Министерство образования Российской Федерации
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Учебное пособие для лабораторного практикума по общей физике

Под редакцией С.А. Фокина

РГГМУ
Санкт-Петербург
2003

УДК 53.088

Обработка результатов измерений физических величин: Учебное пособие для лабораторного практикума по общей физике. 3-е изд. Перераб. – СПб.: Изд. РГГМУ, 2003 – 62 с.

Авторы: С.А. Фокин, А.М. Бармасова, М.А. Мамаев.

Рецензенты: проф. К.Г. Иванов, СПбГУТД,
доц. К.А. Меликов, РГПУ им. А.И. Герцена

Подробно разъясняются основные положения теории погрешностей. Рассмотрены методы обработки и анализа результатов измерений, а также представления и анализа графического материала. Рекомендуются формы проведения экспериментов в учебных физических лабораториях. Приведены многочисленные конкретные примеры и задачи для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям "Гидрометеорология", "Физика", "Экология и природопользование".

Утверждено Редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия по общей физике

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие является введением в теорию погрешностей и предназначено для использования при обработке и анализе результатов физических экспериментов, с которыми студенты знакомятся в учебных лабораториях.

В разделе 1 учебного пособия вводятся основные понятия теории погрешностей, приводятся правила вычислений и записи окончательного результата измерений. В разделе 2 содержатся правила использования математической статистики для обработки данных прямых многократных измерений, а также необходимые сведения о приборах, используемых при выполнении лабораторных работ в учебной физической лаборатории. В разделе 3 разъясняются правила расчета погрешностей косвенных измерений. Раздел 4 посвящен способам графического изображения и анализа результатов измерений.

При составлении учебного пособия были использованы "Методические указания по обработке результатов измерений", подготовленные на кафедре физики Ленинградского гидрометеорологического института С.Н. Хворостовским и опубликованные в 1986 г.

1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ПОГРЕШНОСТЕЙ

1.1. Прямые и косвенные измерения. Виды погрешностей

В основе физики и ее приложений лежат экспериментальные результаты. Основная цель всякого физического эксперимента состоит в измерении физических величин, характеризующих исследуемый объект или явление. *Под измерением понимается сравнение физической величины опытным путем с помощью измерительных приборов с выбранной единицей измерения.* В результате каждого отдельного измерения (оно называется *наблюдением*) получают численное значение измеряемой величины.

По способу получения результата все измерения делятся на прямые и косвенные.

В прямых измерениях значение физической величины находят непосредственно отсчетом по шкале прибора. Таковы измерения длины линейкой или штангенциркулем, силы тока – амперметром, времени – секундомером, давления – барометром и т.д.

Часто прямое измерение физической величины оказывается слишком трудоемким или невозможным. Тогда определяемую величину вычисляют по известной из теории формуле, в которую подставляют результаты прямых измерений. Такой метод измерения называется *косвенным*.

Например, для определения плотности ρ твердого тела достаточно путем прямых измерений определить его массу m и объем V, а затем рассчитать плотность по формуле $\rho = \frac{m}{V}$. Методов прямого измерения этой величины нет.

Опыт показывает, что всякому измерению сопутствует неизбежная погрешность, поскольку источники ошибок присущи самому процессу измерения. Поэтому процесс измерения должен завершаться определением точности и достоверности найденного значения измеряемой величины.

По характеру, происхождению, а также по способам оценки и исключению влияния на результат измерения экспериментальные погрешности делят на *три* основные группы: случайные, систематические и грубые (промахи).

Случайные погрешности измерений обусловлены трудноучитываемыми помехами, влияющими как на измерительные приборы, так и на исследуемый физический объект или процесс. Исключить случайные погрешности отдельных измерений невозможно, но величину таких погрешностей можно оценить, если повторить измерение *несколько раз*. В этих случаях применяют методы математической статистики: вычисляют средние арифметические результатов измерений и средние квадратические их отклонений. Это позволяет уточнить результат измерений и получить оценку погрешности.

Систематические погрешности измерений связаны с ограниченной точностью прибора и метода измерений, а также округлением при считывании со шкалы. Когда причины, вызывающие эти погрешности, известны, их можно исключить, уточняя метод измерений и вводя поправки к показаниям приборов. Систематические погрешности *не уменьшаются* с увеличением числа измерений.

Грубые погрешности измерений обычно связаны с неправильным отсчетом по прибору, неправильной записью результата наблюдения и т.п. В большинстве случаев грубые погрешности хорошо заметны, так как, если измерения проделаны многократно, соответствующие им наблюдения резко отличаются от других.

Таким образом, проводя измерения в физической лаборатории, следует помнить, что:

- при измерении может быть получен лишь *приближенный* результат,
- всякое измерение, по возможности, должно быть повторено *несколько раз*.

1.2. Доверительная погрешность и доверительная вероятность

Выполнив несколько измерений физической величины x, получают группу различных результатов $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_n$. Каждый из них содержит некоторую ошибку. Точное значение измеряемой величины найти по этим данным невозможно. Поэтому при обработке результатов измерений в любом физическом эксперименте возникают две задачи. Первая состоит в нахождении по набору данных $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_n$ *наилучшей оценки* $x_{\text{наил}}$, которую с наибольшим основанием можно принять за приближенное значение x. Вторая – в определении *точности* полученного результата.

Результат измерения физической величины x представляют как

$$x = x_{наил} \pm \Delta x. \quad (1)$$

Это выражение означает следующее. С определенной степенью уверенности значение измеряемой величины x расположено в пределах установленного по наблюдениям интервала ($x_{наил} - \Delta x$; $x_{наил} + \Delta x$).

Величина Δx называется *абсолютной погрешностью* результата измерения x, всегда положительна и имеет *размерность* измеряемой физической величины.

Значения наилучшей оценки $x_{наил}$ и абсолютной погрешности Δx *вычисляют* по набору данных $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ методами, описанными в последующих разделах. Эти расчеты практически всегда дают лишь приближенные оценки, поскольку приходится ограничиваться имеющимся количеством наблюдений и использовать предположения о математических свойствах ошибок. Поэтому дополнительно определяют так называемую *доверительную вероятность* (*коэффициент доверия*) P, характеризующую степень надежности того, что точное значение измеренной величины x помещается внутри установленного по наблюдениям интервала между ($x_{наил} - \Delta x$) и ($x_{наил} + \Delta x$). Тогда величину Δx называют *доверительной абсолютной погрешностью*, а интервал ($x_{наил} - \Delta x$; $x_{наил} + \Delta x$) – *доверительным интервалом*.

Указание расположенного в пределах от 0 до 1 числового значения доверительной вероятности P означает следующее. Согласно проведенным наблюдениям можно ожидать, что в (P·100) % случаев результаты последующих однотипных измерений величины x, сделанных с той же тщательностью и теми же измерительными приборами, попадут внутрь найденного по наблюдениям доверительного интервала ($x_{наил} - \Delta x$; $x_{наил} + \Delta x$).

Очевидно, значения доверительной погрешности и доверительной вероятности связаны друг с другом: чем больше доверительная вероятность P, тем больше доверительная погрешность Δx. Это позволяет задавать значение доверительной вероятности и вычислять соответствующее ей значение доверительной погрешности.

Для определения доверительной погрешности Δx результата измерения доверительную вероятность P принимают равной 0,95.

В особых случаях (например, когда невозможно повторить наблюдения в неизменных условиях опыта или когда результаты измерений имеют значение для здоровья людей) допускается принимать доверительную вероятность Р = 0,99.

Пример 1. Представление результата измерения диаметра диска в виде

$$D = (125{,}3 \pm 0{,}2)\ \text{мм},\ P = 0{,}95;$$

означает, что наилучшая оценка $D_{\text{наил}} = 125{,}3$ мм, доверительная абсолютная погрешность $\Delta D = 0{,}2$ мм. Измеряемое значение D содержится в доверительном интервале от 125,1 до 125,5 мм, который отвечает доверительной вероятности Р = 0,95. Тем самым можно ожидать, что в 95 % случаев результаты любых последующих измерений D, выполненных тем же измерительным инструментом, попадут внутрь доверительного интервала от 125,1 до 125,5 мм.

Основные выводы сводятся к следующему.

- Всякий *результат измерения* физической величины x представляют в форме

  $$x = x_{\text{наил}} \pm \Delta x;\ P = 0{,}95;$$

  где $x_{\text{наил}}$ – наилучшая оценка измеряемой величины; Δx – *доверительная абсолютная погрешность*, отвечающая заданной доверительной вероятности Р.
- Доверительная вероятность Р характеризует степень надежности того, что значение измеряемой величины находится внутри найденного по наблюдениям *доверительного интервала* от $(x_{\text{наил}} - \Delta x)$ до $(x_{\text{наил}} + \Delta x)$.

Задачи.

1. Плотник представил результаты измерения высоты дверного проема в виде утверждения: наилучшая оценка высоты равна 210 см, и высота может составлять величину, лежащую между 205 и 215 см. Перепишите этот результат в стандартной форме (1).

2. Определите доверительную погрешность результата измерения периода колебаний маятника: Т = (1,9 ± 0,1) с.

3. Результат измерения серии из 20 наблюдений линейного размера L = (205 ± 1) мм, Р = 0,95. Оцените количество результатов наблюдений L, которые находятся в пределах доверительного интервала.

1.3 Относительная погрешность

Абсолютная погрешность Δx не полностью характеризует точность измерения. Например, погрешность в 1 см для расстояния 1 км означает необычайно точное измерение, а для расстояния в 3 см – лишь грубую оценку. Следовательно, точность измерения характеризуется не только самой погрешностью Δx, но и отношением Δx к $x_{\text{наил}}$:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x_{\text{наил}}|}.$$

Величина δx называется *относительной погрешностью.*

В большинстве измерений физических величин погрешность Δx намного меньше измеряемой величины $x_{наил}$. Поскольку при этом относительная погрешность δx представляет собой малое число, ее удобно умножать на 100 и приводить *в процентах*:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x_{\text{наил}}|} \cdot 100\ \%.$$

Следует обратить внимание на то, что:

- погрешность результата измерения можно представить в *двух равноправных* формах: *абсолютной* и *относительной*;
- *абсолютная* погрешность имеет ту же *размерность*, что и измеряемая величина;
- *относительная* погрешность – *безразмерная* или выраженная в процентах величина.

Пример 2. Результат измерения диаметра $D = (125{,}3 \pm 0{,}2)$ мм. Тогда абсолютная погрешность диаметра $\Delta D = 0{,}2$ мм, относительная – $\delta D = 0{,}2/125{,}3 \approx 1{,}6\cdot10^{-3}$, или 0,16 %.

Если относительная погрешность известна, то абсолютную погрешность можно вычислить по формуле

$$\Delta x = \delta x \cdot |x_{\text{наил}}|.$$

Пример 3. Относительная погрешность диаметра $\delta D = 1{,}6\cdot10^{-3}$ (см. пример 2), тогда абсолютная – $\Delta D = 125{,}3\cdot1{,}6\cdot10^{-3} \approx 0{,}2$ мм.

Относительная погрешность позволяет:

- сравнить *точность* результатов измерений однотипных физических величин;
- сравнить *точность* результатов измерений *разных* физических величин.

Чем меньше относительная погрешность измерения, тем точнее оно выполнено.

Пример 4. Измерены два расстояния, причем абсолютная погрешность первого измерения – 2 м, а второго – 0,1 мм. На вопрос, какое измерение выполнено точнее, можно ответить только, если известны наилучшие оценки этих величин. Тогда можно рассчитать относительные погрешности этих величин и сравнить их. Если

$$x_1 = (1836 \pm 2) \text{ м, а } x_2 = (9{,}3 \pm 0{,}1) \text{ мм, то}$$

$$\delta x_1 = \frac{2}{1836} \approx 10^{-3}, \text{ а } \delta x_2 = \frac{0{,}1}{9{,}3} \approx 10^{-2}.$$

т.е. измерение, где абсолютная погрешность составляет 2 м, выполнено с большей точностью.

Пример 5. Сила тока измерена с абсолютной погрешностью 0,01 А, а температура – с абсолютной погрешностью 0,1 К. Как и в предыдущем примере, для сравнения точности измерений недостаточно знать абсолютные погрешности и необходимо оценить относительные погрешности измерений. Если

$$I = (0{,}31 \pm 0{,}01) \text{ А, а } T = (307{,}4 \pm 0{,}1) \text{ К, то}$$

$$\delta I = \frac{0{,}01}{0{,}31} \approx 0{,}03, \text{ а } \delta T = \frac{0{,}1}{307{,}4} \approx 3 \cdot 10^{-4}.$$

Отсюда $\delta I > \delta T$ и, следовательно, измерения температуры проведены точнее.

Задачи.

1. Какова размерность абсолютной погрешности измерений температуры, силы тока, давления ?

2. Какова размерность относительной погрешности измерений коэффициента поверхностного натяжения воды, мощности электрического тока, работы выхода электрона из металла?

3. Какое из измерений выполнено точнее:

$$t_1 = (106{,}7 \pm 0{,}2) \text{ с},$$
$$t_2 = (15{,}6 \pm 0{,}4) \cdot 10^{-6} \text{ с?}$$

4. Какое из измерений выполнено точнее:

$$m = (145 \pm 1) \text{ г},$$
$$D = (23{,}6 \pm 0{,}2) \text{ мм?}$$

1.4. Правила вычислений. Округление погрешности и результата измерения

На практике значение доверительной погрешности Δx рассчитывается по ограниченному числу результатов отдельных измерений. Кроме того, используются правдоподобные предположения о характере распределения случайных и систематических ошибок измерения. Результат расчета погрешности всегда дает лишь ее приближенную оценку с точностью около 20 – 25 %.

При измерении, например, ускорения свободного падения g было бы абсурдным представлять результат

$$g = (9{,}82 \pm 0{,}02385)\ \text{м/с}^2.$$

Указание в записи погрешности четырех значащих цифр означает, что относительная погрешность этой величины меньше 0,05 %. Точность же, с которой может быть определена погрешность, составляет всего 20 – 25 %. Принципиально невозможно определить погрешность в измерении с точностью до четырех значащих цифр.

ПРАВИЛО ОКРУГЛЕНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ. **В учебной лаборатории значения абсолютных погрешностей окончательного результата измерения должны округляться до одной значащей цифры.**

Важное практическое следствие этого правила состоит в том, что многие расчеты погрешностей можно выполнить в уме, без помощи калькулятора или даже карандаша и бумаги.

