

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР  
ПО ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИИ И КОНТРОЛЮ  
ПРИРОДНОЙ СРЕДЫ

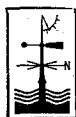
ТРУДЫ  
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ГЛАВНОЙ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ  
им. А. И. ВОЕЙКОВА

*Выпуск*

**410**

ДИНАМИКА ГЛОБАЛЬНЫХ  
АТМОСФЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ  
И ПРОГНОЗ ПОГОДЫ

Под редакцией  
д-ра физ.-мат. наук М. Е. ШВЕЦА,  
канд. физ.-мат. наук Б. Е. ШНЕЕРОВА



ЛЕНИНГРАД ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ 1980

06  
+78

В сборнике дано описание гидродинамической модели общей циркуляции атмосферы, разработанной в ГГО. Приводятся результаты моделирования атмосферной циркуляции для января.

Изложены вопросы реализации гидродинамико-статистических методов прогноза погоды.

Ряд статей сборника посвящен задачам, относящимся к интегрированию уравнений динамики атмосферы и интерполяции метеорологических элементов.

Рассматриваются вопросы параметризации радиационных процессов в атмосфере.

Сборник рассчитан на специалистов в области динамической метеорологии, климатологии и физики атмосферы, а также аспирантов и студентов, специализирующихся по теории климата и численным методам прогноза погоды.

The publication presents a description of the hydrodynamic model of atmospheric general circulation developed at the Main Geophysical Observatory. There are given results of atmospheric circulation modeling for January.

The problems of realizing the hydrodynamic-statistical methods for weather forecasting are set forth.

Some papers deal with the problems on integrating the equations of atmospheric dynamics and interpolating meteorological elements.

The questions of parameterizing radiation processes in the atmosphere are examined.

The publication is intended for specialists in dynamic meteorology, climatology, and atmospheric physics, as well as for postgraduates and students specializing in the theory of climate and numerical weather forecasting.

Ленинградский  
Гидрометеорологический ин-т  
БИБЛИОТЕКА  
Л-д 19319, Малосафарицкий пр., 98

*В. П. Мелешко, Б. Е. Шнееров, М. Е. Швец,  
Л. Р. Дмитриева-Араго, Г. В. Паршина, Е. П. Юшина,  
Л. Н. Магазенков, С. В. Богаченко, Д. А. Шейнин*

## **ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБЩЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ АТМОСФЕРЫ**

### **ВВЕДЕНИЕ**

В настоящее время в ряде исследовательских центров СССР, США и других стран созданы или разрабатываются глобальные и полусферные гидродинамические модели атмосферы [31]. Эти модели включают отличающиеся по принятым физическим гипотезам и степени сложности схемы параметризации физических процессов и имеют различную сеточную структуру и горизонтальное и вертикальное разрешения. В ряде исследований оценивались свойства этих моделей путем расчета квазиустановившегося состояния атмосферы для января и июля [23, 28] или среднего состояния за год [9]. По данным численных экспериментов рассчитывались средние распределения основных переменных: температуры, давления, скорости ветра, облачности, осадков, а также характеристики энергетики атмосферы и составляющие теплового и водного балансов. Результаты сопоставления с реальными распределениями показали, что в целом гидродинамические модели хорошо воспроизводят крупномасштабные особенности общей циркуляции и термического режима атмосферы. Менее успешно моделируются такие характеристики, как, например, осадки, облачность и ряд других, на формирование которых большое влияние оказывают мезомасштабные процессы. Как правило, в моделях завышается интенсивность среднего зонального потока в тропосфере средних широт и недооценивается вихревая составляющая кинетической и доступной потенциальной энергии. Хотя модели верно воспроизводят местоположение зоны бароклинной неустойчивости, ее интенсивность, как правило, оказывается заметно ослабленной. В моделях с меньшим горизонтальным разрешением развитие бароклинной неустойчивости оказывается менее интенсивным по сравнению с моделями с более высоким разрешением [37].

В настоящее время разработка более совершенных моделей атмосферы ведется по двум взаимодополняющим направлениям. Это, во-первых, создание более точных и эффективных методов решения уравнений гидротермодинамики и, во-вторых, совершенствование методов параметризации мезомасштабных физических процессов, таких, как конвекция и связанные с нею фазовые преобразования энергии, процессы в планетарном пограничном слое, перенос радиации, диффузия и др. Исследования в указанных направлениях интенсивно ведутся в нашей стране и за рубежом [10, 33].

В 1975 г. в Главной геофизической обсерватории им. А. И. Воейкова были начаты работы по созданию гидродинамической модели общей циркуляции атмосферы. При выборе исходных параметров модели (горизонтального и вертикального разрешения, области интегрирования уравнений и др.) мы исходили из технических возможностей ЭВМ, имеющейся в ГГО. Разработанная модель атмосферы представляет собой компромиссный вариант между стремлением построить физически содержательную модель и необходимостью удовлетворить жестким техническим критериям, вытекающим из возможностей ЭВМ. Именно с учетом указанных условий нами была выбрана полусферная модель атмосферы, имеющая три уровня по вертикали и среднее горизонтальное разрешение порядка 400 км.

Эту модель мы предполагаем использовать в исследованиях а) по изучению причин изменений общей циркуляции атмосферы и ее термического режима, а также, в более широком плане, по изучению изменений климата в результате действия внешних по отношению к атмосфере энергетических источников; б) долгосрочного прогноза погоды.

В процессе разработки модели был проведен ряд численных экспериментов, в которых испытывались различные схемы параметризации физических процессов. Работа по совершенствованию модели ведется и в настоящее время. Излагаемый в данной статье вариант модели был использован для проведения численного эксперимента по моделированию квазиустановившегося состояния атмосферы, ее термического режима и влагооборота для январских условий. При этом система уравнений динамики атмосферы интегрировалась на 60 суток вперед от заданного начального состояния.

Подробный анализ результатов расчета январского климата излагается в статьях настоящего сборника.

В модели используются следующие основные обозначения.

#### Независимые переменные

$x$ ,  $y$  — переменные в декартовой системе координат; положительным направлением для оси  $x$  является направление от Северного полюса к экватору по Гринвичскому меридиану, для оси  $y$  — от Северного полюса к экватору по меридиану  $90^\circ$  в. д.;

$z = p/p_s$  — вертикальная координата с положительным направлением от верхней границы атмосферы к поверхности земли;  
 $t$  — время.

### Зависимые переменные

$u, v$  — горизонтальные составляющие скорости в направлении осей  $x$  и  $y$  соответственно,

$T$  — температура,

$q$  — удельная влажность,

$q_m$  — удельная влажность при насыщении,

$p_s$  — давление у поверхности земли,

$\Phi$  — геопотенциал,

$\omega$  — вертикальная скорость в изобарической системе координат,

$\sigma$  — вертикальная скорость в  $\sigma$ -системе координат,

$h$  — относительная влажность,

$T_g$  — температура воздуха у поверхности земли,

$h_s$  — высота рельефа,

$m$  — масштабный множитель для карты стереографической проекции.

$$\{U, V, \tilde{T}, \tilde{q}\} = \left\{ \frac{u p_s}{m}, \frac{v p_s}{m}, \frac{T p_s}{m}, \frac{q p_s}{m} \right\}.$$

Обозначения отдельных членов в уравнениях модели

$F_{su}, F_{sv}, F_{sT}, F_{sq}$  — члены, описывающие горизонтальную диффузию количества движения, тепла и влаги,

$F_{\sigma u}, F_{\sigma v}, F_{\sigma T}, F_{\sigma q}$  — члены, описывающие вертикальный обмен количеством движения, теплом и влагой,

$\varepsilon$  — радиационный приток тепла,

$r$  — сток влаги в результате выпадения осадков,

$\tau_x, \tau_y$  — горизонтальные составляющие турбулентного напряжения трения в проекции на оси  $x, y$ ,

$H$  — вертикальный турбулентный поток тепла,

$E$  — вертикальный турбулентный поток влаги,

$R^\uparrow, R^\downarrow$  — потоки восходящей и нисходящей длинноволновой радиации,

$S^\uparrow, S^\downarrow$  — потоки восходящей и нисходящей коротковолновой радиации.

### Физические и другие константы

$R$  — удельная газовая постоянная для сухого воздуха,

$\Omega$  — угловая скорость вращения Земли,

$c_p$  — удельная теплоемкость сухого воздуха при постоянном давлении,

$L$  — удельная теплота конденсации,

$A$  — тепловой эквивалент единицы работы,

$R_n$  — удельная газовая постоянная для водяного пара,  
 $g$  — ускорение свободного падения,  
 $\sigma_*$  — постоянная Стефана—Больцмана,  
 $\Delta\sigma$  — шаг по вертикальной координате,  
 $\Delta t$  — шаг по времени,  
 $\Delta s$  — средний шаг по  $x, y$ .

Остальные обозначения поясняются при первом их упоминании.

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Уравнения гидротермодинамики в системе координат  $(x, y, \sigma, t)$ , записанные в дивергентной форме, имеют следующий вид:

а) уравнения горизонтального движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + m \left[ \frac{\partial Uu}{\partial x} + \frac{\partial Vu}{\partial y} \right] + \frac{\partial \dot{\sigma} U}{\partial \sigma} - V (f^{(1)} + f^{(2)}) = \\ = - p_s \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} + RT \frac{\partial \ln p_s}{\partial x} \right) + F_{su} + F_{\sigma u}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + m \left[ \frac{\partial Uv}{\partial x} + \frac{\partial Vv}{\partial y} \right] + \frac{\partial \dot{\sigma} V}{\partial \sigma} + U (f^{(1)} + f^{(2)}) = \\ = - p_s \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} + RT \frac{\partial \ln p_s}{\partial y} \right) + F_{sv} + F_{\sigma v}; \end{aligned} \quad (1.2)$$

б) уравнение притока тепла

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + m \left[ \frac{\partial U\tilde{T}}{\partial x} + \frac{\partial V\tilde{T}}{\partial y} \right] + \frac{\partial \dot{\sigma} \tilde{T}}{\partial \sigma} - \frac{AR}{m} \frac{\omega}{\sigma} = \\ = F_{sT} + F_{\sigma T} + \frac{\varepsilon}{m} + \frac{L p_s r}{c_p m}; \end{aligned} \quad (1.3)$$

в) уравнение переноса влаги

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial t} + m \left[ \frac{\partial Uq}{\partial x} + \frac{\partial Vq}{\partial y} \right] + \frac{\partial \dot{\sigma} \tilde{q}}{\partial \sigma} = F_{sq} + F_{\sigma q} - \frac{p_s r}{m}; \quad (1.4)$$

г) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = - m^2 \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) - p_s \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma}; \quad (1.5)$$

д) уравнение гидростатики

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = - \frac{RT}{\sigma}. \quad (1.6)$$

Вертикальная скорость  $\dot{\sigma}$  получается из уравнения неразрывности (1.5) в результате его интегрирования по  $\sigma$  от 0 до 1 и второй раз — от 0 до  $\sigma$  с учетом граничных условий (1.12)—(1.13)

$$p_s \dot{\sigma} = m^2 \left[ \sigma \int_0^1 \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) d\xi - \int_0^{\sigma} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) d\xi \right]. \quad (1.7)$$

Выражение для вертикальной скорости в изобарической системе координат  $\omega$ , входящее в уравнение (1.3), вытекает из самого определения  $\sigma$ -системы координат

$$\omega = p_s \dot{\sigma} + \sigma \frac{dp_s}{dt}. \quad (1.8)$$

Уравнения (1.1)—(1.8) записаны применительно к плоскости карты стереографической проекции. Значения параметра  $m$  определяются по формуле

$$m = \frac{k}{1 + \sin \varphi}, \quad (1.9)$$

где  $k = 1,8660$  для карты стереографической проекции с главным масштабом на широте  $\varphi = 60^\circ$ . Параметр Кориолиса и метрический член в уравнениях движения с учетом (1.9) записываются в виде

$$f^{(1)} = 2\Omega \left( \frac{k}{m} - 1 \right), \quad (1.10)$$

$$f^{(2)} = m^2 \left[ v \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{m} \right) - u \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{m} \right) \right]. \quad (1.11)$$

В модели приняты следующие граничные условия:

1) на верхней границе атмосферы (при  $\sigma = 0$ )

$$\dot{\sigma} = \tau_x = \tau_y = H = E = 0; \quad (1.12)$$

2) на нижней границе (при  $\sigma = 1$ )

$$\dot{\sigma} = 0. \quad (1.13)$$

Вертикальные турбулентные потоки количества движения, тепла и влаги на этой границе находятся из решения уравнений для пограничного слоя. Способы расчета указанных потоков подробно изложены в п. 7.

На боковой границе, примерно совпадающей с экватором, предполагается наличие стенки, вдоль которой происходит свободное скольжение потока. Нормальная составляющая горизонтальной скорости равна нулю,

$$v_n = 0. \quad (1.14)$$

Включение в уравнения (1.1)—(1.4) членов, описывающих горизонтальную диффузию количества движения, тепла и влаги, требует постановки на боковой границе дополнительного граничного условия. По-видимому, наиболее естественным является такое условие, при котором диффузионные члены в соответствующих

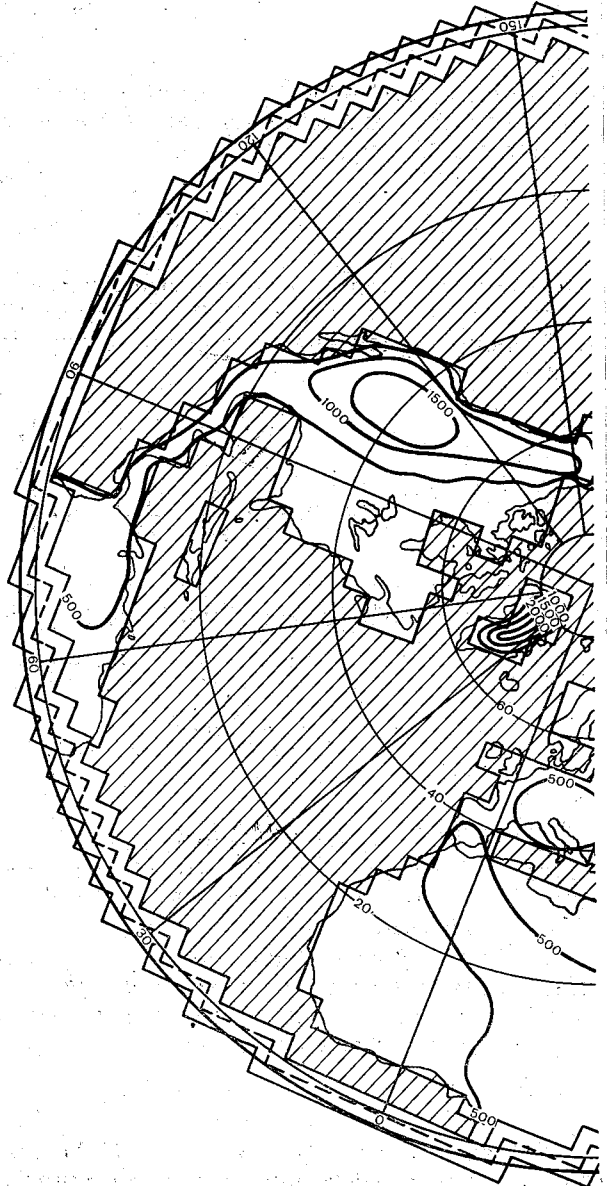
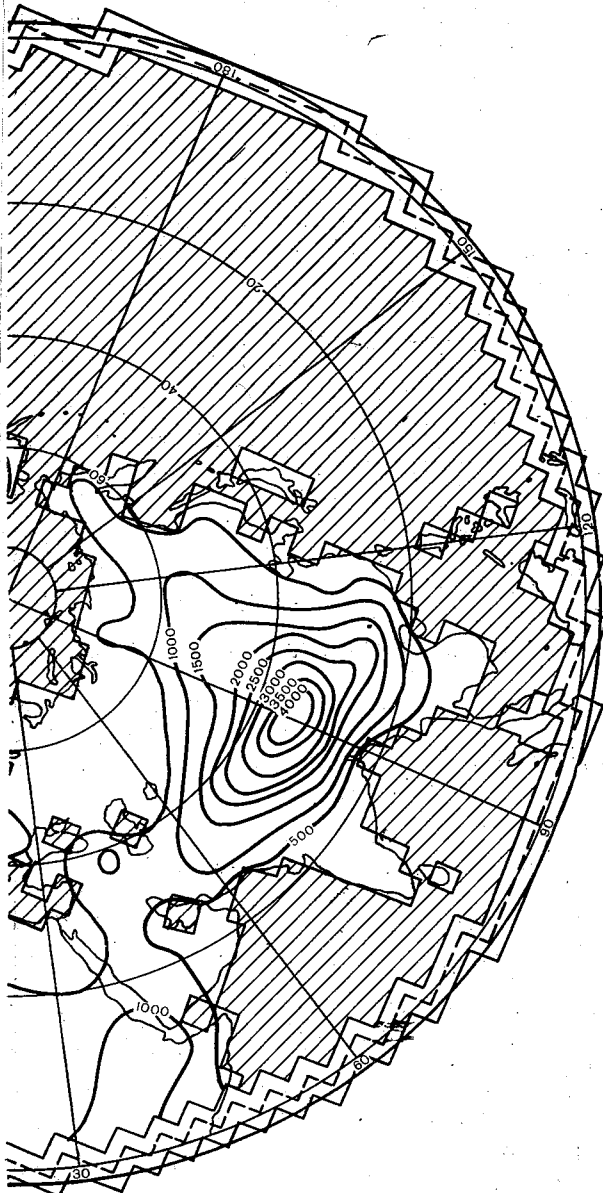


Рис. 1. Конфигурация мате





риков и их топография.

уравнениях описывали бы адвективные процессы подсеточного масштаба и не приводили бы к притоку или стоку момента количества движения, тепла и влаги в целом для всей области решения. Что касается тепла и влаги, то указанное условие удовлетворится в предположении, что

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial q}{\partial n} = 0. \quad (1.15)$$

Однако удовлетворить требованию сохранения момента количества движения для сетки стереографической проекции с принятой в модели конфигурацией границы не так просто. Приближенно указанное условие будет выполняться, если положить, что нормальная производная от касательной составляющей скорости на границе обращается в ноль, т. е.

$$\frac{\partial v_s}{\partial n} = 0. \quad (1.16)$$

Таким образом, система уравнений (1.1) — (1.11) с граничными условиями (1.12) — (1.16) является замкнутой, если в правых частях соответствующих уравнений члены, описывающие источники и стоки, выражаются через основные зависимые переменные  $u$ ,  $v$ ,  $T$ ,  $q$ ,  $p_s$ , а также некоторые внешние параметры, характеризующие свойства подстилающей поверхности.

## 2. ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ И ВЕРТИКАЛЬНАЯ СТРУКТУРА МОДЕЛИ

В модели используется квадратная сетка для стереографической проекции с главным масштабом на широте  $60^\circ$ . Расстояние по горизонтали, соответствующее шагу сетки, зависит от широты. Ниже приведены значения шага сетки для разных широт:

Широта, ° . . . . .	80	60	40	20	0
Шаг сетки, км . . . . .	616	580	510	416	310

На рис. 1 показана конфигурация сеточной области, граница которой обозначена штриховой линией. Из рисунка видно, что граница отстоит от ближайших к ней внутренних узлов на расстоянии полшага сетки и примерно совпадает с линией экватора. Общее число узлов на полусфере равно 1481.

В численных экспериментах с баротропной моделью на этой сетке с заданием начальных полей по Филлипсу [34], в которых, как известно, максимальные скорости ветра получаются на экваторе, было обнаружено развитие фиктивных вихрей у границы, вызванных, по-видимому, ее ломаной конфигурацией. В последующих расчетах с реальными данными и принятым горизонтальным разрешением сетки фиктивные вихри не обнаруживались ни в баротропной, ни в бароклинической моделях.

Вертикальная структура модели показана на рис. 2.

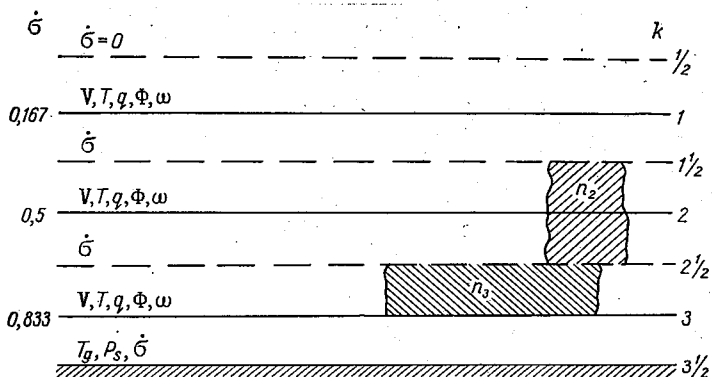


Рис. 2. Вертикальная структура модели.

### 3. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА

Для решения системы уравнений (1.1)–(1.11) с граничными условиями (1.12)–(1.16) используется конечно-разностная схема, предложенная Лилли [15]. Для простоты дальнейшего изложения используем обозначения для операторов суммы и разности

$$\bar{A}^x = \frac{1}{2} (A_{i+1/2} + A_{i-1/2}),$$

$$\delta_x A = \frac{1}{\Delta x} (A_{i+1/2} - A_{i-1/2}). \quad (3.1)$$

Здесь  $i$  — индекс узла на оси  $x$ ;  $\Delta x$  — расстояние между соседними узлами.

Уравнения (1.1)–(1.11), записанные для узла сетки  $(i, j, k)$  в обозначениях (3.1), принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} = & -m [\delta_x (\bar{U}^x \bar{u}^x) + \delta_y (\bar{V}^y \bar{u}^y)] - \delta_\sigma (\dot{\sigma} \bar{U}^\sigma) + \\ & + V (f^{(1)} + f^{(2)}) - p_s \left( (\delta_x \bar{\Phi}^x + R \bar{T}^x \delta_x \ln p_s^x) \right) + F_{su} + F_{\sigma u}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} = & -m [\delta_x (\bar{U}^x \bar{v}^x) + \delta_y (\bar{V}^y \bar{v}^y)] - \delta_\sigma (\dot{\sigma} \bar{V}^\sigma) - \\ & - U (f^{(1)} + f^{(2)}) - p_s \left( \delta_y \bar{\Phi}^y + R \bar{T}^y \delta_y \ln p_s^y \right) + F_{sv} + F_{\sigma v}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = & -m [\delta_x (\bar{U}^x \bar{T}^x) + \delta_y (\bar{V}^y \bar{T}^y)] - \delta_\sigma (\dot{\sigma} \bar{T}^\sigma) + \\ & + \frac{AR}{c_p} \frac{T}{m} \frac{\omega}{\sigma} + F_{sT} + F_{\sigma T} + \frac{\varepsilon}{m} + \frac{L p_s r}{c_p m}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = & -m [\delta_x (\bar{U}^x \bar{q}^x) + \delta_y (\bar{V}^y \bar{q}^y)] - \delta_\sigma (\dot{\sigma} \bar{q}^\sigma) + F_{sq} + F_{\sigma q} - \frac{p_s r}{m}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = -m^2 \Delta \sigma \sum_{l=1}^K (\delta_x \bar{U}^x + \delta_y \bar{V}^y), \quad (3.6)$$

$$\Phi_k = \Phi_{k+1} + \frac{R}{2} \sum_{l=1}^{K-1} (T_l + T_{l+1}) \ln \frac{\sigma_{l+1}}{\sigma_l} - R (T_K + T_g) \ln \sigma_K, \quad (3.7)$$

$$p_s \dot{\sigma}_{k-1/2} = m^2 \Delta \sigma \left[ \sum_{l=k}^K (\delta_x \bar{U}^x + \delta_y \bar{V}^y) - (1 - \sigma_{k+1/2}) \sum_{l=1}^K (\delta_x \bar{U}^x + \delta_y \bar{V}^y)_l \right], \quad (3.8)$$

$$\left( \frac{T_\omega}{\sigma} \right)_k = m^2 \left\{ U_k \bar{T}^x \delta_x \ln \bar{p}_s^x + V_k \bar{T}^y \delta_y \ln \bar{p}_s^y - T \left[ \ln \frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_{k-1}} \sum_{l=1}^K (\sigma_x \bar{U}^x + \delta_y \bar{V}^y) - \ln \frac{\sigma_k}{\sigma_{k-1}} \sum_{l=1}^K (\delta_x \bar{U}^x + \delta_y \bar{V}^y) \right] \right\}. \quad (3.9)$$

Здесь  $K = 3$ .

Для замкнутой области и при отсутствии источников и стоков энергии конечно-разностная схема (3.2) — (3.9) обеспечивает сохранение полной массы, момента количества движения и полной энергии (кинетическая + внутренняя + потенциальная).

Как известно, при вычислении силы барического градиента над крутыми склонами гор в  $\sigma$ -системе координат некоторые разностные аппроксимации оказываются непригодными вследствие присутствия им больших ошибок. Сравнительный анализ точности ряда схем, широко применяемых в моделях общей циркуляции атмосферы, выполненный в работе [11], показал, что разностное представление барического градиента, использованное в уравнениях (3.2) и (3.3), обеспечивает такую же точность его вычисления, как и в изобарической системе координат. Разностные выражения для остальных членов уравнений (3.2) — (3.5) приводятся ниже при обсуждении схем параметризации отдельных физических процессов.

#### 4. РАДИАЦИЯ

При расчете потоков и притоков радиации учитывается влияние поглощения водяным паром и облаками, а также рассеяние молекулами воздуха, аэрозолем и облачными частицами. В модели реализуется двухслойная слоистообразная облачность с фиксированными границами.

Границы облаков среднего яруса расположены на уровнях:  $k = 1 + 1/2$  — верхняя граница,  $k = 2 + 1/2$  — нижняя граница, для

облаков нижнего яруса — на уровнях  $k = 2 + 1/2$  и  $k = 3$ . Способ вычисления балла облачности каждого яруса изложен в п. 6.

В расчетах потоков длинноволновой радиации облако считается абсолютно черным телом, излучающим при температуре его верхней и нижней границ. Нижняя граница облаков считается непроницаемой для восходящего потока коротковолновой радиации. При расчете потоков коротковолновой радиации облакам приписываются неизменные величины альbedo и поглощательной способности. Эти характеристики не меняются в процессе интегрирования по времени и зависят только от яруса облачности. Приблизительно величины альbedo и поглощательной способности известны из расчетов и измерений в реальных условиях [7, 8].

Расчеты были произведены при следующих значениях альbedo облаков среднего и нижнего яруса:  $\alpha_2 = 0,25$ ,  $\alpha_3 = 0,5$  и поглощательной способности облаков среднего и нижнего яруса:  $\beta_2 = 0,01$ ,  $\beta_3 = 0,03$ . Эти величины альbedo были выбраны на основе ряда численных экспериментов. Поглощательная способность была задана близкой к величинам, использованным в модели [9], хотя, если учесть данные [8], они являются заниженными.

Радиационные притоки тепла на уровнях  $\sigma_k$  рассчитываются по формуле

$$\varepsilon_k = \frac{g}{c_p} \delta_k (\tilde{Q}^\downarrow - \tilde{Q}^\uparrow). \quad (4.1)$$

Здесь  $\tilde{Q}^\downarrow$ ,  $\tilde{Q}^\uparrow$  — полные нисходящий и восходящий потоки радиации с учетом влияния облачности.

#### 4.1. Расчет потоков длинноволновой и коротковолновой радиации в условиях несплошной облачности

Потоки радиации в условиях несплошной облачности рассчитываются в предположении, что отношение площади неба, закрытой одновременно двумя или несколькими слоями облаков, ко всей видимой площади неба равно произведению количества облаков соответствующих ярусов (в долях единицы). Нисходящий поток рассчитывается по формуле

$$\tilde{Q}_{k+1/2}^\downarrow = \sum_{l=1}^4 (S_{k+1/2}^{l\downarrow} a_{k+1/2}^l + R_{k+1/2}^{l\downarrow} \tilde{a}_{k+1/2}^l). \quad (4.2)$$

Здесь  $S_{k+1/2}^{l\downarrow}$  — нисходящий поток коротковолновой радиации,  $R_{k+1/2}^{l\downarrow}$  — нисходящий поток длинноволновой радиации,  $a_{k+1/2}^l$  — множитель, учитывающий влияние облачности на перенос коротковолновой радиации (табл. 1),  $\tilde{a}_{k+1/2}^l$  — множитель, учитывающий влияние облачности на перенос длинноволновой радиации (табл. 2).

В таблицах  $\hat{n}_2 = n_2(1 - n_3)$  — балл облаков, видимых снизу,  $\tilde{n}_3 = n_3(1 - n_2)$  — балл облаков, видимых сверху.

Таблица 1

$k + 1/2$	$l$			
	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	1	0	0	0
3	$1 - n_2$	$n_2$	0	0
4	$1 - \hat{n}_2 - n_3$	$\hat{n}_2$	$\tilde{n}_3$	$n_2 n_3$

Таблица 2

$k + 1/2$	$l$			
	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	1	0	0	0
3	$1 - n_2$	0	$n_2$	0
4	$1 - \hat{n}_2 - n_3$	0	$\hat{n}_2$	$\tilde{n}_3$

Восходящий поток рассчитывается по формуле

$$\tilde{Q}_{k+1/2}^{\uparrow} = \sum_{n=1}^4 S_{k+1/2}^{\uparrow n} b_{k+1/2}^n + R_{k+1/2}^{\uparrow n} \tilde{b}_{k+1/2}^n, \quad (4.3)$$

где  $S_{k+1/2}^{\uparrow n}$  — восходящий поток коротковолновой радиации,  $R_{k+1/2}^{\uparrow n}$  — восходящий поток длинноволновой радиации,  $b_{k+1/2}^n$  — множитель, учитывающий влияние облачности на восходящий коротковолновый поток (табл. 3),  $\tilde{b}_{k+1/2}^n$  — множитель, учитывающий влияние облачности на восходящий длинноволновый поток (табл. 4).

Таблица 3

$k + 1/2$	$n$			
	1	2	3	4
1	$1 - \hat{n}_2 - n_3$	$\tilde{n}_3$	$n_2$	0
2	$1 - \hat{n}_2 - n_3$	$\tilde{n}_3$	$n_2$	0
3	$1 - \hat{n}_2 - n_3$	$\tilde{n}_3$	$n_2 n_3$	$\hat{n}_2$
4	$1 - \hat{n}_2 - n_3$	$\tilde{n}_3$	$\hat{n}_2$	$n_2 n_3$

Таблица 4

$k + 1/2$	$n$			
	1	2	3	4
1	$1 - \hat{n}_2 - n_3$	$\tilde{n}_3$	$n_2$	0
2	$1 - \hat{n}_2 - n_3$	$\tilde{n}_3$	$n_2$	0
3	$1 - n_3$	$n_3$	0	0
4	1	0	0	0

Формулы (4.2) — (4.3) наряду с таблицами 1—4 предполагают использование потоков, рассчитанных отдельно для безоблачных условий и для условий сплошной облачности. Ниже рассмотрены способы их расчета.

## 4.2. Коротковолновая радиация

Расчет потоков коротковолновой радиации производится в интервале спектра 0,29—5 мкм, разделенном на две части: 0,29—0,7 мкм и 0,7—5 мкм. В области спектра 0,29—0,7 мкм путем введения подозонной солнечной постоянной, учитывается ослабление озоном коротковолновой радиации. В области спектра 0,7—5 мкм учитывается поглощение радиации водяным паром и углекислым газом. Для учета влияния рассеяния на перенос коротковолновой радиации с помощью двухпараметрической модели [13] задается оптическое состояние атмосферы. При этом рассмотрено влияние слоя рассеивающего аэрозоля толщиной примерно 3 км, лежащего вблизи подстилающей поверхности.

Формула для среднего за сутки нисходящего потока в близкой инфракрасной области спектра для безоблачных условий имеет следующий вид:

$$S_{k+1/2}^{\downarrow} = T_u(m^*) M_2 \tilde{r} \overline{\cos i}, \quad (4.4)$$

где  $M_2 = 0,984$  кал/(см<sup>2</sup>·мин) — солнечная энергия в этой части спектра,  $\overline{\cos i}$  — среднее за светлое время суток значение косинуса зенитного угла,  $\tilde{r}$  — доля светлого времени суток по отношению к целым суткам,  $T_u$  — интегральная функция пропускания [5], имеющая вид

$$T_u(m^*) = 0,878e^{-0,0922 \sqrt{m^*}} + 0,122e^{-2,99 \sqrt{m^*}}. \quad (4.5)$$

Здесь

$$m^* = \frac{p_s}{g} \int_0^{\sigma} q \xi d\xi \quad (4.6)$$

— эффективная поглощающая масса водяного пара, рассчитанная с учетом зависимости поглощения от давления [26].

В условиях сплошной облачности нисходящие потоки  $S_{k+1/2}^{\downarrow}$  рассчитываются по формулам:

$$S_4^{\downarrow} = 0,95 S_3^{\downarrow l-2} (1 - \alpha_3 - \beta_3) \text{ при } l=3, 4, \quad (4.7)$$

$$S_{k+1/2}^{\downarrow} = S_2^{\downarrow l} (1 - \alpha_2 - \beta_2) \delta_k \text{ при } l=2 \text{ и } k+1/2=3, 4. \quad (4.8)$$

Здесь

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \text{при } k+1/2=3, \\ 0,95 & \text{при } k+1/2=4. \end{cases}$$

Коэффициент  $\delta_k = 0,95$  учитывает поглощение в подоблачном слое [3]. Потоки  $S_2^{\downarrow l}$ ,  $S_3^{\downarrow l}$ ,  $S_3^{\downarrow 2}$  рассчитываются по формуле (4.4).

Восходящий поток коротковолновой радиации, отраженный в безоблачную часть атмосферы от земли или верхней границы облаков, вычисляется по формуле

$$S_{k+1/2}^{\uparrow n} = \alpha_{5-n} T_u (m_{5-n}^* + 1,66 m_{5-n}^{k+1/2}) M_2 \tilde{r} \overline{\cos i}, \quad (4.9)$$

где

$$m_{5-n}^{k+1/2} = m_{5-n}^* - m_{k+1/2}^*; \quad (4.10)$$

$m_{5-n}^*$  и  $m_{k+1/2}^*$  рассчитываются по формуле (4.6).

Потоки, отраженные от верхней границы облака или от подстилающей поверхности, после прохождения слоя вышележащих облаков рассчитываются по следующим формулам:

— при  $k+1/2 = 4$ ,  $n = 2, 3$  и  $k+1/2 = 3$ ,  $n = 3$

$$S_{k+1/2}^{\uparrow n} = \alpha_{k+1/2} S_{k+1/2}^{\downarrow l} \quad (l = 5 - n); \quad (4.11)$$

— при  $k+1/2 = 3, 4$ ,  $n = 4$

$$S_3^{\uparrow 4} = 0,95 \alpha_4 S_4^{\downarrow 2}, \quad (4.12)$$

$$S_4^{\uparrow 4} = \alpha_4 S_4^{\downarrow 3}. \quad (4.13)$$

Входящие в формулы (4.11), (4.12), (4.13) нисходящие потоки рассчитываются по формулам (4.7), (4.8),  $\alpha_k$  — альbedo подстилающей поверхности.

### 4.3. Длинноволновая радиация

Потоки длинноволновой радиации в безоблачных условиях и условиях сплошной облачности рассчитываются следующим образом [1]:

$$R_{k+1/2}^{\downarrow l} = E(T_l) D(m_l - m_{k+1/2}) - \int_{m_{k+1/2}}^{m_l} E[T(\zeta)] dD(\zeta - m_{k+1/2}), \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} R_{k+1/2}^{\uparrow n} = & E(T_{5-n}) D(m_{k+1/2} - m_{5-n}) + \\ & + \int_{m_{5-n}}^{m_{k+1/2}} E[T(\zeta)] dD(m_{k+1/2} - \zeta). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Здесь  $m_{k+1/2}$  — эффективная поглощающая масса;  $n$  и  $l$  — индексы, характеризующие источник излучения (подстилающая поверхность, границы облаков, безоблачная атмосфера);  $D(m)$  — интегральная функция пропускания, учитывающая влияние водяного



пара и углекислого газа, которая рассчитывается по формуле из работы [17]

$$D(m) = 0,471e^{-0,695\sqrt{m}} + 0,529e^{-8,94\sqrt{m}}, \quad (4.16)$$

где

$$m = -\frac{P_s}{g} \int_0^{\sigma} q(\xi) \sqrt{\xi} d\xi. \quad (4.17)$$

В случае безоблачной атмосферы в формуле (4.14)  $T_l$  полагается равной температуре на самом верхнем расчетном уровне, что соответствует предположению об изотермии в верхнем слое атмосферы, а  $m_l = M$ , где

$$M = -\frac{P_s}{g} \int_0^1 q(\xi) \sqrt{\xi} d\xi. \quad (4.18)$$

$E = \sigma_* T_*^4$  — излучение абсолютно черного тела.

#### 4.4. Баланс коротковолновой радиации на подстилающей поверхности

Расчет баланса коротковолновой радиации на подстилающей поверхности производится с учетом потоков в обеих частях спектра (0,29—0,7 мкм, 0,7—5 мкм). Для описания процесса рассеяния падающей солнечной радиации используется функция рассеяния, предложенная В. В. Соболевым [16] для монохроматического излучения. Чтобы избежать интегрирования по спектру, которое необходимо для получения интегрального потока, была использована «эффективная» функция рассеяния, относящаяся к одному спектральному интервалу, которая наилучшим образом описывает интегральный поток во всем участке спектра [2, 4]. Таким образом, расчет нисходящего потока на поверхность с заданным альбедо (подстилающая поверхность или верхняя граница облаков) из безоблачной части атмосферы производится по формуле

$$S_*^{\downarrow} = [B^*(\lambda_{2\text{эф}}) T_n(m^*) M_2 + B^*(\lambda_{1\text{эф}}) M_1] \tilde{r} \overline{\cos i}, \quad (4.19)$$

где  $\lambda_{1\text{эф}}$  — эффективная длина волны в участке 0,29—0,7 мкм,  $\lambda_{2\text{эф}}$  — эффективная длина волны в участке 0,7—5,0 мкм,  $M_1 = 0,926$  кал/(см<sup>2</sup>·мин) — подозонная солнечная энергия в участке 0,29—0,7 мкм,  $B^*(\lambda)$  — функция рассеяния [16], остальные обозначения известны. С учетом (4.19) баланс коротковолновой радиации на подстилающей поверхности рассчитывается по формуле

$$\tilde{S}_g = (1 - \alpha_4) \sum_{l=1}^4 S_4^{\downarrow l} a_4^l, \quad (4.20)$$

где  $S_4^{\downarrow l}$  определяется по формулам (4.4), (4.7), (4.8),  $a_4^l$  из табл. 1.

## 5. КОНДЕНСАЦИЯ И КОНВЕКЦИЯ

Учет притоков тепла, обусловленных фазовыми превращениями воды в атмосфере, производится в модели путем параметризации двух процессов: конденсации водяного пара вследствие крупномасштабных движений (крупномасштабная конденсация) и выделения скрытой теплоты при конвекции, возникающей во влажно-неустойчивых слоях атмосферы. Оба эти процесса играют важную роль в энергетическом балансе атмосферы, причем конвективный тепло- и влагообмен оказывает существенное влияние на интенсивность меридиональной циркуляции в тропических областях [9].

### 5.1. Крупномасштабная конденсация

Согласно принятой схеме, конденсация водяного пара имеет место в случае, если для рассчитанных без учета фазовых притоков тепла значений температуры и удельной влажности выполняется условие

$$q > h_{кр} q_m(T, \sigma), \quad (5.1)$$

где  $q_m(T, \sigma) = \frac{3,8}{\sigma p_s} \exp \frac{17,15(T-273)}{T-38}$ ,  $h_{кр} = 0,8$  — критическое значение относительной влажности в элементарной ячейке, где происходит конденсация водяного пара.

Изменение температуры  $\delta T$  и влажности  $\delta q$  в результате конденсации определяются из соотношений

$$c_p \delta T + L \delta q = 0, \quad (5.2)$$

$$q + \delta q = h_{кр} q_m(T + \delta T, \sigma), \quad (5.3)$$

которые после разложения правой части (5.3) в ряд по степеням  $\delta T$  с использованием первых двух членов разложения и уравнения Клаузиуса—Клапейрона дают

$$\delta T = \frac{L}{c_p} \frac{q - h_{кр} q_m(T, \sigma)}{1 + \frac{h_{кр} L^2 q_m(T, \sigma)}{c_p A R_{\pi} T^2}}. \quad (5.4)$$

Новое значение температуры  $T + \delta T$  определяется с учетом (5.4). Новое значение удельной влажности рассчитывается по формуле (5.3), а количество сконденсированной влаги  $r^I$  определяется как

$$r^I = -\delta q. \quad (5.5)$$

Общее количество крупномасштабных осадков  $P_1$ , выпавших в единичном столбе атмосферы, определяется как сумма осадков, образовавшихся в отдельных расчетных слоях. Однако ввиду того, что верхний расчетный уровень в модели  $\sigma_1 = 0,167$  находится в стратосфере (по крайней мере во внетропических широтах) для

исключения крупномасштабной конденсации в стратосфере избыток влаги на верхнем уровне (если он образуется) переносится в нижележащий слой. Таким образом, количество выпавших в единичном столбе атмосферных крупномасштабных осадков определяется по формуле

$$P_1 = \frac{P_s \Delta \sigma}{g} \sum_{k=2}^K r_k^I. \quad (5.6)$$

## 5.2. Конвекция

Для расчета притоков тепла, обусловленных конвекцией, применяется так называемая схема конвективного приспособления [9], основанная на предположении о том, что при конвекции статическая энергия неустойчивого слоя остается неизменной и в результате в слое устанавливается некоторый равновесный вертикальный градиент температуры  $\Gamma_p$ . Обычно в качестве  $\Gamma_p$  выбирается сухоадиабатический градиент температуры  $\Gamma_a$ , если относительная влажность  $h < 1$  и влажно-адиабатический градиент  $\Gamma_{ва}$  — при  $h = 1$ . Однако при этом в процессе вычислений могут возникнуть «шоковые» эффекты, связанные с резким переходом вертикального градиента температуры от сухоадиабатического к влажно-адиабатическому.

В настоящей модели принята схема расчета  $\Gamma_p$ , аналогичная той, которая предложена в работе [19], а именно:

$$\Gamma_p = \begin{cases} \Gamma_a & \text{при } h \leq h_c, \\ \Gamma_a \frac{h_{кр} - h}{h_{кр} - h_c} + \Gamma_{ва} \frac{h - h_c}{h_{кр} - h_c} & \text{при } h_c < h < h_{кр}, \\ \Gamma_{ва} & \text{при } h \geq h_{кр}. \end{cases} \quad (5.7)$$

Здесь  $h_c = 0,5$ .

