

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

ТРУДЫ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГЛАВНОЙ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ
им. А. И. ВОЕЙКОВА

Выпуск

394

МОДЕЛИРОВАНИЕ
АТМОСФЕРНОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук М. Е. ШВЕЦА
канд. физ.-мат. наук В. П. МЕЛЕШКО



ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ ЛЕНИНГРАД 1977

ББС 599

551.5(072) + 551.513

Посвящен параметризации притоков тепла в моделях общей циркуляции атмосферы и прогноза погоды, приводятся результаты численных расчетов. Рассматриваются вопросы конечно-разностной аппроксимации уравнений динамики атмосферы. Приводятся результаты исследований по численному моделированию содержания малых примесей в стратосфере.

Рассчитан на специалистов по динамической метеорологии, студентов и аспирантов соответствующей специальности.

The proceedings include papers on parameterization of heat divergence fluxes in the general circulation and weather prediction models and some results of the calculations are presented. The problems of finite-difference approximation of the hydrodynamical equations are discussed. Some results on the numerical simulation of the distribution small constituents in the stratosphere are considered. The proceedings could be of interest for specialists on dynamical meteorology and students.

*К. В. Пятыгина, М. И. Юдин,
Э. А. Коморина, В. Б. Полехин*

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ФАЗОВЫХ ПРИТОКОВ ТЕПЛА И ВЛАГИ, ВЫЗВАННЫХ ФЛУКТУАЦИЯМИ ТЕМПЕРАТУРЫ

1. В работе [1] была высказана идея учета связи между флуктуациями температуры, отклонением ветра от геострофического значения и вертикальными скоростями. На этой основе был разработан способ статистического моделирования генерации кинетической энергии горизонтальных и вертикальных движений и усовершенствована схема прогноза температуры, ветра и вертикальных токов [2—4]. Естественным продолжением работы является параметризация фазовых притоков тепла и влаги, вызванных флуктуациями температуры. (Фазовыми мы называем притоки, обусловленные фазовыми превращениями воды в атмосфере.) В настоящей работе излагается способ такой параметризации в рамках агеострофической модели [5—7]. Так же как в работах [2—4], флуктуации температуры рассматриваются как случайные величины, которые не учитываются непосредственно в модели, описываемой осредненными уравнениями динамики атмосферы.

Вместе с тем связи между флуктуациями температуры, ветра, вертикальных скоростей, точки росы, высоты верхней и нижней границ облаков, притоков тепла от конденсации и т. п. определяются из гидродинамических и частично из полуэмпирических соотношений. При этом используются результаты современной теории влагооборота в атмосфере.

Основным ограничением настоящего исследования является то, что модель среднего движения не учитывает притоков радиации, турбулентного переноса тепла и тепла конденсации, связанного со средними вертикальными скоростями. Авторы сочли целесообразным не менять одновременно с введением флуктуационных притоков основную модель среднего движения, дававшую и ранее достаточно удовлетворительные результаты [7, 2, 3]. Однако задача полного учета неадиабатических факторов рассматривается как одна из важных задач дальнейшего исследования.

2. В агеострофической модели с учетом динамического эффекта, вызванного флуктуациями температуры [2—4], температура воздуха определялась из уравнения

$$\frac{dT}{dt} = \frac{l^2 \bar{d}^2}{R \zeta} (\tilde{w} + \tilde{w}_T). \quad (1)$$

Здесь T — температура воздуха, $(\tilde{w} + \tilde{w}_T)$ — вертикальная скорость в системе координат x, y, ζ ; причем \tilde{w}_T — часть скорости, вызванная флуктуациями температуры, l — параметр Кориолиса, R — газовая постоянная, $\bar{d}^2 = (\gamma_a - \gamma) TR^2 / g l^2$ — параметр устойчивости атмосферы (γ_a — адиабатический градиент температуры, γ — вертикальный температурный градиент, g — ускорение силы тяжести).

В уравнении (1) при определении параметра \bar{d}^2 произведение $(\gamma_a - \gamma)T$ в горизонтальном направлении принималось постоянным, а по вертикали различным для тропосферы и стратосферы [8]. При наличии облачности произведение $(\gamma_a - \gamma)T$ в горизонтальном направлении уже нельзя принимать постоянным, так как величину γ_a тогда следует заменить величиной $n\gamma_{ва} + (1-n)\gamma_a$, где n — балл облачности, $\gamma_{ва}$ — влажноадиабатический градиент температуры.

При наличии облачности параметр \bar{d}^2 в уравнении (1) заменяем параметром $(\bar{d}^2 + d_n^2)$, где

$$d_n^2 = -n(\gamma_a - \gamma_{ва}) \frac{TR^2}{g l^2}.$$

Тогда уравнение (1) с учетом фазовых притоков тепла, вызванных флуктуациями температуры, принимает вид

$$\frac{dT}{dt} = \frac{l^2 \bar{d}^2}{R \zeta} (\tilde{w} + \tilde{w}_T) - \frac{n(\gamma_a - \gamma_{ва})TR}{g \zeta} \tilde{w}_T. \quad (2)$$

Так как учет флуктуаций температуры при прогнозе полей ветра, температуры, вертикальных скоростей и составляющих агеострофического ветра наиболее существенным оказался в нижнем слое атмосферы (на уровне 850 мбар) [2, 3], в настоящей работе учет фазовых притоков тепла и влаги, вызванных флуктуациями температуры, будем производить также для уровня 850 мбар.

Рассмотрим второе слагаемое правой части уравнения (2), которую обозначим через F_{wT}

$$F_{wT} = - \frac{n(\gamma_a - \gamma_{ва})TR}{g \zeta} \tilde{w}_T. \quad (3)$$

Чтобы определить разность $(\gamma_a - \gamma_{ва})$, по данным температуры поверхности 850 мбар в каждом узле сетки определяем влажноадиабатический градиент $\gamma_{ва}$. С этой целью воспользуемся табл. 9.1, приведенной в книге Л. Т. Матвеева [9].

Балл облачности n и температуру воздуха T в начальный момент считаем заданными в каждой точке сетки, а значения \tilde{w}_T — вы-

численными по агеострофической модели прогноза метеоэлементов. Умножая функцию F_{w_T} на шаг по времени $\tau = 3,6 \cdot 10^3$ с и подставляя значения постоянных, а также переходя от вертикальной скорости \tilde{w}_T в 1/с к вертикальной скорости \tilde{w}_T в см/с, получаем

$$F_{w_T} \cdot \tau = 1,288 \cdot 10^{-3} n (\gamma_a - \gamma_{ва}) T w_T. \quad (4)$$

Интегрирование уравнения (2) будем производить шагами по времени в переменных Лагранжа [7]. Поэтому дальнейшей задачей являлось определение балла облачности на каждом шаге по времени.

3. При расчете облачности и характеристик влажности воспользуемся рядом соотношений, полученных в работах Л. Т. Матвеева [9, 10], М. Е. Швеца [11] и др. Вместе с тем задание поля флуктуаций температуры как случайного поля должно привести к существенно новым результатам.

Напишем уравнение переноса влаги в атмосфере, при этом вместо удельной влажности q рассмотрим введенную М. Е. Швецом знакопеременную функцию Ψ , обладающую тем свойством, что

$$\Psi = \begin{cases} \delta, & \text{если } \Psi > 0; \\ q - q_m, & \text{если } \Psi < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Тогда основные характеристики влажности — удельную водность (δ), удельную (q) и относительную (r) влажность, дефицит удельной влажности (Δ) можно выразить следующим образом через функцию Ψ и насыщенную удельную влажность q_m :

$$\left. \begin{aligned} \delta &\equiv \frac{1}{2} (\Psi + |\Psi|); & \Delta &\equiv \frac{1}{2} (\Psi - |\Psi|); \\ q &\equiv \frac{1}{2} (\Psi - |\Psi|) + q_m; & r &\equiv \frac{1}{2q_m} (\Psi - |\Psi|) + 1. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Схема расчета с применением функции Ψ не требует дополнительной коррекции при переходе от ненасыщенного состояния к состоянию насыщения и обратно, что свойственно схемам численного прогноза влажности, в которых за искомую функцию принимается удельная влажность воздуха [12—14].

Для изменения во времени функции Ψ М. Е. Швецом [11] получено следующее уравнение:

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{b\tilde{w}}{1+X} [1 + \text{sign}(\Psi - |\Psi|)] + b\tilde{w} - \frac{g}{P_0} \frac{\partial A}{\partial \zeta}. \quad (7)$$

Обозначения в уравнении (7):

$$b = \frac{q_m}{\zeta} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} T \frac{d \ln E_m}{dT} \right)$$

($\kappa = c_p/c_v$ — отношение удельных теплоемкостей при постоянном дав-

лении и постоянном объеме); $P_0 = 1000$ мбар — стандартное атмосферное давление:

$$X = \frac{1}{\left(\frac{Lq_m}{c_p} \frac{d \ln E_m}{dT} \right)}$$

(L — скрытая теплота конденсации, E_m — упругость насыщения),

$$\text{sign } f = \begin{cases} 1, & \text{если } f > 0; \\ 0, & \text{если } f = 0; \\ -1, & \text{если } f < 0; \end{cases} \quad (8)$$

$$q_m = \frac{3,8}{\zeta} \exp \left[17,1 \frac{T-273}{T-38} \right] \text{ г/кг}, \quad (9)$$

$$E_m = 6,1 \exp \left[17,1 \frac{T-273}{T-38} \right] \text{ мбар}. \quad (10)$$

Величина $\frac{-g}{P_0} \frac{\partial A}{\partial \zeta}$ представляет собой количество влаги, выпадающей из элементарного слоя. При этом $A|_{\zeta=0} = 0$, $A|_{\zeta=1}$ — интенсивность осадков.

Для учета осадков воспользуемся следующей простой схематизацией процессов. Будем считать, что при $\Psi < \Psi_{\text{порог}}$ выпадения влаги не происходит, а при $\Psi > \Psi_{\text{порог}}$ вся сконденсировавшаяся влага (за счет вертикальных движений) выпадает в виде осадков. Тогда уравнение (7) можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\Psi}{dt} = - \frac{b\tilde{w}(1+\alpha X)}{1+X} [1 + \text{sign}(\Psi - |\Psi|)] + b\tilde{w}. \quad (11)$$

Здесь

$$\alpha = \frac{1}{2} [1 + \text{sign}(\Psi - \Psi_{\text{порог}})]. \quad (12)$$

$\Psi_{\text{порог}}$ определяется по характерным значениям удельной водности облаков.

Функцию Ψ , обусловленную вертикальной скоростью \tilde{w}_T , обозначим через Ψ' . Тогда

$$\frac{d\Psi'}{dt} = - \frac{b\tilde{w}_T(1+\alpha X)}{1+X} [1 + \text{sign}(\Psi - |\Psi|)] + b\tilde{w}_T. \quad (13)$$

Отметим, что при вычислении потоков тепла $-T'\tilde{w}_T$ за счет флуктуаций температуры (T') и вертикальной скорости (\tilde{w}_T), вызванной этими флуктуациями, несущественно, какой знак имеет \tilde{w}_T , так как при изменении знака T' меняется и знак \tilde{w}_T . Но при вычислении $d\Psi/dt$ знак \tilde{w}_T играет существенную роль: восходящие движения ($\tilde{w}_T < 0$) приближают к состоянию насыщения, нисходящие движения ($\tilde{w}_T > 0$) удаляют от состояния насыщения. Поэтому представляется необходимым ввести условное распределение положительных и отрицательных флуктуаций вертикальной скорости

в окрестности рассматриваемого узла сетки, которую будем называть ячейкой. Остановимся на простейшей схеме¹, принимая для половины ячейки среднее значение флуктуации вертикальной скорости равным $\tilde{\omega}_T$, а для другой половины — $-\tilde{\omega}_T$. Тогда для этих двух половин уравнение (11) принимает соответственно следующий вид:

$$\frac{d\Psi_1}{dt} = - \frac{b(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}_T)(1 + \alpha X)}{1 + X} [1 + \text{sign}(\Psi - |\Psi|)] + b(\tilde{\omega} + \tilde{\omega}_T); \quad (14)$$

$$\frac{d\Psi_2}{dt} = - \frac{b(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_T)(1 + \alpha X)}{1 + X} [1 + \text{sign}(\Psi - |\Psi|)] + b(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_T). \quad (15)$$

Для каждой половины ячейки находим свой балл облачности (n_1 и n_2), пользуясь эмпирическим графиком Смагоринского [20]. Затем находим балл облачности для ячейки в целом $n = 1/2(n_1 + n_2)$.

4. Рассмотрим вопрос о начальных значениях функции Ψ и значениях $\Psi_{\text{порог}}$.

Учитывая результаты исследований [15, 21], в которых показано, что вариации в начальном поле влажности относительно мало влияют на результаты последующих расчетов изменений метеорологических элементов, мы сочли целесообразным не включать на данном этапе работы сложные задачи, связанные с объективным анализом поля влажности. Вместе с тем условие равенства во всей атмосфере значения влажности в начальный момент ее значению при насыщении, как было принято в работе [15], представлялось нам слишком приближенным. Поэтому было решено связать начальное поле влажности с фактическим полем неконвективной облачности и расчетными значениями вертикальной скорости.

Как следует из равенств (5), функцию Ψ через относительную влажность r и максимальную удельную влажность q_m можно представить таким образом:

$$\Psi = q_m(r - 1). \quad (16)$$

Так как q_m в сильной степени зависит от температуры, вместо величины Ψ будем рассматривать отношение Ψ/q_m , тогда

$$(\Psi/q_m)_{\text{нач}} = r - 1. \quad (17)$$

При отрицательных вертикальных скоростях величину $(\Psi/q_m)_{\text{нач}}$ задаем согласно графику Смагоринского [20], который связывает среднюю в слое относительную влажность r с баллами неконвективной облачности (n) в данном слое. Испытание этого графика проведено в работе [16]; в работе [17] несколько исправлены коэффициенты, определяющие связь между n и r .

С учетом результатов [17] принимаем при $\tilde{\omega} + \tilde{\omega}_T \geq 0$

$$(\Psi/q_m)_{\text{нач}} = -0,4 + 0,3n_{\text{нач}}, \quad (18)$$

где n — балл облачности в долях единицы в начальный момент времени.

¹ При рассмотрении случайных полей флуктуаций температуры и вертикальной скорости вряд ли целесообразно применять более сложные модели.

Из равенства (18) следует, что

$$\begin{aligned} \text{при } n = 1 & \quad (\Psi/q_m)_{\text{нач}} = -0,10 \quad (r = 0,90); \\ \text{при } n = 0,5 & \quad (\Psi/q_m)_{\text{нач}} = -0,25 \quad (r = 0,75); \\ \text{при } n = 0 & \quad (\Psi/q_m)_{\text{нач}} = -0,40 \quad (r = 0,60). \end{aligned}$$

Заметим, что балл облачности, который рассматривается в нашей работе, относится к площади ячейки, окружающей узел сетки. Имеются основания считать, что при восходящем движении на территории ячейки балл облачности должен быть в среднем больше, чем ученный при построении графика Смагоринского. Это подтверждается тем, что по формуле (18) Ψ при $n=1$ оказывается отрицательным. Более правильно принимать, что при восходящих движениях и $n=1$ функция $\Psi = \Psi_{\text{порог}}$. Для оценки значения $\Psi_{\text{порог}}$ были рассмотрены литературные данные ряда источников. В результате мы остановились на приближенном значении $\Psi_{\text{порог}} = 0,05 q_m$. С учетом этого, а также замечая, что при $n=0$ нет оснований менять значение $\Psi_{\text{нач}}$, приходим к следующему выражению для Ψ при положительных вертикальных скоростях ($\tilde{w} + \tilde{w}_T < 0$)

$$(\Psi/q_m)_{\text{нач}} = -0,40 + 0,45n_{\text{нач}}. \quad (19)$$

5. Интегрирование уравнений (2), (14), (15), как и уравнения для определения температуры и составляющих агеострофического ветра в работах [2, 7], производилось шагами по времени в переменных Лагранжа.

Для определения индивидуальных производных на каждом временном шаге рассчитываются траектории (против направления ветра) с учетом агеострофичности и ускорения движения. Если начало координат поместить в рассматриваемую точку сетки, то

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= - \left[(u_T + u') - \frac{1}{2} l v' \tau \right] \tau; \\ y_0 &= - \left[(v_T + v') + \frac{1}{2} l u' \tau \right] \tau. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Здесь $u = u_T + u'$, $v = v_T + v'$ — значения составляющих скорости действительного ветра в рассматриваемой точке сетки в начальный момент времени; x_0, y_0 — координаты точки, выйдя из которой воздушная частица через промежуток времени τ окажется в данной точке сетки.

Определив значения функций F_{w_T} , $\Psi_{\text{нач}}$, f_{v_1} , f_{v_2} и температуры T в точках x_0, y_0 по методике, разработанной в [7], получаем значения температуры, функций Ψ_1 и Ψ_2 в точках сетки в момент $t_0 + \tau$:

$$\begin{aligned} T(x, y, \zeta_0, t_0 + \tau) &= T(x_0, y_0, \zeta_0, t_0) - \\ &- c^2(\zeta) [\omega(x_0, y_0, \zeta_0, t_0) + \omega_T(x_0, y_0, \zeta_0, t_0)] + \tau F_{w_T}(x_0, y_0, \zeta_0, t_0); \end{aligned} \quad (21)$$

$$\Psi_1(x, y, \zeta_0, t_0 + \tau) = \Psi_{\text{нач}}(x_0, y_0, \zeta_0, t_0) + \tau f_{\Psi_1}(x_0, y_0, \zeta_0, t_0); \quad (22)$$

$$\Psi_2(x, y, \zeta_0, t_0 + \tau) = \Psi_{\text{нач}}(x_0, y_0, \zeta_0, t_0) + \tau f_{\Psi_2}(x_0, y_0, \zeta_0, t_0). \quad (23)$$

В равенстве (21) первые два слагаемых представляют собой температуру, полученную без учета фазовых притоков. В равенствах (22) и (23) через f_{Ψ_1} и f_{Ψ_2} обозначены соответственно правые части уравнений (14) и (15).

Затем находим полусумму значений Ψ_1 и Ψ_2 , полученных из равенств (22), (23),

$$1/2(\Psi_1 + \Psi_2) = \Psi, \quad (24)$$

значения которой будут исходными значениями функции Ψ для следующего шага по времени. Таким образом, соотношения (18), (19) в зависимости от наличия или отсутствия облачности, а также знака вертикальных скоростей мы используем только в начальный момент времени.

В качестве краевых условий полагаем, что в течение всего срока прогноза на боковых границах области $\Psi = \Psi_{\text{нач}} = \text{const}$.

При определении балла облачности для следующего шага по времени воспользуемся графиком Смагоринского [20, 17], представленным в аналитическом виде для облаков нижнего, среднего и верхнего ярусов. С этой целью по вычисленным значениям Ψ_1 и Ψ_2 , исходя из тождеств (6), определяем относительную влажность r_1 и r_2 :

$$r_1 = \frac{1}{2q_m} (\Psi_1 - |\Psi_1|) + 1; \quad r_2 = \frac{1}{2q_m} (\Psi_2 - |\Psi_2|) + 1.$$

Для определения облачности на уровне 850 мбар (нижний ярус) воспользуемся формулами [19]

$$n = \begin{cases} 0 & \text{при } r \leq 0,60; \\ 3,25r - 1,95 & \text{при } 0,60 < r \leq 0,90; \\ 1 & \text{при } r > 0,90. \end{cases}$$

По вычисленным значениям r_1 и r_2 определяем значения n_1 и n_2 . Затем находим среднее значение балла облачности для следующего шага по времени.

Далее процесс вычислений повторяем.

6. Описанная выше схема параметризации фазовых притоков тепла и влаги, вызванных флуктуациями температуры, присоединена к агеострофической модели атмосферных процессов. Выполнен численный эксперимент.

На первом этапе работы рассмотрены 4 случая из числа проанализированных в предыдущих работах [2, 3]. Особенностью выбранных случаев (17—18 марта, 20—21 мая, 6—7 июня, 12—13 октября 1965 г.) является значительная перестройка метеополей в течение срока прогноза и значительное количество облаков на рассматриваемой территории. Оправдываемость прогноза полей ветра

Средние оценки оправдываемости прогноза полей ветра и температуры
для 12 и 4 случаев

Вариант переисчисления	Уровень, мбар															
	850				500				300				200			
	δ_v	α_v	δ_T	R_T	δ_v	α_v	δ_T	R_T	δ_v	α_v	δ_T	R_T	δ_v	α_v	δ_T	R_T
12 случаев																
Без учета u'_T, v'_T, \tilde{w}_T	3,0	0,63	1,8	0,80	5,2	0,53	1,9	0,79	8,3	0,62	1,8	0,69	7,3	0,64	2,8	0,69
С учетом u'_T, v'_T, \tilde{w}_T	2,9	0,63	1,6	0,85	5,1	0,53	1,9	0,78	8,3	0,62	1,8	0,69	7,3	0,64	2,7	0,70
4 случая																
Без учета u'_T, v'_T, \tilde{w}_T	3,0	0,63	1,9	0,74	5,4	0,57	2,0	0,75	8,6	0,65	2,3	0,66	7,7	0,64	3,0	0,69
С учетом u'_T, v'_T, \tilde{w}_T	3,1	0,63	1,7	0,80	5,3	0,57	2,0	0,75	8,6	0,65	2,3	0,66	7,7	0,64	2,9	0,70

и температуры для указанных случаев оказалась несколько ниже средней оправдываемости всех 12 случаев прогноза, проанализированных в работе [3] с учетом и без учета составляющих агеострофического ветра (u'_T , v'_T) и вертикальной скорости (\tilde{w}_T), вызванных флуктуациями температуры. Это видно из табл. 1, где даны средние оценки для 12 и 4 случаев прогноза (осреднение для одного прогноза проводится по 97 точкам сетки [7]).

В табл. 1 введены следующие обозначения: δ_v — средняя абсолютная ошибка прогноза модуля скорости ветра (м/с); α_v — отношение средней квадратической векторной ошибки прогноза ветра к среднему квадратическому значению скорости; δ_T — средняя абсолютная ошибка прогноза температуры (°С), R_T — коэффициент корреляции между фактическими и прогностическими изменениями температуры за сутки.

Таблица 2

Предвычисленные и диагностические средние квадратические значения $u'_T, v'_T, w_T, (w+w_T)$ и значения кинетической энергии K

	$t=0$	$t=24$ ч			Диагностические
		Предвычисленные			
		без учета Ψ, Ψ'	с учетом Ψ, Ψ'		
			$n=0$ или $n=1$	$\Delta n=0,1$	
u'_T м/с	0,099	0,079	0,093	0,097	0,096
v'_T м/с	0,115	0,090	0,093	0,098	0,110
w_T см/с	0,504	0,382	0,471	0,502	0,503
$(w+w_T)$ см/с	0,727	0,558	0,648	0,672	0,724
K м ² /с	51,9	49,6	49,5	49,6	45,8

Согласно данным таблицы, отобранные 4 случая являются более трудными для прогноза, чем остальные 8. Это особенно заметно при оценке прогноза температуры для уровней 850, 500, 300 мбар по коэффициенту корреляции R_T . При этом учет u'_T, v'_T, \tilde{w}_T для 4 случаев, как и для 12 также привел к повышению оправдываемости прогноза температуры на уровне 850 мбар.

7. Для определения функции Ψ/q_m в начальный момент времени (см. формулы (18) и (19)) численный эксперимент выполнен для двух вариантов задания облачности. В первом варианте вводилось упрощение, а именно наличие облачности (4—10 баллов) отмечалось единицей ($n=1$), а ее отсутствие (0—3 балла) — нулем ($n=0$). Во втором варианте облачность со станций интерполировалась вручную на точки сетки с точностью до 1 балла, т. е. с точностью до $\Delta n=0,1$.

В результате численного эксперимента установлено, что учет случайных фазовых притоков тепла и влаги привел к увеличению зна-

чений составляющих агеострофического ветра (u'_T, v'_T) и вертикальной скорости (\tilde{w}_T), вызванных флуктуациями температуры. На всех рассматриваемых уровнях средние квадратические значения этих величин к концу срока прогноза приблизились к значениям соответствующих величин, вычисленным по фактическим данным этого срока. При этом большее приближение получилось при задании начальной облачности с точностью до $\Delta n = 0,1$. Наибольший эффект, как и следовало ожидать, имеем для уровня 850 мбар. Поэтому в табл. 2 средние значения u'_T, v'_T, \tilde{w}_T для 4 случаев приводим только для этого уровня.

Суммарная вертикальная скорость ($\omega + \omega_T$) с учетом фазовых притоков тепла и влаги также увеличилась. Ее среднее квадратиче-

Таблица 3

Средние оценки оправдываемости прогноза с учетом и без учета фазовых притоков, вызванных флуктуациями температуры

Уровень, мбар	δ_v	α_v	δ_T	R_T
850	3,1	0,63	1,8 (1,7)	0,76 (0,80)
500	5,3	0,57	2,0	0,74 (0,75)
300	8,6	0,65	2,3	0,66
200	7,7	0,64	2,9	0,70

ское значение для уровня 850 мбар при указанных заданиях начальной облачности увеличилось приблизительно в 1,2 и 1,3 раза. Это до некоторой степени подтверждает вывод, полученный ранее рядом авторов [8, 22, 23 и др.], что учет конденсации приводит к заметному увеличению вертикальных движений в зонах выпадения осадков. Так, например, по данным Н. Саито [22], вертикальная скорость в зонах осадков в среднем увеличивается приблизительно в 1,5 раза. Согласно нашим расчетам вертикальная скорость увеличивается несколько меньше. Это вполне закономерно, так как в нашей схеме учитываются только случайные фазовые притоки тепла, а средние значения даны для всей оцениваемой территории независимо от наличия или отсутствия осадков.

Отметим, что кинетическая энергия горизонтальных движений в среднем осталась почти без изменений.

8. Рассмотрим, как изменилась успешность прогноза полей ветра и температуры при учете фазовых притоков тепла и влаги, вызванных флуктуациями температуры.

С этой целью обратимся к табл. 3, в которой даны средние оценки оправдываемости для 4 случаев. Если для вариантов с учетом и без учета случайных фазовых притоков оценки совпадают, то дается только одно число, если не совпадают, то в скобках даны оценки, полученные без учета этих притоков. Отметим, что средние оценки оправдываемости для обоих вариантов задания начальной облачности оказались одинаковыми.

Таблица 3 показывает, что большая часть оценок оправдываемости прогноза полей ветра и температуры осталась без изменений, Некоторые оценки несколько ухудшились. Это относится к прогнозу температуры для уровня 850 мбар.

