Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

И. И. МЕЛЬНИКОВА, В. М. РАДИКЕВИЧ

274955

ДИНАМИЧЕСКАЯ МЕТЕОРОЛОГИЯ

(учебное пособие для океанологов)

Под редакцией профессора Д. Л. Лайхтмана

Ленинградский
Гидрометеорологический ин-т
БИБЛИОТЕКА
Л-д 195196 Малоохтинский пр., 98

ЛЕНИНГРАД
1974

УДК 551.551 + 551.511 + 551.521

Одобрено Ученым советом
Ленинградского гидрометеорологического института

Основу книги составляют лекции по курсу динамической метеорологии для океанологов, читаемые в течение ряда лет в Ленинградском гидрометеорологическом институте. Основное внимание уделяется изложению теорий пограничного и приземного слоя, а также процессам, протекающим вблизи границы раздела между атмосферой и морем (процессы трансформации, дрейф льда, бризы и т. д.).

Книга может быть использована в качестве учебного пособия для вузов и может представлять интерес для специалистов — океанологов и морских метеорологов.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современный подход к исследованию процессов в океане на основе учета взаимодействия атмосферы и океана предполагает увеличение роли и значения курса динамической метеорологии в подготовке студентов-океанологов. На это неоднократно указывал один из первых инициаторов комплексного изучения проблемы взаимодействия океана и атмосферы В. В. Тимонов.

Существующие учебники и учебные пособия по этому курсу рассчитаны на студентов метеорологической специальности. В них мало уделяется внимания таким вопросам, как специфика атмосферных процессов над водной поверхностью и взаимодействие океана и атмосферы. В связи с этим ощущается потребность в создании специального пособия для студентов океанологической специальности.

В основу предлагаемого учебного пособия положен курс лекций, который в течение ряда лет читал студентам-океанологам Д. Л. Лайхтман и который в дальнейшем, по мере появления новых работ, касающихся рассматриваемых в курсе вопросов, был дополнен авторами.

Главное внимание, с учетом специфики курса, обращается на изложение теории пограничного и приземного слоя атмосферы и процессов, протекающих вблизи раздела воздух—вода (процессы трансформации, дрейфа льда, бризы и муссоны). Авторы старались не ограничиваться изложением только теории, но и дать практические рекомендации по современным методам расчета турбулентных потоков количества движения, тепла и влаги, а также характеристик пограничных слоев атмосферы и моря на основе их совместного рассмотрения. К сожалению, из-за ограниченности курса весьма кратко изложены вопросы термодинамики и энергетики атмосферы, полностью отсутствуют разделы, посвященные теории климата и общей циркуляции атмосферы. Важность этих разделов в настоящее время не подлежит сомнению.

Авторы благодарны коллективу кафедры теоретической физики атмосферы ЛГМИ, творческая активность которого способствовала появлению курса лекций, а также Г. П. Барановой и Н. А. Дмитриевой за техническую помощь в оформлении рукописи.

I. ВВЕДЕНИЕ

§ 1. Предмет и задачи динамической метеорологии

Метеорология — это наука о физических и химических процессах в атмосфере, о их временном и пространственном режиме, методах их прогноза и воздействия на них. Она содержит следующие разделы:

1. Физика атмосферы, которая подразделяется на теоретическую (динамическую) метеорологию и экспериментальную метеорологию;
2. Химия атмосферы;
3. Климатология.
4. Прикладная метеорология, включающая в себя синоптику (методы прогноза) и техническую метеорологию.

Теоретическая или динамическая метеорология является разделом физики атмосферы. Физика атмосферы, как и любой другой ее раздел, основывается на основных законах физики (закон сохранения количества движения, закон сохранения массы, закон сохранения энергии), выраженных в виде дифференциальных уравнений, связывающих скорость, температуру, давление и плотность. Предметом и задачей динамической метеорологии является изучение теоретическими методами атмосферных движений в их связи и взаимодействии с термодинамическими процессами в атмосфере. Непосредственной причиной атмосферных движений является неравномерность распределения давления, обусловленная процессами теплообмена в атмосфере. Эти процессы, в значительной мере связанные с преобразованием лучистой энергии в тепловую, а также с выделением или поглощением тепла при фазовых превращениях воды, не только обусловливают атмосферные движения, но и сами в большой степени определяются ими.

Динамическая метеорология использует основные уравнения гидромеханики, термодинамики и теории излучения, преобразуя их применительно к специфике атмосферных процессов.

Особенности современного этапа развития динамической метеорологии определяются созданием ракет, искусственных спутников земли (ИСЗ) и электронных вычислительных машин

(ЭВМ). Ракеты обеспечили зондирование высоких слоев, сведения о которых до последнего времени были недостаточными. Здесь, благодаря наличию озона, начинаются преобразования солнечной энергии в тепловую, а эти процессы играют важную роль в формировании мировой погоды. ИСЗ впервые позволили получить почти синхронные наблюдения по всему земному шару за облачностью и радиационными потоками тепла. Наконец, с помощью современных ЭВМ можно решать сложные нелинейные задачи, учитывающие многообразие факторов и взаимосвязь между отдельными факторами, формирующими погоду.

§ 2. Связь процессов в атмосфере и гидросфере

Динамическая метеорология важна для океанологов как необходимая часть современного подхода к изучению процессов в океане на основе теории взаимодействия океана и атмосферы. Специфика взаимодействия океана и атмосферы определяется: а) подвижностью водной поверхности; б) большой, по сравнению с воздухом, удельной теплоемкостью воды; в) интенсивным турбулентным перемешиванием в океане.

В качестве примера тесной взаимосвязи между процессами в атмосфере и океане рассмотрим случай с неравномерным нагреванием поверхности океана в низких и высоких широтах, связанным либо с широтным ходом солнечной радиации, либо с влиянием крупномасштабных систем облаков. В океане за счет различий температур и, следовательно, плотности возникнет плотностная циркуляция. В атмосфере за счет лучистого и турбулентного теплообмена возникнет разность температур между высокими и низкими широтами. Это приведет к неравномерности в распределении давления и к появлению движения в атмосфере. Движение воздуха за счет действия сил трения вызовет дрейфовые течения и волны на поверхности океана. Возникшие потоки воздуха и воды будут переносить тепло из районов, где его много, в районы, где его мало, и тем самым стремиться выровнять первоначальные контрасты температуры. С другой стороны, с развитием волн увеличивается трение на морской поверхности и это должно приводить к постепенному затуханию движения в атмосфере. Таким образом, при отсутствии постоянных внешних источников энергии (поддерживающих либо контраст температур, либо движение) через некоторое время исчезнет различие температур и вызванные им движения в атмосфере и океане.

Рассмотренный выше пример дает только чисто принципиальную схему взаимодействия и связи процессов в атмосфере и океане. В действительности картина взаимодействия осложняется из-за влияния процессов большого масштаба и различий характерного времени развития процессов в атмосфере и океане, приводящих к тому, что, например, возникновение плотностной циркуляции в океане будет иметь последствия для атмосферы через довольно большой промежуток времени, то есть будет влиять на процессы, непосредственно не связанные с теми, которые вызвали возникновение этой циркуляции.

Поскольку в наиболее тесном взаимодействии с океаном находятся нижние слои атмосферы, то в курсе динамической метеорологии для океанологов главное внимание уделяется описанию строения пограничного и приземного слоя атмосферы, а также процессов, протекающих вблизи границы раздела воздух — вода. Прежде чем изучать эти вопросы, необходимо познакомиться с некоторыми основами динамики атмосферы.

II. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ

§ 1. Основные уравнения динамики атмосферы

Прежде всего установим связь между пространственными и временными производными в движущейся жидкости. Допустим, что поле свойства S можно записать в виде $S = S(x, y, z, t)$ и что движение происходит только вдоль оси x со скоростью u. Тогда $dx = u \cdot dt$. В таком случае, если обозначить через dS изменение свойства в движущейся частице, то

$$S(x+dx, t+dt, y, z) = S(t, x, y, z) + dS. \tag{2.1.1}$$

Разложим в ряд Тейлора левую часть (2.1.1) и, считая dt и dx малыми величинами, ограничимся членами, содержащими их только в первой степени:

$$S(x+dx,\ t+dt,\ y,\ z) = S(t,\ x,\ y, z) + \frac{\partial S}{\partial t}\cdot dt + \frac{\partial S}{\partial x}\cdot dx + \ldots$$

Подставив это выражение в (2.1.1) и деля все на dt, получим

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + u\frac{\partial S}{\partial x}. \tag{2.1.2}$$

Соотношение (2.1.2) легко обобщается на случай трехмерного движения

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + u\frac{\partial S}{\partial x} + v\frac{\partial S}{\partial y} + w\frac{\partial S}{\partial z}, \tag{2.1.3}$$

где v и w — проекции вектора скорости на оси y и z.

Первый член в правой части (2.1.3) называется л о к а л ь н о й производной и характеризует изменение свойств в данной точке пространства. Остальные три члена называются к о н в е к т и в н о й производной и характеризуют изменение свойства в данной точке за счет прихода в нее частицы из другой точки. И н д и в и д у а л ь н а я или полная производная (dS/dt) характеризует изменение свойства в движущейся частице.

Итак, соотношение (2.1.3) утверждает, что в фиксированной точке пространства изменение свойства связано с приходом частиц из других точек (с отличающимся значением свойства) и изменением свойства в частицах во время их движения.

Уравнения движения

Уравнения движения являются математическим выражением закона сохранения количества движения и могут быть получены на основании второго закона механики

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \Sigma\vec{F}_i, \qquad (2.1.4)$$

где $\vec{F}_i$ — силы (отнесенные к единице массы), действующие на частицу воздуха; $\vec{v}$ — вектор скорости; или с учетом (2.1.3)

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \Sigma F_x,\\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = \Sigma F_y,\\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = \Sigma F_z.\end{aligned}\right\} \qquad (2.1.5)$$

Здесь F_x, F_y, F_z — проекции сил на оси x, y, z.

Уравнение неразрывности

Уравнение неразрывности является математическим выражением закона сохранения массы.

Рассмотрим фиксированный в пространстве элементарный объем $dx \cdot dy \cdot dz$, расположенный в потоке жидкости, составляющие скорости которой в начале координат равны u, v, w (рис. 1).

Если за единицу времени через грань $OABC$ втекает жидкости $\rho u \cdot dy \cdot dz$, то через грань $LFDK$ вытекает

$$\left(u\rho + \frac{\partial u\rho}{\partial x}dx\right) \cdot dy \cdot dz.$$

Итак, приток жидкости (воздуха) через грани, перпендикулярные оси x, равен

$$\rho u \cdot dy \cdot dz - \left(u\rho + \frac{\partial u\rho}{\partial x}dx\right) dy \cdot dz = -\frac{\partial u\rho}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz,$$

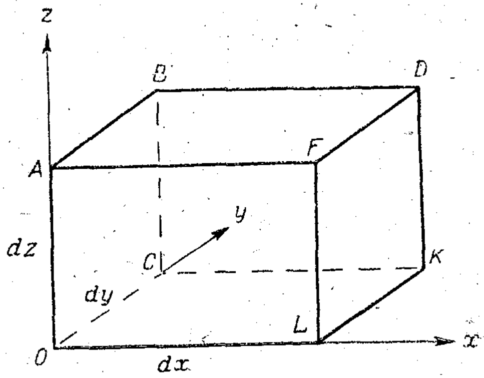

Рис. 1. Элементарный объем жидкости.

Аналогично можно получить выражение для притока жидкости через грани, перпендикулярные осям y и z

$$-\frac{\partial v\rho}{\partial y}\cdot dx\cdot dy\cdot dz; \qquad -\frac{\partial w\rho}{\partial z}\cdot dx\cdot dy\cdot dz.$$

Общий приток жидкости в элементарный объем за единицу времени равен

$$-\left(\frac{\partial u\rho}{\partial x}+\frac{\partial v\rho}{\partial y}+\frac{\partial w\rho}{\partial z}\right)dx\cdot dy\cdot dz.$$

На основании закона сохранения массы этот общий приток жидкости должен быть равен изменению массы объема

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\cdot dx\cdot dy\cdot dz.$$

В таком случае уравнение неразрывности будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left(\frac{\partial u\rho}{\partial x}+\frac{\partial v\rho}{\partial y}+\frac{\partial w\rho}{\partial z}\right)=0 \qquad (2.1.6)$$

или

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\vec{v}=0.$$

Если воспользоваться соотношением (2.1.3), то (2.1.6) можно записать как

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\operatorname{div}\vec{v}=0. \tag{2.1.7}$$

Для несжимаемой жидкости $\rho=\text{const}$ и уравнение неразрывности примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \text{или} \quad \operatorname{div}\vec{v}=0. \tag{2.1.8}$$

Для стационарного процесса $\partial\rho/\partial t=0$ и тогда

$$\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho u}{\partial y}+\frac{\partial\rho w}{\partial z}=0 \quad \text{или} \quad \operatorname{div}\rho\vec{v}=0. \tag{2.1.9}$$

Уравнение состояния

Атмосферу можно рассматривать как термодинамическую систему, внутреннее состояние которой однозначно определяется только двумя параметрами. Следовательно, в общем виде уравнение состояния можно записать как

$$p=p(\rho,\ t), \tag{2.1.10}$$

где p — давление, ρ — плотность, t — температура. Продиффеdo ренцируем (2.1.10):

$$dp=\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{t=\text{const}}d\rho+\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{\rho=\text{const}}dt.$$

Для определения частных производных используем законы Бойля-Мариотта и Гей-Люссака, которые достаточно хорошо выполняются в реальной атмосфере. Согласно первому из них, для неизменной массы газа M при фиксированной температуре $t=\text{const}$ произведение давления p на объем $V=M/\rho$ остается постоянной величиной

$$p\cdot\frac{M}{\rho}=p_0\cdot\frac{M}{\rho_0}=\text{const}. \tag{2.1.11}$$

В таком случае на основании (2.1.11)

$$\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_{t=\text{const}}=\frac{p_0}{\rho_0}=\frac{p}{\rho}.$$

Согласно второму закону, при постоянном объеме (или для неизменной массы при постоянной плотности) давление является линейной функцией температуры

$$p = p_0(1 + \alpha t), \tag{2.1.12}$$

где α — коэффициент, равный 1/273.

На основании (2.1.12) находим, что

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{\rho=\mathrm{const}} = p_0\alpha = \frac{p\alpha}{1+\alpha t}.$$

С учетом выражений для частных производных полный дифференциал от давления можно записать в виде

$$dp = \frac{p}{\rho}d\rho + \frac{p \cdot d(1+\alpha t)}{1+\alpha t}.$$

Проинтегрируем полученное выражение от p_0 до p, от ρ_0 до ρ и от t_0 до t. Тогда

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho(1+\alpha t)}{\rho_0(1+\alpha t_0)} \quad \text{или} \quad \frac{p}{\rho(1+\alpha t)} = \frac{p_0}{\rho_0(1+\alpha t_0)}.$$

Введем понятие абсолютной температуры $T = t + \frac{1}{\alpha} = t + 273$.

В таком случае уравнение состояния примет вид

$$\frac{p}{\rho T} = \frac{p_0}{\rho_0 T_0} = R$$

или

$$p = R \cdot \rho \cdot T. \tag{2.1.13}$$

Постоянная интегрирования R называется универсальной газовой постоянной.

Нетрудно показать, что в общем случае, когда воздух представляет некоторую смесь, состоящую из сухого воздуха и водяного пара

$$R = R'(1 + 0{,}605 \cdot q), \tag{2.1.14}$$

где q — удельная влажность, R' — универсальная газовая постоянная сухого воздуха, равная $2{,}87 \cdot 10^6$ *см²/сек² град*.

Если ввести понятие виртуальной температуры (как температуры, которую должен иметь сухой воздух, чтобы при заданном давлении его плотность была равна плотности влажного воздуха, имеющего температуру T, влажность q)

$$T_в = T(1 + 0{,}605q), \tag{2.1.15}$$

то уравнение состояния примет вид

$$p = R'\rho T_в. \tag{2.1.16}$$

Уравнение притока тепла

Уравнение притока тепла является следствием закона сохранения энергии. Любую систему можно характеризовать тремя видами энергии: кинетической $E_к$, связанной с движением отдельных частей или всей системы в целом; потенциальной $E_п$, если система находится в силовом поле, для атмосферы наиболее важным видом потенциальной энергии является гравитационная потенциальная энергия, связанная с полем силы тяжести; внутренней $E_в$, представляющей собой кинетическую и потенциальную энергию молекул.

Закон сохранения энергии утверждает, что если система не подверждена внешним воздействиям (замкнутая система), то сумма всех видов энергии в ней остается постоянной, хотя один вид энергии может превращаться в другой. В более общем случае система может подвергаться внешним воздействиям (незамкнутая система): к системе извне может поступать тепло или над системой может совершаться работа. При этом, согласно закону сохранения энергии, изменение полной энергии незамкнутой системы равно работе, совершаемой внешними силами над системой, и притоку тепла извне.

Для пояснения физического смысла закона сохранения энергии рассмотрим несколько примеров.

Пусть масса воздуха движется в поле силы тяжести и эта сила является единственной, определяющей движение массы. Уравнение движения в этом случае запишется

$$m\frac{dw}{dt}=-mg.$$

Умножив это уравнение на w и имея в виду, что $w=\frac{dz}{dt}$, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mw^2}{2}+gzm\right)=0, \text{ т. е. } \frac{mw^2}{2}+gzm=\text{const}.$$

Таким образом, для этого частного случая, в котором имеют место лишь преобразования механических видов энергии, закон сохранения энергии является следствием уравнения движения.

Однако это справедливо только для чисто механических процессов. Для того чтобы это показать, рассмотрим несколько более сложный пример.

Предположим, что на рассмотренную выше массу воздуха кроме силы тяжести действует сила трения, пропорциональная скорости. Тогда из уравнения движения

$$m\frac{dw}{dt}=-mg-kw,$$

где $k>0$, следует, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mw^2}{2}+mgz\right)=-kw^2,$$

т. е. механическая энергия системы убывает. Оставаясь в рамках уравнений динамики, мы должны были бы прийти к выводу о том, что в природе происходят процессы, в которых энергия не сохраняется. Однако, имея в виду сформулированный выше закон сохранения энергии, естественно предположить, что в рассматриваемом процессе механическая энергия превращается во внутреннюю так, что

$$-kw^2=\frac{dE_в}{dt}.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mw^2}{2}+mgz+E_в\right)=0,$$

т. е.

$$\frac{mw^2}{2}+mgz+E_в=\text{const}.$$

Таким образом, и в этом случае полная энергия системы сохраняется.

Заметим, что для получения последнего уравнения одних уравнений движения было недостаточно, и мы использовали закон сохранения энергии как некий новый принцип. В обоих примерах мы рассматривали замкнутую систему.

Обозначим теперь через $\delta\Phi$ и $\frac{dQ}{dt}$ работу внешних сил и приток тепла извне за единицу времени. Тогда закон сохранения энергии в общем случае запишется следующим образом:

$$\frac{dE_к}{dt}+\frac{dE_п}{dt}+\frac{dE_в}{dt}=\frac{1}{A}\frac{dQ}{dt}+\delta\Phi,$$

где $1/A$ — механический эквивалент тепла, равный $4{,}1863\cdot10^7$ *эрг/кал*.

Работа внешних сил складывается из трех частей:

а) работы сил, имеющих потенциал, переходящей в кинетическую и потенциальную энергию

$$\delta\Phi_1 = \frac{dE_к}{dt} + \frac{dE_п}{dt};$$

б) работы сил трения, переходящей в тепло

$$\delta\Phi_2 = \varepsilon,$$

где ε — диссипация;

в) работы остальных сил (сжатия, расширения, электростатических и т. д.). Если рассматривать только силы сжатия (расширения), то

$$\sigma\Phi_3 = F\frac{dL}{dt} = \frac{F}{ds}\frac{dV}{dt} = -p\frac{dV}{dt}.$$

Подставив $\delta\Phi$ в выражение для закона сохранения энергии, получим

$$\frac{dQ}{dt} = A\cdot\frac{dE_в}{dt} + A\cdot p\cdot\frac{dV}{dt} + A\cdot\varepsilon. \qquad (2.1.17)$$

Соотношение (2.1.17) называется уравнением первого начала термодинамики, которое утверждает, что изменение внутренней энергии фиксированной массы за единицу времени складывается из притока тепла извне, потери механической энергии из-за трения и работы сжатия (расширения).

Диссипация энергии играет заметную роль в общем балансе кинетической энергии атмосферы. Однако изменения внутренней энергии воздуха за счет диссипации обычно малы по сравнению с изменениями, вызванными притоком тепла и работой сил сжатия, поэтому в динамической метеорологии принято пренебрегать величиной ε в уравнении (2.1.17).

На основании кинетической теории газов можно предполагать, что внутренняя энергия связана с внутренними параметрами газа: температурой и давлением или температурой и объемом

$$E_в = E_в(T, V),$$

тогда

$$dE_в = \left(\frac{\partial E_в}{\partial T}\right)_{V=\mathrm{const}} dT + \left(\frac{\partial E_в}{\partial V}\right)_{T=\mathrm{const}} dV.$$

Экспериментально показано, что $\frac{\partial E_в}{\partial V}$ стремится к нулю (для идеальных газов эта частная производная точно равна 0) и, следовательно, внутренняя энергия зависит только от температуры

$$dE_{в}=\frac{\partial E_{в}}{\partial T}\cdot dT.$$

Если считать, что $E_{в}$ выражена в тепловых единицах, и пренебречь ε, то (2.1.17) примет вид:

$$\frac{dQ}{dt}=\frac{\partial E_{в}}{\partial T}\cdot\frac{dT}{dt}+Ap\frac{dV}{dt}.$$

При неизменном объеме ($dV=0$) $\partial E_{в}/\partial T=\frac{dQ}{dT}$, т. е. определяет количество тепла, которое нужно подвести, чтобы изменить температуру на 1°, и имеет смысл удельной теплоемкости при постоянном объеме c_V. С учетом этого первое начало термодинамики после умножения на dt запишется как

$$dQ=c_V dt+ApdV \tag{2.1.18}$$

Если в уравнении состояния заменить ρ на $1/V$ и продифференцировать его, тогда

$$pdV=RdT-Vdp$$

и (2.1.18) с учетом этого выражения примет вид

$$dQ=(c\ +AR)dT-A\cdot V\cdot dp.$$

Видно, что при неизменном давлении ($dp=0$) $c_V+AR=\frac{dQ}{dT}$ т. е. имеет смысл удельной теплоемкости при постоянном давлении

$$c_p=c_V+AR. \tag{2.1.19}$$

В таком случае (2.1.18) запишется в форме

$$dQ=c_p dT-A\cdot Vdp. \tag{2.1.20}$$

Уравнения (2.1.18) и (2.1.20) называются уравнениями притока тепла; входящий в них член dQ — приток тепла — может быть представлен как

$$\frac{dQ}{dt}=\varepsilon_{ф}+\varepsilon_{т}+\varepsilon_{л}+\varepsilon_{м}, \tag{2.1.21}$$

где $\varepsilon_{ф}$, $\varepsilon_{т}$, $\varepsilon_{л}$, $\varepsilon_{м}$ — соответственно фазовый, турбулентный, лучистый и молекулярный притоки тепла.

Уравнение притока влаги

По аналогии с полученным ранее уравнением притока тепла можно записать уравнение притока влаги

$$\frac{dq}{dt}=\varepsilon_{q\text{т}}+\varepsilon_{q\text{ф}}+\varepsilon_{q\text{м}}, \tag{2.1.22}$$

где q — удельная влажность; $\varepsilon_{q\text{т}}$ — турбулентный, $\varepsilon_{q\text{ф}}$ — фазовый, $\varepsilon_{q\text{м}}$ — молекулярный притоки влаги.

Система уравнений (2.1.5), (2.1.6), (2.1.13), (2.1.20), (2.1.22), дополненная граничными условиями, позволяет в принципе определить все интересующие нас метеорологические характеристики: u, v, w, ρ, p, T, q, если известны выражения для сил в (2.1.5) и притоков тепла и влаги в (2.1.20) и (2.1.22) и если в этих выражениях не содержатся новые неизвестные.

§ 2. Силы, действующие в атмосфере

Силы, действующие в атмосфере на некоторый объем τ, можно разделить на два класса:

1) массовые — силы, действующие на каждый элемент объема независимо от того, существуют или нет рядом с объемом другие части жидкости. Примером массовой силы является сила тяжести и отклоняющая сила вращения Земли;

2) поверхностные — силы взаимодействия между объемом τ и окружающей средой. Примером поверхностной силы является сила барического градиента и сила трения.

Сила тяжести

Сила тяжести складывается из силы гравитационного притяжения Земли и центробежной силы. Первая сила направлена вдоль радиуса к центру Земли и для единицы массы воздуха равна

$$G=k\frac{M}{R^2}, \tag{2.2.1}$$

где M — масса Земли, R — радиус Земли, k — универсальная постоянная тяготения ($6{,}67\cdot10^{-8}$ *дин/см² · г²*).

Центробежная сила возникает из-за вращения Земли и направлена вдоль радиуса широтного круга от оси вращения, для единицы массы воздуха она выражается как

$$F=\frac{v^2}{r}=\omega^2 r, \tag{2.2.2}$$

(так как $v=\omega r$), где ω — угловая скорость вращения Земли, r — радиус широтного круга.

Если $\vec{n}$ — направление нормали, $\vec{S}$ — направление касательной к поверхности, то для Земли в форме шара (рис. 2,*а*) $G_n = G$, $G_s = 0$, и под влиянием F_s она должна сплющиваться до тех пор, пока возникающая при этом касательная составляющая G_s не уравновесится F_s (рис. 2,*б*).

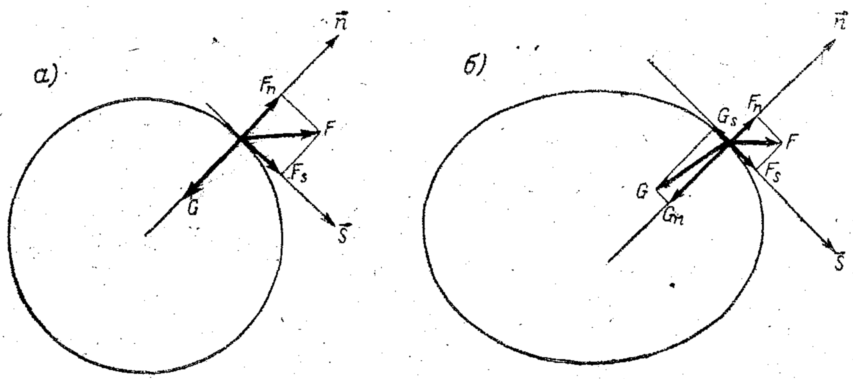

Рис. 2. Векторная схема силы тяготения, центробежной силы и силы тяжести.

274955

Сила тяжести определяется как равнодействующая G_n и F_n. Для единицы массы воздуха она равна

$$\vec{F}_т = -g \tag{2.2.3}$$

и направлена к поверхности Земли (g — ускорение силы тяжести). Для атмосферных движений над горизонтальной поверхностью $F_{тx} = F_{тy} = 0$, $\vec{F_T} = F_{тz} = -g$. В противном случае проекции силы тяжести на координатные оси выражаются через тригонометрические функции угла наклона поверхности Земли по отношению к уровенной поверхности.

Сила тяжести убывает от полюса к экватору (на полюсе $F_n = 0$) и уменьшается с высотой (за счет увеличения R и, следовательно, уменьшения G_n). В среднем сила тяжести, отнесенная к единице массы, или ускорение силы тяжести составляет: на полюсе 983,2 *см/сек*², на 45° 980,6 *см/сек*², на экваторе 978,0 *см/сек*².

В пределах исследуемой в метеорологии части атмосферы зависимостью силы тяжести от высоты можно обычно пренебречь, так как высота этой части мала по сравнению с радиусом Земли.

Ленинградский
Гидрометеорологический ин-т
БИБЛИОТЕКА

Отклоняющая сила вращения Земли (сила Кориолиса)

Отклоняющая сила вращения Земли представляет дополнительную инерционную силу, действующую на частичку воздуха, движущуюся относительно поверхности Земли. Сила Кориолиса (названа по имени французского механика Густава Гаспара Кориолиса, впервые рассчитавшего эту силу) возникает за счет вращения Земли. Если бы Земля не вращалась, то путь частицы воздуха от полюса до экватора был бы NA (рис. 3), в результате вращения Земли частица попадает в точку A_1, $NA_1 = c \cdot dt$ (где c — скорость частицы). За время dt Земля повернулась на угол $\delta\alpha = \omega dt$.

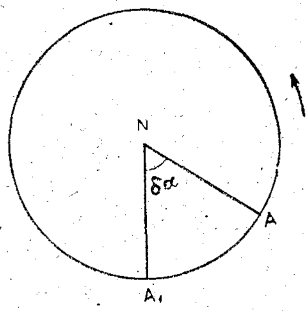

Рис. 3. Траектория движения частицы от полюса к экватору.

Для малых dt мало $\delta\alpha$ и можно считать

$$AA_1 = NA_1 \cdot \delta\alpha = c\omega (dt)^2.$$

С другой стороны, для равномерно-ускоренного движения

$$AA_1 = \frac{1}{2} a \cdot (dt)^2,$$

где a — ускорение за счет вращения Земли или ускорение Кориолиса.

Из сравнения выражений для AA_1 получаем

$$a = 2\omega \cdot c. \qquad (2.2.4)$$

Следовательно, сила Кориолиса, отнесенная к единице массы, равна

$$K = 2\omega c. \qquad (2.2.5)$$

В более общем случае силу Кориолиса, действующую на единицу массы, можно представить как

$$K = 2[\vec{c} \times \vec{\omega}] = 2(v\,\omega_z - w\,\omega_y)\vec{i} + 2(w\,\omega_x - u\,\omega_z)\vec{j} + 2(u \cdot \omega_y - v\,\omega_x)\vec{k},$$

где u, v, w — проекции скорости ветра; ω_x, ω_y, ω_z — проекции вектора угловой скорости вращения Земли $\vec{w}$.

На формирование горизонтальных атмосферных движений главное влияние оказывает ω_z, так как именно эта составляющая $\vec{\omega}$ определяет проекции силы Кориолиса в горизонтальной плоскости, если пренебречь членами, содержащими w (вертикальная составляющая скорости обычно в десятки и сотни раз меньше u и v)

$$\left.\begin{aligned} K_x &= 2\omega_z v, \\ K_y &= -2\omega_z u, \end{aligned}\right\} \qquad (2.2.6)$$

где $\omega_z = \omega \cdot \sin\varphi$ (φ — широта).

Из соотношений (2.2.6) и рис. 4 видно, что горизонтальная составляющая силы Кориолиса направлена под углом 90° к направлению движения частицы (вправо в Северном полушарии и влево в Южном). Действительно, если ось x направить вдоль ветра, тогда $c = u$, $v = 0$, $K_x = 0$, $K_y = -2\omega_z c$, так как в северном полушарии $2\omega_z > 0$, а в южном $2\omega_z < 0$, то

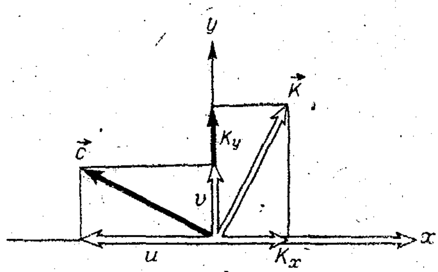

Рис. 4. Направление векторов скорости движения и силы Кориолиса

в северном полушарии $K_y = 2\omega_z c < 0$,

в южном полушарии $K_y = 2\omega_z c > 0$.

Сила барического градиента

Рассмотрим в поле давления элементарный объем $dx \cdot dy \cdot dz$. Обозначим через $p_1 = p(x)$ и $p_2 = p(x + dx)$ давление (силу, отнесенную к единице площади), действующее на грани, перпендикулярные оси x (рис. 5). В таком случае, сила, действующая на объем $dx \cdot dy \cdot dz$, может быть записана в виде

$$F_x = (p_1 - p_2)\, dz \cdot dy$$

или, разложив p_2 в ряд

$$p(x + dx) = p(x) + \frac{\partial p}{\partial x} dx,$$

получим

$$F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz.$$

На единицу массы будет действовать сила, равная

$$F_{px} = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \qquad (2.2.7)$$

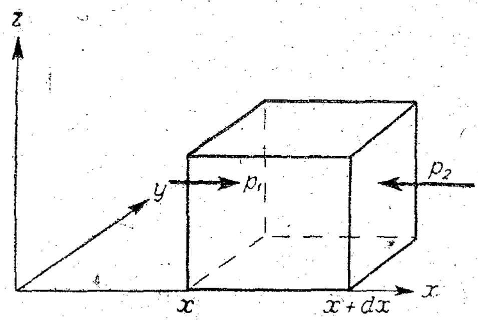

Рис. 5. Действие давления на элементарный объем

Эта сила называется силой барического градиента (вернее ее проекцией на ось x). Аналогично F_{px} можно получить и другие составляющие силы барического градиента

$$F_{py}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\quad F_{pz}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Главной причиной возникновения силы барического градиента в атмосфере является неравномерность нагревания подстилающей поверхности.

Сила трения

Рассмотрим поток жидкости, в котором скорость растет с высотой (рис. 6). За счет теплового движения молекулы с уровня *1* могут попадать на уровень *2* и переносить сюда некоторое дополнительное количество движения. И наоборот, молекулы с уровня *2* будут переносить на уровень *1* меньшее количество движения, т. е. будут затормаживать движение на этом уровне. Таким образом, под влиянием молекулярного перемешивания, возникает поток количества движения, приводящий к постепенному выравниванию скоростей. Из общих физических соображений ясно, что поток будет тем больше, чем больше градиент скорости. Поток количества движения можно рассматривать как отнесенную к единице поверхности касательную силу, называемую касательным напряжением τ. Итак, за счет молекулярного перемешивания в потоке жидкости с вертикальным градиентом скорости возникает касательное напряжение $\tau_м$

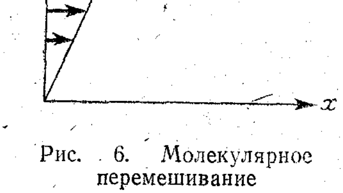

Рис. 6. Молекулярное перемешивание

$$\tau_м=\mu\cdot\frac{dc}{dz}, \tag{2.2.8}$$

где коэффициент пропорциональности μ называется динамическим коэффициентом вязкости и зависит от свойств жидкости; $[\tau]=M\cdot L^{-1}\cdot T^{-2}$, $[\mu]=M\cdot L^{-1}\cdot T^{-1}$.

Для большинства атмосферных движений главное значение имеет не молекулярное, а турбулентное перемешивание, при котором свойства переносятся в потоке не отдельными молекулами, а частицами жидкости значительных размеров (более подробно этот вопрос будет рассмотрен в следующем параграфе). В случае турбулентного перемешивания по аналогии с (2.2.8) можно считать, что

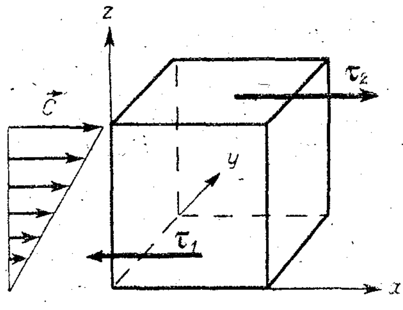

Рис. 7. Действие касательных напряжений на элементарный объем

$$\tau_т = A_z \cdot \frac{d\bar{c}}{dz}, \qquad (2.2.9)$$

где A_z — коэффициент турбулентной вязкости или турбулентного обмена вдоль оси z. Обычно A_z на много порядков величин больше μ $\left(\text{т. е. } (\mu+A_z)\cdot\frac{d\bar{c}}{dz}\cong A_z\frac{d\bar{c}}{dz}\right)$. Наряду с A_z часто вводят понятие коэффициента турбулентности $k_z=\frac{A_z}{\rho}$ и тогда

$$\tau_т = \rho\cdot k_z\cdot\frac{d\bar{c}}{dz}. \qquad (2.2.10)$$

Физический смысл A_z и k_z будет пояснен позже. Сначала получим выражение для проекции силы турбулентного трения. Для этого рассмотрим элементарный объем $dx\cdot dy\cdot dz$, расположенный в потоке, скорость которого растет с высотой. Обозначим через τ_1 и τ_2 касательные напряжения (рис. 7), действующие на нижнюю и верхнюю грань объема вдоль оси x: $\tau_1=\tau_x(z)$, $\tau_2=\tau_x(z+dz)$ и разложим τ_2 в ряд

$$\tau_2=\tau_x(z+dz)=\tau_x(z)+\frac{\partial\tau_x}{\partial z}dz+\ldots,$$

В таком случае силу трения, действующую на объем вдоль оси x, за счет касательных напряжений τ_2 и τ_1 можно представить как

$$f_{\tau x}^{z}=(\tau_2-\tau_1)\,dx\cdot dy$$

или

$$f_{\tau x}^{z}=\frac{\partial \tau_x}{\partial z}\,dx\cdot dy\cdot dz.$$

(Здесь и в дальнейшем нижний индекс указывает проекцию силы трения, а верхний — проекцию градиента скорости).

Сила $f_{\tau x}^{z}$, отнесенная к единице массы, запишется в виде

$$F_{\tau x}^{z}=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \tau_x}{\partial z}=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(A_z\frac{\partial u}{\partial z}\right). \tag{2.2.11'}$$

По аналогии можно найти выражение и для $F_{\tau y}^{z}$, $F_{\tau z}^{z}$

$$\left.\begin{aligned} F_{\tau y}^{z}&=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \tau_y}{\partial z}=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(A_z\frac{\partial v}{\partial z}\right),\\ F_{\tau z}^{z}&=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \tau_z}{\partial z}=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(A_z\frac{\partial w}{\partial z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{2.2.11''}$$

Рассмотрим теперь случай, когда поток имеет горизонтальный градиент скорости. Тогда можно получить выражения для остальных составляющих

$$\left.\begin{aligned} F_{\tau x}^{x}&=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \tau_x}{\partial x}=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial x}\cdot A_x\,\frac{\partial u}{\partial x},\\ F_{\tau y}^{x}&=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \tau_y}{\partial x}=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial x}\cdot A_x\,\frac{\partial v}{\partial x},\\ F_{\tau z}^{x}&=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \tau_z}{\partial x}=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial x}\cdot A_x\,\frac{\partial w}{\partial x},\\ F_{\tau x}^{y}&=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \tau_x}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial y}\cdot A_y\,\frac{\partial u}{\partial y},\\ F_{\tau y}^{y}&=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \tau_y}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial y}\cdot A_y\,\frac{\partial v}{\partial y},\\ F_{\tau z}^{y}&=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial \tau_z}{\partial y}=\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial}{\partial y}\cdot A_y\,\frac{\partial w}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{2.2.11'''}$$

где A_x, A_y — коэффициенты турбулентного обмена вдоль осей x и y.

Воспользовавшись полученными выражениями для сил, действующих в атмосфере, (2.2.3), (2.2.6), (2.2.7), (2.2.11), перепишем теперь уравнения движения (2.1.5) в развернутом виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+2\omega_z v+\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial x}k_x\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}k_y\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}k_z\frac{\partial u}{\partial z},\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-2\omega_z u+\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial x}k_x\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}k_y\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}k_z\frac{\partial v}{\partial z},\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g+\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial x}k_x\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}k_y\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}k_z\frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \qquad (2.2.12)$$

Поскольку в (2.2.12) содержится новая неизвестная характеристика — коэффициент турбулентности, то необходимо более подробно познакомиться с явлением турбулентности и найти способ замыкания системы уравнений.

§ 3. Понятие об атмосферной турбулентности. Выражения для турбулентных потоков тепла, влаги и количества движения

Если построить график зависимости скорости ветра, впрочем как и любой другой характеристики атмосферы, от времени у поверхности земли (рис. 8), то будет видно, что скорость движения пульсирует, т. е. резко изменяет свою величину и направление в течение коротких промежутков времени. Режим движения, при котором отдельные частицы жидкости или газа имеют неправильные, хаотические траектории с поперечными и даже обратными (по отношению к общему

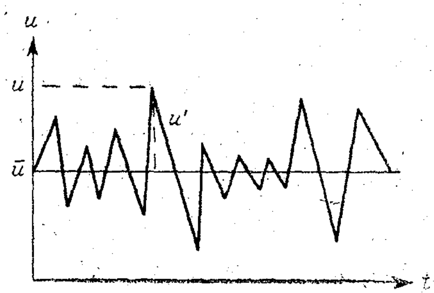

Рис. 8.

движению) перемещениями, называется турбулентным. Из гидромеханики известно, что характер движения жидкости или газа зависит от безразмерного числа Рейнольдса

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho u L}{\mu}, \qquad \mu=\nu\rho, \tag{2.3.1}$$

Здесь u — характерное значение скорости потока; L — характерный размер потока; μ — динамический коэффициент вязкости; ρ — плотность. При малых Re движение имеет ламинарный характер (частицы перемещаются параллельно друг другу по плавным траекториям), при больших Re движение имеет турбулентный характер.

За исключением движения в очень тонком слое воздуха (толщиной в несколько миллиметров), так называемом ламинарном подслое, прилегающем к земной поверхности, все атмосферные движения имеют турбулентный характер.

Из рис. 8 видно, что мгновенную скорость ветра (скорость в данный момент времени) можно представить как

$$u=\overline{u}+u', \tag{2.3.2}$$

где $\overline{u}$ — средняя за некоторый период времени скорость; u' — отклонение от средней. Так как средняя кинетическая энергия потока пропорциональна $\overline{u^2}$, то с учетом того, что

$$\overline{u^2}=\overline{\overline{u}^2}+2\overline{\overline{u}u'}+\overline{u'^2}=\overline{u}^2+\overline{u'^2}, \tag{2.3.3}$$

получаем: средняя кинетическая энергия потока складывается из кинетической энергии осредненного, сглаженного движения и кинетической энергии пульсаций, называемой энергией турбулентности (b).

При получении этого вывода мы использовали один из постулатов статистической теории турбулентности $\overline{\overline{f}\cdot f'}=0$ (считается, $f=\overline{f}+f'$). Напомним и другие постулаты:

$$\overline{f_1+f_2}=\overline{f}+\overline{f_2};\ \overline{\overline{f}}=\overline{f},$$

$$\overline{f_1\cdot f_2}=\overline{f}_1\cdot\overline{f}_2+\overline{f'_1\cdot f'_2} \tag{2.3.4}$$

(если f_1 и f_2 независимы, то $\overline{f'_1\cdot f'_2}=0$),

$$\overline{f'}=0.$$

Все постулаты довольно легко доказываются. Например, справедливость последнего можно показать так:

$$f'=f-\overline{f};\ \overline{f'}=\overline{f}-\overline{\overline{f}}=\overline{f}-\overline{f}=0.$$

По аналогии с процессами молекулярного перемешивания, когда переносчиками свойства являются отдельные молекулы; в теории турбулентности вводится понятие турбулентного моля — отдельной частицы жидкости или газа, которая отрывается от общего потока в одной его точке и смешивается с ним в другой (перенося таким образом его свойства из одной точки в другую).

Хотя практически смешение идет непрерывно, вводится понятие пути смешения (аналог пути свободного пробега в молекулярной теории) как расстояния l, которое проходит турбулентный моль от момента зарождения до полного смешения с окружающей средой. Турбулентный моль представляет вихрь, возникающий за счет гидродинамической неустойчивости основного потока. Прохождение через данную точку пространства вихрей разных размеров, несущих свойства из различных частей основного потока, и создает ту сложную картину изменения метеорологического элемента, которая показана на рис. 8.

В дальнейшем мы будем рассматривать только вихри с горизонтальной осью, определяющие перенос свойства в вертикальном направлении.

Получим общее выражение для турбулентного потока любой субстанции S. Если понимать под S количество субстанции в единице массы воздуха, то для потока тепла $S=c_p\Theta$ (Θ — потенциальная температура), для потока водяного пара $S=q$ (удельная влажность), для потока количества движения $S=c$ (c—скорость потока).

Рассмотрим на уровне z единичную горизонтальную площадку σ, через которую снизу вверх проходят вихри со скоростью w. За единицу времени через площадку пройдет количество субстанций S, содержащееся в объеме σw, т. е. $S\rho\sigma w$ (рис. 9).

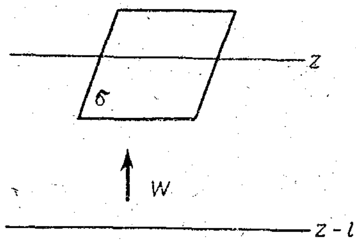

Рис. 9. Перенос свойства через площадку

Так как под потоком субстанций Q обычно понимают ее количество, переносимое за единицу времени через единичную площадку в направлении нормали к ней, то

$$Q = \frac{1}{t}\int_0^t \rho wSdt. \qquad (2.3.5)$$

Выразим w и S через средние величины и флюктуации: $w=\overline{w}+w'$; $S=\overline{S}+S'$. Тогда (2.3.5) примет вид

$$Q=\frac{1}{t}\left[\int_0^t \rho\,\overline{w}\,\overline{S}dt+\int_0^t \rho\,\overline{w}\,S'\,dt+\int_0^t \rho w'\,\overline{S}\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^t \rho w'\,S'\,dt\right]=\rho\overline{w}\,\overline{S}+\overline{\rho w' S'}. \qquad (2.3.6)$$

Первый член этого соотношения определяет поток субстанций, обусловленный средним движением, остальные три члена дают поправку за счет турбулентности. На основании ранее рассмотренных постулатов вторым и третьим членами можно пренебречь. Четвертый член обычно не равен нулю (так как w' и S' взаимосвязаны). Таким образом, поток свойства S складывается из потока, обусловленного средней скоростью $Q_1=\rho S\overline{w}$, и турбулентного потока $Q_2=\frac{1}{t}\int_0^t \rho\,w'\,S'\,dt$.