Пример 6. Если некоторый расчет дает для погрешности $\Delta g =$ $= 0{,}2385$ м/с^2, то это значение должно быть округлено до $\Delta g = 0{,}02$ м/с^2 и окончательный результат измерения g следует переписать как $g = (9{,}82 \pm 0{,}02)$ м/с^2.

Абсолютную погрешность *предварительно* вычисляют не более чем с *двумя* значащими цифрами, а при записи окончательного результата *сразу* округляют до *одной* значащей цифры. Значения относительных погрешностей достаточно вычислять с точностью до *двух* значащих цифр. Напомним, что если при округлении чисел первая отбрасываемая цифра больше или равна 5, то последнюю сохраняемую цифру увеличивают на единицу.

Когда погрешность в измерении рассчитана и округлена до одной значащей цифры, необходимо проанализировать, какие цифры являются достоверными в самой измеряемой величине. Утверждение типа

$$V = (6051{,}78 \pm 30)\ \text{м/с}$$

очевидно нелепо. Погрешность 30 означает, что цифра 5 на третьем месте от начала числа 6051,78 могла быть в действительности любой из интервала от 2 до 8. Ясно, что последующие цифры 1, 7 и 8 вовсе не имеют значения, и измеренная величина должна быть округлена. Таким образом, правильная запись есть

$$V = (6050 \pm 30)\ \text{м/с}.$$

Общее правило формулируется следующим образом.

ПРАВИЛО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ. **Численное значение любого приводимого результата должно оканчиваться полученной в результате расчета цифрой, которая находится в том же десятичном разряде, что и последняя значащая цифра погрешности.**

Пример 7. Результат 92,81 с погрешностью 0,3 должен быть округлен до 92,8 ± 0,3. Если же погрешность равна 3, то тот же результат следует представить как 93 ± 3, а если погрешность равна 30, то как 90 ± 30.

При расчетах результата измерений количество цифр, которое следует оставлять в его записи, должно *соответствовать* его точности. Для приблизительной оценки можно считать, что число, имеющее одну-две цифры, соответствует точности 10 %, две-три цифры – 1 %, три-четыре – 0,1 %.

Заметим, что абсолютная погрешность любой измеренной величины имеет ту же размерность, что и сама измеренная величина. Следовательно, будет понятнее и более экономно писать единицы измерения после результата и погрешности. Если результат измерения выражается числом, настолько большим или маленьким, что требует записи в *порядковой форме* (т.е. $3{,}0 \cdot 10^3$ вместо 3000), то проще и нагляднее *в той же форме* приводить и погрешность.

Пример 8. Результат $q = (1{,}61 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-19}$ Кл гораздо проще прочитать и понять в такой форме записи, чем в виде $q = (16{,}1 \cdot 10^{-20} \pm 5 \cdot 10^{-21})$ Кл.

Пример 9. Окончательная запись результата измерений.

Верно	Неверно
$R = (4{,}0 \pm 0{,}2)\ 10^6$ Ом	$R = (3{,}97 \pm 0{,}2)\ 10^6$ Ом
$I = (15{,}4 \pm 0{,}7)$ мкА	$I = (15 \pm 0{,}7)$ мкА
$h = (3{,}20 \pm 0{,}05)$ мм	$h = (3{,}2 \pm 5)\ 10^{-3}$ м

Задачи.

1. Представьте следующие окончательные результаты измерений в наиболее наглядном виде с нужным числом значащих цифр:

а). $h = (4{,}06 \pm 0{,}02329)$ м;

б). $t = (14{,}6452 \pm 1)$ с;

в). $q = (-3{,}21 \cdot 10^{-19} \pm 2{,}67 \cdot 10^{-20})$ Кл;

г). $\lambda = (0{,}0000005636 \pm 0{,}00000002)$ м;

д). $Q = (3{,}267 \cdot 10^3 \pm 42)$ Дж.

2. Как правильно записать окончательный результат измерения массы, если расчет дает $m_{\text{наил}} = 47{,}83$ г и $\Delta m = 0{,}54$ г?

3. Как правильно записать окончательный результат измерения напряжения, если расчет дает $U_{\text{наил}} = 7{,}94$ В и $\delta U = 0{,}01$?

2. ПОГРЕШНОСТИ В ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Суммарная *абсолютная погрешность* Δx результата прямых измерений физической величины x рассчитывается по *случайной* $\varepsilon(x)$ и *систематической* $\Theta(x)$ составляющим погрешности. Как отмечалось, случайные погрешности *можно* обрабатывать статистическими методами, а к систематическим – эти методы *неприменимы*.

В настоящем разделе сначала рассматриваются статистические методы обработки результатов прямых многократных воспроизводимых измерений. Далее обсуждается, как следует оценивать систематические погрешности измерительных приборов. Наконец, показывается, как по случайной и систематической составляющим рассчитать суммарную погрешность, а также как рационально выбрать количество наблюдений.

2.1. Случайные погрешности результатов многократных измерений

Случайная погрешность вычисляется на основе многократных измерений (наблюдений) *одной и той же* величины в *неизменных условиях* опыта с одним исследуемым объектом. Такие измерения называются *воспроизводимыми*. Применение статистических методов для их обработки позволяет определить:

- *наилучшую оценку* $x_{\text{наил}}$ измеряемой величины;
- *доверительную случайную погрешность* $\varepsilon(x)$ результата измерения для заданного значения доверительной вероятности P.

После n измерений в эксперименте получают группу результатов $\{x_i\}_n = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots, x_n$.

Наилучшей оценкой измеряемой физической величины x является среднее арифметическое $\bar{x}$ повторенных n раз измерений:

$$x_{\text{наил}} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n\right). \qquad (2)$$

Отклонения $(x_i - \bar{x})$ показывают, насколько результат i-го измерения x_i отличается от среднего $\bar{x}$, и будут как положительными, так и отрицательными. По ним можно рассчитать *стандартное от-*

клонение $\sigma_x = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$ для всей группы наблюдений $\{x_i\}_n$. Согласно существующим теоретическим аргументам, при повторении отдельных измерений величины x очень большое число раз приблизительно 70 % результатов будут располагаться в интервале ($\bar{x} \pm \sigma_x$), примерно 95 % – в интервале ($\bar{x} \pm 2\sigma_x$), и практически все – в интервале ($\bar{x} \pm 3\sigma_x$). Значение стандартного отклонения σ_x весьма *слабо* зависит от числа наблюдений n, поскольку определяется методикой эксперимента и свойствами используемых приборов.

Результат измерения $\bar{x}$, в котором учитываются результаты всех n измерений, будет более надежным, чем любое из отдельных измерений. Для вычисления доверительной случайной погрешности результата измерения $\bar{x}$ рассчитывают его *среднее квадратическое отклонение* $S(\bar{x})$, которое в $\sqrt{n}$ раз меньше стандартного отклонения σ_x: $S(\bar{x}) = \dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$. Это соотношение указывает очевидный способ увеличения точности результата многократных измерений путем увеличения их числа. К сожалению, $\sqrt{n}$ возрастает довольно медленно с увеличением числа измерений n. Например, чтобы увеличить точность в 10 раз, требуется увеличить число измерений n в 100 раз.

Среднее квадратическое отклонение $S(\bar{x})$ результата прямых многократных измерений вычисляют по формуле

$$S(\bar{x}) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \tag{3}$$

$\Delta x_i / 2$

Для расчетов с помощью калькулятора формулу (3) удобнее преобразовать к виду*

$$S(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - n(\bar{x})^2}{n(n-1)}} \tag{4}$$

Случайную погрешность результата измерения $\bar{x}$ получают, умножая среднее квадратическое отклонение $S(\bar{x})$ на так называемый *коэффициент Стьюдента* t_n(Р). Для заданной доверительной вероятности Р этот коэффициент является поправочным множителем, учитывающим снижение надежности результата измерения из-за ограниченности числа повторных наблюдений. Такой учет необходим, когда число измерений n меньше 15. Значения коэффициента Стьюдента t_n(Р), рассчитанные теоретически, для разного числа измерений n приведены в табл.1.

Таблица 1

ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА СТЬЮДЕНТА T_N(Р)

n	Р = 0,95	Р = 0,99	n	Р = 0,95	Р = 0,99
2	12,71	63,66	8	2,36	3,50
3	4,30	9,92	9	2,31	3,36
4	3,18	5,84	10	2,26	3,25
5	2,78	4,60	11	2,23	3,17
6	2,57	4,03	16	2,13	2,95
7	2,45	3,71	∞	1,96	2,58

Доверительная случайная погрешность $\varepsilon(x)$ результата прямых многократных измерений вычисляется по формуле

$$\varepsilon(x) = t_n(\mathrm{P}) \cdot S(\bar{x}), \tag{5}$$

в которой среднее квадратическое отклонение $S(\bar{x})$ результата измерения рассчитывают по формуле (3) или (4), а t_n(Р) – коэф-

*Формула (4) получена из формулы (3) с помощью тождества:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2\bar{x}x_i + (\bar{x})^2\right) = \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n}(x_i) + \sum_{i=1}^{n}(\bar{x})^2 =$$

$= \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2 - 2n(\bar{x})^2 + n(\bar{x})^2$, в котором учитывается, что $\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}n$.

фициент Стьюдента, который для данного числа наблюдений n и доверительной вероятности Р определяют по табл. 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ПОГРЕШНОСТИ. Рекомендуется следующий порядок выполнения и обработки результатов прямых многократных воспроизводимых измерений.

- Прямыми измерениями получить группу результатов наблюдений $\{x_i\}_n = x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_n$.
- Вычислить среднее арифметическое значение $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ группы результатов наблюдений $\{x_i\}_n = x_1, x_2, x_3, ..., x_i, ..., x_n$.
- Вычислить отклонения $(x_i - \bar{x})$ каждого измеренного значения от среднего.
- Вычислить квадраты отклонений $(x_i - \bar{x})^2$ и их сумму $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$.
- По формуле (3) или (4) вычислить среднее квадратическое отклонение $S\left(\bar{x}\right)$ результата измерений.
- Для данного числа измерений n и доверительной вероятности Р определить с помощью табл. 1 коэффициент Стьюдента t_n(Р), а затем по формуле (5) вычислить доверительную случайную погрешность $\varepsilon(x)$.

Пример 10. Обработка результатов многократных наблюдений.

Требуется определить диаметр диска D, указать среднее квадратическое отклонение $S\left(\bar{D}\right)$ и доверительную погрешность $\varepsilon(D)$ результата измерения при доверительной вероятности Р = 0,95. Результаты многократных наблюдений, выполненных с помощью штангенциркуля, занесены во второй столбец табл. 2. В этой же таблице заготовлены столбцы для записи промежуточных вычислений $\left(D_i - \bar{D}\right)$ и $\left(D_i - \bar{D}\right)^2$. Результаты определения $\bar{D}$, $S\left(\bar{D}\right)$, t_n(Р) и $\varepsilon(D)$ указаны в последнем столбце табл.2. Обратим внимание на то, что в записи случайной погрешности $\varepsilon(D)$ оставлены две значащие цифры. Это означает, что представленный результат измерения не является окончательным и предназначен для использования в дальнейших расчетах.

Таблица 2

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ ДИАМЕТРА ДИСКА

№ наблюдения	D_i, мм	$\left(D_i - \overline{D}\right)$,мм	$\left(D_i - \overline{D}\right)^2$,мм^2	Результат
1 2 3 4 5 6	125,5 124,9 125,3 125,7 125,1 125,3	0,2 – 0,4 0,0 0,4 – 0,2 0,0	0,04 0,16 0,00 0,16 0,04 0,00	$\overline{D} = 125{,}30$ мм; $S\left(\overline{D}\right) \approx 0{,}12$ мм; $t_6(0{,}95) = 2{,}57$; $\varepsilon(D) \approx 0{,}31$ мм;
Сумма	751,8	0,0	0,40	

Задачи.

1. Студент измеряет период колебаний T маятника три раза и получает результаты: 1,6; 1,8; 1,7 с. Чему равны среднее арифметическое значение $\overline{T}$ и среднее квадратическое отклонение $S\left(\overline{T}\right)$ результата измерений?

2. Определите доверительную случайную погрешность $\varepsilon(x)$, если $S\left(\overline{x}\right) = 0{,}03$ мм; $n = 5$; Р = 0,95.

3. Вычислите среднее квадратическое отклонение результата измерения, если доверительная случайная погрешность ε = 15 с, число наблюдений равно 7, доверительная вероятность Р = 0,95.

2.2. Систематические погрешности измерительных приборов

В некоторых экспериментах при многократном повторении наблюдений получают только одинаковые отсчеты, и вычислить случайную погрешность становится невозможным. Однако это не означает, что единственное значение, полученное в измерении, является точным. Поскольку абсолютно точных измерительных приборов не существует, результаты любых измерений будут содержать ошибки, вносимые самими приборами. Эти ошибки систематически повторяются, если измерения выполняются в одинаковых условиях и теми же измерительными приборами.

Для определения систематических погрешностей проводят специальные исследования, состоящие в тщательной проверке и корректировке метода измерения с использованием более точных приборов и эталонов физических величин. Таким способом могут быть определены постоянные поправки к показаниям каждого прибора. В постоянных поправках учитывается несовпадение условий эксперимента и теории метода измерения. Кроме того, вводятся поправки, связанные с влиянием на прибор внешних условий (температуры, давления, влажности, присутствия посторонних веществ и т.п.). Составляющие систематической погрешности, которые в результате этого не могут быть устранены, называют *инструментальной, неисключенной систематической,* или *приборной, погрешностью.*

Основными составляющими *инструментальной (приборной) погрешности* являются *предел допускаемой погрешности* измерительного прибора и *погрешность отсчета* по его шкале. Инструментальная погрешность определяется на основе анализа метода измерения по паспортным данным измерительного прибора, его классу точности, цене деления шкалы и т.д.

Предел погрешности h (ПП) – это наибольшая погрешность измерительного прибора, при которой он признается годным и допускается к применению. Предел погрешности h измерительного прибора либо *определяют по* табл. 3, либо *рассчитывают* по формуле

$$h = \frac{K}{100\,\%} \cdot x_{\max}, \tag{6}$$

где K – класс точности прибора, $x_{\max}$ – верхний предел измерений прибора (либо данного его диапазона). *Класс точности K* измерительного прибора, выражает в процентах от верхнего предела измерения $x_{\max}$ прибора его предел погрешности h:

$$K = \frac{h}{x_{\max}} \cdot 100\,\%.$$

Применяются следующие классы точности электроизмерительных приборов: 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0. Обозначение класса точности прибора записывается на его шкале в виде соответствующих цифр.

Пример 11. Расчет предела погрешности амперметра.