Некоторое ухудшение успешности прогноза произошло, по-видимому, из-за того, что выбор числового параметра β , характеризующего горизонтальный масштаб возмущений, производился нами в схеме, не учитывающей случайные фазовые притоки тепла и влаги [2, 3]. Поэтому выбор параметра β в уравнении притока тепла косвенно учитывал указанные притоки, вызванные флуктуациями температуры.

В дальнейшем следует произвести уточнение параметра β .

Таблица 4

Результаты сопоставления предвычисленной и фактической облачности по градациям (число случаев)

Предвычисленные градации	$n=0$ или $n=1$						$\Delta n=0,1$		
	для станций (00А)			для ячеек (00Б)			для ячеек (10Б)		
	фактические градации, балл								
	0-3	4-10	всего	0-3	4-10	всего	0-3	4-10	всего
0-3, 4 балла	65	40	105	32	50	82	19	20	39
3, 5-10 баллов	77	304	381	19	287	306	32	317	349
Всего	128	344	486	51	337	388	51	337	388

9. Остановимся на результатах суточного прогноза полей облачности, которая в нашей схеме определяется по эмпирическому графику Смагоринского и предвычисленной относительной влажности воздуха. Такое определение производится на каждом шаге по времени. Понятно, что точность прогноза облачности определяется не только точностью графика Смагоринского и прогноза влажности, но и точностью прогноза других метеозлементов в агеострофической модели атмосферных процессов.

Сопоставление прогнозов с фактической облачностью произведено в вариантах 00А, 00Б, 10Б, 01Б, 11Б.

Здесь первая цифра 0 означает, что начальная облачность относилась всего к двум градациям: ясно (0-3 балла) или пасмурно (4-10 баллов). Вторая цифра 0 означает, что при сопоставлениях рассматривались те же градации. Первая цифра 1 означает, что начальная облачность задавалась с точностью до 1 балла ($\Delta n=0,1$). Вторая цифра 1 означает, что разность между предвычисленной и фактической облачностью определялась с точностью до 1 балла. Буква А относится к варианту, когда предвычисленные значения интерполировались на метеостанции, для которых имелись данные об облачности. В вариантах Б фактические значения облачности со станций интерполировались на точки сетки. В первом приближении

эти интерполированные значения можно рассматривать как средние баллы облачности для ячейки. В целом для 4 случаев в варианте А рассмотрено 486 станций, в варианте Б — 388 ячеек.

Таблица 4 показывает, что облачные условия предвычисляются лучше, чем условия ясной погоды. Эти результаты до некоторой степени согласуются с результатами проверки графика Смагоринского. Проверка, проведенная Л. Р. Дмитриевой и др. по фактическим данным, показала, что оправдываемость диагноза облачности (6—10 баллов) значительно выше оправдываемости диагноза облачности (0—5 баллов) [16].

Таблица 5

Результаты сопоставления предвычисленной и фактической облачности по баллам (%)

	По предвычисленным значениям относительной влажности		По диагностическим значениям относительной влажности [16]
	$n=0$ или $n=1$ (01Б)	$\Delta n=0,1$ (11Б)	
Полное совпадение	30,9	32,2	53,1
Совпадение с допуском:			
± 1 балл	53,3	54,6	68,7
± 2 балла	66,0	68,3	77,7
± 3 балла	71,6	77,3	—

Из табл. 4 получаем, что в целом для 4 случаев при задании начальной облачности $n=0$ или $n=1$ оправдываемость предвычисления облачности 0—3 балла по станциям составляет около 46%, а облачности 4—10 баллов достигает 88%, полная оправдываемость 76%. Качественный коэффициент корреляции $\rho=0,52$, а критерий оправдываемости по А. М. Обухову $Q=0,34$ [18, 19].

Для ячеек оправдываемость предвычисления облачности для градации 0—3 балла составляет около 63%, для градации 4—10 баллов равна 85%, полная оправдываемость 82%. Качественный коэффициент корреляции $\rho=0,64$, а критерий оправдываемости $Q=0,48$.

Можно указать два соображения, показывающие, что данные по ячейкам более репрезентативны, чем по метеостанциям. Во-первых, данные по станциям включают мелкомасштабные флуктуации облачности, в значительной мере отфильтрованные при определении облачности для ячеек. Во-вторых, плотность метеостанций в пространстве весьма неравномерна. Поэтому вполне закономерно, что оправдываемость прогноза облачности для ячеек заметно выше, чем для станций.

В последующих экспериментах успешность прогноза оценивалась только для точек сетки. Для варианта 10Б с уточненным заданием облачности в начальный момент успешность прогноза пасмурной

погоды (4—10 баллов) оказалась выше (94%), а ясной (0—3 балла) — ниже по сравнению с успешностью при задании начальной облачности $n=0$ или $n=1$. Полная оправдываемость прогноза облачности и качественный коэффициент корреляции выше (соответственно 87% и 0,74), а критерий оправдываемости Q ниже (0,31).

Отметим, что во многих работах облачности определяется по предвычисленным значениям дефицита точки росы, т. е. балл облачности не прогнозируется. В этих работах прогноз облачности оценивался тоже как альтернативный прогноз, т. е. проверялся факт наличия или отсутствия облачности, но из-за допусков при оценке успешности прогноза такая оценка мягче, чем проведенная нами [10, 12 и др.].

Результаты наиболее детального сопоставления предвычисленной и фактической облачности представлены в табл. 5.

Из таблицы видно, что уточнение задания облачности в начальный момент позволяет повысить успешность прогноза при всех рассмотренных допусках. При этом качество прогноза в варианте 11Б практически совпадает с качеством диагноза облачности при немногим более строгом допуске (на 1 балл). Этот вывод представляется весьма интересным и должен быть проведен на большем материале. Однако можно уже сейчас сделать вывод, что основы принятой параметризации влаго- и теплообмена правильны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Юдин М. И. К определению среднего движения в задачах долгосрочного прогноза и теории климата. — «Тр. ГГО», 1972, вып. 272, с. 3—14.
2. Юдин М. И. и др. Флуктуации температуры как источник энергии атмосферных движений. — «Метеорология и гидрология», 1975, № 1, с. 3—12.
3. Пятагина К. В., Коморова Э. А. Учет флуктуаций температуры в численном прогнозе метеозлементов. — «Тр. ГГО», 1975, вып. 353, с. 3—12.
4. Пятагина К. В., Коморова Э. А. Определение агеострофического ветра и вертикальной скорости, вызванных флуктуациями температуры и притоком тепла. — «Тр. ГГО», 1974, вып. 298, с. 38—53.
5. Юдин М. И. Предвычисление поля ветра и связанных с ним метеорологических элементов. — «ДАН СССР», 1957, т. 112, № 1, с. 49—52.
6. Юдин М. И. Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды. Л., Гидрометеиздат, 1963. 404 с.
7. Пятагина К. В. Агеострофическая модель прогноза полей метеозлементов на большом количестве уровней. — В кн.: Труды симпозиума по численным методам прогноза погоды. Л., Гидрометеиздат, 1964, с. 132—142.
8. Каган Р. Л. К учету влияния конденсационных притоков тепла и стратосферы на изменение поля давления. — «Тр. ГГО», 1959, вып. 99, с. 15—36.
9. Матвеев Л. Т. Основы общей метеорологии. Физика атмосферы. Л., Гидрометеиздат, 1965. 876 с.
10. Лушев Ю. Г., Матвеев Л. Т. Численная схема краткосрочного прогноза слоистообразной облачности. — «ДАН СССР», 1966, т. 167, № 5, с. 1042—1045.
11. Гандин Л. С., Дубов А. С. Численные методы краткосрочного прогноза погоды (Гл. VII. Прогноз влажности и облачности. Неадиабатические модели численного прогноза). Л., Гидрометеиздат, 1968. 427 с.
12. Душкин П. К., Ломоносов Е. Г., Лунев Ю. Н. Опыт численного прогноза влажности, облачности и осадков на вычислительной машине. — «Метеорология и гидрология», 1960, № 12, с. 3—10.
13. Мелешко В. П., Швец М. Е. К вопросу о прогнозе дефицита влажности. — «Тр. ГГО», 1960, вып. 114, с. 3—8.

14. Мелешко В. П. К вопросу о численном прогнозе облачности и осадков с учетом трансформации воздушной массы. — «Тр. ГГО», 1964, вып. 151, с. 32—40.
15. Кадышников В. М. Псевдоадиабатическая модель обложных осадков в краткосрочном прогнозе погоды. — «Метеорология и гидрология», 1968, № 12, с. 33—40.
16. Дмитриева-Арраго Л. Р., Колоскова Л. Ф., Орлова Л. С. Испытание графика Дж. Смагоринского для определения балла облачности. — «Тр. ГГО», 1969, вып. 236, с. 31—34.
17. Швец М. Е. и др. Численная модель общей циркуляции атмосферы на полушарии. — «Тр. ГГО», 1970, вып. 256, с. 3—44.
18. Багров Н. А. К вопросу об оценке гидрометеорологических прогнозов. — «Метеорология и гидрология», 1953, № 6, с. 13—16.
19. Обухов А. М. К вопросу об успешности альтернативных прогнозов. — «Изв. АН СССР, сер. геофиз.», 1955, № 4, с. 339—349.
20. Smagorinsky J. On the dynamical prediction of large-scale condensation by numerical methods. Physics of precipitation. Geophysical monograph. N 5. American Geophysical Union, 1960, p. 71—79.
21. Smagorinsky J., Miyakoda K., Strickler R. The relative importance of variables in initial conditions for dynamical prediction. Tellus, 1970, vol. 22, p. 141—157.
22. Saito N. On the calculation on of the vertical p-velocity concerning the wet adiabatic process.—„J. of the Met. Soc.” of Japan, 1956, vol. 34, N 5, p. 226—270.
23. Saito N. Dynamical study of precipitation. The Geophysical Magazin, 1962, vol. 31, N 2, p. 371—409.

Л. Н. Магазенков

О ПОСТРОЕНИИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФИЛЬТРОВ

Большинство конечно-разностных схем, предназначенных для интегрирования уравнений общей циркуляции атмосферы, имеют второй порядок точности аппроксимации по пространственным переменным [8]. Переход к схемам 4-го порядка точности хотя бы по горизонтальным координатам позволит получать результаты той же точности при использовании существенно меньшего числа узлов. В статье рассматривается один вариант такой схемы для баротропной системы уравнений и анализируются ее свойства.

Прежде чем строить схему аппроксимации 4-го порядка точности, проанализируем ошибки, возникающие при использовании схем 2-го порядка точности. Рассмотрим следующие нелинейные члены, которые только и встречаются в баротропной системе уравнений:

$$f^{(1)} = u \frac{\partial v}{\partial x}, \quad f^{(2)} = \frac{\partial uv}{\partial x}, \quad f^{(3)} = \frac{\partial uvw}{\partial x}. \quad (1)$$

Здесь u, v, w — произвольные периодические функции с периодом 2π , x — одна из горизонтальных координат.

Введем одномерную сетку с шагом $h = 2\pi / (2n + 1)$ и определим сеточные функции $\hat{f}_j = f(jh)$, $\hat{u}_j, \hat{v}_j, \hat{w}_j$. В общем случае однородная формула аппроксимации выражений $f^{(1)}, f^{(2)}$ может быть записана в виде

$$\hat{f}_j^{(t)} = \sum_{p=-n}^n \sum_{q=-n}^n \alpha_{pq}^{(t)} \hat{u}_{j+p} \hat{v}_{j+q} \quad (2)$$

и выражения $f^{(3)}$ в виде

$$\hat{f}_j^{(3)} = \sum_{p=-n}^n \sum_{q=-n}^n \sum_{r=-n}^n \alpha_{pqr} \hat{u}_{j+p} \hat{v}_{j+q} \hat{w}_{j+r}. \quad (3)$$

В предположении, что функции u, v, w точно определяются своими первыми n Фурье-компонентами и, следовательно, спектральное представление для $f^{(t)}$ является точным, мы можем оценить ошиб-

ку, даваемую формулами (2), (3) [1, 5]. Представим функции в виде рядов Фурье. Так,

$$f_j = \sum_{k=-n}^n f_k e^{ikjh}, \quad \text{где } f_k = \frac{1}{N} \sum_{j=-n}^n f_j e^{-ikjh}, \quad N = 2n + 1, \quad (4)$$

и аналогично представляются $\hat{u}_j, \hat{v}_j, \hat{w}_j$.

Теперь, используя (2), (4), мы можем записать следующие преобразования:

$$\begin{aligned} \hat{f}_k^{(t)} &= \frac{1}{N} \sum_{j=-n}^n e^{-ikjh} \sum_{p=-n}^n \sum_{q=-n}^n \alpha_{pq}^{(t)} \sum_{l=-n}^n u_l e^{i(l+j+p)jh} \sum_{m=-n}^n v_m e^{im(j+q)h} = \\ &= \sum_{l=-n}^n \sum_{m=-n}^n u_l v_m \sum_{p=-n}^n \sum_{q=-n}^n \alpha_{pq}^{(t)} e^{i(lp+mq)h} \cdot \frac{1}{N} \sum_{j=-n}^n e^{ij(-k+l+m)h}. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим последнюю сумму в (5). Так как $h = 2\pi/N$, то

$$\frac{1}{N} \sum_{j=-n}^n e^{ij(l+m-k)h} = \begin{cases} 1 & \text{для } l+m-k=0, \quad \pm N, \quad \pm 2N \dots; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (6)$$

Учитывая еще пределы изменения l, m, k , можно заключить, что сумма (5) отлична от нуля только для $l+m-k=0$ и $l+m-k = -N \operatorname{sign}(k) \equiv k_1 - k$. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \zeta_{lm}^{(t)} &= -i \sum_{p=-n}^n \sum_{q=-n}^n \alpha_{pq}^{(t)} e^{i(lp+mq)h}; \\ a_{lm} &= \frac{1}{m} \zeta_{lm}^{(1)}, \quad b_{lm} = \frac{1}{k} \zeta_{lm}^{(2)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Тогда можно записать выражения для $f_k^{(1)}, f_k^{(2)}$ в следующем окончательном виде:

$$f_k^{(1)} = i \sum_{l+m=k, k_1} a_{lm} m u_l v_m; \quad (8)$$

$$f_k^{(2)} = ik \sum_{l+m=k, k_1} b_{lm} u_l v_m. \quad (9)$$

Проведя совершенно аналогичные выкладки с использованием (3), (4), получим также

$$f_k^{(3)} = ik \sum_{l+m+s=k, k_1, k_2} c_{lms} u_l v_m w_s, \quad (10)$$

где

$$c_{lms} = -\frac{i}{k} \sum_{p=-n}^n \sum_{q=-n}^n \sum_{r=-n}^n \alpha_{pqr} e^{i(lp+mq+sr)h}, \quad k_2 = k + N \operatorname{sign}(k).$$

Приведем теперь точные, обозначаемые $\overline{f_k^{(l)}}$ выражения, полученные при использовании спектрального метода,

$$\overline{f_k^{(1)}} = i \sum_{l+m=k} m u_l v_m, \quad \overline{f_k^{(2)}} = ik \sum_{l+m=k} u_l v_m, \quad \overline{f_k^{(3)}} = ik \sum_{l+m+s=k} u_l v_m w_s. \quad (11)$$

Сравнивая (8) с (11), мы можем выделить два типа ошибок конечно-разностных формул. Ошибки 1-го типа — ошибки аппроксимации первой производной — приводят к тому, что $a_{lm}, b_{lm}, c_{lm} \neq 1$ при $l+m=k$. Ошибки 2-го типа — ошибки искажения спектра — приводят к появлению в выражениях (8)–(10) лишних слагаемых, когда $a_{lm}, b_{lm}, c_{lm} \neq 0$ при $l+m=k_1$ и при $l+m+s=k_1$ или k_2 . Для того чтобы оценить типичные значения этих ошибок, рассмотрим ошибки, возникающие при использовании следующих формул аппроксимации:

$$\hat{f}_j^{(1)} = \hat{u}_j \frac{\hat{v}_{j+1} - \hat{v}_{j-1}}{2h}; \quad (A)$$

$$\hat{f}_j^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{u}_{j+1} + \hat{u}_j}{2} \frac{\hat{v}_{j+1} - \hat{v}_j}{h} + \frac{\hat{u}_j + \hat{u}_{j-1}}{2} \frac{\hat{v}_j - \hat{v}_{j-1}}{h} \right); \quad (B)$$

$$\hat{f}_j^{(2)} = \frac{\hat{u}_{j+1} \hat{v}_{j+1} - \hat{u}_{j-1} \hat{v}_{j-1}}{2h}. \quad (C)$$

Определим a_{lm} в случае А. Имеем, учитывая (2), $\alpha_{01} = 1/2h$, $\alpha_{0-1} = -1/2h$ и $\alpha_{pq} = 0$ в остальных случаях. Тогда, согласно (7),

$$a_{lm} = -\frac{i}{m} \frac{1}{2h} (e^{imh} - e^{-lmh}) = \frac{\sin mh}{mh}. \quad (11')$$

Проведя аналогичные выкладки, получим в случае В

$$a_{lm} = \frac{2 \sin \frac{mh}{2}}{mh} \cos lh \cos \frac{(l+m)h}{2} \quad (12)$$

и в случае С

$$b_{lm} = \frac{\sin(l+m)h}{(l+m)h}. \quad (13)$$

Для большей наглядности представим эти функции графически. Определим на плоскости прямоугольную систему координат $m0l$, по осям которой будем откладывать номера волн, и проведем изолинии функций a_{lm}, b_{lm} . Карты изолиний, соответствующие формулам (11')–(13), изображены на рис. 1 и 2 а. На рисунках приводятся только верхняя половина каждой карты, так как они симметричны относительно прямой $l=m$. Всем взаимодействиям, дающим вклад в одну и ту же волну, соответствуют точки, лежащие на прямой $l+m=k$. Эти прямые проведены на рисунках пунктиром и у верхнего конца каждой прямой указан номер соответствующей волны.

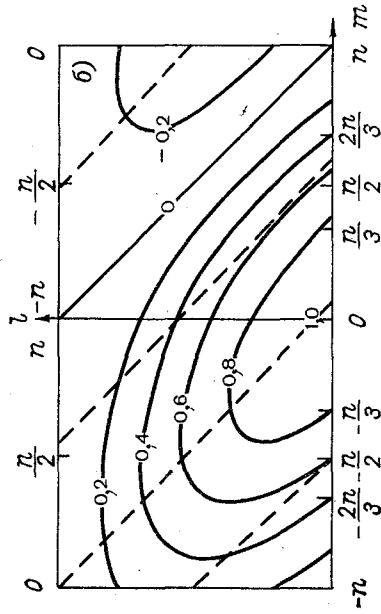
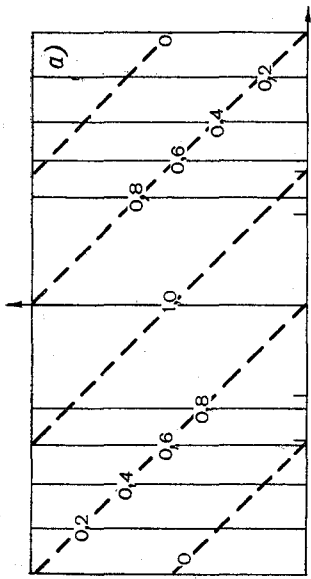


Рис. 1. Схема изолиний функции a_{lm} .
 а — для схемы А, б — для схемы В.

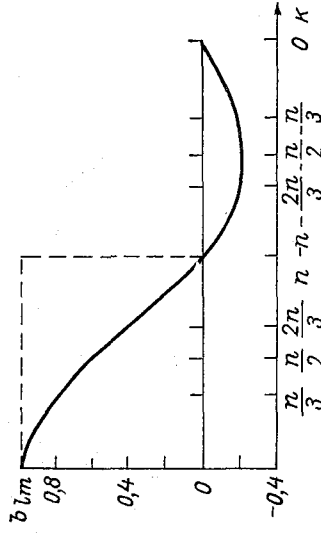
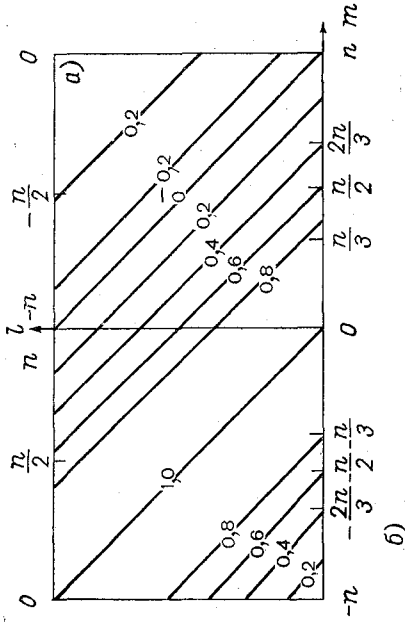


Рис. 2. Функция b_{lm} для схемы С.
 а — карта изолиний, б — распределение b_{lm} .

На рис. 2 б приведено другое возможное представление функции b_{lm} , основанное на том, что $b_{lm} = b_{l+m}$. Здесь по оси абсцисс откладываются значения k , соответствующие l, m , по оси ординат b_{l+m} . Для оценки ошибок, даваемых формулами (А) — (С), заметим, что при использовании точных формул (10) мы бы имели

$$a_{lm}, b_{lm} = \begin{cases} 1 & \text{при } |l + m| \leq n; \\ q & \text{при } |l + m| > n. \end{cases}$$

Точное значение функции b_{lm} изображено на рис. 2 б пунктиром. Из рисунков видно, что всегда существуют достаточно короткие волны, ошибка аппроксимации которых недопустимо велика. Далее будет показано, что такие волны существуют и в схемах более высокого порядка точности.

Поскольку мы не можем добиться точного описания всех волн, будем рассуждать следующим образом. Попробуем приблизить нашу схему по точности к спектральной схеме, содержащей $n_1 < n$ компонент. При этом мы будем интересоваться только ошибкой аппроксимации длинных волн, для которых $k \leq n_1$. Рассмотрим эту ошибку, ограничившись для простоты формулой аппроксимации для $f^{(2)}$, в которой $\alpha_{pq} = 0$ при $p \neq q$. В этом случае $b_{lm} = b_{l+m}$ и можно записать

$$\delta f_k^{(2)} = f_k^{(2)} - \bar{f}_k^{(2)} = ik[(b_k - 1)S_1 + b_k S_2 + b_{k_1} S_3 + b_{k_1} S_4], \quad (14)$$

где

$$S_1 = \sum_{\substack{l+m=k \\ |l|, |m| < n_1}} u_l v_m, \quad S_2 = \sum_{\substack{l+m=k \\ |l| \text{ или } |m| > n_1}} u_l v_m, \\ S_3 = \sum_{\substack{l+m=k_1 \\ |l|, |m| < n_1}} u_l v_m, \quad S_4 = \sum_{\substack{l+m=k_1 \\ |l| \text{ или } |m| > n_1}} u_l v_m.$$

Для достаточно далеко отстоящих моментов времени S_i можно рассматривать как случайные независимые величины с нулевым математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением, которое мы обозначим \bar{s}_i .

Тогда для средней квадратической величины ошибки $\overline{\delta f_k^{(2)}}$ мы получим

$$\overline{\delta f_k^{(2)}} = ik \sqrt{(b_k - 1)^2 \bar{s}_1^2 + b_k^2 \bar{s}_2^2 + b_{k_1}^2 \bar{s}_3^2 + b_{k_1}^2 \bar{s}_4^2}. \quad (15)$$

Из формулы (15) следует, что для данной схемы аппроксимации ошибка достигает своего минимального значения в случае, когда $\bar{s}_2 = \bar{s}_4 = 0$, т. е. если короткие волны с $k > n_1$ полностью отфильтрованы. Отфильтровывание коротких волн желательно также и потому, что их фиктивный рост, обусловленный ошибками аппроксимации, может привести к неустойчивости [5]. Полное отфильтровывание, предлагавшееся в ряде работ [2, 4], связано со значительными вычислительными трудностями, поэтому ограничиваются обычно включением в схему диффузионных членов, которые осуществляют час-

тичное подавление коротких волн. Но при этом подавляются и длинные волны, поэтому желательно использовать такую конечно-разностную схему, в которой для подавления коротких волн требуется минимальный коэффициент диффузии. Сравнивая рис. 1 а и б, мы видим, что в схеме А приток энергии к коротким волнам значительно больше, чем в схеме В. Поскольку этот приток длительное время может быть одного знака, для поддержания амплитуд коротких волн на постоянном уровне в схеме А потребуется взять значительно больший коэффициент диффузии, чем в схеме В. Поэтому схему В следует считать более предпочтительной, несмотря на то, что нелинейные взаимодействия длинных волн в ней описываются несколько менее точно. Заметим, что в большинстве современных численных моделей используется именно схема В [8].

Сделаем еще одно замечание относительно точности конечно-разностных схем для уравнений, записанных в адвективной и дивергентной форме. При использовании дивергентной формы уравнений возникает необходимость аппроксимации функций типа $f^{(3)}$ в (1). При этом, как следует из (10), значительно увеличивается число фиктивных взаимодействий, дополнительные фиктивные взаимодействия появляются и при определении составляющих скорости по составляющим импульса. Поэтому в формуле для ошибки аппроксимации, аналогичной формуле (15), s_3 возрастает и, следовательно, возрастает ошибка аппроксимации. Поэтому при прочих равных условиях предпочтительнее аппроксимировать уравнения, записанные в адвективной форме.

Перейдем теперь к построению формул 4-го порядка точности для $f^{(1)}$, $f^{(2)}$. Рассмотрим сначала пятиточечные формулы аппроксимации. Для $f^{(2)}$ простейшая формула 4-го порядка точности может быть записана в виде

$$f_j^{(2)} = \frac{-\hat{u}_{j+2}\hat{v}_{j+2} + 8\hat{u}_{j+1}\hat{v}_{j+1} - 8\hat{u}_{j-1}\hat{v}_{j-1} + \hat{u}_{j-2}\hat{v}_{j-2}}{12h}. \quad (16)$$

Используя снова (2), (9), можем получить

$$b_{lm} = \frac{\sin \xi}{\xi} \frac{4 - \cos \xi}{3}, \quad (17)$$

где $\xi = (l+m)h$.