В соответствии с указанными выше положениями, если вертикальный градиент температуры  $\Gamma = \frac{\partial T}{\partial \sigma}$  в расчетном слое ( $\sigma_k$ ,  $\sigma_{k+1}$ ) превышает  $\Gamma_p$ , то соответствующие поправки  $\delta T$  и  $\delta q$  определяются путем решения следующей системы уравнений:

$$\int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} (c_p \delta T + L \delta q) d\sigma = 0, \\ \frac{\partial (T + \delta T)}{\partial \sigma} = \Gamma_p. \quad (5.8)$$

Поскольку, согласно (5.7), частичная конденсация происходит и при  $h < h_{кр}$ , то вводится дополнительное предположение о том, что относительная влажность не изменяется в процессе конденсации,

$$\delta q = h [q_m(T + \delta T, \sigma) - q_m(T, \sigma)] \approx \\ \approx \frac{L h q_m(T, \sigma)}{AR_n T^2} = \frac{L q}{AR_n T^2} \delta T, \quad (5.9)$$

и система (5.8) записывается в виде:

$$\int_{\sigma_k}^{\sigma_{k+1}} c_p b(\sigma) \delta T d\sigma = 0,$$

$$\frac{\partial(\delta T)}{\partial \sigma} = \Gamma_p - \Gamma, \quad (5.10)$$

где

$$b(\sigma) = 1 + \frac{L^2 q}{c_p A R_{\Pi} T^2}. \quad (5.11)$$

Вычисляя интеграл в (5.9) по формуле трапеций и используя конечно-разностную аппроксимацию производной в (5.10), получим следующие соотношения:

$$\delta T_k = \frac{b_{k+1}(\Gamma - \Gamma_p) \Delta \sigma}{b_k + b_{k+1}},$$

$$\delta T_{k+1} = - \frac{b_k(\Gamma - \Gamma_p) \Delta \sigma}{b_k + b_{k+1}}. \quad (5.12)$$

Здесь

$$\delta T_k = \delta T(\sigma_k), \quad b_k = b(\sigma_k).$$

Изменения удельной влажности на уровнях  $\sigma_k$  и  $\sigma_{k+1}$  определяются по (5.9). Общее количество влаги, сконденсировавшееся в слое  $(\sigma_k, \sigma_{k+1})$ , определяется как сумма:

$$r_k^{\text{II}} = \delta q_k + \delta q_{k+1}. \quad (5.13)$$

В случае, если слой оказывается сухонеустойчивым,  $\delta q \equiv 0$  и  $b \equiv 1$ . Тогда  $|\delta T_k| = |\delta T_{k+1}|$  и при  $T_{k+1} > T_k$  будет, согласно (5.9),  $|\delta q_{k+1}| > |\delta q_k|$ . Но так как, согласно (5.12), на нижней границе слоя  $\delta T_{k+1} < 0$  и, следовательно,  $\delta q_{k+1} < 0$ , то величина  $r_k^{\text{II}}$  окажется отрицательной. Поэтому в случае, если для какого-либо расчетного слоя, в котором имеет место конвективная неустойчивость,  $r_k^{\text{II}} < 0$ , значения  $\delta T$  пересчитываются при условии  $b_k = b_{k+1} = 1$ .

Изменения температуры на границах рассматриваемого слоя могут привести к возникновению неустойчивости в выше- или нижележащих слоях. Поэтому указанная выше процедура расчета повторяется по всем расчетным слоям модели до тех пор, пока вся атмосфера не станет устойчивой.

Количество влаги, выпавшей в единичном столбе атмосферы в виде конвективных осадков, определяется по формуле

$$P_2 = \frac{P_s \Delta \sigma}{g} \sum_{k=1}^K r_k^{\text{II}}. \quad (5.14)$$

В модели принято предположение о том, что относительная влажность на верхнем уровне не превышает 40 %. В процессе расчетов удельная влажность в отдельных узлах сетки может ока-

заться отрицательной. В таком случае влажность в этой точке полагается равной нулю, а недостающее количество влаги берется с нижележащего уровня. Если на уровне  $\sigma_3$  удельная влажность отрицательна, то вводится дополнительный приток влаги от подстилающей поверхности, который, однако, оказывается пренебрежимо мал и не превышает 1 % от рассчитываемой величины испарения в пограничном слое атмосферы.

## 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ БАЛЛА ОБЛАКОВ

Как известно, для вычисления балла облаков предложен ряд эмпирических соотношений, в которых эта характеристика выражается через относительную влажность [19]. В литературе неоднократно высказывалась точка зрения, что один параметр, а именно относительная влажность не может с одинаковой успешностью описывать как слоистые, так и кучевые облака. Предварительная проверка ряда таких соотношений показала, что ни одно из них не позволяет получить удовлетворительное зональное распределение облачности одновременно в высоких и низких широтах. Как правило, балл облаков оказывается или систематически завышенным в высоких широтах, или заниженным в низких широтах.

В модели балл облаков каждого яруса вычислялся с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} n_2 &= -0,27 + 1,07h_2 + 0,05q_2, \\ n_3 &= -0,4 + h_3 + 0,01q_3. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь  $n_2$  и  $n_3$  — баллы облаков среднего и нижнего ярусов, а  $q_l$  и  $h_l$  — удельная и относительная влажность на уровне  $\sigma_l$  ( $l = 2, 3$ ). Удельная влажность берется в г/кг.

Кроме общего условия  $n_2, n_3 \geq 0$ , для облаков среднего яруса используется также условие  $n_2 = 0$  при  $q_2 \leq 0,2$  г/кг. Согласно данным наблюдений, в высоких широтах зимой при очень низких температурах выше 4 км облачность обычно не образуется. Последнее условие как раз отражает этот факт. Как показали результаты расчетов для средних и низких широт это ограничение несущественно.

## 7. ТУРБУЛЕНТНЫЕ ПРИТОКИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ, ТЕПЛА И ВЛАГИ

Вследствие малого вертикального разрешения модели влияние пограничного слоя на процессы в свободной атмосфере учитывается интегрально через значение потоков, вычисленных на границах промежуточных уровней. В настоящее время имеется ряд упрощенных схем параметризации пограничного слоя, пригодных для использования в моделях с малым вертикальным разрешением. Среди них широкое распространение получили схемы, основанные на использовании соотношений теории подобия [6].

На данном этапе исследований мы включили в модель сравнительно простую и апробированную схему вычисления напряжения трения, турбулентных потоков тепла и влаги, в которой используются предложенные Дирдорфом формулы для расчета коэффициента вертикального турбулентного обмена [21] в моделях общей циркуляции атмосферы.

В уравнениях (1.1)–(1.4) члены, включающие притоки количества движения, тепла и влаги, имеют следующий вид:

$$F_{\sigma u} = -\frac{g}{m} \frac{\partial \tau_x}{\partial \sigma}, \quad F_{\sigma v} = -\frac{g}{m} \frac{\partial \tau_y}{\partial \sigma},$$

$$F_{\sigma T} = \frac{g}{c_p m} \frac{\partial H}{\partial \sigma}, \quad F_{\sigma q} = \frac{g}{m} \frac{\partial E}{\partial \sigma}. \quad (7.1)$$

Согласно работе [21], составляющие потоков турбулентного напряжения трения, потоки тепла и влаги в приземном слое атмосферы вычисляются по формулам:

$$\tau_{xs} = \rho c_D |\mathbf{V}| u_s,$$

$$\tau_{ys} = \rho c_D |\mathbf{V}| v_s,$$

$$H_s = -\rho c_p c_{DT} |\mathbf{V}| (T_s - T_g),$$

$$E_s = -\rho c_{DT} |\mathbf{V}| (q_s - q_g). \quad (7.2)$$

Здесь  $c_D = 0,003$ ,  $c_{DT} = 0,002$ ,  $T_s$  — температура на верхней границе приземного слоя,  $T_g$  — температура воздуха у поверхности земли,  $q_g$  — насыщенное значение удельной влажности при температуре  $T_g$ ,  $|\mathbf{V}| = \sqrt{u_s^2 + v_s^2}$  — модуль скорости на верхней границе приземного слоя.

Соответствующие выражения для турбулентных потоков в пограничном слое записываются в виде:

$$\tau_{xb} = \alpha_1 K_v (u_3 - u_s),$$

$$\tau_{yb} = \alpha_1 K_v (v_3 - v_s),$$

$$H_b = \alpha_1 c_p K \left[ \left( T_s - \frac{T_3}{p_3^*} \right) + \alpha_2 \gamma c \sigma \right], \quad (7.3)$$

$$E_b = \alpha_1 K_v (q_s - q_3),$$

$$\alpha_1 = \frac{2g p_s}{R^2 \bar{T}_s^2 \Delta \sigma}, \quad \alpha_2 = \frac{R \bar{T}_s \Delta \sigma}{g^2}.$$

Здесь  $T_s$  — средняя температура в пограничном слое,  $K_v$  — коэффициент вертикального турбулентного обмена.

Неизвестные  $u_s$ ,  $v_s$ ,  $T_s$  и  $q_s$  находятся из соотношений (7.2) и (7.3) в предположении, что потоки непрерывны на границе между приземным и пограничным слоем и вектор турбулентного

напряжения трения в обоих слоях имеет одно и то же направление.

Коэффициент турбулентного обмена вычисляется по эмпирическим формулам, предложенным Дирдорфом [21]:

$$K_v = \begin{cases} a_1 + a_2 [1 - \exp(-a_3 D_T)] & \text{при } D_T \geq 0, \\ \frac{a_1}{1 + a_4 \text{Ri}} + a_5 & \text{при } D_T < 0, \end{cases}$$

$$\text{Ri} = -\frac{g}{T} \frac{D_T}{\left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial \sigma} \right)^2 + a_6 \right]} a_7,$$

$$D_T = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{T}{\sigma^2} \right) + a_8 \gamma_{c\theta}. \quad (7.4)$$

Здесь  $\gamma_{c\theta}$  — аналог равновесного градиента температуры; на уровне  $s$  он принят равным  $5 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C/м}$ , на вышележащих уровнях  $\gamma_{c\theta} = 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C/м}$ . Остальные константы имеют следующие значения:

$$a_1 = 10 \text{ м}^2/\text{с}, \quad a_2 = 10^2 \text{ м}^2/\text{с}, \quad a_3 = 0,12 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}, \quad a_4 = 40,$$

$$a_5 = 2 \text{ м}^2/\text{с}, \quad a_6 = 10^{-12} \text{ м}^2/\text{с}, \quad a_7 = 10^{-4} \text{ м}, \quad a_8 = 10^4 \text{ м}.$$

Турбулентные потоки количества движения, тепла и удельной влажности вычисляются на уровнях, имеющих целочисленный индекс  $k$  по значениям потоков, определяемых на промежуточных уровнях  $k \pm 1/2$ .

Соотношения (7.1) для узла  $(i, j, k)$  переписутся в виде:

$$F_{\sigma u} = -\frac{g}{m} \delta_\sigma \tau_x, \quad F_{\sigma v} = -\frac{g}{m} \delta_\sigma \tau_y,$$

$$F_{\sigma T} = \frac{g}{c_p m} \delta_\sigma H, \quad F_{\sigma q} = \frac{g}{m} \delta_\sigma E. \quad (7.5)$$

В модели принято

$$\tau_x = \tau_y = E = 0 \quad \text{при } k \leq 2 \pm 1/2,$$

$$H = 0 \quad \text{при } k \leq 1 + 1/2.$$

При вычислении  $\tau_{xs}$ ,  $\tau_{gs}$ ,  $H_s$  и  $E_s$  у поверхности земли принято, что  $|\mathbf{V}|_s$  не может быть меньше 3 м/с, тем самым предполагается наличие турбулентного потока и при малых скоростях ветра.

При вычислении турбулентных потоков тепла и влаги необходимо знать температуру и влажность вблизи подстилающей поверхности. Они определяются по-разному в зависимости от свойств подстилающей поверхности. В модели рассматриваются четыре типа поверхностей.

а) *Поверхность материка свободная от льда и снега.* Температура вычисляется из уравнения теплового баланса

$$\sigma_* T_g^4 + H + LE + \Pi = \tilde{S}_g + R_g^{\downarrow}.$$

Согласно исследованию Т. А. Огневой [12], существует связь между потоком тепла в почву  $\Pi$  и радиационным балансом на подстилающей поверхности

$$\Pi = \alpha [\tilde{S}_g + R_g^{\downarrow} - \sigma_* T_g^4].$$

Здесь  $\alpha = 0,10$ .

Как и в работе [28], испарение с поверхности суши рассчитывается в предположении, что затраты тепла на испарение равны турбулентному потоку тепла. Если температура подстилающей поверхности ниже  $0^\circ\text{C}$ , то  $E = 0$ .

б) *Поверхность материка покрытая снегом или льдом со снегом.* Как и в случае «а», температура вычисляется из уравнения теплового баланса. Если в результате решения этого уравнения температура оказывается выше точки замерзания, то считается, что весь избыток тепла затрачивается на таяние снега или льда и температура остается равной  $273\text{ K}$ . Поток тепла в почву и испарение принимаются пренебрежимо малыми.

в) *Морской лед.* Испарение при отрицательных температурах над поверхностью льда равно нулю. Температура вычисляется из уравнения теплового баланса и не может превышать  $273\text{ K}$ . Это значит, что весь избыток тепла затрачивается на таяние льда и снега.

Поток тепла через лед определяется в предположении, что толщина льда во всем полярном бассейне одинакова и профиль температуры в толще льда, включая и снежный покров, линейный:

$$\Pi = K_s (T_g - T_b).$$

Для Арктического бассейна температура воды  $T_b$  подо льдом в январе принята постоянной, равной  $271\text{ K}$ . При  $K_s = 0,17 \times 10^{-4} \text{ кал}/(\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot ^\circ\text{C})$  и коэффициенте молекулярной теплопроводности, равном  $5 \cdot 10^{-3} \text{ кал}/(\text{см} \cdot \text{с} \cdot ^\circ\text{C})$ , неявно сделано предположение, что толщина льда равна  $3\text{ м}$ .

г) *Водная поверхность океанов и морей.* Величины  $\tau_x$ ,  $\tau_y$ ,  $H$  и  $E$  вычисляются из соотношений (7.2), (7.3) в предположении, что температура у поверхности известна и воздух насыщен.

## 8. ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ ДИФFUЗИЯ

В модели используется нелинейная схема диффузии, основанная на идеях теории трехмерной изотропной турбулентности [15]. В этой схеме коэффициент вихревой вязкости принимается пропорциональным полной деформации крупномасштабного горизонтального потока. Члены, описывающие изменения количества дви-



жения, тепла и влаги за счет горизонтального перемешивания в уравнениях (1.1)–(1.4), имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 F_{su} &= \frac{m^2}{p_s} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( p_s \frac{KD_T}{m} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( p_s \frac{KD_s}{m} \right) \right], \\
 F_{sv} &= \frac{m^2}{p_s} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( p_s \frac{KD_s}{m} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( p_s \frac{KD_T}{m} \right) \right], \\
 F_{sT} &= \frac{m^2}{p_s} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( p_s K \frac{\partial T/p^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( p_s K \frac{\partial T/p^*}{\partial y} \right) \right], \\
 F_{sq} &= \frac{m^2}{p_s} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( p_s K \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( p_s K \frac{\partial q}{\partial y} \right) \right], \\
 D_T &= m^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u}{m} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v}{m} \right) \right], \\
 D_s &= m^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{v}{m} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u}{m} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{8.1}$$

Здесь

$$K = 2 \left( \frac{k_1 \Delta s}{m} \right)^2 (D_T^2 + D_s^2)^{1/2}. \tag{8.2}$$

При заданном горизонтальном разрешении  $\Delta s$  интенсивность вихревой вязкости определяется значением  $k_1$ . В модели принято  $k_1 = 0,25$ . Конечно-разностные аналоги для соотношений (8.1) брались такими же, как в работе [15]. Необходимо отметить, что особенность этой разностной аппроксимации заключается в том, что максимальное подавление возмущений приходится на длину волны  $4\Delta s$ .

Данная схема диффузии широко используется в ряде моделей общей циркуляции атмосферы [31] хотя, как показали недавние исследования, является недостаточно избирательной в подавлении возмущений с малой длиной волны.

## 9. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ВРЕМЕНИ

Уравнения (1.18)–(1.22) интегрируются методом центральных разностей по времени. Пусть  $A = \{U, V\}$ . Тогда разностную аппроксимацию уравнений (1.18)–(1.19) можно записать в виде

$$A^{\tau+1} = A^{\tau-1} + 2 \Delta t (Y^\tau + F_{sA}^{\tau-1} + F_{\sigma A}^{\tau+1}). \tag{9.1}$$

Здесь  $Y$  — правые части уравнений (1.18)–(1.19) без членов, описывающих горизонтальную диффузию  $F_{sA}$ , и турбулентное напряжение трения  $F_{\sigma A}$ .

Из соотношения (9.1) следует, что турбулентное напряжение трения берется в момент времени  $\tau+1$ ; тем самым схема оказывается частично неявной. Предварительные вычисления показали, что эта схема обеспечивает устойчивость счетного алгоритма для уравнений движения.

Интегрирование уравнений притока тепла и переноса влаги производится также по схеме (9.1), но все члены в правой части вычисляются в момент времени  $\tau - 1$ . Радиационные и турбулентные притоки тепла рассчитываются через каждые 4 часа.

Как известно, схема центральных разностей дает два решения: физическое и фиктивное. Для исключения фиктивного решения поля переменных  $U, V, \tilde{T}, \tilde{q}$  и  $p_s$  фильтруются на трех последовательных шагах через каждые 48 шагов с помощью трехточечного фильтра

$$\bar{A}^\tau = A^\tau + 0,5(A^{\tau-1} - 2A^\tau + A^{\tau+1}), \quad (9.2)$$

который полностью гасит высокочастотные возмущения с периодом  $2\Delta t$ , генерируемые фиктивным решением.

После фильтрования интегрирование начинается по схеме Мацую

$$\begin{aligned} A^* &= \bar{A}^\tau - \Delta t (Y^\tau + F_{sA}^\tau + F_{\sigma A}^{\sigma*}), \\ A^{\tau+1} &= \bar{A}^\tau + \Delta t (Y^* + F_{sA}^\tau + F_{\sigma A}^{\sigma+1}), \end{aligned} \quad (9.3)$$

и после однократной реализации этой схемы счет продолжается по схеме центральных разностей. С учетом критерия устойчивости шаг по времени  $\Delta t$  брался равным 10 мин.

## 10. ОТФИЛЬТРОВЫВАНИЕ ПРИТОКОВ ТЕПЛА, ВЛАГИ И КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

В ряде случаев при описании некоторых физических процессов в модели притоки тепла, влаги и количества движения генерируют возмущения в соответствующих уравнениях с длинами волн  $2\Delta s$  и  $3\Delta s$ . Так, например, интенсивные точечные возмущения создаются турбулентными притоками тепла, влаги и количества движения на границах раздела различных по своим свойствам подстилающих поверхностей: океан — материк, лед — океан или вблизи крутых склонов гор. Конденсационные процессы в тропиках и радиационные процессы в областях со значительной пространственной изменчивостью поля облачности также могут быть причиной интенсивных локальных притоков энергии. Амплитуда и фазовая скорость этих малых возмущений сильно искажаются вследствие ошибок аппроксимации соответствующих уравнений. Кроме того, в результате нелинейного взаимодействия эти возмущения могут исказить и более длинные волны энергетического спектра.

По этой причине источники возмущений с длиной волны, близкой к  $2\Delta s$ , целесообразно исключить. Это можно сделать путем отфильтровывания указанных возмущений.

В модели радиационные притоки тепла, а также притоки тепла за счет вертикального турбулентного обмена, конвекции и крупномасштабной конденсации, притоки влаги за счет испарения и притоки момента количества движения за счет турбулентного напря-

жения трения фильтровались сразу же после их вычисления. С этой целью к полям соответствующих притоков поочередно в каждом из двух направлений  $x$ ,  $y$  дважды применялся одномерный оператор сглаживания [35]

$$\bar{A}_i = A_i + \frac{S_m}{2} (A_{i-1} - 2A_i + A_{i+1}), \quad (10.1)$$

в котором параметру сглаживания  $S_m$  последовательно придавались значения  $1/2$  и  $-1/2$ .

В одномерном случае отношение сглаженных амплитуд к не-сглаженным выражается в виде функции

$$p_2(k) = 1 - \sin^4 \frac{k \Delta s}{2}. \quad (10.2)$$

Здесь  $k = \frac{\pi}{\lambda}$ .

Фильтр (10.1) полностью подавляет возмущения длиной волны  $\lambda = 2\Delta s$ , амплитуда волны  $\lambda = 3\Delta s$  ослабляется на 56 % и волны  $4\Delta s$  — на 25 %. При использовании оператора (10.1) в узлах, расположенных вблизи границы области, соответствующие значения притоков экстраполировались за пределы границы из ближайшего внутреннего узла сетки.

## 11. ПОСТРОЕНИЕ НАЧАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ ДЛЯ ОСНОВНЫХ МЕТЕОЭЛЕМЕНТОВ

С формальной точки зрения в модели общей циркуляции атмосферы обязательно использовать в качестве начальных полей фактические данные, поскольку при интегрировании уравнений динамики атмосферы на большие сроки начальное состояние не играет существенной роли. С другой стороны, при изучении отдельных физических процессов и методов их параметризации нет необходимости интегрировать уравнения на большие сроки. Для экономии времени ЭВМ целесообразно использовать реальные начальные поля, поскольку в этом случае можно интегрировать уравнения на более короткие сроки. По этой причине был разработан и реализован комплекс программ, предназначенный для построения согласованных начальных полей основных метеорологических элементов на полушарии. За основу брались взятые из [14] данные о геопотенциале на стандартных изобарических поверхностях 100, 200, 300, 500, 700 мбар, приведенном к уровню моря давлению  $p_{so}$ , температуре верхнего слоя океана  $T_{ок}$ , а также поля относительной влажности  $h$ , построенные по ее среднезональным значениям.

Построение начальных полей производится в два этапа. На первом этапе строятся вертикально согласованные поля температуры  $T$  и горизонтально согласованные в квазисолоноидальном приближении поля скорости  $u$ ,  $v$ , а также поля относительной

влажности  $h$  на изобарических поверхностях 71, 214, 357, 500, 643, 786, 929 мбар. Этот комплекс данных рассматривается как стандартный и не связанный с конкретной моделью атмосферы, в частности с ее вертикальным разрешением. На втором этапе осуществляется переход от  $p$ -системы к  $\sigma$ -системе координат с учетом рельефа материков и вертикальной структуры конкретной модели атмосферы. Тем самым осуществляется непосредственная подготовка начальных полей для численных экспериментов с моделью.

Первый этап включает ряд последовательных процедур.

1. Находятся поля температуры на промежуточных по  $\ln p$  уровнях  $p_{k+1/2} = \sqrt{p_{k+1} \cdot p_k}$  с помощью уравнения статики:

$$T_{k+1/2} = - \frac{1}{R} \frac{\Phi_{k+1} - \Phi_k}{\ln p_{k+1} - \ln p_k}. \quad (11.1)$$

Для данной модели  $T_{k+1/2}$  определялась для уровней  $\sqrt{100 \cdot 200}$ ,  $\sqrt{200 \cdot 300}$ , ...,  $\sqrt{700 \cdot p_{s0}}$  мбар. После этого с помощью сплайновой интерполяции-экстраполяции (применялся кубический сплайн) вычисляются значения температуры на семи указанных выше равномерно расположенных  $p$ -уровнях.

2. Проводится вертикальное согласование полей температуры по итерационной схеме типа схемы конвективного приспособления, согласно которой вертикальный градиент температуры, превышающий некоторое критическое значение, приравнивается  $\gamma_*$ . В результате проведенных экспериментов нами было выбрано значение  $\gamma_* = 8 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}/\text{м}$ . Данная процедура позволяет в начальный период интегрирования избежать «шоковых» эффектов, связанных с неустойчивой стратификацией атмосферы.

Наибольшие изменения температуры, получившиеся в результате применения описанной процедуры, приходились на тропические районы с редкой сетью станций и достигали 3—4  $^\circ\text{C}$ .<sup>1</sup>

Указанный алгоритм применялся лишь к шести  $p$ -уровням, лежащим в тропосфере. Поле  $T$  на стратосферном уровне (71 мбар) модифицировалось таким образом, чтобы градиент в верхнем слое был близок к климатическому (см. [32]). Такая необходимость возникла из-за того, что исходные данные на уровне 100 мбар содержали весьма значительные ошибки, в основном в тропиках; эти ошибки усугублялись сплайн-экстраполяцией. Включение верхнего уровня в итерационный процесс приводило бы к искажению данных (что было проверено экспериментально).

3. Проводится горизонтальное сглаживание полученных полей температуры и поля приземного давления. Применяющийся фильтр подавляет амплитуды из правого нижнего угла матрицы коэффициентов Фурье (т. е. волны короткие как по направлению  $x$ , так

<sup>1</sup> В большей части районов, расположенных в умеренных и полярных широтах, стратификация была устойчивой.

и по направлению  $y$ ) и предназначается в основном для устранения случайных ошибок и флуктуаций, имеющих масштаб порядка двух шагов сетки.

4. Вычисляется с помощью сплайн-экстраполяции поле температуры на уровне моря.

5. Вычисляется геопотенциал на семи уровнях с учетом семи полей  $T_1, T_2, \dots, T_7$  и  $T_{g0}$  по следующей формуле:

$$\Phi_k = \frac{1}{2} R \sum_{i=k+1}^7 (T_i + T_{i+1}) \ln \frac{p_{i+1}}{p_i}, \quad (11.2)$$

где мы полагаем  $T_8 = T_{g0}$ ,  $p_8 = p_{s0}$ ,  $p_k = \frac{2k-1}{14} \cdot 1000$  мбар для  $k = 1, 2, \dots, 7$ .

Формула (11.2), как легко видеть, соответствует интегрированию уравнения статики по формуле трапеций, причем переменной интегрирования является  $\ln p$ .

6. Решается на семи  $p$ -уровнях уравнение баланса, записанное в следующем виде (см. [29]):

$$\frac{1}{2} (\nabla^2 \psi + f) = \left[ \frac{m^4}{2} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) - m^2 \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} \right) + m^2 \nabla^2 \Phi + \frac{1}{2} f^2 \right]^{1/2}, \quad (11.3)$$

где  $\psi$  — искомая функция тока,  $\Phi$  — геопотенциал,  $f$  — параметр Кориолиса,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  — оператор Лапласа,  $m$  — масштабный множитель.

Такая форма уравнения баланса удобна для решения его методом итераций. Выбранная схема решения в основном соответствует описанной в [29, 36]. Для конечно-разностной аппроксимации якобиана в (11.3) была использована схема С из [29].

В нашем алгоритме наиболее существенным отличием от методов, изложенных в [29, 36], является то, что в качестве граничного условия для (11.3) было взято нулевое значение функции тока на границе области. Это соответствует условию  $v_n = 0$ , где  $v_n$  — нормальная составляющая скорости на границе. Поскольку такое же граничное условие используется в модели, то и поле начальной скорости также должно ему удовлетворять, чтобы избежать «шоковых» эффектов у границы в начальный момент.

При этих условиях итерационная схема в том виде, в котором она описана в [29] и [36], оказалась неустойчивой. Для достижения сходимости была применена модификация, согласно которой при расчете очередной итерации для функции тока в правую часть (11.3) подставляется полусумма двух предыдущих итераций.

Изменения были внесены и в итерационный процесс исключения «гиперболических» точек в поле геопотенциала, который должен предшествовать итерационному решению уравнения (11.3).

При исключении особых точек в качестве граничного условия было взято условие  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ . Численный эксперимент показал, что если закрепить значения  $\Phi$  на границе, как это ранее делалось в ряде работ, то возникают нереально большие изменения скорости вдоль границы уже в самых начальных полях.

Приведем некоторые характеристики используемой схемы. Число итераций в алгоритме исключения гиперболических точек поля  $\Phi$  колеблется от 40—50 на нижних уровнях до 300—500 на верхних. Изменения значений геопотенциала приходится исключительно на низкие широты. Максимальные изменения достигают 1 дам на нижних уровнях и около 40 дам на самых верхних, что отчасти объясняется плохой метеорологической освещенностью соответствующих районов. Число итераций (т. е. вычислений правой части) при решении конечно-разностного аналога уравнения (11.3) колеблется от 50 до 200. Сходимость считалась достигнутой, если дважды подряд максимальная разность между последовательными итерациями не превышала заданного  $\epsilon$  (такой критерий сходимости обусловлен ее пульсационным характером). В качестве  $\epsilon$  бралось значение  $0,075g/f_*$ , где  $f_*$  — значение параметра Кориолиса на широте  $45^\circ$ .

7. Интерполяцией со среднезональных значений находятся поля относительной влажности в точках сетки на семи  $p$ -уровнях.

При реализации второго этапа использовались поля рельефа материков, построенные Берковским и Бертони [20]. К полю высот был применен двумерный фильтр, представляющий собой произведение двух трехточечных одномерных фильтров [35]

$$\bar{f}_j = \frac{1}{4} (f_{j-1} + 2f_j + f_{j+1}).$$

Второй этап подготовки начальных данных включает следующие процедуры:

1. Находится поле  $\ln p_s$  сплайн-интерполяцией по шести нижним  $p$ -уровням и уровню моря (аргументом при интерполяции служит высота). Затем вычисляется само поле  $p_s$ .

2. Вычисляется температура поверхности суши  $T_g$  сплайн-интерполяцией по аргументу  $\ln p$  с использованием шести нижних  $p$ -уровней и уровня моря.

3. Находятся поля температуры, скорости и относительной влажности на  $\sigma$ -уровнях модели также с помощью сплайн-интерполяции по аргументу  $\ln p$ , но с использованием семи  $p$ -уровней. Осуществляется переход от полей относительной влажности  $h$  к полям удельной влажности  $q$ .

Описанный способ построения начальных данных обладает определенными недостатками с точки зрения получения полей, динамически согласованных с моделью. Кроме того, отсутствие данных о вихре скорости привело к необходимости решать прямую задачу для уравнения баланса на всем полушарии. Между тем

такой подход применительно к тропическим районам нежелателен, на что было обращено внимание еще в работе [36].

Однако в последние годы возник ряд серьезных сомнений в необходимости применения более тонких методов инициализации для моделей общей циркуляции атмосферы [18, 22, 25].

Как показали результаты численных экспериментов с моделью общей циркуляции атмосферы, начальные поля основных переменных, построенные по описанной выше методике, обуславливают существенно меньшее время адаптации, чем поля вычисленные в квазигеострофическом приближении. При этом полученные нами поля имеют удовлетворительные энергетические и спектральные характеристики.

## 12. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В период разработки модели и совершенствования ее отдельных блоков мы провели серию численных экспериментов с интегрированием системы уравнений на 10—30 суток. Эти эксперименты позволили нам выполнить подробный анализ физических процессов и изучить чувствительность модели к изменениям некоторых параметров в этих схемах. В ходе экспериментов было установлено, что некоторые из предлагаемых в литературе схем параметризации оказались неудовлетворительными и поэтому были заменены другими. К ним, например, относится схема расчета облачности и схема погранслоя.

С помощью данной модели был выполнен расчет среднего состояния атмосферы в январе. Анализ этих результатов подробно излагается в статьях, помещенных в данном сборнике.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Динамическая метеорология. Под ред. Д. Л. Лайхтмана.—Л.: Гидрометеиздат, 1976.—607 с.
2. Дмитриева-Арраго Л. Р., Самойлова Л. В. Упрощенная схема расчета потока коротковолновой радиации для применения в задаче общей циркуляции атмосферы.—Труды ГГО, 1972, вып. 276, с. 209—214.
3. Дмитриева-Арраго Л. Р., Самойлова Л. В. Параметризация притока и потока коротковолновой радиации в подоблачном слое атмосферы.—См. наст. сборник.
4. Дмитриева-Арраго Л. Р., Парщина Г. В., Самойлова Л. В. Упрощенная схема расчета потоков радиации в области спектра 0,29—0,7 мкм.—Труды ГГО, 1975, вып. 366, с. 86—87.
5. Евсеева М. Г., Подольская Э. Л. Интегральная функция пропускания в близкой инфракрасной области спектра.—Труды ЛГМИ, 1974, вып. 49, с. 124—128.
6. Зубковский С. Л., Копров Б. М. О балансе турбулентной энергии в пограничном слое атмосферы.—Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1970, т. 6, № 10, с. 989—995.
7. Каргин Б. А., Краснокутская Л. Д., Фейгельсон Е. М. Отражение и поглощение лучистой энергии солнца облачными слоями.—Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1972, № 5, с. 12—19.

8. Кондратьев К. Я. и др. Интегральные и спектральные характеристики отражения света слоистообразной облачностью в диапазоне длин волн 0,35—0,95 мкм/К. Я. Кондратьев, В. И. Пененко, О. Б. Васильев, В. С. Гришечкин.— В кн.: Материалы 9-го Всесоюзн. совещ. по актинометрии. Ленинград, 1974, с. 38—45.
9. Манабе С., Смагоринский Дж., Стриклер Р. Ф. Численное моделирование средней картины общей циркуляции с учетом процессов влагообмена.— В кн.: Теория климата/Под ред. Л. С. Гандина, А. С. Дубова, М. Е. Швеца. Л., 1967, с. 185—229.
10. Марчук Г. И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана.— Л.: Гидрометеоиздат, 1974.— 303 с.
11. Мелешко В. П., Шейнин Д. А. Ошибки аппроксимации при вычислении барического градиента в  $\sigma$ -системе координат.— Труды ГГО, 1977, вып. 394, с. 28—43.
12. Огнева Т. А. О необходимой густоте сети теплобалансовых станций.— Труды ГГО, 1968, вып. 230, с. 65—78.
13. Пятовская И. П. Спектральная плотность потока восходящей коротковолновой радиации над различными поверхностями.— Труды ГГО, 1972, вып. 275, с. 119—180.
14. Синоптический бюллетень. Северное полушарие. Ч. 1. Январь.— М.: 1971.
15. Смагоринский Дж., Манабе С., Холлоуэй Дж. Результаты численных опытов с девятиуровневой моделью общей циркуляции атмосферы. В кн.: Теория климата/Под ред. Л. С. Гандина, А. С. Дубова, М. Е. Швеца.— Л., 1967, с. 117—184.
16. Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет.— М.: Наука, 1972.— 336 с.
17. Шехтер Ф. Н. О радиационных диаграммах.— Труды ГГО, 1966, вып. 150, с. 57—62.
18. Baumhoffer D. P. Global real-data forecasts with the NCAR two-layer general circulation model.— Mon. Wea. Rev. 1970, vol. 98, N 2, p. 92—99.
19. Benwell G. R. R. e. a. The Bushby—Timpson 10-level model on a fine mesh.— Sci. Pap. 1971, N 32, London, p. 59.
20. Berkovsky L., Bertoni E. A. A mean topographic charts for the entire earth.— Bull. Amer. Met. Soc., 1955, 36, p. 350—358.
21. Deardorf J. W. Empirical dependence of the eddy coefficient for heat upon stability above the lowest 50 m.— J. Appl. Met., 1967, vol. 6, N 4, p. 631—643.
22. Dey C. H., Brown I. A., Jr., McPherson R. D. Some initialization numerical experiments with the NMC Global model.— In: GARP Program of Numerical Experimentation, Rep. N 8, p. 71—72.
23. Gates W. L., Schlesinger M. E. Numerical simulation of the January and July global climate with a two-level atmospheric model.— J. Atmos. Sci., 1977, vol. 34, N 1, p. 36—76.
24. Haurwitz B. Insolation in relation to cloud type.— J. Met., 1948, vol. 5.
25. Houghton D., Washington W. M. On global initialization of primitive equations: Part 1. J. Appl. Met., 1969, vol. 8, N 5, p. 726—737.
26. Howard J. H., Burch A. E., Williams D. Infrared transmission of synthetic atmosphere.— JOSA, 1956, vol. 46, N 3, p. 186—196.
27. Kasahara A., Washington W. M. NCAR global general circulation model of the atmosphere.— Mon. Wea. Rev., 1967, vol. 95, N 7, p. 389—402.
28. Kasahara A., Washington W. M. General circulation experiments with a six-layer NCAR model, including orography, cloudiness and surface temperature calculations.— J. Atmos. Sci. 1971, vol. 28, N 5, p. 657—701.
29. Miyakoda K. Numerical solution of balance equation.— Coll. Met. Pap., 1960, vol. 10, N 1—2.
30. Miyakoda K. An experimental prediction of the tropical atmosphere for the case of March 1965.— Mon. Wea. Rev., 1974, vol. 102, N 8.
31. Modelling for the first GARP global experiment.— GARP Publ. Ser., 1974, N 14, p. 261.



32. Oort A. H., Rasmusson E. M. Atmospheric circulation statistics.— Prof. Pap., 1971, N 5, NOAA.
33. Parameterization of subgrid scale processes.— GARP Publ. Ser., 1972, N 8.
34. Phillips N. A. Numerical integration of the primitive equations on the hemisphere.— Mon. Wea. Rev., 1959, vol. 87, N 9, p. 333—345.
35. Shapiro R. The use of linear filtering as a parameterization of atmospheric diffusion.— J. Atmos. Sci., 1971, vol. 28, N 4, p. 523—531.
36. Shuman F. G. Numerical methods in weather prediction. The balance equation.— Mon. Wea. Rev., 1957, vol. 85, N 10, p. 329—332.
37. Welck R. E., Kasahara A., Washington W. M., Desanto G. Effect of horizontal resolution in a finite-differences model of the general circulation.— Mon. Wea. Rev., 1971, vol. 99, p. 673—683.

*В. П. Мелешко, Б. Е. Шнееров, М. Е. Швец,  
Л. Р. Дмитриева-Араго, В. И. Пономарев, Г. В. Паршина,  
С. В. Богаченко, Е. П. Юшина, Л. Н. Магазенков, И. П. Гусева*

## МОДЕЛИРОВАНИЕ АТМОСФЕРНОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ ДЛЯ ЯНВАРЯ

### ВВЕДЕНИЕ

Моделирование январского климата представляет определенный интерес по двум причинам:

а) процессы, связанные с развитием и реализацией бароклинной неустойчивости, а также с взаимодействием между атмосферой и океаном, наиболее хорошо проявляются в зимнее время года. Кинетическая и доступная потенциальная энергия достигают максимальных значений в январе—феврале;

б) в настоящее время накоплен достаточно обширный материал, относящийся к средним характеристикам циркуляции, термического режима и влагооборота в атмосфере для января.

Вместе с тем моделирование январского климата имеет свои особенности.

В январе тепловой баланс атмосферы северного полушария отрицателен, причем наибольшему выхолаживанию подвержена атмосфера в высоких широтах. Вследствие роста среднего градиента температуры между полюсом и экватором возрастает зональная составляющая доступной потенциальной энергии и как следствие увеличивается зональная составляющая кинетической энергии.

В ряде исследований было показано, что при интегрировании системы уравнений динамики атмосферы с фиксированным наклоном солнца и заданным тепловым состоянием океанов процессы в тропосфере достигают квазиустановившегося режима примерно через 40 суток, если в начальный момент атмосфера находилась в состоянии покоя [17]. При использовании реальных начальных данных установление наступает через 10—15 суток.

Что касается стратосферы, то она имеет заметно большую термическую и динамическую инерцию по сравнению с тропосферой. Так, термический режим в стратосфере устанавливается примерно через 60—100 суток [15, 25].

Выполненные к настоящему времени численные эксперименты с моделями общей циркуляции атмосферы показывают, что рассчитанная температура стратосферы в высоких широтах при установившемся термическом режиме оказывается на 10—15°C ниже, чем наблюдаемая [14, 25]. Одна из причин этого явления заключается, по-видимому, в том, что тепловой баланс атмосферы в высоких широтах отрицателен.

При моделировании климатического режима для января обычно поступают следующим образом: систему уравнений интегрируют от начального состояния на такой срок, чтобы в тропосфере наступил квазиустановившийся термодинамический режим, а в стратосфере — состояние, близкое к этому режиму.

С целью изучения свойств модели и оценки ее возможностей в описании реального климата мы провели численный эксперимент, в котором моделировались циркуляция, термический режим и влагооборот атмосферы для января.

Система уравнений гидротермодинамики интегрировалась от реального начального состояния на 60 суток. По рассчитанным данным с 25-х по 55-е сутки, т. е. за 31 день, вычислялись различные характеристики среднего состояния атмосферы, которые затем сопоставлялись с соответствующими климатическими характеристиками, полученными по данным наблюдений.

## 1. МОДЕЛИРОВАНИЕ КВАЗИУСТАНОВИВШЕГОСЯ РЕЖИМА АТМОСФЕРЫ

При моделировании январского климата в качестве априорно задаваемой информации использовались:

- температура воды верхнего слоя океанов. Эти данные были взяты из работы Шутца и Гейтса [24];
- альbedo материков, взятое из работы В. В. Мухенберг [6], и альbedo океанов из Атласа теплового баланса земного шара [1];
- данные о границах и протяженности снежного покрова, взятые из монографии В. М. Котлякова [3].

Склонение солнца принималось равным его значению для середины января.

За начальное состояние атмосферы была взята конкретная синоптическая ситуация 5 января 1971 г. [7]. Метод вычисления составляющих скорости ветра, температуры и влажности изложен в [4].

На рис. 1 показан временной ход средней по полушарию кинетической энергии на трех уровнях атмосферы: 150, 500 и 850 мбар. Из рисунка видно, что кинетическая энергия на уровнях 500 и 850 мбар колеблется около своего среднего значения, в то время как на уровне 150 мбар она непрерывно возрастает. Примерно к 35—40-м суткам этот рост заметно замедляется. Из рис. 2 следует, что возрастают зональные составляющие доступной потенциальной и кинетической энергии. Что касается вихревых компонент

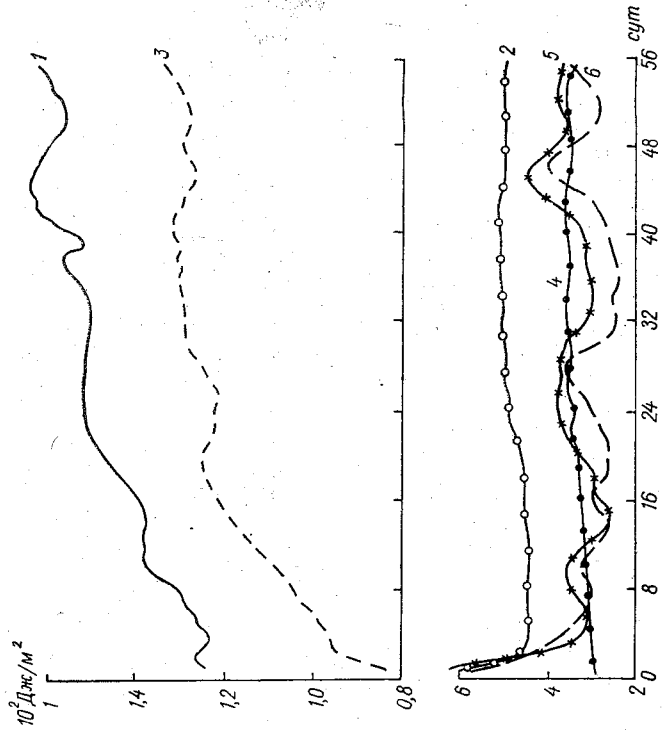


Рис. 2. Временной ход средних по полушарию значений энергии ( $10^{12}$  Дж/м<sup>2</sup>).

1 — кинетической, 2 — полной доступной потенциальной, 3 — зональной кинетической, 4 — зональной доступной потенциальной, 5 — вихревой кинетической, 6 — вихревой доступной потенциальной.

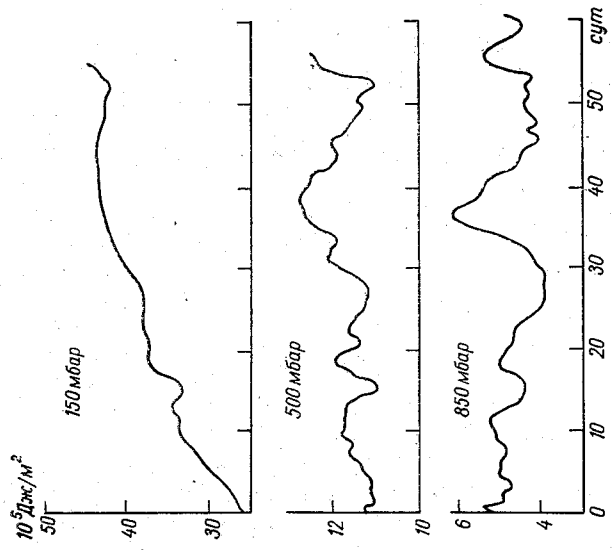


Рис. 1. Временной ход средней по полушарию кинетической энергии ( $10^{12}$  Дж/м<sup>2</sup>) на уровнях 150, 500 и 850 мбар.