Измерения силы тока в цепи производились амперметром, класс точности которого $K = 0{,}50$, а переключатель пределов может находиться в двух положениях: 2,5 и 5,0 А. Во время измерения переключатель стоял в положении 2,5 А. Следовательно, верхний предел измерений $x_{\max} = 2{,}5$ А, и значение ПДП амперметра на используемой шкале: $h = 2{,}5 \cdot \dfrac{0{,}50}{100} = 0{,}0125$ (А).

Если класс точности не указан и в паспорте прибора отсутствуют данные о его инструментальной погрешности, то считают, что эта погрешность равна половине цены наименьшего деления шкалы прибора. Для прибора, стрелка которого перемещается не равномерно, а "скачками" (например, у механического секундомера), приборную погрешность считают равной цене деления шкалы. В приборах с цифровой индикацией предел погрешности прибора вычисляется по формуле, которая приводится в его паспорте.

Таблица 3

ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ И ИНСТРУМЕНТОВ

Измерительный прибор	Диапазон измерений	Предел допускаемой погрешности h
Линейки измерительные	(0...300) мм	1 мм
Штангенциркуль	(0...150) мм	0,1 мм
Штангенциркуль	(0...250) мм	0,05 мм
Микрометр с ценой деления 0,01 мм	(0...25) мм	4 мкм
Секундомеры механические	(0...30) мин	0,4 с при скачке стрелки 0,1 с; 0,6 с при скачке 0,2с
Секундомер электрический	(0...10) с	0,03 с
Термометры ртутные	(–35...+ 100) °С	Цена деления шкалы
Весы торсионные	(0...250) мг	1 мг
Барометр-анероид	(80...106) кПа	0,1 кПа
Транспортир	(0...180)°	0,5°
Монохроматор, шкала барабана	(0,5...72) отн.ед.	0,25 отн.ед.
Фотоэлектрический калориметр ФЭК-М	0...2,0	0,5 цены деления шкалы
Гониометр	(0...360)°	3'
Окулярный микрометр	(0...10) мм	0,01 мм
Интерферометр ИТР-1	(0...3000) дел.	1 дел.
Интерферометр ИТР-2	(0...2000) дел.	1 дел.
Сахариметр СУ-2	(–20...+110) °S	0,1 °S
Сахариметр СУ-3	(–80...+100) °S	0,1 °S

Погрешность отсчитывания $C_{\min}d$ определяется *ценой* $C_{\min}$ *минимального деления* шкалы прибора и *оцениваемой долей* d этого деления. Если шкала равномерная, то цена деления $C_{\min} = \dfrac{x_{\max}}{M}$, где M – число делений шкалы. Величина d показывает, до какой доли деления шкалы производится округление при снятии отсчета. Оцениваемая доля определяется геометрическим размером делений, условиями наблюдения шкалы, навыками экспериментатора и выбирается в диапазоне от 0,2 до 1,0 деления шкалы. Более мелкие доли оценивать не имеет смысла, так как деления нанесены с ограниченной точностью.

Для измерительных приборов, используемых в учебной физической лаборатории, полагают:

- **оцениваемая доля d = 0,5 дел. для простых шкал;**
- **оцениваемая доля d = 1 дел. для нониусных шкал и для простых шкал с размером деления менее 1 мм.**

Это правило имеет важное практическое значение. Точность, с которой необходимо *считывать* показания приборов и записывать в таблицу результаты прямых измерений, *должна соответствовать* вычисленной погрешности отсчитывания.

Пример 12. Измерения диаметра диска, приводимые в примере 10, выполнены штангенциркулем. Для нониусной шкалы штангенциркуля оцениваемая доля d = 1 дел., цена деления $C_{\min}$ = 0,1 мм/дел., и погрешность отсчитывания $C_{\min}d = 0{,}1 \cdot 1 = 0{,}1$ (мм). Поэтому результаты измерения во втором столбце табл. 2 указаны с точностью до 0,1 мм. Предположим теперь, что измерения диаметра того же диска выполнялись измерительной линейкой, для которой d = 0,5 дел., $C_{\min}$ = 1 мм/дел., погрешность отсчитывания $C_{\min}d = 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5$ (мм). Тогда результаты измерений из примера 10 должны считываться со шкалы и приводиться с точностью до 0,5 мм, составляя ряд: 125,5; 125,0; 125,5; 126,0; 125,0; 125,5 мм.

Инструментальная (приборная) погрешность Θ вычисляется по формуле

$$\Theta = 1{,}1\sqrt{h^2 + \left(C_{\min} d\right)^2}\ , \qquad (7)$$

где

- h – **предел погрешности измерительного прибора;**
- $C_{\min}$ – **цена минимального деления шкалы прибора;**
- d – **оцениваемая доля деления шкалы прибора.**

Формула (7) справедлива для доверительной вероятности Р = 0,95.

Пример 13. Расчет приборной погрешности измерительной линейки.

Измерительная линейка, для которой погрешность отсчитывания $C_{min}d = 0{,}5$ мм (см. пример 12), имеет предел погрешности $h = 1$ мм (см. табл. 3). Пользуясь формулой (7), получим

$$\Theta = 1{,}1\sqrt{h^2 + (C_{\min} d)^2} = 1{,}1\sqrt{1^2 + 0{,}5^2} \approx 1{,}2 \text{ (мм)}.$$

При вычислении Θ не требуется высокая точность – вполне достаточно определить эту погрешность с точностью около 20 – 25 %. Поэтому если h и $C_{min}d$ отличаются в *три или более* раза, то практически можно считать, что погрешность Θ равна большей из них. Например, если выполняется соотношение

$$C_{\min} d \leq \frac{h}{3}, \qquad (8)$$

то в формуле (7) погрешностью отсчитывания следует пренебречь. Тогда

$$\Theta = 1{,}1 \cdot h. \qquad (9)$$

Пример 14. Расчет приборной погрешности секундомера.

Механический секундомер класса точности 2 при скачке секундной стрелки 0,2 с имеет предел погрешности $h = 0{,}6$ с (см. табл. 3). Для такого секундомера погрешность отсчитывания $C_{\min}d$ определяется скачком стрелки и составляет 0,2 с. В данном случае погрешностью отсчитывания можно пренебречь, поскольку выполняется соотношение (8). Вычисляя по формуле (9), получаем приборную погрешность $\Theta(t) = 1{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}66$ (с).

Задачи.

1. Вычислите предел погрешности (ПП) амперметра, класс точности которого 1,0, а верхний предел измерений 2,5 А.
2. Определите погрешность отсчитывания для этого прибора, если на его шкале: 100 делений; 50 делений. Размер всей шкалы 7,5 см.
3. Рассчитайте приборную погрешность этого прибора.

2.3. Суммарная доверительная погрешность

Суммарная погрешность Δx результата прямых измерений включает обе составляющие погрешности: случайную $\varepsilon(x)$ и приборную $\Theta(x)$. Если эти составляющие незначительно различаются по величине, то *суммарная погрешность* результата измерения вычисляется по формуле

$$\Delta x = \sqrt{\varepsilon(x)^2 + \Theta(x)^2}\ .$$

При вычислении Δx не требуется высокая точность – вполне достаточно определить эту погрешность с точностью около 20 – 25 %. Поэтому если $\varepsilon(x)$ и $\Theta(x)$ отличаются в *три или более* раза, то практически можно считать, что погрешность Δx равна большей из них.

Суммарная погрешность Δx результата прямых измерений включает обе составляющие погрешности: *случайную* $\varepsilon(x)$ и *систематическую* $\Theta(x)$. **Если эти составляющие незначительно различаются по величине, а именно выполняются неравенства**

$$0{,}8 < \frac{\Theta(x)}{S(\bar{x})} < 8\ , \tag{10}$$

то суммарная погрешность результата измерения вычисляется по формуле

$$\Delta x = \sqrt{\varepsilon(x)^2 + \Theta(x)^2} \tag{11}$$

Однако в ряде случаев составляющие $\varepsilon(x)$ и $\Theta(x)$ различаются по величине существенно и тогда одной из них следует пренебречь.

Если

$$\frac{\Theta(x)}{S(\bar{x})} \le 0{,}8\ , \tag{12}$$

то систематической погрешностью $\Theta(x)$ по сравнению со случайной $\varepsilon(x)$ пренебрегают и тогда

$$\Delta x = \varepsilon(x). \tag{13}$$

Если же

$$\frac{\Theta(x)}{S(\bar{x})} \ge 8\ , \tag{14}$$

то пренебрегают случайной погрешностью $\varepsilon(x)$ и принимают, что суммарная погрешность результата измерений

$$\Delta x = \Theta(x). \tag{15}$$

Как отмечалось, среднее квадратическое отклонение $S(\bar{x})$ стремится к нулю при увеличении числа наблюдений *n*. Также ведет себя случайная погрешность $\varepsilon(x) = t_n(\text{P}) \cdot S\left(\bar{x}\right)$, поскольку при бесконечном увеличении n коэффициент Стьюдента $t_n(\text{P})$ для $\text{P} = 0{,}95$ стремится к конечному значению $t_\infty(\text{P}) = 1{,}96$. Однако погрешность измерения Δx не может стать меньше, чем неисключенная систематическая погрешность $\Theta(x)$. Когда среднее квадратическое отклонение $S\left(\bar{x}\right)$ становится в восемь раз меньше $\Theta(x)$, т.е. выполняется неравенство (14), дальнейшее увеличение числа наблюдений n не приведет к уменьшению значения погрешности Δx. При этом достигается максимальная точность, которую допускает используемый измерительный прибор.

Пример 15. Предположим, что измерения диаметра из примера 10 проводились измерительной линейкой, для которой приборная погрешность $\Theta(D) = 1{,}2$ мм (см. пример 13). Статистическая обработка результатов измерений диаметра D, которые выполнены линейкой и воспроизведены в примере 12, дает: $\bar{D} = 125{,}42$ мм, $S\left(\bar{D}\right) \approx 0{,}15$ мм, $\varepsilon(D) \cong 0{,}40$ мм. В этом случае $\dfrac{\Theta(D)}{S\left(\bar{D}\right)} = \dfrac{1{,}2}{0{,}15} = 8$, поэтому случайной погрешностью следует пренебречь: $\Delta D = \Theta(D) = 1{,}2$ мм. Окончательный результат после округления таков:

$$D = (125 \pm 1)\ \text{мм};\ \text{P} = 0{,}95.$$

В этом примере достигнута максимальная точность окончательного результата для используемого измерительного инструмента.

Пример 16. В примере 10 все измерения диаметра диска проводились штангенциркулем, для которого предел допускаемой погрешности $h = 0{,}1$ мм (см. табл. 3). Погрешность отсчитывания штангенциркуля $C_{\min}d = 0{,}1$ мм (см. пример 12), следовательно, в соответствии с формулой (7) его приборная погрешность $\Theta(D) = 1{,}1 \cdot \sqrt{h^2 + \left(C_{\min}d\right)^2} = 1{,}1 \cdot \sqrt{0{,}1^2 + 0{,}1^2} \approx 0{,}16$ (мм). Учитывая, что $\bar{D} = 125{,}30$ мм, $S\left(\bar{D}\right) \approx 0{,}12$ мм, $\varepsilon(D) \approx 0{,}31$ мм (см. табл. 2) и $\dfrac{\Theta(D)}{S\left(\bar{D}\right)} = \dfrac{0{,}16}{0{,}12} \approx 1{,}33$, по формуле (11) имеем $\Delta D = 1{,}1\sqrt{\varepsilon(D)^2 + \Theta(D)^2} =$

$= 1{,}1\sqrt{0{,}31^2 + 0{,}16^2} \approx$ 0,38 (мм). После округления погрешности и результата измерения получаем

$$D = (125{,}3 \pm 0{,}4) \text{ мм; } P = 0{,}95.$$

Спрашивается, как нужно увеличить число измерений, чтобы получить результат с максимальной точностью? Так, в разобранном примере число наблюдений надо увеличить приблизительно в $\left(8 \cdot \dfrac{S(\overline{D})}{\Theta(D)}\right)^2 = \left(\dfrac{8}{1{,}33}\right)^2 \approx 36$ раз, чтобы суммарная погрешность стала минимальной при использовании данного измерительного инструмента. Из примера видно, что для достижения максимальной точности требуется выполнить примерно 36·6 = 216 измерений. Такое большое количество измерений выполнить на практике затруднительно.

Хотя с увеличением числа наблюдений n случайная погрешность $\varepsilon(x)$ убывает, скорость ее уменьшения быстро замедляется. Это связано с уменьшением скорости убывания как среднего квадратического отклонения $S(\overline{x})$, так и коэффициента Стьюдента $t_n(P)$. Поэтому в большинстве прямых измерений оказывается нецелесообразным выполнять более 5 – 10 наблюдений одной и той же физической величины. Если при этом $\varepsilon(x) \approx \Theta(x)$, то такое число наблюдений следует считать близким к оптимальному. Если для выполнения этого условия требуется более 10 – 12 наблюдений, это указывает на несоответствие используемого измерительного прибора условиям эксперимента. Тогда случайная составляющая погрешности слишком велика, и целесообразно применить менее чувствительный прибор. Напротив, если разброс результатов наблюдений мал и отношение $\Theta(x)$ к $S(\overline{x})$ больше 8, то условия эксперимента позволяют провести более точные измерения с помощью более точного и чувствительного прибора.

ОДНОКРАТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ. Если заранее известно, что при использовании некоторого прибора отношение $\Theta(x)$ к $S(\overline{x})$ будет больше 8 (например, по результатам предыдущих многократных измерений этой величины), в дальнейшем можно ограничиться однократными измерениями. Бывают случаи, когда приходится ограничиваться однократным измерением, например, из-за невозможности обеспечить одинаковые условия его проведения. В обоих этих случаях суммарную погрешность принимают равной приборной

$$\Delta x = \Theta(x).$$

Задача. Определите суммарную доверительную погрешность при $n = 5$; $\varepsilon(U) = = 0{,}25$ В и $\Theta(U) = 0{,}10$ В. Во сколько раз следует увеличить число измерений, чтобы достичь максимальной для данного измерительного прибора точности?