Функция b_{lm} изображается кривой 2 на рис. 4. Все обозначения на этом рисунке такие же, как и на рис. 2 б. Для построения формулы аппроксимации $f^{(1)}$ применим метод неопределенных коэффициентов. Для этого положим в формуле (2) $n=2$ и потребуем чтобы, во-первых, формула давала 4-й порядок точности и, во-вторых, вклад за счет нелинейных взаимодействий в самую короткую волну был минимален. Получающаяся при этом система уравнений достаточно громоздка и мы не будем ее здесь приводить. Одним из простейших решений этой системы является формула следующего вида:

$$f_j^{(1)} = \frac{1}{48h} [-(2\hat{u}_{j+2} + \hat{u}_{j+1} + \hat{u}_j)(\hat{v}_{j+2} - \hat{v}_{j+1}) +$$

$$\begin{aligned}
 &+ (-\hat{u}_{j+2} + 15\hat{u}_{j+1} + 16\hat{u}_j - 2\hat{u}_{j-1})(\hat{v}_{j+1} - \hat{v}_j) + \\
 &+ (-2\hat{u}_{j+1} + 16\hat{u}_j + 15\hat{u}_{j-1} - \hat{u}_{j-2})(\hat{v}_j - \hat{v}_{j-1}) - \\
 &\quad - (\hat{u}_j + \hat{u}_{j-1} + 2\hat{u}_{j-2})(\hat{v}_{j-1} - \hat{v}_{j-2}).
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Для этой формулы получаем

$$a_{ml} = \frac{2 \sin \frac{\zeta}{2}}{\zeta} \cdot \cos \frac{\zeta + \eta}{2} \times \\
 \times \frac{17 \cos \frac{\eta}{2} - \cos \frac{3\eta}{2} - 2 \cos \left(\frac{3\eta}{2} + \zeta \right) - \cos \left(-\frac{\eta}{2} + \zeta \right) - \cos \left(\frac{\eta}{2} + \zeta \right)}{12}, \tag{19}$$

где $\zeta = mh$, $\eta = lh$.

На рис. 3 а приводится схема изолиний для этой формулы. Сравнивая кривые 1 и 2 на рис. 4 и рис. 3 а с рис. 1 б, мы можем сразу заметить, что при переходе к схемам 4-го порядка точности значительно возрастает вклад в короткие волны за счет нелинейных взаимодействий. Как отмечалось ранее, при этом может потребоваться

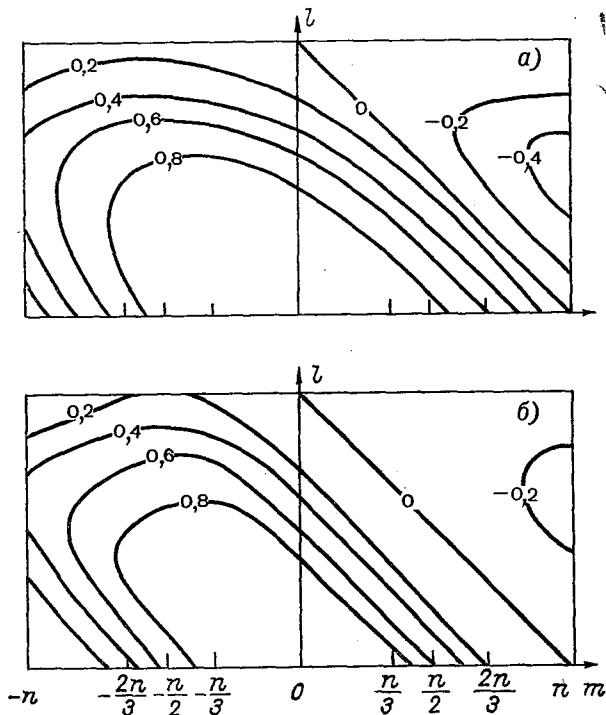


Рис. 3. Схема изолиний функции a_{lm} для схем 4-го порядка точности.

а — для схемы (18), б — для схемы (34).

значительное увеличение коэффициента диффузии и мы не получим в результате выигрыша в точности.

Для того чтобы одновременно с увеличением точности не увеличивать вклад в короткие волны, необходимо переходить к семиточечным формулам. В общем случае построение и использование семиточечных и еще более многоточечных формул чрезвычайно затруднительно. Поэтому мы рассмотрим частный случай многоточечных формул, которые могут быть построены с помощью фильтров.

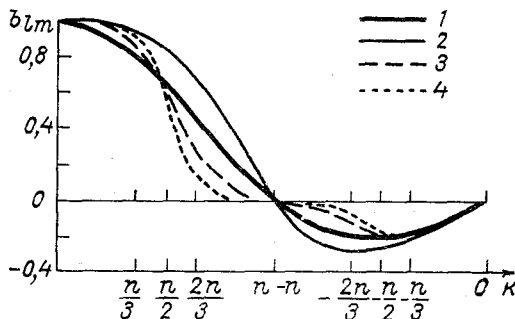


Рис. 4. Функция b_{lm} .

1 — для схемы С, 2 — для схемы (16), 3 — для схемы (29), 4 — для схемы (30).

Будем называть фильтром линейный оператор $L_{a_1 \dots a_n}$, сопоставляющий функции \hat{f}_j функцию $L\hat{f}_j$ по формуле

$$L\hat{f}_j = \left(1 - 2 \sum_{i=1}^n a_i\right) \hat{f}_j + \sum_{i=1}^n a_i (\hat{f}_{j+i} + \hat{f}_{j-i}). \quad (20)$$

Определим еще произведение двух фильтров:

$$L = L^{(1)} \cdot L^{(2)}, \quad \text{если } L\hat{f}_j = L^{(1)}(L^{(2)}\hat{f}_j). \quad (21)$$

Поскольку исследованию фильтров был посвящен ряд работ [6, 7], мы укажем без доказательства следующие их свойства:

1. Любой фильтр может быть представлен в виде произведения трех-пятиточечных фильтров.

2. Если функция f , соответствующая сеточной функции \hat{f}_j , достаточное число раз дифференцируема, то справедлива следующая формула:

$$L_{a_1 \dots a_n} \hat{f} = (f)_j + \left(h^2 \sum_{i=1}^n i^2 a_i\right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_j + h^4(\dots). \quad (22)$$

Отметим, наконец, что трехточечный фильтр $L_{1/4}$ полностью отфильтровывает самую короткую волну, которую можно представить на сетке.

Запишем теперь формулу аппроксимации для $f_j^{(2)}$ в следующем виде:

$$\hat{f}_j^{(2)} = L^{(1)} \dots L^{(p)} \tilde{f}_j^{(2)} \equiv L \tilde{f}_j^{(2)}. \quad (23)$$

Здесь $L^{(1)}, \dots, L^{(p)}$ — трех- или пятиточечные фильтры, коэффициенты которых подлежат определению, $\tilde{f}_j^{(2)}$ — трехточечная формула аппроксимации:

$$\hat{f}_j^{(2)} = \frac{1}{2h} (\hat{u}_{j+1} \hat{v}_{j+1} - \hat{u}_{j-1} \hat{v}_{j-1}). \quad (24)$$

Используя формулу

$$\hat{f}_j^{(2)} = (f^{(2)})_j + \frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial x^2} \right)_j + h^4 (\quad) + \dots, \quad (25)$$

справедливую при тех же условиях, что и формула (22), мы можем записать

$$\hat{f}_j^{(2)} = (f^{(2)})_j + \left(\frac{1}{6} + \sum_{i=1}^n i^2 a_i \right) h^2 \left(\frac{\partial^2 f^{(2)}}{\partial x^2} \right)_j + h^4 (\quad) + \dots \quad (26)$$

Отсюда получается условие, необходимое для того, чтобы формула (23) давала 4-й порядок точности аппроксимации:

$$\sum_{i=1}^n a_i i^2 + \frac{1}{6} = 0. \quad (27)$$

Кроме того, мы хотим добиться того, чтобы вклад в короткие волны был малым. Потребуем поэтому, чтобы $L^{(1)} = L_{1/4}$. Теперь мы можем определить простейший удовлетворяющий обоим условиям фильтр L в виде

$$L_{a_1 a_2} = L_{1/4} L_x. \quad (28)$$

Пользуясь определениями (20), (21), найдем $a_1 = 1/4$, $a_2 = x/4$ и из уравнения (27) $x = -5/12$. Окончательно получим следующую формулу:

$$\hat{f}_j^{(2)} = L_{1/4} L_{-5/12} \tilde{f}_j^{(2)}. \quad (29)$$

Соответствующее этой формуле b_{lm} изображается кривой 3 на рис. 4. Видно, что мы сумели значительно ослабить вклад в короткие волны, однако формула (29) менее точна, чем пятиточечная формула. Для увеличения точности следует использовать более многоточечные фильтры. Рассмотрим девятиточечный фильтр. Потребуем, во-первых, чтобы при использовании девятиточечного фильтра вклад в короткие волны был меньше, чем при использовании пятиточечного, и, во-вторых, чтобы при этом достигалась максимально возможная точность. Удовлетворяя первому требованию, положим

$L^{(1)} = L^{(2)} = L_{1/2}$. Для удовлетворения второго требования поставим условие, что в формуле (26) обращается в нуль коэффициент не только при h^2 , но и при h^4 . Из этого условия, проведя несложные выкладки, можно получить $L^{(3)} = L_{-2, 1/2}$. Теперь мы получаем следующую формулу:

$$f_j^{(2)} = L_{1/4} L_{1/4} L_{-2, 1/2} \tilde{f}_j^{(2)}. \quad (30)$$

Соответствующее b_{lm} изображается кривой 4 на рис. 4. Отметим, что для всех $k > n/2$ кривая 4 лежит ниже кривой 3. В то же время точность описания длинных волн, для которых $k < n/3$, формулой (30) не ниже, чем пятиточечной формулой. Отметим еще, что дальнейшее усложнение структуры фильтров вряд ли целесообразно до тех пор, пока мы не знаем, преобладает в формуле (15) первый член или последующие, т. е. не знаем, стремиться нам повысить точность формулы или стремиться ослабить вклад в короткие волны.

Рассмотрим теперь многоточечные формулы аппроксимации для $f^{(1)}$. Ясно, что для $f_j^{(1)}$ могут быть использованы те же формулы, что и для $f_j^{(2)}$, но только при условии, что для $\tilde{f}_j^{(1)}$ будет справедливо равенство, аналогичное равенству (25). Построим соответствующую формулу, используя метод неопределенных коэффициентов. Используя свойства симметрии, мы можем записать:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_j^{(1)} = & (a\hat{u}_{j+1} + b\hat{u}_j + c\hat{u}_{j-1}) \frac{\hat{v}_{j+1} - \hat{v}_j}{h} + \\ & + (c\hat{u}_{j+1} + b\hat{u}_j + a\hat{u}_{j-1}) \frac{\hat{v}_j - \hat{v}_{j-1}}{h}. \end{aligned} \quad (31)$$

Раскладывая \hat{u} , \hat{v} в ряд Тейлора в окрестности точки j , мы получим

$$\begin{aligned} \tilde{f}_j^{(1)} = & 2(a + b + c) \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right)_j + h^2 \left[(a + c) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right)_j + \right. \\ & \left. + (a - c) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)_j + \frac{a + b + c}{3} \left(u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right)_j \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Сравнивая (32) и (25), находим, что $a + c = 1/6$, $a - c = 1/3$, $a + b + c = 1/2$. Единственным решением этой системы является $a = 1/4$, $c = -1/12$, $b = 1/3$, и мы получаем окончательно

$$\begin{aligned} \tilde{f}_j^{(1)} = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{3\hat{u}_{j+1} + 4\hat{u}_j - \hat{u}_{j-1}}{6} \frac{\hat{v}_{j+1} - \hat{v}_j}{h} + \right. \\ & \left. + \frac{-\hat{u}_{j+1} + 4\hat{u}_j + 3\hat{u}_{j-1}}{6} \frac{\hat{v}_j - \hat{v}_{j-1}}{h} \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

Таким образом, задача построения многоточечных формул 4-го порядка точности решена нами и для $f^{(1)}$. На рис. 3 б приведена схема изолиний функции a_{lk} , соответствующей формуле

$$f_j^{(1)} = h_{1/4} L_{-5/12} \tilde{f}_j^{(1)}. \quad (34)$$

Сравнение рис. 3 а и б показывает, что формула (34) имеет почти такую же точность, как и значительно более сложная формула (18) и, кроме того, обеспечивает значительное уменьшение вклада в короткие волны.

Хотя все приведенные в статье формулы были получены для функций, зависящих от одной переменной, они легко могут быть использованы и при аппроксимации двумерных уравнений. Для того чтобы фильтр по одной координате мог быть применен ко всей правой части, достаточно к членам, не содержащим дифференцирования по этой координате, применить фильтр $L_{1/6}$.

В заключение следует отметить, что приведенные здесь формулы строились без учета свойств сохранения системы. В свое оправдание автор может только сослаться на ряд работ [3, 5], в которых было показано, что до тех пор, пока решение остается гладким, свойства сохранения практически не нарушаются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л и л л и Д. О вычислительной устойчивости численных решений нестационарных нелинейных геофизических задач динамики жидкости.— В кн.: Численные методы решения задач динамики атмосферы и океана. Л., Гидрометеоздат, 1968, с. 252—287.
2. Ф и л л и п с Н. Пример нелинейной вычислительной неустойчивости.— В кн.: Атмосфера и океан в движении. М., Изд. иностр. лит., 1963, с. 322—326.
3. Ш у м а н Ф. Г., В а н д е р м а н Л. В. Конечно-разностная схема и гармоничные условия для баротропного прогноза с помощью полных уравнений.— В кн.: Лекции по численным методам краткосрочного прогноза погоды. Л., Гидрометеоздат, 1963, с. 466—480.
4. Ю д и н М. И. К определению среднего движения в задачах долгосрочного прогноза и теории климата. — «Тр. ГГО», 1972, вып. 315, с. 3—14.
5. G r a m m e l t v e d t A. A survey of finite-difference schemes for the primitive equation for a barotropic fluid.—Mon. Weather Rev, 1969, vol. 97, N 5, p. 384—404.
6. S h a p i r o R. Smoothing, Filtering, and Boundary Effects.—Reviews of Geophysics and Space Physics, 1970, vol. 8, N 2; p. 359—387.
7. S h u m a n F. G. Numerical methods in weather prediction: II. Smoothing and filtering.—Mon. Weather Rev., 1957, 85. p. 357—361.
8. Modelling for the first CARP global experiment, 1974, GPS, N 14, 262 p.

В. П. Мелешко, Д. А. Шейнин

ОШИБКИ АППРОКСИМАЦИИ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ БАРИЧЕСКОГО ГРАДИЕНТА В σ -СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

1. **Введение.** Как известно в σ -системе координат сила барического градиента в уравнениях движения включает два члена: горизонтальную производную от геопотенциала вдоль σ -поверхности и производную от давления вдоль поверхности $\sigma=1$. Соответствующий член в проекции на ось x имеет вид

$$GR_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{RT}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial x}. \quad (1)$$

Здесь Φ — геопотенциал, T — температура, p_s — давление у земли, R — газовая постоянная.

Над крутыми склонами гор каждое из слагаемых в правой части (1) намного больше их суммы. Другими словами, результирующий градиент получается как малая разность двух больших величин и, если не предпринимать специальных мер, ошибка аппроксимации в конечно-разностном аналоге градиента может быть такой же, как и значение самого градиента.

Причиной появления малой разности является тот факт, что вдоль склона горы каждое из слагаемых в (1) неявно содержит большую гидростатическую составляющую давления, обусловленную его изменением с высотой. Эта добавка, будучи в ряде случаев больше, чем сам горизонтальный градиент, входит в оба члена с разными знаками и при их сложении должна полностью исключаться. Неполное ее исключение в разностном аналоге и является причиной больших ошибок.

На фиктивный рост кинетической энергии, вызванный указанными погрешностями, впервые было обращено внимание в работе [6]. Эксперименты, выполненные Курихарой [3], показали, что в стратосфере над крутыми склонами гор развиваются фиктивные вихри, а в поле наземного давления появляются мелкомасштабные возмущения, которые со временем растут и искажают реальное поле. В работе [4] эти ошибки уменьшались путем вычисления барического градиента в p -системе координат. Гари [2] оценивал ошибки

вычисления барического градиента для аналитически заданных распределений температуры. Согласно его оценкам, применение обычных конечно-разностных схем второго порядка точности приводит к тому, что при наличии гор ошибки аппроксимации барического градиента оказываются на порядок больше по сравнению с ошибками без гор. Кроме того, ошибки зависят также от способа вычисления геопотенциала из уравнения статики. Если интеграл вычисляется по аргументу $\ln \sigma$, вместо σ , то ошибки оказываются заметно меньшими. В последнее время был предложен ряд других способов вычисления горизонтальных градиентов [1].

В настоящей работе проводится сравнительный анализ нескольких известных схем. Сравнения выполняются на примерах с аналитически заданными распределениями температуры.

2. Конечно-разностные схемы аппроксимации барического градиента. Для удобства дальнейшего изложения введем известные операторы суммы и разности

$$\bar{A}^x = \frac{1}{2} \left(A_{i+\frac{1}{2}} + A_{i-\frac{1}{2}} \right), \quad \delta_x A = \left(A_{i+\frac{1}{2}} - A_{i-\frac{1}{2}} \right) / \Delta x$$

(здесь используются обозначения $A_j = A(x_j)$, $x_j = j\Delta x$), так что

$$\delta_x \bar{A}^x = (A_{i+1} - A_{i-1}) / 2 \Delta x.$$

Рассматриваются четыре схемы конечно-разностного представления GR_x .

Схема А. Аппроксимация центральными разностями.

$$GR_x = \delta_x \bar{\Phi}^x + \frac{RT}{p_s} \delta_x \bar{p}_s^x. \quad (2)$$

Как будет показано ниже, данная схема практически непригодна для расчетов, так как ошибки в градиентах оказываются слишком большими.

Схема В. Аппроксимация с усредненной температурой

$$GR_x = \delta_x \bar{\Phi}^x + R \bar{T}^x \delta_x \ln p_s^x. \quad (3)$$

В работе [1] показано, что разностная форма (3) точно равна дифференциальному выражению (1), если температуру представить в виде

$$T = a \ln p + b, \quad (4)$$

где a и b — константы.

Преимущество аппроксимации (3) состоит в том, что она выполняется для широкого семейства профилей типа (4) и приводит к существенно меньшим ошибкам для других профилей.

Схема С. Вычисление GR_x на σ -поверхности в изобарической системе координат. Как известно, в p -системе координат сила барического градиента представлена одним членом

$$GR_x = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_p \approx (\delta_x \bar{\Phi}^x)_p. \quad (5)$$

Здесь индекс p означает, что производная от Φ берется вдоль p -поверхности. Если основные уравнения записаны в σ -системе координат, то в процессе решения задачи на каждом шаге по времени и в каждом узле сетки необходимо производить интерполяцию Φ на p -поверхности, например, используя уравнение статики. Подробное описание процедуры интерполяции дано в работе [4]. Следует иметь в виду, что на верхнем и нижнем уровнях над склонами гор геопотенциал вычисляется путем экстраполяции с искомым σ -поверхностей. Кроме того, в тех разностных схемах, для которых выполняется закон сохранения энергии, в результате интерполяции этот закон может нарушаться.

Схема Д. Исключение фона. GR_x вычисляется для отклонений от характерных средних профилей

$$\Phi' = \Phi - \bar{\Phi}, \quad p'_s = p_s - \bar{p}_s, \quad T' = T - \bar{T} \quad (6)$$

при условии, что

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + \frac{R\bar{T}}{p_s} \frac{\partial \bar{p}_s}{\partial x} \equiv 0. \quad (7)$$

При этом фоновые значения должны выбираться таким образом, чтобы гидростатическая составляющая, которая в общем случае может присутствовать в выражении (1), вычисляемом по отклонениям от фона, была малой. Тем самым ее вклад в ошибку аппроксимации при замене дифференциального оператора конечно-разностным будет минимальным. С учетом (6) и (7) получаем

$$GR_x = \frac{\partial \Phi'}{\partial x} + RT \frac{\partial \ln \bar{p}_s}{\partial x} + RT' \frac{\partial \ln \bar{p}_s}{\partial x}. \quad (8)$$

Здесь

$$\bar{p}_s = 1 + \frac{p'_s}{p_s}.$$

Определим фон с помощью следующего соотношения [5]:

$$\bar{\Phi} = A - B(\sigma \cdot \bar{p}_s)^\kappa, \quad (9)$$

где A, B, κ — константы. При $\sigma = 1$

$$gh_s = A - B\bar{p}_s^\kappa, \quad (10)$$

h_s — высота горы, g — ускорение силы тяжести.

Из уравнения статики имеем

$$\bar{T} = \frac{\kappa B}{R} (\sigma p_s)^\kappa. \quad (11)$$

Численные значения A и B можно найти, зная \bar{T} и \bar{p} на уровне моря.

Используя схему центральных разностей, соотношение (8) перепишем в виде

$$GR_x \approx \delta_x \overline{\Phi}^x + RT \delta_x \overline{\ln \bar{p}_s^x} + RT' \delta_x \overline{\ln \bar{p}_s^x}. \quad (12)$$

Филлипс [6] предложил в качестве фона брать адиабатический профиль температуры ($\kappa = R/c_p$). Оценки показывают, что погрешности в GR_x оказываются меньшими, если для всей атмосферы берется $\kappa = 0,6 R/c_p$.

3. Особенности ошибок аппроксимации. При вычислении GR_x по схемам А, В, С и D возникают ошибки двух родов:

а) ошибка, вызванная заменой горизонтальной производной конечными разностями (ошибка первого рода);

б) ошибка, вызванная тем, что геопотенциал определяется из уравнения статики приближенно с помощью интерполяционно-квадратурных формул. Обозначим ее через δ_2 (ошибка второго рода).

Дать априорную количественную оценку ошибок первого рода для общего случая трудно, поэтому можно ограничиться лишь качественной оценкой: чем больше гидростатическая составляющая в разностных формулах (2), (3) и (12), тем больше ошибка аппроксимации. Легче оценить ошибку второго рода. Здесь и в дальнейшем для определенности будем считать, что геопотенциал вычисляется по формуле трапеций.

Как известно, если функция $f(\xi)$ имеет на отрезке $[\xi_0, \xi_0 + h]$ конечную вторую производную, то ошибка при замене интеграла на площадь трапеции равна $f''(\hat{\xi}) \cdot h^3/12$, где $\hat{\xi}$ — некоторая координата в рассматриваемом интервале.

При вычислении геопотенциала по формуле трапеций

$$\Phi_k = \Phi_{K+1} + \frac{R}{2} \sum_{l=k}^K (T_l + T_{l+1}) \ln \frac{\sigma_{l+1}}{\sigma_l}, \quad (13)$$

где K — общее число уровней, $k = 1, 2, \dots, K$, ошибка вычисления интеграла на k -ом уровне

$$Er_k = \frac{R}{12} \sum_{l=k}^K \frac{\partial^2 T}{\partial (\ln \sigma)^2} \Big|_{\sigma=\sigma_l^*} \cdot \left(\ln \frac{\sigma_{l+1}}{\sigma_l} \right)^3. \quad (14)$$

Здесь $\sigma_l \leq \sigma_l^* \leq \sigma_{l+1}$.

Вторую производную от температуры после преобразований представим в виде

$$\frac{\partial^2 T}{\partial (\ln \sigma)^2} = \left(\frac{RT}{g} \right)^2 \left[\frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right].$$

Если градиент температуры $-\partial T/\partial z$ оценить сверху как $10^{-2} \text{ }^\circ\text{C/м}$ и $T \approx 300 \text{ К}$, то ошибка за счет первого слагаемого будет порядка

$$5 \cdot 10^2 \cdot \sum_{l=k}^K \left(\ln \frac{\sigma_{l+1}}{\sigma_l} \right)^3 \text{ м}^2/\text{с}^2.$$

Например, при $K=7$ и равномерном распределении по σ точек сетки ошибка может составлять 0,1—0,2% от вычисляемого геопотенциала. Что касается второго члена, то оценка его несколько затруднительна. Если положить, что $\partial T/\partial z$ равномерно изменяется от 10^{-2} °C/м в тропосфере до нуля в нижней стратосфере, то ошибка будет такого же порядка.

В аппроксимации по схеме С ошибка δ_2 присутствует сложным образом; в схемах А, В и D

$$\delta_2 = \delta_x \overline{Er}_k^x. \quad (15)$$

Так как горизонтальная неоднородность температуры значительно меньше вертикальной, величина δ_2 может сильно зависеть от наклона σ -поверхности, т. е. в конечном счете от рельефа. Наиболее неблагоприятным является случай, когда градиент температуры или его производная сильно неоднородны по вертикали. Как известно, вблизи тропопаузы характерен излом в вертикальном профиле температуры; вертикальный градиент изменяется от $(0,5 \div 0,7) \cdot 10^{-2}$ °C/м в тропосфере до нуля в стратосфере. При наличии излома, т. е. когда $\partial T/\partial z$ терпит разрыв, ошибка на шаге интегрирования становится пропорциональной не кубу, а квадрату этого шага.

В предположении, что вертикальный градиент температуры меняется скачком на значение, указанное выше, и что этот скачок имеет место примерно в середине k -го слоя (наиболее неблагоприятный случай), оценка ошибки дает

$$\delta_c Er \approx 2 \cdot 10^3 \cdot \left(\ln \frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k} \right)^2 \text{ м}^2/\text{с}^2. \quad (16)$$

При малом наклоне σ -поверхности ошибки типа (16) в основном взаимно компенсируются и, как правило, не приводят к заметному росту ошибок второго рода. При значительном наклоне σ -поверхности, т. е. вдоль склона горы, Er_{ki+1} и Er_{ki-1} заметно различаются по значению, что и приводит к росту δ_2 .

Что касается схемы С, то, как уже отмечалось, ошибка второго рода входит к эту схему более сложным образом. При отсутствии горы наклон σ -поверхностей примерно такой же как и p -поверхностей. Поэтому оба слагаемых в конечной разности (5) будут вычислены из уравнения статики примерно с одинаковыми погрешностями, которые в основном взаимно уничтожаются. При наличии горы ошибка второго рода δ_2 для схемы С независимо от того, как ведет себя вертикальный градиент температуры, может быть значительной. Пусть для определенности высота земной поверхности является возрастающей функцией x ($\partial h/\partial x > 0$). Тогда $\sigma_h \frac{psi}{psi+1} > \sigma_h \frac{psi}{psi-1}$ и в результате Φ_{ki+1} и Φ_{ki-1} окажутся в разных вертикальных интервалах в σ -системе координат. Тем самым Φ_{ki-1} будет содержать заведомо некоррелированную и, по-видимому, большую ошибку за счет накопления ошибки при интегрировании уравнения статики. Следовательно, значение ошибки при вычислении барического градиента по формуле (5) также будет большим. Помимо указанных

источников ошибок, схема С включает и ошибки интерполяции или экстраполяции в зависимости от положения искомым: уровней, для которых вычисляется барический градиент.