Пульсацию свойства на уровне z можно представить как разность между свойством вихря и среды. Если вихрь пришел с уровня $z-l$ и на пути сохранил свои начальные качества, то он принес свойство $S=S(z-l)$ и тогда $S'=S(z-l)-\overline{S}(z)$, при условии, что на исходном уровне вихрь обладает свойством этого уровня.

Для достаточно малого l — пути смешения $\overline{S}(z-l)$ можно разложить в ряд

$$\overline{S}(z-l)=\overline{S}(z)-\frac{\partial\overline{S}}{\partial z}l+\ldots$$

В таком случае

$$S'=-\frac{\partial\overline{S}}{\partial z}l$$

$$Q_2=-\frac{1}{t}\int_0^t \rho w' l\cdot\frac{\partial\overline{S}}{\partial z}dt=-\rho\frac{\partial\overline{S}}{\partial z}\,\frac{1}{t}\int_0^t w' l dt=-\rho\,\overline{w' l}\,\frac{\partial\overline{S}}{\partial z}. \qquad (2.3.7)$$

В общем случае следует считать, что l может быть различной для разных субстанций, ибо оно само зависит от градиента субстанции (действительно, вихрь, первоначально обладающий количеством субстанции S, должен пройти различное расстояние, чтобы смешаться с окружающей средой по содержанию количества движения, тепла или влаги, в зависимости от градиента этих субстанций). С учетом этого формулу для турбулентного потока субстанции S следует записать в виде

$$Q_2=-\rho\overline{w' l_s}\cdot\frac{\partial\overline{S}}{\partial z}. \qquad (2.3.8)$$

Из физических соображений можно считать, что $\overline{w' \cdot l_s}$ является характеристикой турбулентного перемешивания, ее обозначают через κ_s и называют коэффициентом турбулентности для потока субстанции S

$$Q_2 = -\rho k_s \cdot \frac{\partial \overline{S}}{\partial z}. \qquad (2.3.9)$$

В таком случае турбулентные потоки количества движения, тепла и влаги можно выразить так:

$$\tau = \rho \cdot k \cdot \frac{\partial \overline{c}}{\partial z}; \qquad (2.3.10)$$

$$P = -\rho k_{\text{т}} c_p \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial z} = -\rho k_{\text{т}} c_p \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \gamma_a \right); \qquad (2.3.11)$$

$$E = -\rho k_q \cdot \frac{\partial \overline{q}}{\partial z}. \qquad (2.3.12)$$

В формуле (2.3.10) знак выбран из соображений удобства записи τ, так как в атмосфере обычно $\partial \overline{c}/\partial z > 0$. С учетом (2.3.10—2.3.12) притоки тепла и влаги, входящие в уравнение притока тепла (2.1.18 или 2.1.21) и притока влаги (2.1.23) можно рассматривать как дивергенцию соответствующих потоков и для единицы массы представить в форме

$$\varepsilon_{\text{т}} = c_p \frac{\partial}{\partial z} k_{\text{т}} \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \gamma_a \right); \qquad (2.3.13)$$

$$\varepsilon_{q\text{т}} = \frac{\partial}{\partial z} k_q \cdot \frac{\partial q}{\partial z}. \qquad (2.3.14)$$

§ 4. Факторы, определяющие интенсивность турбулентности. Уравнение баланса энергии турбулентности

Обозначим через E_1 энергию турбулентности, возникающую за счет кинетической энергии основного потока. Вихри, образовавшиеся либо из-за обтекания неровностей поверхности, либо благодаря резкому изменению скорости с высотой, перемещаются из слоя в слой. Если плотность окружающей среды отличается от плотности вихря, то на него начинает действовать сила Архимеда. Обусловленное ею ускорение либо совпадает с направлением движения вихря, увеличивает скорость и запас его энергии, либо направлено в сторону, противоположную движению вихря, уменьшает скорость и запас энергии вихря. Обозначим через E_2 приток (отток) энергии за счет действия силы Архимеда. Благодаря соприкосновению и поверхностному трению между вихрями часть их энергии может переходить в тепловую. Такой переход называется диссипацией энергии турбулентности — обозначим ее через E_3. Наконец, через E_4 обозначим приток (отток) энергии турбулентности за счет обмена вихревой энергией между соседними слоями (диффузия энергии турбулентности).

С учетом введенных обозначений можно записать в общем виде уравнение баланса энергии турбулентности

$$\frac{db}{dt}=E_1+E_2+E_3+E_4. \tag{2.4.1}$$

Уравнение (2.4.1) утверждает, что изменение энергии турбулентности связано с притоком энергии турбулентности от среднего потока, действием силы Архимеда, диссипацией и диффузией. Получим выражения для E_1, E_2, E_3 и E_4. Для определения E_1 рассмотрим взаимодействие элементарного объема $dx \cdot dy \cdot dz$ с окружающей средой (рис. 10). Обозначим через $\vec{c}(z)$ и $\vec{c}(z+dz)$ — вектора скорости на уровне z и $z+dz$, а через $\vec{\tau}(z)$

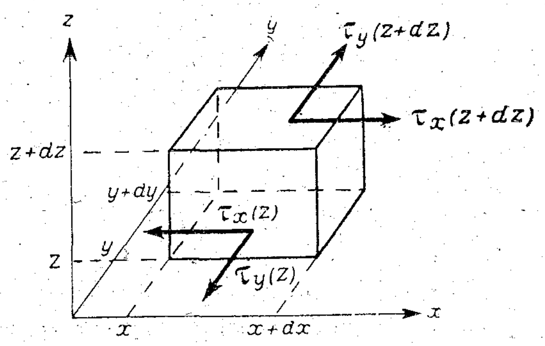

Рис. 10. Действие сил турбулентного трения на элементарный объем

и $\vec{\tau}(z+dz)$ — касательные напряжения, действующие на нижнюю и верхние грани объема. В таком случае работу, затрачиваемую на преодоление сил турбулентного трения за единицу времени, можно выразить уравнением

$$W=[\vec{c}(z+dz)\cdot\vec{\tau}(z+dz)-\vec{c}(z)\cdot\vec{\tau}(z)]\,dx\,dy. \tag{2.4.2}$$

где $\vec{c}=\vec{i}\cdot u+\vec{j}v$; $\vec{\tau}=\vec{i}\tau_x+\vec{j}\cdot\tau_y$.

Разложим $\vec{\tau}(z+dz)$ и $\vec{c}(z+dz)$ в ряд

$$\vec{\tau}(z+dz)=\vec{\tau}(z)+\frac{\partial\vec{\tau}}{\partial z}\cdot dz+\ldots;$$

$$\vec{c}(z+dz)=\vec{c}(z)+\frac{d\vec{c}}{\partial z}\cdot dz+\ldots.$$

Воспользовавшись выражением для $\vec{c}(z+dz)$ и $\tau(z+dz)$, перепишем (2.4.2) в виде

$$W=\frac{\partial}{\partial z}\left[\vec{c}(z)\vec{\tau}(z)\right]dz\cdot dx\cdot dy$$

или, подставив выражения для векторов скорости и касательного напряжения, получим

$$W=\left[\frac{\partial(\tau_x\cdot u)}{\partial z}+\frac{\partial(\tau_y\cdot v)}{\partial z}\right]dx\cdot dy\cdot dz. \qquad (2.4.3)$$

При выводе (2.4.3) использовано свойство скалярного произведения двух векторов: $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$ и $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$ и т. д.

Для единицы массы (2.4.3) примет вид

$$W=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\tau_x u)}{\partial z}+\frac{\partial(\tau_y v)}{\partial z}\right]. \qquad (2.4.4)$$

Работа, совершаемая турбулентными напряжениями частично идет на изменение кинетической энергии среднего движения, а частично переходит в кинетическую энергию турбулентных пульсаций.

Определим интересующую нас энергию турбулентности, возникающую за счет кинетической энергии среднего потока, как разность между работой, совершаемой турбулентными напряжениями, и той ее частью, которая идет на изменение кинетической энергии среднего движения. Последнюю выразим из уравнения баланса кинетической энергии среднего движения, которое получается, если уравнения движения

$$\frac{du}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+2\omega_z v+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_x}{\partial z},$$

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-2\omega_z u+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau_y}{\partial z}$$

умножить — первое на u, второе на v и сложить

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)=-\frac{1}{\rho}\left(u\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{1}{\rho}\left(u\frac{\partial \tau_x}{\partial z}+v\frac{\partial \tau_y}{\partial z}\right). \quad (2.4.5)$$

Левая часть уравнения баланса кинетической энергии среднего движения (2.4.5) выражает изменение кинетической энергии единицы массы воздуха; первое слагаемое в правой части может быть записано как $\frac{1}{\rho}(\vec{c}, \vec{F}_{pn})$, т. е. представляет работу, совершаемую горизонтальным градиентом давления при движении единичной массы воздуха; второе слагаемое в правой части характеризует изменение кинетической энергии среднего движения под влиянием силы турбулентного трения.

Таким образом, кинетическую энергию турбулентности, возникающую за счет основного потока, можно определить как разность между (2.4.4) и вторым членом в правой части (2.4.5)

$$E_1=\frac{1}{\rho}\left[\tau_x\frac{\partial u}{\partial z}+\tau_y\frac{\partial v}{\partial z}\right] \quad (2.4.6)$$

или, так как

$$\tau_x=\rho\cdot k\frac{\partial u}{\partial z},\quad \tau_y=\rho\cdot k\frac{\partial v}{\partial z},$$

то

$$E_1=k\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]. \quad (2.4.7)$$

В области мелкомасштабной турбулентности (максимальная величина l порядка сотни метров) можно считать, что коэффициент турбулентности всегда положителен и E_1 является всегда приходной частью уравнения баланса энергии турбулентности. При рассмотрении мезомасштабной турбулентности (максимальная величина l порядка сотни километров) оказывается, согласно [15], что k может быть меньше 0 (явление отрицательной вязкости) и часть мезомасштабной энергии турбулентности может идти на развитие крупномасштабных движений (в океане это проявляется в том, что вихри, например, образующиеся в Гольфстриме, отдают часть своей энергии среднему потоку; в метеорологии в качестве мезомасштабной турбулентности можно рассматривать циклоны и антициклоны, которые также передают часть своей энергии крупномасштабной общей циркуляции атмосферы).

В дальнейшем нас будет интересовать только мелкомасштабная турбулентность и можно считать, что $E_1>0$.

Чтобы получить выражение для E_2, рассмотрим на уровне z некоторую площадку S (рис. 11), через которую проходят вихри с уровней $(z-l)$ и $(z+l)$. Будем считать, что средние температуры на этих уровнях соответственно равны $\overline{T}(z)$, $\overline{T}(z-l)$, $\overline{T}(z+l)$.

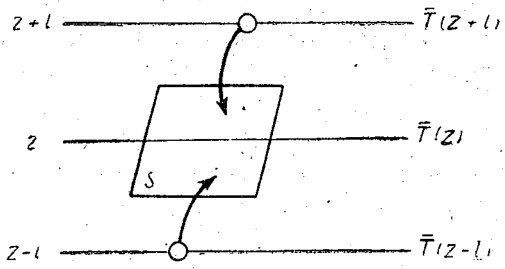

Рис. 11. Ускорение вихря за счет действия силы Архимеда

Так как температура, а значит и плотность вихрей, проходящих через уровень z, будут отличаться от температуры и плотности воздуха на этом уровне, то вихри должны двигаться с ускорением, которое можно определить из третьего уравнения движения системы (2.2.12), если пренебречь малыми членами

$$\frac{dw}{dt}=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{2.4.8}$$

При условии квазистатичности (которое достаточно хорошо выполняется в реальной атмосфере) $p=\overline{p}$ (здесь и в дальнейшем величины с чертой относятся к среде, а без черты — к вихрю) и с учетом уравнения статики

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial \overline{p}}{\partial z}=-\overline{\rho}\cdot g.$$

Запишем (2.4.8) в виде

$$\frac{dw}{dt}=g\frac{\overline{\rho}-\rho}{\rho}. \tag{2.4.9}$$

Если выразить плотность из уравнения состояния, то

$$\frac{dw}{dt}=g\frac{T-\overline{T}}{\overline{T}}. \tag{2.4.10}$$

Допустим, что температура вихря на уровне $(z-l)$ равна температуре среды на этом уровне, т. е. $T(z-l)=\overline{T}(z-l)$. Тогда температуру вихря на уровне z можно представить как

$$T'(z)=\overline{T}(z-l)-\gamma_a\cdot l_\uparrow.$$

($l_\uparrow$ показывает, что вихрь движется снизу вверх). С другой стороны, $\overline{T}(z)$ также можно выразить через $\overline{T}(z-l)$

$$\overline{T}(z)=\overline{T}(z-l)+\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}\cdot l_\uparrow.$$

С учетом этих выражений перепишем (2.4.10)

$$\frac{dw}{dt}=-\frac{g}{T}\left(\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}+\gamma_a\right)l_\uparrow. \tag{2.4.11}$$

Вихрь, движущийся снизу вверх с ускорением, определяемым (2.4.11), совершает на пути dz работу

$$dE_i=m\,\frac{dw}{dt}\,dz,$$

где m — масса вихря.

Работа, совершаемая всеми вихрями, проходящими через площадку S за время Δt, равна

$$dE=\sum_{S\Delta t}dE_i=-\frac{g}{T}\left(\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}+\gamma_a\right)\sum_{S\Delta t}(m_\uparrow l_\uparrow+m_\downarrow l_\downarrow)\,dz.$$

Работа, совершаемая в единице массы рассматриваемого объема $S\cdot\Delta z$, за единицу времени (т. е. искомое изменение энергии за счет действия силы Архимеда) выразится уравнением

$$E_2=-\frac{g}{T}\left(\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}+\gamma_a\right)\frac{\sum_{S\Delta t}(m_\uparrow l_\uparrow+m_\downarrow l_\downarrow)}{\rho\cdot S\cdot\Delta t}. \tag{2.4.12}$$

Так как величины m и l связаны с интенсивностью турбулентного обмена, то можно обозначить

$$\frac{\sum_{S\Delta t}(m_\uparrow l_\uparrow+m_\downarrow l_\downarrow)}{S\cdot\Delta t}=\overline{ml}=\rho\,k_\text{т}=A_\text{т}, \tag{2.4.13}$$

где $A_\text{т}$ — коэффициент турбулентного обмена для тепла; $k_\text{т}$ — коэффициент турбулентности для потока тепла. С учетом этих обозначений

$$E_2=-\frac{g}{T}\,k_\text{т}\left(\frac{\partial\overline{T}}{\partial z}+\gamma_a\right). \tag{2.4.14}$$

В соответствии с (2.3.9) поток энергии турбулентности за счет диффузии можно представить в виде

$$\Phi=\rho k_b \frac{\partial b}{\partial z},$$

где k_b — коэффициент турбулентности для переноса кинетической энергии. Тогда отнесенный к единице массы приток энергии турбулентности в слой dz, равный изменению энергии турбулентности за счет диффузии, определится как

$$E_4=\frac{\partial}{\partial z} k_b \frac{\partial b}{\partial z}. \qquad (2.4.15)$$

Для определения диссипации и замыкания системы (у нас появилось новое неизвестное b) используем соображения теории подобия и анализ размерности. Анализ исходной системы уравнений на основании теории подобия показывает, что все характеристики турбулентности можно выразить через кинетическую энергию турбулентности b и путь перемешивания l.

$$\left.\begin{aligned} \kappa &= f_1(l,\ b), \\ \mathrm{Diss} &= f_2(l,\ b). \end{aligned}\right\} \qquad (2.4.16)$$

Для нахождения явного вида зависимостей (2.4.16) используем П-теорему, которая утверждает: если какой-либо физический закон связывает между собой n величин, из которых $m<n$ имеют независимую размерность, то этот закон можно выразить в виде $(n-m)$ безразмерных соотношений, связывающих исходные величины. В таком случае первое из соотношений (2.4.16) можно раскрыть следующим образом. Выпишем формулы размерности для всех входящих величин: $[k]=L^2T^{-1}$, $[l]=L$, $[b]=L^2T^{-2}$. Так как в данном случае $n-m=1$, следовательно, $\frac{k}{l^{\alpha}\cdot b^{\beta}}=c_1$ или $\kappa=c_1 l^{\alpha}\cdot b^{\beta}$, где c_1 — константа.

Из условия равенства размерности левой и правой частей полученного соотношения $LT^{-1}=c_1L^{\alpha}(L^2\cdot T^{-2})^{\beta}$ находим α и β

$$\begin{array}{c|c|} L & 2=\alpha+2\beta \\ T & -1=0-2\beta \end{array} \quad \beta={}^1/_2,\ \alpha=1.$$

Таким образом

$$\kappa=c_1 l\sqrt{b}. \qquad (2.4.17)$$

Совершенно аналогично получаем выражение для диссипации

$$\mathrm{Diss}=c_2\frac{b\sqrt{b}}{l} \qquad (2.4.18)$$

В уравнениях (2.4.17) и (2.4.18) можно избавиться от одной постоянной, если ввести новый масштаб $\tilde{l}=c_1\cdot l$; тогда, понимая в дальнейшем под l величину $\tilde{l}$, перепишем уравнение в виде

$$\kappa = l\sqrt{b}; \qquad (2.4.17')$$

$$\mathrm{Diss} = c \cdot \frac{b\sqrt{b}}{l}, \qquad (2.4.18')$$

где $c = c_1 \cdot c_2$ — новая постоянная, определяемая эмпирически.

Теперь для определения четырех характеристик турбулентности (κ, b, Diss и l) есть три уравнения и необходимо дополнительное соотношение. В качестве такового обычно используется выражение для пути перемешивания. Для одномерного потока и нейтральной стратификации, согласно Карману,

$$l = \varkappa \frac{du/dz}{d^2u/dz^2}, \qquad (2.4.19')$$

где χ — постоянная Кармана.

Для двухмерного потока и нейтральной стратификации уравнение (2.4.19′) было обобщено А. К. Блэкадаром и М. И. Рузиным

$$l = 2\varkappa \frac{\left[\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2\right]}{\frac{d}{dz}\left[\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2\right]}. \qquad (2.4.19'')$$

Для двухмерного потока и произвольной стратификации Д. Л. Лайхтман и С. С. Зилитинкевич предложили следующее выражение для l:

$$l = -\tilde{\varkappa} \cdot \frac{\psi}{\frac{d\psi}{dz}}, \quad \tilde{\varkappa} = 2\varkappa c^{1/4}, \qquad (2.4.19''')$$

где

$$\psi = \left[\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2\right] - \alpha_{\mathrm{T}} \frac{g}{T}\left(\frac{d\bar{T}}{dz} + \gamma_a\right).$$

Подставив в (2.4.1) выражения для компонент (2.4.7), (2.4.14), (2.4.15) и (2.4.18) получим

$$\frac{db}{dt} = k\left[\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2\right] - \frac{g}{T} \cdot \alpha_{\mathrm{T}} \cdot k \cdot \left(\frac{dT}{dz} + \gamma_a\right) -$$

$$- c\,\frac{b\sqrt{b}}{l} + \frac{d}{dz} k_b \frac{db}{dz}, \qquad (2.4.20)$$

которое в сочетании с (2.4.17) и (2.4.19) позволяет определить все интересующие нас характеристики турбулентности κ, b, Diss.

В заключение рассмотрим характер изменения с высотой составляющих уравнения баланса энергии турбулентности. Первый член в правой части (2.4.20) можно представить как

$$E_1 \sim k\left(\frac{dc}{dz}\right)^2.$$

Из простых физических соображений следует, что $k \sim z$. С другой стороны, известно, что у земли скорость ветра изменяется с высотой по логарифмическому закону, а выше — более медленно. Будем считать, что $\frac{dc}{dz} \sim \frac{1}{z}$. В таком случае

$$E_1 \sim z\,\frac{1}{z^2} = \frac{1}{z}, \tag{2.4.21}$$

т. е. поступление энергии турбулентности от среднего движения велико в нижнем слое и убывает с высотой.

Легко показать, что второе слагаемое в (2.4.20) слабо меняется с высотой, так как $k_т \sim z$, $\frac{dT}{dz} \sim \frac{1}{z}$, т. е.

$$E_2 \sim z \cdot \frac{1}{z} = \mathrm{const}. \tag{2.4.22}$$

Таким образом, по мере увеличения высоты и уменьшения роли динамического фактора увеличивается роль плотностного.

Диффузия, как правило, приводит к уменьшению энергии турбулентности в нижних слоях (где большое E_1) и увеличению ее в верхних слоях (где мало E_1).

Диссипация уменьшается с высотой, так как она зависит от поверхности соприкосновения вихрей, т. е. их размеров, а наиболее мелкие вихри встречаются у поверхности земли.

С учетом соотношений (2.4.17′), (2.4.18′) и (2.4.20) мы имеем теперь замкнутую систему уравнений (2.1.7, 2.1.13, 2.1.20, 2.2.12). Решение этой системы в полном виде сопряжено с большими трудностями. Рассмотрим в дальнейшем возможности упрощения исходных уравнений для тех или иных конкретных условий.

§ 5. Некоторые вопросы статики атмосферы (уравнение статики, барометрические формулы, понятие о геопотенциале, условия вертикальной устойчивости)

При стационарных условиях вес вертикального столба, простирающегося от поверхности земли до границы атмосферы и имеющего единичную площадь сечения, равен атмосферному давлению. Так как сила тяжести, действующая на единицу объема, равна ρg, то давление на любой высоте z выражается как

$$p=\int_{z}^{\infty}\rho g\cdot dz.$$

Если продифференцировать это выражение по z, то получим уравнение статики атмосферы

$$\frac{dp}{dz}=-\rho g. \qquad (2.5.1)$$

Ранее было показано, что в пределах атмосферы ускорение силы тяжести можно считать постоянным; в таком случае уравнение (2.5.1) показывает, что давление с высотой убывает тем быстрее, чем больше плотность воздуха.

Определение вертикального распределения давления (барометрические формулы)

Выразим плотность воздуха ρ из уравнения состояния для влажного воздуха: $\rho=\frac{p}{R\cdot T_в}$. Тогда уравнение статики примет вид

$$\frac{dp}{p}=-g\,\frac{dz}{R\cdot T_в}.$$

Проинтегрируем его от p_0 до p и от 0 до z

$$p=p_0\cdot e^{-\int_0^z \frac{g}{R\cdot T_в}\cdot dz}. \qquad (2.5.2)$$

Формула (2.5.2) связывает давление на высоте z с давлением на исходном уровне в зависимости от вертикального распределения виртуальной температуры. Так как фактическое распределение температуры трудно выразить простой аналитической функцией, то окончательное интегрирование (2.5.2) возможно только для ряда частных случаев. Интегралы уравнения статики называются барометрическими формулами:

а) однородная атмосфера $\rho=\rho_0=\mathrm{const}$

$$p_0-p=\rho g z;$$

б) политропная атмосфера $T=T_0-\gamma z$

$$p = p_0 \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{g}{R \cdot \gamma}};$$

в) изотермическая атмосфера $T = T_0 = \text{const}$

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{gz}{RT_0}}.$$

В общем случае (2.5.2) можно записать в виде

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{gz}{R \cdot T_{m\text{в}}}}, \qquad (2.5.2')$$

где $T_{mb} = \frac{z}{\int\limits_0^z \frac{dz}{T_\text{в}}}$ — средняя барометрическая температура (температура фиктивного изотермического слоя, при которой толщина слоя и разность давлений на его границах равны соответственно толщине слоя и разности давлений на границах в данных условиях). Так как $T_{m\text{в}}$ до высоты 5 *км* мало отличается от средней виртуальной температуры $T_{m\text{в}} = \frac{1}{z} \int\limits_0^z T_\text{в} \cdot dz$, которую можно вычислить по данным температурного зондирования, то для реальной атмосферы напишем барометрическую формулу

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{gz}{R \cdot T_{m\text{в}}}} \qquad (2.5.3)$$

Геопотенциал. Карты барической топографии

Геопотенциалом или потенциалом силы тяжести называется работа, совершаемая при подъеме единицы массы от одного уровня до другого

$$\Phi = \int\limits_0^z g dz; \quad [\Phi] = L^2 \cdot T^{-2}.$$

Геопотенциал характеризует потенциальную энергию воздушной частицы, находящейся на высоте z. Поверхности равных значений Φ называются поверхностями уровня (при перемещении вдоль них работа силы тяжести равна нулю). За нулевую поверхность принимают поверхность уровня невозмущенного океана. На полюсе поверхности проходят ближе друг к другу, чем на экваторе (на полюсе больше g).

Понятие геопотенциала получило широкое применение в связи с такими методами анализа атмосферных процессов, как аэрологические диаграммы, вертикальные разрезы, карты барической топографии. Последние используются для характеристики поля давления на высотах.

Если представить $d\Phi = g dz$ и воспользоваться уравнением статики, то $d\Phi = -\frac{dp}{\rho}$, или, учитывая, что $\rho = \frac{p}{RT_{в}}$,

$$d\Phi = -RT_{в}\frac{dT}{p}. \tag{2.5.4}$$

Введем среднюю виртуальную температуру слоя $T_{mв}$ и проинтегрируем (2.5.4) по Φ от 0 до Φ, а по p от p_0 до p

$$\Phi_{абс} = RT_{mв} \cdot \ln\frac{p_0}{p}, \tag{2.5.5}$$

где p_0 — давление на уровне моря. Полученная величина характеризует высоту данной изобарической поверхности над уровнем моря и называется абсолютным геопотенциалом.

Из (2.5.5) видно, что абсолютный геопотенциал данной изобарической поверхности ($p = \text{const}$) зависит от p_0 и $T_{mв}$. Прологарифмируем, а потом продифференцируем (2.5.5)

$$\ln\Phi_{абс} = \ln R + \ln T_{mв} + \ln\left(\ln\frac{p_0}{p}\right);$$

$$\frac{d\Phi_{абс}}{\Phi_{абс}} = \frac{dT_{mв}}{T_{mв}} + \frac{d\left(\ln\frac{p_0}{p}\right)}{\ln\frac{p_0}{p}}$$

или

$$\frac{d\Phi_{абс}}{\Phi_{абс}} = \frac{dT_{mв}}{T_{mв}} + \frac{1}{p_0}\frac{dp_0}{\ln\frac{p_0}{p}}.$$

или с учетом (2.5.5) получаем

$$d\Phi_{абс} = R\ln\frac{p_0}{p}\,dT_{mв} + RT_{mв}\frac{dp_0}{p_0}. \tag{2.5.6}$$

Формула (2.5.6) позволяет найти изменение абсолютного геопотенциала данной изобарической поверхности, если известно изменение давления на уровне моря и изменение средней виртуальной температуры слоя. Хорошо видно, что, если изменение p_0 приводит к одинаковому изменению $d\Phi_{абс}$ для разных изобарических поверхностей, то изменение $T_{mв}$ сказывается по-разному для разных поверхностей.

В Советском Союзе обычно вычисляются абсолютные геопотенциалы поверхностей: 1000, 850, 700, 500, 300, 200, 100, 50 *мб*, по которым строятся карты АТ с изолиниями равного геопотенциала (изогипсами).

Наряду с $\Phi_{абс}$ используется понятие относительного геопотенциала, который характеризует высоту одной изобарической поверхности $p_2 = \mathrm{const}$ над другой $p_1 = \mathrm{const}$.

Для определения относительного геопотенциала проинтегрируем (2.5.4) по Φ от Φ_1 до Φ_2, а по p от p_1 до p_2

$$\Phi_2 - \Phi_1 = R \cdot T_{mв} \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} = \Phi_{отн}. \qquad (2.5.7)$$

Относительный геопотенциал зависит только от средней температуры слоя между изобарическими поверхностями $p_1 = \mathrm{const}$ и $p_2 = \mathrm{const}$. Можно сделать и обратный вывод: относительный геопотенциал характеризует среднюю температуру слоя и поле изогипс относительного геопотенциала можно рассматривать как поле средней температуры слоя.

Наиболее часто используют карты OT_{1000}^{500}, OT_{1000}^{700}, OT_{500}^{300}. Карта OT_{1000}^{500} определяет распределение средней виртуальной температуры в нижнем пятикилометровом слое атмосферы. Области низкого значения геопотенциала соответствуют областям холода; области высокого значения геопотенциала — областям тепла. Совмещенные карты AT_{700} и OT_{1000}^{500} позволяют судить о характере и величине адвекции тепла и холода.

В системе CGS единицей геопотенциала является 1 *см²/сек²*, практической единицей до 1950 г. был динамический метр (10^5 *см²/сек²* или 10 *м²/сек²*), $\Phi_{дин.\,м} = 0{,}98z$. Так как геопотенциал, выраженный в динамических метрах, на больших высотах заметно отличается от геометрической высоты, то в дальнейшем была введена новая единица — геопотенциальный метр $\Phi_{гп.\,м} = \frac{g \cdot z}{9{,}8}$, т. е. практически геопотенциал в геопотенциальных метрах совпадает по величине с геометрической высотой. Изогипсы абсолютного и относительного геопотенциала проводятся через 40 *гп.м* или 4 *гпдк.м*.

Несмотря на относительную малость вертикальной скорости, вертикальные движения играют в атмосфере важную роль (развитие облаков, образование осадков и т. д.). Интенсивность конвективных вертикальных движений во многом определяется соотношением температур перемещающейся массы воздуха и окружающей среды. Состояние атмосферы, при котором смещающаяся по вертикали воздушная масса получает положительное ускорение (т. е. ускорение совпадает с направлением скорости), называется неустойчивым, а когда воздушная масса получает отрицательное ускорение — устойчивым. Наконец, случай, когда движение воздушной массы происходит без ускорений, соответствует безразличному состоянию.

В § 4 было показано, что вертикальное ускорение частицы воздуха, из-за различия температур частицы и среды, можно выразить в виде (2.4.11):

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{g}{T}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \gamma_a\right)\cdot \delta z. \tag{2.5.8}$$

Если путь, проходимый частицей δz, выразить через $w \cdot \delta t$, то

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{g}{\overline{T}}\cdot\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \gamma_a\right)\cdot w \cdot \delta t. \tag{2.5.9}$$

Из (2.5.9) очевидно, что неустойчивое состояние атмосферы (совпадают знаки w и dw/dt) соответствует

$$\left.\begin{array}{ll} & \left(\gamma_a + \frac{\partial \overline{T}}{\partial z}\right) < 0, \\ \text{устойчивое} - & \left(\gamma_a + \frac{\partial \overline{T}}{\partial z}\right) > 0, \\ \text{безразличное} - & \left(\gamma_a + \frac{\partial \overline{T}}{\partial z}\right) = 0. \end{array}\right\} \tag{2.5.10}$$

При выводе этих соотношений, определяющих условия состояния атмосферы, считалось, что температура частицы на исходном уровне совпадает с температурой среды. В действительности, из-за пульсаций температура частицы на исходном уровне может отличаться от температуры среды, при этом перегретые частицы будут двигаться вверх, а переохлажденные вниз. Следовательно, в таком случае, ускорение нужно выразить в виде следующего соотношения:

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{g}{T}\left[(\overline{T}_0 - T_0) + \left(\gamma_a + \frac{\partial \overline{T}}{\partial z}\right) w\delta t\right], \qquad (2.5.11)$$

так как при $\overline{T}_0 > T_0$, $w < 0$, то $w = -\frac{g}{T}(\overline{T}_0 - T)\cdot t$ и, значит, за счет указанного эффекта в (2.5.8) добавится член $-\frac{g}{T}(\overline{T}_0 - T_0)$.

Если считать, что уровень, до которого способна подняться перегретая частица (уровень конвекции), близок к уровню, на котором равно нулю вертикальное ускорение (в действительности, уровень конвекции нужно определить из условия $w=0$), то этот уровень можно определить из условия

$$\overline{T}_0 - T_0 + \left(\gamma_a + \frac{\partial T}{\partial z}\right)\delta z = 0$$

или

$$\delta z = \frac{T_0 - \overline{T}_0}{\gamma_a + \frac{\partial \overline{T}}{\partial z}}.$$

Соотношения, определяющие условия вертикальной устойчивости могут быть записаны иначе, если вспомнить выражение для потенциальной температуры

$$\Theta = \overline{T}\cdot\left(\frac{1000}{p}\right)^{\frac{AR}{c_p}}.$$

Прологарифмируем и продифференцируем это выражение:

$$\ln\Theta = \ln\overline{T} + \frac{AR}{c_p}\ln\left(\frac{1000}{p}\right),$$

$$\frac{1}{\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial z} = \frac{1}{\overline{T}}\frac{\partial\overline{T}}{\partial z} - \frac{AR}{c_p}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial z},$$

$$\frac{1}{\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial z} = \frac{1}{\overline{T}}\left(\frac{\partial\overline{T}}{\partial z} + \frac{Ag}{c_p}\right) = \frac{1}{\overline{T}}\left(\gamma_a + \frac{\partial\overline{T}}{\partial z}\right)$$

$$\left(\text{так как} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -g\frac{p}{RT} \quad \text{и} \quad \frac{Ag}{c_p} = \gamma_a\right),$$

т. е.

$$\frac{1}{\Theta}\frac{\partial\Theta}{\partial z} = \frac{1}{\overline{T}}\left(\gamma_a + \frac{\partial\overline{T}}{\partial z}\right). \qquad (2.5.12)$$

Рассмотренные выше условия вертикальной устойчивости получены в предположении сухой атмосферы. В реальной атмосфере и особенно в атмосфере над морем часто необходимо учитывать зависимость плотности воздуха не только от температуры, но и от влажности ($\rho = p/R \cdot T_в$). В этом случае путем рассуждений, аналогичных предыдущим, можно получить

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{g}{T}\left(\gamma_a + \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + 0{,}605 \cdot \overline{T} \cdot \frac{\partial \overline{q}}{\partial z}\right) w\delta t; \qquad (2.5.13)$$

неустойчивое состояние: $\gamma_a + \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + 0{,}605 \overline{T} \frac{\partial \overline{q}}{\partial z} < 0$;

устойчивое состояние: $\gamma_a + \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + 0{,}605 \overline{T} \frac{\partial \overline{q}}{\partial z} > 0$;

безразличное состояние: $\gamma_a + \frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + 0{,}605 \overline{T} \frac{\partial \overline{q}}{\partial z} = 0$.

Позже мы покажем, что над морем добавка за счет вертикального градиента влажности может иногда играть существенную роль (так как влажность воздуха уменьшается с высотой, то понятно, что этот член должен способствовать увеличению неустойчивости).

§ 6. Упрощение уравнений движения. Классификация атмосферных движений

Полученные ранее уравнения динамики атмосферы очень сложные, поэтому при изучении того или иного атмосферного процесса прежде всего возникает задача упрощения этих уравнений применительно к особенностям изучаемого процесса. Покажем на примере уравнений движения принцип упрощения и на базе этого проведем классификацию атмосферных движений.

Применим к третьему уравнению движения (2.2.12) теорию подобия и оценим в нем порядок членов

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_y \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Для этого для всех переменных S введем некоторые характерные величины, масштабы S_0, штрихом обозначим безразмерные величины S':

$$
\left.
\begin{aligned}
&w=w'\cdot w_0,\quad u=u'\cdot u_0,\quad v=v'\cdot v_0,\quad k_x=k_x'\cdot k_{x0},\\
&\qquad\qquad k_y=k_y'k_{y0},\\
&\rho=\rho'\cdot\rho_0,\quad p=p'\cdot p_0,\quad g=g'\cdot g_0,\quad k_z=k_z'\cdot k_{z0},\\
&x=x'\cdot x_0,\quad y=y'\cdot y_0,\quad z=z'\cdot H_0,\quad t=t'\cdot t_0.
\end{aligned}
\right\}\qquad (2.6.1)
$$

Будем понимать под масштабом величины S такую единицу ее измерения, при которой S имеет порядок единицы: $S'=\frac{S}{S_0}=0\,(1)$. За горизонтальные (x_0 и y_0) и вертикальный (H_0) масштабы примем расстояние, на котором S меняется на порядок собственной величины. За масштаб времени t_0 примем время, за которое S изменится на порядок собственной величины. Легко показать, что при таком выборе масштабов все безразмерные производные будут иметь порядок единицы. Например:

$$
\frac{\partial S}{\partial z}=0\left(\frac{S_0}{H_0}\right)=0\left(\frac{S_0}{H_0}\cdot\frac{\partial S'}{\partial z'}\right),\quad \text{т. е. } \frac{\partial S'}{\partial z'}=0\,(1).
$$

При произвольном направлении осей координат можно считать, что $u_0=v_0=V_0$, $k_{x0}=k_{y0}=k_{l0}$, $x_0=y_0=L_0$. В таком случае, с учетом (2.6.1), исходное уравнение можно записать в следующем виде (разделив все члены на g_0):

$$
\frac{w_0}{g_0 t_0}\cdot\frac{\partial w'}{\partial t'}+\frac{V_0\cdot w_0}{L_0\cdot g_0}\left(u'\cdot\frac{\partial w'}{\partial x'}+v'\frac{\partial w'}{\partial y'}\right)+\frac{w_0\cdot w_0}{g_0 H_0}\cdot w'\cdot\frac{\partial w'}{\partial z'}=
$$
$$
=-\frac{p_0}{g_0\rho_0 H_{p0}}\cdot\frac{1}{\rho'}\cdot\frac{\partial p'}{\partial z'}-g'+\frac{k_{l0}w_0}{L_0 L_{0\tau}\cdot g_0}\left(\frac{\partial}{\partial x'}k'_x\cdot\frac{\partial w'}{\partial x'}+\right.
$$
$$
\left.+\frac{\partial}{\partial y'}k'_y\cdot\frac{\partial w'}{\partial y'}\right)+\frac{k_{0z}\cdot w_0}{H_0 H_{0\tau}g_0}\cdot\frac{\partial}{\partial z_1}k'_z\frac{\partial w'}{\partial z'},\qquad (2.6.2)
$$

где H_0, H_{0p}, $H_{0\tau}$ — вертикальный масштаб для скорости, давления и потока количества движения; L_0, $L_{0\tau}$ — горизонтальный масштаб для скорости и потока количества движения.

Так как все безразмерные члены имеют порядок единицы, то роль каждого члена уравнения определяется стоящим у него коэффициентом. Сравним все коэффициенты с единицей, т. е. коэффициентом при g'. Для оценки величины коэффициентов выберем следующие характерные для атмосферы значения для масштабов:

$V_0=10^3$ *см/сек*, $w_0=0{,}5$ *см/сек*, $L_0\cong L_{0\tau}=10^7$ *см*.
$g_0=10^3$ *см/сек*^{2}, $H_0=H_{0\tau}=10^5$ *см*, $H_{0p}=10^6$ *см*,
$p_0=10^6$ *дин/см*^{2}, $\rho_0=1{,}3\cdot10^{-3}$ *г/см*^{3}, $k_{0l}=10^{10}$ *см*^{2}*/сек*,
$k_{0z}=10^4$ *см*^{2}*/сек*.

В таком случае

$$\frac{w_0 \cdot V_0}{L_0 \cdot g_0} = 5 \cdot 10^{-8}; \quad \frac{w_0^2}{g_0 H_0} = 2{,}5 \cdot 10^{-8}; \quad \frac{k_{0l} \cdot w_0}{L_0 \cdot L_{0\tau} \cdot g_0} = 5 \cdot 10^{-8}; \tag{2.6.3}$$

$$\frac{k_{0z} \cdot w_0}{H_0 \cdot H_{0\tau} \cdot g_0} = 5 \cdot 10^{-10}; \qquad \frac{p_0}{\rho_0 H_{0p} g_0} \cong 1{,}0.$$

Если предполагать, что характерный масштаб времени t_0 определяется только характерным масштабом времени адвекции L_0/V_0, то

$$\frac{w_0}{g_0 t_0} = \frac{w_0 \cdot V_0}{L_0 g_0} = 5 \cdot 10^{-8}. \tag{2.6.3'}$$

Впрочем, и без этого предположения видно, что для обычных атмосферных процессов $w_0/g_0 t_0 \ll 1$, так как этот коэффициент может иметь порядок единицы, только для $t_0 = \dfrac{w_0}{g_0} = 5 \cdot 10^{-4}$ *сек*. Итак, с учетом (2.6.3), очевидно, что в третьем уравнении движения (2.2.12) только два члена имеют одинаковый порядок (около единицы) и его можно записать в виде

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g \quad \text{или} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \tag{2.6.4}$$

Полученное уравнение внешне напоминает уравнение статики атмосферы, но отличается от него тем, что входящие в (2.6.4) величины относятся к частице воздуха.

Напомним, что уравнение (2.6.4) неприменимо при очень больших значениях вертикальной скорости и ускорения, характерных для кучевых, грозовых облаков и горных районов.

С помощью того же метода оценим теперь порядок членов в первом уравнении движения (2.2.12).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega_z v +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} k_l \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_l \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Аналогично можно рассмотреть и второе уравнение (2.2.12).

Как и раньше, выразим все переменные величины через масштаб и безразмерную величину:

$$u = v_0 u', \quad v = v_0 v', \quad w = w_0 w',$$

$$p = p_0 p', \quad \rho = \rho' \rho_0, \quad k_z = k_{z0} k_z', \quad k_l = k_{l0} k_l',$$

$$x = x_0' L_0, \quad y = y' L_0, \quad z = z' H_0, \quad t = t' \cdot t_0.$$

С учетом этих выражений исходное уравнение можно переписать в безразмерных переменных

$$\frac{v_0}{t_0} \frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{v_0^2}{L_0} \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) + \frac{v_0 w_0}{H} w' \frac{\partial u'}{\partial z'} =$$

$$= -\frac{p_0}{\rho_0 L_0} \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'} + 2\omega_z v_0 v' + \frac{k_{0z} v_0}{H^2} \frac{\partial}{\partial z'} k_z' \frac{\partial u'}{\partial z'} +$$

$$+ \frac{k_{0l} v_0}{L_0^2} \frac{\partial}{\partial x'} k_l' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{k_{0l} v_0}{L_0^2} \frac{\partial}{\partial y'} k_l' \frac{\partial u'}{\partial y'}.$$

Разделим все члены на $2\omega_z v_0$

$$\frac{1}{2\omega_z t_0} \frac{\partial u'}{\partial t'} + \frac{v_0}{2\omega_z L_0} \left(u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} \right) + \frac{w_0}{2\omega_z H_0} w' \frac{\partial w'}{\partial z'} =$$

$$= -\frac{p_0}{2\,\omega_z \rho_0 v_0 L_0} \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p'}{\partial x'} + v' + \frac{k_{0z}}{2\omega_z H_0^2} \frac{\partial}{\partial z'} k_z' \frac{\partial u'}{\partial z'} +$$

$$+ \frac{k_{0l}}{2\omega_z L_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial x'} k_l' \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y'} k'_l \frac{\partial u'}{\partial y'} \right). \qquad (2.6.5)$$

Ранее было показано, что все безразмерные члены имеют порядок единицы. В таком случае значимость каждого члена в уравнении определяется, стоящим при нем коэффициентом. Будем сравнивать все коэффициенты с коэффициентом при v', т. е. с единицей. Очевидно, что членами с коэффициентами, значительно меньшими единицы, можно пренебречь по сравнению с v' (силой Кориолиса).

Рассмотрим случаи, когда малы по сравнению с единицей коэффициенты при тех или иных членах уравнения.

1. $\frac{1}{2\omega_z t_0} \ll 1$. В этом случае можно пренебречь первым членом. Такое движение называется **стационарным**. Оценим критерий стационарности для средних широт ($\omega_z = 5 \cdot 10^{-5}$ 1/*сек*):

$$t_0 \gg \frac{1}{2\omega_z} = 10^4 \text{ сек} \approx 3 \text{ час}. \qquad (2.6.6)$$

Следовательно, если скорость изменяется на порядок своей величины за время много большее, чем 3 часа, то движение можно считать стационарным.

2. $\frac{v_0}{2\omega_z L_0} \ll 1$. В этом случае можно пренебречь вторым членом в (2.6.5). Такое движение называется горизонтально-однородным. При $v_0=10$ *м/сек*, для того чтобы движение можно было бы считать горизонтально-однородным, необходимо чтобы

$$L_0 \gg \frac{v_0}{2\omega_z} = 10^5 \text{ м} = 100 \text{ км}, \tag{2.6.7}$$

т. е. скорость должна изменяться на порядок своей величины на расстоянии, значительно большем 100 *км*. Нетрудно показать, что для горизонтально-однородного движения можно пренебречь и членом, учитывающим горизонтальный турбулентный обмен. При $k_{l0} = 10^6$ *м²/сек* [3] из неравенства

$$\frac{k_{l0}}{2\omega_z L_0^2} \ll 1$$

следует, что

$$L_0 \gg \sqrt{\frac{k_{l0}}{2\omega_z}} = \sqrt{\frac{10^6}{10^{-4}}} = 100 \text{ км}.$$

3. $\frac{w_0}{2\omega_z H} \ll 1$. В этом случае можно пренебречь третьим членом в (2.6.5). Такое движение называется плоским. При $w_0=0{,}5$ *см/сек* движение можно считать плоским, если

$$H \gg \frac{w_0}{2\omega_z} = \frac{0{,}5}{10^{-4}} = 5 \cdot 10^3 \text{ см} = 50 \text{ м}, \tag{2.6.8}$$

т. е. горизонтальная скорость должна изменяться на порядок своей величины на расстояниях, значительно больших 50 *м*.