2.4. Выполнение и обработка результатов прямых измерений

Перед тем, как приступить к измерениям и обработке их результатов, *внимательно* изучите разделы описания лабораторной работы, которые посвящены порядку ее выполнения и обработке результатов измерений. В этих разделах приводятся рекомендуемое число наблюдений измеряемых величин, а также образец таблицы для записи результатов прямых измерений. В описаниях многих лабораторных работ указывается, когда можно ограничиться однократным измерением, а также в измерениях каких величин следует пренебречь систематической, либо случайной погрешностью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ. Приборная погрешность Θ вычисляется до проведения измерений в учебной лаборатории, поскольку ее значение одинаково для любого отсчета по шкале данного прибора. В рабочий журнал в виде таблицы (см. табл. 4) записываются:

- *название и тип* прибора;
- *диапазон измерений* прибора;
- *класс точности* K прибора (если указан именно он);
- *предел погрешности* h прибора;
- *оцениваемая доля* d деления шкалы прибора;
- *цена* $C_{\min}$ минимального деления шкалы прибора;
- *приборная погрешность* Θ.

Предел погрешности (ПП) h прибора либо определяется по табл. 3, либо рассчитывается по формуле (6), если указан класс точности K.

Приборная погрешность Θ вычисляется по формуле (7) или (9).

Заносите в таблицу характеристики *только* используемых в данной работе *измерительных* приборов с обязательным указанием *единиц измерения* всех физических величин.

Таблица 4

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ

Название и тип прибора	Диапазон измерений	K	h	d	$C_{\min}$	Θ
Измерительная линейка	(0...300) мм		1 мм	0,5 дел.	1 мм/дел.	1,2 мм
Механический секундомер	(0...30) мин	2	0,6 с	1 дел.	0,2 с/дел.	0,66 с
Амперметр	(0...2,5) А	0,5	0,0125 А	0,5 дел.	0,025 А/дел.	0,019 А

ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ. В некоторых экспериментах случайная погрешность бывает настолько мала, что ею следует пренебречь. Для того, чтобы быстро это обнаружить и упростить вычисление общей погрешности, выполняют *три* измерения. Если получают одинаковые отсчеты, то дальнейшее их повторение лишено смысла. Это означает, что выбранный для данных измерений прибор слишком груб, а именно случайная погрешность существенно меньше систематической. В таких случаях измерение становится однократным, неравенство (14) заведомо выполняется, и сразу принимается, что

$$\Delta x = \Theta(x).$$

Если разброс результатов предварительных измерений составляет 2 – 3 наименьших деления шкалы прибора, то это свидетельствует о правильном его выборе, о достаточной, но не чрезмерной чувствительности прибора. Убедившись в том, что случайная погрешность сравнима или превышает систематическую, проводят многократные наблюдения измеряемой величины.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ МНОГОКРАТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ. Прямыми измерениями получают 5 – 10 наблюдений измеряемой величины и записывают их значения в заранее подготовленную таблицу. Заполняя таблицу, необходимо:

- записывать результаты измерений с *точностью*, соответствующей найденной *погрешности отсчитывания*;
- указывать *единицы измерения* физических величин.

При статистической обработке группы результатов наблюдений выполняют следующие операции.

1. По формуле (2) вычисляют *среднее арифметическое* $\bar{x}$, а по формулам (3) или (4) – *среднее квадратическое отклонение* $S(\bar{x})$ результата измерения.

2. Для данного числа измерений n и доверительной вероятности Р = 0,95 по табл. 1 находят коэффициент Стьюдента t_n(Р) и по формуле (5) вычисляют *доверительную случайную погрешность* $\varepsilon(x)$ результата измерения.

3. Вычисляют *отношение* $\Theta(x)/S(\bar{x})$ и, используя правило (см. п. 2.3), выбирают формулу, по которой рассчитывают *суммарную доверительную погрешность* Δx результата измерения.

4. Вычисляют *относительную погрешность* $\delta x = \Delta x / |\bar{x}|$ результата прямого измерения.

5. Записывают *результат* прямого измерения в виде $x = \bar{x} \pm \Delta x$, а также указывают его относительную погрешность δx. Поскольку результат измерения предназначен для использования в дальнейших расчетах, значение погрешностей Δx и δx приводят с *двумя* значащими цифрами, а *результат округляют так, чтобы он оканчивался цифрой того же десятичного разряда, что и значение погрешности* Δx.

3. ПОГРЕШНОСТИ В КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Многие физические величины проще измерять косвенным методом. Например, площадь S прямоугольника легко определить, если линейкой измерить две его стороны a и b, а затем произвести простейший расчет по формуле $S = a \cdot b$. В то же время методы прямого измерения площади достаточно сложны, и их применение оправдано лишь для геометрических фигур сложной формы.

Измерение, при котором значение физической величины рассчитывается с помощью соотношения между ней и другими величинами, полученными в результате прямых измерений, называется *косвенным*.

Математическая запись

$$w = f(x, y, z, ...) \tag{17}$$

соотношения между физической величиной w, получаемой при косвенном измерении, и величинами x, y, z, ..., получаемыми путем прямых измерений, называется *рабочей формулой*. Так, в приведенном примере соотношение $S = a \cdot b$ есть рабочая формула для расчета площади S прямоугольника по результатам прямых измерений длин сторон a и b.

Кроме измеряемых величин, в рабочую формулу могут входить также величины, которые не измеряются, но значение которых известно. Например, при измерении площади круга рабочая формула $S = \pi D^2/4$. Диаметр круга D находят путем прямого измерения, 4 – натуральное число, а π – иррациональное число, приближенное значение которого может быть определено с требуемой точностью.

Результат, составляющий цель лабораторной работы, получают путем косвенных измерений. В процессе выполнения лабораторной работы некоторые величины также измеряют косвенно. Таковы вычисления логарифмов или обратных величин физических переменных, определение суммарной массы грузов по непосредственно измеренным массам каждого из них и тому подобное.

Аргументами рабочей формулы $w = f(x, y, z, a, b, c, ...)$ могут быть величины трех типов:

1) величины, определяемые путем прямых измерений (например, величины x, y и z), которые после проведения этих измерений представляются в стандартной форме:

$$x = \overline{x} \pm \Delta x,\ y = \overline{y} \pm \Delta y,\ z = \overline{z} \pm \Delta z;$$

2) характеристики экспериментальной установки (например, величины a и b), которые в данном опыте не измеряются; эти величины известны из предыдущих измерений и должны быть заданы в форме:

$$a = \bar{a} \pm \Delta a, \ b = \bar{b} \pm \Delta b;$$

3) табличные величины (например, величина c) – величины, которые берутся из справочных таблиц.

Если табличная величина – известная константа (например, число π), ее численное значение определяют так, чтобы относительная погрешность $\delta\pi$ была значительно меньше относительных погрешностей всех остальных аргументов рабочей формулы.

Бывают случаи, когда характеристика экспериментальной установки заданна без указания погрешности, либо табличная величина приведена с ограниченной точностью. Тогда считают, что погрешность физической величины составляет *половину единицы последнего десятичного разряда* в ее значении. Например, если a = 11,3 мм, то Δa = 0,05 мм, т. е. a = (11,30 ± 0,05) мм , а если a = 11 мм, то Δa = 0,5 мм и a = (11,0 ± 0,5) мм

Во многих случаях в рабочую формулу входят также величины, которые не измеряются при выполнении лабораторной работы, например радиус капилляра, масса груза, плотность вещества и т.д., либо измерены предварительно, либо берутся из справочных таблиц. Обычно значение погрешности вместе со значением самой физической величины указывают в описании лабораторной работы.

В том случае, когда погрешность физической величины не указана, она принимается равной 0,5 единицы последнего приводимого десятичного разряда величины.

Пример 17. Если взятое из справочной таблицы значение плотности вещества ρ = 853 кг/м^3,то Δρ = 0,5 кг/м^3, т. е. ρ = (853,0 ± 0,5) кг/м^3, а если ρ = 850 кг/м^3, то Δρ =5 кг/м^3 и ρ = (850 ± 5) кг/м^3.

В косвенных измерениях значение функции $w = f(x, y, z, ...)$ вычисляется, причем точные значения аргументов $x, y, z, ...$ не известны. Поскольку определены только доверительные интервалы $(\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x)$, $(\bar{y} - \Delta y, \bar{y} + \Delta y)$, $(\bar{z} - \Delta z, \bar{z} + \Delta z)$, ..., результат косвенного измерения не может быть точен. Поэтому он должен приводиться с указанием доверительной погрешности в виде

$$w = \bar{w} \pm \Delta w; \ P = 0{,}95.$$

3.1. Воспроизводимые косвенные измерения

При *воспроизводимых* измерениях многократно выполняют прямые измерения аргументов x, y, z, ... в *неизменных условиях* опыта с *одним и тем же* исследуемым объектом.

Результатом измерения величины w является значение, вычисляемое при подстановке в рабочую формулу (17) средних значений $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, ...

$$\bar{w} = f(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z}, ...). \tag{18}$$

Доверительная погрешность Δw определяется погрешностями *всех* аргументов, входящих в рабочую формулу, независимо от того, получены они в ходе лабораторной работы или взяты из справочников, таблиц физических констант или описания лабораторной работы.

Вклады в погрешность Δw, обусловленные погрешностями аргументов Δx, Δy, Δz,... называют *частными абсолютными погрешностями* Δw_x, Δw_y, Δw_z, ... и рассчитывают по формулам

$$\left.\begin{aligned} \Delta w_x &= \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \cdot \Delta x \\ \Delta w_y &= \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \cdot \Delta y \\ \Delta w_z &= \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \cdot \Delta z \\ &\dots \end{aligned}\right\}, \tag{19}$$

где $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$, ... – частные производные функции $f(x,\ y,\ z,\ ...)$ по переменным x, y, z, ... При вычислении частной производной все аргументы функции $w = f(x,\ y,\ z,\ ...)$, кроме того, по которому производится дифференцирование, считаются постоянными. Численные значения частных производных рассчитывают, как и значение $\bar{w}$, подставляя в формулы производных средние значения $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, ...

Доверительную погрешность Δw результата косвенного измерения вычисляют по формуле

$$\Delta w = \sqrt{\Delta w_x^2 + \Delta w_y^2 + \Delta w_z^2 + ...} \tag{20}$$

При округлении погрешности Δw в окончательном результате до одной значащей цифры допускается погрешность округления от 5 до 50 %. Поэтому при вычислении Δw по формуле (20) следует упрощать вычисления, пренебрегая всеми малыми частными погрешностями.

Пример 18. Пусть частные погрешности $\Delta w_x = 1$ мм и $\Delta w_z = 0{,}3$ мм. Тогда по формуле (21) $\Delta w = \sqrt{1{,}0 + 0{,}09} \approx 1{,}04$ (мм). Так как в окончательном результате погрешность округляется до одной значащей цифры, то $\Delta w \approx \Delta w_x = 1$ мм. Тем самым погрешность Δw_z не дает вклада в результирующую погрешность, и при вычислении Δw ею следует пренебречь.

При вычислении погрешности Δw косвенного измерения следует:

- **выделить максимальную частную погрешность;**
- **пренебречь в формуле (20) всеми частными погрешностями, которые меньше максимальной в три и более раза.**

Расчет погрешности косвенного измерения выполняется сравнительно просто, если функция $f(x, y, z, ...)$ представляет сумму нескольких величин.

Пример 19. Расчет результата косвенного измерения.

В эксперименте смешивают жидкости из двух колб. Измеряя по отдельности массы наполненных, а затем пустых колб, получают результаты:

- масса первой колбы и ее содержимого $M_1 = (540 \pm 10)$ г;
- масса первой пустой колбы $m_1 = (72 \pm 1)$ г;
- масса второй колбы и его содержимого $M_2 = (940 \pm 20)$ г;
- масса второй пустой колбы $m_2 = (97 \pm 1)$ г.

Полная масса смеси жидкостей определяется по рабочей формуле

$$M = M_1 - m_1 + M_2 - m_2 = (540 - 72 + 940 - 97) = 1311 \text{ (г)}.$$

Частные погрешности, вычисленные по формулам (19):

$$\Delta M_{M_1} = \left|\frac{\partial(M_1 - m_1 + M_2 - m_2)}{\partial M_1}\right| \cdot \Delta M_1 = |1| \cdot \Delta M_1 = 10 \text{ (г)};$$

$$\Delta M_{m_1} = \left|\frac{\partial M}{\partial m_1}\right| \cdot \Delta m_1 = |-1| \cdot \Delta m_1 = 1 \text{ (г)};$$

$$\Delta M_{M_2} = \left|\frac{\partial M}{\partial M_2}\right| \cdot \Delta M_2 = |1| \cdot \Delta M_2 = 20 \text{ (г)};$$

$$\Delta M_{m_2} = \left|\frac{\partial M}{\partial m_2}\right| \cdot \Delta m_2 = |-1| \cdot \Delta m_2 = 1 \text{ (г)}.$$

В соответствии с правилом частными погрешностями ΔM_{m_1} и ΔM_{m_2}, соответствующими массам пустых колб, следует пренебречь. Вычисления по формуле (20) дают $\Delta M \approx \sqrt{\Delta M_{M_1}^2 + \Delta M_{M_2}^2} = \sqrt{10^2 + 20^2} \approx 22$ (г). Тогда окончательный результат косвенного измерения массы смеси жидкостей

$$M = (1310 \pm 20) \text{ г}.$$

3.2. Относительная погрешность результата косвенного измерения

Если функция $w = f(x, y\ z, ...)$ может быть представлена в виде произведения некоторых простых функций измеряемых аргументов $x, y, z, ...$

$$w = F_1(x) \cdot F_2(y) \cdot F_3(z) \cdot ...,$$

то оказывается проще вычислить *относительную погрешность* δw косвенного измерения. Сначала находят частные относительные погрешности δw_x, δw_y, δw_z, ..., обусловленные погрешностями аргументов $x, y, z, ...$ по формулам*

*Частные относительные погрешности можно также вычислять с помощью логарифмических производных: $\delta w_x = \left|\frac{\partial(\ln|f(x, y, z, ...)|)}{\partial x}\right| \Delta x$, $\delta w_y = \left|\frac{\partial(\ln|f(x, y, z, ...)|)}{\partial y}\right| \cdot \Delta y$ и так далее.

$$\left.\begin{aligned}
\delta w_x &= \frac{\Delta w_x}{|\overline{w}|} = \left|\frac{1}{F_1}\frac{dF_1}{dx}\right| \cdot \Delta x \\
\delta w_y &= \frac{\Delta w_y}{|\overline{w}|} = \left|\frac{1}{F_2}\frac{dF_2}{dy}\right| \cdot \Delta y \\
\delta w_z &= \frac{\Delta w_z}{|\overline{w}|} = \left|\frac{1}{F_3}\frac{dF_3}{dz}\right| \cdot \Delta z \\
&\dots
\end{aligned}\right\}. \tag{21}$$

Относительную погрешность δw результата косвенного измерения вычисляют по формуле

$$\delta w = \sqrt{\delta w_x^2 + \delta w_y^2 + \delta w_z^2 + \dots}\,, \tag{22}$$

При нахождении δw по формуле (22) следует *упрощать* вычисления, пренебрегая малыми частными погрешностями, как и при определении абсолютной погрешности Δw. Для этого достаточно выделить максимальную частную относительную погрешность, и пренебречь в формуле (22) всеми частными относительными погрешностями, которые в *3 и более раза* меньше максимальной.