4. **Вертикальные профили температуры.** Следуя Гари [2], распределение давления с высотой будем задавать с помощью формул:

$$p(x, z) = p_1(z) \cdot F_1(x, z);$$

$$p_1(z) = p_0 \exp \left\{ -\frac{g}{R} \int_0^z \frac{d\xi}{\bar{T}(\xi)} \right\};$$

$$F_1(x, z) = 1 + \frac{\delta p}{p_0} F_2(z) \sin mx, \quad (17)$$

где функция F_2 в одних случаях вычислялась по формуле

$$F_2(z) = \begin{cases} c_1 + c_2 [1 - (z - z_1)^2 / z_1^2], & 0 \leq z \leq z_1; \\ c_1 + c_2, & z_1 \leq z, \end{cases} \quad (18)$$

а в других случаях по формуле

$$F_2(z) = \frac{c_1 + c_2}{2} = \text{const.} \quad (19)$$

$m=6$.

Здесь $p_0=1013$ мбар, $\sigma p=13,3$ мбар, $c_1=0,75$, $c_2=1,5$, $z_1=18 \cdot 10^3$ м. Нетрудно видеть, что если $dF_2/dz \neq 0$, как это имеет место в формуле (18), то функция \bar{T} не является температурой, так как она не удовлетворяет уравнению статики

$$T(x, z) = -\frac{gp(x, z)}{R \frac{\partial p}{\partial z}}.$$

Вычислив $\partial p / \partial z$, получим

$$T(x, z) = \frac{\bar{T}(z)}{1 + \varepsilon(x, z)}, \quad (20)$$

где

$$\varepsilon(x, z) = \begin{cases} \frac{2R\bar{T}}{g} \frac{\delta p}{p_0} \frac{\sin mx}{F_1(z)} \frac{z - z_1}{z_1^2}, & z \leq z_1; \\ 0, & z \geq z_1. \end{cases}$$

Если $dF_2/dz=0$, как это имеет место в формуле (19), то

$$T(x, z) = \bar{T}(z) \quad (21)$$

и температура в этом случае является горизонтально однородной. Формула (20) применяется с целью ввести горизонтальную неоднородность вдоль склона горы. Заметим, однако, что ввиду малости $\varepsilon(x, z)$ (она меняется от $2 \cdot 10^{-2}$ при $z=0$ до 0 при $z=z_1$) вертикаль-

ное распределение температуры в первом приближении может описываться соотношением (21).

В качестве $\bar{T}(z)$ брались четыре профиля (первые три из них приводятся в [2]), каждое из которых позволяет точно через элементарные функции получить интеграл $p_1(z)$ (17).

Профиль 1.

$$T(x, z) = \frac{T_0}{1 + \varepsilon(x, z)}, \quad T_0 = 288 \text{ К.} \quad (22)$$

Это распределение температуры близко к изотермическому.

Профиль 2.

$$T(x, z) = \frac{T_0 - \gamma z}{1 + \varepsilon(x, z)}. \quad (23)$$

Здесь $\gamma = 0,65 \cdot 10^{-2}$ град/м.

Данное распределение температуры близко к линейному. Оно характерно для тропосферы, в стратосфере этот профиль далек от реального.

Профиль 3.

$$T(x, z) = \frac{\bar{T}_3(z)}{1 + \varepsilon(x, z)}; \quad (24)$$

$$\bar{T}_3(z) = \begin{cases} (T_0 - T_1) \left(\frac{z}{z_2}\right)^2 - 2(T_0 - T_1) \frac{z}{z_2} + T_0, & 0 \leq z \leq z_2; \\ T_1, & z_2 \leq z. \end{cases}$$

Здесь $z_2 = 15 \cdot 10^3$ м, $T_1 = 218$ К.

Этот профиль близок к параболическому в тропосфере и нижней стратосфере (для средних широт), сопряженному на высоте z_2 с изотермическим. Сопряжение таково, что первая производная от температуры остается непрерывной в точке z_2 , а вторая производная терпит разрыв.

Этот профиль представляет интерес тем, что, во-первых, он является близким к реальному как в тропосфере, так и в нижней стратосфере, а во-вторых, он позволяет исследовать влияние разрыва в $\partial^2 T / \partial z^2$ на ошибку второго рода.

Следует отметить, что на высоте $z_1 = 18 \cdot 10^3$ м все три описанные профиля имеют излом, поскольку такой излом имеет функция $\varepsilon(x, z)$. Но ввиду малости ε этот излом сильного влияния на ошибку аппроксимации не оказывает.

Представляет интерес поведение ошибки δ_2 на верхних уровнях при σ , близких к нулю, в «чистом виде», когда на эту ошибку не накладываются никакие особенности в профиле температуры. С другой стороны, необходимо, чтобы этот профиль был близок к реальному. С этой целью нами был рассмотрен еще один профиль.

Профиль 4.

$$T(x, z) = \tilde{T}_4(z) = \begin{cases} - (T_0 - T_1) \left(\frac{z}{z_2}\right)^3 + 3(T_0 - T_1) \left(\frac{z}{z_2}\right)^2 - \\ - 3(T_0 - T_1) \frac{z}{z_2} + T_0, & 0 \leq z \leq z_2; \\ T_1, & z_2 \leq z. \end{cases} \quad (25)$$

Как следует из (25), этот профиль является горизонтально однородным.

На рис. 1 приводятся указанные выше четыре распределения температуры.

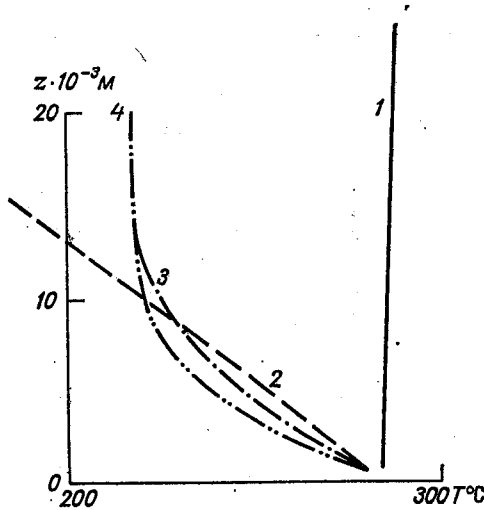


Рис. 1. Задаваемые вертикальные профили температуры.
1 — профиль 1; 2 — профиль 2; 3 — профиль 3; 4 — профиль 4.

Для заданных распределений температуры точное значение барического градиента определяется по формуле

$$GR_x = m \frac{\delta p}{p_0} \frac{RTF_2}{F_1} \cos mx. \quad (26)$$

Как и в работе [2], конфигурация горы задавалась формулой

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -x_0; \\ h_0(x - x_0)^2(x + x_0)^2/x_0^4, & -x_0 \leq x \leq x_0; \\ 0, & x_0 \leq x. \end{cases} \quad (27)$$

Здесь $x_0 = \pi/9$, $h_0 = 4,5 \cdot 10^3$ м.

При вычислении точных значений GR_x на заданных σ -уровнях высоты уровней вычислялись по методу Ньютона из уравнения

$$p(x, z) = \sigma_k p_s(x), \quad (28)$$

где $p_s(x) = p(x, h(x))$.

Ошибки аппроксимации GR_x для всех четырех профилей температуры оценивались для случая с горой и без горы по формуле

$$\delta^{(q)} = \frac{GR_x^{(q)} - GR_x}{\max |GR_x|}. \quad (29)$$

Здесь $GR_x^{(q)}$ — приближенные значения градиента, вычисленные по схеме $q = A, B, C, D$; $\max |GR_x|$ — максимальное по модулю точное значение для искомого профиля температуры.

Таблица 1

Точные значения $GR_x \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/(\text{рад} \cdot \text{с}^2)$ на семи уровнях при отсутствии горы¹

Номер уровня	σ	Профили температуры			
		1	2	3	4
1	0,071	7,559	4,586	5,721	2,823
2	0,214	7,102	5,074	5,229	2,843
3	0,357	6,093	4,830	4,743	2,936
4	0,500	5,130	4,388	4,260	3,073
5	0,643	4,261	3,866	3,764	3,237
6	0,786	3,478	3,306	3,249	3,421
7	0,929	2,768	2,729	2,713	3,623

¹ Если ось x направлена вдоль круга широты $\varphi = 45^\circ$, то значению $GR_x = 10^3 \text{ м}^2 (\text{рад} \cdot \text{с})$ соответствует скорость геострофического ветра 2,15 м/с

Расчеты выполнялись для схем A, B, C и D, описанных в разделе 2, при различном вертикальном ($K=3; 7; 14$) и горизонтальном ($\Delta x=2,5; 5^\circ$) разрешениях модели. Оценки производились для середины склона горы в точке $x = -x_0/2$.

В табл. 1 даются точные значения барического градиента для всех четырех распределений температуры на семи σ -уровнях.

5. Результаты расчетов. На рис. 2 приводятся вертикальные распределения точных и приближенных значений GR_x , вычисленные при наличии гор. Основная часть приводимых ниже расчетов относится к модели с вертикальным разрешением $K=7$ и горизонтальным разрешением $\Delta x=5^\circ$. Для других разрешений иллюстрации не приводятся из-за их большого объема, но дается сравнительный анализ полученных результатов. Все описываемые ниже численные эксперименты проводились на ЭВМ М-220 и М-222.

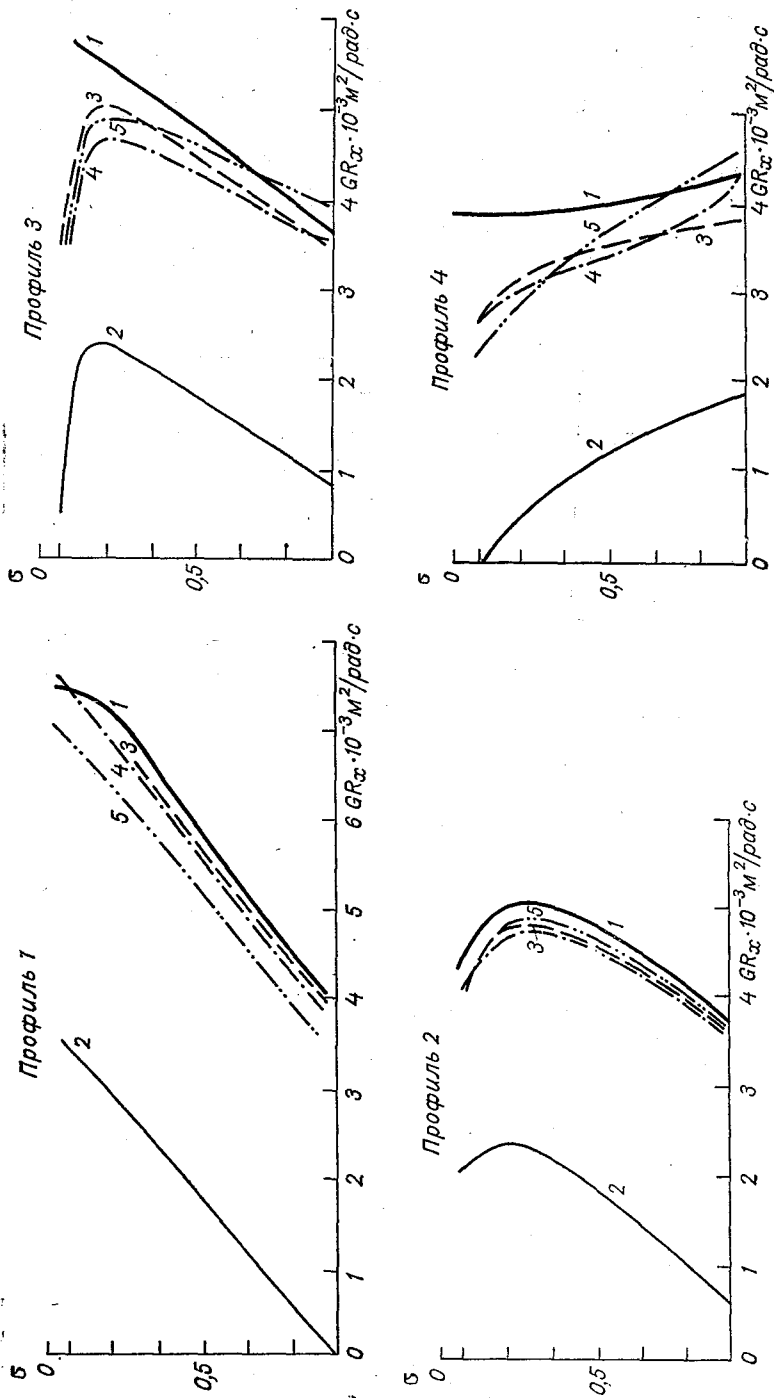


Рис. 2. Точные и приближенные значения GR_x , вычисленные по четырем схемам.
 1 — точные значения GR_x ; 2 — схема А; 3 — схема В; 4 — схема С; 5 — схема D.

Схема А. На рис. 2 линией 2 показано распределение GR_x , полученное по этой схеме. В табл. 2 даны значения ошибок аппроксимации $\delta^{(A)}$, вычисленные по формуле (29). Значения ошибок (умноженные на 10^2) даны в процентах от максимального значения GR_x для четырех профилей температуры.

Из сравнения данных табл. 2 для случаев с горой и без горы следует, что при включении в расчеты гор ошибки аппроксимации заметно возрастают и принимают порядок самих оцениваемых значений GR_x . Очевидно, это вызвано ростом ошибок первого рода, что

Таблица 2

Относительные ошибки ($\delta \cdot 10^2$) вычисления GR_x по схеме А ($K=7, \Delta x=5^\circ$)

Номер уровня	σ	Профили температуры			
		1	2	3	4
Случай без горы					
1	0,071	-0,72	-2,1	-4,9	-3,5
2	0,214	-4,5	-4,2	-3,8	-3,5
3	0,357	-3,7	-4,2	-3,5	-3,7
4	0,500	-3,1	-3,8	-3,2	-3,8
5	0,643	-2,5	-3,4	-2,9	-4,0
6	0,786	-2,1	-2,9	-2,5	-4,3
7	0,929	-1,6	-2,4	-2,1	-4,5
Случай с горой					
1	0,071	-51	-43	+92	-119
2	0,214	-58	-51	-53	-108
3	0,357	-56	-55	-51	-88
4	0,500	-56	-58	-51	-83
5	0,643	-54	-60	-50	-79
6	0,786	-53	-61	-50	-76
7	0,929	-52	-61	-49	-72

в свою очередь обусловлено появлением некомпенсированной гидростатической составляющей, значение которой оказывается близким к значению самого градиента. В принципе эту ошибку можно уменьшить путем увеличения горизонтального разрешения, однако требуется уменьшить шаг сетки в 3—4 раза, чтобы эта ошибка стала сравнимой с ошибкой, возникающей в случае отсутствия гор. Этот факт, а также наличие принципиально лучших схем аппроксимации дает основание считать, что схема А непригодна для практического использования, если в модели учитываются горы.

Схема В. На рис. 2 приближенные значения GR_x , полученные по этой схеме, показаны линией 3. В табл. 3 даны значения ошибок

аппроксимации. Из таблицы следует, что ошибки при включении гор являются близкими к ошибкам при их отсутствии. Исключение составляет верхний уровень в профиле 3 температуры, а также до некоторой степени в профиле 4. Причем в окрестности особенности возрастания ошибок связаны в основном с приближенным интегрированием уравнения статики, т. е. обусловлено ошибками второго рода (см. табл. 6).

Таблица 3

Относительные ошибки ($\delta \cdot 10^2$) вычисления GR_x по схеме В ($K=7, \Delta x=5^\circ$)

Номер уровня	σ	Профили температуры			
		1	2	3	4
Случай без горы					
1	0,071	-0,76	-2,1	-5,0	-3,6
2	0,214	-4,5	-4,2	-3,8	-3,7
3	0,357	-3,7	-4,2	-3,6	-3,8
4	0,500	-3,1	-3,8	-3,2	-4,0
5	0,643	-2,5	-3,4	-2,9	-4,2
6	0,786	-2,0	-2,9	-2,5	-4,4
7	0,929	-1,6	-2,4	-2,1	-4,7
Случай с горой					
1	0,071	1,7	-5,3	-40,7	-37
2	0,214	-4,4	-5,0	-6,5	-20,5
3	0,357	-3,4	-4,6	-5,4	-13,5
4	0,500	-2,6	-3,9	-4,7	-11,8
5	0,643	-1,8	-3,2	-4,0	-11,5
6	0,786	-1,2	-2,5	-3,5	-11,9
7	0,929	-0,7	-1,7	-3,0	-12,8

Как отмечалось в разделе 3, эта ошибка одинакова для схем А, В и D. Для профиля 4 на нижних уровнях преобладает ошибка первого рода, которая оказывается заметно большей, чем для других профилей.

В целом схема В дает заметное улучшение аппроксимации GR_x по сравнению со схемой А.

Схема С. На рис. 2 эта схема показана линией 4. Ошибки аппроксимации GR_x даются в табл. 4.

В результате перехода к p -системе координат в случае с горами ошибки первого рода такие же, как и без гор. Однако довольно большими оказываются ошибки второго рода. Из этого следует и характерное распределение ошибок по высоте: малые ошибки — на самых нижних уровнях и заметное их увеличение на более высоких

уровнях. Хотя порядок ошибок тот же, что и в предыдущей схеме, в целом схема С дает несколько большие погрешности.

Одна из особенностей этой схемы заключается в ее повышенной чувствительности к вертикальному разрешению. Так, для модели, в которой $K=3$, ошибки оказываются значительно большими, чем в схемах В и D.

Таблица 4

Относительные ошибки ($\delta \cdot 10^2$) при вычислениях GR_x по схеме С ($K=7, \Delta x=5^\circ$)

Номер уровня	°	Профили температуры			
		1	2	3	4
Случай без горы					
1	0,071	-0,76	-2,1	-5,0	-3,6
2	0,214	-4,5	-4,2	-3,8	-3,7
3	0,357	-3,7	-4,2	-3,5	-3,8
4	0,500	-3,0	-3,8	-3,2	-4,0
5	0,643	-2,5	-3,3	-2,8	-4,2
6	0,786	-2,0	-2,8	-2,4	-4,5
7	0,929	-1,6	-2,3	-2,0	-4,7
Случай с горой					
1	0,071	1,2	-3,8	-39,4	-36
2	0,214	-4,1	-7,2	-13,4	-25
3	0,357	-4,2	-5,8	-9,7	-20
4	0,500	-3,6	-5,0	-7,2	-16
5	0,643	-3,1	-4,4	-5,7	-12,7
6	0,786	-2,7	-3,9	-4,5	-10,0
7	0,929	-2,3	-2,8	-0,6	2,1

Схема D. На рис. 2 значения GR_x , полученные по этой схеме, показаны линией 5. В табл. 5 даются ошибки аппроксимации GR_x при $\kappa=0,6 R/c_p$.

Как следует из анализа результатов, схема D имеет ошибки аппроксимации того же порядка, что и схемы В и С. Однако для этой схемы характерна большая чувствительность к выбору фонового распределения. Так, расчеты с $\kappa=R/c_p$ для всех четырех профилей давали большие ошибки, чем с $\kappa=0,6 R/c_p$, т. е. при градиенте, близком к равновесному.

Представляет также интерес выяснить, какой вклад в ошибку аппроксимации вносят ошибки первого и второго рода для каждого из рассматриваемых профилей температуры. С этой целью вычисля-

лись ошибки в случае, когда геопотенциал задавался точно из решения уравнения (28). В результате в чистом виде выделялась ошибка первого рода. Ошибка второго рода находилась как разность между суммарной ошибкой (см. табл. 2—5) и ошибкой первого рода. Как уже отмечалось, схемы А, В и D имеют одинаковые ошибки второго рода и различаются только ошибками первого рода; в схему С основной вклад вносит ошибка второго рода. Поэтому

Таблица 5

Относительные ошибки ($\delta \cdot 10^2$) при вычислении GR_x по схеме D ($K=7, \Delta x=5^\circ$)

Номер уровня	σ	Профили температуры			
		1	2	3	4
Случай без горы					
1	0,071	-0,76	-2,1	-5,0	-3,6
2	0,214	-4,5	-4,2	-3,8	-3,7
3	0,375	-3,8	-4,2	-3,6	-3,8
4	0,500	-3,1	-3,9	-3,3	-4,0
5	0,643	-2,6	-3,4	-2,9	-4,3
6	0,786	-2,1	-3,0	-2,5	-4,4
7	0,929	-1,7	-2,5	-2,2	-4,7
Случай с горой					
1	0,071	5,1	-1,4	-42	-45
2	0,214	-2,5	-0,73	-3,1	-27
3	0,357	-2,2	-0,65	-1,8	-15
4	0,500	-1,9	-0,45	-0,81	-7,6
5	0,643	-1,7	-0,21	-0,03	-1,4
6	0,643	-1,6	0,04	0,66	4,8
7	0,929	-1,4	0,29	1,3	11,3

в табл. 6 приведенные ошибки второго рода относятся к схемам А, В и D, а ошибки первого рода даны только для схемы В.

Несколько слов об ошибках при увеличенном разрешении. Нами были выполнены оценки ошибок аппроксимации с увеличенным горизонтальным ($\Delta x=2,5^\circ$) и вертикальным ($K=14$) разрешением. Как известно, для рассматриваемых схем ошибка первого рода пропорциональна квадрату шага сетки по горизонтали, а из оценок погрешности формулы трапеций при вычислении интеграла следует, что ошибка второго рода пропорциональна квадрату шага по вертикали. Результаты расчетов полностью соответствуют этим оценкам: при удвоении горизонтального разрешения ошибка первого

Ошибки первого (I) и второго (II) родов для схемы В ($K=7$, $\Delta x=5^\circ$)

Номер уровня	σ	Профили температуры								
		1		2		3		4		
		I	II	I	II	I	II	I	II	
Случай без горы										
1	0,071	-4,8	4,1	-4,4	2,3	-4,8	-0,2	-3,6	0,0	
2	0,214	-4,4	-0,1	-4,4	0,5	-4,3	0,5	-3,7	0,0	
3	0,357	-3,7	0,0	-4,4	0,2	-3,8	0,3	-3,8	0,0	
4	0,500	-3,1	0,0	-3,9	0,1	-3,4	0,2	-4,0	0,0	
5	0,643	-2,5	0,0	-3,4	0,0	-3,0	0,1	-4,2	0,0	
6	0,786	-2,0	0,0	-2,9	0,0	-2,5	0,0	-4,4	0,0	
7	0,929	-1,6	0,0	-2,4	0,0	-2,1	0,0	-4,7	0,0	
Случай с горой										
1	0,071	-4,8	6,5	-5,0	-0,3	-4,8	-35,9	-4,0	-33,0	
2	0,214	-4,4	0,0	-5,3	0,3	-5,1	-1,4	-4,8	-15,7	
3	0,357	-3,4	0,0	-4,7	0,1	-4,6	-0,8	-6,3	-7,2	
4	0,50	-2,6	0,0	-4,0	0,1	-4,2	-0,5	-7,7	-4,1	
5	0,643	-1,8	0,0	-3,3	0,1	-3,8	-0,2	-9,1	-2,4	
6	0,786	-1,2	0,0	-2,5	0,0	-3,0	-0,1	-10,8	-1,1	
7	0,929	-0,7	0,0	-1,7	0,0	-3,0	0,0	-12,6	-0,2	

рода уменьшалась примерно в четыре раза, а ошибка второго рода практически не менялась; при удвоении вертикального разрешения, наоборот, не претерпевала существенных изменений ошибка первого рода, а ошибка второго рода уменьшалась в четыре раза.

Основные выводы

Выполненные оценки ошибок аппроксимации барического градиента в σ -системе координат для четырех разностных схем, широко применяемых в моделях общей циркуляции атмосферы, дают основание сделать следующие выводы:

а) при отсутствии горы различия между четырьмя схемами аппроксимации незначительны;

б) при наличии горы схема А является непригодной, так как ошибки аппроксимации имеют порядок самих значений градиента;

в) при наличии горы схемы В, С и D дают несколько большие ошибки, чем при ее отсутствии, однако эти ошибки намного меньше ошибок схемы А; схема С выглядит несколько хуже схем В и D;

г) особенности в профиле температуры могут приводить при наличии горы к резкому росту ошибок во всех четырех схемах;

д) увеличение разрешения уменьшает ошибки аппроксимации, однако увеличение разрешения по вертикали, как правило, дает меньший эффект, чем увеличение разрешения по горизонтали;

е) выбор какой-либо из трех схем (В, С и D) может определяться соображениями вычислительной экономичности и учетом конкретных вычислительных особенностей модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gorby G. A., Gilschrist, A., Newson R. L. General circulation model of the atmosphere suitable for long period integrations Quart.—, J. R. Met. Soc.", 1972, vol. 93, p. 809—832.
2. Gary J. M. Estimate of Truncation Error in Transformed Coordinate, Primitive Equation Atmospheric Models.—, J. of the Atmospheric Sciences", March 1973, vol. 30, N 2, p. 223—233.
3. Kurihara J. Note of Finit Difference Expression for the Hidrostatic Relation and Pressure Gradient Force. Monthly Weather Review, Sept. 1968, vol. 96, N 3.
4. Miyakoda K. Cumulative Results of Testing a Meteorological Mathematical Model: The Description of the Model. Proceedings of the Royal Irish Academy, 1973, sect. A, vol. 73, N 9.
5. Phillips N. A. A Coordinate System Having Some Advantages for Numerical Forecasting.—, J. of Met.", 1957, vol. 14, N 2, p. 184—185.
6. Phillips N. A. Useful Modification of Sigma Coordinates. The Garp Program of Numerical Experimentation, Jan. 1975, Report N 8, p. 45.
7. Smagorinsky J. and Staff Members. Prediction Experiments with a General Circulation Model.— В кн.: Динамика крупномасштабных атмосферных процессов. Труды Международного симпозиума, Москва, 1965 г.

И. Л. Кароль, А. А. Киселев

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ГЛОБАЛЬНОГО ПЕРЕНОСА ФРЕОНОВ В АТМОСФЕРЕ И ОЦЕНКИ ИХ ВЛИЯНИЯ НА СТРАТОСФЕРНЫЙ ОЗОН

Введение. В интенсивно изучаемой в последние годы проблеме распространения в атмосфере хлорофлюорометанов (фреонов) и их воздействия на озон в стратосфере [4, 5, 9] особое значение имеет точная оценка характера и скорости атмосферного переноса этих газов от их наземных источников в среднюю стратосферу, а также скорости их фотодиссоциации в этом слое под действием ультрафиолетовой радиации Солнца. Правильная оценка скоростей этих процессов позволит определить прирост содержания хлора и его соединений в стратосфере и степень ожидаемого каталитического разложения ими молекул озона в ближайшие годы и десятилетия.

К сожалению, в опубликованных моделях этих процессов используются весьма грубые их приближения и характеристики. Не рассматриваются значительные широтные изменения скорости переноса и фотолиза, а в используемых одномерных моделях вертикальной турбулентной диффузии фреонов не учитывается сезонное изменение ее интенсивности и скорости фотодиссоциации фреонов в стратосфере [4, 5].