4. $\frac{k_{0z}}{2\omega_z H^2} << 1$. В этом случае можно пренебречь членом, учитывающим влияние сил трения, возникающих у земной поверхности. Слой атмосферы от подстилающей поверхности до высоты, на которой можно пренебречь силой трения (т. е. слой, где существенно влияние силы трения), называется планетарным пограничным слоем атмосферы.

Из записанного выше неравенства можно определить порядок толщины слоя, в котором скорость должна меняться на порядок своей величины, чтобы можно было пренебречь силой трения

$$H \gg \sqrt{\frac{k_{0z}}{2\omega_z}} \qquad (2.6.9)$$

при $k_{0z} = 5$ *м²/сек*, $H >> 220$ *м*.

Таким образом, если скорость меняется на порядок своей величины в слое толщиной, значительно большей 220 *м*, то силой трения можно пренебречь. Результаты наблюдений показывают, что до высот около 1000—1500 *м* $H \leqslant 220$ *м*. Выше 1000—1500 *м* скорость меняется медленно и $H \gg 220$ *м*. Следовательно, для высот больше 1000—1500 *м* можно пренебречь влиянием силы трения. Расположенная выше планетарного пограничного слоя атмосфера называется свободной атмосферой.

III. ОСНОВЫ ДИНАМИКИ СВОБОДНОЙ АТМОСФЕРЫ

§ 1. Движение без трения. Геострофический и градиентный ветер

В конце предыдущего раздела было показано, что выше планетарного слоя — в свободной атмосфере — можно пренебречь влиянием силы трения и в общем случае движение должно описываться следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+2\omega_z v+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}k_l\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}k_l\frac{\partial u}{\partial y},$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-2\omega_z u+$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}k_l\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}k_l\frac{\partial v}{\partial y}. \qquad (3.1.1)$$

Стационарное горизонтально-однородное, плоское движение вдоль прямолинейных изобар называется геострофическим движением или геострофическим ветром. С учетом ранее полученных критериев, геострофическое движение будет описываться следующей системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+2\omega_z v=0,\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-2\,\omega_z u=0,\end{aligned}\right\} \qquad (3.1.2)$$

Другими словами, геострофическое движение можно определить как движение, обусловленное равновесием силы барического градиента и силы Кориолиса

$$\vec{F}_p+\vec{K}=0. \qquad (3.1.3)$$

Если обозначить скорость геострофического ветра через G (компоненты u_g и v_g) и выразить силу барического градиента через $-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}\vec{}$ (n — направление нормали), то

$$G=\frac{1}{2\omega_z\rho}\frac{\partial p}{\partial n}. \qquad (3.1.4)$$

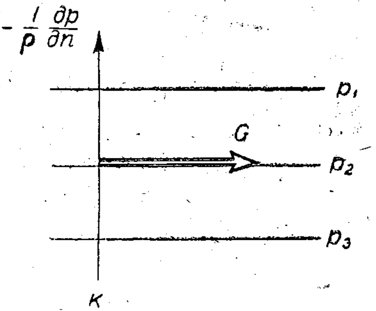

Рис. 12. Связь геострофического ветра (G) с градиентом давления

Для северного полушария условие равновесия сил и направление геострофического ветра можно представить в виде рис. 12, где $p_1 < p_2 < p_3$.

Компоненты геострофического ветра можно определить из (3.1.2)

$$\left.\begin{aligned} u_g&=-\frac{1}{2\omega_z\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\ v_g&=\frac{1}{2\omega_z\rho}\frac{\partial p}{\partial x}.\end{aligned}\right\} \qquad (3.1.5)$$

Из анализа формул (3.1.4), (3.1.5) видно, что скорость геострофического ветра пропорциональна градиенту давления и обратно пропорциональна синусу широты. Геострофический ветер всегда отклоняется на 90° вправо (в северном полушарии) от градиента давления и направлен так, что высокое давление остается справа. То, что угол отклонения равен 90°, хорошо видно и из рис. 12. Можно это доказать и математически:

$$\left(\vec{G}\cdot\overrightarrow{\frac{\partial p}{\partial n}}\right)=G\frac{\partial p}{\partial n}\cdot\cos\left(\vec{G}\,\widehat{\ }\,\overrightarrow{\frac{\partial p}{\partial n}}\right);$$

с другой стороны,

$$\left(\vec{G}\,\overrightarrow{\frac{\partial p}{\partial n}}\right)=u_g\frac{\partial p}{\partial x}+v_g\frac{\partial p}{\partial y}.$$

Подставим выражение для u_g и v_g из (3.1.5) и приравняем правые части обеих выражений

$$G\frac{\partial p}{\partial n}\cos\left(\vec{G}\,\widehat{\ }\,\overrightarrow{\frac{\partial p}{\partial n}}\right)=-\frac{1}{2\omega_z\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+$$

$$+\frac{1}{2\omega_z\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}=0.$$

Так как в общем случае $G \neq 0$, $\partial p/\partial n \neq 0$, то $\cos\left(\vec{G} \wedge \frac{\overrightarrow{\partial p}}{\partial n}\right) = 0$, а значит, угол между $\vec{G}$ и $\frac{\overrightarrow{\partial p}}{\partial n}$ равен 90°. Направим ось x вдоль изобары, тогда $\partial p/\partial x = 0$, $v_g = 0$, $G = u_g = -\frac{1}{2\omega_z \rho} \frac{\partial p}{\partial y}$. Для северного полушария $\omega_z > 0$ и $\partial p/\partial y < 0$ будет соответствовать $u_g = G > 0$ (т. е. движение отклоняется вправо от градиента давления), для южного полушария $\omega_z < 0$ и $u_g = G < 0$ (т. е. движение отклоняется влево).

Скорость геострофического ветра можно выразить и через абсолютный геопотенциал изобарической поверхности. Так как полный дифференциал от давления вдоль изобарической поверхности в общем случае можно записать уравнением

$$dp = \frac{\partial p}{\partial n} \cdot dn + \frac{\partial p}{\partial z} dz = 0,$$

где $\vec{n}$ — направление нормали, то

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dn}$$

и с учетом уравнения статики и выражения для геопотенциала получаем

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho g \frac{dz}{dn} = \rho \frac{d\Phi}{dn} = \rho\, 9{,}8 \frac{dH}{dn}.$$

Подставив полученное выражение в формулу для геострофического ветра (3.1.4), найдем

$$G = \frac{9{,}8}{2\omega_z} \cdot \frac{dH}{dn}. \qquad (3.1.6)$$

Рассмотренный выше геострофический ветер является частным случаем более общего понятия — градиентный ветер. Градиентным называется ветер, направленный вдоль изобары произвольной кривизны. Для случая круговых изобар и установившегося движения довольно легко получить формулу для определения скорости градиентного ветра. Из физических соображений ясно, что в данном случае движение будет определяться условием равновесия трех сил: сил барического градиента, силы Кориолиса и центробежной силы. В случае круговых изобар сила барического градиента F_p будет направлена по радиусу к центру циклона (рис. 13,*а*) и от центра антициклона (рис. 13,*б*) центробежная сила $F_ц$ направлена всегда по ра-

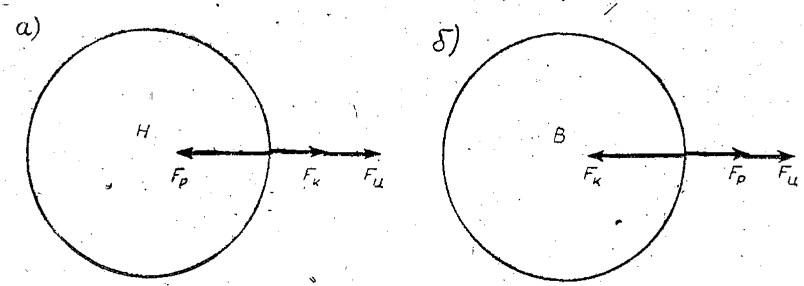

Рис. 13. Условия равновесия силы барического градиента ($F_р$), силы Кориолиса ($F_К$) и центробежной силы ($F_ц$) при криволинейных изобарах

диусу от оси вращения. В таком случае сила Кориолиса также должна быть направлена по радиусу в сторону, противоположную $F_р$. Схема равновесия сил для циклона и антициклона показана на рис. 13. В общем случае можно записать, что

$$F_p+F_к+F_ц=0$$

или

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial R_т}+2\omega_z\cdot c_г+\frac{c^2_г}{R_т}=0, \qquad (3.1.7)$$

где $c_г$ — скорость градиентного ветра; $R_т$ — радиус кривизны изобары или линии тока положительный, когда она вдоль движения поворачивает влево — (для циклонов) и отрицательный — (для антициклонов). Из (3.1.7) видно, что при $R_т\to\infty$ скорость градиентного ветра должна стремиться к скорости геострофического ветра.

Найдем соотношение между геострофическим и установившимся градиентным ветром, дующим по круговой изобаре. Выразим силу барического градиента через геострофический ветер на основании (3.1.4*), тогда (3.1.7) примет вид

$$c_г{}^2+2\,\omega_z c_г R_т-2\,\omega_z R_т G=0,$$

откуда

$$c_г^{1,2}=\omega_z R_т\left[-1\pm\sqrt{1+\frac{2G}{\omega_z R_т}}\right]. \qquad (3.1.8)$$

Так как при $R_т\to\infty$, $c_г\to G$, то перед корнем в (3.1.8) нужно взять знак плюс, в противном случае $c_г\to\infty$. Таким образом, напишем точное выражение для скорости градиентного ветра

$$c_{\text{г}} = \omega_z R_{\text{т}} \left(\sqrt{1 + \frac{2G}{\omega_z R_{\text{т}}}} - 1 \right). \qquad (3.1.9)$$

Наряду с этим можно получить более удобное для анализа приближенное выражение для $c_{\text{г}}$. Разложим корень в бином Ньютона и ограничимся третьим членом:

$$\left(1 + \frac{2G}{\omega_z R_{\text{т}}}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{2G}{\omega_z R_{\text{т}}} - \frac{1}{8} \cdot \frac{4G^2}{\omega_z^2 \cdot R_{\text{т}}^2}.$$

Подставив это выражение в (3.1.9), получим

$$c_{\text{г}} = \omega_z R_{\text{т}} \left[\left(1 + \frac{G}{\omega_z R_{\text{т}}} - \frac{1}{2} \frac{G^2}{\omega_z^2 R_{\text{т}}^2} + \ldots \right) - 1 \right] =$$

$$= G - \frac{G^2}{2\omega_z \cdot R_{\text{т}}} = G\left(1 - \frac{G}{2\omega_z R_{\text{т}}}\right). \qquad (3.1.10)$$

Соотношение (3.1.10) выполняется тем точнее, чем меньше по сравнению с единицей абсолютная величина $G/2\omega_z R_{\text{т}}$.

В северном полушарии ($\omega_z > 0$) в (3.1.10) добавка к единице входит со знаком плюс для $R_{\text{т}} < 0$ (антициклонического вращения) и со знаком минус для $R_{\text{т}} > 0$ (циклонического вращения). Таким образом, в северном полушарии при циклонической кривизне изобар градиентный ветер меньше геострофического, а при антициклонической — больше. В южном полушарии соотношение между градиентным и геострофическим ветром в циклонах и антициклонах будет обратным. Так как геострофический ветер можно выразить через градиент давления $\partial p/\partial R$, то из полученных выше выводов следует, что при одинаковом градиенте давления в северном полушарии ветер в циклоне будет меньше, чем в антициклоне. С другой стороны, из (3.1.9) видно, что в северном полушарии в антициклоне градиент давления или геострофический ветер не может быть больше некоторого критического значения, которое определяется из условия

$$1 - \frac{2G}{\omega_z R_{\text{т}}} > 0,$$

откуда следует, что

$$G < \frac{\omega_z \cdot R_{\text{т}}}{2} \text{ или } \frac{\partial p}{\partial R} < \omega_z^2 \cdot \rho \cdot R_{\text{т}}.$$

Так как в циклоне градиент давлениям может быть сколь угодно большим, то в среднем градиентный ветер в циклоне больше, чем в антициклоне.

§ 2. Изменение геострофического ветра с высотой. Термический ветер

В предыдущем параграфе было показано, что геострофический ветер является функцией градиента давления. Сам градиент давления может изменяться с высотой из-за неоднородности горизонтального поля температуры. Запишем барометрическую формулу для реальной атмосферы

$$p = p_0 e^{-\frac{gz}{RT}}. \tag{3.2.1}$$

Видно $\left(\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{gp}{RT}\right)$, что в теплой воздушной массе давление убывает с высотой медленнее, чем в холодной. Следовательно,

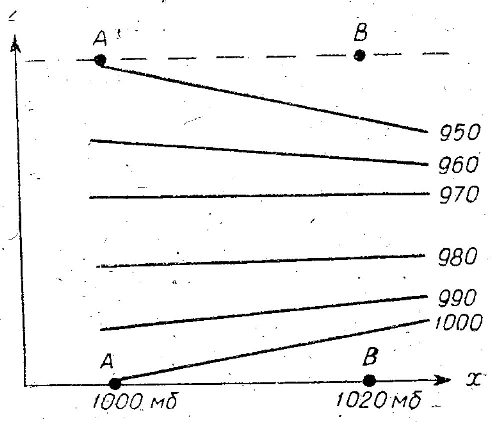

Рис. 14. Изменение градиента давления с высотой за счет горизонтального градиента температуры

за счет горизонтальной неоднородности поля температуры с высотой может происходить изменение наклона изобарических поверхностей, а также, изменение величины и направления барического градиента и, как следствие того,— изменение геострофического ветра. Продемонстрируем сказанное на простом примере. Пусть у поверхности земли в теплой воздушной массе (точка A на рис. 14) давление равно 1000 *мб*, а в холодной (точка B) — 1020 *мб*, и поэтому градиент давления направлен от холодной массы к теплой (от B к A). Напомним, что в метеорологии за положительное направление градиента принимается направление максимального убывания характеристики. На высоте, вследствие изменения наклона изобарических поверхностей, давление на уровне z над точкой A может оказаться выше, чем над точкой B и направление градиента изменится на обратное — от A к B.

Получим выражение для величины изменения геострофического ветра с высотой под влиянием неоднородности поля температуры. Перепишем барометрическую формулу (3.2.1) в виде

$$p_2 = p_1 e^{-\frac{g\Delta z}{R\overline{T}}} \tag{3.2.2}$$

(где $\Delta z = z_2 - z_1$) и прологарифмируем и продифференцируем ее по x

$$\left.\begin{aligned} \ln p_2 &= \ln p_1 - \frac{g\Delta z}{R\overline{T}}, \\ \frac{1}{p_2}\frac{\partial p_2}{\partial x} &= \frac{1}{p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{g\Delta z}{R\overline{T}^2}\frac{\partial \overline{T}}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{3.2.3}$$

Выразим p_1 и p_2 из уравнения состояния: $p_2 = \rho_2 R T_2$, $p_1 = \rho_1 R T_1$. Если считать, что $T_1 \approx T_2 \approx T$ и разделить все члены в уравнении на $2\omega_z$, то получим

$$\frac{1}{2\omega_z \rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial x} = \frac{1}{2\omega_z \rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{g\Delta z}{2\omega_z \overline{T}} \cdot \frac{\partial \overline{T}}{\partial x}.$$

Нетрудно заметить, что левая часть уравнения может рассматриваться как проекция геострофического ветра на уровне z_2 на ось y, первый член в правой части как проекция на ту же ось геострофического ветра на уровне z_1. В таком случае

$$v_{g_2} = v_{g_1} + \frac{g\Delta z}{2\omega_z \overline{T}} \cdot \frac{\partial \overline{T}}{\partial x}. \tag{3.2.4}$$

Если (3.2.2) продифференцировать по y и проделать все последующие операции аналогично предыдущему случаю, то легко получить выражение, связывающее проекции геострофического ветра на ось x на двух уровнях

$$u_{g_2} = u_{g_1} - \frac{g\Delta z}{2\omega_z \overline{T}} \cdot \frac{\partial \overline{T}}{\partial y} \tag{3.2.5}$$

Формулы (3.2.4) и (3.2.5) показывают, что под влиянием горизонтальной неоднородности поля температуры, геострофический ветер изменяется с высотой на величину $\Delta c_т$

$$\Delta c_{\text{т}} = G_2 - G_1 = \frac{g}{2\omega_z T} \cdot \frac{\partial \overline{T}}{\partial m} \Delta z, \tag{3.2.6}$$

которую называют термическим ветром.

Итак, термический ветер зависит от горизонтального градиента температуры и увеличивается с высотой. Можно считать, что ветер на больших высотах в значительной мере определяется горизонтальным распределением температуры в нижележащих слоях воздуха. Термический ветер направлен под углом 90° к градиенту температуры (т. е. вдоль изотермы), так что низкие значения температуры остаются слева (т. е. отклоняется в северном полушарии вправо от градиента температуры). Рассмотрим скалярное произведение вектора скорости термического ветра и градиента температуры (рис. 15):

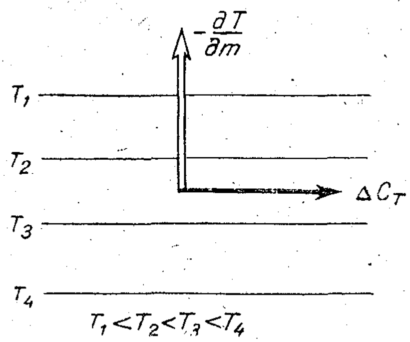

Рис. 15. Связь термического ветра ($\Delta c_{\text{т}}$) и горизонтального градиента температуры

$$\left(\overrightarrow{\Delta c}_{\text{т}}, \frac{\partial \overrightarrow{T}}{\partial m}\right) = \Delta c_{\text{т}} \frac{\partial T}{\partial m} \cdot \cos\left(\overrightarrow{\Delta c}_{\text{т}} \frac{\partial \overrightarrow{T}}{\partial m}\right) = \Delta u_{\text{т}} \frac{\partial T}{\partial x} + \Delta v_{\text{т}} \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Подставив выражение для $\Delta u_{\text{т}}$ и $\Delta u_{\text{т}}$ (из 3.2.4) и (3.2.5) и обозначив $\left(\overrightarrow{\Delta c}_{\text{т}} \wedge \frac{\partial \overrightarrow{T}}{\partial m}\right) = \alpha$ получим

$$\left(\overrightarrow{\Delta c}_{\text{т}}, \frac{\partial \overrightarrow{T}}{\partial m}\right) = 0,$$

т. е. $\cos\alpha = 0$, $\alpha = 90°$.

Таким образом, угол между термическим ветром и градиентом температуры действительно равен 90°. Отклонение термического ветра от градиента температуры вправо (в северном полушарии) можно доказать тем же методом, как и в случае геострофического ветра. Впрочем, что достаточно хорошо видно из сравнения формул для $\Delta u_{\text{т}}$, $\Delta v_{\text{т}}$, u_g и v_g. Термический ветер направлен относительно изотерм так же, как геострофический относительно изобар.

Итак, ветер на высоте можно представить как сумму двух векторов: вектора ветра на нижнем уровне и вектора термического ветра.

Скорость термического ветра можно выразить через относительный геопотенциал. Перепишем формулу (2.5.15) в виде

$$H_{p_1}^{p_2} = \frac{R}{9{,}8} \cdot \overline{T} \ln \frac{p_1}{p_2}, \tag{3.2.7}$$

где $H = \frac{\Phi}{9{,}8}$ — относительный геопотенциал в *гп.м.* Если прологарифмировать и продифференцировать ее в направлении нормали к изотерме $\vec{m}$, то

$$\frac{1}{\overline{T}} \frac{\partial \overline{T}}{\partial m} = \frac{1}{H_{p_1}^{p_2}} \frac{\partial H_{p_1}^{p_2}}{\partial m} = \frac{9{,}8}{g(z_2 - z_1)} \cdot \frac{\partial H_{p_1}^{p_2}}{\partial m}.$$

Подставим теперь $\frac{1}{\overline{T}} \frac{\partial \overline{T}}{\partial m}$ в формулу (3.2.6), тогда

$$\Delta c_{\text{т}} = \frac{9{,}8}{2\omega_z} \frac{\partial H_{p_1}^{p_2}}{\partial m}, \tag{3.2.8}$$

т. е. формула для определения термического ветра через градиент относительного геопотенциала совпадает с формулой для определения геострофического ветра через градиент абсолютного геопотенциала (3.1.6). Так как вектор скорости ветра на высоте z_2 можно выразить через вектор на высоте z_1 и термический ветер, то на основании (3.1.6) и (3.2.8) получаем

$$\vec{G}_2 = \frac{9{,}8}{2\omega_z} \cdot \left(\frac{\vec{\partial} H_{p_1}}{\partial n} + \frac{\vec{\partial} H_{p_1}^{p_2}}{\partial m} \right).$$

Рассмотрим теперь несколько примеров изменения ветра с высотой при различных соотношениях между барическим градиентом на нижнем уровне и средним градиентом температуры в слое.

1. Барический и термический градиенты параллельны друг другу:

а) направлены в одну сторону. В этом случае за счет увеличения с высотой $\Delta c_{\text{т}}$ ветер будет увеличиваться с высотой, не изменяясь по направлению (рис. 16);

б) направлены в противоположные стороны. В этом случае ветер с высотой будет уменьшаться (за счет роста $\Delta c_{\text{т}}$), не изменяя направление, пока на какой-то высоте термический ветер не станет равным геострофическому на исходном уровне. Эта высота называется высотой обращения, здесь ветер равен нулю.

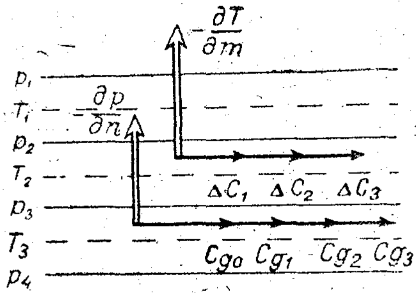

Рис. 16. Изменение геострофического ветра с высотой при параллельных векторах градиента давления и температуры ($p_1 < p_2 < p_3 < p_4$; $T_1 < T_2 < T_3$).

Выше ветер изменит свое направление на обратное и будет увеличиваться с высотой (рис. 17).

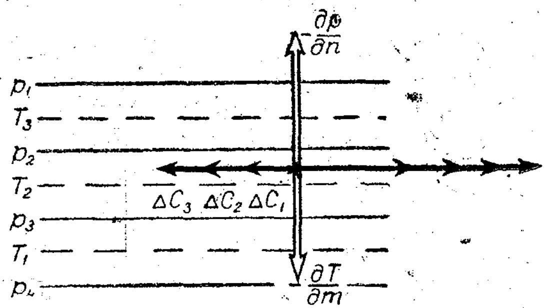

Рис. 17. Изменение геострофического ветра с высотой при противоположно направленных векторах градиента давления и температуры ($p_1 < p_2 < p_3 < p_4$; $T_1 < T_2 < T_3$).

2. *Барический и термический градиенты перпендикулярны:*

а) барический градиент направлен влево от термического. В этом случае ветер возрастает и поворачивает с высотой вправо, приближаясь к направлению термического ветра (рис. 18);

б) барический градиент направлен вправо от термического. В этом случае ветер возрастает и поворачивает с высотой влево, приближаясь по направлению к термическому ветру (рис. 19).

Выше рассмотрены только некоторые предельные случаи, но очевидно, что аналогичные рассуждения вполне применимы для любого соотношения между градиентом давления и температуры. Полученные выводы представляют прогностический интерес. По соотношению градиентов давления и температуры на при-

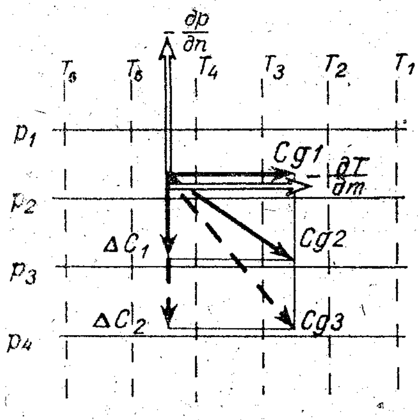

Рис. 18. Изменение геострофического ветра с высотой, когда градиент давления отклоняется влево на угол 90° от градиента температуры ($p_1 < p_2 < p_3 < p_4$; $T_1 < T_2 < T_3 < T_4$).

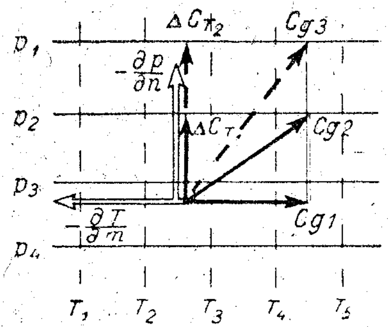

Рис. 19. Изменение геострофического ветра с высотой, когда градиент давления отклоняется вправо на угол 90° от градиента температуры ($p_1 < p_2 < p_3 < p_4$; $T_1 < T_2 < T_3 < T_4$).

земной синоптической карте можно судить о векторе ветра на различных высотах. Однако еще больший интерес представляет возможность определения характера горизонтального распределения температуры по изменению ветра с высотой (прогноз по обрезанной карте, оценки условий над морем и т. д.).

По распределению ветра с высотой можно определить и характер адвекции (будет ли наблюдаться адвекция тепла или холода). Из рис. 18 видно, что для правого поворота ветра с высотой можно ожидать адвекции тепла, т. е. повышение температуры, тогда как для левого вращения — адвекции холода (рис. 19). Эти правила тем более ценны, потому что об изменении ветра с высотой часто можно судить по косвенным признакам. Например, если облака среднего яруса движутся влево от направления движения облаков нижнего яруса (это свидетельствует о левом повороте ветра с высотой), то можно ожидать адвекции холода. Из рис. 16, 17 видно, что если верхние и нижние формы облаков движутся в одном или в противоположных направлениях, то нет оснований ожидать резкого изменения температуры.

§ 3. Геострофическая адвекция

В предыдущем параграфе было показано, что по распределению ветра с высотой можно определить характер изменения температуры. Для свободной атмосферы (с. а.) простая формула для количественной оценки адвекции может быть получена из уравнения притока тепла для случая изотермического движения $\left(\text{пренебрегая } w\,\frac{\partial T}{\partial z}\right)$

$$\frac{dT}{dt}=0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\text{с. а}}=-\left(u_g\frac{\partial T}{\partial x}+v_g\frac{\partial T}{\partial y}\right).$$

Адвективное изменение температуры при геострофическом ветре называют геострофической адвекцией (она является главной частью локальных изменений температуры в свободной атмосфере). Подставим выражение для u_g и v_g

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\text{с. а}}=-\frac{1}{2\omega_z\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x}\right). \tag{3.3.1}$$

Так как в (3.3.1) скобка есть векторное произведение векторов $\frac{\partial \vec{P}}{\partial n}$ и $\frac{\partial \vec{T}}{\partial m}$, то

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\text{с. а}}=-\frac{1}{2\omega_z\rho}\,\frac{\partial p}{\partial n}\cdot\frac{\partial T}{\partial m}\cdot\sin\alpha, \tag{3.3.2}$$

где α — угол между горизонтальными градиентами давления и температуры.

Из (3.3.2) видно (для северного полушария $\omega_z>0$), что левому повороту ветра с высотой ($\alpha>0$) соответствует отрицательная геострофическая адвекция * (адвекция холода), а правому повороту ($\alpha<0$) — положительная адвекция (адвекция тепла).

Для определения адвекции пользоваться формулой (3.3.2) не совсем удобно, так как необходимо знать градиент давления, градиент температуры и угол между ними.

Ранее было показано, что соотношение между градиентом давления и температуры определяет характер изменения ветра с высотой. С учетом этого целесообразно выразить геострофическую адвекцию через изменение направления ветра с высотой. Обозначим через β угол, определяющий направление ветра (рис. 20). Выразим в (3.3.1) градиент давления через геострофический ветер

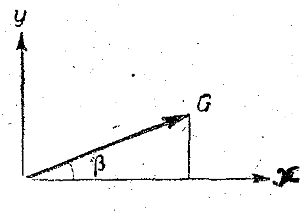

Рис. 20. Вектор геострофического ветра

$$u_g=-\frac{1}{2\omega_z\rho}\,\frac{\partial p}{\partial y};\quad v_g=\frac{1}{2\omega_z\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x},$$

* Угол α считается положительным, если он отсчитывается от неподвижного луча к подвижному против часовой стрелки.

а градиент температуры через изменение геострофического ветра с высотой

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{2\omega_z T}{g} \cdot \frac{\partial v_g}{\partial z}; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{2\omega_z T}{g} \cdot \frac{\partial u_g}{\partial z}.$$

В таком случае формула для геострофической адвекции примет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{2\omega_z T}{g}\left(u_g \frac{\partial v_g}{\partial z} - v_g \frac{\partial u_g}{\partial z}\right)$$

или с учетом того, что $u_g = G \cdot \cos\beta$, $v_g = G \cdot \sin\beta$, получим после некоторых преобразований

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{2\omega_z T}{g} \cdot G^2 \frac{\partial \beta}{\partial z}. \qquad (3.3.3)$$

Эта формула позволяет определить $\frac{\partial T}{\partial t}$ по данным шаропилотных наблюдений, что особенно ценно в экспедиционных и морских условиях, когда нет синоптических карт.

IV. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ АТМОСФЕРЫ

§ 1. Формулировка задачи о строении пограничного слоя атмосферы

Пограничным слоем атмосферы называют ее нижний (1,5—2,0 *км*) слой. Распределение метеорологических элементов здесь существенно отличается от распределения в свободной атмосфере за счет близости подстилающей поверхности — основного источника тепла и водяного пара в атмосфере; в пограничном слое происходит основная диссипация кинетической энергии.

Вблизи поверхности земли наблюдаются максимальные градиенты скорости ветра, температуры и влажности и, таким образом, возникают благоприятные условия для развития турбулентности. Турбулентность в пограничном слое играет очень важную роль — она определяет возникновение вертикальных токов, диффузию примесей, вибрацию различных сооружений (мостов, высотных строений, линий электропередач), ветровые течения, дрейф льда и т. д. Турбулентность не только зависит от вертикального распределения метеоэлементов, но в свою очередь сама существенно определяет характер этого распределения, сглаживая его. Покажем это на примере распределения ветра с высотой (рис. 21). На поверхности земли за счет прилипания скорость ветра равна нулю, на верхней границе пограничного слоя она стремится к геострофической. За счет сильной турбулентности будет возникать поток количества движения из более высоких слоев (с большей скоростью) в более низкие слои и профиль скорости будет более сглаженным (кривая 2), чем в случае слабой турбулентности (кривая 1), когда за счет слабого перемешивания влияние подстилающей поверхности будет сказываться только до небольших высот.

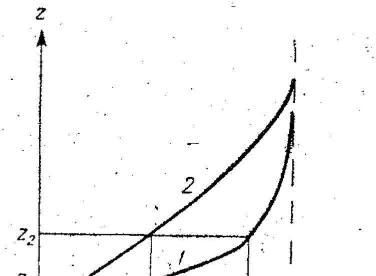

Рис. 21. Качественная картина распределения скорости ветра с высотой

Распределение температуры с высотой определяется притоком тепла на разных уровнях. В свободной атмосфере тепло поступает только за счет поглощения лучистой энергии и фазовых переходов воды. В пограничном слое картина заметно отличается из-за появления дополнительного источника тепла — подстилающей поверхности. Известно, что значительная часть солнечной радиации поглощается тонким поверхностным слоем (деятельной поверхностью) и превращается в тепло. За счет молекулярной теплопроводности это тепло передается прилегающим к поверхности частицам воздуха, которые затем вихрями переносятся вверх и, перемешиваясь с окружающей средой, нагревают вышележащие слои воздуха. На смену им опускаются холодные вихри, нагреваются и вновь уносят тепло вверх. Таким образом, возникает поток тепла от поверхности вверх, способствующий выравниванию температуры между деятельной поверхностью и воздухом. Совершенно понятно, что поток этот будет тем больше, чем больше тепла получит подстилающая поверхность и чем больше интенсивность турбулентного обмена.

Запишем теперь систему уравнений и граничных условий, определяющих строение пограничного слоя атмосферы. В качестве первого приближения ограничимся рассмотрением стационарного, горизонтально-однородного пограничного слоя с малым содержанием влаги и отсутствием фазовых переходов. В таком случае уравнения движения (2.2.12) будут иметь вид (см. § 6, раздел II)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial u}{\partial z} + 2\omega_z v &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial v}{\partial z} - 2\omega_z u &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{4.1.1}$$

Если считать известным градиент давления или геострофический ветер (в данном случае он принимается независящим от высоты), то в (4.1.1) содержится три неизвестных: u, v, k. Для замыкания системы естественно использовать уравнение баланса энергии турбулентности (2.4.20), однако, чтобы упростить задачу, запишем его в интегральной форме

$$\int_0^H k \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] dz - \int_0^H \alpha_т \frac{g}{T} k \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a\right) dz - \int_0^H \mathrm{Diss} \cdot dz = 0, \tag{4.1.2}$$

где H — высота пограничного слоя атмосферы.

В (4.1.2) отсутствует член, учитывающий приток (отток) энергии турбулентности за счет диффузии. Это связано с тем, что из наблюдений известно, что практически вся кинетическая энергия турбулентности образуется в пограничном слое и не выносится за его пределы; поэтому интеграл от E_4 по пограничному слою можно считать равным нулю.

Система уравнений (4.1.1) и (4.1.2) содержит шесть неизвестных: u, v, k, H, T, Diss. Для получения дополнительных соотношений, замыкающих систему, воспользуемся, как и ранее, соображениями анализа размерностей. Поскольку в (4.1.2) входят некоторые интегральные по пограничному слою характеристики турбулентности, то можно считать, что они должны однозначно определяться средней кинетической энергией турбулентности b и высотой пограничного слоя атмосферы H. Если зависимость от b, по-видимому, не нуждается в пояснении, то зависимость от H можно пояснить следующим образом. В § 6 (раздел II) было показано, что высота планетарного пограничного слоя атмосферы определяется как уровень, выше которого можно пренебречь силами трения или считать очень малым сдвиг скорости ветра. Очевидно, что чем больше сказывается сила трения, тем больше H, т. е. высоту пограничного слоя действительно можно считать интегральной характеристикой турбулентности в пограничном слое атмосферы. Итак,

$$k = c_1(b, H);$$

$$\mathrm{Diss} = c_2(b, H)$$

и с помощью П-теоремы можно сразу записать (по аналогии с выводом в § 4 раздела II)

$$k = c_1 H \sqrt{b}; \tag{4.1.3}$$

$$\mathrm{Diss} = c_2 \frac{b\sqrt{b}}{H}. \tag{4.1.4}$$

Для определения температуры используем уравнение притока тепла (2.1.20), пренебрегая притоком (оттоком) тепла за счет работы сил сжатия (расширения)

$$\varepsilon_т + \varepsilon_ф + \varepsilon_R = 0. \tag{4.1.5}$$

Отнесенный к единице массы турбулентный поток тепла выразим на основании (2.3.12). Радиационный приток представим как дивергенцию R — радиационного потока для единицы массы воздуха

$$\varepsilon_R = \frac{1}{\rho} \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{4.1.6}$$

Фазовый приток, в соответствии с постановкой задачи, не учитывается, но в принципе его можно выразить (при наличии облачности) как

$$\varepsilon_\text{ф} = L \cdot \frac{m}{\rho}, \tag{4.1.7}$$

где L — скрытая теплота парообразования, m — количество пара воды или льда, образующееся за единицу времени и отнесенное к единице объема.

С учетом (2.3.12) и (4.1.6) уравнение притока тепла примет вид

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial z} \alpha_\text{т} \cdot k \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a \right) + \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial R}{\partial z} = 0.} \tag{4.1.8}$$

Наконец, для определения высоты пограничного слоя можно использовать следующее соотношение:

$$\frac{d}{dz} \sqrt{u^2 + v^2} \Big|_{z=H} = 0, \tag{4.1.9}$$

которое предполагает, что при $z=H$ модуль скорости ветра достигает экстремума (дальше он начинает колебаться около значения геострофической скорости).

Итак, теперь для определения семи неизвестных (u, v, k, H, T, b, Diss) имеется система из семи уравнений: (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3), (4.1.4), (4.1.8), (4.1.9). Для определения постоянных, возникающих при интегрировании этой системы, необходимо сформулировать граничные условия:

$$z=0, \quad u=v=0, \quad k \cdot \alpha_\text{т} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a \right) = -\frac{P_0}{\rho c_p}; \tag{4.1.10}$$

$$z=H, \quad u=u_g \to G, \quad v=v_g \to 0, \quad T=T_H \tag{4.1.11}$$

(для упрощения задачи ось x направлена по изобаре).

§ 2. Распределение с высотой ветра и температуры

Введем понятие среднего для всего пограничного слоя атмосферы коэффициента турбулентности $\bar{k}$ и выразим в (4.1.1) градиент давления через геострофический ветер. В таком случае уравнения движения примут вид

$$\bar{k}\frac{d^2u}{dz}+2\omega_z\cdot v=0;$$

$$\bar{k}\frac{d^2v}{dz^2}-2\omega_z(u-G)=0.$$

Умножим второе уравнение на $i=\sqrt{-1}$ и сложим с первым; тогда при условии постоянства с высотой геострофического ветра

$$\frac{d^2(u+iv-G)}{dz^2}-\frac{2\omega_z i}{\bar{k}}(u+iv-G)=0. \qquad (4.2.1)$$

Введем новую переменную

$$\Phi=u+iv-G \qquad (4.2.2)$$

и перепишем для нее граничные условия

$$z=0,\ \Phi=-G; \qquad (4.2.3)$$

$$z=H,\ \Phi\to 0. \qquad (4.2.4)$$

С учетом (4.2.2) перепишем (4.2.1) в виде

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2}-2ia^2\Phi=0, \qquad (4.2.5)$$

где

$$a=\sqrt{\frac{\omega_z}{\bar{k}}}. \qquad (4.2.6)$$

Дифференциальному уравнению (4.2.5) соответствует характеристическое уравнение

$$s^2-2ia^2=0,$$

с корнями $s=\pm a\sqrt{2i}=\pm a(1+i)$, так как $\sqrt{i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

Следовательно, общее решение (4.2.5) можно представить как

$$\Phi=c_1\cdot e^{(1+i)az}+c_2\cdot e^{-(1+i)az}. \qquad (4.2.7)$$

Определим c_1 и c_2 на основании (4.2.3) и (4.2.4). При $z=0$ $c_1+c_2=-G$; при $z=H$, чтобы удовлетворить (4.2.4), нужно положить $c_1 \to 0$ (так как второй член и Φ стремятся к нулю).

Таким образом, приближенно можно считать, что $c_1=0$, $c_2=-G$ и (4.2.7) примет вид

$$\Phi=-G\cdot e^{-(1+i)az}=-G\cdot e^{-az}\cdot e^{-iaz}=$$

$$=-G\cdot e^{-az}(\cos az-i\sin az). \qquad (4.2.8)$$

Если теперь подставить выражение для Φ и разделить действительные и мнимые части, то

$$\left.\begin{aligned} u&=G\cdot(1-e^{-az}\cos az),\\ v&=G\cdot e^{-az}\sin az. \end{aligned}\right\} \qquad (4.2.9)$$

Определим модуль скорости

$$c=\sqrt{u^2+v^2}=G\cdot\sqrt{1-2e^{-az}\cos az+e^{-2az}} \qquad (4.2.10)$$

Угол α между геострофическим ветром (или изобарой) и фактическим ветром в пограничном слое найдем из соотношения

α · угол между

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{v}{u}=\frac{e^{-az}\sin az}{1-e^{-az}\cos az}. \qquad (4.2.11)$$

У поверхности земли при ($z=0$) соотношение (4.2.11) дает неопределенность типа 0/0. Если раскрыть эту неопределенность по правилу Лопиталя (дифференцируя по z), то можно показать, что $\operatorname{tg}\alpha\big|_{z=0}=1$ и $\alpha\big|_{z=0}=45°$, т. е. ветер у поверхности земли отклоняется от изобары (или геострофического ветра) на угол 45°. Так как с высотой угол α уменьшается (ветер стремится к геострофическому), то можно говорить о правом вращении ветра с высотой в пределах пограничного слоя атмосферы.

Результаты наблюдений показывают, однако, что угол полного поворота ветра в пограничном слое атмосферы ($\alpha\big|_{z=0}$) примерно в 1,5—2 раза меньше полученного выше. Такое различие может быть объяснено заменой в теории k на $\overline{k}$.

Кривая, соединяющая концы векторов ветра на разных высотах в системе координат u, v, называется годографом скорости или спиралью Экмана (рис. 22). Из анализа (4.2.9) и рис. 22 видно, что u при малых z быстро возрастает с высотой (так как сильно убывают e^{-az} и $\cos az$), а при больших z увеличение

u становится более медленным. После достижения некоторого уровня u может уменьшаться за счет увеличения $\cos az$. Другая проекция скорости v сперва увеличивается с высотой, а потом начинает убывать.

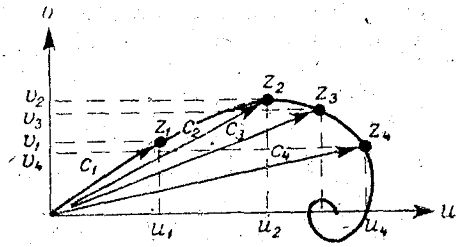

Рис. 22. Годограф скорости ветра

Полученные теоретические соотношения позволяют проследить влияние интенсивности турбулентности и широты места. Например, сильная турбулентность (большие k, малые a) вызывает медленное увеличение скорости ветра с высотой, а слабая — быстрое. Профиль ветра становится более крутым и с ростом широты (за счет увеличения a).

Перейдем теперь к определению вертикального распределения температуры. Проинтегрируем уравнение притока тепла (4.1.8)

$$\frac{\partial}{\partial z}\alpha_{\text{т}}k\left(\frac{\partial T}{\partial z}+\gamma_a\right)+\frac{1}{\rho c_p}\frac{\partial R}{\partial z}=0$$

при граничных условиях (4.1.10) и (4.1.11). В таком случае

$$\alpha_{\text{т}}\cdot k\cdot\left(\frac{\partial T}{\partial z}+\gamma_a\right)+\frac{1}{\rho c_p}R(z)+c=0.$$

На основании граничного условия (4.1.10)

$$c=\frac{P_0}{\rho c_p}-\frac{1}{\rho c_p}R(0)$$

или

$$\alpha_{\text{т}}\cdot\bar{k}\left(\frac{\partial T}{\partial z}+\gamma_a\right)+\frac{P_0}{\rho c_p}+\frac{1}{\rho c_p}[R(z)-R(0)]=0. \quad (4.2.12)$$

Для дальнейшего интегрирования (4.2.12) необходимо знать зависимость радиационного баланса от высоты. Принципиально можно выразить $R(0)$ и $R(z)$ как функции температуры, влажности, облачности, прозрачности атмосферы и максимально возможной для данных физико-географических условий суммарной радиации, однако это существенно усложнило бы задачу. Чтобы избежать этой трудности, в соответствии с определением высоты пограничного слоя H, будем считать, что при $z=H$ обращается в нуль турбулентный поток тепла, т. е.

$$\alpha_т \cdot k \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a \right) \Bigg|_{z=H} = 0. \quad (4.2.13)$$

В таком случае, если в (4.2.12) разложить в ряд $R(z)$

$$R(z) = R(0) + \frac{\partial R}{\partial z} \cdot z + \ldots,$$

подставить в уравнение и использовать (4.2.13), то

$$\frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{P_0}{\rho c_p} \cdot \frac{1}{H},$$

и уравнение примет вид

$$\alpha_т \cdot \overline{k} \left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial z} + \gamma_a \right) + \frac{P_0}{\rho c_p} \left(1 - \frac{z}{H} \right) = 0. \quad (4.2.14)$$

Проинтегрировав (4.2.14) от z до H, получим

$$T(z) = T_H + \gamma_a (H - z) - \frac{P_0}{\alpha_т \rho c_p \cdot \overline{k}} \left(z - \frac{z^2}{2H} - \frac{H}{2} \right) =$$

$$= T_H + \gamma_a (H - z) + \frac{P_0}{\alpha_т \rho c_p \overline{k}} \cdot \frac{(H-z)^2}{2H}. \quad (4.2.15)$$

При безразличном равновесии ($P_0=0$) температура меняется с высотой по линейному закону. При неустойчивой стратификации ($P_0 > 0$) температура быстро возрастает по мере удаления от верхней границы пограничного слоя, так как второе и третье слагаемые имеют одинаковые знаки (рис. 23). Наконец при устойчивой стратификации ($P_0 < 0$) температура медленно растет в слоях, близких к H, т. е. при малых величинах $(H-z)$, а начиная с некоторого z,

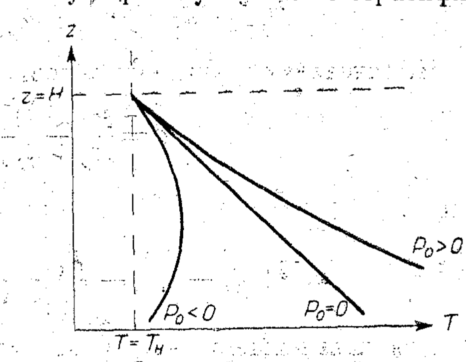

Рис. 23. Изменение температуры с высотой: $1 - P_0 < 0$; $2 - P_0 = 0$; $3 - P_0 > 0$

медленно убывает (у поверхности земли наблюдается инверсия температуры).

Из анализа (4.2.15) видно, что чем больше коэффициент турбулентности, тем медленнее изменяется температура с высотой.