Доверительная абсолютная погрешность Δw вычисляется по формуле

$$\Delta w = |\overline{w}| \cdot \delta w\,. \tag{23}$$

Пример 20. Расчет результата косвенного измерения.

Для определения момента инерции J шкива в эксперименте измеряются его диаметр D, высота h, с которой падает груз массой m, и время t падения груза. Используется рабочая формула

$$J = mD^2 \frac{(gt^2 - h)}{5gt^2},$$

в которой g – ускорение свободного падения.

Результаты прямых измерений выражают в единицах СИ, а также заменяют порядковым множителем 10^K десятичные приставки к названиям единиц:

$$D = (23{,}4 \pm 0{,}2)\ \text{мм} = (2{,}34 \pm 0{,}02)\cdot 10^{-2}\ \text{м};$$

$$t = (7{,}84 \pm 0{,}09)\ \text{с};$$

$$h = (105{,}0 \pm 0{,}5)\ \text{см} = (1{,}050 \pm 0{,}005)\ \text{м}.$$

Из описания лабораторной работы известно, что

$$m = (147 \pm 1)\ \text{г} = (0{,}147 \pm 0{,}001)\ \text{кг},$$

а из таблиц – $g = (9{,}806650 \pm 0{,}000005)$ м/с^2. Пользуясь рабочей формулой, рассчитывают среднее

$$\overline{J} = \frac{1}{5} \cdot \overline{m} \cdot \overline{D}^2 \cdot \left(1 - \frac{\overline{h}}{\overline{g} \cdot \overline{t}^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 0{,}147 \cdot (2{,}34 \cdot 10^{-2})^2 \cdot (1 - \frac{1{,}05}{(9{,}81 \cdot 7{,}84^2)}) \approx 1{,}61 \cdot 10^{-5}\ (\text{кг}\cdot\text{м}^2).$$

Для вычисления частных относительных погрешностей по формулам (22) рабочую формулу удобно представить в виде произведения $J = \frac{1}{5} \cdot F_1(m) \cdot F_2(D) \cdot F_3(t,h,g)$ трех функций: $F_1(m) = m$; $F_2(D) = D^2$ и $F_3(t,h,g) = \frac{gt^2 - h}{gt^2}$. Расчеты дают

$$\delta J_m = \left|\frac{1}{F_1} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial m}\right| \cdot \Delta m = \left|\frac{1}{m} \cdot \frac{\partial m}{\partial m}\right| \cdot \Delta m = \left|\frac{1}{m} \cdot 1\right| \cdot \Delta m = \frac{\Delta m}{m} =$$

$$\frac{10^{-3}}{0{,}147} \approx 7{,}0 \cdot 10^{-3};$$

$$\delta J_D = \left|\frac{1}{F_2} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial D}\right| \cdot \Delta D = \left|\frac{1}{D^2} \cdot \frac{\partial \left(D^2\right)}{\partial D}\right| \cdot \Delta D = \left|\frac{2D}{D^2}\right| \cdot \Delta D = \frac{2\Delta D}{D} =$$

$$= \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{2{,}34 \cdot 10^{-2}} \approx 1{,}6 \cdot 10^{-2};$$

$$\delta J_t = \left|\frac{1}{F_3} \cdot \frac{\partial F_3}{\partial t}\right| \cdot \Delta t = \left|\frac{1}{(1 - \frac{h}{gt^2})} \cdot \frac{\partial (1 - \frac{h}{gt^2})}{\partial t}\right| \cdot \Delta t =$$

$$= \left| \frac{gt^2}{(gt^2 - h)} \cdot \frac{-h}{g} \cdot \frac{-2}{t^3} \right| \cdot \Delta t = \left| \frac{2h}{(gt^2 - h) \cdot t} \right| \cdot \Delta t \approx$$

$$\approx \left| \frac{2 \cdot 1{,}05}{(9{,}81 \cdot 7{,}84^2 - 1{,}05) \cdot 7{,}84} \right| \cdot 0{,}09 \approx 4{,}0 \cdot 10^{-5};$$

$$\delta J_h = \left| \frac{1}{F_3} \cdot \frac{\partial F_3}{\partial h} \right| \cdot \Delta h = \left| \frac{-1}{(gt^2 - h)} \right| \cdot \Delta h \approx$$

$$\left| \frac{-1}{(9{,}81 \cdot 7{,}84^2 - 1{,}05)} \right| \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}0 \cdot 10^{-6};$$

$$\delta J_g = \left| \frac{1}{F_3} \cdot \frac{\partial F_3}{\partial g} \right| \cdot \Delta g = \left| \frac{h}{(gt^2 - h)} \right| \cdot \Delta g \approx$$

$$\approx \left| \frac{1{,}05}{(9{,}81 \cdot 7{,}84^2 - 1{,}05) \cdot 9{,}81} \right| \cdot 5 \cdot 10^{-6} \approx 6{,}0 \cdot 10^{-10}.$$

Из сравнения полученных значений частных относительных погрешностей видно, что максимальное значение имеет δJ_D, поэтому всеми прочими, за исключением δJ_m, в силу их малости следует пренебречь. Тогда

$$\delta J \approx \sqrt{\delta J_D^2 + \delta J_m^2} = \sqrt{\left(1{,}6 \cdot 10^{-2}\right)^2 + \left(7{,}0 \cdot 10^{-3}\right)^2} \approx 1{,}75 \cdot 10^{-2}.$$

Теперь по формуле (23) можно вычислить абсолютную погрешность

$$\Delta J = \left|\bar{J}\right| \cdot \delta J = 1{,}61 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}75 \cdot 10^{-2} \approx 2{,}8 \cdot 10^{-7} \ (\text{кг} \cdot \text{м}^2).$$

После требуемых округлений окончательный результат, представленный в виде

$$J = (1{,}61 \pm 0{,}03) \cdot 10^{-5} \ \text{кг} \cdot \text{м}^2; \ P = 0{,}95,$$

означает, что значение момента инерции шкива заключено в доверительном интервале от $1{,}58 \cdot 10^{-5}$ до $1{,}64 \cdot 10^{-5}$ кг·м^2. Наибольший вклад в результирующую погрешность вносит погрешность измерения диаметра шкива $\Delta D = 0{,}2$ мм.

Задачи.

1. Студент измеряет четыре длины: $a = (50 \pm 5)$ см; $b = (30 \pm 3)$ см; $c = (40 \pm 1)$ см; $d = (7{,}8 \pm 0{,}3)$ см и вычисляет три суммы: $a + b$, $a + c$, $a + d$. Найдите погрешности этих сумм.

2. Студент получил следующие результаты измерений: $a = (5 \pm 1)$ см; $b = (18 \pm 2)$ см; $c = (12 \pm 1)$ см; $t = (3{,}0 \pm 0{,}5)$ с; $m = (18 \pm 1)$ г. Вычислите значения величин w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, их абсолютные и относительные погрешности, если рабочие формулы: $w_1 = a + b + c$; $w_2 = a + b - c$; $w_3 = ct$; $w_4 = 4a$; $w_5 = b/2$;

$w_6 = mb/t$. Какую погрешность удобнее рассчитать сначала, абсолютную или относительную для этих рабочих формул ?

3. Тележка скатывается без трения по наклонной плоскости с углом наклона φ. Ускорение тележки $a = g \cdot \sin(\varphi)$ ($g = 9{,}8$ м/с^2 – ускорение свободного падения). Результат измерения угла $\varphi = (5{,}4 \pm 0{,}1)^\circ$. Вычислите ускорение a и его погрешность.

3.3. Невоспроизводимые косвенные измерения

Иногда при выполнении косвенных измерений невозможно многократно повторить наблюдения в неизменных условиях с *одним и тем же* объектом. Например, для измерения коэффициента вязкости жидкости в нее бросают металлические шарики. Условия опытов, повторенных с разными шариками, *не будут одинаковыми* из-за различия размеров и формы шариков, различного состояния их поверхностей и т.д. В этом случае говорят, что данные косвенные измерения *невоспроизводимы*. Тем не менее коэффициент вязкости характеризует одну и ту же исследуемую жидкость, и расчет должен давать близкие значения этого коэффициента для всех шариков.

В невоспроизводимом косвенном измерении многократно повторяют эксперимент. Например, в одну и ту же исследуемую жидкость опускают шарики разных размеров. В каждом эксперименте получают различающиеся результаты однократных прямых измерений x_1, y_1, z_1, ..., x_2, y_2, z_2, ..., x_n, y_n, z_n, ... Подставляя их в рабочую формулу, вычисляют значения измеряемой величины:

$$w_1 = f(x_1, y_1, z_1, \ldots)$$
$$w_2 = f(x_2, y_2, z_2, \ldots)$$
$$\ldots$$
$$w_n = f(x_n, y_n, z_n, \ldots).$$

Полученный таким образом ряд значений $\{w_i\}_n = w_1, w_2, ..., w_n$ рассматривается как группа результатов многократных воспроизводимых измерений величины w, а результат измерения и оценка его погрешности вычисляются по правилам обработки результатов таких измерений.

Пример 21. Расчет результата невоспроизводимых косвенных измерений.

В лабораторном эксперименте показатель адиабаты γ измеряется методом адиабатического расширения. Для этого в сосуд, содержащий воздух при атмосферном давлении и комнатной температуре, накачивается некоторое дополнительное количество воздуха. В сосуде создается избыточное давление, измеряемое по разности уровней H воды в двух коленах манометра. Далее сосуд на короткое время открывают, и воздух, охлаждаясь, адиабатически расширяется в атмосферу. Когда воздух в сосуде примет комнатную температуру, вновь измеряют его избыточное давление, оцениваемое по разности уровней h воды в манометре. Значение показателя адиабаты γ вычисляют по рабочей формуле

$$\gamma = \frac{H}{H-h}.$$

Косвенные измерения в данном эксперименте являются невоспроизводимыми, поскольку, повторяя опыт, накачать и выпустить каждый раз одинаковое количество воздуха невозможно. Значения γ вычисляются в каждом опыте по результатам однократных прямых измерений величин H и h, которые представлены в табл. 5.

В четвертом столбце табл. 5 приведены шесть результатов расчетов величины γ. Далее их обрабатывают как многократные прямые измерения $\{\gamma_i\}$: вычисляют $\bar{\gamma} = 1{,}367$ и среднее квадратическое отклонение $S(\bar{\gamma}) = \sqrt{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{6}\left(\gamma_i - \bar{\gamma}\right)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\dfrac{33{,}4 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 5}} \approx 0{,}011$. Определив по табл. 1 значение коэффициента Стьюдента $t_6(0{,}95) = 2{,}57$, находят случайную погрешность $\varepsilon(\gamma) = t_6(0{,}95) \cdot S(\bar{\gamma}) = 2{,}57 \cdot 0{,}011 \approx 0{,}027$.

Таблица 5

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

№ п/п	H, см	h, см	γ	$(\gamma_i - \bar{\gamma})$	$(\gamma_i - \bar{\gamma})^2$
1	30	7,5	1,33	– 0,037	13,7 10^{-4}
2	32	9,0	1,39	0,023	5,3 10^{-4}
3	35	10,0	1,40	0,033	10,9 10^{-4}
4	31	8,0	1,35	– 0,017	2,9 10^{-4}
5	30	8,0	1,36	– 0,007	0,5 10^{-4}
6	35	9,5	1,37	0,003	0,1 10^{-4}

Обратите внимание, что в каждом опыте измерительной линейкой проводятся однократные измерения величин H и h, для которых суммарные погрешности равны систематическим. Поскольку приборная погрешность измерительной линейки $\Theta = 1{,}2$ мм (см. пример 13) и каждая из величин H и h является разностью измеренных уровней, то в соответствии с правилами вычисления погрешностей косвенных измерений $\Theta(h) = \Theta(H) = \sqrt{1{,}2^2 + 1{,}2^2} \approx 1{,}7$ (мм) и $\Theta(H - h)$ $= \sqrt{1{,}7^2 + 1{,}7^2} \approx 2{,}4$ (мм). Относительные погрешности $\delta H = \dfrac{\Theta(H)}{H} \approx \dfrac{1{,}7}{300} \approx$ $\approx 0{,}0056$ и $\delta(H - h) = \dfrac{\Theta(H-h)}{H-h} \approx \dfrac{2{,}4}{120} = 0{,}02$. Поскольку справедлива оценка $3 \cdot \delta H < \delta(H-h)$, то $\delta\gamma \approx \delta(H - h) \approx 0{,}02$, а систематическая погрешность $\Theta(\gamma) = \delta\gamma \cdot \bar{\gamma} = 0{,}02 \cdot 1{,}367 \approx 0{,}028$. Отношение $\dfrac{\Theta(\gamma)}{S(\bar{\gamma})} = \dfrac{0{,}028}{0{,}027} \approx 1{,}05$, и по правилу (см. п. 2.3) $\Delta\gamma = 1{,}1\sqrt{\varepsilon(\gamma)^2 + \Theta(\gamma)^2} = 1{,}1\sqrt{0{,}027^2 + 0{,}028^2} \approx 0{,}042$. После округлений записывают окончательный результат измерения

$$\gamma = (1{,}37 \pm 0{,}04),\ P = 0{,}95.$$

Еще до выполнения работы полезно оценить результат, который должен быть получен. В данном случае теоретическое значение

$$\gamma = \frac{i+2}{i},$$

где i – число степеней свободы молекул газа. Воздух состоит преимущественно из двухатомных газов: азота и кислорода, для которых $i = 5$ и $\gamma = 1{,}40$. Кроме того, в воздухе присутствуют трех- и многоатомные молекулы малых составляющих, для которых $i = 6$ и $\gamma = = 1{,}33$. Следовательно, для воздуха приемлемо значение показателя адиабаты $1{,}33 \le \gamma \le 1{,}40$. Сравнение с доверительным интервалом от 1,33 до 1,41 показывает, что результат измерения показателя адиабаты γ воздуха в пределах погрешности совпадает с его теоретической оценкой.

3.4. Обработка результатов косвенных измерений

ВОСПРОИЗВОДИМЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ. Рекомендуется следующий порядок обработки результатов косвенных измерений.

1. Выполняют (одно- или многократные) измерения аргументов $x, y, z, \ldots$ измеряемой функции $w = f(x, y, z, \ldots)$.