В настоящей работе изложены основные положения одномерной среднезональной модели переноса фреонов от наземных источников в стратосферу и их фотохимических преобразований с параметрами, изменяющимися по сезонам. Определяется эффект влияния этих изменений на распределение содержания хлора и его соединений в стратосфере. Изучается чувствительность моделей к изменениям входящих в них исходных параметров, в частности разных моделей макротурбулентного переноса в атмосфере.

Сравнение рассчитанных модельных концентраций фреонов с измеренными в тропосфере и стратосфере позволяет уточнить характеристики этого переноса, так как фреоны в тропосфере являются практически инертными газами, удобными для использования их как трассеров движений атмосферы.

Схема фотохимических реакций соединений хлора и озона в стратосфере. Из известных в настоящее время десятков фотохимических

реакций между атомарным кислородом и озоном и соединениями азота, водорода и хлора наиболее существенными и подлежащими включению в модельную схему будут следующие [2, 5, 9, 12]:

1. $O_2 + h\nu \rightarrow 2 O$ $\lambda < 242 \text{ нм, с } J_1$
2. $O + O_2 + M \rightarrow O_3 + M$ $k_2 = 1,1 \cdot 10^{-34} \cdot e^{510/T}$, по Дэвису,
для $M = N_2, O_2$
 $k_2 = 1,8 \cdot 10^{-35} \cdot e^{1050/T}$, по Джонстону
- 3а. $O_3 + h\nu \rightarrow O_2 + O^*$ $\lambda < 310 \text{ нм, с } J_3^a$
- 3б. $O_3 + h\nu \rightarrow O_2 + O$ $310 < \lambda < 1140 \text{ нм, с } J_3^b$
4. $O + O_3 \rightarrow 2O_2$ $k_4 = 1,9 \cdot 10^{-11} e^{-2300/T}$, по Дэвису
 $k_4 = 1,1 \cdot 10^{-11} e^{-2150/T}$, по Кауфману
5. $O^* + M \rightarrow O + M$ $k_5 = 5,4 \cdot 10^{-11}$ для $M = N_2$
 $k_5 = 7,4 \cdot 10^{-11}$ для $M = O_2$
6. $NO + O_3 \rightarrow NO_2 + O_2$ $k_6 = 1,0 \cdot 10^{-12} e^{-1250/T}$
7. $NO_2 + O \rightarrow NO + O_2$ $k_7 = 9,1 \cdot 10^{-12}$
8. $NO_2 + h\nu \rightarrow NO + O$ $\lambda < 400 \text{ нм, с } J_8$
9. $ClO + O \rightarrow Cl + O_2$ $k_9 = 5,3 \cdot 10^{-11}$ (I гр.), $4,5 \cdot 10^{-11}$ (II гр.)
10. $Cl + O_3 \rightarrow ClO + O_2$ $k_{10} = 1,85 \cdot 10^{-11}$ (I гр.),
 $3,6 \cdot 10^{-11} \cdot e^{-318/T}$ (II гр.)
11. $ClO + NO \rightarrow Cl + NO_2$ $k_{11} = 1,7 \cdot 10^{-11}$ (I гр.), $2,0 \cdot 10^{-11}$ (II гр.)
12. $Cl + CH_4 \rightarrow HCl + CH_3$ $k_{12} = 5,6 \cdot 10^{-11} e^{-1790/T}$ (I гр.),
 $5,4 \cdot 10^{-12} e^{-1133/T}$ (II гр.)
13. $Cl + NO_2 \rightarrow HCl + O_2$ $k_{13} = 2 \cdot 10^{-11}$ (оценка)
14. $Cl + H_2 \rightarrow HCl + H$ $k_{14} = 5,7 \cdot 10^{-11} e^{-2260/T}$
15. $HCl + OH \rightarrow Cl + H_2O$ $k_{15} = 2,8 \cdot 10^{-12} e^{-400/T}$
16. $HCl + O \rightarrow Cl + OH$ $k_{16} = 1,9 \cdot 10^{-11} e^{-3580/T}$
17. $HCl + h\nu \rightarrow Cl + H$ $\lambda < 220 \text{ нм, с } J_{17}$
18. $O^* + H_2O \rightarrow 2OH$ $k_{18} = 3,5 \cdot 10^{-10}$

Здесь λ — длина волны излучения Солнца в нанометрах ($1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$); M — молекула газов воздуха, участвующая в реакции без изменения; k_i — коэффициент скорости реакций, уточненный по данным гл. 5 работы [11], в $\text{см}^3/(\text{с} \cdot \text{мол})$ и $\text{см}^6/(\text{с} \cdot \text{мол}^2)$ для двух- и трехмолекулярных реакций соответственно; T — температура в кельвинах; O^* — возбужденный атом в состоянии (1D). Значения k_9 — k_{12} II группы взяты из [12].

Первая группа реакций образования и разрушения озона в кислородной атмосфере была указана Чепменом в 1930 г., однако даже последние оценки k_2 и k_4 различаются в несколько раз у разных авторов. Группы быстрых реакций 6—8 и 9—11 каталитического раз-

рушения озона окислами азота, атмосферным хлором и его окисью приводят к установлению следующих соотношений фотохимического равновесия [5, 9]:

$$(\text{Cl}) = E(\text{ClO}); \quad E = [k_9(\text{O}) + k_{11}(\text{NO})]/k_{10}(\text{O}_3); \quad (1)$$

$$(\text{NO})/(\text{NO}_2) = [k_7(\text{O}) + J_8]/[k_6(\text{O}_3) + k_{11}(\text{ClO})], \quad (2)$$

где (M) — концентрация газа M в мол/см³, причем последнее соотношение выполняется в освещенной Солнцем стратосфере. Реакции 3а и 5 определяют связь (O^*) с озоном

$$(\text{O}^*) = J_\infty^a \text{O}_3/k_5(M). \quad (3)$$

Уравнения баланса фотохимического образования и разрушения O и O_3 , с учетом указанных выше реакций приводят к следующим равенствам:

$$(\text{O}) = [J_3(\text{O}_3) + J_8(\text{NO}_2)]/[k_2(\text{O}_2)(M) + k_4(\text{O}_3) + k_7(\text{NO}_2) + k_9(\text{ClO})] \quad (4)$$

— фотохимическое равновесие между O и O_3 ,

$$\frac{d(\text{O}_3)}{dt} + A(\text{O}_3)^2 + B(\text{O}_3)(\text{NO}_2) + C(\text{NO}_2)^2 + D(\text{O}_3)(\text{ClO}) = 2J_1(\text{O}_2), \quad (5)$$

где

$$A = \frac{2J_3k_4}{k_2(\text{O}_2)(M)}; \quad B = \frac{2(J_3k_7 + k_4J_8)}{k_2(\text{O}_2)(M)}; \\ C = \frac{2J_8k_7}{k_2(\text{O}_2)(M)}; \quad D = \frac{2J_3k_7}{k_2(\text{O}_2)(M)} \quad (6)$$

— фотохимический баланс озона, обобщающий уравнение (18) в [2].

При выводе уравнения (5) отброшены некоторые малые члены и использованы соотношения (1), (2) и (4). В правой его части — интенсивность источника озона, а члены $A(\text{O}_3)^2$, $B(\text{O}_3)(\text{NO}_2) + C(\text{NO}_2)^2$ и $D(\text{O}_3)(\text{ClO})$ представляют интенсивности его стоков, обусловленных реакциями 3 и 4, 6 и 7, 9 и 10 соответственно.

Группы реакций 12—14 и 15—17 суть фотохимические источники и стоки хлористого водорода HCl , уравнение фотохимического баланса которого будет иметь вид

$$\frac{d(\text{HCl})}{dt} + (\text{HCl}) [k_{15}(\text{OH}) + k_{16}(\text{O}) + J_{17}] = \\ = (\text{Cl}) [k_{12}(\text{CH}_4) + k_{13}(\text{HO}_2) + k_{14}(\text{H}_2)], \quad (7)$$

Сравнение слагаемых в квадратных скобках этого уравнения для значений k_i , указанных выше, характерных значений T , (CH_4) , (H_2) , (O) , (OH) и (HO_2) из гл. 3 работы [10] и J_{17} из [9], показывает, что реакции 13 в источнике HCl и 16 и 17 в его стоке дают вклад, меньший 1% по сравнению с реакциями 12 и 15, и поэтому их можно не учитывать. Уравнение (7) после некоторых преобразований можно представить в виде

$$\frac{d(\text{HCl})}{dt} + \Lambda_{\text{H}}(\text{HCl}) = Q_{\text{H}} = (\text{Cl}_x)G, \quad (8)$$

где

$$\Lambda_{\text{H}} = k_{15}(\text{OH}) + G; \quad G = [k_{12}(\text{CH}_4) + k_{14}(\text{H}_2)]E; \quad (9)$$

$$(\text{Cl}_x) = (\text{Cl}) + (\text{ClO}) + (\text{HCl}) = (1 + E)(\text{ClO}) + (\text{HCl}) \quad (10)$$

— сумма концентраций рассматриваемых соединений хлора. Величина E , определяемая выражением (1), может быть следующим образом приближенно выражена через (O_3) , (NO_2) и (ClO) с использованием соотношений фотохимического равновесия (2) и (4):

$$E = \frac{k_9 J_3}{k_2(\text{O}_2)(M)k_{10}} + \frac{k_{11} J_8(\text{NO}_2)}{k_{15}(\text{O}_3)[k_6(\text{O}_3) + k_{15}(\text{ClO})]}. \quad (11)$$

Фотодиссоциация фреона-11 CFCl_3 со скоростью λ_1 производит в среднем 2,5 атома Cl на молекулу и также 2,0 атома Cl на молекулу CF_2Cl_2 фреона-12 со скоростью λ_2 . Этим определяется величина (Cl_x) . Соотношение между (ClO) и (HCl) — активной и пассивной к озону основными частями соединений хлора в стратосфере — можно находить из уравнения (8), частным случаем которого может быть равенство фотохимического равновесия между ними:

$$(\text{HCl}) = \frac{Q_{\text{H}}}{\Lambda_{\text{H}}} = \frac{G(1 + E)(\text{ClO})}{k_{15}(\text{OH})} = \frac{G(\text{ClO})}{k_{15}(\text{OH})}, \quad (12)$$

так как $E \ll 1$.

Такое фотохимическое равновесие между HCl и ClO в естественной стратосфере, вероятно, существует около 30 км и выше, где скорости фотохимических реакций образования и разрушения озона велики, а скорость вертикального атмосферного переноса мала и озон находится в фотохимическом равновесии с разрушающими его газами (гл. 5 [10]). Однако часть атомов хлора, возникающих в стратосфере в результате фотодиссоциации фреонов, может уноситься из стратосферы в молекулах HCl и ClO .

Только в последнее время появились данные аэростатных измерений содержания HCl в стратосфере [7]. По этим данным можно определить профиль концентрации $(\text{ClO})_n$ из равенства (12),

которое представляет собой квадратное уравнение относительно (ClO) вида

$$ax^2 + \left(\frac{J_8(\text{NO}_2)}{(\text{O}_3)} + \frac{ak_6}{k_{11}} + b \right) x = \frac{bk_6}{k_{11}}, \quad (13)$$

где

$$a = \frac{J_3 k_9 (\text{O}_3)}{k_2 (\text{O}_2) (M)}; \quad b = \frac{k_{10} k_{15} (\text{OH}) (\text{HCl})}{k_{12} (\text{CH}_4) + k_{14} (\text{H}_2)}; \quad x = \frac{(\text{ClO})}{(\text{O}_3)}. \quad (14)$$

По указанным в [7] данным, в слое 18—28 км над США отношение смеси $(\text{HCl})_n / (M)$ мало изменялось с высотой и составляло примерно 0,40 и $0,64 \cdot 10^{-9}$ объемных частей в ноябре—декабре

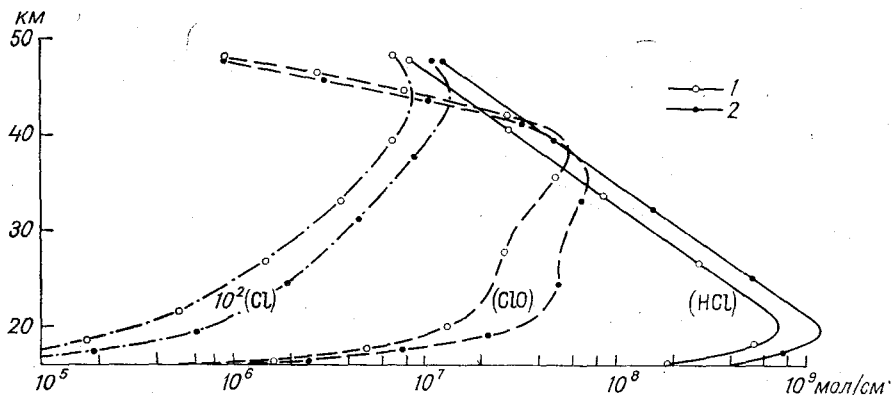


Рис. 1. Вертикальные профили концентраций HCl, измеренные в ноябре—декабре 1974 г. (1) и в апреле 1975 г. (2) [7], и соответствующие рассчитанные концентрации (ClO) и (Cl) в предположении фотохимического равновесия между ними и HCl.

1974 г. и в апреле 1975 г. соответственно. На рис. 1 представлены вертикальные профили этих (HCl), а также (ClO) и (Cl), находящиеся с ними в фотохимическом равновесии. При расчете по формулам (1), (11), (13) и (14) были использованы: коэффициенты реакций k_i для сезонных профилей T , (O_2) и (M) стандартной атмосферы умеренных широт (45° с. ш.), взятые из гл. 2 [10]; сезонные профили измеренных $(\text{O}_3)_n$ для тех же широт, обобщенные Дютшем (гл. 3 [10]) и рассчитанные с их учетом скорости фотодиссоциации J_3 и J_8 для тех же широт и сезонов по сведениям, приведенным в гл. 5 [10]; отношения смесей, обобщающие многие измерения и указанные в гл. 3 [10]: $(\text{H}_2)/(M) = 0,5 \cdot 10^{-6}$; $(\text{CH}_4)/(M) = 1 \cdot 10^{-6}$ до 24 км и линейно убывающие до $0,3 \cdot 10^{-6}$ на уровне 50 км; сезонные измеренные и рассчитанные профили (OH) и (NO_2) , полученные в [3]. Профили расчетных естественных концентраций (HCl), (ClO) и (Cl) на рис. 1 близки к их гипотетическим профилям, полученным в [13] при предположении, что $(\text{Cl}_x)/(M) = 1 \cdot 10^{-9}$ по

объему. Ввиду малого числа измерений пока неясно, имеется ли сезонное изменение этих концентраций в естественной стратосфере.

Модель глобального вертикального переноса газов в атмосфере. Основные положения и параметры двумерной нестационарной модели приведены в [1]. В частном ее случае — в модели макротурбулентного вертикального переноса газа — отношение смеси $c(t, r)$ определяется уравнением

$$Lc + \rho \Delta c = \frac{\partial \rho c}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_r}{\partial r} + \rho \Lambda c = Q, \quad (15)$$

где $\Pi_r = -\rho k_r \frac{\partial c}{\partial r}$ есть вертикальный поток примеси, t — время, r — вертикальная координата; $\rho(r)$ — плотность воздуха, $\Lambda(r)$ — параметр распада примеси, Q — интенсивность источников и стоков примеси; k_r — коэффициент вертикальной макротурбулентной диффузии.

Краевые условия: наземный источник с заданной интенсивностью $\varphi(t)$ на уровне $r=r_0$

$$\Pi_r|_{r=r_0} = \rho \varphi(t) = -\rho k_r \frac{\partial c}{\partial r} \Big|_{r=r_0}; \quad (16)$$

условие на верхней границе $r=H$ рассматриваемого слоя

$$[\Pi_r + \rho \beta c]_{r=H} = \rho \psi, \quad (17)$$

которое описывает влияние на $c(t, r)$ вертикального переноса примеси в слоях $r > H$ при значениях β и ψ , указанных в гл. 2 [1].

Способы определения и среднесезонные значения k_r до уровня 25 км приведены в гл. 3 и 4 работы [1], а для верхней стратосферы две группы их значений приведены в табл. 1 статьи [3], где указаны и характерные особенности их изменений с высотой и временем.

Значения скорости фотодиссоциации $\lambda_1(t, r)$ и $\lambda_2(t, r)$ фреонов CFCl_3 и CF_2Cl_2 и их изменений с высотой r и временем t (сезонное изменение среднего зенитного угла Солнца) взяты из [9] для широты 10 — 50° и стандартного распределения содержания озона по высоте.

Рост интенсивности глобального источника фреонов можно определить по оценкам его годового производства химической промышленностью [9, 12]. В 1960—1973 гг. средний годовой прирост производства фреона-11 и 12 составлял около 10—15%, причем в среднем в атмосферу попадало около 86% фреона, произведенного с задержкой 0,5—1,5 года [12]. В 1973 г. было произведено 0,31 Мт CFCl_3 и 0,47 Мт CF_2Cl_2 [9], при расчетах принимали постоянный относительный прирост источника равным 11% в год.

Рассчитанные значения c_1 и c_2 отношений смеси фреонов-11 и 12 позволяют определить скорость образования атомов хлора в стратосфере $R_{\text{Cl}}(t, r, \Theta)$ из выражения

$$R_{\text{Cl}} = \rho n_1 \lambda_1 c_1 Q_1 + \rho n_2 \lambda_2 c_2 Q_2, \quad (18)$$

где $n_1=2,5$; $n_2=2,0$ — «выходы» атомов Cl при полной фотодиссоциации фреонов; Q_1 и Q_2 — интенсивности их источников, которые

принимаются растущими экспоненциально со временем с показателем $\Lambda = 0,14 \text{ год}^{-1}$.

Концентрация суммы рассматриваемых соединений хлора

$$(Cl_x)_F = (Cl)_F + (ClO)_F + (HCl)_F = (1 + E)(ClO)_F + (HCl)_F, \quad (19)$$

образующихся при фотодиссоциации фреонов, определяется из решения уравнения переноса

$$L[(c_x)] = R_{Cl}, \quad c_x = \frac{(Cl_x)}{(M)}, \quad (20)$$

где L — оператор переноса из (15). Можно либо считать $(ClO)_F$ и $(HCl)_F$ находящимися в фотохимическом равновесии, либо найти $(HCl)_F$ из уравнения (8) его переноса

$$Lc_4 + \rho \Lambda_H c_4 = Q_H = (Cl_x)G; \quad c_4 = \frac{(HCl)}{(M)}. \quad (21)$$

Здесь (NO_2) считается известным, а (O_3) находится из уравнения

$$Lc_3 + \rho \Lambda_3 c_3 = Q_3 = 2J_1(O_2) - c(NO_2)^2; \quad c_3 = \frac{(O_3)}{M}, \quad (22)$$

где

$$\Lambda_3 = A(O_3) + B(NO_2) + D(ClO).$$

Нелинейная система уравнений (19) — (22) для трех неизвестных $(HCl)_F$, $(ClO)_F$ и (O_3) решается последовательно шагами по времени. Так, по известным их значениям в момент t_k для момента t_{k+1} находится сначала $(O_3)^{(k+1)}$ решением уравнения (21) с коэффициентами, определенными по величинам $(HCl)_F^{(k)}$, $(ClO)_F^{(k)}$ и $(O_3)^{(k)}$ в момент $t = t_k$, а затем $(HCl)^{(k+1)}$ — решением уравнения (20) с коэффициентами, определенными по тем же величинам. $(ClO)^{(k+1)}$ находится из балансового равенства (19), затем цикл повторяется для момента t_{k+2} и т. д.

В упрощенном варианте можно принять для «фреоновых» $(ClO)_F$ и $(HCl)_F$ справедливым такое же соотношение фотохимического равновесия (12), что и для «фоновых» $(ClO)_n$ и $(HCl)_n$. Если $(ClO)_F \ll (ClO)_n$ и фреоны в стратосфере вызывают лишь малое уменьшение $(O_3) = (\bar{O}_3) + (O'_3)$, то это уменьшение (O'_3) можно определить из решения линеаризованного уравнения (21)

$$Lc'_3 + \rho \Lambda'_3 c'_3 = -Q'_3 = -D(\bar{O}_3)(ClO)_F, \quad (23)$$

где

$$\Lambda'_3 = 2A(\bar{O}_3) + B(NO_2) + D(ClO). \quad (24)$$

Краевые условия для уравнений (19) — (23): на верхней границе $r = H$ рассматриваемого слоя — условия фотохимического равнове-

сия. Нижнюю границу этого слоя разумно принять на уровне тропопазузы $r=h$ умеренных широт — около 10 км, в виде

$$\left[k_r \frac{\partial c_k}{\partial r} - \Theta_H^{(k)} c_k \right]_{r=h} = \varphi^{(k)} = 0, \quad k = 3, 4, \quad (25)$$

если в тропосфере выше слоя вымывания осадками нет источников и стоков O_3 и $HC1$. Параметры $\Theta_H^{(k)}$ учитывают вертикальный перенос и удаление этих газов в тропосфере и объяснены в [2].

Результаты расчета распространения фреонов и их химических преобразований. На рис. 2 представлены графики сезонных колебаний среднемесячных отношений смеси фреонов на разных уровнях

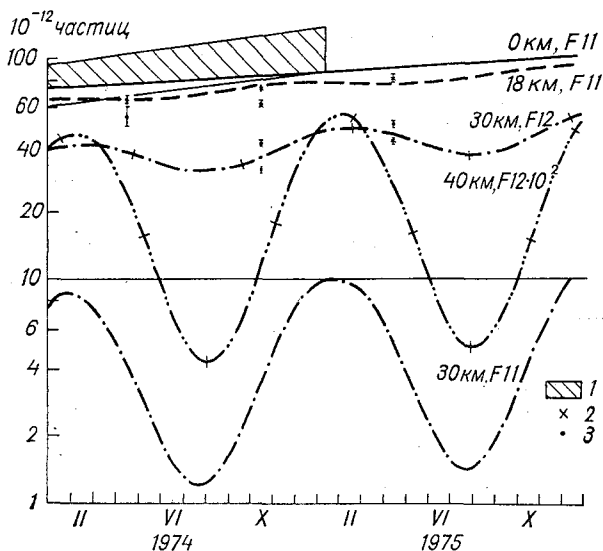


Рис. 2. Изменение со временем среднемесячных отношений смеси фреона-11 и 12 в 1974 и 1975 гг. на ряде уровней атмосферы, рассчитанных для k_r I группы и $\Lambda=0,14 \text{ год}^{-1}$.

Данные измерений из [1], [2]: 1 — наземные, 2 — на уровне 17 км, 3 — на уровне 19 км.

атмосферы в 1974 и 1975 гг., рассчитанные для k_r I группы. Аналогичные колебания с несколько большей амплитудой получаются для k_r II группы. Летний минимум и зимний максимум концентрации фреонов вызваны летним минимумом интенсивности переноса (величины k_r) и максимумом скорости фотодиссоциации (величины λ_i) и зимними максимумом k_r и минимумом λ_i [8]. Большие λ_1 у $CFC1_3$ и амплитуда колебаний k_r II группы приводят к большей амплитуде колебаний c_1 по сравнению с c_2 и колебаний c_i у k_r II группы по сравнению с c_i у k_r I группы.

Рассчитанные c_1 у земли и в нижней стратосфере согласуются с немногими данными измерений, указанными на рис. 2 (несколько лучше у k_r I группы). Отсутствие измерений зимой на уровнях выше 20 км не позволяет проверить существование сезонных колебаний фреонов по данным измерений.

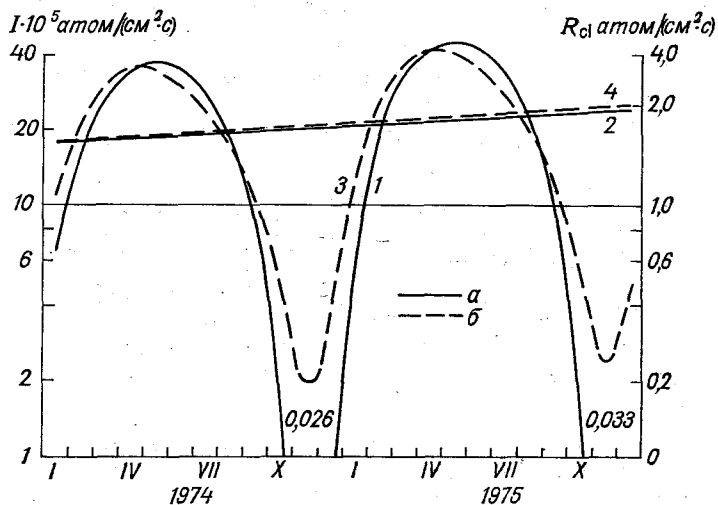


Рис. 3. Изменение со временем среднемесячных значений R_{Cl} (а), скорости образования атомов Cl от фотодиссоциации фреонов на уровне 26 км и суммы этой величины в вертикальном столбе атмосферы I (б) для вариантов расчета с сезонно меняющимися (1 и 3) и среднегодовыми (3 и 4) k_r I группы.

На рис. 3 приведены изменения в 1974 и 1975 гг. среднемесячных R_{Cl} для сезонно изменяющихся и среднегодовых k_r I группы на среднем уровне $r = 28$ км максимума R_{Cl} , а также суммарного $I = \int_n^H R_{Cl} dr$ по вертикальному столбу стратосферы. Суммарное годовое за 1974 г. значение для атомов хлора составит:

	k_r I группы		k_r II группы	
	сезонно изменяющиеся	среднегодовые	сезонно изменяющиеся	среднегодовые
R_{Cl} (28 км) атом/ $(\text{см}^3 \cdot \text{год})$	2,16	2,29	2,46	2,44
I 10^6 атом/ $(\text{см}^2 \cdot \text{год})$	22,2	23,5	22,7	23,5

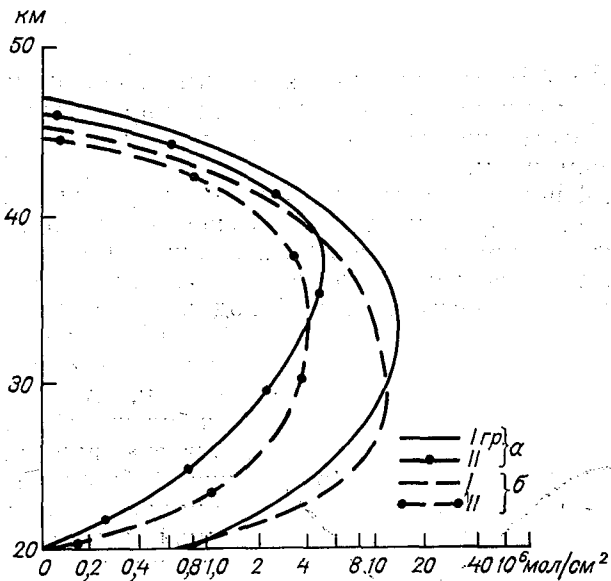


Рис. 4. Среднемесячные вертикальные профили (ClO) в январе (а) и июле (б) 1975 г. от фотодиссоциации фреонов, рассчитанные для k_i I и II групп и k_r I группы.