§ 3. Определение характеристик турбулентности

Полученные выше выражения для профиля ветра и температуры содержат неизвестный коэффициент турбулентности. Рассмотрим теперь методы определения $\bar{k}$ и других характеристик турбулентности

По наблюдениям профиля ветра в пограничном слое атмосферы

Так как на данной широте φ при фиксированном геострофическом ветре распределение ветра в пограничном слое атмосферы определяется только интенсивностью турбулентности, то для определения $\bar{k}$ можно использовать формулы (4.2.9). Изложим наиболее удобный метод анализа наблюдений над ветром. Перенесем в первом соотношении (4.2.9) в левую часть G и, возведя оба уравнения в квадрат, сложим их

$$(u - G)^2 + v^2 = G^2 e^{-2az}.$$

Прологарифмируем и продифференцируем это выражение

$$\lg[(u - G)^2 + v^2] = \lg G^2 - 2az \cdot \lg e;$$

$$\frac{d}{dz}\{\lg[(u-G)^2 + v^2]\} = -2a \lg e = -2 \lg e \sqrt{\frac{\omega_z}{\bar{k}}},$$

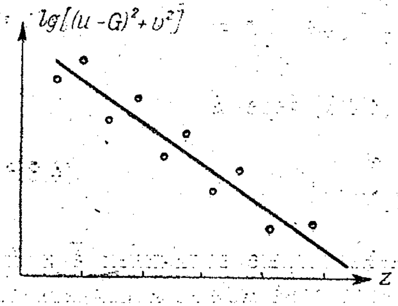

Рис. 24. Пример построения результатов наблюдений за скоростью ветра для определения коэффициента турбулентности

откуда

$$\bar{k} = \frac{4\omega_z \cdot \lg^2 e}{\left\{\frac{d}{dz} \cdot \lg[(u - G)^2 + v^2]\right\}^2}. \tag{4.3.1}$$

Знаменатель обычно вычисляется графически в осях z и $\lg[(u - G)^2 + v^2]$ (рис. 24).

Из уравнения баланса энергии турбулентности (4.1.2)

Выразим приток энергии турбулентности от среднего движения на основании (4.2.9)

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2+\left(\frac{dv}{dz}\right)^2=2a^2\cdot G^2\cdot e^{-2az};$$

$$\overline{k}\int_0^H\left[\left(\frac{du}{dz}\right)^2+\left(\frac{dv}{dz}\right)^2\right]dz=-G^2\cdot a\cdot\overline{k}\,(e^{-2aH}-1)=$$

$$=G^2a\cdot\overline{k}=G^2(\sqrt{\omega_z\overline{k}}), \tag{4.3.2}$$

так как $e^{-2aH}<<1$.

Для определения притока (оттока) энергии турбулентности за счет действия силы Архимеда используем (4.2.14), тогда

$$-\frac{g}{T}\cdot\alpha_{т}\cdot\overline{k}\int_0^H\left(\frac{d\overline{T}}{dz}+\gamma_a\right)\cdot dz=\frac{g}{T}\cdot\frac{P_0}{\rho c_p}\left(z-\frac{z^2}{2H}\right)\Bigg|_0^H=$$

$$=\frac{g}{T}\cdot\frac{P_0}{\rho c_p}\cdot\frac{H}{2}. \tag{4.3.3}$$

Наконец, диссипацию выразим на основании (4.1.4)

$$\int_0^H \mathrm{Diss}\,dz=c_2\,b\sqrt{b}. \tag{4.3.4}$$

С учетом (4.3.2)—(4.3.4) уравнение баланса энергии турбулентности (4.1.2) примет вид

$$G^2\sqrt{\omega_z\overline{k}}+\frac{g}{T}\cdot\frac{P_0}{\rho c_p}\,\frac{H}{2}-c_2b\sqrt{b}=0. \tag{4.3.5}$$

Определим $b\sqrt{b}$ на основании (4.1.3) через $\overline{k}$

$$b\sqrt{b}=\frac{\overline{k}^3}{c_1^3H^3}. \tag{4.3.6}$$

Теперь (4.3.5) содержит две неизвестные величины: $\overline{k}$ и H. Для нахождения высоты пограничного слоя можно использовать два способа:

1. Определение H на основании (4.1.9). Если подставить в (4.1.9) выражение для модуля скорости ветра (4.2.10), то после некоторых преобразований получим

$$\frac{a \cdot G \cdot e^{-aH}(\cos aH + \sin aH - e^{-aH})}{\sqrt{1 - 2 \cdot e^{-aH} \cos aH + e^{-2aH}}} = 0. \qquad (4.3.7)$$

В уравнении (4.3.7) представляет интерес только корень $\cos aH + \sin aH - e^{-aH} = 0$, откуда, заменив $\cos aH$ на $\sin(90 + aH)$, имеем

$$1{,}42 \cdot \sin(45^\circ + aH) = e^{-aH}. \qquad (4.3.8)$$

Если решить трансцендентное уравнение графически (рис. 25), то окажется, что $aH = 2{,}3$ и

$$H = \frac{2{,}3\sqrt{\bar{k}}}{\sqrt{\omega_z}}. \qquad (4.3.9)$$

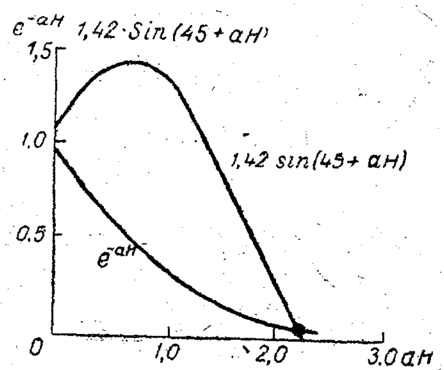

Рис. 25. Графическое решение трансцендентного уравнения (4.3.8)

2. Определение H из условия $\alpha \big|_{z=H} = 0$. Высоту пограничного слоя можно определить и как уровень, на котором ветер впервые совпадает с геострофическим по направлению (в выбранной системе координат это означает, что $v \big|_{z=H} = 0$). Тогда в соответствии с (4.2.11) или (4.2.9) необходимо, чтобы $\sin aH = 0$. Так как $aH = 0$ лишено физического смысла, то $aH = \pi$ и

$$H = \frac{\pi \cdot \sqrt{\bar{k}}}{\sqrt{\omega_z}}. \qquad (4.3.10)$$

Если подставить в (4.3.5) выражения (4.3.6) и, допустим, (4.3.9), то

$$\bar{k}=m\cdot\frac{G^2}{\omega_z}\left[1+\frac{g}{T}\cdot\frac{2,3}{2\omega_z\cdot G^2}\,\frac{P_0}{\rho c_p}\right], \qquad (4.3.11)$$

где $m=\frac{(2,3)^3 c_1^3}{c_2}$.

Полученная формула позволяет проследить отдельно влияние динамического и термического фактора на интенсивность турбулентного обмена. При нейтральной стратификации $(P_0=0)$: $\bar{k}\sim G^2$; при неустойчивой $(P_0>0)$: $\bar{k}\sim G^2(1+\Delta)$; при устойчивой $(P_0<0)$: $\bar{k}\sim G^2(1-\Delta)$. Такая зависимость $\bar{k}$ от стратификации согласуется с физическими представлениями.

Для определения m, c_1 и c_2 можно воспользоваться результатами наблюдений, которые показывают, что при нейтральной стратификации и скорости геострофического ветра 10 *м/сек* пограничный слой достигает высоты 1 500 *м*, а средняя величина $\sqrt{b}=0,5$ *м/сек*.

Из сопоставления формул (4.3.6) и (4.3.11) получаем

$$\frac{H^2\cdot\omega_z}{(2,3)^2}=m\,\frac{G^2}{\omega_z},$$

откуда

$$m=\frac{H^2\cdot\omega_z^2}{G^2\cdot(2,3)^2}. \qquad (4.3.12)$$

Для умеренных широт $\omega_z\approx 5\cdot 10^{-5}$ и тогда

$$m\simeq 10^{-5}. \qquad (4.3.13)$$

Если приравнять величины $\bar{k}$ из (4.1.3) и (4.3.6), то

$$\frac{H^2\cdot\omega_z}{(2,3)^2}=c_1\cdot H\cdot\sqrt{b},$$

откуда

$$c_1=\frac{H\cdot\omega_z}{(2,3)^2\sqrt{b}}. \qquad (4.3.14)$$

Для умеренных широт $\omega_z\cong 5\cdot 10^{-5}$ 1/*сек* и

$$c_1=2,8\cdot 10^{-2}. \qquad (4.3.15)$$

Наконец, зная m и c_1, найдем

$$c_2=9,6. \qquad (4.3.16)$$

Теперь известны все постоянные, поэтому можно наряду с $\overline{k}$ определить $\overline{b}$ и $\overline{\mathrm{Diss}}$

$$\overline{b} = \frac{\overline{k^2}}{c_1^2 \cdot H^2} = \frac{2{,}3 \cdot c_1}{c_2} \cdot G^2 \cdot \left(1 + \frac{g}{T} \cdot \frac{2{,}3}{2\omega_z G^2} \cdot \frac{P_0}{\rho c_p}\right); \quad (4.3.17)$$

$$\overline{\mathrm{Diss}} = \frac{\omega_z}{2{,}3} \cdot G^2 \left(1 + \frac{g}{T} \cdot \frac{2{,}3}{2\omega_z G^2} \frac{P_0}{\rho c_p}\right). \quad (4.3.18)$$

Далее, задавая некоторые характерные величины турбулентного потока тепла (о способах расчета этого потока будет сказано в следующем разделе), можно рассчитать типичные профили скорости ветра и температуры в пограничном слое атмосферы (рис. 26, 27).

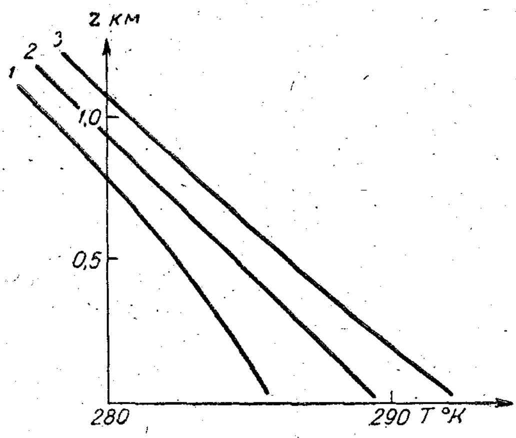

Рис. 26. Типичные профили температуры в пограничном слое атмосферы *1* — $P_0 = -0{,}1$ *кал/см²мин*; *2* — $P_0 = 0$; *3* — $P_0 = 0{,}1$

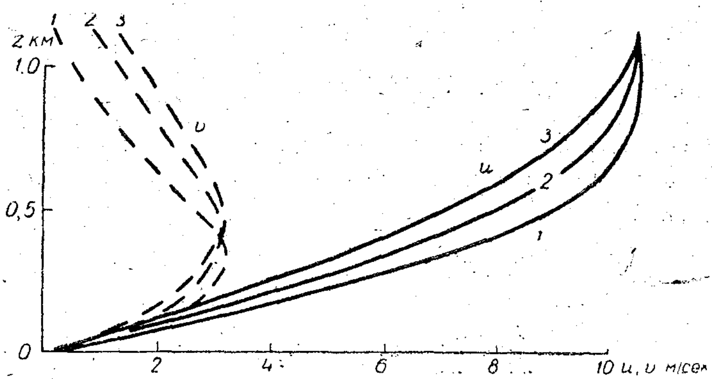

Рис. 27. Типичные профили компонент скорости ветра в пограничном слое атмосферы *1* — $P_0 = -0{,}1$ *кал/см²мин*; *2* — $P_0 = 0$; *3* — $P_0 = 0{,}1$

Хотя полученные характеристики турбулентности являются интегральными по всему пограничному слою атмосферы, они представляют большой интерес, например при учете влияния пограничного слоя на атмосферные процессы большого масштаба в задачах численного прогноза погоды.

Наряду с рассмотренным выше методом интегрирования системы уравнений для пограничного слоя (когда вводится понятие среднего коэффициента турбулентности $\bar{k}$) заметное распространение получили модели с априорным заданием профиля коэффициента турбулентности:

1) в виде «закона с изломом» (М. Е. Швец, М. И. Юдин)

$$k=k_1\cdot z, \qquad z<h,$$

$$k=k_1\cdot h, \qquad z\geqslant h;$$

2) в виде степенного закона (М. Е. Берлянд)

$$k=k_1\cdot z^p \qquad z<h,$$

$$k=k_1\cdot h^p, \qquad z\geqslant h$$

и некоторые другие.

Решения при этом получаются довольно сложные и здесь не будут рассматриваться. Отметим только, что общим недостатком всех этих подходов является нарушение физической взаимосвязи между профилями ветра и температуры, с одной стороны, и профилем коэффициента турбулентности — с другой.

§ 4. Нелинейная модель пограничного слоя атмосферы

Наиболее корректное решение проблемы основано на нелинейной модели строения стратифицированного пограничного слоя атмосферы, которая не требует априорных гипотез о профиле коэффициента турбулентности [2]. В дальнейшем эта модель развита в работах [1, 11]. Для стационарного, горизонтально-однородного пограничного слоя атмосферы, в предположении экспоненциального убывания турбулентного потока тепла с высотой (из-за влияния радиации), исходная система уравнений имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dz}\,k\,\frac{du}{dz}+2\omega_z\,(v-v_g)=0,\\ &\frac{d}{dz}\,k\,\frac{dv}{dz}-2\omega_z\,(u-u_g)=0;\end{aligned}\right\} \qquad (4.4.1)$$

$$\rho c_p \cdot \alpha_{\text{т}} \cdot k \left(\frac{dT}{dz} + \gamma_{\text{а}} \right) = -P_0 \cdot e^{-nz} = -P(z); \qquad (4.4.2)$$

$$k \left[\left(\frac{du}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 \right] - \alpha_{\text{т}} \frac{g}{T} \cdot k \left(\frac{dT}{dz} + \gamma_{\text{а}} \right) +$$

$$+ \alpha_{\text{в}} \frac{d}{dz} k \frac{db}{dz} - \varepsilon = 0; \qquad (4.4.3)$$

$$\varepsilon = c \frac{b^2}{k} \quad \left(\text{или } \varepsilon = c \frac{b\sqrt{b}}{e} \right); \qquad (4.4.4)$$

$$k = l \cdot \sqrt{b}, \quad l = -\tilde{\varkappa} \cdot \frac{\psi}{d\psi/dz}; \qquad (4.4.5)$$

$$\psi = \left(\frac{du}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 - \alpha_{\text{т}} \cdot \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \gamma_{\text{а}} \right) +$$

$$+ \frac{\alpha_{\text{в}}}{k} \cdot \frac{d}{dz} k \frac{db}{dz}. \qquad (4.4.6)$$

Здесь $\alpha_{\text{т}} = 1{,}0$; $\alpha_{\text{в}} = \frac{k_{\text{в}}}{k} = 0{,}73$; $c = 0{,}046$; $\tilde{\varkappa} \simeq 0{,}4$.

Если ось x ориентировать в направлении приземного ветра, то $v_g = G \cdot \sin \alpha$, $u_g = G \cdot \cos \alpha$, где α — угол между вектором геострофического ветра и осью x. Система (4.4.1) решается при следующих граничных условиях:

$$\left. \begin{array}{lll} z \to z_0, & u \to 0, & v \to 0, \\ z \to \infty, & u \to u_g & v \to v_g. \end{array} \right\} \qquad (4.4.7)$$

Из (4.4.3) видно, что, если ввести в рассмотрение динамическую скорость

$$v_*^2 = \lim_{z \to z_0} k \cdot \frac{du}{dz} \qquad (4.4.8)$$

(z_0 — параметр шероховатости, высота, на которой средняя скорость ветра становится равной нулю), то нижнее граничное условие для кинетической энергии турбулентности можно записать в виде

$$z \to z_0 \quad b \to c^{-1/2} \cdot v_*^2. \qquad (4.4.9)$$

Так как с удалением от поверхности турбулентность ослабевает, то

$$z \to \infty \quad b \to 0. \tag{4.4.10}$$

Итак, задача сводится к определению профилей u, v, k, ε, b и l (а также величин v_* и α) при заданных «внешних параметрах» G, z_0, $2\omega_z$, g/T, $P_0/\rho c_p$.

Если воспользоваться установленным из эксперимента фактом, что вблизи поверхности земли касательное напряжение практически не зависит от высоты, то, записав уравнение движения в напряжениях, можно сформулировать граничные условия на $z \to 0$, при этом один параметр z_0 становится несущественным (такой путь впервые был использован в работах А. С. Монина).

Введем новые переменные

$$\eta = k\frac{du}{dz}; \quad \sigma = k\frac{dv}{dz}. \tag{4.4.11}$$

В таком случае (4.4.1) примет вид

$$\left.\begin{aligned} v - G\cdot\sin\alpha &= -\frac{1}{2\omega_z}\cdot\frac{d\eta}{dz}, \\ u - G\cdot\cos\alpha &= \frac{1}{2\omega_z}\cdot\frac{d\sigma}{dz}. \end{aligned}\right\} \tag{4.4.12}$$

Для определения η и σ продифференцируем (4.4.12) по z

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\eta}{dz^2} + \frac{2\omega_z}{k}\sigma &= 0, \\ \frac{d^2\sigma}{dz^2} - \frac{2\omega_z}{k}\eta &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4.4.13}$$

и перепишем граничные условия для η и σ

$$z \to 0, \quad \eta \to v_*^2, \quad \sigma \to 0; \tag{4.4.14}$$

$$z \to \infty, \quad \eta \to 0, \quad \sigma \to 0. \tag{4.4.15}$$

Перейдем к безразмерным переменным:

$$\left.\begin{aligned} z_n &= \frac{z}{L_1}, \quad \eta_n = \frac{\eta}{v_*^2}, \quad \sigma_n = \frac{\sigma}{v_*^2}, \quad k_n = \frac{k}{\varkappa v_*\cdot L_1}, \\ \varepsilon_n &= \frac{\varkappa\cdot L_1}{v_*^3}\varepsilon, \quad b_n = \frac{c^{1/2}}{v_*^2}b, \quad l_n = \frac{l}{\varkappa c^{1/4} L_1}, \end{aligned}\right\} \tag{4.4.16}$$

где $L_1 = \dfrac{\varkappa v_*}{2\omega_z}$.

В таком случае уравнения (4.4.2) — (4.4.6), (4.4.13) примут вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\eta_n}{dz_n^2}+\frac{\sigma_n}{k_n}=0, \\ \frac{d^2\sigma_n}{dz_n^2}-\frac{\eta_n}{k_n}=0; \end{aligned}\right\} \tag{4.4.17}$$

$$\frac{\eta_n^2+\sigma_n^2}{k_n}-\mu+\beta\frac{d}{dz_n}k_n\cdot\frac{db_n}{dz_n}=\varepsilon_n; \tag{4.4.18}$$

$$\left.\begin{aligned} &k_n=b_n^{1/2}\cdot l_n, \\ &\varepsilon_n=\frac{b_n^2}{k_n}, \\ &l_n=-\left(\frac{d}{dz_n}l_n\frac{b_n}{k_n}\right)^{-1}, \end{aligned}\right\} \tag{4.4.19}$$

где $\beta=\mathrm{const}=0{,}54$;

$$\left.\begin{aligned} &\mu=-\varkappa^2\frac{g}{T}\cdot\frac{P(z)/\rho c_p}{2\omega_z v_*^2}=\mu_0\cdot e^{-nz_n}, \\ &\mu_0=-\varkappa^2\frac{g}{T}\cdot\frac{P_0/\rho c_p}{2\omega_z\cdot v_*^2}. \end{aligned}\right\} \tag{4.4.20}$$

Граничные условия:

$$z_n\to 0,\quad \eta_n\to 1,\quad \sigma_n\to 0,\quad b_n\to 1; \tag{4.4.21}$$

$$z_n\to\infty,\quad \eta_n\to 0,\quad \sigma_n\to 0,\quad b_n\to 0. \tag{4.4.22}$$

Численное решение систем (4.4.17)—(4.4.19) позволяет определить комплекс универсальных функций переменной z_n, зависящих от параметров μ_0 и n

$$\left.\begin{aligned} &\eta_n=N_\mu(z_n),\quad \sigma_n=S_\mu(z_n),\quad k_n=K_\mu(z_n), \\ &\varepsilon_n=\Sigma_\mu(z_n),\quad b_n=B_\mu(z_n),\quad l_n=L_\mu(z_n). \end{aligned}\right\} \tag{4.4.23}$$

Для нахождения профиля ветра введем безразмерные переменные

$$u_n=\frac{\varkappa}{v_*}\cdot u,\quad v_n=\frac{\varkappa}{v_*}\cdot v \tag{4.4.24}$$

и перепишем (4.4.12) в виде

$$u_n - \frac{\varkappa G}{v_*} \cdot \cos\alpha = \frac{d\sigma_n}{dz_n} = \Phi_\mu(z_n),$$
$$v_n - \frac{\varkappa G}{v_*} \cdot \sin\alpha = -\frac{d\eta_n}{dz_n} = \psi_\mu(z_n) \qquad (4.4.25)$$

Итак, найденные безразмерные универсальные функции позволяют с помощью (4.4.16) и (4.4.24) определить искомые величины: u, v, k, b, ε, l, если известны v_* и α. Определение v_* и α по заданным G, z_0, $2\omega_z$, g/T и $P_0/\rho c_p$ сводится к нахождению двух универсальных функций, устанавливающих зависимость геострофического коэффициента трения $\frac{v_*}{G}$ и угла полного поворота ветра в пограничном слое α от безразмерных параметров

$$\mathrm{Ro} = \frac{G}{2\omega_z z_0},$$
$$M = -\frac{g}{T} \cdot \frac{P_0/\rho c_p}{2\omega_z G^2} \qquad (4.4.26)$$

(первый параметр обычно называют числом Россби, второй параметр выражает стратификацию через внешние параметры).

После ряда преобразований можно показать, что

$$\frac{v_*}{\varkappa G} = \chi_\mu(r),$$
$$-\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{d\eta_n/dz_n}{d\sigma_n/qz_n} = \zeta_\mu(r), \qquad (4.4.27)$$

где $r = \varkappa^2 \mathrm{Ro}$.

Определение универсальных функций χ и ζ и установление связи между μ и Ro, M позволяет теперь определить все искомые величины. Таблицы универсальных функций приводятся в [1, 11]. В виде иллюстрации можно привести графики некоторых универсальных функций (рис. 28. 29).

При использовании рассмотренной модели для описания пограничного слоя над морем следует иметь в виду, что параметр шероховатости перестает быть внешним параметром и для его определения желательно использовать связь z_0 с другими параметрами задачи, допустим связь с динамической скоростью и ускорением силы тяжести: $z_0 = f(v_*, g)$. Более подробно об определении параметра шероховатости водной поверхности будет сказано в следующем разделе.

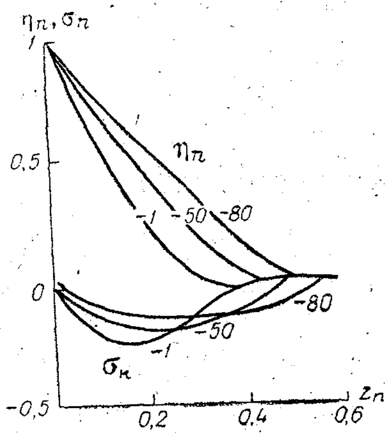

Рис. 28. Зависимость от высоты и стратификации компонент касательного напряжения η_n и σ_n. Цифры у кривых — величины μ_0.

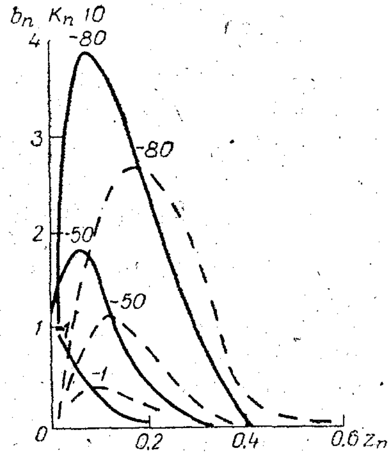

Рис. 29. Зависимость от высоты и стратификации коэффициента турбулентности (пунктир) и кинетической энергии турбулентности (сплошная). Цифры у кривых — величины μ_0

V. ПРИЗЕМНЫЙ СЛОЙ АТМОСФЕРЫ

Приземным слоем называется сравнительно тонкий слой у поверхности земли (толщиной 10—100 *м*), в котором наблюдаются, как правило, максимальные градиенты метеорологических элементов (по мере приближения к поверхности земли градиенты возрастают как $1/z$). Важной особенностью приземного слоя, в значительной мере оправдывающей выделение в рамках пограничного слоя, является постоянство по высоте турбулентных потоков.

Хотя процессы в этом слое тесно связаны с процессами во всем пограничном слое, часто для решения ряда важных задач достаточно установить внутренние связи между метеорологическими элементами в одном только приземном слое.

§ 1. Формулировка задачи о строении приземного слоя

Проинтегрируем от z_0 до z уравнения движения для стационарного, горизонтально-однородного пограничного слоя атмосферы (4.4.1) для случая, когда ось x совпадает с направлением приземного ветра

$$\left.\begin{aligned} &k\left.\frac{du}{dz}\right|_{z} - k\left.\frac{du}{dz}\right|_{z_0} + \int\limits_{z_0}^{z} 2\omega_z (v - G\sin\alpha)\, dz = 0, \\ &k\left.\frac{dv}{dz}\right|_{z} - k\left.\frac{dv}{dz}\right|_{z_0} - \int\limits_{z_0}^{z} 2\omega_z (u - G\cos\alpha)\, dz = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5.1.1}$$

Тогда на основании (4.4.8) $k\left.\dfrac{du}{dz}\right|_{z_0} = v_*^2$, а $k\left.\dfrac{dv}{dz}\right|_{z_0} = 0$, так как ось x направлена по приземному ветру и совпадает с направлением касательного напряжения у поверхности земли τ (рис. 30). Действительно, если α — угол между направлением приземного ветра c и осью x, а α' — угол между направлением касательного напряжения τ и осью x, то

$$\operatorname{tg}\alpha\Big|_{z\to 0}=\frac{v}{u}\Big|_{z\to 0}=\frac{dv/dz}{du/dz}\Big|_{z\to 0};$$

$$\operatorname{tg}\alpha'\Big|_{z\to 0}=\frac{\tau_y}{\tau_x}\Big|_{z\to 0}=\frac{dv/dz}{du/dz}\Big|_{z\to 0}.$$

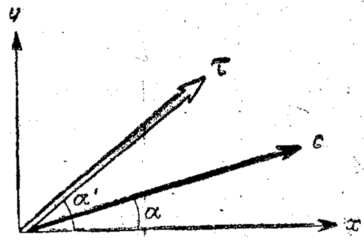

Рис. 30. Соотношение между векторами скорости ветра и касательного напряжения

Перепишем систему (5.1.1) в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{k\cdot\dfrac{du}{dz}\Big|_z}{v_*^2}&=1+\frac{2\omega_z}{v_*^2}\int_{z_0}^{z}(v-G\cdot\sin\alpha)\,dz,\\ \frac{k\cdot\dfrac{dv}{dz}\Big|_z}{v_*^2}&=\frac{2\omega_z}{v_*^2}\int_{z_0}^{z}(u-G\cdot\cos\alpha)\,dz.\end{aligned}\right\}\qquad(5.1.2)$$

Введем средние для слоя от z_0 до z величины $\bar{u}$, $\bar{v}$ и $\bar{\alpha}$ и перейдем в правой части (5.1.2) к безразмерным переменным: $u_n=u/G$, $v_n=v/G$, $z_n=z/h$. Тогда

$$\frac{k\cdot\dfrac{du}{dz}\Big|_z}{v_*^2}=1+\frac{2\omega_z\cdot h\cdot G}{v_*^2}(\bar{v}_n-\sin\bar{\alpha})\cdot z_n;$$

$$\frac{k\cdot\dfrac{dv}{dz}\Big|_z}{v_*^2}=\frac{2\omega_z\cdot h\cdot G}{v_*^2}(\bar{u}_n-\cos\bar{\alpha})\cdot z_n.$$

Так как по определению (см. раздел II § 6) все безразмерные величины имеют порядок единицы и, кроме того, $\cos\alpha=0(1)$, а $\sin\bar{\alpha}<<1$ (по наблюдениям $\bar{\alpha}=10$—$15°$), то

$$\left.\begin{aligned}\frac{k\cdot\dfrac{du}{dz}\Big|_z}{v_*^2}&=1+\frac{2\omega_z\cdot G\cdot h}{v_*^2}0(1),\\ \frac{k\cdot\dfrac{dv}{dz}\Big|_z}{v_*^2}&=\frac{2\omega_z\cdot G\cdot h}{v_*^2}[0(1)-0(1)],\end{aligned}\right\}\qquad(5.1.3)$$

Из первого уравнения можно оценить высоту слоя h, в пределах которого турбулентный поток количества движения остается практически постоянным по высоте, т. е. высоту приземного слоя; она должна удовлетворять условию

$$\frac{2\omega_z \cdot G \cdot h}{v_*^2} \ll 1.$$

Если $2\omega_z = 10^{-4}$, $G = 10^3$ *см/сек*, $v_*^2 = 10^3$ *см²/сек²*, тогда

$$h \ll 100 \text{ м}. \qquad (5.1.4)$$

Из второго уравнения (5.1.3) следует, что для $h \ll 100$ *м*

$$k \cdot \frac{dv}{dz}\Big|_z \ll v_*^2,$$

т. е. проекция касательного напряжения на ось y значительно меньше проекции на ось x, и для определения скорости ветра можно использовать следующее уравнение:

$$k \cdot \frac{du}{dz} = v_*^2. \qquad (5.1.5)$$

Таким образом, в пределах приземного слоя можно не учитывать силу Кориолиса и движение воздуха рассматривать как одномерное.

Проинтегрируем теперь от z_0 до z уравнение притока тепла (4.1.8), тогда

$$\alpha_{\text{т}} \cdot k \cdot \frac{d\Theta}{dz}\Big|_z - \alpha_{\text{т}} \cdot k \cdot \frac{d\Theta}{dz}\Big|_{z_0} = -\frac{R(z) - R(0)}{\rho c_p},$$

где $R(\text{o}) = R(z_0)$.

Согласно определению турбулентного потока тепла

$$P_0 = -\rho \cdot c_p \cdot \alpha_{\text{т}} \cdot k \cdot \frac{d\Theta}{dz}\Big|_{z_0},$$

и затем, введя безразмерный лучистый поток тепла $R_n = \frac{R(z)}{R(0)}$, можно записать

$$\frac{\alpha_{\text{т}} \cdot k \cdot \frac{d\Theta}{dz}\Big|_z}{P_0/\rho c_p} = -1 + \frac{R(0)}{P_0}(R_n - 1),$$

поскольку на основании уравнения теплового баланса $\frac{R(0)}{P_0} = 0(1)$, а в пределах $h \leqslant 100$ *м* $R_n \to 1{,}0$, то $(R_n - 1) \ll 1$ и

$$\alpha_т \cdot k \cdot \frac{d\Theta}{dz} = -\frac{P_0}{\rho c_p}. \qquad (5.1.6)$$

Уравнение (5.1.6) показывает, что в пределах приземного слоя можно пренебречь радиационным притоком тепла (впрочем, как и фазовым). Следует обратить внимание на то, что для условий суши действительно $P_0 \approx R(о)$, так как $R(о) = P + LE + B$, а затраты тепла на испарение LE и теплообмен поверхности с нижележащими слоями B малы. Для морских условий турбулентный поток тепла P_0 может быть значительно меньше радиационного баланса поверхности и тогда лучистый приток тепла будет играть важную роль в формировании распределения температуры в приземном слое.

По аналогии с (5.1.6) можно сразу записать уравнение для определения удельной влажности

$$\alpha_q \cdot k \cdot \frac{dq}{dz} = -\frac{E_0}{\rho}, \qquad (5.1.7)$$

где E_0 — скорость испарения; $\alpha_q = \frac{k}{k}$; k_q — коэффициент турбулентности для потока влаги. Уравнение (5.1.7) предполагает, что в приземном слое можно пренебречь притоком влаги за счет фазовых переходов.

Система уравнений (5.1.5), (5.1.6), (5.1.7) содержит четыре неизвестные величины: u, Θ, q, k. Для замыкания системы используем уравнение баланса энергии турбулентности (2.4.20), соотношения, полученные на основании теории подобия (2.4.17, 2.4.18), и выражение для пути перемешивания (2.4.19‴). Для малых z эти уравнения примут следующий вид:

$$\frac{v_*^4}{k} + \frac{g}{T} \cdot \frac{P_0}{\rho \cdot c_p} + c \cdot \frac{b^2}{k} = 0; \qquad (5.1.8)$$

$$k = l\sqrt{b}; \qquad (5.1.9)$$

$$l = -\tilde{\varkappa} \cdot \frac{\psi}{d\psi/dz}; \qquad (5.1.10)$$

$$\psi = \left(\frac{du}{dz}\right)^2 - \alpha_т \cdot \frac{g}{T} \frac{d\Theta}{dz}. \qquad (5.1.11)$$

§ 2. Замыкание системы уравнений для приземного слоя атмосферы на основании теории подобия

Качественный анализ системы (5.1.8)—(5.1.11) показывает, что коэффициент турбулентности должен однозначно определяться следующими параметрами [12]: v_*, $\frac{g}{T}$, $\frac{P_0}{\rho \cdot c_p}$ и z, т. е.

$$k=f\left(v_*, \frac{g}{T}, \frac{P_0}{\rho \cdot c_p}, z\right). \tag{5.2.1}$$

Раскроем функциональную зависимость (5.2.1) с помощью П-теоремы, для чего выпишем формулы размерности всех входящих в (5.2.1) величин: $[k]=L^2 \cdot T^{-1}$, $[v_*]=L \cdot T^{-1}$, $\left[\frac{g}{T}\right]=L \times T^{-2} \cdot гр^{-1}$, $\left[\frac{P_0}{\rho c_p}\right]=L \cdot гр \cdot T^{-1}$, $]z]=L$.

Так как в данном случае ищется связь пяти физических величин, из которых три имеют независимую размерность, то функциональную зависимость (5.2.1) можно раскрыть только с точностью до функции от безразмерного аргумента. Нетрудно показать, что из величин, входящих под знак функции в (5.2.1), единственным образом с точностью до числового множителя составляется безразмерная комбинация z/L, где L — имеет размерность длины и называется масштабом длины Монина—Обухова. Действительно, на основании П-теоремы

$$\frac{k}{v_*^{\alpha_1} \cdot z^{\beta_1}}=F\left(\frac{\frac{g}{T} \cdot \frac{P_0}{\rho c_p}}{v_*^{\alpha_2} \cdot z^{\beta_2}}\right).$$

Приравняв показатели степени при независимых размерностях, определим α_1, α_2, β_1 и β_2:

$$\begin{array}{c|ll} L & 2=\alpha_1+\beta_1, & 2=\alpha_2+\beta_2 \\ T & -1=-\alpha_1, & -3=-\alpha_2 \end{array}$$

$$\alpha_1=1,\ \beta=1,\ \alpha_2=3,\ \beta_2=-1.$$

В таком случае

$$k=v_* \cdot z \cdot F\left(\frac{z}{\frac{v_*^3}{g/T \cdot P_0/\rho c_p}}\right),$$

или, обозначив через

$$L=-\frac{v_*^3}{\varkappa\,\frac{g}{T}\cdot\frac{P_0}{\rho c_p}},\tag{5.2.2}$$

получим выражение для коэффициента турбулентности

$$k=v_*\cdot z\cdot F\left(\frac{z}{L}\right).\tag{5.2.3}$$

В (5.2.2) постоянная Кармана $\varkappa$ введена для удобства некоторых последующих выкладок, а знак выбран так, чтобы было $L>0$ при устойчивой стратификации.

Покажем, что z/L можно рассматривать как критерий устойчивости; для этого установим связь между z/L и используемым обычно для описания устойчивости числом Ричардсона. Число Ричардсона характеризует отношение энергии турбулентности, возникающей за счет сил плавучести, к продукции энергии турбулентности за счет среднего движения. В соответствии с этим градиентная форма числа Ричардсона имеет следующий вид:

$$\mathrm{Ri}=\frac{\frac{g}{T}\cdot\alpha_{\mathrm{т}}\cdot k\cdot\left(\frac{\partial T}{\partial z}+\gamma_{\mathrm{a}}\right)}{k\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.\tag{5.2.4}$$

Если предположить, что профили температуры и скорости ветра подобны до самой подстилающей поверхности, то из (5.2.4) нетрудно получить выражение для приближенного (интегрального) числа Ричардсона

$$\mathrm{Rb}=\frac{g\cdot z}{T}\cdot\alpha_{\mathrm{т}}\cdot\frac{t_a-t_w}{u_a^2},$$

где u_a — скорость ветра на $z=a$. При $z=6$ *м*, $T=300°$, $\alpha_{\mathrm{т}}=1{,}0$, получаем, что

$$\mathrm{Rb}=0{,}2\cdot\frac{t_a-t_w}{u_a^2}\tag{5.2.5}$$

Если ввести так называемые профильные коэффициенты

$$\Gamma_{\mathrm{м}}=\frac{1}{u_a}\cdot\frac{du}{d\ln z},\quad \Gamma_{\mathrm{т}}=\frac{1}{t_a-t_w}\cdot\frac{dt}{d\ln z},\quad \Gamma_q=\frac{1}{q_a-q_w}\cdot\frac{dq}{d\ln z}$$

и учесть, что согласно наблюдениям до высот 4—8 *м* и стратификации от безразличной до умеренной (над морем) $\Gamma_{\mathrm{м}}=\Gamma_{\mathrm{т}}=\Gamma_q=0{,}1$, то для выбранных величин z и T получим

$$\mathrm{Rb}=2{,}0\cdot\frac{t_a-t_w}{u_a^2}. \tag{5.2.6}$$

Наряду с градиентной формой числа Ричардсона часто используется число Ричардсона, выраженное через потоки

$$\mathrm{Rf}=-\frac{\frac{g}{T}\cdot\frac{P_0}{c_p}}{\tau\cdot\frac{\partial c}{\partial z}}. \tag{5.2.7}$$

Если выразить поток количества движения τ и градиент скорости через соотношения

$$\tau=\rho\cdot v_*^2,\quad \frac{\partial c}{\partial z}=\frac{v_*^2}{k}=\frac{v_*}{z\cdot F\left(\frac{z}{L}\right)},$$

то нетрудно установить связь между Rf и z/L

$$\mathrm{Rf}=\frac{z}{L\cdot\varkappa}\cdot F\left(\frac{z}{L}\right). \tag{5.2.8}$$

Из (5.2.8) видно, что z/L однозначно связано с числом Ричардсона и может рассматриваться как критерий устойчивости. Обращает на себя внимание тот факт, что эффект меняется одинаково при увеличении высоты или уменьшении абсолютного значения масштаба длины L (это означает, что на малых высотах турбулентный режим практически не зависит от стратификации).

Хотя соотношение (5.2.3) позволяет замкнуть систему уравнений для приземного слоя, им трудно воспользоваться, если не раскрыть вид функции $F(z/L)$.

§ 3. Частные выражения для профилей коэффициента турбулентности и метеорологических элементов

Для некоторых предельных случаев стратификации удается получить явный вид функции $F(z/L)$.

Безразличная стратификация

Так как при этом равен нулю поток тепла, то $L=\infty$ и $z/L=0$. Измерения в аэродинамических трубах и в приземном слое показывают, что $F(0)\approx\varkappa\approx 0{,}40$ и при $z\gg z_0$

$$k = \varkappa \cdot v_* \cdot z. \tag{5.3.1}$$

Из (5.2.8) следует, что при стратификации, стремящейся к безразличной, $z/L \to \mathrm{Rf}$.

Выражения для профилей метеорологических элементов можно получить, если проинтегрировать уравнения (5.1.5), (5.1.7) от z_0 до z

$$u = \frac{v_*}{\varkappa} \ln z/z_0 \tag{5.3.2}$$

или

$$u = u_1 \cdot \frac{\ln z/z_0}{\ln z_1/z_0}; \tag{5.3.3}$$

$$q - q_0 = -\frac{E}{\rho \alpha_q \varkappa v_*} \ln z/z_0 \tag{5.3.4}$$

или

$$q - q_0 = (q_2 - q_1) \frac{\ln z/z_0}{\ln z_2/z_1}, \tag{5.3.5}$$

где q_0 — удельная влажность на уровне z_0; u_1, q_1, q_2 — скорость ветра и удельная влажность на $z = z_1$ и $z = z_2$. Для морских условий можно считать, что $q_0 = q_w$ — насыщающей удельной влажности при температуре поверхности t_w.

Итак, в случае безразличной стратификации коэффициент турбулентности является линейной функцией высоты, а профили метеорологических элементов — логарифмической функцией высоты (рис. 31, 32).

Продифференцировав (5.3.3) и (5.3.5) по z и использовав (5.3.1), можно получить выражения для определения турбулентных потоков

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \varkappa \cdot v_* \cdot \rho \cdot \frac{u_1}{\ln z_1/z_0}, \\ E &= \alpha_q \cdot \rho \cdot \varkappa \cdot v_* \cdot \frac{q_1 - q_2}{\ln z_2/z_1}. \end{aligned}\right\} \tag{5.3.6}$$

Стратификация, близкая к безразличной

В этом случае мал турбулентный поток тепла (или мало z), а $F(z/L)$ как функцию от малого аргумента можно разложить в ряд Маклорена

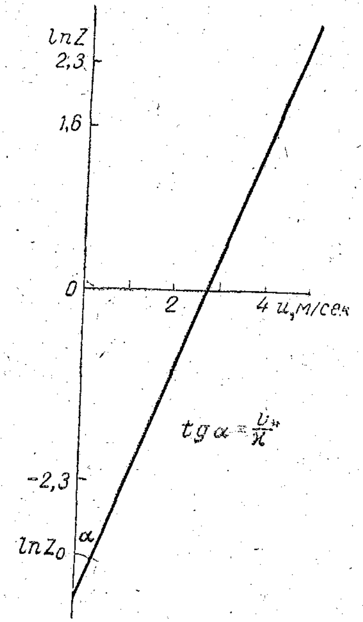

Рис. 31. Профиль скорости ветра в приземном слое для безразличной стратификации

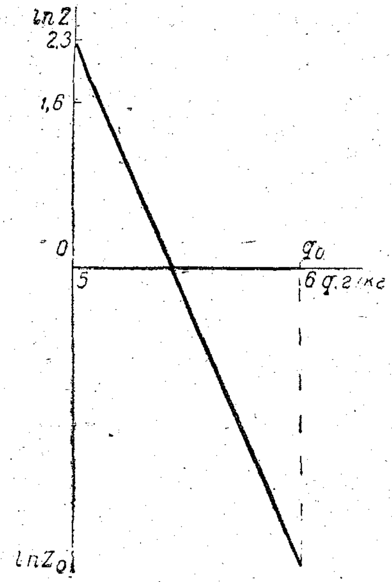

Рис. 32. Профиль удельной влажности в приземном слое для безразличной стратификации

$$F(z/L) = F(0) - \frac{z}{L} F'(0) + \left(\frac{z}{L}\right)^2 \cdot \frac{F''(0)}{2} + \ldots$$

Ограничимся первыми двумя членами ряда, так как $(z/L)^2$ уже величина второго порядка малости. Тогда

$$F(z/L) = F(0) \cdot \left[1 - \beta \cdot \frac{z}{L}\right], \tag{5.3.7}$$

где $\beta = \dfrac{F'(0)}{F(0)}$ (величина β, по современным наблюдениям, находится в пределах от 3 до 10) и (5.2.3) запишется в виде

$$k = \varkappa \cdot v_* \cdot z \cdot \left(1 - \beta \frac{z}{L}\right), \tag{5.3.8}$$

Из (5.3.8) следует, что при устойчивой стратификации ($L>0$) коэффициент турбулентности меньше, а при неустойчивой стратификации ($L<0$) — больше, чем при безразличной.