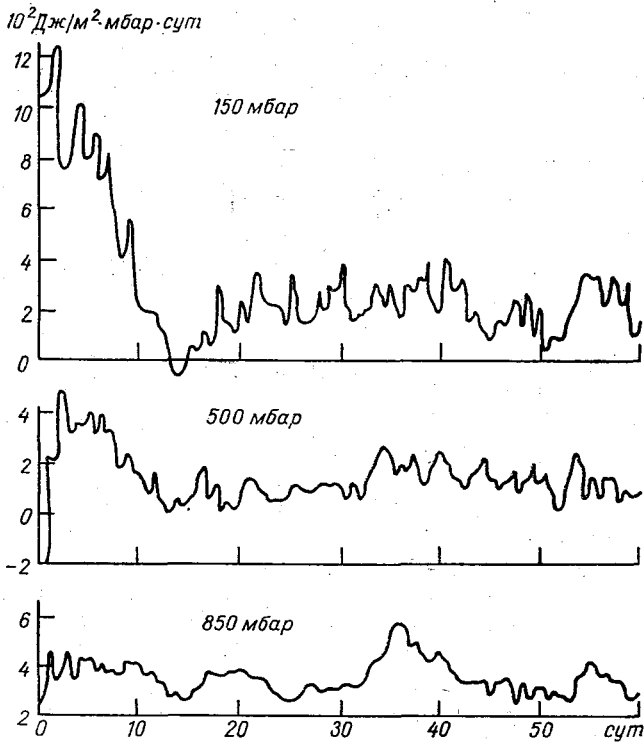


Рис. 3. Временной ход средней по полушарию генерации кинетической энергии ( $10^{12} \text{ Дж/м}^2 \cdot \text{сут}$ ) на уровнях 150, 500 и 850 мбар.

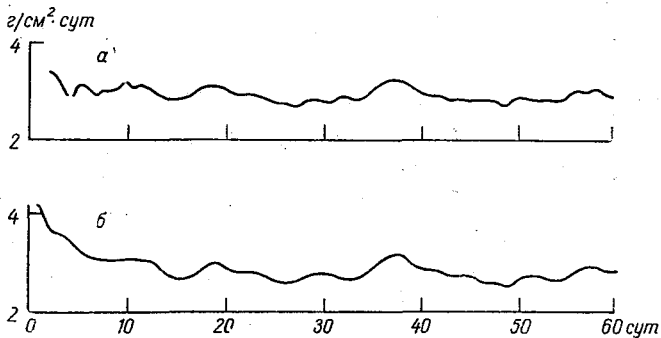


Рис. 4. Временной ход средних по полушарию значений осадков ( $\text{г/см}^2 \cdot \text{сут}$ ) (а) и испарения ( $\text{г/см}^2 \cdot \text{сут}$ ) (б).

кинетической и доступной потенциальной энергии, то они колеблются около некоторого среднего значения.

На рис. 3 показан временной ход генерации кинетической энергии на уровнях 150, 500 и 850 мбар. Наибольшие изменения генерации в первые 15 суток происходят на верхнем уровне. Это, по-видимому, связано с тем обстоятельством, что в модели стратосфера описывается лишь одним уровнем, в результате чего происходит адаптация термодинамических процессов атмосферы в соответствии с вертикальной структурой модели.

Квазиустановившийся режим в тропосфере северного полушария наступает через 10—15 суток. Подтверждением этому служит временной ход средних по полушарию значений осадков и испарения, представленных на рис. 4.

## 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

**Приземное давление.** В широтном ходе приземного давления, приведенном на рис. 5, отчетливо проявляется максимум, соответствующий субтропической зоне высокого давления и минимум в полярных широтах. По сравнению с фактическими данными (взятыми из работы Гейтса и Шлезингера [10]) в умеренных широтах несколько больше горизонтальный градиент давления в меридиональном направлении, что соответствует также большему перепаду температуры между широтами (см. рис. 7) и увеличению зональной скорости вблизи земли (см. рис. 9). Поскольку местоположение и интенсивность основных центров действия атмосферы, рассчитанные в большинстве численных моделей, как правило, не вполне соответствуют фактическим данным, то и в зональном распределении давления имеются большие расхождения. Так, в двухуровневой модели RAND [10] разница между рассчитанным в модели и фактическим зональным давлением для широты 50° с. ш. достигает 15 мбар из-за того, что слишком заниженным оказывается давление в алеутском и исландском минимумах. Еще большее расхождение имеет место в 18-уровневой модели GFDL

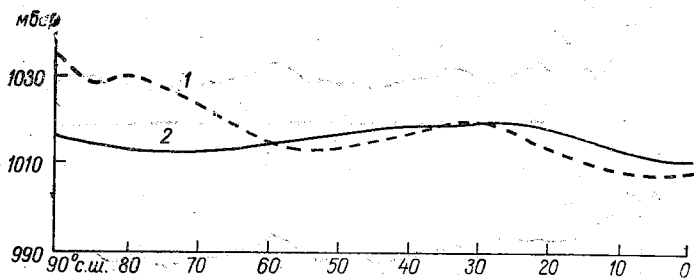


Рис. 5. Широтное распределение давления (мбар), приведенного к уровню моря.

1 — рассчитанное, 2 — фактическое для января [10].

[14], имеющей то же разрешение по горизонтали, что и настоящая модель.

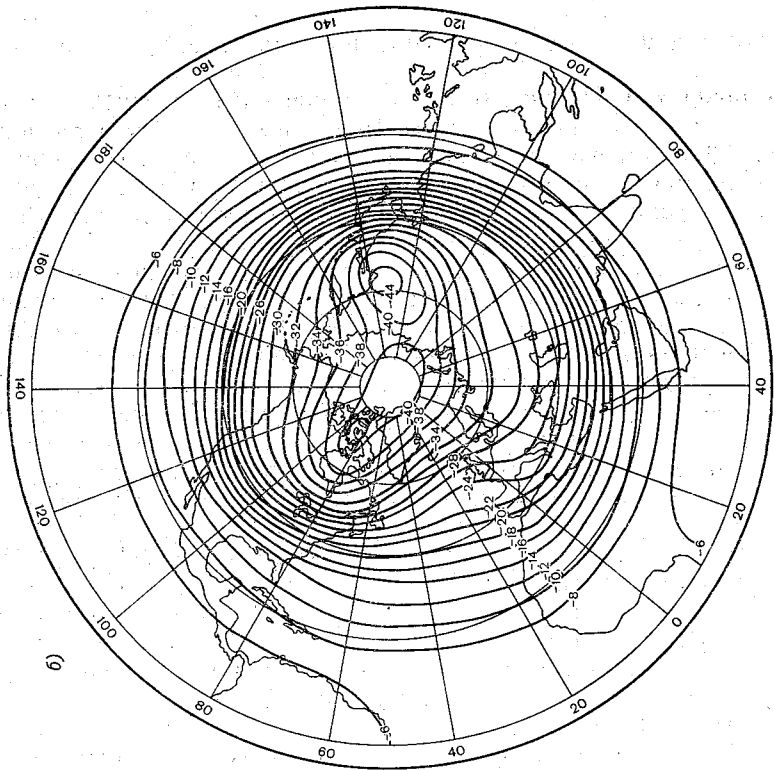
**Температура.** На рис. 6 а и 6 б приведены рассчитанное в модели и среднее месячное поле температуры для января на поверхности 500 мбар, взятое из работы [27]. Ряд основных закономерностей распределения температуры на полушарии отчетливо проявляется на карте рассчитанного в модели поля температуры. Так, например, хорошо виден зональный характер поля температуры в тропических широтах и над океанами; в западном полушарии над морем Баффина располагается язык холода, причем температуры здесь близки к фактическим. Несколько отлично от климатической нормы значение температуры над полюсом, а общий перепад температуры между экватором и полюсом составляет  $40^\circ$ , что на  $6-8^\circ$  больше фактического. Однако наиболее существенным недостатком является, на наш взгляд, отсутствие на рассчитанной карте области холода там, где располагается сибирский антициклон, хотя изолинии низких температур в этом районе несколько вытянуты к югу.

В высотно-широтном распределении температуры<sup>1</sup> (рис. 7) область положительных температур в зоне до  $45^\circ$  с. ш. хорошо совпадает с фактической. Положение нулевой изотермы также очень близко к фактической.

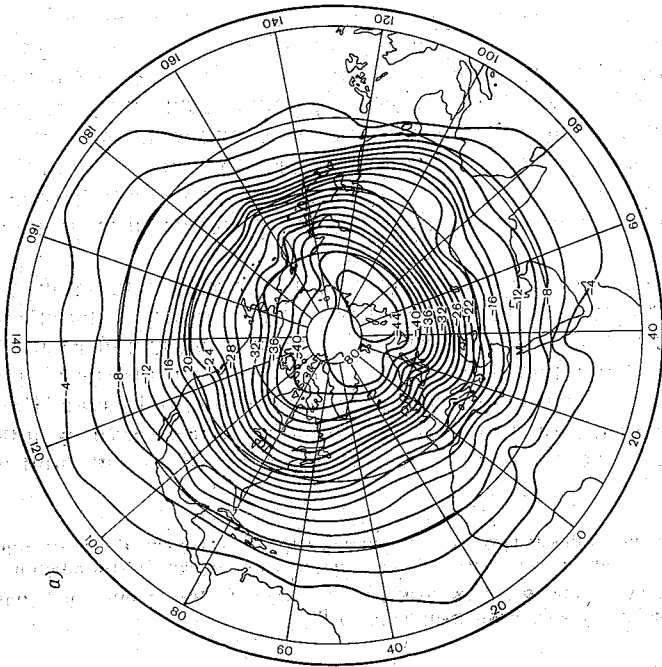
В высоких широтах имеет место устойчивая инверсия температуры в нижнем слое рассчитанной атмосферы. Что касается температуры в верхних слоях, то она близка к фактической в тропической зоне, но к северу понижается значительно быстрее, чем это наблюдается в реальных условиях, так что стратосфера в модели в умеренных широтах и полярной области оказывается значительно холоднее, чем в действительности. Как уже указывалось, причины этого выхолаживания заключаются в том, что в модели используется фиксированная высота солнца для января месяца и поэтому не учитывается естественное сезонное прогревание реальной атмосферы в высоких широтах. Кроме того, верхний расчетный уровень в модели в северных широтах располагается уже в стратосфере, для которой характерны процессы, неучитываемые в данной модели.

**Влажность.** Высотно-широтное распределение удельной влажности представлено на рис. 8. Фактические данные о распределении влажности взяты из работы [20]. Как и в реальной атмосфере, максимальная удельная влажность наблюдается в нижнем слое атмосферы у экватора и составляет в среднем около 14 г/кг. Рассчитанный вертикальный градиент удельной влажности в нижней половине тропосферы в зоне от экватора до  $50^\circ$  с. ш. примерно

<sup>1</sup> На этом и всех последующих рисунках, где представлены высотно-широтные распределения метеорологических элементов, в качестве вертикальной координаты выбрана величина  $p^x$ , как это рекомендовано международной рабочей группой по численному экспериментированию [9].



б)



а)

Рис. 6. Поле средней температуры ( $^{\circ}\text{C}$ ) на уровне 500 мбар.  
 а) рассчитанное, б) фактическое для января [27].



совпадает с фактическим. В полярных районах севернее 73° с. ш. рассчитанная атмосфера суше, чем реальная.

**Зональная и меридиональная циркуляция.** На рис. 9 приведены: а) рассчитанное и б) фактическое высотно-широтные распределения зональной составляющей скорости для января. Фактические данные взяты из работы [20]. Как и в реальной атмосфере,

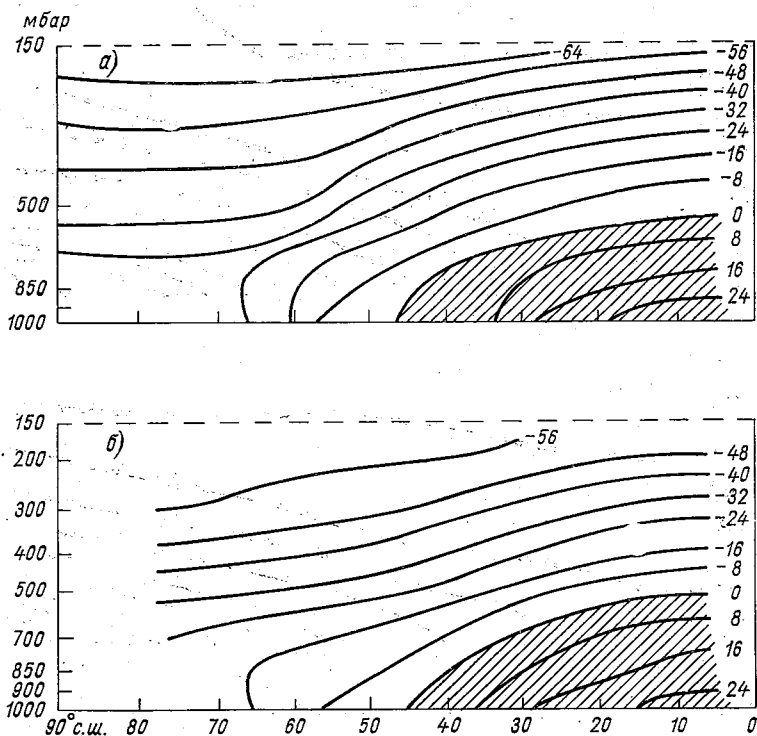


Рис. 7. Высотно-широтное распределение температуры (°С).

а) рассчитанное, б) фактическое для января [20].

имеются две области восточных течений (в тропической зоне и в полярных широтах) и обширная область с западным переносом, охватывающая большую часть северного полушария. Правильно рассчитывается в модели географическое положение высотного струйного течения и его средняя скорость. Однако в средней тропосфере скорость зонального переноса в модели существенно больше, чем в реальных условиях вследствие большого меридионального градиента температуры. На рис. 10 представлены рассчитанные и фактические поля зональной составляющей скорости на уровне 500 мбар.

Одной из характерных особенностей циркуляционного режима атмосферы являются меридиональные ячейки циркуляции. Для выяснения характера меридиональной циркуляции, получаемой

в модели, было рассчитано среднезональное распределение функции тока, которую можно вычислять по значениям либо меридиональной, либо вертикальной скорости [4]. Поскольку меридиональная скорость используется в модели для расчета многих характеристик циркуляции, был выбран первый способ определения функ-

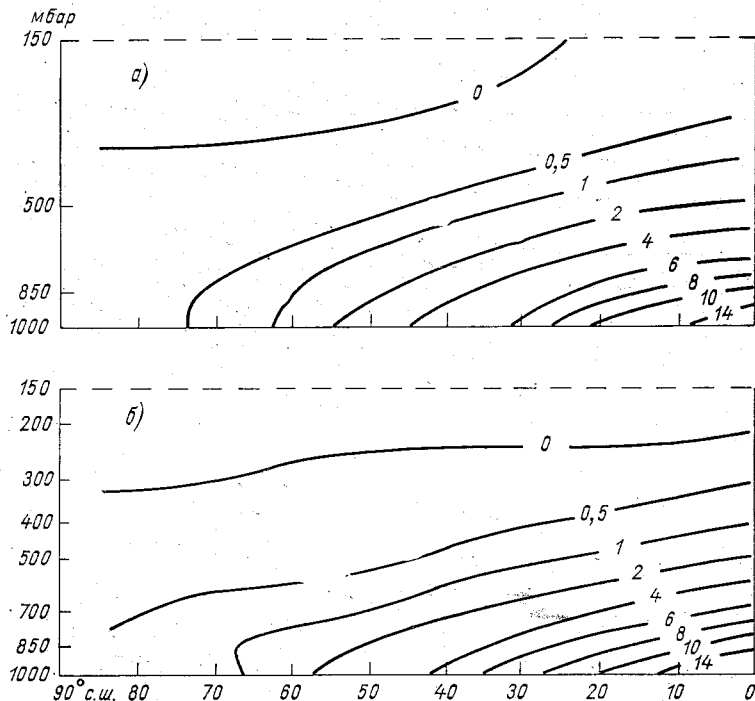


Рис. 8. Высотно-широтное распределение удельной влажности (г/кг).  
а) рассчитанное, б) фактическое для января [20].

ции тока. Согласно этому способу, функция тока  $\psi$  находится из соотношения

$$2\pi a \cos \varphi [\bar{u}] = g \frac{\partial \psi}{\partial p},$$

где  $[\bar{u}]$  — среднее по времени значение средней зональной скорости как функции широты  $\varphi$  и давления  $p$ ,  $a$  — радиус Земли,  $g$  — ускорение свободного падения. В качестве граничного условия примем, что  $\psi$  обращается в 0 на уровне земли. На рис. 11 приведено рассчитанное распределение функции тока, выраженной в  $10^{12}$  г/с. Прежде всего следует отметить, что модель правильно отражает основные черты циркуляции, а именно ее трехъячеистую структуру. Как и в реальной атмосфере для января, наиболее интенсивной является так называемая прямая ячейка Гадлея, рас-

полагающаяся в тропической зоне. Обычно в январе внутритропическая зона конвергенции располагается в южном полушарии, но поскольку в модели границей является «стенка» на экваторе, то естественно ячейка Гадлея несколько смещена к северу. Тем не менее ее расположение в широтной зоне до  $30^\circ$  с. ш. соответствует

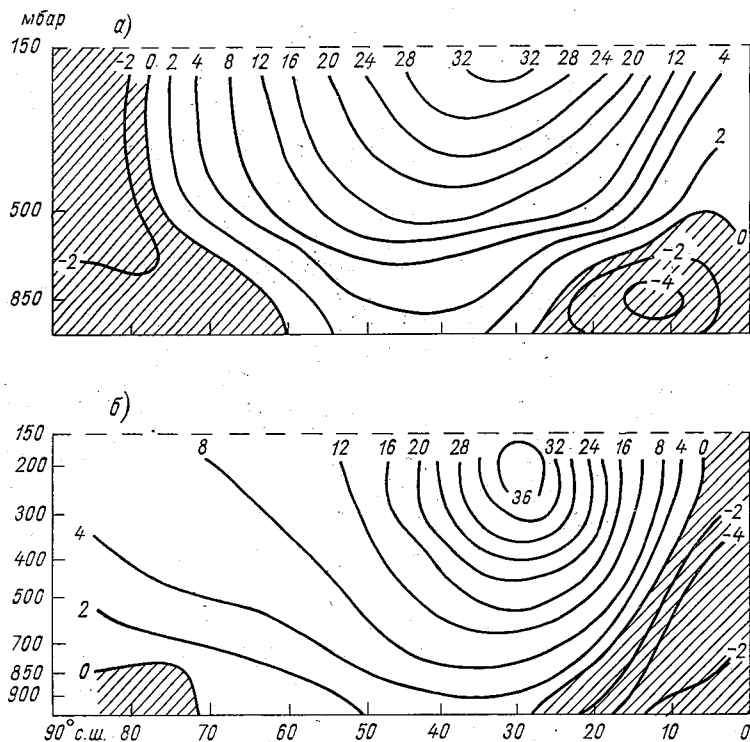


Рис. 9. Высотно-широтное распределение зональной скорости (м/с).

а) рассчитанное, б) фактическое для января [20].

фактическим данным [4]. То же можно сказать и относительно второй ячейки циркуляции (ячейка Ферреля), которая, как и в реальной атмосфере, располагается в зоне от  $30$  до  $70^\circ$  с. ш. Наконец имеется очень слабая прямая ячейка в полярных широтах, которая также наблюдается в действительности. Следует отметить, что интенсивность двух первых ячеек в модели несколько меньше фактической, хотя, например, в экваториальной зоне интенсивность восходящих движений близка к фактической. Центры ячеек располагаются на более низких уровнях, нежели в реальной атмосфере. По отношению к ячейке Гадлея, которая в основном определяется конвективными движениями в тропической зоне, это, по-видимому, отражает тот факт, что в силу малого разрешения модели, наиболее интенсивное выделение скрытой теплоты за счет конвекции происходит именно в нижних слоях атмосферы.

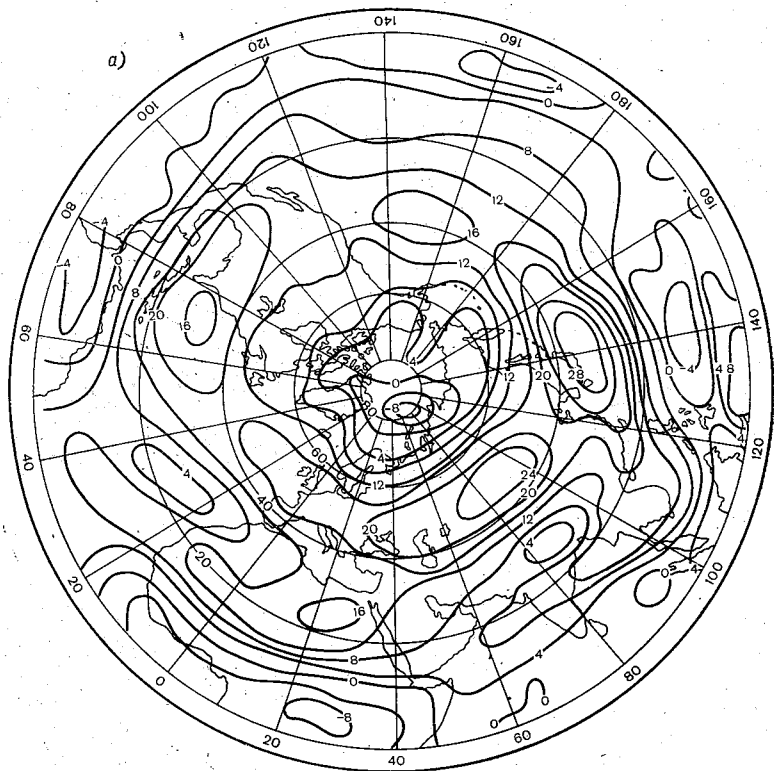


Рис. 10. Поле средней зональной составляющей  
 а) рассчитанное, б) факт

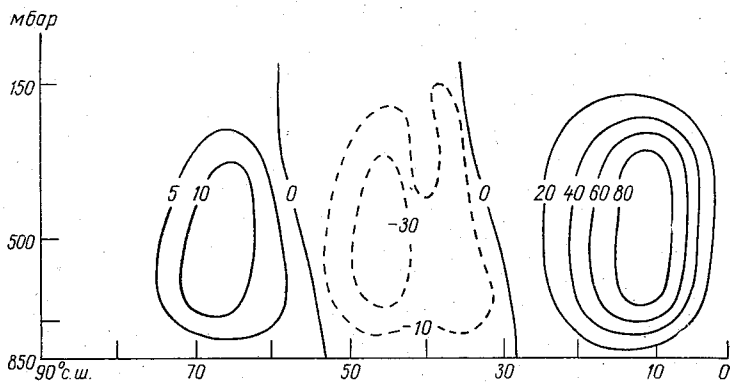
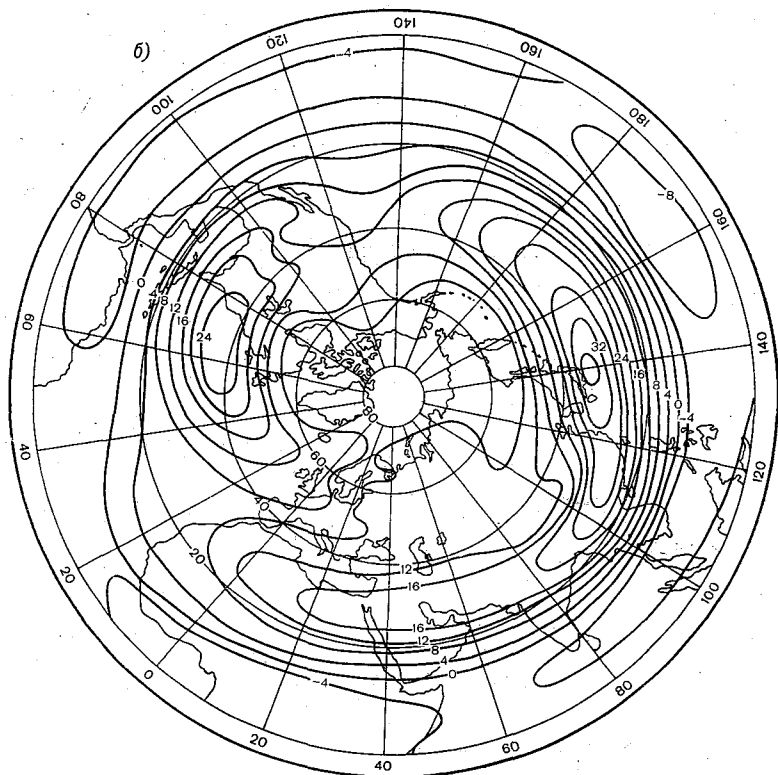


Рис. 11. Высотно-широтное распределение функции тока ( $10^{12}$  г/с).



скорости ветра (м/с) на уровне 500 мбар.  
 тическое для января.

### 3. СОСТАВЛЯЮЩИЕ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Перенос момента количества движения и распределения его притоков и стоков являются определяющими характеристиками общей циркуляции атмосферы.

Как известно, при вращении Земли в восточном направлении земная поверхность в результате трения передает атмосфере момент количества движения, направленный к западу в зоне восточных ветров. В зоне западных ветров средних широт атмосфера передает земной поверхности момент, направленный к востоку. Таким образом, восточные ветры тропических и приполярных широт являются для атмосферы источниками момента, а западные ветры средних широт генерируют сток момента. Интенсивность обмена моментов в системе атмосфера—поверхность Земли определяется скоростью приземного ветра и расстоянием от земной оси.

Баланс момента количества движения в атмосфере поддерживается за счет его меридионального переноса от пояса восточных ветров к поясу западных ветров. Перенос осуществляется как

средней меридиональной циркуляцией, так и крупномасштабными вихрями.

На рис. 12 показаны широтные распределения скорости изменения вращательного момента количества движения, обусловленного действием приземного трения,

$$\delta M = -\tau_{\lambda} a \cos \varphi,$$

вычисленного с помощью модели и рассчитанного по фактическим данным Хеллерманом [12]. Здесь  $\tau_{\lambda}$  — зональное значение напряжения трения.

Из рис. 12 следует, что в низких широтах в поясе восточных ветров имеет место приток момента в атмосфере; в средних широ-

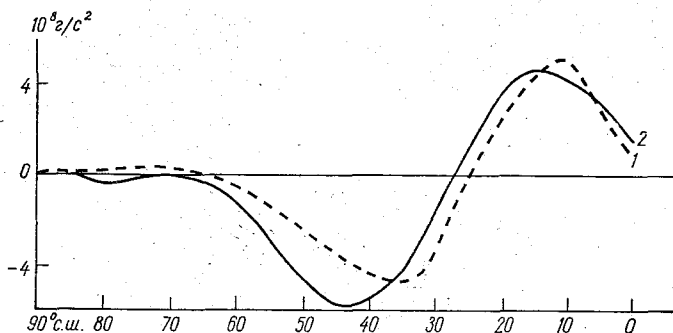


Рис. 12. Широтное распределение скорости изменения вращательного момента количества движения, вызванного приземным трением.

1 — рассчитанное, 2 — фактическое [12].

тах, наоборот, наблюдается сток момента. Вычисленные значения вращательного момента в низких широтах хорошо согласуются с фактическими данными. В средних широтах величина стока момента получилась заниженной по абсолютной величине примерно на 30%. Кроме того, зона отрицательных значений  $\delta M$  оказалась несколько вытянутой в сторону высоких широт.

Помимо Хеллермана, вычисления  $\delta M$  с использованием сведений о фактическом ветре проводили Пристли [23], Хидака [13] и Кунг [16]. Авторы этих работ использовали разные гипотезы относительно безразмерного коэффициента сопротивления  $c_D$ , входящего в выражение для турбулентного напряжения трения. Сравнительный анализ этих схем, выполненный Ньютоном [19] для двух сезонов года (декабрь—февраль и июнь—август) и в среднем за год, показал, что в низких широтах северного полушария среднезональные распределения  $\delta M$ , вычисленные по указанным схемам, мало различаются между собой. В средних широтах зимой схемы Хеллермана и Хидаки дают большее значение вращательного момента по сравнению со схемами Пристли и Кунга. Как отмечает Ньютон, первые две схемы, по-видимому, имеют тенденцию завы-

шать величину  $\delta M$  при больших скоростях приземного ветра примерно на одну треть. С учетом этого замечания можно заключить, что результаты вычисления  $\delta M$  в модели ГГО хорошо согласуются с фактическими данными.

На рис. 13 показаны широтные распределения меридионального переноса момента количества движения, обусловленные крупно-

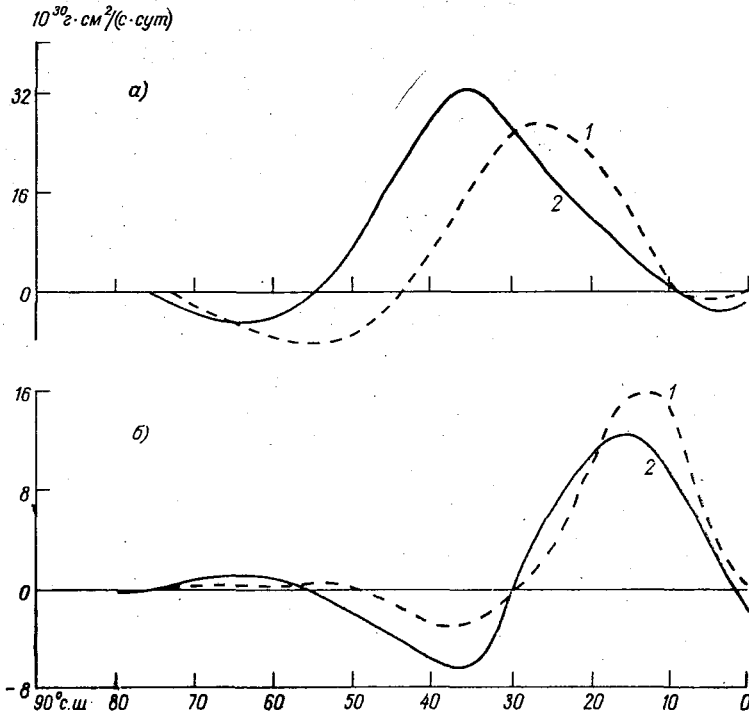


Рис. 13. Широтное распределение меридионального переноса момента количества движения ( $10^{30} \text{ г} \cdot \text{см}^2 / (\text{с} \cdot \text{сут})$ ), обусловленного крупномасштабными вихрями (а) и средней меридиональной циркуляцией (б).

1 — рассчитанное, 2 — фактическое [20].

масштабными вихрями и средней меридиональной циркуляцией.

Выражения для переноса момента к полюсу через некоторый круг широты имеют вид:

при переносе момента крупномасштабными вихрями

$$[\overline{P_{\text{МВ}}}] = \frac{2\pi a \cos \varphi}{g} \int_0^{P_s} [\overline{u^* v^*}] dp;$$

при переносе момента средней меридиональной циркуляцией

$$[\overline{P_{\text{ММ}}}] = \frac{2\pi a \cos \varphi}{g} \int_0^{P_s} [\overline{u}] [\overline{v}] dp.$$

Здесь  $\bar{A} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} A dt$  — среднее по времени значение переменной  $A$ ;  $[A] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A d\lambda$  — среднезональное значение  $A$ ;  $A^* = A - [A]$  — отклонение  $A$  от среднезонального значения  $A$ .

Оценки переносов момента, выполненные Старром и Уайтом [26], Лоренцом [3], Оортом и Расмуссоном [20], показали, что вихревой меридиональный перенос, вызываемый крупномасштабными вихрями (т. е. постоянными центрами действия атмосферы и движущимися циклонами и антициклонами), является доминирующим по сравнению со среднезональным переносом. Эта особенность наблюдается и в рассчитанных переносах момента. Интенсивность вычисленного вихревого переноса момента, направленного к северу, оказалась несколько меньшей, а максимум смещенным к экватору примерно на  $10^\circ$ . Эта особенность, по-видимому, вызвана положением постоянных центров действия атмосферы в модели.

Меридиональный перенос момента в результате горизонтальной диффузии оказался пренебрежимо малым.

#### 4. СПЕКТР КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

На рис. 14 представлены одномерные спектры кинетической энергии для возмущений синоптического масштаба, полученные разными авторами по фактическим данным [5] и вычисленные в модели ГГО по данным о ветре на уровне 500 мбар в широтном поясе  $40-55^\circ$  с. ш.

Данные наблюдений показывают, что спектр кинетической энергии для крупномасштабных атмосферных движений, которые могут рассматриваться как квазидвумерные движения, пропорционален  $k^{-3}$  ( $k$  — волновое число). Такая же закономерность присуща спектру кинетической энергии, полученному в модели атмосферы.

Фактические и вычисленные в модели спектры хорошо согласуются с известным положением теории двумерной турбулентности, согласно которому в двумерных течениях распределение энергии в одном из двух инерционных интервалов оказывается пропорциональным средней скорости каскадного переноса по спектру квадрата вихря (энстрофии) и  $k^{-3}$ , т. е.

$$E(k) \sim \eta k^{-3}.$$

Численные эксперименты с различным горизонтальным разрешением, выполненные в работе [28], показывают, что с увеличе-



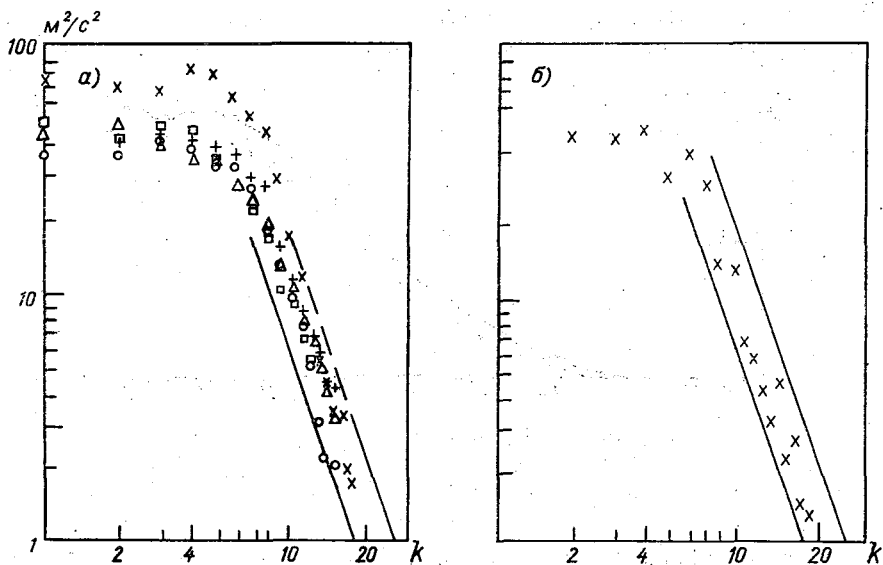


Рис. 14. Одномерные спектры кинетической энергии крупномасштабных вихрей ( $M^2/c^2$ ) ( $k$  — волновое число).

а) полученные по фактическим данным [5], б) рассчитанные в модели.

нием шага сетки распределение энергии по спектру изменяется в сторону более быстрого убывания энергии по мере возрастания волнового числа. При шаге сетки  $\Delta s = 1000$  км спектр энергии становится пропорциональным  $k^{-4}$ .

## 5. ТЕПЛОВОЙ БАЛАНС НА ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ И НА ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕ АТМОСФЕРЫ

Тепловой баланс на подстилающей поверхности представляет сумму эффективного излучения подстилающей поверхности, баланса коротковолновой радиации, турбулентного потока тепла, затраты тепла на испарение, потока тепла в почву или океан. Ниже выполнено сравнение рассчитанных в модели величин с фактическими данными.

На рис. 15 представлен широтный ход коротковолнового радиационного баланса на подстилающей поверхности, рассчитанный в модели и фактический. При заданном альбедо величина баланса определяется суммарной радиацией, приходящей на подстилающую поверхность. Имеющиеся расхождения с фактическими данными могут быть вызваны несколькими причинами, в том числе приближенностью вычислительного алгоритма, недостаточностью информации о вертикальном распределении влажности для описания поглощения радиации в атмосфере. На рис. 16 представлено

эффективное излучение на подстилающей поверхности и баланс длинноволновой радиации на верхней границе атмосферы. Разли-

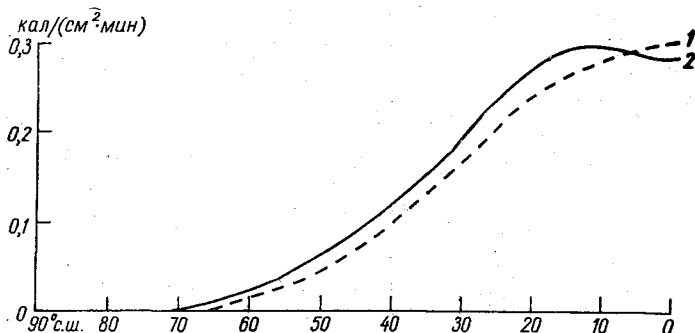


Рис. 15. Широтное распределение баланса коротковолновой радиации на подстилающей поверхности (кал/см<sup>2</sup>·мин).

1 — рассчитанное, 2 — фактическое [25].

чия в эффективном излучении могут быть обусловлены, кроме перечисленных выше причин, недостатком информации о вертикальном профиле температуры. Вертикальная структура облачности,

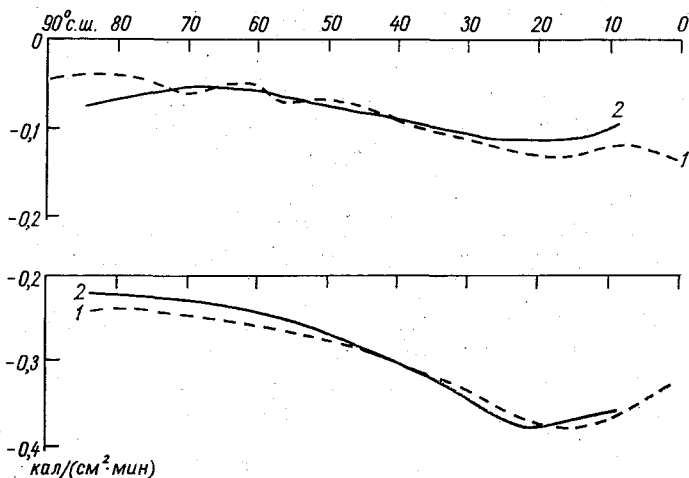


Рис. 16. Широтное распределение баланса длинноволнового излучения (кал/см<sup>2</sup>·мин) на подстилающей поверхности (а), на верхней границе атмосферы (б).

1 — рассчитанное, 2 — фактическое.

принятая в модели, также может оказывать влияние на точность вычисления балансов.

На рис. 17 представлен рассчитанный широтный ход полного радиационного баланса на подстилающей поверхности, который,

как видно из рисунка, можно считать достаточно близким к фактическому распределению.

Широтный ход турбулентного потока тепла представлен на

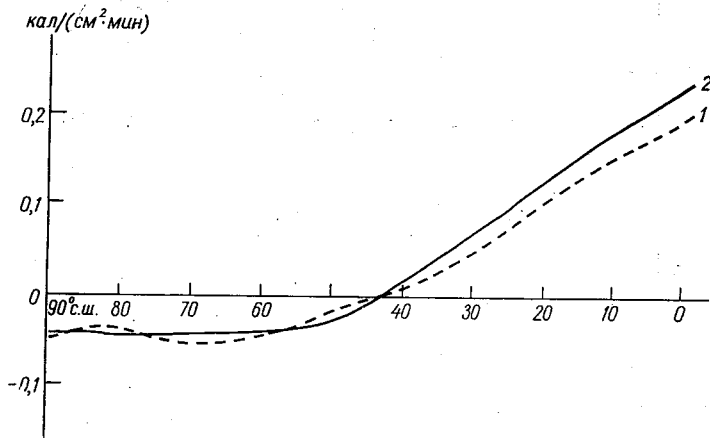


Рис. 17. Широтное распределение радиационного баланса на подстилающей поверхности (кал/см<sup>2</sup>·мин).

1 — рассчитанное, 2 — фактическое.

рис. 18. Фактическое распределение турбулентного потока тепла получено по данным [1]. Рассчитанная кривая в общем отражает реальное распределение турбулентного потока тепла. Причины ее колебательного характера пока еще неясны. Однако расчеты, вы-

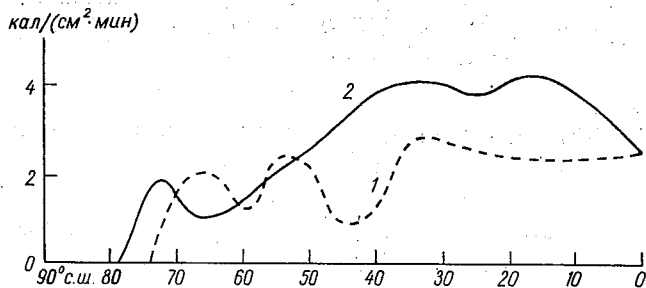


Рис. 18. Широтное распределение турбулентных потоков тепла (кал/см<sup>2</sup>·мин) над сушей и океанами.

1 — рассчитанное, 2 — фактическое [1].

полненные с использованием другой схемы параметризации пограничного слоя, обнаруживали такой же характер колебаний турбулентного потока в широтном ходе. Возможно это связано с особенностями распределения суши и океана, принятого в модели. На рис. 19 представлены осредненные по широте турбулентные потоки отдельно для суши и океана.

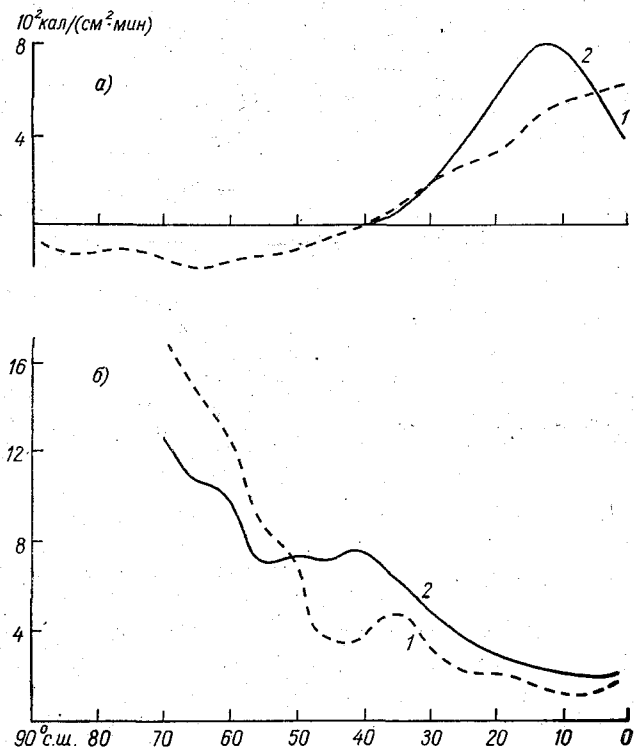


Рис. 19. Широтное распределение турбулентных потоков тепла ( $\text{кал}/(\text{см}^2 \cdot \text{мин})$ ) над сушей (а) и океанами (б).  
1 — рассчитанное, 2 — фактическое.

## 6. БАЛАНС ПРИТОКОВ ТЕПЛА И МЕРИДИОНАЛЬНЫЕ ПЕРЕНОСЫ ТЕПЛА В АТМОСФЕРЕ

Основными составляющими теплового баланса атмосферы являются: приток тепла за счет длинноволновой и коротковолновой радиации; приток тепла за счет конденсации (крупномасштабной и конвективной) и турбулентный приток тепла.

На рис. 20 показано широтное распределение средних по высоте притоков тепла, полученных в модели. На этом же рисунке дано широтное распределение баланса притока тепла. Из рисунка видно, что в целом имеет место радиационное выхолаживание на всех широтах. С другой стороны, конденсация и турбулентный приток тепла компенсируют (хотя и неодинаково) на разных широтах радиационное выхолаживание. Максимумы конденсационного притока тепла имеют место в зоне внутритропической конвергенции вблизи экватора и в субтропическом поясе в зоне баро-

клинной неустойчивости. В высоких широтах вследствие малого влагосодержания атмосферы приток тепла за счет конденсации пренебрежимо мал. Широтное распределение баланса притока тепла является основным фактором, способствующим развитию ячеек меридиональной циркуляции, которые показаны на рис. 11.