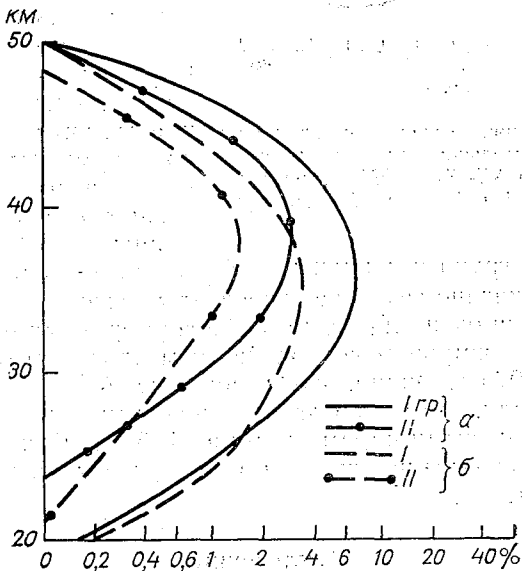


Рис. 5. Среднемесячные вертикальные профили относительного уменьшения озона (O_3)/(O_3) в январе (а) и июле (б) 1975 г. от фотодиссоциации фреонов, рассчитанные для k_i I и II групп и k_r I группы.

Таким образом, модели с постоянными по времени параметрами переноса и фотодиссоциации фреона в целом правильно определяют суммарное годовое количество атомов хлора, попадающего в стратосферу таким путем.

На рис. 4 представлены вертикальные профили концентрации (ClO) фреоновое происхождения для января и июля. Эти концентрации в несколько раз меньше концентрации (ClO) на рис. 1. Отсюда следует, что фреоновый источник не является основным источником ClO в стратосфере. Сезонный ход фреоновой концентрации

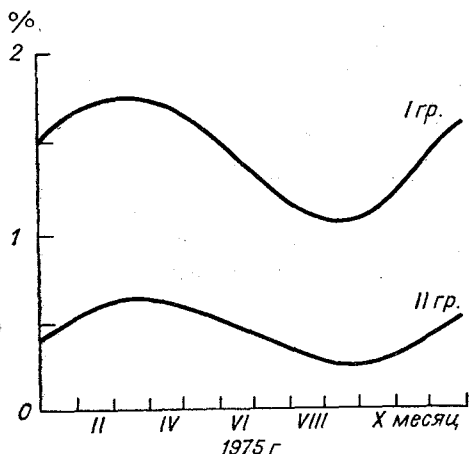


Рис. 6. Изменение со временем среднемесячного относительного уменьшения суммарного озона $\Delta X_3/X_3$ в 1975 г., рассчитанного для k_i I и II групп и k_r I группы.

реакций I и II групп и концентраций участвующих в них примесей.

На рис. 6 указано сезонное относительное изменение ΔX_3 суммарного содержания озона X_3 в стратосфере умеренных широт северного полушария, возмущенное воздействием хлора фреоновое происхождения, в 1975 г. Видно, что отношение $\Delta X_3/X_3$ не превышает 1,5% в этом году, что согласуется с оценками стационарных моделей со среднегодовыми параметрами в [4, 5, 9]. Для II группы значений k_i все величины получаются в 2—3 раза меньшими, что отмечается и в [12].

Заключение

Из изложенных первых результатов модельных расчетов глобального распространения в атмосфере фреонов и их фотохимического влияния на содержание озона в стратосфере следует, что значительное влияние на эти процессы оказывают сезонные изменения параметров переноса и реакций. Эти изменения надо обязательно

учитывать в модельных схемах и в прогностических расчетах ожидаемого воздействия фреонов на озон и радиационный режим атмосферы.

Из расчетов также следует, что в настоящее время возможное уменьшение содержания озона под воздействием фреонов, находящихся в атмосфере, незначительно и не может быть обнаружено при существующих методах и точности массовых измерений содержания озона. Делать оценки ожидаемого уменьшения его содержания в ближайшие десятилетия, не имея четкого представления о будущей скорости выброса фреонов в атмосферу, затруднительно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кароль И. Л. Радиоактивные изотопы и глобальный перенос в атмосфере. Л., Гидрометеоздат, 1972. 363 с.
2. Кароль И. Л. Высотные самолеты и стратосфера. Л., Гидрометеоздат, 1974. 48 с.
3. Кароль И. Л., Киселев А. А. Модельные расчеты сезонного изменения содержания соединений азота в стратосфере умеренных широт. См. наст. сб., с. 56—65.
4. Cicerone R. J. e. a. Stratospheric ozone destruction by man made chlorofluoromethanes.—„Science”, 1974, vol. 185, N 4157, p. 1165—1167.
5. Crutzen P. J. Estimates of possible future ozone reductions from continued use of fluoro-chloro-methanes (CF_2Cl_2 , CFCl_3).—„Geoph. Res. Letters”, 1974, vol. 1, N 5, p. 205—208.
6. Heidt L. E. e. a. Stratospheric profiles of CCl_3F and CCl_2F_2 .—„Geoph. Res. Letters”, 1975, vol. 2, N 10, p. 445—447.
7. Lasrus A. L. e. a. Stratospheric halogen measurements.—„Geoph. Res Letters”, 1975, vol. 2, N 10, p. 439—441.
8. Luther F. M. Monthly mean values of eddy diffusion coefficients in the lower stratosphere.—„AIAA Paper”, N 73—498, 1973, 4 p.
9. Molina M., Rowland F. S. Chlorofluoromethanes in the environment.—„Rev. Geophys. Space Phys.”, 1975, vol. 13, N 1, p. 1—42.
10. The Natural Stratosphere of 1974. CIAP Monograph 1. DOT-TST-75-51. Wash. D. C., 1975.
11. The possible impact of fluorocarbons and halocarbons on ozone. May 1975. Interdep. Comm. Atm. Sci. ICAS 18-a, 1975, 75 p.
12. The effect of fluorocarbons on the concentration of atmospheric ozone. Scient. Rev. Tech. Panel on fluorocarb. Res. Manufact. Chem. Assn. Wash. D. C., 1976, 133 p.
13. Wofsy S. C., Mc Elroy M. B. HO_x , NO_x , and ClO_x , their role in atmospheric photochemistry.—„Canad. Journ. Chem.”, 1974, vol. 52, N 8, p. 1582—91.

И. Л. Кароль, А. А. Киселев

МОДЕЛЬНЫЕ РАСЧЕТЫ СЕЗОННОГО ИЗМЕНЕНИЯ СОДЕРЖАНИЯ СОЕДИНЕНИЙ АЗОТА В СТРАТОСФЕРЕ УМЕРЕННЫХ ШИРОТ

1. Сведения об естественном содержании некоторых малых примесей в стратосфере необходимы для оценки влияния антропогенных источников этих примесей на климат. Поэтому в последние годы появился ряд работ, в которых приведены результаты расчетов «естественного фона» малых примесей, в частности, окислов азота, в значительной степени определяющих содержание озона в стратосфере. Однако математические модели, которые применялись при этом, были, как правило, стационарными [5, 9, 10] и могли быть использованы для расчета только среднегодовых значений концентрации исследуемых примесей, сезонные колебания которых могут быть значительными. Предлагаемая в настоящей работе одномерная нестационарная модель описывает сезонно изменяющиеся вертикальный макротурбулентный перенос окислов азота N_2O , NO , NO_2 , HNO_3 в слое 10—50 км, а также фотохимические преобразования этих примесей. В силу одномерности модели стратосфера считается горизонтально однородной.

2. Перечень фотохимических реакций, использованных в схеме, совпадает в основном с аналогичным перечнем в [1 и 10] и включает в себя следующие реакции:

- | | |
|--|--|
| 1. $O_2 + h\nu \rightarrow 2 O$ | $\lambda < 242$, с J_1 |
| 2. $O + O_2 + M \rightarrow O_3 + M$ | $k_2 = 6,6 \cdot 10^{-35} \cdot e^{510/T} (1,0:1,6:1,7$
для $M = Ar:N_2:O_2)$ |
| 3. $O_3 + h\nu \begin{cases} \nearrow O_2 + O^* \\ \searrow O_2 + O \end{cases}$ | $\lambda < 310$, с J_3^*
$310 < \lambda < 1140$ с J_3 |
| 4. $O + O_3 \rightarrow 2O_2$ | $k_4 = 2 \cdot 10^{-11} \cdot e^{-2300/T}$ |
| 5. $N_2O + O^* \begin{cases} \nearrow 2NO \\ \searrow N_2 + O_2 \end{cases}$ | $k_5 = 1,0 \cdot 10^{-10}$ |
| 6. $NO + O_3 \rightarrow NO_2 + O_2$ | $k_6 = 0,9 \cdot 10^{-12} \cdot e^{-1200/T}$ |
| 7. $NO_2 + O \rightarrow NO + O_2$ | $k_7 = 9,12 \cdot 10^{-12}$ |

8. $\text{NO}_2 + h\nu \rightarrow \text{NO} + \text{O}$ J_8
 9. $\text{NO}_2 + \text{O}_3 \rightarrow \text{NO}_3 + \text{O}_2$ $k_9 = 1,1 \cdot e^{-2450/T}$
 10. $\text{NO}_2 + \text{OH} + M \rightarrow \text{HNO}_3 + M$ $k_{10} = 2 \cdot 10^{-30}$
 11. $\text{HNO}_3 + h\nu \rightarrow \text{NO}_2 + \text{OH}$ J_{11}
 12. $\text{HNO}_3 + \text{OH} \rightarrow \text{NO}_3 + \text{H}_2\text{O}$ $k_{12} = 1,3 \cdot 10^{-13}$
 13. $\text{O}^* + M \rightarrow \text{O} + M$ $k_{13} = 6 \cdot 10^{-11}$

Здесь O^* — атом в возбужденном состоянии; M — любая молекула газов воздуха, участвующая в реакции без изменения; k_i — коэффициент скорости реакции в $\text{см}^3/(\text{с} \cdot \text{мол})$ и $\text{см}^6(\text{с} \cdot \text{мол}^2)$ для реакций с двумя и тремя молекулами соответственно; J_i — скорость диссоциации; T — температура в кельвинах; λ — длина волны излучения Солнца в нанометрах ($1 \text{ нм} = 10^{-9} \text{ м}$).

3. Закись азота N_2O , поступающая из тропосферы, является (согласно реакции 5) источником окиси азота NO в стратосфере. Кроме того, окись азота образуется в результате реакции кислорода с атомарным азотом, ионизированным космическими лучами. Ввиду того что реакции 6—8 протекают с большими скоростями, окись азота NO и двуокись азота NO_2 находятся между собой в фотохимическом равновесии, так что концентрации связаны следующим соотношением:

$$\frac{(\text{NO})}{(\text{NO}_2)} = \frac{J_3 k_7}{k_2 k_6 (\text{O}_2)(M)} + \frac{J_8}{k_6 (\text{O}_3)}, \quad (1)$$

где (M) — число молекул газа M в см^3 .

Вследствие этого источники NO в рассматриваемом слое являются одновременно и источниками NO_2 . Окись и двуокись азота вступают в реакцию с озоном и каталитически разрушают его. Азотная кислота HNO_3 становится основным стоком азота в интересующих нас соединениях в рассматриваемом слое.

4. Искомые концентрации — суть решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} L(c_0) + 2 \Lambda_0 \rho c_0 &= 0; \\ L(c_1) + \Lambda_1 \rho c_1 - J_{11} \rho c_2 &= \Lambda_0 \rho c_0 + Q_{\text{косм}}; \\ L(c_2) + \Lambda_2 \rho c_2 - \Lambda_1 \rho c_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь

$$\Lambda_0 = \frac{k_5 J_3^*(\text{O}_3)}{k_{13}(M)}; \quad \Lambda_1 = k_{10}(M)(\text{OH}); \quad \Lambda_2 = J_{11} + k_{12}(\text{OH});$$

$$c_0 = \frac{(\text{N}_2\text{O})}{(M)}; \quad c_1 = \frac{(\text{NO}_2)}{(M)}; \quad c_2 = \frac{(\text{HNO}_3)}{(M)};$$

(M) — плотность воздуха в $\text{мол}/\text{см}^3$; ρ — плотность воздуха в $\text{г}/\text{см}^3$; $Q_{\text{косм}}$ соответствует вкладу реакции кислорода с атомарным азотом, ионизированным космическими лучами, — «космический» источник.

Одномерный оператор переноса имеет вид

$$L(c_i) = \frac{\partial \rho c_i}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \rho k_r \frac{\partial c_i}{\partial r},$$

где k_r — вертикальная составляющая коэффициента макротурбулентной диффузии; r — вертикальная координата; t — время.

Система (2) решается при следующих граничных условиях:

$$\left. \begin{array}{l} \text{для } \text{N}_2\text{O} \quad c_0|_{r=r_H} = \varphi(t); \quad c_0|_{r=r_B} = 0, \\ \text{для } \text{NO}_2 \text{ и } \text{HNO}_3 \quad \left(k_r \frac{\partial c_i}{\partial r} - \Theta_H c_i \right) \Big|_{r=r_H} = 0; \\ \quad \quad \quad \left(k_r \frac{\partial c_i}{\partial r} - \Theta_B c_i \right) \Big|_{r=r_B} = 0, \end{array} \right\} \quad (3)$$

где $i=1,2$; Θ_H (Θ_B) — параметр, учитывающий перенос примеси через нижнюю (верхнюю) границу; $\varphi(t)$ — заданная функция.

Таблица 1

Среднесезонные значения коэффициента k_r , м²/с вертикальной турбулентной диффузии в умеренных северных широтах

Высота, км	I группа				II группа			
	зима	весна	лето	осень	зима	весна	лето	осень
12	7,20	5,00	4,50	5,00	1,95	1,74	1,27	2,34
16	3,20	2,00	1,80	2,15	1,67	1,72	1,38	1,79
20	1,35	0,84	0,42	1,00	1,57	0,94	0,20	0,70
24	0,82	0,41	0,24	0,73	1,39	0,76	0,12	0,53
28	0,62	0,36	0,19	0,55	1,30	0,69	0,09	0,46
32	0,48	0,31	0,17	0,44	1,20	0,69	0,10	0,47
36	0,42	0,29	0,16	0,37	1,35	0,80	0,14	0,56
40	0,41	0,29	0,18	0,37	1,67	1,03	0,26	0,80
44	0,46	0,33	0,23	0,42	2,05	1,47	0,70	1,33
48	0,59	0,38	0,33	0,54	2,98	2,70	2,02	2,70

В качестве начальных условий брались решения стационарной задачи с краевыми условиями (3).

Решение системы (2) и (3) разбивается на два этапа: сначала решается уравнение для N_2O , а затем — система уравнений для NO_2 и HNO_3 . После этого можно найти и NO из соотношения фотохимического равновесия (1).

Для численного интегрирования системы (2) применялся метод сеток. Уравнения были записаны в конечно-разностном виде (с шагами 2 км по вертикали и 15 суток по времени). Решение неявных уравнений (методом прогонки) чередовалось с решением явных уравнений. Такое чередование, согласно [3], обеспечивает 2-й порядок точности разностной аппроксимации по времени.

Ввиду того что коэффициенты, входящие в (2), — периодические функции, счет велся до тех пор, пока искомое поле концентраций не удовлетворяло условию периодичности с заданной точностью.

5. При решении задачи использовались среднесезонные значения коэффициента макротурбулентной диффузии k_r , приведенные в табл. 1. Коэффициенты I группы взяты из [2], коэффициенты II группы, полученные Лютером, — из [11]. Из таблицы следует, что в стратосфере макротурбулентный перенос наиболее интенсивен зимой и наименее — летом. Сезонный ход коэффициента k_r имеет максимальную амплитуду в средней стратосфере (особенно k_r II группы, его зимнее значение на уровне 28 км превосходит летнее более чем в 13 раз) и гораздо слабее выражен у границ слоя. Коэффициенты Лютера моделируют процесс макротурбулентного переноса менее интенсивный в слое 10—20 км и более интенсивный в слое 20—50 км, чем k_r I группы.

Ниже приводится интенсивность космического источника $Q_{\text{косм}}$ на различных высотах r по данным из [10]:

r км	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
$Q_{\text{косм}}$ мол/(см ³ ·с)	32,30	26,90	16,20	8,40	4,20	2,30	1,44	0,79	0,49	0,30

В указанной работе даны 2 варианта значений для $Q_{\text{косм}}$, соответствующие максимуму и минимуму солнечной активности. Нами было взято значение, равное среднему арифметическому этих вариантов.

Были рассмотрены (табл. 2) две группы концентрации гидроксильной группы (ОН). Значения концентрации I группы в табл. 2 близки к рассчитанным оценкам естественного содержания гидроксила в стратосфере у других авторов (см. [11]). Концентрация

Таблица 2

Значения концентрации (10^5 мол/см³) гидроксила (ОН) из [11], принятые в расчетах

Высота, км	I группа			II группа		
	зима	весна, осень	лето	зима	весна, осень	лето
12	0,6	0,7	0,8	1,0	3,0	5,0
16	1,2	1,5	1,8	0,7	1,2	1,8
20	2,5	4,0	5,5	1,5	3,5	5,5
24	6,0	9,0	12,0	10,0	12,0	15,0
28	12,5	17,0	22,0	30,0	35,0	40,0
32	22,0	28,0	35,0	70,0	80,0	90,0
36	40,0	47,0	55,0	150,0	160,0	170,0
40	70,0	77,0	85,0	220,0	230,0	250,0
44	90,0	110,0	120,0	220,0	230,0	250,0
48	90,0	100,0	110,0	150,0	160,0	180,0

Таблица 3

Значения концентрации (10^{11} мол/см³) озона (O_3) и отношения NO/NO_2

Высота, км	(O_3)				NO/NO_2	
	зима	весна	лето	осень	зима	лето
12	15,0	19,8	12,3	5,9	0,18	0,41
16	35,0	30,2	15,8	16,8	0,09	0,45
20	51,0	53,8	35,6	40,3	0,06	0,12
24	45,0	53,0	43,4	46,4	0,07	0,08
28	28,0	31,9	32,7	29,9	0,13	0,11
32	17,0	20,0	20,0	15,2	0,23	0,24
36	11,0	12,0	12,0	12,0	0,41	0,64
40	7,0	7,0	7,0	7,0	1,21	2,3
44	3,0	3,0	3,0	3,0	6,50	14,0
48	0,6	0,6	0,6	0,6	48,3	65,1

(ОН) II группы табл. 2 в 3—4 раза больше в верхней половине слоя, но качественно мало отличается от концентрации I группы. В обеих группах концентрация (ОН) максимальна летом и минимальна зимой, а ее сезонный ход заметен лишь на нижних уровнях. Использование этих групп позволяет оценить влияние изменения концентрации (ОН) на содержание окислов азота в стратосфере.

Данные о содержании озона взяты из [11] и указаны в табл. 3, из которой видно, что концентрация озона максимальна на высотах

Таблица 4

Скорости диссоциации озона J_3^* (верхняя ветвь реакции 3) и азотной кислоты J_{11}

Высота, км	$J_3^* \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$				$J_{11} \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$		
	зима	весна	лето	осень	зима	весна, осень	лето
12	1,8	1,5	8,0	2,5	2,9	6,5	6,2
16	2,6	2,0	9,7	3,5	3,9	8,0	7,8
20	4,6	6,4	14,6	6,6	4,6	9,6	9,5
24	10,9	20,0	31,6	16,8	5,2	12	14
28	26,5	56,2	73,1	42,0	5,9	19	22
32	57,4	115	148	82,3	7,0	26	31
36	120	220	285	156	17	38	47
40	264	487	649	344	42	76	87
44	821	1460	2080	1150	100	150	170
48	2670	3680	4210	2780	170	240	270

20—24 км. Сезонный ход (O_3) заметен лишь в нижней части изучаемого слоя. В табл. 3 имеются также зимние и летние значения отношения (NO)/(NO_2), вычисленные по формуле (1).

Среднесуточные скорости диссоциации озона J_3^* (верхняя ветвь реакции 3) и азотной кислоты J_{11} в табл. 4 были вычислены по формулам, данным в [1]. Значения концентрации N_2O на нижней границе (на уровне 10 км) взяты из [10].

Непрерывная по времени зависимость вышеуказанных параметров, заданных среднесезонными значениями, получалась с помощью простой тригонометрической интерполяции.

Т а б л и ц а 5

Варианты расчета и использованные в них параметры

Параметр	Номер варианта						
	1	2	3	4	5	6	7
k_r	I гр.	II гр.	I гр.	II гр.	I гр.	II гр.	I гр.
(ОН)	I гр.	I гр.	II гр.	II гр.	I гр.	I гр.	I гр.

Примечание. В вариантах 5 и 6 $Q_{\text{косм}}=0$; в варианте 7 $\Delta_1 = \bar{k}_{10} (M) \times \times (\text{ОН}) + k_9(O_3)$.

6. Рассмотрим процесс установления периодичности решения. В большинстве вариантов расчета условие периодичности с точностью до 10% выполнялось на четвертом году модельного времени. Двух лет этого времени достаточно для установления поля концентраций в слое 10—30 км, где оно в основном определяется переносом. Остальное время нужно для установления поля концентраций выше уровня 30 км.

В табл. 5 указаны варианты расчета и использованные в них параметры модели.

На рис. 1 представлены январские и июльские вертикальные профили отношения смеси N_2O для вариантов 1 и 2 табл. 5 (I и II группы коэффициента макротурбулентной диффузии). Для переходных сезонов значения лежат между приведенными на графике профилями. Анализ этих профилей и их сравнение с данными измерений, также указанными на рис. 1, показывает, что сезонное изменение c_0 невелико. Меньшие k_r I группы в верхней стратосфере приводят к меньшим c_0 , которые ближе, чем c_0 с k_r II группы, к единственному измеренному c_0 в слое 40—50 км [11]. Однако в средней стратосфере все расчетные значения заметно выше измеренных во все сезоны. Вероятно, это связано с неучетом в рассматриваемой одномерной модели упорядоченного переноса, который направлен вниз в нижней и средней атмосфере умеренных широт и должен приводить там к более быстрому убыванию c_0 с высотой, особенно зимой.

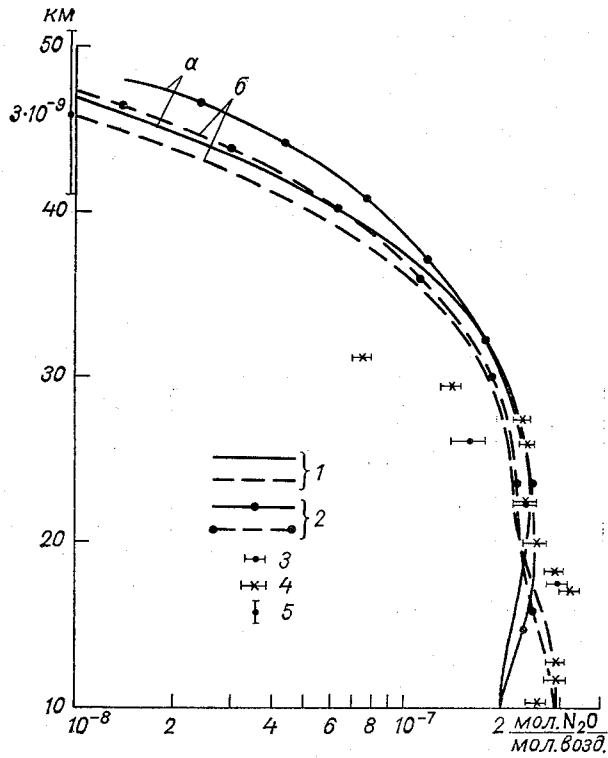


Рис. 1. Январские (а) и июльские (б) вертикальные профили N_2O для k_r .
 1 — I группа, 2 — II группа, 3 — измеренные значения из [12], 4 — из [7], 5 — из [6].

На рис. 2 и 3 вертикальные профили отношений смеси c_1 и c_2 NO_2 и HNO_3 (варианты 1, 2 табл. 5) хорошо согласуются с данными измерений [11], если учесть, что почти все измерения производились в теплое полугодие. Для расчетных концентраций c_1 сезонный ход существен только в слое 28—38 км и мало заметен в остальных частях рассматриваемого слоя. Сезонные изменения HNO_3 незначительны. Сравнение кривых, полученных из условия фотохимического равновесия между NO_2 и HNO_3 , с кривыми варианта 1 (k_r I группы) показывает, что выше 30 км летом и 38 км зимой содержание примеси определяется фотохимическими процессами, а вклад турбулентного переноса в этом случае незначителен. Гораздо большие k_r II группы в верхней стратосфере приводят к заметному отклонению содержания HNO_3 и особенно NO_2 от фотохимически равновесного, что представляется нереальным. Эти значения k_r , вероятно, существенно завышены.

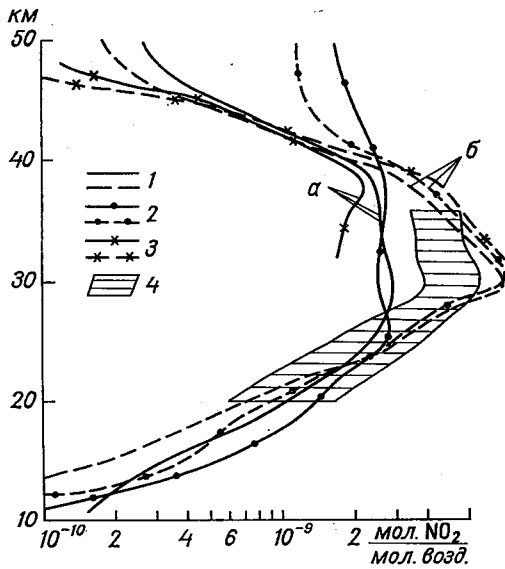


Рис. 2. Январские (а) и июльские (б) вертикальные профили NO_2 для k_r .
 1 — I группа, 2 — II группа, 3 — фотохимически равновесные, 4 — измеренные значения.