Проинтегрировав (5.1.5)—(5.1.7) от z_0 до z, с учетом (5.3.8) получим выражения для профилей метеорологических элементов

$$\frac{du}{dz}=\frac{v_*^2}{k}=\frac{v_*}{\varkappa \cdot z\,(1-\beta z/L)}=\frac{v_*}{\varkappa z}\left(1+\beta\,\frac{z}{L}\right),$$

откуда

$$u=\frac{v_*}{\varkappa}\left(\ln\frac{z}{z_0}+\beta\frac{z}{L}\right) \tag{5.3.9}$$

$\left(\text{считая, что } \frac{z_0}{L}\ll\frac{z}{L}\right)$,

$$\left.\begin{aligned}\Theta&=\Theta_0+T_*\left(\ln\frac{z}{z_0}+\beta\frac{z}{L}\right),\\ q&=q_0+q_*\left(\ln\frac{z}{z_0}+\beta\frac{z}{L}\right),\end{aligned}\right\} \tag{5.3.10}$$

где

$$T_*=-\frac{P_0}{\rho\cdot c_p\cdot\varkappa\,v_*\cdot\alpha_{\text{т}}};\quad q_*=-\frac{E}{\rho\cdot\varkappa\cdot v_*\cdot\alpha_q}.$$

Итак, в случае стратификации, близкой к безразличной, получаются линейно-логарифмические профили метеорологических элементов (рис. 33, 34). Очевидно, что при устойчивой стратифи-

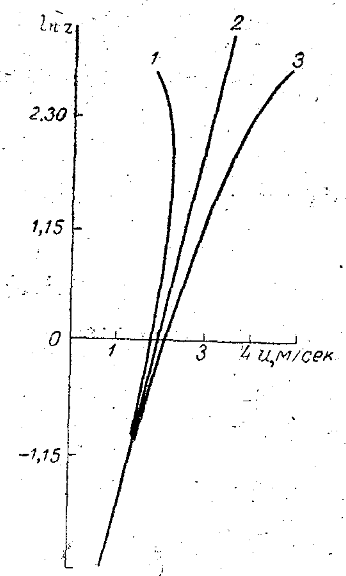

Рис. 33. Профиль скорости ветра для стратификации, близкой к безразличной. *1* — $P_0 = 0{,}05$ *кал/см²·мин*; *2* — $P_0 = 0$; *3* — $P_0 = -0{,}05$

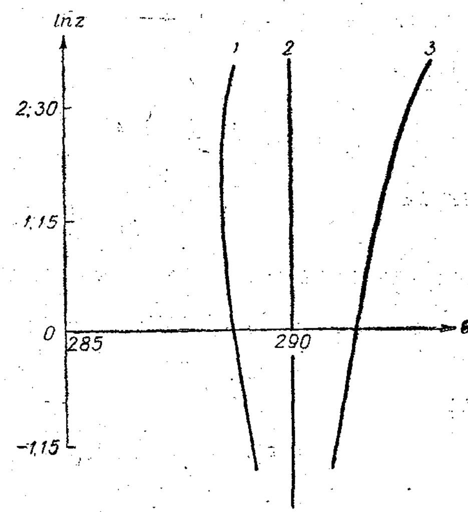

Рис. 34. Профиль температуры для стратификации близкой к безразличной. *1* — $P_0 = 0{,}05$ *кал/см²мин*; *2* — $P_0 = 0$; *3* — $P_0 = -0{,}05$

кации градиенты метеорологических элементов больше, чем при неустойчивой. Турбулентные потоки определяются следующими соотношениями

$$\left.\begin{aligned}
\tau &= \rho \cdot \varkappa \cdot v_* \cdot \frac{u_1}{\ln \frac{z_1}{z_0} + \beta \frac{z_1}{L}}, \\
P_0 &= \rho \cdot c_p \cdot \alpha_т \cdot \varkappa \cdot v_* \times \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\ln \frac{z_2}{z_1} + \beta \frac{z_2 - z_1}{L}}, \\
E &= \rho \cdot \alpha_q \cdot \varkappa \cdot v_* \times \frac{q_1 - q_2}{\ln \frac{z_2}{z_1} + \beta \frac{z_2 - z_1}{L}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.3.11)$$

Свободная конвекция

В случае свободной конвекции $v_* \to 0$ и $L \to 0$ (так как турбулентность определяется только силой плавучести). При свободной конвекции коэффициент турбулентности не может быть равным 0 и ∞, поэтому v_* не должно входить в формулу (5.2.3). Этому условию отвечает следующее представление $F\left(\frac{z}{L}\right)$:

$$F\left(\frac{z}{L}\right) = A_1 \left(\frac{z}{L}\right)^{1/3} = A_2 \frac{z^{1/3}}{v_*},$$

откуда

$$k = A_2 \cdot z^{4/3}. \qquad (5.3.12)$$

Получим выражение для профилей метеорологических элементов

$$\left.\begin{aligned}
\Theta &= \Theta_0 + B_1 (z^{-1/3} - z_0^{-1/3}, \\
q &= q_0 + B_2 (z^{-1/3} - z_0^{-1/3},
\end{aligned}\right\} \qquad (5.3.13)$$

где

$$B_1 = \frac{3P_0}{A_2 \rho c_p \alpha_т}; \quad B_2 = \frac{3E}{A_2 \rho \alpha_q}.$$

Итак, в случае свободной конвекции получаются степенные профили коэффициента турбулентности и метеорологических элементов. Турбулентные потоки будут определяться следующими выражениями:

$$\left.\begin{aligned} P &= \rho\, c_p\, \alpha_т \cdot A_2\, \frac{\Theta_1-\Theta_2}{z_2^{-1/3}-z_1^{1/3}}, \\ E &= \rho\alpha_q \cdot A_2 \cdot \frac{q_1-q_2}{z_2^{-1/3}-z_1^{-1/3}}. \end{aligned}\right\} \tag{5.3.14}$$

Предельно-устойчивое состояние (инверсия)

Так как при сильно-устойчивой стратификации становится невозможным существование крупных турбулентных возмущений (эти возмущения должны затрачивать слишком много энергии на работу против сил плавучести), то турбулентность может существовать лишь в виде мелких вихрей. В таком случае турбулентный обмен между различными слоями воздуха очень затруднен и турбулентность приобретает локальный характер, характеристики турбулентного обмена не должны зависеть от расстояния z до подстилающей поверхности. Чтобы исключить зависимость от z в формуле (5.2.3), необходимо предположить, что

$$F\left(\frac{z}{L}\right) = D_1 \cdot L \cdot z^{-1}$$

и тогда

$$k = D_1 \cdot v_* \cdot L. \tag{5.3.15}$$

Нетрудно, показать, что при этом получаются линейные профили метеорологических элементов

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{v_*}{D_1 \cdot L} \cdot z, \\ \Theta &= \Theta_0 - D_2 \cdot z, \\ q &= q_0 - D_3 \cdot z, \end{aligned}\right\} \tag{5.3.16}$$

где

$$D_2 = \frac{P_0}{\rho\, c_p\, \alpha_т\, D_1\, v_*\, L}; \quad D_3 = \frac{E}{\rho\alpha_q\, D_1\, v_*\, L},$$

а турбулентные потоки определяются из следующих соотношений:

$$\left.\begin{aligned} \tau &= \rho\, D_1 \cdot v_* \cdot L \cdot \frac{u_1}{z_1}, \\ P_0 &= \rho \cdot c_p\, \alpha_т \cdot D_1 \cdot v_* \cdot L \cdot \frac{\Theta_1-\Theta_2}{z_2-z_1}, \\ E &= \rho \cdot \alpha_q \cdot D_1 \cdot v_* \cdot L \cdot \frac{q_1-q_2}{z_2-z_1}. \end{aligned}\right\} \tag{5.3.17}$$

Наряду с полученными предельными соотношениями для профилей коэффициента турбулентности и метеорологических элементов имеются и интерполяционные формулы (см. например, [8, 9]).

Обратим теперь внимание на то, что в изложенном подходе к замыканию системы уравнений для приземного слоя учитывалась только стратификация, связанная с вертикальным распределением температуры. Ранее уже было показано, что в действительности устойчивость зависит еще и от вертикального распределения влажности. В этом более общем случае на основании теории подобия коэффициент турбулентности должен определяться следующими параметрами: v_*, g/ρ, F_ρ ρ, z (F_ρ — поток плотности), т. е.

$$k=F\left(v_*, \frac{g}{\rho}, F_\rho/\rho, z\right). \tag{5.3.18}$$

Если теперь использовать П-теорему, то получается следующее выражение для k:

$$k=v_*\cdot z\cdot F(z/\tilde{L}), \tag{5.3.19}$$

где

$$\tilde{L}=-\frac{v_*^3}{\varkappa\cdot\frac{g}{\rho}\cdot\frac{F_\rho}{\rho}} \tag{5.3.20}$$

(знак минус поставлен, чтобы при устойчивой стратификации плотности, $F_\rho<0$, было $\tilde{L}>0$). По аналогии с другими турбулентными потоками поток плотности можно записать в виде

$$F_\rho=\rho\cdot k\cdot\alpha_\rho\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}+\gamma_\rho\right), \tag{5.3.21}$$

где $\alpha_\rho=k_\rho/k$; k_ρ — коэффициент турбулентности для потока плотности; γ_ρ — равновесный градиент плотности, связанный с адиабатическим градиентом температуры.

Для определения γ_ρ используем третье уравнение движения (2.2.12) и уравнение статики (см. определение критериев устойчивости). Тогда

$$\frac{dw}{dt}=\frac{g}{\rho}(\bar{\rho}-\rho) \tag{5.3.22}$$

или, считая, что плотность вихря на исходном уровне совпадает с плотностью среды, получим

$$\frac{dw}{dt}=\frac{g}{\rho}\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}+\gamma_\rho\right)\delta z,$$

так как

$$\bar{\rho}(z)=\bar{\rho}(z-\delta z)+\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}\delta z,\quad \rho(z)=\rho(z-\delta z)+\gamma_\rho\,\delta z.$$

Представляя $\delta z=w\cdot\delta t$, находим, что

$$\frac{dw}{dt}=\frac{g}{\rho}\left(\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial z}+\gamma_\rho\right)w\,\delta t. \qquad (5.3.23)$$

С другой стороны, если использовать уравнение состояния для влажного воздуха

$$\rho=\frac{p}{R\cdot T_в},$$

то (5.3.22) можно записать так:

$$\frac{\partial w}{dt}=-\frac{g}{T_в}\left(\frac{\partial T}{\partial z}+\gamma_a+0{,}605\cdot T\cdot\frac{\partial q}{\partial z}\right)w\cdot\delta t, \qquad (5.3.24)$$

а уравнение (5.3.23) в форме

$$\frac{dw}{dt}=\frac{g}{\rho}\left[-\frac{\rho}{T_в}\left(\frac{\partial T}{\partial z}+0{,}605\cdot T\cdot\frac{\partial q}{\partial z}\right)+\gamma_\rho\right]\cdot w\cdot\delta t. \qquad (5.3.25)$$

При безразличной стратификации

$$\frac{\partial T}{\partial z}+\gamma_a+0{,}605\cdot T\cdot\frac{\partial q}{\partial z}=0;$$

$$\gamma_\rho-\frac{\rho}{T_в}\left(\frac{\partial T}{\partial z}+0{,}605\cdot T\cdot\frac{\partial q}{\partial z}\right)=0,$$

откуда очевидно, что

$$\gamma_\rho=-\frac{\rho}{T_в}\cdot\gamma_a \qquad (5.3.26)$$

В таком случае турбулентный поток плотности можно представить в виде

$$F_\rho=\rho\cdot\alpha_\rho\cdot k\cdot\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}-\frac{\rho}{T_в}\cdot\gamma_a\right). \qquad (5.3.27)$$

Установим теперь связь между масштабами L и $\tilde{L}$ и оценим диапазон условий, для которых различие между ними может быть существенным. Согласно (5.3.20)

$$\frac{1}{\tilde{L}} = -\frac{\alpha_\rho g}{v_*^3} \cdot \frac{k\left(\frac{\partial \rho}{\partial z} - \frac{\rho}{T_в}\gamma_а\right)}{\rho} \cdot \varkappa.$$

Используем уравнение состояния влажного воздуха и будем считать, что в пределах приземного слоя $\partial p/\partial z$ мало; тогда

$$\frac{1}{\tilde{L}} = \frac{g}{T_в} \cdot \frac{\alpha_\rho}{v_*^3} \cdot k \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_а + 0{,}605 \cdot T \cdot \frac{\partial q}{\partial z}\right) \cdot \varkappa.$$

Используем выражения для турбулентных потоков тепла и влаги (считая $\alpha_т = \alpha_q = \alpha_\rho$) и заменим $T_в$ на T

$$\frac{1}{\tilde{L}} = -\frac{g}{T} \cdot \frac{1}{v_*^3} \cdot \left(\frac{P_0}{\rho c_p} + 0{,}605 \cdot T \cdot \frac{E}{\rho}\right) \varkappa.$$

Перейдем от скорости испарения E к затратам тепла на испарение LE — потоку скрытого тепла и вынесем за скобку турбулентный поток тепла P_0; тогда

$$\frac{1}{\tilde{L}} = -\frac{g}{T} \cdot \varkappa \cdot \frac{P_0/\rho c_p}{v_*^3}\left(1 + \frac{a}{B}\right)$$

или с учетом (5.2.2) получаем, что

$$\tilde{L} = \frac{L}{1 + \frac{a}{B}}, \qquad (5.3.28)$$

где $a = \frac{c_p \cdot 0{,}605 \cdot T}{L}$; $B = \frac{P_0}{LE}$ — отношение Боуэна. При $c_p = 0{,}24$ *кал/г·гр*; $T = 300°$; $L = 600$ *кал/г*; $a = 0{,}07$.

Отношение Боуэна, при условии подобия профилей температуры и влажности вплоть до самой подстилающей поверхности, можно записать в форме

$$B = \frac{c_p}{L} \cdot \frac{t_a - t_w}{q_a - q_w}, \qquad (5.3.29)$$

где t_a, q_a — температура и влажность на уровне судовых наблюдений ($z = a$). Из наблюдений известно, что B для условий океана изменяется от 0,1 — вблизи экватора до 1,0 — в умеренных широтах. Таким образом, $\tilde{L}$ может в 2 раза отличаться от L и нетрудно проследить влияние этого факта на профили метеорологических элементов и коэффициентов турбулентности. Так как для морских условий знаменатель в (5.3.29) обычно меньше нуля, то знак B будет определяться характером термической стратификации: при неустойчивой стратификации $B>0$ и $\tilde{L}<L$; при устойчивой стратификации $B<0$ и $\tilde{L}>L$. Над сушей обычно испарение мало, а значит велико отношение Боуэна и $\tilde{L}=L$.

Путем аналогичных рассуждений можно установить связь между числом Ричардсона, учитывающим стратификацию плотности $\widetilde{\mathrm{Rf}}$ и учитывающим только термическую стратификацию Rf,

$$\widetilde{\mathrm{Rf}}=\mathrm{Rf}\left(1+\frac{a}{B}\right),$$

где, согласно (5.2.7),

$$\mathrm{Rf}=-\frac{g}{T}\cdot\frac{P_0/\rho c_{\text{ср}}}{\tau\dfrac{\partial c}{\partial z}}.$$

Нетрудно показать, что

$$\widetilde{\mathrm{Rf}}=\frac{z}{\tilde{L}\cdot\varkappa}\cdot F\left(\frac{z}{\tilde{L}}\right), \tag{5.3.30}$$

т. е. для условий, когда стратификация стремится к безразличной, а значит $F\left(\dfrac{z}{\tilde{L}}\right)\to\varkappa$, $\widetilde{\mathrm{Rf}}\to\dfrac{z}{\tilde{L}}$.

§ 4. Обобщенный степенной закон распределения метеорологических элементов с высотой

Остановимся еще на одной модели приземного слоя, которая представляет интерес потому, что на ее основании выполнен ряд важных исследований в теории трансформации и диффузии примеси, позволяющих получить хотя и сложные, но аналитические решения.

Вспомним некоторые ранее полученные асимптотические выражения для профилей коэффициента турбулентности: безразличная стратификация: $k\sim z$; свободная конвекция: $k\sim z^{1+\Delta}$; инверсия: $k\sim z^{1-\Delta}$.

В общем случае можно считать, что коэффициент турбулентности растет с высотой по степенному закону и показатель степени зависит от стратификации. Будем считать [11], что

$$k = A_1 z^{1-\varepsilon}, \tag{5.4.1}$$

где A_1 — коэффициент пропорциональности; $\varepsilon = 0$ соответствует безразличной, $\varepsilon < 0$ — неустойчивой и $\varepsilon > 0$ — устойчивой стратификации.

На основании ранее рассмотренной модели приземного слоя ясно, что приток энергии турбулентности за счет среднего движения увеличивается при уменьшении высоты

$$E_1 = k \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \sim \frac{1}{z},$$

тогда как приток энергии турбулентности за счет сил плавучести почти не меняется с высотой

$$E_2 \sim k \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \text{const}^*.$$

В таком случае можно ожидать, что при $z = z_0$ турбулентность будет целиком определяться динамическим фактором и коэффициент турбулентности соответствовать безразличной стратификации

$$k \Big|_{z=z_0} = k_0 = \varkappa \cdot v_* \cdot z_0.$$

С другой стороны, из (5.4.1)

$$k_0 = A_1 \cdot z_0^{1-\varepsilon}.$$

Определим A_1 и подставим в (5.4.1)

$$A_1 = \varkappa \cdot v_* \cdot z_0^{\varepsilon};$$

$$k = \varkappa \cdot v_* \cdot z_0^{\varepsilon} \cdot z^{1-\varepsilon}. \tag{5.4.2}$$

Обработка экспериментальных данных показывает, что постоянная Кармана сама зависит от стратификации: $\varkappa = \dfrac{0{,}38}{1-\varepsilon}$.

Если теперь проинтегрировать от z_0 и z уравнения (5.1.5) — (5.1.7) с учетом (5.4.2), то можно получить выражения для профилей ветра, температуры и влажности:

---

* Если записать уравнение баланса энергии турбулентности в виде $\frac{\partial b}{\partial t} = E_1 - E_2 - \text{Diss}$, то, так как $E_1 > 0$ (если не рассматривать явление отрицательной вязкости), $\text{Diss} > 0$, для существования стационарной турбулентности ($\partial b/\partial t = 0$) необходимо, чтобы $E_1 - E_2 > 0$ или $E_1 > E_2$. Поскольку E_2 очень слабо зависит от высоты, а E_1 при уменьшении z резко возрастает, то при малых z $E_1 >> E_2$.

$$u=\frac{v_*}{\varkappa\cdot z_0^{\varepsilon}}\cdot\frac{z^{\varepsilon}-z_0^{\varepsilon}}{\varepsilon}$$

или

$$u=u_1\cdot\frac{z^{\varepsilon}-z_0^{\varepsilon}}{z_1^{\varepsilon}-z_0^{\varepsilon}}; \qquad (5.4.3)$$

$$\Theta-\Theta_1=(\Theta_2-\Theta_1)\cdot\frac{z^{\varepsilon}-z_1^{\varepsilon}}{z_2^{\varepsilon}-z_1^{\varepsilon}}; \qquad (5.4.4)$$

$$q-q_1=(q_2-q_1)\cdot\frac{z^{\varepsilon}-z_1^{\varepsilon}}{z_2^{\varepsilon}-z_1^{\varepsilon}}. \qquad (5.4.5)$$

При $\varepsilon=0$ эти выражения дают обычные логарифмические профили (если раскрыть неопределенность типа 0/0 дифференцированием по ε). Формулы (5.4.3)—(5.4.5) называются обобщенным степенным законом изменения метеорологических элементов в приземном слое атмосферы. Величина ε меняется в пределах от —0,5 до 0,5.

Получим формулы для определения турбулентных потоков по измерениям метеорологических элементов на двух уровнях. Для этого представим коэффициент турбулентности как

$$k=k_1\cdot\left(\frac{z}{z_1}\right)^{1-\varepsilon},$$

тогда

$$\left.\begin{aligned}
\tau&=\rho\cdot k\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=\rho\cdot k_1\cdot\frac{u_1\cdot\varepsilon}{z_1^{\varepsilon}-z_0^{\varepsilon}}\cdot\frac{1}{z_1^{1-\varepsilon}},\\
P_0&=-\rho\cdot c_p\cdot\alpha_{\text{т}}\cdot k\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial z}=\rho c_p\alpha_{\text{т}}\cdot k_1\cdot\frac{(\Theta_1-\Theta_2)\cdot\varepsilon}{z_2^{\varepsilon}-z_1^{\varepsilon}}\cdot\frac{1}{z_1^{1-\varepsilon}},\\
E&=-\rho\cdot\alpha_q\cdot k\cdot\frac{\partial q}{\partial z}=\rho\,\alpha_q\cdot k_1\cdot\frac{(q_1-q_2)\,\varepsilon}{z_2^{\varepsilon}-z_1^{\varepsilon}}\cdot\frac{1}{z_1^{1-\varepsilon}}.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.4.6)$$

Поскольку градиентные измерения метеорологических элементов, особенно над морем, могут содержать заметные ошибки, то целесообразно вычислять потоки графическим методом, с использованием измерений на нескольких высотах. Принцип этого подхода покажем на примере потока количества движения. В числителе (5.4.3) прибавим и вычтем z_1^{ε}, а затем разделим и умножим первый член на ε

$$u=u_1\cdot\frac{\varepsilon}{z_1^{\varepsilon}-z_0^{\varepsilon}}\cdot\frac{z^{\varepsilon}-z_1^{\varepsilon}}{\varepsilon}+u_1. \qquad (5.4.7)$$

Выражение (5.4.7) представляет собой уравнение прямой

$$u=ax+b,$$

где $$a=\operatorname{tg}\alpha=\frac{u_1\cdot\varepsilon}{z_1^{\varepsilon}-z_0^{\varepsilon}};\quad b=u_1;\quad x=\frac{z^{\varepsilon}-z_1^{\varepsilon}}{\varepsilon}.$$

Так же можно показать, что профили температуры и влажности могут быть представлены в виде прямых линий с угловыми коэффициентами

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{(\Theta_1-\Theta_2)\varepsilon}{z_2^{\varepsilon}-z_1^{\varepsilon}};\quad \operatorname{tg}\gamma=\frac{(q_1-q_2)\cdot\varepsilon}{z_2^{\varepsilon}-z_1^{\varepsilon}}.$$

Величину ε подбирают так, чтобы в системе координат u и x данные наблюдений оптимальным образом аппроксимировались прямой линией, тангенс угла наклона которой будет равен $\operatorname{tg}\alpha$. По известной величине $\operatorname{tg}\alpha$ и ε можно определить z_0, а затем из (5.4.3) найти v_* и из (5.4.2) — k_1.

Аналогично $\operatorname{tg}\alpha$ находятся $\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{tg}\gamma$, и тогда турбулентные потоки будут определяться следующими выражениями:

$$\left.\begin{aligned}
\tau&=\rho\cdot k_1\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{1}{z_1^{1-\varepsilon}},\\
P_0&=\rho\, k_1\cdot c_p\cdot\alpha_{\text{т}}\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\frac{1}{z_1^{1-\varepsilon}},\\
E&=\rho\cdot k_1\cdot\alpha_q\cdot\operatorname{tg}\gamma\,\frac{1}{z_1^{1-\varepsilon}}.
\end{aligned}\right\}\qquad(5.4.8)$$

§ 5. Нелинейная модель приземного слоя атмосферы

Модели приземного слоя (см. предыдущий параграф), использующие качественные соображения для определения коэффициента турбулентности, не позволяют определить ряд констант и описывают лишь некие предельные режимы. Рассмотрим теперь полную систему уравнений для приземного слоя (5.1.5) — (5.1.11), позволяющую определить не только распределение метеорологических элементов, но и характеристик турбулентности. Поскольку при этом подходе довольно полно учитывается взаимосвязь распределения метеоэлементов и характеристик турбулентности, то его можно рассматривать как нелинейную модель приземного слоя атмосферы. Если ввести безразмерные переменные

$$\left.\begin{aligned}
&z_n=\frac{z}{L}, \quad k_n=\frac{k}{\varkappa\cdot v_*\cdot L}, \quad b_n=\frac{c^{1/2}b}{v_*^{\,2}},\\
&u_n=\frac{\varkappa\cdot u}{v_*}, \quad \Theta_n=\frac{\Theta}{T_*}, \quad q_n=\frac{q}{q_*},\\
&l_n=\frac{l}{c^{1/4}\cdot\varkappa L},
\end{aligned}\right\} \tag{5.5.1}$$

где

$$L=-\frac{v_*^{\,3}}{\frac{g}{T}\cdot\varkappa\cdot\frac{P_0}{\rho\cdot c_p}}, \quad T_*=-\frac{P_0}{\varkappa\cdot\rho\cdot c_p\cdot v_*}, \quad q_*=-\frac{E}{\varkappa\cdot\rho\cdot v_*},$$

то после некоторых преобразований исходная система примет вид

$$\left.\begin{aligned}
&k_n\cdot\frac{du_n}{dz_n}=1,\\
&\alpha_{\text{т}}\cdot k_n\cdot\frac{d\Theta_n}{dz_n}=1,\\
&\alpha_q\cdot k_n\cdot\frac{dq_n}{dz_n}=1,\\
&\frac{1}{k_n}-1-\frac{b_n^2}{k_n}=0,\\
&k_n=l_n\cdot\sqrt{b_n},\\
&l_n=2\cdot\frac{k_n(1-k_n)}{2-k_n}\cdot\frac{dz_n}{dk_n}.
\end{aligned}\right\} \tag{5.5.2}$$

Исключив из последних трех уравнений l_n и b_n получим

$$\frac{dk_n}{dz_n}=\frac{2(1-k_n)^{5/4}}{2-k_n}.$$

Проинтегрировав это уравнение от 0 до z_n, при условии, что $\lim\limits_{z_n\to 0} k_n=0$, найдем

$$z_n=\frac{2}{y}-\frac{2}{3}y^3-\frac{4}{3}; \tag{5.5.3}$$

$$1-y^4=k_n. \tag{5.5.4}$$

Из (5.5.2) определим другие искомые характеристики:

$$u_n = \tilde{\Theta}_n + c_2 = \tilde{q}_n + c_3 = \frac{2}{y} + 2\,\mathrm{arc\,tg}\,y + \ln\frac{|1-y|}{1+y} + c_1; \qquad (5.5.5)$$

$$b_n = y^2; \qquad (5.5.6)$$

$$l_n = \frac{1-y^4}{y}. \qquad (5.5.7)$$

В выписанных выше соотношениях y — вспомогательная функция, связанная с z_n формулой (5.5.3): при устойчивой стратификации ($L>0$) $y<1$, при неустойчивой ($L<0$) $y>1$, при приближении к безразличной стратификации ($L \to \infty$) $y \to 1$; $\tilde{\Theta}_n = \int \alpha_т \cdot d\,\Theta_n$ и $\tilde{q}_n = \int \alpha_q \cdot dq_n$ — приведенные значения температуры и удельной влажности, учитывающие зависимость $\alpha_т$ и α_q от стратификации $z_n = z/L$. Современные наблюдения показывают, что $\alpha_т = \alpha_q$. На рис. 35 приводится зависимость $\alpha_т$ от z_n.

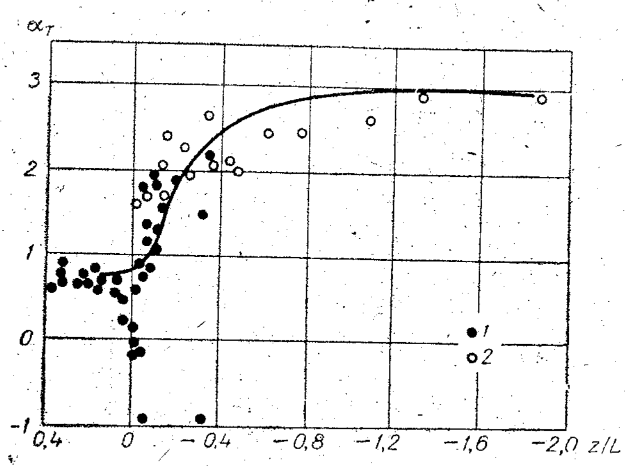

Рис. 35. Зависимость от стратификации обратного турбулентного числа Прандтля. 1 — Раунд-Хилл; 2 — Австралия

Если воспользоваться зависимостью $\alpha_т = \alpha_т(z_n)$, то после некоторых преобразований и численного интегрирования можно получить соотношения, связывающие $\tilde{\Theta}_n$ с Θ_n (аналогично $\tilde{q}_n$ с q_n), и установить зависимость Θ_n и q_n от y (или z_n). Таблицы для определения u_n, Θ_n (или q_n) как функции z_n или y приводятся в [11]. Для перехода от безразмерных величин к размерным нужно найти величины турбулентных потоков, от которых зависят масштабы в (5.5.1).

§ 6. Определение турбулентных потоков на основании градиентных или стандартных измерений

Рассмотренная в предыдущем параграфе нелинейная модель приземного слоя позволяет определить на основании градиентных наблюдений L, v_*, P_0 и E.

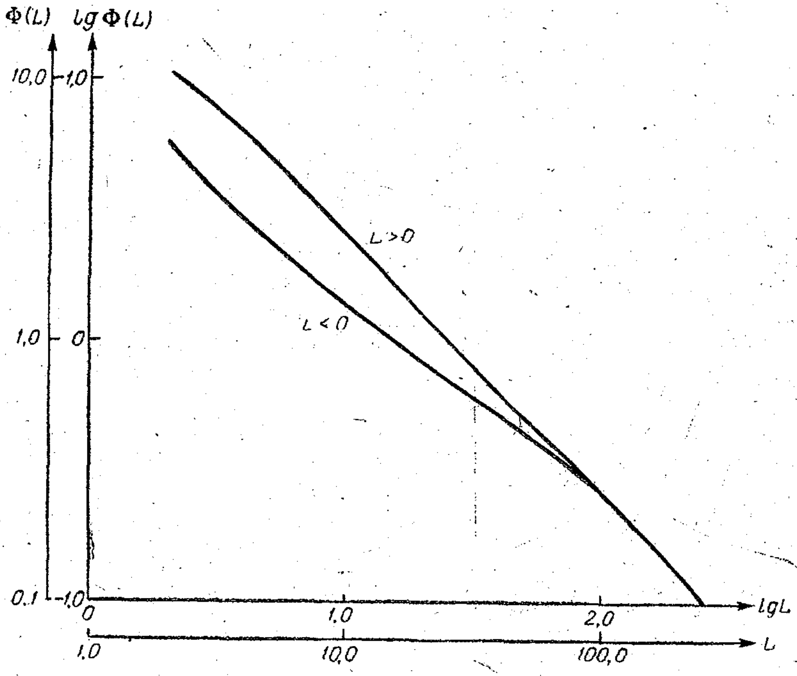

Рис. 36. График для определения масштаба L по измерениям скорости ветра и температуры на высотах 0,5 и 2,0 *м*

Определение L

Воспользуемся соотношениями (5.5.1). Тогда

$$\frac{\Delta\Theta(z_2, z_1)}{\Delta u^2(z_4, z_3)} = \frac{\Delta\Theta_n}{\Delta u_n^2} \cdot \frac{T_0}{g \cdot L}.$$

Если считать, что $T_0/g \approx 28$, то

$$\frac{\Delta\Theta(z_2, z_1)}{\Delta u^2(z_4, z_3)} = \frac{28}{L} \cdot \frac{\Delta\Theta_n(z_2/L, z_1/L)}{\Delta u_n^2(z_4/L, z_3/L)} = \Phi(L, z_1, z_2, z_3, z_4). \qquad (5.6.1)$$

Для фиксированных z_i можно построить зависимость функции Φ от L, которая позволит определять L как функцию от

$\Delta\Theta/\Delta u^2$. В качестве примера на рис. 36 показана зависимость L от $\Delta\Theta/\Delta u^2$ при $z_2=z_4=2{,}0$ *м*, $z_1=z_3=0{,}5$ *м*.

Определение турбулентного потока тепла P_0 и затрат тепла на испарение LE

С учетом (5.5.1) можно записать, что

$$\Delta u \cdot \Delta\Theta = -\frac{P_0}{\rho \cdot c_p \cdot \varkappa^2}\,\Delta u_n \cdot \Delta\Theta_n,$$

откуда

$$P_0 = -\rho \cdot \varkappa^2 \cdot c_p \cdot \frac{\Delta u \cdot \Delta\Theta}{\Delta u_n \cdot \Delta\Theta_n}. \qquad (5.6.2)$$

Для определения турбулентного потока тепла по (5.6.2) нужно сперва на основании $\Delta\Theta$ и Δu найти L (допустим из рис. 36), затем рассчитать z_{ni} и получить Δu_n и $\Delta\Theta_n$. Более целесообразно построить номограммы, позволяющие определить P_0 как функцию $\Delta\Theta$ и Δu. Допустим, что $z_2 = z_4$ и $z_1 = z_3$; зададим для выбранных величин P_{0j} ряд значений v_{*i}; найдем L_i, z_2/L_i, z_1/L_i, $(u_{n2})_i$, $(u_{n1})_i$, $(\Theta_{n2})_i$, $(\Theta_{n1})_i$; определим $(\Delta u_n)_i$ и $(\Delta\Theta_n)_i$ и с помощью (5.6.2) перейдем к Δu_i и $\Delta\Theta_i$. Построив изолинии P_{0j} в системе координат Δu и $\Delta\Theta$, получим номограмму для определения P_0. В качестве примера на рис. 37 показана зависимость $P_0(\Delta u, \Delta\Theta)$ для $z_2 = z_4 = 2{,}0$ *м*, $z_1 = z_3 = 0{,}5$ *м*.

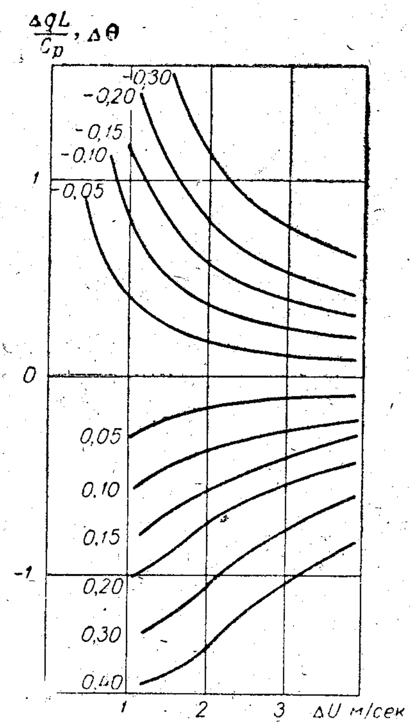

Рис. 37. Номограмма для определения турбулетного потока тепла (P_0), и потока скрытого тепла (LE) по наблюдениям на высотах 0,5 и 2,0 *м*

Нетрудно показать, что изолинии P_0 можно рассматривать как изолинии LE, если считать $\Delta\Theta = \frac{\Delta q \cdot L}{c_p}$. Действительно, так как

$$LE = -\rho \cdot \varkappa^2 \cdot L \cdot \frac{\Delta u \cdot \Delta q}{\Delta u_n \cdot \Delta q_n} \qquad (5.6.3)$$

и $\Delta q_n = \Delta\Theta_n$ (если $\alpha_т = \alpha_q$), то, приравнивая (5.6.2) и (5.6.3), получаем, что при условии $P_0 = LE$

$$\Delta\Theta = \frac{\Delta q \cdot L}{c_p}.$$

По найденной величине затрат тепла на испарение (потоку скрытого тепла) легко определить скорость испарения E.

Определение динамической скорости v_*

Из (5.5.1) следует, что

$$v_* = \frac{\varkappa \cdot \Delta u}{\Delta u_n}. \qquad (5.6.4)$$

Для определения динамической скорости по (5.6.4) нужно сперва найти $L(\Delta u, \Delta\Theta)$, а потом Δu_n. Более удобно, однако, рассчитать номограмму для определения v_* (Δu, $\Delta\Theta$). При $z_2 = z_4$ и $z_1 = z_3$ зададим для выбранных величин $\Delta\Theta_j$ ряд величин L_i; найдем z_2/L_i, z_1/L_i, (u_{n2}), (u_{n1m}), $(\Theta_{n1})_i$, $(\Theta_{n2})_i$, $(\Theta_{n1})_i$, рассчитаем $\Delta u_n)_i$ и $(\Delta\Theta_n)_i$ и с помощью (5.6.1) перейдем к $(\Delta u)_i$, после чего определим по (5.6.4) v_{*i}. Результаты расчета представлены на рис. 38, на котором в виде примера приводится зависимость v_* (Δu, $\Delta\Theta$) для $z_2 = z_4 = 2{,}0$ м, $z_1 = z_3 = 0{,}5$ м.

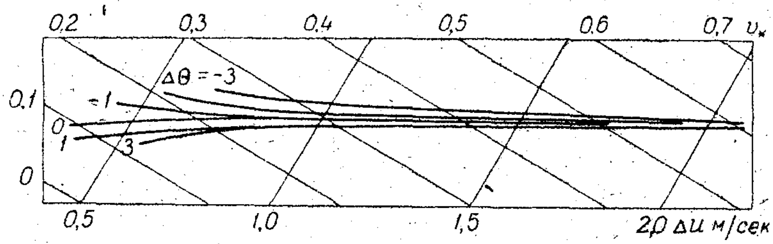

Рис. 38. Номограмма для определения динамической скорости (v_*) по наблюдениям на высотах 0,5 и 2,0 *м*

Поскольку над водной поверхностью градиентные наблюдения выполняются редко (только в специальных экспедициях), то желательно уметь определять характеристики приземного слоя на основании стандартных гидрометеорологических наблюдений. Предположим, что скорость ветра u_a, температура Θ_a и влажность воздуха q_a измеряются на одной высоте $z = a$ (в общем случае высоты измерения u, Θ и q могут быть различными). В качестве второго уровня будем рассматривать уровень шероховатости z_0, при этом возникают по крайней мере два вопроса: как определить z_0 и чему равны скорость ветра, температура и влажность при $z = z_0$. Из простых физических соображений ясно, что шероховатость водной поверхности должна зависеть от локальной скорости ветра и характеристик, определяющих развитие волн. В общем случае следует считать, что

$$z_0=f(v_*,\ g,\ T,\ X,\ t,\ \rho,\ \tilde{\rho}), \tag{5.6.5}$$

где g — ускорение силы тяжести; T — поверхностное натяжение; X — разгон ветра; t — продолжительность действия ветра; ρ — плотность воздуха; $\tilde{\rho}$ — плотность воды.

Используя теорию размерности, зависимость (5.6.5) можно свести к безразмерному виду

$$\frac{z_0\cdot g}{v_*^2}=F\left(\frac{T\cdot g}{v_*^4\cdot\tilde{\rho}},\ \frac{X\cdot g}{v_*^2},\ \frac{t\cdot g}{v_*},\ \frac{\rho}{\tilde{\rho}}\right). \tag{5.6.6}$$

Так как $\rho/\tilde{\rho}$ можно считать константой (значительно меньшей единицы), то $F(\rho/\tilde{\rho})$ также стремится к постоянной величине. Из полученного соотношения можно оценить условия, при которых допустимо пренебречь влиянием отдельных факторов. Так как функция от значительно меньшего единицы безразмерного комплекса стремится к постоянной, то при выполнении условия

$$T\ll\frac{v_*^4\cdot\tilde{\rho}}{g}$$

можно не учитывать зависимость z_0 от поверхностного натяжения (она войдет в константу). Считая, что $T=70$ *г/сек²* и используя известный из наблюдений факт, что $v_*\approx 0{,}03\cdot v$, где v — скорость ветра на уровне судовых наблюдений, можно показать, что полученное неравенство выполняется для скоростей ветра около 10 *м/сек* и выше.

С другой стороны, можно считать, что функция от второго и третьего аргумента в (5.6.6) стремится к постоянной, если

$$\frac{X\cdot g}{v_*^2}\gg 1\ \text{ и }\ \frac{t\cdot g}{v_*}\gg 1,$$

откуда следует, что

$$X\gg\frac{v_*^2}{g};\qquad t\gg\frac{v_*}{g}.$$

Это соответствует: $X>>1$ *см*, $t>>0{,}03$ *сек*. Очевидно, что шероховатость устанавливается быстро и для малых разгонов ветра. Следует оговорить, что z_0 может зависеть от X и t, если происходит передача энергии от низкочастотной части к высокочастотной части спектра (т. е. за счет неустойчивости крупных волн образуются мелкие волны).

Итак, при выполнении рассмотренных выше условий (5.6.6) можно записать в виде

$$z_0=m\cdot\frac{v_*^2}{g}. \tag{5.6.7}$$

Для проверки справедливости (5.6.7) и определения величины m запишем логарифмическую формулу для профиля ветра

$$\frac{u}{\sqrt{z}}=\frac{2{,}3}{\varkappa}\sqrt{\frac{g}{m}}\cdot\frac{\lg z/z_0}{\sqrt{z/z_0}}. \tag{5.6.8}$$

В таком случае, если (5.6.7) выполняется, то в системе координат $Y=u/\sqrt{z}$, $X=\frac{\lg z/z_0}{\sqrt{z/z_0}}$ результаты измерений должны располагаться на прямой линии, тангенс угла наклона которой поз-

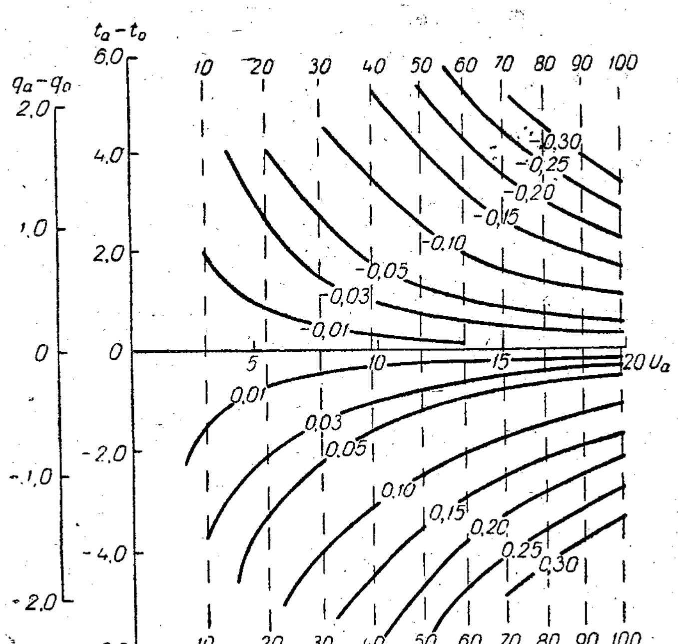

Рис. 39. Номограмма для определения турбулентных потоков и динамической скорости по стандартным наблюдениям на поверхности моря и на высоте 14 *м*. Сплошные линии — *P* и *LE* в *кал/см²мин*; пунктирные линии — v_* в *см/сек*; q — в *г/кг*; u_a — в *м/сек*

воляет определить m. Обработка наблюдений показала, что, несмотря на заметный разброс точек, они в среднем могут быть аппроксимированы прямой линией с $m=0,075$ [11]. Современные оценки m находятся в пределах 0,02—0,08.

Рассмотрим теперь второй из возникающих вопросов: чему равны скорость ветра, температура и влажность при $z = z_0$. Скорость ветра на уровне параметра шероховатости должна быть равна скорости поверхностного течения. Так как последняя (за исключением сильных постоянных течений) составляет всего около 2% от скорости ветра, то можно считать, что при $z=z_0$ $u=0$ (т. е. $\Delta u=u_a$). Обработка большого количества наблюдений показывает, что для морских условий температура воздуха и влажность на $z=z_0$ практически равны температуре поверхности и соответствующей ей насыщающей влажности.

Итак, специфика расчета характеристик приземного слоя по стандартным гидрометеорологическим наблюдениям состоит в том, что нижний уровень (параметр шероховатости) не фиксирован, а находится в процессе расчета на основании (5.6.7). В качестве примера на рис. 39 приводятся номограммы для расчета P, LE и v_* при $z_2 = z_4 = 14$ м.

VI. ПРОЦЕССЫ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ВОЗДУХ—ВОДА

§ 1. Постановка задачи о динамическом взаимодействии пограничных слоев океана и атмосферы

Воспользуемся физической аналогией процессов в пограничных слоях атмосферы и моря и на основании нелинейной теории пограничного слоя атмосферы сформулируем задачу о динамическом взаимодействии пограничных слоев атмосферы и моря. Выпишем замкнутую систему уравнений, определяющих динамические процессы в пограничных слоях [11]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dz_i}\, k_i \frac{du_i}{dz_i} + 2\omega_z (v_i - v_{gi}) = 0, \\ &\frac{d}{dz_i}\, k_i \frac{dv_i}{dz_i} - 2\omega_z (u_i - u_{gi}) = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.1)$$

$$k_i \left[\left(\frac{du_i}{dz_i}\right)^2 + \left(\frac{dv_i}{dz_i}\right)^2\right] - \frac{g}{\Theta_i}\alpha_i \cdot k_i \frac{d\Theta_i}{dz_i} - c\frac{b_i\sqrt{b_i}}{l_i} + $$

$$+ \alpha_b \frac{d}{dz_i} k_i \frac{db_i}{dz_i} = 0: \qquad (6.1.2)$$

$$\rho_i \cdot c_i \cdot k_i \cdot \alpha_i \cdot \frac{d\Theta_i}{dz_i} = -P_{0i} \cdot e^{-a_i z_i} = -P_i(z_i); \qquad (6.1.3)$$

$$k_i = l_i \sqrt{b_i}; \qquad (6.1.4)$$

$$l_i = -\tilde{\varkappa} \cdot \frac{\psi_i}{d\psi_i/dz_i}; \qquad (6.1.5)$$

$$\psi_i = \left(\frac{du_i}{dz_i}\right)^2 + \left(\frac{dv_i}{dz_i}\right)^2 - \alpha_i \cdot \frac{g}{\Theta_i}\frac{d\Theta_i}{dz_i} + \frac{\alpha_b}{k_i}\frac{d}{dz_i} k_i \frac{db_i}{dz_i}. \qquad (6.1.6)$$

Здесь $i=1$ соответствует атмосфере, $i=2$ — морю: u_{g1}, v_{g1} — компоненты геострофического ветра; u_{g2}, v_{g2} — компоненты геострофического течения; $\Theta_1 = T$, $\Theta_2 = \rho_2$; $\alpha_1 = \alpha_т$, $\alpha_2 = \alpha_\rho$; $c_1 = c_p$,

$c_2 = c_в$ — удельная теплоемкость воды; P_{01} — турбулентный поток тепла; P_{02} — турбулентный поток плотности в море.

Чтобы проинтегрировать (6.1.1) — (6.1.6) и определить вертикальное распределение u_i, v_i, k_i, b_i сформулируем следующие граничные условия:

$$z_i \to \infty, \quad u_i = u_{gi}, \quad v_i = v_{gi}; \quad b_i \to 0; \tag{6.1.7}$$

$$z_i \to z_{0i}, \quad u_i \to u_0, \quad v_i \to v_0, \quad b_i \to c^{-1/2} \cdot v^2_{*i}; \tag{6.1.8}$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 \rho_1 \left.\frac{du_1}{dz_1}\right|_{z_1 \to 0} &= -k_2 \rho_2 \left.\frac{du_2}{dz_2}\right|_{z_2 \to 0}, \\ k_1 \rho_1 \left.\frac{dv_1}{dz_1}\right|_{z_1 \to 0} &= -k_2 \rho_2 \left.\frac{dv_2}{dz_2}\right|_{z_2 \to 0}. \end{aligned}\right\} \tag{6.1.9}$$

Ось z_1 направлена вверх, ось z_2 — вниз, начало координат на невозмущенной поверхности.