2. Находят средние значения аргументов $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots$.

3. Вычисляют *среднее значение* измеряемой величины $\bar{w}$, подставляя в рабочую формулу средние значения всех входящих в нее аргументов. Их предварительно выражают в *единицах системы СИ*, а также заменяют порядковым множителем 10^K десятичные приставки к названиям единиц.

4. Используя правила обработки результатов прямых измерений величин $x, y, z, \ldots$, вычисляют их доверительные погрешности $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots$

5. Вычисляют погрешность результата косвенного измерения Δw, учитывая следующее:

- Если функцию $w = f(x, y, z, \ldots)$ удобно дифференцировать, по формулам (19) находят *частные абсолютные погрешности* Δw_x, Δw_y, Δw_z, ... результата измерения, соответствующие *всем* аргументам рабочей формулы. К ним относятся как величины, получаемые путем прямых измерений, так и взятые из таблиц физических величин или описания лабораторной работы. Затем вычисляют *частные относительные погрешности* $\delta w_x = \dfrac{\Delta w_x}{|\bar{w}|}$,

$\delta w_y = \dfrac{\Delta w_y}{|\bar{w}|}$, $\delta w_z = \dfrac{\Delta w_z}{|\bar{w}|}$ и т.д.;

- Если функцию $w = f(x, y, z, ...)$ можно представить в виде произведения более простых функций, по формулам (21) находят *частные относительные погрешности* δw_x, δw_y, δw_z, ... результата измерения.

6. Определяют *полную относительную погрешность* δw по формуле (22). Вычисления при этом *упрощают*, пренебрегая в соответствии с правилом всеми малыми слагаемыми.

7. Вычисляют *абсолютную погрешность* $\Delta w = |\bar{w}| \cdot \delta w$, используя результат измерения $\bar{w}$ и относительную погрешность δw.

8. Округлив погрешность и результат измерения, приводят его в виде: $w = (\bar{w} \pm \Delta w)$, $P = 0{,}95$.

НЕВОСПРОИЗВОДИМЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ.

1. Вычисляют значения определяемой функции $w = f(x, y, z, ...)$ для *каждого* i-го невоспроизводимого наблюдения, используя экспериментально найденные значения аргументов $\{x_i\}_n$, $\{y_i\}_n$, $\{z_i\}_n$, ...

2. Каждое из определенных таким образом значений $\{w_i\}_n$ рассматривают как результат *многократного* измерения физической величины w: суммарная погрешность вычисляется как композиция случайной и систематической составляющих.

3. *Случайную составляющую* погрешности $\varepsilon(w)$ результатов косвенных измерений $\{w_i\}_n$ рассчитывают по правилам обработки прямых многократных измерений (см. п. 2.1).

4. *Систематическую составляющую* погрешности $\Theta(w)$ косвенного измерения w вычисляют в соответствии с правилами настоящего раздела по результатам однократных прямых измерений физических переменных x, y, z,.. Суммарные погрешности Δx, Δy, Δz, ... полагают равными систематическим $\Theta(x)$, $\Theta(y)$, $\Theta(z)$, ...

5. Суммарную погрешность Δw определяют как композицию случайной и систематической составляющих по правилам, приводимым в п. 2.3.

6. Округлив погрешность и результат измерения, приводят его в виде: $w = (\bar{w} \pm \Delta w)$, $P = 0{,}95$.

4. ГРАФИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДАННЫХ

В некоторых экспериментах целенаправленно изменяют условия опыта так, чтобы одновременно изменялось несколько взаимозависимых физических величин. Тогда измерения этих величин называются *совместными.*

С помощью результатов совместных измерений величин x и y решают две задачи:

- проверяют соответствие теории и результатов эксперимента;
- по экспериментальным данным определяют значения параметров известной теоретической зависимости $y = f(x)$.

Например, для экспериментальной проверки закона Гука: $F = k{\cdot}x$, выполняют несколько измерений силы упругости F, соответствующих различным значениям растяжения x пружины. По этим данным строят график F от x. Если экспериментальные точки на графике располагаются вдоль прямой, проходящей через начало координат, то закон Гука подходит для описания результатов эксперимента.

Коэффициент жесткости k пружины является параметром зависимости $F = k{\cdot}x$. Значение k можно получить косвенным методом, используя рабочую формулу $k = \dfrac{F}{x}$. Однако если подставить в эту формулу любую пару из измеренных значений F и x, точность определения параметра k будет невысока. Существенно большей точности можно достичь с помощью графических методов, использующих всю совокупность результатов измерений F и x.

4.1. Правила построения и оформления графиков

График выполняют на листе миллиметровой бумаги размером не менее 0,5 формата А4 (210×297 мм).

ДИАПАЗОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ. Сначала наносят координатные оси: по оси абсцисс откладывают значения независимой переменной (аргумента), по оси ординат – функции. На графике должны быть представлены *только* те интервалы значений измеренных величин, которые исследовались в эксперименте. Сам график при этом занимает большую часть поля чертежа, как это показано на рис. 1а.

ВЫБОР МАСШТАБА. Рекомендуется выбирать удобные для расчетов и восприятия графика единицы масштаба шкал по осям. Допустимы значения единиц масштаба, равные только *одной*, *двум* или *пяти* единицам измеряемой физической величины, умноженным на порядковый множитель 10^K (K – целое число или 0).

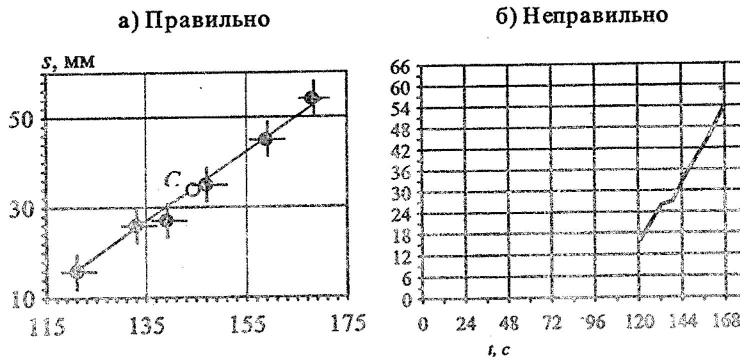

Рис. 1. Примеры построения графиков

Количество делений, около которых приводится соответствующее числовое значение, составляет обычно от 4 до 10 (см. рис. 1а). В конце оси указывают *буквенное обозначение величины* и *ее размерность*. Стрелки на осях не ставят. Порядковый множитель 10^K следует включать в буквенное обозначение, либо использовать десятичные приставки к названиям единиц. Например, $I \times 10^3$, А = I, мА; $k \times 10^3$, Н/м = k, мН/м.

НАНЕСЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ТОЧЕК И ИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ. Экспериментальные точки на график следует наносить точно и аккуратно, отмечая их *кружками* или *квадратами* (см. рис. 1а). Для разных кривых, если они изображены на одном рисунке, используют разные значки. *Погрешности* на графиках необходимо указывать для *обеих* измеряемых величин в виде *отрезков*, длина которых соответствует доверительной погрешности (см. рис. 1а). Исключение составляют случаи, когда по одной из осей откладывают величины, известные точно, например принимающие только целочисленные значения. Масштабы шкал осей удобно выбирать так, чтобы отрезки, изображающие погрешности, были достаточно крупными, например, около 5 мм.

ПРОВЕДЕНИЕ КРИВОЙ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ТОЧКАМ. Проводят кривую, которая:

- является графиком гладкой, плавно изменяющейся функции, без резких изломов и перегибов; во многих случаях это прямая линия. Соединение экспериментальных точек ломаной линией *недопустимо* (см. рис.1б).
- проходит так, чтобы экспериментальные точки располагались примерно *поровну* и в *среднем на равном удалении* по обе стороны от кривой, как показано на рис. 1а.

ОФОРМЛЕНИЕ ГРАФИКОВ. График должен иметь название (заголовок) и краткое пояснение, отражающее его содержание. Располагать их следует под ним.

4.2. Графический анализ линейной зависимости

Во многих физических экспериментах для описания связи между совместно измеряемыми физическими величинами x и y используется *линейная функция*

$$y = a \cdot x + b, \qquad (24)$$

где a и b – постоянные. График линейной функции является прямой линией с наклоном a, которая пересекает ось y в точке $y = b$. Коэффициент a (угловой коэффициент) равен отношению приращения значения функции y к соответствующему приращению значения аргумента x.

Ограниченная точность, с которой опытным путем определены значения величин x и y, а также приближенность соответствия любой математической модели реальному физическому явлению приводят к тому, что экспериментальные точки (x_i, y_i), $(i = 1, 2, ..., N)$ на графике могут не располагаться на линии $y = a \cdot x + b$.

Графический анализ экспериментальных данных состоит в следующем:

- *построение прямой*, соответствующей как предполагаемой зависимости, так и N парам результатов совместных измерений (x_i, y_i);
- *определение значений* параметров a и b;
- *определение погрешностей* параметров a и b.

Определение значений a и b с помощью графика является одним из видов *косвенных измерений*.

ПОСТРОЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ТОЧКАМ рекомендуется производить в следующем порядке:

- Выполнить *не менее пяти пар* ($N \geq 5$) прямых или косвенных совместных измерений величин x и y.
- Определить *диапазон изменения* переменных, который исследовался в эксперименте, поскольку только этот диапазон должен быть представлен на графике. Для этого наибольшие из измеренных значений x_i и y_i округляют в большую сторону, а наименьшие – в меньшую.
- Выбрать удобные для расчетов и восприятия графика *масштабы переменных*, откладываемых по координатным осям, и построить оси.
- Нанести на график *экспериментальные точки*, которые отвечают парам (x_i, y_i).
- Вычислить для каждой экспериментальной точки *доверительные погрешности* Δx и Δy.
- Нанести *доверительные интервалы* в виде *вертикальных* и *горизонтальных отрезков*. Погрешность Δx откладывается вправо и влево от экспериментальной точки, а погрешность Δy – вверх и вниз (см. рис. 1а).
- Нанести на график *центр тяжести* C экспериментальных точек, координаты которого x_C и y_C вычислить по формулам среднего арифметического:

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \\ y_C &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

- Через центр тяжести C экспериментальных точек провести по линейке прямую так, чтобы по обе стороны от нее оказалось примерно *одинаковое число* экспериментальных точек, а отклонения точек от прямой были *в среднем минимальны* (см. рис. 1а).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ПРЯМОЙ. Для вычисления приближенного значения *углового коэффициента* a произвольно выбрать две *расположенные на проведенной прямой* точки так, чтобы было удобно считывать их координаты. Такими, например, будут точки, одна из координат которых кратна единице масштаба. Начальную точку с координатами ($x_н$, $y_н$) выбирают *вблизи наименьшего* из измеренных значений x, а конечную – с координатами ($x_к$, $y_к$) – *вблизи наибольшего*. Далее оценку углового коэффициента a вычисляют по формуле

$$a = \frac{(y_к - y_н)}{(x_к - x_н)}. \tag{26}$$

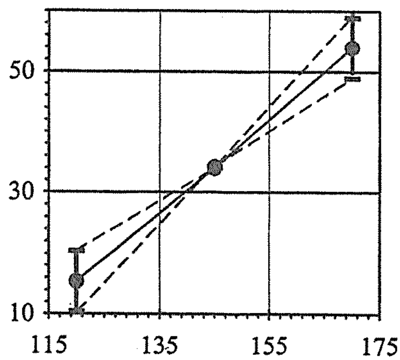

Рис. 2. Определение погрешности Δa.

Погрешность Δa определяют приближенно, сравнивая оценки параметра a для наиболее крутой и наиболее пологой прямой. Эти прямые проводят через центр тяжести C и границы доверительных интервалов начальной и конечной точки, как показано на рис. 2.

Например, оценку углового коэффициента a' для наиболее крутой прямой можно получить в виде $a' = \frac{((y_к + \Delta y) - (y_н - \Delta y))}{(x_к - x_н)} = \; = \frac{(y_к - y_н) + 2\Delta y}{(x_к - x_н)} = a + \frac{2\Delta y}{(x_к - x_н)}$. Это означает, что *погрешность* Δa можно определить по приближенной формуле

$$\Delta a = \frac{2\Delta\tilde{y}}{|x_к - x_н|}, \tag{27}$$

где погрешность $\Delta\tilde{y}$ определяют двумя различными способами в зависимости от степени разброса экспериментальных точек около проведенной прямой.

- ПРЯМАЯ ПРОХОДИТ В ПРЕДЕЛАХ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ. Это подразумевает, что проведенная прямая *пересекает* отрезки, изображающие погрешности *всех* экспериментальных точек (см. рис. 1а). Тогда погрешность $\Delta\tilde{y}$ определяется погрешностью отдельного измерения Δy, и в формулу (27) подставляется значение $\Delta\tilde{y} = \Delta y$. Если погрешность Δy не одинакова для различных значений аргумента x_i, то в качестве $\Delta\tilde{y}$ берется величина Δy для ближайшей к центру тяжести C экспериментальной точки.

- ПРЯМАЯ ПРОХОДИТ ВНЕ ПРЕДЕЛОВ ПОГРЕШНОСТЕЙ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ. В этих случаях отклонения некоторых из экспериментальных точек от прямой больше погрешности отдельного измерения Δy. На графике прямая проходит *в стороне* хотя бы от одного из отрезков, изображающего экспериментальные погрешности. В таких случаях погрешность $\Delta\tilde{y}$ определяется *наибольшим из отклонений* Δy_{max} экспериментальных точек по оси y от прямой. В формулу (28) подставляется значение $\Delta\tilde{y} = \Delta y_{max}$.

Значение параметра b находят из уравнения прямой (24), в которое подставляются уже найденные значения параметра a и координат (x_C, y_C) центра тяжести экспериментальных точек. Тем самым оценку параметра b вычисляют по формуле

$$b = y_C - a \cdot x_C . \tag{28}$$

Погрешность Δb находят двумя различными способами в зависимости от того, пересекает ли проведенная прямая ось y в пределах области (от x_1 до x_N), содержащей экспериментальные точки.

- ПРЯМАЯ ПЕРЕСЕКАЕТ ОСЬ ОРДИНАТ В ПРЕДЕЛАХ ОБЛАСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ТОЧКИ. В этом случае основной вклад в погрешность Δb дает погрешность $\Delta\tilde{y}$:

$$\Delta b = \Delta\tilde{y} . \tag{29}$$

Как и в формуле (27), в зависимости от степени разброса экспериментальных точек значение $\Delta\tilde{y}$ – либо наибольшее из отклонений Δy_{max} экспериментальных точек от проведенной прямой, либо погрешность отдельного измерения Δy.