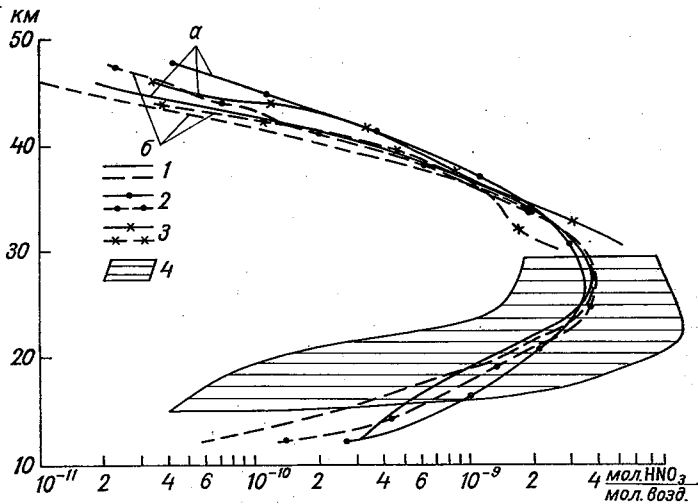


Рис. 3. Январские (а) и июльские (б) вертикальные профили HNO_3 для k_r .
 Усл. обозн. см. рис. 2.

На рис. 4 представлены рассчитанные оценки вклада каждой из примесей (варианты 1, 2 табл. 5) в их сумму $(NO_x) = (NO) + (NO_2) + (HNO_3)$. Взятые для сопоставления данные наблюдений приведены в [4] и [8]. Концентрация (NO) вычислялась по формуле (1). Из рис. 4 видно, что ниже 25 км вклад NO в сумму NO_x не превышает 10%, а вклад HNO_3 составляет свыше половины NO_x . Выше 35 км NO превалирует над остальными слагаемыми в NO_x .

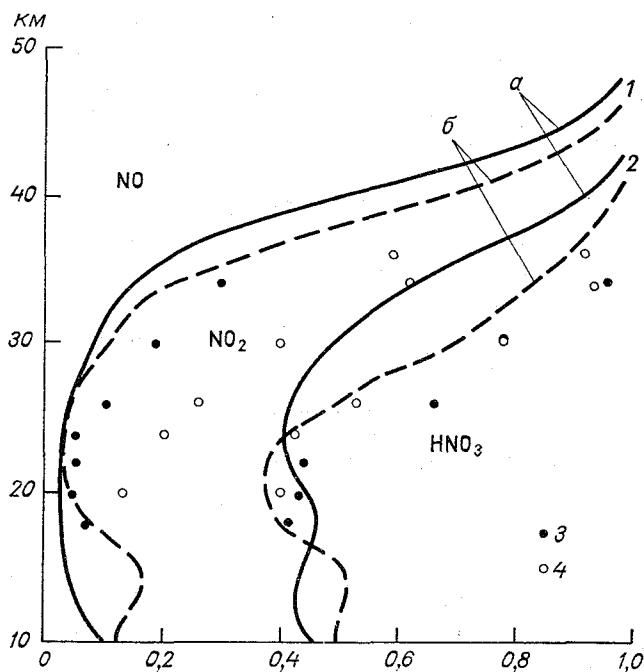


Рис. 4. Январские (а) и июльские (б) вертикальные профили относительной доли концентраций NO , NO_2 , HNO_3 в их сумме NO_x .

Для каждой пары линий: 1 — значения $(NO)/(NO_x)$, 2 — $[(NO)+(NO_2)]/(NO_x)$, 3 — измеренные значения относительной доли из [8], 4 — из [4].

При использовании концентрации (OH) II группы (варианты 3, 4 табл. 5) концентрация NO_2 в 2—4 раза меньше приведенной на рис. 2 и существенно отклоняется от измеренных значений. Варианты 5 и 6 табл. 5 позволили оценить вклад космического источника в образование соединений азота. Оказалось, что вклад этого источника существен лишь в нижней половине рассматриваемого слоя, где он достигает 70% на уровне 15 км, 25% на уровне 25 км, а в слое 30—50 км вклад источника $Q_{\text{косм}}$ не превышает 5%. Этот вывод совпадает с результатами расчетов в [5, 9, 10] по стационарной модели.

Учет реакции 9 (добавление слагаемого $k_9(O_3)$ в Λ_1 в варианте 7 табл. 5) привел к уменьшению концентрации NO_2 почти на порядок

по сравнению с концентрацией вариантов 1, 2 табл. 5 и данных измерений. Это показывает, что «сток» NO_2 в рассмотренной фотохимической схеме, определяемый этой реакцией, в действительности скорее всего компенсируется притоком NO_2 от фотодиссоциации NO_3 и, возможно, других высших окислов азота.

7. Описываемая в работе фотохимическая схема и модель вертикального переноса удовлетворительно описывают наблюдаемые распределения соединений азота, определяющих фотохимический сток озона в стратосфере. Эта схема может быть использована для оценки влияния антропогенных источников окислов азота в атмосфере, их выбросов двигателями высотных самолетов при их массовых полетах в стратосфере (см. [1]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кароль И. Л. Высотные самолеты и стратосфера. Л., Гидрометеиздат, 1974. 48 с.
2. Кароль И. Л. Радиоактивные изотопы и глобальный перенос в стратосфере. Л., Гидрометеиздат, 1972. 363 с.
3. Саульев В. К. Численное интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., Физматгиз, 1960.
4. Ackerman M. e. a. Simultaneous measurements of NO and NO_2 in Stratosphere.—„Planetary and Space Science”, 1975, vol. 23, N. 4, p. 651—660.
5. Brasseur G., Nicolet M. Chemospheric processes of nitric oxide in the mesosphere and stratosphere.—„Planetary and Space Science”, 1973, vol. 21, N. 6, p. 939—962.
6. Ehhalt D. H. e. a. Concentrations of CH_4 , CO , CO_2 , H_2 , H_2O and NO_2 in the upper stratosphere.—„J. Atm. Sci.”, 1975, vol. 32, 1, p. 163—169.
7. Ehhalt D. H. e. a. Vertical profiles of CH_4 , H_2 , CO , N_2O and CO_2 in the stratosphere.—Proc. Third Conf. on the Climat Impact Assessm. Program. Febr. 26—March 1, 1974. DOT-TST-OST-74-15, Camb. Mass., p. 153—160.
8. Evans W. F., Kerr J. B. and Wardle D. J. The AES stratospheric Balloon Measurements Project: Preliminary results.—Internal Report NO, APRB 30x4, 1975, 16 p.
9. Krishna Rao Vupputuri R. Seasonal and latitudinal variations of N_2O and NO_x in the stratosphere.—„J. of Geophysical Research”, 1975, vol. 80, N 9, p. 1125—1132.
10. Nicolet M. On the production of nitric oxide by cosmic rays in the mesosphere and stratosphere.—„Planetary and Space Science”, 1975, vol. 23, N. 4, p. 637—649.
11. The natural stratosphere of 1974, CIAP Monograph 1, DOT-TST-75-51, Washington, D. C., 1975.
12. Schmeltekopf A. L. e. a. Measurements of stratospheric CFCl_3 , CF_2Cl_2 and N_2O .—„Geophys. Res. Letters”, 1975, vol. 2, N 8,

Л. Р. Дмитриева-Араго, Л. В. Самойлова

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО МЕТОДА РАСЧЕТА ПОТОКА СУММАРНОЙ РАДИАЦИИ В АТМОСФЕРЕ

Расчет радиационного притока тепла в моделях крупномасштабных атмосферных движений требует разработки методов, которые бы оптимальным образом в вычислительном отношении учитывали основные физические процессы, влияющие на перенос радиации, процессы поглощения и рассеяния.

Наиболее трудным в этом смысле является описание процесса рассеяния в атмосфере, который перераспределяет в пределах атмосферы энергию, приходящую от солнца, регулирует приход энергии на подстилающую поверхность и потери в мировое пространство. В данной статье будут оценены погрешности, которые вносятся в метод расчета потока суммарной радиации в атмосфере предположением о малом влиянии альбеда на этот поток. Это предположение значительно упрощает расчетную схему.

В работе [1] получена формула для расчета монохроматического потока суммарной радиации, приходящей на подстилающую поверхность в чисто рассеивающей атмосфере:

$$Q_0(\lambda) = I_0(\lambda) \zeta B_0^*(\lambda), \quad (1)$$

где

$$B_0^*(\lambda) = \frac{2R_0}{4 + (3 - x_1)(1 - a)\tau_0(\lambda)}; \quad (2)$$

$$R_0 = 1 + 3/2\zeta + (1 - 3/2\zeta)e^{-\tau_0(\lambda)\sec i}; \quad (3)$$

$$\tau_0(\lambda) = \tau_{0a}(\lambda) + \tau_{0p}(\lambda); \quad (4)$$

$$x_1 = 3/2 \int_0^\pi \chi(\gamma) \cos \gamma \sin \gamma d\gamma; \quad (5)$$

$$\zeta = \cos i,$$

i — зенитное расстояние солнца; τ_0 — оптическая толщина всей толщи атмосферы; τ_{0a} — аэрозольная оптическая толщина атмосферы; τ_{0p} — релеевская оптическая толщина атмосферы; x_1 — вытянутость

индикатрисы расстояния; a — альbedo подстилающей поверхности; $x(\gamma)$ — индикатриса рассеяния; γ — угол рассеяния.

В работе [2] был предложен метод расчета потока суммарной радиации на различных уровнях в атмосфере.

Приближенная формула для расчета интегрального потока на уровень z в рассеивающей и поглощающей атмосфере имеет следующий вид:

$$Q_k^\infty = \int_{\lambda} I_0(\lambda) \zeta B_k^*(\lambda) T(x_k^\infty, \lambda) d\lambda, \quad (6)$$

где

$$B_k^*(\lambda) = \frac{2R_k}{4 + (3 - x_1)(1 - a)\tau_k(\lambda)}; \quad (7)$$

$$R_k = 1 + 3/2\zeta + (1 - 3/2\zeta)e^{-\tau_k(\lambda)/\zeta}; \quad (8)$$

$$\tau_k(\lambda) = \tau_{0p}(\lambda)e^{-\alpha z_k} + \tau_{0a}(\lambda)e^{-\beta z_k}; \quad (9)$$

$T(x_k^\infty \lambda)$ — функция пропускания H_2O , CO_2 или O_3 в соответствующем участке спектра, коэффициенты α и β характеризуют убывание с высотой оптических толщин релеевского и аэрозольного рассеяния.

Функция $B_k^*(\lambda)$, описывающая рассеяние в атмосфере, аналогична функции, предложенной в [1] для расчетов на уровне земли в чисто рассеивающей атмосфере.

Оценим, каковы погрешности в значениях потока суммарной радиации, обусловленные приближенностью функции $B_k^*(\lambda)$, рассчитываемой по формуле (7). Получим, следуя В. В. Соболеву [1], формулу для функции $B_k^*(\lambda)$ из приближенного решения уравнения переноса.

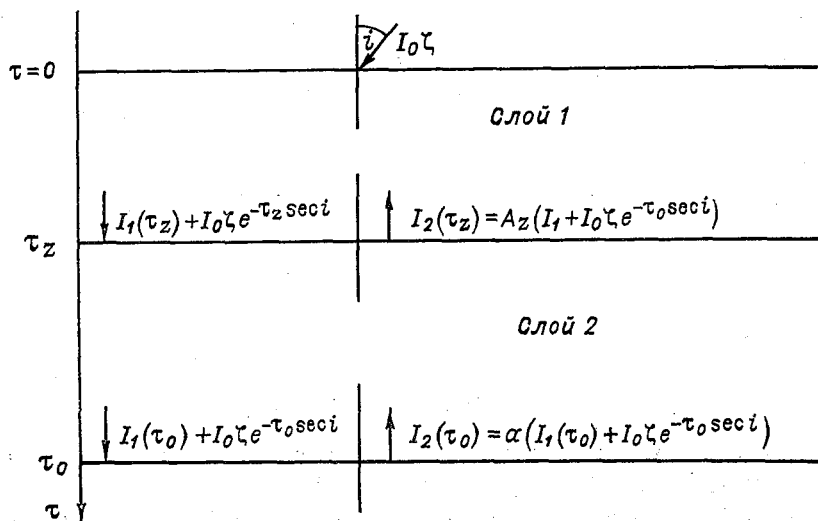


Рис. 1. Схема задачи.

Рассмотрим двуслойную задачу. Разделим атмосферу на два слоя. Верхний слой от $\tau_0=0$ до $\tau=\tau_k$ (слой 1) представляет собой тот слой, который проходит поток солнечной радиации до расчетного уровня $\tau_k=\tau(z_k)$.

Слой от τ_k до τ_0 (слой 2) есть слой, формирующий восходящий поток на уровень τ_k , обусловленный рассеянием в этом слое и отражением от подстилающей поверхности.

На рис. 1 через I_1 обозначена интенсивность подающего диффузного излучения, I_2 — интенсивность отраженного излучения, A_z — альbedo системы подстилающая поверхность — слой атмосферы $(0, z)$.

Для интенсивности диффузного излучения, осредненного по азимуту $I(\tau, \eta, \zeta)$, для чисто рассеивающей атмосферы в [1] получено уравнение

$$\eta \frac{dI(\tau, \eta, \zeta)}{d\tau} = -I(\tau, \eta, \zeta) + \bar{I}(\tau, \zeta) + x_1 \bar{H}(\tau, \zeta) \eta + \frac{I_0}{4} (1 + x_1 \eta \zeta) e^{-\tau/\kappa}, \quad (10)$$

где

$$\bar{I}(\tau, \zeta) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I(\tau, \eta, \zeta) d\eta; \quad (11)$$

$$\bar{H}(\tau, \zeta) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I(\tau, \eta, \zeta) \eta d\eta; \quad (12)$$

$\bar{I}(\tau, \zeta)$ — средняя по сфере, осредненная по азимуту интенсивность; $\bar{H}(\tau, \zeta)$ — средний по сфере поток, осредненный по азимуту.

Следуя [1], путем интегрирования уравнения (10) по η от -1 до $+1$ находим

$$\frac{d\bar{H}(\tau, \zeta)}{d\tau} = \frac{I_0}{4} e^{-\tau/\kappa}. \quad (13)$$

Умножая (10) на η , интегрируя по η от -1 до $+1$ и пользуясь приближенным соотношением (приближение Эдингтона)

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \bar{I}(\tau, \eta, \zeta) \eta^2 d\eta = \frac{1}{3} \bar{I}(\tau, \zeta), \quad (14)$$

находим

$$\frac{d\bar{I}(\tau, \zeta)}{d\tau} = -(3 - x_1) \bar{H}(\tau, \zeta) + x_1 \frac{I_0}{4} e^{-\tau/\kappa} \zeta. \quad (15)$$

Здесь x_1 — первый член разложения индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра, определяемый (5).

Найдем граничные условия для решения уравнений (13), (15) в слое 1.

Граничные условия на уровне $\tau=0$ получены в [1] в предположении отсутствия диффузионного потока, падающего на верхнюю границу атмосферы,

$$\bar{H}(0, \zeta) = -\frac{1}{2} I(0, \zeta). \quad (16)$$

Второе граничное условие, связывающее величины \bar{H} и I на нижней границе слоя 1, получим, предполагая, что на слой 1 снизу падает поток радиации, отраженный системой подстилающая поверхность — слой 2. Отражательную способность этого слоя будем характеризовать альбедо системы, которое обозначим A_z .

Интенсивность диффузного излучения, приходящего на нижнюю границу слоя 1, обозначим I_1 . Кроме этого, на нижнюю границу падает направленное солнечное излучение. Суммарная интенсивность, приходящая сверху на уровень τ_h , равна

$$I_1 + I_0 \zeta e^{-\tau_h \zeta}. \quad (17)$$

Интенсивность отраженного на нижней границе слоя 1 излучения равна

$$I_2 = A_z(I_1 + I_0 \zeta e^{-\tau_h \zeta}). \quad (18)$$

Из выражения (12) для $\bar{H}(\tau, \zeta)$ при $\tau = \tau_h$ получим

$$\bar{H}(\tau_h, \zeta) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I(\tau_h, \eta, \zeta) \eta d\eta. \quad (19)$$

Представим интеграл, входящий в (19); в виде суммы интегралов по верхней и нижней полусфере

$$\bar{H}(\tau_h, \zeta) = \frac{1}{2} \int_0^{+1} I_1(\tau_h, \eta, \zeta) \eta d\eta + \frac{1}{2} \int_{-1}^0 I_2(\tau_h, \eta, \zeta) \eta d\eta, \quad (20)$$

где I_1 — интенсивность диффузного излучения, приходящего сверху в нижнюю полусферу, а I_2 — снизу в верхнюю полусферу.

Вынесем средние значения интенсивности I_1 и I_2 за знак интеграла, тогда при $\tau = \tau_h$ получим условие

$$\bar{H}(\tau_h, \zeta) = \frac{1}{4} (\bar{I}_1 - \bar{I}_2). \quad (21)$$

Кроме (21), необходимо преобразовать еще выражение (11) для $I(\tau, \zeta)$

$$\bar{I}(\tau, \zeta) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I(\tau, \eta, \zeta) d\eta.$$

Используя введенные нами обозначения, напомним

$$\bar{I}(\tau, \zeta) = \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^0 I_2 d\eta + \int_0^{+1} I_1 d\eta \right] \approx \frac{1}{2} (\bar{I}_1 + \bar{I}_2). \quad (22)$$

Из (21) и (22) найдем выражение, связывающее \bar{H} и \bar{T} при $\tau = \tau_k$,

$$\bar{T} - 2\bar{H} = A_z(\bar{T} + 2\bar{H} + I_0 \zeta e^{-\tau \zeta}). \quad (23)$$

Решения уравнений (13) и (15) для слоя 1 при условиях (16) и (23) имеют вид:

$$\bar{H}(\tau, \zeta) = F - \frac{I_0}{4} \zeta e^{-\tau \zeta}; \quad (24)$$

$$\bar{T}(\tau, \zeta) = C - (3 - x_1)F\tau - \frac{3}{4} I_0 \zeta^2 e^{-\tau \zeta}. \quad (25)$$

Следуя В. В. Соболеву, определим постоянные интегрирования из условий (16) и (23):

$$C = \frac{I_0}{2} \zeta(1 + 3/2 \zeta) - 2F. \quad (26)$$

$$F = \frac{I_0}{2} \zeta(1 - A_z) \frac{R_k}{4 + (3 - x_1)(1 - A_z)\tau}. \quad (27)$$

Величина $4\pi F$ представляет собой осредненный по азимуту полный поток излучения, постоянный по высоте. Этот поток может быть рассчитан по заданным величинам x_1 , τ , i и A_z для данного уровня и в том числе для всей толщи атмосферы, если заданы a и полная оптическая толщина τ_0 .

Как известно, полный сферический поток $4\pi F$ можно представить как разность освещенностей сверху и снизу на данном уровне z :

$$4\pi F = (1 - A_z)Q_k. \quad (28)$$

Здесь Q_k — освещенность нижней границы слоя 1, имеющая вид

$$Q_k = I_0 \zeta B_k^*, \quad (29)$$

где

$$B_k^* = \frac{2R_k}{4 + (3 - x_1)(1 - A_z)\tau_k(\lambda)}. \quad (30)$$

Величина B_k представляет собой функцию, преобразующую поток, приходящий на верхнюю границу атмосферы, в освещенность на нижней границе слоя атмосферы $(0, \tau_k)$. Если считать значение A_z для любого уровня в атмосфере известным, то формула (29) может быть использована для расчета потока суммарной радиации на любом уровне в чисто рассеивающей атмосфере, аналогично формуле (2) для подстилающей поверхности.

В работе [2] была предложена формула для расчета потока суммарной радиации, в которой для упрощения расчетов в функции B_k^* альbedo A_z заменено на альbedo подстилающей поверхности a . Для целей численного моделирования крупномасштабных атмосферных

Таблица

Альbedo системы подстилающая поверхность — слой атмосферы (0, z)
при различных i

α	z км	20°		40°		60°		70°	
		τ							
		0,3	0,55	0,3	0,55	0,3	0,55	0,3	0,55
0,2	0,5	0,211	0,218	0,216	0,225	0,227	0,282	0,242	0,249
	3,0	0,229	0,263	0,245	0,292	0,286	0,368	0,329	0,414
	5,0	0,232	0,267	0,250	0,298	0,297	0,376	0,346	0,432
0,4	0,5	0,404	0,408	0,408	0,413	0,418	0,456	0,428	0,431
	3,0	0,411	0,428	0,423	0,45	0,455	0,508	0,487	0,544
	5,0	0,412	0,429	0,426	0,453	0,462	0,513	0,499	0,558
0,6	0,5	0,6005	0,502	0,603	0,605	0,61	0,633	0,616	0,617
	3,0	0,6008	0,605	0,609	0,619	0,630	0,660	0,652	0,684
	5,0	0,6	0,604	0,611	0,621	0,634	0,662	0,659	0,693
0,8	0,5	0,799	0,800	0,8003	0,801	0,804	0,814	0,807	0,806
	3,0	0,7964	0,794	0,801	0,802	0,812	0,823	0,822	0,836
	5,0	0,7968	0,794	0,801	0,802	0,813	0,824	0,826	0,84

процессов расчет потоков радиации производится по рассчитанным в модели значениям влажности и облачности при средних значениях характеристик рассеивающих свойств атмосферы. Все эти значения известны достаточно приближенно. Поэтому пренебрежение влиянием слоя атмосферы, прилегающего к подстилающей поверхности, на альbedo не должно приводить к существенным погрешностям

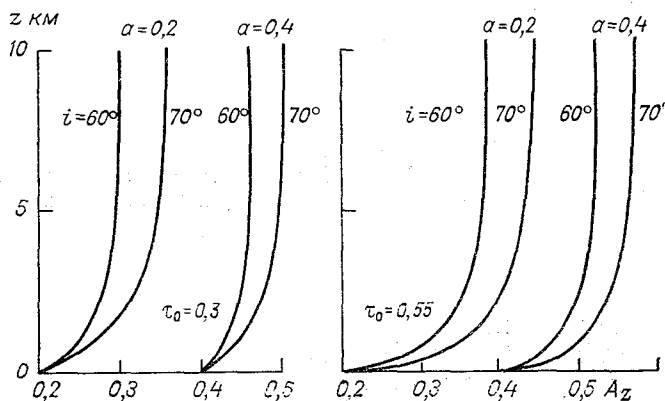


Рис. 2. Вертикальный профиль альbedo системы слой атмосфера — подстилающая поверхность.

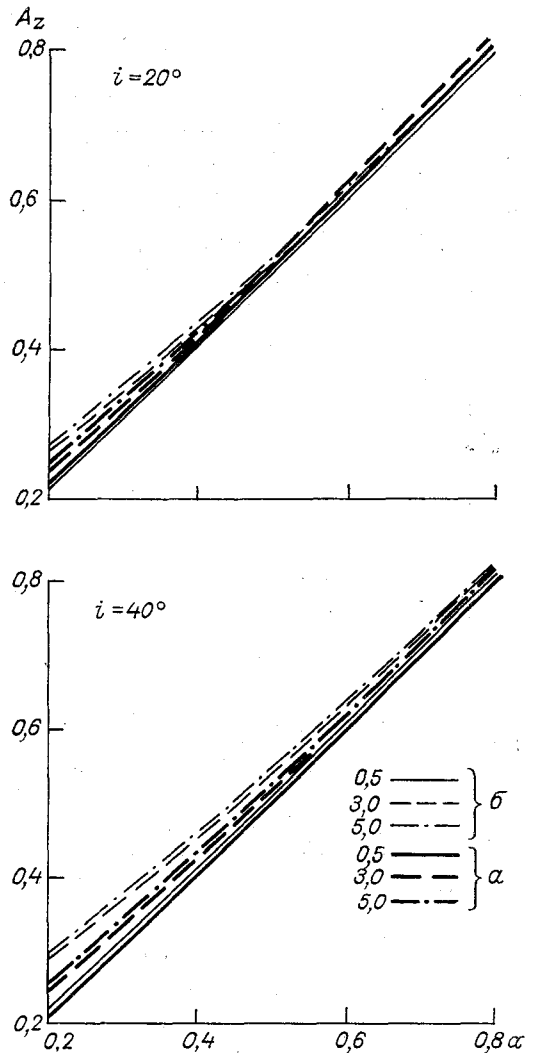
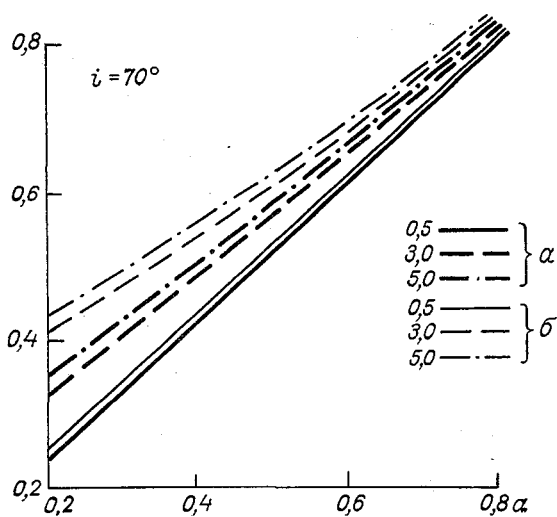
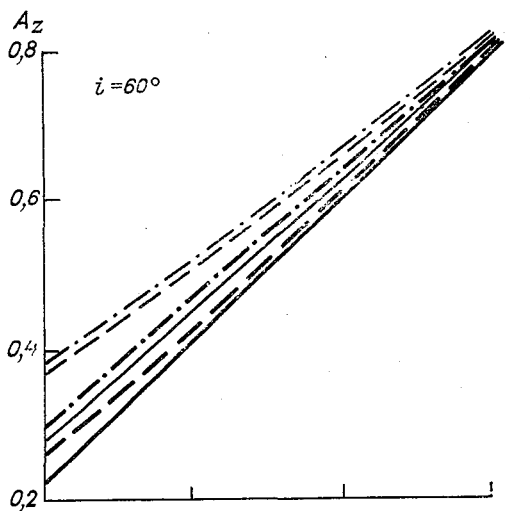


Рис. 3. Зависимость альbedo системы A_z от
 них зенитных углах солнца и оптических
 а) $\tau_0 = 0,3$.

при расчетах потоков по сравнению с погрешностью, которую вносят упомянутые выше величины. В то же время это упрощение значительно облегчает расчеты, так как расчет альbedo системы представляет собой достаточно сложную задачу. Из анализа формулы (30) следует, что член, содержащий A_z , складывается с числом 4, т. е. является поправочным слагаемым.



альbedo подстилающей поверхности a при различных толщинах атмосферы.

б) $\tau_0 = 0,5$.

Для того чтобы оценить, какова погрешность расчета потоков по формуле (6) с использованием формулы (7) для B_k^* вместо формулы (30), необходимо 1) рассчитать значения A_z при заданных a и τ и 2) рассчитать потоки с учетом формул (7) и (30).

Для определения альbedo системы подстилающая поверхность — слой атмосферы требуется вычисление яркости этого слоя, которая

может быть рассчитана по формулам, предложенным, например, в работе [1]. Эти расчеты, однако, достаточно сложны.

Ниже используется сравнительно простой метод определения A_z в чисто рассеивающей атмосфере.