Условия (6.1.7) отражают известный факт, что за пределами пограничных слоев ветер и течения стремятся к геострофическим значениям, а турбулентность затухает. По мере приближения к поверхности раздела скорость ветра и течения стремятся к скорости поверхностного течения u_0, v_0 (условие склейки скоростей), а кинетическая энергия, как можно показать из анализа уравнения баланса энергии турбулентности, стремится к $c^{-1/2} v^2_{*i}$. Наконец, можно считать, что у поверхности раздела должно выполняться условие непрерывности потоков количества движения. Для определения параметра шероховатости можно использовать (5.6.7).

$$z_{0i} = m \cdot \frac{v^2_{*i}}{g}. \tag{6.1.10}$$

Если ввести новые переменные величины

$$\bar{u}_i = u_i - u_0, \quad \bar{v}_i = v_i - v_0, \quad \bar{u}_{gi} = u_{gi} - u_0, \quad \bar{v}_{gi} = v_{gi} - v_0 \tag{6.1.11}$$

и переписать для них систему уравнений и граничных условий, то задача сведется к рассмотренной ранее задаче о строении пограничного слоя атмосферы над неподвижной поверхностью (раздел IV, § 4). Таким образом, система уравнений для каждого пограничного слоя может быть решена отдельно и искомые безразмерные величины выражены через некоторые универсальные функции σ'_{ni}, η'_{ni}, k_{ni}, b_{ni}, зависящие для пограничного слоя атмосферы от

$$\mu_1=\mu_{01}\cdot e^{-a_1 z_{n1}}, \quad \mu_{01}=-\varkappa^2\cdot\frac{g}{T}\cdot\frac{P_{01}/\rho c_p}{2\omega_z\cdot v^2_{*1}},$$
$$z_{n1}=\frac{z}{L_1}, \quad L_1=\frac{\varkappa\cdot v_{*1}}{2\omega_z}; \tag{6.1.12}$$

для пограничного слоя моря от

$$\mu_2=\mu_{02}\cdot e^{-a_2 z_{n2}}, \quad \mu_{02}=\varkappa^2\cdot\frac{g}{\rho_2}\cdot\frac{P_{02}/\rho_2}{2\omega_z\cdot v^2_{*2}},$$
$$z_{n2}=\frac{z}{L_2}, \quad L_2=\frac{\varkappa\cdot v_{*2}}{2\omega_z}. \tag{6.1.13}$$

При раздельном решении системы для атмосферы и моря остались неиспользованными условие склейки скоростей и непрерывности потоков количества движения у поверхности раздела. Именно эти граничные условия позволяют «склеить» два независимых решения, определить u_0, v_0 и связь между динамическими скоростями в атмосфере и море и получить выражение для геострофического коэффициента трения χ и угла α между вектором касательного напряжения и вектором геострофического ветра (ось Ox направлена вдоль вектора касательного напряжения на поверхности раздела)

$$v_{*2}=v_{*1}\cdot\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}\approx\frac{1}{28}v_{*1};$$

$$\chi=\frac{v_{*1}}{\varkappa G}=$$
$$=\sqrt{\frac{1}{\left[\eta'_{n1}(z_{0n})+\frac{1}{28}\eta'_{n2}(\zeta_{0n})\right]^2+\left[\sigma'_{n1}(z_{0n})+\frac{1}{28}\sigma'_{n2}(\zeta_{0n})\right]^2}}$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{v_{g1}}{u_{g1}}=-\frac{\eta'_{n1}(z_{0n})+\frac{1}{28}\eta'_{n2}(\zeta_{0n})}{\sigma'_{n1}(z_{0n})+\frac{1}{28}\sigma'_{n2}(\zeta_{0n})}. \tag{6.1.14}$$

Здесь G — скорость геострофического ветра;

$$z_{0n}=\frac{m\cdot 2\omega_z\cdot G}{g}\chi=a\cdot\chi; \quad \zeta_{0n}=\frac{'m2\omega_z\cdot G}{g}\cdot 28\cdot\chi$$

(считается, что $z_0=\zeta_0$, т. е. равны размерные параметры шероховатости, со стороны воздуха и воды).

Окончательные выражения для профилей ветра, чисто дрейфового течения ($u_2 = v_{o2} = 0$), коэффициентов турбулентности, кинетической энергии турбулентности и диссипации можно представить в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_1(z_1)}{G} &= \chi\left[\sigma'_{n1}(z_{n1}) - \sigma'_{n1}(z_{0n}) - \frac{1}{28}\sigma'_{n2}(\zeta_{0n})\right], \\ \frac{v_1(z_1)}{G} &= \chi\left[-\eta'_{n1}(z_{n1}) + \eta_{n1}(z_{0n}) + \frac{1}{28}\eta'_{n2}(\zeta_{0n})\right]; \end{aligned}\right\} \quad (6.1.15)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_2(z_2)}{G} &= -\frac{1}{28}\chi\cdot\sigma'_{n2}(z_{n2}), \\ \frac{u_2(z_2)}{G} &= \frac{1}{28}\chi\cdot\eta'_{n2}(z_{n2}); \end{aligned}\right\} \quad (6.1.16)$$

$$\left.\begin{aligned} k_1(z_1) &= \frac{3{,}18}{\sin^3\varphi}10^{14}(a\chi)^2\cdot k^*_{n1}(z_{n1}); \\ k_2(z_2) &= \frac{4{,}13}{\sin^3\varphi}\cdot 10^{11}(a\cdot\chi)^2\cdot k_{n2}(z_{n2}); \end{aligned}\right\} \quad (6.1.17)$$

$$\left.\begin{aligned} b_1(z_1) &= 0{,}745\cdot 10^6\cdot\chi^2\cdot b_{n1}(z_{n1}), \\ b_2(z_2) &= 0{,}970\cdot 10^3\cdot\chi^2\cdot b_{n2}(z_{n2}); \end{aligned}\right\} \quad (6.1.18)$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1(z_1) &= c\,\frac{b_1^2(z_1)}{k_1(z_1)}, \\ \varepsilon_2(z_2) &= c\,\frac{b_2^2(z_2)}{k_2(z_2)}. \end{aligned}\right\} \quad (6.1.19)$$

Некоторые результаты расчета по рассмотренной модели показаны на рис. 40, 41.

Из рис. 40 видно существование левого поворота ветра в слое от поверхности до высоты нескольких метров; выше наблюдается обычный правый поворот ветра. При сильной устойчивой стратификации скорость ветра достигает скорости геострофического уже на высотах около 100 м. С ростом неустойчивости в атмосфере ($\mu_0 < 0$) увеличивается только модуль скорости течения, а направление остается постоянным. Увеличение устойчивости в море вызывает увеличение угла поворота течения.

На рис. 41 показана зависимость геострофического коэффициента дрейфа (c_0/G) от $a = \dfrac{m\cdot G\cdot\lambda}{g}$ и стратификации μ_0. Коэффициент дрейфа для сильной устойчивой стратификации в слое трения моря растет с ростом геострофического ветра и широты, в остальных случаях коэффициент дрейфа убывает с ростом G и φ. Для данной скорости ветра и широты c_0/G увеличивается

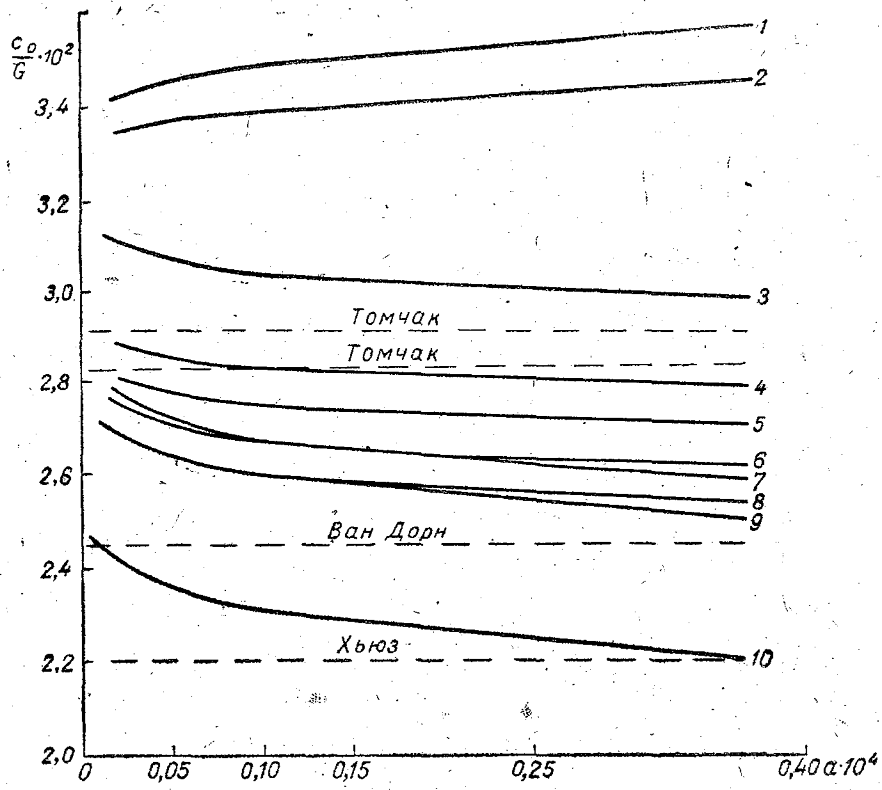

Рис. 41. Геострофический коэффициент дрейфа как функция a и μ_0.

Значения μ_0 и $\tilde{\mu}$: *1* — (—5) и 50; *2* — 0 и 50; *3* — (— 50) и 0; *4* — (— 5) и 10: *5* — (— 10) и 5; *6* — (— 5) и 5; *7* — (— 5) и 0; *8* — 0 и 5; *9* — 0 и 0; *10* — 50 и 10.

с ростом неустойчивости в пограничном слое атмосферы и устойчивости в слое трения моря. Результаты расчета удовлетворительно согласуются с наблюдениями.

На рис 42. показано сравнение теоретического распределения диссипации в пограничном слое моря с наблюдениями Стюарта. Согласование достаточно хорошее и подтверждает правильность теории.

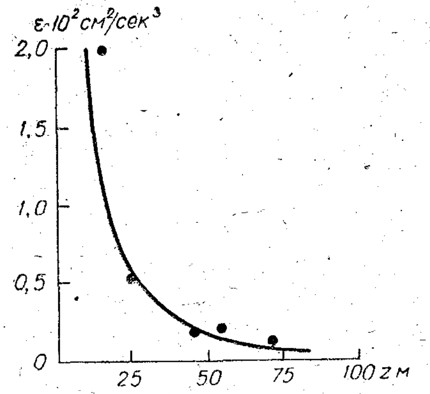

Рис. 42. Сравнение теоретического и экспериментального (по данным Стюарта) распределения скорости диссипации с глубиной

Выше была рассмотрена полная постановка задачи о динамическом взаимодействии пограничных слоев атмосферы и моря. Она отражает современный подход к теории взаимодействия океана и атмосферы. Универсальные функции η'_{ni}, σ'_{ni}, k_{ni}, b_{ni}, ε_{ni} приводятся в виде таблиц в [11] только для $\mu_{0i} = 0$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 2{,}0$, а также в [1] для $\alpha_1 = \alpha_2 = 2{,}0$ и $\mu_{0i} = \pm 100, \pm 80, \pm 60, \pm 50, \pm 40, \pm 20, \pm 10, \pm 5, \pm 1$.

Для некоторых практических целей может представлять интерес приближенная оценка одних динамических характеристик пограничных слоев при заданных других характеристиках, измеряемых или рассчитываемых независимо. В качестве простого примера рассмотрим задачу о ветровых течениях.

§ 2. Ветровые течения

Введем понятие среднего коэффициента турбулентности $\overline{k}_i$ и будем считать, что он известен. Переходя к новым переменным (6.1.11), запишем уравнение движения (6.1.1) и граничные условия (6.1.7) — (6.1.9) в виде

$$\left.\begin{aligned} &k_i \frac{d^2 \overline{u}_i}{dz_i^2} + 2\omega_z (\overline{v}_i - \overline{v}_{gi}) = 0;\\ &k_i \frac{d^2 \overline{v}_i}{dz_i^2} - 2\omega_z (\overline{u}_i - \overline{u}_{gi}) = 0; \end{aligned}\right\} \quad (6.2.1)$$

$$z_i \to \infty, \quad \overline{u}_i = \overline{u}_{gi}, \quad \overline{v}_i = \overline{v}_{gi}; \quad (6.2.2)$$

$$z_i = 0, \quad \overline{u}_i = 0, \quad \overline{v}_i = 0; \quad (6.2.3)$$

$$\left.\begin{aligned} &k_1 \rho_1 \frac{d\overline{u}_1}{dz_1}\bigg|_{z_1=0} = -k_2 \cdot \rho_2 \frac{d\overline{u}_2}{dz_2}\bigg|_{z_2=0},\\ &k_1 \cdot \rho_1 \frac{d\overline{v}_1}{dz_1}\bigg|_{z_1=0} = -k_2 \cdot \rho_2 \cdot \frac{d\overline{v}_2}{dz_2}\bigg|_{z_2=0}. \end{aligned}\right\} \quad (6.2.4)$$

Решение системы (6.2.1) при граничных условиях (6.2.2) — (6.2.3) известно из теории пограничного слоя над неподвижной поверхностью (спираль Экмана). Для произвольного направления осей координат (Ox, Oy) его можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_i &= \bar{u}_{gi} - e^{-a_i z_i} [\bar{u}_{gi} \cos a_i z_i + \bar{v}_{gi} \sin a_i z_i], \\ \bar{v}_i &= \bar{v}_{gi} - e^{-a_i z_i} [\bar{v}_{gi} \cos a_i z_i - \bar{u}_{gi} \cdot \sin a_i z_i] \end{aligned}\right\} \quad (6.2.5)$$

или, перейдя к прежним переменным, получим

$$\left.\begin{aligned} u_i &= u_{gi} - e^{-a_i z_i} [(u_{gi} - u_0) \cos a_i z_i + (v_{gi} - v_0) \sin a_i z_i], \\ v_i &= v_{gi} - e^{-a_i z_i} [(v_{gi} - v_0) \cos a_i z_i - (u_{gi} - u_0) \sin a_i z_i], \end{aligned}\right\} \quad (6.2.6)$$

где

$$a_i = \sqrt{\frac{\omega_z}{k_i}}.$$

Формулы (6.2.6) при $i=1$ определяют вертикальный профиль скорости ветра, а при $i=2$ — вертикальный профиль ветровых течений. Для того, чтобы воспользоваться ими; нужно определить компоненты скорости поверхностного течения u_0 и v_0. Используем для этого граничное условие (6.2.4).

Продифференцируем (6.2.5) по z_i и найдем значения производных при $z_i=0$.

$$\left.\begin{aligned} \left.\frac{d\bar{u}_i}{dz_i}\right|_{z_i=0} &= a_i (\bar{u}_{gi} - \bar{v}_{gi}) \\ \left.\frac{d\bar{v}_i}{dz_i}\right|_{z_i=0} &= a_i (\bar{v}_{gi} + \bar{u}_{gi}). \end{aligned}\right\} \quad (6.2.7)$$

С учетом (6.2.7) соотношения (6.2.4) примут следующий вид:

$$k_1\rho_1 a_1 (u_{g1} - u_0 - v_{g1} + v_0) = -k_2\rho_2 a_2 (u_{g2} - u_0 - v_{g2} + v_0);$$
$$k_1\rho_1 a_1 (v_{g1} - v_0 + u_{g1} - u_0) = -k_2\rho_2 a_2 (v_{g2} - v_0 + u_{g2} - u_0).$$

Сгруппируем члены с u_0 и v_0; тогда

$$-v_0 (k_1 \rho_1 a_1 + k_2 \rho_2 a_2) + u_0 (k_1 \rho_1 a_1 + k_2 \rho_2 a_2) = k_1 \rho_1 a_1 (u_{g1} - v_{g1}) + k_2 \rho_2 a_2 (u_{g2} - v_{g2});$$
$$v_0 (k_1 \rho_1 a_1 + k_2 \rho_2 a_2) + u_0 (k_1 \rho_1 a_1 + k_2 \rho_2 a_2) = k_1 \rho_1 a_1 (u_{g1} + v_{g1}) + k_2 \rho_2 a_2 (u_{g2} + v_{g2}).$$

Складывая и вычитая эти уравнения, а также деля числитель и знаменатель на $k_1\rho_1 a_1$, получаем

$$
\left.\begin{aligned}
u_0 &= \frac{u_{g1} + bu_{g2}}{1+b},\\
v_0 &= \frac{v_{g1} + bv_{g2}}{1+b},
\end{aligned}\right\} \tag{6.2.8}
$$

где $b = \frac{\rho_2}{\rho_1}\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$.

Формулы (6.2.6) и (6.2.8) определяют профили ветрового течения и ветра как функции высоты (глубины), скорости геострофического ветра, коэффициентов турбулентности в море и атмосфере, плотности воздуха и воды, широты и, наконец, скорости геострофического течения в море. Напомним, какими факторами определяется геострофическое течение в море. Выпишем уравнение статики для моря

$$
\frac{dp_2}{dz_2} = \rho_2 g
$$

и проинтегрируем его от $-\sigma$ до z_2 (σ — ордината свободной поверхности)

$$
p_2 - p_a = \int\limits_{-\sigma}^{z_2} \rho_2 g dz,
$$

где p_a — атмосферное давление.

Продифференцируем полученное выражение по произвольному горизонтальному направлению S (x или y). Тогда

$$
\frac{dp_2}{dS} = \frac{dp_a}{dS} + \int\limits_{-\sigma}^{z_2} \frac{d\rho_2}{dS} \cdot dz_2 + \rho_0 g \cdot \frac{d\sigma}{dS}, \tag{6.2.9}
$$

где ρ_0 — плотность воды на свободной поверхности ($z = -\sigma$).

Разделив левую и правую часть (6.2.9) на $2\omega_z \cdot \rho_2$, получим выражение для геострофического течения

$$
G_2 = \frac{1}{2\omega_z \rho_2} \frac{dp_2}{dS} = \frac{1}{2\omega_z \rho_2}\left(\frac{dp_a}{dS} + \int\limits_{-\sigma}^{z_2} \frac{d\rho_2}{dS} dz_2 + \rho_0 \cdot g \cdot \frac{d\sigma}{dS}\right), \tag{6.2.10}
$$

из которого видно, что геострофическое течение определяется горизонтальным градиентом атмосферного давления, наклоном свободной поверхности и бароклинностью (горизонтальным градиентом плотности). Так как в рассмотренной выше модели использовалось предположение о горизонтальной однородности слоя трения моря, то вторым числом в (6.2.10) можно пренебречь и тогда геострофическое течение не зависит от глубины (баротропное море), потому что в приближении Буссинеска можно считать, что ρ_2, входящее в виде множителя в правую часть (6.2.10), не зависит от глубины.

Используем теперь полученное решение для определения дрейфа льда.

§ 3. Дрейф ледяных полей

Рассмотрим установившийся дрейф однородного по толщине льда, вдали от берегов, при однородном поле ветра. Если обозначить через u_0 и v_0 компоненты вектора скорости движения льда, то для указанных условий $du_0/dt = dv_0/dt = 0$, и уравнения движения льда можно записать в виде условия равновесия проекций действующих сил на оси Ox и Oy.

$$\Sigma F_x = 0, \qquad \Sigma F_y = 0. \tag{6.3.1}$$

Определим силы, действующие на льдину с единичным поперечным сечением и высотой h (рис. 43). На верхнюю поверх-

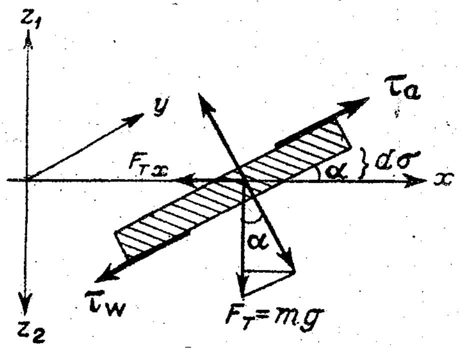

Рис. 43. Силы, действующие на льдину.

ность льда действует сила турбулентного касательного напряжения. Отнесенная к единице площади, эта сила равна

$$\left.\begin{aligned} \tau_{ax} &= \rho_1 k_1 \cdot \frac{du_1}{dz_1}\Big|_{z_1=0}, \\ \tau_{ay} &= \rho_1 k_1 \cdot \frac{dv_1}{dz_1}\Big|_{z_1=0}. \end{aligned}\right\} \tag{6.3.2}$$

На нижнюю поверхность льда действует сила турбулентного касательного напряжения со стороны воды, которая, как правило, препятствует вызванному ветром движению льда. Для единицы площади эта сила равна

$$\left.\begin{aligned}\tau_{wx}&=\rho_2 k_2\cdot\frac{du_2}{dz_2}\Big|_{z_2=0},\\ \tau_{wy}&=\rho_2 k_2\cdot\frac{dv_2}{dz_2}\Big|_{z_2=0}\end{aligned}\right\}\qquad(6.3.3)$$

(начало координат расположим для оси z_1 на верхней, а для оси z_2 на нижней поверхности льда).

Так как в общем случае под влиянием ветра должен возникать наклон свободной поверхности, то льдина расположится под некоторым углом к нулевой уровенной-поверхности (невозмущенной поверхности океана) и сила тяжести будет иметь нормальную и касательную к поверхности льдины составляющие. Нормальная составляющая силы тяжести уравновешивается силой Архимеда, а касательная составляющая может быть спроектирована на оси x и y

$$F_{\text{т}x}=-mg\cdot\sin\alpha_x\cdot\cos\alpha_x,$$
$$F_{\text{т}y}=-mg\cdot\sin\alpha_y\cdot\cos\alpha_y,$$

где α_x и α_y — углы наклона льдины вдоль оси x и y.

Из наблюдений известно, что для условий открытого океана вызванный ветром наклон свободной поверхности очень мал (около 1 *см* на 100 *км*). Поэтому можно считать, что $\cos\alpha_x=\cos\alpha_y\simeq 1{,}0$, а $\sin\alpha_x\simeq\operatorname{tg}\alpha_x=\frac{d\sigma}{dx}$, $\sin\alpha_y=\operatorname{tg}\alpha_y=\frac{d\sigma}{dx}$ и тогда

$$\left.\begin{aligned}F_{\text{т}x}&=-mg\cdot\frac{d\sigma}{dx},\\ F_{\text{т}y}&=-mg\cdot\frac{d\sigma}{dy},\end{aligned}\right\}\qquad(6.3.4)$$

где $m=\rho_{\text{л}}h$ — масса льда.

Если рассматривать баротропный океан и пренебречь влиянием горизонтального градиента атмосферного давления, то на основании (6.2.10) выражение (6.3.4) можно переписать в виде*

$$\left.\begin{aligned}F_{\text{т}x}&=-2\omega_z\cdot m\cdot v_{g2},\\ F_{\text{т}y}&=2\omega_z\cdot m\cdot u_{g2}.\end{aligned}\right\}\qquad(6.3.5)$$

---

* Обратим внимание, что в баротропном океане при наклоне поверхности около 1 *см* на 100 *км* $\rho_0 g\cdot\frac{d\sigma}{dS}=0(10^{-4})$, и при скорости геострофического ветра $G=10$ *м/сек* $\frac{dp_{\text{а}}}{dS}=0\,(10^{-4})$. Однако геострофическое течение с учетом обоих членов имеет скорость около 1—2 *см/сек*. Так как в реальных условиях скорость геострофического течения может быть заметно больше этой величины и так как вклад члена $dp_{\text{а}}/dS$ соответствует реальным условиям, то им можно пренебречь по сравнению с влиянием других членов.

На движущийся лед будет действовать сила Кориолиса, компоненты которой имеют вид

$$\left.\begin{aligned} F_{\text{к}x} &= 2\omega_z \cdot m \cdot v_0, \\ F_{\text{к}y} &= -2\omega_z \cdot m \cdot u_0. \end{aligned}\right\} \tag{6.3.6}$$

К числу сил, определяющих движение льда, следует отнести еще силу лобового сопротивления и силу бокового трения. Для реальных условий силой лобового сопротивления можно пренебречь по сравнению с силами турбулентного трения на верхней и нижней поверхности льда, так как горизонтальная площадь льда много больше вертикального сечения. Скорость дрейфа льда обычно незначительно отличается от скорости течения, следовательно и силой бокового трения можно пренебречь.

Итак, с учетом выражений для действующих сил перепишем уравнения движения (6.3.1) льда

$$\left.\begin{aligned} \rho_1 k_1 \frac{du_1}{dz_1}\bigg|_{z_1=0} + \rho_2 k_2 \frac{du_2}{dz_2}\bigg|_{z_2=0} - 2\omega_z m (v_{g2} - v_0) = 0, \\ \rho_1 k_1 \frac{dv_1}{dz_1}\bigg|_{z_1=0} + \rho_2 k_2 \frac{du_2}{dz_2}\bigg|_{z_2=0} + 2\omega_z m (u_{g2} - u_0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.3.7}$$

Очевидно, что при $m=0$ (нет льда) уравнение (6.3.7) вырождается в обычное условие непрерывности потоков количества движения (6.2.4).

Для определения первых двух членов в (6.3.7) используем решение для пограничных слоев атмосферы и океана (6.2.7). Тогда

$$\left.\begin{aligned} & k_1 \cdot \rho_1 a_1 (u_{g1} - u_0 - v_{g1} + v_0) + k_2 \rho_2 a_2 (u_{g2} - u_0 - \\ & \qquad - v_{g2} + v_0) - 2\omega_z m (v_{g2} - v_0) = 0, \\ & k_1 \cdot \rho_1 a_1 (v_{g1} - v_0 + u_{g1} - u_0) + k_2 \rho_2 a_2 (v_{g2} - v_0 + \\ & \qquad + u_{g2} - u_0) + 2\omega_z m (u_{g2} - u_0) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.3.8}$$

Направим ось x вдоль геострофического ветра; в таком случае $v_{g1}=0$, $u_{g1}=G$. Поскольку из наблюдений известно, что скорость дрейфа льда составляет всего несколько процентов от скорости геострофического ветра, то в (6.3.8) можно пренебречь u_0 и v_0 по сравнению с G, и тогда, введя новые переменные: $\tilde{u}_0 = u_{g2} - u_0$, $\tilde{v}_0 = v_{g2} - v_0$, получим

$$\left.\begin{aligned} k_1\rho_1 a_1 \cdot G + k_2\rho_2 a_2 (\tilde{u}_0 - \tilde{v}_0) - 2\omega_z m \tilde{v}_0 = 0, \\ k_1\rho_1 a_1 G + k_2\rho_2 a_2 (\tilde{v}_0 + \tilde{u}_0) + 2\omega_z m \tilde{u}_0 = 0. \end{aligned}\right\}$$

Сгруппируем члены, содержащие $\tilde{u}_0$ и $\tilde{v}_0$,

$$\left.\begin{aligned} &k_1\cdot\rho_1\cdot a_1\cdot G+k_2\,\rho_2\,a_2\cdot\tilde{u}_0-\tilde{v}_0\,(k_2\,\rho_2\,a_2+2\omega_z\,m)=0,\\ &k_1\cdot\rho_1\cdot a_1\cdot G+k_2\,\rho_2\,a_2\cdot\tilde{v}_0+\tilde{u}_0\,(k_2\,\rho_2\,a_2+2\omega_z\,m)=0. \end{aligned}\right\} \tag{6.3.9}$$

Если умножить первое уравнение на $k_2\rho_2a_2$, а второе на $(k_2\rho_2a_2+2\omega_z m)$ и сложить их, а затем умножить первое на $(k_2\rho_2a_2+2\omega_z m)$ и вычесть из него второе уравнение, умноженное на $k_2\rho_2a_2$, то

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{u}_0=-2G\,\frac{k_1\rho_1a_1}{k_2\rho_2a_2}\cdot\frac{1+\dfrac{\omega_z m}{k_2\rho_2a_2}}{\left[1+\left(1+\dfrac{2\omega_z m}{k_2\rho_2a_2}\right)^2\right]},\\ &\tilde{v}_0=2G\cdot\frac{k_1\rho_1a_1}{k_2\rho_2a_2}\cdot\frac{\dfrac{\omega_z m}{k_2\rho_2a_2}}{\left[1+\left(1+\dfrac{2\omega_z m}{k_2\rho_2a_2}\right)^2\right]}. \end{aligned}\right\}$$

Перейдем к прежним переменным и упростим полученные выражения

$$\left.\begin{aligned} &u_0=u_{g2}+2G\cdot\frac{\rho_1}{\rho_2}\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\cdot\frac{1+m\dfrac{a_2}{\rho_2}}{\left[1+\left(1+m\dfrac{a_2}{\rho_2}\right)^2\right]},\\ &v_0=v_{g2}-2G\cdot\frac{\rho_1}{\rho_2}\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\cdot\frac{m\dfrac{a_2}{\rho_2}}{\left[1+\left(1+2m\dfrac{a_2}{\rho_2}\right)^2\right]}. \end{aligned}\right\} \tag{6.3.10}$$

Соотношения (6.3.10) определяют компоненты скорости дрейфа льда как функции: скорости геострофического течения, скорости геострофического ветра, плотности воды и воздуха, коэффициентов турбулентности в воздухе и воде, массы льда и широты места.

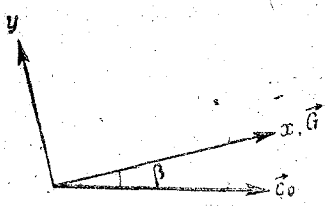

Рис. 44.

Получим выражение для угла между вектором дрейфа льда и вектором геострофического ветра (рис. 44). Напомним, что направление геострофического ветра совпадает с осью x. Считая для простоты, что $u_{g2} = v_{g2} = 0$, получим

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_0}{u_0} = -\frac{m\frac{a_2}{\rho_2}}{1+m\frac{a_2}{\rho_2}}. \qquad (6.3.11)$$

Из анализа (6.3.10) и (6.3.11) видно, что в северном полушарии ($\omega_z > 0$) дрейф льда происходит вправо от направления геострофического ветра, т. е. в сторону более высокого давления. Интересно, что угол β зависит только от массы льда, плотности воды и коэффициента турбулентности в воде. Оценим угол β при некоторых характерных значениях величин, входящих в (6.3.11).

Допустим, что $\rho_2 = 1$ *г/см*^{3}, $k_2 = 100$ *см*^{2}*/сек*, $\varphi = 90°$, $\omega_z = 7{,}29\cdot 10^{-5}$ *1/сек*, $\rho_л = 0{,}9$ *г/см*^{3}, $h = 3$ *м*, $S = 1$ *км*^{2}. Тогда $m = 2{,}7\cdot 10^{12}$ *г/см*^{2}, $a_2 = 8{,}5\cdot 10^{-4}$, $\operatorname{tg}\beta = -0{,}187$ и $\beta = 11°$. Наблюдения показывают, что $\beta = 5 - 15°$.

Соотношение (6.3.11) можно использовать и для обратной задачи: по измеренному углу β и известным φ, m, ρ_2 найти средний в слое трения коэффициент турбулентности

$$k_2 = \omega_z\cdot\left(\frac{m}{\rho_2}\right)^2\cdot\frac{1+\sin^2\beta}{\sin^2\beta}. \qquad (6.3.12)$$

На основании (6.3.10) и (6.3.11) установим связь между скоростью дрейфа льда и углом отклонения дрейфа от геострофического ветра. Обозначим $m\frac{a}{\rho_2}{}_2 = b$ и выразим входящие в (6.3.10) величины b и $(1+b)$ через $\operatorname{tg}\varphi$.

$$b = -\frac{\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\beta}; \quad 1+b = \frac{1}{1+\operatorname{tg}\beta}.$$

В таком случае, подставляя эти соотношения в формулы для $\tilde{u}_0$, $\tilde{v}_0$, можно получить выражение для модуля скорости $\tilde{c}_0$

$$\tilde{c}_0 = G\cdot\frac{\rho_1}{\rho_2}\cdot\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\cdot\frac{\sqrt{(1+\operatorname{tg}\beta)^2+\operatorname{tg}^2\beta\,(1+\operatorname{tg}\beta)^2}}{1+\operatorname{tg}^2\beta}$$

или, после некоторых преобразований

$$c_0 = c_{g2} + \sqrt{2}\cdot\frac{\rho_1}{\rho_2}\sqrt{\frac{k_1}{k_2}}\cdot G\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right), \qquad (6.3.13)$$

где c_{g2} — модуль скорости геострофического течения.

Для малых величин c_{g2} соотношение (6.3.13) можно представить в виде

$$c_0 = AG, \tag{6.3.14}$$

где $A = \sqrt{2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)$ — коэффициент дрейфа. Зависимость A от целого ряда параметров (плотности воды и воздуха, коэффициентов турбулентности, угла β) объясняет заметные расхождения в величинах A, определенных по наблюдениям за дрейфом льда в различных физико-географических условиях. Оценим величину A для некоторых характерных значений входящих в нее параметров: $\beta = 15°$, $\rho_1 = 1{,}3 \cdot 10^{-3}$ *г/см*^{3}, $\rho_2 = 1$ *г/см*^{3}, $k_1 = 4 \cdot 10^4$ *см*^{2}*/сек*, $k_2 = 10^2$ *см*^{2}*/сек*. Для этих условий $A = 3.2 \cdot 10^{-2}$, т. е. скорость дрейфа льда составляет около 3% от скорости геострофического ветра, что неплохо согласуется со средними оценками, полученными из наблюдений.

Рассмотренная выше простейшая модель дрейфа льда может быть обобщена на случай учета влияния берегов и замкнута с помощью интегрального или дифференциального уравнения баланса энергии турбулентности. Изложение этих вопросов можно найти в [11].

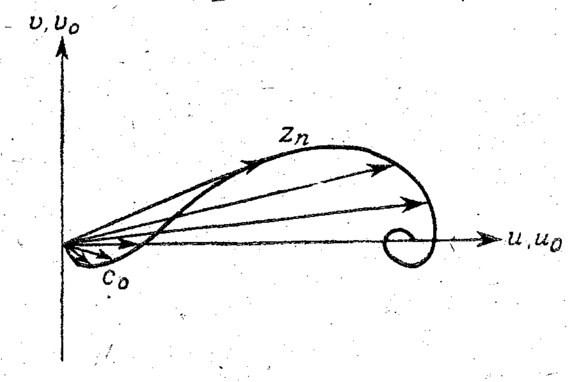

Рис. 45. Объяснение левого поворота ветра с высотой над водой и льдом

В заключение этого параграфа остановимся еще на одном интересном факте, вытекающем из теории дрейфа льда. Если в пограничном слое над неподвижной поверхностью наблюдается правое вращение ветра с высотой, то над дрейфующим льдом, в слое толщиной несколько метров наблюдается левое вращение ветра, которое затем переходит в обычное правое вращение. Это явление связано с тем, что при $z_1 = 0$ воздух движется со скоростью u в направлении дрейфа льда, т. е. влево от геострофического ветра. В таком случае годограф скорости ветра будет иметь вид, изображенный на рис. 45.

§ 4. Трансформация воздушных масс под влиянием подстилающей поверхности

Теория трансформации является важным разделом динамической метеорологии в связи с ее приложением к синоптической метеорологии и ряду других прикладных проблем. Воздушная масса, сформировавшаяся над одной подстилающей поверхностью, при переходе на другую поверхность меняет свои свойства. Например, зимой холодный и сухой воздух с континента, попадая на море, начинает нагреваться и становиться более влажным. На каком-то достаточно большом расстоянии от берега воздушная масса полностью теряет свои первоначальные свойства и становится морской воздушной массой. В процессе трансформации могут образовываться и рассеиваться облака и туманы. Слой воздуха, находящийся под влиянием новой подстилающей поверхности, называется внутренним пограничным слоем (рис. 46). Предметом и задачей теории трансформации является изучение изменения свойств воздушной массы под

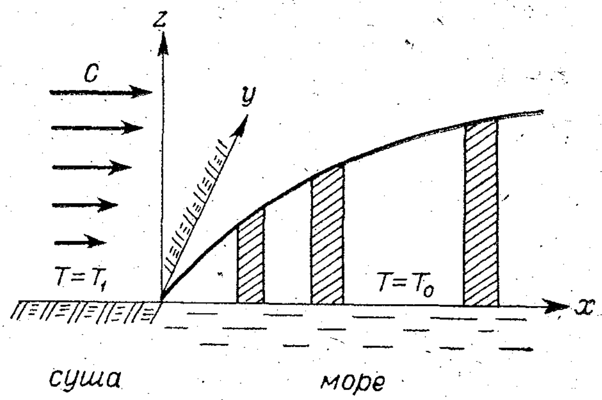

Рис. 46. Качественная картина трансформации воздушного потока при переходе с суши на море

влиянием подстилающей поверхности. Из физических соображений очевидно, что нельзя, вообще говоря, рассматривать изменение одного свойства воздушной массы без учета изменения других свойств. Например, если над поверхностью с однородной шероховатостью, но неоднородной температурой будет трансформироваться поле температуры воздуха, то вследствие изменения характеристик устойчивости воздушной массы произойдет и изменение поля скорости ветра, характеристик турбулентности, влажности и т. д.; с другой стороны, только при изменении шероховатости подстилающей поверхности помимо скорости ветра за счет изменения характеристик турбулентности будет трансформироваться поле температуры, влажности и т. д. С учетом этого сложного взаимодействия между изменением различных свойств воздушной массы, дадим вначале наиболее полную постановку задачи о трансформации.

Выпишем замкнутую систему уравнений для планетарного пограничного слоя атмосферы, сохраняя в левых частях полную производную от свойства

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial}{\partial z}k\frac{\partial u}{\partial z}+2\omega_z v-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}; \tag{6.4.1}$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial}{\partial z}k\frac{\partial v}{\partial z}-2\omega_z u-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}; \tag{6.4.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0; \tag{6.4.3}$$

$$\frac{d\Theta}{dt}=\frac{\partial}{\partial z}k_{\text{т}}\frac{\partial \Theta}{\partial z}+\frac{1}{\rho c_p}\frac{\partial R}{\partial z}+L\cdot\frac{m}{\rho c_p}; \tag{6.4.4*}$$

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\partial}{\partial z}k_q\frac{\partial q}{\partial z}+\frac{m}{\rho}; \tag{6.4.5}$$

$$\frac{db}{dt}=k\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]-\frac{g}{T}\cdot k_{\text{т}}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial z}-c\frac{b^2}{k}+\frac{\partial}{\partial z}k_b\frac{\partial b}{\partial z}; \tag{6.4.6}$$

$$k=l\sqrt{b}; \tag{6.4.7}$$

$$l=-\tilde{\varkappa}\cdot\frac{\psi}{d\psi/dz}; \tag{6.4.8}$$

$$\psi=\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]-\frac{g}{T}\cdot\alpha_{\text{т}}\frac{\partial\Theta}{\partial z}+\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial z}k_b\frac{\partial b}{\partial z}, \tag{6.4.9}$$

где $\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+u\frac{\partial S}{\partial x}+v\frac{\partial S}{\partial y}+w\frac{\partial S}{\partial z}$ (S — температура, влажность, скорость ветра и т. д.).

---

* Нетрудно показать, что первое начало тэрмодинамики (2.1.20) можно записать в виде $dQ=c_p\cdot\frac{T}{\Theta}d\Theta$ (так как $c_p\frac{T}{\Theta}d\Theta=c_p\cdot dT-\frac{ART}{p}dp$), откуда при $T/\Theta\approx 1$ следует (6.4.4).

Если считать известными градиенты давления, радиационный и фазовый притоки тепла, а также фазовый приток влаги, то для определения 9 неизвестных (u, v, w, Θ, q, k, b, l, ψ) имеется 9 уравнений и система замкнута.

Решение задачи в такой общей постановке сопряжено со значительными трудностями, поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением некоторых простых задач, позволяющих получить аналитическое решение.

Будем в дальнейшем исследовать только стационарную трансформацию, под которой понимается такой процесс, когда движение воздушной массы над новой подстилающей поверхностью происходит длительное время и в фиксированной точке свойства воздушной массы достигли стационарного значения $\left(\frac{\partial S}{\partial t}=0\right)$. Предположим, что начало координат находится на границе раздела между двумя поверхностями, ось y направлена вдоль границы раздела $\left(\frac{\partial S}{\partial y}=0\right)$ а ось x направлена вдоль ветра (рис. 46).

Задача о трансформации поля температуры и влажности

Предположим, что в атмосфере не происходит фазовых переходов воды $\left(L\frac{m}{\rho}=0,\ \frac{m}{\rho}=0\right)$ и что можно пренебречь радиационным притоком тепла $\left(\frac{1}{\rho c_p}\cdot\frac{\partial R}{\partial z}=0\right)$ и упорядоченным вертикальным переносом температуры и влажности, так как вблизи подстилающей поверхности вертикальная скорость стремится к нулю и для не очень больших высот можно считать малыми $w\frac{\partial T}{\partial z}$ и $w\frac{\partial q}{\partial z}$. С учетом этих и ранее сделанных допущений уравнения (6.4.4), (6.4.5) можно записать в виде

$$u\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}k\cdot\alpha_\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial z}, \tag{6.4.10}$$

где ϑ — потенциальная температура или удельная влажность; α_ϑ — соответственно $\alpha_т$ или α_q (в дальнейшем будем писать α без значка ϑ).

Сформулируем теперь граничные условия. Будем считать, что над исходной подстилающей поверхностью ($x<0$) воздушная масса находилась достаточно долго и ϑ на любой высоте равно величине ϑ на поверхности — ϑ_1. В таком случае

$$\vartheta\Big|_{\substack{x=0\\ z\geqslant 0}}=\vartheta_1. \tag{6.4.11}$$

С другой стороны, на большой высоте над новой подстилающей поверхностью воздушная масса также будет иметь $\vartheta=\vartheta_1$, так как влияние подстилающей поверхности ограничено слоем конечной толщины, т. е.

$$\vartheta \Big|_{\substack{z=\infty \\ x>0}} = \vartheta_1. \qquad (6.4.12)$$

Предположим, что нам известно значение ϑ на новой подстилающей поверхности ($x>0$) — ϑ_0 и что ϑ_0 не зависит от x

$$\vartheta \Big|_{\substack{z=0 \\ x>0}} = \vartheta_0. \qquad (6.4.13)$$

Граничное условие (6.4.13) в действительности следовало бы заменить уравнением баланса свойства ϑ на подстилающей поверхности, так как в процессе трансформации меняется не только ϑ в воздушной массе, но и ϑ_0. Если предположить, что в начальный момент $t=t_0$ (перед приходом воздушной массы на $x>0$) подстилающая поверхность имела свойство $\vartheta^\circ_0=\mathrm{const}$, то в дальнейшем за счет обмена свойством между воздушной массой и поверхностью (различного на разных расстояниях от $x=0$) установится $\vartheta_0=\vartheta_0(x)$. С другой стороны, пока недостаточно надежно определяется температура поверхности* Θ_0 и соответствующая ей удельная влажность q_0 (для морских условий насыщающая удельная влажность). С этой точки зрения нельзя считать ϑ_0 известной величиной, и при $z=0$ нужно задавать условия теплового (для температуры) и водного (для влажности) баланса

$$\left.\begin{aligned} R&=P+LE+B, \\ M&=E, \end{aligned}\right\} \qquad (6.4.14)$$

компоненты которых (R — радиационный баланс, B — теплообмен с нижележащими слоями, M — осадки, E — скорость испарения и так далее) зависят от x. Однако использование (6.4.14) заметно усложняет решение задачи, к тому же, если воздушная масса поступает на водную поверхность, есть основания считать $\vartheta^\circ_0=\vartheta_0=\mathrm{const}$ (независящим от x). Это упрощение связано с тем, что удельная теплоемкость воды почти в 4 раза больше удельной теплоемкости воздуха (т. е. большим изменениям температуры воздуха будут соответствовать сравнительно слабое

---

* Из-за больших градиентов температуры в самом верхнем слое почвы температуру поверхности суши стандартными приборами измерить практически невозможно. В море за поверхностную температуру обычно принимают температуру, измеренную в слое от 0,5 до 1,5 *м* глубиной. При слабом ветре она может почти на 1° С отличаться от температуры поверхности.

изменение температуры воды и насыщающей удельной влажности), и с тем, что в море существует интенсивный турбулентный теплообмен поверхности с нижележащими довольно однородными слоями воды, за счет которого также поддерживается $\vartheta_0=\text{const}$.