- ПРЯМАЯ ПЕРЕСЕКАЕТ ОСЬ ОРДИНАТ ЗА ПРЕДЕЛАМИ ОБЛАСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ТОЧКИ. Тогда погрешность Δb определяется погрешностью Δa, и ее вычисляют по формуле

$$\Delta b = \Delta a \cdot x_C . \tag{30}$$

Для более точного определения параметров прямой a и b и их погрешностей следует использовать *метод наименьших квадратов.*

Пример 21. Построение прямой и определение ее параметров.

Для измерения термического коэффициента линейного расширения α материала выполнялись прямые совместные измерения температуры t и длины l стержня из исследуемого материала. Характеристики использованных для измерений приборов приведены в табл. 6.

Таблица 6

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ ПРИБОРЫ

Название и тип прибора	Диапазон измерений	K	h	d	$C_{\min}$	Θ
Термометр	(–35...100) °С	2	1 °С	1 дел.	1 °С/дел.	1,6 °С
Микрометр	(0...2,5) мм	0,5	0,004 мм	1 дел.	0,01 мм/дел.	0,012 мм

Температура образца измерялась термометром с точностью до 1 °С, а его длина – микрометром с точностью до 0,01 мм. Результаты этих измерений представлены в табл. 7.

Таблица 7

РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ

№	t, °С	l, мм
1	21	400,16
2	33	400,26
3	39	400,27
4	47	400,35
5	59	400,45
6	68	400,54

Пренебрегая случайными составляющими погрешностей прямых измерений, полагаем $\Delta t = \Theta(t)$ и $\Delta l = \Theta(l)$

Как видно из табл. 7, диапазон изменения измеренных величин составляет:

- для температуры (21...68) °С;
- для длины (400,16...400,54) мм.

Округляя наименьшие значения этих величин в меньшую сторону, а наибольшие – в большую, получают диапазоны физических переменных, которые будут представлены на графике:

- для температуры (15...75) °С;
- для длины (400,10...400,60) мм.

Выбирают удобные для расчетов и восприятия графика масштабы шкал осей для

- температуры (ось x): в 1 см – 5 °С;
- длины (ось y): в 1 см – 0,05 мм.

Расчет масштаба приводится для 0,5 листа формата А4.

Экспериментальные точки изображены на рис. 3 в виде кружков, а соответствующие доверительные интервалы – в виде горизонтальных и вертикальных отрезков, размеры которых составляют соответственно 6 мм и 5 мм.

Из курса физики известно, что длина образца l и его температура t связаны линейной зависимостью

$$l(t) = l_0 \cdot (1 + \alpha t) = \alpha l_0 t + l_0 ,$$

где l_0 – длина образца при 0 °C, α – средний термический коэффициент линейного расширения материала стержня. Как любая линейная зависимость, она может быть представлена в форме $y = a \cdot x + b$, где $y = l$; $x = t$; $b = l_0$; угловой коэффициент прямой $a = \alpha l_0$, следовательно

$$\alpha = \frac{a}{l_0} = \frac{a}{b} .$$

ПОСТРОЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ТОЧКАМ. Вначале рассчитывают координаты центра тяжести C экспериментальных точек по формулам (25):

$$x_C = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i = \frac{(21+33+39+47+59+68)}{6} \approx 44{,}5 \text{ °C};$$

$$y_C = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} l_i =$$

$$= 400{,}00 + 10^{-2} \cdot \frac{(16+26+27+35+45+54)}{6} \approx 400{,}34 \text{ мм.}$$

Далее через центр тяжести C экспериментальных точек по линейке проводят прямую. На рис. 3 показано, что отклонения экспериментальных точек в обе стороны от проведенной прямой в среднем одинаковы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛОВЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ПРЯМОЙ. Как показано на рис. 3, координаты начальной точки $x_н$ = 20 °C; $y_н$ = 400,15 мм, а конечной – $x_к$ = 70 °C; $y_к$ = 400,54 мм. Тогда расчет по формуле (26) дает

$$a = \frac{(y_к - y_н)}{(x_к - x_н)} = \frac{(400{,}54 - 400{,}15)}{(70-20)} \approx 7{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ (мм} \cdot \text{K}^{-1}\text{)}.$$

Расчет b производится по формуле (28):

$$b = y_C - a \cdot x_C = 400{,}34 - 7{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 44{,}5 \approx 399{,}99 \text{ (мм).}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПАРАМЕТРОВ ПРЯМОЙ. Как показано на рис. 3, проведенная прямая проходит вне границ экспериментальных погрешностей. При расчете погрешности Δa по формуле (27) в качестве $\Delta\tilde{y}$ следует взять наибольшее из отклонений экспериментальных точек от проведенной прямой. Этому условию отвечает экспериментальная точка с координатами x_3 = 39 °C; y_3 = 400,27 мм, и для нее $\Delta\tilde{y} = y_{max}$ = (400,30 – 40,27) = 0,03 (мм). Вычисление погрешности по формуле (27) дает

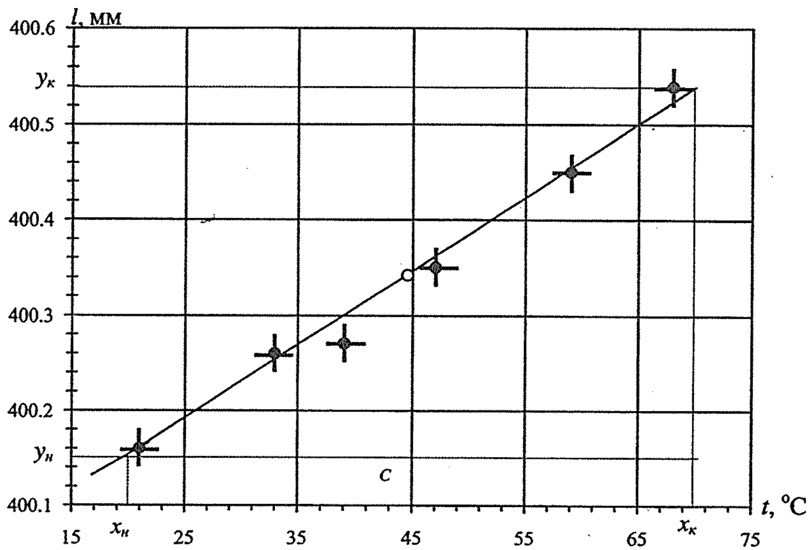

Рис.3. График зависимости длины стержня l от температуры t.

$$\Delta a = \frac{2\Delta\tilde{y}}{|x_к - x_н|} = \frac{2\cdot 0{,}03}{(70-20)} = 1{,}2\cdot 10^{-3}\ (\text{мм}\cdot\text{К}^{-1}).$$

В данном случае проведенная прямая пересекает ось ординат вне пределов экспериментально исследованной области, поэтому в соответствии с формулой (29)

$$\Delta b = x_C \cdot \Delta a = 44{,}5\cdot 1{,}2\cdot 10^{-3} \approx 0{,}05\ (\text{мм}).$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТА ИЗМЕРЕНИЯ. Определение значения коэффициента линейного расширения по вычисленным значениям параметров прямой дает

$$\alpha = \frac{a}{b} = \frac{7{,}8 \cdot 10^{-3}}{399{,}99} \approx 1{,}95 \cdot 10^{-5} \text{ (К}^{-1}\text{)}.$$

Частные относительные погрешности величины α:

$$\delta\alpha_a = \delta a = \frac{\Delta a}{|a|} = \frac{1{,}2 \cdot 10^{-3}}{7{,}8 \cdot 10^{-3}} \approx 0{,}15\,,$$

$$\delta\alpha_b = \delta b = \frac{\Delta b}{|b|} = \frac{0{,}05}{399{,}99} \approx 1{,}2 \cdot 10^{-6}\,.$$

Видно, что $\delta\alpha_a >> \delta\alpha_b$. Тогда $\delta\alpha \approx \delta\alpha_a$, и

$$\Delta\alpha = \delta\alpha \cdot |\alpha| \approx \delta\alpha_a \cdot |\alpha| \approx 0{,}15 \cdot 1{,}95 \cdot 10^{-5} \approx 0{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ ((К}^{-1}\text{)}.$$

Окончательный результат измерения коэффициента линейного расширения α материала стержня после округления представляется в виде

$$\alpha = (2{,}0 \pm 0{,}3) \cdot 10^{-5} \text{ (К}^{-1}\text{)}.$$

Задача В лабораторной работе определяют коэффициент жесткости k пружины и ее длину l_0 в нерастянутом состоянии. Для этого к пружине подвешивают грузы различной массы m и измеряют ее длину l. Получены следующие результаты совместных измерений массы и длины:

1)

m, г	*l*, см
200	5,1
300	5,5
400	5,9
500	6,8
600	7,4

2)

m, г	*l*, см
200	5,0
300	5,7
400	5,9
500	6,6
600	7,8

Так как сила тяжести груза mg уравновешивается силой упругости $k(l - l_0)$, то предполагаемая линейная зависимость $l = l_0 + (g/k)m$. Получите значения коэффициента жесткости k и собственной длины l_0 пружины, если для всех измерений $\Delta m = 10$ г и $\Delta l = 0{,}15$ см.

4.3. Метод наименьших квадратов

Задача, которая решается с помощью *метода наименьших квадратов* (МНК), состоит в определении параметров прямой $y = a\cdot x + b$,, которая наилучшим образом аппроксимирует результаты совместных измерений физических величин (x_i, y_i), где (i = 1, 2, ..., N). Предполагается, что линейная функция достаточно точно описывает связь между физическими переменными x и y, погрешности Δx пренебрежимо малы, а погрешности Δy одинаковы по величине для всех измеренных значений аргумента x_i. Наилучшей считается прямая, для которой минимальна сумма квадратов отклонений экспериментальных точек по вертикали.

Отклонения экспериментальных точек от прямой по вертикали можно определить для всех измеренных значений x_i. С этой целью рассчитывают разности между измеренными значениями y_i и значениями линейной функции $y(x_i)=ax_i+b$, вычисленными для каждого из измеренных x_i. Уравнение прямой $y(x)=ax+b$ удобно представить в виде $y(x)=a(x-x_C)+y_C$, где x_C и y_C – координаты центра тяжести C экспериментальных точек, которые вычисляются по формулам (25). Тогда отклонения экспериментальных точек от прямой $y_i-y(x_i)=y_i-(ax_i+b)=(y_i-y_C)-a(x_i-x_C)$.

Далее определяют минимум суммы квадратов отклонений $s(a,b)^2=\sum\limits_{i=1}^{N}(y_i-y(x_i))^2=\sum\limits_{i=1}^{N}(y_i-a\cdot x_i-b)^2==\sum\limits_{i=1}^{N}(y_i-y_C-a\cdot(x_i-x_C))^2$.

Для этого функцию $s(a, b)^2$ дифференцируют один раз по a, другой – по b, и приравнивают нулю производные. Так получают систему двух линейных уравнений, из которой выражают значения параметров:

$$a=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i-x_C)(y_i-y_C)}{\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i-x_C)^2}, \tag{31}$$

$$b=y_C-ax_C \tag{32}$$

Доверительные погрешности Δa и Δb для доверительной вероятности Р вычисляют по формулам

$$\Delta a = t_{N-1}(\mathrm{P}) \cdot \frac{\sigma_y}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - x_C)^2}}; \tag{33}$$

$$\Delta b = \Delta a \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2}}{N}}, \tag{34}$$

где $\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - y(x_i))^2}{(N-2)}}$ – стандартное отклонение экспериментальных точек от прямой. Значения разностей между измеренными y_i и рассчитанными значениями $y(x_i)$ вычисляют по формуле $y_i - y(x_i) = y_i - y_{_{\text{ц}}} - a(x_i - x_C)$. Значение коэффициента Стьюдента $t_{N-1}(\mathrm{P})$ определяют с помощью табл. 1 по числу экспериментальных точек N для заданной доверительной вероятности Р и значения $n = (N - 1)$.

Пример 22. Определение параметров прямой методом наименьших квадратов.

В эксперименте определяется значение абсолютного нуля температуры по шкале Цельсия. С этой целью измеряется температура газа t_i (в °С) для пяти (i = 1, 2, 3, 4, 5) различных значений давления p_i при постоянном объеме. Газ считается идеальным, а зависимость давления от температуры – линейной:

$$t = ap + b.$$

Постоянная a зависит от состава газа, его массы и объема. Точка пересечения графика линейной зависимости с осью температуры определяет параметр b, равный значению абсолютного нуля температуры по шкале Цельсия.

В табл. 8 и на рис. 4 представлены результаты совместных измерений p и t. Давление измерялось точно, а температура – с погрешностью $\Delta t = 1$ °С.

Вычисление координат центра тяжести экспериментальных точек по формулам (25) дает p_C = 85 кПа и t_C = 52,4 °С. Для расчета параметров a и b используют формулы (31) и (32), в которых x_i заменяют на p_i и y_i – на t_i. В табл. 8 приведены результаты промежуточных вычислений значений $(p_i - p_C)$, $(p_i - p_C)^2$, $(t_i - t_C)$, а также $(p_i - p_C)(t_i - t_C)$. Складывая числа из соответствующих строк табл. 8, получают, что $\sum_{i=1}^{5}(p_i - p_C)(t_i - t_C) = 3860$ кПа·(°С) и $\sum_{i=1}^{5}(p_i - p_C)^2 = 1000$ (кПа)^2. Рассчитанные по формулам (31) и (32) значения параметров прямой:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{5}(p_i - p_C)(t_i - t_C)}{\sum_{i=1}^{5}(p_i - p_C)^2} = \frac{3860}{1000} = 3{,}86 \ (^{\circ}\mathrm{C}/\text{кПа}),$$

$$b = t_C - ap_C = 52{,}4 - 3{,}86 \cdot 85 \approx -275{,}7 \ (^{\circ}\mathrm{C}).$$

Таблица 8

РЕЗУЛЬТАТЫ СОВМЕСТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ДАВЛЕНИЯ И ТЕМПЕРАТУРЫ

p_i, кПа	65	75	85	95	105
t_i, °С	–20	12	42	98	130
$(p_i - p_C)$, кПа	–20	–10	0	10	20
$(t_i - t_C)$, °С	–72,4	–40,4	–10,4	45,6	77,6
$(p_i - p_C)^2$,(кПа)^2	400	100	0	100	400
$(p_i - p_C)\cdot(t_i - t_C)$, кПа·(°С)	1448	404	0	456	1552
$t(p_i)$, °С	–24,8	13,8	52,4	91,0	129,6
$(t_i - t(p_i))$, °С	4,8	–1,8	–10,4	7,0	1,4

Для расчета погрешностей параметров a и b вычисляют соответствующие каждому из измеренных значений p_i значения температуры $t(p_i) = t_C - a(p_i - p_C)$, а также разности $(t_i - t(p_i))$. По этим данным, которые представлены в табл. 8, рассчитывают стандартное отклонение σ_t экспериментальных точек от прямой:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5}(t_i - t(p_i))^2}{(5-2)}} = \sqrt{\frac{185{,}4}{3}} = \sqrt{61{,}8} \approx 7{,}9 \ (^{\circ}\mathrm{C}).$$

Определив по табл. 1 значение коэффициента Стьюдента $t_4(0{,}95) = 3{,}18$, по формулам (33) и (34) находят доверительные погрешности

$$\Delta a = t_4(0{,}95)\frac{\sigma_t}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N}(p_i - p_C)^2}} = 3{,}18\cdot\frac{7{,}9}{\sqrt{1000}} \approx \frac{3{,}18\cdot 7{,}9}{31{,}6} \approx 0{,}80\ (^{\circ}\text{C/кПа})$$

$$\Delta b = \Delta a\cdot\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} p_i^{\,2}}{N}} \approx 0{,}80\sqrt{\frac{37125}{5}} = 0{,}80\cdot\sqrt{7425} \approx 0{,}80\cdot 86{,}2 \approx 69\ (^{\circ}\text{C}).$$

Соответствующим образом округленный результат измерения параметра b, равного значению абсолютного нуля температуры по шкале Цельсия, составляет (–280 ± 70) °C. Это значение в пределах погрешности совпадает с теоретической оценкой (–273,15 °C).