Рассмотрим баланс притоков тепла к атмосфере всего северного полушария. Помимо упомянутых притоков в этот баланс необходимо также включить притоки, обусловленные переносом тепла из южного (летнего) полушария в северное и притоки, связанные с переходом потенциальной энергии в кинетическую. В мо-

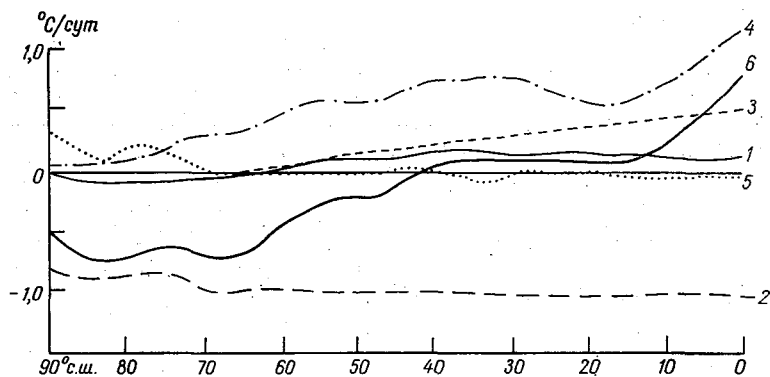


Рис. 20. Широтное распределение средних по высоте притоков тепла ( $^{\circ}\text{C}/\text{сут}$ ), полученных в модели за счет вертикальных турбулентных потоков тепла у подстилающей поверхности (1), длинноволновой радиации (2), коротковолновой радиации (3), крупномасштабной и конвективной конденсации (4), горизонтальной диффузии тепла (5) и результирующего притока тепла (6).

дели атмосферы перенос тепла через экватор не учитывается вследствие наличия стенки на экваторе. В табл. 1 представлены вычис-

Таблица 1

Притоки тепла в атмосфере северного полушария в январе ( $^{\circ}\text{C}/\text{сут}$ )

Вид притока	Фактические данные	Вычисленные значения
Радиационный	-0,91	-0,88
Турбулентный	0,22	0,16
За счет конденсации водяного пара	0,64	0,73
За счет переноса тепла через экватор	0,16	0
За счет трансформации потенциальной энергии в кинетическую	-0,03	-0,02
Баланс притоков тепла	0,08	-0,01

ленные по фактическим данным значения притоков тепла и результаты расчетов в модели с 25-х по 55-е сутки.

При вычислении фактических притоков тепла были использованы следующие данные:

- радиационный баланс на верхней границе атмосферы [18]
- и радиационный баланс на подстилающей поверхности [1];
- вертикальные турбулентные потоки тепла по Будыко [1];
- перенос тепла через экватор [22];
- трансформация потенциальной энергии в кинетическую [21].

Приток тепла за счет конденсации водяного пара вычисляется из соображений замыкания соотношения для водного баланса в атмосфере при условии, что испарение и поток влаги через экватор известны [1, 22].

В целом интегральные характеристики хорошо согласуются с фактическими данными. Положительный баланс притоков тепла, полученный по данным независимых исследований, является, по-видимому, результатом погрешностей в вычислениях отдельных составляющих баланса. Что касается вычисленного в модели баланса притоков, то его малое значение говорит о том, что модель атмосферы с 25-х по 55-е сутки, в среднем, имела сбалансированный приток тепла с очень слабой тенденцией к выхолаживанию.

Отсутствие замыкания баланса в широтном распределении полных притоков тепла должно компенсироваться меридиональным переносом внутренней и потенциальной энергии от области с положительными значениями результирующего притока к области с отрицательными значениями.

На рис. 21 приведено распределение меридиональных переносов тепла к северу, обусловленных крупномасштабными вихрями

$$[\overline{P_{ТВ}}] = \frac{2\pi a \cos \varphi}{g} \int_0^{p_s} [\overline{v^* T^*}] dp$$

и средней меридиональной циркуляцией

$$[\overline{P_{ТМ}}] = \frac{2\pi a \cos \varphi}{g} \int_0^{p_s} [\overline{v}] [\overline{T}] dp.$$

Меридиональный перенос тепла крупномасштабными вихрями удовлетворительно согласуется с фактическим переносом тепла к северу, полученным в работе Оорта [22]. Что касается среднего меридионального переноса, то его максимальное значение оказалось несколько меньшим, чем величина переноса к экватору в реальной атмосфере. Одной из главных причин такого расхождения является отсутствие обмена теплом с южным полушарием. Интенсивность среднего меридионального переноса тепла к экватору зависит от интенсивности ячейки Гадлея, которая в свою очередь зависит от интенсивности процессов конденсации за счет конвекции во внутритропической зоне конвергенции.

В реальной атмосфере зимой эта зона располагается в поясе 5—10° ю. ш. В нашей модели атмосферы эта зона оказалась

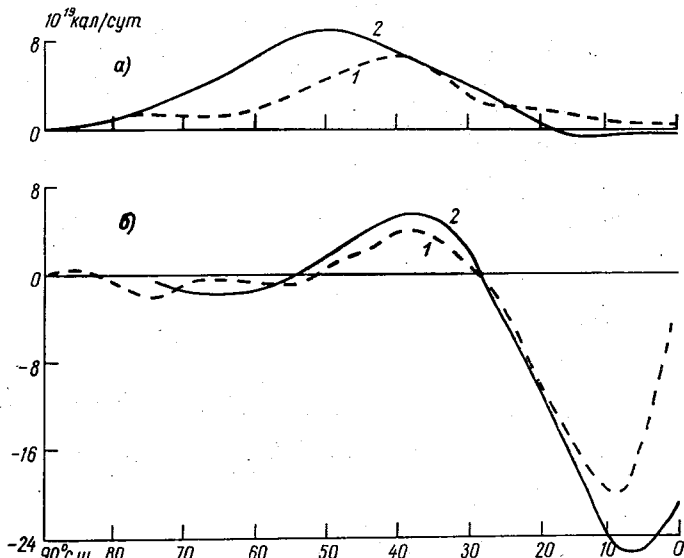


Рис. 21. Широтное распределение меридионального переноса тепла ( $10^{19}$  кал/сут), обусловленного крупномасштабными вихрями (а) и средней меридиональной циркуляцией (б).

1 — рассчитанное, 2 — фактическое [22].

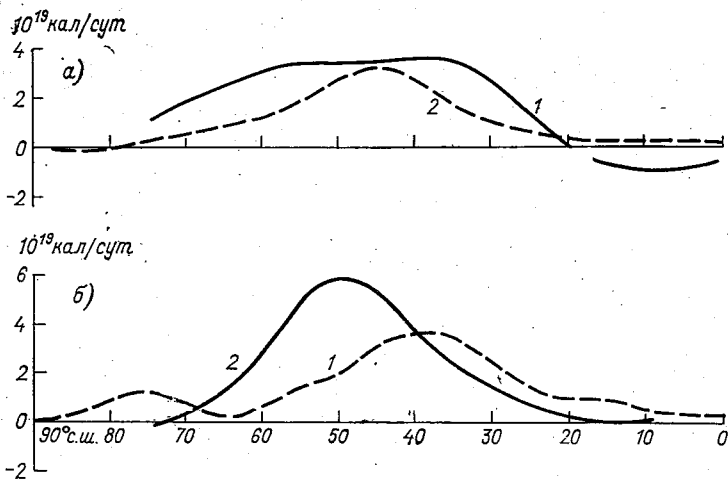


Рис. 22. Широтное распределение меридионального переноса тепла ( $10^{19}$  кал/сут) нестационарными (а) и стационарными (б) вихрями.

1 — рассчитанное, 2 — фактическое [22].

смещенной к экватору. На рис. 22 представлен средний меридиональный перенос тепла нестационарными и стационарными вихрями.

В некоторых полусферных моделях атмосферы (см., например, [11]) интенсивность меридиональной циркуляции получается близкой к реально наблюдаемой, однако в этом случае интенсивность осадков у экватора и, следовательно, конденсационный приток тепла оказывается завышенным примерно в два раза. С точки зрения общего энергетического баланса северного полушария, интенсивность среднего меридионального переноса тепла, получающуюся в нашей модели, по-видимому, следует считать удовлетворительной.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атлас теплового баланса земного шара/Под ред. М. И. Будыко.— Л.: Гидрометеоздат, 1973.— 69 с.
2. Гидродинамическая модель общей циркуляции атмосферы/ В. П. Мелешко, Б. Е. Шнееров, М. Е. Швец, Л. Р. Дмитриева-Арраго и др.— См. наст. сборник.
3. Котляков В. М. Снежный покров земли и ледники.— Л.: Гидрометеоздат, 1968.— 311 с.
4. Лоренц Э. Н. Природа и теория общей циркуляции атмосферы.— Л.: Гидрометеоздат, 1970.— 259 с.
5. Монин А. С., Гаврилин Б. Л. Гидродинамический прогноз погоды.— Л.: Гидрометеоздат, 1977.— 56 с.
6. Мухенберг В. В. Альbedo поверхности суши земного шара.— Труды ГГО, 1967, вып. 193, с. 24—37.
7. Синоптический бюллетень. Северное полушарие. Ч. 1. Январь.— М.: 1971.
8. Ellis T., Vonder Haar T. H. Zonal average earth radiation budget measurements from satellites for climate studies. Colorado State Univ. Atmos. Sci., 1976, Pap. N 240.
9. GARP report of the twelfth session of the Joint Organizing Committee, Nairobi, 24—30 June, 1976.
10. Gates W. L., Schlesinger M. E. Numerical Simulation of the January and July global climate with a two-level atmospheric model.— J. Atmos. Sci., 1977, vol. 34, N 1, p. 36—76.
11. Gilchrist A., Corby G. A., Newson R. L. A numerical experiment using a general circulation model of the atmosphere.— Quart. J. Roy. Met. Soc., 1973, vol. 99, p. 2—34.
12. Hellerman S. An updated estimate of the wind stress on the world ocean.— Mon. Wea. Rev., 1967, vol. 95, p. 607—626.
13. Hidaka R. Computation of the wind stress over the oceans.— In: Records Oceanogr. Works. Japan, 1958, p. 77—123.
14. Holloway J. L., Jr., Manabe S. Simulation of climate by a global general circulation model.— Mon. Wea. Rev., 1971, vol. 99, N 5, p. 335—370.
15. Kasahara A., Washington W. M. General circulation experiments with a six-layer NCAR model, including orography, cloudiness and surface temperature calculations.— J. Atmos. Sci., 1971, vol. 28, N 5, p. 657—701.
16. Kung E. C. On the momentum exchange between the atmosphere and earth over the Northern Hemisphere.— Mon. Wea. Rev., 1968, vol. 96, p. 337—341.
17. Mintz Y. Very long-term global integration of the primitive equations of atmospheric motion. WMO Tech. Note, N 66, WMO—JUGG Symposium on Research and Development Aspects of Long-Range Forecasting, Boulder, Col., 1964, Geneva, 1965, p. 141—167.
18. Newell R. E. e. a. The energy balance of the global atmosphere AMS/



- Newell R. E., Vincent D. G., Dopplick T. G. e. a.—Boston, Mass.: 1969, p. 42—90.
19. Newton C. W. Global angular momentum balance. Earth torques and atmospheric fluxes.—*J. Atmos. Sci.*, 1971, vol. 28, N 8, p. 1329—1341.
20. Oort A. H., Rasmusson E. M. Atmospheric circulation statistics.—*Prof. Pap.*, 1971, N 5, NOAA.
21. Oort A. H., Peixoto I. P. The annual cycle of the energetics of the atmosphere on a planetary scale.—*J. Geoph. Res.*, 1974, vol. 79, N 18, p. 2705—2719.
22. Oort A. H. The observed annual cycle in the meridional transport of atmospheric energy.—*J. Atmos. Sci.*, 1971, vol. 28, p. 325—339.
23. Pristley C. H. B. A survey of the stress between the ocean and the atmosphere.—*Australian J. Sci. Res.*, 1951, A. 4, p. 315—328.
24. Schutz C., Gates L. Global climatic data for surface 800 mb, 400 mb: January. A. Report prepared for Advanced Research Projects Agency. R-915-ARPA, 1971, RAND.
25. Somerville R. C. e. a. The GISS model of the global atmosphere.—*J. Atmos. Sci.*, 1974, vol. 31, N 1, p. 84—117.
26. Starr V. R., White R. M. A hemispheric study of the atmospheric angular momentum balance.—*Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 1951, vol. 77, p. 215—225.
27. Washington W. M., Kasahara A. January simulation experiment with the two-layer version of the NCAR global circulation model.—*Mon. Wea. Rev.*, 1970, vol. 98, N 8, p. 559—580.
28. Welck R. E., Kasahara A., Washington W. M., Desanto G. Effect of horizontal resolution in a finite difference model of the general circulation.—*Mon. Wea. Rev.*, 1971, vol. 99, p. 673—683.

*В. П. Мелешко, М. Е. Швец, Б. Е. Шнейеров,  
Е. П. Юшина, Г. В. Паршина, И. П. Гусева, В. И. Пономарев*

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛАГООБОРОТА В АТМОСФЕРЕ ДЛЯ ЯНВАРСКИХ УСЛОВИЙ

Одной из главных целей численного моделирования общей циркуляции является исследование закономерностей влагооборота. В настоящей статье анализируются результаты моделирования влагооборота в атмосфере с помощью гидродинамической модели, разработанной в ГГО [3]. В этой модели учитываются процессы испарения, конденсации, переноса водяного пара и процессы конвекции, сопровождающиеся конденсацией и выпадением осадков.

В данном варианте модели, предназначенном для моделирования циркуляции для зимних условий, не учитывалась гидрология суши. По рассчитанным данным с 25-х по 55-е сутки, т. е. за 31 день, вычислялись различные характеристики влагообмена, которые затем сопоставлялись с соответствующими климатическими характеристиками, полученными по данным наблюдений.

**Испарение и осадки.** Рассчитанные данные об испарении приведены на рис. 1 и 2. Фактические значения получены по М. И. Будыко [1]. Как видно из рис. 1, почти на всех широтах количество влаги, поступающей в атмосферу в результате испарения с подстилающей поверхности, оказывается заниженным по сравнению

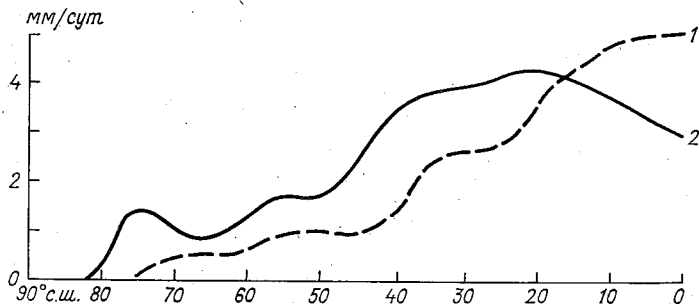


Рис. 1. Широтное распределение испарения (мм/сут).

1 — рассчитанное, 2 — фактическое [1].

с эмпирическими данными. Если сопоставить результаты, полученные в модели ГГО, с данными об испарении, рассчитанными с по-

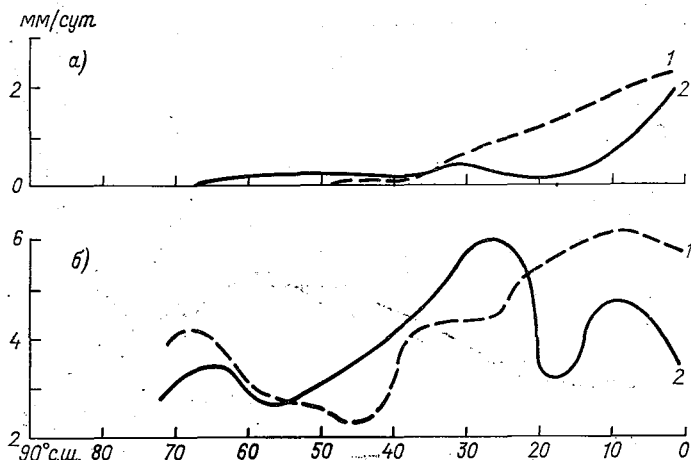


Рис. 2. Широтное распределение испарения (мм/сут) над сушей (а) и океанами (б).

1 — рассчитанное, 2 — фактическое [1].

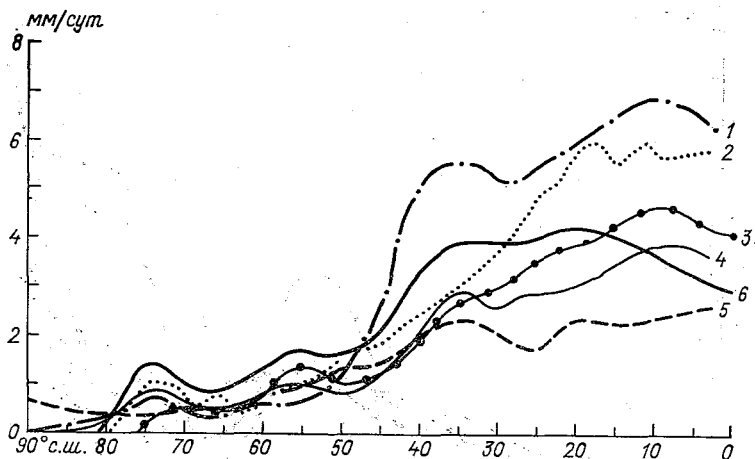


Рис. 3. Широтное распределение испарения (мм/сут), рассчитанное по различным моделям.

1 — модель РАНД Со [5], 2 — модель английской метеорологической службы [6], 3 — модель ГГО [3], 4 — модель лаборатории геофизической гидродинамики [7], 5 — модель Годдардского института космических исследований, 6 — фактические данные [1].

мощью наиболее полных моделей общей циркуляции атмосферы, существующих в настоящее время (рис. 3), то окажется, что по крайней мере для умеренных широт все модели дают меньшие значения испарения по сравнению с данными М. И. Будыко.

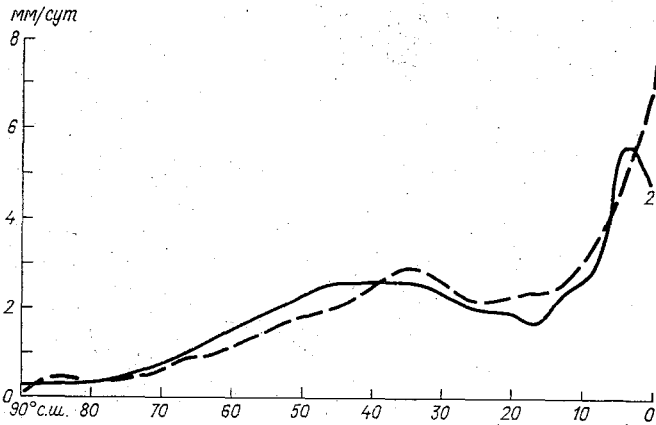


Рис. 4. Широтное распределение осадков (мм/сут).  
1 — рассчитанное, 2 — фактическое [7].

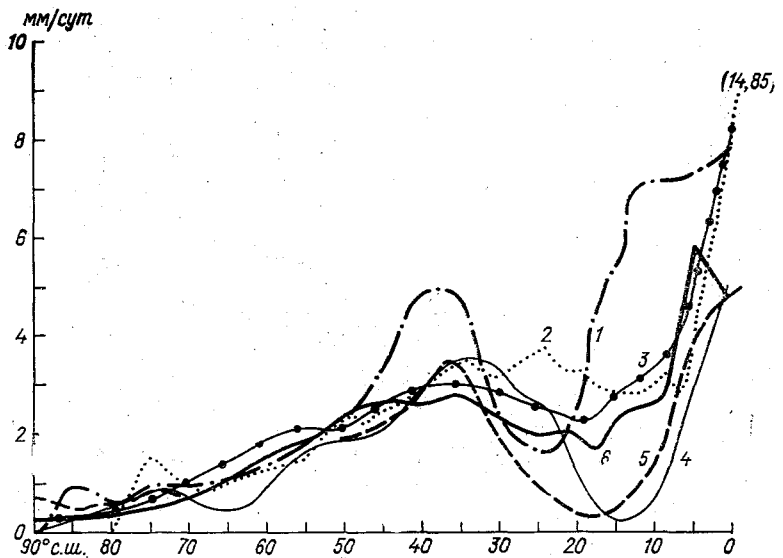


Рис. 5. Широтное распределение осадков (мм/сут), рассчитанное по различным моделям.

1 — модель РАНД Со [5], 2 — модель английской метеорологической службы [6], 3 — модель ГГО [3], 4 — модель лаборатории геофизической гидродинамики [7], 5 — модель Годдардского института космических исследований, 6 — фактические данные [1].

Возможно, что это несовпадение объясняется не только несовершенством самих моделей, но и погрешностями расчета климатических значений испарения. Что касается тропической зоны, то по сравнению с другими моделями настоящая модель дает для этой зоны величины испарения наиболее близкие к данным М. И. Бudyko.

Широтное распределение суммарных осадков показано на рис. 4, фактические данные взяты из работы [10]. В целом модель

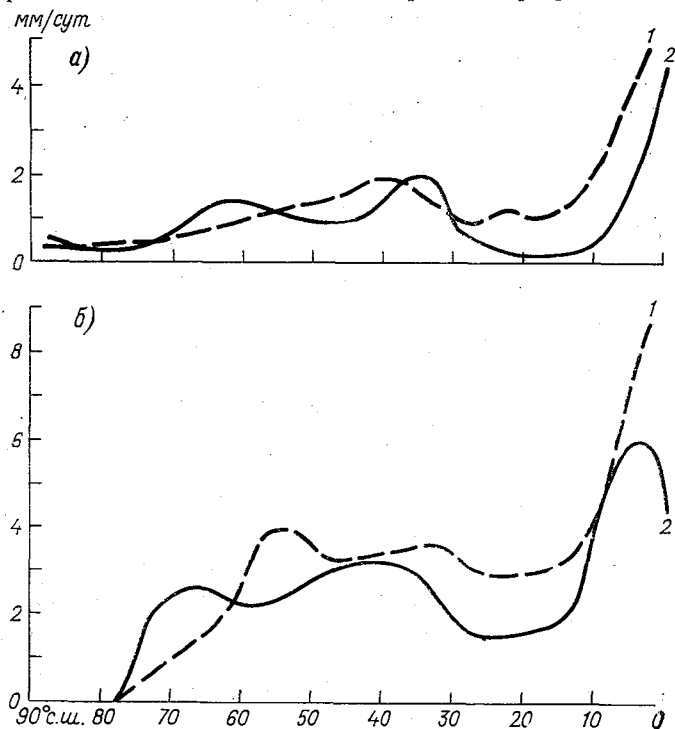


Рис. 6. Широтное распределение осадков (мм/сут) над сушей (а) и океанами (б).

1 — рассчитанное, 2 — фактическое.

дает несколько преувеличенное количество осадков почти на всех широтах, при этом основная доля рассчитанных осадков приходится на крупномасштабные. Конвективные осадки в основном имеют место в тропической и экваториальной зонах. На графике отчетливо проявляются два максимума, один из которых обусловлен интенсивным выпадением осадков в зоне бароклинной неустойчивости, другой связан с конвекцией в тропиках. Можно только отметить, что вследствие принятой при расчете зонального распределения схемы экстраполяции данных, интенсивность осадков на экваторе оказалась больше фактической.

На рис. 5 приведены широтные распределения осадков, рассчитанные по некоторым из существующих в настоящее время

моделей общей циркуляции. На рис. 6 представлены широтные распределения осадков над сушей и над океанами в отдельности. Фактические зональные значения получены в результате обработки карты среднего месячного распределения осадков для января, построенной на основании ряда опубликованных работ [4, 8].

На рис. 7 и 8 приведены карты рассчитанных и фактических полей испарения и осадков для северного полушария.

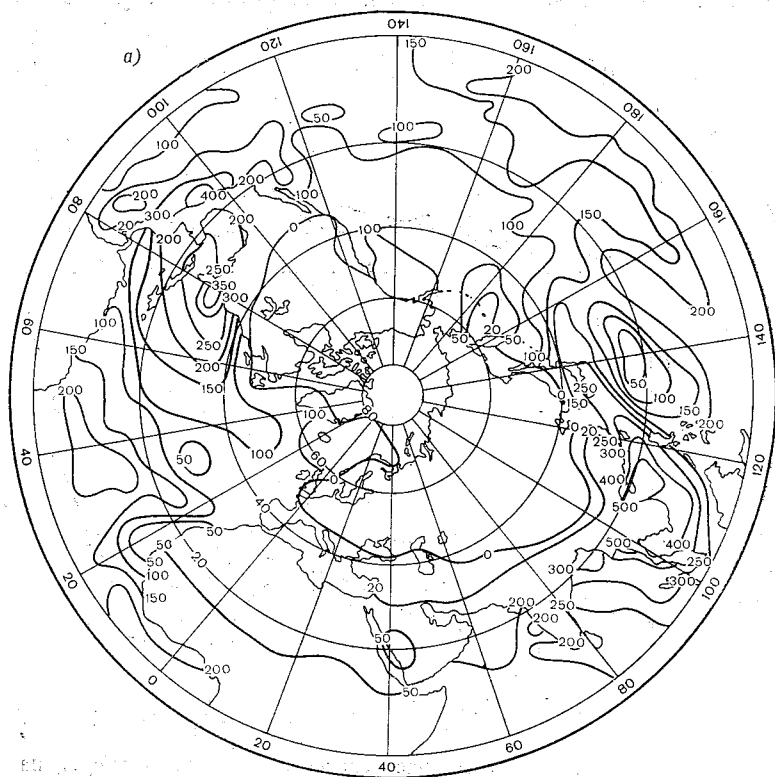


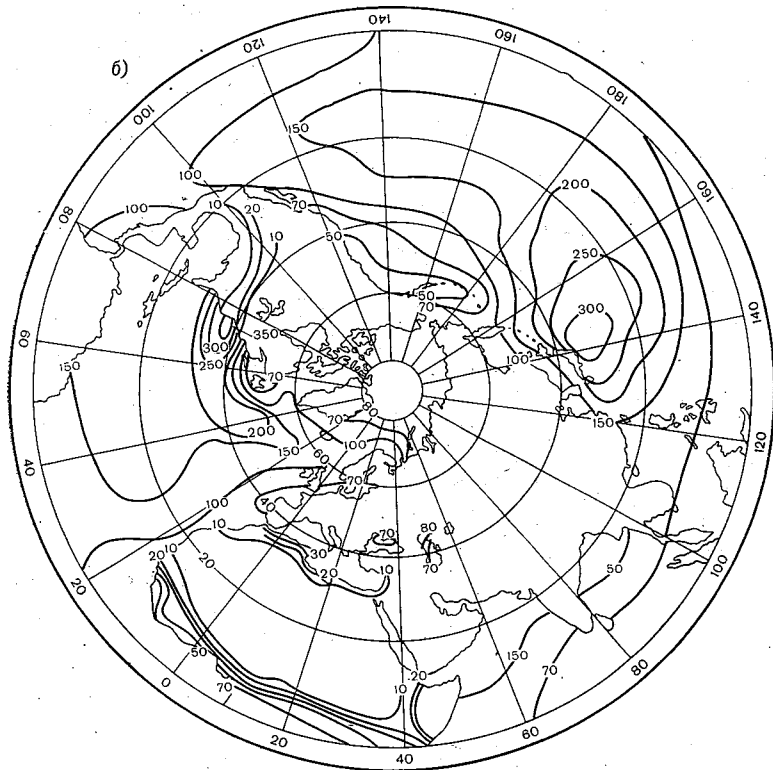
Рис. 7. Поле испа  
а) рассчитанное, б) фак

**Меридиональный перенос влаги.** Важной характеристикой баланса влаги на полушарии является ее меридиональный перенос. Поскольку в субтропических широтах испарение превышает осадки, а в средних и высоких широтах, а также в экваториальной зоне осадки превышают испарение, то должен существовать перенос водяного пара из субтропиков как в более низкие, так и в более высокие широты.

На рис. 9 показан вычисленный и фактический меридиональные переносы влаги: крупномасштабными вихрями  $[\bar{P}_{qv}]$  и средней

меридиональной циркуляцией  $[\bar{P}_{qm}]$ . Фактические данные взяты из работы Оорта [9]. Из рисунка следует, что меридиональный перенос влаги крупномасштабными вихрями в модели описывается хорошо. Меридиональный перенос влаги за счет среднего меридионального движения имеет те же особенности, что и перенос тепла меридиональным течением.

На рис. 10 представлен вычисленный и фактический перенос



рения (мм/мес).

тическое для января [1].

влаги, обусловленный нестационарными крупномасштабными вихрями (движущимися барическими образованиями)

$$[\overline{P_{qm}}] = \frac{2\pi a \cos \varphi}{g} \int_0^{p_s} [\overline{v'q'}] dp$$

и стационарными вихрями (постоянными центрами действия атмосферы)

$$[\overline{P_{qc}}] = \frac{2\pi a \cos \varphi}{g} \int_0^{p_s} [\overline{v^*q^*}] dp.$$



Рис. 8. Поле осадков  
 а) рассчитанное, б) факт

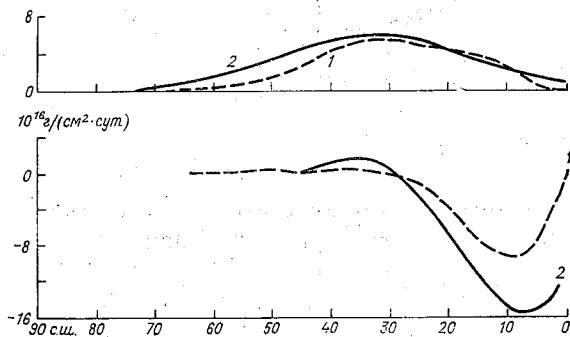
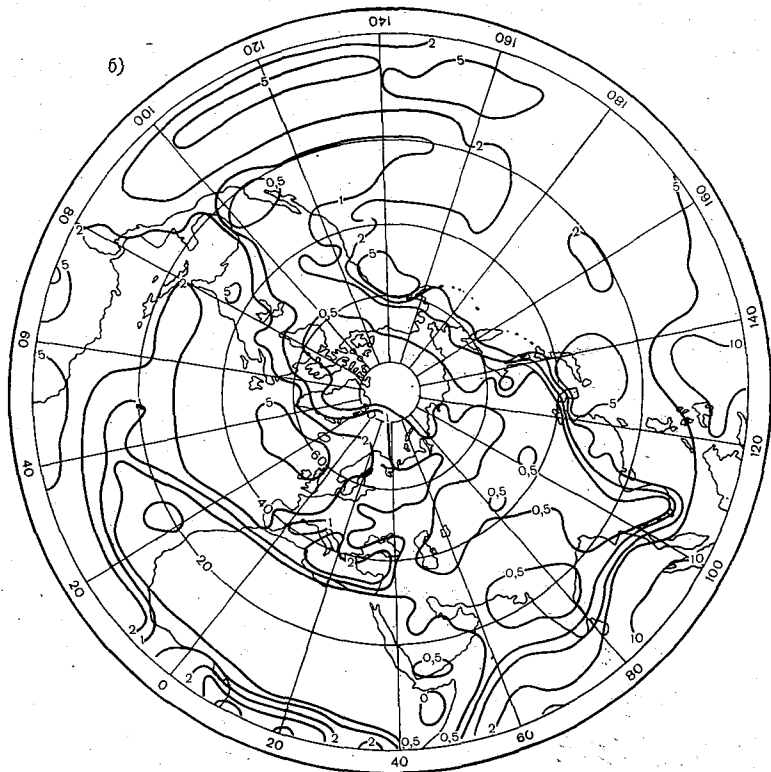


Рис. 9. Широтное распределение меридионального переноса влаги ( $10^{16}$  г/(см<sup>2</sup>·сут)) крупномасштабными вихрями (а) и средней меридиональной циркуляцией (б).

1 — рассчитанное, 2 — фактическое [6].





ков (мм/сут).  
 тическое для января.

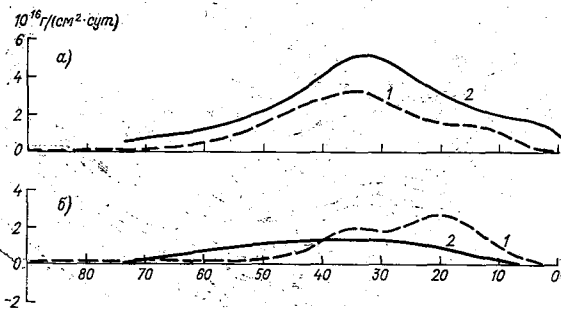


Рис. 10. Широтное распределение меридионального переноса влаги ( $10^{16}$  г/(см<sup>2</sup>·сут)) нестационарными (а) и стационарными вихрями (б).

1 — рассчитанное, 2 — фактическое [6].

Здесь  $v$  — меридиональная составляющая скорости ветра,  $q$  — удельная влажность,  $p$  — давление,  $p_s$  — приземное давление,  $\varphi$  — широта,  $a$  — радиус Земли,  $g$  — ускорение свободного падения. Черта сверху означает осреднение по времени, квадратные скобки — осреднение вдоль широтного круга [9]:

$$A' = A - \bar{A}, \quad A^* = A - [A].$$

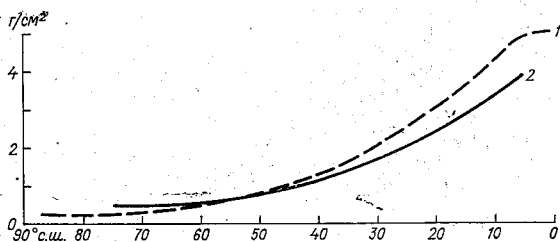


Рис. 11. Общее влагосодержание атмосферы ( $\text{г}/\text{см}^2$ ).

1 — рассчитанное, 2 — фактическое.

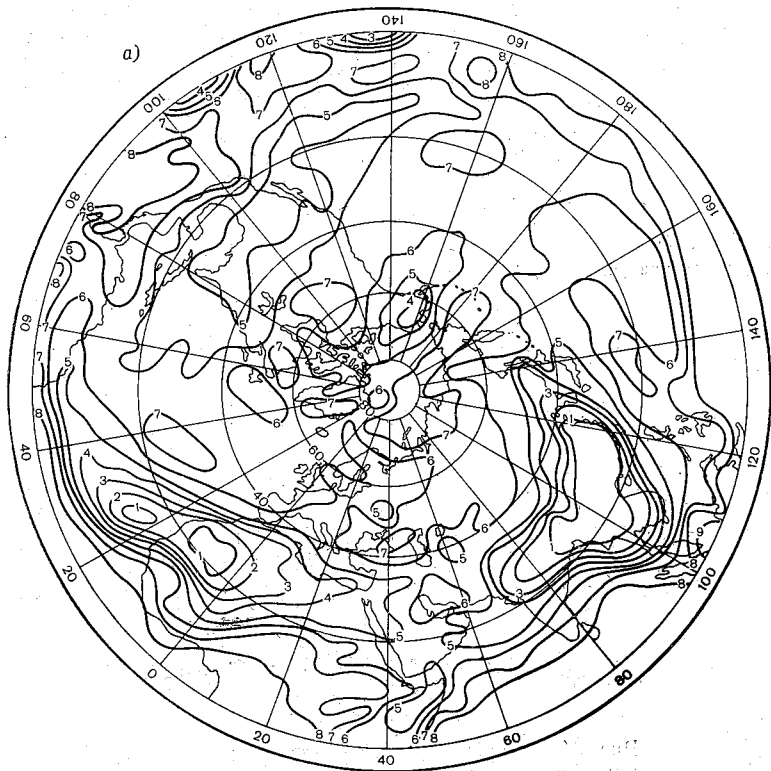


Рис. 12. Поле облач  
а) рассчитанное,

Фактические данные взяты из той же работы Оорта [9]. Из рисунка видно, что основной перенос влаги в реальной атмосфере осуществляется движущимися барическими образованиями. Сопоставление рассчитанных переносов с фактическими показывает, что модель атмосферы достаточно хорошо описывает вихревые меридиональные переносы влаги.

Общий баланс влаги. В табл. 1 представлены средние по

Таблица 1

Средние по полушарию составляющие баланса влаги ( $\text{г}/\text{см}^2 \cdot \text{сут}$ ). Январь

Составляющие баланса	Данные	
	фактические	вычисленные
Испарение	0,307	0,284
Осадки	-0,311 (0,261)	-0,288
Поток влаги через экватор	-0,046	0
Полный баланс влаги	-0,050 (0)	-0,004



ности в баллах.

б) фактическое [2].

полушарию составляющие баланса влаги. Среднее за январь количество осадков взято из работы [10], испарение определено по М. И. Будыко, величина потока влаги через экватор получена по данным Оорта [9]. Из таблицы видно, что приведенные фактические данные не дают замыкания баланса влаги, причем расхождение составляет около 20% значений его главных компонент. Наименее надежными являются, по-видимому, данные об осадках, поскольку их изменчивость в пространстве и времени весьма велика, а данных наблюдений, особенно для океанов и труднодоступных местностей, чрезвычайно мало. В таблице в скобках указана величина осадков, которая была бы необходима для замыкания

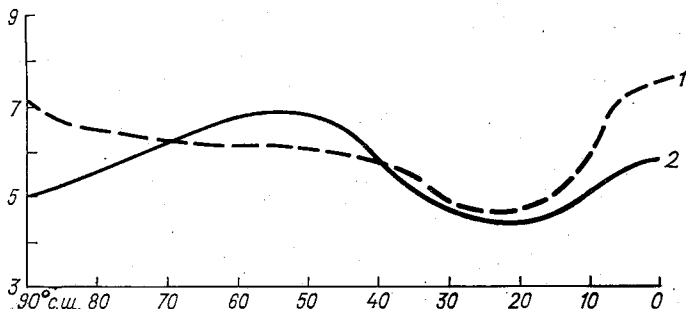


Рис. 13. Широтное распределение общей облачности (балл) для января.

1 — рассчитанное, 2 — фактическое [2].

баланса влаги на полушарии. Таким образом, фактическое среднее значение интенсивности осадков лежит, по-видимому, между указанными в таблице значениями, и полученные в модели величины можно считать вполне удовлетворительными.

На рис. 11 показано широтное распределение общего влагосодержания атмосферы.

**Поле облачности.** На рис. 12 а представлено поле общей облачности в баллах, полученное в результате осреднения с 25-х по 55-е сутки. На рис. 12 б дано поле фактической облачности для января, полученное по данным наземной сети станций и спутниковых наблюдений [2].

Вследствие большой пространственной изменчивости полей облачности детальное их сопоставление затруднительно, поэтому представляет интерес сравнить основные крупномасштабные особенности в распределении балла облаков.

Из рис. 12 б видно, что, как правило, над океанами балл облаков выше, чем над сушей. Области с минимальным баллом облаков располагаются над Северной Африкой и Центральной Азией. Обширная область значительной облачности простирается над всей Европой и Западной Сибирью. Все эти особенности также хорошо выражены и в поле вычисленной облачности, представленном на рис. 12 а. Широтное распределение общей облачности для января дано на рис. 13.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атлас теплового баланса земного шара/Под ред. М. И. Будыко.—Л.: Гидрометеиздат, 1973.—69 с.
2. Берлянд Т. Г., Строкина А. А. Режим облачности на земном шаре.—Труды ГГО, 1975, вып. 338, с. 3—20.
3. Гидродинамическая модель общей циркуляции атмосферы/В. П. Мелешко, Б. Е. Шнейров, М. Е. Швец, Л. Р. Дмитриева-Арраго и др.—См. наст. сборник.
4. Climatic data of Europe.—Budapest, WMO—UNESCO, vol. 1, 1970.
5. Gates W. L., Schlesinger M. E. Numerical simulation of the January and July climate with a two-level atmospheric model.—J. Atmos. Sci., 1977, vol. 34, N 1, p. 36—76.
6. Gilchrist A., Corby G. A., Newson R. L. A numerical experiment using a general circulation model of the atmosphere.—Quart. J. Roy. Met. Soc., 1973, 99, p. 2—34.
7. Holloway J. L., Jr., Manabe S. Simulation of climate by a global general circulation model.—Mon. Wea. Rev., 1971, vol. 99, N 5, p. 335—370.
8. Lutz Jaeger. Monatskarten des Niederschlages für die ganz Erde.—Ber. Deutsch. Wetterdienst, 1976, Bd. 18, N 139.—38 S.
9. Oort A. H., Rasmusson E. M. Atmospheric circulation statistics.—Prof. Pap., 1971, N 5, NOAA.
10. Schutz C., Gates L. Global climatic data for surface 800 mb, 400 mb: January. A Report prepared for Advanced Research Projects Agency. R-915-ARPA, 1971, RAND.
11. Somerville R. C. e. a. The GISS model of the global atmosphere.—J. Atmos. Sci., 1974, vol. 31, N 1, p. 84—117.

*В. А. Матюгин*

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РЕАЛИЗАЦИИ ГИДРОДИНАМИКО-СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОГНОЗА ПОГОДЫ

В последнее время при построении моделей общей циркуляции атмосферы все чаще используется спектральный подход. Ряд достоинств, которыми обладают спектральные модели, отмечен в работах [5, 7, 9]. Мы остановимся только на одном. Как указывалось в работе [2], основным достоинством спектрального подхода к моделированию циркуляции атмосферы и океана является возможность явно учесть различия в свойствах движений разных пространственных масштабов. В работе [1] был проведен линейный анализ уравнений динамики атмосферы. Прежде всего, анализ собственных векторов показывает, что среди медленных движений выделяются планетарные волны с существенной потенциальной частью вектора. А именно, необходимо детально рассчитать из полных уравнений динамики компоненты потенциала скорости  $\chi_{1,1}$ ,  $\chi_{2,2}$ ,  $\chi_{3,3}$ . Остальные спектральные компоненты потенциала скорости входят в собственные векторы медленных движений с малым весом, а в собственные векторы высокочастотных возмущений с большим весом.

Применение метода осреднения в первом приближении приводит к отфильтровыванию возмущений и естественным путем обеспечивает квазисоленоидальность основной группы спектральных компонент медленного движения.

Исходя из этого, разделим спектр атмосферных движений на область  $A$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) и область  $B$  ( $n \geq 4$ ) и в каждой будем по-разному преобразовывать уравнения динамики атмосферы.

В настоящей работе описывается спектральная модель с полными уравнениями, в которой дивергенция в разных участках спектра рассчитывается различными способами, и приводятся результаты некоторых численных экспериментов.

## УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ

В качестве уравнений модели возьмем уравнения, описывающие движения однородной несжимаемой и невязкой жидкости, которые могут быть записаны в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -(\xi + f) \mathbf{k} \times \mathbf{V} - \nabla \left( \Phi + \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\Phi \nabla \cdot \mathbf{V}. \quad (2)$$

Здесь уравнение движения (1) записано в форме Лэмба—Громеко,  $\mathbf{V}$  — вектор горизонтального ветра с компонентом  $u$ , направленным на восток и  $v$  — направленным на юг;  $\Phi$  — геопотенциал свободной поверхности;  $f$  — параметр Кориолиса;  $\mathbf{k}$  — вертикальный орт;  $\nabla$  — горизонтальный оператор набла;  $t$  — время;  $\xi$  — вертикальный компонент относительного вихря.

Перейдем от уравнения движения в форме (1) к уравнениям для вертикального компонента относительного вихря  $\xi$  и горизонтальной дивергенции  $D$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \nabla \cdot (\xi + f) \mathbf{V}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \mathbf{k} \cdot \nabla \times (\xi + f) \mathbf{V} - \nabla^2 \left( \Phi' + \frac{\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}}{2} \right). \quad (4)$$

Уравнение неразрывности (2) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = -\nabla \Phi' \cdot \mathbf{V} - \bar{\Phi} D, \quad (5)$$

где  $\Phi = \bar{\Phi} + \Phi'$ ;  $\bar{\Phi}$  — не зависящее от времени среднее по пространству значение геопотенциала;  $\Phi'$  — отклонение от этого среднего.

На основании теоремы Гельмгольца вектор скорости ветра  $\mathbf{V}$  можно выразить через функцию тока  $\psi$  и потенциал скорости  $\chi$

$$\mathbf{V} = \mathbf{k} \times \nabla \psi + \nabla \chi. \quad (6)$$

Отсюда

$$\xi = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{V} = \nabla^2 \psi, \quad (7)$$

$$D = \nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla^2 \chi. \quad (8)$$

Запишем теперь уравнения (3), (4) и (5) в сферической системе координат, приведя их к безразмерной форме. При этом за единицу частоты принята величина  $\Omega = 2\pi/\text{сут}$ , а за единицу

длины — радиус Земли  $a$ . Таким образом, безразмерное время  $\tau = \Omega t$ , а безразмерные значения  $\psi$ ,  $\chi$ , для которых сохранены первоначальные обозначения, получены из размерных делением на  $\Omega a^2$ . Безразмерные значения геопотенциала получены из размерных делением на  $\Omega^2 a^2$ . Используя соотношения (6)–(8), получим систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\nabla^2 \psi) = - \frac{1}{1 - \mu^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (U \nabla^2 \psi) + (\mu^2 - 1) \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial}{\partial \mu} (V \nabla^2 \psi) \right] - 2 (\mu \nabla^2 \chi - V), \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\nabla^2 \chi) = - \frac{1}{1 - \mu^2} \left[ - \frac{\partial}{\partial \lambda} (V \nabla^2 \psi) + (\mu^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \mu} (U \nabla^2 \psi) \right] + \\ + 2 (\mu \nabla^2 \psi - U) - \nabla^2 \left[ \frac{U^2 + V^2}{2(1 - \mu^2)} + \Phi \right], \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial \tau} = - \frac{1}{1 - \mu^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (U \Phi') + (\mu^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \mu} (V \Phi') \right] - \bar{\Phi} \nabla^2 \chi. \quad (11)$$

Здесь  $\lambda$  — долгота,  $\mu = \cos \Theta$ ,  $\Theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$  — дополнение до широты  $\varphi$ ,  $U = u \sin \Theta$ ,  $V = v \sin \Theta$ .