Предположим, в качестве первого приближения, что скорость ветра и коэффициент турбулентности не зависят от высоты. В таком случае (6.4.10) примет вид

$$u\frac{\partial\vartheta}{\partial x}=\alpha\cdot k\cdot\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}. \tag{6.4.15}$$

Сведем это уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению, для чего введем новую переменную

$$\zeta=\frac{z^2}{x}. \tag{6.4.16}$$

Перепишем частные производные по x и z через полные производные по ζ

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial x}=\frac{d\vartheta}{d\zeta}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial x}=-\frac{z^2}{x^2}\cdot\frac{d\vartheta}{d\zeta};$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial z}=\frac{d\vartheta}{d\zeta}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial z}=\frac{2z}{x}\cdot\frac{d\vartheta}{d\zeta};$$

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2z}{x}\cdot\frac{d\vartheta}{d\zeta}\right)=\frac{2}{x}\frac{d\vartheta}{d\zeta}+\frac{4z^2}{x^2}\cdot\frac{d^2\vartheta}{d\zeta^2}$$

и подставим полученные выражения в (6.4.11), которое после некоторых преобразований примет вид

$$\frac{d^2\vartheta}{d\zeta^2}+\left(\frac{u}{4\alpha k}+\frac{1}{2\zeta}\right)\frac{d\vartheta}{d\zeta}=0. \tag{6.4.17}$$

Для новой переменной ζ граничные условия (6.4.11) — (6.4.13) перепишутся как

$$\vartheta(\zeta)\Big|_{\zeta=0}=\vartheta_0; \tag{6.4.18}$$

$$\vartheta(\zeta)\Big|_{\zeta=\infty}=\vartheta_1. \tag{6.4.19}$$

Проинтегрируем (6.4.17) один раз

$$\frac{d\vartheta}{d\zeta}=c\cdot e^{-\frac{u\zeta}{4\alpha k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\zeta}}.$$

Полученное выражение проинтегрируем от 0 до ζ и используем (6.4.18)

$$\vartheta(\zeta)-\vartheta_0=c\cdot\int_0^{\zeta} e^{-\frac{u\zeta_1}{4\alpha k}}\cdot\frac{d\zeta_1}{\sqrt{\zeta_1}}. \qquad (6.4.20)$$

Введем новую функцию

$$\sigma^2=\frac{u\cdot\zeta_1}{4\alpha k},$$

тогда

$$d\zeta_1=\frac{8\cdot\alpha\cdot k}{u}\cdot\sigma\cdot d\sigma,\quad \frac{1}{\sqrt{\zeta_1}}=\frac{1}{\sigma}\cdot\sqrt{\frac{u}{4\alpha k}}.$$

При

$$\zeta=0,\qquad \sigma=0,$$

$$\zeta=\zeta,\qquad \sigma=\sqrt{\frac{u\cdot\varsigma}{4\alpha k}}$$

и (6.4.20) примет вид

$$\vartheta(\zeta)=\vartheta_0+c_1\cdot\int_0^{\sqrt{\frac{u\zeta}{4\alpha k}}}\cdot e^{-\sigma^2}\cdot d\sigma, \qquad (6.4.21)$$

где $c_1=2\cdot c\cdot\sqrt{\frac{4\alpha k}{u}}$.

Интеграл, входящий в (6.4.21), известен в математике как интеграл вероятности и затабулирован. Известно, что

$$\int_0^{\infty} e^{-\sigma^2}\cdot d\sigma=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (6.4.22)$$

Используем (6.4.22) и (6.4.19) для определения c_1

$$\vartheta_1-\vartheta_0=c_1\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

или

$$c_1=\frac{(\vartheta_1-\vartheta_0)\,2}{\sqrt{\pi}}.$$

В таком случае имеем окончательное выражение для определения ϑ в любой точке над новой подстилающей поверхностью

$$\vartheta(z, x)=\vartheta_0+\frac{2(\vartheta_1-\vartheta_0)}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\sqrt{\frac{uz^2}{4\alpha kx}}} e^{-\sigma^2}\cdot d\sigma. \qquad (6.4.23)$$

Из физических соображений ясно, что заметное влияние подстилающей поверхности распространяется не до бесконечности, а до какой-то конечной высоты — высоты внутреннего пограничного слоя, которую можно определить как уровень, где $\vartheta \cong \vartheta_1$.

Известно, что интеграл вероятности становится близким к $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ уже при верхнем пределе около 2—3. Таким образом, обозначив в (6.4.23) верхний предел, обеспечивающий заданную точность равенства $\vartheta \cong \vartheta_1$, через N, получим условие для определения высоты внутреннего пограничного слоя

$$H_\vartheta=2\cdot N\cdot\sqrt{\frac{\alpha\cdot kx}{u}}. \qquad (6.4.24)$$

Если $N=2{,}0$; $u=10$ *м/сек*; $\alpha=1{,}0$; $k=5$ *м²/сек*, то на расстоянии 1 *км* от границы раздела $H_\vartheta \simeq 90$ *м*, а на расстоянии 10 *км* — 284 *м*.

В (6.4.24) прямая зависимость от $\sqrt{x}$ и обратная от $\sqrt{u}$ связана с продолжительностью взаимодействия движущегося воздуха с новой подстилающей поверхностью. Зависимость от k объясняется тем, что чем больше интенсивность турбулентного перемешивания, тем до больших высот распространяется влияние подстилающей поверхности.

Используем (6.4.23) для определения турбулентного потока тепла и затрат тепла на испарение. Ограничимся для примера выводом формулы для расчета скорости испарения или затрат тепла на испарение

$$LE=-L\rho\cdot\alpha_q k\cdot\frac{\partial q}{\partial z}\Bigg|_{z=0}.$$

Определим производную из (6.4.23), подставив вместо ϑ значение q и использовав правило дифференцирования интеграла, пределы которого зависят от параметра

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)\cdot dx=\int\limits_{a(\alpha)}^{b(\alpha)}\frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,\partial x+f(b,\alpha)\cdot\frac{\partial b}{\partial\alpha}-f(a,\alpha)\cdot\frac{\partial a}{\partial\alpha}.$$

В нашем случае

$$\left.\frac{\partial q}{\partial z}\right|_{z=0}=\sqrt{\frac{u}{4\alpha_q kx}}\cdot\frac{2(q_1-q_0)}{\sqrt{\pi}};$$

$$LE=-\rho L\cdot k\cdot\alpha_q\,\frac{2(q_1-q_0)}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\frac{u}{4\alpha_q kx}}=$$

$$=(q_0-q_1)\cdot\rho\cdot\sqrt{\frac{ku\cdot\alpha_q}{\pi\cdot x}}\cdot L. \qquad (6.4.25)$$

Увеличение скорости испарения при росте скорости ветра объясняется ускорением замены увлажненного воздуха новыми порциями сухого (при $q_0>q_1$), тогда как обратная зависимость от $\sqrt{x}$ связана с тем, что по мере удаления от границы раздела воздух постепенно адаптируется к свойствам подстилающей поверхности (в данном случае увеличивается его влагосодержание) и скорость испарения уменьшается. Из последнего факта не следует, однако, что в центре океана (при $x\to\infty$) испарение равно нулю, так как в действительности важную роль играют нерассмотренные здесь процессы конденсации, образования облаков и выпадения осадков и горизонтальная неоднородность, которая наблюдается даже в центральной части океана.

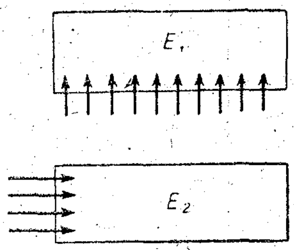

Рис. 47. Влияние конфигурации бассейна на испарение

Влиянием x на скорость испарения объясняется зависимость последнего от направления ветра и формы испаряющего бассейна (рис. 47). Например, при прямоугольной форме бассейна скорость испарения со всего бассейна для ветра, дующего вдоль меньшей стороны E_1, будет больше, чем для ветра, дующего вдоль большей стороны E_2, так как во втором случае воздух проходит большее расстояние над водой и успевает сильнее увлажниться.

Получим выражение для определения испарения с полосы шириной Δy и длиной L, расположенной вдоль оси x. Если обозначить испарение с элементарной площадки $dx\cdot dy$ через $dE_L=E\cdot dx\cdot dy$, то

$$E_L=2\rho(q_0-q_1)\cdot\sqrt{\frac{uk\alpha_q}{\pi}}\cdot\Delta y\cdot\sqrt{L}. \qquad (6.4.26)$$

По аналогии с (6.4.25) и (6.4.26) можно получить выражения для турбулентного потока тепла и потери тепла с полосы шириной Δy и длиной L

$$P=\rho\cdot c_p(\Theta_0-\Theta_1)\cdot\sqrt{\frac{k\cdot u\cdot\alpha_т}{\pi\cdot x}}; \qquad (6.4.27)$$

$$P_L=2\rho\cdot c_p(\Theta_0-\Theta_1)\cdot\sqrt{\frac{uk\alpha_т}{\pi}}\,\Delta y\cdot\sqrt{L}. \qquad (6.4.28)$$

Напомним, что рассмотренное выше решение задачи о трансформации было получено для $k=\text{const}$ и $u=\text{const}$. Оценки высоты внутреннего пограничного слоя показывают, что для расстояний около нескольких километров влияние подстилающей поверхности сказывается в основном в пределах приземного слоя. Поскольку именно в приземном слое скорость ветра и коэффициент турбулентности заметно меняются с высотой, то желательно отказаться от условия $k=\text{const}$ и $u=\text{const}$ и задать закон изменения их с высотой. Допустим, что

$$u=u_1\left(\frac{z}{z_1}\right)^{\varepsilon}, \qquad k=k_1\left(\frac{z}{z_1}\right)^{1-\varepsilon}. \qquad (6.4.29)$$

Тогда (6.4.10) примет вид

$$\frac{u_1\cdot z_1^{1-2\varepsilon}}{k_1}\cdot z^{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial x}=\alpha_т\cdot\frac{\partial}{\partial z}\,z^{1-\varepsilon}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial z}.$$

Обозначим постоянный и положительный коэффициент $u_1 z_1^{1-2\varepsilon}/k_1$ через a^2. В таком случае

$$a^2\cdot z^{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial x}=\alpha_т\frac{\partial}{\partial z}\,z^{1-\varepsilon}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial z}. \qquad (6.4.30)$$

Полученное уравнение можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению, если, как и раньше, ввести новую переменную $\xi=\xi(x, z)$. Вид этой зависимости найдем на основании теории подобия. Для всех переменных величин в (6.4.30) введем характерные масштабы

$$z=H\cdot z', \quad x=L\cdot x', \quad \vartheta'=\frac{\vartheta-\vartheta_1}{\vartheta_0-\vartheta_1} \qquad (6.4.31)$$

и перепишем уравнение в безразмерном виде

$$\frac{a^2\cdot H^{1+2\varepsilon}}{L}\cdot z'^{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\vartheta'}{\partial x'}=\alpha_т\cdot\frac{\partial}{\partial z'}\,z'^{1-\varepsilon}\frac{\partial\vartheta'}{\partial z'}. \qquad (6.4.32)$$

Так как масштабы H и L можно выбрать какими угодно, то без потери общности задачи возмем их такими, чтобы

$$\frac{a^2\cdot H^{1+2\varepsilon}}{L}=1,$$

т. е. $L=a^2\cdot H^{1+2\varepsilon}$.

С учетом этого (6.4.32) примет вид

$$z'^{\varepsilon}\cdot\frac{\partial\vartheta'}{\partial x'}=\alpha_{\text{т}}\cdot\frac{\partial}{\partial z'}\,z'^{1-\varepsilon}\cdot\frac{\partial\vartheta'}{\partial z'}. \tag{6.4.33}$$

Запишем граничные условия для ϑ':

$$\vartheta'\Big|_{\substack{x'=0\\ z'\geqslant 0}}=0,\quad \vartheta'\Big|_{\substack{z'=0\\ x'>0}}=1,\quad \vartheta'\Big|_{\substack{z'=\infty\\ x'>0}}=0. \tag{6.4.34}$$

Если решить (6.4.33) с учетом (6.4.34), то

$$\vartheta'=f(x',z')$$

или

$$\vartheta-\vartheta_1=(\vartheta_0-\vartheta_1)\,f\left(\frac{x}{a^2\cdot H^{1+2\varepsilon}},\ \frac{z}{H}\right). \tag{6.4.35}$$

С другой стороны, если в (6.4.30) перейти к новой переменной ϑ' и воспользоваться граничными условиями (6.4.34), то решение будет выглядеть так:

$$\vartheta'=f(x,\ z)$$

или

$$\vartheta-\vartheta_1=(\vartheta_0-\vartheta_1)\,f(x,\ z,\ a^2). \tag{6.4.36}$$

Из (6.4.36) видно, что масштаб H не входит в число параметров, определяющих ϑ, и значит в (6.4.35) под знаком функции H должно сократиться, т. е.

$$\vartheta-\vartheta_1=(\vartheta_0-\vartheta_1)\cdot f\left(\frac{x}{a^2\cdot H^{1+2\varepsilon}};\ \frac{z^{-1-2\varepsilon}}{H^{-1-2\varepsilon}}\right)=$$

$$=(\vartheta_0-\vartheta_1)\cdot f\left(\frac{x}{a^2\cdot z^{1+2\varepsilon}}\right). \tag{6.4.37}$$

Итак, при решении задачи целесообразно ввести новую переменную

$$\xi=\frac{x}{a^2\cdot z^{1+2\varepsilon}}, \tag{6.4.38}$$

которая позволит свести исходное уравнение к обыкновенному дифференциальному уравнению. Дальнейшее решение при граничных условиях (6.4.11) — (6.4.13) производится так же, как и в предыдущем случае, поэтому запишем сразу окончательное выражение для ϑ

$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)} \int_0^{\sigma} \nu^{A-2} \cdot e^{-\nu} d\vartheta, \qquad (6.4.39)$$

$$\sigma = \frac{a^2 \cdot z^{1+2\varepsilon}}{x(1+2\varepsilon)^2}, \quad A = \frac{1+3\varepsilon}{1+2\varepsilon}.$$

Результаты теории трансформации поля температуры и влажности могут быть использованы при исследовании и прогнозе таких важных явлений, как образование и рассеяние тумана, замерзание водоемов и др. Например, при прогнозе адвективного тумана, возникающего при перемещении воздушной массы на новую подстилающую поверхность, необходимо определить расстояние, на котором относительная влажность достигнет 100%. Так как $r = e/E$ (e — упругость водяного пара; E — насыщающая упругость при температуре воздуха), т. е. относительная влажность зависит от фактического влагосодержания и температуры воздуха, то ясно, что r может достигнуть 100% как за счет повышения влажности, так и за счет понижения температуры. Таким образом, задача прогноза адвективного тумана сводится к определению расстояний, на которых температура и влажность воздушной массы достигнут значений, необходимых для образования тумана [11].

Полученные ранее формулы для определения турбулентного потока тепла и затрат тепла на испарение могут быть использованы при прогнозе сроков замерзания водоемов. Для этого необходимо знать теплозапас слоя воды в начальный момент и скорость уменьшения этого запаса из-за потерь тепла через поверхность.

Большая роль принадлежит теории трансформации при расчете норм орошения, при изучении изменений климата, связанных с созданием искусственных озер и морей, и в целом ряде других прикладных задач.

До сих пор рассматривалась ограниченная задача о трансформации поля температуры и влажности при неизменном поле ветра. Перейдем теперь к задаче о трансформации поля скорости ветра и характеристик турбулентности.

§ 5. Трансформация динамических характеристик воздушного потока при изменении шероховатости подстилающей поверхности

Ограничимся рассмотрением случая нейтральной стратификации и не очень больших расстояний от границы раздела, при которых можно считать, что внутренний пограничный слой не выходит за рамки приземного слоя. Будем считать, что ось x совпадает с направлением ветра, при $x<0$ расположена поверхность с $z_0=z'_0$, а при $x>0$ — поверхность с $z_0=z''_0$ (рис. 48), ось y направлена вдоль границы раздела.

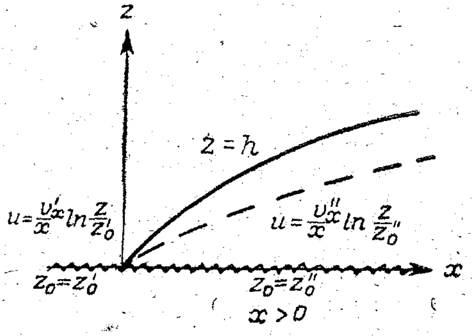

Рис. 48. Качественная картина трансформации воздушного потока при резком изменении шероховатости

Для указанных условий система уравнений (6.4.1) — (6.4.9) примет вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\,k\,\frac{\partial u}{\partial z}; \tag{6.5.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0; \tag{6.5.2}$$

$$u\frac{\partial b}{\partial x}+w\frac{\partial b}{\partial z}=k\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2-c\frac{b^2}{k}; \tag{6.5.3}$$

$$k=-\varkappa\cdot c^{1/4}\cdot\sqrt{b}\cdot\frac{\partial u/\partial z}{\partial^2 u/\partial z^2}. \tag{6.5.4*}$$

Если считать, что при $x<0$ существует установившийся поток воздуха, т. е. можно использовать модель горизонтально-однородного приземного слоя, а при $x>0$ на верхней границе

* Выражение (6.5.4) получается из (6.4.7.)—(6.4.9).

внутреннего пограничного слоя выполняется условие склейки скоростей и непрерывности потоков количества движения, граничные условия можно записать в виде

$$\underset{z\geqslant z_0'}{x=0,}\quad u=\frac{v_*'}{\varkappa}\ln z/z_0',\ \ b=c^{-1/2}\cdot v'^{\,2}_*; \tag{6.5.5}$$

$$\left.\begin{aligned}&\underset{x>0}{z=z_0''},\quad u=w=0,\ k=\varkappa z_0''\cdot v_*''(x),\\ &\qquad k\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=v_*''^2(x);\end{aligned}\right\} \tag{6.5.6}$$

$$\underset{x>0}{z=h,}\quad u=\frac{v_*'}{\varkappa}\ln h/z_0',\qquad k\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=v_*'^2; \tag{6.5.7}$$

Переопределенность граничных условий является кажущейся, так как в число неизвестных помимо u, w, k, b входит еще и высота внутреннего пограничного слоя h.

Введем безразмерные величины: $u_n=\dfrac{u}{u_*}$, $w_n=\dfrac{w}{w_*}$, $k_n=\dfrac{k}{k_*}$, $x_n=\dfrac{x}{L}$, $z_n=\dfrac{z}{H}$, $b_n=\dfrac{b}{b_*}$,

Для определения масштабов используем соотношения, получающиеся из исходной системы уравнений и граничных условий, дополненные выражением для w_*, полученным из физических соображений

$$w_*=\varkappa(v_*'-v_*''),$$

где v''_* — характерная величина $v''_*(x)$ на больших x. Действительно, можно ожидать, что масштаб для вертикальной скорости должен быть связан с дивергенцией воздушного потока и, следовательно, с разностью динамических скоростей над исходной и новой подстилающей поверхностью.

С учетом указанных выше соотношений получаем следующие выражения для масштабов:

$$u_*=\frac{v_*'}{\varkappa},\ H=z'_0,\ b_*=c^{-1/2}\cdot v'^{\,2}_*,\ k_*=\varkappa v'_*\cdot z_0',$$

$$w_*=\varkappa(v_*'-v_*''),\ L=\frac{z_0'}{\varkappa^2}\cdot\frac{v_*'}{v_*'-v_*''}. \tag{6.5.8}$$

В таком случае систему уравнений и граничных условий запишем через безразмерные величины:

$$\alpha\cdot\left(u_n\frac{\partial u_n}{\partial x_n}+w_n\frac{\partial u_n}{\partial z_n}\right)=\frac{\partial}{\partial z_n}k_n\cdot\frac{\partial u_n}{\partial z_n}; \tag{6.5.9}$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_n}+\frac{\partial w_n}{\partial z_n}=0; \tag{6.5.10}$$

$$\frac{\varkappa^2}{c^{1/2}}\cdot\alpha\left(u_n\frac{\partial b_n}{\partial x_n}+w_n\frac{\partial b_n}{\partial z_n}\right)=k_n\left(\frac{\partial u_n}{\partial z_n}\right)^2-\frac{b_n^2}{k_n}; \tag{6.5.11}$$

$$k_n=-\sqrt{b_n}\cdot\frac{\partial u_n/\partial z_n}{\partial^2 u_n/\partial z_n^2}. \tag{6.5.12}$$

Граничные условия:

$$\underset{z_n\geqslant 1}{x_n=0},\quad u_n=\ln z_n,\; b_n=1; \tag{6.5.13}$$

$$\underset{x_n>0}{z_n=m},\quad u_n=w_n=0,\; k_n=m\cdot p,\; k_n\cdot\frac{\partial u_n}{\partial z_n}=p^2; \tag{6.5.14}$$

$$\underset{x_n>0}{z_n=h_n},\quad u_n=\ln h_n,\; k_n\frac{\partial u_n}{\partial z_n}=1, \tag{6.5.15}$$

где

$$m=\frac{z_0''}{z_0'},\quad p=\frac{v_*''(x)}{v_*'},\quad \alpha=\frac{v_*'-v_*''}{v_*'},\quad \frac{\varkappa^2}{c^{1/2}}=a. \tag{6.5.16}$$

Если считать α при определенных условиях (при небольшом изменении параметра шероховатости) малым параметром, то можно искать решение задачи в виде разложения в ряд по α, ограничиваясь членами, содержащими α в первой степени

$$\left.\begin{aligned}&u_n=u_{n0}+\alpha u_{n1},\quad w_n=w_{n0}+\alpha w_{n1},\\&k_n=k_{n0}+\alpha k_{n1},\quad b_n=b_{n0}+\alpha b_{n1}.\end{aligned}\right\} \tag{6.5.17}$$

Подставим (6.5.17) в систему (6.5.9) — (6.5.15), упростим ее (отбрасывая члены, содержащие α^2, α^3 . . ., раскладывая $\sqrt{b_n}$ в бином Ньютона и т. д.), отбросим значки n и разделим на системы, содержащие α в нулевой и первой степени. Начнем с рассмотрения первой системы.

Решение системы для $\alpha^0=1$

Для нулевого приближения система уравнений и граничных условий имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial z}k_0\cdot\frac{\partial u_0}{\partial z}=0; \tag{6.5.18}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial w_0}{\partial z}=0; \tag{6.5.19}$$

$$k_0^2\cdot\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}\right)^2=b_0^2; \tag{6.5.20}$$

$$k_0=-\sqrt{b_0}\cdot\frac{\partial u_0/\partial z}{\partial^2 u_0/\partial z^2}; \tag{6.5.21}$$

$$\left.\begin{array}{l} z=m, \quad u_0=w_0=0, \; k_0=m\cdot p, \\ x>0 \\ \qquad u_0\dfrac{\partial u_0}{\partial z}=p^2; \end{array}\right| \tag{6.5.22}$$

$$\begin{array}{l} z=h, \quad u_0=\ln h, \\ x>0 \end{array} \tag{6.5.23}$$

Проинтегрировав (6.5.18) по z, получим $k_0\cdot\frac{\partial u_0}{\partial z}=\text{const}$, или с учетом (6.5.22) $k_0\frac{\partial u_0}{\partial z}=p^2$, откуда на основании (6.5.20)

$$b_0=p^2. \tag{6.5.24}$$

Перепишем (6.5.18) в виде

$$\partial k_0/\partial z\cdot\partial u_0/\partial z+k_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2}=0$$

и используем (6.5.21), тогда

$$\partial k_0/\partial z=\sqrt{b_0}=p.$$

Проинтегрировав полученное выражение с учетом (6.5.22), получим

$$k_0=pz. \tag{6.5.25}$$

Подставив k_0 в соотношение $k_0\frac{\partial u_0}{\partial z}=p^2$, найдем с учетом (6.5.22) выражение для профиля ветра

$$u_0=p\ln z/m. \tag{6.5.26}$$

Из уравнения неразрывности (6.5.19) и граничного условия (6.5.22) определим

$$w_0=-\frac{dp}{dx}(z\cdot\ln z/m-z+m). \tag{6.5.27}$$

Наконец, используем граничное условие (6.5.23) для определения p и dp/dx

$$p = \frac{\ln h}{\ln h/m}; \tag{6.5.28}$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{h} \cdot \frac{dh}{dx} \cdot \frac{\ln m}{\ln^2 h/m}. \tag{6.5.29}$$

Из (6.5.19) — (6.5.23) видно, что полученное решение системы для нулевого приближения характеризует строение горизонтально-однородного приземного слоя над новой подстилающей поверхностью.

Решение системы для $\alpha^1 = \alpha$

Для этого случая система уравнений и граничных условий примет такой вид:

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + w_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[k_1 \cdot \frac{\partial u_0}{\partial z} + k_0 \frac{\partial u_1}{\partial z}\right]; \tag{6.5.30}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0; \tag{6.5.31}$$

$$a \cdot \left(u_0 \frac{\partial b_0}{\partial x} + w_0 \frac{\partial b_0}{\partial z}\right) = k_1 \cdot \left(\frac{\partial u_0}{\partial z}\right)^2 + 2k_0 \cdot \frac{\partial u_0}{\partial z} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial z} - $$

$$- \frac{2b_0 b_1}{k_0} + k_1 \cdot \frac{b_0^2}{k_0^2}; \tag{6.5.32}$$

$$k_1 \cdot \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + k_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = -\sqrt{b_0} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{b_1}{\sqrt{b_0}} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial z}. \tag{6.5.33}$$

Граничные условия:

$$\left.\begin{array}{ll} z = m, & u_1 = w_1 = 0, \quad k_1 = 0, \\ x > 0 & k_0 \dfrac{\partial u_1}{\partial z} + k_1 \dfrac{\partial u_0}{\partial z} = 0: \end{array}\right\} \tag{6.5.34}$$

$$\begin{array}{l} z = h \\ x > 0 \end{array} \quad u_1 = 0, \; k_0 \frac{\partial u_1}{\partial z} + k_1 \frac{\partial u_0}{\partial z} = \frac{1 - p^2}{\alpha}. \tag{6.5.35}$$

Подставив в (6.5.30) — (6.5.35) выражение для k_0, b_0, u_0, w_0, после некоторых преобразований получим решения для k_1, u_1, b_1, которые учитывают влияние горизонтальной и вертикальной адвекции

$$k_1 = z \cdot F(z) \cdot \frac{dp}{dx} - z^2 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x}; \tag{6.5.36}$$

$$b_1 = p \frac{dp}{dx} [F(z) - a \cdot z \cdot \ln z/m]; \tag{6.5.37}$$

$$u_1 = \frac{1}{4} \frac{dp}{dx} \left\{ z \cdot \Phi_1(z) - m\,\Phi_2(z) - \frac{h}{z} \cdot \frac{z-m}{h-m} \times \right.$$

$$\left. \times [h\,\Phi_1(h) - m\,\Phi_2(h)] \right\} \tag{6.5.38}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &F(z) = z \cdot \ln^2 z/m - (3z+m) \ln z/m + 4(z-m), \\ &\Phi_1(z) = \ln^2 z/m - (6-a) \ln z/m + \left(12 - \frac{3}{2}\, a\right), \\ &\Phi_2(z) = \ln^2 z/m + 6{,}0 \ln z/m + \left(12 - \frac{3}{2}\, a\right), \\ &\Phi_1(h) = \Phi_1(z)\Big|_{z=h}, \quad \Phi_2(h) = \Phi_2(z)\Big|_{z=h}. \end{aligned}\right\} \tag{6.5.39}$$

Определим теперь $h = h(x)$, для чего используем граничное условие (6.5.35), которое с учетом (6.5.28) — (6.5.29) примет вид

$$-\frac{1}{h} \cdot \frac{dh}{dx} \cdot \frac{\ln m}{\ln^2 h/m} \cdot F(h) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\ln h/m}{\ln h} \left(1 - \frac{\ln^2 h}{\ln^2 h/m}\right), \tag{6.5.40}$$

где

$$F(h) = F(z)\Big|_{z=h}.$$

Вернемся к обозначению безразмерных переменных значком n и введем новую безразмерную переменную $\tilde{x}_n$

$$\tilde{x}_n = \frac{x}{z_0}, \quad x_n = \alpha \cdot \tilde{x}_n \cdot \varkappa^2. \tag{6.5.41}$$

Тогда (6.5.40) примет вид

$$\frac{dh_n}{d\tilde{x}_n} = R(h_n),$$

где

$$R(h_n) = \varkappa^2 \cdot h_n \cdot \frac{\ln^2 h_n/m + \ln h_n/m \cdot h_n \ln h_n}{\ln h_n \cdot F(h_n)}$$

$$\tilde{x}_n = \int\limits_m^{h_n} \frac{dh_n}{R(h_n)}. \qquad (6.5.42)$$

Таким образом, для определения $h_n = h_n(\tilde{x}_n)$ нужно рассчитать интеграл для разных m и h_n.

Окончательные формулы для определения искомых величин u_n, k_n, w_n, b_n имеют следующий вид:

$$\underline{u_n = u_{n0} + \alpha u_{n1}} = \frac{\ln h_n}{\ln h_n/m} \cdot \ln z_n/m - \frac{1}{4\varkappa^2} \cdot \frac{dh_n}{d\tilde{x}_n} \cdot \frac{1}{h_n} \cdot \frac{h_n m}{\ln^2 h_n/m} \times$$

$$\times \Big\{ z_n \Phi_1(z_n) - m\Phi_2(z_n) - \frac{h_n}{z_n} \cdot \frac{z_n - m}{h_n - m} \times$$

$$\times [h_n \Phi_1(h_n) - m\,\Phi_2(h_n)] \Big\}; \qquad (6.5.43)$$

$$\underline{b_n = b_{n0} + \alpha b_{n1}} = \frac{\ln^2 h_n}{\ln^2 h_n/m} - \frac{1}{\varkappa^2} \cdot \frac{dh_n}{d\tilde{x}_n} \cdot \frac{1}{h_n} \cdot \frac{\ln m \cdot \ln h_n}{\ln^3 h_n/m} \times$$

$$\times [F(z_n) - a \cdot z_n \cdot \ln в_n/m]; \qquad (6.5.44)$$

$$\underline{k_n + k_{n0} + \alpha k_{n1}} = \frac{z_n \ln h_n}{\ln h_n/m} - \frac{1}{\varkappa^2} \cdot \frac{dh_n}{d\tilde{x}_n} \cdot \frac{z_n}{h_n} \cdot \frac{\ln m}{\ln^2 h_n/m} \times$$

$$\times \Big\{ F(z_n) - \frac{z_n}{4}\,\Phi_3(z_n) + \frac{m}{4}(2\ln z_n/m + 6{,}00) + \frac{m}{4z_n} \cdot \frac{h_n}{h_n - m} \times$$

$$\times [\ln \Phi_1(h_n) - m\,\Phi_2(h_n)] \Big\} \qquad (6.5.45)$$

где

$$\Phi_3(z_n) = \ln^3 z_n/m - (4 - a)\ln z_n/m + \left(6 - \frac{a}{2}\right);$$

$$\underline{w_n = w_{n0} + \alpha w_{n1}} = \frac{1}{h_n} \cdot \frac{dh_n}{dx_n} \ln m \cdot \frac{z_n \ln z_n/m + m - z_n}{\ln^2 z_n/m} -$$

$$- \frac{\alpha}{4} \cdot \frac{d^2 p}{dx_n^2} \times \Big\{ \frac{z_n^2}{2} (\ln^2 z_n/m - (7 - a)\ln z_n/m + (7 - a)/2 -$$

$$- m z_n (\ln^2 z_n/m + 4\ln z_n/m + 8 - \frac{3}{2}\,a\Big) + \left(12 - \frac{3}{2}\,a\right) \times$$

$$\times (z_n - m) - \left(6 - \frac{3}{4}\,a\right) m^2 \Big] - \alpha B(h_n) \cdot \left[\frac{z_n^2}{2m} - z_n - \frac{3}{2}\,m\right], \qquad (6.5.46)$$

где

$$B(h_n)=\frac{1}{4}\cdot\frac{d^2p}{dx_n^2}\cdot\frac{h_n}{h_n-m}B_1(h_n)-\frac{1}{4}\frac{dp}{dx_n}\cdot\frac{m}{(h_n-m)^2}\times$$

$$\times\frac{dh_n}{dx_n}\cdot B_1(h_n)+\frac{1}{4}\frac{dp}{dx_n}\cdot\frac{h_n}{h_n-m}\cdot\frac{dh_n}{dx_n}B_2(h_n);$$

$$B_1(h_n)=h_n\Phi_1(h_n)-m\,\Phi_2(h_n);$$

$$B_2(h_n)=\Phi_1(h_n)+2\ln h_n/m-(6-a)-2\frac{m}{h_n}\ln h_n/m-6{,}00\cdot\frac{m}{h_n}.$$

Найдем связь α с параметром $m=z''_0/z'_0$, чтобы оценить, до каких величин m можно использовать приближенные формулы (6.5.43) — (6.5.46)

$$\alpha=1-\frac{v_*''}{v_*'}=-\frac{\ln m}{\ln h_n/m}.$$

Если при $z=h$ $\frac{v_*'}{\varkappa}\ln h/z_0'=\frac{v_*''}{\varkappa}\ln h/z_0''$, то

$$m=h_n^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}. \tag{6.5.47}$$

На рис. 49 показана зависимость h_n от $\tilde{x}_n$ для разных величин m от 0,1 до 10,0. При малых $\tilde{x}_n$ ($\tilde{x}_n=5\cdot10^2$) наклон поверхности раздела составляет 1/11 для $m=0{,}1$ и 1/5 для $m=10{,}0$. Для больших $\tilde{x}_n$ ($\tilde{x}_n=3\cdot10^4$) наклон уменьшается до 1/24 при $m=0{,}1$ и 1/13 при $m=10{,}0$.

На рис. 50 показана зависимость $\frac{v_*''^2(x)}{v'^2_*}$ от $\tilde{x}_n$; ее можно использовать для определения α, соответствующей $m=10{,}0$ и 0,1. Если принять для $m=10{,}0$ предельное отношение $v_*''/v_*'=1{,}25$, а для $m=0{,}1$ $v_*''/v_*'=0{,}85$, то в первом случае $\alpha=-0{,}25$, а во втором 0,15. Итак, полученные приближенные формулы могут быть использованы при различии шероховатостей подстилающих поверхностей более чем в 10 раз.

На рис. 51 показано изменение скорости ветра как функции высоты для разных величин $\tilde{x}_n$. Пунктирная линия соответствует логарифмическому профилю ветра над исходной поверхностью. Для $v'_*=30$ *см/сек*, $\varkappa=0{,}4$, $z'_0=2{,}5$ *см* при переходе с

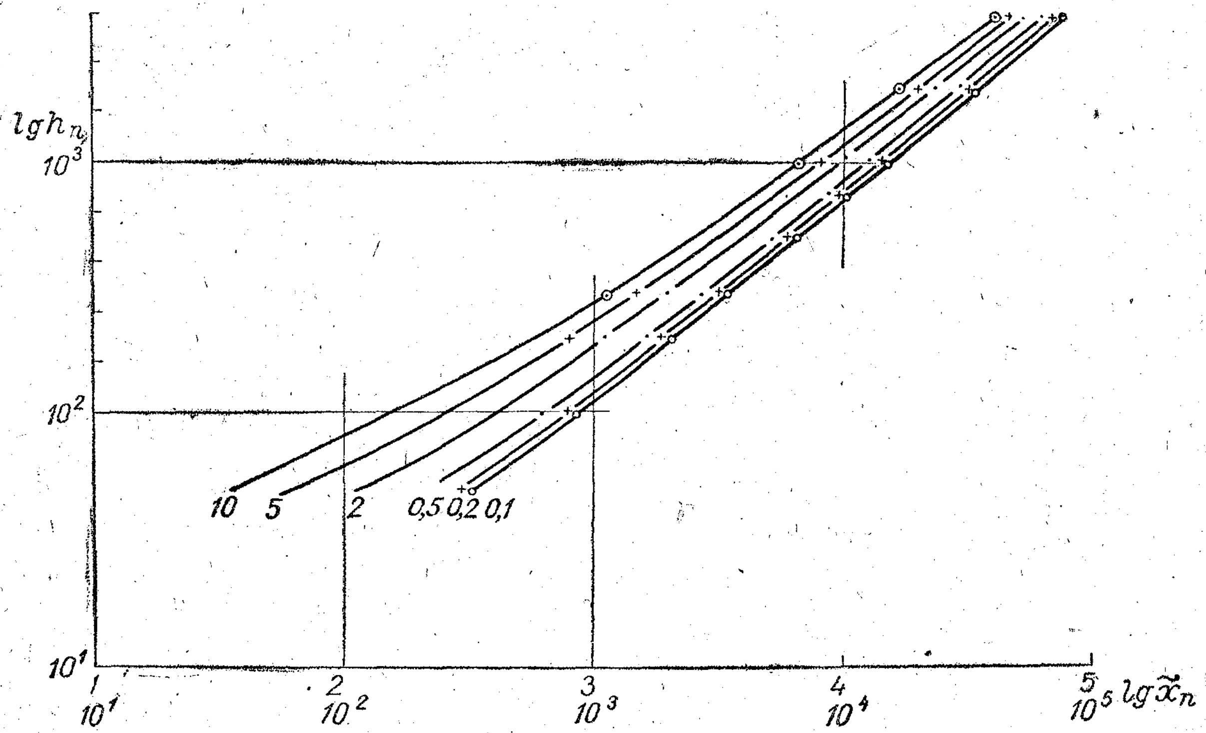

Рис. 49. Наклон высоты внутреннего пограничного слоя для разных величин m

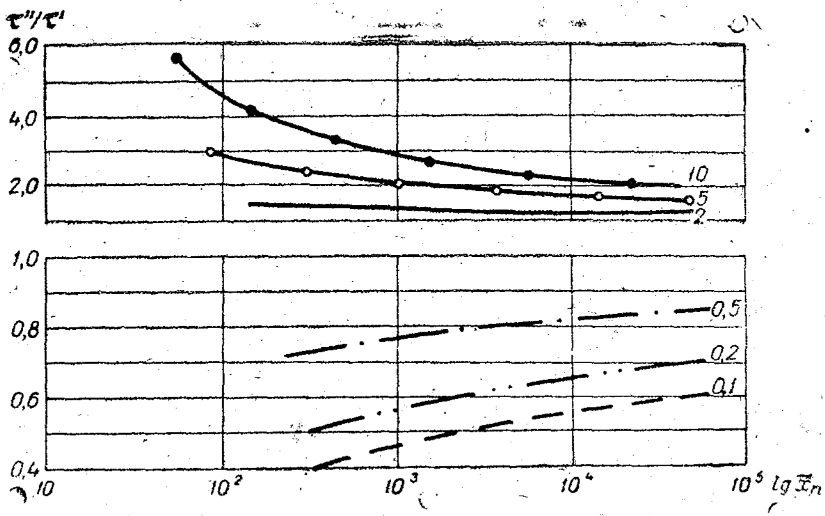

Рис. 50. Изменение касательного напряжения как функции x и m

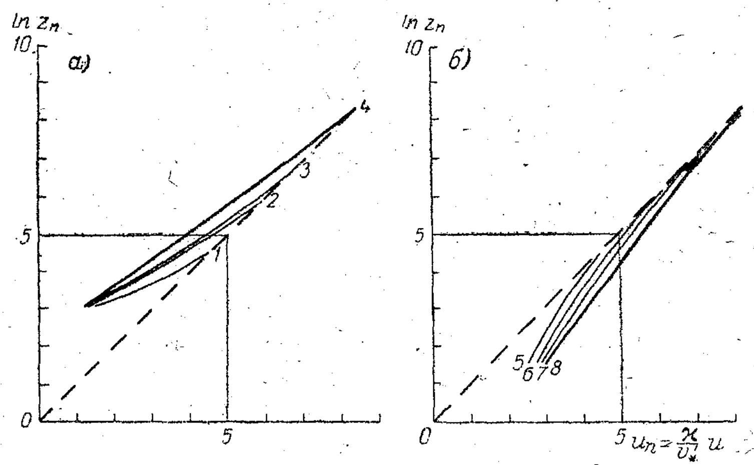

Рис. 51. Профиль ветра в приземном слое

а) m—10 : 1—$\tilde{x}_n$=1,78·10²; 2—$\tilde{x}_n$=2,49·10³; 3—$\tilde{x}_n$=6,65·10³: 4—$\tilde{x}_n$=4,12·10⁴; б) m=0,1: 5—$\tilde{x}_n$=8,63·10²: 6—$\tilde{x}_n$=6,43·10³; 7—$\tilde{x}_n$—1,48·10⁴, 8—$\tilde{x}_n$=7,53·10⁴ менее шероховатой на более шероховатую поверхность ($m=10{,}0$; $z''_0=20$ *см*) на $z=0{,}5$ скорость ветра на расстоянии 1 *км* уменьшается на 1,5 *м/сек*, тогда как в обратном случае, при переходе с более шероховатой на менее шероховатую поверхность ($m=0{,}1$; $z''_0=0{,}2$ *см*), скорость на $z=0{,}5$ *м* увеличивается на 0,7 *м/сек*.

В заключение данного раздела рассмотрим некоторые важные процессы, также связанные с неоднородностью подстилающей поверхности.

§ 6. Бризы, муссоны

Бризы и муссоны относятся к числу ветров, возникающих под влиянием неоднородности подстилающей поверхности. Как бризовая, так и муссонная циркуляция связаны с различиями температуры поверхности суши и моря; однако бризовая циркуляция возникает вследствие суточного изменения этих различий и имеет суточную периодичность, тогда как муссонная циркуляция является отражением сезонных изменений и имеет годичную периодичность. Этим определяется различие пространственных масштабов бризов и муссонов: если бризы имеют характерные масштабы порядка сотни метров по вертикали и десятков километров по горизонтали, то муссоны — около нескольких километров по вертикали и нескольких сотен километров по горизонтали.

Теоремы о циркуляции скорости. Качественный анализ бризов и муссонов

Некоторое качественное представление о механизме возникновения бризов и муссонов можно получить на основании теорем о циркуляции. Поскольку физическое понятие циркуляции и теоремы о циркуляции подробно рассматривались в курсе гидромеханики, то ограничимся здесь только кратким напоминанием.

Циркуляцией скорости по замкнутому контуру l называется величина

$$\Gamma=\oint\limits_{(l)} v_l\cdot dl=\oint\limits_{(l)} \vec{V}\,\vec{dl}\,, \tag{6.6.1}$$

где v_l — проекция скорости на направление контура.

В правой системе координат обход контура l производится против часовой стрелки, поэтому $\Gamma>0$, если суммарная вращательная составляющая скорости направлена против часовой стрелки.

Нетрудно показать, что ускорение циркуляции равно циркуляции ускорения

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint\limits_{(l)} \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{l} \qquad (6.6.2)$$

и обуславливается бароклинностью, силой вязкости и кориолисовой силой.

а) Влияние бароклинности описывается теоремой Бьеркнеса

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\oint\limits_{(l)} \alpha \cdot dp, \qquad (6.6.3)$$

где α — удельный объем ($\alpha = 1/\rho$).

Перепишем (6.6.3) с учетом уравнения состояния

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -R \oint\limits_{(l)} T d \ln p \qquad (6.6.4)$$

и рассмотрим контур, образованный двумя изобарами и двумя изотермами (рис. 52). В таком случае связанное с бароклинностью ускорение циркуляции (6.6.4) можно представить в виде

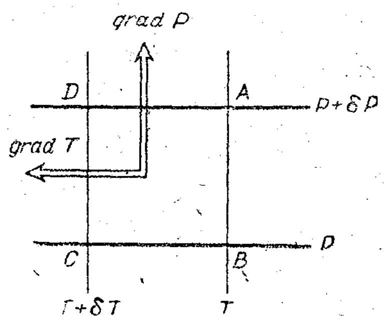

Рис. 52. Изобаро-изотермический соленоид

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{d\Gamma}{dt} = -\oint\limits_{ABCDA} T \cdot d \ln p = \oint\limits_{ADCBA} T \cdot d \ln p = \int\limits_{AD} T d \ln p +$$

$$+ \int\limits_{DC} T d \ln p + \int\limits_{CB} T d \ln p + \int\limits_{BA} T d \ln p = (T + \delta T) \cdot \int\limits_{DC} d \ln p +$$

$$+ T \int\limits_{BA} d \ln p = \delta T \ln \frac{p + \delta p}{p}$$

лии

$$\frac{d\Gamma}{dt}=R\cdot\delta T\cdot\ln\frac{p+\delta p}{p}. \qquad (6.6.5)$$

Если $\delta p << P$, то

$$\left(\frac{d\Gamma}{dt}\right)_1\cong R\cdot\delta T\cdot\frac{\delta p}{p}. \qquad (6.6.6)$$

Из вывода формул (6.6.5), (6.6.6) очевидно, что $d\Gamma/dt>0$, когда направление обхода контура совпадает с кратчайшим поворотом от градиента давления к градиенту температуры.

б) Влияние сил вязкости можно приближенно оценить, если, по аналогии с силой трения твердых тел, считать, что

$$\vec{F}_в=-n\cdot\vec{V}.$$

В таком случае, если рассматривать только действие сил вязкости, то в (6.6.2) $\frac{d\vec{V}}{dt}=\vec{F}_в$, и связанное с ними ускорение циркуляции примет вид

$$\left(\frac{d\Gamma}{dt}\right)_2=-n\Gamma. \qquad (6.6.7)$$

Итак, под влиянием вязкости (в рамках принятой схематизации) возникает ускорение циркуляции, направленное противоположно самой циркуляции и пропорциональное ее абсолютной величине.

в) Влияние силы Кориолиса можно оценить, если в (6.6.2) подставить вместо ускорения $d\vec{V}/dt$ выражение для силы Кориолиса

$$\vec{F}_к=-2(\vec{\omega}\times\vec{V}).$$

Тогда

$$\left(\frac{d\Gamma}{dt}\right)_3=-2\oint\limits_{(l)}(\vec{\omega}\times\vec{V})\cdot\vec{d}l. \qquad (6.6.8)$$

Пользуясь правилом циклической перестановки сомножителей, запишем (6.6.8) в виде

$$\frac{d\Gamma}{dt}=-2\oint\limits_{(l)}\vec{\omega}(\vec{V}\times\vec{dl})=-2\vec{\omega}\cdot\oint\limits_{(l)}(\vec{V}\times\vec{d}l), \qquad (6.6.9)$$

так как $\vec{\omega}=\mathrm{const}$.

По определению смешанное векторно-скалярное произведение равно численно объему параллелепипеда с ребрами $\vec{\omega}$, $\vec{V}$, $\vec{dl}$.