На рис. 4 представлен построенный методом наименьших квадратов график зависимости температуры t от давления p. Чтобы графически найти значение абсолютного нуля температуры по шкале Цельсия, прямую продолжают до ее пересечения с осью *t за границы области*, в которой расположены экспериментальные точки. Эта процедура называется *экстраполяцией* и может привести к большим погрешностям. Даже небольшое изменение в наклоне прямой влечет за собой большие изменения в положении точки пересечения прямой с осью ординат, особенно, если экстраполяция производится на большие расстояния.

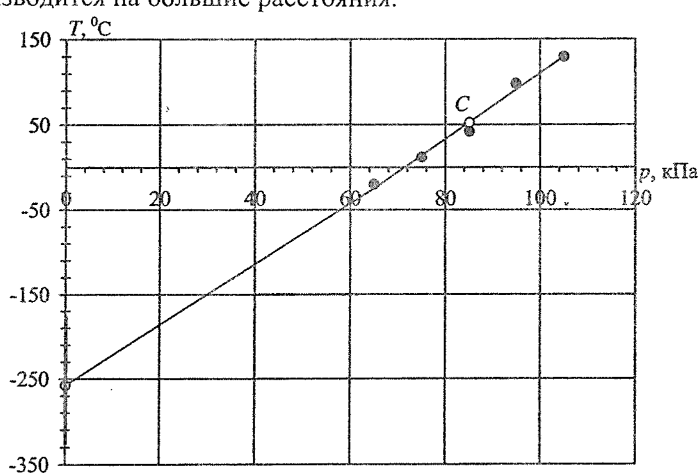

Рис. 4. График зависимости температуры газа t от давления p при постоянном объеме.

Задача. Определите с помощью МНК термический коэффициент линейного расширения α материала по данным совместных измерений температуры t и длины l стержня из примера 21.

4.4. Графический анализ нелинейной зависимости

Для описания связи между величинами x и y в ряде физических экспериментов используются нелинейные зависимости $y = f(x)$. Например, путь s, пройденный телом при свободном падении, пропорционален квадрату времени t. Нелинейная зависимость $s = gt^2/2$ – *степенная* функция с параметром g. Разряд конденсатора через сопротивление описывается с помощью *показательной* функции. Зависимость напряжения U на конденсаторе от времени t нелинейна: $U = U_0e^{-kt}$, здесь параметр U_0 – начальное напряжение, а параметр $k = 1/(RC)$, т.е. определяется сопротивлением R и емкостью C конденсатора.

По результатам совместных измерений величин x и y можно проверить соответствие теоретической зависимости $y = f(x)$ и результатов эксперимента. Например, если графически представить экспериментальные точки в координатах s и t, то они должны расположиться вблизи параболы $s = gt^2/2$. Однако на глаз легче распознается прямая линия. Поэтому проще преобразовать *нелинейную* зависимость $y = f(x)$ в *линейную* так, чтобы в соответствующих координатах экспериментальные точки располагались вдоль прямой. Например, степенная функция $s = gt^2/2$ представляется прямой линией в координатах s и t^2. График показательной функций $U = U_0e^{-kt}$ становиться графиком линейной $z = -k\cdot t + \ln(U_0)$ в координатах $z = \ln(U)$ и t.

Основываясь на результатах совместных измерений x и y, определяют значения параметров нелинейной теоретической зависимости $y = f(x)$. Для этого нелинейную зависимость с помощью *замены переменных* приводят к линейной. Рассмотрим, какие замены переменных используются в случаях показательной и степенной функций.

Когда предполагается, что y и x связаны зависимостью

$$y = A\exp(Bx) = Ae^{Bx}, \tag{35}$$

экспериментально определяют один или оба параметра A и B. Показательную функцию (35) логарифмируют и, переходя к новым переменным $z = \ln(y)$ и x, преобразуют в линейную зависимость $z(x)$:

$$z = \ln(y) = Bx + \ln(A) = ax + b. \tag{36}$$

По результатам измерений для каждого y_i вычисляют значения $z_i = \ln(y_i)$ и по совокупности значений (x_i, z_i) строят прямую. Формулы расчета погрешностей переменных x и z, которые откладывают теперь по осям, выводят. Для этого формулы замены переменных рассматривают как рабочие формулы косвенных измерений. Далее методами, описанными в п. 4.2 или п. 4.3, определяют значения параметров a и b линейной зависимости (36). Из этого равенства следует, что $B = a$, а $A = e^b$.

Когда в качестве теоретической зависимости используется степенная функция

$$y = Ax^K \tag{37}$$

и значение показателя степени K известно, по результатам измерений определяют значение параметра A. Тогда замена переменных $z = x^K$ преобразует зависимость (37) в линейную: $y = Az$. Определив графически угловой коэффициент этой линейной зависимости, тем самым находят значение параметра A. Если в эксперименте требуется найти значения обоих параметров A и K, то переходят к новым переменным $z = \ln(y)$ и $w = \ln(x)$. Прологарифмировав равенство (37), можно убедиться, что в этих переменных степенная функция становиться линейной функцией $z(v)$:

$$z = \ln(y) = K\ln(x) + \ln(A) = aw + b. \tag{38}$$

Значения параметров A и K вычисляют по формулам: $K = a$ и $A = e^b$, если с помощью графических методов найдены значения параметров a и b линейной зависимости (38).

Определение значений параметров нелинейной зависимости $y = f(x)$ с помощью графика является одним из видов *косвенных измерений*. Поэтому формулы для расчета погрешностей ΔA, ΔB и ΔK выводят, используя в качестве рабочих формул соотношения, связывающие определяемые параметры A, B и K с параметрами линейной зависимости a и b.

Пример 23. Графическая обработка нелинейной зависимости.

Предполагается, что при постоянном напряжении ток I в термисторе связан с его абсолютной температурой T соотношением

$$I = A \cdot \exp(-\alpha/T).$$

По результатам совместных измерений I и T требуется определить значение α.

Показательную функцию $I = A \cdot \exp(-\alpha/T)$ логарифмируют и с помощью замены переменных: $x = 1/T$ и $y = \ln(I)$ преобразуют нелинейную зависимость $I(T)$ в линейную $y(x)$:

$$y = \ln(I) = -\alpha \frac{1}{T} + \ln(A) = -\alpha x + \ln(A) = ax + b.$$

Из последнего равенства следует, что параметр α равен – a, т.е. угловому коэффициенту прямой с противоположным знаком. Далее для каждого измеренного значения T_i и I_i вычисляют значения $x_i = 1/T_i$ и $y_i = \ln(T_i)$, и по совокупности (x_i, y_i) строят прямую. Погрешности переменных x и y, откладываемых теперь по осям, рассчитывают, используя формулы замены переменных. Вычисления дают

$$\Delta x = \Delta\left(1/T\right) = \left|\frac{\partial\left(1/T\right)}{\partial T}\right| \cdot \Delta T = \Delta T/T^2 = \delta T/T;$$

$$\Delta y = \Delta(\ln I) = \left|\frac{\partial(\ln I)}{\partial I}\right| \cdot \Delta I = \Delta I/I = \delta I.$$

Значение параметра α определяют по найденному значению углового коэффициента прямой a с помощью формулы (26):

$$\alpha = -a = -\frac{(y_к - y_н)}{(x_к - x_н)} = -\frac{(\ln I_к - \ln I_н)}{\left(\left(1/T\right)_к - \left(1/T\right)_н\right)},$$

а погрешность $\Delta\alpha$ вычисляют по формуле (27):

$$\Delta\alpha = \Delta a = \frac{2\Delta y}{|x_к - x_н|} = \frac{2\Delta(\ln I)}{\left|\left(1/T\right)_к - \left(1/T\right)_н\right|} = \frac{2\delta I}{\left|\left(1/T\right)_к - \left(1/T\right)_н\right|}.$$

Задача. Переходя к новым переменным, преобразуйте к линейному виду зависимости:

1). $y = A(x^2 + B)^K$, 2). $y = \exp(-B(x^2 + C)$,

где x и y – измеряемые величины, A, B, C и K – параметры.

УКАЗАНИЯ ПО СОСТАВЛЕНИЮ ОТЧЕТА

Отчет о лабораторной работе должен *соответствовать цели работы*, его содержание – отражающим *всю* проделанную работу, а изложение – *четким и ясным*.

Отчет содержит разделы, расположенные в следующем порядке.

1. Наименование лабораторной работы.

- *Название лаборатории*, в которой выполнена лабораторная работа;
- *Фамилия, имя, отчество* студента, выполнившего работу, *название факультета, номер учебной группы, дата;*
- *Название лабораторной работы*, ее номер.

2. Цели и задачи лабораторной работы. Приводится формулировка цели лабораторной работы и перечисляются:

- *физические законы*, проверяемые в эксперименте;
- полные наименования измеряемых *физических величин.*

3. Метод измерения. Кратко описывается *физический принцип*, положенный в основу метода измерения физических величин, которые указаны в целях и задачах работы. Приводится *схема экспериментальной установки* с краткими пояснениями и обязательным указанием использованных обозначений.

4. Измерительные приборы и инструменты. В таблицу (см. табл. 4.) заносятся характеристики *всех измерительных средств*, используемых при выполнении измерений в работе.

5. Рабочие формулы. Приводятся *только* рабочие формулы, по которым рассчитываются результаты косвенных измерений. Для всех буквенных обозначений физических величин *обязательно* указывается их полное наименование.

При определении значений параметров нелинейной зависимости $y = f(x)$ с помощью графика в качестве рабочих формул приводятся:

- формулы замены переменных;
- соотношения, связывающие определяемые параметры нелинейной зависимости $y = f(x)$ с параметрами a·и b линейной зависимости.

8. Таблицы результатов прямых измерений. Результаты измерений всех физических величин заносятся в таблицы:

- с *точностью*, соответствующей *погрешности отсчитывания* по шкале прибора;
- с указанием *единиц измерения.*

9. Вычисление результатов прямых измерений. Показывается, как вычислены результаты прямых измерений, их случайные и суммарные погрешности. Результаты $x = \bar{x} \pm \Delta x$ указывают с их относительной погрешностью δx.

Значения погрешностей Δx и δx приводятся с *двумя* значащими цифрами, а результат *округляется* так, чтобы он оканчивался цифрой того же десятичного разряда, что и значение погрешности Δx .

10. Вычисление результатов косвенных измерений. Показывается, как в рабочую формулу подставлены числовые значения физических величин и какой получен результат вычислений. Промежуточные вычисления следует опустить. Значения всех подставляемых физических величин должны быть предварительно выражены в *единицах системы СИ*, а десятичные приставки заменены порядковым множителем 10^{K}. Это также относиться к величинам, которые не измеряются в ходе выполнения работы, но используются в вычислениях.

11. Вычисления погрешностей косвенных измерений. Приводится вывод формул для расчета частных погрешностей. Показывается, как в них подставлены числовые значения и какой получен результат. Указывается, какими из частных погрешностей следует пренебречь. Приводится вычисленная оценка полной погрешности косвенного измерения.

12. Окончательный результат. Результаты эксперимента записываются в *полном соответствии* с его целями и задачами. После полного наименования физической величины приводится ее значение с указанием погрешности и размерности. Перечисляются условия эксперимента, в которых получен представленный результат измерения.

Значение погрешности приводят с *одной* значащей цифрой, а результат *округляют* так, чтобы он оканчивался цифрой того же десятичного разряда, что и значение погрешности.

Выводы формулируются письменно, если это требование указано в цели работы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Детлаф А.А., Яворский Б.М.* Курс физики. – М.: Высшая школа, 1999. – 718 с.
2. *Зайдель А.Н.* Ошибки измерений физических величин. – Л.: Наука, 1974. – 106 с.
3. Метрология. Термины и определения. ГОСТ 16263 – 70 – М.: Изд-во стандартов, 1970. – 7 с
4. *Прямые измерения* с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения: ГОСТ 8.207–76. – М.: Изд-во стандартов, 1976. – 10 с.
5. *Светозаров В.В.* Элементарная обработка результатов измерений. – М.: Изд-во МИФИ, 1983. – 52 с.
6. *Свешников А.А.* Основы теории ошибок. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1972. – 122 с.
7. *Тейлор Дж.* Введение в теорию ошибок/ Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 272 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Учебное пособие для лабораторного практикума по общей физике

Авторы: Фокин Сергей Анатольевич
Бармасова Анна Михайловна
Мамаев Михаил Аркадьевич

Редактор И.Г. Максимова

ЛР № 020309 от 30.12.96.

Подписано в печать 18.06.03. Формат 60x90 1/16. Гарнитура Times New Roman.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл.печ.л. 4,0. Уч.-изд.л. 4,2. Тираж 1000 экз. Заказ № 37
РГГМУ, 195196, Санкт-Петербург, Малоохтинский пр., 98.
ЗАО «Лека», 195112, Санкт-Петербург, Малоохтинский пр., 68.