Из определения (6) имеем

$$U = \frac{\partial \chi}{\partial \lambda} + (\mu^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial \mu}, \quad (12)$$

$$V = - \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + (\mu^2 - 1) \frac{\partial \chi}{\partial \mu}. \quad (13)$$

### СПЕКТРАЛЬНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ

Представим все переменные в виде рядов по сферическим функциям

$$\psi = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=|n|}^{|n|+L} \psi_{l,n} Y_{l,n}, \\ \chi = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=|n|}^{|n|+L} \chi_{l,n} Y_{l,n}, \\ \Phi = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=|n|}^{|n|+L} \Phi_{l,n} Y_{l,n}, \\ U = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=|n|}^{|n|+L+1} U_{l,n} Y_{l,n}, \\ V = \sum_{n=-N}^N \sum_{l=|n|}^{|n|+L+1} V_{l,n} Y_{l,n}. \quad (14)$$



Здесь

$$Y_{l, n} = P_{l, n}(\mu) e^{in\lambda} \text{ и } P_{l, n}(\mu)$$

— присоединенные полиномы Лежандра степени  $l$  и порядка  $n$ , нормированные для сферы

$$\int_{-1}^1 [P_{l, n}(\mu)]^2 d\mu = 1.$$

Коэффициенты разложения являются комплексными, причем, так как все переменные являются действительными величинами, эти коэффициенты связаны простыми соотношениями. Например, для  $\psi_{l, n}$   $\psi_{l, -n} = (-1)^n \psi_{l, n}^*$ . В дальнейшем нам понадобятся следующие рекуррентные соотношения для полиномов Лежандра:

$$\mu P_{l, n} = \varepsilon_{l+1, n} P_{l+1, n} + \varepsilon_{l, n} P_{l-1, n}, \quad (15)$$

$$(\mu^2 - 1) \frac{dP_{l, n}}{d\mu} = l \varepsilon_{l+1, n} P_{l+1, n} - (l+1) \varepsilon_{l, n} P_{l-1, n}, \quad (16)$$

где

$$\varepsilon_{l, n} = [(l^2 - n^2)/(4l^2 - 1)]^{1/2}.$$

С помощью соотношения (16) из уравнений (12) и (13) легко получить связь между спектральными коэффициентами  $U_{l, n}$ ,  $V_{l, n}$  и  $\psi_{l, n}$ ,  $\chi_{l, n}$ , а именно:

$$U_{l, n} = (l-1) \varepsilon_{l, n} \psi_{l-1, n} - (l+2) \varepsilon_{l+1, n} \psi_{l+1, n} + in \chi_{l, n}, \quad (17)$$

$$V_{l, n} = (l-1) \varepsilon_{l, n} \chi_{l-1, n} - (l+2) \varepsilon_{l+1, n} \chi_{l+1, n} - in \psi_{l, n}. \quad (18)$$

Если в разложении функции тока и потенциала скорости ограничиться максимальным значением параметра  $l$ , равным  $L$ , то из (17) и (18) видно, что для  $U$  и  $V$  максимальное значение  $l$  будет на единицу больше.

Для вычисления нелинейных членов используется метод спектрально-сеточного преобразования, подробно изложенный в работе [7]. Все переменные восстанавливаются в точках сетки. Затем в этих точках вычисляются величины  $U \nabla^2 \psi$ ,  $V \nabla^2 \psi$ ,  $U \Phi'$ ,  $V \Phi'$ ,  $(U^2 + V^2)/2$ . Эти величины на каждом круге широты представляются следующими рядами Фурье:

$$U \nabla^2 \psi = \sum_{n=-N}^N A_n e^{in\lambda},$$

$$V \nabla^2 \psi = \sum_{n=-N}^N B_n e^{in\lambda},$$

$$U\Phi' = \sum_{n=-N}^N C_n e^{in\lambda},$$

$$V\Phi' = \sum_{n=-N}^N D_n e^{in\lambda},$$

$$\frac{U^2 + V^2}{2} = \sum_{n=-N}^N E_n e^{in\lambda}. \quad (19)$$

Подставим полученные ряды (19) вместе с рядами (14) в уравнения (9) — (11), умножим на сопряженную сферическую функцию  $Y_{l,n}^*$  и проинтегрируем по сфере. Вследствие ортогональности сферических функций в уравнении вихря (9) появится интеграл вида

$$- \int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} \left[ inA_n + (\mu^2 - 1) \frac{\partial B_n}{\partial \mu} \right] P_{l,n}(\mu) d\mu.$$

Если второй член подынтегрального выражения проинтегрировать по частям, то окончательно уравнение вихря запишется в виде

$$-l(l+1) \frac{\partial \psi_{l,n}}{\partial \tau} = - \int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} \left[ inA_n P_{l,n} - (\mu^2 - 1) \frac{dP_{l,n}}{d\mu} B_n \right] d\mu + \\ + 2[(l-1)l\varepsilon_{l,n}\chi_{l-1,n} + (l+1)(l+2)\varepsilon_{l+1,n}\chi_{l+1,n} + V_{l,n}]. \quad (20)$$

Проделав аналогичные преобразования с уравнениями (10) и (11), получим прогностические уравнения для спектральных коэффициентов потенциала скорости и геопотенциала в виде:

$$-l(l+1) \frac{\partial \chi_{l,n}}{\partial \tau} = - \int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} \left[ inB_n P_{l,n} + A_n (\mu^2 - 1) \frac{dP_{l,n}}{d\mu} \right] \times \\ \times d\mu - 2[(l-1)l\varepsilon_{l,n}\psi_{l-1,n} + (l+1)(l+2)\varepsilon_{l+1,n}\psi_{l+1,n} + U_{l,n}] + \\ + l(l+1)(E_{l,n} + \Phi_{l,n}), \quad (21)$$

$$\frac{d\Phi_{l,n}}{d\tau} = - \int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} \left[ inC_n P_{l,n} - \right. \\ \left. - D_n (\mu^2 - 1) \frac{dP_{l,n}}{d\mu} \right] d\mu + \Phi l(l+1)\chi_{l,n}. \quad (22)$$

где

$$E_{l, n} = \int_{-1}^1 \frac{E_n}{1-\mu^2} P_{l, n} d\mu.$$

В работе [7] показано, что подынтегральные выражения в уравнениях (20), (21) и (22) являются полиномами от  $\mu$ . Поэтому, если для их вычисления применять формулу Гаусса, то при достаточном количестве узлов квадратурной формулы такой интеграл можно вычислить весьма точно.

Как уже говорилось выше, поведение спектральных коэффициентов потенциала скорости различно в разных участках спектра. Если планетарные гармоники являются медленно меняющимися и их амплитуды сравнимы с амплитудами функции тока, то в остальной части спектра гармоники потенциала скорости являются быстро меняющимися переменными по сравнению с гармониками функции тока. В работе [2] было получено уравнение, позволяющее по значениям функции тока находить средние значения потенциала скорости. В работе [1] был проведен анализ этого уравнения.

Получим аналогичное уравнение для нашей системы уравнений. Продифференцируем уравнение (21) для потенциала скорости по времени. Производные по времени от функции тока и геопотенциала заменим с помощью (20) и (22). В результате получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \chi_{l, n}}{d\tau^2} - \frac{2in}{l(l+1)} \frac{d\chi_{l, n}}{d\tau} + a_{l-2, n} \chi_{l-2, n} + \gamma_{l, n} \chi_{l, n} + b_{l+2, n} \chi_{l+2, n} = \\ & = -\frac{2\varepsilon_{l, n}}{l^2} (2in\psi_{l-1, n} - Q\psi_{l-1, n}) + \frac{2\varepsilon_{l+1, n}}{(l+1)^2} (2in\psi_{l+1, n} - Q\psi_{l+1, n}) - \\ & - Q\Phi_{l, n} - \frac{1}{l(l+1)} \frac{dQ\chi_{l, n}}{d\tau} - \frac{dE_{l, n}}{d\tau}. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь  $Q\psi_{l, n}$ ,  $Q\chi_{l, n}$  и  $Q\Phi_{l, n}$  — интегралы, входящие в уравнения (20) — (22),

$$\begin{aligned} a_{l, n} &= \frac{4l}{l+2} \varepsilon_{l+2, n} \varepsilon_{l+1, n}, \\ \gamma_{l, n} &= \left[ \frac{4(l-1)(l+1)}{l^2} \varepsilon_{l, n}^2 + \frac{4l(l+2)}{(l+1)^2} \varepsilon_{l+1, n}^2 + \bar{\Phi}l(l+1) \right], \\ b_{l, n} &= -\frac{4(l+1)}{l-1} \varepsilon_{l-1, n} \varepsilon_{l, n}. \end{aligned}$$

Решение этого уравнения состоит из суммы медленно меняющейся величины, которую обозначим через  $\bar{\chi}_{l, n}$ , и осциллирующей

переменной  $\chi'_{l,n}$ . При осреднении уравнения величина  $\chi'_{l,n}$  исключается, а производными по времени от  $\bar{\chi}_{l,n}$  в первом приближении можно пренебречь. В результате для расчета  $\bar{\chi}_{l,n}$  получим систему уравнений

$$a_{l-2, n} \bar{\chi}_{l-2, n} + v_{l, n} \bar{\chi}_{l, n} + b_{l+2, n} \bar{\chi}_{l+2, n} = z_{l, n}, \quad (24)$$

где

$$z_{l, n} = \frac{2\varepsilon_{l, n}}{l^2} (2in\psi_{l-1, n} - Q\psi_{l-1, n}) + \\ + \frac{2\varepsilon_{l+1, n}}{(l+1)^2} (2in\psi_{l+1, n} - Q\psi_{l+1, n}) - Q\Phi_{l, n}.$$

Теперь путь решения состоит в следующем. В области  $B$  ( $n \geq 4$ )  $\bar{\chi}_{l,n}$  представляет собой быструю переменную и среднее значение  $\bar{\chi}_{l,n}$  в первом приближении находится из уравнения (24). При решении уравнений в области  $A$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) вводим только одно изменение. Уравнение для  $\chi_{3,1}$ ,  $\chi_{2,2}$ ,  $\chi_{3,3}$  берем в форме (21), при этом  $\psi_{2,1}$ ,  $\psi_{3,2}$ ,  $\psi_{1,3}$  не рассматриваются квазипостоянными, а определяются из совместного решения уравнений (20) и (21). Это дает возможность учесть две малые собственные частоты, которые были найдены при анализе системы в [1].

### ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

При численном решении уравнений (20)–(22) и (24) было принято  $N = 8$  и  $L = 12$ . Задача решалась для полусферы, поэтому предполагалось, что функция тока является антисимметричной, а потенциал скорости и геопотенциал симметричными функциями относительно экватора. Поэтому для функции тока гармоника  $\psi_{l,n}$  берутся только с  $(l-n)$  нечетными, а для потенциала скорости и геопотенциала гармоника  $\chi_{l,n}$  и  $\Phi_{l,n}$  берутся с  $(l-n)$  четными. Присоединенные полиномы Лежандра рассчитывались по рекуррентным формулам, аналогичным тем, которые приведены в [6]. При вычислении нелинейных членов использовалась процедура быстрого преобразования Фурье, а интегралы, содержащие функции, зависящие от  $\mu$ , вычислялись по квадратурной формуле Гаусса.

Остановимся на вопросе выбора значений  $N$  и  $L$ . Для обоснования выбора количества зональных гармоник в работах [3, 4] был выполнен анализ трансформации кинетической энергии в атмосфере. Было показано, что при ограничении восьмью гармониками замыкание является оптимальным в том смысле, что количество кинетической энергии, трансформирующееся в нерассчитываемую

мелкомасштабную часть спектра, оказывается относительно малым как в среднем, так и в конкретных ситуациях.

Перейдем к вопросу об оптимальном количестве сферических гармоник с постоянным значением  $n$  и меняющимся  $l$ . Следует отметить, что для полного решения этого вопроса не имеется достаточных материалов. Принятое в настоящее время приближенное решение опирается на гипотезу о локальной изотропности атмосферных движений, которая не проверена для рассматриваемых масштабов движения. Этот вопрос предполагается уточнить при выполнении последующих численных экспериментов с неадиабатической моделью бароклинической атмосферы.

Для уравнений (1) и (2) существует инвариант — сумма кинетической и потенциальной энергий, проинтегрированная по массе. Построенная модель также должна удовлетворять этому принципу. Несохраниение этого инварианта может быть вызвано ошибками интегрирования по времени с помощью конечно-разностных схем и из-за усечения рядов. Точность сохранения этого инварианта позволяет оценить качество модели.

Величина полной энергии на единицу массы дается выражением

$$E = \frac{U^2 + V^2}{2(1 - \mu^2)} + \Phi'.$$

Энергия, проинтегрированная по массе, имеет вид

$$\bar{E} = \frac{1}{\Phi} \sum_{n=-N}^N \sum_{l=|n|}^{|n|+L} \Phi_{l,n}^* (E_{l,n} + \Phi_{l,n}).$$

Для интегрирования по времени уравнений (20) — (22) применялся полунейвный метод.

Перепишем нашу систему в следующем виде:

$$\frac{d\Phi_{l,n}}{d\tau} = -\alpha_{l-1,n} \chi_{l-1,n} - \beta_{l+1,n} \chi_{l+1,n} - \tilde{Q}\Phi_{l,n},$$

$$\frac{d\chi_{l,n}}{d\tau} = \tilde{Q}\chi_{l,n} - \Phi_{l,n},$$

$$\frac{d\Phi_{l,n}}{d\tau} = \bar{\Phi}l(l+1)\chi_{l,n} + Q\Phi_{l,n}.$$

В этой системе выделены линейные слагаемые  $\Phi_{l,n}$  и  $\chi_{l,n}$ . Остальные слагаемые включены в члены  $\tilde{Q}\Phi_{l,n}$  и  $\tilde{Q}\chi_{l,n}$ .

Заменив производные по времени центральными разностями, а  $\Phi_{l,n}$  и  $\chi_{l,n}$  их средними значениями по формулам:

$$\bar{\chi}_{l,n}^{\tau} = \frac{1}{2} (\chi_{l,n}^{\tau+\Delta\tau} + \chi_{l,n}^{\tau-\Delta\tau}) \text{ и } \bar{\Phi}_{l,n}^{\tau} = \frac{1}{2} (\Phi_{l,n}^{\tau+\Delta\tau} + \chi_{l,n}^{\tau-\Delta\tau}),$$

получим для определения  $\bar{\chi}_{l,n}^{\tau}$  для участка спектра  $A$  ( $n=0, 1, 2, 3$ ) формулу

$$\bar{\chi}_{l,n}^{\tau} = \frac{1}{1 + \bar{\Phi}l(l+1)\Delta\tau^2} \left[ \chi_{l,n}^{\tau-\Delta\tau} + \Delta\tau \left( \tilde{Q}\chi_{l,n}^{\tau} - \Phi_{l,n}^{\tau-\Delta\tau} \right) - \Delta\tau^2 Q\Phi_{l,n}^{\tau} \right]. \quad (25)$$

Для участка спектра  $B$  ( $n \geq 4$ ), используя полученные значения  $\bar{\chi}_{l,n}^{\tau}$ ,  $\tilde{Q}\chi_{l,n}^{\tau}$  и  $Q\Phi_{l,n}^{\tau}$ , находим  $\bar{\chi}_{l,n}^{\tau}$  по формуле (24). По полученным значениям  $\bar{\chi}_{l,n}^{\tau}$  находим  $\psi_{l,n}^{\tau+\Delta\tau}$ ,  $\Phi_{l,n}^{\tau+\Delta\tau}$  и  $\chi_{l,n}^{\tau+\Delta\tau}$  по формулам

$$\begin{aligned} \psi_{l,n}^{\tau+\Delta\tau} &= \psi_{l,n}^{\tau-\Delta\tau} - 2\Delta\tau \left( \alpha_{l-1, n} \bar{\chi}_{l-1, n}^{\tau} + \beta_{l+1, n} \bar{\chi}_{l+1, n}^{\tau} + \tilde{Q}\psi_{l,n}^{\tau} \right), \\ \Phi_{l,n}^{\tau+\Delta\tau} &= \Phi_{l,n}^{\tau-\Delta\tau} + 2\Delta\tau \left[ \bar{\Phi}l(l+1) \bar{\chi}_{l,n}^{\tau} + \tilde{Q}\chi_{l,n}^{\tau} \right], \\ \chi_{l,n}^{\tau+\Delta\tau} &= 2\bar{\chi}_{l,n}^{\tau} - \chi_{l,n}^{\tau-\Delta\tau}. \end{aligned}$$

Значения коэффициентов в момент времени  $\Delta\tau$  вычисляются по схеме Эйлера с пересчетом [8] с шагом  $\Delta\tau/6$ .

#### НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Первая проверка модели была проведена на основании интегрирования уравнений модели с аналитическими начальными полями. Функция тока задавалась в виде зонального потока и наложенной на него одиночной волны Гаурвица. В безразмерном виде функция тока имела следующий вид:

$$\psi = -5,774 \cdot 10^{-2} P_{1,0}(\mu) + 9,648 \cdot 10^{-3} P_{5,4}(\mu) \cos 4\lambda.$$

Поле  $\Phi$  находилось из уравнения баланса.

Известно, что в бездивергентном баротропном потоке фазовая скорость волны Гаурвица равна  $9,6^\circ$  в день, а амплитуда неизменна. Можно предположить, что и в дивергентном потоке при интегрировании на малый срок эти величины будут мало меняться. Расчеты были проведены на 12 сут. Изменение полной энергии составило менее 1%. На рис. 1 приведен график изменения со временем фазовой скорости волны Гаурвица за период интегрирования.

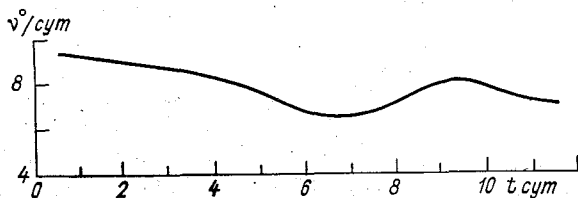


Рис. 1. Изменение фазовой скорости  $v$  волны Гаурвица  $\psi_{5,4}$  за период интегрирования.

Дальнейшие эксперименты проводились с реальными начальными данными. В качестве исходных данных использовались имеющиеся в нашем распоряжении данные ПИГАП за 4 ноября 1969 г. [10]. Интегрирование проводилось на 12 сут, вычислялись значения момента количества движения, кинетической, потенциальной и полной энергий. Результаты интегрирования показали хорошее сохранение полной энергии.

Наряду с расчетами, которые проводились по вышеописанной модели (будем ее обозначать ЧФМ), были выполнены расчеты по нефильтрованной модели (НФМ), т. е. модели, в которой потенциал скорости для всего спектрального интервала рассчитывался на основании уравнения (21), а уравнение (24) во внимание не принималось. Приведем некоторые характеристики сохранения инвариантов для двух этих моделей. Колебание углового момента за весь период интегрирования составило для ЧФМ от  $+0,24$  до  $-0,43$  %, а для НФМ от  $+0,33$  до  $-0,11$  %, максимальное изменение углового момента за 12 ч для ЧФМ  $+0,01$  %, для НФМ  $+0,012$  %. Колебания полной энергии за период интегрирования составили от  $+1,25$  % до  $0,00$  % для ЧФМ, а для НФМ от  $0,5$  до  $-0,2$  %, а максимальное изменение полной энергии за 12 ч для ЧФМ было  $+0,43$  %, а для НФМ  $+0,74$  %.

Таким образом, в целом за 12 сут изменения полной энергии и углового момента находятся в допустимых пределах. Общий диапазон колебаний для нефильтрованной модели несколько уже. Однако максимальные изменения величины полной энергии за 12 ч по нефильтрованной модели больше, чем по частично фильтрованной. Отсюда можно сделать вывод, что в нефильтрованной модели недостаточно подавлены гравитационные волны.

Интересно проследить за поведением ультрадлинных волн в поле потенциала скорости и в поле функции тока, а также за поведением коротких волн как по частично фильтрованной, так и по нефильтрованной моделям. На рис. 2 для примера представлены амплитуды и фазы гармоник потенциала скорости  $\chi_{2,2}$ ,  $\chi_{12,6}$  и гармоник функции тока  $\psi_{3,2}$ ,  $\psi_{13,6}$  за период интегрирования.

Из этого рисунка видно, что амплитуды и фазы гармоник функции тока, рассчитанные по обеим моделям, мало отличаются друг от друга в течение всего периода интегрирования.

Фазы длинных волн в поле потенциала скорости, рассчитанные как по фильтрованной, так и по частично фильтрованной моделям, также близки, хотя амплитуды, рассчитанные по фильтрованной модели, несколько меньше. Существенно отличается поведение коротких волн в поле потенциала скорости. Отчетливо видно сглаживающее действие частично фильтрованной модели. Если по нефильтрованной модели фаза волны меняется быстро, то по частично фильтрованной модели она меняется медленно. В целом, исходя из выполненных численных экспериментов, считаем, что частично фильтрованная модель может служить основой для дальнейших исследований.

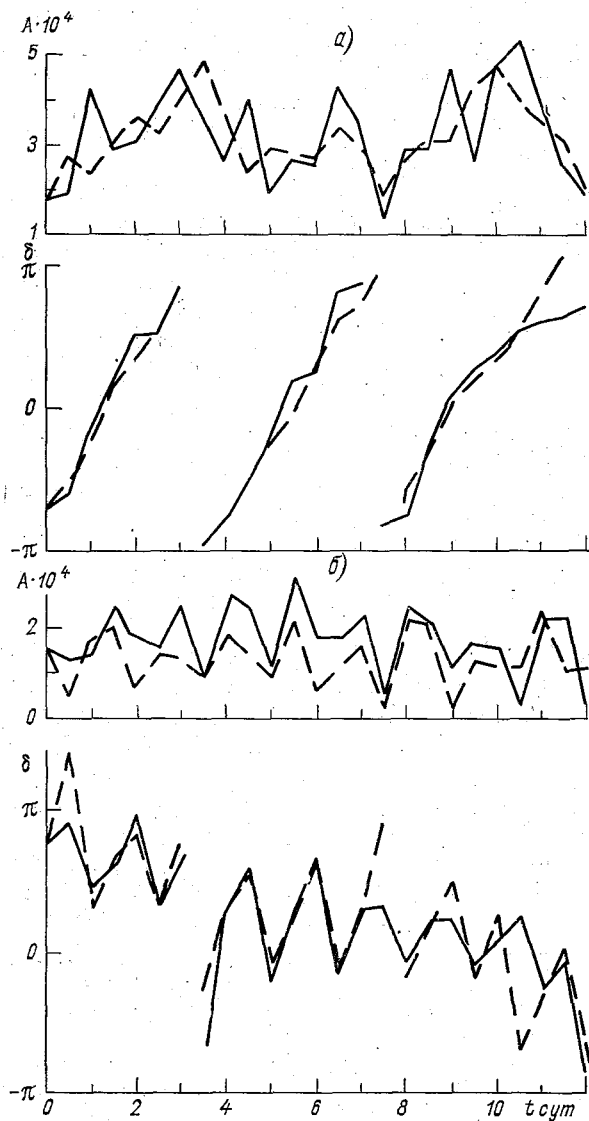
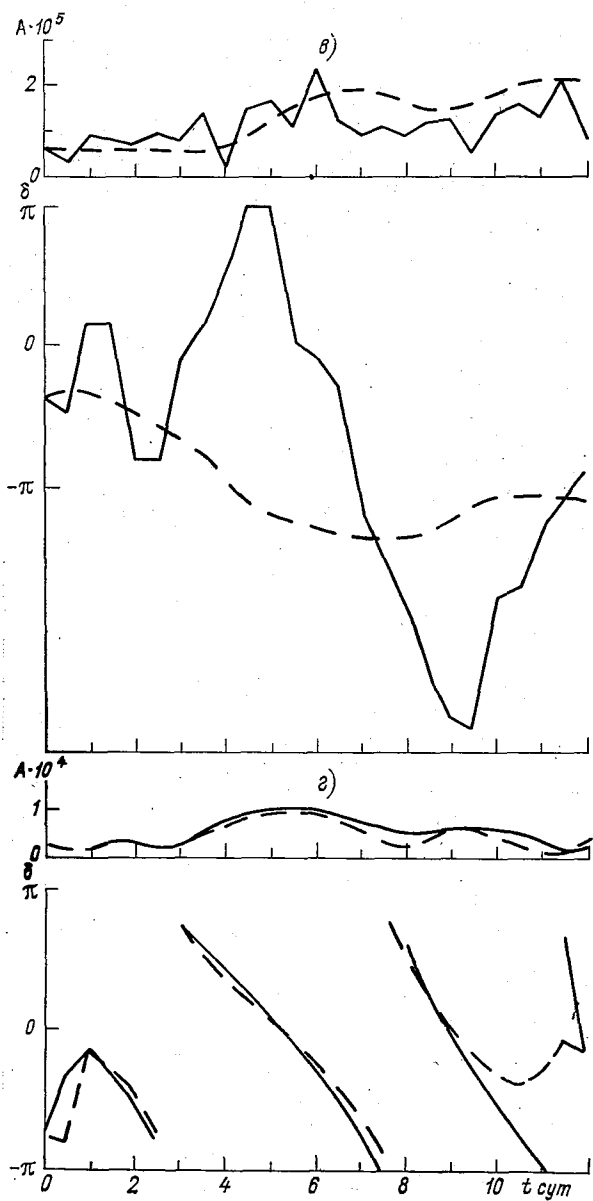


Рис. 2. Изменение амплитуды  $A$  и фазы  $\delta$  за период 1969 г.) для гармоник  $\chi_{2.2}$  (а),





интегрирования (начальные данные от 4 ноября  $\Psi_{3,2}$  (б),  $\chi_{12,6}$  (в),  $\Psi_{13,6}$  (г)).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М а т ю г и н В. А., Ю д и н М. И. К линейной теории бароклинных планетарных волн в атмосфере.—Труды ГГО, 1976, вып. 367, с. 3—14.
2. Ю д и н М. И. Основы построения спектральной модели циркуляции атмосферы и океана с учетом особенностей движений разных пространственных масштабов.—В кн.: Разностные и спектральные методы решения задач динамики атмосферы и океана (труды симпозиума). Новосибирск, 1974, с. 49—67.
3. Ю д и н М. И. К определению среднего движения в задачах долгосрочного прогноза и теории климата.—Труды ГГО, 1972, вып. 272, с. 3—14.
4. Ю д и н М. И., Гусева И. П., Голод М. П. Спектральные характеристики трансформации кинетической энергии в атмосфере.—Труды ГГО, 1974 вып. 298, с. 3—14.
5. B u r k e W. An efficient one-level primitive equation spectral model.—*Mon. Wea. Rev.*, 1972, vol. 100, p. 683—689.
6. E l i a s e n E., M a c h e n h a u e r B. A study of the fluctuations of the atmospheric planetary flow patterns represented by spherical harmonics.—*Tellus*, 1965, vol. 17, p. 220—238.
7. E l i a s e n E., M a c h e n h a u e r B., R a s m u s s o n E. On a numerical method for integration of the hydrodynamical equations with a spectral representation of the horizontal field.—*Inst. of Theor. Meteor., University of Copenhagen, Report N 2*, 1970.
8. K u r i h a r a I. On the use of implicit and iterative methods for the time integration of the wave equation.—*Mon. Wea. Rev.*, 1965, vol. 93, p. 33—46.
9. O r s z a g S. Transform method for calculation of vector-coupled sums application to the spectral form of the vorticity equation.—*J. Atmos. Sci.*, 1970, vol. 27, p. 890—895.
10. T h o m p s o n T. The basic data set project.—*GARP Publ. Ser.*, 1972, N 9.

*Н. П. Есакова, В. Б. Афанасьева*

## ГИДРОДИНАМИКО-СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПРОГНОЗА СРЕДНЕДЕКАДНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ

В данной работе сделана попытка учесть показатели будущих циркуляционных процессов, рассчитанных по гидродинамическим схемам прогноза, в статистической схеме прогноза среднедекадной температуры [1]. В настоящее время в оперативную практику внедрено довольно много схем гидродинамического прогноза циркуляции на 24, 36, 48 и 72 ч, имеющих удовлетворительную оправдываемость.

Это создает благоприятные условия для учета прогноза циркуляции атмосферы на различные сроки в статистических схемах прогноза.

Исследованиями А. Л. Каца [5] установлено, что карты  $H_{700}$  и  $H_{500}$  северного полушария для срединного дня пятидневки с высоким коэффициентом корреляции соответствуют картам средних значений  $H_{700}$  или  $H_{500}$  всей пятидневки.

Это обстоятельство может быть использовано при наличии удовлетворительных прогнозов  $H_{700}$  или  $H_{500}$  на 72 ч. Исходя из этого, в разработанную нами статистическую схему прогноза среднедекадной температуры [2] в качестве предиктора мы включили гидродинамический прогноз  $H_{500}$  на 72 ч.

В своей работе мы использовали гидродинамические прогнозы  $H_{500}$  на 72 ч, которые дает Национальный метеорологический центр США по схеме Ф. Шумана. Оценка прогнозов на 48 ч по этой схеме ежегодно дается в отчетах об оперативных численных прогнозах США. За последние годы в области численных прогнозов получены существенные результаты и оправдываемость значительно повысилась. Объем информации, которая используется как исходная для численных прогнозов, существенно возрос. Это стало особенно заметно с появлением метеорологических спутников.

Нами была проведена проверка оправдываемости прогнозов на 72 ч. С этой целью в настоящее время наиболее широко используется относительная ошибка прогноза изменения давления. Для вычисления относительной ошибки выбирается постоянная сеть пунктов, в которых определяется ошибка прогноза изменения

высот изобарической поверхности  $\varepsilon$  и фактические изменения  $\sigma_{\phi}$  для этих высот за срок прогноза. Средняя относительная ошибка серии прогнозов  $E$  находится по формуле

$$E = [\varepsilon] / \sigma_{\phi}.$$

Мы подсчитали относительную ошибку прогноза по схеме Шумана за 72 ч для  $H_{500}$  для 1976 и 1977 гг. Результаты расчетов приведены в табл. 1, которая показывает, что оправдываемость гидродинамических прогнозов на 72 ч довольно высокая.

Таблица 1

Относительная ошибка прогнозов

Декада	$E$ (1976 г.)	$E$ (1977 г.)
Март		
1	0,65	0,70
2	0,68	0,63
3	0,52	0,52
Апрель		
1	0,72	0,48
2	0,69	0,56
3	0,71	0,50
Май		
1	0,48	0,61
2	0,61	0,47
3	0,53	0,61

При разработке метода прогноза статистическим методом существует трудность выбора числа предикторов. С одной стороны, при малом числе переменных возникает опасность того, что прогноз будет плохим. С другой стороны, при большом числе переменных некоторые из них могут оказаться в тесной корреляционной связи между собой. Статистическая значимость выбранных предикторов проверялась статистическими методами. Устанавливались синхронные и асинхронные статистические связи. Нами были выделены лишь те предикторы, которые дают достаточно надежные корреляционные связи.

Были выбраны следующие предикторы: меридиональный и зональный индекс, облачность, положение границы снежного покрова, ледовитость северных морей, индекс, пропорциональный циркуляции скорости по замкнутому контуру, средняя температура за предыдущую декаду и гидродинамический прогноз циркуляции атмосферы на 72 ч.

Коротко остановимся на характеристике выбранных нами предикторов.

**Меридиональный индекс.** М. И. Юдин и А. А. Рождественский предложили ввести в рассмотрение индекс, характеризующий тепловые различия между океанами и материками. В данном случае термин «меридиональный» применяется в том смысле, что он характеризует динамические и тепловые различия на разных меридианах.

**Циркуляция скорости по замкнутому контуру.** Для характеристики интенсивности атмосферной циркуляции над ограниченной территорией использована циркуляция скорости по замкнутому контуру, которая вычислялась по декадным картам давления, построенным в ГГО. Приведем формулы для вычисления зональной и меридиональной составляющих циркуляции скорости.

$$\Gamma_{\text{зон}} = \int_{i, j-m}^{i, j+m} (v_{\psi})_{i, j} a_0 \sin \theta_i d\psi,$$

$$\Gamma_{\text{мер}} = \int_{i-p, j}^{i+p, j} (v_{\theta})_{i, j} a_0 d\theta,$$

где  $(v_{\psi})_{i, j}$ ,  $(v_{\theta})_{i, j}$  — меридиональная и зональная составляющие скорости геострофического ветра в узлах сетки;  $i, j$  — номера узлов сетки точек.

Циркуляция скорости вычислялась для контура, состоящего из двух параллелей и двух меридианов, зональная составляющая скорости вычислялась для  $50$  и  $60^\circ$  с. ш., меридиональная составляющая скорости вычислялась для  $30$  и  $50^\circ$  в. д.

Величина циркуляции скорости меняется от года к году довольно сильно; она является весьма удобной характеристикой общей циркуляции атмосферы, так как позволяет учитывать одновременно зональные и меридиональные составляющие циркуляции.

**Снежный покров.** В долгосрочном статистическом и гидродинамико-статистическом методе прогноза погоды в качестве исходных данных не всегда может быть непосредственно использована информация, получаемая из наблюдений для отдельных точек земного шара в отдельные моменты времени. Так обстоит дело со снежным покровом. Для того чтобы иметь возможность учесть влияние снежного покрова, в схеме прогноза был разработан способ расчета аномалий снежного покрова. Нами были построены среднедекадные карты распределения снежного покрова. Для построения этих карт было отобрано 300 станций, расположенных на территории СССР. По данным этих станций за осенние и весенние месяцы было подсчитано число дней с наличием снежного покрова для каждой декады этих месяцев. Затем данные по каждой из отобранных станций были нанесены на карты. Таким образом были построены карты числа дней с наличием снежного покрова для каждой декады, которые достаточно наглядно показывают

последовательное перемещение границы снежного покрова (10 дней со снегом в декаде) с северо-востока на юго-запад [4].

**Облачность.** Чтобы выявить основные закономерности распределения среднедекадных значений облачности, нами были построены карты. Следует отметить крайнюю неравномерность распределения этого метеорологического элемента.

**Зональный индекс.** Мы использовали зональный индекс циркуляции Е. П. Блиновой [3], который характеризует скорость западного переноса в атмосфере, обусловленного тепловым различием между экватором и полюсом.

В Гидрометцентре СССР каждый месяц составляются таблицы ежедневных значений зонального индекса, которые использовались для подсчета его декадных значений.

**Ледовитость.** Данные по ледовитости Северных морей мы получали из Арктического и Антарктического научно-исследовательского института.

Для прогноза среднедекадных температур использовалась статистическая схема прогноза, составленная при помощи линейного уравнения множественной регрессии

$$X_0 = \sum_{k=1}^n a_k x_k,$$

где  $X_0$  — прогнозируемое значение,  $x_k$  — известные значения предикторов.

Коэффициенты  $a_k$  уравнения множественной регрессии определялись по способу наименьших квадратов из условия, что сумма квадратов ошибок, которая задается выражением

$$r = \left( X_0 - \sum_{k=1}^n a_k x_k \right)^2.$$

должна быть минимальной. Минимум этой суммы достигается в случае, когда  $a_k$  будут найдены из системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_i x_i x_k = \sum_{i=1}^n X_0 x_i,$$

вычисления проводились для Европейской территории СССР и Западной Сибири. Рассматривалась четырехуровневая прогностическая сетка с шагом, равным  $3^\circ$  по широте и  $5^\circ$  по долготе. Было составлено две схемы для осеннего и весеннего сезонов. Причем для весеннего периода прогнозы составлялись оперативно.

На рис. 1 и 2 приведены карты фактической и прогностической среднедекадной температуры. Для проверки прогнозов аномалий

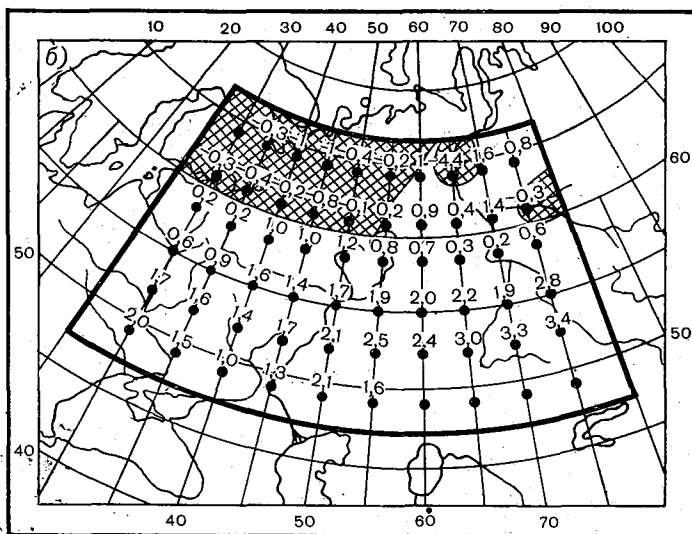
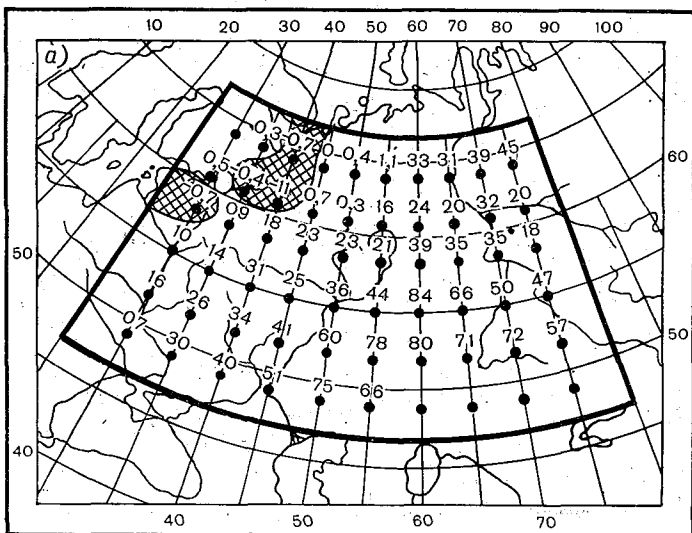


Рис. 1. Прогностическая (а) и фактическая (б) карты среднедекадной температуры на 1-ю декаду апреля 1977 г.





среднедекадной температуры воздуха по знаку применялась формула

$$\rho = \frac{N_+ - N_-}{N},$$

где  $N_+$  — количество точек, для которых прогнозируемый знак аномалий совпал с фактическим ее знаком;  $N_-$  — количество точек, для которых прогнозируемый знак аномалий не совпал с фактическим знаком;  $N$  — общее число точек, для которых составлялся прогноз. Кроме того, рассчитывался процент оправдавшихся прогнозов  $P$ . Одновременно составлялись прогнозы по статистической схеме и производились те же оценки. В нашу схему прогноза среднедекадной температуры входит зональный индекс, который рассчитывался по картам  $H_{500}$ . При составлении прогнозов зональный индекс рассчитывался по данным  $H_{500}$  за предыдущую декаду.

Мы провели численный эксперимент, в котором попытались рассчитать зональный индекс по прогностическим картам  $H_{500}$  на 72 ч. Результаты расчетов приведены в табл. 2.

Таблица 2

Оценки прогнозов среднедекадных температур, рассчитанных по гидродинамико-статистической схеме ( $\rho, P$ ), по статистической схеме ( $\rho', P'$ ), по статистической схеме, когда зональный индекс рассчитывался по прогностическим картам  $H_{500}$  ( $\rho'', P''$ )

Декада	$\rho$	$P$ %	$\rho'$	$P'$ %	$\rho''$	$P''$ %
Март						
2	0,50	75	0,37	69	0,37	69
3	0,89	95	0,78	89	0,78	89
Апрель						
1	0,67	84	0,40	70	0,41	70
2	0,48	74	0,20	60	0,30	65
3	0,44	72	0,10	55	0,26	63
Май						
1	0,34	67	0,37	69	0,37	69
3	0,73	87	0,54	77	0,50	75
Среднее	0,58	79	0,39	69	0,42	71

Как видно из таблицы, успешность прогнозов среднедекадной температуры по гидродинамико-статистической схеме улучшилась в среднем на 10 %, что свидетельствует о перспективности данного направления. Введение же в статистическую схему прогноза зонального индекса, рассчитанного по прогностическим картам  $H_{500}$ , больших изменений в оценку прогнозов не внесло.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьева В. Б., Есакова Н. П., Титов В. М. Статистическая схема прогноза среднедекадных температур с учетом данных о радиационных потоках, облачности, ледовитости и снежного покрова.— Труды ГГО, 1968, вып. 20, с. 8—14.
2. Афанасьева В. Б., Есакова Н. П., Титов В. М. Статистическое описание полей снежного покрова методом разложения по естественным ортогональным функциям.— Труды ГГО, 1968, вып. 201, с. 90—97.
3. Блинова Е. Н. Гидродинамическая теория волн давления, температурных волн и центров действия.— ДАН СССР, 1943, т. 39, № 7, с. 284—287.
4. Есакова Н. П., Афанасьева В. Б. О способах характеристики аномалий облачности, снежного покрова и радиационных потоков.— Труды ГГО, 1962, вып. 143, с. 18—20.
5. Кац А. Л. Методы синоптико-гидродинамико-статистического прогноза средней температуры воздуха на 5 и 10 дней.— Труды Гидрометцентра СССР, 1975, вып. 146, с. 5—22.

*Л. Р. Дмитриева-Арраго, Л. В. Самойлова*

## ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ПРИТОКА И ПОТОКА КОРОТКОВОЛНОВОЙ РАДИАЦИИ В ПОДОБЛАЧНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

Для расчета радиационного притока тепла под облаком и потока на подстилающую поверхность при аккуратном учете переноса коротковолновой радиации внутри облака и под ним в настоящее время используются приближенные методы теории переноса и метод Монте-Карло [2, 4, 6]. На их основе разработаны более простые способы расчета этих величин [1, 7], которые также достаточно сложны для использования в гидродинамических моделях общей циркуляции атмосферы. Кроме того, необходимая для таких расчетов информация о микрофизических свойствах облаков и подоблачного слоя в гидродинамических моделях атмосферы отсутствует. Поэтому для параметризации процессов рассеяния в облаках и пропускания через облако широко используется введение альбеда облака и коэффициента поглощения, которые отражают эффект облака в целом. Данные об этих характеристиках известны из наблюдений в реальных условиях [5, 9] и из расчетов, выполненных на основе задания моделей микрофизических свойств облаков [3]. Полученные таким образом альбеда и коэффициенты поглощения предписываются облакам, рассчитываемым в модели.

При этом функция пропускания облака представляется в следующем виде:

$$T = (1 - \alpha)(1 - \beta) \approx 1 - \alpha - \beta, \quad (1)$$

где  $\alpha$  — альбеда облака,  $\beta$  — коэффициент поглощения облаком.

Поток на нижнюю границу облака  $Q_i$  рассчитывается по формуле

$$Q_i = Q_k T,$$

где  $Q_k$  — поток, приходящий на верхнюю границу облака.