С другой стороны, так как $\vec{\omega}$ направлен по земной оси, то этот объем можно представить как произведение ω на площадь сечения, параллельную плоскости экватора, которая равна $\vec{V'} \cdot \vec{dl'}$, где штрихом обозначены проекции векторов на плоскость экватора. В таком случае

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -2\vec{\omega} \cdot \oint\limits_{(l')} (\vec{V'} \cdot d\vec{l'}). \qquad (6.6.10)$$

Поскольку интеграл численно равен приращению площади $\vec{dS'}$ за единицу времени (рис. 53), то, подставив в (6.6.10) вместо

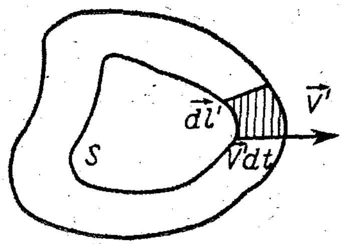

Рис. 53. Приращение площади за единицу времени

интеграла $d\vec{S'}/dt$ и воспользовавшись параллельностью $\vec{dS'}$ и $\vec{\omega}$, получим

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -2\omega \frac{dS'}{dt}. \qquad (6.6.11)$$

Направление обхода контура должно быть выбрано против часовой стрелки (если смотреть с конца вектора $\vec{\omega}$), в этом случае из (6.6.11) следует, что циркуляция скорости увеличивается при сжимании контура и уменьшается при расширении.

Используем теперь установленные закономерности для объяснения образования бризовой циркуляции. Днем суша нагревается больше, чем море, и в результате возникает наклон изотермических поверхностей (над сушей они приподняты). Поскольку наклон изобар значительно меньше, то за счет пересечения изобар и изотерм образуются изобаро-изотермические соленоиды и возникает циркуляция по направлению кратчайшего поворота от grad p к grad T, т. е. движение от суши к морю наверху (антибриз) и от моря к суше внизу (бриз). Нетрудно представить, что ночью (море теплее суши) картина циркуляции будет обратной (рис. 54).

Так как бризы — явление небольшого масштаба, то влиянием силы Кориолиса можно пренебречь. Влияние сил вязкости может быть существенно либо при больших коэффициентах тре-

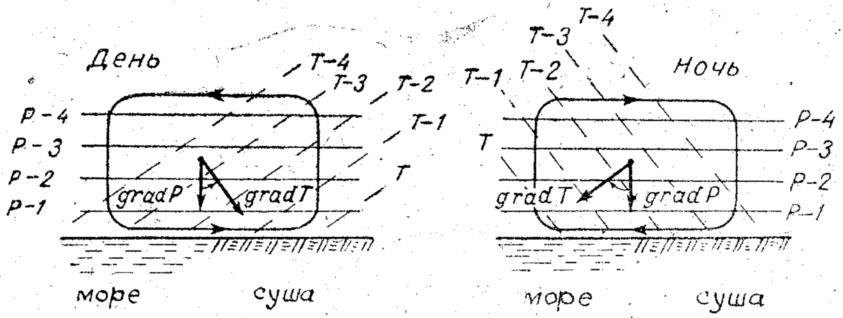

Рис. 54. Схема образования бризов

ния n, либо при расчете на большой промежуток времени. Действительно, если обозначить через A ускорение циркуляции за счет бароклинности, то при наличии сил вязкости

$$\frac{d\Gamma}{dt} = A - n\Gamma.$$

Решая это уравнение при условии $\Gamma \Big|_{t=0} = 0$, получаем

$$\Gamma = \frac{A}{n}\left(1 - e^{-nt}\right), \tag{6.6.12}$$

откуда видно, что при больших nt циркуляция перестает зависеть от времени и стремится к некоторой постоянной величине A/n, соответствующей равновесию между влиянием бароклинности и вязкости. При малых nt

$$\Gamma = A \cdot t. \tag{6.6.13}$$

В бризовой циркуляции рассмотренный эффект выражается в том, что максимальная скорость циркуляции наблюдается не в конце дневного времени, а перед полуднем, когда из-за сильной турбулентности (конвекции) увеличивается сила трения.

Муссонная циркуляция связана с неоднородностью нагревания материков и океанов. По аналогии с бризами нетрудно показать, что летом, когда море холоднее суши, муссон будет направлен с океана на материк, а зимой в обратном направлении. При анализе муссонной циркуляции необходим учет не только сил вязкости (6.6.12), но и силы Кориолиса (6.6.11).

Действительно, если в поясе широт между φ_1 и φ_2 расположен материк, а южнее океан, то летом за счет различий в нагревании должно возникнуть движение воздуха с океана на материк — с юга на север (рис. 55).

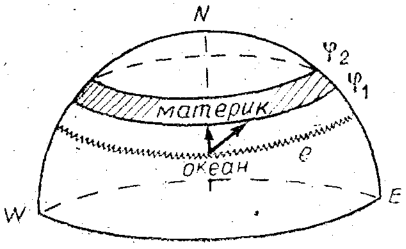

Рис. 55. Схема образования муссонов

Если теперь представить контур, охватывающий, допустим, по широтному кругу земной шар l, то этот контур будет смещаться с юга на север и его проекция на плоскость экватора будет уменьшаться, т. е. $dS''/dt<0$, значит $d\Gamma/dt>0$ и возникнет циркуляция против часовой стрелки (если смотреть с северного полюса). Таким образом, за счет действия силы Кориолиса в муссонной циркуляции появится составляющая, направленная с запада на восток.

Теория бризов

Поскольку бризы можно рассматривать как мезометеорологический процесс, получим систему уравнений термогидродинамики атмосферы, применяемую при изучении процессов такого масштаба. Выпишем в наиболее общем виде систему уравнений термогидродинамики атмосферы (2.2.12), (2.1.7), (2.1.13), (2.1.20), (2.1.22):

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + 2\omega_z v + \Delta_a u, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - 2\omega_z u + \Delta_a v, \\ \frac{dw}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g + \Delta_a w; \end{aligned}\right\} \quad (6.6.14)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0: \quad (6.6.15)$$

$$\left.\begin{aligned} p &= \rho R \cdot T, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \varepsilon_\Phi + \varepsilon_R + \Delta_a \vartheta, \\ \frac{dq}{dt} &= \varepsilon_{q\Phi} + \Delta_a q, \end{aligned}\right\} \quad (6.6.16)$$

где

$$\Delta_a = \frac{\partial}{\partial x} k_l \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_l \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k_l \frac{\partial}{\partial z};$$

ϑ — потенциальная температура $\left[\vartheta = T\left(\frac{1000}{P}\right)^{\frac{AR}{c_p}}\right]$; остальные обозначения обычные.

Непосредственное использование системы (6.6.14) — (6.6.16) для решения задач мезометеорологии нецелесообразно, так как она помимо мезометеорологических явлений описывает еще крупномасштабные процессы, звуковые волны и другие «шумы»; не все члены имеют одинаковый порядок; система существенно нелинейна, но некоторые члены могут быть линеаризованы, поскольку по сути дела они описывают линейные воздействия $\left(\text{например}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)$.

Преобразуем систему (6.6.14) к виду, удобному для решения данной задачи. Введем вместо давления величину π

$$\pi = \frac{c_p \Theta_0}{A}\left(\frac{p}{1000}\right)^{\frac{AR}{c_p}} \cong \frac{c_v \cdot \Theta_0}{A \cdot \vartheta} \cdot T, \tag{6.6.17}$$

где Θ_0 — среднее значение потенциальной температуры.

Продифференцировав (6.6.15) по x, y, z и использовав уравнения состояния, нетрудно получить

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \left(\frac{1000}{p}\right)^{\frac{AR}{c_p}} \cdot \frac{R \cdot T}{p} \cdot \frac{p}{\Theta_0 \cdot R}\frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{\vartheta}{\Theta_0} \cdot \frac{\partial \pi}{\partial x},\\
\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\vartheta}{\Theta_0} \cdot \frac{\partial \pi}{\partial y},\\
\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\vartheta}{\Theta_0} \cdot \frac{\partial \pi}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{6.6.18}$$

С учетом (6.6.18) уравнения движения можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dt}&=-\frac{\vartheta}{\Theta_0}\cdot\frac{\partial\pi}{\partial x}+2\omega_z v+\Delta_a u,\\
\frac{dv}{dt}&=-\frac{\vartheta}{\Theta_0}\cdot\frac{\partial\pi}{\partial y}-2\omega_z u+\Delta_a v,\\
\frac{dw}{dt}&=-\frac{\vartheta}{\Theta_0}\cdot\frac{\partial\pi}{\partial z}-g.
\end{aligned}\right\}\qquad(6.6.19)$$

Введем понятие о невозмущенных полях метеорологических элементов, т. е. полях, которые имели бы место при отсутствии мезометеоролотчиеских возмущений, связанных с термической неоднородностью подстилающей поверхности. Обозначим невозмущенные значения метеоэлементов через U, V, Θ, Π, W. Так как невозмущенное поле можно отождествить с крупномасштабной циркуляцией, для которой вертикальная скорость мала по сравнению с мезомасштабными процессами, то будем считать, что $W=0$. Запишем систему уравнений для определения невозмущенных значений метеоэлементов:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{DU}{Dt}&=-\frac{\Theta}{\Theta_0}\cdot\frac{\partial\Pi}{\partial x}+2\omega_z V+\Delta'_a\cdot U,\\
\frac{DV}{Dt}&=-\frac{\Theta}{\Theta_0}\cdot\frac{\partial\Pi}{\partial y}-2\omega_z U+\Delta'_a\cdot U,\\
0&=-\frac{\Theta}{\Theta_0}\cdot\frac{\partial\Pi}{\partial z}-g;
\end{aligned}\right\}\qquad(6.6.20)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{D\Theta}{Dt}&=\varepsilon_{\phi}+\varepsilon_R+\Delta'_a\,\Theta,\\
\frac{\partial U}{\partial x}&+\frac{\partial V}{\partial y}=0,\\
\mathrm{P}&=\frac{P}{R\cdot T},\\
\frac{DQ}{Dt}&=\varepsilon_{q\phi}+\Delta'_a\,Q,
\end{aligned}\right\}\qquad(6.6.21)$$

где

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}+V\frac{\partial}{\partial y};$$

$$\Delta'_a=\frac{\partial}{\partial x}N_l\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}N_l\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}N\frac{\partial}{\partial z};$$

N_l, N — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентности при невозмущенном состоянии метеорологических полей. В уравнении неразрывности отброшено малое слагаемое.

Подставим в систему (6.6.15), (6.6.16), (6.6.17) и (6.6.19) выражения для значений метеоэлементов в виде суммы невозмущенной величины и мезометеорологического возмущения

$$T=T+T',\ \ p=P+p',\ \ \vartheta=\Theta+\vartheta',\ \ \pi=\Pi+\pi',$$
$$\rho=\mathrm{P}+\rho',\ \ q=Q+q' \tag{6.6.22}$$

и отбросим малые члены на основании неравенств $T'<<T$, $p'\ll P$, $\vartheta'<<\Theta$, $\pi'<<\Pi$, $|\Theta-\Theta_0|\ll\Theta_0$.

Вычитая из полученной при этом системы уравнения для невозмущенного процесса, приходим к искомой системе уравнений мезометеорологии (при записи ее отбросим штрихи)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dt}&=-\frac{\partial\pi}{\partial x}+2\omega_z(v-V)+\frac{DU}{Dt}+\Delta_a u+\Delta_a'' U,\\
\frac{dv}{dt}&=-\frac{\partial\pi}{\partial y}-2\omega_z(u-U)+\frac{DV}{Dt}+\Delta_a v+\Delta_a'' V,\\
\frac{dw}{dt}&=-\frac{\partial\pi}{\partial z}+\lambda\cdot\vartheta+\Delta_a w;
\end{aligned}\right\} \tag{6.6.23}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\sigma w; \tag{6.6.24}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt}+Sw=\Delta'_a\vartheta+\Delta_a''\Theta+(U-u)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+(V-v)\frac{\partial\Theta}{\partial y}; \tag{6.6.25}$$

$$\frac{dq}{dt}+w\frac{\partial Q}{\partial z}=\Delta_a' q+\Delta_a'' Q+(U-u)\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}+(V-v)\frac{\partial Q}{\partial y}; \tag{6.6.26}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{T'}{T}&=\frac{\vartheta'}{\Theta}+\frac{\pi'}{\Pi},\\
\frac{p'}{P}&=\frac{c_p\cdot\pi'}{AR\cdot\Pi},\\
\frac{\rho'}{\mathrm{P}}&=\frac{p'}{P}-\frac{T'}{T},
\end{aligned}\right\} \tag{6.6.27}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma=\frac{g-R\gamma}{R\cdot\Theta_0}=\text{const},\\
&S=\frac{\partial\Theta}{\partial z}=\frac{\Theta}{T}(\gamma_a-\gamma),\quad \gamma=-\frac{\partial T}{\partial z},\\
&\lambda=\frac{g}{\Theta}=\text{const}-\text{параметр плавучести},\\
&\Delta''_a=\frac{\partial}{\partial x}(k_l-N_l)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}(k_l-N_l)\frac{\partial}{\partial y}+\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial z}(k-N)\frac{\partial}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \tag{6.6.28}$$

Так как наблюдения показывают, что бризы распространяются на расстояние 10—100 *км* по горизонтали и 1—2 *км* по вертикали, то для построения теории бризов можно воспользоваться упрощенной системой уравнений. Из-за небольшой высоты процесса пренебрегаем падением плотности с высотой ($\sigma=0$) в уравнении (6.6.24); вместо третьего уравнения движения используем уравнение статики; не будем учитывать боковой турбулентный обмен; предположим, что в невозмущенном состоянии атмосфера находилась в состоянии покоя ($U=V=0$); не будем учитывать силу Кориолиса; введем понятие среднего коэффициента турбулентности $k=\text{const}$. Если учесть сделанные допущения и направить ось y вдоль берега, а ось x по нормали к нему (начало координат на поверхности земли), тогда система уравнений примет следующий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial\pi}{\partial x}+k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \tag{6.6.29}$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}+u\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+w\frac{\partial\vartheta}{\partial z}-Sw=k\alpha_{\text{т}}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}; \tag{6.6.30}$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial z}=\lambda\vartheta; \tag{6.6.31}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{6.6.32}$$

Приступим к формулировке пограничных и начальных условий: при $z=0$

$$u=w=0. \tag{6.6.33}$$

Как и в задаче о трансформации, на поверхности земли нужно было бы записать уравнение теплового баланса, однако для упрощения задачи будем считать, что температура поверхности меняется линейно по горизонтали и периодически по времени

$$\begin{matrix} z=0 \\ t>0 \end{matrix} \quad \vartheta=(a_0+xa_1)\sin\omega t, \tag{6.6.34}$$

где a_0 и a_1 — заданные константы. За a_1 будем принимать максимальную разность температуры суши и моря, деленную на характерную длину явления. Очевидно, что условие (6.6.34) правдоподобно только в достаточно малой области вблизи берега (вероятно, в нескольких километрах на обе стороны от берега).

Так как влияние подстилающей поверхности будет затухать с высотой, то при $z=\infty$

$$u=\vartheta=\pi=0. \tag{6.6.35}$$

Вследствие локального характера явления при $x=\pm\infty$

$$u=\vartheta=\pi=0. \tag{6.6.36}$$

Поскольку нас будет интересовать периодическое решение задачи, то начальные условия не нужны.

С учетом (6.6.34) будем искать решение системы (6.6.29) — (6.6.32) в виде разложений в ряд:

$$\left.\begin{aligned} &u=u(z, t), \\ &\vartheta=\vartheta_0(z, t)+x\vartheta_1(z, t), \\ &\pi=\pi_0(z, t)+x\pi_1(z, t). \end{aligned}\right\} \tag{6.6.37}$$

Это решение будет иметь физический смысл только для небольших x, поэтому не будем учитывать граничные условия по x.

На основании (6.6.32), (6.6.37) и (6.6.33)

$$w\equiv 0. \tag{6.6.38}$$

Подставив (6.6.37) — (6.6.38) в (6.6.29) — (6.6.32), получим систему, в которой переменные не зависят от x

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}=-\pi_1+k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ &\frac{\partial\vartheta_0}{\partial t}+u\vartheta_1=k\alpha_т\cdot\frac{\partial^2\vartheta_0}{\partial z^2}, \\ &\frac{\partial\vartheta_1}{\partial t}=k\cdot\alpha_т\cdot\frac{\partial^2\vartheta_1}{\partial z^2}, \\ &\frac{\partial\pi_0}{\partial z}=\lambda\cdot\vartheta_0, \\ &\frac{\partial\pi_1}{\partial z}=\lambda\vartheta_1 \end{aligned}\right\} \tag{6.6.39}$$

и которую нужно решать при следующих граничных условиях:

$$z=0,\ u=0,\ \vartheta_1=a_1\sin\omega t;\ \vartheta_0=a_0\sin\omega t; \tag{6.6.40}$$

$$z=\infty\ u=\vartheta_0=\vartheta_1=\pi_0=\pi_1=0. \tag{6.6.41}$$

Перейдем к безразмерным переменным (обозначим их индексом n) на основании следующих соотношений:

$$\left.\begin{aligned}
&z=\sqrt{\frac{2k}{\omega}}\cdot z_n,\quad t=\frac{t_n}{\omega},\ \vartheta_1=a_1\vartheta_{1n},\\
&u=\frac{\lambda\cdot a_1}{\omega}\sqrt{\frac{2k}{\omega}}\cdot u_n,\ \pi_1=\lambda a_1\cdot\sqrt{\frac{2k}{\omega}}\,\pi_{1n},\\
&\vartheta_0=\frac{\lambda a_1^2}{\omega^2}\sqrt{\frac{2k}{\omega}}\cdot\vartheta_{0n},\ \pi_0=\frac{2k}{\omega}\left(\frac{a_1\lambda}{\omega}\right)^2\cdot\pi_{0n},\\
&a_0=\frac{a_1^2\lambda}{\omega^2}\sqrt{\frac{2k}{\omega}}\,a_{0n}.
\end{aligned}\right\} \tag{6.6.42}$$

В таком случае уравнения (6.6.33) примут вид (опустим значки n):

$$\frac{\partial\vartheta_1}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\vartheta_1}{\partial z^2}; \tag{6.6.43}$$

$$\frac{\partial\pi_1}{\partial z}=\vartheta_1; \tag{6.6.44}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\pi_1+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \tag{6.6.45}$$

$$\frac{\partial\vartheta_0}{\partial t}+u\vartheta_1=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\vartheta_0}{\partial z^2}; \tag{6.6.46}$$

$$\frac{\partial\pi_0}{\partial z}=\vartheta_0. \tag{6.6.47}$$

Граничные условия запишутся так:

$$z=0,\quad \vartheta_1=\sin t,\quad \vartheta_0=a_0\cdot\sin t,\quad u=0; \tag{6.6.48}$$

$$z=\infty,\ u=\vartheta_0=\vartheta_1=\pi_0=\pi_1=0. \tag{6.6.41}$$

Система уравнений (6.6.43) — (6.6.47) отражает, хотя и грубо, цепь взаимосвязей между физическими факторами в механизме бриза. Уравнение (6.6.43) показывает, что горизонтальный градиент температуры возникает в атмосфере за счет нагревания воздуха от подстилающей поверхности. Из (6.6.44) видно, что горизонтальные градиенты температуры приводят к появлению в атмосфере горизонтального градиента давления, который (см. (6.6.45)) вызывает возникновение ветра. Наконец, (6.6.46) показывает обратное влияние ветра на поле температуры.

Решим систему (6.6.43) — (6.6.47) при граничных условиях (6.6.41) и (6.6.48). Для решения (6.6.43) перепишем граничное условие при $z=0$ для ϑ_1

$$\vartheta_1 = ie^{-it} = i(\cos t - i\sin t) = i\cos t + \sin t. \tag{6.6.49}$$

Вследствие линейности уравнения действительная и мнимая часть полученного комплексного решения должны каждая в отдельности удовлетворять уравнению. Если это решение удовлетворяет условию (6.6.49), то действительная часть удовлетворяет (6.6.48), а мнимая $\vartheta_1 = \cos t$.

Будем искать решение в виде

$$\vartheta_1 = ie^{\alpha z + \beta t}, \tag{6.6.50}$$

где α и β — неизвестные постоянные. Подставив (6.6.50) в (6.6.43) и (6.6.49), определим α и β

$$\alpha^2 = 2\beta; \quad \beta = -i,$$

откуда

$$\alpha = \pm\sqrt{-2i} = \pm(1-i).$$

В таком случае (6.6.50) примет вид

$$\vartheta_1 = ie^{\pm(1-i)z} \cdot e^{-it} = ie^{\pm z} \cdot e^{-i(\pm z + t)} = ie^{\pm z}[\cos(\pm z + t) -$$
$$- i\sin(\pm z + t)] = e^{\pm z}[i\cos(\pm z + t) + \sin(\pm z + t)].$$

Полученное решение удовлетворяет (6.6.41) только при выборе знака минус. Выделим из него действительную часть, тогда окончательно

$$\vartheta_1 = e^{-z}\sin(t - z). \tag{6.6.51}$$

Теперь из (6.6.44) нетрудно определить π_1

$$\pi_1 = \int e^{-z}(\sin t \cdot \cos z - \cos t \cdot \sin z) \cdot dz + c = \sin t \times$$
$$\times \frac{e^{-z}}{2}(-\cos z + \sin z) + \cos t \frac{e^{-z}}{2}(\sin z + \cos z) + c =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-z}\cos\left(t - z + \frac{\pi}{4}\right) + c,$$

так как при $z=\infty$ $\pi_1=0$, то $c=0$ и

$$\pi_1=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-z}\cdot\cos\left(t-z+\frac{\pi}{4}\right). \qquad (6.6.52)$$

Подставим (6.6.52) в (6.6.45); тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{-z}\cdot\cos\left(t-z+\frac{\pi}{4}\right). \qquad (6.6.53)$$

Будем искать решение в виде

$$u=M(z)\cos t+N(z)\sin t. \qquad (6.6.54)$$

Если подставить (6.6.54) в (6.6.53) и приравнять коэффициенты при $\cos t$ и $\sin t$, то для определения $M(z)$ и $N(z)$ получим следующую систему уравнений:

$$-M-\frac{1}{2}N''=+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{-z}\sin\left(\frac{\pi}{4}-z\right);$$

$$N-\frac{1}{2}M''=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{-z}\cos\left(\frac{\pi}{4}-z\right).$$

Умножим первое на i и сложим со вторым, обозначив $W=M+iN$,

$$W''+2iW=\sqrt{2}\,e^{-z}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-z\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}-z\right)\right]. \qquad (6.6.55)$$

Решим сперва однородное уравнение $W''+2iW=0$, которому соответствует характеристическое уравнение $s^2+2i=0$ с корнями $s=\pm\sqrt{-2i}=\pm(1-i)$. В таком случае решение однородного уравнения запишется следующим образом:

$$W_0=c_1\cdot e^{(1-i)z}+c_2\cdot e^{-(1-i)z}. \qquad (6.6.56)$$

Частное решение неоднородного уравнения (6.6.55) следует искать в виде

$$W_1=ze^{-z}(A\cos z+B\sin z), \qquad (6.6.57)$$

так как $a+ib=-(1-i)$ является однократным корнем характеристического уравнения; a — показатель степени у экспоненты; b — коэффициент при аргументе sin и cos.

Подставив (6.6.57) в (6.6.55) и приравняв коэффициенты при $z \sin z$, $z \cos z$, $\sin z$ и $\cos z$, получим систему уравнений для определения A и B

$$2A+2iB=0; \quad -2(A+B)=1+i;$$
$$-2B+2iA=0; \quad 2(B-A)=1-i.$$

Из этой системы независимыми являются только два уравнения

$$A+B=\frac{1+i}{2} \text{ и } B-A=\frac{1-i}{2},$$

откуда находим

$$A=-\frac{1}{2}; \quad B=-\frac{i}{2}$$

и тогда

$$W_1=-z \cdot e^{-z}\frac{1}{2}(\cos z+i \sin z).$$

Общее решение уравнения (6.6.55) можно представить в виде суммы W_0 и W_1

$$W=c_1 \cdot e^{(1-i)z}+c_2 e^{-(1-i)z}-z \cdot e^{-z} \cdot \frac{1}{2}(\cos z+i \sin z).$$

Для определения c_1 и c_2 используем граничные условия (6.6.41) и (6.6.48) и выражение (6.6.54):

при $z=0 \quad 0=M(0)\cos t+N(0)\sin t;$

при $z=\infty \quad 0=M(\infty)\cos t+N(\infty)\sin t,$

откуда следует, что $M(0)=N(0)=M(\infty)=N(\infty)=0$ и

при $z=0$ $W=0$, $c_1+c_2=0;$

при $z=\infty$ $W=0$, $c_1=0;$

$$c_1=-c_2=0.$$

Таким образом,

$$W=M+iN=-\frac{1}{2}z \cdot e^{-z}(\cos z+i \sin z).$$

Разделив действительную и мнимую часть уравнения, найдем, что

$$M(z)=-\frac{1}{2}z \cdot e^{-z} \cdot \cos z;$$

$$N(z) = -\frac{1}{2} z \cdot e^{-z} \cdot \sin z.$$

С учетом выражений для $M(z)$ и $N(z)$ общее решение (6.6.54) будет иметь следующий вид:

$$u = -\frac{1}{2} z \cdot e^{-z} \cos(t - z). \qquad (6.6.58)$$

Аналогично предыдущему можно решить и уравнения (6.6.46) и (6.6.47), однако, поскольку решения этих уравнений получаются громоздкими, они не приводятся здесь. Ограничимся тем, что выпишем эти решения в готовом виде:

$$\vartheta_0 = a_0 \cdot e^{-z} \cdot \sin(t - z) + \frac{z}{4\sqrt{2}} e^{-z} \cdot \cos 2(t - z) +$$

$$+ \frac{1}{4} e^{-2z} \cos 2\left(t - z - \frac{\pi}{8}\right) - \frac{1}{4} \cdot e^{-z\sqrt{2}} \times$$

$$\times \cos 2\left(t - \frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right); \qquad (6.6.59)$$

$$\pi_0 \Big|_{z=0} = a_0 \cdot \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + 0{,}02 \sin 2t. \qquad (6.6.60)$$

Полученные решения показывают, что структура бриза напоминает ветровые и температурные затухающие с высотой прогрессивные волны.

Если определять момент появления ветра у земли при возникновении бриза из условия

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0,$$

то оказывается, что запаздывание бриза по сравнению с ходом температуры почвы равно 6 часам (наблюдения показывают запаздывание 2—5 часов). Очевидно, что причиной запаздывания является инерция движущегося воздуха.

VII. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ЧИСЛЕННОГО ПРОГНОЗА ПОГОДЫ

В последние годы все большее развитие получают численные методы прогноза погоды, позволяющие давать прогноз на основании численного интегрирования системы уравнений гидротермодинамики.

Начало численным прогнозам было положено Ричардсоном в двадцатых годах нашего века. Однако в то время еще недостаточно были изучены физические закономерности атмосферных процессов, не было быстродействующих вычислительных машин и задача оказалась практически невыполнимой.

В 1940 г. И. А. Кибель впервые предложил метод прогноза погоды на основании решения уравнений гидротермодинамики, который был реализован на практике. Идеи упрощений, предложенные И. А. Кибелем, были в дальнейшем использованы в численных методах прогноза.

В настоящее время разработаны и используются на практике методы численного прогноза метеорологических полей в свободной атмосфере. Опытная проверка показала, что оправдываемость этих методов выше, чем обычных синоптических.

§ 1. Общая постановка задачи численного прогноза

Рассмотрим основные принципы, на которых базируется численный прогноз погоды.

В свободной атмосфере можно пренебречь силой трения и, при прогнозе на короткий срок, притоками тепла извне. Основные уравнения в этом случае можно записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + lv, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - lu, \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{ART}{c_p p}\frac{dp}{dt}, \end{aligned}\right\} \qquad (7.1.1)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\rho}{dt}+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,\\&\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g,\\&p=\rho RT,\end{aligned}\right\} \qquad (7.1.1)$$

где $l=2\omega_z$.

Таким образом, для определения неизвестных u, v, w, T, ρ, p имеем замкнутую систему из шести уравнений.

Нетрудно заметить, что в уравнениях движения частные производные, определение которых является главной целью решения, входят как малая разность больших величин, так как ветер близок к геострофическому. Поэтому прямое использование этих уравнений для прогноза связано со значительными погрешностями. Исходя из этого, систему (7.1.1) надо преобразовать (считая, что ветер близок к геострофическому, а влияние сжимаемости пренебрежимо мало) следующим образом:

$$\frac{\partial\Omega_a}{\partial t}+u\frac{\partial\Omega_a}{\partial x}+v\frac{\partial\Omega_a}{\partial y}=-lD; \qquad (7.1.2)$$

$$u=-\frac{1}{l}\frac{\partial\Phi}{\partial y}; \qquad (7.1.3)$$

$$v=\frac{1}{l}\frac{\partial\Phi}{\partial x}; \qquad (7.1.4)$$

$$D+\frac{\partial w}{\partial z}=0; \qquad (7.1.5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w(\gamma_a-\gamma)=0; \qquad (7.1.6)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=g; \qquad (7.1.7)$$

$$\Omega_z=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{l}\nabla^2\Phi. \qquad (7.1.8)$$

Здесь $\Omega_a=\Omega_z+l$ — абсолютный вихрь; Φ — абсолютный геопотенциал; $D=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}$ — плоская дивергенция скорости.

В системе добавилось одно уравнение за счет появления новой неизвестной Ω_z — проекции вихря скорости на ось z.

Вихрь скорости Ω — это некая кинематическая характеристика поля скорости, отражающая угловую скорость вращения частицы в заданной точке.

В метеорологии, говоря о вихре скорости, обычно подразумевают завихренность скорости ветра (т. е. только горизонтальный компонент вектора скорости). Она характеризует вращение частицы вокруг вертикальной оси, обозначается Ω_z и связана с составляющими скорости ветра соотношением

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad (7.1.9)$$

Ω_z имеет положительный знак при движении против часовой стрелки, т. е. в циклонических областях, и отрицательный — в антициклонических.

Действительно, согласно рис. 56, в области низкого давления

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v_1 - v_3}{2r} > 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_2 - u_4}{2r} < 0$$

и, следовательно, $\Omega_z > 0$.

В свободной атмосфере, где выполняются соотношения (7.1.3), (7.1.4), с достаточной точностью можно принять

$$\Omega_z = \frac{1}{l}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{l}\nabla^2 \Phi.$$

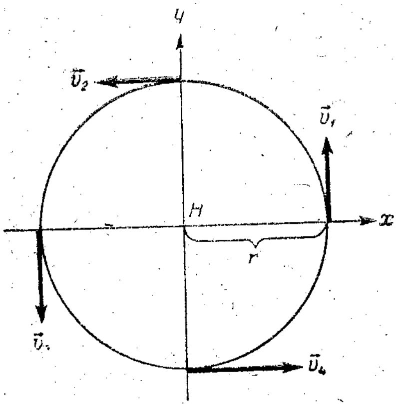

Рис. 56. Распределение ветра в области низкого давления

Таким образом, поле вихря однозначно связано с полем геопотенциала (или давления).

Уравнение (7.1.2) для эволюции Ω_z называют уравнением вихря. Впервые оно было получено и проанализировано А. А. Фридманом и в настоящее время является основным прогностическим уравнением.

Согласно равенства (7.1.9), уравнение вихря может быть получено из уравнений движения, если первое из них дифференцировать по y, а второе — по x и вычесть из второго первое. Тогда после несложных преобразований получается

$$\frac{\partial\Omega_z}{\partial t}+u\frac{\partial\Omega_z}{\partial x}+v\frac{\partial\Omega_z}{\partial y}+\Omega_z\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right)-$$

$$-l\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-u\frac{\partial l}{\partial x}-v\frac{\partial l}{\partial y}.$$

Поскольку $l=2\omega\sin\varphi$ можно считать величиной постоянной во времени, это уравнение можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial\Omega_a}{\partial t}+u\frac{\partial\Omega_a}{\partial x}+v\frac{\partial\Omega_a}{\partial y}=-(\Omega_z+l)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+$$

$$+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right).$$

Величина $\Omega_a=\Omega_z+l$, называемая абсолютным вихрем, представляет вращение частиц воздуха относительно неподвижной системы координат, не связанной с землей. Эмпирические данные показывают, что Ω_z в несколько десятков раз меньше l, но производные от Ω_z, как правило, значительно больше производных от l (так, если ось x направлена по широте, то $dl/dx=0$ и, как уже говорилось, $\partial l/\partial t=0$). Поэтому последнее уравнение может быть записано

$$\frac{d\Omega_a}{dt}=-l\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right). \quad (7.1.10)$$

Последнее слагаемое в равенстве (7.1.10) можно переписать, используя геострофические соотношения $u=-\frac{1}{\rho l}\frac{\partial p}{\partial y}$, $v=\frac{1}{\rho l}\times$ $\times\frac{\partial p}{\partial x}$, следующим образом:

$$\frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\right)=-\frac{l}{\rho}\left(u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}\right).$$

Как показывает выполненное преобразование, это слагаемое представляет собой (с точностью до коэффициента l/ρ) адвекцию плотности. Из опытных данных следует, что оно значительно меньше первого слагаемого правой части равенства (7.1.10).

Таким образом, можно сказать, что изменение вихря в свободной атмосфере определяется плоской дивергенцией, и записать уравнение вихря в том виде, как это было сделано выше, т. е.

$$\frac{d\Omega_a}{dt}=-l\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-lD.$$

так как $\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial^2 F}{\partial\vartheta^2}d\vartheta=\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\Big|_0^{2\pi}=0$ ($\vartheta=0$ и $\vartheta=2\pi$ соответствуют одной точке).

Оставшиеся в уравнении интегралы можно заменить средним значением подынтегральной функции, т. е.

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} F d\vartheta=\overline{F};\qquad \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} lA_\Omega d\vartheta=\overline{lA_\Omega}.$$

Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2\overline{F}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\overline{F}}{\partial r}=\overline{lA_\Omega}$$

и может быть переписано в полных производных ,

$$\frac{d^2\overline{F}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\overline{F}}{dr}-\overline{lA_\Omega}=0. \qquad (7.2.3)$$

Это линейное неоднородное уравнение второго порядка. Для его решения требуется два граничных условия.

Первое условие запишем на основании заданного значения $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ на $r=R$, а именно

$$\overline{F}(r)\Big|_{r=R}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big|_{r=R}d\vartheta.$$

Нетрудно понять, что $\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big|_{r=R}$ при разных значениях ϑ будет иметь разные знаки и при достаточно большом R значение интеграла будет близко к нулю, а потому можно принять

$$\overline{F}(r)\Big|_{r=R}=0. \qquad (7.2.4)$$

По физическому смыслу $\overline{F}(r)$ не может быть бесконечностью. Это свойство и используем в качестве второго граничного условия, а именно примем, что

$$\overline{F}(r)\Big|_{r=0}=F(0)\neq\infty. \qquad (7.2.5)$$

Таким образом, оба граничных условия сформулированы.

Для того, чтобы получить решение уравнения (7.2.3), найдем сначала общее решение соответствующего ему однородного уравнения

$$\frac{d^2\overline{F}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{d\overline{F}}{dr}=0. \tag{7.2.6}$$

Обозначим $\frac{d\overline{F}}{dr}=S$. Тогда уравнение (7.2.6) можно записать

$$\frac{dS}{S}+\frac{dr}{r}=0,$$

Откуда $\ln S=-\ln r+\ln c_1$ ($\ln c_1$ — постоянная интегрирования) или $S=\frac{d\overline{F}}{dr}=\frac{c_1}{r}$

Разделяя снова переменные, получаем

$$\overline{F}=c_1\ln r+c_2, \tag{7.2.7}$$

где c_2 — постоянная интегрирования.

Будем теперь считать, что это решение удовлетворяет и уравнению (7.2.3) при условии, что коэффициенты c_1 и c_2 являются функциями радиуса r (т. е. применим метод вариации произвольных постоянных).

Найдем соответствующие производные от $\overline{F}$

$$\frac{d\overline{F}}{\partial r}=\frac{dc_1}{dr}\ln r+c_1\frac{d\ln r}{dr}+\frac{dc_2}{dr}.$$

Выберем c_1 и c_2 таким образом, чтобы

$$\frac{dc_1}{dr}\ln r+\frac{dc_2}{dr}=0. \tag{7.2.8}$$

Тогда

$$\frac{d\overline{F}}{dr}=c_1\frac{d\ln r}{dr};$$

$$\frac{d^2\overline{F}}{dr^2}=-\frac{c_1}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{dc_1}{dr}.$$

Подставим полученные выражения в (7.2.3)

$$\frac{1}{r}\frac{dc_1}{dr}-\frac{c_1}{r^2}+\frac{c_1}{r^2}=l\overline{A}_2$$

или

$$\frac{dc_1}{dr}=rl\overline{A}_2;$$

откуда

$$c_1 = \int_0^r \rho l \overline{A}_\Omega \, d\rho + c_3.$$

Из уравнения (7.2.8) нетрудно получитв, что

$$c_2 = -\int_0^r l\overline{A}_\Omega \rho \ln \rho \, d\rho + c_4.$$

В последних равенствах c_3 и c_4 — постоянные интегрирования, которые могут быть определены на основании граничных условий.

Подставим c_1 и c_2 в (7.2.7)

$$\overline{F} = \ln r \left[\int_0^r l\overline{A}_\Omega \rho \, d\rho + c_3 \right] - \int_0^r l\overline{A}_\Omega \rho \ln \rho d\rho + c_4,$$

Чтобы удовлетворялось условие (7.2.5), очевидно, должно быть $c_3 = 0$.

Из условия (7.2.4) вытекает, что

$$c_4 = -\int_0^R l\overline{A}_\Omega \rho \ln \frac{R}{\rho} \, d\rho.$$

Таким образом, окончательно

$$\overline{F} = \ln r \int_0^r l\overline{A}_\Omega \rho d\rho - \int_0^r l\overline{A}_\Omega \rho \ln \rho d\rho - \int_0^R l\overline{A}_\Omega \rho \ln \frac{R}{\rho} \, d\rho$$

или

$$\overline{F} = \int_0^r l\overline{A}_\Omega \rho \ln \frac{r}{\rho} \, d\rho - \int_0^R l\overline{A}_\Omega \rho \ln \frac{R}{\rho} \, d\rho.$$

Величина $\overline{F}(r)$ есть среднее значение $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ по области, ограниченной окружностью радиуса r. Чтобы перейти к интересующему нас значению $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ в фиксированной точке, расположенной в центре этой окружности, воспользуемся снова условием (7.2.5)

$$F(r) \Big|_{r=0} = F(0) = -\int_0^R l\overline{A}_\Omega \rho \ln \frac{R}{\rho} \, d\rho$$

или

$$F(r)\Big|_{r=0} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \int_0^{2\pi}\int_0^R lA_\Omega \rho G d\rho\, d\vartheta,$$

где $G = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho}$.

Функция G называется функцией влияния. Она определяет, с каким весом влияет адвекция вихря в точках, расположенных на расстоянии ρ от центра, на изменение давления в центре. Чем дальше от центра расположены точки, тем ближе значение ρ к величине R, а следовательно, тем меньше значение G, т. е. тем меньший вклад дают эти точки в изменение Φ. Функция G всегда отрицательна, что указывает на понижение давления при положительной (циклонической адвекции вихря и повышение его при отрицательной (антициклонической) адвекции.

§ 3. О прогнозе на любом уровне

Как уже отмечалось, полученное решение справедливо только для среднего уровня и может быть использовано лишь для прогноза на уровне 500-миллибаровой поверхности. На всех других уровнях в уравнении вихря сохраняется член с дивергенцией.

Формула, полученная Н. И. Булеевым и Г. И. Марчуком, для этого случая имеет вид

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \int_0^1\int_{-\infty}^{\infty}\int A_\Omega G_1\, dx_1\, dy_1\, d\zeta + \int_0^1\int_{-\infty}^{\infty}\int A_T G_2\, dx_1\, dy_1\, d\zeta.$$

Здесь первое слагаемое аналогично тому, что получается для $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ на среднем уровне, т. е. оно учитывает влияние адвекции вихря во всем объеме, окружающем данную точку. Второе слагаемое указывает на влияние адвекции температуры на величину $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$. Функции G_1 и G_2 — функции влияния, зависящие от координат точек, которые дают вклад в изменение Φ.

В настоящее время численные прогнозы интенсивно развиваются. В частности, ведутся исследования по учету притоков тепла и турбулентности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобылева И. М. Расчет характеристик турбулентности в планетарном пограничном слое атмосферы. Тр. ЛГМИ, вып. 40, 1970.
2. Бобылева И. М., Зилитинкевич С. С., Лайхтман Д. Л. Турбулентный режим в термически стратифицированном планетарном пограничном слое атмосферы. Международный коллоквиум по микроструктуре атмосферы и влиянию турбулентности на распространение радиоволн. М., изд-во «Наука», 1965.
3. Гандин Л. С., Лайхтман Д. Л., Матвеев Л. Т., Юдин М. И. Основы динамической метеорологии. Л., Гидрометеоиздат, 1955.
4. Гандин Л. С. Введение в расчетные методы прогноза погоды, ч. I. Л., 1960.
5. Гандин Л. С., Дубов А. С. Численные методы краткосрочного прогноза погоды. Л., Гидрометеоиздат, 1968.
6. Гутман Л. Н. Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов. Л., Гидрометеоиздат, 1969.
7. Зилитинкевич С. С. Динамика пограничного слоя атмосферы. Л., Гидрометеоиздат, 1970.
8. Казанский А. Б., Монин А. С. Турбулентность в приземных инверсиях. Изв. АН СССР, сер. геофизическая, № 1, 1956.
9. Казанский А. Б., Монин А. С. О турбулентном режиме в приземном слое воздуха при неустойчивой стратификации. Изв. АН СССР, сер. геофизическая, № 6, 1958.
10. Китайгородский С. А. Физика взаимодействия атмосферы и океана. Л., Гидрометеоиздат, 1970.
11. Лайхтман Д. Л. Физика пограничного слоя атмосферы. Л., Гидрометеоиздат, 1970.
12. Монин А. С., Обухов А. М. Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы. Тр. Геофизического института АН СССР, № 24 (151), 1954.
13. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. I. М., изд-во «Наука», 1965.
14. Ролль Г. У. Физика атмосферных процессов над морем. Перевод с английского. Л., Гидрометеоиздат, 1968.
15. Старр В. Физика явлений с отрицательной вязкостью. М., изд-во «Мир», 1971.
16. Сб. «Море». Развитие идей и наблюдений, связанных с изучением морей. Перевод с английского. Л., Гидрометеоиздат, 1965.

Ленинградский
Гидрометеорологический ин-т
БИБЛИОТЕКА
Л-д 195196 Малоохтинский пр., 98

СОДЕРЖАНИЕ

I. Введение 4
§ 1. Предмет и задачи динамической метеорологии 5
§ 2. Связь процессов в атмосфере и гидросфере 5
II. Основы динамики атмосферы 7
§ 1. Основные уравнения динамики атмосферы 7
§ 2. Силы, действующие в атмосфере 16
§ 3. Понятие об атмосферной турбулентности. Выражения для турбулентных потоков тепла, влаги и количества движения 23
§ 4. Факторы, определяющие интенсивность турбулентности. Уравнение баланса энергии турбулентности 27
§ 5. Некоторые вопросы статики атмосферы (уравнение статики, барометрические формулы, понятие о геопотенциале, условия вертикальной устойчивости) 35
§ 6. Упрощение уравнений движения. Классификация атмосферных движений 42
III. Основы динамики свободной атмосферы . . . .
§ 1. Движение без трения. Геострофический и градиентный ветер . . 48
§ 2. Изменение геострофического ветра с высотой. Термический ветер . 53
§ 3. Геострофическая адвекция 58
IV. Пограничный слой атмосферы.
§ 1. Формулировка задачи о строении пограничного слоя атмосферы . 61
§ 2. Распределение с высотой ветра и температуры 65
§ 3. Определение характеристик турбулентности 69
§ 4. Нелинейная модель пограничного слоя атмосферы 74
V. Приземный слой атмосферы
§ 1. Формулировка задачи о строении приземного слоя 80
§ 2. Замыкание системы уравнений для приземного слоя атмосферы на основании теории подобия 84
§ 3. Частные выражения для профилей коэффициента турбулентности и метеорологических элементов 86
§ 4. Обобщенный степенной закон распределения метеорологических элементов с высотой 95
§ 5. Нелинейная модель приземного слоя атмосферы 98
§ 6. Определение турбулентных потоков на основании градиентных или стандартных измерений 101
VI. Процессы вблизи поверхности раздела воздух—вода
§ 1. Постановка задачи о динамическом взаимодействии пограничных слоев океана и атмосферы 107
§ 2. Ветровые течения 112
§ 3. Дрейф ледяных полей 115
§ 4. Трансформация воздушных масс под влиянием подстилающей поверхности 121
§ 5. Трансформация динамических характеристик воздушного потока при изменении шероховатости подстилающей поверхности . . . 132
§ 6. Бризы, муссоны 142

VII. Основные принципы численного прогноза погоды.
§ 1. Общая постановка задачи численного прогноза 158
§ 2. Прогноз давления на среднем уровне 162
§ 3. О прогнозе на любом уровне 167
Литература . . . .

Мельникова Ия Илларионовна
Радикевич Виталий Михайлович

ДИНАМИЧЕСКАЯ МЕТЕОРОЛОГИЯ
(учебное пособие для океанологов)

Редактор *Ю. П. Андрейков*

М-06074. Подп. к печ. 20/II. 1974 г.
Зак. 3. Тир. 500. Цена 78 коп. Объем $10^5/_8$ п. л. + 1 вкл.

Тип. ВВМУПП им. Ленинского комсомола