 211, 256, 287]. Примером использования длинных рядов наблюдений для исследования поведения спектральной плотности $f(\omega)$ на очень широком интервале частот может служить работа [214], в которой описаны результаты обработки двух дискретных рядов значений $x(t)$ производной скорости ветра в приземном слое атмосферы, включающих по $3 \cdot 10^6$ чисел каждый.

¹³⁸ См., например, [16, § 9.5.2], [126, § 4], [260] и специально посвященные этому вопросу статьи [22, 318]. Применение этого метода оценки корреляционной функции к некоторым задачам микрометеорологии описано, в частности, в [322]. Возможность использования метода БПФ для расчета значений $B_T^{**}(\tau)$ определяется тем фактом (вытекающим из формулы для $B_T^{**}(\tau_1 - \tau_2)$, приведенной в примечании ⁵¹), что $B_T^{**}(-\tau)$ — это свертка функций $x_T(-t)$ и $x_T(t)$. Совершенно аналогично может использоваться метод БПФ и во всех других случаях, когда требуется найти свертку двух заданных на широком интервале функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ (см. [269, с. 79—84] и [19]).

¹³⁹ Статистические свойства оценок $a_1^*, \dots, a_m^*$ коэффициентов $a_1, \dots, a_m$ еще в 1943 г. были при достаточно общих условиях изучены Манном и Вальдом; см., например, [9, § 5.4, 5.6], [210, § 11.2] или [211, гл. IV, § 2].

¹⁴⁰ Идея об использовании авторегрессионных оценок спектральной плотности выдвигалась, в частности, Парзенем (см., например, [311, с. 551—565] или [323, с. 470—492]) и Акайке [234]. К тем же оценкам, исходя из совсем других соображений, пришел Берг (Burg), который в докладе на состоявшейся в США в октябре 1967 г. Международной конференции по исследовательской геофизике предложил выбрать в качестве оценки спектральной плотности $f(\omega)$ дискретного ряда $x(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ту из функций $f_m^*(\omega)$, удовлетворяющих усло-

виям
$$\int_{-\pi}^{\pi} f_m^*(\omega) e^{ik\omega} d\omega = B(k), \quad k = 0, 1, \dots, m$$
 (где в случае, когда нам известны

только значения $x(1), \dots, x(T)$ ряда $x(t)$, истинные значения корреляционной функции $B(k)$ заменяются их оценками $B_T^{**}(k)$), для которой энтропия

$H = \lg \int_{-\pi}^{\pi} \lg f_m^*(\omega) d\omega$ принимает наибольшее значение. Нетрудно видеть, что

получаемые на этом пути оценки максимальной энтропии спектральной плотности точно совпадают с авторегрессионными оценками (см., например, [161, 268, 288, 328, 329], где указано несколько разных методов оценивания параметров $a_1, \dots, a_m, c^2$ формулы (2.254а) по значениям $x(1), \dots, x(T)$).

Метод оценки оптимального значения параметра m в выражении для авторегрессионной оценки спектральной плотности был предложен Акайке (см., например, [236, 279]). Другой подход к оценке значения m намечен в [21, гл. 6].

¹⁴¹ Статистические свойства случайных авторегрессионных спектральных оценок $\Phi_T^{AR}(\omega)$ (отличающихся от выборочных оценок $\varphi_T^{AR}(\omega)$ тем, что значения $x(1), \dots, x(T)$ заменяются случайными величинами $X(1), \dots, X(T)$) были впервые изучены (в применении к гауссовским стационарным последовательностям $X(t)$) в диссертации Кромера (Станфордский университет, США, 1970). Позже аналогичные результаты были при более широких условиях получены Берком [247] и Писаренко [161].

¹⁴² По поводу использования оценок авторегрессионного типа при анализе коротких выборок см., например, [284]. О разрешающей способности авторегрессионных оценок говорится, в частности, в статьях [161, 284, 328]. Из огромного числа работ, посвященных конкретным приложениям авторегрессионных методов оценивания значений спектральной плотности, упомянем только статьи [240, 266], посвященные анализу многолетнего ряда значений температуры в центральной Англии, и работу [314] о спектре палеоклиматического ряда значений температуры Земли за последние 700 000 лет.

¹⁴³ См., например, [21, гл. 7] и [211, гл. 5], а также [77, 235, 237, 276].

¹⁴⁴ Примеры такого рода оценок спектральной плотности могут быть найдены, например, в статьях [236, 327], последняя из которых специально посвящена метеорологическим приложениям этого метода оценивания. Вопрос об оптимальном выборе значений m и n , входящих в исследуемую оценку функции $f(\omega)$, рассматривался, в частности, в [21, гл. 6] и [236, 259].

¹⁴⁵ Формула, обратная формуле (2.260), в силу (2.284) в случае непрерывного t может быть переписана в виде

$$B_T^{**}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} dF_T^*(\omega). \quad (\text{П.45})$$

Мы видим, таким образом, что $B_T^{**}(\tau)$ играет роль характеристической функции, отвечающей функции распределения вероятностей $F_T^*(\omega)$; поэтому здесь можно воспользоваться тем, что характеристическая функция всегда однозначно определяет соответствующую ей функцию распределения (см. примечание ³).

¹⁴⁶ В частности, многочисленные примеры оценок $F_T^*(\omega)$ спектральной плотности $F(\omega)$ (нормированной условием $F(0) = 0$) гидрометеорологических рядов наблюдений могут быть найдены в [162, 163] и [70, 117, 141, 314].

¹⁴⁷ См., например, [17, 67, 91, 139], где можно найти много дополнительных ссылок.

¹⁴⁸ Задаче о выделении скрытых периодичностей посвящена, в частности, книга [187], содержащая обширную библиографию.

¹⁴⁹ По поводу исследования стационарных функций $X(t)$ со смешанным спектром см., например, книги [210, § IV.1], [211, гл. VII, § 6] и статьи [160, 331], где можно найти много дополнительных ссылок.