Поглощение коротковолновой радиации в подоблачном слое и поток на подстилающую поверхность зависят от высоты нижней границы облаков и от свойств облака, через которое проходит

падающий поток. Подоблачный слой поглощает наименьшее количество радиации по отношению к другим слоям атмосферы [6, 9]. Расчет поглощения в подоблачном слое с помощью даже весьма приближенных методов требует значительных затрат времени. Поэтому в данной статье сделана попытка получить некоторые средние зависимости ослабления потока в подоблачном слое от зенитного угла солнца и толщины подоблачного слоя  $\Delta H$  для облаков нижнего, среднего и верхнего ярусов, которые было бы возможно использовать в моделях общей циркуляции атмосферы. С этой целью были проведены расчеты потоков при следующем наборе исходных данных:  $\Theta_0 = 20, 40, 70, 80^\circ$ ;  $\Delta H_1 = 0,5, 1,0, 1,5$  км для облаков нижнего яруса;  $\Delta H_2 = 2,0, 3,0, 4,0$  км для облаков среднего яруса и  $\Delta H_3 = 5,0, 6,0, 7,0$  км для облаков верхнего яруса.

Учет влияния облака произведен с помощью формулы (1) при следующих значениях  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\text{нижний ярус } \alpha_1 = 0,69, \beta_1 = 0,035.$$

$$\text{средний ярус } \alpha_2 = 0,48, \beta_2 = 0,02,$$

$$\text{верхний ярус } \alpha_3 = 0,21, \beta_3 = 0,005.$$

Расчет потока коротковолновой радиации, приходящего на верхнюю границу облака и на подстилающую поверхность, выполнен с учетом поглощения водяным паром, углекислым газом и озоном и с учетом процессов рассеяния в надоблачном слое [1]. Интегральный поток суммарной радиации на верхнюю границу облака имеет следующий вид:

$$Q_k = Q_{1k} + Q_{2k}, \quad (2)$$

где

$$Q_{1k} = \int_{0,29}^{0,7} I_0(\lambda) \cos \Theta_0 B^*(\lambda) T(\omega_k^\infty) d\lambda, \quad (3)$$

$$Q_{2k} = \int_{0,7}^{5,0} I_0(\lambda) \cos \Theta_0 B^*(\lambda) T_{H_2O}(X_k^\infty, \lambda) T_{CO_2}(X_k^\infty, \lambda) d\lambda, \quad (4)$$

$\omega_k^\infty$  — общее содержание озона в атмосфере от верхней границы атмосферы до верхней границы облака,  $\Theta_0$  — зенитный угол Солнца,

$$B^*(\lambda) = \frac{2R}{4 + (3 - x_1)(1 - \alpha)\tau_k^\infty}, \quad (5)$$

$$R = 1 + \frac{3}{2} \cos \Theta_0 + (1 - \frac{3}{2} \cos \Theta_0) e^{-\tau_k^\infty \sec \Theta_0}, \quad (6)$$

$$\tau_k^\infty = \tau_{0p} e^{-0,125z} + \tau_{0a} e^{-0,898z}, \quad (7)$$

$\tau_k^\infty$  — оптическая глубина атмосферы.

Функция пропускания озоном  $T(\omega_k^\infty)$  рассчитывается по следующей формуле:

$$T(\omega_k^\infty) = e^{-k_\lambda \omega_k^\infty \sec \Theta_0}, \quad (8)$$

где  $k_\lambda$  — коэффициент поглощения Вигру. Функции пропускания  $T_{H_2O}$  и  $T_{CO_2}$  рассчитываются по формулам из работы [8]

$$T_{H_2O} = 1 - \frac{X_{H_2O}}{a_{H_2O} X_{H_2O} + b_{H_2O}}, \quad (9)$$

$$T_{CO_2} = 1 - \frac{X_{CO_2}}{a_{CO_2} X_{CO_2} + b_{CO_2}}. \quad (10)$$

Здесь  $X_{H_2O}$  и  $X_{CO_2}$  — эффективные поглощающие массы [1]. Таблица коэффициентов  $a_{H_2O}$ ,  $b_{H_2O}$ ,  $a_{CO_2}$ ,  $b_{CO_2}$  дана в работе [8].

Поток радиации на некоторый уровень  $z$  под облаком рассчитывается по формулам

$$Q_z^i = Q_i T_z^i, \quad (11)$$

где

$$T_z^i = \begin{cases} T(\Delta\omega_z^i, \lambda) & \text{при } 0,29 \text{ мкм} \leq \lambda \leq 0,7 \text{ мкм} \\ T_{H_2O}(\Delta X_z^i) T_{CO_2}(\Delta X_z^i) & \text{при } 0,7 \text{ мкм} < \lambda \leq 5 \text{ мкм}. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь  $\Delta\omega_z^i$  — общее содержание озона в подоблачном слое от нижней границы облака  $i$  до уровня  $z$ ,  $\Delta X_z^i$  — эффективная поглощающая масса водяного пара или углекислого газа в этом же слое. Функции  $T(\Delta\omega_z^i)$ ,  $T_{H_2O}(\Delta X_z^i)$ ,  $T_{CO_2}(\Delta X_z^i)$  рассчитываются с учетом влияния всего пути, пройденного потоком от верхней границы атмосферы до подоблачного уровня [1].

Расчеты потоков и притоков выполнены в предположении, что облачность сплошная. В табл. 1 приведены рассчитанные значения потока на нижнюю границу облака и отношение потока на подстилающую поверхность  $Q_0$ , ослабленного подоблачным слоем, к потоку  $Q_i$  для различного набора исходных данных. Из табл. 1 видно, что изменчивость величины  $Q_0/Q_i$  невелика. Различия в средних значениях  $Q_0/Q_i$  при разных  $\Delta H$  для облаков разных ярусов около 10%. Наибольшие изменения наблюдаются при малых зенитных углах. С помощью этой таблицы, не прибегая к сложным расчетам, можно определить поток на подстилающую поверхность, если известен интегральный поток на нижнюю границу облака.

На основе расчетов по формулам (1—12) были построены графики притока коротковолновой радиации  $\Delta F$  в подоблачном слое и получены следующие аппроксимационные формулы:

— для облака нижнего яруса

$$\Delta F = 2,1 \cdot 10^{-2} - 2,37 \cdot 10^{-4} \Theta_0 + 1,68 \cdot 10^{-2} \Delta H - 2,06 \cdot 10^{-4} \Theta_0 \Delta H \quad (13)$$

при  $2 \text{ км} > \Delta H \geq 0,5 \text{ км}$ ;

Таблица 1

Отношение  $Q_0/Q_t$  при различных зенитных углах Солнца и толщине подблочного слоя

$\Delta H$ км	$\theta_0$															
	20				40				70				80			
	$Q_t$ кал/(см <sup>2</sup> ·мин)	$Q_0/Q_t$	$(Q_0/Q_t)_{cp}$	$Q_t$ кал/(см <sup>2</sup> ·мин)	$Q_0/Q_t$	$(Q_0/Q_t)_{cp}$	$Q_t$ кал/(см <sup>2</sup> ·мин)	$Q_0/Q_t$	$(Q_0/Q_t)_{cp}$	$Q_t$ кал/(см <sup>2</sup> ·мин)	$Q_0/Q_t$	$(Q_0/Q_t)_{cp}$	$Q_t$ кал/(см <sup>2</sup> ·мин)	$Q_0/Q_t$	$(Q_0/Q_t)_{cp}$	
0,5	0,485	0,963	0,951	0,388	0,965	0,954	0,155	0,970	0,958	0,293	0,911	0,137	0,920	0,973	0,959	
1,0	0,485	0,950	0,951	0,388	0,953	0,954	0,155	0,961	0,958	0,293	0,908	0,137	0,912	0,972	0,959	
1,5	0,485	0,940	0,951	0,388	0,943	0,954	0,155	0,955	0,958	0,293	0,904	0,137	0,912	0,965	0,959	
2,0	0,872	0,901	0,894	0,703	0,903	0,895	0,293	0,911	0,906	0,293	0,901	0,137	0,905	0,912	0,901	
2,5	0,872	0,897	0,894	0,703	0,897	0,895	0,293	0,908	0,906	0,293	0,901	0,137	0,905	0,912	0,901	
3,0	0,872	0,892	0,894	—	—	—	0,293	0,904	0,906	0,293	0,901	0,137	0,905	0,912	0,901	
4,0	0,872	0,888	0,894	0,703	0,889	0,895	0,293	0,901	0,906	0,293	0,901	0,137	0,905	0,912	0,901	
5,0	1,378	0,879	0,868	1,132	0,869	0,865	0,466	0,866	0,867	0,466	0,866	0,219	0,895	0,873	0,868	
6,0	1,378	0,869	0,868	1,132	0,863	0,865	—	—	0,867	—	—	0,225	0,875	0,873	0,868	
7,0	1,400	0,861	0,868	1,132	0,862	0,865	—	—	0,867	—	—	0,230	0,865	0,873	0,868	

— для облака среднего яруса

$$\Delta F = 0,130 - 1,47 \cdot 10^{-3} \Theta_0 + 44,2 \Theta_0^{-2,37} (\Delta H - 2,0) \quad (14)$$

при 5 км  $> \Delta H \geq 2$  км;

— для облака верхнего яруса

$$\Delta F = 0,324 + 3,72 \cdot 10^{-3} \Theta_0 + 1,81 \cdot 10^{-3} \Theta_0^{-3,9066} (\Delta H - 5,0) \quad (15)$$

при 8 км  $> \Delta H \geq 5$  км.

Несмотря на нелинейный характер полученных зависимостей, расчет по этим формулам значительно упрощается по сравнению с упомянутыми выше методами расчета.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дмитриева-Арраго Л. Р., Паршина Г. В., Самойлова Л. В. Расчет потоков коротковолновой радиации в облачных условиях. Численный прогноз погоды и теория климата.— Труды ГГО, 1972, вып. 272, с. 70—78.
2. Зега Э. П. О двухпоточковом приближении в теории переноса излучения. Институт физики АН БССР, Минск, 1971.— 58 с.
3. Каргин Б. А., Краснокутская Л. Д., Фейгельсон Е. М. Отражение и поглощение лучистой энергии Солнца облачными слоями.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1972, т. 8, № 5, с. 505—517.
4. Решение прямых и некоторых обратных задач атмосферной оптики методом Монте-Карло/Г. И. Марчук, Г. А. Михайлов, М. А. Назаралиев, Р. А. Дарбинян.— Новосибирск: Изд-во АН СССР, Сибирское отделение, 1968.— 100 с.
5. Полный радиационный эксперимент/Под ред. К. Я. Кондратьева и Н. Е. Тер-Маркарянц.— Л.: Гидрометеониздат, 1976.— 240 с.
6. Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет.— М.: Наука, 1972.— 336 с.
7. Фейгельсон Е. М., Краснокутская Л. Д. Потоки солнечного излучения и облака.— Л.: Гидрометеониздат, 1978.— 156 с.
8. Шифрин К. С., Авасте О. А. Потоки коротковолновой радиации в безоблачной атмосфере.— В кн.: Исследования по физике атмосферы. Тарту, 1960, № 2, с. 14—21.
9. Korb G., Möller F. Theoretical investigation on energy gain by absorption of solar radiation in clouds. Final Tech. Rep., Contract N DA-91-591-EUS-1612, Ludwig-Maximilians — universität. Met. Inst. Munchen, 1962, s. 185.

*Л. Р. Дмитриева-Араго, Т. Н. Горбунова*

### **ВЛИЯНИЕ СТРАТОСФЕРНОГО АЭРОЗОЛЯ НА ВОСХОДЯЩИЙ ПОТОК РАССЕЯННОГО КОРОТКОВОЛНОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ**

Проблема стратосферного аэрозоля имеет важное значение для исследования факторов, определяющих современные изменения климата [3].

Стратосферный аэрозоль в связи с продолжительностью своего существования может воздействовать на климат путем регулирования количества солнечной радиации, поступающей в тропосферу и на подстилающую поверхность, а также путем дополнительного поглощения энергии в аэрозольном слое.

Для оценки влияния стратосферного аэрозоля на энергетику атмосферы удобно пользоваться такими показателями, как альbedo системы Земля—атмосфера и радиационный баланс на верхней границе.

Исследование влияния стратосферного аэрозоля на перенос коротковолнового излучения было выполнено в ряде работ [3, 4, 8, 9].

В этих работах использовалась модель переноса коротковолновой радиации в безоблачной плоско-параллельной атмосфере, учитывающая молекулярное и аэрозольное рассеяние, а также молекулярное и аэрозольное поглощение. В качестве исходных данных были использованы характеристики приземного или стратосферного аэрозолей, отличающиеся различной детальностью: коэффициент преломления в аэрозоле, вероятность выживания кванта, оптические толщины, индикатриса рассеяния. Кроме этого в расчеты входят зенитный угол Солнца и альbedo подстилающей поверхности.

Было показано [2, 4], что влияние стратосферного аэрозоля на восходящий поток коротковолновой радиации зависит от зенитного угла солнца и от альbedo подстилающей поверхности, от величины коэффициента преломления, оптической толщины рассеяния и поглощения. Однако эти работы отличаются чрезвычайной детальностью и громоздкостью расчетов.



Расчеты, выполненные по монохроматической методике, достаточно просты, но их нельзя считать надежными для характеристики интегральных потоков [9].

Так как гидродинамические модели не содержат информации о детальном свойствах атмосферного аэрозоля, а перечисленные методы учета эффектов аэрозоля либо сложны, либо ненадежны, к этим моделям атмосферы они не могут быть применены.

Целью настоящей работы является попытка оценить влияние стратосферного аэрозоля на потоки восходящей коротковолновой радиации и альbedo системы с помощью метода, который находится в промежуточном положении между упомянутыми методами и доступен реализации на имеющихся машинах. На первом этапе учитывается только рассеивающий, но не поглощающий аэрозоль. Для расчетов использован метод решения уравнения переноса в двухпоточковом приближении [5, 6].

Для учета влияния рассеяния на перенос коротковолновой радиации должно быть задано вертикальное распределение коэффициента рассеяния.

Для слоя аэрозоля, лежащего вблизи земной поверхности, коэффициент рассеяния может быть представлен в виде [5]

$$\sigma(z, \lambda) = a(0, \lambda) e^{-az} + b(0, \lambda) e^{-\beta z}, \quad (1)$$

где

$$a(0, \lambda) = \frac{a_0}{\lambda^4}, \quad (2)$$

$$b(0, \lambda) = \frac{b_0 \lambda_0}{\lambda}. \quad (3)$$

$a_0$  — коэффициент рэлеевского рассеяния при  $\lambda = \lambda_0$ ;  $b_0$  — коэффициент аэрозольного рассеяния вблизи земной поверхности при  $\lambda = \lambda_0$ , где  $\lambda_0 = 0,55$  мкм.

Для слоя стратосферного аэрозоля, имеющего толщину от  $z_1$  до  $z_2$ , коэффициент рассеяния  $\sigma_{ст}$  удобно задать в виде параболы.

Формула для  $\sigma(z)$  имеет вид

$$\sigma_{ст}(z) = -(0,036z^2 - 1,8z + 21,5) \sigma_{max}, \quad (4)$$

где  $\sigma_{max}$  — максимальное значение коэффициента рассеяния в стратосферном слое.

Для вычисления коэффициентов формулы (4) было использовано условие обращения  $\sigma$  в нуль при  $z = z_1$  и  $z = z_2$  и условие  $\sigma = \sigma_{max}$  при  $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$ , где  $z_1 = 20$  км,  $z_2 = 30$  км.

Оптическая толщина слоя атмосферы ( $\infty, z$ ) вычисляется по формуле

$$\tau(\lambda) = \int_z^{\infty} \sigma(z, \lambda) dz. \quad (5)$$

Для приземного слоя с учетом формулы (1) имеем следующее выражение для  $\tau$ :

$$\tau = \tau_{0p} e^{-az} + \tau_{0a} e^{-\beta z}, \quad (6)$$

где

$$\tau_{0p} = \frac{a(0, \lambda)}{a}, \quad (7)$$

$$\tau_{0a} = \frac{b(0, \lambda)}{\beta}. \quad (8)$$

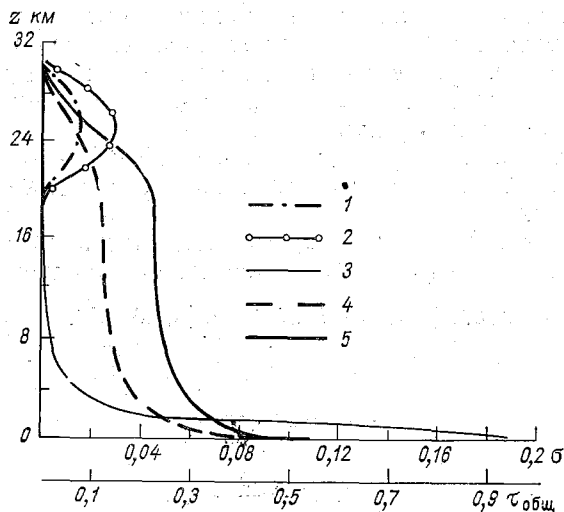


Рис. 1. Вертикальное распределение коэффициента рассеяния и оптической толщины.

- 1)  $\sigma_{ст}$  при  $\sigma_{max} = 0,015$ ; 2)  $\sigma_{ст}$  при  $\sigma_{max} = 0,030$ ;  
 3)  $\sigma$  в приземном слое и под стратосферным слоем аэрозоля;  
 4)  $\tau_{общ}$  при  $\sigma_{max} = 0,015$ ; 5)  $\tau_{общ}$  при  $\sigma_{max} = 0,030$ .

Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  характеризуют изменчивость по высоте аэрозольного и рэлеевского рассеяния.

Для оптической толщины слоя атмосферы выше 20 км, учитывающей стратосферный аэрозоль, получаем

$$\tau_{ст} = (0,012z^3 - 0,9z^2 + 21,5z - 159) \sigma_{max} \quad (9)$$

Общую оптическую толщину атмосферы с приземным и стратосферным аэрозолем можно вычислить следующим образом:

$$\tau_{общ} = \tau_{0p} e^{-az} + \tau_{0a} e^{-\beta z} + (0,012z^3 - 0,9z^2 + 21,5z - 159) \sigma_{max} \quad (10)$$

при  $30 \text{ км} \geq z > 20 \text{ км}$ ,

$$\tau_{общ} = \tau_{0p} e^{-az} + \tau_{0a} e^{-\beta z} + (0,012z^3 + 0,9z^2 + 21,5z - 159) \times \sigma_{max} \text{ при } z \leq 20 \text{ км}. \quad (10a)$$

На рис. 1 представлено использованное в работе вертикальное распределение коэффициента рассеяния с учетом приземного и стратосферного аэрозольных слоев, а также профиль  $\sigma$  без учета

стратосферного аэрозоля и соответствующие профили оптической толщины.

Яркость восходящего потока рассеянной радиации рассчитывается по формуле, следующей из работ [5, 6].

$$D(\tau, \Theta, \varphi, i, \lambda) = (C - 3F \cos \Theta) \left[ 1 - e^{-(\tau_0 - \tau_{0\text{общ}}) \sec \Theta} \right] - \\ - (3 - x_1) F \left[ \tau_{0\text{общ}} - \tau_0 e^{-(\tau_0 - \tau_{0\text{общ}})} \right] + [x_1 \cos \Theta \cos i - 3 \cos^2 i + x(\gamma)] \times \\ \times \frac{\sec \Theta}{4} e^{\tau_{0\text{общ}} \sec \Theta} \frac{e^{-\tau_{0\text{общ}} (\sec \Theta + \sec i)} - e^{-\tau_0 (\sec \Theta + \sec i)}}{\sec \Theta + \sec i}, \quad (11)$$

где

$$C = \frac{\cos i}{2} \left( 1 + \frac{3}{2} \cos i \right) - 2F, \quad (12)$$

$$2F = \frac{(1-A) R^*(\tau_0, i) \cos i}{4 + (3-x_1)(1-a)\tau_0}, \quad (13)$$

$$R^*(\tau_0, i) = 1 + \frac{3}{2} \cos i + \left( 1 - \frac{3}{2} \cos i \right) e^{-\tau_0 \sec i}, \quad (14)$$

$$x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma, \quad (15)$$

где

$$\cos \gamma = -\cos \Theta \cos i + \sin \Theta \sin i \cos \varphi,$$

$$x_1 = \frac{3}{2} \int_0^\pi x(\gamma) \sin \gamma \cos \gamma d\gamma. \quad (16)$$

Здесь  $i$  — зенитный угол Солнца,  $A$  — альbedo подстилающей поверхности,  $x(\gamma)$  — индикатриса рассеяния,  $\gamma$  — угол рассеяния,  $\Theta$  — угол визирования,  $\varphi$  — азимут.

Если известна яркость, то поток рассеянной вверх коротковолновой радиации рассчитывается по формуле

$$R = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_\lambda I_0(\lambda) D(\tau, \Theta, \varphi, i, \lambda) \sin \Theta \cos \Theta d\Theta d\varphi d\lambda. \quad (17)$$

После приближенного интегрирования по  $\Theta$  имеем [8]

$$R = \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^n I_0(\lambda_i) \Delta \lambda_i [0,125D(15^\circ, \lambda_i) + 0,169D(40^\circ, \lambda_i) + \\ + 0,147D(60^\circ, \lambda_i) + 0,052D(77,5^\circ, \lambda_i)], \quad (18)$$

где  $i$  — номер спектрального интервала,  $n$  — их общее число.

Расчеты интегрального потока в интервале 0,29—5,0 мкм при  $n = 38$  были выполнены при следующем наборе исходных данных:  $\sigma_{\max} = 0,015, 0,03, 0,06$  [1, 7];  $i = 10, 60, 71^\circ$ .

При выборе исходных параметров мы руководствовались стремлением оценить эффекты при малых и больших зенитных углах солнца и максимальных величинах коэффициента рассеяния.

При этом были заданы три значения альbedo подстилающей поверхности 0,1, 0,3, 0,7.

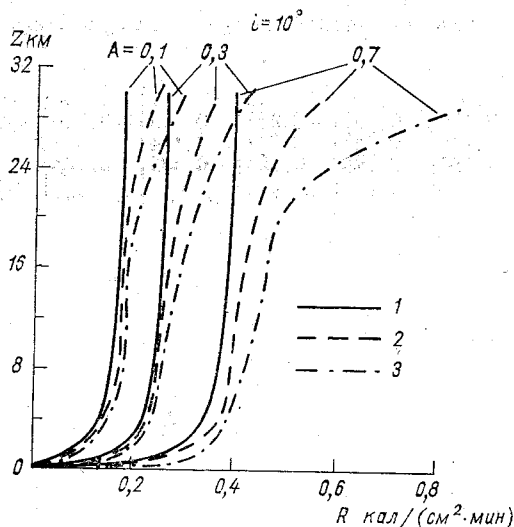


Рис. 2. Вертикальное распределение восходящего потока рассеянной радиации с учетом одного или двух слоев аэрозоля в атмосфере при различных альbedo  $A$  и при  $i = 10^\circ$ .

1 — аэрозоль приземный; 2 — аэрозоль приземный+стратосферный ( $\sigma_{\max} = 0,015$ ); 3 — аэрозоль приземный+стратосферный ( $\sigma_{\max} = 0,030$ ).

На рис. 2 изображены профили потоков рассеянной радиации, рассчитанные с учетом только приземного аэрозоля и с учетом приземного и стратосферного аэрозолей. Из рисунков видно, что различия в потоках довольно значительны. Слой стратосферного аэрозоля резко меняет вертикальный профиль восходящего потока. Этот факт сильно зависит от альbedo подстилающей поверхности. Изменение зенитного угла солнца влияет на величину восходящего потока.

В табл. 1 представлены рассчитанные потоки восходящей коротковолновой радиации на высоте 30 км при  $\tau_0 = 0,3$ , где  $\tau_0$  — оптическая толщина атмосферы, содержащая только приземный аэрозоль, и отношение восходящего потока на уровне 30 км к потоку, приходящему на верхнюю границу атмосферы —  $\frac{R}{S_0 \cos i}$ .

при  $S_0 = 1,94$  кал/(см<sup>2</sup>·мин). Это отношение есть доля альbedo системы Земля—атмосфера, обусловленная рассеянием в атмосфере.

Таблица 1

Восходящий поток рассеянной радиации  $R$  в кал/(см<sup>2</sup>·мин) (1-я строка) и отношение  $R/S_0 \cos i$  (2-я строка) при  $z=30$  км и  $A=0,1, 0,3$  и  $0,7$

$i$	$\sigma_{\max}$					
	0			0,015		
	$A=0,1$	$A=0,3$	$A=0,7$	$A=0,1$	$A=0,3$	$A=0,7$
10	0,175	0,264	0,404	0,250	0,352	0,575
	0,090	0,135	0,207	0,129	0,181	0,295
60	0,148	0,182	0,256	0,198	0,242	0,340
	0,150	0,184	0,258	0,200	0,244	0,344
71	0,119	0,139	0,176	0,156	0,179	0,229
	0,199	0,232	0,295	0,262	0,302	0,385

$i$	$\sigma_{\max}$					
	0,03			0,06		
	$A=0,1$	$A=0,3$	$A=0,7$	$A=0,1$	$A=0,3$	$A=0,7$
10	0,309	0,428	0,680	0,408	0,550	0,883
	0,161	0,219	0,349	0,209	0,282	0,453
60	0,238	0,290	0,404	0,304	0,364	0,500
	0,236	0,288	0,408	0,308	0,368	0,506
71	0,186	0,209	0,272	0,225	0,256	0,322
	0,318	0,352	0,451	0,378	0,428	0,541

Из табл. 1 видно, что стратосферный слой аэрозоля может увеличивать восходящий рассеянный поток коротковолновой радиации в 1,5—2 раза. Это может оказать существенное влияние на радиационную энергетику атмосферы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Влияние аэрозолей и водяного пара на потоки прямой солнечной радиации в центре экваториальной зоны Атлантики/В. Н. Капустин, Е. М. Козлов, Г. Н. Мартынова и др.— В кн.: ТРОПЭКС-74, 1976, т. 1, с. 638—643.
2. Дмитриева-Арраго Л. Р., Горбунова Т. Н. Зависимость восходящего потока рассеянного коротковолнового излучения от оптического состояния атмосферы.— Труды ГГО, 1977, вып. 394, с. 76—83.

3. Климат и аэрозоль.—Труды ГГО, 1976, вып. 381, с. 130.
4. Кондратьев К. Я., Смоктий О. И. О влиянии аэрозоля на спектральное альbedo системы атмосфера—подстилающая поверхность.—Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1973, т. 9, № 12, с. 1269—1282.
5. Пятовская Н. П. Спектральная плотность потоков восходящей коротковолновой радиации под различными поверхностями.—Труды ГГО, 1972, вып. 275, с. 106—124.
6. Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет.—М.: Наука, 1972.—336 с.
7. Hofmann D. S. Stratospheric aerosol determination.—Canad. J. Chemistry, 1974, vol. 52, N 8, p. 1519—1526.
8. Luther F. M. Effect of stratospheric aerosol on solar heating rates. Prepr. Lawrence Livermore Lab., Univ. California, 1974.—3 p.
9. Luther F. M. Comparison of methods used to compute planetary albedo. Prepr. Lawrence Livermore Lab., Univ. California, UASG-74-16, 1974.—5 p.

NOVEMBER 1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

1974

*М. И. Юдин, К. В. Пятыхина*

## КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ АНАЛОГИ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ ШИРОТНО-ДОЛГОТНОЙ СЕТКИ

1. В современных моделях циркуляции атмосферы и схемах численного прогноза часто используется широтно-долготная сетка с постоянными шагами  $\Delta\theta$  и  $\Delta\lambda$ . При этом в полярных областях расстояние между соседними узлами в долготном направлении  $a \sin \theta \Delta\lambda$  оказывается много меньше, чем расстояние в широтном направлении  $a \Delta\theta$ .

Как известно, поля метеорологических элементов приближенно удовлетворяют условию статистической локальной изотропности, поэтому замену производных конечными разностями следует производить с учетом свойств реальных полей. Иначе говоря, шаги для расчета производных в широтном и долготном направлениях должны быть приближенно равны. В особенности существенно соблюдать это условие при расчете вторых производных, иначе конечно-разностные аналоги производных по широте и долготе реальных полей могут отличаться даже по порядку.

2. Для вывода искоемых соотношений изобразим участок земной поверхности, прилегающий к точке  $O(\theta_0, \lambda_0)$ , для которой ведутся расчеты в равноугольной конической проекции (рис. 1). При этом введем условие, что масштаб карты минимален на широте  $90 - \theta_0$ . Тогда масштаб на рассматриваемом участке карты постоянен с точностью до малых 3-го порядка. Полярные координаты  $\rho, \psi$  на карте связаны с истинными сферическими координатами  $\theta, \lambda$  пункта соотношениями

$$\rho = r_0 \left( \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)^\alpha, \quad \psi = \alpha (\lambda - \lambda_0), \quad \alpha = \cos \theta_0. \quad (1)$$

Здесь  $r_0$  — постоянная, равная расстоянию на карте между полюсом и экватором.

Масштаб карты  $M$  равен

$$M = \frac{r_0}{2a} \alpha \frac{\left( \sin \frac{\theta}{2} \right)^{\alpha-1}}{\left( \cos \frac{\theta}{2} \right)^{\alpha+1}}. \quad (2)$$

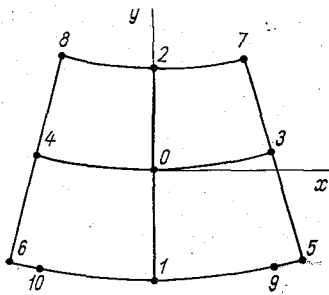


Рис. 1.

Из (1) и (2) следует

$$\frac{\rho_0}{M_0} = a \operatorname{tg} \theta_0. \quad (3)$$

Полярные координаты точек 0—8 на карте равны

$$\begin{aligned} & 0 (\rho_0, 0); \quad 1 (\rho_0 + \Delta\rho, 0); \quad 2 (\rho_0 - \Delta\rho, 0); \\ & 3 (\rho_0, \Delta\psi); \quad 4 (\rho_0, -\Delta\psi); \quad 5 (\rho_0 + \Delta\rho, \Delta\psi); \\ & 6 (\rho_0 + \Delta\rho, -\Delta\psi); \quad 7 (\rho_0 - \Delta\rho, \Delta\psi); \\ & 8 (\rho_0 - \Delta\rho, -\Delta\psi). \end{aligned}$$

При этом  $\Delta\rho$ ,  $\Delta\psi$  связаны с  $\Delta\theta$ ,  $\Delta\lambda$  соотношениями

$$\Delta\rho = M_0 a \Delta\theta; \quad \Delta\psi = a n \Delta\lambda. \quad (4)$$

Как указано выше, желательно при выборе целого числа « $n$ » исходить из условия близости величин  $\Delta\theta$  и  $n \sin \theta_0 \cdot \Delta\lambda$ . Введем теперь декартовы координаты  $x$ ,  $y$  (рис. 1) с центром в точке 0 в натуральном масштабе. Тогда имеем

$$x_1 = x_2 = 0; \quad y_2 = -y_1 = -\frac{\Delta\rho}{M_0}; \quad x_3 = -x_4 = \frac{\rho_0}{M_0} \sin \Delta\psi;$$

$$y_3 = y_4 = \frac{2\rho_0}{M_0} \sin^2 \frac{\Delta\psi}{2}; \quad x_5 = -x_6 = \frac{(\rho_0 + \Delta\rho)}{M_0} \sin \Delta\psi;$$

$$y_5 = y_6 = -\frac{\Delta\rho}{M_0} + \frac{2(\rho_0 + \Delta\rho)}{M_0} \sin^2 \frac{\Delta\psi}{2};$$

$$x_7 = -x_8 = \frac{(\rho_0 - \Delta\rho)}{M_0} \sin \Delta\psi;$$

$$y_7 = y_8 = \frac{\Delta\rho}{M_0} + \frac{2(\rho_0 - \Delta\rho)}{M_0} \sin^2 \frac{\Delta\psi}{2}.$$

Представим значения  $f_1 - f_2$ ;  $f_1 + f_2 - 2f_0$ ;  $f_3 + f_4 - 2f_0$ ;  $f_3 - f_4$ ;  $f_5 - f_6$ ;  $f_7 - f_8$  рядами Тейлора и ограничимся величинами второго порядка малости. Тогда получим следующие приближенные равенства для определения производных  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ;  $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ ;  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ :

$$f_1 - f_2 \approx -\frac{2\Delta\rho}{M_0} \frac{\partial f}{\partial y}; \quad f_1 + f_2 - 2f_0 \approx \frac{(\Delta\rho)^2}{M_0} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2};$$

$$f_3 + f_4 - 2f_0 \approx \frac{\rho_0^2}{M_0^2} \sin^2 \Delta\psi \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{4\rho_0}{M_0} \sin^2 \frac{\Delta\psi}{2} \frac{\partial f}{\partial y} +$$

$$+ \frac{4\rho_0^2}{M_0^2} \sin^4 \frac{\Delta\psi}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \quad (5)$$



Производные  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ;  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  находятся из соотношений

$$f_3 - f_4 \approx \frac{2\rho_0}{M_0} \sin \Delta\psi \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\rho_0^2}{M_0^2} \sin \Delta\psi \sin^2 \frac{\Delta\psi}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},$$

$$M_0 \frac{f_5 - f_6}{2(\rho_0 + \Delta\rho) \sin \Delta\psi} - M_0 \frac{f_7 - f_8}{2(\rho_0 - \Delta\rho) \sin \Delta\psi} \approx -2 \frac{\Delta\rho}{M_0} \cos \Delta\psi \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}. \quad (6)$$

3. Если произвести предельный переход в уравнениях (5), (6) и учесть (3), (4), получим соотношения между производными в сферической и локальной декартовой системах координат

$$\frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial \theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{f_1 - f_2}{2a \Delta\theta} = - \frac{\partial f}{\partial y};$$

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{f_1 + f_2 - 2f_0}{a^2 (\Delta\theta)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2};$$

$$\frac{1}{a^2 \sin^2 \theta_0} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{a^2 \sin^2 \theta_0} \frac{f_3 + f_4 - 2f_0}{(n \Delta\lambda)^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{a} \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0} \frac{\partial f}{\partial y};$$

$$\frac{1}{a \sin \theta_0} \frac{\partial f}{\partial \lambda} = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{a \sin \theta_0} \frac{f_3 - f_4}{2n \Delta\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x};$$

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \lambda} = \lim_{\substack{\Delta\theta \rightarrow 0 \\ \Delta\lambda \rightarrow 0}} \frac{1}{2a \Delta\theta} \times$$

$$\times \left[ \frac{f_5 - f_6}{2a \sin(\theta_0 + \Delta\theta) \cdot n \Delta\lambda} - \frac{f_7 - f_8}{2a \sin(\theta_0 - \Delta\theta) \cdot n \Delta\lambda} \right] = - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}. \quad (7)$$

Сведем воедино полученные формулы и присоединим к ним конечно-разностное выражение для лапласиана функции

$$\frac{1}{a} \frac{\partial f}{\partial \theta} \approx \frac{f_1 - f_2}{2a \Delta\theta};$$

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \approx \frac{f_1 + f_2 - 2f_0}{a^2 (\Delta\theta)^2};$$

$$\frac{1}{a \sin \theta_0} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \approx \frac{1}{2a \operatorname{tg} \theta_0 \sin \Delta\psi} (f_3 - f_4) +$$

$$+ \operatorname{tg} \frac{\Delta\psi}{2} \frac{1}{\cos \Delta\psi} \frac{1}{4a \Delta\theta} \left[ \frac{f_5 - f_6}{1 + \operatorname{ctg} \theta_0 \cdot \Delta\theta} - \frac{f_7 - f_8}{1 - \operatorname{ctg} \theta_0 \cdot \Delta\theta} \right];$$

$$\frac{1}{a^2 \sin^2 \theta_0} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \approx \frac{f_3 + f_4 - 2f_0}{a^2 \operatorname{tg}^2 \theta_0 \sin^2 \Delta\psi} +$$

$$+ \operatorname{tg}^2 \frac{\Delta\psi}{2} \left( \frac{f_1 - f_2}{2a^2 \Delta\theta \operatorname{tg} \theta_0} - \frac{f_1 + f_2 - 2f_0}{a^2 (\Delta\theta)^2} \right);$$

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \lambda} \approx \frac{1}{2a \Delta \theta} \left[ \frac{f_5 - f_6}{2n \Delta \lambda \sin \theta_0 \cdot (1 + \Delta \theta \operatorname{ctg} \theta_0)} - \frac{f_7 - f_8}{2n \Delta \lambda \sin \theta_0 \cdot (1 - \Delta \theta \operatorname{ctg} \theta_0)} \right] \frac{2\Delta\psi}{\sin 2\Delta\psi};$$

$$\nabla^2 f \approx \frac{f_1 + f_2 - 2f_0}{a^2 (\Delta\theta)^2} \frac{2 \cos \Delta\psi}{1 + \cos \Delta\psi} + \frac{f_1 - f_2}{2a^2 \Delta\theta \operatorname{tg} \theta_0} \cdot \frac{2}{1 + \cos \Delta\psi} +$$

$$+ \frac{f_3 + f_4 - 2f_0}{a^2 \sin^2 \theta_0 \cdot (n \Delta \lambda)^2} \cdot \frac{(\Delta\psi)^2}{\sin^2 \Delta\psi}. \quad (8)$$

4. Формулы (8) дают достаточно точные выражения для производных в северном полушарии. Они применимы и в южном полушарии, если условиться отсчитывать полярный угол  $\theta$  от южного полюса. Однако в непосредственной близости от полюсов различие производных по  $\lambda$  и  $x$  настолько велико, что определение второй производной по  $\lambda$  и лапласиана лишь по точкам 0, 1, 2, 3, 4 представляется далеко не оптимальной процедурой. Логичнее привлечь для расчетов еще точки 9, 10.

Имеем

$$f_9 + f_{10} - 2f_0 \approx \frac{(\rho_0 + \Delta\rho)^2}{M_0^2} \sin^2 \Delta\psi_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} -$$

$$- \left( \frac{2\Delta\rho}{M_0} - \frac{4(\rho_0 + \Delta\rho)}{M_0} \sin^2 \frac{\Delta\psi_1}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial y} +$$

$$+ \left( \frac{\Delta\rho}{M_0} - \frac{2(\rho_0 + \Delta\rho)}{M_0} \sin^2 \frac{\Delta\psi_1}{2} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \quad (9)$$

Умножим левую и правую части последнего из приближенных равенств (5) на коэффициент

$$k = \frac{\frac{\Delta\rho}{M_0} - \frac{2(\rho_0 + \Delta\rho)}{M_0} \sin^2 \frac{\Delta\psi_1}{2}}{\frac{\Delta\rho}{M_0} - \frac{2(\rho_0 + \Delta\rho)}{M_0} \sin^2 \frac{\Delta\psi_1}{2} + \frac{2\rho_0}{M_0} \sin^2 \frac{\Delta\psi}{2}}, \quad (10)$$

а левую и правую части (9) на коэффициент  $(1 - k)$  и сложим. Тогда получим следующие выражения для  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$  и  $\nabla^2 f$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{k(f_3 + f_4 - 2f_0) + (1 - k)(f_9 + f_{10} - 2f_0)}{D}$$

$$\frac{4 \frac{\rho_0^2}{M_0^2} \sin^2 \frac{\Delta\psi}{2} + (1 - k) \left( \frac{\Delta\rho}{M_0} - \frac{2(\rho_0 + \Delta\rho)}{M_0} \sin^2 \frac{\Delta\psi}{2} \right)^2}{D} \times$$

$$\times \frac{(f_1 + f_2 - 2f_0)}{a^2 (\Delta\theta)^2},$$

$$\nabla^2 f \approx \frac{k(f_3 + f_4 - 2f_0) + (1-k)(f_9 + f_{10} - 2f_0)}{D} +$$

$$+ \left[ 1 - \frac{k \frac{4\rho_0^2}{M_0^2} \sin^4 \frac{\Delta\psi}{2} + (1-k) \left( \frac{\Delta\rho}{M_0} - \frac{2(\rho_0 + \Delta\rho)}{M_0} \sin^2 \frac{\Delta\psi_1}{2} \right)^2}{D} \right] \times$$

$$\times \frac{(f_1 + f_2 - 2f_0)}{a^2(\Delta\theta)^2}. \quad (11)$$

Здесь

$$D = k \frac{\rho_0^2}{M_0^2} \sin^2 \Delta\psi + (1-k) \frac{(\rho_0 + \Delta\rho)^2}{M_0^2} \sin^2 \Delta\psi_1.$$

При сравнении преимуществ и недостатков формул (8) и (11) целесообразно исходить из соображений симметрии. С этой точки зрения следует предпочесть формулы (11) при углах  $\Delta\psi > 30^\circ$ . Учитывая соотношение между  $n\Delta\lambda$  и  $\Delta\theta$ , представим это условие в виде  $\theta_0 \leq 2\Delta\theta$ . По-видимому, в приполярной области имеет смысл также определять  $\frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial x}$  и  $\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial x} \right)$  по точкам 3, 4, 5, 6, хотя это менее очевидно, чем в отношении определения лапласиана.

5. До сих пор мы рассматривали  $n$  как целое число. Однако не представляет труда в тех случаях, когда величина  $q$ , определенная по формуле

$$q = \frac{\Delta\theta}{\sin \theta_0 \cdot \Delta\lambda}, \quad (12)$$

заметно отличается от ближайшего целого числа и  $n < q < n+1$ , определять лапласиан  $\nabla^2 f$  как взвешенную величину вида

$$(a \Delta\theta)^2 \nabla^2 f \approx \beta \{ b_n [f(\theta_0, \lambda_0 + n \Delta\lambda) + f(\theta_0, \lambda_0 - n \Delta\lambda)] +$$

$$+ b_{n+1} [f(\theta_0, \lambda_0 + (n+1) \Delta\lambda) + f(\theta_0, \lambda_0 - (n+1) \Delta\lambda) - 2f(\theta_0, \lambda_0)] +$$

$$+ [\alpha_1 f(\theta_0 + \Delta\theta, \lambda_0) + \alpha_2 f(\theta_0 - \Delta\theta, \lambda_0) - 2\alpha_0 f(\theta_0, \lambda_0)]. \quad (13)$$

Формула (13) соответствует расчетам  $\nabla^2 f$  по формуле (8) при  $n < q < n+1$ .

Здесь введены обозначения:

$$\beta = \frac{(\Delta\theta)^2}{(q\Delta\lambda)^2 \sin^2 \theta} \frac{(\Delta\psi)^2}{\sin^2 \Delta\psi};$$

$$\alpha_1 = \frac{2 \cos \Delta\psi}{1 + \cos \Delta\psi} + \frac{\Delta\theta \operatorname{ctg} \theta_0}{1 + \cos \Delta\psi};$$

$$\alpha_2 = \frac{2 \cos \Delta\psi}{1 + \cos \Delta\psi} - \frac{\Delta\theta \operatorname{ctg} \theta_0}{1 + \cos \Delta\psi};$$

$$\alpha_0 = \frac{2 \cos \Delta\psi}{1 + \cos \Delta\psi}.$$

В этих обозначениях  $\Delta\psi = \alpha q \Delta\lambda$ , причем  $q$  может принимать как целые, так и дробные значения. Через  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_0$  обозначены соответственно коэффициенты функций  $f_1, f_2, -2f_0$  формулы (8). На определении величины  $q$  и коэффициентов  $b_n, b_{n+1}$  остановимся в следующем пункте.

6. Имея целью практическое применение работы, мы рассчитали значения коэффициентов, входящих в формулы (8), (11), (13), для двух употребляющихся широтно-долготных сеток с шагами  $\Delta\theta = 4^\circ, \Delta\lambda = 5^\circ$  и  $\Delta\theta = 5^\circ, \Delta\lambda = 5^\circ$ .

Для этих двух сеток в табл. 1 приведены значения одного шага в долготном направлении  $\Delta_\lambda = a \sin \theta \cdot \Delta\lambda$  и значения  $n$  и  $n+1$ . Значения  $n$  и  $n+1$  получены из сравнения шагов в широтном и долготном направлениях. В тех случаях, когда величина  $\Delta_\lambda$  становится приблизительно равной или больше величины  $\Delta_\theta = a \Delta\theta$  шаг  $n$  всюду берем равным 1.