Так как сферический поток $4\pi F$ постоянен по высоте, то, учитывая (28—30), напомним:

$$(1 - A_z) \frac{2R_k}{4 + (3 - x_1)(1 - A_z)\tau_z} = (1 - a)Q_0 = 4\pi F, \quad (31)$$

где Q_0 определяется формулой (1).

Таблица 2

Потоки суммарной радиации на разных уровнях в атмосфере при значении альbedo $a=0,2$ и изменяющемся с высотой A_z при различных i

z км	A_z	60°		70°		60°		70°	
		$Q(A_z)$	$Q(a)$	$Q(A_z)$	$Q(a)$	$Q(A_z)$	$Q(a)$	$Q(A_z)$	$Q(a)$
		$\tau_a=0,3$				$\tau_a=0,55$			
0	0,2	0,666	0,668	0,421	0,4102	0,631	0,6178	0,385	0,3775
0,078	0,2	0,667	0,668	0,421	0,4106	0,632	0,6185	0,385	0,3779
1,24	0,26	0,674	0,676	0,426	0,4175	0,639	0,6293	0,390	0,3843
2,69	0,28	0,683	0,685	0,432	0,4256	0,648	0,6420	0,394	0,3919
5,07	0,3	0,693	0,695	0,437	0,4347	0,657	0,6566	0,400	0,4003
7,95	0,3	0,703	0,705	0,444	0,4448	0,667	0,6736	0,406	0,4097
8,44	0,3	0,856	0,859	0,540	0,5415	0,812	0,820	0,494	0,4988
8,57	0,3	0,896	0,899	0,565	0,5667	0,850	0,858	0,517	0,5220
10,8	0,3	0,907	0,966	0,573	0,5731	0,875	0,8714	0,536	0,5343
14,7	0,3	0,928	0,927	0,592	0,5917	0,910	0,9076	0,570	0,5684

Из (31) можно получить формулу для вычисления A_z ,

$$1 - A_z = \frac{4Q_0(1 - a)}{2R_k - (1 - a)(3 - x_1)Q_0\tau_k}. \quad (32)$$

Как следует из (31), для расчета A_z требуется знать Q_0 , a , τ_z , x_1 , τ_h , i . В табл. 1 представлены рассчитанные по формуле (32) значения A_z , при разных значениях i , a , τ и $x_1=1$, 2.

На рис. 2 а, б представлены вертикальные распределения значений A_z при разных оптических толщинах атмосферы. Из рисунков видно, что начиная с некоторого уровня альbedo перестает изменяться. Этот уровень находится в окрестности 4—5 км, где содержание аэрозоля в принятой нами модели практически отсутствует.

На рис. 3 представлена зависимость A_z от a .

Чтобы оценить, насколько отличается альbedo системы от альbedo подстилающей поверхности и при каких условиях эти различия

максимальны, были рассчитаны относительные изменения $\Delta A_z/a = A_z/a - 1$ для различных уровней z значений альbedo, высот солнца и оптических толщин атмосферы (табл. 1). Рассмотрены два состояния замутненности атмосферы: средней мутности ($\tau_0 = 0,3$) и сильной мутности ($\tau_0 = 0,55$). Последнее характеризует предельный случай для безоблачной атмосферы.

Из таблицы следует, что наибольшие различия имеют место при малых значениях альbedo подстилающей поверхности и больших зенитных расстояниях.

Для того чтобы оценить влияние на потоки суммарной радиации замены A_z на a , были выполнены расчеты этих потоков при значениях A_z , полученных заранее по формуле (32), и при значениях a , соответствующих данному A_z для случаев наибольших отклонений A_z от a . Результаты расчетов представлены в табл. 2. Из таблицы следует, что расхождения в потоках меньше 1%. Следовательно, предложенное упрощение расчетов дает весьма малые погрешности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет. М., «Наука», 1972, 336 с.
2. Дмитриева - Арраго Л. Р., Самойлова Л. В. К расчету поля коротковолновой радиации в схеме общей циркуляции атмосферы.— «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1970, т. 6, № 1, с. 29—36.
3. Шифрин К. С., Авасте О. А. Потоки коротковолновой радиации в безоблачной атмосфере.— В кн.: Исследования по физике атмосферы. № 2, Тарту, Изд. Ин-та физики и астрономии АН ЭССР, 1960, с. 14—21.
4. Vigroux E. Contributions á l'étude expérimentale de l'absorption de l'ozone Ann, phys, 8, 1953.

Л. Р. Дмитриева-Араго, Т. Н. Горбунова

ЗАВИСИМОСТЬ ВОСХОДЯЩЕГО ПОТОКА РАССЕЯННОГО КОРОТКОВОЛНОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ОПТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ АТМОСФЕРЫ

Поток восходящего коротковолнового излучения на некотором уровне в атмосфере является одной из составляющих радиационного баланса слоя атмосферы. Этот поток регулирует радиационную энергетику отдельного слоя атмосферы и всей толщи атмосферы в целом. Поток восходящего коротковолнового излучения состоит из двух частей: потока, отраженного от подстилающей поверхности, и потока, рассеянного атмосферой вверх. Достаточно простой метод расчета отраженного от подстилающей поверхности потока предложен в работах [1, 2, 3].

Наибольшую трудность представляет расчет потока, рассеянного атмосферой. Для определения этого потока необходимы сведения об оптических свойствах атмосферы: о значениях и вертикальном профиле коэффициента рассеяния $\sigma(z)$ и индикатрисы рассеяния $\kappa(\gamma)$. Эти свойства зависят от аэрозольного состава атмосферы.

Оптическое состояние атмосферы может быть описано с помощью двухпараметрической модели атмосферы, предложенной К. С. Шифриным и И. Н. Мининым, где в качестве основных параметров выбраны полная оптическая толщина атмосферы τ_0 и горизонтальная дальность видимости S_0 . Для слоя аэрозоля, лежащего вблизи земной поверхности, коэффициент рассеяния может быть представлен в виде

$$\sigma(z, \lambda) = a(0, \lambda)e^{-\alpha z} + b(0, \lambda)e^{-\beta z}, \quad (1)$$

где

$$a(0, \lambda) = \frac{a_0}{\lambda^4}; \quad (2)$$

$$b(0, \lambda) = \frac{b_0 \lambda_0}{\lambda}; \quad (3)$$

$a(0, \lambda)$ — коэффициент релеевского рассеяния; a_0 — коэффициент релеевского рассеяния при $\lambda = \lambda_0$; $b(0, \lambda)$ — коэффициент аэрозольно-

го рассеяния; b_0 —коэффициент аэрозольного рассеяния вблизи земной поверхности при $\lambda = \lambda_0$, где $\lambda_0 = 0,55$ мкм.

Оптическая толщина слоя атмосферы (∞, z) вычисляется по формуле

$$\tau(\lambda) = \int_z^{\infty} \sigma(z, \lambda) dz. \quad (4)$$

Для всей толщи z атмосферы имеем

$$\tau_0(\lambda) = \int_0^{\infty} \sigma(z, \lambda) dz. \quad (5)$$

Подставив σ из (1) в (4), получим

$$\tau = \tau_{0p} e^{-\alpha z} + \tau_{0a} e^{-\beta z}, \quad (6)$$

где

$$\tau_{0p} = \frac{a(0, \lambda)}{\alpha}; \quad (7)$$

$$\tau_{0a} = \frac{b(0, \lambda)}{\beta}; \quad (8)$$

Коэффициенты β и $b(0, \lambda)$ связаны с τ_0 и S_0 следующими отношениями:

$$S_0 = \frac{3,91}{a(0, \lambda_0) + b(0, \lambda_0)}; \quad (9)$$

$$\tau_0(\lambda_0) = \frac{a(0, \lambda_0)}{\alpha} + \frac{b(0, \lambda_0)}{\beta}. \quad (10)$$

Значения $a(0, \lambda_0)$ и α , характеризующие релеевское рассеяние, известны:

$$a(0, \lambda_0) \approx 0,0119 \text{ 1/км}, \quad \alpha \approx 0,125 \text{ 1/км}.$$

Таким образом, по данным измерений τ_0 и S_0 можно определить характеристики оптического состояния атмосферы, необходимые для расчета потока рассеянного излучения.

Предложенные в [2, 4] методы расчета потока рассеянной радиации достаточно сложны для использования в моделях крупномасштабных атмосферных процессов. Необходимо поэтому произвести возможные упрощения и оценить возникающие в результате этого погрешности.

Для интенсивности излучения слоя в данном направлении в [2, 5] получено следующее выражение:

$$I_i(\tau, \theta, \varphi) = \int_{\tau}^{\tau_0} B(\tau', \theta, \varphi) e^{-(\tau' - \tau) \sec \theta} \sec \theta d\tau', \quad (11)$$

где функция источника B для излучения, идущего вверх, имеет вид:

$$B(\tau, \theta, \varphi) = J_0(\tau) - x_1 H(\tau) \cos \theta + \frac{I_0}{4\pi} x(\gamma) e^{-\tau \sec i}. \quad (12)$$

Здесь

$$x_1 = 3/2 \int_0^\pi x(\gamma) \sin \gamma d\gamma; \quad (13)$$

$$J_0(\tau) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi I(\tau, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta; \quad (14)$$

$$H(\tau) = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi I(\tau, \theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta; \quad (15)$$

J_0 — средняя интенсивность диффузного излучения; $4\pi H(\tau)$ — поток диффузного излучения в направлении возрастающих значений τ . Из (14) и (15) с помощью (11) и (12)

$$J_0(\tau) = C - (3 - x_1)F\tau - \frac{3}{4\pi} I_0 e^{-\tau \sec i} \cos^2 i, \quad (16)$$

$$H(\tau) = F - \frac{1}{4\pi} I_0 e^{-\tau \sec i} \cos i. \quad (17)$$

Входящие в (16) и (17) постоянные C и F определяются в [1] из следующих граничных условий:

- 1) при $\tau=0$ отсутствует поток диффузного излучения, падающий на атмосферу сверху;
- 2) при $\tau=\tau_0$ атмосфера освещается снизу отраженным излучением

$$I_2 = a(I_1 + S \cos i e^{-\tau_0 \sec i}), \quad (18)$$

где I_1 — интенсивность падающего излучения, $S \cos i e^{-\tau_0 \sec i}$ — поток прямого излучения, падающего на поверхность. Тогда

$$C = \frac{\cos i}{2} (1 + 3/2 \cos i) - 2F; \quad (19)$$

$$2F = \frac{(1-A) R(\tau_0, i) \cos i}{4 + (3-x_1)(1-a)\tau_0}; \quad (20)$$

$$R(\tau_0, i) = 1 + 3/2 \cos i + (1 - 3/2 \cos i) e^{-\tau_0 \sec i}. \quad (21)$$

Здесь i — зенитный угол солнца, a — альbedo подстилающей поверхности, $x(\gamma)$ — индикатриса рассеяния, γ — угол рассеяния, θ — угол визирования, φ — азимут.

Индикатриса рассеяния представлена двумя членами разложения по полиномам Лежандра $x(\gamma) = 1 + x_1 \cos \gamma$, где угол рассеяния определяется следующей формулой:

$$\cos \gamma = -\cos \theta \cos i + \sin \theta \sin i \cos \varphi. \quad (22)$$

Используя формулы (11), (12), (16), (17) и вводя обозначение

$$D = \frac{I(\lambda) \pi}{I_0(\lambda) \cos i}, \quad (23)$$

К. С. Шифрин и И. Н. Минин получили выражение для яркости восходящего потока рассеянной радиации:

$$\begin{aligned} D(\tau, \theta, \varphi, i, \lambda) = & (C - 3F \cos \theta) [1 - e^{-(\tau_0 - \tau) \sec \theta}] - \\ & - (3 - x_1) F [\tau - \tau_0 e^{-(\tau_0 - \tau)}] + [x_1 \cos \theta \cos i - 3 \cos^2 i + \\ & + x(\gamma)] \frac{\sec \theta}{4} e^{\tau \sec \theta} \frac{e^{-\tau(\sec \theta + \sec i)} - e^{-\tau_0(\sec \theta + \sec i)}}{\sec \theta + \sec i}. \end{aligned} \quad (24)$$

Если известна яркость, то поток в верхнюю полусферу рассчитывается по формуле

$$R = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{\lambda} I_0(\lambda) \cos i D(\tau, \theta, \varphi, i, \lambda) \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi d\lambda. \quad (25)$$

Сравним два способа вычисления потоков по формуле (25): с учетом зависимости яркости дымки от азимута [2] и без учета. В первом случае вводится средняя по φ яркость дымки путем вычисления интеграла от яркости по следующей формуле:

$$\bar{D}_{\varphi}(\tau, \theta, i, \lambda) = 2 \left[\int_0^{90} D(\tau, \theta, \varphi, i, \lambda) d\varphi + \int_{90}^{180} D(\tau, \theta, \varphi, i, \lambda) d\varphi \right], \quad (26)$$

или

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\varphi}(\tau, \theta, i, \lambda) = & \frac{\pi}{2} [D(\tau, \theta, 0, i) + 2D(\tau, \theta, 90, i, \lambda) + \\ & + D(\tau, \theta, 180, i, \lambda)]. \end{aligned} \quad (27)$$

При вычислении \bar{D}_{φ} используются выражения (23), (24).

Формулы для приближенного определения величины потока, следуя работам [1, 2], получим из (25)

$$\begin{aligned} R = & \frac{\cos i}{\pi} \int_{\lambda} I_0 d\lambda \left[\int_0^{30} \bar{D}_{\varphi}(\tau, \theta, \lambda, i) \cos \theta \sin \theta d\theta + \right. \\ & + \int_{30}^{50} \bar{D}_{\varphi}(\tau, \theta, \lambda, i) \cos \theta \sin \theta d\theta + \int_{50}^{70} \bar{D}_{\varphi}(\tau, \theta, \lambda, i) \cos \theta \sin \theta d\theta + \\ & \left. + \int_{70}^{85} \bar{D}_{\varphi}(\tau, \theta, \lambda, i) \cos \theta \sin \theta d\theta \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Выполняя интегрирование по θ в (29), получаем выражение для определения интегрального потока

$$R = \frac{\cos i}{\pi} \sum_{i=0}^n I_0(\lambda_n) \Delta \lambda_n [0,125 \bar{D}_\varphi(15, \lambda_n) + 0,169 \bar{D}_\varphi(40, \lambda_n) + 0,147 \bar{D}_\varphi(60, \lambda_n) + 0,52 \bar{D}_i(77,5, \lambda_n)], \quad (29)$$

где n — номер спектрального интервала.

Т а б л и ц а 1

z км	θ°	λ мкм	$\bar{D}(\varphi)$	$2\pi D(\bar{x})$	$D(\varphi)$	$2\pi D(\bar{x})$	
1,2	40	0,35	0,00550	0,00540	0,08848	0,08718	
		0,54	0,00430	0,00416	0,06338	0,06136	
		0,69	0,00359	0,00342	0,05101	0,04917	
	60	0,35	0,00914	0,00898	0,1260	0,1242	
		0,52	0,00675	0,00650	0,0902	0,0873	
		0,69	0,00551	0,00525	0,0728	0,07003	
	80	0,35	0,02778	0,02736	0,2378	0,2345	
		0,54	0,01954	0,01883	0,1954	0,1887	
		0,69	0,01574	0,01499	0,1652	0,1587	
	5	40	0,35	0,11825	0,11509	0,1629	0,1597
			0,54	0,07478	0,07170	0,1027	0,0988
			0,69	0,05775	0,05482	0,0786	0,0756
60		0,35	0,16060	0,15637	0,2130	0,2088	
		0,54	0,10553	0,1018	0,1405	0,1355	
		0,69	0,08244	0,07818	0,1094	0,10519	
80		0,35	0,2461	0,2393	0,30828	0,3013	
		0,54	0,2062	0,1968	0,2637	0,2537	
		0,69	0,1749	0,1656	0,2242	0,2149	
10		40	0,35	0,1499	0,1454	0,0884	0,0871
			0,54	0,0830	0,0796	0,0633	0,0613
			0,69	0,0614	0,0582	0,0510	0,0491
	60	0,35	0,1953	0,1894	0,1260	0,1242	
		0,54	0,1159	0,1111	0,0902	0,0873	
		0,69	0,0872	0,0827	0,0728	0,0701	
	80	0,35	0,02379	0,2651	0,2378	0,2345	
		0,54	0,1770	0,2088	0,1954	0,1887	
		0,69	0,1445	0,1724	0,1652	0,1587	

Расчет потока по формуле (29) при вычислении \bar{D}_φ с учетом зависимости индикатрисы от азимута достаточно сложен. Поэтому был рассмотрен второй вариант, в котором вместо \bar{D}_φ использовалось \bar{D} , рассчитанное при средней индикатрисе:

$$\bar{x}(\gamma) = \frac{x(\gamma)_{\varphi=0} + 2x(\gamma)_{\varphi=90} + x(\gamma)_{\varphi=180}}{4}. \quad (30)$$

Для того чтобы оценить, какие погрешности вносит такое упрощение в значения яркости и потоков, были выполнены расчеты для

Т а б л и ц а 2

z км	$R(\varphi)$	$R(\bar{x})$	$R(\varphi)$	$R(\bar{x})$
	$a=0,2$		$a=0,5$	
0	0	0	0	0
0,78	0,0032	0,0032	0,0048	0,0047
1,24	0,0296	0,0297	0,0414	0,0418
2,68	0,0412	0,0424	0,0584	0,0567
5,07	0,0486	0,0519	0,0675	0,0654
7,95	0,0531	0,0585	0,0728	0,0705
10,0	0,0553	0,0619	0,0753	0,0730
14,74	0,0589	0,0672	0,0793	0,0767

различных альbedo, длин волн и углов визирования. Из табл. 1 следует, что влияние внесенного упрощения на интенсивность потока составляет несколько процентов.

Расчеты интегрального потока были выполнены по формуле (29) также в двух вариантах. Эти результаты представлены в табл. 2 для области спектра 0,29—0,7 мкм. Из таблицы видно, что при малых значениях альbedo ($a=0,2$) расхождения составляют 10%, при средних значениях альbedo расхождения меньше 5%. Таким образом, с ошибкой примерно в 10% учет зависимости от азимута может быть выполнен путем введения среднего значения индикатрисы рассеяния, вычисляемой по формуле (30).

Для того чтобы оценить влияние оптического состояния атмосферы на потоки уходящего коротковолнового излучения, были рассчитаны потоки при двух различных значениях $\tau_0: 0,3$ и $0,5$.

Результаты расчетов представлены на рис. 1 и 2 при различных альbedo подстилающей поверхности и зенитных расстояниях солнца. Из рисунков видно, что различия в потоках довольно значительны. Отношение $R_{\tau_0=0,5}/R_{\tau_0=0,3}$ достигает 100%. Из этого следует, что информация об оптическом состоянии атмосферы весьма важна для расчета потоков рассеянной радиации в моделях общей циркуляции атмосферы.

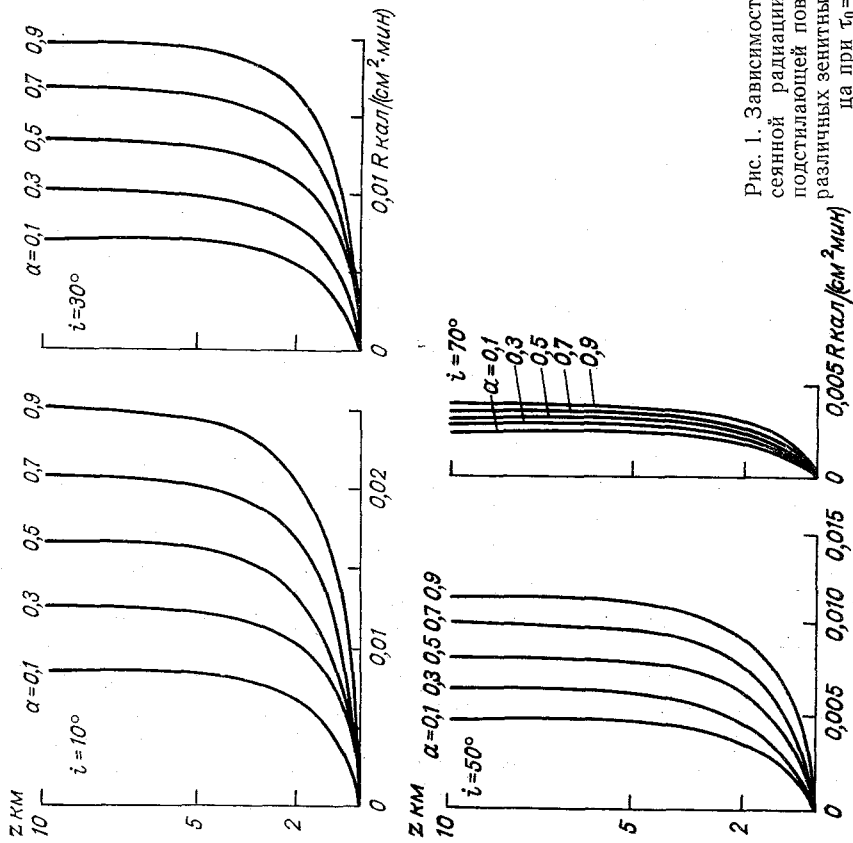


Рис. 1. Зависимость потока рассеянной радиации от альbedo подстилающей поверхности при различных зенитных углах солнца при $\tau_0 = 0,3$.

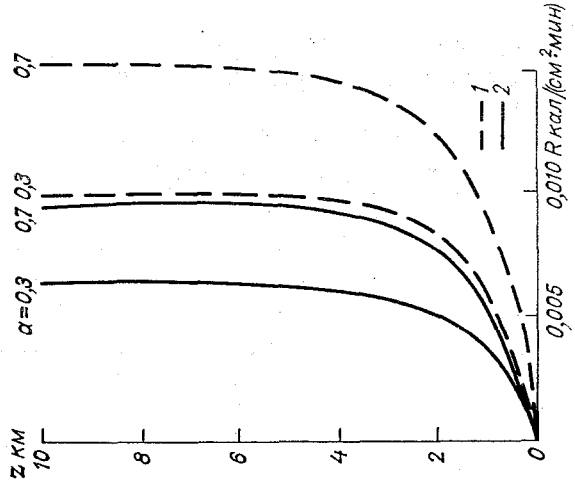


Рис. 2. Зависимость потока рассеянной радиации от оптической толщины атмосферы при разных альbedo подстилающей поверхности при $i = 50^\circ$.
1) $\tau_0 = 0,3$; 2) $\tau_0 = 0,5$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шифрин К. С., Пятовская Н. П. Поле коротковолновой радиации над типичными подстилающими поверхностями. — «Тр. ГГО», 1964, вып. 166, с. 3—23.
2. Пятовская Н. П. Спектральная плотность потока восходящей коротковолновой радиации над различными поверхностями. — «Тр. ГГО», 1972, вып. 275, с. 119—180.
3. Дмитриева-Арраго Л. Р., Самойлова Л. В. Упрощенная схема расчета потоков коротковолновой радиации для применения в задаче общей циркуляции атмосферы. — «Тр. ГГО», 1972, вып. 276, с. 206—214.
4. Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет. М., «Наука», 1972. 335 с.

СОДЕРЖАНИЕ

К. В. Пятыгина, М. И. Юдин, Э. А. Коморина, В. Б. Полехин. Параметризация фазовых притоков тепла и влаги, вызванных флуктуациями температуры	3
Л. Н. Магазенков. О построении конечно-разностных схем с исполь- зованием фильтров	17
В. П. Мелешко, Д. А. Шейнин. Ошибки аппроксимации при вычислении барического градиента в σ -системе координат	28
И. Л. Кароль, А. А. Киселев. Численная модель глобального переноса фреонов в атмосфере и оценки их влияния на стратосферный озон	44
И. Л. Кароль, А. А. Киселев. Модельные расчеты сезонного изменения содержания соединений азота в стратосфере умеренных широт	56
Л. Р. Дмитриева - Арраго, Л. В. Самойлова. Оценка точности при- ближенного метода расчета потока суммарной радиации в атмосфере	66
Л. Р. Дмитриева - Арраго, Т. Н. Горбунова. Зависимость восхо- дящего потока рассеянного коротковолнового излучения от оптического состояния атмосферы	76

Труды ГГО, вып. 394

МОДЕЛИРОВАНИЕ АТМОСФЕРНОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ

Редактор *Л. В. Царькова*

Технический редактор *Н. Ф. Грачева*

Корректор *Т. В. Алексеева*

ИБ № 657

Сдано в набор 15/III 1977 г. Подписано к печати 28/VII 1977 г.
М-25172. Формат 60×90^{1/4}. Бум. тип. № 1. Печ. л. 5,5.
Уч.-изд. л. 5,57. Тираж 570 экз. Индекс МЛ-229. Заказ 364.
Цена 44 коп.

Гидрометеиздат. 199053. Ленинград, 2-я линия, д. 23.

Сортавальская книжная типография Управления по делам
издательств, полиграфии и книжной торговли Совета Мини-
стров Карельской АССР. Сортавала, Карельская, 42.

Параметризация фазовых притоков тепла и влаги, вызванных флуктуациями температуры. Пятыхина К. В., Юдин М. И., Коморина Э. А., Полежакин В. Б. Труды ГГО, 1977, вып. 394, с. 3—16.

В работе излагается способ параметризации фазовых притоков тепла и влаги, вызванных флуктуациями температуры. Как и в предыдущих работах [1—4], флуктуации температуры представляют собой случайные величины. Все рассчитываемые далее величины связаны с флуктуациями температуры гидродинамическими (и частично полуэмпирическими) соотношениями. Качество параметризации контролируется результатами прогноза температуры, ветра и балла облачности. Выполнен численный эксперимент.

Табл. 5. Библ. 23.

О построении конечно-разностных схем с использованием фильтров. Магазенков Л. Н. Труды ГГО, 1977, вып. 394, с. 17—27.

Анализируются ошибки, возникающие при аппроксимации нелинейных членов в уравнениях динамики атмосферы. Предлагается схема четвертого порядка точности, в которой ослаблен рост амплитуд коротких волн за счет ошибок аппроксимации. Схема построена с использованием фильтров и поэтому может быть эффективно реализована в программе для ЭВМ.

Илл. 4. Библ. 8.

Ошибки аппроксимации при вычислении барического градиента в σ -системе координат. Мелешко В. П., Шейнин Д. А. Труды ГГО, 1977, вып. 394, с. 28—43.

Рассматриваются источники ошибок в разностных аппроксимациях барического градиента в σ -системе координат. Для четырех аналитически заданных профилей температуры выполнены оценки ошибок аппроксимации в случае с горами и без гор при различном горизонтальном и вертикальном разрешениях модели. Проводится сравнительный анализ четырех разностных схем вычисления барического градиента, широко используемых в моделях общей циркуляции атмосферы.

Табл. 6. Илл. 2. Библ. 7.