Таблица 1

Значения  $\Delta_\lambda, n, n+1$  для сеток  $\Delta\theta=4^\circ, \Delta\lambda=5^\circ$  и  $\Delta\theta=5^\circ, \Delta\lambda=5^\circ$

Сетка $4 \times 5^\circ$					Сетка $5 \times 5^\circ$				
$\theta^\circ$	$\Delta_\lambda$ км	$n$	$n+1$	$q$	$\theta^\circ$	$\Delta_\lambda$ км	$n$	$n+1$	$q$
4	38,7	12			2,5	24,2	23		
8	77,3	6			7,5	72,4	8		
12	115,4	4			12,5	120,1	5		
16	153,0	3			17,5	166,9	3	4	3,32
20	189,8	2	3	2,42	22,5	212,4	2	3	2,61
24	225,7	2	3	2,04	27,5	256,2	2	3	2,17
28	260,6	1	2	1,77	32,5	298,2	1	2	1,86
32	294,1	1	2	1,56	37,5	337,9	1	2	1,64
36	326,2	1	2	1,41	42,5	375,0	1	2	1,48
40	356,8	1	2	1,29	47,5	409,2	1	2	1,36
44	385,6	1	2	1,19	52,5	440,3	1	2	1,26
48	412,4	1	2	1,12	57,5	468,1	1	2	1,19
52	437,3	1	2	1,05	62,5	492,3	1	2	1,13
56	460,1	1			67,5	512,8	1	2	1,08
60	480,6	1			72,5	529,3	1	2	1,05
64	498,8	1			77,5	541,8	1		
68	514,6	1			82,5	550,2	1		
72	527,9	1			87,5	554,4	1		
76	538,5	1							
80	546,6	1							
84	551,9	1							
88	554,7	1							

Для тех значений  $\theta$ , где даны как значения  $n$ , так и значения  $n+1$ , определим величину  $q$  и коэффициенты  $b_n$  и  $b_{n+1}$  равенства (13). Определение этих величин рассмотрим на примере сеток  $\Delta\theta = 4^\circ, \Delta\lambda = 5^\circ$  и  $\Delta\theta = 5^\circ, \Delta\lambda = 5^\circ$ .

Анализ табл. 1 для этой сетки показывает, что в диапазоне значений  $\theta = 4 \div 16^\circ$  вторые производные по  $\lambda$  следует вычислять по данным не одного шага, а по данным следующего числа шагов  $n$ :

$\theta$ . . . . .	$4^\circ$	$8^\circ$	$12^\circ$	$16^\circ$
$n$ . . . . .	12	6	4	3
$n\Delta_\lambda$ км . .	464	464	462	459

Для диапазона значений  $\theta = 20 \div 24^\circ$  вторые производные по  $\lambda$  вычисляем по данным для второго и третьего шагов, а для значений  $\theta = 28 \div 52^\circ$  по данным первого и второго шагов. Дальше, начиная с  $\theta = 56^\circ$ , вычисление производных по  $\lambda$  проводим с одним шагом.

Найдем число шагов  $q$ , величину  $q\Delta_\lambda$  и коэффициенты  $b_n$  и  $b_{n+1}$  для соответствующих шагов на рассматриваемом широтном круге. С этой целью вторую производную по  $\lambda$  в конечных разностях по данным второго и третьего шагов запишем в следующем виде:

$$f_{\lambda\lambda} = \frac{b_3 [f(\lambda_0 + 3\Delta\lambda) + f(\lambda_0 - 3\Delta\lambda)] + b_2 [f(\lambda_0 + 2\Delta\lambda) + f(\lambda_0 - 2\Delta\lambda)] - 2f(\lambda_0)}{(9b_3 + 4b_2) \Delta_\lambda^2}. \quad (14)$$

Здесь и дальше в данном пункте для простоты записи опущена зависимость от переменной  $\theta_0$ . Коэффициенты в знаменателе равенства (14) определены из представления функций  $f(\lambda + 3\Delta\lambda)$ ,  $f(\lambda - 3\Delta\lambda)$ ,  $f(\lambda + 2\Delta\lambda)$ ,  $f(\lambda - 2\Delta\lambda)$  в виде рядов Тейлора:

$$\left. \begin{aligned} f(\lambda_0 + 3\Delta\lambda) &\approx f(\lambda_0) + f_\lambda \cdot 3\Delta\lambda + f_{\lambda\lambda} \cdot \frac{9\Delta_\lambda^2}{2} \\ f(\lambda_0 - 3\Delta\lambda) &\approx f(\lambda_0) - f_\lambda \cdot 3\Delta\lambda + f_{\lambda\lambda} \cdot \frac{9\Delta_\lambda^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} f(\lambda_0 + 2\Delta\lambda) &\approx f(\lambda_0) + f_\lambda \cdot 2\Delta\lambda + f_{\lambda\lambda} \cdot \frac{4\Delta_\lambda^2}{2} \\ f(\lambda_0 - 2\Delta\lambda) &\approx f(\lambda_0) - f_\lambda \cdot 2\Delta\lambda + f_{\lambda\lambda} \cdot \frac{4\Delta_\lambda^2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Учитывая, что  $b_2 + b_3 = 1$ , получаем  $9b_3 + 4b_2 = 5b_3 + 4$ . Вторая производная по  $\lambda$  в конечных разностях по данным второго и первого шагов с учетом (16) принимает вид

$$f_{\lambda\lambda} = \frac{b_2 [f(\lambda_0 + 2\Delta\lambda) + f(\lambda_0 - 2\Delta\lambda)] + b_1 [f(\lambda_0 + \Delta\lambda) + f(\lambda_0 - \Delta\lambda)] - 2f(\lambda_0)}{(3b_2 + 1) \Delta_\lambda^2}. \quad (17)$$

Таблица 2

Значения коэффициентов  $b_n, b_{n+1}$  для сетки  $4 \times 5^\circ$ 

$\theta^\circ$	$b_{12}$	$b_8$	$b_4$	$b_3$	$b_2$	$b_1$
4	1	0	0	0	0	0
8	0	1	0	0	0	0
12	0	0	1	0	0	0
16	0	0	0	1	0	0
20	0	0	0	0,37	0,63	0
24	0	0	0	0,03	0,97	0
28	0	0	0	0	0,71	0,29
32	0	0	0	0	0,48	0,52
36	0	0	0	0	0,33	0,67
40	0	0	0	0	0,22	0,78
44	0	0	0	0	0,14	0,86
48	0	0	0	0	0,08	0,92
52	0	0	0	0	0,04	0,96
56	0	0	0	0	0	1
60	0	0	0	0	0	1
64	0	0	0	0	0	1
68	0	0	0	0	0	1
72	0	0	0	0	0	1
76	0	0	0	0	0	1
80	0	0	0	0	0	1
84	0	0	0	0	0	1
88	0	0	0	0	0	1

Таблица 3

Значения коэффициентов  $b_n, b_{n+1}$  для сетки  $5 \times 5^\circ$ 

$\theta^\circ$	$b_{23}$	$b_8$	$b_4$	$b_3$	$b_2$	$b_1$
2,5	1	0	0	0	0	0
7,5	0	1	0	0	0	0
12,5	0	0	1	0	0	0
17,5	0	0	0	0,29	0,71	0
22,5	0	0	0	0	0,56	0,44
27,5	0	0	0	0	0,14	0,86
32,5	0	0	0	0	0	0,82
37,5	0	0	0	0	0	0,56
42,5	0	0	0	0	0	0,40
47,5	0	0	0	0	0	0,28
52,5	0	0	0	0	0	0,20
57,5	0	0	0	0	0	0,14
62,5	0	0	0	0	0	0,09
67,5	0	0	0	0	0	0,06
72,5	0	0	0	0	0	0,03
77,5	0	0	0	0	0	0
82,5	0	0	0	0	0	0
87,5	0	0	0	0	0	0

Таблица 4

Значения  $c_i$  для сетки  $\Delta\theta=4^\circ$ ,  $\Delta\lambda=5^\circ$ 

$\theta^\circ$	$c_1$	$c_2$	$c_{3, n}$	$c_{3, n+1}$	$c_{9, n}$	$-c_0$
4	0,565	0,565	0,706	0	0,479	3,500
8	0,782	0,782	0,757	0	0,243	3,564
12	1,139	0,801	0,962	0	0	3,864
16	1,108	0,860	0,956	0	0	3,880
20	1,087	0,893	0,595	0,350	0	3,870
24	1,072	0,914	0,913	0,028	0	3,868
28	1,061	0,929	0,271	0,665	0	3,862
32	1,053	0,941	0,486	0,448	0	3,862
36	1,046	0,949	0,626	0,309	0	3,865
40	1,040	0,956	0,732	0,206	0	3,872
44	1,035	0,962	0,803	0,131	0	3,865
48	1,030	0,967	0,860	0,075	0	3,867
52	1,026	0,972	0,892	0,037	0	3,856
56	1,023	0,976	0,929	0	0	3,857
60	1,020	0,979	0,854	0	0	3,707
64	1,017	0,983	0,786	0	0	3,572
68	1,014	0,986	0,750	0	0	3,500
72	1,011	0,989	0,703	0	0	3,406
76	1,009	0,991	0,672	0	0	3,344
80	1,006	0,994	0,663	0	0	3,326
84	1,004	0,996	0,622	0	0	3,324
88	1,001	0,999	0,699	0	0	3,398

Таблица 5

Значения  $c_i$  для сетки  $\Delta\theta=5^\circ$ ,  $\Delta\lambda=5^\circ$ 

$\theta^\circ$	$c_1$	$c_2$	$c_{3, n}$	$c_{3, n+1}$	$c_{9, n}$	$-c_0$
2,5	0,273	0,273	0,845	0	1,202	4,640
7,5	0,776	0,776	0,685	0	0,402	3,726
12,5	1,159	0,747	0,908	0	0	3,722
17,5	1,122	0,840	0,731	0,298	0	4,020
22,5	1,095	0,882	0,448	0,571	0	4,015
27,5	1,077	0,909	0,866	0,141	0	4,000
32,5	1,064	0,926	0,181	0,825	0	4,002
37,5	1,054	0,940	0,444	0,565	0	4,012
42,5	1,045	0,950	0,604	0,402	0	4,007
47,5	1,038	0,958	0,716	0,278	0	3,984
52,5	1,032	0,965	0,802	0,200	0	4,001
57,5	1,027	0,971	0,851	0,138	0	3,976
62,5	1,022	0,977	0,898	0,089	0	3,973
67,5	1,018	0,982	0,941	0,060	0	4,002
72,5	1,014	0,986	0,964	0,030	0	3,988
77,5	1,010	0,990	1,047	0	0	4,094
82,5	1,006	0,994	1,025	0	0	4,050
87,5	1,002	0,998	1,018	0	0	4,036

В равенствах (16), (17) коэффициент в знаменателе при  $\Delta_\lambda^2$  равен квадрату числа шагов  $q$ . Так как для диапазона величин  $\theta = 4 \div 16^\circ$  величина  $q\Delta_\lambda(\theta) \approx 460$  км, то в равенствах (16), (17) число шагов  $q$  подбираем из этого же соотношения. Так, например, для  $\theta = 20^\circ$   $q = \frac{460}{189,8} \approx 2,42$ , тогда из равенства  $5b_3 + 4 = q^2$  получаем  $b_3 \approx 0,37$ ,  $b_2 \approx 0,63$ .

Определение значений  $q$ ,  $b_n$ ,  $b_{n+1}$  для сетки  $\Delta\theta = 5^\circ$ ,  $\Delta\lambda = 5^\circ$  производим аналогичным образом.

Полученные значения  $q$  приведены в табл. 1, а значения  $b_n$ ,  $b_{n+1}$  в табл. 2 и 3.

7. Как указано в пункте 4, для малых значений  $\theta$  расчет лапласиана  $\nabla^2 f$  следует производить по формуле (11), т. е. необходимо учитывать точки 9, 10, расположенные на круге  $\theta_0 + \Delta\theta$ .

Объединяя расчеты по формулам (11) и (13), для оператора Лапласа на сфере введем обозначение

$$(a \Delta\theta)^2 \cdot \nabla^2 f = \sum c_i f_i, \quad (18)$$

где индекс  $i$  указывает номер точки, для которой берется функция  $f$  (рис. 1).

Значения  $c_i$  определялись на разных широтах или по формуле (11), или по формуле (13), которая при целом значении  $q$  переходит в формулу (8). Оказалось, что при  $\theta = 4^\circ$  и  $\theta = 8^\circ$  для сетки  $\Delta\theta = 4^\circ$ ,  $\Delta\lambda = 5^\circ$  и при  $\theta = 2,5^\circ$  и  $\theta = 7,5^\circ$  для сетки  $\Delta\theta = 5^\circ$ ,  $\Delta\lambda = 5^\circ$  расчет  $\nabla^2 f$  необходимо проводить по формуле (11), а для остальных значений по формуле (13).

Значения  $c_i$  даны в табл. 4 и 5 соответственно для сеток  $4 \times 5^\circ$  и  $5 \times 5^\circ$ . Значения  $c_4$  и  $c_{10}$  в этих таблицах не приводятся, так как  $c_4 = c_3$  и  $c_{10} = c_9$ ; величина  $c_0$  дана с обратным знаком.

Индексы  $n$  и  $n+1$  указывают число шагов, для которого надо брать функции  $f_3, f_4, f_9, f_{10}$ . Значения  $n$  и  $n+1$  приведены в табл. 1. Для функций  $f_3, f_4$  значения  $n$  и  $n+1$  берем для того же значения  $\theta_0$ , для которого производим расчет  $\nabla^2 f$ , а для функций  $f_9$  и  $f_{10}$  — для значения  $\theta_0 + \Delta\theta$ . Например, при расчете  $\nabla^2 f$  для  $\theta = 8^\circ$  (сетка  $4 \times 5^\circ$ ) для  $f_3, f_4$   $n = 6$ , а для  $f_9, f_{10}$   $n = 4$ .



Л. В. Руховец

## К ВОПРОСУ О СПЕКТРАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ АТМОСФЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ

1. Известно, что при решении ряда задач динамики атмосферы методом Фурье приходится рассматривать следующую задачу на собственные значения

$$\frac{d}{d\zeta} \frac{\zeta^2}{d^2} \frac{d\psi}{d\zeta} + \lambda^2 \psi = 0, \quad (1)$$

$$\zeta^2 \frac{d\psi}{d\zeta} = 0 \text{ при } \zeta = 0, \quad (2)$$

$$\frac{g}{R(\gamma_a - \gamma)} \frac{d\psi}{d\zeta} + \psi = 0 \text{ при } \zeta = 1. \quad (3)$$

Здесь  $g$  — ускорение свободного падения,  $R$  — газовая постоянная,  $\gamma_a$  и  $\gamma$  — адиабатический и реальный вертикальные градиенты температуры,  $d^2 = \frac{(\gamma_a - \gamma)R^2T}{gl^2}$  — параметр статической устойчивости,  $T$  — температура,  $l$  — параметр Кориолиса.

Граничное условие (3) выражает равенство нулю «геометрической» вертикальной скорости ( $W = 0$ ), условие (2) — равенство нулю «изобарической» вертикальной скорости ( $\omega = 0$ ).

Для решения спектральной проблемы (1)–(3) в случае переменной величины  $(\gamma_a - \gamma)$ , а следовательно, и величины  $d^2$ , необходимо применять численные методы.

При использовании конечно-разностных методов возникают некоторые трудности, связанные с аппроксимацией производных в граничных условиях (2) и (3). Кроме того, конечно-разностные аппроксимации не слишком удобны в случае переменного расстояния между узлами (если мы хотим, например, решать задачу для стандартных уровней в атмосфере).

С учетом этого более удобными оказываются вариационно-разностные методы.

Для решения задачи (1)–(3) применим вариационно-разностный метод, основанный на линейном базисе.

В интервале  $(0,1)$  введем систему узлов  $\zeta_i$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) отстоящих друг от друга на  $h_i = \zeta_{i+1} - \zeta_i$ . Решение будем искать в виде ряда

$$\psi(\zeta) = \sum_i \psi_i \omega_i(\zeta), \quad (4)$$

где  $\psi_i = \psi(\zeta_i)$ , а в качестве  $\omega_i(\zeta)$  берем функции:

$$\omega_i(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \zeta \leq \zeta_{i-1}, \\ \frac{\zeta - \zeta_{i-1}}{\zeta_i - \zeta_{i-1}} & \text{при } \zeta_{i-1} \leq \zeta \leq \zeta_i, \\ \frac{\zeta_{i+1} - \zeta}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} & \text{при } \zeta_i \leq \zeta \leq \zeta_{i+1}, \\ 0 & \text{при } \zeta_{i+1} \leq \zeta \leq 1. \end{cases} \quad (5)$$

Отметим, что

$$\omega'_i(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{\zeta_i - \zeta_{i-1}} & \text{при } \zeta_{i-1} \leq \zeta \leq \zeta_i, \\ -\frac{1}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} & \text{при } \zeta_i \leq \zeta \leq \zeta_{i+1} \end{cases} \quad (6)$$

(штрих означает дифференцирование по  $\zeta$ ).

С учетом (5) имеем

$$\psi(\zeta) = \begin{cases} \psi_{i-1} + \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{\zeta_i - \zeta_{i-1}} (\zeta - \zeta_{i-1}) & \text{при } \zeta_{i-1} \leq \zeta \leq \zeta_i, \\ \psi_i + \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} (\zeta - \zeta_i) & \text{при } \zeta_i \leq \zeta \leq \zeta_{i+1}, \end{cases} \quad (7)$$

$$\psi'(\zeta) = \begin{cases} \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{\zeta_i - \zeta_{i-1}} & \text{при } \zeta_{i-1} \leq \zeta \leq \zeta_i, \\ \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} & \text{при } \zeta_i \leq \zeta \leq \zeta_{i+1}. \end{cases} \quad (8)$$

В соответствии с методом Галеркина уравнение (1) умножаем на функцию  $\omega_i$  и интегрируем по  $\zeta$  от 0 до 1. После интегрирования по частям с использованием условий (2) и (3) получим

$$-\frac{l^2}{RT_n} \psi_n \omega_i(\zeta_n) - \int_0^1 \frac{\zeta^2}{a^2} \psi' \omega'_i d\zeta + \lambda^2 \int_0^1 \psi \omega_i d\zeta = 0. \quad (9)$$

Заменяем функции  $\psi$ ,  $\psi'$ ,  $\omega_i$ ,  $\omega'_i$  с помощью (5) — (8). Первый член (9) войдет лишь в уравнение для точки  $\zeta_n = 1$ .

Запишем уравнение (9) для точки  $\zeta_1 = 0$

$$\begin{aligned} - \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\zeta^2}{a^2} \psi' \omega'_1 d\zeta + \lambda^2 \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \psi \omega_1 d\zeta &= - \frac{\psi_2 - \psi_1}{h_1^2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\zeta^2}{a^2} d\zeta + \lambda^2 \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \times \\ &\times \left[ \psi_1 + \frac{\psi_2 - \psi_1}{h_1} (\zeta - \zeta_1) \right] \left( 1 - \frac{\zeta - \zeta_1}{h_1} \right) d\zeta = 0. \end{aligned}$$

После взятия интеграла получаем

$$\frac{(\psi_2 - \psi_1) \chi_1}{d_1^2} + \lambda^2 h_1 \left( \psi_1 + \frac{\psi_2}{2} \right) = 0, \quad (10)$$

где

$$\chi_i = \frac{\zeta_{i+1}^2 + \zeta_{i+1} \zeta_i + \zeta_i^2}{h_i},$$

а  $d_i^2$  — среднее значение  $d^2$  на интервале интегрирования  $(\zeta_i, \zeta_{i+1})$ .

Запишем (9) в точке  $\zeta_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n-1$ )

$$\begin{aligned} & - \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_{i+1}} \frac{\zeta^2}{d^2} \psi' \omega_i' d\zeta + \lambda^2 \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_{i+1}} \psi \omega_i d\zeta = - \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{h_{i-1}^2} \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \frac{\zeta^2}{d^2} d\zeta + \\ & + \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{h_i^2} \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \frac{\zeta^2}{d^2} d\zeta + \lambda^2 \int_{\zeta_{i-1}}^{\zeta_i} \left[ \psi_{i-1} + \frac{\psi_i - \psi_{i-1}}{h_{i-1}} (\zeta - \zeta_{i-1}) \right] \times \\ & \times \frac{\zeta - \zeta_{i-1}}{h_{i-1}} d\zeta + \lambda^2 \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \left[ \psi_i + \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{h_i} (\zeta - \zeta_i) \right] \times \\ & \times \left( 1 - \frac{\zeta - \zeta_i}{h_i} \right) d\zeta = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя, получим окончательно

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\chi_{i-1}}{d_{i-1}^2} + \lambda^2 \frac{h_{i-1}}{2} \right) \psi_{i-1} + \left[ \frac{\chi_{i-1}}{d_{i-1}^2} - \frac{\chi_i}{d_i^2} + \lambda^2 (h_{i-1} + h_i) \right] \psi_i + \\ & + \left( \frac{\chi_i}{d_i^2} + \frac{\lambda^2 h_i}{2} \right) \psi_{i+1} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Запишем (9) в точке  $\zeta_n = 1$

$$\begin{aligned} & - \frac{l^2}{RT_n} \psi_n - \frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{h_{n-1}^2} \int_{\zeta_{n-1}}^{\zeta_n} \frac{\zeta^2}{d^2} d\zeta + \\ & + \lambda^2 \int_{\zeta_{n-1}}^{\zeta_n} \left[ \psi_{n-1} + \frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{h_{n-1}} (\zeta - \zeta_{n-1}) \right] \frac{\zeta - \zeta_{n-1}}{h_{n-1}} d\zeta = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя, получим

$$\left( \frac{\chi_{n-1}}{d_{n-1}^2} + \lambda^2 \frac{h_{n-1}}{2} \right) \psi_{n-1} + \left( \frac{3l^2}{RT_n} - \frac{\chi_{n-1}}{d_{n-1}^2} + \lambda^2 h_{n-1} \right) \psi_n = 0. \quad (12)$$

Таким образом, имеем задачу на собственные значения:

$$A\psi + \lambda^2 B\psi = 0, \quad (13)$$

где

$$\psi = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\} \text{ — вектор,}$$

$A$  и  $B$  — симметричные матрицы:

$$A = \begin{vmatrix} -\frac{\chi_1}{d_1^2} & \frac{\chi_1}{d_1^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\chi_1}{d_1^2} & -\frac{\chi_1}{d_1^2} - \frac{\chi_2}{d_2^2} & \frac{\chi_2}{d_2^2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\chi_{n-1}}{d_{n-1}^2} & \frac{3l^2}{RT_n} - \frac{\chi_{n-1}}{d_{n-1}^2} \end{vmatrix};$$

$$B = \begin{vmatrix} h_1 & \frac{h_1}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{h_1}{2} & h_1 + h_2 & \frac{h_2}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{h_{n-1}}{2} & h_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Решение проблемы (13) сводим к решению «стандартной» проблемы путем умножения слева на матрицу  $B^{-1}$

$$B^{-1}A\psi + \lambda^2\psi = 0.$$

При этом матрица  $C = B^{-1}A$ , вообще говоря, несимметрична и собственные векторы неортогональны. Однако имеет место следующее условие ортогональности:

$$(B\psi_i, \psi_j) = 0 \quad (i \neq j), \quad (14)$$

где  $(u, v)$  — означает скалярное произведение двух векторов,

2. В качестве расчетных уровней выберем уровни  $\zeta = 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,5; 0,7; 0,8; 1,0$ . Для определения величин  $d_i^2$  воспользуемся данными Оорта и Расмуссена [2], осредненными по северному полушарию и относящимися к среднегодовым условиям. В [2] приводятся значения температур и высот изобарических поверхностей. Поэтому для определения величины  $d_i^2$  в слое  $(\zeta_i, \zeta_{i+1})$  воспользуемся формулой

$$d_i^2 = \left( 0,01 - \frac{T_{i+1} - T_i}{z_i - z_{i+1}} \right) \frac{T_i + T_{i+1}}{2} \frac{R^2}{g l^2}.$$

Для расчета величины  $d_i^2$  в самом верхнем слое для уровня  $\zeta_1 = 0$ , примем значение температуры и высоты, соответствующие уровню  $\zeta = 0,05$ .

В табл. 1 приведены результаты расчетов собственных чисел и собственных векторов. Первая мода  $\psi_1$  соответствует квазибаротропному решению. Радиус области влияния для этой моды составляет величину

$$L_1 = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_1}} \approx 2580 \text{ км},$$

что близко к значению параметра Обухова [1].

Таблица 1

Собственные числа  $\lambda_i$  и собственные векторы  $\psi_i$  (граничное условие  $\omega=0$  при  $\zeta=0$ )

Уровень, мбар	$\psi_1$	$\psi_2$	$\psi_3$	$\psi_4$	$\psi_5$	$\psi_6$	$\psi_7$	$\psi_8$
0	0,530	0,968	0,607	0,365	0,206	0,113	0,039	0,003
100	0,377	0,070	-0,689	-0,595	-0,381	-0,218	-0,067	-0,005
200	0,339	-0,063	-0,256	0,395	0,695	0,557	0,198	0,016
300	0,325	-0,092	-0,057	0,409	-0,055	-0,598	-0,385	-0,048
500	0,313	-0,105	0,082	0,114	-0,406	0,218	0,520	0,109
700	0,301	-0,108	0,149	-0,150	-0,055	0,299	-0,560	-0,279
850	0,302	-0,108	0,149	-0,150	-0,055	0,299	-0,560	-0,279
850	0,293	-0,108	0,171	-0,263	0,234	-0,144	0,014	0,591
1000	0,286	-0,105	0,173	-0,290	0,323	-0,336	0,473	-0,747
$-10^{12}\lambda_i^2$	0,152	0,640	3,52	10,19	27,71	61,26	122,39	374,02

3. Иногда при решении задач динамики атмосферы граничное условие (2) ставится не на верхней границе атмосферы, а на некоторой конечной высоте. Интересно выяснить, к каким изменениям в спектральных характеристиках это может привести.

Зададим граничное условие (2) не при  $\zeta=0$ , а при  $\zeta=0,05$ . При этом уравнение (10) сохранит свой вид, лишь при вычислении  $\chi_1$  величина  $\zeta_1$  принимает значение 0,05, а не нуль, как в предыдущих расчетах.

Результаты соответствующих расчетов приведены в табл. 2.

Таблица 2

Собственные числа  $\lambda_i$  и собственные векторы  $\psi_i$  (граничное условие  $\omega=0$  при  $\zeta=0,05$ )

Уровень, мбар	$\psi_1$	$\psi_2$	$\psi_3$	$\psi_4$	$\psi_5$	$\psi_6$	$\psi_7$	$\psi_8$
50	0,410	0,861	0,868	0,763	0,409	0,192	0,052	0,003
100	0,390	0,443	-0,185	-0,550	-0,506	-0,303	-0,092	-0,007
200	0,364	0,075	-0,329	0,072	0,589	0,562	0,207	0,017
300	0,353	-0,033	-0,186	0,226	0,004	-0,563	-0,386	-0,048
500	0,340	-0,095	-0,001	0,108	-0,343	0,193	0,517	0,109
700	0,329	-0,121	0,117	-0,058	-0,060	0,286	-0,556	-0,279
850	0,320	-0,127	0,162	0,138	0,191	0,134	0,014	0,591
1000	0,312	-0,127	0,171	-0,158	0,269	-0,317	0,470	-0,747
$-10^{12}\lambda_i^2$	0,167	1,93	6,30	13,45	29,43	62,25	122,45	374,02

Из сравнения данных табл. 1 и 2 следует, что постановка верхнего граничного условия на конечной высоте мало меняет первую моду. Что касается последующих мод, то они меняются главным образом на уровнях, относящихся к стратосфере и верхней

тропосфере. Существенно меняются для этих мод значения собственных чисел и, следовательно, масштабы областей влияния.

Практически не меняются последние два вектора, но они играют роль шумов.

4. В некоторых моделях численного прогноза граничное условие (2) заменяют условием «твердой стенки», т. е. условием равенства нулю вертикальной скорости

$$W=0 \text{ при } \zeta=\zeta_1. \quad (15)$$

Это означает, что вместо (2) используется условие

$$\frac{\zeta g}{R(\gamma_a - \gamma)} \frac{d\psi}{d\zeta} + \psi = 0 \text{ при } \zeta=\zeta_1. \quad (16)$$

Тогда вместо (10) будем иметь

$$\frac{3\zeta_1 l^2}{RT_1} \psi_1 + \frac{\psi_2 - \psi_1}{d_1^2} \chi_1 + \lambda^2 h_1 \left( \psi_1 + \frac{\psi_2}{2} \right) = 0. \quad (17)$$

В табл. 3 представлены результаты расчетов для этого варианта граничного условия, заданного при  $\zeta = 0,05$ . Сопоставление

Таблица 3

Собственные числа  $\lambda_i$  и собственные векторы  $\psi_i$  (граничное условие  $W=0$  при  $\zeta=0,05$ )

Уровень, мбар	$\psi_1$	$\psi_2$	$\psi_3$	$\psi_4$	$\psi_5$	$\psi_6$	$\psi_7$	$\psi_8$
50	0,484	0,885	0,857	0,740	0,397	0,189	0,052	0,003
100	0,396	0,396	-0,232	0,569	-0,506	-0,305	-0,092	-0,007
200	0,350	0,050	-0,332	0,086	0,594	0,562	0,207	0,017
300	0,335	-0,045	-0,179	0,238	0,003	-0,564	-0,386	-0,048
500	0,321	-0,099	0,005	0,111	-0,345	0,196	0,517	0,108
700	0,309	-0,120	0,120	-0,063	-0,060	0,286	-0,563	-0,279
850	0,300	-0,126	0,163	-0,145	0,192	-0,134	0,014	0,591
1000	0,293	-0,125	0,171	-0,166	0,271	-0,317	0,469	-0,747
$-10^{12} \lambda_i^2$	0,145	1,69	6,54	13,24	29,39	62,24	122,45	374,02

данных табл. 2 и 3 показывает, что замена граничного условия  $W=0$ , заданного на конечной высоте, условием  $\omega=0$ , практически не отражается на спектральных характеристиках.

5. Иногда вместо нижнего граничного условия (3) используют условие

$$\omega=0 \text{ при } \zeta=1. \quad (18)$$

Это означает, что вместо условия (3) имеем условие

$$\frac{d\psi}{d\zeta} = 0 \text{ при } \zeta=1. \quad (19)$$

В этом случае в левой части (9) исчезает первое слагаемое

$$-\frac{l^2}{RT_n} \psi_n \omega_i(\zeta_n).$$

Результаты расчетов для этого варианта граничного условия приведены в табл. 4. Как видно из этой таблицы, использование ус-

Таблица 4

Собственные числа  $\lambda_i$  и собственные векторы  $\psi_i$  (граничное условие  $\omega=0$  при  $\zeta=1$ )

Уровень, мбар	$\psi_1$	$\psi_2$	$\psi_3$	$\psi_4$	$\psi_5$	$\psi_6$	$\psi_7$	$\psi_8$
0	0,354	0,978	0,612	0,371	0,207	0,113	0,034	0,003
100	0,354	0,109	-0,683	-0,602	-0,384	-0,219	0,067	-0,005
200	0,354	-0,027	-0,269	0,385	0,695	0,560	0,200	0,017
300	0,354	-0,058	-0,074	0,411	-0,047	-0,597	-0,387	-0,049
500	0,354	-0,075	0,067	0,126	-0,406	0,212	0,521	0,111
700	0,354	-0,082	0,139	-0,137	-0,064	0,304	-0,557	-0,281
850	0,354	-0,084	0,166	-0,255	0,226	-0,138	0,007	0,593
1000	0,354	-0,085	0,173	-0,288	0,322	-0,336	0,471	-0,744
$-10^{12}\lambda_i^2$	0	0,601	3,424	9,975	27,455	60,952	121,701	371,656

ловия (18) приводит к резкому искажению спектральных характеристик главных мод. Прежде всего первая мода становится не зависящей от высоты, а область влияния этой моды распространяется на всю плоскость. Существенно меняются масштабы областей влияния других главных мод. Поэтому использование граничного условия (18) приведет к существенному искажению всего решения в целом.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Обухов А. М. К вопросу о геострофическом ветре.— Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1949, № 4, с. 432—439.
2. Oort A. H., Rasmusson E. M. Atmospheric circulation statistics.— Prof. Pap., 1971, N 5, NOAA, p. 323.

## СХЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ВРЕМЕНИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ, ЭФФЕКТИВНО ПОДАВЛЯЮЩИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНЫЕ КОМПОНЕНТЫ

Решения уравнений динамики атмосферы наряду с метеорологическими волнами содержат и шумы — короткие гравитационные волны. Особенно интенсивно генерируются шумы при учете конденсации, орографии, при решении задач на ограниченной территории, при использовании телескопизации. Известно, что в случае использования для интегрирования по времени нейтральных схем [7], интенсивность шумов может начать самопроизвольно расти, что в свою очередь приводит к усилению коротковолновых компонент и, в конечном счете, к неустойчивости. Применение диссипативных схем позволяет предотвратить неустойчивость, однако, при этом могут значительно ослабляться и несущие полезную информацию метеорологические волны. Поэтому существенно важно, чтобы применяемая схема обладала высокой избирательностью. Примеры таких схем и их анализ приводятся в настоящей статье.

Для анализа свойств схем будем их применять к линеаризованной системе уравнений мелкой воды

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial \tau} + \Delta t \left( U \frac{\partial u'}{\partial x} + C \frac{\partial \varphi'}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial \tau} + \Delta t \left( U \frac{\partial \varphi'}{\partial x} + C \frac{\partial u'}{\partial x} \right) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $C = \sqrt{\overline{\Phi}}$ ,  $\varphi' = \frac{\Phi'}{C}$ ,  $\tau = \frac{t}{\Delta t}$ .

Осуществив в (1) аппроксимацию пространственных операторов и задав  $u'$  и  $\varphi'$  в виде

$$u' = ue^{ikx}, \quad \varphi' = \varphi e^{ikx},$$

получим

$$\begin{cases} \dot{u} + i\alpha u + i\beta \varphi = 0, \\ \dot{\varphi} + i\alpha \varphi + i\beta u = 0, \end{cases} \quad (2)$$



где  $\alpha = \alpha_0 \widehat{\varphi}(\xi)$ ,  $\beta = \beta_0 \widehat{\varphi}(\xi)$ ,  $\alpha_0 = \frac{u \Delta t}{\Delta x}$ ,  $\beta_0 = \frac{C \Delta t}{\Delta x}$ ,  $(\dot{\phantom{x}}) = \frac{d(\phantom{x})}{d\tau}$ ,  $\xi = k \Delta x$ .

Функция  $\widehat{\varphi}(\xi)$  характеризует способ аппроксимации. Например, при спектральной аппроксимации  $\widehat{\varphi}(\xi) = \xi$ , при аппроксимации по методу центральных разностей  $\widehat{\varphi}(\xi) = \sin \xi$ .

Для удобства анализа выделим из системы (2) уравнение, описывающее адвекцию величины  $u$

$$\dot{u} = -i\alpha u, \quad (3)$$

и систему уравнений для гравитационных волн

$$\begin{cases} \dot{u} = -i\beta\varphi, \\ \dot{\varphi} = -i\beta u. \end{cases} \quad (4)$$

Для интегрирования уравнений (3), (4) будем строить трехслойные схемы [2], поэтому решение для  $u^{(n)}$  можно записать в виде [4]

$$u^{(n)} = \sum_{k=1}^p A_k a_k^n + B_k b_k^n \quad (5)$$

и аналогично для  $\varphi^{(n)}$ . Здесь  $p = 1$  для уравнения (3),  $p = 2$  для системы (4),  $a_k$ ,  $b_k$  — собственные числа матрицы перехода, отвечающие физическому и фиктивному решениям,  $A_k$ ,  $B_k$  — определяются по начальным условиям. Поскольку  $a_k$ ,  $b_k$  — комплексные числа, удобно ввести обозначения

$$\rho_k = |a_k|, \quad r_k = |b_k|, \quad \psi_k = \arg(a_k).$$

Теперь для полного описания свойств некоторой схемы нужно только определить  $\rho_k$ ,  $r_k$ ,  $\psi_k$  как функции от  $\alpha$ ,  $\beta$ .

Прежде чем переходить к анализу конкретных схем для уравнения адвекции, сделаем одно замечание. В конечном итоге уравнения адвекции будут решаться совместно с уравнениями для гравитационных волн в рамках единой схемы. Как будет показано дальше, условия устойчивости требуют, чтобы выполнялось неравенство  $\beta < 2,0 \div 2,5$  и поскольку  $\alpha \sim 0,1\beta$  и в редких случаях  $\alpha = 0,2\beta$  (при  $C = 300$  м/с, это соответствует  $U = 60$  м/с), то практически всегда  $\alpha < 0,4 \div 0,5$ . Поэтому используем для  $\rho$ ,  $r$ ,  $\psi$  (индекс  $k$  опускаем) представление в виде рядов по степеням  $\alpha$  до  $\alpha^4$  включительно. В дальнейшем, не оговаривая этого каждый раз специально, после описания схемы будем сразу приводить ее характеристики  $\rho$ ,  $r$ ,  $\psi$ , а также  $\alpha_m$  — максимально допустимое критерием устойчивости значение  $\alpha$ .

Рассмотрим сначала одношаговые схемы. Среди таких схем наиболее употребительными являются схема центральных разностей и схема Адамса—Бэшфорта. Поскольку свойства схем

хорошо известны [6], рассмотрим здесь свойства этих схем после объединения их с фильтрами по времени.

**Схема 1** Схема центральных разностей с фильтром.

$$\begin{cases} \tilde{u}^{(n+1)} = u^{(n-1)} - 2\alpha i \tilde{u}^{(n)}, \\ u^{(n)} = \tilde{u}^{(n)} + \nu (u^{(n-1)} - 2\tilde{u}^{(n)} + \tilde{u}^{(n+1)}), \end{cases}$$

$$\rho^2 = 1 - \frac{\nu}{1-\nu} \alpha^2 - \frac{\nu}{4(1-\nu)^3} \alpha^4,$$

$$r^2 = (1-2\nu)^2 + \frac{\nu}{1-\nu} \alpha^2 + \frac{\nu}{4(1-\nu)^3} \alpha^4,$$

$$\psi = \alpha + \frac{1+2\nu}{6(1-\nu)} \alpha^3, \quad \alpha_M = 1 - \nu. \quad (6)$$

**Схема 2** Схема Адамса—Бэшфорта с фильтром.

$$\begin{cases} \tilde{u}^{(n+1)} = \tilde{u}^{(n)} - \alpha i \left( \frac{3}{2} \tilde{u}^{(n)} - \frac{1}{2} u^{(n-1)} \right), \\ u^{(n)} = \tilde{u}^{(n)} + \nu (u^{(n-1)} - 2\tilde{u}^{(n)} + \tilde{u}^{(n+1)}), \end{cases}$$

$$\rho^2 = 1 + \frac{\alpha^4}{2(1-\nu)},$$

$$r^2 = \nu^2 + \frac{(1+\nu)^2}{4} \alpha^2 - \frac{\nu^2(1+\nu)}{2(1-\nu)^2} \alpha^4,$$

$$\psi = \alpha + \frac{5+\nu}{12(1-\nu)} \alpha^3, \quad \alpha_M = 0. \quad (7)$$

Следовательно, схема неустойчива при любом  $\nu$ . Отметим, что для схемы Адамса—Бэшфорта выгоднее брать  $\nu < 0$ .

Приведем теперь общий вид одношаговой схемы 2-го порядка точности

$$u^{(n+1)} = zu^{(n)} + (1-z)u^{(n-1)} - \alpha i \left( \left(2 - \frac{z}{2}\right) u^{(n)} - \frac{z}{2} u^{(n-1)} \right). \quad (8)$$

Здесь  $z$  — произвольный параметр.

Анализ схемы (8) показывает, что только при  $z = 0$  получается устойчивая схема, которая является схемой центральных разностей. Интересно, однако, что можно получить устойчивые схемы используя одни значения  $z = z_1$  на нечетных шагах и другие значения  $z = z_2$  на четных шагах по времени. Численный анализ показал, что оптимальная, с точки зрения максимума величины  $\alpha_M$ , схема получается при  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 0$ . Соответствующая схема (9) является схемой центральных разностей на четных шагах и схемой Адамса—Бэшфорта на нечетных.

### Схема 3

$$\begin{cases} u^{(2n+1)} = u^{(2n)} - \alpha i \left( \frac{3}{2} u^{(2n)} - \frac{1}{2} u^{(2n-1)} \right), \\ u^{(2n+2)} = u^{(2n)} - 2\alpha i u^{(2n+1)}, \end{cases}$$

$$\rho^2 = 1 - \alpha^4; \quad r^2 = \frac{\alpha^2}{4},$$

$$\psi = \alpha + \frac{\alpha^3}{6}; \quad \alpha_M = \frac{2}{3}. \quad (9)$$

Здесь важно отметить, что комбинация нейтральной и неустойчивой схем дает в результате устойчивую схему с диссипативными свойствами. Возможен и обратный эффект. Оказалось, что использование на четных и нечетных шагах схем Мацуно и центральных разностей соответственно дает абсолютно неустойчивую схему.

Теперь, чтобы иметь возможность оценить полученные характеристики, рассмотрим некоторые двухшаговые схемы. Одна такая схема была построена Курихарой [1]. Поскольку в его работе не приведены интересующие нас характеристики, воспроизведем здесь эту схему.

**Схема 4** Схема чехарды—трапеций.

$$\begin{cases} u^* = u^{(n-1)} - 2\alpha i u^{(n)}, \\ u^{(n+1)} = u^{(n)} - \alpha i \left( \frac{u^{(n)} + u^*}{2} \right), \end{cases}$$

$$\rho^2 = 1 - \frac{\alpha^4}{2}, \quad r^2 = \frac{\alpha^2}{4},$$

$$\psi = \alpha - \frac{\alpha^3}{12}, \quad \alpha_M = \sqrt{2}. \quad (10)$$

В этой схеме ослабление физического решения на одном шаге в два раза меньше, чем в схеме 3. Ошибка в фазе тоже в два раза и более меньше, чем во всех одношаговых схемах, при условии выбора одного и того же шага по времени для этих схем.

Покажем, что можно построить такие двухшаговые схемы, для которых ошибки аппроксимации существенно меньше, чем для схемы 4.

**Схема 5**

$$\begin{cases} u^* = u^{(n)} - \frac{\alpha i}{2} ((1 + \xi) u^{(n)} - \xi u^{(n-1)}), \\ u^{(n+1)} = u^{(n)} - \alpha i u^*, \end{cases}$$

$$\rho^2 = 1 + \frac{\alpha^4}{4} (1 - 6\xi), \quad r^2 = \frac{\xi^2}{4} \alpha^4,$$

$$\psi = \alpha + \left( \frac{1}{6} - \frac{\xi}{2} \right) \alpha^3; \quad \alpha_M = \sqrt{\frac{2}{\xi} \left( 2 \sqrt{\frac{2\xi}{1+2\xi}} - 1 \right)}. \quad (11)$$

Здесь  $\xi$  — произвольный параметр. Стремясь минимизировать одновременно ошибку в фазе и в амплитуде физического решения, выбрали  $\xi = 1/4$ . В этом случае

$$\rho^2 = 1 - \frac{\alpha^4}{8}, \quad r^2 = \frac{\alpha^4}{64},$$

$$\psi = \alpha + \frac{\alpha^3}{24}, \quad \alpha_M = 4 \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}} \approx 1,11. \quad (12)$$

Для этой схемы величина ослабления физического решения на одном шаге в четыре раза меньше, чем в схеме Курихары. Ошибка в фазе в два раза меньше, чем в схеме Курихары и в четыре раза меньше, чем в схеме центральных разностей. Фиктивное решение практически отсутствует.

Рассмотрим, наконец, еще одну интересную схему, обобщающую в известном смысле схему Лакса—Вендроффа [4]. При построении этой схемы используется метод отфильтровывания приращений, предложенный автором в [3]. В данном случае после применения отфильтровывания функция  $\hat{\varphi}(\xi)$  переходит в  $\kappa(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$  (и соответственно  $\alpha$  переходит в  $\kappa\alpha$ ), где  $\kappa(\xi)$  — характеристика фильтра. Применим метод отфильтровывания приращений в схеме 5, используя на 1-м шаге фильтр с характеристикой  $\kappa_1$ , на 2-м — фильтр с характеристикой  $\kappa_2$  и выбрав  $\xi = \frac{1}{4}$ .

#### Схема 6

$$\begin{cases} u^* = u^{(n)} - x_1 \frac{\alpha i}{2} \left( \frac{5}{4} u^{(n)} - \frac{1}{4} u^{(n-1)} \right), \\ u^{(n+1)} = u^{(n)} - x_2 \alpha i u^*, \end{cases}$$

$$\rho^2 = 1 - x_2 (x_1 - x_2) \alpha^2 - \frac{x_1 x_2^2}{4} \left( 2x_2 - \frac{3}{2} x_1 \right) \alpha^4,$$

$$r^2 = \frac{x_1^2 x_2^2}{64} \alpha^4,$$

$$\psi = x_2 \alpha + \frac{x_2^2}{24} (9x_2 - 8x_1) \alpha^3, \quad \alpha_M > 1. \quad (13)$$

Для этой схемы аналитическое выражение для  $\alpha_M$  найти не удалось, однако неравенство  $\alpha_M > 1$  выполнялось для всех рассматриваемых фильтров, что было проверено расчетами на ЭВМ. На характеристики фильтров накладываются следующие необременительные ограничения:

$$x_1 \geq x_2 \geq 0$$

и

$$x_1(\xi) - x_2(\xi) = 0(\xi^2).$$

Выполнение первого условия обеспечивает устойчивость схемы, при выполнении второго условия схема будет иметь второй порядок точности в предположении, что  $\frac{\Delta t}{\Delta x} = \text{const}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Обратим внимание на одно важное свойство схемы 6. Как известно, из-за ошибок конечно-разностной аппроксимации каждому значению  $\alpha$  соответствуют 2 волны: длинная и короткая (так как  $\alpha(\xi) = \alpha(\pi - \xi)$ ) и обе эти волны подавляются в схемах с одинаковой интенсивностью. При использовании схемы 6 можно так подобрать характеристики фильтров  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ , что при одном и том же значе-

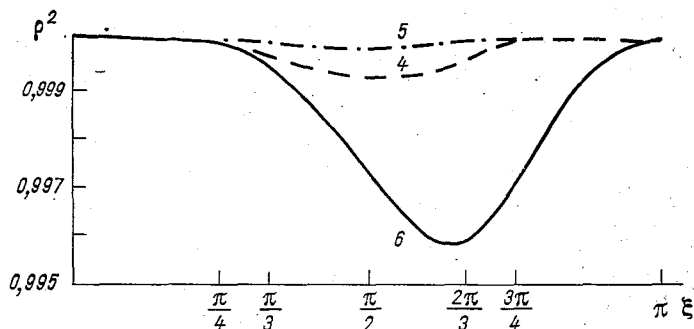


Рис. 1.

нии  $\alpha$  короткая волна будет подавляться в несколько раз интенсивнее, чем соответствующая длинная.

На рис. 1 приведено значение  $\rho^2$  как функции от  $\xi$  при  $\alpha_0 = 0,2$  для схем 4, 5 и 6. Отчетливо видно смещение максимума подавления решения в сторону коротких волн для схемы 6 по сравнению со схемами 4 и 5. Фильтры в схеме 6 имели следующие характеристики:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 1 - \frac{1}{288} [91(1 - \cos \xi) - 94(1 - \cos 2\xi) + 21(1 - \cos 3\xi)], \\ \kappa_2 &= \frac{1 + \cos \xi}{2} \left[ 1 + 2(1 - \cos \xi) - \frac{7}{24}(1 - \cos 2\xi) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Перейдем теперь к рассмотрению системы уравнений (4), описывающих гравитационные волны. Полагая  $u + \varphi = F_1$  и  $u - \varphi = F_2$ , получим из (4)

$$\dot{F}_{1,2} = \pm i\beta F_{1,2} \quad (15)$$

и, следовательно, все рассмотренные ранее схемы для уравнения (3) могут быть применены без всяких изменений и к системе (4).

Однако специфический вид этой системы, т. е. тот факт, что уравнение для каждой функции не содержит ее самой в правой части, позволяет применить при построении схем метод, предложенный

впервые Курантом, Фридрихсом и Леви в знаменитой работе 1928 г. [4]. Метод состоял в том, что значение  $u^{(n)}$ , найденное на очередном шаге по времени из первого уравнения, использовалось на том же шаге для расчета  $\varphi^{(n)}$  по второму уравнению. Применение этого метода в явной схеме позволило увеличить максимально допустимое значение  $\beta = \beta_M$  в два раза. В дальнейшем этот метод неоднократно применялся при построении экономичных схем интегрирования уравнений динамики атмосферы [5].

Поскольку уравнения адвекции и уравнения для гравитационных волн должны решаться в рамках единой схемы, попытаемся обобщить схемы 1, 3—6 для системы уравнений (4) с использованием метода Куранта, Фридрихса, Леви, с тем, чтобы увеличить значение  $\beta_M$ . Оказывается, это можно сделать не всегда. Так, при самых различных способах включения  $u$  во второе уравнение системы (4), значение  $\beta_M$  в схеме 4 никогда не превышает ранее найденного значения  $\alpha_M$ . Поэтому эту схему следует без изменений применять к системе (4) в форме (15). Однако при обобщении схем 1, 5, 6 удастся значительно увеличить  $\beta_M$  по сравнению с  $\alpha_M$ . Прежде чем анализировать получающиеся схемы, заметим, что мы не стремимся описывать гравитационные волны точно, и поэтому расчеты производятся на пределе устойчивости: при  $\beta \approx \beta_M$ . Поэтому из четырех рассматривавшихся ранее характеристик теперь будем рассматривать только  $\beta_M$ .

**Схема 7** (соответствует схеме 1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}^{(n+1)} = u^{(n-1)} - 2\beta i \tilde{\varphi}^{(n)}, \\ \tilde{\varphi}^{(n+1)} = \varphi^{(n-1)} - 2\beta i \left( \frac{u^{(n-1)} + 2\tilde{u}^{(n)} + \tilde{u}^{(n+1)}}{4} \right), \\ u^{(n)} = \tilde{u}^{(n)} + \nu \left( u^{(n-1)} - 2\tilde{u}^{(n)} + \tilde{u}^{(n+1)} \right), \\ \varphi^{(n)} = \tilde{\varphi}^{(n)} + \nu \left( \varphi^{(n-1)} - 2\tilde{\varphi}^{(n)} + \tilde{\varphi}^{(n+1)} \right), \\ \beta_M = 2(1 - \sqrt{\nu}). \end{array} \right. \quad (16)$$

Теперь обобщим схему 5, в которой  $\xi = 1/4$ .

**Схема 8**

$$\left\{ \begin{array}{l} u^* = u^{(n)} - \frac{\beta i}{2} \left( \frac{5}{4} \varphi^{(n)} - \frac{1}{4} \varphi^{(n-1)} \right), \\ \varphi^* = \varphi^{(n)} - \frac{\beta i}{2} \left( \frac{1}{2} u^{(n)} + \frac{1}{2} u^* \right), \\ u^{(n+1)} = u^{(n)} - \beta i \varphi^*, \\ \varphi^{(n+1)} = \varphi^{(n)} - \beta i \left( \frac{1}{2} u^{(n)} + \frac{1}{2} u^{(n+1)} \right), \\ \beta_M = 2 \end{array} \right. \quad (17)$$

Схеме 6 тоже можно было бы сопоставить схему 8, изменив соответствующим образом значения  $\beta$  на 1-м и 2-м шагах. Однако

применение отфильтровывания приращений позволяет нам построить более экономичную схему. Она имеет следующий вид.

Схема 9 (соответствует схеме 6)

$$\left\{ \begin{array}{l} u^* = u^{(n)} - \kappa_1 \frac{\beta i}{2} \varphi^{(n)}, \\ \varphi^* = \varphi^{(n)} - \kappa_1 \frac{\beta i}{2} u^*, \\ u^{(n+1)} = u^{(n)} - \kappa_2 \beta i \left( \frac{1}{2} \varphi^{(n)} + \frac{1}{2} \varphi^* \right), \\ \varphi^{(n+1)} = \varphi^{(n)} - \kappa_2 \beta i \left( \frac{1}{2} u^* + \frac{1}{2} u^{(n+1)} \right), \\ \beta_m = \frac{2 \sqrt{2}}{\max \kappa_i}. \end{array} \right. \quad (18)$$

Эта схема имеет 2-й, а не 1-й порядок точности, как могло бы показаться, поскольку мы определяем  $\varphi^{(n)}$  в узлах временной сетки, смещенных на  $1/4$  шага по времени вперед по отношению к узлам временной сетки, в которых мы определяем  $u^{(n)}$ .

Так же как и в схеме 6, в этой схеме максимум подавления решений смещен относительно самой быстрой волны (с максимальным  $\beta$ ) в сторону коротких волн. Заметим, что без применения отфильтровывания приращений (при  $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ ), схема 9 была бы нейтральной.

На рис. 2 изображены величины  $\rho^2 = \rho_1^2 = \rho_2^2$  и  $r^2 = \max \{r_1^2, r_2^2\}$  для схем 7, 8 как функции  $\beta$  и для схемы 9 как функции  $\kappa_2 \beta$ . Для сравнения там же приведены значения  $\rho^2$  и  $r^2$  для схемы 4. В схеме 7 было выбрано  $\nu = 0,04$ . Мы видим, что при этом значении  $\nu$ , схема 7 значительно меньше ослабляет решение, чем остальные три схемы. Вместе с тем, использование больших значений  $\nu$  нежелательно, так как при этом значительно снижается точность и уменьшается  $\beta_m$ . Сравнивая схемы 4, 8, 9, видим, что все они обладают сильными диссипативными свойствами, но схемы 8 и 9 значительно более избирательны.

Для исходной системы (2) схемы 1 и 7, 5 и 8, 6 и 9 очевидным образом объединяются, поэтому соответствующие формулы приводить не будем. Уравнения, получающиеся для собственных чисел матриц перехода, оказываются очень сложными. Однако для схемы 5, 8 критерий устойчивости удастся выразить аналитически.

При  $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < \frac{1}{3}$  он имеет вид

$$\beta_m < 2 \left[ 1 - \frac{27}{8} \left( \frac{\alpha_m}{\beta_m} \right)^2 \right]. \quad (19)$$

Заметим, что случай  $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| > \frac{1}{3}$  практически не встречается. Для проверки свойств схем был осуществлен эксперимент по численному

интегрированию уравнений баротропной жидкости в канале. Уравнения задачи, граничные условия и начальные условия для  $\varphi$ , а также схема Гриммера и Шоу для аппроксимации по пространству полностью заимствованы из работы Граммельтведта [6]. Для того, чтобы повысить начальный уровень шумов, скорости в начальный момент времени определили по геострофическим соотношениям. Кроме того, постоянным источником шума служили се-

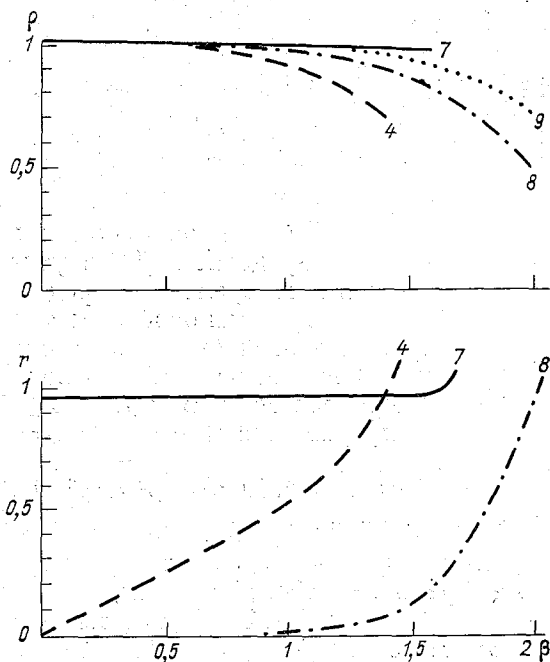


Рис. 2.

верная и южная граница области интегрирования, вдоль которых ставились некорректные граничные условия [4].

Эксперименты проводились при  $\Delta t = 20$  мин, что соответствовало в данной задаче  $\beta_0 = 1,4$ . Интегрирование велось на срок 5 сут. Схема 7,1 при  $\nu = 0,01$  и  $\nu = 0,02$  оказалась неустойчивой. Устойчивости удалось добиться, выбрав  $\nu = 0,04$ . При этом среднее по области значение дивергенции, характеризующее уровень шумов, было в 2,5 раза больше, чем в схеме 8, 5 и в 3 раза больше, чем в схеме 9, 6. Уменьшение полной энергии в схемах 7, 1 и 8, 5 и 9, 6 составило 0,12, 0,10 и 0,18 % за 5 сут. Это подтверждает устойчивость схем при интегрировании нелинейных уравнений. Схемы 8, 5 и 9, 6 особенно эффективно могут быть использованы в моделях, содержащих интенсивные источники шумов.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курихара И. Об использовании неявных и итерационных методов для интегрирования по времени уравнения волнового движения.— В кн.: Численные методы решения задач динамики атмосферы и океана. Л., 1968, с. 168—198.
2. Лилли Д. О вычислительной устойчивости численных решений нестационарных нелинейных геофизических задач динамики жидкости.— В кн.: Численные методы решения задач динамики атмосферы и океана. Л., 1968, с. 252—287.
3. Магазенков Л. Н. О построении конечно-разностных схем с использованием фильтров.— Труды ГГО, 1977, вып. 394, с. 17—28.
4. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач.— М.: Мир, 1972.— 418 с.
5. Фишер Г. Исследование конечно-разностных аппроксимаций примитивных уравнений. В кн.: Численные методы решения задач динамики атмосферы и океана. Л., 1968, с. 121—143.
6. Grammelvedt A. A survey of finite-difference schemes for the primitive equation for a barotropic fluid.— Mon. Wea. Rev., 1969, vol. 97, N 5, p. 384—404.
7. Kreiss H., Oliger J. Methods for the approximate solution of time dependent problems. GPS, N 10, 1973, p. 107.

*Д. А. Шейнин*

## О ПОСТРОЕНИИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СХЕМ С МИНИМИЗАЦИЕЙ ОШИБКИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ЗАДАННОМ УЧАСТКЕ СПЕКТРА

### 1. ВВЕДЕНИЕ

При обработке результатов численных экспериментов с моделями общей циркуляции атмосферы, а также результатов наблюдений возникает проблема интерполяции данных с исходной сетки на другую, более удобную для целей анализа, например, на широтно-долготную сетку. Поскольку одной из важнейших целей последующего анализа является исследование спектральной структуры полей метеозлементов (распределение кинетической энергии по спектру и др.), возникает необходимость в таком методе интерполяции, который возможно меньше искажал бы амплитуды Фурье-гармоник.

Наиболее прямым решением вопроса является интерполяция посредством двойного разложения Фурье на исходной сетке. Однако в случае непрямоугольной границы, а также в случае сеток с особенностями (например, типа склейки) эта задача является достаточно сложной (трудности возникают уже при попытке точно сформулировать ее).

В [3] сетка стереографической проекции, покрывающая северное полушарие, дополнялась до квадратной, и затем доопределялись заданные на ней поля; после этого и проводилось двойное разложение Фурье (тригонометрическая интерполяция). Серьезным недостатком этого метода является то, что при «доопределении» полей их спектр может, вообще говоря, существенно исказиться. Результаты численных экспериментов, приведенные в [3], не могут убедить нас в малости таких искажений, поскольку там использовалась функция тока, для которой эти искажения заведомо должны быть малы; эта функция обращалась в 0 на широте  $15^\circ$  и в связи с этим ее доопределение постоянным (нулевым) значением не обещало серьезных неприятностей. Рекомендации же авторов, касающиеся сглаживания экстраполированных полей, вряд ли можно назвать конструктивными, поскольку фактически речь идет о приближении этой экстраполяции к экстрапо-

ляции тригонометрического типа, и мы сталкиваемся с исходными трудностями.

В принципе неплохих результатов с точки зрения сохранения спектра поля можно ожидать от сплайн-интерполяции, однако в случае нерегулярной границы или сетки здесь также возникают значительные трудности.

Все это заставляет нас прийти к выводу, что при наличии упомянутых нерегулярностей сетки или границы глобальные методы интерполяции трудно реализуемы. (Под глобальными методами понимаются такие, в которых для вычисления интерполирующей функции в данной точке требуется информация о ее значениях во всех узлах сетки.) Попытки же искусственно regularизовать сетку (расширением, сокращением и др.) рискованны, так как могут привести к общей порче интерполирующей функции.

Ввиду этого представляется целесообразным обратиться к локальным методам, т. е. таким, которые для вычисления интерполирующей функции в данной точке требуют информации лишь о ее значениях в узлах, принадлежащих некоторой окрестности этой точки. При этом, поскольку локальные схемы могут иметь свободные параметры, эти параметры можно использовать в целях оптимизации, понимаемой в смысле приближения локальной схемы к глобальной, в данном случае к интерполяции типа тригонометрической.

Последнее соображение является существенным, поскольку обычные локальные схемы, например стандартная кусочно-полиномиальная интерполяция, дают плохие результаты для коротких волн ввиду медленной сходимости соответствующих рядов Тейлора.

В настоящей работе предлагается использовать полиномиальную интерполяцию, модифицированную таким образом, чтобы она была близка к тригонометрической даже для сравнительно коротких волн. Это позволяет значительно уменьшить искажения амплитуд, неизбежные в обычных полиномиальных схемах.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ СХЕМЫ

Мы остановимся на пятиточечных схемах полиномиальной интерполяции не ниже второго порядка точности. Пусть  $I$  — интерполяционный оператор (сопоставляющий интерполируемой функции  $f(x)$  интерполирующую  $If(x)$ ), тогда (см. [1]) для равномерной сетки с шагом  $h$  интерполяционная формула имеет следующий общий вид (мы учитываем условия 2-го порядка точности и условия симметрии):

$$\begin{aligned}
 If(x) = & y_0 + \left[ \alpha \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} + (1 - \alpha) \frac{y_2 + y_{-2}}{4h} \right] (x - x_0) + \\
 & + \frac{1}{2} \left[ \beta \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{h^2} + (1 - \beta) \frac{y_2 - 2y_0 + y_{-2}}{4h^2} \right] (x - x_0)^2 + \\
 & + \frac{1}{6} \gamma \frac{y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2}}{2h^3} (x - x_0)^3 + \\
 & + \frac{1}{24} \delta \frac{y_2 - 4y_1 + 6y_0 - 4y_{-1} + y_{-2}}{h^4} (x - x_0)^4, \quad (1)
 \end{aligned}$$

где  $y_i = f(x_0 + ih)$ ,  $i = -2, -1, 0, 1, 2$ ;  $x_0 - h/2 \leq x \leq x_0 + h/2$ ;  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — свободные параметры. (Для обычной параболической интерполяции  $\alpha = \beta = 1, \gamma = \delta = 0$ ; для интерполяции 4-го порядка точности  $\alpha = \beta = \frac{4}{3}, \gamma = \delta = 1$ .)

Варьируя свободные параметры, будем минимизировать среднюю квадратическую ошибку интерполяции для некоторой волны  $\sin(\omega x + \varphi)$ , усредненную по фазе  $\varphi$ . При надлежащем выборе  $\omega$  можно ожидать следующего эффекта от этой процедуры: для волн, длина которых существенно больше  $l = \frac{2\pi}{\omega}$ , качество интерполяции обеспечивается вторым порядком точности схемы (так как соответствующие ряды Тейлора быстро сходятся); для волн, длина которых близка к  $l$ , точность будет обеспечиваться проведенной минимизацией. Ясно, что  $\omega$  рискованно выбирать слишком большим, так как между двумя благоприятными спектральными интервалами может возникнуть область больших ошибок; при слишком же малом  $\omega$  мы практически не получим выигрыша по сравнению с обычной полиномиальной интерполяцией. Мы остановились на значении  $\omega = \frac{\pi}{2h}$  ( $l = 4h$ ), т. е. на волне длиной 4 шага сетки (на рис. 1 для сравнения приведена характеристика схемы с  $l = 3h$ ).

Итак, минимизируем следующую квадратичную функцию четырех переменных  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ :

$$\varepsilon_{\omega}^2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{h} \int_{x_0 - h/2}^{x_0 + h/2} [I \sin(\omega x + \varphi) - \sin(\omega x + \varphi)]^2 dx \right\} d\varphi. \quad (2)$$

Из соображений вычислительной экономичности схемы (чтобы интерполировать полиномами 2-й, а не 4-й степени) будем осуществлять минимизацию по двум параметрам вместо четырех, положив  $\gamma = \delta = 0$ . Ввиду плохой обусловленности задачи (2) это мало влияет на качество схемы (ср. кривые 1 и 2 на рис. 1). Окончательно, подставляя (1) в (2), имеем (так как  $\varphi$  произвольно, можно положить  $x_0 = 0$ ):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\omega}^2(\alpha, \beta) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \sin \varphi + \left( \alpha \frac{\sin(\omega h + \varphi) - \sin(-\omega h + \varphi)}{2h} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + (1 - \alpha) \frac{\sin(2\omega h + \varphi) - \sin(-2\omega h + \varphi)}{4h} \right) \right] x + \\ & \left. + \frac{1}{2} \left( \beta \frac{\sin(\omega h + \varphi) - 2\sin \varphi + \sin(-\omega h + \varphi)}{h^2} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (1 - \beta) \frac{\sin(2\omega h + \varphi) - 2\sin\varphi + \sin(-2\omega h + \varphi)}{4h^2} x^2 - \\
 & - \sin(\omega x + \varphi) \Big] dx \Big\} d\varphi = \frac{1}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} \left( 1 - \cos\omega x - \frac{\sin^2\omega h}{2h^2} x^2 - \right. \\
 & \left. - \beta \frac{2\sin^4\frac{\omega h}{2}}{h^2} x^2 \right) dx + \frac{1}{2h} \int_{-h/2}^{h/2} \left( -\frac{\sin 2\omega h}{2h} x - \sin\omega x + \right. \\
 & \left. + \alpha \frac{2\sin\omega h \sin^2\frac{\omega h}{2}}{h} x \right) dx. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Дифференцируя  $\varepsilon_\omega^2(\alpha, \beta)$  по  $\alpha$  и по  $\beta$  и вычислив элементарные интегралы, получаем (линейные) уравнения для  $\alpha$  и  $\beta$ .

$$4\alpha \sin\omega \sin^2\frac{\omega}{2} + \sin 2\omega - \frac{24}{\omega^2} \left( 2\sin\frac{\omega}{2} - \omega \cos\frac{\omega}{2} \right) = 0, \quad (4)$$

$$12\beta \sin^4\frac{\omega}{2} + 3\sin^2\omega + \frac{240}{\omega^3} \left[ (\omega^2 - 8)\sin\frac{\omega}{2} + 4\omega \cos\frac{\omega}{2} \right] - 40 = 0. \quad (5)$$

Отсюда, подставляя  $\omega = \frac{\pi}{2h}$ , находим численные значения

$$\alpha \approx 1,476, \quad \beta \approx 1,378. \quad (6)$$

На рис. 1 приведены значения средней квадратической относительной ошибки интерполяции как функций  $\omega h$  для различных схем (т. е. различных  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  (2)). Величина, откладываемая по оси ординат, есть средняя квадратическая ошибка, деленная на среднее квадратическое от самой волны, т. е.

$$\begin{aligned}
 & E_\omega(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \\
 & = \varepsilon_\omega(\alpha, \beta, \gamma, \delta) / \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \sin^2(\omega x + \varphi) dx \right] d\varphi} = \\
 & = \sqrt{2} \varepsilon_\omega(\alpha, \beta, \gamma, \delta), \quad (7)
 \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_\omega$  определяется формулой (2). Только что описанная схема соответствует кривой 1. Кривая 2 относится к случаю, когда  $\omega$  выбиралось также равным  $\frac{\pi}{2h}$ , но минимизация осуществлялась по всем четырем параметрам. (В этом случае имеем систему из двух линейных уравнений для  $\alpha$  и  $\gamma$  и аналогичную систему для  $\beta$  и  $\delta$ ; соответствующие выкладки не содержат принципиальных усложнений.) Как уже отмечалось, последняя схема не дает серьезных преимуществ по сравнению с исходной.

Кривая 3 соответствует  $\omega = \frac{2\pi}{3h}$  (минимизация для волны длиной 3 шага сетки), причем опять варьировались все четыре

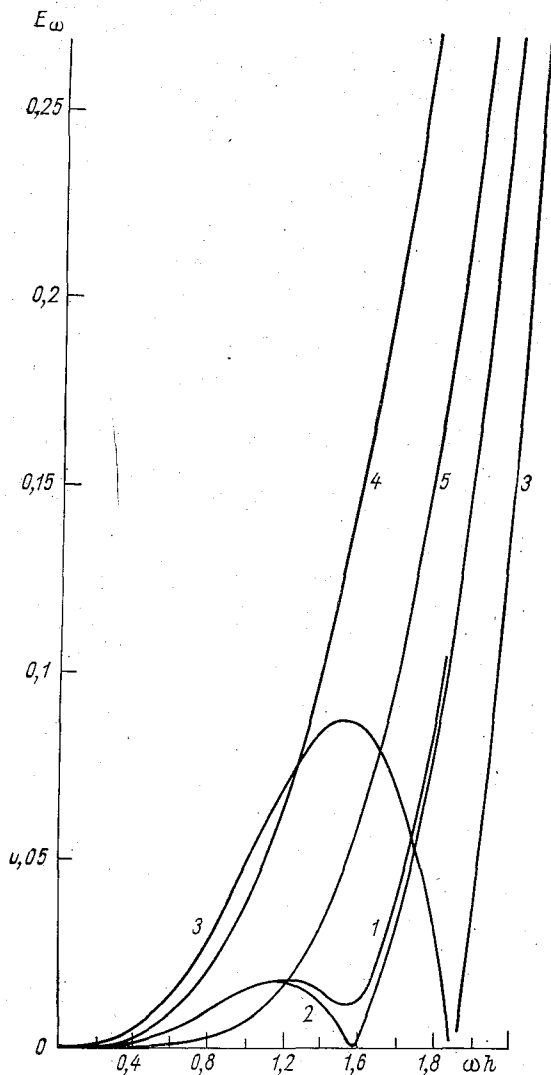


Рис. 1. Относительная средняя квадратическая ошибка интерполяции для функций вида  $\sin(\omega x + \varphi)$ , заданных на сетке с шагом  $h$  (ошибка усреднена по фазе  $\varphi$ ).

1 — схема с минимизацией по двум параметрам ошибки интерполяции волны с  $\omega = \pi/2h$  (квадратичная интерполяция); 2 — то же, но с минимизацией по четырем параметрам (интерполяция полиномом четвертой степени); 3 — то же, но с минимизацией для волны с  $\omega = 2\pi/3h$ ; 4 — стандартная параболическая интерполяция; 5 — схема четвертого порядка точности (все схемы, за исключением 4-й, пятиточечные; все, за исключением 5-й — второго порядка точности).

параметра. Здесь мы наблюдаем резкое увеличение ошибки для промежуточных длин волн.

Наконец, кривые 4 и 5 приведены для сравнения: первая из них соответствует обычной параболической интерполяции, вторая — интерполяции 4-го порядка точности (через 5 точек приводится интерполяционный полином 4-й степени). Сопоставляя все эти кривые, можно сделать основной вывод: построенная нами схема (кривая 1) дает весьма удовлетворительные результаты для гораздо более широкого диапазона длин волн, чем даже схема 4-го порядка точности; при этом с вычислительной точки зрения она является более экономичной, так как требует построения полинома всего лишь 2-й степени.

Все изложенное без труда обобщается на двумерный случай путем введения двумерного интерполяционного оператора, являющегося произведением (коммутирующих) одномерных. Именно, предположим, что значения функции заданы на прямоугольной сетке, тогда можно посредством одномерной интерполяции восстановить значения функции, скажем, на вертикальных линиях сетки. Затем, используя опять-таки одномерную интерполяцию, но по горизонтальному направлению, восстанавливаем значения функции в любой точке плоскости. (Для обычных полиномиальных схем такая интерполяция известна под названием билинейной, биквадратичной, бикубической и т. д., см. [1].) Легко видеть, что этот метод интерполяции обладает следующим свойством. Пусть  $I_x$  — оператор одномерной интерполяции по направлению  $x$ , а  $I_y$  — по направлению  $y$ , тогда двумерный оператор есть произведение  $I_x I_y$ . Пусть, далее, интерполируемая функция имеет вид  $F(x, y) = f(x)g(y)$ , тогда

$$I_x I_y F(x, y) = I_x f(x) \cdot I_y g(y). \quad (8)$$

Исходя из этого, нетрудно оценить относительную среднюю квадратическую ошибку интерполяции для двумерной волны  $\sin(\omega_1 x + \varphi_1) \sin(\omega_2 y + \varphi_2)$ . Для простоты рассматриваем квадратную сетку с шагом  $h$  и проводим выкладки для окрестности точки  $(0; 0)$ :

$$\begin{aligned} E_{\omega_1, \omega_2}^2 &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} [I_x I_y \sin(\omega_1 x + \varphi_1) \sin(\omega_2 y + \varphi_2) - \\ &\quad - \sin(\omega_1 x + \varphi_1) \sin(\omega_2 y + \varphi_2)]^2 dx dy d\varphi_1 d\varphi_2 \left/ \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{h^2} \times \right. \\ &\quad \times \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} [\sin(\omega_1 x + \varphi_1) \sin(\omega_2 y + \varphi_2)]^2 dx dy d\varphi_1 d\varphi_2 = \\ &= \frac{1}{h^2 \pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} [u(x) \sin(\omega_2 y + \varphi_2) + v(y) \sin(\omega_1 x + \varphi_1) + \\ &\quad \left. + u(x)v(y)]^2 dx dy d\varphi_1 d\varphi_2, \quad (9) \end{aligned}$$

где  $u(x) = I_x \sin(\omega_1 x + \varphi_1) - \sin(\omega_1 x + \varphi_1)$ ,

$v(y) = I_y \sin(\omega_2 y + \varphi_2) - \sin(\omega_2 y + \varphi_2)$ .

Пренебрегая в (9) членами порядка  $u^2 v$ ,  $uv^2$ ,  $u^2 v^2$  и учитывая усреднение по  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , получим оценку

$$E_{\omega_1, \omega_2}^2 \approx \frac{1}{h^2 \pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} [u^2(x) \sin^2(\omega_1 y + \varphi_2) + v^2(y) \sin^2(\omega_1 x + \varphi_1)] dx dy d\varphi_1 d\varphi_2 = E_{\omega_1}^2 + E_{\omega_2}^2, \quad (10)$$

где  $E_{\omega_1}$  и  $E_{\omega_2}$  определяются, согласно (7) и (2).

Из (10) следует, что если одномерная функция  $E_{\omega}$  имеет приемлемые значения, при некоторых  $\omega = \omega'$  и  $\omega = \omega''$ , то достаточно малым будет и значение двухмерной функции  $E_{\omega_1, \omega_2}$  при  $\omega_1 = \omega'$  и  $\omega_2 = \omega''$ . Это позволяет перенести построенную нами схему (которая определяется значениями (6) и формулой (1) вместе с равенствами  $\gamma = \delta = 0$ ) на двумерный случай вышеуказанным способом. При этом точность интерполяции двумерных Фурье-гармоник обусловлена свойствами одномерной схемы.

### 3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОСТРОЕННОЙ СХЕМЫ ДЛЯ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НА ШИРОТНО-ДОЛГОТНУЮ СЕТКУ

Двумерная интерполяционная схема, построенная в предыдущем пункте (назовем ее схемой А), испытывалась нами на примере конкретного аналитически заданного поля функции тока для интерполяции с полусферной стереографической сетки со средним шагом около  $500 \text{ км}^1$  на широтно-долготную сетку.

Желательность такого численного эксперимента обусловлена главным образом отличием Фурье-гармоник широтно-долготной сетки от Фурье-гармоник исходной, в данном случае — стереографической сетки.<sup>2</sup> С точки зрения локальной структуры гармоник, это отличие связано, во-первых, с наклоном координатных линий второй из упомянутых сеток по отношению к координатным линиям первой; во-вторых, с кривизной координатных линий широтно-долготной сетки, что особенно проявляется в полярных широтах.

Ошибки в спектре интерполирующей функции, возникающие вследствие указанных причин, трудно поддаются априорным количественным оценкам, хотя можно ожидать, что они будут до-

<sup>1</sup> Эта сетка используется в модели общей циркуляции атмосферы ГГО. Она представляет собой невыпуклый многоугольник, граница которого всюду не более чем на шаг удалена от экватора; подробнее см. в [2].

<sup>2</sup> В связи с этим может возникнуть вопрос, почему же мы стремимся приблизить нашу интерполяционную схему к Фурье-разложению на исходной сетке, а не на той, на которую хотим интерполировать. Дело в том, что решение такой задачи было бы весьма сложным и не универсальным в силу своей зависимости от структуры последней сетки. В то же время волны, длина которых много меньше размеров области, имеют весьма сходную локальную структуру для различных сеток, по крайней мере вдали от особенностей; и те и другие можно считать тригонометрическими функциями. Проблема точной интерполяции длинных волн, как уже отмечалось раньше, решается легко.



статочны малы, по крайней мере на разумном удалении от полюса. (Разумеется, они возникли бы и в случае непосредственного решения задачи Фурье-разложения на исходной сетке.)

Источником ошибок может явиться и тот факт, что после интерполяции при определении амплитуд Фурье-гармоник на кругах широты мы получаем интегралы численно, по обычной схеме дискретного Фурье-анализа [1].

Вследствие всего этого мы и провели испытание нашей схемы А в сравнении со стандартной биквадратичной (схема В) и билинейной (схема С) интерполяцией.

Поле функции тока, на котором мы испытывали схемы А, В, С, задавалось следующей формулой:

$$\psi(\varphi, \lambda) = B(\varphi) + \sum_{k=1}^M A_k(\varphi) \sin(k\lambda + \alpha_k), \quad (11)$$

где

$$B(\varphi) = 10^8 \cdot \varphi \left[ -1 + 9 \frac{\varphi}{\pi} - \frac{32}{3} \left( \frac{\varphi}{\pi} \right)^2 \right], \quad (12)$$

$\alpha_k$  — равномерно распределенные на интервале  $(0, 2\pi)$  случайные числа. Следуя [3],  $A_k(\varphi)$  мы выбирали так, чтобы для распределения кинетической энергии меридионального движения по спектру за исключением первых восьми гармоник выполнялся закон минус третьей степени:

$$A_k(\varphi) = a(\varphi) a_k, \quad a(\varphi) = 4 \cdot 10^7 \sin 2\varphi, \\ a_k = \begin{cases} k^{-1} & \text{при } 1 \leq k \leq 8, \\ 8^{3/2} \cdot k^{-3/2} & \text{при } k \geq 8. \end{cases} \quad (13)$$

(Легко видеть, что при таком выборе  $a_k$  энергии первых восьми гармоник поля меридиональной скорости одинаковы.) Формула (12) соответствует более или менее близкому к реальности меридиональному разрезу функции тока. Для  $M$  в формуле (11) мы выбирали значения 36, 24 и 12.

Результаты расчетов приводятся в табл. 1, где указаны значения угловых коэффициентов прямых, характеризующих убывание в логарифмическом масштабе меридиональной кинетической энергии  $K(k) = k^2 A_k^2(\varphi)$ , приходящейся на данный номер волны  $k$ , от

Таблица 1  
Регрессия  $\ln K = a \ln k + b$

$\varphi^\circ$	$k_m$	$L_{k_m}$	Схема А		Схема В		Схема С	
			$a$	$\sigma$	$a$	$\sigma$	$a$	$\sigma$
15	24	4,12	-2,989	0,013	-3,041	0,019	-3,374	0,084
30	24	3,10 <sup>m</sup>	-3,024	0,021	-3,177	0,051	-3,477	0,058
	18	4,13	-2,992	0,013	-3,026	0,021	-3,325	0,030
45	18	2,96	-3,104	0,044	-3,287	0,041	-3,715	0,069
	13	4,10	-2,949	0,011	-3,195	0,027	-3,496	0,028

$k = 8$  до  $k = k_m$ . (Прямые проведены по методу наименьших квадратов.) Значение этого углового коэффициента для интерполируемой функции, как это следует из (13), равно  $-3$ ; в табл. 1 приводятся его значения для интерполирующих функций, а также указаны значения соответствующих стандартных отклонений  $\sigma$ .

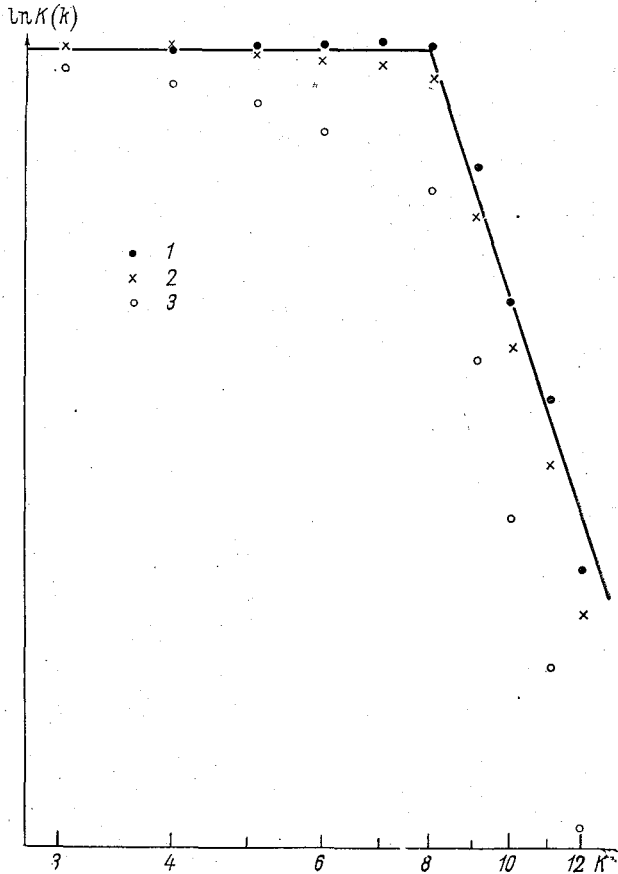


Рис. 2. Логарифм меридиональной кинетической энергии, приходящейся на Фурье-гармоники функции тока, вычисленные для интерполируемой функции тока (сплошная линия) и интерполирующих функций (1 — схема А; 2 — схема В; 3 — схема С).

В качестве  $k_m$  брались номера волн, длины которых равны трем и четырем шагам сетки стереографической проекции или  $M$  [см. (11)], если длина  $M$ -й волны превышает три шага сетки;  $L_{km}$  — длина  $k_m$ -ой волны в шагах стереографической сетки. Приводимые результаты относятся к случаю  $M = 24$ ,  $\varphi = 15, 30, 45^\circ$ .

Амплитуды Фурье-гармоник, необходимые для вычисления значений кинетической энергии соответствующих номеров волн, для

интерполируемой функции определяются по формуле (13), для интерполирующих же функций они вычислялись по значениям последних на широтно-долготной сетке с шагом  $2,5^\circ$  (144 узла на круг широты). Следует отметить, что для правильного вычисления амплитуд коротких волн широтно-долготная сетка, по крайней мере по долготе, должна быть гуще исходной, в противном случае положительные качества интерполяционной схемы могут частично обесцениваться ошибками дискретного Фурье-анализа.

Для широты  $\varphi = 60^\circ$  на рис. 2 приведены результаты с  $M = 12$  для того, чтобы длина самой короткой волны в (11), измеренной в шагах сетки стереографической проекции, не оказалась слишком малой. (Длина 12-й волны при  $\varphi = 60^\circ$  равна 2,9 шага нашей сетки.) Случай  $\varphi = 60^\circ$  отсутствует в табл. 1, так как рассчитывать коэффициенты регрессии пришлось бы всего по 5 точкам ( $8 \leq k \leq 12$ ).

На рис. 2 по оси абсцисс откладывается номер волны  $k$  в логарифмическом масштабе, а по оси ординат — логарифм меридиональной кинетической энергии, приходящейся на данную волну, для интерполируемой (сплошная линия) и интерполирующих функций.

Приведенные результаты расчетов демонстрируют существенное преимущество схемы А перед схемами В и С (содержательным, конечно, является лишь сравнение со схемой В). Вместе с тем мы должны отметить, что стандартная биквадратичная интерполяция (схема В), хотя и явно уступает схеме А, но обнаруживает точность, приемлемую во многих практически важных случаях.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенное выше построение двумерной интерполяционной схемы (схемы А) осуществлено для случая прямоугольной исходной сетки с постоянным шагом по каждому из направлений. Является, однако, очевидным обобщение на сетку произвольной структуры. Задача в любом случае сводится к простой минимизации квадратичной функции, т. е. к решению линейных уравнений. Фактически схемы с минимизацией ошибок в заданном участке спектра, так же как и схема А, строятся по тем же принципам, что и самые обычные кусочно-полиномиальные схемы, и задача, как всегда, резко упрощается для сеток с локальной симметрией, таких, как квадратная или треугольная.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1.— М.: Физматгиз, 1962.— 464 с.
2. Гидродинамическая модель общей циркуляции атмосферы/В. П. Мелешко, Б. Е. Шнейров, М. Е. Швец, Л. Р. Дмитриева-Араго и др.— См. наст. сборник.
3. Baede A. P. M., Kuipers W. J. A., Reiff J. An interpolation method, based on double Fourier expansion, for the calculation of the atmospheric kinetic energy spectra, compared with bilinear interpolation.— J. Atmos. Sci. May 1976, vol. 33, p. 764—767.

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>В. П. Мелешко, Б. Е. Шнееров, М. Е. Швец, Л. Р. Дмитриева-Араго, Г. В. Паршина, Е. П. Юшина, Л. Н. Магазенков, С. В. Богаченко, Д. А. Шейнин. Гидродинамическая модель общей циркуляции атмосферы</i>	3
<i>В. П. Мелешко, Б. Е. Шнееров, М. Е. Швец, Л. Р. Дмитриева-Араго, В. И. Пономарев, Г. В. Паршина, С. В. Богаченко, Е. П. Юшина, Л. Н. Магазенков, И. П. Гусева. Моделирование атмосферной циркуляции для января</i>	34
<i>В. П. Мелешко, М. Е. Швец, Б. Е. Шнееров, Е. П. Юшина, Г. В. Паршина, И. П. Гусева, В. И. Пономарев. Моделирование влагооборота в атмосфере для январских условий</i>	58
<i>В. А. Матюгин. Некоторые вопросы реализации гидродинамико-статистической модели прогноза погоды</i>	70
<i>Н. Н. Есакова, В. Б. Афанасьева. Гидродинамико-статистический метод прогноза среднедекадной температуры</i>	83
<i>Л. Р. Дмитриева-Араго, Л. В. Самойлова. Параметризация притока и потока коротковолновой радиации в подоблачном слое атмосферы</i>	91
<i>Л. Р. Дмитриева-Араго, Т. Н. Горбунова. Влияние стратосферного аэрозоля на восходящий поток рассеянного коротковолнового излучения</i>	96
<i>М. И. Юдин, К. В. Пятыгина. Конечно-разностные аналоги производных для широтно-долготной сетки</i>	103
<i>Л. В. Руховец. К вопросу о спектральных характеристиках вертикальной структуры атмосферных движений</i>	113
<i>Л. Н. Магазенков. Схемы интегрирования по времени уравнений движения жидкости, эффективно подавляющие высокочастотные компоненты</i>	120
<i>Д. А. Шейнин. О построении интерполяционных схем с минимизацией ошибки интерполяции в заданном участке спектра</i>	130

ТРУДЫ ГГО, ВЫП. 410

Динамика глобальных атмосферных процессов и прогноз погоды

Редактор Г. А. Солдатова. Техн. редактор Т. В. Павлова. Корректор Т. В. Прокофьева

Сдано в набор 16.05.79. Подписано в печать 18.01.80. М-23217. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бум. тип. № 1. Лит. гарн. Печать высокая. Печ. л. 9,5. Уч.-изд. л. 9,2. Тираж 580 экз. Индекс МЛ-107. Заказ 431. Цена 65 коп. Заказное.

Гидрометеиздат, 199053, Ленинград, 2-я линия, д. 23.

Ленинградская типография № 8 ЛПО «Техническая книга» Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 190000, Ленинград, Прачечный пер., 6.

